ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ

ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 2011
ISBN: 978-960-337-097-0

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», προείδε ενωρίτατα και σχημάτισε τη βαθιά πεποίθηση ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο του έθνους αποτελεί η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας σε συνδυασμό προς την ηθική τους αγωγή.

Την πεποίθησή του αυτή την μετέτρεψε σε γενναία πράξη ευεργεσίας, όταν κληροδότησε σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, τον Φεβρουάριο του 1956 συνεστήθη το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου την διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Από τη στιγμή εκείνη άρχισαν πραγματοποιούμενοι οι σκοποί που οραματίσθηκε ο Ευγένιος Ευγενίδης και συγχρόνως η εκπλήρωση μιας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου. Το έργο του Ιδρύματος συνέχισε από το 1981 μέχρι το 2000 ο Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης· έκτοτε συνεχίζει αυτό ο κ. Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Κατά την κλιμάκωση των σκοπών του, το Ίδρυμα προέταξε την έκδοση τεχνικών βιβλίων τόσο για λόγους θεωρητικούς όσο και πρακτικούς. Διεπιστώθη πράγματι ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητών με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν ορθά θεμέλια στην παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό.

Ειδικότερα, όσον αφορά στα εκπαιδευτικά βιβλία των σπουδαστών των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα ανέλαβε τότε την έκδοσή τους σε πλήρη και στενή συνεργασία με τη Διεύθυνση Ναυτικής Εκπαιδεύσεως του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, υπό την εποπτεία του οποίου υπάγονται οι Σχολές αυτές. Η ανάθεση στο Ίδρυμα έγινε με την υπ' αριθ. 61228/5031, της 9ης Αυγούστου 1966, απόφαση του ΥΕΝ, οπότε και συνεκροτήθη και η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων.

Αποτέλεσμα της συνεργασίας αυτής ήταν η έκδοση της Σειράς Βιβλιοθήκη του Ναυτικού, όπου εξεδόθησαν: α) Για τους μαθητές των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού 30 τόμοι βιβλίων (1967 – 1979). β) Για τις ΑΔΣΕΝ (Ανώτερες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού) 54 τόμοι (1979 – 2001).

Κύριος σκοπός των εκδόσεων αυτών, των οποίων το περιεχόμενο είναι σύμφωνο με τα εκάστοτε ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα του ΥΕΝ, ήταν η παροχή προς τους σπουδαστές των Ναυτικών Σχολών ΑΔΣΕΝ και Ναυτικών Λυκείων των αναγκαίων τότε εκπαιδευτικών κειμένων, τα οποία αντιστοιχούν προς τα μαθήματα που διδάσκονται στις Σχολές αυτές.

Επίσης ελήφθη ιδιαίτερη πρόνοια, ώστε τα βιβλία αυτά να είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία του κλάδου τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι επέρχεται μεταβολή στη στάθμη του περιεχομένου τους.

Με την υπ. αρ. Μ 2111. 1/2/99/28-05-1999 (ΦΕΚ 1168Β/14-6-99) υπουργική από-φαση, όπως τροποποιήθηκε με την Κ.Υ.Α. των υπουργών Οικονομίας και Οικονομικών και Εμπορικής Ναυτιλίας αρ. Μ 3611.2/05/05/16-12-2005 (ΦΕΚ 1942 Β/30-12-2005 και ΦΕΚ 169 Β/13-02-2006), το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή και έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων των Ναυτικών Ακαδημιών· ήδη το ΥΠ.ΟΙ.Α.Ν. προεκήρυξε την συγγραφή 27 βιβλίων προς κάλυψη των αναγκών των σπουδαστών βάσει των ισχυόντων αναλυτικών προγραμμάτων.

Οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος καταβάλλουν κάθε προσπάθεια, ώστε *τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και τις δυνατότητες των σπουδαστών. Γι' αυτό έχουν προσεγμένη γλωσσική διατύπωση των κειμένων τους και η διαπραγμάτευση των θεμάτων είναι ανάλογη προς τη στάθμη της εκπαιδεύσεως, για την οποία προορίζονται.*

Με την προσφορά στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού των εκδόσεών του, το Ίδρυμα συμβάλλει στην πραγματοποίηση του σκοπού του ιδρυτή του Ευγενίου Ευγενίδου.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΓΑΛΙΑΤΣΑΤΟΥ
Φυσικού

ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ
Φυσικού

ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ
Φυσικού

ΑΘΗΝΑ
2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται στους σπουδαστές των Ακαδημιών του Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.), είναι διδακτικό εγχειρίδιο και περιέχει τις βασικές έννοιες της Αντοχής Υλικών και παρουσιάζει αναλυτικά τις καταπονήσεις του εφελκυσμού, της θλίψεως, της διατμήσεως, της κάμψεως και της στρέψεως, καθώς και την εκδήλωση λυγισμού. Επίσης, παρουσιάζει την έννοια των σύνθετων καταπονήσεων. Η παρουσίαση περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, τις συνθήκες εμφανίσεως κάθε καταπονήσεως, τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την καταπόνηση, τις αντίστοιχες παραμορφώσεις, τις κατηγορίες προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε σε κάθε καταπόνηση και βασικές εφαρμογές της. Στο βιβλίο περιέχονται επίσης σχετικά παραδείγματα και ασκήσεις.

Κατά τη συγγραφή ακολουθήσαμε το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας του μαθήματος «ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ» που απευθύνεται στην Ειδικότητα των Μηχανικών Ε.Ν. των Α.Ε.Ν., όπως αυτό ορίζεται με την υπ' αριθμ. Μ 3615.1/01/07 Υπουργική Απόφαση «Ωρολόγια και Αναλυτικά Προγράμματα ΑΕΝ/Π–Μ» (Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, ΦΕΚ 1224/17-7-2007, Τεύχος Β).

Πιστεύομε ότι η ανάπτυξη και διάταξη της ύλης των διαφόρων κεφαλαίων είναι τέτοια, ώστε το βιβλίο να είναι χρήσιμο στους σπουδαστές και κατά την εργασία τους επί του πλοίου. Νομίζομε επίσης ότι το βιβλίο θα είναι χρήσιμο και σε όσους ασχολούνται με την Αντοχή των Υλικών.

Εκφράζομε τις θερμές ευχαριστίες μας προς την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την τιμή που μας έκανε να μας αναθέσει τη συγγραφή του παρόντος βιβλίου.

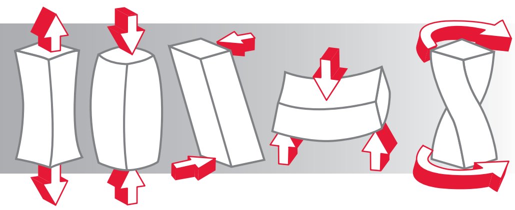
Επίσης, ευχαριστούμε θερμά τον ειδικό επιστημονικό σύμβουλο του Ιδρύματος Ευγενίδου κ. Γ. Ιωαννίδη, Καθηγητή ΕΜΠ, για τις ιδιαίτερα χρήσιμες υποδείξεις και παρατηρήσεις του.

Τέλος, ευχαριστούμε ιδιαίτερα το προσωπικό του Τμήματος Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την άψογη συνεργασία, τον επαγγελματισμό που επέδειξε στην επιμέλεια της έκδοσης του παρόντος, καθώς και για την άοκνη προσπάθειά του για την αρτιότερη έκδοση του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικές έννοιες



1.1 Σκοπός και αντικείμενο της Αντοχής Υλικών.

Πολλοί από μας, έχοντας δει τους κάβους των δεμένων πλοίων, μπορεί να έχομε αναρωτηθεί πώς αυτοί έχουν σχεδιαστεί, ώστε να αντέχουν και να μην σπάνε. Από την εμπειρία μας, οι κάβοι μάς θυμίζουν τα συρματόσχοινα. Ξέρομε ότι εάν τραβήξομε τη μία άκρη ενός συρματόσχοινου, του οποίου η άλλη άκρη είναι γερά στερεωμένη, τότε δημιουργείται στο σημείο στερεώσεως μία άλλη δύναμη, η οποία τραβάει το συρματόσχοινο αντίθετα. Σύμφωνα με το αξίωμα της δράσεως-αντιδράσεως της Φυσικής, η δύναμη που δημιουργείται στο σημείο στερεώσεως είναι η αντίδραση της δυνάμεως που ασκούμε στο άλλο άκρο και έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά μ' αυτήν. Η δύναμη που ασκούμε και η αντίδρασή της ισορροπούν μέσω του συρματόσχοινου.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ύλη του συρματόσχοινου αποτελείται από μόρια[1]. Μεταξύ των μορίων ασκούνται ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες τα συγκρατούν. Όταν τραβάμε το συρματόσχοινο από τη μία άκρη, η δύναμη που ασκούμε προσπαθεί να απομακρύνει τα μόρια μεταξύ τους. Μεταξύ των μορίων ασκούνται πρόσθετες ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες προσπαθούν να τα επαναφέρουν στην αρχική τους θέση. Όταν σταματήσομε να τραβάμε το συρματόσχοινο, η αντίδραση, καθώς επίσης και οι πρόσθετες ελκτικές δυνάμεις, μηδενίζονται.

Στο εργαστήριο, με τη χρήση ειδικών μηχανών έλξεως, διαπιστώνομε ότι η άσκηση δυνάμεως στο άκρο του συρματόσχοινου επιφέρει αύξηση του μήκους του. Αν σταματήσει να ασκείται η δύναμη, το συρματόσχοινο επανέρχεται στο αρχικό του μήκος. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται στην εσωτερική έλξη μεταξύ των μορίων του συρματόσχοινου που αυξομειώνεται ανάλογα με τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν σ' αυτό.

Εάν συνεχίσομε τα πειράματα έλξεως του συρματόσχοινου παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα όριο στην ασκούμενη δύναμη, πέρα από το οποίο παραμένει μια μόνιμη αύξηση του μήκους, η οποία καλείται ***μόνιμη παραμόρφωση***. Αν συνεχίσομε να αυξάνομε και άλλο την ασκούμενη δύναμη, παρατηρούμε ότι το συρματόσχοινο σπάει.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν, μεταξύ άλλων, αντικείμενα του μαθήματος της Αντοχής Υλικών. Η μελέτη της Αντοχής των Υλικών είναι απολύτως απαραίτητη για το σχεδιασμό και την υλοποίηση όλων των κατασκευαστικών έργων και βασίζεται σε κάποιες παραδοχές, όπως είναι, η ομοιογένεια των σωμάτων, το ευθύγραμμο σχήμα, η σχέση μεταξύ των διαστάσεών τους κ.ο.κ..

Το πρώτο βήμα για τη δημιουργία μιας κατασκευής είναι η επιλογή των υλικών που θα χρησιμοποιηθούν γι' αυτήν. Η επιλογή των υλικών είναι τεράστιας σημασίας, τόσο για την ασφάλεια και τη λειτουργικότητά της, όσο και για το κόστος της. Όλες οι κατασκευές βρίσκονται υπό την επίδραση φορτίων, τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εντάσεων σ' αυτές, που είναι ποικίλες και συνήθως σύνθετες. Για την επιλογή των υλικών μιας κατασκευής λαμβάνονται υπόψη όλες οι δυνάμεις που αυτά θα δεχθούν και οι οποίες πηγάζουν από:

α) Το ίδιο το βάρος της κατασκευής.
β) Το ωφέλιμο φορτίο της κατασκευής.
γ) Τη λειτουργία των μηχανών.

---

[1] Για τις ανάγκες της εισαγωγής περιοριζόμαστε στην έννοια των μορίων, παρά το γεγονός ότι στα μέταλλα έχομε κρυσταλλική δομή.

δ) Τη λειτουργία γερανογεφυρών.

ε) Την πίεση κάποιου αερίου ή υγρού που χρησιμοποιείται στην κατασκευή.

στ) Τη μεταβολή της θερμοκρασίας.

ζ) Τα καιρικά φαινόμενα (π.χ. τη δύναμη του αέρα, το βάρος του χιονιού, τη δύναμη προσκρούσεως από το χαλάζι).

η) Το φρενάρισμα.

Τα υλικά που σήμερα χρησιμοποιούν οι κατασκευαστές έργων είναι καλά μελετημένα, με αποτέλεσμα να είναι γνωστές οι ιδιότητές τους και ο τρόπος συμπεριφοράς τους όταν φορτιστούν. Οι ιδιότητες των υλικών διακρίνονται σε φυσικές, μηχανικές και τεχνολογικές.

Οι ***φυσικές*** ιδιότητες των υλικών μεταξύ άλλων είναι η πυκνότητα, το σημείο τήξεως, ο συντελεστής διαστολής, η θερμική αγωγιμότητα, η ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Οι ***μηχανικές*** ιδιότητές τους, μεταξύ άλλων, είναι η αντοχή σε θραύση, η σκληρότητα, η ελαστικότητα.

Οι ***τεχνολογικές*** ιδιότητες των υλικών περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, την ολκιμότητα, την ευκολία χυτεύσεως, την ευκολία για συγκεκριμένη κατεργασία (π.χ. δεκτικότητα εκτελέσεως συγκολλήσεων).

Μετά την επιλογή των υλικών ακολουθεί ο προσδιορισμός της μορφής των διατομών κάθε στοιχείου της κατασκευής, καθώς και του προσανατολισμού τοποθετήσεως των διατομών σε σχέση με το φορτίο που θα αντιμετωπίσουν. Ο προσανατολισμός της τοποθετήσεως των διατομών των στοιχείων της κατασκευής είναι πολύ σημαντικός για την κατασκευή, γιατί ο βαθμός αντοχής κάθε στοιχείου εξαρτάται σε πολλές περιπτώσεις κυρίως από την τοποθέτηση της διατομής σε σχέση με το εφαρμοζόμενο φορτίο.

Μετά τον προσδιορισμό της μορφής και του προσανατολισμού των διατομών κάθε στοιχείου της κατασκευής, ακολουθεί ο προσδιορισμός των διαστάσεών της με στόχο αφενός να δημιουργηθεί μια ασφαλής κατασκευή και αφετέρου να γίνει πλήρης εκμετάλλευση των υλικών που θα χρησιμοποιηθούν.

Μία κατασκευή από συγκεκριμένο υλικό θεωρείται ασφαλής όταν τα μέλη της έχουν τέτοιες διαστάσεις, ώστε να αντέχει στα εφαρμοζόμενα σ' αυτήν φορτία. Δηλαδή, μία κατασκευή είναι ασφαλής όταν δεν κινδυνεύει ούτε να θραυσθεί, ούτε να παραμορφωθεί σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μην μπορεί να ανταποκριθεί στο σκοπό της, ούτε να φθαρεί πρόωρα. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι αναφερόμαστε στις διαστάσεις των μελών της κατασκευής (δοκοί, υποστηλώματα κ.λπ.), οι οποίες συνδέονται με τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις και όχι στις διαστάσεις της κατασκευής, όπως είναι το μήκος, το πλάτος και το ύψος ενός κτηρίου.

Η πλήρης εκμετάλλευση του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή σημαίνει τη δημιουργία της με τις μικρότερες δυνατές διαστάσεις που την καθιστούν ασφαλή. Η χρησιμοποίηση μεγαλυτέρων διαστάσεων, πέρα από το γεγονός ότι αυξάνει το κόστος, δεν είναι σκόπιμη γιατί αυξάνει επί πλέον τον όγκο και το βάρος της κατασκευής. Η σχετική εμπειρική αντίληψη ότι είναι προτιμότερες οι μεγαλύτερες διαστάσεις δεν ευσταθεί.

Το κριτήριο του κόστους είναι πολύ σημαντικό για την επιλογή του υλικού της κατασκευής. Πολλές φορές επιλέγεται ένα υλικό, επειδή είναι αρκετά οικονομικότερο από το βέλτιστο από πλευράς αντοχής.

Η επιλογή αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη χρησιμοποίηση μεγαλυτέρων διατομών, γεγονός που οδηγεί σε κατασκευή με μεγαλύτερο βάρος. Εάν είχε επιλεγεί το βέλτιστο από πλευράς αντοχής υλικό, η κατασκευή θα είχε μικρότερες διατομές και άρα μικρότερο βάρος. Όμως, το κόστος κατασκευής στην περίπτωση αυτή θα ήταν κατά πολύ μεγαλύτερο. Έτσι, επιλέγεται η λύση με το λιγότερο ανθεκτικό υλικό και τις μεγαλύτερες διαστάσεις, που οδηγεί σε μικρότερο κόστος κατασκευής.

Εκτός από το πρόβλημα επιλογής υλικών για την κατασκευή έργου με συγκεκριμένες προδιαγραφές αντοχής φορτίου, στην πράξη απαιτείται και η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, δηλαδή η απάντηση στο ερώτημα ποιο είναι το φορτίο που αντέχει η συγκεκριμένη κατασκευή. Ο όρος ***συγκεκριμένη κατασκευή*** αναφέρεται είτε σε πραγματική κατασκευή είτε σε σχεδιαζόμενη, της οποίας εξετάζεται η καταλληλότητα. Η περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται όταν η επίλυση του αρχικού προβλήματος, δηλαδή του προσδιορισμού της διαστάσεως κατασκευής που αντέχει σε συγκεκριμένο φορτίο, είναι αδύνατη. Έτσι, επιλέγονται κατ' αρχήν κάποιες διαστάσεις για την κατασκευή και στη συνέχεια ελέγχεται εάν η επιλογή αυτή ικανοποιεί τις απαιτήσεις που έχουν τεθεί γι' αυτήν.

Τα ζητήματα που περιγράψαμε παραπάνω αποτελούν το αντικείμενο του παρόντος βιβλίου και αναπτύσσονται διεξοδικά στα επί μέρους κεφάλαιά του. Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζεται η έννοια των παραμορφώσεων και των φορτίων, ορίζεται το μέγεθος της τάσεως και περιγράφονται τα συστήματα και οι μονάδες μετρήσεως των μεγεθών που χρησιμοποιούμε στο παρόν βιβλίο. Επίσης, παρουσιάζονται ο νόμος ελαστικότητας του Hooke και τα διαγράμματα εφελκυσμού και θλίψεως και περιγράφονται η εγκάρσια συστολή και διαστολή που συνοδεύουν τον εφελκυσμό και τη θλίψη, αντίστοιχα. Ακόμη, παρουσιάζεται η διάκριση των υλικών σε όλκιμα και ψαθυρά και ορίζεται η σκληρότητά τους. Περαιτέρω, αναλύεται η επίδραση της θερμοκρασίας και του χρόνου στην αντοχή των υλικών, περιγράφονται τα φαινόμενα της κοπώσεως των υλικών και της συγκεντρώσεως τάσεων και εξηγείται η έννοια της επιφανειακής θλίψεως. Τέλος, ορίζονται οι έννοιες της εντατικής καταστάσεως και της αστοχίας υλικών και παρουσιάζονται τα είδη των καταπονήσεων.

Ο πίνακας 1.1.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα και τις μονάδες μετρήσεως των μεγεθών*** που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 1.1.1.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Ανηγμένη παραμόρφωση (επιμήκυνση/επιβράδυνση)	ε	Αδιάστατο
Αριθμός κύκλων φορτίσεως	N	Αδιάστατο
Αύξηση/Ελάττωση διαστάσεως διατομής σώματος	Δb	cm, mm
Διάσταση διατομής	b	cm, mm
Διατμητική (πλάγια) τάση	τ	N/cm^2, N/mm^2
Δύναμη	F	N
Εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση	ε_g	Αδιάστατο
Επιμήκυνση/επιβράχυνση	Δl	cm, mm
Επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση	$p_{\varepsilon\pi}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση	$\sigma_{\varepsilon\pi}$ ή $\tau_{\varepsilon\pi}$	N/cm^2, N/mm^2
Εμβαδόν διατομής	A	cm^2, mm^2
Επιφανειακή πίεση	p	N/cm^2, N/mm^2
Ημιάξονες ελλείψεως	α, β	cm, mm
Λόγος Poisson	μ	Αδιάστατο
Μέγιστη τάση	σ_{max}	N/cm^2, N/mm^2

(συνεχίζεται)

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Μεταβολή θερμοκρασίας	$\Delta\theta$	^{o}C
Μέτρο ελαστικότητας	E	N/cm^2, N/mm^2
Μήκος	l	cm, mm
Ορθή τάση	σ	N/cm^2, N/mm^2
Όριο αναλογίας	σ_P	N/cm^2, N/mm^2
Όριο αντοχής εν θερμώ	$\sigma_{\alpha,\theta,t}$, $\sigma_{\theta\rho,\theta,t}$	N/cm^2, N/mm^2
Όριο διαρροής	σ_S	N/cm^2, N/mm^2
Όριο ελαστικότητας	σ_E	N/cm^2, N/mm^2
Όριο θραύσεως	σ_B	N/cm^2, N/mm^2
Παραμόρφωση θραύσεως	ε_Γ	Αδιάστατο
Σκληρότητα κατά Brinel	HB	N/cm^2, N/mm^2
Σκληρότητα κατά Rockwell	HRC ή HRB	μm
Σκληρότητα κατά Vickers	HV	N/cm^2, N/mm^2
Σταθερά Poisson	m	Αδιάστατο
Συντελεστής ασφάλειας	ν	Αδιάστατο
Συντελεστής ασφαλείας έναντι διαρροής	ν_S	Αδιάστατο
Συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας	ν_E	Αδιάστατο
Συντελεστής ασφάλειας έναντι θραύσεως	ν_B	Αδιάστατο
Συντελεστής θερμικής διαστολής	α	$1/^{o}C$
Συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων	k	Αδιάστατο
Τάση θραύσεως	σ_Γ, $\sigma_{\Theta\rho}$	N/cm^2, N/mm^2
Τεχνικό όριο διαρροής	$\sigma_{0,2}$	N/cm^2, N/mm^2
Τεχνικό όριο ελαστικότητας	$\sigma_{0,01}$	N/cm^2, N/mm^2

1.1.1 Η έννοια των παραμορφώσεων.

Όταν σ' ένα σώμα εφαρμόζεται μία δύναμη, τότε αλλάζει η μορφή του και λέμε ότι παραμορφώνεται. Αλλαγή της μορφής του σώματος σημαίνει να αυξηθεί ή να ελαττωθεί το μήκος του, να στραφεί, να καμπυλωθεί κ.ο.κ..

Η αλλαγή της μορφής ενός σώματος όταν σε αυτό εφαρμόζεται δύναμη ονομάζεται ***παραμόρφωση.***

Παραμόρφωση παθαίνουν όλα τα στερεά σώματα, όσο μικρή και αν είναι η δύναμη που εφαρμόζεται σ' αυτά. Στερεό σώμα που να μην παραμορφώνεται δεν υπάρχει. Σε κάποια υλικά η παραμόρφωση δεν διακρίνεται διά γυμνού οφθαλμού και δεν μπορεί να μετρηθεί με τα συνηθισμένα μέσα. Ωστόσο, η αδυναμία παρατηρήσεως της παραμορφώσεως δεν σημαίνει ότι αυτή δεν υπάρχει· υπάρχει και μάλιστα μπορούμε να τη μετρήσομε με χρήση ειδικών για το σκοπό αυτό οργάνων ακριβείας. Για παράδειγμα, η παραμόρφωση σωμάτων κατασκευασμένων από λάστιχο είναι εμφανής διά γυμνού οφθαλμού. Αντίθετα, η παραμόρφωση σωμάτων από χάλυβα ή από άλλο σκληρό υλικό διακρίνεται μόνο με χρήση ειδικών οργάνων ακριβείας.

Ο βαθμός παραμορφώσεως ενός σώματος εξαρτάται από τους εξής παράγοντες:

α) ***Το είδος του υλικού του σώματος***.Όλα τα υλικά δεν παραμορφώνονται το ίδιο. Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, παραμορφώνονται διαφορετικά ανάλογα με το υλικό απ' το οποίο είναι κατασκευασμένα (π.χ. μεγαλύτερη παραμόρφωση παρουσιάζει μία ράβδος αλουμινίου από μία ράβδο χάλυβα).

β) ***Τις διαστάσεις του σώματος.*** Δύο σώματα από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, παραμορφώνονται διαφορετικά ανάλογα με τις διαστάσεις τους (π.χ. μία πιο χονδρή ράβδος αλουμινίου παραμορφώνεται λιγότερο από μία πιο λεπτή).

γ) ***Το μέγεθος των εφαρμοζομένων δυνάμεων (φορτίων).*** Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο διαφορετικές δυνάμεις, παραμορφώνονται διαφορετικά.

δ) ***Τη μορφή της διατομής.*** Δύο σώματα από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά έχουν διαφορετική μορφή διατομής, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.

ε) ***Τον προσανατολισμό της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση του φορτίου.*** Δύο σώματα με την ίδια διατομή, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις, αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό ως προς τη διατομή, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση ανάλογα με τον τρόπο τοποθετήσεως της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση της δυνάμεως. Για παράδειγμα, εάν έχομε δυνάμεις που εφαρμόζονται κάθετα στη διατομή μιας ράβδου, τότε προκαλείται μεταβολή του μήκους της ράβδου, ενώ αν εφαρμόζονται παράλληλα στη διατομή της ράβδου, τότε οι δυνάμεις αυτές τείνουν να κόψουν τη ράβδο.

στ) ***Τον τρόπο στηρίξεως***. Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά στερεώνονται διαφορετικά, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.

ζ) ***Το μέγεθος της θερμοκρασιακής μεταβολής***. Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά βρίσκονται σε διαφορετική κατάσταση θερμοκρασίας, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.

1.1.2 Η έννοια των φορτίων.

Οι δυνάμεις που προκαλούν τις παραμορφώσεις στις κατασκευές αντιπροσωπεύουν τα φορτία που ενεργούν σ' αυτές. Τα φορτία διακρίνονται με βάση κάποια κριτήρια σε κατηγορίες. Συγκεκριμένα, για τα σημαντικότερα από τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται, έχομε τους ακόλουθους διαχωρισμούς:

α) Με κριτήριο το αν τα φορτία ασκούνται κατά μόνιμο τρόπο ή όχι, διακρίνονται σε ***σταθερά*** και ***μεταβλητά***. Τα σταθερά ασκούνται κατά μόνιμο τρόπο. Αντίθετα τα μεταβλητά χαρακτηρίζονται από τη μεταβολή του μεγέθους τους με το χρόνο.

β) Με κριτήριο το χρόνο εντός του οποίου τα φορτία ενεργούν, διακρίνονται σε ***στατικά***, ***δυναμικά*** και ***κρουστικά***. Τα στατικά φορτία εξασκούνται ήπια (όχι απότομα), δηλαδή σταδιακά από τη μηδενική μέχρι τη τελική τιμή τους μέσα σε ικανό χρονικό διάστημα. Τα δυναμικά ασκούνται μέσα σε βραχύ χρονικό διάστημα, ενώ τα κρουστικά ενεργούν σε πάρα πολύ μικρό χρόνο.

γ) Με κριτήριο τη μεταβολή της θεσεώς τους, τα φορτία διακρίνονται σε ***ακίνητα*** και ***κινητά***. Ακίνητα ονομάζονται τα φορτία των οποίων η θέση παραμένει σταθερή με το χρόνο. Αντίθετα, κινητά ονομάζονται τα φορτία των οποίων η θέση μεταβάλλεται με το χρόνο.

δ) Με κριτήριο την έκταση στην οποία ενεργούν, τα φορτία διακρίνονται σε ***συγκεντρωμένα*** και ***κατανεμημένα***. Τα συγκεντρωμένα φορτία ενεργούν σε ένα πολύ μικρό τμήμα της κατασκευής, τόσο μικρό που θεωρείται σημείο. Τα κατανεμημένα φορτία ενεργούν σ' ένα χώρο, σε μία επιφάνεια ή σε μια γραμμή. Η κατανομή των φορτίων μπορεί να είναι ομοιόμορφη ή όχι.

1.1.3 Η έννοια των τάσεων.

Όπως ήδη αναφέραμε, κάθε σώμα αποτελείται από μόρια, τα οποία έλκονται μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να μένουν ενωμένα απαρτίζοντας ένα σώμα. Αν σ' ένα σώμα ενεργήσει μία εξωτερική δύναμη, τότε τα μόρια του σώματος αναπτύσσουν εσωτερικές δυνάμεις (αναλυτικότερα βλ. παράγρ. 1.12).

Τάση[1] ονομάζεται η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσουν τα μόρια ενός σώματος ανά μονάδα επιφάνειάς του, όταν στο σώμα ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις.

Θεωρούμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις εξεταζόμενες επιφάνειες. Από τις διάφορες επιφάνειες που μπορεί να μελετήσει κάποιος σ' ένα σώμα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην αντοχή υλικών παρουσιάζουν οι διατομές του.

Με κριτήριο τη διεύθυνση των δυνάμεων ως προς τις διατομές στις οποίες ενεργούν, οι τάσεις διακρίνονται σε ***ορθές*** και ***διατμητικές*** ή ***πλάγιες*** ή ***εγκάρσιες.***

1.1.4 Ορθές τάσεις.

Όταν η εσωτερική δύναμη είναι κάθετη στη διατομή ενός σώματος, τότε οι τάσεις που αναπτύσσονται ονομάζονται ***ορθές*** και συμβολίζονται με *σ*.

Αν ονομάσομε *F* την εσωτερική δύναμη που αναπτύσσεται κάθετα στη διατομή ενός σώματος, [σχ. 1.1α(α)] και Α το εμβαδόν της διατομής, τότε η ορθή τάση δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1.1}$$

Η εσωτερική δύναμη F που αναπτύσσεται κάθετα στη διατομή ενός σώματος ονομάζεται ***ορθή δύναμη*** (αναλυτικότερα βλ. παράγρ 3.3).

1.1.5 Διατμητικές ή πλάγιες ή εγκάρσιες τάσεις.

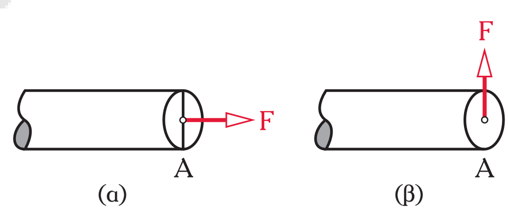
Όταν η εσωτερική δύναμη δρα μέσα στο επίπεδο της διατομής ενός σώματος, τότε οι τάσεις που αναπτύσσονται ονομάζονται ***διατμητικές*** ή ***πλάγιες ή εγκάρσιες*** και συμβολίζονται με τ.

Αν ονομάσομε F την εσωτερική δύναμη που δρα μέσα στο επίπεδο της διατομής ενός σώματος, [σχ. 1.1α(β)] και Α το εμβαδόν της διατομής, τότε η διατμητική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{1.2}$$

Η σχέση (1.2) ισχύει μόνο για ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών τάσεων επί της διατομής. Ωστόσο, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, υπάρχουν και περιπτώσεις που δεν έχομε ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών τάσεων.

Η εσωτερική δύναμη F που που δρα μέσα στο επίπεδο της διατομής ενός σώματος ονομάζεται ***τέμνουσα δύναμη*** (αναλυτικότερα βλ. παράγρ. 3.3).



Σχ. 1.1α.
Ανάπτυξη (α) ορθών τάσεων (β) διατμητικών τάσεων.

1.1.6 Μονάδες μετρήσεως της τάσεως.

Η τάση έχει μονάδες μετρήσεως το 1 N/cm^2, το 1 N/mm^2, το 1 kp/cm^2 και το 1 kp/mm^2. Η μονάδα kp/cm^2 ονομάζεται και ***τεχνική ατμό-***

[1] Πρέπει να επισημανθεί ότι η τάση δεν είναι διανυσματικό μέγεθος και κατά συνέπεια δεν ισχύει γι' αυτήν ο διανυσματικός λογισμός.

σφαιρα. Άλλες μονάδες μετρήσεως της τάσεως που χρησιμοποιούνται είναι η 1 lb/ft^2, η 1lb/m^2 και η 1 lb/in^2. Η μονάδα lb/in^2 αναφέρεται και ως psi.

Παράδειγμα 1.

Η εσωτερική δύναμη που δρα κάθετα σε ορθογώνια διατομή διαστάσεων 40 cm · 20 cm έχει μέγεθος F = 10.000 *N*.

α) Στη διατομή αναπτύσσεται ορθή ή διατμητική τάση;

β) Να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
40 cm · 20 cm	σ = ;
F = 10.000 *N*	

Λύση.

α) Επειδή η δύναμη είναι κάθετη στη διατομή, η τάση που αναπτύσσεται είναι ορθή.

β) Το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου είναι: A = 40 cm · 20 cm = 800 cm^2.

Η ορθή τάση που αναπτύσσεται υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{10.000\ N}{800\ cm^2} = 12{,}5\frac{N}{cm^2}$$

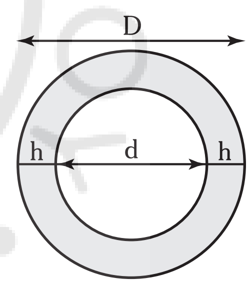
Παράδειγμα 2.

Στη διατομή του σχήματος 1.1β που έχει εξωτερική διάμετρο D = 20 cm και πάχος διατομής h = 4 cm αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη F = 5.000 N μέσα στο επίπεδο της διατομής.

α) Τι είδους τάση αναπτύσσεται στη διατομή;

β) Να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
D = 20 cm	τ =;
h = 4 cm	
F = 5.000 N	



Σχ. 1.1β.

Λύση.

α) Επειδή η δύναμη δρα μέσα στο επίπεδο της διατομής, η τάση που αναπτύσσεται είναι διατμητική.

β) Η εσωτερική διάμετρος d της κυκλικής διατομής είναι: d = D – 2 h = 20 – 2 · 4 = 12 cm.

Έτσι, το εμβαδόν της επιφάνειας είναι:

$$A = \pi\frac{D^2}{4} - \pi\frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(20^2 cm^2 - 12^2 cm^2) = 200{,}96 cm^2.$$

Η διατμητική τάση που αναπτύσσεται υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{5.000\ N}{200{,}96\ cm^2} = 24{,}88\frac{N}{cm^2}$$

1.1.7 Συστήματα και μονάδες μετρήσεως.

Συστήματα μετρήσεως που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση μεγεθών είναι τα ακόλουθα:

α) Το Διεθνές Σύστημα (SI)[1].
β) Το Σύστημα C.G.S[2].
γ) Το Τεχνικό Σύστημα (Τ.Σ.) και
δ) το Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα.

Οι ***μονάδες μετρήσεως*** του ***μήκους***, του ***εμβαδού*** και της ***δυνάμεως***, παρουσιάζονται στον πίνακα 1.1.2.

Πίνακας 1.1.2.

Μέγεθος	***Διεθνές Σύστημα***	***C.G.S.***	***Τεχνικό Σύστημα***	***Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα***
Μήκος	1 m	1 cm	1 m	1 ft
Εμβαδόν	1 m^2	1 cm^2	1 m^2	1 ft^2
Δύναμη	1 N (Νιούτον)	1 dyn	1kp (Κιλοπόντ)	1lb (λίμπρα)

Για τις μετατροπές ισχύουν οι σχέσεις:
1 kp = 9,81 N 1 lb = 0,453 kp 1μm = 10^{-6} m
1 m = 3,28 ft 1 cm = 0,39 in

Επίσης, η δύναμη μετρείται σε τόνους, αγγλικούς και μετρικούς. Ισχύει:
α) 1 τόνος (ton) = 1.000 kp
β) 1 αγγλικός τόνος = 2.240 lb και
γ) 1 μετρικός τόνος = 2.200 lb.

Στις επόμενες παραγράφους του βιβλίου παραθέτομε τις μονάδες μετρήσεως στα ανωτέρω συστήματα κάθε νέου μεγέθους που παρουσιάζομε.

Παράδειγμα 3.

α) Δίνεται δύναμη ίση με 3 αγγλικούς τόνους. Να μετατραπεί η δύναμη αυτή σε kp και σε N.

β) Δίνεται απόσταση 15 ft. Να μετατραπεί σε m και cm.

Λύση.

α) Επειδή 1 αγγλικός τόνος = 2.240 lb και 1lb = 0,453 kp, έχομε:

3 αγγλικοί τόνοι = 3 · 2240 lb = 6.720 lb = 6.720 · 0,453 kp = 3.044,2 kp = 3.044,2 · 9,81N = 29.863,2 N.

β) Επειδή 1 m = 3,28 ft ή 1 ft = 0,305 m και 1 m = 100 cm, έχομε:

$$15 \text{ ft} = 15 \cdot 0{,}305 \text{ m} = 4{,}57 \text{ m} = 4{,}57 \cdot 100 \text{ cm} = 457 \text{ cm}.$$

Ασκήσεις.

1. *Η εσωτερική δύναμη που δρα κάθετα σε τετραγωνική διατομή πλευράς 30 cm έχει μέγεθος F = 90.000 N.*
α) Στη διατομή αναπτύσσεται ορθή ή διατμητική τάση;
β) Να υπολογιστεί η τάση αυτή.

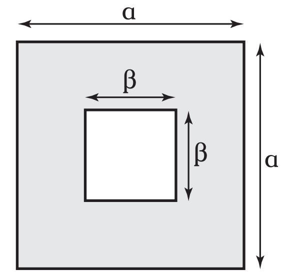
---

[1] Το σύστημα SI (***S***ystème ***I***nternational d' Unités) επικρατεί σήμερα παγκοσμίως. Με ελάχιστες εξαιρέσεις σε κάποιες χώρες είναι το μόνο σύστημα μετρήσεων που χρησιμοποιείται στην πράξη.

[2] Το όνομα του συστήματος προκύπτει από τα αρχικά των μονάδων ***C***entimeter, ***G***ram και ***S***econd, οι οποίες αποτελούν τις βασικές μονάδες μετρήσεως του συστήματος για τα μεγέθη του μήκους, της μάζας και του χρόνου αντίστοιχα.

2. *Στη διατομή του σχήματος 1.1γ αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη F = 40.000 N παράλληλα στη διατομή. Δίνεται α = 12 cm και β = 4 cm.*
α) Τι είδους τάση αναπτύσσεται στη διατομή;
β) Να υπολογιστεί η τάση αυτή.

3. *α) Δίνεται δύναμη ίση με 3 μετρικούς τόνους. Να μετατραπεί η δύναμη αυτή σε kp και σε N.*
β) Δίνεται απόσταση 12 in. Να μετατραπεί σε m και cm.



Σχ. 1.1γ.

1.2 Νόμος ελαστικότητας του Hooke.

Το 1678 ο Robert Hooke εκτέλεσε σειρά πειραμάτων σε σπειροειδή ελατήρια, προκειμένου να κατανοήσει τους παράγοντες, από τους οποίους εξαρτάται η επιμήκυνσή τους όταν σε αυτά ενεργεί εξωτερική δύναμη. Σε ανάλογα συμπεράσματα με τα πειράματα του Hooke καταλήγομε εάν εκτελέσομε πειράματα σε διάφορες ράβδους που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το μήκος, τη διατομή και το είδος του υλικού, όταν σ' αυτές ενεργεί δύναμη (φορτίο) εφελκυσμού (βλ. παράγρ. 1.3). Τα συμπεράσματα αυτά είναι τα εξής:

α) Η επιμήκυνση Δl, που προκαλείται σε μια εφελκυόμενη ράβδο, είναι ανάλογη με το φορτίο F, που ενεργεί στη ράβδο. Δηλαδή, εάν διπλασιαστεί το φορτίο F, τότε διπλασιάζεται η επιμήκυνση Δl, εάν τριπλασιαστεί το φορτίο F, τότε τριπλασιάζεται η επιμήκυνση Δl κ.ο.κ.. Η αναλογία φορτίου και επιμηκύνσεως ισχύει μέχρι ένα ορισμένο όριο (βλ. παράγρ. 1.3), από το οποίο και μετά παύει να υπάρχει.

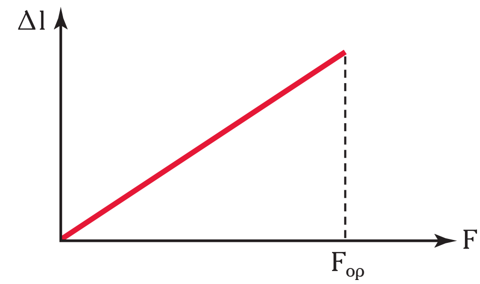
β) Η επιμήκυνση Δl που προκαλείται σε μια εφελκυόμενη ράβδο είναι ανάλογη με το μήκος l της ράβδου. Δηλαδή, εάν φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο μήκους l επιμήκυνση Δl, το ίδιο φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο, (από το ίδιο υλικό και με την ίδια διατομή με την πρώτη) μήκους 2l επιμήκυνση 2Δl, σε μία ράβδο, (από το ίδιο υλικό και με την ίδια διατομή με την πρώτη) μήκους 3l επιμήκυνση 3Δl κ.ο.κ.

γ) Η επιμήκυνση Δl που προκαλείται σε μια εφελκυόμενη ράβδο είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη διατομή Α της ράβδου. Δηλαδή, εάν φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο διατομής Α επιμήκυνση Δl, το ίδιο φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο (από το ίδιο υλικό και με το ίδιο μήκος με την πρώτη) διατομής 2Α επιμήκυνση Δl/2, σε μία ράβδο (από το ίδιο υλικό και με το ίδιο μήκος με την πρώτη) διατομής 3Α επιμήκυνση Δl/3 κ.ο.κ.

δ) Η επιμήκυνση Δl που προκαλείται από το ίδιο φορτίο F σε δύο ράβδους με το ίδιο μήκος και την ίδια διατομή είναι διαφορετική και εξαρτάται από τη φύση του υλικού κάθε ράβδου. Η σχέση υλικού και επιμηκύνσεως εκφράζεται με μια χαρακτηριστική για κάθε υλικό σταθερά που ονομάζεται ***μέτρο ελαστικότητας***, συμβολίζεται με το γράμμα Ε και μετρείται σε N/cm^2 ή kp/cm^2. Ο πίνακας 1.2 παρουσιάζει ***τιμές*** του ***μέτρου ελαστικότητας*** για διάφορα υλικά.

Πίνακας 1.2.

Είδος υλικού	***Μέτρο ελαστικότητας E (kp/cm^2)***	***Είδος υλικού***	***Μέτρο ελαστικότητας E (kp/cm^2)***
Χάλυβας	$2,1 \cdot 10^6$	Δερμάτινος ιμάντας	1.250
Χυτοσίδηρος	$1 \cdot 10^6$	Ελαστικό	έως 80
Χαλκός	$1,2 \cdot 10^6$	Νάιλον	$2,8 \cdot 10^4$
Αλουμίνιο	$7,2 \cdot 10^5$	Γρανίτης	$1,3 \cdot 10^5$
Ορείχαλκος	$8 \cdot 10^5$	Ξύλο (παράλληλα στις ίνες)	10^5
Μαγνήσιο	$4,4 \cdot 10^5$	Ξύλο (κάθετα στις ίνες)	10^4



Σχ. 1.2.
Γραφική παράσταση του νόμου του Hooke για συγκεκριμένη ράβδο.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα των πειραμάτων οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου νόμου:

Η επιμήκυνση Δl μιας εφελκυόμενης ράβδου είναι ανάλογη με το φορτίο εφελκυσμού F, ανάλογη με το μήκος της ράβδου l, αντιστρόφως ανάλογη της διατομής A και αντιστρόφως ανάλογη του μέτρου ελαστικότητας E του υλικού της ράβδου.

Ο νόμος αυτός ονομάζεται ***νόμος του Hooke*** ή ***νόμος ελαστικότητας*** και εκφράζεται με τη σχέση:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \qquad (1.3)$$

Το σχήμα 1.2 παρουσιάζει τη γραφική παράσταση του νόμου του Hooke για συγκεκριμένη ράβδο. Από το σχήμα βλέπομε ότι η σχέση μεταξύ της επιμηκύνσεως της ράβδου Δl και του εφαρμοζόμενου φορτίου F, είναι γραμμική, δηλαδή η επιμήκυνση της ράβδου είναι ανάλογη του φορτίου.

Πρέπει να σημειώσομε ότι ο νόμος του Hooke ισχύει μέχρι κάποιο όριο φορτίου $F_{ορ}$, όπως φαίνεται και από το σχήμα 1.2 και παύει να ισχύει όταν οι δυνάμεις F αρχίζουν να γίνονται σχετικά μεγάλες και συγκεκριμένα μεγαλύτερες από το όριο φορτίου $F_{ορ}$. Επομένως, πριν την εφαρμογή του νόμου ***θα πρέπει να ελέγχομε εάν ο νόμος εφαρμόζεται.*** Τα όρια εφαρμογής του νόμου του Hooke αναπτύσσονται στην παράγραφο 1.3.

1.2.1 Ανηγμένη επιμήκυνση.

Ως ***ανηγμένη*** (ή ***ειδική***) ***επιμήκυνση*** ε ορίζομε την επιμήκυνση που δημιουργείται σε μία μονάδα μήκους μιας εφελκυόμενης ράβδου. Δηλαδή, η ανηγμένη επιμήκυνση ε παρέχεται από το λόγο της επιμηκύνσεως Δl προς το μήκος l της ράβδου:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad (1.4)$$

Η ανηγμένη επιμήκυνση είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Πολλές φορές εκφράζεται ως ποσοστό. Για παράδειγμα ισούται με 2% όταν ράβδος με αρχικό μήκος 100 cm αποκτήσει λόγω της εφελκυστικής δυνάμεως μήκος 102 cm.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ορισμού της ανηγμένης επιμηκύνσεως και τη σχέση ορισμού της τάσεως (1.1), ο νόμος του Hooke λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow \Delta l \cdot A \cdot E = F \cdot l \Leftrightarrow \frac{\Delta l}{l} \cdot E = \frac{F}{A}$$

και τελικά

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad (1.5)$$

Δηλαδή, η ανηγμένη επιμήκυνση σε μία εφελκυόμενη ράβδο είναι ανάλογη με την τάση που ενεργεί σ' αυτήν.

Επίσης, η εξίσωση (1.5) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μέτρο ελαστικότητας εκφράζει τη δύναμη που αναπτύσσεται στη μονάδα επιφάνειας, όταν η ανηγμένη επιμήκυνση ισούται με τη μονάδα.

Γενικότερα, όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια, ο νόμος του Hooke τυγχάνει ευρείας εφαρμογής στα φαινόμενα της Αντοχής Υλικών. Ωστόσο, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την εφαρμογή του, ώστε να εφαρμόζεται εκεί που πραγματικά ισχύει και να μην επεκτείνεται απρόσεκτα η εφαρμογή του στις περιπτώσεις που δεν έχει ισχύ.

Παράδειγμα 4.

Χαλύβδινη ράβδος μήκους $l = 100$ cm και τετραγωνικής διατομής $A = 2 \cdot 2$ cm $= 4$ cm^2 δέχεται φορτίο $F = 4.200$ kp. Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι εντός των ορίων ισχύος του νόμου του Hooke, να υπολογιστεί η επιμήκυνση της ράβδου.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 100$ cm	$\Delta l = ;$
$A = 4$ cm^2	
$F = 4.200$ kp	

Λύση.

Από τον πίνακα 1.2 λαμβάνομε το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kp/cm^2.

Η ζητούμενη επιμήκυνση της ράβδου λαμβάνεται από το νόμο του Hooke:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{4.200 \text{ kp} \cdot 100 \text{ cm}}{4 \text{ cm}^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2} = 0{,}05 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ mm}$$

Παράδειγμα 5.

Ράβδος μήκους $l = 100$ cm δέχεται φορτίο $F = 500$ N και επιμηκύνεται κατά $\Delta l = 0{,}1$ cm. Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι εντός των ορίων ισχύος του νόμου του Hooke, να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου είναι $E = 1{,}4 \cdot 10^6$ N/cm^2.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 100$ cm	$\sigma = ;$
$F = 500$ N	
$\Delta l = 0{,}1$ cm	
$E = 1{,}4 \cdot 10^6$ N/cm^2	

Λύση.

Η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου είναι:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0{,}1\% = 0{,}001$$

Η ζητούμενη τάση που αναπτύσσεται υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2 \cdot 0{,}001 = 1.400 \text{ N/cm}^2.$$

Ασκήσεις.

1. *Χαλύβδινη ράβδος με μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}1 \cdot 10^7$ N/cm^2 έχει μήκος 20 cm. Η διατομή της είναι τετραγωνική με πλευρά 2 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη 84.000 N. Να υπολογιστεί η επιμήκυνση και η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου.*

2. *Χάλκινη ράβδος με μέτρο ελαστικότητας $E = 1{,}2 \cdot 10^7$ N/cm^2 έχει μήκος 40 cm. Η διατομή της είναι τετραγωνική με πλευρά 3 cm. Με πόση δύναμη πρέπει να εφελκυσθεί για να αποκτήσει ανηγμένη επιμήκυνση $\varepsilon = 0{,}1\%$;*

3. *Ράβδος από χάλυβα κυκλικής διατομής διαμέτρου 12 mm και μήκους 50 cm εφελκύεται από* *δύναμη 12.000 N. Να υπολογιστεί η επιμήκυνση της ράβδου εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της είναι ίσο με $2,1 \cdot 10^7$ N/cm^2.*

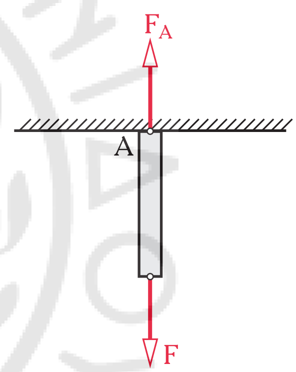
1.3 Εφελκυσμός και πειράματα εφελκυσμού.

Ας θεωρήσομε το στερεό σώμα του σχήματος 1.3α, πάνω στον άξονα του οποίου ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, οι οποίες τείνουν να αυξήσουν το μήκος του. Το σώμα του σχήματος 1.3α λέμε ότι υφίσταται εφελκυσμό ή αλλιώς ότι εφελκύεται. Το σώμα είναι στερεωμένο στο ένα άκρο του και δύναμη F ασκείται στο άλλο άκρο του. Η δεύτερη δύναμη F_A είναι η ***αντίδραση***. Για τους υπολογισμούς μας λαμβάνομε μόνο τη μία από τις δύο δυνάμεις.

Η μελέτη του εφελκυσμού γίνεται με το πείραμα του εφελκυσμού, με το οποίο προσδιορίζομε την αντοχή ενός υλικού όταν καταπονείται σε εφελκυσμό. Το πείραμα του εφελκυσμού λαμβάνει χώρα σε ειδική μηχανή που καλείται ***μηχανή εφελκυσμού*** (σχ. 1.3β) και θεωρείται το πλέον ακριβές από τα πειράματα που γίνονται για τον προσδιορισμό της αντοχής των υλικών.

Στο πείραμα του εφελκυσμού χρησιμοποιούνται ράβδοι προκαθορισμένης μορφής και μεγέθους που καλούνται ***δοκίμια***, τα οποία συγκρατούνται στη μηχανή εφελκυσμού με δύο σιαγόνες. Συνήθως, τα δοκίμια έχουν κυλινδρική μορφή και το μήκος τους είναι πενταπλάσιο της διαμέτρου τους.

Με τη βοήθεια υδραυλικής πιέσεως τα δοκίμια καταπονούνται σε εφελκυσμό υφίστανται δηλαδή αύξηση του μήκους τους, παραμόρφωση που καλείται ***επιμήκυνση*** και ***ελάττωση*** της διατομής τους.



Σχ. 1.3α.
Στερεό σώμα που εφελκύεται.

Η μηχανή εφελκυσμού διαθέτει όργανα για να μετρήσει κατά τη διάρκεια των πειραμάτων εφελκυσμού την εφελκυστική δύναμη και την επιμήκυνση που προκαλεί η δύναμη αυτή. Η εφελκυστική δύναμη που εφαρμόζεται στα δοκίμια μεταβάλλεται σταδιακά από μηδέν μέχρι την τιμή στην οποία θραύεται το δοκίμιο. Ταυτόχρονα, καταγράφεται διάγραμμα αναπτυσσομένων τάσεων ή δυνάμεων και επιμηκύνσεων ή ανηγμένων επιμηκύνσεων, το οποίο ονομάζεται ***διάγραμμα εφελκυσμού***. Σημειώνεται ότι έχει επικρατήσει η δημιουργία του διαγράμματος τάσεων-ανηγμένων επιμηκύνσεων, γιατί τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτό ισχύουν για κάθε δοκίμιο, από το ίδιο υλικό και όχι για το συγκεκριμένο δοκίμιο για το οποίο έγινε το πείραμα.

Σχ. 1.3β.
Μηχανή εφελκυσμού.

Το διάγραμμα εφελκυσμού απεικονίζει τα αποτελέσματα του πειράματος εφελκυσμού και δίνει σημαντικές πληροφορίες για την αντοχή του υλικού, για το οποίο έγινε το πείραμα. Από το διάγραμμα εφελκυσμού μπορούμε να λάβομε τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού που είναι απαραίτητα για τον υπολογισμό της αντοχής των κατασκευών.

Η διαδικασία του πειράματος εφελκυσμού και ο τρόπος επεξεργασίας των μετρήσεων περιγράφονται με κάθε λεπτομέρεια στο Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50145 και στα αντίστοιχα πρότυπα του Διεθνούς Οργανισμού Τυποποιήσεων (ISO).

Για να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων των πειραμάτων εφελκυσμού που πραγματοποιούνται σε διαφορετικά εργαστήρια, το Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50125 καθορίζει επακριβώς τις συνθήκες του πειράματος. Οι «συνθήκες πειράματος» περιλαμβάνουν κυρίως τον αυστηρό καθορισμό της μορφής, του μεγέθους διατομής, του μήκους και της ποιότητας επιφάνειας των δοκιμίων, καθώς και τη θερμοκρασία στην οποία λαμβάνει χώρα το πείραμα εφελκυσμού.

Οι τάσεις στον εφελκυσμό παρέχονται από τη σχέση (1.1) και οι ειδικές επιμηκύνσεις από τη σχέση (1.4). Έτσι, η τάση στον εφελκυσμό ισούται με το πηλίκον της δυνάμεως εφελκυσμού F προς το εμβαδόν της διατομής A του δοκιμίου:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1.6}$$

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται αναλυτικά οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στον εφελκυσμό.

1.3.1 Πείραμα εφελκυσμού του χάλυβα.

Αν τοποθετήσομε στη μηχανή εφελκυσμού δοκίμιο από χάλυβα St 37 (ποιότητα χάλυβα της Γερμανικής Βιομηχανίας) μήκους l, με σκοπό να μελετήσομε τα μηχανικά χαρακτηριστικά, και το εφελκύσομε με μια δύναμη F, παρατηρούμε ότι το μήκος του αυξάνεται κατά Δl. Αν αφαιρέσομε τη δύναμη F, η επιμήκυνση εξαφανίζεται και το δοκίμιο αποκτά το αρχικό του μήκος. Αυξάνοντας τη φόρτιση του δοκιμίου σε 2F, παρατηρούμε ότι το μήκος του αυξάνεται κατά 2Δl. Αυξάνοντας τη φόρτιση του δοκιμίου σε 3F, παρατηρούμε ότι το μήκος του αυξάνεται κατά 3Δl. Εάν αφαιρέσομε το φορτίο, η επιμήκυνση εξαφανίζεται και το δοκίμιο αποκτά το αρχικό του μήκος. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σταθερή αναλογία ανάμεσα στο φορτίο και την επιμήκυνση και μάλιστα η επιμήκυνση εξαφανίζεται μετά την αφαίρεση του φορτίου.

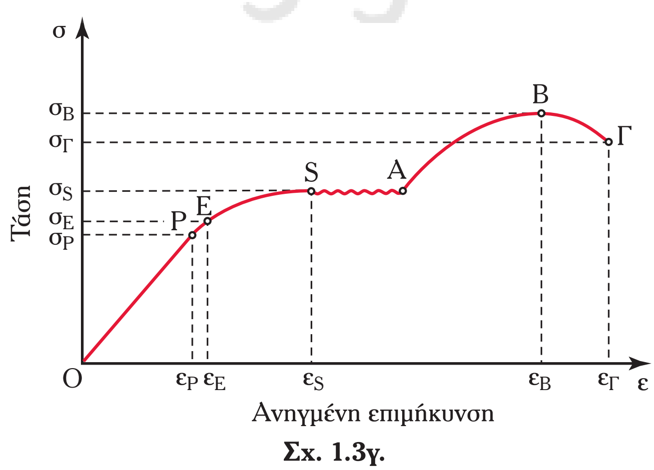
Η κατάσταση αυτή όμως έχει ένα όριο. Αν εξακολουθήσομε να αυξάνομε συνεχώς το φορτίο, έρχεται κάποια στιγμή που η αύξηση της επιμηκύνσεως παύει να είναι ανάλογη του φορτίου και με μικρή αύξηση του φορτίου παρατηρούμε μεγάλη αύξηση της επιμηκύνσεως, χωρίς η αφαίρεση του φορτίου να οδηγεί το δοκίμιο στο αρχικό του μήκος. Το δοκίμιο παρουσιάζει μια μόνιμη επιμήκυνση, δηλαδή παρουσιάζει μια μόνιμη παραμόρφωση.

Αν εξακολουθήσομε να αυξάνομε το φορτίο περαιτέρω, έρχεται κάποια στιγμή που το δοκίμιο σπάει. Το πείραμα εφελκυσμού του χάλυβα St 37 καταγράφεται αναλυτικά στο διάγραμμα εφελκυσμού τάσεων-ανηγμένων επιμηκύνσεων που παρουσιάζεται στο σχήμα 1.3γ.

Στο διάγραμμα εφελκυσμού παρατηρούμε τις ακόλουθες περιοχές:

α) ***Τμήμα ΟΡ ή περιοχή αναλογίας ή αναλογική περιοχή***. Στην περιοχή αυτή ισχύει ο νόμος του Hooke, σύμφωνα με τον οποίο η ανηγμένη επιμήκυνση είναι ανάλογη με την τάση στην οποία οφείλεται. Για το λόγο αυτό το τμήμα αυτό καλείται περιοχή αναλογίας ή αναλογική περιοχή και είναι ευθύγραμμο. Η κλίση του τμήματος καθορίζεται από το μέτρο ελαστικότητας.

Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο P καλείται ***όριο αναλογίας*** σ_P και είναι η τάση, πάνω από



Σχ. 1.3γ.
Διάγραμμα εφελκυσμού του χάλυβα.

την οποία παύει να ισχύει ο νόμος του Hooke. Το όριο αναλογίας για το χάλυβα St 37 είναι 18 kp/mm^2.

β) ***Τμήμα PE***. Στο τμήμα αυτό η ανηγμένη επιμήκυνση παύει να είναι ανάλογη της τάσεως. Το τμήμα PE δεν είναι ευθύγραμμο, αλλά καμπύλο.

Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο E καλείται ***όριο ελαστικότητας*** σ_E και είναι η τάση, μέχρι την οποία οι παραμορφώσεις είναι προσωρινές. Το όριο ελαστικότητας για το χάλυβα St 37 είναι περίπου 19 kp/mm^2, πολύ κοντά στο όριο αναλογίας.

Επειδή το όριο ελαστικότητας είναι δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια, στην πράξη χρησιμοποιείται το ***τεχνικό όριο ελαστικότητας***. Ως τεχνικό όριο ελαστικότητας $\sigma_{0,01}$ ορίζεται από το Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50144 η τάση η οποία, εάν εφαρμοσθεί στο δοκίμιο, μετά την αποφόρτισή του παρουσιάζει μόνιμη ανηγμένη επιμήκυνση ίση με 0,01%.

γ) ***Ελαστική περιοχή OE.*** Το τμήμα αυτό καλείται ελαστική περιοχή, γιατί μέχρι και το σημείο E οι παραμορφώσεις είναι προσωρινές και το δοκίμιο επανέρχεται στο αρχικό του μήκος, μόλις η φόρτιση σταματήσει να ενεργεί.

δ) ***Τμήμα ES.*** Στο τμήμα αυτό, η παραμόρφωση γίνεται μόνιμη και αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό από ό,τι πριν. Στο σημείο S το δοκίμιο χάνει τη συνοχή του και αρχίζει να διαρρέει, όπως θα δούμε στη συνέχεια στο τμήμα SA.

Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο S καλείται ***όριο διαρροής*** σ_S. Το όριο διαρροής για το χάλυβα St 37 είναι 24 kp/mm^2.

Επειδή το όριο διαρροής είναι δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια, στην πράξη χρησιμοποιείται το ***τεχνικό όριο διαρροής***. Ως τεχνικό όριο διαρροής $\sigma_{0,2}$ ορίζεται από το Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50144 η τάση η οποία, εάν εφαρμοσθεί στο δοκίμιο, μετά την αποφόρτισή του, παρουσιάζει μόνιμη ανηγμένη επιμήκυνση ίση με 0,2%.

ε) ***Τμήμα SA (τμήμα Ludders)***. Το τμήμα αυτό χαρακτηρίζεται από τη μεγάλη αύξηση της ανηγμένης επιμηκύνσεως του δοκιμίου, χωρίς να αυξηθεί η τάση από το όριο διαρροής. Το υλικό στο τμήμα αυτό παραμορφώνεται χωρίς πρακτικά να αυξάνεται η εξωτερική δύναμη. Λέμε τότε ότι το υλικό διαρρέει. Σημειώνομε ότι υπάρχουν υλικά που δεν έχουν όριο διαρροής και δεν διαρρέουν, όπως είναι ο χαλκός και το αλουμίνιο.

στ) ***Τμήμα ΑΒΓ***. Από το σημείο Α και μετά η καμπύλη χαρακτηρίζεται από μεγάλη αύξηση της επιμηκύνσεως με μικρή αύξηση της τάσεως. Η μεγάλη αύξηση της επιμηκύνσεως συνεχίζεται μέχρι τη θραύση του υλικού. Το τμήμα αυτό καλείται ***καμπύλη κρατύνσεως***, επειδή το υλικό στο τμήμα αυτό ανακτά την αντοχή του και παρουσιάζει αύξηση της αντιστάσεώς του.

Η τάση αποκτά τη μέγιστη τιμή της στο σημείο Β, λίγο πριν από τη θραύση (σημείο Γ). Η μέγιστη τιμή αυτή ονομάζεται ***όριο θραύσεως*** και συμβολίζεται με σ_B ή $\sigma_{\theta\rho}$. Η τάση στο σημείο Γ σ_Γ ονομάζεται τάση θραύσεως και αποτελεί την τάση, στην οποία το υλικό σπάζει. Η ανηγμένη επιμήκυνση ε_Γ που αντιστοιχεί στη θραύση καλείται ***παραμόρφωση θραύσεως***.

Το όριο θραύσεως για το χάλυβα ποιότητας St 37 είναι 37 kp/mm^2 και η ανηγμένη επιμήκυνση ε_Γ είναι ίση προς 24%. Στη γερμανική βιομηχανία οι χάλυβες χαρακτηρίζονται από τα γράμματα St (αρχικά της λέξεως Stahl, δηλαδή χάλυβας) και έναν αριθμό που υποδηλώνει το όριο θραύσεως σε kp/mm^2.

Για παράδειγμα, χάλυβας St 52 σημαίνει χάλυβας με $\sigma_{\theta\rho} = 52$ kp/mm^2. Για την αμερικανική, βρετανική, γαλλική κ.λπ. βιομηχανία υπάρχουν άλλοι συμβολισμοί. Τα τελευταία χρόνια γίνεται προσπάθεια, στο πλαίσιο της Ευρωπαϊκής Ενώσεως, ενοποιήσεως ποιοτήτων και συμβολισμών των χαλύβων.

ζ) ***Πλαστική περιοχή***. Η περιοχή ΕΓ καλείται ***πλαστική περιοχή***, καθώς από το σημείο E και μέχρι τη θραύση οι παραμορφώσεις παραμένουν όταν σταματήσει να ενεργεί η φόρτιση.

Παράδειγμα 6.

Η επιμήκυνση που προκαλείται σε μία ράβδο μήκους $l = 110$ cm κατά τη θραύση είναι $\Delta l = 1,1$ cm. Να υπολογιστεί η ανηγμένη επιμήκυνση και να εκφραστεί σε ποσοστό.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 110 cm	ε = ;
Δl = 1,1 cm	

Λύση.

Η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου είναι: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1{,}1 \text{ cm}}{110 \text{ cm}} = 0{,}01 = 1\%$

Παράδειγμα 7.

Δοκίμιο κυλινδρικού σχήματος διαμέτρου d = 1,2 cm και αρχικού μήκους l = 7 cm δοκιμάστηκε σε εφελκυσμό. Το πείραμα του εφελκυσμού έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

α) Φορτίο ορίου αναλογίας F_P = 1.415 N.
β) Φορτίο θραύσεως F_B = 4.210 N.
γ) Επιμήκυνση στο όριο αναλογίας Δl = 0,035 cm.
δ) Ανηγμένη επιμήκυνση στο όριο θραύσεως ε_B=5%

Εάν το υλικό δεν διαρρέει, να σχεδιαστεί το διάγραμμα εφελκυσμού, αφού πρώτα υπολογιστούν:

α) Η τάση στο όριο αναλογίας.
β) Η τάση στο όριο θραύσεως.
γ) Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του δοκιμίου.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
d = 1,2 cm	σ_P = ;
l = 7 cm	σ_B = ;
F_P = 1.415 N	E = ;
F_B = 4.210 N	
Δl = 0,035 cm	
ε_B = 5%	

Λύση.

Η διατομή του δοκιμίου είναι: $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}2^2 \text{cm}^2}{4} = 1{,}13 \text{ cm}^2$.

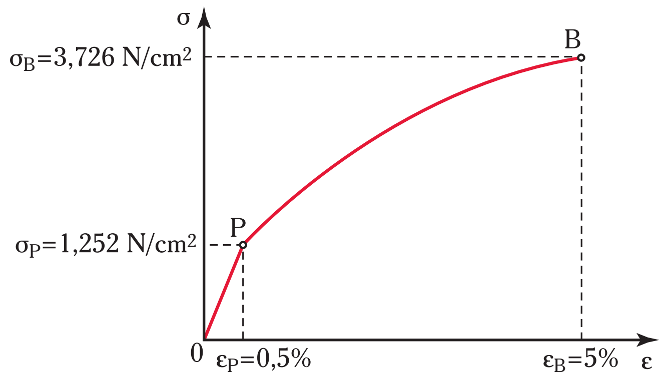
α) Η τάση στο όριο αναλογίας είναι: $\sigma_P = \frac{F_P}{A} = \frac{1.415 \text{ N}}{1{,}13 \text{ cm}^2} = 1.252 \text{ N/cm}^2$.

Η ανηγμένη επιμήκυνση στο όριο αναλογίας είναι: $\varepsilon_P = \frac{0{,}035 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 0{,}5\%$.

β) Η τάση στο όριο θραύσεως είναι: $\sigma_B = \frac{F_B}{A} = \frac{4.210\text{N}}{1{,}13\text{cm}^2} = 3.726 \text{ N/cm}^2$.

γ) Το μέτρο ελαστικότητας υπολογίζεται από την εφαρμογή του νόμου του Hooke για το όριο αναλογίας, λύνοντας ως προς Ε:

$$\Delta l = \frac{F_p \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow E = \frac{F_p \cdot l}{A \cdot \Delta l} = \frac{1.415 \text{ N} \cdot 7 \text{ cm}}{1{,}13 \text{ cm}^2 \cdot 0{,}035 \text{ cm}} = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$$



Σχ. 1.3δ.

Το διάγραμμα εφελκυσμού παρουσιάζεται στο σχήμα 1.3δ.

Ασκήσεις.

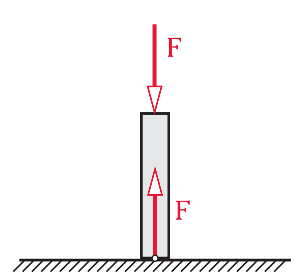
1. *Να υπολογιστεί η ανηγμένη επιμήκυνση, εκφρασμένη σε ποσοστό μιας ράβδου που εφελκύεται, όταν κατά τη θραύση ήταν $\Delta l = 0{,}012$ cm και το αρχικό της μήκος ήταν $l = 150$ cm.*

2. *Κυλινδρικό δοκίμιο έχει περιφέρεια διατομής 3,14 cm και ύψος 6 cm. Το πείραμα του εφελκυσμού στο δοκίμιο έδωσε τα εξής αποτελέσματα:*
α) Φορτίο ορίου αναλογίας: 12.150 N.
β) Φορτίο ορίου θραύσεως: 30.150 N.
γ) Ολική επιμήκυνση στο όριο αναλογίας: 0,042 cm.
δ) Ανηγμένη επιμήκυνση στο όριο θραύσεως: 7%.
Εάν το υλικό δεν διαρρέει, να υπολογιστούν:
α) Η τάση στο όριο αναλογίας.
β) Η τάση στο όριο θραύσεως.
γ) Το μέτρο ελαστικότητας και
δ) να σχεδιαστεί το διάγραμμα εφελκυσμού.

1.4 Θλίψη και πειράματα θλίψεως.

Ας θεωρήσομε το στερεό σώμα του σχήματος 1.4α, πάνω στον άξονα του οποίου, ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, οι οποίες τείνουν να ελαττώσουν το μήκος του. Λέμε τότε ότι το σώμα υφίσταται ***θλίψη*** ή ***θλίβεται***.

Η μελέτη της θλίψεως γίνεται με το πείραμα της θλίψεως, με το οποίο προσδιορίζομε την αντοχή ενός υλικού όταν καταπονείται σε θλίψη. Το πείραμα της θλίψεως λαμβάνει χώρα με τη χρήση δοκιμίων στην ίδια ειδική μηχανή που λαμβάνει χώρα και το πείραμα εφελκυσμού. Η διαφορά με τον εφελκυσμό είναι ότι οι δυνάμεις στη θλίψη δεν επιμηκύνουν το δοκίμιο, αλλά ελαττώνουν το μήκος του (επιβράχυνση). Στη θλίψη (όπως και στον εφελκυσμό) εμφανίζεται τάση που οφείλεται στη μοριακή δύναμη αντιστάσεως ανά μονάδα της διατομής. Η καταπόνηση σε θλίψη φανερώνεται με μία μικρή ελάττωση του μήκους και αύξηση της διατομής, αντίθετα δηλαδή από ό,τι συμβαίνει στον εφελκυσμό.



Σχ. 1.4α.
Στερεό σώμα που θλίβεται.

Κατά αναλογία με τα διαγράμματα εφελκυσμού λαμβάνομε τα *διαγράμματα θλίψεως*. Και στην περίπτωση των διαγραμμάτων θλίψεως έχει επικρατήσει η δημιουργία του διαγράμματος τάσεων

–ανηγμένων επιβραχύνσεων, γιατί τα συμπεράσματα που προκύπτουν απ’ αυτό ισχύουν για κάθε δοκίμιο από το ίδιο υλικό και όχι για το συγκεκριμένο δοκίμιο, για το οποίο έγινε το πείραμα.

Για τους υπολογισμούς στη θλίψη χρησιμοποιούμε τους ίδιους τύπους, όπως και στον εφελκυσμό, με τη διαφορά ότι αφορούν στη θλίψη και όχι στον εφελκυσμό και άρα μιλάμε για επιβράχυνση και όχι για επιμήκυνση, καθώς και για ανηγμένη επιβράχυνση και όχι για ανηγμένη επιμήκυνση.

Έτσι, οι τάσεις στη θλίψη παρέχονται από τη σχέση (1.1), δηλαδή η τάση θλίψεως ισούται με το πηλίκον της δυνάμεως θλίψεως F προς το εμβαδόν της διατομής A του δοκιμίου:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1.7}$$

Επίσης, η ανηγμένη επιβράχυνση στη θλίψη δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{1.8}$$

Η ανηγμένη επιβράχυνση είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Επειδή $\Delta l < 0$, η ανηγμένη επιβράχυνση είναι αρνητική.

Τέλος, στη θλίψη ισχύει ο νόμος του Hooke, όπως και στον εφελκυσμό. Έτσι, η επιβράχυνση στην αναλογική περιοχή δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta l = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E} \tag{1.9}$$

Το αρνητικό πρόσημο της σχέσεως (1.9) δηλώνει ότι έχομε επιβράχυνση ($\Delta l < 0$).

Επίσης, η ανηγμένη επιβράχυνση (κατ’ αντιστοιχία της ανηγμένης επιμηκύνσεως) σε μία θλιβόμενη ράβδο είναι ανάλογη με την τάση που ενεργεί σ’ αυτήν:

$$\varepsilon = -\frac{\sigma}{E} \tag{1.10}$$

Το αρνητικό πρόσημο της σχέσεως (1.10) δηλώνει ότι έχομε επιβράχυνση ($\varepsilon < 0$).

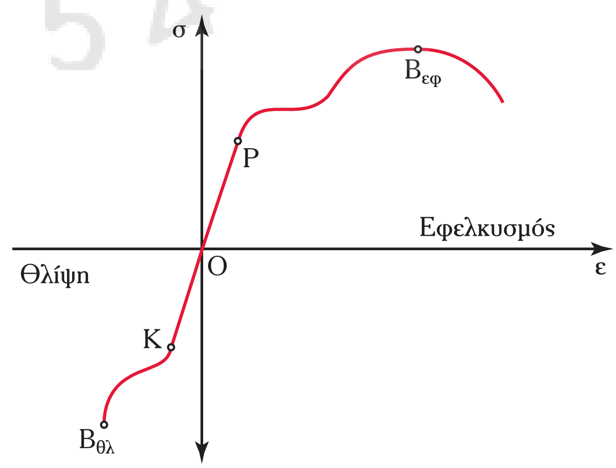
Το μέτρο ελαστικότητας E είναι το ίδιο στη θλίψη και στον εφελκυσμό.

Πρέπει να σημειώσομε ότι ο νόμος του Hooke ισχύει και στην περίπτωση της θλίψεως μέχρι κάποιο όριο. Επομένως, πριν την εφαρμογή του νόμου **θα *πρέπει να ελέγχομε εάν ο νόμος εφαρμόζεται***. Τα όρια εφαρμογής του νόμου του Hooke στη θλίψη αναπτύσσονται στην παράγραφο 1.4.2.

Το Κεφάλαιο 2 περιγράφει αναλυτικά τις τάσεις και τις παραμορφώσεις στη θλίψη.

1.4.1 Πείραμα θλίψεως του χάλυβα.

Το πείραμα θλίψεως του χάλυβα St 37 γίνεται στην ίδια μηχανή που γίνεται και το πείραμα του εφελκυσμού του, με δοκίμια από χάλυβα. Η διαφορά είναι ότι οι δυνάμεις δεν επιμηκύνουν τα δοκίμια, αλλά τα επιβραχύνουν. Τα αποτελέσματα του πειράματος θλίψεως καταγράφονται αναλυτικά στο διάγραμμα θλίψεως τάσεων-ανηγμένων επιβραχύνσεων του σχήματος 1.4β, το οποίο παρουσιάζει συγκριτικά και το διάγραμμα θλίψεως και το διάγραμμα εφελκυσμού.



Σχ. 1.4β.
Διάγραμμα θλίψεως και εφελκυσμού του χάλυβα St 37.

1.4.2 Σύγκριση διαγραμμάτων θλίψεως και εφελκυσμού.

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων θλίψεως και εφελκυσμού του χάλυβα St 37, καταλήγομε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

α) Ο νόμος του Hooke εφαρμόζεται στη θλίψη όπως και στην περίπτωση του εφελκυσμού. Υπάρχει ένα όριο αναλογίας, μέχρι το οποίο οι επιβραχύνσεις του χάλυβα είναι ανάλογες των φορτίων που τις προκαλούν. Η κλίση της παρατηρούμενης περιοχής αναλογίας εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα St 37.

β) Το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα St 37 σε θλίψη είναι το ίδιο με το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα St 37 σε εφελκυσμό, καθώς η κλίση της παρατηρούμενης περιοχής αναλογίας στη θλίψη είναι ίδια με την κλίση της παρατηρούμενης περιοχής αναλογίας στον εφελκυσμό.

γ) Το όριο διαρροής στη θλίψη είναι το ίδιο με το όριο διαρροής στον εφελκυσμό.

δ) Σε αντίθεση με τον εφελκυσμό, μετά το όριο διαρροής του υλικού στη θλίψη δεν ακολουθεί θραύση, αλλά πλαστικοποίηση. Αυτό σημαίνει ότι η ράβδος εξακολουθεί να παραμορφώνεται σαν πλαστικό σώμα.Έτσι το όριο θραύσεως για θλίψη του χάλυβα St 37 ορίζεται συμβατικά ότι είναι η τιμή της τάσεως εκείνη που προκαλεί ανηγμένη επιβράχυνση ίση με –0,3

Σημειώνεται ότι η ισχύς των παραπάνω συμπερασμάτων δεν περιορίζεται μόνο στο χάλυβα St 37. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν γενικότερα από τη σύγκριση διαγραμμάτων θλίψεως και εφελκυσμού.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι το φαινόμενο της πλαστικοποιήσεως δεν συμβαίνει σ' όλες τις περιπτώσεις θλίψεως. Για παράδειγμα, στο πείραμα θλίψεως σε δοκίμια από χυτοσίδηρο παρατηρείται ότι μετά το όριο διαρροής ο χυτοσίδηρος δεν πλαστικοποιείται όπως ο χάλυβας, αλλά θραύεται.

Παράδειγμα 8.

Στήριγμα από ξύλο έχει διατομή ορθογωνίου με πλευρές 5 cm και 10 cm. Το στήριγμα δέχεται θλιπτικό φορτίο 1500 N. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 5 cm	σ = ;
β = 10 cm	
F = 1.500 N	

Λύση.

Η διατομή του στηρίγματος που καταπονείται είναι: $A = 5\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} = 50\ \text{cm}^2$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1.7) υπολογίζομε την τάση θλίψεως:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1.500\ \text{N}}{50\ \text{cm}^2} = 30\ \text{N/cm}^2$$

Ασκήσεις.

1. *Ράβδος μήκους $l = 90$ cm δέχεται θλιπτικό φορτίο $F = 4.000$ N και επιβραχύνεται κατά $\Delta l = 0{,}1$ cm. Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι εντός των ορίων ισχύος του νόμου του Hooke, να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου είναι $E = 1{,}2 \cdot 10^7\ \text{N/cm}^2$.*

2. *Ράβδος έχει κυκλική διατομή διαμέτρου 4 cm. Η ράβδος υποβάλλεται σε θλιπτικό φορτίο 10.000 N. Να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη τάση θλίψεως.*

1.5 Εγκάρσια συστολή και διαστολή.

Όπως προαναφέρθηκε στην παράγραφο 1.3, όταν ένα σώμα εφελκύεται παρουσιάζει αύξηση του μήκους του, αλλά ταυτόχρονα και μια μίκρυνση της διατομής του. Έτσι, στο πείραμα του εφελκυσμού, τα εφελκυόμενα κυλινδρικά δοκίμια παρουσιάζουν αύξηση του μήκους τους, αλλά ταυτόχρονα και μίκρυνση της διαμέτρου τους. Δηλαδή, παράλληλα με τον εφελκυσμό έχομε και μια εγκάρσια παραμόρφωση που είναι η συστολή της διατομής του εφελκυόμενου σώματος.

Αντιστοίχως, όταν ένα σώμα θλίβεται παρουσιάζει μείωση του μήκους του, αλλά ταυτόχρονα και μεγέθυνση της διατομής του. Έτσι, στο πείραμα της θλίψεως, τα θλιβόμενα κυλινδρικά δοκίμια παρουσιάζουν μείωση του μήκους τους, αλλά ταυτόχρονα και μεγέθυνση της διαμέτρου τους. Δηλαδή, παράλληλα με τη θλίψη έχομε και εγκάρσια παραμόρφωση που είναι η διαστολή της διατομής του θλιβόμενου σώματος.

Έστω b η αρχική διάσταση της διατομής πριν την παραμόρφωσή της και b΄ η διάστασή της μετά την παραμόρφωσή της. Ορίζομε ως ***εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση*** ε_g το πηλίκον της μεταβολής της διαστάσεως $\Delta b = b' - b$ της διατομής κατά την παραμόρφωση προς την αρχική διάσταση της διατομής, δηλαδή:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b' - b}{b} \qquad (1.11)$$

Η εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Στην περίπτωση του εφελκυσμού, δεδομένου ότι $b' < b$, η εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση είναι αρνητική, ενώ στην περίπτωση της θλίψεως, δεδομένου ότι $b' > b$, θετική.

Επί πλέον, ορίζομε ως ***συντελεστή εγκάρσιας παραμορφώσεως*** μ το αντίθετο του λόγου της εγκάρσιας ανηγμένης παραμορφώσεως προς την ανηγμένη επιμήκυνση (επιβράχυνση στην περίπτωση της θλίψεως), δηλαδή:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \qquad (1.12)$$

Ο συντελεστής εγκάρσιας παραμορφώσεως ονομάζεται και ***λόγος Poisson*** και χρησιμοποιείται ως μέγεθος που περιγράφει και τα δύο φαινόμενα που συμβαίνουν ταυτόχρονα στον εφελκυσμό (αύξηση μήκους-μίκρυνση διατομής), καθώς και στη θλίψη (μείωση μήκους-μεγέθυνση διατομής). Το πρόσημο (–) χρησιμοποιείται, προκειμένου ο λόγος Poisson να έχει πάντοτε θετικό πρόσημο, αφού οι ποσότητες ε_g και ε είναι πάντοτε ετερόσημες (η ανηγμένη επιμήκυνση είναι θετική στην περίπτωση του εφελκυσμού και αρνητική στην περίπτωση της θλίψεως).

Ο λόγος Poisson είναι χαρακτηριστική σταθερά για κάθε υλικό, εφόσον αυτό καταπονείται στην ελαστική περιοχή του διαγράμματος εφελκυσμού-θλίψεως. Οι μετρήσεις του λόγου Poisson για διάφορα υλικά δείχνουν ότι κυμαίνεται μεταξύ 0,25 και 0,35. Για τους χάλυβες ο λόγος του Poisson έχει τιμή 0,30. Συνήθως, ο λόγος Poisson είναι ο ίδιος για εφελκυσμό και θλίψη.

Τέλος, ορίζομε ως m τον αντίστροφο του λόγου Poisson, δηλαδή

$$m = \frac{1}{\mu} \qquad (1.13)$$

Το μέγεθος m καλείται ***σταθερά του Poisson*** και είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Από τον ορισμό της, προκύπτει άμεσα ότι η σταθερά του Poisson είναι πάντοτε θετικός αριθμός.

Παράδειγμα 9.

Κυλινδρική ράβδος μήκους l = 35 cm και διαμέτρου b = 3 cm εφελκύεται στην αναλογική περιοχή. Εάν η αύξηση του μήκους της ράβδου είναι Δl = 0,0035 cm και η μείωση της διαμέτρου της είναι $\Delta b = -0{,}000135$ cm, να υπολογιστεί ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 35$ cm	$\mu = ;$
$b = 3$ cm	
$\Delta l = 0{,}0035$ cm	
$\Delta b = -0{,}000135$ cm	

Λύση.

Η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}0035}{35} = 0{,}0001 = 0{,}01\%$$

Η εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση της ράβδου υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{-0{,}000135}{3} = -0{,}000045$$

Επομένως, ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου είναι:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} = \frac{0{,}000045}{0{,}0001} = 0{,}45$$

Ασκήσεις.

1. *Ράβδος μήκους $l = 55$ cm και τετραγωνικής διατομής πλευράς $b = 3$ cm εφελκύεται στην αναλογική περιοχή. Εάν η αύξηση του μήκους της ράβδου είναι $\Delta l = 0{,}0055$ cm και η μείωση της πλευράς της $\Delta b = 0{,}000135$ cm, να υπολογιστεί ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου.*

2. *Ράβδος μήκους $l = 70$ cm και κυκλικής διατομής διαμέτρου $d = 4$ cm θλίβεται στην αναλογική περιοχή. Εάν η μείωση του μήκους της ράβδου είναι $\Delta l = -0{,}0035$ cm και η αύξηση της διαμέτρου της $\Delta d = 0{,}000115$ cm, να υπολογιστεί ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου.*

1.6 Όλκιμα και ψαθυρά υλικά.

Τα υλικά δεν εμφανίζουν όλα την ίδια συμπεριφορά στις καταπονήσεις. Έτσι, τα υλικά ταξινομούνται σε κατηγορίες ανάλογα με τη συμπεριφορά τους στις καταπονήσεις.

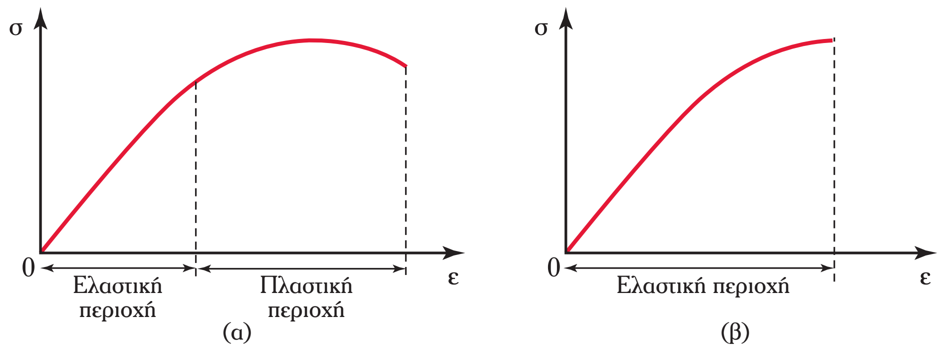
Με κριτήριο την εμφάνιση πλαστικής περιοχής πριν από τη θραύση τους ή όχι, τα υλικά ταξινομούνται σε ***όλκιμα*** και ***ψαθυρά***.

Στην κατηγορία των ***ολκίμων υλικών*** ανήκουν τα υλικά που μπορούν να υποστούν μόνιμες (πλαστικές) παραμορφώσεις πριν από τη θραύση τους.

Στην κατηγορία των ***ψαθυρών υλικών*** ανήκουν τα υλικά που θραύονται με το τέλος της ελαστικής τους περιοχής.

Με άλλα λόγια, ως ψαθυρά χαρακτηρίζονται τα υλικά που δεν παρουσιάζουν πλαστική περιοχή και ως όλκιμα αυτά που παρουσιάζουν πλαστική περιοχή πριν από το σημείο της θραύσεώς τους. Δηλαδή, τα ψαθυρά υλικά θραύονται πριν αναπτύξουν μόνιμες παραμορφώσεις (απότομα) σε αντίθεση με τα όλκιμα.

Το σχήμα 1.6(α) παρουσιάζει το τυπικό διάγραμμα εφελκυσμού ενός όλκιμου υλικού, ενώ το σχήμα 1.6(β) παρουσιάζει το τυπικό διάγραμμα εφελκυσμού ενός ψαθυρού υλικού. Από τη σύγκριση των δύο σχημάτων είναι εμφανές ότι τα όλκιμα υλικά παρουσιάζουν πλαστική περιοχή πριν το όριο θραύσεως σε αντίθεση με τα ψαθυρά υλικά που δεν παρουσιάζουν πλαστική περιοχή πριν το όριο θραύσεως.



Σχ. 1.6.
(α) Διάγραμμα εφελκυσμού ενός όλκιμου υλικού. (β) Διάγραμμα εφελκυσμού ενός ψαθυρού υλικού.

Στην καταπόνηση σε θλίψη, τα όλκιμα υλικά παρουσιάζουν πλαστική παραμόρφωση χωρίς να θραύονται, ενώ τα ψαθυρά θραύονται, χωρίς να υφίστανται πλαστική παραμόρφωση. Παραδείγματα ολκίμων υλικών είναι ο χαλκός, το αλουμίνιο, ο χάλυβας κ.λπ..

Τα όλκιμα υλικά μπορούν, κατόπιν επεξεργασίας, να γίνουν λαμαρίνες ή σύρματα. Παραδείγματα ψαθυρών υλικών είναι η πέτρα, το μπετόν, ο χυτοσίδηρος, το γυαλί κ.λπ..

Σε αντίθεση με τα όλκιμα υλικά, τα ψαθυρά δεν μπορούν να γίνουν λαμαρίνες ούτε σύρματα.

1.7 Σκληρότητα υλικού.

Σκληρότητα ενός υλικού ονομάζεται το μέγεθος που μετρά την αντίσταση του υλικού στην προσπάθεια εισόδου σ' αυτό άλλων υλικών, τα οποία πιέζουν την επιφάνειά του με μία κάθετη δύναμη.

Η σκληρότητα αναφέρεται πρακτικά στα μέταλλα. Η σκληρότητα ενός μετάλλου ουσιαστικά αποτελεί μέτρο της αντιστάσεως που εμφανίζουν τα μόρια του μετάλλου όταν άλλα υλικά, πιο σκληρά απ' αυτό, προσπαθούν να διεισδύσουν στο μέταλλο με εφαρμογή κάθετης δυνάμεως.

Η σκληρότητα ενός υλικού έχει σημασία στη μελέτη της αντοχής υλικών, γιατί με τη βοήθειά της, μπορούμε να υπολογίζομε το όριο θραύσεως των υλικών. Επομένως, μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός του μεγέθους της σκληρότητας.

Υπάρχουν ειδικές μέθοδοι μετρήσεως της σκληρότητας των μετάλλων, οι οποίες ονομάζονται ***μέθοδοι σκληρομετρήσεως***. Οι μέθοδοι σκληρομετρήσεως διακρίνονται στις:

Στατικές μεθόδους, στις οποίες ανήκουν:

α) Η μέθοδος Brinell.
β) Η μέθοδος Vickers και
γ) η μέθοδος Rockwell.

Δυναμικές μεθόδους, στις οποίες ανήκουν:

α) Η μέθοδος Baumann και
β) η μέθοδος Poldi και

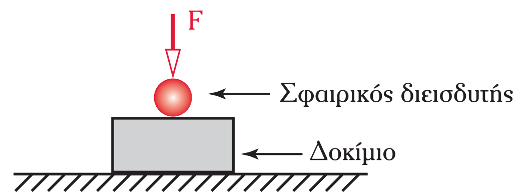
τέλος, στις μεθόδους ***αναπηδήσεως***, στις οποίες ανήκουν:

α) Η μέθοδος Shore και
β) η μέθοδος Leesen.

1.7.1 Στατικές μέθοδοι σκληρομετρήσεως.

Οι στατικές μέθοδοι στηρίζονται στη φόρτιση της επιφάνειας του υλικού, του οποίου μετρείται η σκληρότητα, μέσω ειδικού σώματος που ονομάζεται ***διεισδυτής*** και εφαρμόζεται στατικά στο προς σκληρομέτρηση σώμα (δοκίμιο). Η τιμή της σκληρότητας προσδιορίζεται από το μέγεθος του φορτίου που εφαρμόζεται και από τα χαρακτηριστικά του αποτυπώματος στο προς σκληρομέτρηση σώμα.

1) Μέθοδος Brinell.



Σχ. 1.7α.
Μέθοδος Brinell.

Η μέθοδος αυτή οφείλει το όνομά της στο Σουηδό J. A. Brinell. Η αρχή λειτουργίας της παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7α.

Η μέθοδος Brinell χρησιμοποιεί σφαιρικό διεισδυτή από πολύ σκληρό χάλυβα με διάμετρο 1 ή 2,5 ή 5 ή 10 mm, ανάλογα με τη σκληρότητα του υλικού που μετρούμε. Ο διεισδυτής διεισδύει κάθετα προς την επιφάνεια δοκιμίου υπό την επενέργεια σταθερού φορτίου που εξαρτάται από τη διάμετρό του, χωρίς καμιά κρούση ή ταλάντωση, για διάστημα από 10 έως 30 sec, ανάλογα με τη σκληρότητα του δοκιμίου. Κάθε μηχάνημα σκληρομετρήσεως διαθέτει πίνακες που δείχνουν τη δύναμη φορτίσεως F για κάθε διάμετρο σφαίρας. Ο σφαιρικός διεισδυτής, καθώς πιέζεται από το σταθερό φορτίο παραμορφώνει την επιφάνεια του δοκιμίου και σχηματίζει σ' αυτό μία κοιλότητα (αποτύπωμα), οι διαστάσεις της οποίας εξαρτώνται από:

α) Τη σκληρότητα του υλικού,

β) τη διάμετρο του σφαιρικού διεισδυτή και

γ) τη δύναμη φορτίσεως.

Μετά την αποφόρτιση του διεισδυτή μετρούνται οι διαστάσεις του αποτυπώματος και συγκεκριμένα η διάμετρος και το μέγιστο βάθος του, από τα οποία και υπολογίζεται το εμβαδόν του A.

Ως ***σκληρότητα κατά Brinell ενός υλικού*** HB ορίζεται ο λόγος της δυνάμεως φορτίσεως F προς το εμβαδόν του αποτυπώματος A.

Δηλαδή:

$$HB = \frac{F}{A} \tag{1.14}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της σκληρότητας κατά Brinell*** δίνονται στον πίνακα 1.7.1. Επειδή η μονάδα επιφάνειας 1 m^2 είναι αρκετά μεγάλη στην πράξη χρησιμοποιούνται υποπολλαπλάσιά της (1 cm^2, 1 mm^2), έτσι η σκληρότητα κατά Brinell μετρείται σε N/cm^2 ή N/mm^2

Η μέθοδος Brinell εφαρμόζεται για μέταλλα που έχουν μικρότερη σκληρότητα από το σφαιρικό διεισδυτή. Επίσης, λόγω κινδύνου πλαστικής παραμορφώσεως του διεισδυτή, η μέθοδος περιορίζεται στη σκληρομέτρηση υλικών με σκληρότητα μέχρι 4.500 N/mm^2.

Η μέθοδος Brinell δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα εάν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Η επιφάνεια του δοκιμίου πρέπει να έχει λειανθεί καλά, έτσι ώστε να έχει μεταλλική λάμψη. Στην περίπτωση που υπάρχουν μικροανωμαλίες στην επιφάνεια του δοκιμίου, αυτές προκαλούν αλλοιώσεις στον υπολογισμό των διαστάσεων του αποτυπώματος.

β) Το πάχος του δοκιμίου που μετρούμε πρέπει να είναι τουλάχιστον δεκαπλάσιο του πάχους του αποτυπώματος.

γ) Η διάμετρος του αποτυπώματος δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ μικρή, ούτε πολύ μεγάλη σε σχέση με τη διάμετρο του διεισδυτή. Σε διαφορετική περίπτωση δεν είναι εύκολη η ακριβής εκτίμηση των διαστάσεων του αποτυπώματος.

δ) Η επιφάνεια του δοκιμίου πρέπει να είναι τοποθετημένη κάθετα προς τη διεύθυνση του φορτίου.

Πίνακας 1.7.1.

Μέγεθος	*Διεθνές Σύστημα*	*C.G.S.*	*Τεχνικό Σύστημα*	*Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα*
Σκληρότητα κατά Brinell	1 N/m^2	1 dyn/cm^2	1 kp/m^2	1 lb/ft^2

ε) Η φόρτιση δεν πρέπει να γίνεται απότομα, αλλά με βραδύ ρυθμό εντός χρόνου από 10 sec (για τα πιο σκληρά μέταλλα) μέχρι 30 sec (για τα πιο μαλακά).

στ) Η αποφόρτιση πρέπει να γίνεται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, ώστε να δημιουργείται πλαστική παραμόρφωση στο αποτύπωμα.

Αποδεικνύεται πειραματικά ότι μεταξύ της σκληρότητας Brinell HB ενός υλικού και της τάσεως θραύσεως του υλικού σε εφελκυσμό $\sigma_{\Theta\rho}$, υπάρχει η ακόλουθη γραμμική σχέση:

$$\sigma_{\Theta\rho} = k \cdot HB \tag{1.15}$$

Η σταθερά αναλογίας k στη σχέση (1.15) είναι αδιάστατο μέγεθος και εξαρτάται από το υλικό. Ο πίνακας 1.7.2 παρουσιάζει την ***τιμή της σταθεράς k*** για ***κάποια υλικά***.

Πίνακας 1.7.2.

Υλικό	***Σταθερά k της σχέσεως $\sigma_{\Theta\rho} = k \cdot HB$***
Ανθρακοχάλυβας	0,36
Χρωμιονικελιούχος χάλυβας	0,34
Χαλκός	0,40
Μπρούντζος	0,40
Αλουμίνιο	0,35
Κράματα αλουμινίου	0,35

Η σχέση (1.15) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της τάσεως θραύσεως ενός υλικού, όταν γνωρίζομε τη σκληρότητά του ή το αντίστροφο. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 10.

Δοκίμιο από χρωμιονικελιούχο χάλυβα έχει σκληρότητα κατά Brinell HB = 3.800 N/mm^2. Να υπολογιστεί η τάση θραύσεως του δοκιμίου σε εφελκυσμό.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
HB = 3800 N/mm^2	$\sigma_{\Theta\rho}$ = ;
k = 0,34	

Λύση.

Η τάση θραύσεως του δοκιμίου σε εφελκυσμό δίνεται από τη σχέση $\sigma_{\Theta\rho} = k \cdot HB$. Η σταθερά αναλογίας k για το χρωμιονικελιούχο χάλυβα δίνεται από τον πίνακα 1.7.2 και είναι ίση με 0,34. Άρα έχομε: $\sigma_{\Theta\rho} = k \cdot HB = 0{,}34 \cdot 3800$ N/mm^2 = 1.292 N/mm^2.

Παράδειγμα 11.

Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό ενός δοκιμίου από ανθρακοχάλυβα είναι $\sigma_{\Theta\rho}$ = 400 N/mm^2. Να υπολογιστεί η σκληρότητα κατά Brinell του δοκιμίου.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\sigma_{\Theta\rho} = 400\ N/mm^2$	HB = ;
k = 0,36	

Λύση.

Η σκληρότητα κατά Brinell του δοκιμίου υπολογίζεται μέσω της σχέσεως $\sigma_{\Theta\rho} = k \cdot HB$. Η σταθερά αναλογίας k για τον ανθρακοχάλυβα δίνεται από τον πίνακα 1.7.2 και είναι ίση με 0,36.

Άρα έχομε: $\sigma_{\Theta\rho} = k \cdot HB \Leftrightarrow HB = \frac{\sigma_{\Theta\rho}}{k} = \frac{400\ N/mm^2}{0{,}36} = 1.111\ N/mm^2$.

2) Μέθοδος Vickers.

Η μέθοδος Vickers χρησιμοποιείται για τη σκληρομέτρηση όλων των μετάλλων, ιδίως των πολύ σκληρών. Επίσης, χρησιμοποιείται σε λεπτά δοκίμια γιατί δεν προκαλεί βλάβη κατά τη μέτρηση. Ο διεισδυτής είναι μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα από διαμάντι, με γωνία απέναντι εδρών ίση με 136^o. Ο πυραμιδικός διεισδυτής διεισδύει κάθετα προς την επιφάνεια του δοκιμίου υπό την επενέργεια σταθερού φορτίου που εξαρτάται από το πάχος του δοκιμίου. Το φορτίο ενεργεί στο δοκίμιο, χωρίς καμμία κρούση ή ταλάντωση, για διάστημα από 10 έως 30 sec, ανάλογα με τη σκληρότητα του δοκιμίου. Ο πυραμιδικός διεισδυτής, καθώς πιέζεται από το σταθερό φορτίο F παραμορφώνει την επιφάνεια του δοκιμίου και σχηματίζει σ' αυτό ένα αποτύπωμα. Τα μικρά βάθη διεισδύσεως που οφείλονται στην αμβλεία γωνία των $136°$ είναι αυτά που επιτρέπουν τη σκληρομέτρηση των λεπτών δοκιμίων.

Το σκληρόμετρο Vickers διαθέτει ένα μικροσκόπιο, με το οποίο ελέγχομε οπτικά το δημιουργούμενο αποτύπωμα και μετρούμε τις διαγώνιες του αποτυπώματος, από τις οποίες υπολογίζομε την παράπλευρη επιφάνειά του.

Ως ***σκληρότητα κατά Vickers ενός υλικού*** HV ορίζεται ο λόγος της δυνάμεως φορτίσεως F προς το εμβαδόν του αποτυπώματος A.

Δηλαδή:

$$HV = \frac{F}{A} \tag{1.16}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της σκληρότητας κατά Vickers*** παρέχονται στον πίνακα 1.7.3.

Επειδή η μονάδα επιφάνειας $1m^2$ είναι αρκετά μεγάλη, στην πράξη η σκληρότητα κατά Vickers μετρείται σε N/cm^2 ή N/mm^2.

Πίνακας 1.7.3

Μέγεθος	***Διεθνές Σύστημα***	***C.G.S.***	***Τεχνικό Σύστημα***	***Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα***
Σκληρότητα κατά Vickers	$1\ N/m^2$	$1\ dyn/cm^2$	$1\ kp/m^2$	$1\ lb/ft^2$

Η μέθοδος Vickers δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα εάν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Το δοκίμιο πρέπει να είναι επίπεδο, λείο και το πάχος του να μην είναι λεπτότερο από 1,5 φορά τη διαγώνιο του αποτυπώματος της πυραμίδας.

β) Ο πυραμιδικός διεισδυτής πρέπει να προφυλάσσεται από κτυπήματα και να λειαίνεται συχνά.

γ) Η φόρτιση δεν πρέπει να γίνεται απότομα, αλλά με βραδύ ρυθμό από 10 sec (για τα πιο σκληρά μέταλλα) μέχρι 30 sec (για τα πιο μαλακά).

Ως τελική τιμή σκληρομετρήσεως λαμβάνομε το μέσο όρο τριών μετρήσεων.

3) Μέθοδος Rockwell.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί διαφορετική γεωμετρία διεισδυτή και τιμή επιβαλλόμενου φορτίου, ανάλογα με το προς σκληρομέτρηση μέταλλο. Για παράδειγμα, για τα σκληρά μέταλλα χρησιμοποιείται ως διεισδυτής κώνος από διαμάντι με γωνία κορυφής 120^o και για τα μαλακά σφαίρα από χάλυβα διαμέτρου 0,2 mm. Η διαδικασία σκληρομετρήσεως είναι η ίδια που ακολουθείται και στις μεθόδους Brinell και Vickers. Για να λάβομε αξιόπιστα αποτελέσματα από τη μέθοδο Rockwell, το πάχος του δοκιμίου πρέπει να είναι τουλάχιστον δεκαπλάσιο του βάθους του αποτυπώματος της σφαίρας ή του κώνου από διαμάντι.

Σε αντίθεση με τις μεθόδους Brinell και Vickers, η σκληρότητα υπολογίζεται με βάση το βάθος του αποτυπώματος, το οποίο σχηματίζει η σφαίρα ή ο αδαμάντινος κώνος όταν φορτίζεται πάνω στην επιφάνεια του δοκιμίου. Η σκληρότητα που προκύπτει από τη χρήση, ως διεισδυτή, του κώνου από διαμάντι συμβολίζεται με HRC και η σκληρότητα που προκύπτει από τη χρήση, ως διεισδυτή, της σφαίρας από χάλυβα συμβολίζεται με HRB. Δηλαδή:

Ως ***σκληρότητα κατά Rockwell ενός υλικού*** HRC ή HRB ορίζεται το βάθος του αποτυπώματος, το οποίο σχηματίζει ο αδαμάντινος κώνος ή η σφαίρα, αντίστοιχα, όταν φορτίζεται πάνω στην επιφάνεια του δοκιμίου.

Η μονάδα μετρήσεως της σκληρότητας κατά Rockwell είναι μονάδα μήκους. Συγκεκριμένα, ως μονάδα μετρήσεως λαμβάνονται τα 2 μm.

Στη μέθοδο Rockwell το φορτίο εφαρμόζεται σε δύο στάδια:

α) Στο ***πρώτο στάδιο***, το οποίο ονομάζεται ***στάδιο προφορτίσεως***, εφαρμόζεται φορτίο 10 kp και δημιουργείται στο δοκίμιο μικρό αποτύπωμα με μικρό βάθος που έχει ως σκοπό την ισοπέδωση τυχόν τοπικών ανωμαλιών. Έτσι, δεν απαιτείται προλείανση του υλικού.

β) Στο ***δεύτερο στάδιο***, το οποίο ονομάζεται ***στάδιο φορτίσεως***, εφαρμόζεται πρόσθετο φορτίο. Το πρόσθετο φορτίο είναι ίσο με 140 kp για την περίπτωση του αδαμάντινου κώνου και ίσο με 90 kp για την περίπτωση της χαλύβδινης σφαίρας. Το πρόσθετο φορτίο αφαιρείται μετά από μερικά δευτερόλεπτα και αφήνομε το αρχικό φορτίο των 10 kp. Το αποτύπωμα αποκτά πρόσθετο βάθος συγκριτικά με το μικρό βάθος του πρώτου σταδίου.

Η σκληρότητα κατά Rockwell HRC υπολογίζεται μετρώντας το πρόσθετο βάθος z του κώνου στο τέλος του δεύτερου σταδίου από τη σχέση:

$$HRC = 130 - \frac{z}{0,002} \tag{1.17}$$

Η σκληρότητα κατά Rockwell HRB υπολογίζεται μετρώντας το πρόσθετο βάθος z της σφαίρας στο τέλος του δεύτερου σταδίου από τη σχέση:

$$HRB = 100 - \frac{z}{0,002} \tag{1.18}$$

Η σκληρότητα HRC και HRB υπολογίζεται ως ο μέσος όρος δύο σκληρομετρήσεων.

1.7.2 Δυναμικές μέθοδοι σκληρομετρήσεως.

Σε αντίθεση με τις στατικές μεθόδους, στις οποίες η φόρτιση γίνεται στατικά, οι δυναμικές μέθοδοι στηρίζονται στη φόρτιση της επιφάνειας του υλικού του οποίου μετρείται η σκληρότητα, μέσω του διεισδυτή με κρούση του στο προς σκληρομέτρηση σώμα (δοκίμιο), καθώς εφάπτεται στην επιφάνεια σκληρομετρήσεως. Η τιμή της σκληρότητας προσδιορίζεται από το μέγεθος του φορτίου που εφαρμόζεται και τα χαρακτηριστικά του αποτυπώματος στο προς σκληρομέτρηση σώμα.

Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται συνήθως για τη σκληρομέτρηση αντικειμένων μεγάλων διαστάσεων, από τα οποία δεν μπορούμε να εξάγομε μικρά δοκίμια. Το πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι τα όργανα που χρησιμοποιούνται για τις μετρήσεις μεταφέρονται εύκολα και επίσης είναι εύκολα στο χειρισμό τους.

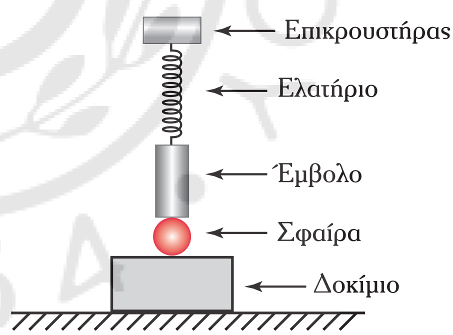
1) Μέθοδος Baumann.

Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Baumann παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7β. Χρησιμοποιεί ένα έμβολο, στο μπροστινό τμήμα του οποίου τοποθετείται σφαιρικός διεισδυτής. Στο πίσω τμήμα του εμβόλου υπάρχει ένα ελατήριο με τον επικρουστήρα. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: το ελατήριο με τον επικρουστήρα αφήνεται να κτυπήσει το έμβολο, με αποτέλεσμα ο σφαιρικός διεισδυτής να διεισδύει κρουστικά στο υλικό που σκληρομετρείται. Έτσι, ο σφαιρικός διεισδυτής δημιουργεί στο υλικό που αποτύπωμα με διάμετρο που εξαρτάται από τη σκληρότητα του υλικού. Στη συνέχεια, μετρούμε τη διάμετρο του αποτυπώματος και απ' αυτήν, με τη βοήθεια σκληρομετρικών κατά Baumann πινάκων, προσδιορίζομε τη σκληρότητα του υλικού κατά Baumann.

2) Μέθοδος Poldi.

Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Poldi παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7γ. Η σκληρομέτρηση με τη μέθοδο Poldi στηρίζεται στη σύγκριση του δοκιμίου του υλικού που σκληρομετρείται με άλλο δοκίμιο υλικού γνωστής σκληρότητας. Για το σκοπό αυτό το σκληρόμετρο περιλαμβάνει έναν πείρο, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να ολισθαίνει μέσα σ' ένα κέλυφος. Στο κάτω μέρος του κελύφους βρίσκεται σφαιρικός διεισδυτής. Πάνω στο σφαιρικό διεισδυτή υπάρχει τρύπα με ορθογώνια διατομή σε διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα του κελύφους. Στην τρύπα αυτή τοποθετείται ορθογωνικό συγκριτικό δοκίμιο γνωστής σκληρότητας. Το δοκίμιο εφάπτεται από το πάνω μέρος με τον πείρο και από το κάτω με το σφαιρικό διεισδυτή.

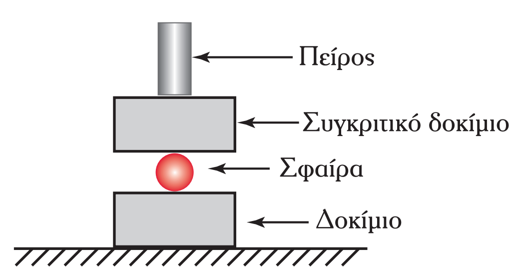
Ο σφαιρικός διεισδυτής (σφαίρα) ακουμπά στην επιφάνεια του υλικού που θα σκληρομετρηθεί (δοκίμιο προς σκληρόμετρηση). Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Με ένα σφυρί κτυπούμε κρουστικά τον πείρο του σκληρομέτρου. Αποτέλεσμα του κτυπήματος είναι ότι ο σφαιρικός διεισδυτής δημιουργεί αποτύπωμα και στο συγκριτικό δοκίμιο και στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Στη συνέχεια, μετρούμε τις διαμέτρους των δύο αποτυπωμάτων και με τη βοήθεια συγκριτικών σκληρομετρικών κατά Poldi πινάκων προσδιορίζομε τη σκληρότητα του υλικού κατά Poldi.



Σχ. 1.7β.
Μέθοδος Baumann.

1.7.3 Μέθοδοι σκληρομετρήσεως με αναπήδηση.

Οι μέθοδοι σκληρομετρήσεως με αναπήδηση βασίζονται στην ελαστικότητα του υλικού που σκληρομετρείται και όχι στην παραμόρφωση που προκαλεί η φόρτιση, όπως γίνεται στις μεθόδους των άλλων κατηγοριών. Συγκεκριμένα, οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής στηρίζονται στη μέτρηση της αναπηδήσεως σώματος που πέφτει από ορισμένο ύψος πάνω στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε.



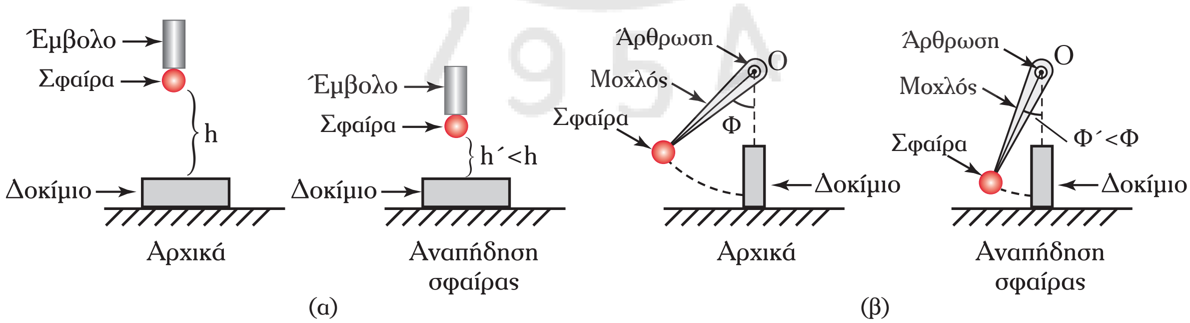
Σχ. 1.7γ.
Μέθοδος Poldi.

1) Μέθοδος Shore.

Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Shore παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7δ(α). Περιλαμβάνει ένα έμβολο, στο κάτω μέρος του οποίου υπάρχει μια σφαίρα. Το έμβολο έχει τη δυνατότητα να κινείται ελεύθερα εντός του κελύφους του σκληρομέτρου. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Το έμβολο με τη σφαίρα αφήνεται να πέσει στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Εάν το υλικό είναι πάρα πολύ σκληρό, η σφαίρα δεν το παραμορφώνει και το έμβολο αναπηδά στην αρχική θέση. Αντίθετα, εάν το υλικό στο οποίο προσπίπτει η σφαίρα δεν είναι τόσο σκληρό, τότε η σφαίρα παραμορφώνει το υλικό, χάνει μέρος της κινητικής της ενέργειας και το έμβολο αναπηδά φτάνοντας σε ύψος (ύψος αναπηδήσεως) χαμηλότερο από το αρχικό. Όσο πιο μαλακό είναι το υλικό που σκληρομετρείται, τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση που υφίσταται η επιφάνειά του από τη σφαίρα, με αποτέλεσμα η αναπήδηση του εμβόλου να φτάνει σε ακόμη χαμηλότερο ύψος αναπηδήσεως. Αυτό που μετρούμε είναι η διαφορά μεταξύ του αρχικού ύψους του εμβόλου και του ύψους αναπηδήσεως. Από τη διαφορά αυτή προσδιορίζεται η σκληρότητα κατά Shore.

2) Μέθοδος Leesen.

Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Leesen παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7δ(β). Περιλαμβάνει ένα μοχλό, το ένα άκρο του οποίου στηρίζεται σε άρθρωση, ενώ στο άλλο άκρο του υπάρχει ο σφαιρικός διεισδυτής. Η άρθρωση επιτρέπει στο μοχλό να κινείται κυκλικά μπροστά από μία κλίμακα γωνιών. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Σηκώνομε το μοχλό σ' ένα σημείο της κλίμακας (αρχική γωνία) και τον αφήνομε να πέσει στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Το άκρο του μοχλού που έχει το σφαιρικό διεισδυτή κτυπά στην επιφάνεια του υλικού και αναπηδά. Εάν το υλικό είναι πάρα πολύ σκληρό, η σφαίρα δεν το παραμορφώνει και ο μοχλός αναπηδά στην αρχική θέση. Αντίθετα, εάν το υλικό στο οποίο προσπίπτει η σφαίρα δεν είναι τόσο σκληρό, τότε η σφαίρα παραμορφώνει το υλικό, χάνει μέρος της κινητικής της ενέργειας και ο μόχλος αναπηδά φτάνοντας σε γωνία μικρότερη από την αρχική. Όσο πιο μαλακό είναι το υλικό που σκληρομετρείται, τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση που υφίσταται η επιφάνειά του από τη σφαίρα, με αποτέλεσμα η αναπήδηση του μοχλού να φτάνει σε ακόμη μικρότερη γωνία αναπηδήσεως. Αυτό που μετρούμε είναι η διαφορά μεταξύ της αρχικής γωνίας του μοχλού και της γωνίας αναπηδήσεως. Από τη διαφορά αυτή, με τη βοήθεια των πινάκων του σκληρομέτρου Leesen προσδιορίζεται η σκληρότητα κατά Leesen.



Σχ. 1.7δ.
(α) Μέθοδος Shore. (β) Μέθοδος Leesen.

Ασκήσεις.

1. *Δοκίμιο από ανθρακοχάλυβα έχει σκληρότητα κατά Brinell HB = 2.200 N/mm^2. Να βρεθεί η τάση θραύσεώς του σε εφελκυσμό. Δίνεται ο συντελεστής αναλογίας του ανθρακοχάλυβα της σχέσεως τάσεως θραύσεως/σκληρότητας κατά Brinell k = 0,36.*

2. *Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό ενός τεμαχίου από αλουμίνιο είναι $\sigma_{\Theta\rho}$ = 190 N/mm^2. Να υπολογιστεί η σκληρότητά του κατά Brinell. Δίνεται ο συντελεστής αναλογίας του αλουμινίου για τη σχέση τάσεως θραύσεως/σκληρότητας κατά Brinell k = 0,35.*

1.8 Επίδραση θερμοκρασίας και χρόνου στην αντοχή των υλικών.

Στις παραγράφους 1.3 και 1.4 μελετήσαμε τις παραμορφώσεις των στερεών σωμάτων που οφείλονται στην εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων σ' αυτά. Εκτός από τις εξωτερικές δυνάμεις, παραμορφώσεις στα στερεά σώματα προκαλούνται και από άλλα αίτια, όπως:

α) Οι μεταβολές της θερμοκρασίας και

β) η πάροδος του χρόνου.

Οι μεταβολές της θερμοκρασίας έχουν ως αποτέλεσμα πρώτον τα στερεά σώματα να διαστέλλονται όταν η θερμοκρασία αυξάνεται και να συστέλλονται όταν η θερμοκρασία μειώνεται και δεύτερον να μειώνονται τα όρια αντοχής των υλικών με την αύξηση της θερμοκρασίας.

Η πάροδος του χρόνου έχει ως αποτέλεσμα σε περιβάλλοντα με υψηλές θερμοκρασίες:

α) Να αυξάνονται οι παραμορφώσεις παρόλο που τα φορτία δεν αλλάζουν και

β) να μειώνονται τα όρια αντοχής των υλικών.

Όπως βλέπομε ο παράγοντας του χρόνου και των υψηλών θερμοκρασιών λειτουργεί συνδυαστικά.

Στη συνέχεια, παρουσιάζομε αναλυτικά τις ανωτέρω επιδράσεις των μεταβολών της θερμοκρασίας και του χρόνου στην αντοχή των υλικών.

1.8.1 Συστολή και διαστολή λόγω μεταβολών της θερμοκρασίας.

Αρχικά, ας μελετήσομε την περίπτωση ράβδου, της οποίας η θερμοκρασία μεταβάλλεται από την αρχική θερμοκρασία $\theta_{\alpha\rho\chi}$ στην τελική $\theta_{\tau\varepsilon\lambda}$ κατά $\Delta\theta = \theta_{\tau\varepsilon\lambda} - \theta_{\alpha\rho\chi}$. Η μεταβολή Δθ είναι θετική όταν έχομε αύξηση της θερμοκρασίας ($\theta_{\tau\varepsilon\lambda} > \theta_{\alpha\rho\chi}$) και αρνητική όταν έχομε μείωση ($\theta_{\tau\varepsilon\lambda} < \theta_{\alpha\rho\chi}$). Η μεταβολή της θερμοκρασίας έχει ως αποτέλεσμα το αρχικό μήκος l της ράβδου να γίνει $l_{\tau\varepsilon\lambda}$, δηλαδή να μεταβληθεί κατά $\Delta l = l_{\tau\varepsilon\lambda} - l$. Η μεταβολή Δl παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta \tag{1.19}$$

Ο συντελεστής α ονομάζεται συντελεστής θερμικής διαστολής και εκφράζει τη μεταβολή του μήκους της ράβδου ανά μονάδα μήκους και ανά βαθμό θερμοκρασίας.

Από τη σχέση (1.19) βλέπομε ότι όταν η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι θετική, έχομε αύξηση του μήκους της ράβδου, δηλαδή $\Delta l > 0$. Αντίθετα, όταν η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι αρνητική, έχομε μείωση του μήκους της ράβδου, δηλαδή $\Delta l < 0$. Επίσης, από τη σχέση (1.19) βλέπομε ότι η μεταβολή του μήκους Δl:

α) Είναι ανάλογη της μεταβολής της θερμοκρασίας.

β) Είναι ανάλογη του αρχικού μήκους της ράβδου.

γ) Εξαρτάται από το υλικό της ράβδου.

Η εξάρτηση από το υλικό εκφράζεται μέσω του συντελεστή θερμικής διαστολής, καθώς αυτός εξαρτάται από το υλικό της ράβδου. Στον πίνακα 1.8.1 βλέπομε ότι ο συντελεστής θερμικής διαστολής διαφέρει σημαντικά μεταξύ των υλικών. Αυτό σημαίνει ότι για την ίδια μεταβολή θερμοκρασίας υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση στη μεταβολή του μήκους μεταξύ ράβδων από διαφορετικά υλικά που έχουν το ίδιο αρχικό μήκος. Για παράδειγμα, εάν έχομε δύο ράβδους με ίδιο μήκος από δύο διαφορετικά υλικά, με το ένα υλικό να έχει τριπλάσιο συντελεστή θερμικής διαστολής από το άλλο, τότε η μεταβολή του μήκους της ράβδου από το πρώτο υλικό είναι τριπλάσια από τη μεταβολή του μήκους της ράβδου από το δεύτερο, για την ίδια μεταβολή θερμοκρασίας.

Πίνακας 1.8.1.
Ο συντελεστής θερμικής διαστολής διαφόρων υλικών για θερμοκρασίες στην περιοχή από 0°C έως 100°C.

Υλικό	*Συντελεστής θερμικής διαστολής (1/°C)*	*Υλικό*	*Συντελεστής θερμικής διαστολής (1/°C)*
Αλουμίνιο	$23{,}8 \cdot 10^{-6}$	Ορείχαλκος	$18{,}5 \cdot 10^{-6}$
Άργυρος	$19{,}7 \cdot 10^{-6}$	Πλατίνα	$9 \cdot 10^{-6}$
Κασσίτερος	$23 \cdot 10^{-6}$	Σίδηρος	$12 \cdot 10^{-6}$
Κοβάλτιο	$12{,}7 \cdot 10^{-6}$	Χαλκός	$17 \cdot 10^{-6}$
Μαγνήσιο	$26 \cdot 10^{-6}$	Χάλυβας	$12 \cdot 10^{-6}$
Μόλυβδος	$29{,}2 \cdot 10^{-6}$	Χρυσός	$14{,}4 \cdot 10^{-6}$
Μπρούντζος	$17{,}5 \cdot 10^{-6}$	Χυτοσίδηρος	$9 \cdot 10^{-6}$
Νικέλιο	$13 \cdot 10^{-6}$	Χυτοχάλυβας	$11{,}7 \cdot 10^{-6}$
Ξύλο	$8 \cdot 10^{-6}$	Ψευδάργυρος	$29 \cdot 10^{-6}$

Παράδειγμα 12.

Δίνεται ράβδος από ψευδάργυρο που έχει μήκος $l = 1$ m. Να υπολογιστούν:
α) Η μεταβολή του μήκους της ράβδου όταν αυξηθεί η θερμοκρασία της από 30°C σε 60°C.
β) Το τελικό μήκος της ράβδου.
Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής του ψευδαργύρου $\alpha = 29 \cdot 10^{-6}$/°C.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 1$ m	$\Delta l = ;$
$\Delta\theta = 60°C - 30°C = 30°C$	$l_{τελ} = ;$
$\alpha = 29 \cdot 10^{-6}$/°C	

Λύση.

α) Η αύξηση της θερμοκρασίας από την αρχική τιμή $\theta_{αρχ} = 30°C$ στην τελική $\theta_{τελ} = 60°C$ κατά $\Delta\theta = 60°C - 30°C = 30°C$ έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του αρχικού μήκους της ράβδου $l = 1$ m κατά Δl που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta = 29 \cdot 10^{-6} \frac{1}{{}^0\mathrm{C}} \cdot 1\ \mathrm{m} \cdot 30^0\mathrm{C} = 0{,}87 \cdot 10^{-3}\mathrm{m} = 0{,}87\ \mathrm{mm}$$

β) Άρα, το τελικό μήκος της ράβδου $l_{τελ}$ είναι:

$$l_{τελ} = l + \Delta l = 1\ \mathrm{m} + 0{,}87\ \mathrm{mm} = 1.000{,}87\ \mathrm{mm}$$

Η παρεμπόδιση της αυξήσεως ή της μειώσεως του μήκους μιας ράβδου λόγω της αυξήσεως ή της μειώσεως της θερμοκρασίας, αντίστοιχα, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση καταπονήσεων στο υλικό, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε μη επιθυμητές καταστάσεις, όπως για παράδειγμα στη θραύση της ράβδου. Χρειάζεται λοιπόν πολύ μεγάλη προσοχή στο σχεδιασμό των κατασκευών, ώστε να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη οι επιδράσεις των μεταβολών της θερμοκρασίας. Ιδιαίτερη έμφαση στις επιδράσεις αυτές πρέπει να δίνεται στις περιπτώσεις κατά τις οποίες, εκ του ρόλου τους, οι κατασκευές υπόκεινται σε μεγάλες μεταβολές της θερμοκρασίας, καθώς και στις περιπτώσεις συνθέτων κατασκευών που περιλαμβάνουν πολλά υλικά με διαφορετικούς μεταξύ τους συντελεστές θερμικής διαστολής.

Το φαινόμενο της εμφανίσεως καταπονήσεων λόγω της παρεμποδίσεως της αυξήσεως ή της μειώσεως των διαστάσεων μιας ράβδου εξαιτίας θερμοκρασιακών μεταβολών αναλύεται στην παράγραφο 2.6.

1.8.2 Μεταβολή των ορίων αντοχής των υλικών λόγω υψηλών θερμοκρασιών.

Η μεταβολή της αντοχής των συνηθισμένων υλικών για τις συνηθισμένες μεταβολές της θερμοκρασίας είναι πρακτικά ασήμαντη. Σημαντικές μειώσεις αντοχής μπορεί να παρατηρηθούν σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες, όπως σε λέβητες και σε κατασκευές σε περίπτωση πυρκαγιάς.

Τα όρια αντοχής των υλικών, όπως το όριο θραύσεως και το όριο διαρροής (παράγρ. 1.3 και 1.4), εξαρτώνται από τη θερμοκρασία. Τα πειράματα εφελκυσμού και θλίψεως που παρουσιάσαμε στις εν λόγω παραγράφους πραγματοποιήθηκαν σε χαμηλές θερμοκρασίες, όπως είναι αυτές της θερμοκρασίας περιβάλλοντος. Έτσι, οι τιμές των ορίων αντοχής των υλικών που προέκυψαν από τα πειράματα ισχύουν μόνο για τις θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

Συχνά, οι κατασκευές αντέχουν σε θερμοκρασίες αρκετά πιο υψηλές από τις θερμοκρασίες περιβάλλοντος. Έτσι, για το σχεδιασμό των κατασκευών που αντέχουν σε θερμοκρασίες πολύ υψηλές πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα όρια αντοχής των υλικών στις υψηλές θερμοκρασίες. Η αύξηση της θερμοκρασίας έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των χαρακτηριστικών ορίων αντοχής των υλικών. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει για θερμοκρασίες μεγαλύτερες από μία οριακή τιμή της θερμοκρασίας. Η οριακή αυτή τιμή της θερμοκρασίας εξαρτάται από το υλικό.

1.8.3 Επίδραση του χρόνου.

Πολλές φορές παρατηρείται το εξής φαινόμενο: μια κατασκευή που δέχεται ένα σταθερό φορτίο παρουσιάζει αύξηση των παραμορφώσεών της, όπως για παράδειγμα αύξηση της επιμηκύνσεώς της, με την πάροδο του χρόνου.

Το φαινόμενο της αυξήσεως της παραμορφώσεως μιας κατασκευής με την πάροδο του χρόνου, χωρίς να αυξάνονται οι τάσεις που δρουν σ' αυτήν ονομάζεται ***ερπυσμός***.

Ο όρος ερπυσμός οφείλεται στην επιμήκυνση που εμφανίζει μια κατασκευή με την πάροδο του χρόνου, με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι το υλικό της έρπει. Στις συνήθεις θερμοκρασίες το φαινόμενο του ερπυσμού δεν είναι σημαντικό για τα περισσότερα υλικά, όχι όμως για όλα. Για παράδειγμα, το σκυρόδεμα εμφανίζει σημαντικό ερπυσμό σε συνηθισμένες θερμοκρασίες. Τα ερπυστικά φαινόμενα γίνονται σημαντικά σε υψηλές θερμοκρασίες. Ο ερπυσμός με την πάροδο του χρόνου μπορεί να γίνει τόσο μεγάλος, ώστε κάποτε η κατασκευή να θραυστεί, παρόλο που οι αναπτυσσόμενες τάσεις στην κατασκευή είναι πολύ μικρότερες από την τάση θραύσεως σε θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Η μελέτη του φαινομένου του ερπυσμού ενός υλικού πραγματοποιείται με ειδικό πείραμα που ονομάζεται ***πείραμα ερπυσμού***.

1.8.4 Πείραμα ερπυσμού.

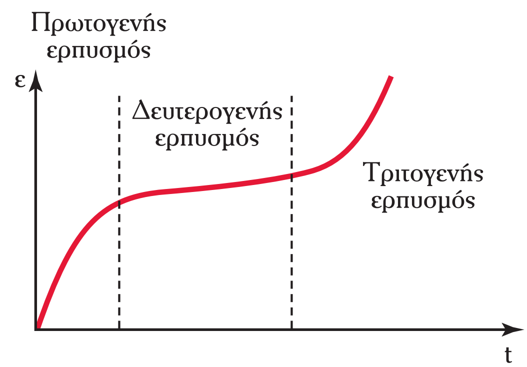
Στο πείραμα αυτό, ένα δοκίμιο, σε περιβάλλον μιας συγκεκριμένης υψηλής θερμοκρασίας που διατηρείται σταθερή, υποβάλλεται σε εφελκυσμό. Η τάση που προκαλεί τον εφελκυσμό του δοκιμίου διατηρείται για το χρόνο του πειράματος σταθερή. Ένα πείραμα ερπυσμού μπορεί να κρατήσει από μερικές ώρες μέχρι και αρκετά χρόνια. Στο πείραμα μετρείται η ανηγμένη επιμήκυνση με την πάροδο του χρόνου και υπολογίζεται ο ρυθμός μεταβολής της, ο οποίος ονομάζεται ***ταχύτητα ερπυσμού***.

Η γραφική παράσταση που παρουσιάζει την ανηγμένη επιμήκυνση με την πάροδο του χρόνου ονομάζεται ***καμπύλη ερπυσμού*** (σχ. 1.8). Από την καμπύλη ερπυσμού παρατηρούμε ότι ο ερπυσμός περιλαμβάνει τα ακόλουθα τρία στάδια:

α) ***Στάδιο πρωτογενούς ερπυσμού***, όπου η ταχύτητα ερπυσμού μειώνεται με το χρόνο.

β) ***Στάδιο δευτερογενούς ερπυσμού***, όπου η ταχύτητα ερπυσμού είναι σταθερή με το χρόνο.

γ) ***Στάδιο τριτογενούς ερπυσμού***, στο οποίο παρατηρείται επιτάχυνση της παραμορφώσεως μέχρι να σημειωθεί θραύση του υλικού.



Σχ. 1.8.
Καμπύλη και στάδια ερπυσμού.

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων ερπυσμού είναι ο προσδιορισμός της ***αντοχής των υλικών σε ερπυσμό*** ή αλλιώς ***εν θερμώ***, δηλαδή της τάσεως που προκαλεί ορισμένη παραμόρφωση σε δεδομένο χρόνο και θερμοκρασία. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων ερπυσμού παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις κατασκευές που θα τοποθετηθούν σε περιβάλλον υψηλής θερμοκρασίας για μεγάλη χρονική διάρκεια. Οι σχεδιαστές των κατασκευών αυτών πρέπει να λαμβάνουν οπωσδήποτε υπόψη κατά το σχεδιασμό τα όρια αντοχής των υλικών εν θερμώ, στη θερμοκρασία λειτουργίας της κατασκευής. Τα όρια αυτά προκύπτουν από τα πειράματα ερπυσμού.

1.8.5 Όρια αντοχής εν θερμώ.

Τα διάφορα πρότυπα που περιλαμβάνουν τα όρια αντοχής εν θερμώ των υλικών, στηρίζονται κυρίως στα εξής μεγέθη για κάθε υλικό:

α) Στην τάση $\sigma_{\alpha,\theta,t}$ ή αλλιώς $\dfrac{\sigma_{\alpha,\theta}}{t}$, η οποία προκαλεί στο υλικό ανηγμένη επιμήκυνση α% μετά την πάροδο χρόνου t, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

β) Στην τάση $\sigma_{\Theta\rho,\theta,t}$ ή αλλιώς $\dfrac{\sigma_{\Theta\rho,\theta}}{t}$, η οποία προκαλεί στο υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου t, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

Τα όρια που συνήθως χρησιμοποιούνται με βάση τους ορισμούς των ανωτέρω μεγεθών είναι τα εξής:

α) Η τάση $\sigma_{1,\theta,10.000h}$ ή αλλιώς $\dfrac{\sigma_{1,\theta}}{10.000h}$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό ανηγμένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών[1], σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

β) Η τάση $\sigma_{1,\theta,100.000h}$ ή αλλιώς $\dfrac{\sigma_{1,\theta}}{100.000h}$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό ανηγμένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών[2], σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

γ) Η τάση $\sigma_{\Theta\rho,\theta,10.000h}$ ή αλλιώς $\dfrac{\sigma_{\Theta\rho,\theta}}{10.000h}$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

δ) Η τάση $\sigma_{\Theta\rho,\theta,100.000h}$ ή αλλιώς $\dfrac{\sigma_{\Theta\rho,\theta}}{100.000h}$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό θραύ-

[1] Οι 10.000 ώρες αντιστοιχούν σε περίπου 417 ημέρες.
[2] Οι 100.000 ώρες αντιστοιχούν σε περίπου 4.167 ημέρες ή περίπου 11 έτη.

ση μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

Είναι προφανές από τον ορισμό τους ότι:

α) Για το ίδιο υλικό $\sigma_{1,\theta,10.000h} > \sigma_{1,\theta,100.000h}$, δηλαδή η τάση που προκαλεί στο υλικό ανημένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών είναι μεγαλύτερη από την τάση που προκαλεί στο εν λόγω υλικό την ίδια ανηγμένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών (σε περιβάλλον λειτουργίας με την ίδια θερμοκρασία θ).

β) Για το ίδιο υλικό $\sigma_{\Theta\rho,\theta,10.000h} > \sigma_{\Theta\rho,\theta,100.000h}$, δηλαδή η τάση που προκαλεί στο υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών είναι μεγαλύτερη από την τάση που προκαλεί στο εν λόγω υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών (σε περιβάλλον λειτουργίας με την ίδια θερμοκρασία θ).

Παράδειγμα 13.

Τα όρια αντοχής εν θερμώ ενός υλικού X για διάφορες θερμοκρασίες δίνονται στον πίνακα 1.8.2.

Το υλικό πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε θερμοκρασία 460°C για να φορτιστεί με τάση $\sigma = 3$ N/mm^2 για τις επόμενες 100.000 ώρες.

α) Μπορεί το υλικό να αντέξει τη φόρτιση για την οποία προορίζεται;

β) Η ανηγμένη επιμήκυνση στο τέλος της περιόδου των 100.000 ωρών θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από 1%;

Πίνακας 1.8.2.
Όρια αντοχής εν θερμώ υλικού X σε N/mm^2.

Θερμοκρασία (°C)	$\frac{\sigma_{1,\theta}}{10.000h}$	$\frac{\sigma_{1,\theta}}{100.000h}$	$\frac{\sigma_{\theta\rho,\theta}}{10.000h}$	$\frac{\sigma_{\theta\rho,\theta}}{100.000h}$
400	12,4	11,0	16,5	15,4
410	11,2	9,8	15,3	14,3
420	10,0	8,6	14,1	13,0
430	9,8	7,4	12,9	11,8
440	8,7	6,3	11,7	10,6
450	7,6	5,2	10,5	9,4
460	6,5	4,1	9,3	8,2
470	5,5	3,2	8,1	7,1
480	4,6	2,6	7,1	6,2

Λύση.

α) Από τον πίνακα 1.8.2 έχομε ότι στη θερμοκρασία των 460°C, η τάση θραύσεως για 100.000 ώρες είναι ίση με 8,2 N/mm^2. Η εφαρμοζόμενη τάση των 3 N/mm^2 είναι μικρότερη από την τάση θραύσεως. Άρα, το υλικό θα αντέξει τη φόρτιση, για την οποία προορίζεται.

β) Από τον πίνακα 1.8.2 έχομε ότι στη θερμοκρασία των 460°C, η τάση που προκαλεί επιμήκυνση 1% σε 100.000 ώρες είναι ίση με 4,1 N/mm^2. Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση των 3 N/mm^2 είναι μικρότερη από την τάση αυτή, η ανηγμένη επιμήκυνση στο τέλος της περιόδου των 100.000 ωρών θα είναι μικρότερη από 1%.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι τα προαναφερθέντα όρια αντοχής εν θερμώ των υλικών πρέπει να λαμβάνονται υπόψη παράλληλα με τα υπόλοιπα όρια αντοχής, όπως είναι το όριο διαρροής που αναφέραμε στην παράγραφο 1.3. Από όλα τα όρια αυτά πρέπει να χρησιμοποιείται κατά το σχεδιασμό των κατασκευών αυτό που παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή στην περιοχή θερμοκρασιών στην οποία η κατασκευή αναμένεται να λειτουργήσει.

1.8.6 Από τι εξαρτάται το φαινόμενο του ερπυσμού;

Τα πειράματα ερπυσμού έδειξαν ότι το φαινόμενο του ερπυσμού των υλικών εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες:

α) ***Το σημείο τήξεώς τους.*** Η θερμοκρασία εμφανίσεως ερπυσμού στα μέταλλα είναι περίπου ίση με το ένα τρίτο του σημείου τήξεώς τους. Επίσης, τα μέταλλα που έχουν υψηλό σημείο τήξεως παρουσιάζουν χαμηλό ερπυσμό και το αντίθετο.

β) ***Αν είναι καθαρά μέταλλα ή κράματα.*** Συγκεκριμένα, ο ερπυσμός των κραμάτων[1] μετάλλων είναι μικρότερος από τον ερπυσμό των καθαρών μετάλλων. Έτσι, σε κατασκευές που λειτουργούν σε υψηλές θερμοκρασίες χρησιμοποιούνται κράματα μετάλλων και όχι καθαρά μέταλλα.

γ) ***Το μέγεθος των κόκκων τους.*** Συγκεκριμένα, τα υλικά που έχουν λεπτούς κόκκους παρουσιάζουν μεγαλύτερο ερπυσμό από ό,τι τα υλικά που έχουν χονδρούς κόκκους. Έτσι, σε κατασκευές που λειτουργούν σε υψηλές θερμοκρασίες χρησιμοποιούνται υλικά με χονδρούς κόκκους.

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι υπάρχουν υλικά που παρουσιάζουν πολύ μεγάλες παραμορφώσεις από ερπυσμό, ακόμα και σε μικρές θερμοκρασίες. Τέτοια υλικά είναι τα πολυμερή. Επίσης, υπάρχουν υλικά, των οποίων ο ερπυσμός μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Ένα τέτοιο υλικό είναι το μπετόν, ο ερπυσμός του οποίου μειώνεται με την ενσωμάτωση σιδερένιου οπλισμού.

Ασκήσεις.

1. *Δίνεται ράβδος από σίδηρο που έχει μήκος $l = 2{,}5$ m. Να υπολογιστούν:*
α) Η μεταβολή του μήκους της ράβδου όταν ελαττωθεί η θερμοκρασία της από 50 °C σε 25°C.
β) Το τελικό μήκος της ράβδου.
Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής του σιδήρου $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}/\,^{o}C$.

2. *Προκειμένου να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής διαστολής ενός υλικού μιας ράβδου, αυξάνεται η θερμοκρασία της από 30°C σε 70°C. Ως αποτέλεσμα της αυξήσεως της θερμοκρασίας παρατηρείται ότι το μήκος της ράβδου αυξάνει από 1m σε 1,001m. Ποιος είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής του υλικού της;*

3. *Τα όρια αντοχής εν θερμώ ενός υλικού X για διάφορες θερμοκρασίες δίνεται στον πίνακα 1.8.2. Το υλικό πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε θερμοκρασία 440°C για να φορτισθεί με τάση $\sigma = 4\ N/mm^2$ για τις επόμενες 100.000 ώρες.*
α) Μπορεί το υλικό να αντέξει τη φόρτιση για την οποία προορίζεται;
β) Η ανηγμένη επιμήκυνση στο τέλος της περιόδου των 100.000 ωρών θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από 1%;
γ) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β) στην περίπτωση που η τάση φορτίσεως είναι $\sigma = 6{,}5\ N/mm^2$.

1.9 Κόπωση υλικού.

Οι κατασκευές που δέχονται μεταβλητή φόρτιση, μετά από αρκετές εκατοντάδες χιλιάδες

[1] **Κράματα** ονομάζονται τα υλικά που συνίστανται από διαφορετικά συστατικά. Περιέχουν ένα μέταλλο ως το κύριο συστατικό τους, ενώ τα υπόλοιπα συστατικά τους μπορεί να είναι μέταλλα ή αμέταλλα. Τα κράματα δημιουργούνται προκειμένου να συνδυαστούν οι ιδιότητες των διαφόρων συστατικών που τα αποτελούν βελτιώνοντας έτσι την αντοχή τους συγκριτικά με τα καθαρά μέταλλα.

επαναλήψεις της φορτίσεώς τους, θραύονται ή εμφανίζουν ρωγμές, παρόλο που δέχονται τάσεις μικρότερες από την τάση θραύσεως του υλικού τους. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***κόπωση*** του υλικού. Ειδικότερα:

Κόπωση ενός υλικού ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο το υλικό στο οποίο ενεργεί μεταβλητό φορτίο, μετά από έναν ορισμένο αριθμό επαναλήψεως της φορτίσεως, της τάξεως των εκατοντάδων χιλιάδων φορών θραύεται ή παρουσιάζει ρωγμές σε τάση μικρότερη από την τάση θραύσεως που έχει το υλικό για φόρτιση με σταθερό φορτίο.

Το φαινόμενο της κοπώσεως μελετήθηκε αρχικά από το Γερμανό ερευνητή Wöhler και περιγράφεται με τη βοήθεια των διαγραμμάτων κοπώσεως (υποπαράγ. 1.9.1). Το φαινόμενο οφείλεται σε μία βαθμιαία, μόνιμη μεταβολή στη δομή του υλικού των κατασκευών, η οποία παρατηρείται στις κατασκευές που δέχονται μεταβλητή φόρτιση. Οι κυριότεροι παράγοντες που επιδρούν στην εμφάνιση του φαινομένου της κοπώσεως παρουσιάζονται στην υποπαράγραφο 1.9.2.

Ευαίσθητα σε κόπωση είναι συνθετικά στοιχεία μηχανών ή κατασκευές που στηρίζουν μηχανές. Ως παράδειγμα αναφέρομε τις γερανογέφυρες και τις δοκούς που τις στηρίζουν.

Η μεταβλητή φόρτιση που μπορεί να προκαλέσει κόπωση ονομάζεται συνήθως επαναλαμβανόμενη φόρτιση.

Όπως είδαμε στην υποπαράγραφο 1.1.2, τα φορτία που ενεργούν σε μια κατασκευή μπορεί να είναι σταθερά ή μεταβλητά. Όταν σε μια κατασκευή ενεργούν μεταβλητά φορτία λέμε ότι έχει μεταβλητή φόρτιση.

Μια ειδική περίπτωση μεταβλητών φορτίων είναι τα επαναλαμβανόμενα κατά περιοδικό τρόπο φορτία. Ειδικές υποπεριπτώσεις επαναλαμβανομένων κατά περιοδικό τρόπο φορτίων είναι οι ακόλουθες:

α) ***Μη εναλλασσόμενη περιοδική φόρτιση.*** Στην περίπτωση αυτή η τάση φορτίσεως μεταβάλλεται ημιτονοειδώς[1] μεταξύ μιας ελάχιστης θετικής τιμής σ_{min} και μιας μέγιστης τιμής σ_{max}. Η μέση τάση φορτίσεως είναι: $\sigma_{μέση} = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2}$.

β) ***Πρωτογενής φόρτιση***. Στην περίπτωση αυτή η τάση φορτίσεως μεταβάλλεται ημιτονοειδώς μεταξύ του μηδενός και μιας μέγιστης τιμής σ_{max}. Η μέση τάση είναι: $\sigma_{μέση} = \frac{\sigma_{max}}{2}$.

γ) ***Εναλλασσόμενη ή παλμική φόρτιση.*** Στην περίπτωση αυτή η τάση φορτίσεως μεταβάλλεται ημιτονοειδώς μεταξύ μιας ελάχιστης αρνητικής τιμής $-\sigma_{max}$ και μιας μέγιστης τιμής σ_{max}. Η τάση είναι άλλοτε θετική, οπότε έχομε εφελκυσμό και άλλοτε αρνητική, οπότε έχομε θλίψη. Έτσι η μέση τάση είναι $\sigma_{μέση} = 0$.

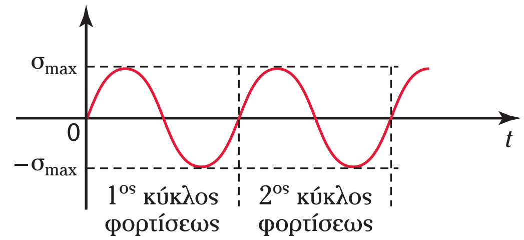
1.9.1 Διάγραμμα κοπώσεως.

Η μελέτη του φαινομένου της κοπώσεως γίνεται με τη βοήθεια σχετικού πειράματος. Στο πείραμα χρησιμοποιούμε δοκίμια του υπό μελέτη υλικού, στα οποία εφαρμόζεται εναλλασσόμενη φόρτιση, όπως εικονίζεται στο σχήμα 1.9α. Μια πλήρης εναλλαγή φορτίσεως ονομάζεται ***κύκλος φορτίσεως***. Σε κάθε δοκίμιο εφαρμόζεται μια διαφορετική μέγιστη τάση φορτίσεως. Στο πείραμα μετρούμε τον αριθμό των κύκλων φορτίσεως μέχρι κάθε δοκίμιο να υποστεί θραύση.

Τα αποτελέσματα του πειράματος απεικονίζονται σε διάγραμμα που ονομάζεται ***διάγραμμα κοπώσεως*** ή αλλιώς ***διάγραμμα Wöhler*** (σχ. 1.9β). Το διάγραμμα κοπώσεως απεικονίζει τη σχέση της διακυμάνσεως της τάσεως που εφαρμόζεται στα δοκίμια ως συνάρτηση του αριθμού των κύκλων φορτίσεως μέχρι τη θραύση των δοκιμίων. Η διακύμανση τάσεως είναι η αλγε-

[1] Ως ημιτονοειδείς ονομάζονται οι μεταβολές που είναι ανάλογες με τις μεταβολές του ημιτόνου. Η γραφική παράσταση των μεταβολών αυτών είναι ίδια με την εικόνα της γραφικής παραστάσεως της ψ = ημx (σχ. 1.9α).

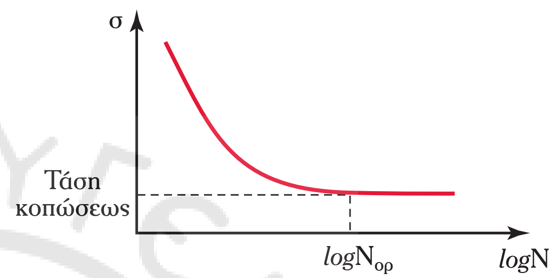
βρική διαφορά μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης τιμής της τάσεως σε κάθε κύκλο, ανεξαρτήτως προσήμου. Για την περίπτωση των ημιτονειδών μεταβολών του σχήματος 1.9α η διακύμανση της τάσεως ισούται με το διπλάσιο της μέγιστης τάσεως σ_{max}. Ο κατακόρυφος άξονας παρουσιάζει τη διακύμανση της τάσεως σ που εφαρμόζεται στα δοκίμια και ο οριζόντιος σε λογαριθμική κλίμακα το αντίστοιχο πλήθος των κύκλων φορτίσεως.



Σχ. 1.9α.
Εναλλασσόμενη φόρτιση δοκιμίων

Μελετώντας το διάγραμμα κοπώσεως καταλήγομε στις εξής σημαντικές διαπιστώσεις:

α) Η συμπεριφορά του υλικού στη μεταβλητή φόρτιση είναι πολύ διαφορετική από τη συμπεριφορά του υλικού στη φόρτιση με σταθερά φορτία. Στη φόρτιση με σταθερά φορτία, εάν δεν έχομε ερπυσμό, το υλικό δεν θραύεται όταν φορτιστεί με φορτίο κάτω του ορίου θραύσεως. Αντίθετα, στη μεταβλητή φόρτιση όσο πιο πολλούς κύκλους φορτίσεως δέχεται το υλικό, τόσο πιο μικρή τάση μπορεί να αντέξει.



Σχ. 1.9β.
Διάγραμμα κοπώσεως.

β) Ο αριθμός των κύκλων φορτίσεως μέχρι τη θραύση αυξάνει, όσο η διακύμανση της τάσεως που εφαρμόζεται στα δοκίμια μειώνεται.

γ) Υπάρχει μια οριακή τιμή της διακυμάνσεως τάσεως φορτίσεως, η οποία έχει την έξης ιδιότητα: όταν η διακύμανση της τάσεως της εναλλασσόμενης φορτίσεως είναι μικρότερη από την οριακή αυτή τιμή, το υλικό δεν θραύεται όσοι κύκλοι φορτίσεως και αν εφαρμοστούν. Με άλλα λόγια, στο υλικό μπορούν να εφαρμοστούν άπειροι κύκλοι φορτίσεως, με διακύμανση τάσεως εναλλασσόμενης φορτίσεως μικρότερη από την οριακή αυτή τιμή, χωρίς να υποστεί θραύση. Η οριακή αυτή τιμή φορτίσεως ονομάζεται ***τάση κοπώσεως*** ή ***όριο κοπώσεως*** ή ***δυναμική αντοχή του υλικού***. Επίσης, ονομάζεται και ***όριο αντοχής διάρκειας***, καθώς για τάσεις μικρότερες από την τιμή αυτή το υλικό έχει άπειρη διάρκεια ζωής και δεν θραύεται. Συνήθως, η τάση κοπώσεως εκφράζεται ως ποσοστό του ορίου θραύσεως σε εφελκυσμό που αντιστοιχεί σε φόρτιση με σταθερά φορτία.

δ) Το όριο κοπώσεως αντιστοιχεί σε μία οριακή τιμή αριθμού κύκλων φορτίσεως, που συμβολίζεται με $N_{ορ}$ και ονομάζεται ***οριακός αριθμός κύκλων φορτίσεως***.

Η τάση κοπώσεως εξαρτάται από:

α) Το υλικό.

β) Τον τρόπο δράσεως της φορτίσεως και

γ) το είδος της μεταβλητής φορτίσεως που δρα στο υλικό.

Ο τρόπος δράσεως της φορτίσεως αφορά στο εάν η επιβαλλόμενη φόρτιση προκαλεί εφελκυσμό ή άλλη καταπόνηση. Η έννοια και τα είδη των καταπονήσεων παρουσιάζονται αντιστοίχως στις παραγράφους 1.12 και 1.13.

Σχετικά με το είδος της μεταβλητής φορτίσεως, αναφέρομε ότι εκτός από την εναλλασσόμενη φόρτιση μπορούμε να πραγματοποιήσομε και άλλα είδη μεταβλητής φορτίσεως, προκειμένου να μελετήσομε το φαινόμενο της κοπώσεως και να κατασκευάσομε διαγράμματα κοπώσεως, όπως αυτό που περιγράψαμε παραπάνω. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ανάλογη με τη διαδικασία που περιγράψαμε για την εναλλασσόμενη φόρτιση και περιλαμβάνει την κατασκευή αντίστοιχου διαγράμματος κοπώσεως. Από το διάγραμμα κοπώσεως που κατασκευάζομε προκύπτει το όριο κοπώσεως, που ορίζεται ως η τιμή της διακυμάνσεως τάσεως, κάτω από την οποία τα δοκίμια έχουν άπειρη ζωή όταν δέχονται τη μεταβλητή φόρτιση που πραγματοποιήσαμε και αντιστοιχεί στην εν λόγω φόρτιση. Επομένως, όταν δίνεται το όριο κοπώσεως, ενός υλικού πρέπει να συνοδεύεται και από την πληροφορία του είδους μεταβλητής φορτίσεως, στην οποία αντιστοιχεί.

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι αρκετές φορές το πείραμα κοπώσεως σταματά όταν συμπληρωθεί αριθμός κύκλων φορτίσεως μικρότερος από τον οριακό αριθμό κύκλων φορτίσεως. Στις περιπτώσεις αυτές προκύπτει ένα όριο αντοχής του υλικού σε κόπωση, το οποίο όμως αντιστοιχεί στον αριθμό κύκλων φορτίσεως που πραγματοποιήθηκαν. Ο αριθμός αυτός πρέπει να συνοδεύει το όριο αντοχής του υλικού σε κόπωση.

1.9.2 Παράγοντες που καθορίζουν την αντοχή υλικών σε κόπωση.

Με τη μελέτη του φαινομένου της κοπώσεως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η αντοχή των υλικών σε κόπωση εξαρτάται κυρίως από την ύπαρξη σημείων στα οποία λαμβάνει χώρα συγκέντρωση τάσεων, δηλαδή εμφανίζεται τάση πολύ μεγαλύτερη από την τάση των περιοχών μακριά από τα σημεία αυτά. Το φαινόμενο της συγκεντρώσεως τάσεων αναλύεται στην παράγραφο 1.10. Συγκεκριμένα, η κόπωση ενός υλικού εξαρτάται κυρίως από τους ακόλουθους παράγοντες:

α) Τις ***υπάρχουσες εγκοπές*** στο υλικό. Ο όρος εγκοπή αναφέρεται σε μία σειρά καταστάσεων, όπως η απότομη αλλαγή των διαμέτρων, τα στρογγυλέματα, τα σπειρώματα, οι οπές, οι σφηνόδρομοι[1], τα ραγίσματα, οι φυσαλίδες, οι αποφλοιώσεις των επιφανειών, τα εγκλείσματα των χυτών κομματιών κ.ο.κ. Στις εγκοπές λαμβάνει χώρα συγκέντρωση τάσεων.

β) Τη ***μηχανική κατάσταση*** του υλικού. Ο όρος μηχανική κατάσταση αναφέρεται στην ύπαρξη τραχειών επιφανειών στο υλικό. Στις τραχείες επιφάνειες υπάρχει μεγαλύτερη συγκέντρωση τάσεων απ' ό,τι στις λείες.

γ) Τις ***κατεργασίες που έχει υποστεί*** το υλικό. Οι κατεργασίες αυτές περιλαμβάνουν, τόσο τις θερμικές, όσο και τις χημικές και ηλεκτροχημικές. Οι κατεργασίες έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ατελειών στο υλικό, στις οποίες έχομε συγκέντρωση τάσεων.

1.10 Συγκέντρωση τάσεων.

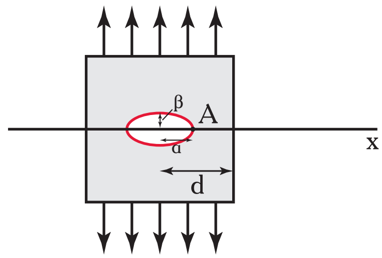
Ας θεωρήσομε την επίπεδη πλάκα του σχήματος 1.10α(α), στην οποία ενεργεί εφελκυστική τάση σ. Η πλάκα έχει μία μικρή οπή ελλειπτικού σχήματος με μεγάλο ημιάξονα α και μικρό ημιάξονα β. Ο χαρακτηρισμός της οπής ως «μικρή» αποδίδει το γεγονός ότι το μήκος και το πλάτος της πλάκας είναι πολύ μεγαλύτερα από το μεγάλο και το μικρό ημιάξονα της οπής, αντίστοιχα. Εάν δεν υπήρχε η οπή, τότε σε κάθε σημείο της επίπεδης πλάκας θα ενεργούσε εφελκυστική τάση σ, η οποία ονομάζεται και ***ονομαστική τάση***.

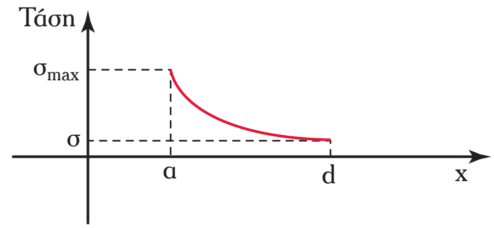
Ωστόσο, η παρουσία της οπής έχει ως αποτέλεσμα η τάση στην περιοχή της να αυξάνεται απότομα σε σχέση με την ονομαστική τάση σ. Το σχήμα 1.10α(β) παρουσιάζει την τάση ως συνάρτηση της αποστάσεως από το κέντρο της οπής, κατά μήκος του εικονιζόμενου οριζόντιου άξονα x. Παρατηρούμε ότι σε μεγάλες αποστάσεις από το άκρο Α του μεγάλου άξονα της οπής η τάση είναι ίση με την ονομαστική τάση σ. Καθώς πλησιάζομε αρκετά κοντά στη σημείο Α η τάση αρχίζει και αυξάνεται απότομα και στο σημείο Α λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. Αποδεικνύεται ότι η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στο άκρο Α του μεγάλου άξονα της οπής δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{\beta}\right) \qquad (1.20)$$

Το φαινόμενο που μόλις περιγράψαμε ονομάζεται ***συγκέντρωση τάσεων***. Δηλαδή:

[1] Οι ***σφηνόδρομοι*** είναι οι αυλακώσεις που διαμορφώνονται πάνω σε σώματα, ώστε να μπορούν να ωθούνται οι σφήνες μέσα σ' αυτές.





Σχ. 1.10α.
(α) Επίπεδη πλάκα με μικρή ελλειπτική οπή, στην οποία δρα εφελκυστική τάση. (β) Γραφική παράσταση της τάσεως σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της οπής.

Συγκέντρωση τάσεων ονομάζεται η απότομη αύξηση της τάσεως πάνω από μία ονομαστική τιμή σε μία τοπική περιοχή ενός υλικού, λόγω υπάρξεως γεωμετρικών ασυνεχειών, όπως είναι οι οπές, οι κοιλότητες και οι εγκοπές.

Το φαινόμενο της συγκεντρώσεως τάσεων έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της αντοχής των υλικών, εξαιτίας της εν λόγω αυξήσεως των τάσεων τοπικά κοντά στις γεωμετρικές ασυνέχειες. Η αύξηση αυτή μπορεί να είναι τόσο μεγάλη, ώστε τοπικά οι τάσεις να υπερβαίνουν την τάση θραύσεως του υλικού, με αποτέλεσμα το υλικό να κινδυνεύει τελικά να καταστραφεί. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το υλικό που έχει γεωμετρικές ασυνέχειες πρέπει να φορτίζεται λιγότερο, ώστε οι μεγάλες τάσεις που εμφανίζονται στις γεωμετρικές ασυνέχειες να μην οδηγούν σε θραύση του υλικού. Επίσης, οι σχεδιαστές των κατασκευών πρέπει να επιλέγουν κατάλληλα σχήματα, ώστε να ελαχιστοποιούν τις συγκεντρώσεις τάσεων.

Για τον υπολογισμό της αυξήσεως των τάσεων στην περιοχή μιας γεωμετρικής ασυνέχειας χρησιμοποιείται ο ***συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων***.

Ως ***συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων k*** ορίζεται το πηλίκο της μέγιστης τάσεως σ_{max} που εμφανίζεται σε μία ασυνέχεια προς την ονομαστική τιμή τάσεως σ.

Δηλαδή, ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων δίνεται από τη σχέση:

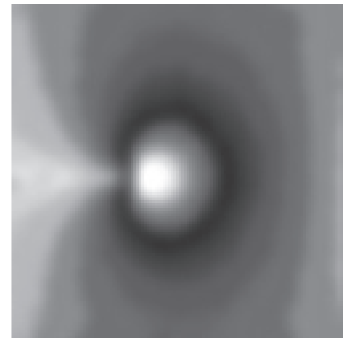
$$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} \tag{1.21}$$

Για το παράδειγμα της ελλειπτικής οπής του σχήματος 1.10α(α), ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση (1.21) αντικαθιστώντας τη σχέση (1.20):

$$k = 1 + \frac{2\alpha}{\beta} \tag{1.22}$$

Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων αποτελεί συνάρτηση της γεωμετρίας της ασυνέχειας και όχι του μεγέθους της. Ο συντελεστής αυτός για διάφορες γεωμετρικές μορφές ασυνέχειας παρέχεται από διάφορα πρότυπα αναφοράς υλικών, τα οποία χρησιμοποιούνται από τους σχεδιαστές των κατασκευών, ώστε να προβλέψουν τις τάσεις που θα αναπτυχθούν στις κατασκευές που σχεδιάζουν.

Σήμερα, δύο σύγχρονοι τρόποι υπολογισμού του συντελεστή συγκεντρώσεως τάσεων είναι η φωτοελαστική ανάλυση τάσεων και η ραδιομετρική θερμοελαστική ανάλυση τάσεων. Η φωτοελαστική ανάλυση τάσεων είναι μία οπτική μέθοδος, η οποία χρησιμοποιείται για την παρουσίαση του πλήρους πεδίου των κατανομών τάσεων σε φωτοελαστικά υλικά. Όταν τα υλικά αυτά μετρηθούν από ειδικά όργανα μετρήσεως που ονομάζονται ***πολωσίμετρα***, τη στιγμή που δέχονται εξωτερικές δυνάμεις, παρέχουν έγχρωμες εικόνες με διαβαθμίσεις. Η ανάλυση των εγχρώμων αυτών εικόνων αποκαλύπτει την κατανομή των τάσεων στα υλικά. Η μέθοδος της ραδιομετρικής θερμοελαστικής αναλύσεως τάσεων στηρίζεται στην ιδιότητα που παρουσιάζουν τα υλικά, στα οποία ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, να εμφανίζουν διαφορές της θερμοκρασίας εντός του υλικού, καθώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις μεταξύ των ατόμων του . Κάμερες που έχουν την ικανότητα να συλλαμβάνουν τις διαφορές αυτές θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση του πεδίου των τάσεων. Μια τέτοια εικόνα παρουσιάζεται στο σχήμα 1.10β, η οποία αντιστοιχεί σε ρωγμή σε ένα υλικό. Από την ανάλυση των εικόνων που λαμβάνονται από τις ανωτέρω δύο μεθόδους υπολογίζεται η μέγιστη τάση και στη συνέχεια προσδιορίζεται ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεως.



Σχ. 1.10β.
Εικόνα ρωγμής σε υλικό από εφαρμογή της μεθόδου της ραδιομετρικής θερμοελαστικής αναλύσεως τάσεων.

Παράδειγμα 14.

Η μικρή ελλειπτική οπή του σχήματος 1.10α(α) έχει μεγάλο ημιάξονα, διπλάσιο του μικρού ημιάξονα. Εάν η ονομαστική εφελκυστική τάση ισούται με $\sigma = 3\ N/mm^2$, να υπολογιστούν:

α) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και

β) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\sigma = 3\ N/mm^2$	$\sigma_{max} = ;$
$\alpha = 2 \cdot \beta$	$k = ;$

Λύση.

Για την ελλειπτική οπή ισχύει: $\alpha = 2 \cdot \beta$.

α) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων είναι:

$$\sigma_{max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{\beta}\right) = \sigma \cdot \left(1 + \frac{4\beta}{\beta}\right) = 5 \cdot \sigma = 15\ N/mm^2$$

β) Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων είναι: $k = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma} = 5$.

Παράδειγμα 15.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.20) υπολογίστε:

α) Τη μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και

β) το συντελεστή συγκεντρώσεως τάσεων

για την περίπτωση μικρής κυκλικής οπής ακτίνας α που βρίσκεται σε επίπεδη πλάκα, στην οποία αναπτύσσεται εφελκυστική ονομαστική τάση $\sigma = 2\ N/mm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\sigma = 2\ N/mm^2$	$\sigma_{max} = ;$
$\alpha = \beta$	$k = ;$

Λύση.

Ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως έλλειψη με το μεγάλο ημιάξονά της να είναι ίσος με το μικρό: $\alpha = \beta$.

α) Έτσι, για τον υπολογισμό της μέγιστης αναπτυσσόμενης τάσεως στη συγκέντρωση τάσεων, χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.20) θέτοντας $\alpha = \beta$:

$$\sigma_{max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{\alpha}\right) = 3 \cdot \sigma = 6 \ \mathrm{N/mm^2}$$

Δηλαδή, η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων στην κυκλική οπή είναι τριπλάσια της ονομαστικής.

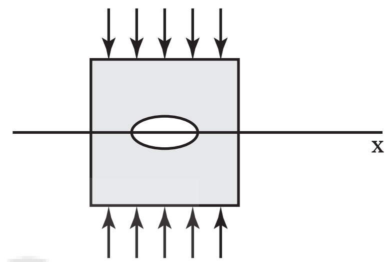
β) Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων είναι: $sk = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = 3$.

Άσκηση

Δίνεται η επίπεδη πλάκα του σχήματος 1.10γ, η οποία έχει πολύ μικρή οπή σε σχήμα ελλείψεως με μεγάλο ημιάξονα τριπλάσιο του μικρού ημιάξονα. Στην πλάκα εφαρμόζεται θλιπτική ονομαστική τάση ίση με σ = 35 N/mm^2. Να υπολογιστούν:

α) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και

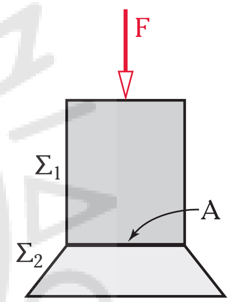
β) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων.



Σχ. 1.10γ.

1.11 Επιφανειακή θλίψη.

Είναι συχνό το φαινόμενο να μεταφέρεται θλιπτική δύναμη από ένα σώμα σ' άλλο μέσω της επιφάνειας επαφής τους. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1.11α απεικονίζεται ένα σώμα Σ_1, στο οποίο ασκείται θλιπτική δύναμη F. Το σώμα Σ_1 έρχεται σε επαφή με ένα άλλο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους A. Η θλιπτική δύναμη F μεταφέρεται από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους A. Η εφαρμογή της δυνάμεως F στην επιφάνεια A έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη πιέσεως στην επιφάνεια A. Η πίεση αυτή ονομάζεται ***επιφανειακή πίεση***, συμβολίζεται με p και δίνεται από το πηλίκον της δυνάμεως F προς το εμβαδόν της επιφάνειας A, δηλαδή:



Σχ. 1.11α.
Μεταφορά θλιπτικής δυνάμεως από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους.

$$p = \frac{F}{A} \tag{1.23}$$

Οι μονάδες μετρήσεως της ***επιφανειακής πιέσεως*** παρουσιάζονται στον πίνακα 1.11. Επειδή η μονάδα επιφάνειας 1m^2 είναι αρκετά μεγάλη, στην πράξη χρησιμοποιούμε υποπολλαπλασιά της (1 cm^2, 1 mm^2). Έτσι η επιφανειακή πίεση μετρείται σε N/cm^2 ή N/mm^2.

Από τη σχέση (1.23) διαπιστώνομε ότι η επιφανειακή πίεση:

α) Είναι ***ανάλογη*** της ***θλιπτικής δυνάμεως***. Αυτό σημαίνει ότι στην ίδια επιφάνεια, διπλάσια θλιπτική δύναμη αναπτύσσει διπλάσια επιφανειακή πίεση κ.ο.κ..

β) Είναι ***αντιστρόφως ανάλογη*** του ***εμβαδού της επιφάνειας***. Αυτό σημαίνει ότι, εάν η ίδια δύναμη δράσει σε επιφάνεια διπλάσιου εμβαδού, τότε αναπτύσσεται η μισή επιφανειακή πίεση κ.ο.κ..

Πίνακας 1.11.

Μέγεθος	***Διεθνές Σύστημα***	***C.G.S.***	***Τεχνικό Σύστημα***	***Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα***
Επιφανειακή πίεση	1 N/m^2	1 dyn/cm^2	1 kp/m^2	1 lb/ft^2

Συγκρίνοντας τη σχέση (1.23) με τη σχέση (1.7) παρατηρούμε ότι η επιφανειακή πίεση υπολογίζεται κατ' ανάλογο τρόπο με την τάση θλίψεως. Ωστόσο, υπάρχει μία ειδοποιός διαφορά μεταξύ της επιφανειακής πιέσεως και της τάσεως θλίψεως. Η τάση θλίψεως αναπτύσσεται στο εσωτερικό του σώματος που θλίβεται, ενώ η επιφανειακή πίεση αφορά μόνο στην επιφάνεια επαφής των σωμάτων που μεταβιβάζουν το ένα στο άλλο τη θλιπτική δύναμη.

Παράδειγμα 16.

Το σώμα Σ_1 του σχήματος 1.11α έχει ορθογώνια διατομή με μικρή πλευρά α = 50 cm και μεγάλη πλευρά β = 80 cm. Το σώμα Σ_1 μεταφέρει στο σώμα Σ_2 θλιπτικό φορτίο F = 8.000 N. Να υπολογιστεί η επιφανειακή πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 50 cm	p = ;
β = 80 cm	
F = 8.000 N	

Λύση.

Η επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων είναι η ορθογώνια διατομή του σώματος Σ_1 που βρίσκεται σε επαφή με το σώμα Σ_2. Η επιφάνεια επαφής έχει εμβαδόν:

$$A = \alpha \cdot \beta = 50\ \text{cm} \cdot 80\ \text{cm} = 4.000\ \text{cm}^2$$

Η επιφανειακή πίεση p που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{8.000\ \text{N}}{4.000\ \text{cm}^2} = 2\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

1.11.1 Επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση.

Προκειμένου να μην δημιουργούνται ανεπιθύμητες παραμορφώσεις, πρέπει η αναπτυσσόμενη επιφανειακή πίεση να μην υπερβαίνει μία οριακή τιμή, η οποία ονομάζεται ***επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση*** και συμβολίζεται με $p_{\varepsilon\pi}$. Επομένως, πρέπει για την επιφανειακή πίεση να ισχύει:

$$p = \frac{F}{A} \le p_{\varepsilon\pi} \tag{1.24}$$

Το πρόβλημα που εμφανίζεται στις κατασκευές είναι συνήθως ο προσδιορισμός της επιφάνειας επαφής δύο σωμάτων, ώστε να είναι εφικτή η μεταφορά συγκεκριμένης θλιπτικής δυνάμεως, χωρίς να υπάρχουν ανεπιθύμητες παραμορφώσεις. Εάν επιλεγόταν επιφάνεια μικρού εμβαδού, ώστε η αναπτυσσόμενη επιφανειακή πίεση να είναι πολύ μεγάλη, μεγαλύτερη της επιτρεπόμενης επιφανειακής πιέσεως, τότε η επιφάνεια επαφής δεν θα άντεχε την πίεση και θα είχαμε θραύση της. Το εμβαδόν της επιφάνειας που επιλέγεται, ώστε να μην προκύψουν ανεπιθύμητες παραμορφώσεις, προσδιορίζεται από την ανισότητα (1.24), λύνοντάς την ως προς το εμβαδόν Α. Έτσι έχομε:

$$A \ge \frac{F}{p_{\varepsilon\pi}} \tag{1.25}$$

Συνεπώς, το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής δεν πρέπει να επιλεχθεί μικρότερο από την τιμή

$\frac{F}{p_{επ}}$. Αν χρησιμοποιήσομε επιφάνεια επαφής με εμβαδόν μικρότερο από $\frac{F}{p_{επ}}$, τότε θα έχομε ανεπιθύμητες παραμορφώσεις.

Παράδειγμα 17.

Ποια πρέπει να είναι η διάμετρος D κυκλικής επιφάνειας που χρησιμοποιείται για τη μεταβίβαση θλιπτικής δυνάμεως F = 1.000 N; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση είναι $p_{επ} = 4\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
F = 1.000 N	D = ;
$p_{επ} = 4\ N/cm^2$	

Λύση.

Το εμβαδόν της κυκλικής επιφάνειας επαφής δίνεται από τη σχέση:

$$A = \frac{π}{4} \cdot D^2 \quad (1)$$

Η επιφανειακή πίεση p που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή υπολογίζεται από τη σχέση: $p = \frac{F}{A}$ και πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση. Δηλαδή πρέπει:

$$\frac{F}{A} \leq p_{επ} \Leftrightarrow A \geq \frac{F}{p_{επ}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη σχέση (2) και λύνοντας ως προς τη διάμετρο έχομε:

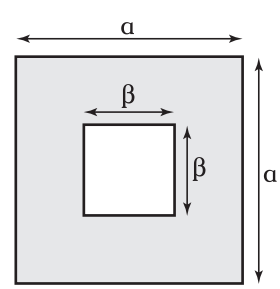
$$\frac{π}{4} \cdot D^2 \geq \frac{F}{p_{επ}} \Leftrightarrow D^2 \geq \frac{4 \cdot F}{π \cdot p_{επ}} \Leftrightarrow D \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{π \cdot p_{επ}}} \Leftrightarrow D \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1.000\ N}{3{,}14 \cdot 4\ N/cm^2}} \Leftrightarrow D \geq 17{,}85 cm$$

Επομένως, η διάμετρος της κυκλικής επιφάνειας πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 17,85cm.

Ασκήσεις.

1. *Η επιφάνεια επαφής μεταξύ δύο σωμάτων έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 1.11β, με α = 60 cm και β = 30 cm. Η επιφάνεια δέχεται θλιπτικό φορτίο F = 5.000 N.*
   Να υπολογιστεί η επιφανειακή πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή.

2. *Ποια πρέπει να είναι η πλευρά α τετραγωνικής επιφάνειας που χρησιμοποιείται για τη μεταβίβαση θλιπτικής δυνάμεως F = 13.500 N; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση είναι $p_{επ} = 60\ N/cm^2$.*



Σχ. 1.11β.

1.12 Εντατική κατάσταση.

Ας θεωρήσομε τη ράβδο του σχήματος 1.12, η οποία ισορροπεί στηριζόμενη στα άκρα της Α και Β. Στο μέσο της ράβδου ενεργεί εξωτερικό φορτίο F και στα άκρα της Α και Β οι δυνάμεις

$F_A = F/2$ και $F_B = F/2$ από τα στηρίγματα. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν τις εξωτερικές δυνάμεις, που ενεργούν στη ράβδο. Γενικότερα:

Οι ***εξωτερικές δυνάμεις*** που ενεργούν σ’ ένα σώμα είναι τα φορτία του και οι δυνάμεις από τα στηρίγματά του.

Η εμφάνιση των δυνάμεων F_A και F_B από τα στηρίγματα οφείλεται στο ότι η εξωτερική δύναμη F «φτάνει» στα άκρα A και B διά μέσου του υλικού της ράβδου. Μπορούμε να θεωρήσομε ότι η ράβδος αποτελείται από μικρά τμήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.12(α), τα οποία αριθμούνται με 1, 2, 3, …, N-1, N, N+1, …, 2N, 2N+1. Στο πρώτο μικρό τμήμα της ράβδου που βρίσκεται στο άκρο B επιδρούν η δύναμη από το στήριγμα F_B και μία δύναμη $F_{2\to1}$ από το δεύτερο μικρό τμήμα της ράβδου, η οποία, επειδή το πρώτο τμήμα ισορροπεί, είναι αντίθετη της F_B [σχ. 1.12(β)].

Στο δεύτερο τμήμα της ράβδου επιδρά μία δύναμη $F_{1\to2}$ από το πρώτο μικρό τμήμα που έλκει το δεύτερο τμήμα προς τα πάνω και μία δύναμη $F_{3\to2}$ από το τρίτο τμήμα της ράβδου που έλκει το δεύτερο τμήμα προς τα κάτω. Η δύναμη $F_{1\to2}$, λόγω του αξιώματος της δράσεως-αντιδράσεως της Μηχανικής, είναι αντίθετη της δυνάμεως που ασκεί το δεύτερο μικρό τμήμα της ράβδου στο πρώτο μικρό τμήμα της, δηλαδή είναι αντίθετη της δυνάμεως $F_{2\to1}$. Και επειδή, όπως είπαμε, η δύναμη $F_{2\to1}$ είναι αντίθετη της F_B, η δύναμη $F_{1\to2}$ είναι ίση με την F_B. Επίσης, επειδή το δεύτερο τμήμα της ράβδου ισορροπεί, η δύναμη $F_{3\to2}$ είναι αντίθετη της F_B.

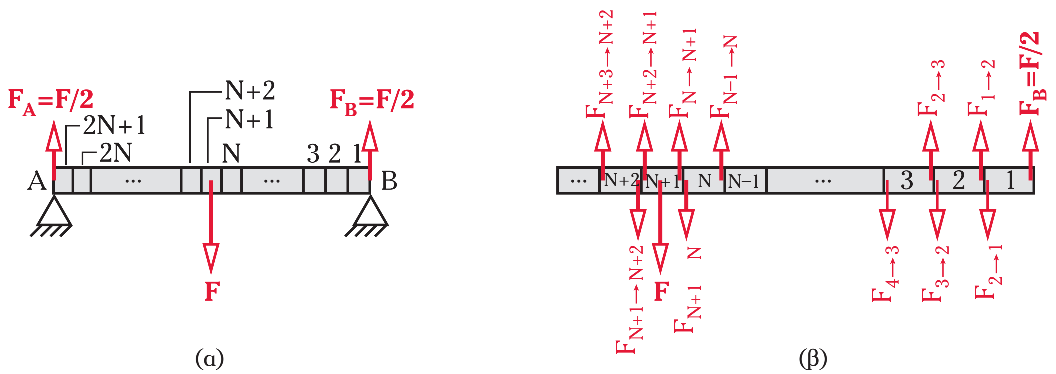
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο για το τρίτο μικρό τμήμα της ράβδου, καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι η δύναμη $F_{2\to3}$ που ενεργεί στο τρίτο μικρό τμήμα από το δεύτερο είναι ίση με την F_B και η δύναμη $F_{4\to3}$ που ενεργεί στο τρίτο μικρό τμήμα από το τέταρτο είναι αντίθετη της F_B κ.ο.κ.. Στο N+1 τμήμα που βρίσκεται στο μέσο της ράβδου επιδρούν το εξωτερικό φορτίο F, η δύναμη $F_{N\to N+1}$ από το N τμήμα και η δύναμη $F_{N+2\to N+1}$ από το N+2 τμήμα. Οι δυνάμεις $F_{N\to N+1}$ και $F_{N+2\to N+1}$ είναι αντίθετες με το φορτίο F και ίσες με τις δυνάμεις F_B και F_A, αντίστοιχα. Επειδή το N+1 τμήμα ισορροπεί, οι δυνάμεις $F_{N\to N+1}$ και $F_{N+2\to N+1}$ ισούνται με F/2 η καθεμία. Με παρόμοιο τρόπο συνεχίζομε και για τα υπόλοιπα τμήματα μέχρι το 2N+1.

Όλες αυτές οι δυνάμεις $F_{1\to2}$, $F_{2\to1}$, $F_{2\to3}$, $F_{3\to2}$, …, $F_{N-1\to N}$, $F_{N\to N-1}$, … οφείλονται στις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων του υλικού της ράβδου. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν τις εσωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στη ράβδο. Γενικότερα:

Οι δυνάμεις που εμφανίζονται εσωτερικά του σώματος ως αποτέλεσμα της επιδράσεως εξωτερικών δυνάμεων ονομάζονται ***εσωτερικές δυνάμεις***. Οι εσωτερικές δυνάμεις προέρχονται από τις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων του υλικού του σώματος.

Συνεπώς, η εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων στη ράβδο και γενικότερα σε οποιοδήποτε σώμα, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση εσωτερικών δυνάμεων στο υλικό του σώματος.

Όταν εμφανίζονται εσωτερικές δυνάμεις σε ένα σώμα λόγω της επιδράσεως εξωτερικών δυνάμεων λέμε ότι το σώμα ***βρίσκεται σε εντατική κατάσταση,*** ή ***σε ένταση,*** ή ότι ***καταπονείται*** ή ότι υφίσταται ***καταπόνηση.***



Σχ. 1.12.

(α) Ράβδος στην οποία ενεργεί εξωτερικό φορτίο. (β) Λεπτομέρεια των εσωτερικών δυνάμεων της ράβδου.

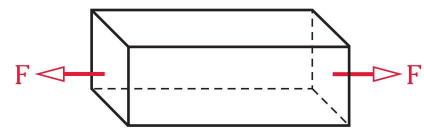
Η εντατική κατάσταση ενός σώματος περιγράφεται από μεγέθη που ονομάζονται εντατικά και είναι, μεταξύ άλλων, οι ορθές δυνάμεις, οι τέμνουσες δυνάμεις και οι καμπτικές ροπές (βλ. παράγρ. 3.3).

1.13 Είδη καταπονήσεων.

Ανάλογα με τον τρόπο που ενεργούν οι δυνάμεις στα σώματα παρουσιάζεται και διαφορετικός τρόπος καταπονήσεως, όπως, στρέψη, εφελκυσμός, θλίψη κ.ά.. Οι καταπονήσεις διακρίνονται σε ***απλές*** και ***σύνθετες***.

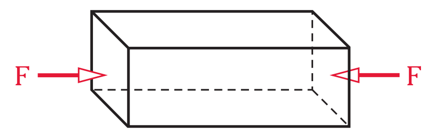
Οι ***απλές καταπονήσεις*** είναι οι ακόλουθες:

α) ***Εφελκυσμός***. Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό, όταν στον άξονά του ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, (σχ. 1.13α), οι οποίες τείνουν να αυξήσουν το μήκος του και να ελαττώσουν τη διατομή του. Στον εφελκυσμό αναπτύσσονται ορθές τάσεις. Σε εφελκυσμό, για παράδειγμα, καταπονείται το συρματόσχοινο γερανού (βλ. Κεφ. 2).



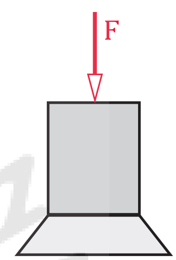
Σχ. 1.13α.
Καταπόνηση σε εφελκυσμό.

β) ***Θλίψη***. Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε θλίψη όταν στον άξονά του ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, (σχ. 1.13β), οι οποίες τείνουν να ελαττώσουν το μήκος του και να αυξήσουν τη διατομή του. Στη θλίψη αναπτύσσονται ορθές τάσεις. Σε θλίψη, για παράδειγμα, καταπονούνται τα υποστυλώματα (βλ. Κεφ. 2).



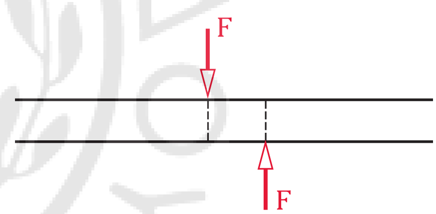
Σχ. 1.13β.
Καταπόνηση σε θλίψη.

γ) ***Επιφανειακή θλίψη***. Όταν δύο στερεά σώματα εφάπτονται μεταξύ τους μεταφέροντας ένα φορτίο, (σχ. 1.13γ), τότε έχομε θλίψη ως καταπόνηση επιφάνειας (βλ. παράγρ. 1.11). Σε επιφανειακή θλίψη, για παράδειγμα, καταπονούνται οι βάσεις μίας εργαλειομηχανής.



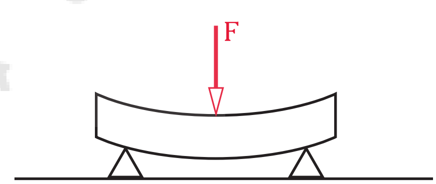
Σχ. 1.13γ.
Καταπόνηση σε επιφανειακή θλίψη.

δ) ***Διάτμηση και ψαλιδισμός.*** Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε διάτμηση όταν σ' αυτό ενεργούν δύο ίσες, παράλληλες, αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεις, από τις οποίες η μία ολισθαίνει πάνω στην άλλη (σχ. 1.13δ). Σε διάτμηση, για παράδειγμα, καταπονούνται τα καρφιά. Ειδικότερα, όταν οι δύο παράλληλες δυνάμεις είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη, σχεδόν πάνω στην ίδια ευθεία, τότε μιλάμε για καθαρή διάτμηση ή ψαλιδισμό ή απλά για τμήση. Στη διάτμηση αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις (βλ. Κεφ. 2).



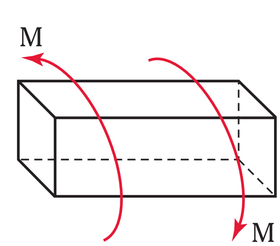
Σχ. 1.13δ.
Καταπόνηση σε διάτμηση.

ε) ***Κάμψη.*** Μία δοκός καταπονείται σε κάμψη όταν στηρίζεται σ' ένα ή περισσότερα σημεία και οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτήν είναι κάθετες στον οριζόντιο άξονά της και τείνουν να την καμπυλώσουν αλλάζοντας το σχήμα της, (σχ. 1.13ε). Σε κάμψη, για παράδειγμα, καταπονούνται τα δοκάρια του εξώστη ενός καταστρώματος πλοίου. Στην κάμψη αναπτύσσονται ορθές τάσεις (βλ. Κεφ. 4).



Σχ. 1.13ε.
Καταπόνηση σε κάμψη.

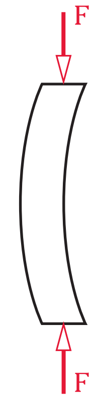
στ) ***Στρέψη.*** Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε στρέψη, όταν πάνω σ' αυτό ασκούνται δύο ροπές ίσες και αντίθετης φοράς, (σχ. 1.13στ), οι οποίες όμως δεν βρίσκονται στο



Σχ. 1.13στ.
Καταπόνηση σε στρέψη.

ίδιο αλλά σε διαφορετικό επίπεδο. Στη στρέψη αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις. Σε στρέψη, για παράδειγμα, καταπονείται ο άξονας ενός βαρούλκου (βλ. Κεφ. 5).

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι σε μέλη κατασκευών που καταπονούνται σε θλίψη και των οποίων το μήκος είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη μικρότερη διάσταση της διατομής τους, η αντοχή τους εξαντλείται με εκδήλωση λυγισμού, δηλαδή εκτροπή από την ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας. Ο λυγισμός δεν είναι τύπος καταπονήσεως, όπως είναι η θλίψη, αλλά μορφή αστοχίας. Το σχήμα 1.13ζ παρουσιάζει σώμα που η αντοχή του εξαντλείται με εκδήλωση λυγισμού. Μέσω λυγισμού, για παράδειγμα, εξαντλείται η αντοχή των υποστυλωμάτων σε μεταλλικά υπόστεγα (βλ. Κεφ. 6).



Σχ. 1.13ζ.
Λυγισμός.

Σύνθετη καταπόνηση έχομε όταν ένα στερεό σώμα καταπονείται ταυτόχρονα σε δύο ή περισσότερα είδη απλών καταπονήσεων. Για παράδειγμα, σύνθετη καταπόνηση υφίσταται στερεό σώμα που καταπονείται ταυτόχρονα σε στρέψη και κάμψη. Ο κινητήριος άξονας που μεταφέρει ισχύ με ιμάντα καταπονείται σε στρέψη από τη μεταφερόμενη ισχύ και σε κάμψη από την έλξη των ιμάντων και των τροχαλιών (βλ. Κεφ. 7).

1.14 Αστοχία υλικών.

Η αστοχία των κατασκευών εξαρτάται, εκτός από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους και από τις ιδιότητες των υλικών, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σ' αυτές. Η αστοχία των κατασκευών δεν είναι ένα σπάνιο φαινόμενο. Παράδειγμα αστοχίας κατασκευής αποτελούν τα πλοία τύπου *Liberty* που χρησιμοποιήθηκαν κατά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο για τη μεταφορά εφοδίων από τις ΗΠΑ στην Ευρώπη. Σε ποσοστό μεγαλύτερο από 50% παρουσίασαν ρωγμές στο κατάστρωμα και στο κύτος και κάποια από αυτά έσπασαν ξαφνικά στη μέση. Από τη σχετική έρευνα που πραγματοποιήθηκε, διαπιστώθηκε ότι το υλικό από το οποίο κατασκευάστηκαν εμφάνιζε συμπεριφορά ψαθυρού υλικού στις χαμηλές θερμοκρασίες του Βόρειου Ατλαντικού, με αποτέλεσμα τα πλοία να έχουν μειωμένη ελαστικότητα στις καταπονήσεις του ωκεανού.

Τα διάφορα υλικά παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά στις διάφορες καταπονήσεις. Επίσης, υπάρχουν ορισμένα όρια καταπονήσεως πέρα από τα οποία συμβαίνουν σημαντικές αλλαγές στη συμπεριφορά των διαφόρων υλικών, όπως η εμφάνιση μονίμων παραμορφώσεων. Τέτοια όρια καταπονήσεως, τα οποία συναντήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, είναι το όριο διαρροής και το όριο θραύσεως.

Με τον όρο ***αστοχία υλικού*** εννοούμε, για τα όλκιμα υλικά την εμφάνιση διαρροής και για τα ψαθυρά την εμφάνιση θραύσεως.

Επειδή η πραγματική κατάσταση, στην οποία μια κατασκευή αστοχεί δεν είναι εύκολα παρατηρήσιμη, η εμφάνιση αστοχίας ενός υλικού κρίνεται με βάση κάποιο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό αφορά σε μία ισοδύναμη απλή καταπόνηση και τον υπολογισμό των ισοδυνάμων τάσεων, την έννοια των οποίων θα δούμε στο Κεφάλαιο 7. Τα κριτήρια αυτά ονομάζονται ***κριτήρια αστοχίας.*** Τα κριτήρια αστοχίας που έχουν διατυπωθεί είναι τα ακόλουθα:

α) Κριτήριο ***κρίσιμης ορθής τάσεως***. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, αστοχία υλικού συμβαίνει όταν οι μέγιστες ισοδύναμες ορθές τάσεις που αναπτύσσονται ξεπεράσουν το όριο διαρροής ή το όριο θραύσεως. Το κριτήριο δεν λαμβάνει υπόψη τις διατμητικές τάσεις.

β) Κριτήριο ***κρίσιμης διατμητικής τάσεως***. Το κριτήριο διατυπώθηκε από τους Mohr-Coulomb και σύμφωνα μ' αυτό αστοχία υλικού έχομε όταν η μέγιστη διατμητική τάση προσεγγίσει την τιμή της μέγιστης διατμητικής τάσεως διαρροής του υλικού, όταν καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

γ) Κριτήριο ***μέγιστης ορθής παραμορφώσεως***. Σύμφωνα μ' αυτό, η μέγιστη παραμόρφωση παρουσιάζεται στη διεύθυνση της μέγιστης ορθής τάσεως.

δ) Κριτήριο ***κρίσιμης ενέργειας παραμορφώσεως***. Σύμφωνα με αυτό, κατά την καταπόνηση ενός σώματος παράγεται έργο, το οποίο αποθηκεύεται ως ενέργεια παραμορφώσεως. Η ενέργεια αυτή αναλύεται σε δύο μέρη: σ' αυτήν που αντιστοιχεί στη μεταβολή του όγκου χωρίς στρέβλωση και σ' αυτήν που αντιστοιχεί σε στρέβλωση χωρίς μεταβολή του όγκου. Αστοχία έχομε όταν η ενέργεια παραμορφώσεως ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή.

ε) Κριτήριο ***στροφικής ενέργειας***. Το κριτήριο αυτό ονομάζεται και κριτήριο μέγιστου έργου παραμορφώσεως ή κριτήριο του Mises και συμφωνεί με τα πειραματικά αποτελέσματα στα όλκιμα υλικά. Σύμφωνα μ' αυτό, εάν ένα υλικό είναι ομογενές και ισότροπο, τότε είναι σημαντικό μόνο το μέρος της ενέργειας παραμορφώσεως που αντιστοιχεί σε στρέβλωση χωρίς μεταβολή του όγκου, η οποία ονομάζεται στροφική ενέργεια. Αστοχία έχομε όταν η στροφική ενέργεια του καταπονούμενου σώματος γίνει ίση με την αντίστοιχη ενέργεια σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

1.14.1 Επιτρεπόμενη τάση και συντελεστής ασφαλείας.

Προκειμένου να αποφεύγεται η αστοχία των υλικών μιας κατασκευής, αυτή πρέπει να λειτουργεί σε τάσεις πολύ μικρότερες απ' την τάση θραύσεως των υλικών της και συγκεκριμένα στην ελαστική περιοχή. Έτσι ορίζεται μία μέγιστη τιμή τάσεως, η οποία επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της. Αυτή η τάση ονομάζεται επιτρεπόμενη. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση μίας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος αστοχίας του υλικού της.

Η επιτρεπόμενη τάση συμβολίζεται με $\sigma_{\varepsilon\pi}$ ή $\tau_{\varepsilon\pi}$, ανάλογα εάν έχομε ορθές ή διατμητικές τάσεις, αντίστοιχα. Προκειμένου να έχομε ελαστικές παραμορφώσεις, η επιτρεπόμενη τάση δεν πρέπει να ξεπερνά το όριο ελαστικότητας του υλικού και καθορίζεται με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας[1].

Συντελεστής ασφαλείας v ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση από μία τάση αναφοράς.

Ανάλογα με την τάση αναφοράς που χρησιμοποιούμε έχομε τους ακόλουθους συντελεστές ασφαλείας:

α) ***Συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας*** v_E ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$ από το όριο ελαστικότητας σ_E. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας δίνεται από τη σχέση:

$$v_E = \frac{\sigma_E}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \tag{1.26}$$

β) ***Συντελεστής ασφαλείας έναντι διαρροής*** v_S ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$ από το όριο διαρροής σ_S. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας έναντι διαρροής δίνεται από τη σχέση:

$$v_S = \frac{\sigma_S}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \tag{1.27}$$

γ) ***Συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως*** v_B ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$ από το όριο θραύσεως σ_B. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως δίνεται από τη σχέση:

$$v_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \tag{1.28}$$

---

[1] Τελευταία, η έννοια της επιτρεπόμενης τάσεως και η έννοια του συντελεστή ασφαλείας αντικαθίστανται από την έννοια των μερικών συντελεστών φορτίων και την έννοια των οριακών αντοχών και αναπτύσσονται αντίστοιχες μεθοδολογίες σχεδιασμού.

Οι ανωτέρω ορισμοί των συντελεστών ασφαλείας αναφέρονται στην περίπτωση ορθών τάσεων. Ανάλογοι ορισμοί ισχύουν και για τις διατμητικές τάσεις.

Ο συντελεστής ασφαλείας που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη είναι ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως. Στο εξής αναφερόμαστε σ' αυτόν απλά ως συντελεστή ασφαλείας.

Παράδειγμα 18.

Το όριο ελαστικότητας και το όριο θραύσεως ενός υλικού είναι σ_E = 8.000 N/cm^2 και σ_B = 16.000 N/cm^2, αντίστοιχα. Η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{επ}$ = 4.000 N/cm^2. Να υπολογιστεί ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας και έναντι θραύσεως.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
σ_E = 8.000 N/cm^2	v_E = ;
σ_B = 16.000 N/cm^2	v_B = ;
$\sigma_{επ}$ = 4.000 N/cm^2	

Λύση.

Ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας είναι:

$$v_E = \frac{\sigma_E}{\sigma_{επ}} = \frac{8.000\ N/cm^2}{4.000\ N/cm^2} = 2.$$

Ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως είναι:

$$v_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{επ}} = \frac{16.000\ N/cm^2}{4.000\ N/cm^2} = 4.$$

Παρατήρηση:

Με αφορμή το παράδειγμα 18, στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσομε ότι η αναφορά σε τρεις συντελεστές ασφαλείας δεν σημαίνει ότι αυτοί αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές τιμές επιτρεπόμενης τάσεως. Η τιμή της επιτρεπόμενης τάσεως είναι μία. Αυτό που αλλάζει είναι η αναφορά ως προς την οποία υπολογίζεται ο συντελεστής ασφαλείας. Έχομε αναφέρει τρεις διαφορετικούς συντελεστές γιατί έχομε χρησιμοποιήσει τρεις διαφορετικές αναφορές, έναντι των οποίων θεωρείται η μία τιμή της επιτρεπόμενης τάσεως.

1.14.2 Καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας.

Ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής είναι πραγματικά μια δύσκολη υπόθεση. Η δυσκολία έγκειται αφενός στην ποικιλία των παραγόντων που πρέπει να λάβει κανείς υπόψη για τον καθορισμό του και αφετέρου στο γεγονός ότι πρέπει να συγκεραστούν οι ακόλουθοι στόχοι σχεδιασμού που επιτυγχάνονται με αντίθετες επιλογές:

α) Η ασφάλεια της κατασκευής.

β) Το μικρό βάρος της κατασκευής.

γ) Το μικρό κόστος της κατασκευής.

Η ασφάλεια της κατασκευής επιτυγχάνεται με τον καθορισμό μικρής επιτρεπόμενης τάσεως και άρα μεγάλου συντελεστή ασφαλείας. Ωστόσο, η επιλογή μεγάλου συντελεστή ασφαλείας έχει ως συνέπεια την αύξηση του μεγέθους των διατομών της κατασκευής και άρα την αύξηση του βάρους και του κόστους της. Από την άλλη πλευρά, οι στόχοι του μικρού βάρους και του μικρού κόστους της κατασκευής επιτυγχάνονται με την επιλογή μικρών διατομών της κατασκευής και άρα με μεγάλη επιτρεπόμενη τάση, δηλαδή με μικρό συντελεστή ασφαλείας. Έτσι, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας προκύπτει ως αποτέλεσμα του συγκερασμού των ανωτέρω στόχων.

Ο καθορισμός της επιτρεπόμενης τάσεως και άρα του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής εξαρτάται ιδίως από τους ακόλουθους παράγοντες:

α) Το μέγεθος των φορτίων που αναμένεται να δέχεται η κατασκευή.

β) Το είδος των φορτίων αυτών.

γ) Το είδος των καταπονήσεων που αναμένεται να δέχεται η κατασκευή.

δ) Το είδος της κατασκευής.

ε) Τη σπουδαιότητα της κατασκευής.

στ) Τα υλικά της κατασκευής.

ζ) Την ποιότητα των υλικών της κατασκευής, τις τυχόν ατέλειές τους και τη φθορά τους λόγω παλαιότητας ή χρήσεως.

η) Τη θερμοκρασία, στην οποία αναμένεται να λειτουργεί η κατασκευή.

θ) Τις απλουστευτικές παραδοχές που χρησιμοποιήθηκαν για τους υπολογισμούς.

Γενικά με το συντελεστή ασφαλείας επιδιώκεται να καλυφθούν οι αβεβαιότητες που έχομε:

α) Στις τιμές των φορτίων που λαμβάνομε υπόψη κατά τους υπολογισμούς. Έτσι για παράδειγμα, ένας λιμενοβραχίονας σχεδιάζεται για ένα ύψος κύματος που έχει προσδιοριστεί μετά από παρατηρήσεις πολλών ετών. Δεν υπάρχει όμως βεβαιότητα ότι αποκλείεται να παρουσιαστεί στο μέλλον κύμα με κάπως μεγαλύτερο ύψος.

β) Στην ποιότητα του υλικού. Η βιομηχανία παραδίδει προϊόντα με προδιαγεγραμμένες αντοχές. Δεν αποκλείεται πάντως μια παρτίδα να έχει και κάπως μικρότερη αντοχή.

γ) Ως προς τις απλουστεύσεις που κάνομε κατά τους υπολογισμούς.

Ο καθορισμός της επιτρεπόμενης τάσεως και άρα του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής γίνεται με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

α) ***Εμπειρικά***. Οι σχεδιαστές κατασκευών μπορούν να καθορίζουν το συντελεστή ασφαλείας με βάση την εμπειρία που απέκτησαν από άλλες συναφείς κατασκευές.

β) Με ***στατιστικές μεθόδους***. Η επιτρεπόμενη τάση προσδιορίζεται με επεξεργασία πειραματικών δεδομένων χρησιμοποιώντας μεθόδους, οι οποίες προέρχονται από τη Στατιστική Επιστήμη.

γ) Με ***βάση ισχύοντες ειδικούς κανονισμούς.*** Σήμερα ισχύουν διεθνείς ή εθνικοί κανονισμοί που ορίζουν τους συντελεστές ασφαλείας για διάφορες περιπτώσεις κατασκευών. Παραδείγματα τέτοιων κανονισμών αποτελούν:

– Οι ***κώδικες DIN*** (Deutsches Institut fur Normung) που αποτελούν σύνολο κωδίκων μοντέλων κατασκευών που έχουν αναπτυχθεί από το ***Γερμανικό Ινστιτούτο Προτυποποιήσεως***.
– Οι ***Ευρωκώδικες*** (Eurocodes) που αποτελούν σύνολο πανευρωπαϊκών κωδίκων μοντέλων κατασκευών, που έχουν αναπτυχθεί από την ***Ευρωπαϊκή Επιτροπή Προτυποποιήσεως*** (European Committee for Standardisation).

Σε πολλές περιπτώσεις οι παραπάνω κανονισμοί έχουν περιβληθεί σε αρκετά κράτη με ισχύ νόμου, με αποτέλεσμα να καθίσταται υποχρεωτική η εφαρμογή τους. Έτσι, η μη εφαρμογή τους αποτελεί παράβαση της κείμενης νομοθεσίας.

Στον πίνακα 1.14 παρουσιάζονται οι ***συντελεστές ασφαλείας για διάφορα υλικά*** που συνήθως χρησιμοποιούνται στην πράξη.

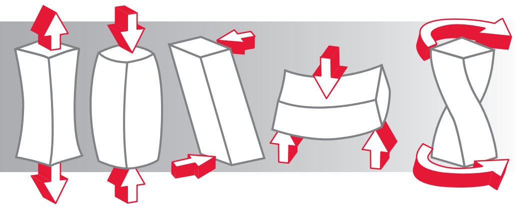
Πίνακας 1.14.

Υλικό	***Συντελεστής ασφαλείας***
Χάλυβας	$v_S = 1{,}5 – 1{,}7$ $v_B = 2 – 3$
Ξύλο	$v_B = 3 – 4{,}5$
Λιθοδομή - πλινθοδομή	$v_B = 8 – 20$

Με βάση τα παραπάνω, καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία των σχεδιαστών των κατασκευών στα θέματα αυτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εφελκυσμός – Θλίψη – Διάτμηση



2.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις καταπονήσεις του εφελκυσμού, της θλίψεως και της διατμήσεως. Συγκεκριμένα, παραθέτομε τους ορισμούς καθεμιάς από τις καταπονήσεις αυτές, παρουσιάζομε παραδείγματα εφαρμογής τους και επεξηγούμε τις αναπτυσσόμενες τάσεις και παραμορφώσεις. Επίσης, παρουσιάζομε συγκριτικά τις καταπονήσεις του εφελκυσμού, της θλίψεως και της διατμήσεως δίνοντας έμφαση στις ομοιότητες και τις διαφορές τους. Επί πλέον, αναλύομε την έννοια της επιτρεπόμενης τάσεως και του συντελεστή ασφαλείας για τις καταπονήσεις αυτές, επεξηγούμε τις σχέσεις εφελκυσμού, θλίψεως και διατμήσεως και αναλύομε όλες τις κατηγορίες πρακτικών προβλημάτων που επιλύομε με τις σχέσεις αυτές. Περαιτέρω, παρουσιάζομε τη σύνθλιψη άντυγας οπής, τις καταπονήσεις των κυλινδρικών δοχείων πιέσεως με λεπτά τοιχώματα και τις τάσεις που εμφανίζοντα κατά την παρεμπόδιση. Τέλος, μελετούμε την έννοια των υπερστατικών προβλημάτων εφελκυσμού και θλίψεως και περιγράφομε τον τρόπο επιλύσεώς τους.

Ο πίνακας 2.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 2.1.

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Γωνία ολισθήσεως	γ	rad
Διάμετρος κυλινδρικού δοχείου	d	m, cm
Διάμετρος οπής	d	cm, mm
Διαμήκης τάση	$\sigma_{\delta\iota\alpha\mu}$	N/cm^2, N/mm^2
Δύναμη καταπονήσεως (εφελκυσμού, θλίψεως, συνθλίψεως άντυγας οπής, διατμήσεως)	F	N
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως	$\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού	$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως	$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας οπής	$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\alpha\nu\tau}$	N/cm^2, N/mm^2
Εφαπτομενική τάση	$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi}$	N/cm^2, N/mm^2
Μέτρο ολισθήσεως του υλικού	G	N/cm^2, N/mm^2
Πάχος ελάσματος που φέρει οπή	h	cm, mm
Πάχος τοιχωμάτων κυλινδρικού δοχείου	t	cm, mm
Πίεση ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο	P	N/cm^2, N/mm^2
Τάσεις λόγω παρεμποδίσεως μεταβολής μήκους	σ	N/cm^2, N/mm^2
Τάση διατμήσεως	$\tau_{\delta\iota}$	N/cm^2, N/mm^2

(συνεχίζεται)

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Τάση εφελκυσμού	$\sigma_{\varepsilon\varphi}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θλίψεως	$\sigma_{\theta\lambda}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θραύσεως διατμήσεως	$\tau_{\theta\rho,\ \delta\iota}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θραύσεως στη θλίψη	$\sigma_{\theta\rho,\ \theta\lambda}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θραύσεως στον εφελκυσμό	$\sigma_{\theta\rho,\ \varepsilon\varphi}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση συνθλίψεως άντυγας οπής	$\sigma_{\alpha\nu\tau}$	N/cm^2, N/mm^2

2.2 Τάσεις και παραμορφώσεις στον εφελκυσμό.

Ας παρατηρήσομε το συρματόσχοινο του σχήματος 2.2α(α). Το συρματόσχοινο είναι κατακόρυφο και το ένα άκρο του είναι δεμένο σε σταθερό σημείο, ενώ το άλλο είναι ελεύθερο. Το συρματόσχοινο χαρακτηρίζεται από το μήκος του και από το εμβαδόν της διατομής του.

Ας υποθέσομε ότι κάποια στιγμή στο ελεύθερο άκρο του συρματόσχοινου ασκείται κατακόρυφη δύναμη F, η οποία το τραβά προς τα κάτω [σχ. 2.2α(β)]. Η άσκηση της κατακόρυφης δυνάμεως F έχει ως αποτέλεσμα, με βάση το αξίωμα Δράσεως-Αντιδράσεως, την εμφάνιση μιας δυνάμεως F΄ στο άλλο άκρο του συρματόσχοινου, στο σημείο στηρίξεώς του, η οποία είναι αντίθετη της δυνάμεως F. Οι δυνάμεις F και F΄ έχουν ίδιο μέτρο, βρίσκονται πάνω στον ίδιο άξονα (δηλ. είναι συγγραμμικές), αλλά έχουν αντίθετη φορά (δηλ. είναι αντίρροπες). Οι δύο δυνάμεις F και F΄ ενεργούν στο συρματόσχοινο και τείνουν να αυξήσουν το μήκος του και να ελαττώσουν τη διατομή του. Λέμε τότε ότι το συρματόσχοινο καταπονείται σε εφελκυσμό.

Γενικότερα:

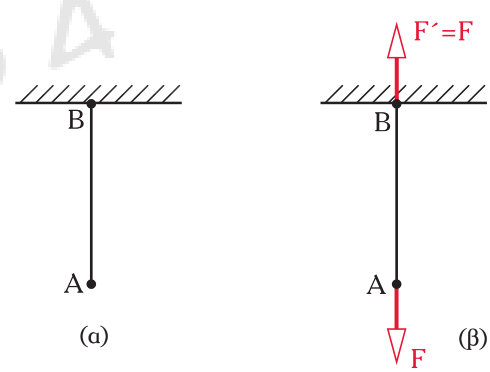
Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό όταν στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες και αντίρροπες δυνάμεις, οι οποίες έχουν την τάση να αυξήσουν το μήκος του και να ελαττώσουν τη διατομή του.

Η εξωτερική δύναμη F που καταπονεί ένα σώμα σε εφελκυσμό ονομάζεται ***εφελκύουσα*** (ή ***εφελκυστική***) ***δύναμη***.

Η καταπόνηση του εφελκυσμού παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Ως χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε εφελκυσμό αναφέρομε, μεταξύ άλλων, τα συρματόσχοινα των γερανών, το σχοινί του βαρούλκου και τις ρυμούλκες των τρακτέρ.

2.2.1 Τάσεις εφελκυσμού.

Όπως έχομε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 1 (παράγρ. 1.12), η εφαρμογή της εξωτερικής δυνάμεως F στο συρματόσχοινο προκαλεί την εμφάνιση εσωτερικών δυνάμεων σ' αυτό, άρα την εμφάνιση τάσεων στο υλικό του. Οι τάσεις αυτές που εμφανίζονται στα σώματα που καταπονούνται σε εφελκυσμό ονομάζονται ***τάσεις εφελκυσμού***. Αποδεικνύεται ότι στον εφελκυσμό, η εσωτερική δύναμη σε κάθε διατομή του σώματος είναι ίση με την εξωτερική F, άρα κάθετη στη διατομή του σώματος. Συνεπώς, οι τάσεις εφελκυσμού είναι



Σχ. 2.2α.
(α) Συρματόσχοινο με το ένα άκρο του δεμένο σε σταθερό σημείο. (β) Η άσκηση δυνάμεως στο ελεύθερο άκρο του συρματόσχοινου έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση αντίθετης δυνάμεως στο άλλο άκρο του.

ορθές τάσεις. Οι παραπάνω ιδιότητες των τάσεων εφελκυσμού μάς οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου ορισμού για την τάση εφελκυσμού.

Ως ***τάση εφελκυσμού*** $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ ορίζομε το πηλίκον της δυνάμεως F που ενεργεί κατά τον άξονα στερεού σώματος και το καταπονεί σε εφελκυσμό προς το εμβαδόν A της διατομής του σώματος.

Δηλαδή, έχομε:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A} \qquad (2.1)$$

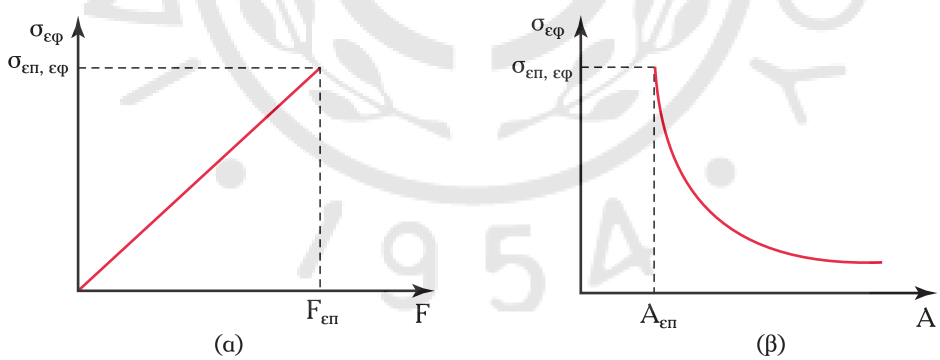
Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι στον υπολογισμό της τάσεως εφελκυσμού λαμβάνομε υπόψη μόνο τη μία από τις δύο συγγραμμικές και αντίρροπες δυνάμεις που καταπονούν το στερεό σώμα σε εφελκυσμό.

Από τη σχέση (2.1) διαπιστώνομε ότι για την τάση εφελκυσμού ισχύουν τα εξής:

α) Η ***τάση εφελκυσμού είναι ανάλογη της εφελκύουσας δυνάμεως***. Στην ίδια διατομή, εάν εφαρμοστεί κάθετα διπλάσια εφελκύουσα δύναμη, η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι διπλάσια, εάν εφαρμοστεί κάθετα τριπλάσια εφελκύουσα δύναμη, η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι τριπλάσια κ.ο.κ.. Δηλαδή, η σχέση μεταξύ τάσεως εφελκυσμού και εφελκύουσας δυνάμεως για την ίδια διατομή είναι γραμμική [σχ. 2.2β(α)].

β) Η ***τάση εφελκυσμού είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του σώματος που εφελκύεται***. Η ίδια εφελκύουσα δύναμη, εάν εφαρμοστεί κάθετα σε διατομή με διπλάσια επιφάνεια, η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι η μισή, εάν εφαρμοστεί κάθετα σε διατομή με τριπλάσια επιφάνεια η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι ίση με το ένα τρίτο κ.ο.κ.. Η σχέση μεταξύ τάσεως εφελκυσμού και εμβαδού διατομής απεικονίζεται στο σχήμα 2.2β(β).

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.1) δεν ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές δυνάμεως και εμβαδού, αλλά μέχρι ορισμένες τιμές που αντιστοιχούν στο όριο θραύσεως του υλικού (βλ. παράγρ. 1.3). Επίσης σημειώνομε ότι το σχήμα 2.2β απεικονίζει τις τάσεις εφελκυσμού μέχρι την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$ (βλ. υποπαράγρ. 2.2.2).



Σχ. 2.2β.

(α) Σχέση τάσεως εφελκυσμού και εφελκύουσας δυνάμεως για σταθερή διατομή.
(β) Σχέση τάσεως εφελκυσμού και εμβαδού διατομής για σταθερή εφελκύουσα δύναμη.

Παράδειγμα 1.

Δύναμη F = 900 N δρα κάθετα σε διατομή σώματος και το καταπονεί σε εφελκυσμό.

α) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού, εάν η διατομή είναι τετραγωνική με πλευρά α = 3 cm.

β) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού, εάν η διατομή είναι ορθογώνια με πλευρές β = 2,25 cm και γ = 4 cm.

γ) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β). Τι παρατηρείτε;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
F = 900 N	$\sigma_{εφ,1}$ = ;
α = 3 cm	$\sigma_{εφ,2}$ = ;
β = 2,25 cm	
γ = 4 cm	

Λύση.

α) Ας ονομάσομε $\sigma_{εφ,1}$ τη ζητούμενη τάση εφελκυσμού για την περίπτωση της τετραγωνικής διατομής. Το εμβαδόν της τετραγωνικής διατομής A_1 είναι: $A_1 = α^2 = 3^2\ cm^2 = 9\ cm^2$.

Έτσι, η τάση εφελκυσμού για την τετραγωνική διατομή δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{εφ,1} = \frac{F}{A_1} = \frac{900\ N}{9\ cm^2} = 100 \frac{N}{cm^2}$$

β) Ας ονομάσομε $\sigma_{εφ,2}$ τη ζητούμενη τάση εφελκυσμού για την περίπτωση της ορθογώνιας διατομής. Το εμβαδόν της ορθογώνιας διατομής A_2 είναι: $A_2 = α \cdot β = 2{,}25\ cm \cdot 4\ cm = 9\ cm^2$.

Έτσι, η τάση εφελκυσμού για την ορθογώνια διατομή δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{εφ,2} = \frac{F}{A_2} = \frac{900\ N}{9\ cm^2} = 100 \frac{N}{cm^2}$$

γ) Παρατηρούμε ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι ίδιες στις δύο περιπτώσεις. Αυτό οφείλεται στο ότι η ίδια δύναμη δρα στο ίδιο εμβαδόν επιφάνειας. Αυτό που έχει σημασία για την τάση εφελκυσμού είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της διατομής και όχι αυτό καθαυτό το σχήμα της διατομής.

2.2.2 Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού.

Όπως είδαμε στο πείραμα του εφελκυσμού στην παράγραφο 1.3, όταν σ' ένα εφελκυόμενο σώμα εφαρμόζεται μεγάλη εξωτερική δύναμη, μεγαλύτερη από αυτή που μπορεί να αντέξει, τότε το σώμα θραύεται. Για να αποφεύγεται η θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε εφελκυσμό πρέπει οι τάσεις εφελκυσμού που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες απ' την τάση στην οποία το υλικό θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί ένα όριο, πολύ μικρότερο απ' την τάση στην οποία το υλικό θραύεται, πάνω από το οποίο απαγορεύεται να λάβουν τιμές οι τάσεις εφελκυσμού. Δηλαδή, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά τον εφελκυσμό πρέπει να είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες με το όριο αυτό. Η τάση αυτή ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού μιας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή όταν καταπονείται σε εφελκυσμό, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της.

Η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού συμβολίζεται με $\sigma_{επ,\ εφ}$ και προσδιορίζεται συνήθως με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας. Το φορτίο $F_{επ}$ που αντιστοιχεί στην επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού ονομάζεται ***επιτρεπόμενο φορτίο εφελκυσμού***.

2.2.3 Συντελεστής ασφαλείας για τον εφελκυσμό.

Συντελεστής ασφαλείας ν για τον εφελκυσμό ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{επ,\ εφ}$ σε μία κατασκευή απ' την τάση $\sigma_{θρ,\ εφ}$, στην οποία το υλικό θραύεται όταν εφελκύεται.

Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\sigma_{θρ,εφ}}{\sigma_{επ,εφ}} \tag{2.2}$$

Λύνοντας τη σχέση (2.2) ως προς την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού, έχομε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\nu} \tag{2.3}$$

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 1.14, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής είναι πολύ σημαντικό στοιχείο για την κατασκευή και δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ο καθορισμός αυτός προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία στα θέματα αυτά και πραγματοποιείται με έναν από τους τρόπους που αναφέραμε στην παράγραφο 1.14.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού μιας κατασκευής όταν ο συντελεστής ασφάλειάς της ν επιλέγεται να είναι ίσος με 4. Η τάση θραύσεως του υλικού της κατασκευής στον εφελκυσμό είναι $\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 1.000\ \text{N/cm}^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\nu = 4$	$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} =;$
$\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 1.000\ \text{N/cm}^2$	

Λύση.

Ο συντελεστής ασφαλείας της κατασκευής ορίζεται από τη σχέση $\nu = \dfrac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}$.

Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς τη ζητούμενη επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού έχομε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\nu} = \frac{1.000\ \text{N}/\text{cm}^2}{4} = 250\ \text{N}/\text{cm}^2$$

2.2.4 Σχέση εφελκυσμού.

Όπως προαναφέραμε, η τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$, δηλαδή:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \tag{2.4}$$

Η σχέση (2.4) είναι γνωστή ως ***σχέση εφελκυσμού*** και εφαρμόζεται μόνον εφόσον ισχύουν όλες οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Το εφελκυόμενο σώμα είναι ***ευθύγραμμο***. Αν δεν ισχύει η προϋπόθεση αυτή, τότε έχομε την εμφάνιση σύνθετης καταπονήσεως.

β) Ο εφελκυσμός είναι ***αξονικός***. Δηλαδή, η δύναμη που εφελκύει το σώμα ενεργεί στον κεντρικό άξονά του.

γ) Το υλικό του εφελκυόμενου σώματος είναι ***ομοιογενές***. Δηλαδή, το υλικό έχει σε όλη την έκταση της μάζας του τις ίδιες ιδιότητες, με αποτέλεσμα οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την καταπόνηση σε εφελκυσμό να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

2.2.5 Εφαρμογές της σχέσεως εφελκυσμού.

Η σχέση εφελκυσμού εφαρμόζεται στα προβλήματα σωμάτων που καταπονούνται ή αναμένεται να καταπονηθούν σε εφελκυσμό. Τα προβλήματα αυτά διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με το ποια δεδομένα απ' αυτά που εμφανίζονται στη σχέση εφελκυσμού είναι γνωστά και ποιο είναι το ζητούμενο. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι ακόλουθες:

1) Κατηγορία Ι – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η εφελκύουσα δύναμη (το φορτίο), το εμβαδόν της διατομής και η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού και μας ζητούν να προσδιορίσομε την τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται στην κατασκευή και να ελέγξομε εάν η εν λόγω τάση είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη (πίν. 2.2.1).

Πίνακας 2.2.1.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εφελκύουσα δύναμη: F	Τάση εφελκυσμού: $\sigma_{εφ}$
Εμβαδόν διατομής: A	Είναι η τάση εφελκυσμού μικρότερη από την επιτρεπόμενη; $\sigma_{επ,\,εφ}$? $\sigma_{εφ}$
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{επ,\,εφ}$	

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε την τάση εφελκυσμού από τη σχέση $\sigma_{εφ} = \dfrac{F}{A}$.

β) Συγκρίνομε την τάση εφελκυσμού με την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{επ,\,εφ}$? $\sigma_{εφ}$.

Παράδειγμα 3.

Ράβδος καταπονείται σε εφελκυσμό λόγω της επιδράσεως εξωτερικής δυνάμεως F = 2.500 N. Η διατομή της ράβδου είναι κυκλική με διάμετρο d = 4 cm. Εάν η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό είναι $\sigma_{επ,\,εφ}$ = 1.000 N/cm^2 να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
F = 2.500 N	$\sigma_{επ,\,εφ}$? $\sigma_{εφ}$
d = 4 cm	
$\sigma_{επ,\,εφ}$ = 1.000 N/cm^2	

Λύση.

Για να διαπιστώσομε εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, πρέπει να συγκρίνομε την τάση λειτουργίας σε εφελκυσμό της ράβδου $\sigma_{εφ}$ με την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{επ,\,εφ}$.

Η τάση λειτουργίας υπολογίζεται από τη σχέση: $\sigma_{εφ} = \dfrac{F}{A}$. Το εμβαδόν A της κυκλικής διατομής είναι:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4^2 cm^2}{4} = 4 \cdot \pi cm^2 = 12{,}56\, cm^2$$

Έτσι, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι: $\sigma_{εφ} = \dfrac{F}{A} = \dfrac{2.500\, N}{12{,}56\, cm^2} = 199 \dfrac{N}{cm^2}$.

Συνεπώς, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{επ,\,εφ}$. Άρα, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

2) Κατηγορία ΙΙ – Προβλήματα διαστασιολογήσεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η εφελκύουσα δύναμη (το φορτίο) και η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού και μας ζητούν να προσδιορίσομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής του εφελκυόμενου σώματος (πίν. 2.2.2).

Πίνακας 2.2.2.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εφελκύουσα δύναμη: F	Εμβαδόν διατομής: Α
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$	

Τα προβλήματα διαστασιολογήσεως είναι ιδιαίτερα σημαντικά για την Αντοχή των Υλικών, καθώς αποτελούν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι κατασκευαστές κατά το σχεδιασμό των κατασκευών.

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής, λύνοντας τη σχέση εφελκυσμού ως προς αυτό. Έτσι λαμβάνομε: $A \geq \dfrac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}$.

β) Επειδή δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει πάντοτε διαθέσιμη διατομή με το μέγεθος επιφάνειας που προσδιορίσαμε στο βήμα (α), επιλέγομε ανάμεσα στις διαθέσιμες διατομές τη μικρότερη από αυτές που ικανοποιούν το αποτέλεσμα του βήματος (α).

γ) Επιβεβαιώνομε ότι για τη διατομή που επιλέγομε στο βήμα (β), η τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού.

Παράδειγμα 4.

Ράβδος με τετραγωνική διατομή πρόκειται να καταπονηθεί σε εφελκυσμό με την εφαρμογή εξωτερικής δυνάμεως F = 40.000 N. Πόση πρέπει να είναι η πλευρά της διατομής της; Η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ \text{N/cm}^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
F = 40.000 N	α = ;
$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ \text{N/cm}^2$	

Λύση.

Για τη ράβδο ισχύει η σχέση εφελκυσμού:

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \qquad (1)$$

Εάν ονομάσομε α την πλευρά της τετραγωνικής διατομής της ράβδου, το εμβαδόν της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \alpha^2 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση εφελκυσμού και λύνοντας ως προς την πλευρά α λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\alpha^2} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}} \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt{\frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}} \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt{\frac{40.000\ \text{N}}{10.000\ \text{N/cm}^2}} \Leftrightarrow \alpha \geq 2\text{cm}$$

Άρα, η πλευρά της τετραγωνικής διατομής της ράβδου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με 2 cm.

Παράδειγμα 5.

Πόσα δοκίμια από χάλυβα με ορθογώνια διατομή διαστάσεων $α = 8$ mm και $β = 15$ mm πρέπει να συνενώσομε σε παράλληλη δέσμη για να αναρτήσομε φορτίο $F = 250.000$ N, εάν έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό και η επιτρεπόμενη τάση είναι $σ_{επ,\,εφ} = 10.000$ N/cm²;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$F = 250.000$ N	$n =$;
$α = 8$ mm	
$β = 15$ mm	
$σ_{επ,\,εφ} = 10.000$ N/cm²	

Λύση.

Αρχικά προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής. Για το σκοπό αυτό λύνομε τη σχέση εφελκυσμού ως προς τη διατομή Α:

$$\frac{F}{A} \le σ_{επ,εφ} \Leftrightarrow A \ge \frac{F}{σ_{επ,εφ}} = \frac{250.000\,\text{N}}{10.000\,\text{N/cm}^2} = 25\,\text{cm}^2.$$

Επομένως, τα δοκίμια που πρέπει να συνενώσομε πρέπει να έχουν συνολικό εμβαδόν διατομής 25 cm². Για να βρούμε πόσα δοκίμια πρέπει να συνενώσομε, υπολογίζομε το εμβαδόν $A_δ$ κάθε δοκιμίου:

$$A_δ = 8\text{ mm} \cdot 15\text{ mm} = 0{,}8\text{ cm} \cdot 1{,}5\text{ cm} = 1{,}2\text{ cm}^2$$

Ο αριθμός των δοκιμίων n που απαιτούνται είναι $n = \frac{A}{A_δ} = \frac{25\,\text{cm}^2}{1{,}2\,\text{cm}^2} = 20{,}8.$

Συνεπώς, απαιτούνται 21 δοκίμια.

Πραγματικά, κάνοντας επαλήθευση βρίσκομε ότι η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού στα 21 δοκίμια είναι:

$$σ_{εφ} = \frac{F}{n \cdot A_δ} = \frac{250.000\text{ N}}{21 \cdot 1{,}2\text{ cm}^2} = 9.921\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

δηλαδή μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού.

3) Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού του φορτίου που αντέχει ένα εφελκυόμενο σώμα (ικανότητα φορτίσεως).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η επιφάνεια της διατομής του σώματος και η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού και μας ζητούν να προσδιορίσομε το φορτίο που επιτρέπεται να ενεργεί στο σώμα όταν καταπονείται σε εφελκυσμό (πίν. 2.2.3).

Πίνακας 2.2.3.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εμβαδόν διατομής: Α	Εφελκύουσα δύναμη: F
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $σ_{επ,\,εφ}$	

Για την ***επίλυση των προβλημάτων*** αυτών προσδιορίζομε το φορτίο που μπορεί να αντέξει το σώμα, λύνοντας τη σχέση εφελκυσμού ως προς την εφελκύουσα δύναμη. Έτσι λαμβάνομε: $F \le σ_{επ,\,εφ} \cdot A$.

Παράδειγμα 6.

Ράβδος έχει ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 2 cm και β = 3 cm. Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεως της ράβδου, εάν η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \varepsilon\varphi} =$ 1.000 N/cm^2;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 2 cm	F = ;
β = 3 cm	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\ \varepsilon\varphi}$ = 1.000 N/cm^2	

Λύση.

Για τη ράβδο ισχύει η σχέση εφελκυσμού:

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \tag{1}$$

Το εμβαδόν της διατομής της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \alpha \cdot \beta \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση εφελκυσμού και λύνοντας ως προς το φορτίο F λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\alpha \cdot \beta} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow F \leq \alpha \cdot \beta \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow F \leq 2\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 1.000\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \Leftrightarrow F \leq 6.000\,\text{N}$$

Άρα, το φορτίο εφελκυσμού της ράβδου δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 6.000 N.

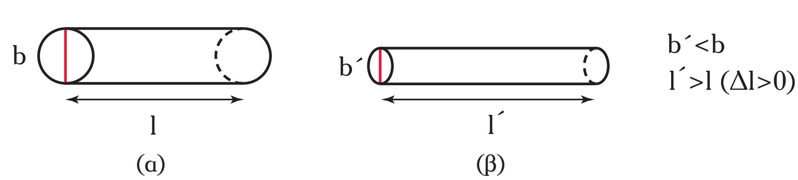
2.2.6 Παραμορφώσεις εφελκυσμού.

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 1.3, οι παραμορφώσεις απ' την καταπόνηση σε εφελκυσμό που προκαλούνται σ' ένα σώμα είναι οι ακόλουθες:

α) ***Αύξηση του μήκους του στερεού σώματος***, η οποία αφορά στην αύξηση του αρχικού μήκους l κατά Δl κατά τη διεύθυνση εφαρμογής της εξωτερικής δυνάμεως F.

β) ***Ελάττωση της διατομής του στερεού σώματος***, που αφορά στη διατομή η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση εφαρμογής της δυνάμεως F. Εάν b είναι η αρχική διάσταση της διατομής πριν την εφαρμογή της δυνάμεως, τότε κατά τον εφελκυσμό, η διάσταση αυτή ελαττώνεται κατά Δb = b΄ – b και γίνεται ίση με b΄ < b.

Οι παραμορφώσεις της αυξήσεως του μήκους και της ελαττώσεως της διατομής παρουσιάζονται στο σχήμα 2.2γ. Οι παραμορφώσεις αυτές δεν συμβαίνουν ανεξάρτητα η μία της άλλης, αλλά εμφανίζονται μαζί. Δηλαδή, η αύξηση του μήκους συνοδεύεται με ελάττωση της διατομής του στερεού σώματος. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι συνήθως η αύξηση του μή-



Σχ. 2.2γ.
Μήκος και διατομή στερεού σώματος: (α) Πριν την καταπόνησή του σε εφελκυσμό.
(β) Κατά την καταπόνησή του σε εφελκυσμό.

κους είναι πολύ μικρή σε σχέση με το αρχικό μήκος. Ομοίως, η ελάττωση της διατομής είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μέγεθος της αρχικής διατομής. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλές φορές να μην γίνονται άμεσα αντιληπτές οι παραμορφώσεις αυτές, ωστόσο, συμβαίνουν πάντοτε κατά την καταπόνηση σε εφελκυσμό ενός σώματος. Σημειώνομε ότι το σχήμα 2.2γ(β) δεν παρουσιάζει τη ρεαλιστική εικόνα που έχει το καταπονούμενο σε εφελκυσμό σώμα, αλλά δείχνει μόνο την έννοια των δύο παραμορφώσεων που αναφέρομε. Στην πραγματικότητα το σώμα παρουσιάζει στένωση.

Οι παραμορφώσεις αυτές στην αναλογική περιοχή υπολογίζονται με τη βοήθεια των ακολούθων σχέσεων:

α) Του ***νόμου του Hooke*** (βλ. παράγρ. 1.2):

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \tag{2.5}$$

β) Της ***σχέσεως ορισμού της ανηγμένης επιμηκύνσεως*** (βλ. υποπαράγρ. 1.2.1):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{2.6}$$

γ) Της ***σχέσεως ορισμού της εγκάρσιας ανηγμένης παραμορφώσεως*** (βλ. υποπαράγρ. 1.5):

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b' - b}{b} \tag{2.7}$$

δ) Του ***λόγου Poisson*** (βλ. παράγρ. 1.5):

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \tag{2.8}$$

Η αύξηση του μήκους υπολογίζεται από τη σχέση (2.5). Η ελάττωση της διαστάσεως της διατομής υπολογίζεται συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.5), (2.6) και (2.7) στη σχέση (2.8) λαμβάνομε:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\frac{\Delta b}{b}}{\frac{\Delta l}{l}} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta b \cdot l}{b \cdot \Delta l} \Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b \cdot \Delta l}{l} \Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b}{l} \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b \cdot F}{A \cdot E} \tag{2.9}$$

Το αρνητικό πρόσημο της μεταβολής $\Delta b = b' - b$ δηλώνει ότι έχομε ελάττωση της διατομής.

Σημειώνεται ότι οι ανωτέρω σχέσεις (2.5) και (2.9) ισχύουν στην αναλογική περιοχή. Ακολουθεί χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογισμού των παραμορφώσεων του εφελκυσμού.

Παράδειγμα 7.

Ράβδος με ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 2 cm και β = 3 cm έχει μήκος l = 100 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη F = 9.000 N.

α) Να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

β) Εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις της.

Δίνονται η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου $\sigma_{\varepsilon\pi,\, \varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$, που βρίσκεται στην αναλογική περιοχή, το μέτρο ελαστικότητας $E = 4{,}4 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και ο λόγος Poisson του υλικού της μ = 0,25 (ίδιος και για τις δύο διαστάσεις της διατομής).

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 2 cm	α) $\sigma_{\varepsilon\pi,\, \varepsilon\varphi}$? $\sigma_{\varepsilon\varphi}$
β = 3 cm	β) Δl = ;
l = 100 cm	$\Delta\alpha$ = ;
F = 9.000 N	$\Delta\beta$ = ;
$\sigma_{\varepsilon\pi,\, \varepsilon\varphi}$ = 10.000 N/cm^2	
E = 4,4 · 10^6 N/cm^2	
μ = 0,25	

Λύση.

α) Για να διαπιστώσομε εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, πρέπει να συγκρίνομε την τάση λειτουργίας σε εφελκυσμό της ράβδου $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ με την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\, \varepsilon\varphi}$.

Η τάση λειτουργίας υπολογίζεται από τη σχέση $\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A}$. Το εμβαδόν A της ορθογώνιας διατομής είναι: A = α · β = 2 cm · 3 cm = 6 cm^2

Έτσι, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A} = \frac{9.000\ \mathrm{N}}{6\ \mathrm{cm}^2} = 1.500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Συνεπώς, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\, \varepsilon\varphi}$. Άρα, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

β) Επειδή η ράβδος φορτίζεται κανονικά, η φόρτισή της γίνεται στην αναλογική περιοχή. Έτσι, για τον υπολογισμό της αυξήσεως του μήκους της ράβδου, εφαρμόζομε το νόμο του Hooke:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{9.000\ \mathrm{N} \cdot 100\ \mathrm{cm}}{6\ \mathrm{cm}^2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{N/cm}^2} = 0{,}034\ \mathrm{cm}$$

Η μεταβολή των διαστάσεων α = 2 cm και β = 3 cm της διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσεως (2.9) θέτοντας b = α και b = β:

$$\Delta\alpha = -\frac{\mu \cdot \alpha \cdot F}{A \cdot E} = -\frac{0{,}25 \cdot 2\ \mathrm{cm} \cdot 9.000\ \mathrm{N}}{6\ \mathrm{cm}^2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{N/cm}^2} = -1{,}7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

$$\Delta\beta = -\frac{\mu \cdot \beta \cdot F}{A \cdot E} = -\frac{0{,}25 \cdot 3\ \mathrm{cm} \cdot 9.000\ \mathrm{N}}{6\ \mathrm{cm}^2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{N/cm}^2} = -2{,}6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

Ασκήσεις.

1. *Αρχικά, δύναμη F_1 = 800 N δρα κάθετα σε διατομή σώματος και το καταπονεί σε εφελκυσμό. Η διατομή του σώματος είναι κυκλική με ακτίνα r = 2 cm. Ακολούθως, στο σώμα δρα επί πλέον της F_1, εφελκυστική δύναμη F_2 = 1.200 N.*
α) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται αρχικά λόγω της δυνάμεως F_1.
β) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται στη συνέχεια λόγω της εφαρμογής του συνδυασμού των δυνάμεων F_1 και F_2.
γ) Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β). Τι παρατηρείτε;

2. *Μία ράβδος έχει τετραγωνική διατομή πλευράς a = 3 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη F = 36.000 N. Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού και να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά. Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\, \varepsilon\varphi}$ = 8.000 N/cm^2.*

3. *Να υπολογιστεί ο συντελεστής ασφαλείας στον εφελκυσμό μιας κατασκευής, όταν η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού της επιλέγεται να είναι $σ_{επ,\ εφ}$ = 300 N/cm^2. Η τάση θραύσεως του υλικού της κατασκευής στον εφελκυσμό είναι $σ_{θρ,\ εφ}$ = 1.200 N/cm^2.*

4. *Ράβδος από χάλυβα έχει κυκλική διατομή διαμέτρου D = 2 cm και τάση θραύσεως σε εφελκυσμό $σ_{θρ,\ εφ}$ = 400 N/mm^2. Η ράβδος χρησιμοποιείται για τη ρυμούλκηση φορτίου. Αν λάβομε συντελεστή ασφαλείας ίσο με ν = 5, να προσδιορισθεί το φορτίο που επιτρέπεται να ρυμουλκηθεί με τη ράβδο.*

5. *Για τη ρυμούλκηση οχήματος απαιτείται δύναμη F = 75.000 N. Έχομε διαθέσιμες δύο χαλύβδινες ράβδους κυκλικής διατομής με διαμέτρους D_1 = 3 cm και D_2 = 4 cm. Ποια από τις δύο ράβδους πρέπει να χρησιμοποιήσομε; Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $σ_{επ,\ εφ}$ = 10.000 N/cm^2.*

6. *Για τη ρυμούλκηση αυτοκινήτου απαιτείται δύναμη F = 45.000 N. Αν για τη ρυμούλκηση είναι διαθέσιμες ράβδοι από χάλυβα κυκλικής διατομής με τάση θραύσεως σε εφελκυσμό $σ_{θρ,\ εφ}$ = 420 N/mm^2 και ο συντελεστής ασφαλείας ληφθεί ίσος με ν = 6, να υπολογιστούν:*
α) Η διάμετρος της ράβδου που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τη ρυμούλκηση και
β) το φορτίο θραύσεως της ράβδου.

7. *Ράβδος με τετραγωνική διατομή πλευράς α = 2 cm έχει μήκος l = 120 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη F = 18.000 N.*
α) Να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά.
β) Εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις της.
Δίνονται η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου $σ_{επ,\ εφ}$ = 10.000 N/cm^2, που βρίσκεται στην αναλογική περιοχή, το μέτρο ελαστικότητας Ε = 4,4 · 10^6 N/cm^2 και ο λόγος Poisson του υλικού της μ = 0,30.

2.3 Τάσεις και παραμορφώσεις στη θλίψη.

Η ράβδος του σχήματος 2.3α(α) είναι κατακόρυφη και το ένα άκρο της στηρίζεται στο έδαφος, ενώ το άλλο είναι ελεύθερο. Η ράβδος χαρακτηρίζεται από το μήκος της και από το εμβαδόν της διατομής της.

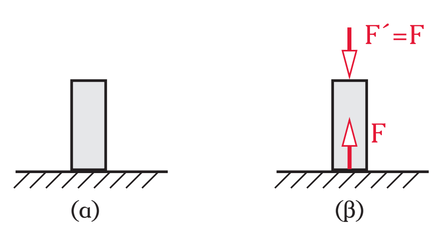
Ας υποθέσομε ότι κάποια στιγμή στο ελεύθερο άκρο της ράβδου ασκείται κατακόρυφη δύναμη F, με φορά προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3α(β). Η άσκηση της κατακόρυφης δυνάμεως F έχει ως αποτέλεσμα, με βάση το αξίωμα Δράσεως-Αντιδράσεως, την εμφάνιση μίας δυνάμεως F΄ στο άλλο άκρο της ράβδου, στο σημείο στηρίξεώς της στο έδαφος, η οποία είναι αντίθετη της δυνάμεως F. Οι δυνάμεις F και F΄ έχουν ίδιο μέτρο, βρίσκονται στον ίδιο άξονα (δηλ. είναι συγγραμμικές), αλλά έχουν αντίθετη φορά (δηλ. είναι αντίρροπες). Οι δύο δυνάμεις F και F΄ ενεργούν πάνω στη ράβδο και τείνουν να ελαττώσουν το μήκος της και να αυξήσουν τη διατομή της. Λέμε τότε ότι η ράβδος καταπονείται σε θλίψη.

Γενικότερα:

Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε θλίψη όταν στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες και αντίρροπες δυνάμεις, οι οποίες έχουν την τάση να ελαττώσουν το μήκος του και να αυξήσουν τη διατομή του.

Η εξωτερική δύναμη F που καταπονεί ένα σώμα σε θλίψη ονομάζεται ***θλίβουσα (ή θλιπτική) δύναμη***.

Ωστόσο, η άσκηση δύο ίσων και αντιθέτων δυνάμεων πάνω στον άξονα του στερεού σώματος δεν έχει πάντοτε ως μόνη επίπτωση την εμφάνιση



Σχ. 2.3α.
(α) Κατακόρυφη ράβδος στηριζόμενη στο έδαφος. (β) Η άσκηση δυνάμεως στο ελεύθερο άκρο της ράβδου προς τα κάτω έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση αντίθετης δυνάμεως στο άλλο άκρο της.

καταπονήσεως θλίψεως. Εάν το στερεό σώμα έχει μεγάλο μήκος και μικρή διατομή, τότε είναι δυνατόν να εκδηλώσει λυγισμό. Όπως αναλύεται στο Κεφάλαιο 6, προκειμένου να καταπονείται ένα σώμα σε καθαρή θλίψη, πρέπει το μήκος του l να είναι μικρότερο ή ίσο από το οκταπλάσιο της μικρότερης διαμέτρου του d (εάν η διατομή είναι κυκλική) ή της μικρότερης πλευράς του α (εάν η διατομή είναι ορθογωνική). Εάν το μήκος του σώματος είναι μεγαλύτερο, τότε το σώμα μπορεί να εκδηλώσει λυγισμό.

Η καταπόνηση της θλίψεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε θλίψη είναι οι κολόνες ενός καταστρώματος πλοίου, ενός σπιτιού, μιας δεξαμενής, οι βάσεις των εργαλειομηχανών κ.λπ..

2.3.1 Τάσεις στη θλίψη.

Οι τάσεις που εμφανίζονται στα σώματα που καταπονούνται σε θλίψη ονομάζονται ***τάσεις θλίψεως***. Αποδεινύεται ότι στη θλίψη, η εσωτερική δύναμη σε κάθε διατομή του σώματος είναι ίση με την εξωτερική F και άρα κάθετη στη διατομή του σώματος. Συνεπώς, οι τάσεις θλίψεως είναι ορθές τάσεις και υπολογίζονται κατ’ ανάλογο τρόπο με τις τάσεις εφελκυσμού. Έτσι:

Ως τάση θλίψεως $\sigma_{\theta\lambda}$ ορίζομε το πηλίκον της δυνάμεως F που ενεργεί κατά τον άξονα στερεού σώματος και το καταπονεί σε θλίψη προς το εμβαδόν A της διατομής του σώματος.

Δηλαδή, έχομε:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} \tag{2.10}$$

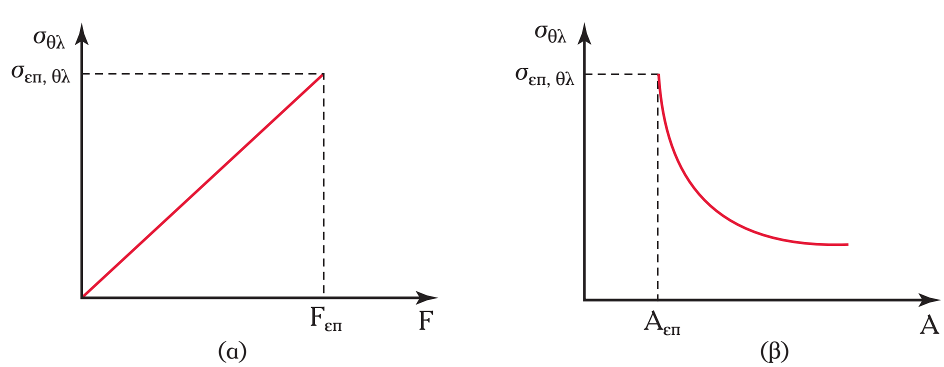
Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση του εφελκυσμού, στον υπολογισμό της τάσεως θλίψεως λαμβάνομε υπόψη μόνο τη μία από τις δύο συγγραμμικές και αντίρροπες δυνάμεις που καταπονούν το στερεό σώμα σε θλίψη.

Από τη σχέση (2.10) προκύπτει ότι για την τάση θλίψεως ισχύουν τα εξής:

α) Η ***τάση θλίψεως είναι ανάλογη της θλίβουσας δυνάμεως***. Η σχέση μεταξύ τάσεως θλίψεως και θλίβουσας δυνάμεως για την ίδια διατομή είναι γραμμική [σχ. 2.3β(α)].

β) Η ***τάση θλίψεως είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του σώματος που θλίβεται***. Η σχέση μεταξύ τάσεως θλίψεως και εμβαδού διατομής απεικονίζεται στο σχήμα 2.3β(β).

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.10) δεν ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές δυνάμεως και εμβαδού, αλλά μέχρι ορισμένες τιμές που αντιστοιχούν στο όριο θραύσεως του υλικού όπως αυτό ορίζεται για τη θλίψη (βλ. παράγρ. 1.4). Επίσης, σημειώνομε ότι το σχήμα 2.3β απεικονίζει τις τάσεις θλίψεως μέχρι την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$, την οποία αναπτύσσομε στην υποπαράγραφο 2.3.2.



Σχ. 2.3β.

(α) Σχέση τάσεως θλίψεως και θλίβουσας δυνάμεως για σταθερή διατομή. (β) Σχέση τάσεως θλίψεως και εμβαδού διατομής για σταθερή θλίβουσα δύναμη.

2.3.2 Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως.

Όπως είδαμε στο πείραμα της θλίψεως στην παράγραφο 1.4, όταν σε ένα θλιβόμενο σώμα εφαρμόζεται μεγάλη εξωτερική δύναμη, μεγαλύτερη απ' αυτή που μπορεί να αντέξει, τότε το σώμα αστοχεί/θραύεται. Για να αποφεύγεται η αστοχία/θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε θλίψη πρέπει οι τάσεις θλίψεως που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες από την τάση στην οποία το υλικό αστοχεί/θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί ένα όριο, πολύ μικρότερο απ' την τάση, στην οποία το υλικό αστοχεί/θραύεται, πάνω από το οποίο απαγορεύεται να λάβουν τιμές οι τάσεις θλίψεως. Δηλαδή, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά τη θλίψη πρέπει να είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες με το όριο αυτό. Η τάση αυτή ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση θλίψεως. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως μίας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή όταν καταπονείται σε θλίψη, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της.

Η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως συμβολίζεται με $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$ και προσδιορίζεται συνήθως με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας για τη θλίψη. Το φορτίο $F_{\varepsilon\pi}$, που αντιστοιχεί στην επιτρεπόμενη τάση θλίψεως ονομάζεται ***επιτρεπόμενο φορτίο θλίψεως***.

2.3.3 Συντελεστής ασφαλείας για τη θλίψη.

Συντελεστής ασφαλείας ν για τη θλίψη ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$ σε μια κατασκευή από την τάση $\sigma_{\theta\rho,\,\theta\lambda}$ στην οποία το υλικό αστοχεί/θραύεται όταν θλίβεται.

Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\sigma_{\theta\rho,\theta\lambda}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \tag{2.11}$$

Λύνοντας τη σχέση (2.11) ως προς την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως, έχομε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\theta\lambda}}{\nu} \tag{2.12}$$

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 1.14, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής είναι πολύ σημαντικό στοιχείο για την κατασκευή και δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ο καθορισμός αυτός προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία στα θέματα αυτά και πραγματοποιείται μ' έναν από τους τρόπους που ήδη αναφέραμε στην παράγραφο 1.14.

2.3.4 Σχέση θλίψεως.

Κατ' αναλογία της περιπτώσεως του εφελκυσμού, η τάση θλίψεως $\sigma_{\theta\lambda}$ πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$, δηλαδή:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \tag{2.13}$$

Η σχέση (2.13) είναι γνωστή ως ***σχέση θλίψεως***.

Κατ' αναλογία με τη σχέση εφελκυσμού, η σχέση θλίψεως εφαρμόζεται μόνον εφόσον ισχύουν όλες οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Το θλιβόμενο σώμα είναι ***ευθύγραμμο***. Αν δεν ισχύει η προϋπόθεση αυτή τότε έχομε την εμφάνιση σύνθετης καταπονήσεως.

β) Η θλίψη είναι ***αξονική.*** Δηλαδή, η δύναμη που θλίβει το σώμα ενεργεί στον κεντρικό άξονά του.

γ) Το υλικό του θλιβόμενου σώματος είναι ***ομοιογενές.*** Δηλαδή, το υλικό έχει σε όλη την έκταση της μάζας του τις ίδιες ιδιότητες, με αποτέλεσμα οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την καταπόνηση σε θλίψη να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

2.3.5 Εφαρμογές της σχέσεως θλίψεως.

Η σχέση θλίψεως εφαρμόζεται στα προβλήματα σωμάτων που καταπονούνται ή αναμένεται να καταπονηθούν σε θλίψη. Όπως και στην περίπτωση του εφελκυσμού, τα προβλήματα της θλίψεως διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το ποια δεδομένα από αυτά που εμφανίζονται στη σχέση θλίψεως είναι γνωστά και ποιο είναι το ζητούμενο. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι ακόλουθες:

1) Κατηγορία Ι – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η θλίβουσα δύναμη (το φορτίο), το εμβαδόν της διατομής και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως και μας ζητούν να προσδιορίσομε την τάση θλίψεως που αναπτύσσεται στην κατασκευή και να ελέγξομε εάν η εν λόγω τάση είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη (πίν. 2.3.1).

Πίνακας 2.3.1.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Θλίβουσα δύναμη: F	Τάση θλίψεως: $\sigma_{\theta\lambda}$
Εμβαδόν διατομής: A	Είναι η τάση θλίψεως μικρότερη από την επιτρεπόμενη; $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$? $\sigma_{\theta\lambda}$
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$	

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

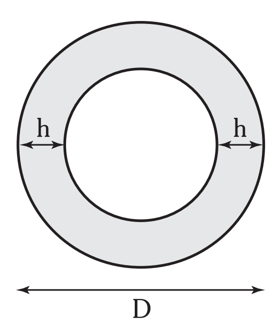
α) Προσδιορίζομε την τάση θλίψεως από τη σχέση: $\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A}$.

β) Συγκρίνομε την τάση θλίψεως με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$? $\sigma_{\theta\lambda}$.

Παράδειγμα 8.

Στύλος έχει διατομή σε σχήμα δακτυλίου με εξωτερική διάμετρο D = 20 cm και πάχος h = 4 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3γ. Ο στύλος θλίβεται από μία δύναμη F = 5.000 N. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως που αναπτύσσεται και να εξεταστεί εάν ο στύλος φορτίζεται κανονικά. Η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως του στύλου είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 800\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
D = 20 cm	$\sigma_{\theta\lambda}$ = ;
h = 4 cm	$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$? $\sigma_{\theta\lambda}$
F = 5.000 N	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 800\ N/cm^2$	



Σχ. 2.3γ

Λύση.

Η εσωτερική διάμετρος d του δακτυλίου υπολογίζεται ως εξής:

$$d = D - 2h = 20\ \text{cm} - 2{\cdot}4\ \text{cm} = 12\ \text{cm}.$$

Άρα, το εμβαδόν της επιφάνειας στην οποία ενεργεί κάθετα το φορτίο F = 5.000 N είναι:

$$A = \pi\frac{D^2}{4} - \pi\frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(20^2\text{cm}^2 - 12^2\text{cm}^2) = 200{,}96\ \text{cm}.$$

Η τάση λειτουργίας σε θλίψη της ράβδου $\sigma_{\theta\lambda}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} = \frac{5.000\ \text{N}}{200{,}96\ \text{cm}^2} = 24{,}88\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Η τάση λειτουργίας του στύλου είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση σε θλίψη $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \theta\lambda}$. Άρα, ο στύλος φορτίζεται κανονικά.

2) Κατηγορία ΙΙ – Προβλήματα διαστασιολογήσεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η θλίβουσα δύναμη (το φορτίο) και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως και μας ζητούν να προσδιορίσομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής του θλιβόμενου σώματος (πίν. 2.3.2).

Πίνακας 2.3.2.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Θλίβουσα δύναμη: F	Εμβαδόν διατομής: A
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \theta\lambda}$	

Όπως έχομε ήδη αναφέρει, τα προβλήματα διαστασιολογήσεως είναι ιδιαίτερα σημαντικά για την Αντοχή των Υλικών, καθώς αποτελούν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι κατασκευαστές κατά το σχεδιασμό των κατασκευών.

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής, λύνοντας τη σχέση θλίψεως ως προς αυτό. Έτσι λαμβάνομε:

$$A \geq \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}.$$

β) Επειδή δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει πάντοτε διαθέσιμη διατομή με το μέγεθος επιφάνειας που προσδιορίσαμε στο βήμα (α), επιλέγομε ανάμεσα στις διαθέσιμες διατομές τη μικρότερη απ' αυτές που ικανοποιούν το αποτέλεσμα του βήματος (α).

γ) Επιβεβαιώνομε ότι για τη διατομή που επιλέγομε στο βήμα (β), η τάση θλίψεως που αναπτύσσεται είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως.

Παράδειγμα 9.

Διαθέτομε τρεις ράβδους με ορθογώνια διατομή, οι οποίες έχουν πλευρές α και β, όπου α = 5 cm και το β λαμβάνει τιμές 1 cm ή 2 cm ή 3 cm. Θέλομε να επιλέξομε μία από τις ράβδους αυτές, προκειμένου να της εφαρμόσομε θλιπτική δύναμη F = 88.000 N. Πόση πρέπει να είναι η πλευρά β της ράβδου που θα επιλέξομε; Η επιτρεπόμενη τάση στη θλίψη είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \theta\lambda} = 10.000\ \text{N/cm}^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$F = 88.000\ N$	$\beta = ;$
$\alpha = 5\ cm$	
$\beta = 1\ cm$ ή $\beta = 2\ cm$ ή $\beta = 3\ cm$	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 10.000\ N/cm^2$	

Λύση.

Για τη ράβδο ισχύει η σχέση θλίψεως:

$$\frac{F}{A} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \qquad (1)$$

Το εμβαδόν της ορθογώνιας διατομής της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \alpha \cdot \beta \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση θλίψεως και λύνοντας ως προς την πλευρά β λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\alpha \cdot \beta} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \ge \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow \beta \ge \frac{F}{\alpha \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \ge \frac{88.000\ N}{5\ cm \cdot 10.000\ N/cm^2} \Leftrightarrow \beta \ge 1{,}76\ cm$$

Άρα, η πλευρά β της ορθογώνιας διατομής της ράβδου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με 1,76cm.

Δεδομένου ότι οι διαθέσιμες ράβδοι έχουν πλευρά $\beta = 1\ cm$ ή $\beta = 2\ cm$ ή $\beta = 3\ cm$, επιλέγομε τη ράβδο που έχει τη μικρότερη πλευρά β που είναι μεγαλύτερη από 1,76 cm, δηλαδή $\beta = 2\ cm$. Η τάση λειτουργίας της ράβδου που επιλέξαμε είναι:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\alpha \cdot \beta} = \frac{88.000\ N}{5\ cm \cdot 2\ cm} = 8.800\ \frac{N}{cm^2}\ ,$$

η οποία επιβεβαιώνομε ότι είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως.

3) Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού του φορτίου που αντέχει ένα θλιβόμενο σώμα (ικανότητα φορτίσεως).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η επιφάνεια της διατομής του σώματος και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως και μας ζητούν να προσδιορίσομε το φορτίο που επιτρέπεται να ενεργεί στο σώμα όταν καταπονείται σε θλίψη (πίν. 2.3.3).

Πίνακας 2.3.3.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εμβαδόν διατομής: Α	Θλίβουσα δύναμη: F
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$	

Για την ***επίλυση των προβλημάτων*** αυτών προσδιορίζομε το φορτίο που μπορεί να αντέξει το σώμα, λύνοντας τη σχέση θλίψεως ως προς τη θλίβουσα δύναμη. Έτσι λαμβάνομε:

$$F \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \cdot A.$$

Παράδειγμα 10.

Πόσο βάρος επιτρέπεται να έχει μαζί με το περιεχόμενό της μια δεξαμενή η οποία θα στηριχθεί σε βάση με $n = 8$ πόδια διατομής $A_1 = 2\ cm^2$ το καθένα, όταν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως είναι $\sigma_{επ,\ θλ} = 7.000\ N/cm^2$;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$n = 8$	$F = ;$
$A_1 = 2\ cm^2$	
$\sigma_{επ,\ θλ} = 7.000\ N/cm^2$	

Λύση.

Έστω F_1 η θλιπτική δύναμη που δέχεται κάθε πόδι της βάσεως. Για κάθε πόδι της βάσεως ισχύει η σχέση θλίψεως: $\frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{επ,θλ}$. Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς την F_1 έχομε:

$$F_1 \leq A_1 \cdot \sigma_{επ,θλ} \Leftrightarrow F_1 \leq 2\,cm^2 \cdot 7.000\,\frac{N}{cm^2} \Leftrightarrow F_1 \leq 14.000\,N$$

Το μέγιστο επιτρεπόμενο συνολικό φορτίο και στα 8 πόδια είναι:

$$F = n \cdot F_1 = 8 \cdot 14.000\ N = 112.000\ N$$

Επομένως, επιτρέπεται να τοποθετηθεί στη βάση δεξαμενή με βάρος μέχρι το πολύ 112.000 N.

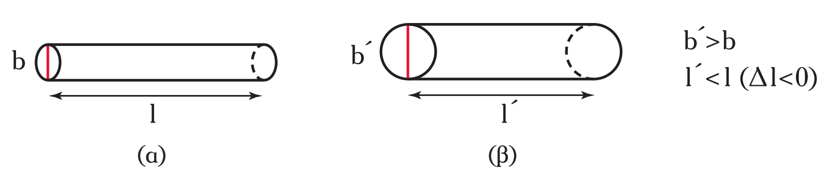
2.3.6 Παραμορφώσεις στη θλίψη.

Όπως είδαμε και στην παράγραφο 1.4, οι παραμορφώσεις από την καταπόνηση σε θλίψη που προκαλούνται σ' ένα σώμα είναι οι ακόλουθες:

α) ***Ελάττωση του μήκους του στερεού σώματος*** που αφορά στην ελάττωση του αρχικού μήκους l κατά Δl κατά τη διεύθυνση εφαρμογής της εξωτερικής δυνάμεως F. Επειδή μιλούμε για ελάττωση, ισχύει $\Delta l < 0$.

β) ***Αύξηση της διατομής του στερεού σώματος.*** Η αύξηση αυτή αφορά στη διατομή που είναι κάθετη στη διεύθυνση εφαρμογής της δυνάμεως F. Εάν b είναι η αρχική διάσταση της διατομής πριν την εφαρμογή της δυνάμεως, τότε κατά τη θλίψη η διάσταση αυτή αυξάνει κατά $\Delta b = b' - b$ και γίνεται ίση με $b' > b$.

Οι παραμορφώσεις της ελαττώσεως του μήκους και της αυξήσεως της διατομής παρουσιάζονται στο σχήμα 2.3δ. Οι παραμορφώσεις αυτές δεν συμβαίνουν ανεξάρτητα η μία της άλλης, αλλά εμφανίζονται μαζί. Δηλαδή, η ελάττωση του μήκους συνοδεύεται με αύξηση της διατομής του στερεού σώματος. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι συνήθως η ελάττωση του μήκους είναι πολύ μικρή σε σχέση με το αρχικό μήκος. Ομοίως, η αύξηση της διατομής είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μέγεθος της αρχικής διατομής. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλές φορές να μην γίνονται άμεσα αντιληπτές οι παραμορφώσεις αυτές. Ωστόσο, συμβαίνουν πάντοτε κατά την



Σχ. 2.3δ.
Μήκος και διατομή στερεού σώματος: (α) Πριν την καταπόνησή του σε θλίψη.
(β) Κατά την καταπόνησή του σε θλίψη.

καταπόνηση σε θλίψη ενός σώματος. Σημειώνομε ότι το σχήμα 2.3δ(β) δεν παρουσιάζει τη ρεαλιστική εικόνα που έχει το καταπονούμενο σε θλίψη σώμα, αλλά δείχνει μόνο την έννοια των δύο παραμορφώσεων που αναφέρομε. Στην πραγματικότητα το σώμα παίρνει τη μορφή βαρελιού.

Οι παραμορφώσεις αυτές στην αναλογική περιοχή υπολογίζονται με τη βοήθεια των ακολούθων σχέσεων:

α) Του ***νόμου του Hooke*** (βλ. παράγρ. 1.2):

$$\Delta l = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E} \tag{2.14}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την ελάττωση του μήκους ($\Delta l<0$).

β) Της ***σχέσεως ορισμού της ανηγμένης επιβραχύνσεως*** (βλ. υποπαράγρ. 1.2.1):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{2.15}$$

γ) Της ***σχέσεως ορισμού της εγκάρσιας ανηγμένης παραμορφώσεως*** (βλ. παράγρ. 1.5):

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b' - b}{b} \tag{2.16}$$

δ) Του ***λόγου Poisson*** (βλ. παράγρ. 1.5):

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \tag{2.17}$$

Η ελάττωση του μήκους υπολογίζεται από τη σχέση (2.14). Η αύξηση της διαστάσεως της διατομής υπολογίζεται συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.14), (2.15) και (2.16) στη σχέση (2.17) λαμβάνομε:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\frac{\Delta b}{b}}{\frac{\Delta l}{l}} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta b \cdot l}{b \cdot \Delta l} \Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b \cdot \Delta l}{l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta b = \frac{\mu \cdot b}{l} \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow \Delta b = \frac{\mu \cdot b \cdot F}{A \cdot E} \tag{2.18}$$

Το θετικό πρόσημο της μεταβολής $\Delta b = b' - b$ δηλώνει ότι έχομε αύξηση της διατομής.

Σημειώνεται ότι οι ανωτέρω σχέσεις (2.14) και (2.18) ισχύουν στην αναλογική περιοχή. Ακολουθεί χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογισμού των παραμορφώσεων της θλίψεως.

Παράδειγμα 11.

Ράβδος έχει τετραγωνική διατομή πλευράς α = 25 mm και μήκος l = 120 cm. Η ράβδος φορτίζεται κανονικά στην αναλογική περιοχή με θλίβουσα δύναμη F = 48.000 N. Να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις της. Πόση γίνεται η πλευρά της τετραγωνικής διατομής; Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας $E = 8{,}2 \cdot 10^6$ N/cm^2 και ο λόγος Poisson του υλικού της μ = 0,30.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 25 mm	Δα = ;
l = 120 cm	α´ = ;
F = 48.000 N	Δl = ;
$E = 8{,}2 \cdot 10^6$ N/cm^2	
μ = 0,30	

Λύση.

Η ράβδος καταπονείται σε θλίψη, άρα, ελαττώνεται το μήκος της και αυξάνεται η πλευρά της διατομής της.

Το εμβαδόν Α της τετραγωνικής διατομής είναι: $A = a^2 = 25^2\ mm^2 = 625\ mm^2 = 6{,}25\ cm^2$.

Επειδή η ράβδος φορτίζεται κανονικά στην αναλογική περιοχή, για τον υπολογισμό της ελαττώσεως του μήκους της, εφαρμόζομε το νόμο του Hooke:

$$\Delta l = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E} = -\frac{48.000\ N \cdot 120\ cm}{6{,}25\ cm^2 \cdot 8{,}2 \cdot 10^6 N / cm^2} = -0{,}11\ cm$$

Η αύξηση της πλευράς της τετραγωνικής διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια του λόγου του Poisson $\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}$ αντικαθιστώντας την ανηγμένη επιβράχυνση $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ και την εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση $\varepsilon_g = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a' - a}{a}$. Συγκεκριμένα έχομε:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta l}{l}} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta a \cdot l}{\Delta l \cdot a} \Leftrightarrow \Delta a = -\frac{\mu \cdot \Delta l \cdot a}{l} \Leftrightarrow \Delta a = -\frac{0{,}3 \cdot (-0{,}11\ cm) \cdot 2{,}5\ cm}{120\ cm} = 0{,}0007\ cm$$

Άρα, κατά την καταπόνηση σε θλίψη η πλευρά της διατομής της ράβδου γίνεται:

$$a' = a + \Delta a = 2{,}5\ cm + 0{,}0007\ cm = 2{,}5007\ cm$$

2.3.7 Σύγκριση εφελκυσμού και θλίψεως.

Με βάση όσα προαναφέραμε, παρατηρούμε ότι η αντιμετώπιση του εφελκυσμού και της θλίψεως γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Ωστόσο, πρέπει να έχομε κατά νου τις ***μεταξύ εφελκυσμού και θλίψεως ομοιότητες και διαφορές***, οι οποίες παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 2.3.4.

Πίνακας 2.3.4.

Θέμα	***Εφελκυσμός***	***Θλίψη***
Τάσεις (σε διατομές κάθετες στον άξονα του σώματος)	Ορθές	Ορθές
Εφαρμογή νόμου Hooke	Στην αναλογική περιοχή	Στην αναλογική περιοχή
Επιτρεπόμενη τάση	Ορίζεται	Ορίζεται
Μεταβολή μήκους	Επιμήκυνση (αύξηση του μήκους ή $\Delta l>0$)	Επιβράχυνση (μείωση του μήκους ή $\Delta l<0$)
Ανηγμένη παραμόρφωση	Ανηγμένη επιμήκυνση ($\varepsilon>0$)	Ανηγμένη επιβράχυνση ($\varepsilon<0$)
Μεταβολή διατομής	Μείωση διαστάσεως διατομής ($\Delta b<0$)	Αύξηση διαστάσεως διατομής ($\Delta b>0$)
Εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση	Αρνητική ($\varepsilon_g<0$)	Θετική ($\varepsilon_g>0$)
Αντοχή	Ανεξάρτητη του μήκους	Εξαρτάται από το μήκος λόγω του φαινομένου του λυγισμού

Η διαφορά μεταξύ των δύο καταπονήσεων έγκειται στο ότι η αντοχή σε εφελκυσμό ενός στοιχείου μιας κατασκευής είναι ανεξάρτητη του μήκους του, ενώ η αντοχή σε θλίψη, εξαρτάται από αυτό λόγω του ***φαινομένου του λυγισμού***.

Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με την εφαρμογή στην περίπτωση της θλίψεως διαφορετικών τιμών των επιτρεπομένων τάσεων ανάλογα με το μήκος του στοιχείου, ακόμη και εάν το ίδιο το υλικό έχει την ίδια αντοχή τόσο σε θλίψη, όσο και σε εφελκυσμό, όπως ο χάλυβας.

Τη διαδικασία προσδιορισμού των μειωμένων τιμών των επιτρεπομένων τάσεων λόγω του κινδύνου λυγισμού εξετάζομε στο Κεφάλαιο 6.

Ασκήσεις.

1. *Μία κολόνα θα φορτιστεί με κάθετο θλιπτικό φορτίο $F = 120.000$ N. Η κολόνα έχει διαστάσεις ορθογωνίου $a = 50$ cm και $\beta = 20$ cm. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως που θα αναπτυχθεί.*

2. *Στύλος με δακτυλιοειδή διατομή με εξωτερική ακτίνα $R = 10$ cm και πάχος δακτυλίου $h = 5$ cm θλίβεται από μία δύναμη $F = 400.000$ N. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως που θα αναπτυχθεί.*

3. *Μια κοντή χαλύβδινη κυλινδρική ράβδος καταπονείται σε θλίψη με φορτίο $F = 12.000$ N. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της ράβδου εάν ο χάλυβας έχει τάση θραύσεως στη θλίψη $\sigma_{\theta\rho,\,\theta\lambda} = 37.000$ N/cm^2 και ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως είναι ίσος με $\nu = 6$;*

4. *Κοντό κομμάτι σωλήνα καταπονείται σε θλίψη με φορτίο $F = 20.000$ N. Η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 12.000$ N/cm^2. Πόση πρέπει να είναι η εξωτερική διάμετρος D του σωλήνα, όταν ο λόγος της εξωτερικής διαμέτρου D προς την εσωτερική d είναι ίσος με 1,25;*

5. *Μια δεξαμενή γεμάτη με νερό έχει συνολικό βάρος $F = 500.000$ N. Η δεξαμενή στηρίζεται σε $n = 4$ σιδερένιους πασσάλους. Να βρεθεί η διατομή κάθε πασσάλου εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 3.000$ N/cm^2.*

6. *Δεξαμενή πετρελαίου έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος $a = 2$ m, πλάτος $b = 1$ m και ύψος $c = 1$ m και όταν είναι άδεια έχει βάρος $F = 2.200$ N. Η δεξαμενή στηρίζεται σε $n = 4$ κοντές σιδηρογωνίες ιδίων διαστάσεων $a_1 = 30$ mm και $a_2 = 30$ mm με διατομή $A = 1{,}74$ cm^2, η καθεμιά. Η επιτρεπόμενη τάση των σιδηρογωνιών είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 12.0000$ N/cm^2. Αντέχει η δεξαμενή να γεμίσει πλήρως με πετρέλαιο; Δίνεται το ειδικό βάρος του πετρελαίου $\varepsilon_{\pi\varepsilon\iota} = 8.500$ N/m^3.*

Υπόδειξη: *Η φόρτιση προέρχεται από το βάρος της δεξαμενής όταν είναι άδεια και το βάρος του πετρελαίου που χωράει. Το βάρος του πετρελαίου υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{\pi\varepsilon\iota} = \varepsilon_{\pi\varepsilon\iota} \cdot V$, όπου V ο όγκος της δεξαμενής.*

7. *Ράβδος έχει κυκλική διατομή ακτίνας $r = 25$ mm και μήκος $l = 120$ cm. Η ράβδος φορτίζεται κανονικά στην αναλογική περιοχή με θλίβουσα δύναμη $F = 48.000$ N. Να υπολογίσετε τις παραμορφώσεις της. Πόση γίνεται η ακτίνα της κυκλικής διατομής; Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας $E = 8{,}2 \cdot 10^6$ N/cm^2 και ο λόγος Poisson του υλικού της $\mu = 0{,}30$.*

2.4 Σύνθλιψη άντυγας οπής.

Η σύνθλιψη άντυγας οπής αποτελεί υποπερίπτωση εμφανίσεως της καταπονήσεως της θλίψεως. Σε πολλές κατασκευές χρησιμοποιούμε ελάσματα, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τη βοήθεια ήλων ή κοχλιών που τοποθετούνται σε ειδικές για το σκοπό αυτό οπές. Το σχήμα 2.4α

Σχ. 2.4α.
Δύο ελάσματα που συνδέονται με τη βοήθεια ήλου: (α) Πρόσοψη. (β) Κάτοψη.

παρουσιάζει χαρακτηριστική περίπτωση δύο τέτοιων ελασμάτων που συνδέονται με τη βοήθεια ήλου.

Ο ρόλος του ήλου είναι να μεταφέρει τη φόρτιση από το ένα έλασμα στο άλλο. Ο ίδιος ο ήλος, όπως θα δούμε στην παράγραφο 2.8 καταπονείται σε διάτμηση. Η μεταφορά της φορτίσεως από το ένα έλασμα στο άλλο πραγματοποιείται μέσω τάσεων, που θλίβουν την κοίλη επιφάνεια της οπής στην οποία είναι τοποθετημένος ο ήλος. Οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***τάσεις συνθλίψεως άντυγας οπής*** και το ***φαινόμενο σύνθλιψη άντυγας***[1] ***οπής***. Δηλαδή:

Σύνθλιψη άντυγας οπής ονομάζεται το φαινόμενο της εμφανίσεως θλιπτικών δυνάμεων στα τοιχώματα οπών, στα οποία τοποθετούνται ήλοι ή κοχλίες με σκοπό τη συνένωση ελασμάτων.

Το σχήμα 2.4β(α) παρουσιάζει τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στον ήλο από τα τοιχώματα της οπής, ενώ το σχήμα 2.4β(β) παρουσιάζει τις ίσες και αντίθετες δυνάμεις που αναπτύσσονται στα τοιχώματα της οπής από τον ήλο.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της οπής ενός ελάσματος είναι τα ακόλουθα:

α) Το ύψος της, το οποίο συμπίπτει με το πάχος h του ελάσματος και

β) η διάμετρός της d.

Η παράπλευρη επιφάνεια A, στην οποία ασκούνται οι τάσεις συνθλίψεως άντυγας οπής έχει εμβαδόν που δίνεται από τη σχέση:

$$A = h \cdot d \tag{2.19}$$

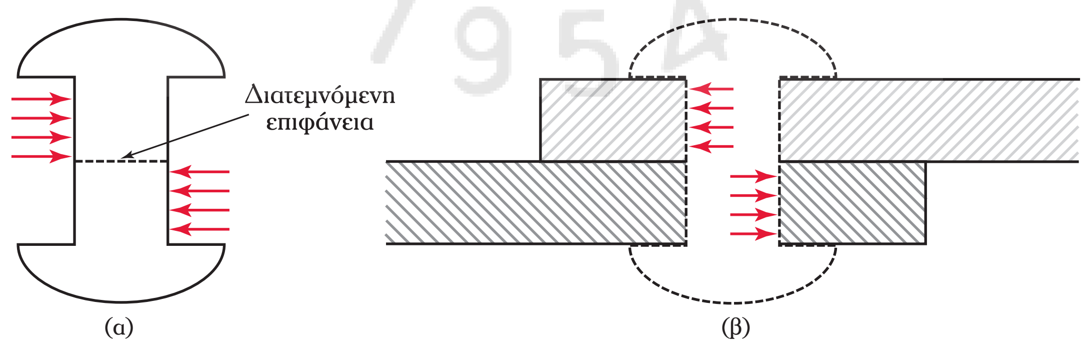
Έτσι, εάν F είναι το εξωτερικό φορτίο που καταπονεί το έλασμα, τότε η τάση συνθλίψεως άντυγας οπής $\sigma_{αντ}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{A} \Leftrightarrow \sigma_{αντ} = \frac{F}{h \cdot d} \tag{2.20}$$

2.4.1 Σχέση συνθλίψεως άντυγας οπής.

Όπως ακριβώς συμβαίνει στον εφελκυσμό και τη θλίψη, έτσι και για τη σύνθλιψη άντυγας οπής ορίζεται μία ***επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας οπής*** $\sigma_{επ,\,αντ}$, την οποία δεν πρέπει να υπερβαίνουν οι αναπτυσσόμενες τάσεις συνθλίψεως άντυγας οπής. Έτσι, κατ' αναλογία του εφελκυσμού και της θλίψεως, ορίζεται η ***σχέση συνθλίψεως άντυγας οπής***, η οποία έχει ως εξής:

$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{h \cdot d} \le \sigma_{επ,αντ} \tag{2.21}$$



Σχ. 2.4β.
(α) Απεικόνιση των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στον ήλο από τα τοιχώματα της οπής των ελασμάτων του σχήματος 2.4α. (β) Απεικόνιση των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στα τοιχώματα της οπής των εν λόγω ελασμάτων από τον ήλο.

[1] Ο όρος ***άντυγα*** είναι συνώνυμος του όρου ***τοίχωμα***. Έτσι, ο όρος ***άντυγα της οπής*** αναφέρεται στα τοιχώματα της οπής.

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στη σύνθλιψη άντυγας οπής είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως. Δηλαδή, αφορούν στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας, στον υπολογισμό των διαστάσεων της οπής και στον υπολογισμό του φορτίου που αντέχει η άντυγα της οπής, και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως.

Παράδειγμα 12.

Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 30 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 20 mm, τοποθετείται ήλος. Εάν το έλασμα φορτίζεται με δύναμη F = 25.000 N, να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής. Φορτίζεται η άντυγα της οπής κανονικά; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\alpha\nu\tau} = 6.000\ \text{N/cm}^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
h = 30 mm	$\sigma_{\alpha\nu\tau}$ = ;
d = 20 mm	$\sigma_{\alpha\nu\tau}$? $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\alpha\nu\tau}$
F = 25.000 N	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\alpha\nu\tau} = 6.000\ \text{N/cm}^2$	

Λύση.

Η τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\nu\tau} = \frac{F}{h \cdot d} = \frac{25.000\ \text{N}}{30\ \text{mm} \cdot 20\ \text{mm}} = 41{,}67 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 4.167 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Η τάση αυτή είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής. Άρα, η άντυγα της οπής φορτίζεται κανονικά.

Παράδειγμα 13.

Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 40 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 18 mm, τοποθετείται ήλος. Εάν η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\alpha\nu\tau} = 8.500\ \text{N/cm}^2$, να υπολογιστεί η ικανότητα φορτίσεως του ελάσματος.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
h = 40 mm	F = ;
d = 18 mm	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\alpha\nu\tau} = 8.500\ \text{N/cm}^2$	

Λύση.

Εφαρμόζομε τη σχέση συνθλίψεως άντυγας της οπής και λύνομε ως προς το φορτίο:

$$\frac{F}{h \cdot d} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F \leq h \cdot d \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\alpha\nu\tau} \Leftrightarrow F \leq 40\ \text{mm} \cdot 18\ \text{mm} \cdot 8500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \Leftrightarrow F \leq 61.200\ \text{N}.$$

Ασκήσεις.

1. *Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 20 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 12 mm, τοποθετείται ήλος. Εάν το έλασμα φορτίζεται με δύναμη F = 10.500 N, να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη τάση συνθλί-*

ψεως άντυγας της οπής. Φορτίζεται η άντυγα της οπής κανονικά; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $σ_{επ, αντ}$ = 8.000 N/cm^2.

2. *Διαθέτομε έλασμα πάχους h = 40 mm. Στο έλασμα θέλομε να ανοίξομε οπή για να τοποθετήσομε κοχλία, προκειμένου να φορτίσομε το έλασμα με δύναμη F = 13.000 N. Εάν η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $σ_{επ, αντ}$ = 5.000 N/cm^2, να υπολογιστεί η διάμετρος της οπής που πρέπει να ανοιχθεί. Οι ήλοι που διαθέτομε έχουν ακέραιες διαμέτρους σε mm.*

3. *Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 28 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 16 mm, τοποθετείται ήλος. Εάν η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $σ_{επ, αντ}$ = 7.200 N/cm^2, να υπολογιστεί η ικανότητα φορτίσεως του ελάσματος.*

2.5 Κυλινδρικά δοχεία πιέσεως με λεπτά τοιχώματα.

Τα κυλινδρικά δοχεία πιέσεως με λεπτά τοιχώματα που περιέχουν ρευστό είναι σώματα που καταπονούνται σε εφελκυσμό. Παραδείγματα τέτοιων δοχείων αποτελούν οι λέβητες, οι αεροσυμπιεστές κ.λπ..

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτών των σωμάτων είναι τα ακόλουθα:

α) Το πάχος t των τοιχωμάτων τους.

β) Το μήκος τους l και

γ) η διάμετρος d του κυλίνδρου.

Τα δοχεία περιέχουν ρευστό με πίεση P. Οι ***μονάδες μετρήσεως της πιέσεως των ρευστών*** παρουσιάζονται στον πίνακα 2.5.1. Στην πράξη η πίεση μετρείται σε N/cm^2 ή N/mm^2.

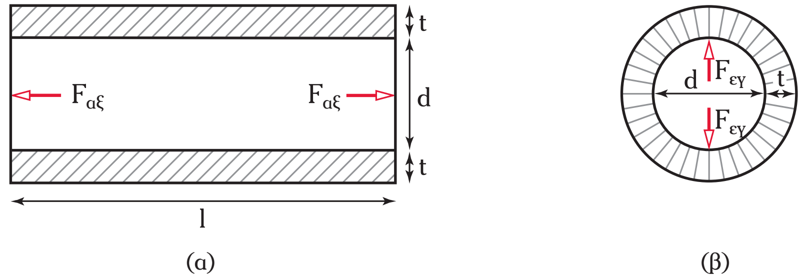
Πίνακας 2.5.1.

Μέγεθος	***Διεθνές Σύστημα***	***C.G.S.***	***Τεχνικό Σύστημα***	***Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα***
Πίεση	1 N/m^2	1 dyn/cm^2	1 kp/m^2	1 lb/ft^2

Προκειμένου να μελετήσομε την καταπόνηση του εφελκυσμού σ' ένα κυλινδικό δοχείο πιέσεως με λεπτά τοιχώματα παρατηρούμε τις τομές του δοχείου κατά τον άξονά του και κάθετα σ' αυτόν (σχ. 2.5α).

Η εσωτερική πίεση καταπονεί τα τοιχώματα του κυλινδρικού δοχείου στις ακόλουθες δύο διευθύνσεις (σχ. 2.5α):

α) ***Κατά τον άξονα του δοχείου*** (αξονικά). Στη διεύθυνση αυτή ενεργούν δυνάμεις $F_{αξ}$, που προέρχονται από την πίεση που αναπτύσσεται στις δύο βάσεις του κυλινδρικού δοχείου και δίνονται απ' τη σχέση:



Σχ. 2.5α.
Καταπόνηση των τοιχωμάτων κυλινδρικού δοχείου πιέσεως με λεπτά τοιχώματα σε δύο διευθύνσεις. (α) Αξονικά. (β) Εγκάρσια.

$$F_{\alpha\xi} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot P}{4} \tag{2.22}$$

β) ***Κάθετα στον άξονα του δοχείου*** (εγκάρσια). Στη διεύθυνση αυτή ενεργούν εγκάρσιες δυνάμεις $F_{\varepsilon\gamma}$ που δίνονται απ' τη σχέση:

$$F_{\varepsilon\gamma} = d \cdot l \cdot P \tag{2.23}$$

Στη συνέχεια μελετούμε τις καταπονήσεις που δέχεται το κυλινδρικό δοχείο απ' τις ανωτέρω δυνάμεις.

2.5.1 Καταπόνηση από τη δύναμη που ενεργεί αξονικά.

Η δύναμη $F_{\alpha\xi}$ που ενεργεί κατά τον άξονα του κυλινδρικού δοχείου καταπονεί κάθετα την εγκάρσια διατομή του δοχείου που έχει σχήμα δακτυλίου, αναπτύσσοντας τάσεις εφελκυσμού παράλληλες στον άξονα του δοχείου. Οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***διαμήκεις τάσεις***. Η επιφάνεια του δακτυλίου απεικονίζεται στο σχήμα 2.5β. Ο δακτύλιος έχει πολύ μικρό πάχος και άρα το εμβαδόν του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A_\delta = \pi \cdot d \cdot t \tag{2.24}$$

Οι διαμήκεις τάσεις $\sigma_{\delta\iota\alpha\mu}$ που αναπτύσσονται λόγω της δυνάμεως $F_{\alpha\xi}$ δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\delta\iota\alpha\mu} = \frac{F_{\alpha\xi}}{A_\delta} \tag{2.25}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.22) και (2.24) στη σχέση (2.25), λαμβάνομε:

$$\sigma_{\delta\iota\alpha\mu} = \frac{F_{\alpha\xi}}{A_\delta} \Leftrightarrow \sigma_{\delta\iota\alpha\mu} = \frac{\frac{\pi \cdot d^2 \cdot P}{4}}{\pi \cdot d \cdot t} \Leftrightarrow \sigma_{\delta\iota\alpha\mu} = \frac{d \cdot P}{4 \cdot t} \tag{2.26}$$

Σημειώνομε ότι οι διαμήκεις τάσεις πρέπει να είναι μικρότερες απ' την επιτρεπόμενη τάση.

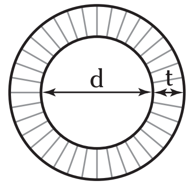
2.5.2 Καταπόνηση από τη δύναμη που ενεργεί εγκάρσια.

Η δύναμη $F_{\varepsilon\gamma}$, παρόλο που ενεργεί κάθετα στον άξονα του κυλινδρικού δοχείου, καταπονεί κάθετα τη διατομή που απεικονίζεται στο σχήμα 2.5γ, αναπτύσσοντας τάσεις εφελκυσμού. Οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***εφαπτομενικές τάσεις***. Η επιφάνεια της διατομής αυτής υπολογίζεται απ' τη σχέση:

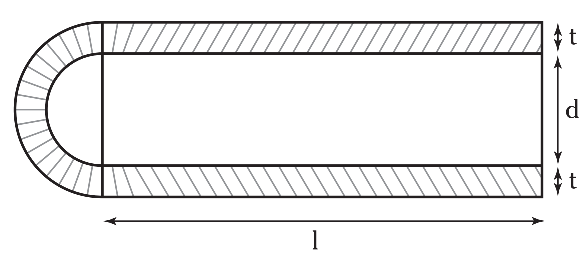
$$A = 2 \cdot l \cdot t \tag{2.27}$$

Οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi}$ που αναπτύσσονται λόγω της δυνάμεως $F_{\varepsilon\gamma}$ δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \frac{F_{\varepsilon\gamma}}{A} \tag{2.28}$$



Σχ. 2.5β.
Η δακτυλιοειδής διατομή ενός κυλινδρικού δοχείου με λεπτά τοιχώματα.



Σχ. 2.5γ.
Η διατομή ενός κυλινδρικού δοχείου με λεπτά τοιχώματα στην οποία ενεργεί κάθετα η εγκάρσια δύναμη.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.23) και (2.27) στη σχέση (2.28), λαμβάνομε:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \frac{F_{\varepsilon\gamma}}{A} \Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \frac{d \cdot l \cdot P}{2 \cdot l \cdot t} \Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \frac{d \cdot P}{2 \cdot t} \qquad (2.29)$$

Για τις εφαπτομενικές τάσεις σημειώνομε ότι πρέπει να είναι μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.26) και (2.29), διαπιστώνομε ότι οι εφαπτομενικές τάσεις είναι διπλάσιες των διαμήκων τάσεων:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = 2 \cdot \sigma_{\delta\iota\alpha\mu} \qquad (2.30)$$

2.5.3 Επιλογή πάχους τοιχωμάτων κυλινδρικού δοχείου.

Με βάση όσα προαναφέραμε έχομε μια σύνθετη καταπόνηση, αφού έχομε δύο εφελκυσμούς κατά διαφορετικές διευθύνσεις.

Η επιλογή του πάχους t των τοιχωμάτων των κυλινδρικών δοχείων στηρίζεται στο ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις πρέπει να είναι μικρότερες απ' την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει συνδυαστικά: $\sigma_{\delta\iota\alpha\mu} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$ και $\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$. Όμως, επειδή είναι $\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = 2 \cdot \sigma_{\delta\iota\alpha\mu}$, αρκεί:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \qquad (2.31)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.29) στη σχέση (2.31) και λύνοντας ως προς το πάχος t λαμβάνομε:

$$\frac{d \cdot P}{2 \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow t \geq \frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}} \qquad (2.32)$$

Επομένως, το πάχος των τοιχωμάτων των κυλινδρικών δοχείων πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με $\dfrac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}}$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι στην πράξη, το πάχος των τοιχωμάτων των κυλινδρικών δοχείων λαμβάνεται λίγο μεγαλύτερο απ' την ανωτέρω τιμή κατά μία ποσότητα Δt, ώστε να προφυλάσσονται από οξείδωση. Δηλαδή, στην πράξη το πάχος επιλέγεται χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$t \geq \frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}} + \Delta t \qquad (2.33)$$

Η ποσότητα Δt παρέχεται για διάφορες περιπτώσεις στον πίνακα 2.5.2.

Πίνακας 2.5.2.

Είδος δοχείων	***Δt***	***Είδος σωλήνων***	***Δt***
Χαλύβδινα	0,1 cm	Χαλύβδινοι	0,3 cm
Χάλκινα	0,1 cm	Χάλκινοι	0,15 cm
Χυτοσιδηρά	1,25 cm	Χυτοσιδηροί	0,65 cm

Ωστόσο, στα προβλήματα του παρόντος κεφαλαίου δεν θα λαμβάνομε υπόψη την ανωτέρω ποσότητα Δt.

Παράδειγμα 14.

Κυλινδρικός θάλαμος πιέσεως με λεπτά τοιχώματα μήκους l = 3m και διαμέτρου d = 1,6 m πρέπει να λειτουργήσει με πίεση $P = 100\ N/cm^2$. Αν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 12.000\ N/cm^2$:

α) Να προσδιοριστεί το ελάχιστο πάχος τοιχωμάτων λαμβάνοντας υπόψη ότι διαθέσιμα πάχη υπάρχουν μόνο σε ακέραια mm.

β) Να υπολογιστούν οι διαμήκεις και οι εφαπτομενικές τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό της παράπλευρης επιφάνειας του θαλάμου για το πάχος που επιλέχθηκε στο ερώτημα α.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 3m$	$t = ;$
$d = 1,6\ m$	$\sigma_{\delta\iota\alpha\mu} = ;$
$P = 100\ N/cm^2$	$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = ;$
$\sigma_{\varepsilon\pi} = 12.000\ N/cm^2$	

Λύση.

α) Οι αναπτυσσόμενες εφαπτομενικές τάσεις πρέπει να είναι μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση, δηλαδή:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} \le \sigma_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \frac{d \cdot P}{2 \cdot t} \le \sigma_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow t \ge \frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow t \ge \frac{1,6\,m \cdot 100\,N/cm^2}{2 \cdot 12.000\,N/cm^2} \Leftrightarrow t \ge 6,67\,mm$$

Άρα, δεδομένου ότι διαθέσιμα πάχη υπάρχουν μόνο σε ακέραια mm, επιλέγομε ως πάχος τοιχώματος του κυλινδρικού θαλάμου $t = 7$ mm.

β) Για το πάχος $t = 7$ mm, οι αναπτυσσόμενες διαμήκεις και εφαπτομενικές τάσεις είναι:

$$\sigma_{\delta\iota\alpha\mu} = \frac{d \cdot P}{4 \cdot t} = \frac{1,6\,m \cdot 100\,N/cm^2}{4 \cdot 7\,mm} = 5.714\,N/cm^2$$

και

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \frac{d \cdot P}{2 \cdot t} = \frac{1,6\,m \cdot 100\,N/cm^2}{2 \cdot 7\,mm} = 11.429\,N/cm^2$$

Ασκήσεις.

1. *Θέλομε να κατασκευάσομε κυλινδρικό δοχείο με λεπτά τοιχώματα με διάμετρο $d = 100$ cm και μήκος $l = 140$ cm, το οποίο να αντέχει σε πίεση $P = 80\ N/cm^2$. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 32.000\ N/cm^2$, να υπολογιστεί το πάχος των τοιχωμάτων του δοχείου.*

2. *Κυλινδρικό δοχείο με λεπτά τοιχώματα έχει διάμετρο $d = 90$ cm, μήκος $l = 80$ cm και πάχος $t = 10$ mm. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 18.000\ N/cm^2$, να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη εσωτερική πίεση.*

3. *Κυλινδρικό δοχείο πιέσεως με λεπτά τοιχώματα μήκους $l = 2,5$ m και διαμέτρου $d = 1,5$ m πρέπει να λειτουργήσει με πίεση $P = 80\ N/cm^2$. Αν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 14.000\ N/cm^2$:*

α) Να προσδιοριστεί το ελάχιστο πάχος τοιχώματος λαμβάνοντας υπόψη ότι διαθέσιμα πάχη υπάρχουν μόνο σε ακέραια mm.

β) Να υπολογιστούν οι διαμήκεις και οι εφαπτομενικές τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό της παράπλευρης επιφάνειας του δοχείου για το πάχος που επιλέχθηκε στο ερώτημα (α).

2.6 Τάσεις αναπτυσσόμενες από παρεμπόδιση.

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως αναπτύσσονται λόγω της εφαρμογής εξωτερικών δυνάμεων. Ωστόσο, τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως είναι δυνατό να αναπτυχθούν και χωρίς την εφαρμογή εξωτερικών φορτίων, σε σώματα στα οποία συμβαίνει μία θερμοκρασιακή μεταβολή και παρεμποδίζονται να παραμορφωθούν ελεύθερα. Αντίθετα, αν δεν παρεμποδίζεται η παραμόρφωση των σωμάτων, δεν αναπτύσσονται τάσεις.

Συγκεκριμένα, αν μεταβάλλεται η θερμοκρασία ενός σώματος και αυτό δεν έχει τη δυνατότητα να διασταλεί ή να συσταλεί ελεύθερα, τότε αναπτύσσονται στο σώμα τάσεις. Ενίοτε, οι τάσεις αυτές είναι ιδιαίτερα υψηλές, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε μόνιμη παραμόρφωση του σώματος ή ακόμα και σε θραύση. Συνεπώς, πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια στις κατασκευές, ώστε να αποφεύγεται η ανάπτυξη τάσεων από θερμοκρασιακές μεταβολές. Έτσι, ιδίως σε κατασκευές, που υφίστανται συνεχώς μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές επιβάλλεται να λαμβάνονται τα κατάλληλα μέτρα, ώστε να μην παρεμποδίζεται η ελεύθερη παραμόρφωσή τους. Τέτοιες κατασκευές για παράδειγμα είναι οι σωληνώσεις θερμικών εγκαταστάσεων. Ένα μέτρο που λαμβάνομε για την περίπτωσή τους είναι η τοποθέτηση ειδικών εξαρτημάτων στις σωληνώσεις θερμικών εγκαταστάσεων για την παραλαβή των διαστολών. Άλλο παράδειγμα κατασκευών που υφίστανται μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές είναι οι άτρακτοι μηχανών. Ένα μέτρο που λαμβάνομε για την περίπτωσή τους είναι η δημιουργία αξονικών διακένων στα έδρανα στηρίξεώς τους.

Επίσης, ανάπτυξη τάσεων λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής συμβαίνει στις περιπτώσεις κατασκευών που αποτελούνται από δύο ή περισσότερα υλικά με διαφορετικό συντελεστή διαστολής. Το υλικό με το μεγαλύτερο συντελεστή διαστολής τείνει να διασταλεί περισσότερο από τα άλλα υλικά, τα οποία εμποδίζουν αυτήν τη διαστολή και έτσι δημιουργούνται θερμικές τάσεις.

Περαιτέρω ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των τάσεων που αναπτύσσονται σ' ένα σώμα, όταν αυτό δέχεται εξωτερικό φορτίο και ταυτόχρονα μεταβάλλεται η θερμοκρασία του, χωρίς να έχει δυνατότητα ελεύθερης παραμορφώσεώς του.

Στη συνέχεια, εξετάζομε αναλυτικά τις περιπτώσεις αναπτύξεως τάσεων λόγω μεταβολών της θερμοκρασίας (αύξηση και μείωση) χωρίς και με την παρουσία εξωτερικών φορτίων.

2.6.1 Ανάπτυξη τάσεων λόγω αυξήσεως της θερμοκρασίας.

Ας παρατηρήσομε τη ράβδο του σχήματος 2.6α. Η ράβδος έχει μήκος l και είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή και συστολή της.

Εάν η ράβδος ήταν ελεύθερη στο ένα άκρο της, τότε, όπως αναφέραμε στην υποπαράγραφο 1.8.1, αύξηση της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta$ ($\Delta\theta>0$) θα προκαλούσε διαστολή της κατά $\Delta l>0$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta \qquad (2.34)$$

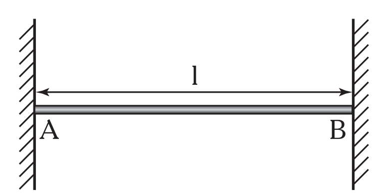
όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής της ράβδου.

Ωστόσο, η στήριξη της ράβδου δεν της επιτρέπει να επιμηκυνθεί ελεύθερα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναπτυχθούν σ' αυτήν τάσεις όμοιες με εκείνες που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ενεργούσε μία θλιπτική δύναμη, ώστε να την επαναφέρει στην αρχική της θέση. Συνεπώς, ***στην περίπτωση της παρεμποδίσεως της ελεύθερης επιμηκύνσεως της ράβδου λόγω αυξήσεως της θερμοκρασίας, έχομε καταπόνηση σε θλίψη.***

Οι τάσεις σ που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ράβδου ενεργούσε μια θλιπτική δύναμη για να την επαναφέρει στην αρχική της θέση δίνεται, όπως έχομε πει (βλ. παράγρ. 1.4) από το νόμο του Hooke:

$$\varepsilon = -\frac{\sigma}{E} \qquad (2.35)$$

όπου ε είναι η ανηγμένη επιβράχυνση της ράβδου και E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της. Η ανηγμένη επιβράχυνση της ράβδου ορίζεται ως:



Σχ. 2.6α.
Ράβδος στερεωμένη στα δύο άκρα της.

$$\varepsilon = \frac{-\Delta l}{l} \qquad (2.36)$$

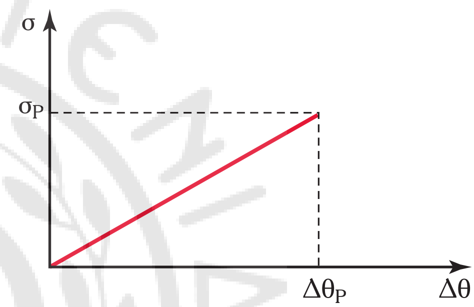
Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.34) και (2.36) στη σχέση (2.35) και λύνοντας ως προς σ λαμβάνομε:

$$\frac{-\Delta l}{l} = -\frac{\sigma}{E} \Leftrightarrow \sigma = \frac{\Delta l \cdot E}{l} \Leftrightarrow \sigma = \frac{\alpha \cdot l \cdot \Delta\theta \cdot E}{l} \Leftrightarrow \sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta \qquad (2.37)$$

Από τη σχέση (2.37) συμπεραίνομε ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται λόγω της παρεμποδίσεως της ελεύθερης διαστολής ενός σώματος που προκαλείται από την αύξηση της θερμοκρασίας είναι ***πρώτον*** ανάλογες της μεταβολής της θερμοκρασίας και ***δεύτερον*** εξαρτώνται από το υλικό της ράβδου και συγκεκριμένα από το συντελεστή θερμικής διαστολής και το μέτρο ελαστικότητάς του.

Το σχήμα 2.6β απεικονίζει τη γραμμική σχέση μεταξύ των αναπτυσσομένων τάσεων και της μεταβολής της θερμοκρασίας. Η σχέση αυτή ισχύει μέχρι το όριο ισχύος του νόμου του Hooke (σ_P). Για το λόγο αυτό, πρέπει να επιβεβαιώνεται ότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της σχέσεως (2.37) βρίσκεται όντως εντός της αναλογικής περιοχής ισχύος του νόμου του Hooke. Εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο ελαστικότητας, τότε οι παραμορφώσεις από τη μεταβολή της θερμοκρασίας καθίστανται μόνιμες. Περαιτέρω, εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο θραύσεως, έχομε θραύση, όπως και στην περίπτωση της επιδράσεως εξωτερικών φορτίων.

Από τη σχέση (2.37) συμπεραίνομε επίσης ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται λόγω παρεμποδίσεως ελεύθερης διαστολής είναι ανεξάρτητες τόσο του μήκους της ράβδου, όσο και της διατομής της.



Σχ. 2.6β.
Η σχέση μεταξύ των αναπτυσσομένων τάσεων και της μεταβολής της θερμοκρασίας, όταν παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή.

Παράδειγμα 15.

Να υπολογιστούν οι τις τάσεις που αναπτύσσονται σε μία ράβδο μήκους l = 2 m, που είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή της, όταν η θερμοκρασία αυξάνεται από θ_1 = 25 °C σε θ_2 = 37 °C. Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$/°C, το μέτρο ελαστικότητας $E = 3{,}2 \cdot 10^{7}$ N/cm² και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως της ράβδου $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$ = 10.000 N/cm².

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 2 m	σ = ;
θ_1 = 25 °C	
θ_2 = 37 °C	
$\alpha = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ /°C	
$E = 3{,}2 \cdot 10^{7}$ N/cm²	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$ = 10.000 N/cm²	

Λύση.

α) Έχομε μεταβολή της θερμοκρασίας της ράβδου κατά:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 37^\circ C - 25^\circ C = 12^\circ C.$$

Οι τάσεις που αναπτύσσονται στη ράβδο λόγω της παρεμποδίσεως της ελεύθερης διαστολής της υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \,/^{o}\, C \cdot 3{,}2 \cdot 10^{7}\ N/cm^{2} \cdot 12\ ^{\circ}C = 4.992\,N/cm^{2}$$

Οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως. Άρα, όντως η ράβδος καταπονείται στην αναλογική περιοχή, όπου ισχύει ο νόμος του Hooke και ορθώς εφαρμόσαμε την ανωτέρω σχέση υπολογισμού των αναπτυσσομένων τάσεων.

2.6.2 Ανάπτυξη τάσεων λόγω μειώσεως της θερμοκρασίας.

Ας μελετήσομε τώρα την περίπτωση της μειώσεως της θερμοκρασίας της ράβδου του σχήματος 2.6α, η οποία είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή και συστολή της. Η μείωση της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta$ προκαλεί τη συστολή της κατά Δl που δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta \tag{2.38}$$

όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής της ράβδου.

Ωστόσο, η στήριξη της ράβδου δεν επιτρέπει στη ράβδο, την ελεύθερη επιβράχυνση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναπτυχθούν στη ράβδο τάσεις όμοιες με εκείνες που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ενεργούσε μία εφελκυστική δύναμη για να την επαναφέρει στην αρχική της θέση. Συνεπώς, ***στην περίπτωση της παρεμποδίσεως της ελεύθερης επιβραχύνσεως της ράβδου λόγω μειώσεως της θερμοκρασίας, έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό.***

Οι τάσεις σ που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ράβδου ενεργούσε μια εφελκυστική δύναμη για να την επαναφέρει στην αρχική της θέση δίνεται, όπως έχομε πει, από το νόμο του Hooke. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, όπως και στην περίπτωση της αυξήσεως της θερμοκρασίας, καταλήγομε στην ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό των τάσεων που αναπτύσσονται λόγω παρεμποδίσεως ελεύθερης συστολής ενός σώματος που προκαλείται απ' τη μείωση της θερμοκρασίας:

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta \tag{2.39}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Στη σχέση (2.39) η μεταβολή της θερμοκρασίας $\Delta\theta$ αφορά στην απόλυτη τιμή της.

Κατ' αναλογία με την περίπτωση της αυξήσεως της θερμοκρασίας, από τη σχέση (2.39) συμπεραίνομε ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται λόγω παρεμποδίσεως ελεύθερης συστολής είναι ανάλογες της μεταβολής της θερμοκρασίας, εξαρτώνται από το υλικό της ράβδου και συγκεκριμένα από το συντελεστή θερμικής διαστολής και το μέτρο ελαστικότητάς του και είναι ανεξάρτητες τόσο του μήκους της ράβδου, όσο και της διατομής της.

Σημειώνομε και εδώ ότι η σχέση (2.39) ισχύει μέχρι το όριο ισχύος του νόμου του Hooke. Για το λόγο αυτό, πρέπει να επιβεβαιώνεται ότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της σχέσεως (2.39) βρίσκεται όντως εντός της αναλογικής περιοχής. Εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο ελαστικότητας, τότε οι παραμορφώσεις από τη μεταβολή της θερμοκρασίας γίνονται μόνιμες. Περαιτέρω, εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο θραύσεως, έχομε θραύση, όπως και στην περίπτωση της επιδράσεως εξωτερικών φορτίων.

Παράδειγμα 16.

Η επιτρεπόμενη τάση εφελυσμού μιας χαλύβδινης ράβδου, που είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή της, είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = 12.000\ N/cm^2$. Πόση είναι η επιτρεπόμενη μείωση της θερμοκρασίας; Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ /^{\circ}C$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}4 \cdot 10^{7}\ N/cm^2$ της ράβδου.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\sigma_{\text{επ, εφ}} = 12.000\ N/cm^2$	$\Delta\theta = ;$
$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}\ /°C$	
$E = 2,4 \cdot 10^{7}\ N/cm^2$	

Λύση.

Λόγω της παρεμποδίσεως της ελεύθερης συστολής της ράβδου, η μείωση της θερμοκρασίας έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση τάσεως, η οποία δίνεται από τη σχέση: $\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta$.

Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\text{επ, εφ}}$. Έτσι έχομε:

$$\sigma \leq \sigma_{\text{επ,εφ}} \Leftrightarrow \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta \leq \sigma_{\text{επ,εφ}} \Leftrightarrow \Delta\theta \leq \frac{\sigma_{\text{επ,εφ}}}{\alpha \cdot E} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\theta \leq \frac{12.000\ N/cm^2}{1,5 \cdot 10^{-5}\ /°C \cdot 2,4 \cdot 10^{7}\ N/cm^2} \Leftrightarrow \Delta\theta \leq 33,3\ °C$$

Άρα, η θερμοκρασία επιτρέπεται να μειωθεί το πολύ κατά 33,3°C.

2.6.3 Ανάπτυξη τάσεων λόγω συνδυασμού εξωτερικών φορτίων και μεταβολής της θερμοκρασίας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των τάσεων που αναπτύσσονται σ' ένα σώμα όταν αυτό δέχεται εξωτερικό φορτίο και ταυτόχρονα μεταβάλλεται η θερμοκρασία του, χωρίς να έχει δυνατότητα ελεύθερης παραμορφώσεώς του. Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσονται στο σώμα δύο είδη τάσεων:

α) Τάσεις από τα εξωτερικά φορτία, οι οποίες παρέχονται από τη σχέση: $\sigma_1 = \dfrac{F}{A}$ και

β) Τάσεις από τη μεταβολή της θερμοκρασίας που παρέχονται από τη σχέση: $\sigma_2 = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta$.

Η συνολική τάση $\sigma_{\text{ολ}}$ που αναπτύσσεται στο σώμα προκύπτει ως το ***αλγεβρικό άθροισμα*** των ανωτέρω τάσεων, δηλαδή:

$$\sigma_{\text{ολ}} = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{2.40}$$

Επισημαίνομε ότι οι δύο τάσεις προστίθενται αλγεβρικά. Στο αλγεβρικό αυτό άθροισμα, η ***τάση εφελκυσμού***, ανεξαρτήτως του εάν οφείλεται σε εξωτερικά φορτία ή σε μείωση της θερμοκρασίας, ***λαμβάνεται θετική***, ενώ η ***τάση θλίψεως***, ανεξαρτήτως του εάν οφείλεται σε εξωτερικά φορτία ή σε αύξηση της θερμοκρασίας, ***λαμβάνεται αρνητική***.

Φυσικά, η συνολική τάση πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\text{επ}}$, δηλαδή:

$$\sigma_{\text{ολ}} \leq \sigma_{\text{επ}} \tag{2.41}$$

Παράδειγμα 17.

Μία ράβδος κυκλικής διατομής είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η θερμοκρασία της ράβδου μειώνεται από $\theta_1 = 60\ °C$ σε $\theta_2 = 25\ °C$ και δέχεται εξωτερικό εφελκυστικό φορτίο F = 15.000 N. Να διαπιστωθεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά. Δίνονται:

α) Η ακτίνα κυκλικής διατομής της ράβδου: r = 10 mm.

β) Η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{\text{επ, εφ}} = 22.000\ N/cm^2$.

γ) Ο συντελεστής θερμικής διαστολής: $\alpha = 2,1 \cdot 10^{-5}/°C$.

δ) Το μέτρο ελαστικότητας: $E = 1,8 \cdot 10^{7}\ N/cm^2$.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$\theta_1 = 60\ °C$	$\sigma_{ολ}$? $\sigma_{επ}$
$\theta_2 = 25\ °C$	
$F = 15.000\ N$	
$r = 10\ mm = 1\ cm$	
$\sigma_{επ,\ εφ} = 22.000\ N/cm^2$	
$α = 2{,}1 \cdot 10^{-5}/°C$	
$E = 1{,}8 \cdot 10^7\ N/cm^2$	

Λύση.

Στη ράβδο αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις από δύο πηγές:

α) Από το εξωτερικό φορτίο: F = 15.000 N.

β) Από τη μείωση της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta = 60\ °C - 25\ °C = 35\ °C$.

Η εφελκυστική τάση από το εξωτερικό φορτίο υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \cdot r^2} = \frac{15.000\ N}{3{,}14 \cdot 1^2\ cm^2} = 4.777 \frac{N}{cm^2}$$

Η εφελκυστική τάση από τη μείωση της θερμοκρασίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_2 = α \cdot E \cdot \Delta\theta = 2{,}1 \cdot 10^{-5}/°C \cdot 1{,}8 \cdot 10^7\ N/cm^2 \cdot 35\ °C = 13.230\ N/cm^2$$

Οι δύο τάσεις είναι εφελκυστικές, άρα λαμβάνονται θετικές. Η συνολική τάση υπολογίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των δύο τάσεων:

$$\sigma_{ολ} = \sigma_1 + \sigma_2 = 4.777\ N/cm^2 + 13.230\ N/cm^2 = 18.007\ N/cm^2$$

Η συνολική τάση είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{επ,\ εφ}$. Άρα, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

Ασκήσεις.

1. *Μια ράβδος μήκους l = 2 m και κυκλικής διατομής με διάμετρο d = 30 mm θερμαίνεται, χωρίς ωστόσο να έχει κανένα περιθώριο ελεύθερης διαστολής. Πόσο επιτρέπεται να αυξηθεί η θερμοκρασία της, όταν το όριο θραύσεως στη θλίψη είναι $\sigma_{θρ,\ θλ} = 8.000\ N/cm^2$ και ο συντελεστής ασφαλείας ν = 4; Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $a = 1{,}3 \cdot 10^{-5}/°C$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}2 \cdot 10^7\ N/cm^2$ της ράβδου.*

2. *Μία σωλήνωση έχει μήκος l = 12 m. Η σωλήνωση στηρίζεται στη μία άκρη της σταθερά, ενώ στην άλλη έχει περιθώριο ώστε να διασταλεί μέχρι $\Delta l_1 = 8$ mm. Πόση τάση θα αναπτυχθεί εάν η θερμοκρασία αυξηθεί κατά Δθ = 90°C; Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}/°C$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 3{,}2 \cdot 10^7\ N/cm^2$ της σωληνώσεως. Θεωρήστε ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις στη σωλήνωση βρίσκονται στην ελαστική περιοχή.*

Υπόδειξη: *Η σωλήνωση μέχρι κάποια θερμοκρασία διαστέλλεται ελεύθερα και στη συνέχεια παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή της.*

3. *Μία ράβδος τετραγωνικής διατομής είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η ράβδος δέχεται εξωτερικό θλιπτικό φορτίο F = 20.000 N. Πόσο επιτρέπεται να αυξηθεί η θερμοκρασία της; Δίνονται:*

α) Η πλευρά της τετραγωνικής διατομής της ράβδου: β = 1,1 cm.

β) Η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{επ,\ θλ} = 24.000\ N/cm^2$.

γ) Ο συντελεστής θερμικής διαστολής: $a = 1{,}7 \cdot 10^{-5}/°C$.

δ) Το μέτρο ελαστικότητας: $E = 2{,}2 \cdot 10^7\ N/cm^2$.

4. *Μία ράβδος κυκλικής διατομής είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η ράβδος δέχεται εξωτερικό φορτίο $F = 18.000$ N και λειτουργεί σε περιβάλλον, οι θερμοκρασίες του οποίου κυμαίνονται από $\theta_1 = 0°C$ έως $\theta_2 = 40°C$. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της ράβδου; Η τάση θραύσεως είναι $\sigma_{\theta\rho} = 48.000$ N/cm^2, ο συντελεστής ασφαλείας $\nu = 3$, ο συντελεστής θερμικής διαστολής $a = 2{,}3 \cdot 10^{-5}/°C$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}3 \cdot 10^{-7}$ N/cm^2.*

5. *Μία ράβδος ορθογώνιας διατομής με πλευρές $\beta = 1{,}1$ cm* και *$\gamma = 2{,}2$ cm είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η ράβδος δέχεται εξωτερικά φορτία και λειτουργεί σε περιβάλλον, οι θερμοκρασίες του οποίου κυμαίνονται από $\theta_1 = -5°C$ έως $\theta_2 = 45°C$. Πόσο εξωτερικό φορτίο επιτρέπεται να φέρει η ράβδος; Η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 20.000$ N/cm^2, ο συντελεστής θερμικής διαστολής $a = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$ /°C και το μέτρο ελαστικότητας $E = 1{,}4 \cdot 10^7$ N/cm^2.*

2.7 Υπερστατικά προβλήματα εφελκυσμού και θλίψεως.

Στα προβλήματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα, οι εξωτερικές αξονικές δυνάμεις που καταπονούν ένα σώμα σε εφελκυσμό ή θλίψη είναι γνωστές. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις οι εξωτερικές αυτές δυνάμεις δεν είναι γνωστές και πρέπει πρώτα να υπολογιστούν, προκειμένου στη συνέχεια να προσδιοριστούν οι αναπτυσσόμενες τάσεις. Οι σχέσεις, με βάση τις οποίες οι δυνάμεις αυτές υπολογίζονται είναι οι σχέσεις στατικής ισορροπίας πριν την παραμόρφωση, σύμφωνα με τις οποίες η συνισταμένη των δυνάμεων $\sum F$ και η συνισταμένη των ροπών $\sum M$ που ασκούνται σε ένα σώμα είναι ίσες με μηδέν, δηλαδή:

$$\sum F = 0 \tag{2.42}$$

$$\sum M = 0 \tag{2.43}$$

Η εφαρμογή των σχέσεων αυτών για τη στατική ισορροπία μίας δοκού παρουσιάζεται στην υποπαράγραφο 3.2.3.

Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις που οι αξονικές δυνάμεις που καταπονούν ένα σώμα σε εφελκυσμό ή θλίψη δεν μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια μόνο των παραπάνω σχέσεων, αλλά απαιτούνται πρόσθετες σχέσεις. Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται ***υπερστατικά προβλήματα εφελκυσμού και θλίψεως*** ή ***στατικώς αόριστα προβλήματα εφελκυσμού και θλίψεως***. Το πλήθος των προσθέτων σχέσεων που απαιτούνται ονομάζεται ***βαθμός υπερστατικότητας*** του προβλήματός μας.

Για την επίλυση των υπερστατικών προβλημάτων εφελκυσμού και θλίψεως πρέπει να διαθέτομε και άλλες εξισώσεις. Οι πρόσθετες αυτές εξισώσεις προκύπτουν κυρίως από την παραμορφωμένη κατάσταση. Έτσι, η ***επίλυση των υπερστατικών προβλημάτων*** πραγματοποιείται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

α) Λαμβάνομε τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας χωρίς τις τυχόν παραμορφώσεις.

β) Εξετάζομε εάν οι ανωτέρω εξισώσεις είναι επαρκείς, ώστε να προσδιοριστούν οι άγνωστες δυνάμεις εφελκυσμού και θλίψεως.

γ) Εάν το πλήθος των ανωτέρω εξισώσεων δεν είναι αρκετό:

– Σχεδιάζομε το σύστημα στην παραμορφωμένη κατάσταση.
– Λαμβάνομε τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στην κατάσταση αυτή και
– εφαρμόζομε το νόμο του Hooke για τις προκαλούμενες παραμορφώσεις.

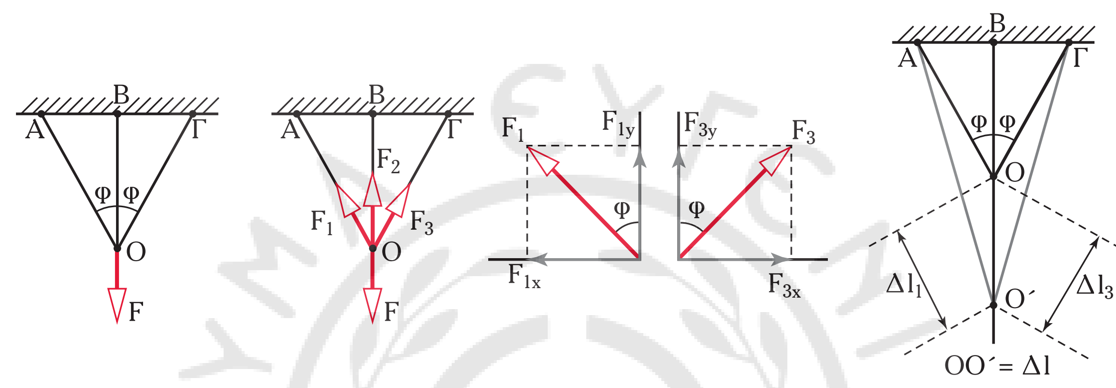
δ) Επιλύομε το σύστημα των εξισώσεων που έχομε στη διάθεσή μας από τα βήματα (α) και (γ).

Σημειώνεται ότι για να γίνει η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων στο βήμα (δ) πρέπει το πλήθος τους να ισούται με το πλήθος των αγνώστων μεγεθών.

Αφού υπολογίσομε με την ανωτέρω διαδικασία τις άγνωστες δυνάμεις, μπορούμε στη συνέχεια να προσδιορίσομε τις αναπτυσσόμενες τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως, σύμφωνα με όσα αναφέρομε στις παραγράφους 2.2 και 2.3.

Παράδειγμα 18.

Τρεις ράβδοι ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ διατομής $A = 4\ cm^2$ από το ίδιο υλικό στερεώνονται, όπως δείχνει το σχήμα 2.7α(α). Η γωνία είναι $\varphi = 30°$. Στο σημείο Ο δρα εξωτερική εφελκυστική δύναμη $F = 25.000\ N$. Εάν η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$, να βρεθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται σε καθεμία απ' τις τρεις ράβδους. Φορτίζονται οι ράβδοι κανονικά;



(α) (β) (γ) (δ)

Σχ. 2.7α.

(α) Οι ράβδοι του παραδείγματος. (β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο Ο.
(γ) Ανάλυση των δυνάμεων F_1 και F_3. (δ) Οι ράβδοι στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$A = 4\ cm^2$	$\sigma_1 =$;
$\varphi = 30°$	$\sigma_2 =$;
$F = 25.000\ N$	$\sigma_3 =$;
$\sigma_{\varepsilon\pi,\ \varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$? $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \varepsilon\varphi}$

Λύση.

Στο σχήμα έχομε τρεις ράβδους. Εάν l_2 είναι το μήκος της ράβδου ΟΒ, τότε τα μήκη l_1 και l_3 των ράβδων ΟΑ και ΟΓ, αντίστοιχα, είναι:

$$l_1 = \frac{l_2}{\text{συνφ}} \quad \text{και} \quad l_3 = \frac{l_2}{\text{συνφ}} = l_1$$

Στο σημείο Ο επιδρούν εκτός από τη δύναμη F και οι αντιδράσεις F_1, F_2 και F_3 από τις ράβδους ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ, αντίστοιχα [σχ. 2.7α(β)]. Οι τρεις ράβδοι ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ εφελκύονται με δυνάμεις εφελκυσμού τις αντίθετες των F_1, F_2 και F_3, αντίστοιχα.

Η F_2 έχει αντίθετη κατεύθυνση από την F. Οι F_1 και F_3 αναλύονται σε οριζόντιες και κάθετες συνιστώσες [σχ. 2.7α(γ)]. Συγκεκριμένα είναι:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \text{ημφ} = F_1 \cdot \text{ημ}30^\circ = 0{,}5 \cdot F_1 \quad \text{και} \quad F_{3x} = F_3 \cdot \text{ημφ} = F_3 \cdot \text{ημ}30^\circ = 0{,}5 \cdot F_3$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot συνφ = F_1 \cdot συν30° = 0,866 \cdot F_1 \text{ και } F_{3y} = F_3 \cdot συνφ = F_3 \cdot συν30° = 0,866 \cdot F_3$$

Από τη στατική ισορροπία του σημείου Ο, έχομε ότι:

$$F_{1x} = F_{3x} \Leftrightarrow 0,5 \cdot F_1 = 0,5 \cdot F_3 \Leftrightarrow F_1 = F_3 \quad (1)$$

$$F = F_{1y} + F_2 + F_{3y} \Leftrightarrow F = 0,866 \cdot F_1 + F_2 + 0,866 \cdot F_3 \quad (2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι δύο και περιλαμβάνουν τρεις αγνώστους, τους F_1, F_2 και F_3. Επομένως, έχομε ένα υπερστατικό πρόβλημα εφελκυσμού. Έτσι προχωρούμε στο σχεδιασμό του συστήματος των τριών ράβδων στην παραμορφωμένη κατάσταση. Η κατάσταση αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 2.7α(δ). Το μήκος της ράβδου ΟΒ αυξάνεται κατά Δl_2. Ομοίως, τα μήκη των ράβδων ΟΑ και ΟΓ αυξάνονται κατά Δl_1 και Δl_3, αντίστοιχα. Επειδή, οι επιμηκύνσεις είναι πολύ μικρές, ισχύει:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \Delta l_2 \cdot συνφ \quad (3)$$

Από το νόμο του Hooke για τις επιμηκύνσεις Δl_1 και Δl_2 έχομε:

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 \cdot l_1}{A \cdot E} = \frac{F_1 \cdot l}{A \cdot E \cdot συνφ} \quad (4)$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_2 \cdot l}{A \cdot E} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4) και (5) στη σχέση (3), παίρνομε:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot συνφ \Leftrightarrow \frac{F_1 \cdot l}{A \cdot E \cdot συνφ} = \frac{F_2 \cdot l}{A \cdot E} \cdot συνφ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_1 = F_2 \cdot συν^2 φ \Leftrightarrow F_1 = 0,866^2 \cdot F_2 \Leftrightarrow F_1 = 0,75 \cdot F_2 \quad (6)$$

Μπορούμε τώρα να λύσομε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (6) για να προσδιορίσομε τις άγνωστες δυνάμεις F_1, F_2 και F_3. Από τις (1) και (6) έχομε ότι $F_1 = F_3 = 0,75 \cdot F_2$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) έχομε:

$$F = 0,866 \cdot 0,75F_2 + F_2 + 0,866 \cdot 0,75F_2 \Leftrightarrow F = 2,30 \cdot F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{F}{2,30} = \frac{25.000\,N}{2,30} = 10.870\,N$$

$$F_1 = F_3 = 0,75 \cdot F_2 = 0,75 \cdot 10.870\,N = 8.153\,N$$

Οι τάσεις εφελκυσμού $σ_1$, $σ_2$ και $σ_3$ που αναπτύσσονται στις ράβδους ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ, αντίστοιχα, είναι:

$$σ_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{8.153\,N}{4\,cm^2} = 2.038,25\,\frac{N}{cm^2}, \quad σ_2 = \frac{F_2}{A} = \frac{10.870\,N}{4\,cm^2} = 2.717,5\,\frac{N}{cm^2},$$

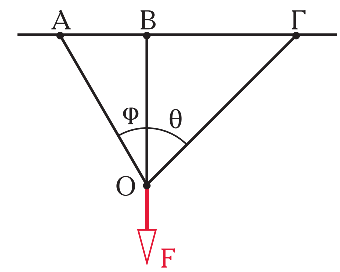
$$σ_3 = \frac{F_3}{A} = \frac{8.153\,N}{4\,cm^2} = 2.038,25\,\frac{N}{cm^2}$$

Και οι τρεις τάσεις είναι μικρότερες της επιτρεπόμενης τάσεως εφελκυσμού. Άρα και οι τρεις ράβδοι φορτίζονται κανονικά.

Ασκήσεις.

1. *Τρεις ράβδοι ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ έχουν διατομές $A_1 = 3\ cm^2$, $A_2 = 4\ cm^2$ και $A_3 = 3\ cm^2$, αντίστοιχα και αποτελούνται από υλικά με μέτρο ελαστικότητας $E_1 = 2,1 \cdot 10^6\ N/cm^2$, $E_2 = 3,2 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και*

$E_3 = 2{,}1 \cdot 10^6$ N/cm^2, αντίστοιχα. Οι τρεις ράβδοι στερεώνονται, όπως δείχνει το σχήμα 2.7β. Ο γωνίες είναι $\varphi = 30°$ και $\theta = 45°$. Στο σημείο Ο δρα εξωτερική εφελκυστική δύναμη $F = 12.800$ N. Εάν η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\, \varepsilon\varphi} = 14.000$ N/cm^2, να βρεθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται σε καθεμία από τις τρεις ράβδους. Φορτίζονται οι ράβδοι κανονικά;



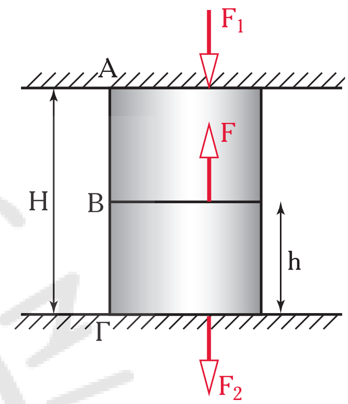
Σχ. 2.7β.

2. *Ο κύλινδρος του σχήματος 2.7γ έχει ύψος $H = 60$ cm και διατομή $A = 4$ cm^2 και τα άκρα του είναι σταθερά στερεωμένα. Στη διατομή του κυλίνδρου που βρίσκεται σε ύψος $h = 30$ cm από τη βάση του, ενεργεί αξονική εξωτερική δύναμη $F = 12.000$ N, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7γ. Να υπολογιστούν:*

α) Οι αντιδράσεις F_1 και F_2 στα σταθερά στερεωμένα άκρα του κυλίνδρου.

β) Οι αναπτυσσόμενες τάσεις στα τμήματα ΑΒ και ΒΓ του κυλίνδρου.

***Υπόδειξη**: Το τμήμα ΑΒ επιβραχύνεται, ενώ το τμήμα ΒΓ επιμηκύνεται. Η επιβράχυνση του τμήματος ΑΒ είναι ίση με την επιμήκυνση του τμήματος ΒΓ.*



Σχ. 2.7γ.

2.8 Τάσεις και παραμορφώσεις στη διάτμηση.

Ας θεωρήσομε μία ράβδο στην οποία ενεργούν δύο ίσες και παράλληλες δυνάμεις μέτρου F, αλλά αντίθετης φοράς, οι οποίες απέχουν απόσταση d και η μία ολισθαίνει πάνω στην άλλη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8α. Οι δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα της ράβδου και τείνουν να κόψουν τη ράβδο. Λέμε τότε ότι η ράβδος καταπονείται σε διάτμηση.

Συνεπώς:

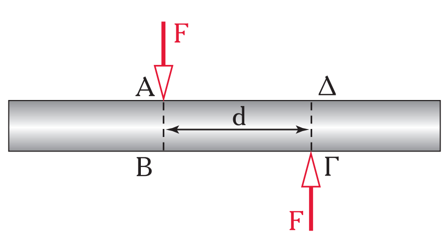
Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε διάτμηση όταν κάθετα στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες, αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεις, οι οποίες έχουν την τάση να το κόψουν.

Οι εξωτερικές δυνάμεις που καταπονούν ένα σώμα σε διάτμηση ονομάζονται ***διατμητικές δυνάμεις***.

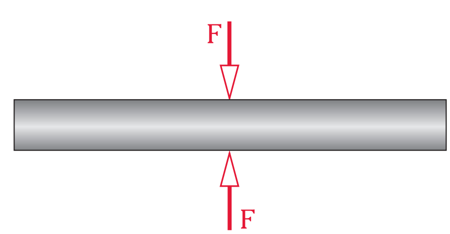
2.8.1 Τμήση και διάτμηση.

Στην ειδική περίπτωση που η απόσταση μεταξύ των δύο ίσων και παραλλήλων δυνάμεων μέτρου F αλλά αντίθετης φοράς, οι οποίες καταπονούν ένα σώμα σε διάτμηση (σχ. 2.8β), είναι μικρή, τότε λέμε ότι έχομε καταπόνηση σε ***τμήση*** ή ***καθαρή διάτμηση*** ή ***ψαλιδισμό***.

Στην καταπόνηση της τμήσεως δεν αναπτύσσεται ροπή κάμψεως, άρα δεν υπάρχει κάμψη. Αντίθετα, στην καταπόνηση της διατμήσεως, λόγω της αποστάσεως μεταξύ των δυνάμεων αναπτύσσεται ροπή κάμψεως. Ωστόσο, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων είναι πολύ μικρή. Η καταπόνηση της κάμψεως παρουσιάζεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4. Επίσης, στην πράξη δεν



Σχ. 2.8α.
Ράβδος που καταπονείται σε διάτμηση.



Σχ. 2.8β.
Ράβδος που καταπονείται σε καθαρή διάτμηση.

έχομε τμήση, αλλά μόνο διάτμηση, καθώς στην πραγματικότητα υπάρχει, έστω και πολύ μικρή απόσταση μεταξύ των δύο ίσων και παραλλήλων αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεων που καταπονούν ένα σώμα. Έτσι, πρακτικά οι όροι τμήση και διάτμηση έχουν την ίδια έννοια και θεωρούμε για τους υπολογισμούς μας ότι είναι ταυτόσημοι.

Η καταπόνηση της διατμήσεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε διάτμηση είναι οι ήλοι (καρφιά) και οι κοχλίες (μπουλόνια) που συνδέουν ελάσματα, οι άξονες που κόβονται από ψαλίδι κ.λπ..

2.8.2 Τάσεις στη διάτμηση.

Όπως έχομε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 1, η εφαρμογή των εξωτερικών δυνάμεων μέτρου F που καταπονούν ένα σώμα σε διάτμηση προκαλεί την εμφάνιση εσωτερικών δυνάμεων στο σώμα και άρα την εμφάνιση τάσεων στο υλικό του. Οι τάσεις αυτές που εμφανίζονται στα σώματα που καταπονούνται σε διάτμηση ονομάζονται ***διατμητικές τάσεις***. Αποδεινύεται ότι στη διάτμηση, η εσωτερική δύναμη σε κάθε διατομή του σώματος είναι ίση με την εξωτερική δύναμη F και άρα εφαπτομενική στη διατομή του σώματος. Οι ανωτέρω ιδιότητες των διατμητικών τάσεων μας οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου ορισμού για τη διατμητική τάση.

Ως ***διατμητική τάση*** $\tau_{\delta\iota}$ ορίζομε το πηλίκον της δυνάμεως F που ενεργεί εφαπτομενικά στη διατομή στερεού σώματος και το καταπονεί σε διάτμηση προς το εμβαδόν Α της διατομής του σώματος.

Δηλαδή, έχομε:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} \tag{2.44}$$

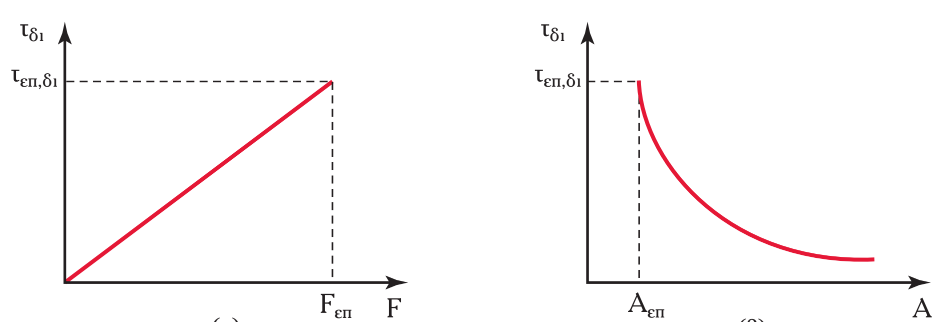
Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.44) ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι οι διατμητικές τάσεις δεν συνδέονται με καμπτικές παραμορφώσεις, τις οποίες παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 4. Επίσης σημειώνομε ότι στον υπολογισμό της διατμητικής τάσεως λαμβάνομε υπόψη μόνο τη μία από τις δύο συγγραμμικές και αντίρροπες δυνάμεις που καταπονούν το στερεό σώμα σε διάτμηση.

Από τη σχέση (2.44) βλέπομε ότι για τη διατμητική τάση ισχύουν τα εξής:

α) Η ***διατμητική τάση είναι ανάλογη της διατμητικής δυνάμεως*** [σχ. 2.8γ(α)].

β) Η ***διατμητική τάση είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του σώματος που καταπονείται σε διάτμηση*** [σχ. 2.8γ(β)].

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.44) δεν ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές δυνάμεως και εμβαδού, αλλά μέχρι ορισμένες τιμές που αντιστοιχούν στο όριο θραύσεως του υλικού για την καταπόνησή του σε διάτμηση. Επίσης, σημειώνομε ότι το σχήμα 2.8γ απεικονίζει τις τάσεις διατμήσεως μέχρι την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$ (βλ. υποπαράγρ. 2.8.3).



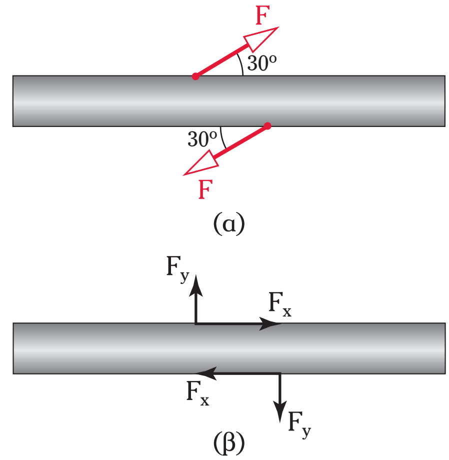
Σχ. 2.8γ.

(α) Σχέση διατμητικής τάσεως και διατμητικής δυνάμεως για σταθερή διατομή. (β) Σχέση διατμητικής τάσεως και εμβαδού διατομής για σταθερή διατμητική δύναμη.

Παράδειγμα 19.

Στη ράβδο του σχήματος 2.8δ(α) ασκούνται δύο ίσες και παράλληλες δυνάμεις μέτρου F = 1.000 N αλλά αντίθετης φοράς. Οι δυνάμεις ενεργούν υπό γωνία φ = 30° ως προς τον άξονα της ράβδου. Να υπολογιστούν οι αναπτυσσόμενες στη ράβδο διατμητικές τάσεις. Δίνεται το εμβαδό διατομής της ράβδου $A = 2\ cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
F = 1.000 N	$\tau_{\delta\iota}$ = ;
φ = 30°	
$A = 2\ cm^2$	



Σχ. 2.8δ.
(Ανάλυση των δυνάμεων.

Λύση.

Η ανάπτυξη διατμητικών τάσεων οφείλεται στη δράση διατμητικών δυνάμεων. Οι διατμητικές δυνάμεις είναι αυτές που ενεργούν εφαπτομενικά στη διατομή της ράβδου. Η δύναμη F δεν δρα εφαπτομενικά στη διατομή της ράβδου, αλλά υπό γωνία φ = 30° ως προς τον άξονα της ράβδου. Επομένως, απαιτείται η ανάλυση της δυνάμεως F σε δύο συνιστώσες [σχ. 2.8δ(β)]:

$$F_x = F \cdot \text{συνφ} = 1.000\ N \cdot \text{συν}30° = 1.000\ N \cdot 0,866 = 866\ N$$

$$F_y = F \cdot \text{ημφ} = 1.000\ N \cdot \text{ημ}30° = 1.000\ N \cdot 0,5 = 500\ N$$

Η συνιστώσα F_x είναι κάθετη στη διατομή. Η συνιστώσα F_y βρίσκεται στο επίπεδο της διατομής της ράβδου και είναι διατμητική δύναμη. Οι διατμητικές τάσεις $\tau_{\delta\iota}$ που αναπτύσσονται στη ράβδο υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F_y}{A} = \frac{500\ N}{2\ cm^2} = 250\ \frac{N}{cm^2}$$

Επισημαίνομε ότι εκτός των παραπάνω διατμητικών τάσεων αναπτύσσονται και άλλες τάσεις που οφείλονται στις συνιστώστες F_x.

2.8.3 Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως.

Κατ' αναλογία των περιπτώσεων του εφελκυσμού και της θλίψεως, όταν σε ένα σώμα που καταπονείται σε διάτμηση εφαρμόζεται μεγάλη εξωτερική διατμητική δύναμη, μεγαλύτερη απ' αυτήν που μπορεί να αντέξει, τότε το σώμα θραύεται. Για να αποφεύγεται η θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε διάτμηση πρέπει οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες απ' την τάση, στην οποία το υλικό θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί ένα όριο, πολύ μικρότερο απ' την τάση στην οποία το υλικό θραύεται, πάνω από το οποίο απαγορεύεται να λάβουν τιμές οι διατμητικές τάσεις. Δηλαδή, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά τη διάτμηση πρέπει να είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες με το όριο αυτό. Η τάση αυτή ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως μίας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή όταν καταπονείται σε διάτμηση, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της.

Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως συμβολίζεται με $\tau_{\varepsilon\pi,\ \delta\iota}$ και προσδιορίζεται συνήθως με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας ή της επιτρεπόμενης τάσεως εφελκυσμού.

Η έννοια του συντελεστή ασφαλείας είναι ίδια με την αντίστοιχη για τις καταπονήσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως. Πολλές φορές, η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως υπολογίζεται ως ένα ποσοστό της επιτρεπόμενης τάσεως εφελκυσμού. Συνήθως, λαμβάνομε ως επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως το 60% της επιτρεπόμενης τάσεως εφελκυσμού, δηλαδή:

$$\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 0{,}6 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \tag{2.45}$$

Το φορτίο $F_{\varepsilon\pi}$ που αντιστοιχεί στην επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως ονομάζεται ***επιτρεπόμενο φορτίο διατμήσεως.***

Παράδειγμα 20.

Η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό ενός υλικού είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 150.000\ \text{N/cm}^2$. Ποια είναι η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεώς του;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 150.000\ \text{N/cm}^2$	$\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} =$;

Λύση.

Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} = 0{,}6 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = 0{,}6 \cdot 150.000\ \text{N/cm}^2 = 90.000\ \text{N/cm}^2$$

2.8.4 Συντελεστής ασφαλείας για τη διάτμηση.

Συντελεστής ασφαλείας ν για τη διάτμηση ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$ σε μία κατασκευή από την τάση $\tau_{\theta\rho,\,\delta\iota}$ στην οποία το υλικό θραύεται όταν καταπονείται σε διάτμηση.

Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\tau_{\theta\rho,\delta\iota}}{\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}} \tag{2.46}$$

Λύνοντας τη σχέση (2.46) ως προς την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως, έχομε:

$$\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} = \frac{\tau_{\theta\rho,\delta\iota}}{\nu} \tag{2.47}$$

Όπως έχομε αναφέρει και στην παράγραφο 1.14, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μίας κατασκευής είναι πολύ σημαντικό στοιχείο για την κατασκευή και δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ο καθορισμός αυτός προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία στα θέματα αυτά και πραγματοποιείται μ’ έναν από τους τρόπους που αναφέραμε στην παράγραφο 1.14.

2.8.5 Σχέση διατμήσεως.

Όπως προαναφέραμε, η τάση διατμήσεως $\tau_{\delta\iota}$ πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$, δηλαδή:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \tag{2.48}$$

Η σχέση (2.48) είναι γνωστή ως ***σχέση διατμήσεως***.

Η σχέση διατμήσεως εφαρμόζεται υπό την προϋπόθεση ότι το υλικό του καταπονούμενου σώματος είναι ***ομογενές***. Δηλαδή, το υλικό έχει σε όλη την έκταση της μάζας του τις ίδιες ιδιότητες, με αποτέλεσμα οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την καταπόνηση σε διάτμηση να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

2.8.6 Εφαρμογές της σχέσεως διατμήσεως.

Κατ' αναλογία των καταπονήσεων του εφελκυσμού και της θλίψεως, η σχέση διατμήσεως εφαρμόζεται στα προβλήματα σωμάτων που καταπονούνται ή αναμένεται να καταπονηθούν σε διάτμηση. Τα προβλήματα αυτά διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με το ποια δεδομένα από αυτά που εμφανίζονται στη σχέση διατμήσεως είναι γνωστά και ποιο είναι το ζητούμενο. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι εξής:

1) Κατηγορία Ι – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.

Όπως και στις αντίστοιχες περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως, τα δεδομένα και ζητούμενα στοιχεία των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής για τη διάτμηση παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα 2.8.1.

Πίνακας 2.8.1.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Διατμητική δύναμη: F	Τάση διατμήσεως: $\tau_{\delta\iota}$
Εμβαδόν διατομής: A	Είναι η τάση διατμήσεως μικρότερη από την επιτρεπόμενη; $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$? $\tau_{\delta\iota}$
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$	

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε την τάση διατμήσεως από τη σχέση: $\tau_{\delta\iota} = \dfrac{F}{A}$.

β) Συγκρίνομε την τάση διατμήσεως με την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$? $\tau_{\delta\iota}$.

Παράδειγμα 21.

Ήλος καταπονείται σε διάτμηση λόγω της επιδράσεως εξωτερικής δυνάμεως $F = 12.500$ N. Η διατομή του ήλου είναι κυκλική με διάμετρο $d = 1$ cm. Εάν η επιτρεπόμενη τάση στη διάτμηση είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 16.000$ N/cm^2, να εξεταστεί εάν ο ήλος φορτίζεται κανονικά.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$F = 12.500$ N	$\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$? $\tau_{\delta\iota}$
$d = 1$ cm	
$\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 16.000$ N/cm^2	

Λύση.

Για να διαπιστώσομε εάν ο ήλος φορτίζεται κανονικά, πρέπει να συγκρίνομε την τάση λειτουργίας σε διάτμηση του ήλου $\tau_{\delta\iota}$ με την επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$.

Η διατμητική τάση λειτουργίας υπολογίζεται από τη σχέση: $\tau_{\delta\iota} = \dfrac{F}{A}$. Το εμβαδόν A της κυκλικής διατομής είναι:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2 cm^2}{4} = \frac{\pi}{4} cm^2 = 0{,}785\, cm^2$$

Έτσι, η διατμητική τάση λειτουργίας του ήλου είναι: $\tau_{\delta\iota} = \dfrac{F}{A} = \dfrac{12.500\,N}{0{,}785\,cm^2} = 15.924\,\dfrac{N}{cm^2}$.

Συνεπώς, η διατμητική τάση λειτουργίας του ήλου είναι οριακά μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$. Άρα, ο ήλος φορτίζεται κανονικά.

2) Κατηγορία ΙΙ – Προβλήματα διαστασιολογήσεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

Όπως και στις αντίστοιχες περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως, τα δεδομένα και ζητούμενα στοιχεία των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής για τη διάτμηση παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα 2.8.2.

Πίνακας 2.8.2.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Διατμητική δύναμη: F	Εμβαδόν διατομής: Α
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$	

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής, λύνοντας τη σχέση διατμήσεως ως προς αυτό. Έτσι λαμβάνομε: $A \geq \dfrac{F}{\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}}$.

β) Επειδή δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει πάντοτε διαθέσιμη διατομή με το μέγεθος επιφάνειας που προσδιορίσαμε στο βήμα (α), επιλέγομε ανάμεσα στις διαθέσιμες διατομές τη μικρότερη απ' αυτές που ικανοποιούν το αποτέλεσμα του βήματος (α).

γ) Επιβεβαιώνομε ότι για τη διατομή που επιλέγομε στο βήμα (β), η διατμητική τάση που αναπτύσσεται είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως.

Παράδειγμα 22.

Κοχλίας πρόκειται να συνδέσει δύο ελάσματα, όπως δείχνει το σχήμα 2.8ε. Τα ελάσματα φορτίζονται με δύναμη F = 30.000 N. Εάν οι διαθέσιμοι κοχλίες έχουν διαμέτρους 8 mm, 12 mm, 16 mm, 20 mm, 24 mm και 30 mm, να βρεθεί η διάμετρος της κυκλικής διατομής του κοχλία που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 10.000\ \mathrm{N/cm^2}$.

Σχ. 2.8ε.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
F = 30.000 N	d = ;
$\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 10.000\ \mathrm{N/cm^2}$	
d = 8 mm ή d = 12 mm ή d = 16 mm ή d = 20 mm ή d = 24 mm ή d = 30 mm	

Λύση.

Ο κοχλίας θα καταπονείται σε διάτμηση υπό την επίδραση της δυνάμεως F. Έτσι ισχύει η σχέση διατμήσεως:

$$\frac{F}{A} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \qquad (1)$$

Εάν ονομάσομε d τη διάμετρο της διατομής του κοχλία, το εμβαδόν της διατομής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση διατμήσεως και λύνοντας ως προς τη διάμετρο d λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \Leftrightarrow d^2 \geq \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}} \Leftrightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}}} \Leftrightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 30.000\ N}{3{,}14 \cdot 10.000\ N/cm^2}} \Leftrightarrow d \geq 1{,}95\ cm$$

Άρα, η διάμετρος του κοχλία πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με 1,95 cm. Με βάση τους διαθέσιμους κοχλίες, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επιλέξομε τον κοχλία διαμέτρου d = 20 mm = 2 cm. Πραγματικά, η αναπτυσσόμενη τάση διατμήσεως στον κοχλία αυτό είναι:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 30.000\ N}{3{,}14 \cdot 2^2\ cm^2} = 9.554\ \frac{N}{cm^2},$$ μικρότερη δηλαδή της επιτρεπόμενης τάσεως διατμήσεως.

3) Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού του φορτίου που αντέχει ένα σώμα καταπονούμενο σε διάτμηση (ικανότητα φορτίσεως).

Όπως και στις αντίστοιχες περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως, τα δεδομένα και ζητούμενα στοιχεία των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής για τη διάτμηση παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα 2.8.3.

Πίνακας 2.8.3.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εμβαδόν διατομής: A	Διατμητική δύναμη: F
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\ \delta\iota}$	

Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών προσδιορίζομε το φορτίο που μπορεί να αντέξει το σώμα, λύνοντας τη σχέση διατμήσεως ως προς τη διατμητική δύναμη. Έτσι λαμβάνομε: $F \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \cdot A$.

Παράδειγμα 23.

Ήλος έχει κυκλική διατομή εμβαδού A =3 cm^2. Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεώς του σε διάτμηση, εάν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\ \delta\iota}$ = 18.000 N/cm^2.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
A =3 cm^2	F = ;
$\tau_{\varepsilon\pi,\ \delta\iota}$ = 18.000 N/cm^2	

Λύση.

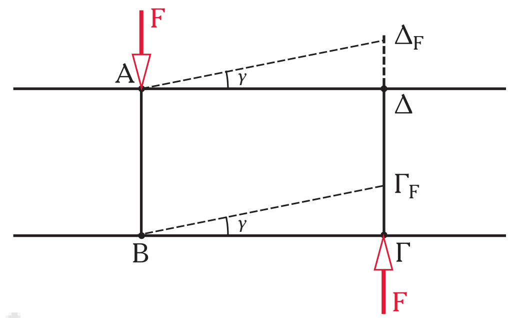
Για τον ήλο ισχύει η σχέση διατμήσεως:

$$\frac{F}{A} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \qquad (1)$$

Λύνοντας ως προς το φορτίο F λαμβάνομε τη ζητούμενη ικανότητα φορτίσεως του ήλου σε διάτμηση:

$$F \le A \cdot \tau_{επ,δι} \Leftrightarrow F \le 3\,cm^2 \cdot 18.000\,\frac{N}{cm^2} \Leftrightarrow F \le 54.000\,N$$

2.8.7 Παραμορφώσεις στη διάτμηση.



Σχ. 2.8στ.
Παραμορφώσεις στη διάτμηση.

Προκειμένου να μελετήσομε τις παραμορφώσεις στη διάτμηση ας δούμε με λεπτομέρεια τις διατομές μιας περιοχής της ράβδου του σχήματος 2.8στ που καταπονείται σε διάτμηση. Η περιοχή αυτή οριοθετείται από τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Ας υποθέσομε, για λόγους απλότητας, ότι κρατούμε σταθερή τη διατομή ΑΒ. Λόγω της εφαρμογής των δύο δυνάμεων F, οι διατομές της ράβδου από τη διατομή ΑΒ μέχρι τη διατομή ΓΔ ολισθαίνουν η μία πάνω στην άλλη, χωρίς να αλλάζουν οι διαστάσεις τους, με αποτέλεσμα το σώμα να παραμορφώνεται κατά γωνία γ. Συνεπώς, στην καταπόνηση της διατμήσεως έχομε ***ολίσθηση του σώματος κατά γωνία γ.*** Η γωνία ολισθήσεως γ μετρείται σε ακτίνια (rad) ή μοίρες (°). Ισχύει ότι πrad = 180°. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι συνήθως η ολίσθηση είναι πολύ μικρή. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλές φορές να μην γίνεται άμεσα αντιληπτή η παραμόρφωση αυτή. Ωστόσο, η παραμόρφωση αυτή συμβαίνει πάντοτε κατά την καταπόνηση σε διάτμηση ενός σώματος.

Η παραμόρφωση της ολισθήσεως υπολογίζεται από την τάση διατμήσεως $\tau_{δι}$ με τη βοήθεια του ακόλουθου νόμου του Hooke που ισχύει για τη γωνία ολισθήσεως στην αναλογική περιοχή:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau_{δι} \tag{2.49}$$

όπου η γωνία ολισθήσεως γ μετρείται σε ακτίνια (rad).

Από τη σχέση (2.49) προκύπτει ότι η γωνία ολισθήσεως είναι ανάλογη της τάσεως διατμήσεως και εξαρτάται από το υλικό.

Η σταθερά G ονομάζεται ***μέτρο ολισθήσεως του υλικού***, εκφράζει τη σχέση υλικού και ολισθήσεως και είναι χαρακτηριστική σταθερά για κάθε υλικό. Το μέτρο ολισθήσεως του υλικού είναι το αντίστοιχο του μέτρου ελαστικότητας που συναντήσαμε στο νόμο του Hooke για τον εφελκυσμό και τη θλίψη και για το λόγο αυτό ονομάζεται και μέτρο ***ελαστικότητας σε διάτμηση.*** Οι μονάδες μετρήσεως του μέτρου ολισθήσεως ενός υλικού είναι ίδιες με τις μονάδες μετρήσεως του μέτρου ελαστικότητάς του.

Το μέτρο ελαστικότητας Ε και το μέτρο ολισθήσεως G συνδέονται με το λόγο Poisson μ, μέσω της ακόλουθης σχέσεως:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \tag{2.50}$$

Σημειώνομε ότι γενικά για τη γωνία ολισθήσεως ισχύουν αντίστοιχα όσα ισχύουν για την ανηγμένη παραμόρφωση (επιμήκυνση/επιβράχυνση) στον εφελκυσμό και τη θλίψη (αναλογική περιοχή, ελαστική περιοχή, πλαστική περιοχή, όριο θραύσεως κ.λπ.).

Παράδειγμα 24.

Σε κοχλία αναπτύσσονται τάσεις διατμήσεως $\tau_{δι} = 8.000\ N/cm^2$ μικρότερες από την επιτρεπόμενη. Το υλικό του κοχλία έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}8 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και λόγο Poisson μ = 0,33.

α) Να υπολογιστεί το μέτρο ολισθήσεως του υλικού του κοχλία.

β) Να υπολογιστεί η παραμόρφωσή του λόγω της καταπονήσεώς του σε διάτμηση στην αναλογική περιοχή.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\tau_{\delta\iota} = 8.000\ N/cm^2$	α) G = ;
$E = 2{,}8 \cdot 10^6\ N/cm^2$	β) γ = ;
μ =0,33	

Λύση.

α) Το μέτρο ολισθήσεως του υλικού υπολογίζεται με τη βοήθεια του μέτρου ελαστικότητας από τη σχέση:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} = \frac{2{,}8 \cdot 10^6\ N/cm^2}{2 \cdot (1+0{,}33)} = 1{,}1 \cdot 10^6\ N/cm^2$$

β) Λόγω της καταπονήσεώς του σε διάτμηση, ο κοχλίας υφίσταται παραμόρφωση ολισθήσεως κατά γωνία γ. Η γωνία ολισθήσεως αυτή υπολογίζεται από το νόμο του Hooke:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau_{\delta\iota} = \frac{8.000\ N/cm^2}{1{,}1 \cdot 10^6\ N/cm^2} = 7{,}3 \cdot 10^{-3}\ rad$$

2.8.8 Συνθήκη κοπής.

Μέχρι τώρα είδαμε περιπτώσεις, στις οποίες μας ενδιέφερε να καταπονούμε τα σώματα με τάσεις διατμήσεως μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως. Ωστόσο, αυτό δεν είναι πάντοτε το επιθυμητό. Αρκετές φορές μας ενδιαφέρει να καταπονήσομε σε διάτμηση ένα σώμα, προκειμένου να το κόψομε. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εφαρμόσομε εξωτερικές δυνάμεις, ώστε να αναπτυχθούν τάσεις διατμήσεως $\tau_{\delta\iota}$ μεγαλύτερες από την τάση θραύσεως $\tau_{\theta\rho,\delta\iota}$ του υλικού του καταπονούμενου σε διάτμηση σώματος. Δηλαδή έχομε κοπή ενός σώματος διατομής Α, στο οποίο ενεργούν διατμητικές δυνάμεις F, όταν:

$$\tau_{\delta\iota} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow \frac{F}{A} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \tag{2.51}$$

Η σχέση (2.51) αποτελεί τη συνθήκη κοπής ενός σώματος.

Συνήθως, η τάση θραύσεως σε διάτμηση λαμβάνεται ίση με το 80% της τάσεως θραύσεως σε εφελκυσμό $\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}$, δηλαδή:

$$\tau_{\theta\rho,\delta\iota} = 0{,}8 \cdot \sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi} \tag{2.52}$$

Σημειώνεται ότι σε αντίθεση με τον εφελκυσμό, όπου η θραύση πραγματοποιείται σε επίπεδο κάθετο προς την εφελκύουσα δύναμη, στη διάτμηση η θραύση πραγματοποιείται σε επίπεδο παράλληλο προς την επιβαλλόμενη δύναμη.

Παράδειγμα 25.

Ποια είναι η απαιτούμενη δύναμη για να κοπεί έλασμα με πάχος α = 10 mm και πλάτος β = 12 mm; Επίσης, να υπολογιστεί με εφαρμογή του νόμου του Hooke η διατμητική παραμόρφωση στα άκρα της αποκοπτόμενης επιφάνειας. Δίνονται:

α) Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό του υλικού του ελάσματος $\sigma_{\theta\rho,\ \varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$.

β) Το μέτρο ελαστικότητάς του $E = 2{,}4 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και γ) ο λόγος Poisson μ = 0,35.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\alpha = 10$ mm	α) F = ;
$\beta = 12$ mm	β) γ = ;
$\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ \text{N/cm}^2$	
$E = 2{,}4 \cdot 10^6\ \text{N/cm}^2$	
$\mu = 0{,}35$	

Λύση.

α) Η διατμητική τάση θραύσεως υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau_{\theta\rho,\delta\iota} = 0{,}8 \cdot \sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi} = 0{,}8 \cdot 10.000\ \text{N/cm}^2 = 8.000\ \text{N/cm}^2$$

Η επιφάνεια της διατομής που καταπονείται σε διάτμηση είναι:

$$A = \alpha \cdot \beta = 10\ \text{mm} \cdot 12\ \text{mm} = 1{,}2\ \text{cm}^2$$

Κοπή του ελάσματος έχομε όταν:

$$\tau_{\delta\iota} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow \frac{F}{A} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow F \geq A \cdot \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow F \geq 1{,}2\ \text{cm}^2 \cdot 8.000\ \text{N/cm}^2 \Leftrightarrow F \geq 9.600\ \text{N}$$

Άρα, η δύναμη κοπής του ελάσματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 9.600N.

β) Το μέτρο ολισθήσεως του υλικού υπολογίζεται με τη βοήθεια του μέτρου ελαστικότητας από τη σχέση:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} = \frac{2{,}4 \cdot 10^6\ \text{N/cm}^2}{2 \cdot (1+0{,}35)} = 8{,}9 \cdot 10^5\ \text{N/cm}^2$$

Η διατμητική παραμόρφωση γ στα άκρα της αποκοπτόμενης επιφάνειας υπολογίζεται από το νόμο του Hooke:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau_{\delta\iota} = \frac{9.600\ \text{N/cm}^2}{8{,}9 \cdot 10^5\ \text{N/cm}^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{rad}$$

2.8.9 Σύγκριση διατμήσεως με εφελκυσμό και θλίψη.

Με βάση όσα είπαμε παραπάνω, παρατηρούμε ότι η αντιμετώπιση της διατμήσεως πραγματοποιείται ακολουθώντας μεθοδολογία παρόμοια με αυτή που ακολουθούμε στον εφελκυσμό και στη θλίψη. Ωστόσο, πρέπει να έχομε κατά νου τις μεταξύ τους ομοιότητες και διαφορές, οι οποίες παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 2.8.4.

Πίνακας 2.8.4.
Ομοιότητες και διαφορές της διατμήσεως με τον εφελκυσμό και τη θλίψη.

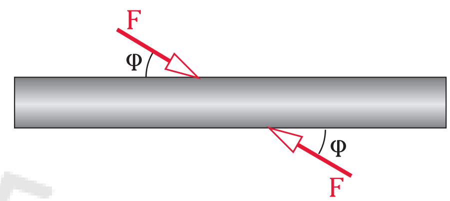
Θέμα	***Διάτμηση***	***Εφελκυσμός***	***Θλίψη***
Τάσεις (σε διατομές κάθετες στον άξονα του σώματος)	Διατμητικές	Ορθές	Ορθές
Εφαρμογή νόμου Hooke	Στην αναλογική περιοχή	Στην αναλογική περιοχή	Στην αναλογική περιοχή

(συνεχίζεται)

Επιτρεπόμενη τάση	Ορίζεται	Ορίζεται	Ορίζεται
Παραμορφώσεις	Ολίσθηση κατά γωνία γ	Επιμήκυνση ($\Delta l>0$) και μείωση διατομής ($\Delta b<0$)	Επιβράχυνση ($\Delta l<0$) και αύξηση διατομής ($\Delta b>0$)
Θραύση	Σε επίπεδο παράλληλο στην εφαρμοζόμενη δύναμη	Σε επίπεδο κάθετο στην εφαρμοζόμενη δύναμη	Σε κεκλιμένο επίπεδο (ψαθυρά υλικά)

Ασκήσεις.

1. *Στη ράβδο του σχήματος 2.8ζ ασκούνται δύο ίσες και παράλληλες δυνάμεις μέτρου $F = 1.000$ N, αλλά αντίθετης φοράς. Οι δυνάμεις ενεργούν υπό γωνία $\varphi = 45°$ ως προς τον άξονα της ράβδου. Να υπολογιστούν οι αναπτυσσόμενες στη ράβδο διατμητικές τάσεις. Δίνεται το εμβαδό διατομής της ράβδου $A = 5$ cm^2.*



Σχ. 2.8ζ.

2. *Σε έλασμα πάχους $h = 6$ mm θα ανοίξομε οπή ακτίνας $r = 6$ mm. Στο κοπτικό εργαλείο εφαρμόζεται δύναμη $F = 180.000$ N. Να υπολογιστεί η διατμηματική τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια της διατομής.*

3. *Για την αποκοπή τμήματος ελάσματος πάχους $h = 10$ mm και πλάτους $a = 60$ mm θα χρησιμοποιήσομε μηχανικό ψαλίδι. Εάν η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι $F = 40.000$ N, να υπολογιστεί η εφαρμοζόμενη τάση διατμήσεως.*

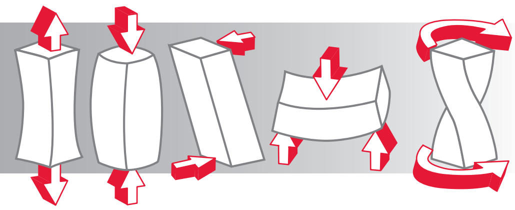
4. *Ποια είναι η απαιτούμενη δύναμη για να κοπεί έλασμα με πάχος $h = 8$ mm και πλάτος $t = 45$ mm; Επίσης, να υπολογιστεί με εφαρμογή το νόμου του Hooke η διατμητική παραμόρφωση στα άκρα της αποκοπτόμενης επιφάνειας. Δίνονται:*
α) Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό του υλικού του ελάσματος $\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi} = 12.000$ N/cm^2.
β) Το μέτρο ελαστικότητάς του $E = 2{,}6 \cdot 10^6$ N/cm^2 και
γ) ο λόγος Poisson $\mu = 0{,}34$.

5. *Κοχλίας έχει κυκλική διατομή εμβαδού $A = 4$ cm^2 . Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεώς του σε διάτμηση, εάν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 24.000$ N/cm^2;*

6. *Κοχλίας συνδέει δύο ελάσματα, τα οποία φορτίζονται με δύναμη $F = 30.000$ N. Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής του κοχλία; Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 8.000$ N/cm^2.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στατική θεωρία της δοκού



3.1 Εισαγωγή.

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζομε τα βασικά στοιχεία της στατικής θεωρίας της δοκού που είναι απαραίτητα για τη μελέτη των καταπονήσεων της κάμψεως, της στρέψεως και του λυγισμού. Οι καταπονήσεις αυτές αναπτύσσονται στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

Συγκεκριμένα, στο παρόν Κεφάλαιο, ορίζεται η δοκός, οι τρόποι στηρίξεώς της και η κατηγοριοποίηση των δοκών ανάλογα με τον τρόπο στηρίξεώς τους. Αναπτύσσονται οι έννοιες των ορθών και των τεμνουσών δυνάμεων, καθώς και των καμπτικών ροπών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά της διατομής της δοκού, η έννοια του κέντρου βάρους και περιγράφονται οι μέθοδοι προσδιορισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων. Ακολουθεί η παράθεση των ορισμών της ροπής και της ακτίνας αδράνειας, καθώς και της ροπής αντιστάσεως και η παρουσίαση των κυρίων αξόνων αδράνειας και των ιδιοτήτων της παράλληλης μετατοπίσεως των αξόνων. Περαιτέρω, παρουσιάζεται ο υπολογισμός της ροπής και της ακτίνας αδράνειας, καθώς και της ροπής αντιστάσεως απλών και συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Ο πίνακας 3.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***συνήθεις μονάδες μετρήσεως*** των νέων (σε σχέση με τα προηγούμενα κεφάλαια) μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 3.1.

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Ακτίνα αδράνειας ως προς άξονα x	R_I	m, cm
Αντίδραση	F_A	N
Θέση κέντρου βάρους	$(x_{κβ}, y_{κβ})$	m, cm
Πολική ροπή αδράνειας ως προς σημείο Ο	I_o	m^4, cm^4
Πολική ροπή αντιστάσεως ως προς σημείο Ο	W_o	m^3, cm^3
Ροπή	M	$N \cdot cm$
Ροπή αδράνειας ως προς άξονα x	I_x	m^4, cm^4
Ροπή αντιδράσεως	M_A	$N \cdot cm$
Ροπή αντιστάσεως ως προς άξονα x	W_x	m^3, cm^3
Ροπή πακτώσεως	$M_{πακτ}$	$N \cdot cm$

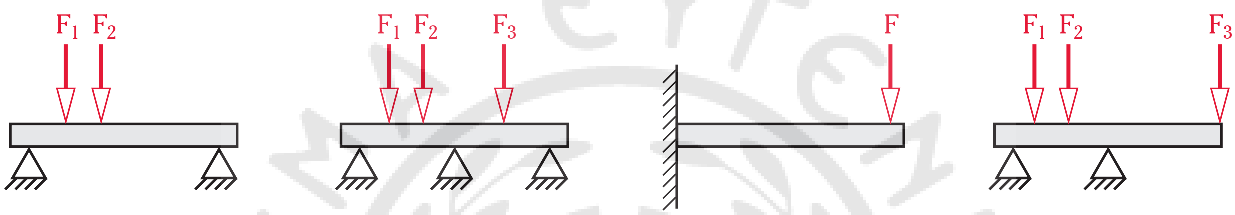
3.2 Τρόποι στηρίξεως δοκού.

Στην καθημερινή πρακτική χρησιμοποιούμε πολλά σώματα για να φέρουν κάποιο ή κάποια φορτία. Ένα τέτοιο σώμα, για να ανταποκριθεί στην απαίτηση να φέρει το φορτίο ή τα φορτία που επιθυμούμε, στηρίζεται σε ένα ή περισσότερα στηρίγματα. Τα στηρίγματα ασκούν δυνάμεις στο σώμα, το οποίο στηρίζουν. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται ***αντιδράσεις***. Το σώμα λέμε ότι βρίσκεται σε ***στατική ισορροπία*** όταν τα φορτία που φέρει είναι ίσα με τις αντιδράσεις που δέχεται από τα στηρίγματα και οι ροπές των φορτίων είναι ίσες με τις ροπές των αντιδράσεων.

Δοκός ονομάζεται κάθε στερεό σώμα, του οποίου το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής του. Η δοκός στηρίζεται σ' ένα ή περισσότερα σημεία και σ' αυτήν ενεργούν, σε μόνιμη βάση ή όχι, φορτία κάθετα στον οριζόντιο άξονά της.

Σημειώνεται ότι τα φορτία που δέχεται η δοκός μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του άξονά της, αλλά αυτή είναι μία ειδική περίπτωση. Στη γενική περίπτωση, τα φορτία που δέχεται μία δοκός είναι ανομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του άξονά της. Το σχήμα 3.2α παρουσιάζει παραδείγματα δοκών με ένα ή περισσότερα σημεία στηρίξεως και φορτία που είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα ή όχι κατά μήκος του άξονά τους. Επίσης, τα φορτία που δέχεται η δοκός μπορεί να είναι συνεχή (δηλ. να εφαρμόζεται φορτίο σε κάθε σημείο της δοκού) ή ασυνεχή.

Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά της δοκού είναι η στήριξή της σ' ένα ή περισσότερα στηρίγματα. Ο τρόπος στηρίξεως της δοκού είναι ιδιαίτερα σημαντικός, διότι καθορίζει την αντοχή της δοκού. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να μελετήσομε συστηματικά τη στήριξη των δοκών. Πριν προχωρήσομε στην ταξινόμηση των δοκών με βάση τους τρόπους στηρίξεώς τους, παρουσιάζομε τα βασικά είδη στηρίξεως ενός άκρου δοκού.



Σχ. 3.2α.
Διάφορες δοκοί.

3.2.1 Είδη στηρίξεως.

Τα είδη στηρίξεως ενός άκρου μίας δοκού είναι τα εξής:

α) Πάκτωση.

β) Άρθρωση ή σταθερή στήριξη.

γ) Κύλιση ή κινητή στήριξη.

Καθένα από τα ανωτέρω είδη στηρίξεως που απεικονίζονται στα σχήματα 3.2β, 3.2γ και 3.2δ υλοποιείται με διαφορετικό τρόπο και έχει τα δικά του χαρακτηριστικά. Αναλυτικότερα:

α) ***Πάκτωση*** ονομάζεται η στήριξη που πραγματοποιείται εάν ανοίξομε μια τρύπα σ' έναν τοίχο και στερεώσομε μέσα σ' αυτήν το άκρο της δοκού μόνιμα [σχ. 3.2β(α)], χρησιμοποιώντας για παράδειγμα τσιμέντο. Σ' αυτήν την περίπτωση η δοκός βυθίζεται αρκετά μέσα στον τοίχο. Η πάκτωση έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά ως προς την παροχή ελευθερίας μετακινήσεων και στροφής:

– Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω.

– Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα δεξιά, ούτε προς τα αριστερά.

– Δεν επιτρέπει καμμία στροφή της δοκού.

Συνεπώς, η πάκτωση ενός άκρου μιας δοκού έχει ως αποτέλεσμα, όταν μία εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα πάνω ή προς τα κάτω ή προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, το άκρο αυτό να μην μετακινείται ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω ούτε προς τα δεξιά ούτε προς τα αριστερά. Επίσης, η πάκτωση έχει ως αποτέλεσμα, όταν μία ροπή προσπαθεί να στρέψει τη δοκό, το άκρο αυτό να μην στρέφεται.

Στο σημείο πακτώσεως αναπτύσσεται ***η αντίδραση*** F_A, καθώς και ροπή, η οποία ονομάζεται ***ροπή πακτώσεως*** $M_{πακ}$ [σχ. 3.2β(β)]. Η αντίδραση, μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση και αναλύεται στη γενική περίπτωση σε ***δύο συνιστώσες, μία οριζόντια*** (κατά τον άξονα της δοκού) ***και μία κατακόρυφη*** (κάθετη στον άξονα της δοκού). Αν η αντίδραση έχει μόνο μία από τις δύο συνιστώσες, αυτό εξαρτάται απ' το συνολικό φορτίο της δοκού. Για παράδειγμα, αν το συνολικό φορτίο είναι μόνο κατακόρυφο, η αντίδραση έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα.

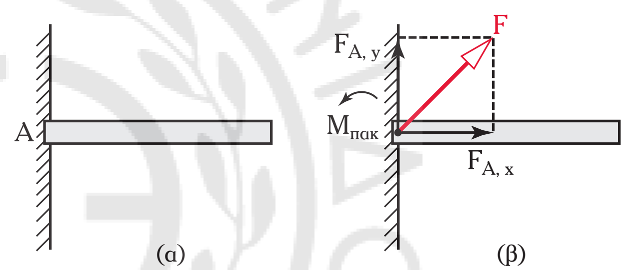
Στην υποπαράγραφο 3.2.3 περιγράφομε τον τρόπο υπολογισμό των αντιδράσεων στα σημεία στηρίξεως με πάκτωση.

β) ***Άρθρωση ή σταθερή στήριξη*** ονομάζεται η στήριξη που πραγματοποιείται σ' ένα σημείο μίας δοκού εάν στερεώσομε το σημείο αυτό σ' ένα άλλο σταθερό σημείο, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, έναν πείρο, έτσι ώστε να είναι εφικτή η στροφή της δοκού [σχ. 3.2γ(α)]. Η άρθρωση ως προς την παροχή ελευθερίας μετακινήσεων και στροφής έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

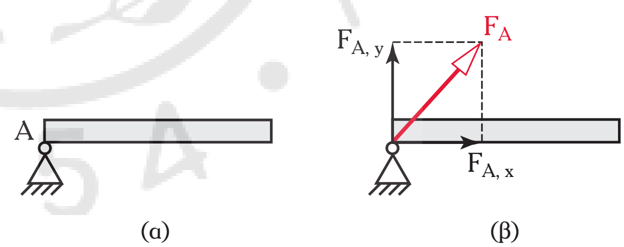
– Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω.
– Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα δεξιά, ούτε προς τα αριστερά.
– Επιτρέπει τη στροφή της δοκού.

Δηλαδή, η στήριξη της αρθρώσεως δεν επιτρέπει, όπως και η πάκτωση, καμμία μετακίνηση, ωστόσο, σε αντίθεση με την πάκτωση, επιτρέπει στροφή της δοκού. Συνεπώς, η στήριξη σε άρθρωση ενός άκρου μιας δοκού έχει ως αποτέλεσμα, όταν μια εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα πάνω ή προς τα κάτω ή προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, το άκρο αυτό να μην μετακινείται ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω ούτε προς τα δεξιά ούτε προς τα αριστερά. Ωστόσο, η άρθρωση έχει ως αποτέλεσμα, όταν μια ροπή προσπαθεί να στρέψει τη δοκό, το άκρο αυτό να στρέφεται.

Στο σημείο στηρίξεως με άρθρωση αναπτύσσεται ***αντίδραση*** F_A. Η αντίδραση, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2γ(β), μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση και αναλύεται στη γενική περίπτωση σε ***δύο συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη***. Αν η αντίδραση έχει μόνο μία από τις δύο συνιστώσες, αυτό εξαρτάται από το συνολικό φορτίο της δοκού. Για παράδειγμα, εάν το συνολικό φορτίο είναι μόνο κατακόρυφο, η αντίδραση έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα. Στην υποπαράγραφο 3.2.3 περιγράφομε τον τρόπο υπολογισμού των αντιδράσεων στα σημεία στηρίξεως με άρθρωση.



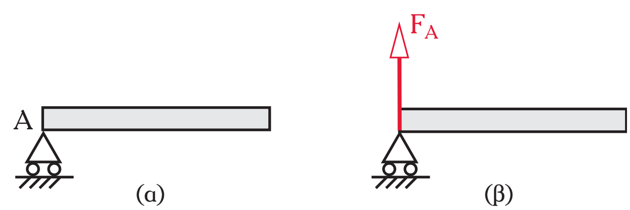
Σχ. 3.2β.
(α) Πάκτωση άκρου δοκού
(β) Δυνάμεις στο πακτωμένο σημείο στηρίξεως.



Σχ. 3.2γ
(α) Στήριξη άκρου δοκού με άρθρωση.
(β) Δυνάμεις στην άρθρωση.

γ) ***Κύλιση ή κινητή στήριξη*** ονομάζεται η στήριξη που πραγματοποιείται σ' ένα σημείο μίας δοκού εάν στερεώσομε το σημείο αυτό σε ένα κινητό σημείο, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, ένα έδρανο κυλίσεως, έτσι ώστε να είναι εφικτή η στροφή της δοκού και η μετακίνησή της κατά μία κατεύθυνση [σχ. 3.2δ(α)]. Η κύλιση έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά ως προς την παροχή ελευθερίας μετακινήσεων και στροφής:

– Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω.
– Επιτρέπει τη μετακίνηση της δοκού προς τα δεξιά και προς τα αριστερά.
– Επιτρέπει τη στροφή της δοκού.



Σχ. 3.2δ.
(α) Στήριξη άκρου δοκού με κύλιση.
(β) Δυνάμεις στην κύλιση.

Δηλαδή, η στήριξη της κυλίσεως δεν

επιτρέπει, όπως και η πάκτωση και η άρθρωση, καμμία μετακίνηση ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω. Ωστόσο, σε αντίθεση με την άρθρωση και την πάκτωση, η κύλιση επιτρέπει τη μετακίνηση της δοκού προς τα δεξιά και προς τα αριστερά· καθώς και τη στροφή της δοκού. Τα ***χαρακτηριστικά*** της ***πακτώσεως***, της ***αρθρώσεως*** και της ***κυλίσεως*** παρουσιάζονται συγκριτικά στον πίνακα 3.2.1.

Πίνακας 3.2.1.

Είδος στηρίξεως	***Δυνατότητα μετακινήσεως πάνω-κάτω***	***Δυνατότητα μετακινήσεως δεξιά-αριστερά***	***Δυνατότητα στροφής***
Πάκτωση	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ
Άρθρωση	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Κύλιση	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ

Συνεπώς, η στήριξη με κύλιση ενός άκρου μιας δοκού έχει ως αποτέλεσμα, όταν μια εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα πάνω ή προς τα κάτω, το άκρο αυτό να μην μετακινείται ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω. Αντίθετα, όταν μια εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, το άκρο αυτό μπορεί να μετακινείται προς τα δεξιά και προς τα αριστερά. Επίσης, όταν μία ροπή προσπαθεί να στρέψει τη δοκό, το άκρο αυτό επιτρέπει στη δοκό να στρέφεται.

Η κύλιση απαντάται πολύ συχνά στην καθημερινή πράξη, ιδίως σε περιπτώσεις που η αξιοποίηση των χαρακτηριστικών της κυλίσεως είναι απαραίτητη για την ακεραιότητα της κατασκευής. Ως παράδειγμα στηρίξεως με κύλιση αναφέρομε τη στήριξη μιας ατράκτου[1], το μήκος της οποίας αναμένεται να υφίσταται μεταβολές (διαστολή και συστολή) λόγω αυξομειώσεων της θερμοκρασίας. Αν η άτρακτος είχε στερεωθεί με τη μέθοδο της πακτώσεως ή της αρθρώσεως, τότε θα αναπτύσσονταν πολύ μεγάλες τάσεις στην άτρακτο, οι οποίες θα μπορούσαν να την καταστρέψουν. Αντίθετα, η κύλιση δεν εμποδίζει τη διαστολή και συστολή της ατράκτου και έτσι δεν αναπτύσσονται οι πολύ μεγάλες αυτές τάσεις που θα μπορούσαν να την καταστρέψουν. Άλλο παράδειγμα χρησιμοποιήσεως της κυλίσεως αποτελούν οι γέφυρες που δεν έχουν ενδιάμεσα άλλα στηρίγματα.

Στο σημείο στηρίξεως με κύλιση αναπτύσσεται ***αντίδραση*** F_A, η οποία, είναι κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως [σχ. 3.2δ(β)]. Στην υποπαράγραφο 3.2.3 περιγράφομε τον τρόπο υπολογισμού των αντιδράσεων στα σημεία στηρίξεως με κύλιση. Ο πίνακας 3.2.2 παρουσιάζει συγκριτικά τα ***χαρακτηριστικά των αντιδράσεων*** που εμφανίζονται στις ***τρεις περιπτώσεις στηρίξεως άκρων***.

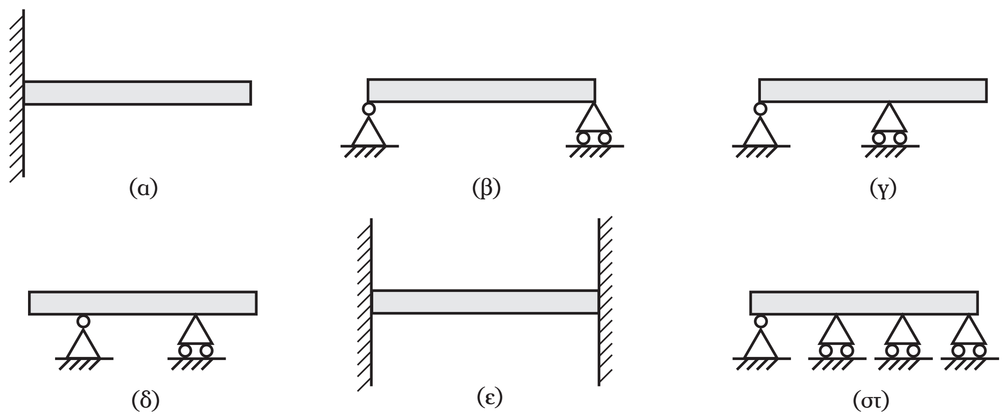
Πίνακας 3.2.2.

Είδος στηρίξεως	***Αντίδραση***	***Ροπή πακτώσεως***
Πάκτωση	Οποιαδήποτε διεύθυνση	ΝΑΙ
Άρθρωση	Οποιαδήποτε διεύθυνση	ΟΧΙ
Κύλιση	Κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως	ΟΧΙ

3.2.2 Κατηγοριοποίηση δοκών με βάση τον τρόπο στηρίξεώς τους.

Μία δοκός μπορεί να στηρίζεται σε ένα, δύο, τρία ή περισσότερα σημεία. Επίσης, καθένα από

[1] Η έννοια της ατράκτου αναπτύσσεται στην παράγραφο 5.6.



Σχ. 3.2ε.
Κατηγορίες δοκών.
(α) Πρόβολος δοκός. (β) Αμφιέρειστη δοκός. (γ) Προέχουσα δοκός. (δ) Αμφιπροέχουσα δοκός. (ε) Αμφίπακτη δοκός. (στ) Συνεχής δοκός.

τα σημεία στηρίξεως, όπως ήδη αναφέραμε, μπορεί να στηρίζεται με πάκτωση, με άρθρωση ή με κύλιση.

Οι συνδυασμοί του πλήθους των σημείων στηρίξεως μίας δοκού με τα είδη στηρίξεως οδηγεί σε μία ποικιλία δυνατών τρόπων στηρίξεως των δοκών σε στατική ισορροπία. Ωστόσο, υπάρχουν και ορισμένοι περιορισμοί. Για παράδειγμα, ενώ μία δοκός η οποία στηρίζεται μόνο σ' ένα σημείο με πάκτωση μπορεί να ισορροπεί χωρίς άλλη στήριξη, εντούτοις η δοκός δεν μπορεί να στηριχθεί μόνο σ' ένα σημείο με άρθρωση. Στην τελευταία περίπτωση η δοκός απαιτεί και ένα ακόμη σημείο στηρίξεως, ώστε να βρεθεί σε στατική ισορροπία.

Απ' το σύνολο όλων των δυνατών συνδυασμών στηρίξεως των δοκών, μας ενδιαφέρουν οι ακόλουθες έξι κατηγορίες στηρίξεως σε οριζόντια θέση. Μία δοκός λοιπόν ονομάζεται:

α) ***Πρόβολος*** όταν στηρίζεται μόνο στο ένα άκρο με πάκτωση [σχ. 3.2ε(α)].

β) ***Αμφιέρειστη*** όταν στηρίζεται στα δύο άκρα της, στο ένα με άρθρωση και στο άλλο με κύλιση [σχ. 3.2ε(β)].

γ) ***Προέχουσα*** όταν στηρίζεται σε δύο σημεία, από τα οποία το ένα σημείο στηρίξεως βρίσκεται στην άκρη της δοκού, ενώ το άλλο άκρο της δοκού προεξέχει από το άλλο σημείο στηρίξεως. Η στήριξη στο ένα σημείο γίνεται με άρθρωση και στο άλλο με κύλιση [σχ. 3.2ε(γ)].

δ) ***Αμφιπροέχουσα*** όταν στηρίζεται σε δύο σημεία, στο ένα με άρθρωση και στο άλλο με κύλιση, ενώ τα δύο άκρα της δοκού προεξέχουν από τα δύο σημεία στηρίξεώς της [σχ. 3.2ε(δ)].

ε) ***Αμφίπακτη*** όταν στηρίζεται και στα δύο άκρα με πάκτωση [σχ. 3.2ε(ε)].

στ) ***Συνεχής*** όταν στηρίζεται σε τρία ή περισσότερα σημεία [σχ. 3.2ε(στ)].

Τα ***χαρακτηριστικά*** καθεμίας απ' τις ανωτέρω ***κατηγορίες δοκών*** παρουσιάζονται ***συγκριτικά*** στον πίνακα 3.2.3.

Πίνακας 3.2.3.

Κατηγορία δοκού	***Πλήθος σημείων στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη 1^{ου} σημείου στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη 2^{ου} σημείου στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη επομένων σημείων στηρίξεως***
Πρόβολος δοκός	1	Άκρο δοκού	–	–
		Πάκτωση	–	–
Αμφιέρειστη δοκός	2	Άκρο δοκού	Άκρο δοκού	–
		Άρθρωση	Κύλιση	–

(συνεχίζεται)

Κατηγορία δοκού	***Πλήθος σημείων στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη 1ου σημείου στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη 2ου σημείου στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη επομένων σημείων στηρίξεως***
Προέχουσα δοκός	2	Άκρο δοκού	Πιο εσωτερικά του άλλου άκρου δοκού	–
		Άρθρωση	Κύλιση	–
		Κύλιση	Άρθρωση	
Αμφιπροέχουσα δοκός	2	Πιο εσωτερικά του ενός άκρου δοκού	Πιο εσωτερικά του άλλου άκρου δοκού	–
		Άρθρωση	Κύλιση	–
Αμφίπακτη δοκός	2	Άκρο δοκού	Άκρο δοκού	–
		Πάκτωση	Πάκτωση	–
Συνεχής δοκός	3 ή περισσότερα	Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε
		Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε

3.2.3 Συνθήκες στατικής ισορροπίας δοκού.

Μία δοκός λέμε ότι βρίσκεται σε ***στατική ισορροπία*** όταν τα φορτία που φέρει (σηκώνει) είναι ίσα και αντίθετα με τις αντιδράσεις που δέχεται απ' τα στηρίγματα και οι ροπές των φορτίων είναι ίσες και αντίθετες με τις ροπές των αντιδράσεων.

Εάν με ΣF συμβολίσομε τη συνισταμένη των φορτίων, με ΣF_A τη συνισταμένη των αντιδράσεων, με ΣM_F τη συνισταμένη ροπή των φορτίων ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο αναφοράς και με ΣM_A τη συνισταμένη ροπή των αντιδράσεων[1] ως προς το σημείο αναφοράς, οι συνθήκες στατικής ισορροπίας της δοκού γράφονται στη μορφή:

$$\sum F + \sum F_A = 0 \tag{3.1}$$

$$\sum M_F + \sum M_A = 0 \tag{3.2}$$

Η σχέση (3.1) γράφεται ξεχωριστά για τις οριζόντιες και για τις κάθετες συνιστώσες των δυνάμεων. Αν χρησιμοποιήσομε τους δείκτες x και y για να δηλώσομε τις οριζόντιες και τις κάθετες συνιστώσες των δυνάμεων, αντίστοιχα, η σχέση (3.1) γράφεται:

$$\sum F_x + \sum F_{A,x} = 0 \quad \text{και} \quad \sum F_y + \sum F_{A,y} = 0 \tag{3.3}$$

Σημειώνεται ότι τα αθροίσματα των σχέσεων (3.2) και (3.3) είναι αλγεβρικά. Δηλαδή, για τις δυνάμεις λαμβάνεται υπόψη η φορά τους για τον καθορισμό του προσήμου τους (θετικό πρόσημο για δυνάμεις με φορά προς τα πάνω ή προς τα δεξιά και αρνητικό για δυνάμεις με φορά προς τα κάτω ή προς τα αριστερά). Ομοίως, για τις ροπές λαμβάνεται υπόψη η φορά τους για τον καθορισμό του προσήμου τους (θετικό πρόσημο για ροπές με φορά δεξιόστροφη και αρνητικό για ροπές με φορά αριστερόστροφη).

Οι ανωτέρω σχέσεις μάς βοηθούν να προσδιορίζομε άγνωστες δυνάμεις, όπως είναι οι δυνάμεις αντιδράσεως στα στηρίγματα των δοκών.

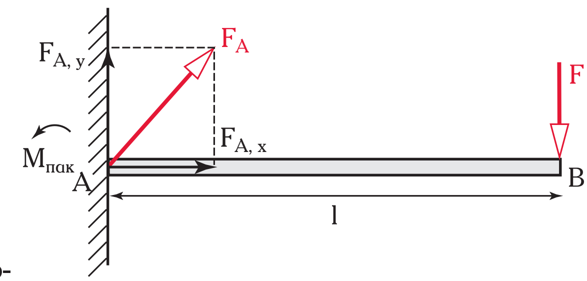
---

[1] Η συνισταμένη ροπή των αντιδράσεων περιλαμβάνει και τις ροπές πακτώσεως (εφόσον υπάρχουν).

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η πρόβολος δοκός μήκους l = 120 cm του σχήματος 3.2στ, στο άκρο Β της οποίας ενεργεί κατακόρυφο φορτίο F = 200 N. Να υπολογιστούν η αντίδραση και η ροπή πακτώσεως στο άκρο στηρίξεώς της Α.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 120 cm	F_A = ;
F = 200 N	$M_{πακ}$ = ;



Σχ. 3.2στ.

Λύση.

Στο πακτωμένο άκρο στηρίξεως Α εφαρμόζεται η αντίδραση F_A, η οποία αναλύεται στην οριζόντια συνιστώσα $F_{A,x}$ και στην κατακόρυφη συνιστώσα $F_{A,y}$. Επίσης, στη στήριξη Α εμφανίζεται η ροπή πακτώσεως $M_{πακ}$.

Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο Α, το φορτίο F προσπαθεί να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα (όπως και οι δείκτες του ρολογιού). Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F είναι:

$$M = F \cdot l = 200 \text{ N} \cdot 120 \text{ cm} = 24.000 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

Επειδή, η αντίδραση F_A εφαρμόζεται στο άκρο Α, η ροπή της ως προς το Α είναι μηδενική:

$$M_A = 0$$

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

α) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και των φορτίων που ενεργούν στη δοκό, τόσο κατά την οριζόντια διεύθυνση, όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$F_{A,x} = 0 \qquad (1)$$

$$F_{A,y} - F = 0 \qquad (2)$$

β) Το αλγεβρικό άθροισμα της ροπής του φορτίου και της ροπής πακτώσεως που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M - M_{πακ} = 0 \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M_{πακ} = M \Leftrightarrow M_{πακ} = 24.000 \text{ N} \cdot \text{cm}.$$

Από τη σχέση (1) βλέπομε ότι η αντίδραση F_A έχει μηδενική οριζόντια συνιστώσα. Αυτό οφείλεται στο ότι το εφαρμοζόμενο φορτίο είναι κατακόρυφο. Από τη σχέση (2) λαμβάνομε:

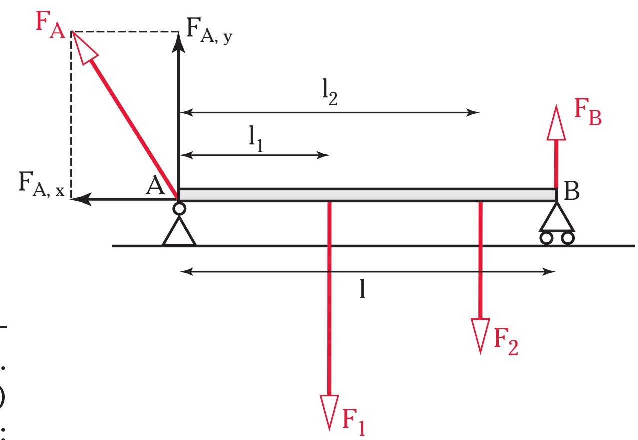
$$F_{A,y} = F = 200 \text{ N}$$

Άρα, η αντίδραση από το στήριγμα είναι F_A = 200 N και η ροπή πακτώσεως $M_{πακ}$ = 24.000 N · cm.

Παράδειγμα 2.

Για την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 3.2ζ που έχει μήκος l = 100 cm, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της, όταν στη δοκό εφαρμόζονται δύο κατακόρυφα φορτία F_1 = 600 N και F_2 = 400 N σε αποστάσεις l_1 = 40 cm και l_2 = 80 cm, αντίστοιχα, από το ένα άκρο της δοκού.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 100$ cm	$F_A = ;$
$F_1 = 600$ N	$F_B = ;$
$F_2 = 400$ N	
$l_1 = 40$ cm	
$l_2 = 80$ cm	



Σχ. 3.2ζ.

Λύση.

Το άκρο Α της δοκού στηρίζεται σε άρθρωση, ενώ το άκρο Β της δοκού με κύλιση. Η αντίδραση F_A στο άκρο Α είναι (εν γένει) πλάγια και αναλύεται σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την $F_{A,x}$ και σε μία κατακόρυφη συνιστώσα, την $F_{A,y}$, όπως δείχνει το σχήμα 3.2ζ. Η αντίδραση F_B στο άκρο Β είναι κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως, δηλαδή είναι κάθετη στον άξονα της δοκού.

Οι, F_1, F_2, F_A, και F_B αποτελούν τις τέσσερεις δυνάμεις που ενεργούν στη δοκό. Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο Α, το φορτίο F_1 προσπαθεί να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα (όπως και οι δείκτες του ρολογιού). Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F_1 είναι:

$$M_1 = F_1 \cdot l_1 = 600 \text{ N} \cdot 40 \text{ cm} = 24.000 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

Το φορτίο F_2 προσπαθεί και αυτό να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα. Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F_2 είναι:

$$M_2 = F_2 \cdot l_2 = 400 \text{ N} \cdot 80 \text{ cm} = 32.000 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

Η αντίδραση F_B προσπαθεί να στρέψει τη δοκό αριστερόστροφα (αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού). Η ροπή που προκαλεί η αντίδραση F_B είναι:

$$M_B = -F_B \cdot l$$

Επειδή η αντίδραση F_A εφαρμόζεται στο άκρο Α, η ροπή της ως προς το Α είναι μηδενική:

$$M_A = 0$$

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

α) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και των φορτίων που ενεργούν στη δοκό, τόσο κατά την οριζόντια διεύθυνση όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$F_1 + F_2 - F_{A,y} - F_B = 0 \qquad (1)$$

$$F_{A,x} = 0 \qquad (2)$$

β) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των αντιδράσεων και των ροπών των φορτίων που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M_1 + M_2 + M_A + M_B = 0 \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M_1 + M_2 + M_A + M_B = 0 \Leftrightarrow M_1 + M_2 = 0 + F_B \cdot l \Leftrightarrow F_B = \frac{M_1 + M_2}{l} = \frac{24.000 \text{ N} \cdot \text{cm} + 32.000 \text{ N} \cdot \text{cm}}{100 \text{ cm}} = 560 \text{ N}$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνομε: $F_{A,y} = F_1 + F_2 - F_B \Leftrightarrow F_{A,y} = 600 \text{ N} + 400 \text{ N} - 560 \text{ N} = 440 \text{ N}$

Από τη σχέση (2) συμπεραίνομε ότι η αντίδραση F_A έχει μηδενική οριζόντια συνιστώσα. Αυτό οφείλεται στο ότι όλα τα εφαρμοζόμενα φορτία είναι κατακόρυφα.

Άρα, οι αντιδράσεις είναι F_A = 440 N και F_B = 560 N.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η αμφιέρειστη δοκός μήκους l = 80 cm που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2η(α). Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της όταν στο μέσο της δοκού εφαρμόζεται ένα φορτίο F = 400 N υπό γωνία 30° ως προς τον άξονα της δοκού, όπως δείχνει το σχήμα 3.2η(α).

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 80 cm	F_A = ;
F = 400 N	F_B = ;
θ = 30°	

Λύση.

Καταρχήν αναλύομε το φορτίο F = 400 N σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την F_x και σε μία κατακόρυφη, την F_y, όπως δείχνει το σχήμα 3.2η(β). Έχομε:

$$F_x = F \cdot \text{συν}\theta = 400\,\text{N} \cdot \text{συν}30^o = 400\,\text{N} \cdot 0{,}866 = 346{,}4\,\text{N}$$

$$F_y = F \cdot \text{ημ}\theta = 400\,\text{N} \cdot \text{ημ}30^o = 400\,\text{N} \cdot 0{,}5 = 200\,\text{N}$$

Το άκρο Α της δοκού στηρίζεται σε άρθρωση, ενώ το άκρο Β της δοκού με κύλιση. Η αντίδραση F_A στο άκρο Α είναι πλάγια και αναλύεται σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την $F_{A,x}$ και σε μία κατακόρυφη, την $F_{A,y}$, όπως δείχνει το σχήμα 3.2η(γ). Η αντίδραση F_B στο άκρο Β είναι κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως, δηλαδή είναι κάθετη στον άξονα της δοκού.

Οι F, F_A και F_B αποτελούν τις τρεις δυνάμεις που ενεργούν στη δοκό. Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο Α, το φορτίο F προσπαθεί να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα. Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F είναι:

$$M = F_y \cdot \frac{l}{2} = 200\,\text{N} \cdot \frac{80\,\text{cm}}{2} = 8.000\,\text{N} \cdot \text{cm}$$

Η αντίδραση F_B προσπαθεί να στρέψει τη δοκό αριστερόστροφα. Η ροπή που προκαλεί η αντίδραση F_B είναι:

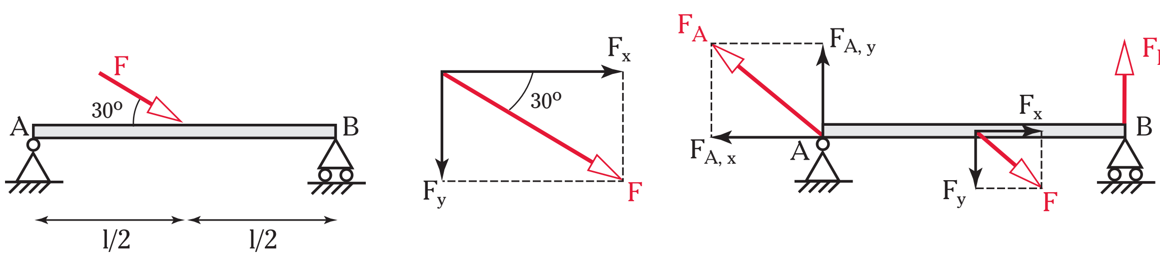
$$M_B = -F_B \cdot l$$

Επειδή, η αντίδραση F_A εφαρμόζεται στο άκρο Α, η ροπή της ως προς το Α είναι μηδενική:

$$M_A = 0$$

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

α) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και του φορτίου που ενεργούν στη δοκό, τόσο



(α) (β) (γ)

Σχ. 3.2η

κατά την οριζόντια διεύθυνση όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$F_x - F_{A,x} = 0 \qquad (1)$$

$$F_B + F_{A,y} - F_y = 0 \qquad (2)$$

β) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των αντιδράσεων και της ροπής του φορτίου που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M + M_A + M_B = 0 \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M + M_A + M_B = 0 \Leftrightarrow M = 0 + F_B \cdot l \Leftrightarrow F_B = \frac{M}{l} = \frac{8.000\ N \cdot cm}{80\ cm} = 100\ N$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνομε: $F_{A,x} = F_x \Leftrightarrow F_{A,x} = 346,4\ N$

Από τη σχέση (2) λαμβάνομε: $F_B + F_{A,y} - F_y = 0 \Leftrightarrow F_{A,y} = F_y - F_B = 200\ N - 100\ N = 100\ N$[1]

Η αντίδραση F_A δίνεται από τη σχέση: $F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} = \sqrt{346,4^2 + 100^2}\ N = 360,6\ N$

Άρα, οι αντιδράσεις είναι F_A = 360,6 N και F_B = 100 N.

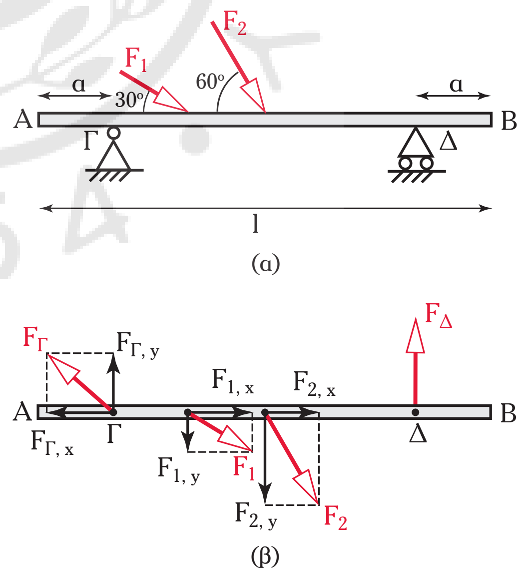
Παράδειγμα 4.

Δίνεται η αμφιπροέχουσα δοκός μήκους l = 120 cm που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2θ(α). Τα δύο σημεία στηρίξεως απέχουν αποστάσεις α = 20 cm από τα άκρα της δοκού. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της, όταν στη δοκό εφαρμόζονται τα ακόλουθα δύο φορτία:

α) Το φορτίο F_1 = 200 N υπό γωνία 30° ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση l_1 = 40 cm από το άκρο Α της δοκού και

β) το φορτίο F_2 = 500 N υπό γωνία 60° ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση l_2 = 60 cm από το άκρο Α της δοκού l [σχ. 3.2θ(α)].

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 120 cm	$F_Γ$ = ;
α = 20 cm	$F_Δ$ = ;
F_1 = 200 N	
$θ_1$ = 30°	
l_1 = 40 cm	
F_2 = 500 N	
$θ_2$ = 60°	
l_2 = 60 cm	



Σχ. 3.2θ.

Λύση.

Καταρχήν αναλύομε τα φορτία F_1 = 200 N και

---

[1] Παρατηρούμε ότι οι $F_{A,y}$ και F_B είναι ίσες μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στο ότι το φορτίο εφαρμόζεται στο μέσο της δοκού. Εάν το φορτίο εφαρμοζόταν σε άλλο σημείο της δοκού, τότε οι αντιδράσεις δεν θα ήταν ίσες.

$F_2 = 500$ N σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες:

$$F_{1,x} = F_1 \cdot \text{συν}30^o = 200\ \text{N} \cdot 0{,}866 = 173{,}2\ \text{N} \ \text{και}$$

$$F_{1,y} = F_1 \cdot \text{ημ}30^o = 200\ \text{N} \cdot 0{,}5 = 100\ \text{N}$$

$$F_{2,x} = F_2 \cdot \text{συν}60^o = 500\ \text{N} \cdot 0{,}5 = 250\ \text{N} \ \text{και} \ F_{2,y} = F_2 \cdot \text{ημ}60^o = 500\ \text{N} \cdot 0{,}866 = 433\ \text{N}$$

Η δοκός στηρίζεται στο σημείο Γ σε άρθρωση και στο Δ σε κύλιση. Η αντίδραση $F_Γ$ στο σημείο Γ είναι πλάγια και αναλύεται στην οριζόντια $F_{Γ,x}$ και στην κατακόρυφη συνιστώσα $F_{Γ,y}$, [σχ. 3.2θ(β)]. Η αντίδραση $F_Δ$ στο σημείο Δ είναι κάθετη στην επιφάνεια, δηλαδή είναι κάθετη στον άξονα της δοκού.

Οι F_1, F_2, $F_Γ$ και $F_Δ$ αποτελούν τις δυνάμεις που ενεργούν στη δοκό. Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο Α, τα φορτία F_1 και F_2 προσπαθούν να στρέψουν τη δοκό δεξιόστροφα. Οι ροπές που προκαλούν τα φορτία F_1 και F_2 είναι:

$$M_1 = F_{1,y} \cdot l_1 = 100\ \text{N} \cdot 40\ \text{cm} = 4.000\ \text{N} \cdot \text{cm} \ \text{και}$$

$$M_2 = F_{2,y} \cdot l_2 = 433\ \text{N} \cdot 60\ \text{cm} = 25.980\ \text{N} \cdot \text{cm}$$

Οι αντιδράσεις $F_Γ$ και $F_Δ$ προσπαθούν να στρέψουν τη δοκό αριστερόστροφα. Οι ροπές που προκαλούν είναι:

$$M_Γ = -F_{Γ,y} \cdot α = -20\ \text{cm} \cdot F_{Γ,y} \quad \text{και} \quad M_Δ = -F_Δ \cdot (l - α) = -100\ \text{cm} \cdot F_Δ$$

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

α) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και των φορτίων που ενεργούν στη δοκό, τόσο κατά την οριζόντια διεύθυνση, όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$F_{1,x} + F_{2,x} - F_{Γ,x} = 0 \qquad (1)$$

$$F_{Γ,y} + F_Δ - F_{1,y} - F_{2,y} = 0 \qquad (2)$$

β) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των αντιδράσεων και των ροπών των φορτίων που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M_1 + M_2 + M_Γ + M_Δ = 0 \qquad (3)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνομε:

$$F_{1,x} + F_{2,x} - F_{Γ,x} = 0 \Leftrightarrow F_{Γ,x} = F_{1,x} + F_{2,x} \Leftrightarrow F_{Γ,x} = 173{,}2\ \text{N} + 250\ \text{N} = 423{,}2\ \text{N}$$

Από τη σχέση (2) λαμβάνομε:

$$F_{Γ,y} + F_Δ = F_{1,y} + F_{2,y} \Leftrightarrow F_{Γ,y} + F_Δ = 100\ \text{N} + 433\ \text{N} \Leftrightarrow F_{Γ,y} + F_Δ = 533\ \text{N} \qquad (4)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M_1 + M_2 = -(M_A + M_B) \Leftrightarrow 20 \cdot F_{Γ,y} + 100 \cdot F_Δ = 29.980\ \text{N} \Leftrightarrow F_{Γ,y} + 5 \cdot F_Δ = 1.499\ \text{N} \qquad (5)$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (5) και (4) κατά μέλη έχομε:

$$4 \cdot F_Δ = 1.499\ \text{N} - 533\ \text{N} \Leftrightarrow F_Δ = \frac{966}{4}\ \text{N} = 241{,}5\ \text{N}$$

Έτσι, από τη σχέση (4) έχομε:

$$F_{\Gamma,y} = 533\,N - F_{\Delta} = 533\,N - 241,5\,N = 291,5\,N$$

Η αντίδραση F_{Γ} δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\Gamma} = \sqrt{F_{\Gamma,x}^2 + F_{\Gamma,y}^2} = \sqrt{423,2^2 + 291,5^2}\,N = 513,9\ N$$

Άρα, οι αντιδράσεις είναι F_{Γ} = 513,9 N και F_{Δ} = 241,5 N.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι δεν είναι πάντοτε εφικτός ο υπολογισμός των αγνώστων αντιδράσεων των στηριγμάτων χρησιμοποιώντας μόνο τις σχέσεις (3.1) και (3.2). Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει μόνο όταν οι άγνωστες αντιδράσεις είναι ίσες με το πλήθος των εξισώσεων που ορίζουν οι σχέσεις (3.1) και (3.2). Η σχέση (3.1) αναλύεται σε δύο εξισώσεις, μία για τις οριζόντιες συνιστώσες των δυνάμεων και μία για τις κατακόρυφες. Η σχέση (3.2) αναλύεται σε μία εξίσωση. Έτσι έχομε συνολικά τρεις εξισώσεις και άρα μπορούμε να επιλύσομε τα προβλήματα, στα οποία έχουμε τρεις άγνωστες αντιδράσεις. Τέτοιου είδους είναι τα προβλήματα των παραδειγμάτων 1-4. Ωστόσο, υπάρχουν και περιπτώσεις που έχομε περισσότερες από τρεις άγνωστες αντιδράσεις, όπως η συνεχής δοκός με τέσσερα στηρίγματα, του σχήματος 3.2ε(στ). Το ένα στήριγμα αφορά σε άρθρωση και τα υπόλοιπα σε κύλιση. Στο πρώτο στήριγμα έχομε άγνωστη την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της αντιδράσεως (δύο συνιστώσες) και σε καθένα από τα τρία στηρίγματα της κυλίσεως έχομε άγνωστη την κατακόρυφη συνιστώσα της αντιδράσεως. Έτσι έχομε πέντε άγνωστες αντιδράσεις, ενώ οι εξισώσεις μας είναι τρεις. Επομένως, για να υπολογιστούν οι άγνωστες αντιδράσεις χρειάζονται και άλλες συνθήκες πέραν των σχέσεων (3.1) και (3.2).

Ασκήσεις.

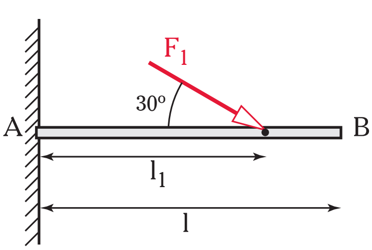
1. *Δίνεται η πρόβολος δοκός μήκους l = 100 cm (σχ.3.2ι). Σε απόσταση l_1 = 80 cm από το σημείο πακτώσεως Α ενεργεί φορτίο F_1 = 80 N υπό γωνία 30° ως προς τον άξονα της δοκού, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Να υπολογιστούν η αντίδραση και η ροπή πακτώσεως στο άκρο στηρίξεως Α.*

2. *Για την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 3.2ια, που έχει μήκος l = 80 cm, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της όταν σ' αυτήν εφαρμόζονται τρία κατακόρυφα φορτία F_1 = 120 N, F_2 = 120 N και F_3 = 120 N σε αποστάσεις l_1 = 20 cm, l_2 = 40 cm και l_3 = 60 cm, αντίστοιχα, από το ένα άκρο της δοκού.*

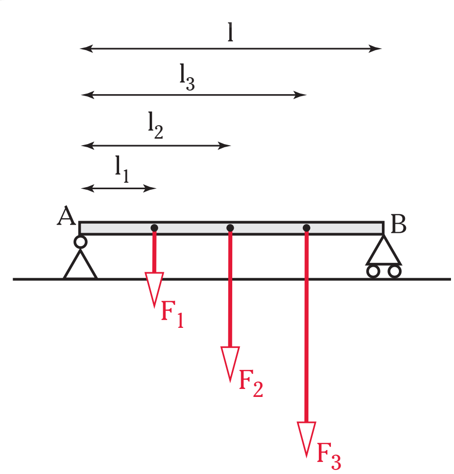
3. *Δίνεται η αμφιέρειστη δοκός μήκους l = 180 cm που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2ιβ. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της, όταν στη δοκό εφαρμόζονται τα ακόλουθα τρία φορτία:*

α) Το φορτίο F_1 = 100 N υπό γωνία 30° ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση l_1 = 50 cm από το άκρο Α.

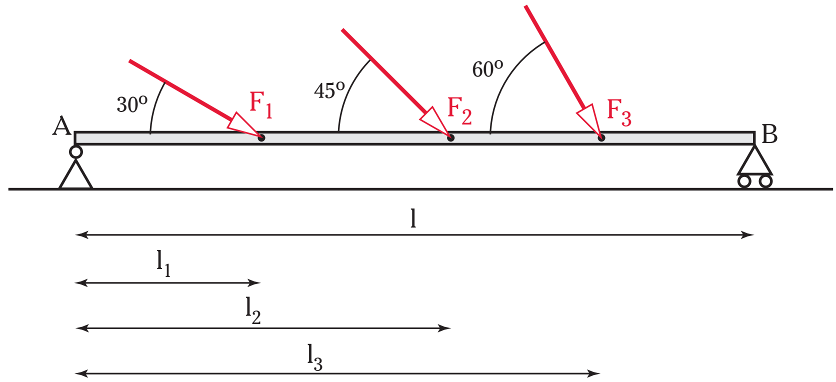
β) Το φορτίο F_2 = 200 N υπό γωνία 45° ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση l_2 = 100 cm από το άκρο Α.



Σχ. 3.2ι.



Σχ. 3.2ια.



Σχ. 3.2ιβ.

γ) Το φορτίο F_3 = 100 N υπό γωνία 60° ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση l_2 = 140 cm από το άκρο Α, όπως δείχνει το σχήμα 3.2ιβ.

3.3 Ορθές και τέμνουσες δυνάμεις, καμπτικές ροπές.

Στην παράγραφο 1.12 είδαμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις που ενεργούν σ' ένα σώμα, για παράδειγμα σε μία δοκό, λόγω της επιδράσεως εξωτερικών δυνάμεων είναι αυτές που προέρχονται από τις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων του υλικού της δοκού. Οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις, με κριτήριο τη διεύθυνσή τους ως προς τη διατομή της δοκού, διακρίνονται σε ***ορθές*** και ***τέμνουσες***.

α) ***Ορθή δύναμη*** μίας διατομής μίας δοκού ονομάζεται η εσωτερική δύναμη που ενεργεί κάθετα στην εν λόγω διατομή [σχ. 3.3α(α)]. Η φορά της ορθής δυνάμεως σε μία διατομή μιας δοκού καθορίζει εάν έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό ή καταπόνηση σε θλίψη. Εάν η ορθή δύναμη έχει φορά προς το εσωτερικό της δοκού, τότε έχομε καταπόνηση σε θλίψη. Εάν έχει φορά προς το εξωτερικό της δοκού, τότε έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό.

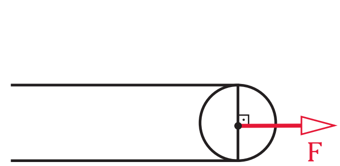
β) ***Τέμνουσα δύναμη*** μιας διατομής μίας δοκού ονομάζεται η εσωτερική δύναμη που βρίσκεται επάνω στο επίπεδο της διατομής [σχ. 3.3α(β)].

Στις διατομές που υπάρχουν τέμνουσες δυνάμεις αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις.

Εκτός από τις ορθές και τις τέμνουσες δυνάμεις, στα μεγέθη που χαρακτηρίζουν την εντατική κατάσταση ενός σώματος ανήκουν και οι καμπτικές ροπές.

Καμπτική ροπή ή ***ροπή κάμψεως*** σε μια συγκεκριμένη θέση μιας δοκού ονομάζεται το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς την εν λόγω θέση όλων των δυνάμεων που βρίσκονται αριστερά της θέσεως αυτής.

Η έννοια των καμπτικών ροπών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μελέτη της καταπονήσεως της κάμψεως, την οποία μελετούμε στο Κεφάλαιο 4. Προς το παρόν σημειώνομε ότι σε όποιες περιοχές μιας δοκού η καμπτική ροπή είναι θετική, τότε οι κάτω ίνες της στις περιοχές αυτές εφελκύονται, ενώ οι πάνω θλίβονται. Αντίθετα, σε όποιες περιοχές μιας δοκού η καμπτική ροπή είναι αρνητική, τότε οι κάτω ίνες της δοκού στις περιοχές αυτές θλίβονται, ενώ οι πάνω εφελκύονται.



Σχ. 3.3α.
(α) Ορθή δύναμη. (β) Τέμνουσα δύναμη.

Οι μονάδες μετρήσεως των ορθών και των τεμνουσών δυνάμεων είναι προφανώς οι μονάδες δυνάμεως, ενώ οι μονάδες μετρήσεως των καμπτικών ροπών είναι οι μονάδες ροπής (πίν. 3.3).

Πίνακας 3.3.
Μονάδες μετρήσεως των ορθών και τεμνουσών δυνάμεων καθώς και των καμπτικών ροπών.

Μέγεθος	*Διεθνές Σύστημα*	*C.G.S.*	*Τεχνικό Σύστημα*	*Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα*
Ορθές και τέμνουσες Δυνάμεις	1 N	1 dyn	1 kp	1 lb
Καμπτική ροπή	1 N · m	1 dyn · cm	1 kp · m	1 lb · ft

Από τους ορισμούς της ορθής και της τέμνουσας δυνάμεως προκύπτει ότι τόσο η ορθή, όσο και η τέμνουσα δύναμη αφορούν στη συγκεκριμένη διατομή της δοκού, στην οποία αντιστοιχούν. Η ορθή και η τέμνουσα δύναμη της διατομής μιας δοκού δεν χαρακτηρίζουν από μόνες τους την κατάσταση φορτίσεως της δοκού. Κατ' ανάλογο τρόπο η καμπτική ροπή αφορά στη συγκεκριμένη διατομή της δοκού, στην οποία αντιστοιχεί. Η καμπτική ροπή της διατομής μιας δοκού δεν χαρακτηρίζει από μόνη της την κατάσταση φορτίσεως της δοκού.

Η κατάσταση φορτίσεως της δοκού χαρακτηρίζεται από το σύνολο των τιμών των ορθών δυνάμεων, το σύνολο των τιμών των τεμνουσών δυνάμεων και το σύνολο των τιμών των καμπτικών ροπών που αντιστοιχούν σε όλες τις διατομές της δοκού. Δηλαδή, η κατάσταση φορτίσεως της δοκού χαρακτηρίζεται από τη χωρική εξέλιξη της ορθής δυνάμεως κατά μήκος της δοκού, από τη χωρική εξέλιξη της τέμνουσας δυνάμεως κατά μήκος της δοκού και από τη χωρική εξέλιξη της καμπτικής ροπής κατά μήκος της δοκού. Η χωρική εξέλιξη της ορθής δυνάμεως κατά μήκος της δοκού παρουσιάζεται στο Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ). Η χωρική εξέλιξη της τέμνουσας δυνάμεως κατά μήκος της δοκού παρουσιάζεται στο Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ). Η χωρική εξέλιξη της καμπτικής ροπής κατά μήκος της δοκού παρουσιάζεται στο Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ).

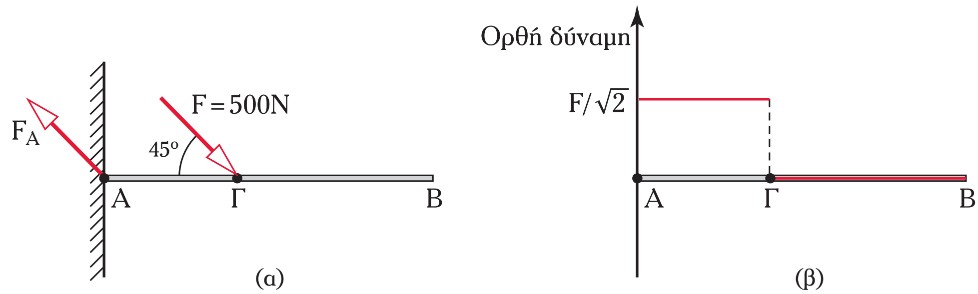
3.3.1 Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.

Ως ***Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ)*** μιας δοκού ονομάζεται η γραφική παράσταση της ορθής δυνάμεως σε κάθε διατομή της δοκού ως προς την απόσταση κάθε διατομής από το ένα άκρο της.

Το σχήμα 3.3β(β) παρουσιάζει ως παράδειγμα το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ) για τη δοκό του σχήματος 3.3β(α). Η δοκός είναι μία πρόβολος δοκός, στο σημείο Γ της οποίας ενεργεί φορτίο F υπό γωνία 45°, ενώ στο άκρο της Α ενεργεί η αντίδραση F_A από το στήριγμα που είναι αντίθετη της F. Ο κατακόρυφος άξονας του ΔΟΔ αντιστοιχεί στο μέγεθος της ορθής δυνάμεως και ο οριζόντιος στην απόσταση από το αριστερό άκρο της δοκού. Από το σχήμα 3.3β(β) βλέπομε ότι η ορθή δύναμη είναι σταθερή στο τμήμα της δοκού μεταξύ των σημείων Α και Γ και μηδενική μεταξύ των σημείων Γ και Β.

Η κατασκευή του Διαγράμματος Ορθών Δυνάμεων μίας δοκού σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως προϋποθέτει τον υπολογισμό των ορθών δυνάμεων για όλες τις διατομές της δοκού. Ο ***υπολογισμός των ορθών δυνάμεων*** σε μία δοκό γίνεται εφαρμόζοντας τους ακόλουθους κανόνες:

α) Η ορθή δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή μιας δοκού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής και



Σχ. 3.3β.
(α) Πρόβολος δοκός σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως. (β) Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στη δοκό.

β) η ορθή δύναμη λαμβάνεται θετική εάν εφελκύει την τυχούσα διατομή και αρνητική εάν τη θλίβει.

Παράδειγμα 5.

Να σχεδιαστεί το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων της αμφιέρειστης δοκού του παραδείγματος 3.

Λύση.

Ήδη από το παράδειγμα 3 γνωρίζομε ότι το φορτίο F = 400 N αναλύεται σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την F_x = 346,4 N και σε μία κατακόρυφη συνιστώσα, την F_y = 200 N. Επίσης, υπολογίσαμε τις αντιδράσεις των στηριγμάτων: F_A = 360,6 N και F_B = 100 N. Η αντίδραση F_A αναλύεται στην οριζόντια συνιστώσα $F_{A,x}$ = 346,4 N και την κατακόρυφη $F_{A,y}$ = 100 N.

Η ορθή δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή της δοκού ΑΒ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής.

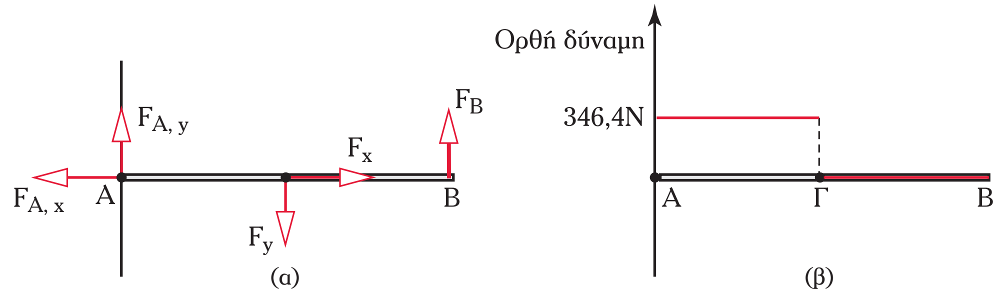
Χωρίζομε τη δοκό στα εξής δύο τμήματα:

α) ***Τμήμα ΑΓ***, όπου Γ είναι το σημείο εφαρμογής του φορτίου F.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΑΓ, [σχ. 3.3γ(α)], πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού ενεργεί μόνο η δύναμη $F_{A,x}$ = 346,4 N. Η δύναμη αυτή εφελκύει τη διατομή. Συνεπώς, η ορθή δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΑΓ είναι θετική και ίση με 346,4 N.

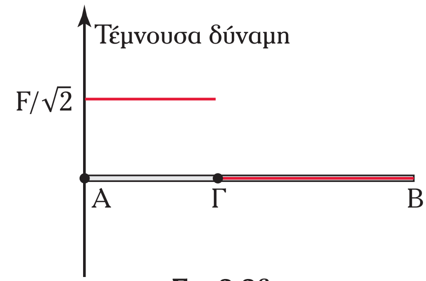
β) ***Τμήμα ΓΒ.***

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΓΒ, [σχ. 3.3γ(α)], πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού ενεργούν οι δυνάμεις $F_{A,x}$ = 346,4 N και F_x = 346,4 N. Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες και έτσι το αλγεβρικό άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν. Συνεπώς, η ορθή δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΓΒ είναι μηδενική.



Σχ. 3.3γ
Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στη δοκό του παραδείγματος 3.

Με βάση τα παραπάνω, το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων της δοκού διαμορφώνεται όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.3γ(β).



Σχ. 3.3δ.
Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στο δοκό του σχήματος 3.3β(α).

3.3.2 Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.

Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ) μιας δοκού ονομάζεται η γραφική παράσταση της τέμνουσας δυνάμεως σε κάθε διατομή της δοκού ως προς την απόσταση κάθε διατομής απ' το ένα άκρο της.

Το σχήμα 3.3δ παρουσιάζει ως παράδειγμα το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων για τη δοκό του σχήματος 3.3β(α). Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο μέγεθος της τέμνουσας δυνάμεως και ο οριζόντιος στην απόσταση από το αριστερό άκρο της δοκού. Από το σχήμα 3.3δ βλέπομε ότι η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή στο τμήμα της δοκού μεταξύ των σημείων Α και Γ και μηδενική μεταξύ των σημείων Γ και Β. Η ομοιότητα του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων με το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων για τη δοκό του σχήματος 3.3β(α) είναι συμπτωματική (τυχαία) και οφείλεται στο γεγονός ότι το φορτίο δρα υπό γωνία 45^{o}. Στη γενική περίπτωση το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων μιας δοκού είναι διαφορετικό από το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεών της.

Η κατασκευή του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων μίας δοκού σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως προϋποθέτει τον υπολογισμό των τεμνουσών δυνάμεων για όλες τις διατομές της. Ο ***υπολογισμός των τεμνουσών δυνάμεων*** σε μια δοκό γίνεται εφαρμόζοντας τους εξής κανόνες:

α) Η τέμνουσα δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή μιας δοκού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν κάθετα στον άξονά της και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής.

β) Η φορά της τέμνουσας δυνάμεως είναι αντίθετη απ' αυτήν που δείχνει το πρόσημο του αλγεβρικού αθροίσματος και

γ) η τέμνουσα δύναμη λαμβάνεται[1] θετική όταν κατευθύνεται προς τα κάτω και αρνητική όταν κατευθύνεται προς τα πάνω.

Παράδειγμα 6.

Να σχεδιαστεί το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων της αμφιέρειστης δοκού του παραδείγματος 3.

Λύση.

Η τέμνουσα δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή της δοκού ΑΒ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν κάθετα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής.

Χωρίζομε τη δοκό στα εξής δύο τμήματα:

α) ***Τμήμα ΑΓ.***

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΑΓ, (σχ. 3.3ε), κάθετα στον άξονα της δοκού ενεργεί μόνο η δύναμη $F_{A,y}$ = 100 N. Η δύναμη αυτή κατευθύνεται προς τα πάνω. Συνεπώς, η τέμνουσα δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΑΓ κατευθύνεται προς τα κάτω και είναι θετική και ίση με 100 N.

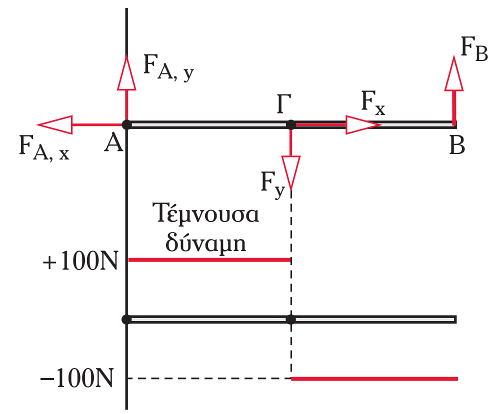
β) ***Τμήμα ΓΒ***

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΓΒ, (σχ. 3.3ε), κάθετα στον

[1] Η σήμανση είναι συμβατική.

άξονα της δοκού ενεργούν οι δυνάμεις $F_{A,y}$ = 100 N και F_y = 200 N. Η συνισταμένη τους είναι ίση με 100 N και έχει φορά προς τα κάτω. Συνεπώς, η τέμνουσα δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΓΒ κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική και ίση με 100 N.

Με βάση τα ανωτέρω, το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων της δοκού διαμορφώνεται όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.3ε.

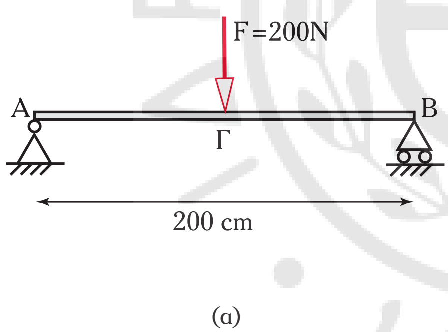


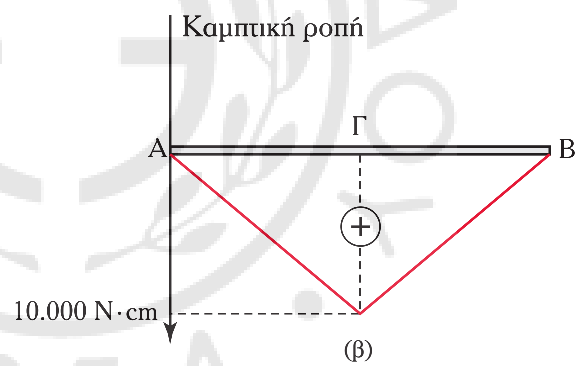
Σχ. 3.3ε.
Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στη δοκό του Παραδείγματος 3.

3.3.3 Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ) μιας δοκού ονομάζεται η γραφική παράσταση της καμπτικής ροπής σε κάθε διατομή της δοκού ως προς την απόσταση κάθε διατομής από το ένα άκρο της.

Το σχήμα 3.3στ(β) παρουσιάζει ως παράδειγμα το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών για την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 3.3στ(α), στο μέσο της οποίας εφαρμόζεται κατακόρυφο φορτίο F. Ο κατακόρυφος άξονας του διαγράμματος αντιστοιχεί στο μέγεθος της καμπτικής ροπής και ο οριζόντιος στην απόσταση απ' το αριστερό άκρο της δοκού. Από το σχήμα 3.3στ(β) βλέπομε ότι η καμπτική ροπή είναι θετική σε όλο το μήκος της δοκού. Επίσης, η καμπτική ροπή έχει τη μέγιστη τιμή της (+10.000 N · cm) στο μέσο της ράβδου Γ. Η καμπτική ροπή αυξάνει γραμμικά από την τιμή 0 στη μέγιστη τιμή της στο τμήμα ΑΓ της δοκού και μειώνεται γραμμικά από τη μέγιστη τιμή της στην τιμή 0 στο τμήμα ΓΒ της δοκού.





Σχ. 3.3στ.
(α) Αμφιέρειστη δοκός. (β) Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών που αντιστοιχεί στη δοκό.

Η κατασκευή του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών μίας δοκού σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως προϋποθέτει τον υπολογισμό των καμπτικών ροπών για όλες τις διατομές της. Ο ***υπολογισμός των καμπτικών ροπών*** σε μία δοκό γίνεται εφαρμόζοντας τους εξής κανόνες:

α) Η καμπτική ροπή τυχούσας διατομής μιας δοκού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν στη δοκό και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής. Οι ροπές των δυνάμεων υπολογίζονται ως προς το κέντρο της διατομής.

β) Η φορά της καμπτικής ροπής είναι αντίθετη απ' αυτήν που δείχνει το πρόσημο του αλγεβρικού αθροίσματος και

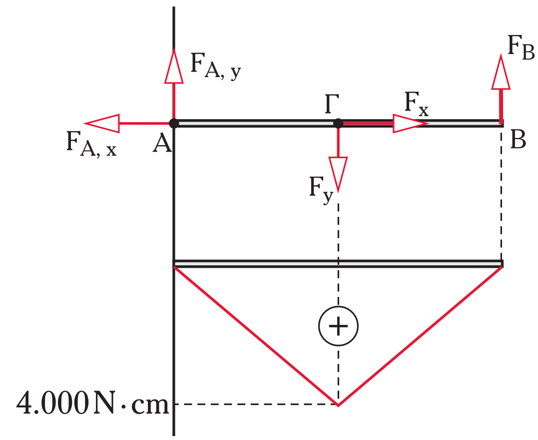
γ) η καμπτική ροπή λαμβάνεται θετική όταν είναι αριστερόστροφη και αρνητική όταν είναι δεξιόστροφη.

Παράδειγμα 7.

Να σχεδιαστεί το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών της αμφιέρειστης δοκού του παραδείγματος 3.

Λύση.

Η καμπτική ροπή που ενεργεί σε τυχούσα διατομή της δοκού ΑΒ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής. Οι ροπές των δυνάμεων υπολογίζονται ως προς το κέντρο της διατομής.



Σχ. 3.3ζ.
Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών που αντιστοιχεί στη δοκό του παραδείγματος 3.

Χωρίζομε τη δοκό στα εξής δύο τμήματα:

α) ***Τμήμα ΑΓ.***

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΑΓ (σχ. 3.3ζ), ενεργεί μόνο η ροπή της δυνάμεως $F_{A,y}$ = 100 N. Για τη διατομή που βρίσκεται σε απόσταση x, $0 \leq x \leq 40$ cm, από το άκρο Α, η ροπή της δυνάμεως αυτής ισούται με $M = F_{A,y} \cdot x = 100 \cdot x$ και έχει φορά δεξιόστροφη. Συνεπώς, η καμπτική ροπή σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΑΓ που βρίσκεται σε απόσταση, x, $0 \leq x \leq 40$ cm, από το άκρο Α, είναι αριστερόστροφη και άρα θετική και εξαρτάται από την απόσταση x μέσω της σχέσεως $100 \cdot x$, όπου $0 \leq x \leq 40$ cm. Η σχέση αυτή είναι γραμμική.

β) ***Τμήμα ΓΒ.***

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΓΒ (σχ. 3.3ζ), ενεργούν οι ροπές των δυνάμεων $F_{A,y}$ = 100 N και F_y = 200 N. Για τη διατομή που βρίσκεται σε απόσταση x, $40 < x \leq 80$ cm, από το άκρο Α, η ροπή της δυνάμεως $F_{A,y}$ ισούται με $M_1 = F_{A,y} \cdot x = 100 \cdot x$ και η ροπή της δυνάμεως F_y ισούται με $M_2 = F_{A,y} \cdot (x-40) = 200 \cdot (x-40)$.

Η συνισταμένη των δύο ροπών είναι ίση με $M = M_1 - M_2 = 100 \cdot x - 200 \cdot (x-40) = 8.000 - 100 \cdot x$ και έχει φορά δεξιόστροφη. Συνεπώς, η καμπτική ροπή σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΓΒ που βρίσκεται σε απόσταση x, $40 < x \leq 80$ cm, από το άκρο Α, είναι αριστερόστροφη άρα θετική και εξαρτάται από την απόσταση x μέσω της σχέσεως $8.000 - 100 \cdot x$, όπου $40 < x \leq 80$ cm. Η σχέση αυτή είναι γραμμική.

Με βάση τα ανωτέρω, το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών της δοκού διαμορφώνεται όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.3ζ.

3.3.4 Ιδιότητες των Διαγραμμάτων Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών.

Τα Διαγράμματα Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Στα αφόρτιστα τμήματα μιας δοκού:

– Η τέμνουσα δύναμη παριστάνεται με ευθεία παράλληλη στον άξονα της δοκού.

– Η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως την τέμνουσα δύναμη. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά από τη σύγκριση των διαγραμμάτων των σχημάτων 3.3ε και 3.3ζ.

β) Η καμπτική ροπή διατομής μιας δοκού είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των επιφανειών του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων, που βρίσκεται αριστερά της εν λόγω διατομής.

γ) Η καμπτική ροπή σε μία θέση μιας δοκού μπορεί να υπολογιστεί εάν προσθέσομε αλγεβρικά την τιμή της καμπτικής ροπής σε άλλη θέση με το εμβαδόν του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων που αντιστοιχεί ανάμεσα στις δύο θέσεις.

δ) Η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή της καμπτικής ροπής εμφανίζεται στη διατομή, στην οποία η τέμνουσα δύναμη αλλάζει πρόσημο, δηλαδή από θετική γίνεται αρνητική ή το αντίθετο.

Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά από τη σύγκριση των διαγραμμάτων των σχημάτων 3.3ε και 3.3ζ.

Τέλος, σχετικά με τη φυσική σημασία των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών σημειώνομε ότι το σύστημα των εξωτερικών δυνάμεων που βρίσκονται στα αριστερά της υπό εξέταση διατομής της δοκού αντικαθίσταται από την τέμνουσα δύναμη, η οποία ενεργεί στο επίπεδο διατομής και από την καμπτική ροπή. Η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή ισορροπούνται απ' τις εσωτερικές τάσεις που αναπτύσσονται στην υπό εξέταση διατομή και αντιπροσωπεύουν την επίδραση στο αριστερό του τμήματος της δοκού που βρίσκεται δεξιά της υπό εξέταση διατομής.

Ασκήσεις.

1. *Για την αμφιέρειστη δοκό της ασκήσεως 2 της παραγράφου 3.2 να σχεδιαστούν:*
α) Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.
β) Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.
γ) το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

2. *Για την αμφιέρειστη δοκό της ασκήσεως 3 της παραγράφου 3.2 να σχεδιαστούν:*
α) Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.
β) Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.
γ) Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

3.4 Ιδιότητες διατομής δοκού.

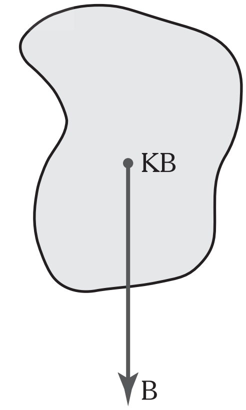
Για τη μελέτη της κάμψεως, της στρέψεως και του λυγισμού που ακολουθούν στα επόμενα κεφάλαια χρειάζεται να γνωρίζομε τις ιδιότητες της διατομής των σωμάτων, τα οποία υφίστανται τις καταπονήσεις αυτές. Οι απαιτούμενες ιδιότητες της διατομής δεν περιορίζονται μόνο στο υλικό και το εμβαδόν της αλλά, όπως θα δούμε, μεγάλη σημασία έχουν και άλλες ιδιότητες, οι οποίες σχετίζονται με το σχήμα της διατομής και τον τρόπο στηρίξεως της δοκού.

Ειδικότερα, εκτός του εμβαδού, οι ιδιότητες της διατομής της δοκού που τη χαρακτηρίζουν και μας ενδιαφέρουν στη μελέτη των καταπονήσεων είναι οι ακόλουθες:
α) Το κέντρο βάρους ή κεντροειδές.
β) Η ροπή αδράνειας.
γ) Η ακτίνα αδράνειας.
δ) Η ροπή αντιστάσεως.
ε) Η πολική ροπή αδράνειας.
στ) Η πολική ροπή αντιστάσεως.
Οι ανωτέρω ιδιότητες σχετίζονται με το σχήμα της διατομής.

3.5 Κέντρο βάρους.

Κέντρο βάρους μιας διατομής ενός σώματος ονομάζεται το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η συνισταμένη όλων των στοιχειωδών δυνάμεων της βαρύτητας που ενεργούν πάνω στα μόριά της.

Το σχήμα 3.5α παρουσιάζει τη θέση του κέντρου βάρους της εικονιζόμενης διατομής. Το κέντρο βάρους αποτελεί το σημείο στο οποίο θεωρείται συγκεντρωμένο ολόκληρο το βάρος της διατομής.



Σχ. 3.5α.
Κέντρο βάρους διατομής.

3.5.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η θέση του κέντρου βάρους;

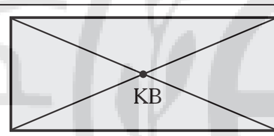
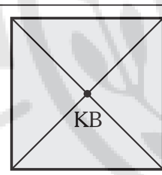
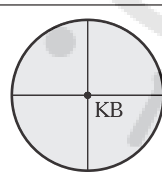
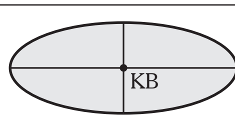
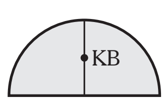
Στη μελέτη των καταπονήσεων μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η θέση του κέντρου βάρους της διατομής αφενός για να μπορούμε να προσδιορίζομε το είδος της καταπονήσεως και αφετέρου για να υπολογίζομε τις αποστάσεις των σημείων της διατομής από το κέντρο βάρους της. Από τις αποστάσεις αυτές, μεταξύ άλλων, καθορίζεται η αντοχή μιας κατασκευής. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4, οι αναπτυσσόμενες τάσεις στα διάφορα σημεία της διατομής ενός σώματος που καταπονείται σε κάμψη εξαρτώνται από τις αποστάσεις τους από το κέντρο βάρους, της διατομής. Όσο πιο μεγάλη είναι η απόσταση ενός σημείου από το κέντρο βάρους, τόσο πιο ισχυρή είναι η αναπτυσσόμενη τάση στο σημείο αυτό. Επομένως, γνωρίζοντας τη θέση του κέντρου βάρους της διατομής μπορούμε να προσδιορίσομε τα σημεία με τη μεγαλύτερη απόσταση απ' αυτό και άρα τα σημεία, στα οποία αναπτύσσονται οι μεγαλύτερες τάσεις. Οι τάσεις αυτές καθορίζουν την αντοχή του σώματος που καταπονείται σε κάμψη. Επί πλέον, εάν ένα θλιπτικό φορτίο δεν περνάει από το κέντρο βάρους συμμετρικής διατομής, στην οποία εφαρμόζεται, προκαλεί εκτός των άλλων και λυγισμό.

3.5.2 Πώς προσδιορίζεται η θέση του κέντρου βάρους;

Ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους είναι εύκολος για τις διατομές που έχουν απλά γεωμετρικά σχήματα. Συγκεκριμένα, το κέντρο βάρους μιας διατομής που είναι ομογενής και συμμετρική βρίσκεται στο σημείο, στο οποίο τέμνονται οι δύο άξονες συμμετρίας της.

Η θέση του κέντρου βάρους ομογενών διατομών που έχουν απλά σχήματα παρουσιάζονται στον πίνακα 3.5.1.

Πίνακας 3.5.1.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Θέση κέντρου βάρους***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β	Το σημείο τομής των διαγωνίων
Τετράγωνο		Η πλευρά α	Το σημείο τομής των διαγωνίων
Κύκλος		Η διάμετρος D	Το κέντρο του κύκλου
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος ημιάξονας β	Το κέντρο της ελλείψεως
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D	Σε απόσταση $\frac{2 \cdot D}{3 \cdot \pi}$ από το κέντρο του κύκλου πάνω στην κάθετη της διαμέτρου του

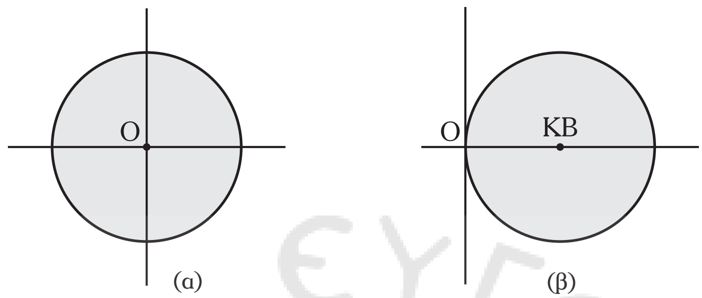
Παράδειγμα 8.

Δίνεται ομογενής χαλύβδινη δοκός με κυκλική διατομή ακτίνας R = 5 cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής στις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου [σχ. 3.5β(α)].

β) Η αρχή των αξόνων βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στον οριζόντιο άξονα [σχ. 3.5β(β)].

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
R = 5 cm	x = ; y = ;



Σχ. 3.5β.

Λύση.

Επειδή η δοκός είναι ομογενής και η διατομή της έχει σχήμα κύκλου, το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου.

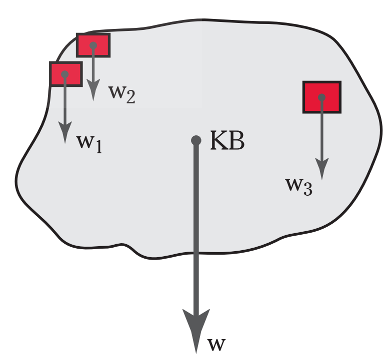
α) Το σχήμα 3.5β(α) απεικονίζει τον κύκλο στο σύστημα συντεταγμένων, που έχει την αρχή των αξόνων στο κέντρο του κύκλου. Έτσι, το κέντρο βάρους της διατομής συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Άρα, το κέντρο βάρους βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες x = 0 και y = 0 ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

β) Το σχήμα 3.5β(β) απεικονίζει τον κύκλο στο σύστημα συντεταγμένων που έχει την αρχή των αξόνων πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στον οριζόντιο άξονα. Συγκεκριμένα, το κέντρο βάρους βρίσκεται σε απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου από την αρχή των αξόνων. Άρα, το κέντρο βάρους βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες x = R = 5 cm και y = 0 ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

Η εμφάνιση διαφορετικών αποτελεσμάτων στα ερωτήματα (α) και (β) οφείλεται στη χρήση διαφορετικού συστήματος συντεταγμένων και όχι σε αλλαγή της πραγματικής θέσεως του κέντρου βάρους. Η θέση του κέντρου βάρους παραμένει στο κέντρο του κύκλου.

3.5.3 Υπολογισμός κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων όπως αυτό του σχήματος 3.5γ, στηρίζεται στην ανάλυση των συνθέτων σχημάτων σε απλά επίπεδα σχήματα (τετράγωνα, ορθογώνια κ.λπ.) και στη συνέχεια στο συνδυασμό των αποτελεσμάτων των απλών σχημάτων. Τα απλά σχήματα έχουν το πλεονέκτημα ότι γνωρίζομε τη θέση του κέντρου βάρους τους.



Σχ. 3.5γ.
Η θέση του κέντρου βάρους σώματος με σύνθετο γεωμετρικό σχήμα.

Καθένα από τα απλά επίπεδα σχήματα έχει βάρος w_i[1] και βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες(x_i, y_i), όπου ο δείκτης i = 1,2,…,N αριθμεί τα N απλά σχήματα, από τα οποία αποτε-

[1] Υποθέτομε ότι τα απλά σχήματα έχουν πολύ μικρό πάχος, οπότε έχουν βάρος.

λείται το σύνθετο σχήμα. Η θέση ($x_{κβ}$, $y_{κβ}$) του κέντρου βάρους του σύνθετου γεωμετρικού σχήματος προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

$$x_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \tag{3.4}$$

$$y_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \tag{3.5}$$

Επειδή τα απλά επίπεδα σχήματα είναι ομογενή, τα βάρη τους είναι ανάλογα του εμβαδού A_i των επιφανειών των σχημάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι σχέσεις (3.4) και (3.5) να γράφονται αντίστοιχα, ως εξής:

$$x_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \tag{3.6}$$

$$y_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \tag{3.7}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της θέσεως*** του κέντρου βάρους παρέχονται στον πίνακα 3.5.2.

Πίνακας 3.5.2.

Μέγεθος	***Διεθνές Σύστημα***	***C.G.S.***	***Τεχνικό Σύστημα***	***Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα***
Θέση κέντρου βάρους	1 m	1 cm	1 m	1 ft

Οι σχέσεις (3.6) και (3.7) μας οδηγούν στην ανάπτυξη μιας ***αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού του κέντρου βάρους ομογενών συνθέτων σχημάτων***, τα βήματα της οποίας παρουσιάζονται στον πίνακα 3.5.3.

Πίνακας 3.5.3.

1) Χωρίζομε το σύνθετο γεωμετρικό σχήμα (σύνθετη επιφάνεια) σε απλά σχήματα (απλές επιφάνειες).
2) Υπολογίζομε το εμβαδόν A_i κάθε απλής επιφάνειας.
3) Υπολογίζομε τη θέση (x_i, y_i) του κέντρου βάρους κάθε απλής επιφάνειας ως προς τη βάση της σύνθετης επιφάνειας.
4) Υπολογίζομε τα γινόμενα του εμβαδού A_i κάθε απλής επιφάνειας επί τις αποστάσεις x_i και y_i, δηλαδή τα γινόμενα $A_i \cdot x_i$ και $A_i \cdot y_i$.

(συνεχίζεται)

5) Προσθέτομε τα εμβαδά όλων των απλών επιφανειών και βρίσκομε το άθροισμά τους $\sum_{i=1}^{N} A_i$. Το άθροισμα αυτό αντιστοιχεί στο εμβαδόν της σύνθετης επιφάνειας.
6) Υπολογίζομε τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i$ και $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i$.
7) Διαιρούμε τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i$ και $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i$ διά του εμβαδού της σύνθετης επιφάνειας $\sum_{i=1}^{N} A_i$ και βρίσκομε τη θέση του κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας ως προς τη βάση της.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου διευκολύνεται σημαντικά με την καταγραφή των ενδιαμέσων αποτελεσμάτων σε πίνακα, ο οποίος έχει τη μορφή του πίνακα 3.5.4. Στον πίνακα γράφομε το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε απλού σχήματος, τη θέση (x_i, y_i) του κέντρου βάρους, τα γινόμενα του εμβαδού επί τις αποστάσεις x_i και y_i, καθώς και τα αθροίσματα γινομένων και τα πηλίκα που ορίζει η μέθοδος.

Πίνακας 3.5.4.
Καταγραφή αποτελεσμάτων της αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i***	***$A_i \cdot x_i$***	***Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i***	***$A_i \cdot y_i$***
1					
2					
3					
....					
N					
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{N} A_i$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{\kappa\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i}$		$y_{\kappa\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i}$	

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσομε τα εξής:

α) Δεν συμβαίνει πάντοτε το κέντρο βάρους μίας διατομής να συμπίπτει υποχρεωτικά με ένα σημείο της. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες το κέντρο βάρους μίας διατομής βρίσκεται εκτός αυτής.

β) Το σύνθετο σχήμα μπορεί να μην προκύπτει εύκολα μόνο με προσθέσεις απλών σχημάτων. Αντίθετα, μπορεί να προκύπτει πολύ πιο εύκολα με προσθέσεις και αφαιρέσεις απλών σχημάτων. Η αναλυτική μέθοδος που περιγράψαμε παραπάνω εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή, αρκεί να θυμόμαστε ότι στις αφαιρέσεις τα εμβαδά των σχημάτων λαμβάνονται με αρνητικό πρόσημο στους υπολογισμούς.

3) Είναι πιθανό να υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι, με τους οποίους ένα σύνθετο σχήμα μπορεί να αναλυθεί σε απλά. Ωστόσο, η θέση του κέντρου βάρους δεν εξαρτάται από τον τρόπο αναλύσεως του σύνθετου σχήματος σε απλά. Όλοι οι τρόποι οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων παρουσιάζεται αναλυτικά στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 9.

Δίνεται η ομογενής διατομή του σχήματος 3.5δ(α) που έχει σχήμα «Τ» και οι διαστάσεις της είναι α = 6 cm, β = 2 cm, γ = 8 cm και δ = 2 cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

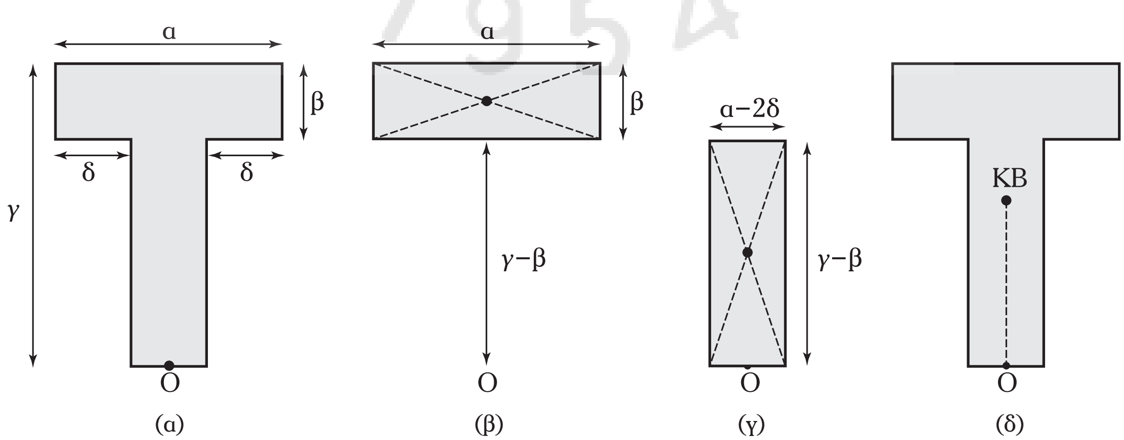
Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 6 cm	$x_{κβ}$ = ; $y_{κβ}$ = ;
β = 2 cm	
γ = 8 cm	
δ = 2 cm	

Λύση.

Η διατομή με σχήμα «Τ» δεν έχει απλό σχήμα. Μπορούμε όμως να τη χωρίσομε εύκολα σε απλά σχήματα και να εφαρμόσομε την αναλυτική μέθοδο υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Η διατομή με σχήμα «Τ» αποτελείται από δύο ορθογώνια. Το ένα ορθογώνιο απεικονίζεται στο σχήμα 3.5δ(β) και έχει πλευρές τις α = 6 cm και β = 2 cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι A_1 = 6 cm · 2 cm = 12 cm^2. Το άλλο ορθογώνιο απεικονίζεται στο σχήμα 3.5δ(γ) και έχει πλευρές α – 2 · δ = 6 cm – 2 · 2 cm = 2 cm και γ – β = 8 cm – 2 cm = 6 cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι A_2 = 6 cm · 2 cm = 12 cm^2. Η διατομή με σχήμα «Τ» προκύπτει από την πρόσθεση των δύο αυτών ορθογωνίων.

Χρησιμοποιούμε ως αρχή των αξόνων το Ο μέσο της βάσεως στηρίξεως της διατομής «Τ». Παρατηρούμε ότι λόγω της συμμετρίας, η διατομή και καθένα από τα δύο ορθογώνια είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που ενώνει τα σημεία τομής των διαγωνίων των δύο ορθογωνίων.



Σχ. 3.5δ.
(α) Διατομή με σχήμα «Τ». (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο. (δ) Η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

Αυτό σημαίνει ότι η οριζόντια συντεταγμένη των σημείων τομής των διαγωνίων των δύο ορθογωνίων είναι ίση με μηδέν.

Το κέντρο βάρους του πρώτου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση $(x_1, y_1) = (0, \gamma - \beta + \beta/2) = (0{,}8\ cm - 2\ cm + 1\ cm) = (0{,}7\ cm)$.

Το κέντρο βάρους του δεύτερου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση $(x_2, y_2) = (0, \frac{\gamma - \beta}{2}) = (0{,}3\ cm)$.

Το κέντρο βάρους της διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.5.5.

Πίνακας 3.5.5.
Καταγραφή αποτελεσμάτων του κέντρου βάρους διατομής σχήματος «Τ».

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i***	***$A_i \cdot x_i$***	***Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i***	***$A_i \cdot y_i$***
1	12 cm^2	0	0	7 cm	84 cm^3
2	12 cm^2	0	0	3 cm	36 cm^3
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 24 cm^2$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i = 0$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i = 120\ cm^3$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = 0$		$y_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{120\ cm^3}{24\ cm^2} = 5\ cm$	

Άρα, το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται σε απόσταση 5 cm από το μέσο της βάσεως στηρίξεώς της, δηλαδή στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 3.5δ(δ).

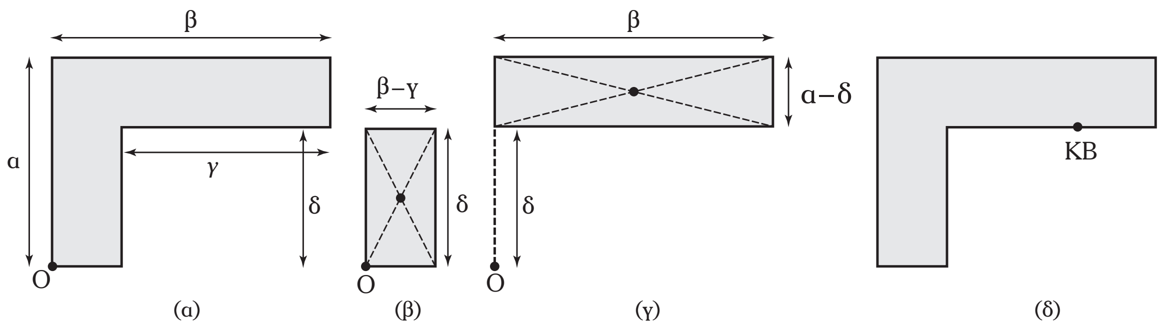
Παράδειγμα 10.

Δίνεται η ομογενής διατομή του σχήματος 3.5ε(α). Η διατομή έχει σχήμα «Γ» και οι διαστάσεις της είναι $\alpha = 6$ cm, $\beta = 8$ cm, $\gamma = 6$ cm και $\delta = 4$ cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής. Συμπίπτει το κέντρο βάρους της διατομής με κάποιο σημείο της;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\alpha = 6$ cm	$x_{\kappa\beta} =$; $y_{\kappa\beta} =$;
$\beta = 8$ cm	
$\gamma = 6$ cm	
$\delta = 4$ cm	

Λύση.

Η διατομή με σχήμα «Γ» δεν έχει απλό σχήμα. Μπορούμε όμως να τη χωρίσομε εύκολα σε απλά σχήματα και να εφαρμόσομε την αναλυτική μέθοδο υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.



Σχ. 3.5ε.
(α) Διατομή με σχήμα «Γ». (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο.
(δ) Η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

Χρησιμοποιούμε ως αρχή των αξόνων το σημείο O που είναι το ένα άκρο της βάσεως στηρίξεώς του.

Η διατομή με σχήμα «Γ» αποτελείται από δύο ορθογώνια. Το ένα απεικονίζεται στο σχήμα 3.5ε(β) και έχει πλευρές τις $\delta = 4$ cm και $\beta - \gamma = 2$ cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_1 = 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$. Το άλλο απεικονίζεται στο σχήμα 3.5ε(γ) και έχει πλευρές $\alpha - \delta = 6 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 2$ cm και $\beta = 8$ cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_2 = 2 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$. Η διατομή με σχήμα «Γ» προκύπτει από την πρόσθεση των δύο αυτών ορθογωνίων.

Το κέντρο βάρους του πρώτου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση $(x_1, y_1) = \left(\dfrac{\beta - \gamma}{2}, \dfrac{\delta}{2}\right) = (1 \text{ cm}, 2 \text{ cm})$.

Το κέντρο βάρους του δεύτερου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση $(x_2, y_2) = \left(\dfrac{\beta}{2}, \delta + \dfrac{\alpha - \delta}{2}\right) = (4 \text{ cm}, 5 \text{ cm})$.

Το κέντρο βάρους της διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.5.6.

Άρα, το κέντρο βάρους του σώματος βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 3 cm και σε κατακόρυφη απόσταση 4 cm από το σημείο O, δηλαδή στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 3.5ε(δ). Το κέντρο βάρους βρίσκεται οριακά πάνω στο σώμα, δηλαδή συμπίπτει με σημείο του σώματος.

Αρκετές φορές, όπως προαναφέραμε, αντί να χρησιμοποιούμε προσθετικά τα απλά σχήματα εξυπηρετεί καλύτερα να χρησιμοποιούμε αφαιρετικά κάποια απ' αυτά. Μάλιστα, σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι εφικτή η εύρεση απλών σχημάτων που προστιθέμενα μας δίνουν το σύνθετο σχήμα, ενώ είναι εφικτή η εύρεση απλών σχημάτων, μερικά από τα οποία εάν αφαιρεθούν από το άθροισμα των υπολοίπων, μας δίνουν το σύνθετο σχήμα. Αυτό φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 11.

Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής του παραδείγματος 10 χρησιμοποιώντας αφαιρετικά τουλάχιστον ένα απλό σχήμα.

Λύση.

Αντί για τα δύο ορθογώνια που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα 10, μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσομε δύο άλλα ορθογώνια, για τα οποία να εφαρμόσομε την αναλυτική μέθοδο υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων. Το ένα ορθογώνιο

Πίνακας 3.5.6.
Καταγραφή αποτελεσμάτων της θέσεως του κέντρου βάρους διατομής σχήματος «Γ».

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i***	***$A_i \cdot x_i$***	***Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i***	***$A_i \cdot y_i$***
1	$8\ cm^2$	$1\ cm$	$8\ cm^3$	$2\ cm$	$16\ cm^3$
2	$16\ cm^2$	$4\ cm$	$64\ cm^3$	$5\ cm$	$80\ cm^3$
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 24\ cm^2$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i = 72\ cm^3$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i = 96\ cm^3$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{κβ} = \dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \dfrac{72\ cm^3}{24\ cm^2} = 3\ cm$		$y_{κβ} = \dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \dfrac{96\ cm^3}{24\ cm^2} = 4\ cm$	

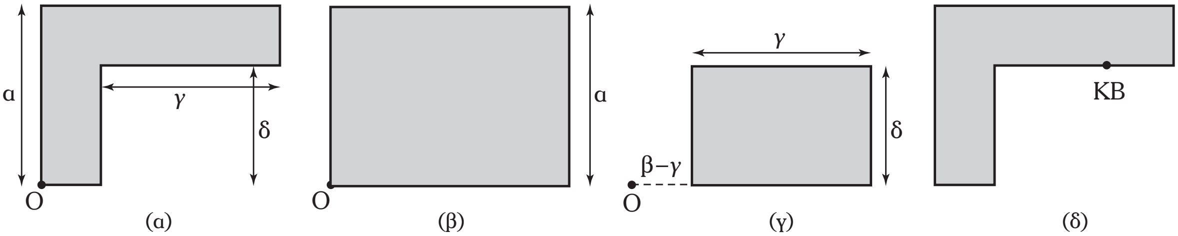
απεικονίζεται στο σχήμα 3.5στ(β) και έχει πλευρές τις $α = 6$ cm και $β = 8$ cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_1 = 6\ cm \cdot 8\ cm = 48\ cm^2$. Το άλλο απεικονίζεται στο σχήμα 3.5στ(γ) και έχει πλευρές $γ = 6$ cm και $δ = 4$ cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_2 = 6\ cm \cdot 4\ cm = 24\ cm^2$. Το σώμα με σχήμα «Γ» προκύπτει από την αφαίρεση του δεύτερου ορθογωνίου από το πρώτο.

Το κέντρο βάρους του πρώτου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση $(x_1, y_1) = \left(\dfrac{β}{2}, \dfrac{α}{2}\right) = (4\ cm,\ 3\ cm)$.

Το κέντρο βάρους του δεύτερου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση $(x_2, y_2) = \left(β - γ + \dfrac{γ}{2}, \dfrac{δ}{2}\right) = (5\ cm,\ 2\ cm)$.

Το κέντρο βάρους του σχήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.5.7.

Άρα, το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 3 cm και σε κατακόρυφη απόσταση 4 cm από το σημείο O, δηλαδή στη θέση που εικονίζεται στο σχήμα 3.5στ(δ). Το αποτέλεσμα αυτό ταυτίζεται με το αποτέλεσμα του παραδείγματος 10.



Σχ.3.5στ.
(α) Η διατομή του παραδείγματος 10. (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο. (δ) Η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

Πίνακας 3.5.7.
Καταγραφή αποτελεσμάτων της θέσεως κέντρου βάρους διατομής σχήματος «Γ».

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i***	***$A_i \cdot x_i$***	***Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i***	***$A_i \cdot y_i$***
1	$48\ cm^2$	4 cm	$192\ cm^3$	3 cm	$144\ cm^3$
2	$-24\ cm^2$	5 cm	$-120\ cm^3$	2 cm	$-48\ cm^3$
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 24\ cm^2$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i = 72\ cm^3$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i = 96\ cm^3$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{72\ cm^3}{24\ cm^2} = 3\ cm$		$y_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{96\ cm^3}{24\ cm^2} = 4\ cm$	

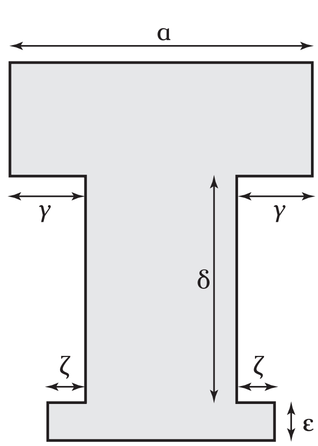
Ασκήσεις.

1. *Δίνεται ομογενής σιδερένια δοκός με διατομή σχήματος τετραγώνου με πλευρά α = 6 cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής στις ακόλουθες περιπτώσεις:*
α) Η αρχή των αξόνων βρίσκεται σε σημείο τομής δύο διαδοχικών πλευρών του τετραγώνου.
β) Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του.
γ) Είναι διαφορετικά τα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (α) και (β); Σχολιάστε.

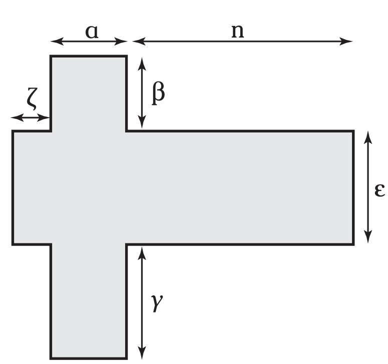
2. *Δίνεται η ομογενής διατομή του σχήματος 3.5ζ. Οι διαστάσεις της είναι α = 8 cm, β = 3 cm, γ = 2 cm, δ = 6 cm, ε = 1 cm και ζ = 1 cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.*
Υπόδειξη: *Η διατομή αποτελείται από τρία ορθογώνια.*

3. *Δίνεται η ομογενής διατομή του σχήματος 3.5η. Οι διαστάσεις της είναι α = 2 cm, β = 2 cm, γ = 3 cm, δ = 2 cm, ε = 3 cm, ζ = 1 cm και η = 6 cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής. Συμπίπτει το κέντρο βάρους της διατομής με κάποιο σημείο της;*
Υπόδειξη*: Η διατομή αποτελείται από τρία ορθογώνια.*

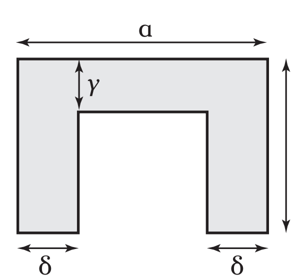
4. *Δίνεται η ομογενής διατομή σχήματος «Π» που απεικονίζεται στο σχήμα 3.5θ. Οι διαστάσεις της*



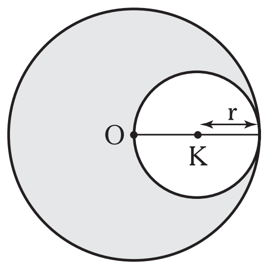
Σχ. 3.5ζ.



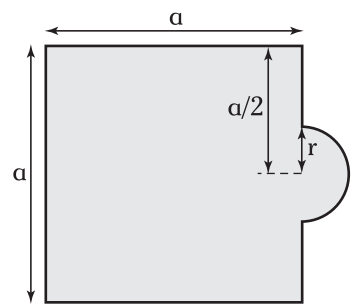
Σχ. 3.5η.



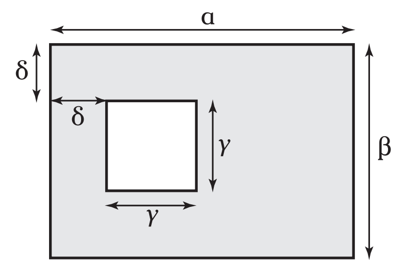
Σχ. 3.5θ.



Σχ. 3.5ι.



Σχ. 3.5ια.



Σχ. 3.5ιβ.

είναι α = 66 mm, β = 46 mm, γ = 14 mm και δ = 16 mm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής. Συμπίπτει το κέντρο βάρους της διατομής με κάποιο σημείο της;

5. *Δίνεται η ομογενής διατομή του σχήματος 3.5ι. Η ακτίνα του μικρού κύκλου είναι r = 10 mm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.*

6. *Να βρεθεί η θέση του κέντρου βάρους της ομογενούς διατομής του σχήματος 3.5ια. Δίνονται α = 42 mm και r = 10 mm.*

7. *Να βρεθεί η θέση του κέντρου βάρους της ομογενούς διατομής του σχήματος 3.5ιβ. Δίνονται α = 54 mm, β = 38 mm, γ = 16 mm και δ = 10 mm.*

3.6 Ροπή αδράνειας.

Στο πλαίσιο της Αντοχής Υλικών μάς ενδιαφέρει να μελετήσομε την αντίσταση που εμφανίζει μια δοκός στη δύναμη που προσπαθεί να την παραμορφώσει. Για τη μελέτη αυτή χρησιμοποιούμε την έννοια της αδράνειας. Πριν προχωρήσομε σε λεπτομέρειες που αφορούν στην αδράνεια υλικού που καταπονείται σε παραμόρφωση, ας ξεκινήσομε με τον ορισμό της έννοιας της αδράνειας.

Αδράνεια ενός σώματος ονομάζεται η ιδιότητά του να παρουσιάζει αντίσταση σε κάθε δύναμη που θέλει να μεταβάλλει την κίνησή του ή την ηρεμία του.

Με άλλα λόγια, η κινητική κατάσταση ενός σώματος δεν μεταβάλλεται, αν δεν επιδράσει σ' αυτό κάποια εξωτερική δύναμη. Αυτό αποτελεί και το αξίωμα της αδράνειας που ισχύει στην κλασική Μηχανική.

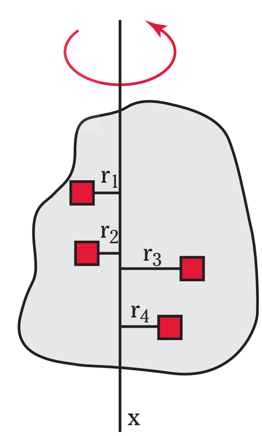
Μέτρο της αδράνειας ενός σώματος αποτελεί η ροπή αδράνειάς του. Ας θεωρήσομε το σώμα του σχήματος 3.6α. Το σώμα αποτελείται από στοιχειώδεις μάζες M_i, οι οποίες περιστρέφονται γύρω από τον άξονα x που εμφανίζεται στο σχήμα. Η ακτίνα περιστροφής κάθε στοιχειώδους μάζας m_i συμβολίζεται με r_i.

Ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς έναν άξονα x ορίζομε το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών του σώματος επί το τετράγωνο της αποστάσεώς τους απ' αυτόν.

Δηλαδή, η ροπή αδράνειας I_x ενός σώματος ως προς έναν άξονα x παρέχεται από τη σχέση:

$$I_x = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \qquad (3.8)$$

Από την ανωτέρω σχέση διαπιστώνομε ότι η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς έναν άξονα εξαρτάται από τους ακόλουθους δύο παράγοντες:



Σχ. 3.6α.
Σώμα που περιστρέφεται γύρω από άξονα.

α) ***Από τη μάζα του***, διότι όσο πιο μεγάλη είναι η μάζα του σώματος τόσο πιο μεγάλη είναι και η ροπή αδράνειάς του και

β) ***από την κατανομή της μάζας του*** διότι, όσο πιο απομακρυσμένη είναι η μάζα από τον άξονα γύρω από τον οποίο περιστρέφεται ένα σώμα, τόσο πιο μεγάλη είναι και η ροπή αδράνειάς του.

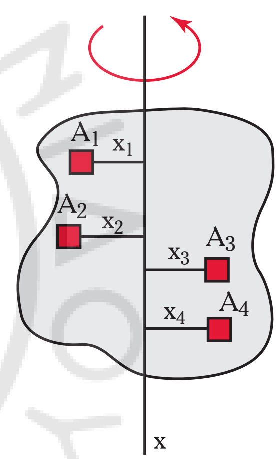
Ειδικότερα, από τη σχέση (3.8) φαίνεται ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται περισσότερο από τη θέση της μάζας ως προς τον άξονα περιστροφής απ' ό,τι εξαρτάται από το μέγεθός της, καθώς η ροπή αδράνειας εξαρτάται από το τετράγωνο των αποστάσεων.

Επίσης, πρέπει να σημειώσομε ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη θέση του άξονα, ως προς τον οποίο υπολογίζεται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της ροπής αδράνειας I_x το δείκτη x που δείχνει τον άξονα, ως προς τον οποίο η ροπή υπολογίζεται. Η κατανομή της μάζας του σώματος υπολογίζεται γύρω από συγκεκριμένο άξονα. Εάν αλλάξει ο άξονας ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδράνειας, τότε αλλάζουν οι αποστάσεις των στοιχειωδών μαζών, οι οποίες πλέον υπολογίζονται ως προς το νέο άξονα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό μίας άλλης τιμής ροπής αδράνειας ως προς το νέο άξονα.

3.6.1 Ροπή αδράνειας επιφάνειας.

Στο πλαίσιο της Αντοχής Υλικών, μας ενδιαφέρει η ***ροπή αδράνειας επιφάνειας***. Η ροπή αδράνειας επιφάνειας και συγκεκριμένα της διατομής μιας δοκού αποτελεί το μέτρο αντιστάσεως της δοκού στη δύναμη που προσπαθεί να την παραμορφώσει. Η ροπή αδράνειας επιφάνειας, την οποία στη συνέχεια αναφέρομε απλά ως ροπή αδράνειας, ορίζεται με τρόπο ανάλογο με τη σχέση (3.8), μόνο που πλέον αντί για το μέγεθος της μάζας χρησιμοποιούμε το μέγεθος της επιφάνειας.

Ας θεωρήσομε την επιφάνεια του σχήματος 3.6β. Η επιφάνεια αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες A_i, οι οποίες περιστρέφονται γύρω από τον άξονα x που εμφανίζεται στο σχήμα. Η ακτίνα περιστροφής κάθε στοιχειώδους επιφάνειας A_i συμβολίζεται με x_i.



Σχ. 3.6β.
Επιφάνεια που περιστρέφεται γύρω από άξονα.

Ροπή αδράνειας μίας επιφάνειας ως προς έναν άξονα x ορίζομε το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών επιφανειών που απαρτίζουν την επιφάνεια επί το τετράγωνο της αποστάσεώς τους από τον άξονα.

Δηλαδή, η ροπή αδράνειας I_x μιας επιφάνειας ως προς έναν άξονα x παρέχεται από τη σχέση:

$$I_x = \sum_i A_i \cdot x_i^2 \qquad (3.9)$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της ροπής αδράνειας*** παρουσιάζονται στον πίνακα 3.6.1.

Πίνακας 3.6.1.

Μέγεθος	*Διεθνές Σύστημα*	*C.G.S.*	*Τεχνικό Σύστημα*	*Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα*
Ροπή αδράνειας	1 m^4	1 cm^4	1 m^4	1 ft^4

Από τη σχέση (3.9) διαπιστώνομε ότι η ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς έναν άξονα εξαρτάται από τους ακόλουθους δύο παράγοντες:

α) ***Από το εμβαδόν της επιφάνειας και***

β) ***από την κατανομή των στοιχειωδών επιφανειών.*** Συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένες είναι οι στοιχειώδεις επιφάνειες από τον άξονα γύρω από τον οποίο περιστρέφεται η επιφάνεια, τόσο πιο μεγάλη είναι και η ροπή αδράνειας της επιφάνειας.

Ειδικότερα, από τη σχέση (3.9) φαίνεται ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται περισσότερο από τη θέση των στοιχειωδών επιφανειών ως προς τον άξονα περιστροφής από ό,τι από το εμβαδόν τους, καθώς η ροπή αδράνειας εξαρτάται από το τετράγωνο των αποστάσεων.

Επίσης, πρέπει να σημειώσομε ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της ροπής αδράνειας I_x το δείκτη x που δείχνει τον άξονα ως προς τον οποίο η ροπή υπολογίζεται. Η κατανομή των στοιχειωδών επιφανειών υπολογίζεται γύρω από συγκεκριμένο άξονα. Εάν αλλάξει ο άξονας ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδράνειας τότε αλλάζουν οι αποστάσεις των στοιχειωδών επιφανειών, οι οποίες πλέον υπολογίζονται ως προς το νέο άξονα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό μίας άλλης τιμής ροπής αδράνειας ως προς το νέο άξονα.

Τέλος, σημειώνομε ότι στο πλαίσιο της Αντοχής Υλικών μας ενδιαφέρουν μόνο οι άξονες που περιέχονται στο επίπεδο της επιφάνειας. Στο εξής, όπου αναφερόμαστε σε άξονα, ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδράνειας, εννοούμε άξονα που περιέχεται στο επίπεδο της υπό εξέταση επιφάνειας.

3.6.2 Γιατί μας ενδιαφέρει η ροπή αδράνειας;

Η γνώση της ροπής αδράνειας είναι απαραίτητη για τη μελέτη της κάμψεως και του λυγισμού, τα οποία μελετούμε στα Κεφάλαια 4 και 6 αντίστοιχα. Για παράδειγμα, η ροπή αδράνειας χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον προσδιορισμό της τάσεως λειτουργίας και της παραμορφώσεως σωμάτων που καταπονούνται. Έτσι, η γνώση της ροπής αδράνειας μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές σωμάτων, ώστε αυτά να εμφανίζουν αυξημένη ροπή συγκριτικά με άλλες διατομές. Επίσης, η ροπή αδράνειας μας βοηθά να προσδιορίζομε την κατεύθυνση τοποθετήσεως μίας διατομής ως προς τη διεύθυνση των φορτίων, ώστε να εμφανίζονται στη διατομή οι μικρότερες τάσεις και άρα να προκαλείται η μικρότερη παραμόρφωση.

3.6.3 Πώς υπολογίζεται η ροπή αδράνειας;

Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.9). Καταρχήν χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιον άξονα x πρέπει να την υπολογίσομε. Έπειτα χωρίζομε την επιφάνεια Α σε μικρές επιφάνειες A_i. Στη συνέχεια βρίσκομε για κάθε μικρή επιφάνεια A_i την απόστασή της x_i από τον άξονα x και υπολογίζομε το γινόμενο της στοιχειώδους επιφάνειας A_i επί το τετράγωνο της αποστάσεως x_i. Το γινόμενο αυτό, από τον ορισμό της ροπής αδράνειας, αποτελεί τη ροπή αδράνειας της στοιχειώδους επιφάνειας A_i. Αν προσθέσομε τις ροπές όλων των στοιχειωδών επιφανειών A_i που βρίσκομε, προσδιορίζομε την ολική ροπή αδράνειας της επιφάνειας Α ως προς τον άξονα x, σύμφωνα με τη σχέση (3.9).

Ωστόσο, η ανωτέρω διαδικασία είναι επίπονη και χρονοβόρα και το σημαντικότερο χωρίς την απαιτούμενη ακρίβεια στους υπολογισμούς. Είναι προφανές ότι η ακρίβεια υπολογισμού της ροπής αδράνειας εξαρτάται από το μέγεθος των μικρών επιφανειών που χρησιμοποιούμε. Όσο πιο μικρές είναι οι επιφάνειες, στις οποίες χωρίζομε την επιφάνεια Α, τόσο πιο μεγάλη είναι η ακρίβεια της ροπής αδράνειας. Όμως, όσο πιο μικρές είναι οι επιφάνειες τόσο πιο επίπονη και χρονοβόρα γίνεται η διαδικασία, με αποτέλεσμα να γίνεται στην πράξη ανεφάρμοστη. Έτσι, αντί γι' αυτήν την επίμονη και χρονοβόρα διαδικασία, για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας χρησιμοποιούμε από τα Μαθηματικά τον Ολοκληρωτικό Λογισμό[1], η παρουσίαση του οποίου

[1] Ο Ολοκληρωτικός Λογισμός είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που έχει ως αντικείμενο τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων και τη μελέτη των ιδιοτήτων τους.

δεν αποτελεί αντικείμενο του παρόντος βιβλίου γι' αυτό και θα χρησιμοποιήσομε στη συνέχεια απευθείας τα αποτελέσματα που δίνει για τη ροπή αδράνειας.

Ειδικότερα, ο Ολοκληρωτικός Λογισμός μάς παρέχει τη ροπή αδράνειας απλών επιφανειών ως προς κάποιους συγκεκριμένους άξονες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι άξονες που διέρχονται από το κέντρο βάρους των απλών επιφανειών. Οι άξονες αυτοί ονομάζονται ***κεντροβαρικοί άξονες***. Από τους κεντροβαρικούς άξονες ιδιαίτερα σημαντικοί είναι αυτοί που αποτελούν και άξονες συμμετρίας των σχημάτων. Με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Λογισμού, οι ροπές αδράνειας παρέχονται ως απλές συναρτήσεις των χαρακτηριστικών μεγεθών των απλών σχημάτων.

Συγκεκριμένα, για τα διάφορα απλά σχήματα και για τους κεντροβαρικούς άξονές τους που έχουν ενδιαφέρον, η ροπή αδράνειας έχει ως εξής:

α) ***Ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β).

Το ορθογώνιο έχει δύο άξονες συμμετρίας (σχ. 3.6γ). Ο ένας άξονας συμμετρίας, ο άξονας x, είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και ο άλλος άξονας συμμετρίας, ο άξονας y, είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου. Και οι δύο άξονες συμμετρίας διέρχονται απ' το σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογωνίου, το οποίο για ομογενές ορθογώνιο, συμπίπτει, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, με το κέντρο βάρους του ορθογωνίου.

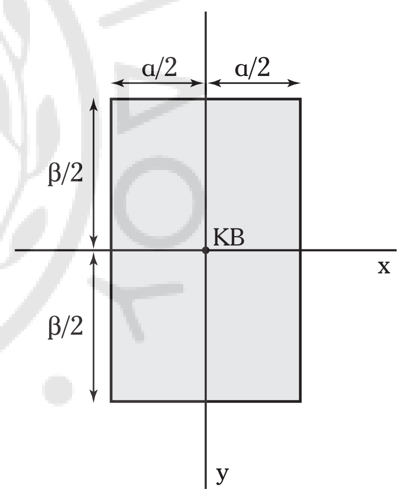
Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του δίνεται από τη σχέση:

$$I_x = \frac{\alpha \cdot \beta^3}{12} \qquad (3.10)$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του δίνεται από τη σχέση:

$$I_y = \frac{\beta \cdot \alpha^3}{12} \qquad (3.11)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.10) και (3.11) διαπιστώνομε ότι οι ροπές αδράνειας του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ροπή αδράνειας.



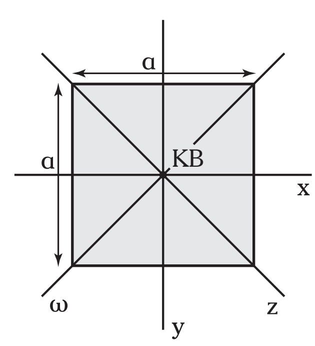
Σχ. 3.6γ.
Ορθογώνια επιφάνεια.

β) ***Τετράγωνο*** (με πλευρά α).

Το τετράγωνο έχει δύο άξονες συμμετρίας παράλληλους στις πλευρές του, τους άξονες x και y (σχ. 3.6δ). Επίσης, έχει ως άξονες συμμετρίας τους άξονες z και ω, που είναι οι δύο ευθείες των διαγωνίων του. Και οι τέσσερεις άξονες συμμετρίας διέρχονται από το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου, το οποίο για ομογενές τετράγωνο, συμπίπτει με το κέντρο βάρους του.

Οι ροπές αδράνειας του τετραγώνου ως προς οποιονδήποτε από τους τέσσερεις άξονες συμμετρίας του είναι ίσες και δίνονται από τη σχέση:

$$I_x = I_y = I_z = I_\omega = \frac{\alpha^4}{12} \qquad (3.12)$$



Σχ. 3.6δ.
Τετραγωνική επιφάνεια.

γ) ***Κύκλος*** (με διάμετρο D).

Ο κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας, οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο του (σχ. 3.6ε). Υπενθυμίζομε ότι το κέντρο του κύκλου, για ομογενή κύκλο, συμπίπτει με το κέντρο βάρους του.

Οι ροπές αδράνειας του κύκλου ως προς οποιονδήποτε από τους άξονες συμμετρίας του είναι ίσες και δίνονται από τη σχέση:

$$I_x = I_y = \ldots = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \tag{3.13}$$

δ) ***Έλλειψη*** (με μικρό ημιάξονα α και μεγάλο β).

Η έλλειψη έχει δύο άξονες συμμετρίας (σχ. 3.6στ). Ο ένας άξονας συμμετρίας, ο άξονας x, είναι η ευθεία του μεγάλου άξονα της ελλείψεως, ενώ ο άλλος, ο άξονας y, είναι η ευθεία του μικρού άξονα της ελλείψεως. Και οι δύο άξονες συμμετρίας διέρχονται από το κέντρο της ελλείψεως, το οποίο για ομογενή έλλειψη, συμπίπτει με το κέντρο βάρους της.

Η ροπή αδράνειας της ελλείψεως ως προς την ευθεία του μεγάλου άξονά της δίνεται από τη σχέση:

$$I_x = \frac{\pi \cdot \beta \cdot \alpha^3}{4} \tag{3.14}$$

Η ροπή αδράνειας της ελλείψεως ως προς την ευθεία του μικρού άξονά της δίνεται από τη σχέση:

$$I_y = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta^3}{4} \tag{3.15}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.14) και (3.15) διαπιστώνομε ότι οι ροπές αδράνειας της ελλείψεως είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας της. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ροπή αδράνειας.

ε) ***Ημικύκλιο*** (με διάμετρο D).

Το ημικύκλιο διαμέτρου D έχει άξονα συμμετρίας, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του, καθώς και από το κέντρο βάρους του και είναι κάθετος στη διάμετρό του (σχ. 3.6ζ).

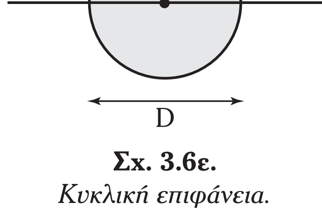
Η ροπή αδράνειας του ημικυκλίου ως προς τον ανωτέρω άξονα συμμετρίας του δίνεται από τη σχέση:

$$I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{128} \tag{3.16}$$

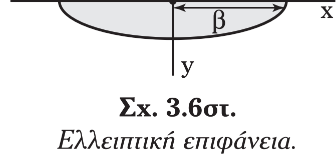
Επίσης, ένας άλλος κεντροβαρικός άξονας είναι αυτός που διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου και είναι παράλληλος στη διάμετρό του, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6ζ. Η ροπή αδράνειας του ημικυκλίου ως προς τον ανωτέρω κεντροβαρικό άξονα δίνεται από τη σχέση:

$$I_x = 0{,}006875 \cdot D^4 \tag{3.17}$$

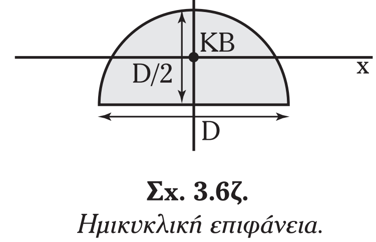
Η ***ροπή αδράνειας επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς κεντροβαρικούς άξονές τους*** παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.6.2.



Σχ. 3.6ε.
Κυκλική επιφάνεια.

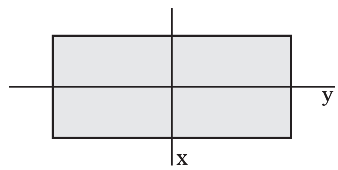
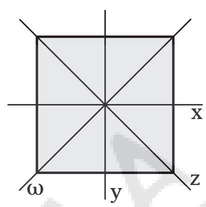
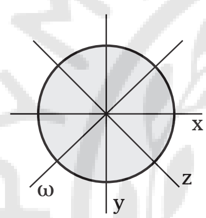
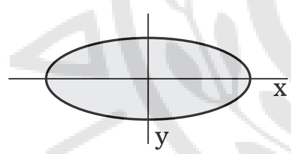
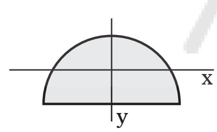


Σχ. 3.6στ.
Ελλειπτική επιφάνεια.



Σχ. 3.6ζ.
Ημικυκλική επιφάνεια.

Πίνακα 3.6.2.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Κεντροβαρικός άξονας υπολογισμού της ροπής αδράνειας***	***Ροπή αδράνειας***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Παράλληλος στη μικρή πλευρά.	$I_x = \frac{α \cdot β^3}{12}$
			Παράλληλος στη μεγάλη πλευρά.	$I_y = \frac{β \cdot α^3}{12}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Παράλληλοι στις πλευρές (δύο άξονες).	$I_x = I_y = I_z = I_ω = \frac{α^4}{12}$
			Οι ευθείες των διαγωνίων (δύο άξονες).	
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (άπειροι άξονες).	$I_x = I_y = ... = \frac{π \cdot D^4}{64}$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Η ευθεία του μεγάλου άξονα.	$I_x = \frac{π \cdot β \cdot α^3}{4}$
			Η ευθεία του μικρού άξονα.	$I_y = \frac{π \cdot α \cdot β^3}{4}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Κάθετος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου.	$I_y = \frac{π \cdot D^4}{128}$
			Παράλληλος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$I_x = 0{,}006875 \cdot D^4$

Παράδειγμα 12.

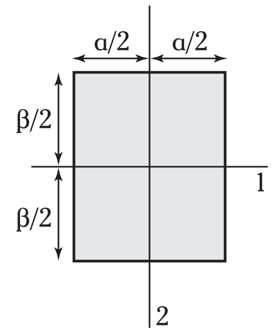
Δίνεται το ορθογώνιο του σχήματος 3.6η με πλευρές α = 4 cm και β = 5 cm. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τους ακόλουθους άξονες:

α) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

β) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Πώς σχολιάζετε τη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (α) και (β).

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\alpha = 4$ cm	$I_1 =;$
$\beta = 5$ cm	$I_2 =;$



Σχ. 3.6η.

Λύση

α) Από τον πίνακα 3.6.2 γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου I_1 ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 1) ισούται με:

$$I_1 = \frac{\alpha \cdot \beta^3}{12} = \frac{4\ \text{cm} \cdot (5\ \text{cm})^3}{12} = 41{,}67\ \text{cm}^4$$

β) Από τον πίνακα 3.6.2 γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου I_2 ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 2) ισούται με:

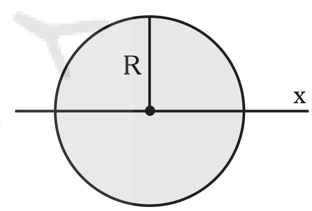
$$I_2 = \frac{\beta \cdot \alpha^3}{12} = \frac{5\ \text{cm} \cdot (4\ \text{cm})^3}{12} = 26{,}67\ \text{cm}^4$$

Επιβεβαιώνεται ότι οι ροπές αδράνειας του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του.

Παράδειγμα 13.

Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής του σχήματος 3.6θ, ώστε να παρουσιάζει ροπή αδράνειας ίση με $I_x = 12{,}56$ cm^4 ως προς τον άξονα x που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$I_x = 12{,}56$ cm^4	$R = ;$



Σχ. 3.6θ.

Λύση.

Από τον πίνακα 3.6.2 γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας του κύκλου ως προς τον άξονα x που διέρχεται από το κέντρο του δίνεται από τη σχέση $I_x = \dfrac{\pi \cdot D^4}{64}$, όπου $D = 2 \cdot R$ είναι η διάμετρος του κύκλου. Λύνοντας ως προς τη διάμετρο έχομε:

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \Leftrightarrow D^4 = \frac{64 \cdot I_x}{\pi} \Leftrightarrow D = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I_x}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 12{,}56\ \text{cm}^4}{\pi}} = 4\ \text{cm}$$

Άρα, η ακτίνα του κύκλου πρέπει να είναι

$$R = \frac{D}{2} = \frac{4\ \text{cm}}{2} = 2\ \text{cm}.$$

Ο προσδιορισμός της ροπής αδράνειας επιφανειών που έχουν σύνθετα σχήματα πραγματοποιείται με διάφορες μεθόδους, μία από τις οποίες παρουσιάζομε στην υποπαράγραφο 3.6.5.

3.6.4 Κύριοι άξονες αδράνειας και παράλληλη μετατόπιση.

Ο πίνακας 3.6.2 παρουσιάζει τη ροπή αδράνειας απλών σχημάτων ως προς κάποιους συγκεκριμένους άξονες, οι οποίοι είναι κεντροβαρικοί και στη συντριπτική πλειοψηφία τους αποτελούν άξονες συμμετρίας των σχημάτων. Αυτοί οι άξονες ονομάζονται ***κύριοι άξονες αδράνειας*** των σχημάτων αυτών.

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να προσδιορίσομε τη ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα που δεν είναι κάποιος από τους κύριους άξονες αδράνειας, αλλά τις περισσότερες φορές είναι παράλληλος κάποιου απ’ αυτούς. Απάντηση στο πρόβλημα αυτό μας δίνει η ακόλουθη ιδιότητα, η οποία είναι γνωστή ως ***Θεώρημα του Steiner***:

Αν η ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας Α ως προς έναν άξονα x είναι I_x, η ροπή αδράνειας της εν λόγω επιφάνειας ως προς έναν άξονα z που είναι παράλληλος στον άξονα x και απέχει από αυτόν απόσταση d δίνεται από τη σχέση:

$$I_z = I_x + A \cdot d^2 \tag{3.18}$$

Δηλαδή, το Θεώρημα του Steiner μας επιτρέπει να υπολογίζομε πολύ εύκολα τη ροπή αδράνειας ως προς οποιονδήποτε άξονα που είναι παράλληλος σε κάποιον απ’ τους κύριους άξονες αδράνειας, για τους οποίους η ροπή αδράνειας είναι γνωστή από πίνακες. Το παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζει την εφαρμογή του Θεωρήματος του Steiner.

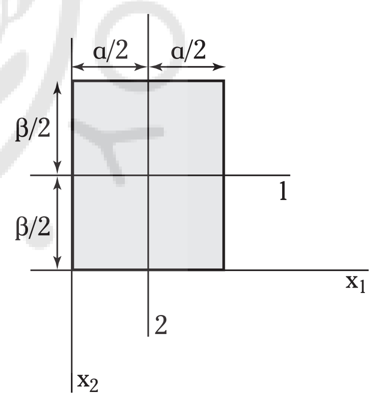
Παράδειγμα 14.

Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου του παραδείγματος 12 ως προς τους ακόλουθους άξονες:

α) Τον άξονα x_1 που συμπίπτει με τη μικρή πλευρά του ορθογωνίου, (σχ. 3.6ι).

β) Τον άξονα x_2 που συμπίπτει με τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου (σχ 3.6ι).

Πώς σχολιάζετε τη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (α) και (β) του παρόντος παραδείγματος και των ερωτημάτων (α) και (β) του παραδείγματος 12;



Σχ. 3.6ι.

Λύση.

Από το παράδειγμα 12 για τους άξονες 1 και 2 έχομε:

$$I_1 = 41{,}67\ cm^4 \text{ και } I_2 = 26{,}67\ cm^4$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ισούται με:

$$A = \alpha \cdot \beta = 4\ cm \cdot 5\ cm = 20\ cm^2$$

α) Ο άξονας x_1 είναι παράλληλος στον άξονα 1 (βλ. παράδ. 12) και απέχει από αυτόν απόσταση β/2. Έτσι, η ροπή αδράνειας I_{x_1} του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x_1 υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Steiner:

$$I_{x_1} = I_1 + A \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 41{,}67\ cm^4 + 20\ cm^2 \cdot \left(\frac{5\ cm}{2}\right)^2 = 166{,}67\ cm^4$$

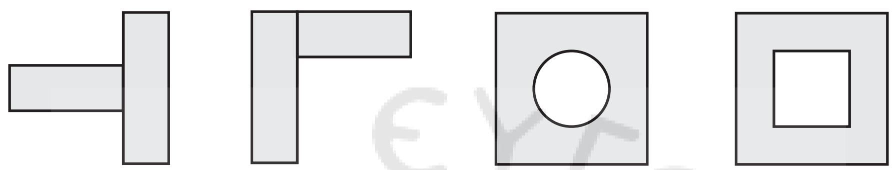
β) Ο άξονας x_2 είναι παράλληλος στον άξονα 2 και απέχει από αυτόν απόσταση α/2. Έτσι, η ροπή αδράνειας I_{x_2} του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x_2 υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Steiner:

$$I_{x_2} = I_2 + A \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 26{,}67\ cm^4 + 20\ cm^2 \cdot \left(\frac{4\ cm}{2}\right)^2 = 106{,}67\ cm^4$$

Οι τέσσερεις ροπές αδράνειας ως προς τέσσερεις διαφορετικούς άξονες που υπολογίζονται στα δύο παραδείγματα, είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τον άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται. Η επιλογή διαφορετικού άξονα οδηγεί γενικά σε διαφορετική ροπή αδράνειας.

3.6.5 Υπολογισμός ροπών αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων, όπως αυτά του σχήματος 3.6ια, στηρίζεται στην ανάλυσή τους σε απλά σχήματα (τετράγωνα, ορθογώνια κ.λπ.) και στη συνέχεια στο συνδυασμό των αποτελεσμάτων των απλών σχημάτων χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Steiner. Η ροπή αδράνειας των απλών σχημάτων ως προς τους κυρίους άξονες αδράνειάς τους είναι γνωστή.



Σχ. 3.6ια.
Παραδείγματα συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Καθένα από τα απλά σχήματα, έχει εμβαδόν A_i και ροπή αδράνειας I_i ως προς άξονα x_i, όπου ο δείκτης i = 1, 2, ..., N αριθμεί τα N απλά σχήματα από τα οποία αποτελείται το σύνθετο σχήμα. Κάθε άξονας x_i είναι παράλληλος του άξονα z ως προς τον οποίο πρέπει να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος. Εάν d_i είναι η απόσταση του άξονα x_i από τον z, η ροπή αδράνειας $I_{z,i}$ κάθε απλού σχήματος ως προς τον z δίνεται από την ακόλουθη σχέση, σύμφωνα με το Θεώρημα του Steiner:

$$I_{z,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2$$

Η ροπή αδράνειας I_z του σύνθετου σχήματος ως προς τον άξονα z προκύπτει από το άθροισμα των ροπών αδράνειας $I_{z,i}$ όλων των απλών σχημάτων. Δηλαδή ισχύει:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} I_{z,i} \Leftrightarrow I_z = \sum_{i=1}^{N} (I_i + A_i \cdot d_i^2) \qquad (3.19)$$

Η σχέση (3.19) μάς οδηγεί στην ανάπτυξη μιας ***αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων***, η οποία παρουσιάζεται στον πίνακα 3.6.3.

Πίνακας 3.6.3.

1) Χωρίζομε το σύνθετο γεωμετρικό σχήμα (σύνθετη επιφάνεια) σε απλά σχήματα (απλές επιφάνειες).
2) Υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας I_i κάθε απλού σχήματος ως προς έναν άξονά του x_i, που είναι παράλληλος στον άξονα z.
3) Υπολογίζομε την απόσταση d_i μεταξύ του άξονα x_i κάθε απλού σχήματος και του άξονα z.
4) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Steiner, υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας $I_{z,i}$ κάθε απλού σχήματος ως προς τον άξονα z.
5) Προσθέτομε τις ροπές αδράνειας $I_{z,i}$ όλων των απλών σχημάτων ως προς τον άξονα z και βρίσκομε το άθροισμά τους $\sum_{i=1}^{N} I_{z,i}$. Το άθροισμα αυτό αντιστοιχεί στη ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου διευκολύνεται σημαντικά με την καταγραφή των ενδιαμέσων αποτελεσμάτων σε πίνακα, ο οποίος έχει τη μορφή του πίνακα 3.6.4. Στον πίνακα γράφομε το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε απλού σχήματος, τη ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα x_i, την απόσταση d_i του άξονα x_i από τον z, τη ροπή αδράνειας κάθε απλού σχήματος ως προς τον άξονα z, καθώς και τα αθροίσματα που ορίζει η μέθοδος.

Πίνακας 3.6.4.
Καταγραφή αποτελεσμάτων της αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Ροπή αδράνειας απλού σχήματος I_i ως προς άξονα x_i***	***Απόσταση d_i μεταξύ αξόνων x_i και z***	$I_{z,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2$
1				
2				
3				
….				
N				
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{N} A_i$	–	–	$I_z = \sum_{i=1}^{N} I_{z,i}$

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσομε τα εξής:

α) Το σύνθετο σχήμα μπορεί να μην προκύπτει εύκολα με προσθέσεις απλών σχημάτων. Αντίθετα, μπορεί να προκύπτει πολύ πιο εύκολα με προσθέσεις και αφαιρέσεις απλών σχημάτων. Η αναλυτική μέθοδος που περιγράψαμε ανωτέρω εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή, αρκεί να θυμόμαστε ότι στις αφαιρέσεις οι ροπές αδράνειας των σχημάτων λαμβάνονται με αρνητικό πρόσημο στους υπολογισμούς.

β) Είναι πιθανό να υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι, με τους οποίους ένα σύνθετο σχήμα μπορεί να αναλυθεί σε απλά. Ωστόσο, η ροπή αδράνειας ως προς συγκεκριμένο άξονα δεν εξαρτάται από τον τρόπο αναλύσεως του σύνθετου σχήματος σε απλά. Όλοι οι τρόποι οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα για τη ροπή αδράνειας ως προς συγκεκριμένο άξονα.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου υπολογισμού της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων παρουσιάζεται αναλυτικά στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 15.

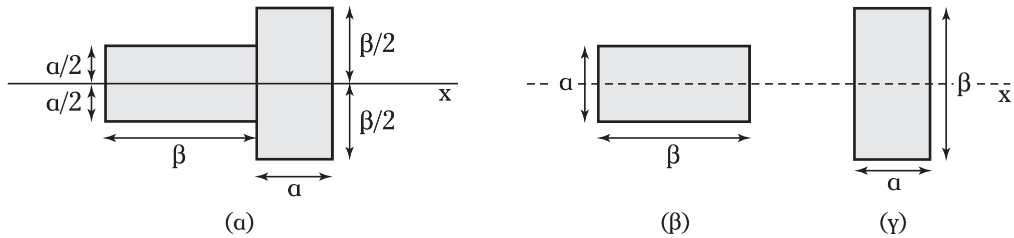
Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του σχήματος «Πλάγιο Τ» που απεικονίζεται στο σχήμα 3.6.ιβ(α), ως προς τον εικονιζόμενο άξονα x. Δίνονται α = 2 cm και β = 4 cm.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 2 cm	I_x = ;
β = 4 cm	

Λύση.

Το σχήμα «Πλάγιο Τ» είναι ένα σύνθετο σχήμα και αποτελείται από δύο ορθογώνια.

Το πρώτο απεικονίζεται στο σχήμα 3.6ιβ(β) και έχει μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β. Άρα το εμβαδόν του είναι $A_1 = α \cdot β$. Ο άξονας x είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από τον πίνακα 3.6.2 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x ισούται με $I_1 = \frac{β \cdot α^3}{12}$



Σχ. 3.6ιβ.
(α) Το σχήμα του παραδείγματος 15. (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο.

Το δεύτερο ορθογώνιο απεικονίζεται στο σχήμα 3.6ιβ(γ) και έχει μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β. Άρα το εμβαδόν του είναι $A_2 = α \cdot β$. Ο άξονας x είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από τον πίνακα 3.6.2 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x ισούται με $I_2 = \dfrac{α \cdot β^3}{12}$

Η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.6.5.

Πίνακας 3.6.5.

Απλό σχήμα	Εμβαδόν απλού σχήματος A_i	Ροπή αδράνειας απλού σχήματος I_i ως προς άξονα x_i	Απόσταση d_i μεταξύ αξόνων x_i και x	$I_{x,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2$
1	$A_1 = α \cdot β$	$I_1 = \dfrac{β \cdot α^3}{12}$	0	$I_{x,1} = \dfrac{β \cdot α^3}{12}$
2	$A_2 = α \cdot β$	$I_2 = \dfrac{α \cdot β^3}{12}$	0	$I_{x,2} = \dfrac{α \cdot β^3}{12}$
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 2 \cdot α \cdot β$	–	–	$I_x = \sum_{i=1}^{2} I_{x,i} = \dfrac{α \cdot β \cdot \left(α^2 + β^2\right)}{12}$

Σημειώνεται ότι δεν χρειάστηκε να εφαρμόσομε το Θεώρημα του Steiner, καθώς ο άξονας x ήταν κύριος άξονας αδράνειας και για τα δύο απλά σχήματα που αποτελούν το σύνθετο σχήμα «Πλάγιο Τ».

Άρα, η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος «Πλάγιο Τ» ισούται με:

$$I_x = \frac{α \cdot β \cdot \left(α^2 + β^2\right)}{12} = \frac{2\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} \cdot \left(2^2 \text{cm}^2 + 4^2 \text{cm}^2\right)}{12} = 13{,}33\ \text{cm}^4$$

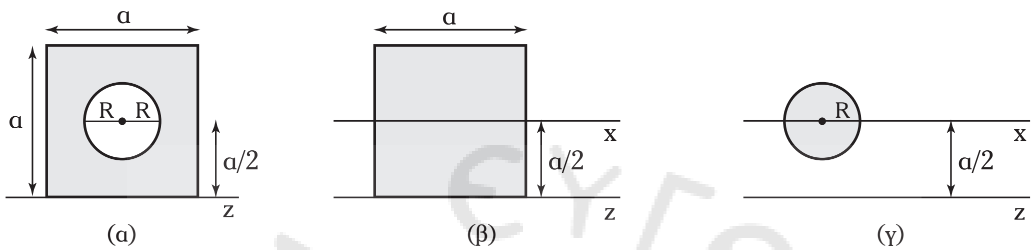
Παράδειγμα 16.

Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος που απεικονίζεται στο σχήμα 3.6ιγ(α) ως προς τον εικονιζόμενο άξονα z. Δίνονται α = 4 cm και R = 1 cm.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 4 cm	I_z = ;
R = 1 cm	

Λύση.

Το σχήμα 3.6ιγ(α) είναι ένα σύνθετο σχήμα. Προκύπτει από την αφαίρεση δύο απλών σχημάτων και συγκεκριμένα από την αφαίρεση ενός κύκλου από ένα τετράγωνο. Το τετράγωνο απεικονίζεται στο σχήμα 3.6ιγ(β) και έχει πλευρά α και εμβαδόν $A_1 = α^2$. Ο εικονιζόμενος άξονας x είναι παράλληλος στην πλευρά του τετραγώνου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του. Απ' τον πίνακα 3.6.2 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του τετραγώνου ως προς τον άξονα x ισούται με $I_{x,1} = \frac{α^4}{12}$.



Σχ. 3.6ιγ.

(α) Το σχήμα του παραδείγματος 16. (β) Το τετράγωνο. (γ) Ο κύκλος.

Ο άξονας z είναι παράλληλος στον άξονα x και απέχει απόσταση από αυτόν ίση με α/2. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Steiner υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας του τετραγώνου ως προς τον άξονα z:

$$I_{z,1} = I_{x,1} + A_1 \cdot \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \frac{α^4}{12} + α^2 \cdot \frac{α^2}{4} = \frac{α^4}{3}$$

Ο κύκλος απεικονίζεται στο σχήμα 3.6ιγ(γ) και έχει ακτίνα R (διάμετρο D = 2R) και εμβαδόν $A_2 = π \cdot R^2$. Ο άξονας x διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Από τον πίνακα 3.6.2 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του κύκλου ως προς τον άξονα x ισούται με $I_{x,2} = \frac{π \cdot D^4}{64} = \frac{π \cdot R^4}{4}$.

Ο άξονας z είναι παράλληλος στον άξονα x και απέχει απόσταση από αυτόν ίση με $\frac{α}{2} = 2\text{cm}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Steiner υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας του κύκλου ως προς τον άξονα z:

$$I_{z,2} = I_{x,2} + A_2 \cdot \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \frac{π \cdot R^4}{4} + π \cdot R^2 \cdot \frac{α^2}{4} = \frac{π \cdot R^2 \cdot (α^2 + R^2)}{4}$$

Η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.6.6.

Πίνακας 3.6.6.

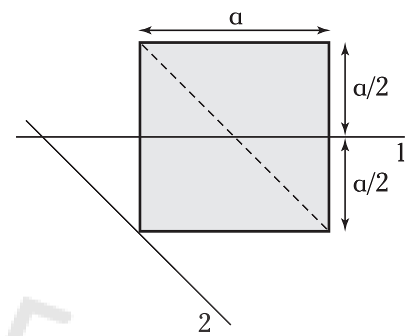
Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Ροπή αδράνειας απλού σχήματος I_i ως προς άξονα x_i***	***Απόσταση d_i μεταξύ αξόνων x_i και x***	***$I_{x,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2$***
1	$A_1 = α^2$	$I_{x,1} = \frac{α^4}{12}$	$\frac{α}{2}$	$I_{z,1} = \frac{α^4}{3}$
2	$A_2 = π \cdot R^2$	$I_{x,2} = \frac{π \cdot R^4}{4}$	$\frac{α}{2}$	$I_{z,2} = \frac{π \cdot R^2 \cdot (α^2 + R^2)}{4}$
Σύνολο	$A_1 - A_2$	–	–	$I_z = I_{z,1} - I_{z,2}$

Άρα, η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος είναι:

$$I_z = I_{z,1} - I_{z,2} = \frac{\alpha^4}{3} - \frac{\pi \cdot R^2 \cdot (\alpha^2 + R^2)}{4} = \frac{(4\ \text{cm})^4}{3} - \frac{\pi \cdot (1\ \text{cm})^2 \cdot \left((4\ \text{cm})^2 + (1\ \text{cm})^2\right)}{4} = 71{,}99\ \text{cm}^4 .$$

Ασκήσεις.

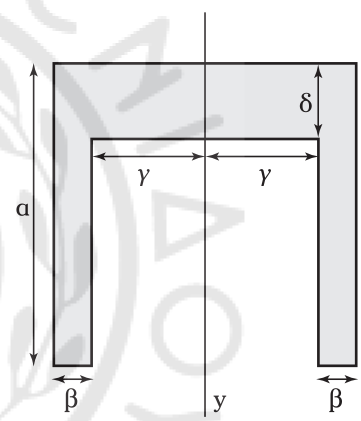
1. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας τετραγωνικής διατομής με πλευρά α = 54 mm ως προς τους ακόλουθους άξονες:*
α) Τον άξονα που διέρχεται από μία πλευρά του τετραγώνου.
β) Τον άξονα που διέρχεται από μία διαγώνιο του τετραγώνου.



Σχ. 3.6ιδ.

2. *Ποια πρέπει να είναι η πλευρά τετραγωνικής διατομής για να έχει ροπή αδράνειας ίση με Ι = 6,75 cm^4 ως προς άξονα που διέρχεται από μία πλευρά του τετραγώνου;*

3. *Ορθογώνιο έχει λόγο πλευρών β/α = 1,2. Να υπολογιστούν οι πλευρές α και β του ορθογωνίου, ώστε να έχει ροπή αδράνειας ίση με Ι = 90 cm^4 ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.*

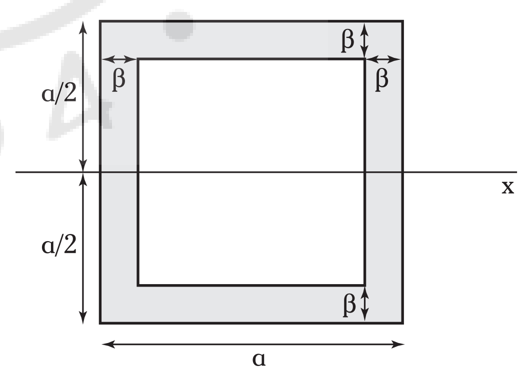


Σχ. 3.6ιε.

4. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας για την τετραγωνική διατομή της ασκήσεως 1 ως προς τους ακόλουθους άξονες που απεικονίζονται στο σχήμα 3.6ιδ:*
α) Τον άξονα που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου (άξονας 1).
β) Τον άξονα που είναι παράλληλος σε μία διαγώνιο του τετραγώνου και διέρχεται από μια κορυφή του (άξονας 2).

5. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του σύνθετου γεωμετρικού σχήματος που εικονίζεται στο σχήμα 3.6ιε ως προς τον άξονα y. Δίνονται α = 8 cm, β = 1 cm, γ = 3 cm και δ = 2 cm.*

6. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του σύνθετου γεωμετρικού σχήματος που εικονίζεται στο σχήμα 3.6ιστ ως προς τον άξονα x. Δίνονται α = 4 cm και β = 1 cm.*



Σχ. 3.6ιστ.

3.7 Ακτίνα αδράνειας.

Όπως αναφέραμε (παράγρ. 3.4), η ακτίνα αδράνειας αποτελεί μία από τις ιδιότητες των διατομών των δοκών.

Ακτίνα αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς έναν άξονα x ονομάζομε την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου της ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον άξονα x προς το εμβαδόν της.

Δηλαδή, η ακτίνα αδράνειας R_{I_x} μιας επιφάνειας με εμβαδόν Α και ροπή αδράνειας I_x ως προς έναν άξονα x παρέχεται από τη σχέση:

$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{3.20}$$

Η ακτίνα αδράνειας έχει διαστάσεις μήκους. Πρέπει να σημειώσομε ότι η ακτίνα αδράνειας εξαρτάται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδράνειάς της που εισάγεται στον αριθμητή της σχέσεως (3.20). Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της ακτίνας αδράνειας R_{I_x} το δείκτη x που δείχνει τον άξονα ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειας υπολογίζεται.

3.7.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η ακτίνα αδράνειας;

Η γνώση της ακτίνας αδράνειας είναι απαραίτητη για τη μελέτη του λυγισμού, τον οποίο παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 6. Συγκεκριμένα, η ακτίνα αδράνειας χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό του μεγέθους της λυγηρότητας μιας ράβδου. Η λυγηρότητα μας δείχνει την ευαισθησία της ράβδου στο λυγισμό και χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των τάσεων που είναι κρίσιμες για την εμφάνιση του λυγισμού (Κεφ. 6).

3.7.2 Πώς υπολογίζεται η ακτίνα αδράνειας;

Ο υπολογισμός της ακτίνας αδράνειας μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.20). Καταρχήν χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιον άξονα x πρέπει να υπολογίσομε τη ροπή αδράνειας. Έπειτα υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτό, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.6. Στη συνέχεια υπολογίζομε το εμβαδόν A της επιφάνειας. Τέλος, εφαρμόζομε τη σχέση (3.20) και υπολογίζομε την ακτίνα αδράνειας. Η παραπάνω διαδικασία ισχύει τόσο για τα απλά, όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Ειδικότερα, για τα διάφορα απλά σχήματα και για τους κεντροβαρικούς άξονές τους που αναφέραμε στον πίνακα 3.6.2, η ακτίνα αδράνειας έχει ως εξής:

α) ***Ορθογώνιο*** *(με μικρή πλευρά α και μεγάλη β).*

Το ορθογώνιο έχει εμβαδόν:

$$A = \alpha \cdot \beta \tag{3.21}$$

Η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.21) και (3.10):

$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \beta^3}{12 \cdot \alpha \cdot \beta}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\beta \tag{3.22}$$

Η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σε αυτή τις σχέσεις (3.21) και (3.11):

$$R_{I_y} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\beta \cdot \alpha^3}{12 \cdot \alpha \cdot \beta}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha \tag{3.23}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.22) και (3.23) διαπιστώνομε ότι οι ακτίνες αδράνειας του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ακτίνα αδράνειας.

β) ***Τετράγωνο*** *(με πλευρά α).*

Το τετράγωνο έχει εμβαδόν:

$$A = \alpha^2 \tag{3.24}$$

Η ακτίνα αδράνειας του τετραγώνου ως προς τους άξονες συμμετρίας που είναι παράλληλοι στις πλευρές του και ως προς τους άξονες που είναι οι ευθείες των διαγωνίων του δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.24) και (3.12):

$$R_{I_x} = R_{I_y} = R_{I_z} = R_{I_\omega} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\alpha^4}{12 \cdot \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha \tag{3.25}$$

γ) ***Κύκλος*** *(με διάμετρο D).*

Ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$A = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \tag{3.26}$$

Η ακτίνα αδράνειας του κύκλου ως προς τους άξονες συμμετρίας που διέρχονται από το κέντρο του δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σε αυτή τις σχέσεις (3.26) και (3.13):

$$R_{I_x} = R_{I_y} = \ldots = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}} = \frac{1}{4}D \tag{3.27}$$

δ) ***Έλλειψη*** *(με μικρό ημιάξονα α και μεγάλο β).*

Η έλλειψη έχει εμβαδόν:

$$A = \pi \cdot \alpha \cdot \beta \tag{3.28}$$

Η ακτίνα αδράνειας της ελλείψεως ως προς την ευθεία του μεγάλου άξονά της δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.28) και (3.14):

$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot \beta \cdot \alpha^3}{4}}{\pi \cdot \alpha \cdot \beta}} = \frac{\alpha}{2} \tag{3.29}$$

Η ακτίνα αδράνειας της ελλείψεως ως προς την ευθεία του μικρού άξονά της δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.28) και (3.15):

$$R_{I_y} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta^3}{4}}{\pi \cdot \alpha \cdot \beta}} = \frac{\beta}{2} \tag{3.30}$$

ε) ***Ημικύκλιο*** *(με διάμετρο D).*

Το ημικύκλιο έχει εμβαδόν:

$$A = \pi \cdot \frac{D^2}{8} \tag{3.31}$$

Η ακτίνα αδράνειας του ημικυκλίου ως προς τον άξονα συμμετρίας, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στη διάμετρό του δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.31) και (3.16):

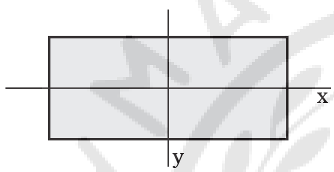
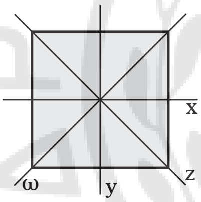
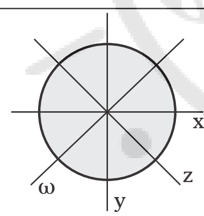
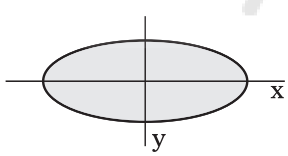
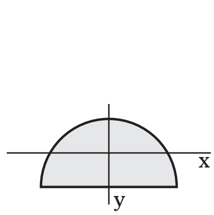
$$R_{I_y} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot D^4}{128}}{\frac{\pi \cdot D^2}{8}}} = \frac{1}{4}D \tag{3.32}$$

Η ακτίνα αδράνειας του ημικυκλίου ως προς τον άξονα συμμετρίας, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου και είναι παράλληλος στη διάμετρό του δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (3.31) και (3.17):

$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}006875 \cdot D^4}{\frac{\pi \cdot D^2}{8}}} = 0{,}1323 \cdot D \tag{3.33}$$

Η ***ροπή αδράνειας επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς κεντροβαρικούς άξονές*** τους συνοπτικά παρουσιάζεται στον πίνακα 3.7.

Πίνακα 3.7.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Κεντροβαρικός άξονας υπολογισμού της ακτίνας αδράνειας***	***Ακτίνα αδράνειας***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Παράλληλος στη μικρή πλευρά.	$R_{I_x} = \frac{1}{\sqrt{12}}\beta$
			Παράλληλος στη μεγάλη πλευρά.	$R_{I_y} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Παράλληλοι στις πλευρές (δύο άξονες).	$R_{I_x} = R_{I_y} =$ $= R_{I_z} = R_{I_\omega} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha$
			Οι ευθείες των διαγωνίων (δύο άξονες).	
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (άπειροι άξονες).	$R_{I_x} = R_{I_y} = \dots = \frac{D}{4}$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Η ευθεία του μεγάλου άξονα.	$R_{I_x} = \frac{\alpha}{2}$
			Η ευθεία του μικρού άξονα.	$R_{I_y} = \frac{\beta}{2}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Κάθετος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου.	$R_{I_y} = \frac{1}{4}D$
			Παράλληλος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$R_{I_x} = 0{,}1323 \cdot D$

Παράδειγμα 17.

Να υπολογιστεί η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου του παραδείγματος 12 ως προς τους ακόλουθους άξονες:

α) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

β) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Πώς σχολιάζετε τη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (α) και (β);

Λύση.

α) Από τον πίνακα 3.7 έχομε ότι η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου R_{I_1} ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του και διέρχεται απ' το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 1) ισούται με:

$$R_{I_1} = \frac{1}{\sqrt{12}}\beta = \frac{1}{\sqrt{12}}5 \text{ cm} = 1{,}44 \text{ cm}$$

β) Από τον πίνακα 3.7 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου R_{I_2} ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 2) ισούται με:

$$R_{I_2} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot 4 \text{ cm} = 1{,}15 \text{ cm}$$

Οι ακτίνες αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τους δύο άξονες συμμετρίας του είναι διαφορετικές γιατί υπολογίζονται ως προς διαφορετικούς άξονες συμμετρίας.

Παράδειγμα 18.

Για το σχήμα «Πλάγιο Τ» του παραδείγματος 15 να υπολογίσετε την ακτίνα αδράνειάς του ως προς τον άξονα x (σχ. 3.6ιβ).

Λύση.

Από το παράδειγμα 15 γνωρίζομε ότι το εμβαδόν του σύνθετου σχήματος «Πλάγιο Τ» ισούται με $A = 2 \cdot \alpha \cdot \beta = 2 \cdot 2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$ και η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα x ισούται με $I_x = 13{,}33 \text{ cm}^4$. Συνεπώς, η ακτίνα αδράνειας του σχήματος ως προς τον άξονα x ισούται με:

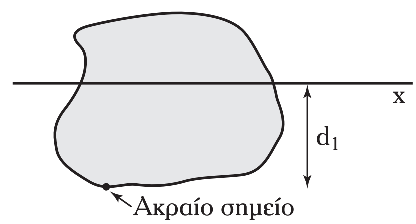
$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{13{,}33 \text{ cm}^4}{16 \text{ cm}^2}} = 0{,}91 \text{ cm}.$$

3.8 Ροπή αντιστάσεως.

Όπως αναφέραμε (παράγρ. 3.4), η ροπή αντιστάσεως αποτελεί μία ακόμη από τις ιδιότητες των διατομών των δοκών.

Ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας ως προς άξονα x ονομάζομε το πηλίκον της ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς το συγκεκριμένο άξονα προς την απόσταση των ακραίων σημείων της επιφάνειας από τον εν λόγω άξονα.

Ας θεωρήσομε την επιφάνεια του σχήματος 3.8α και τον άξονα x. Στο σχήμα απεικονίζεται η απόσταση d_1 του ακραίου σημείου της επιφάνειας από τον άξονα x.



Σχ. 3.8α.

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς τον άξονα x, $W_{x,1}$ της επιφάνειας του σχήματος 3.8α με ροπή αδράνειας I_x (ως προς τον άξονα x), παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W_{x,1} = \frac{I_x}{d_1} \tag{3.34}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της ροπής αντιστάσεως*** παρέχονται στον πίνακα 3.8.1.

Πίνακας 3.8.1.

Μέγεθος	***Διεθνές Σύστημα***	***C.G.S.***	***Τεχνικό Σύστημα***	***Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα***
Ροπή αντιστάσεως	1 m^3	1 cm^3	1 m^3	1 ft^3

Πρέπει να σημειώσομε ότι η ροπή αντιστάσεως εξαρτάται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι αφενός η ροπή αδράνειας που εισάγεται στον αριθμητή της σχέσεως (3.34) και αφετέρου η απόσταση των ακραίων σημείων που εισάγεται στον παρονομαστή της σχέσεως (3.34) εξαρτώνται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζονται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της ροπής αντιστάσεως το δείκτη x που δείχνει τον άξονα ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειας και οι αποστάσεις των ακραίων σημείων υπολογίζονται.

Στην περίπτωση που έχομε δύο ακραία σημεία ($d_1 = d_2 = d$), η ροπή αντιστάσεως είναι:

$$W_{x,1} = W_{x,2} = \frac{I_x}{d} \tag{3.35}$$

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι το πλήθος των ακραίων σημείων μίας επιφάνειας εξαρτάται από το είδος της επιφάνειας. Τα ακραία σημεία μπορεί να είναι ένα ή δύο ή περισσότερα ή ακόμη και άπειρα, όπως θα δούμε παρακάτω, ανάλογα με την επιφάνεια.

3.8.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η ροπή αντιστάσεως;

Η γνώση της ροπής αντιστάσεως είναι απαραίτητη για τη μελέτη των καταπονήσεων σωμάτων, τις οποίες παρουσιάζομε στα Κεφάλαια 4 και 7. Για παράδειγμα, η ροπή αντιστάσεως χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό των τάσεων λειτουργίας, καθώς και των παραμορφώσεων των σωμάτων που καταπονούνται σε κάμψη. Έτσι, η γνώση της ροπής αντιστάσεως μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές σωμάτων, ώστε αυτά να αντέχουν καταπονούμενα σε κάμψη και να υφίστανται τις μικρότερες παραμορφώσεις κατά την καταπόνησή τους (βλ. Κεφ. 4 και 7).

3.8.2 Πώς υπολογίζεται η ροπή αντιστάσεως;

Ο υπολογισμός της ροπής αντιστάσεως μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.34). Καταρχήν χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιον άξονα x πρέπει να υπολογίσομε τη ροπή αδράνειας. Έπειτα υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον άξονα αυτό, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.6. Στη συνέχεια υπολογίζομε τις αποστάσεις των ακραίων σημείων της επιφάνειας από τον άξονα x. Τέλος, εφαρμόζομε τη σχέση (3.34) και υπολογίζομε τη ροπή αντιστάσεως. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται τόσο για τα απλά όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Ειδικότερα, για τα διάφορα απλά σχήματα και για τους κεντροβαρικούς άξονές τους που αναφέραμε στον πίνακα 3.6.2, η ροπή αντιστάσεως έχει ως εξής:

α) ***Ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη β).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8β, τα ακραία σημεία του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του, είναι όλα τα σημεία των μικρών πλευρών του. Οι αποστάσεις τους από τον εν λόγω άξονα είναι:

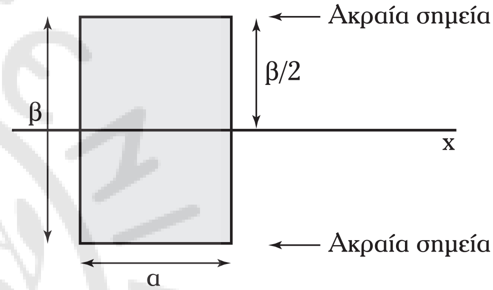
$$d_1 = d_2 = \frac{\beta}{2} \tag{3.36}$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς τον άξονα αυτό δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (3.36) και (3.10):

$$W_{x,1} = W_{x,2} = ... = \frac{I_x}{d_1} = \frac{\frac{\alpha \cdot \beta^3}{12}}{\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{6}\alpha \cdot \beta^2 \tag{3.37}$$

Ομοίως, τα ακραία σημεία του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του, είναι όλα τα σημεία των μεγάλων πλευρών του. Οι αποστάσεις τους από τον εν λόγω άξονα είναι:

$$d_1 = d_2 = \frac{\alpha}{2} \tag{3.38}$$



Σχ. 3.8β.
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του ορθογωνίου από τον άξονα x.

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς τον άξονα αυτό δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.38) και (3.11):

$$W_{y,1} = W_{y,2} = ... = \frac{I_y}{d_1} = \frac{\frac{\beta \cdot \alpha^3}{12}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6}\beta \cdot \alpha^2 \tag{3.39}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.38) και (3.39) διαπιστώνομε ότι οι ροπές αντιστάσεως του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ροπή αντιστάσεως.

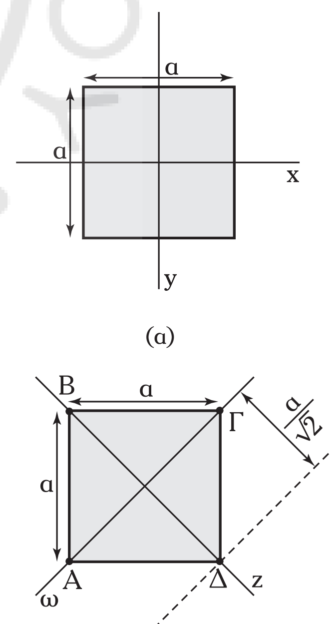
β) ***Τετράγωνο*** (με πλευρά α).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8γ(α), τα ακραία σημεία του τετραγώνου ως προς καθέναν από τους δύο άξονες συμμετρίας που είναι παράλληλοι στις πλευρές του, είναι όλα τα σημεία των πλευρών του, οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα που εξετάζομε. Οι αποστάσεις των ακραίων αυτών σημείων από καθέναν απ' τους εν λόγω άξονες είναι:

$$d_1 = d_2 = \frac{\alpha}{2} \tag{3.40}$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς καθέναν απ' τους δύο αυτούς άξονες δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.40) και (3.12):

$$W_{x,1} = W_{x,2} = ... = W_{y,1} = W_{y,2} = ... = \frac{I_x}{d_1} = \frac{\frac{\alpha^4}{12}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6}\alpha^3 \tag{3.41}$$



(β)

Σχ. 3.8γ.
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του τετραγώνου. (α) Από τους άξονες x και y. (β) Από τους άξονες z και ω.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8γ(β), τα ακραία σημεία του τετραγώνου ως προς καθέναν από τους δύο άξονες συμμετρίας που είναι οι ευθείες των διαγωνίων του, είναι οι κορυφές του τετραγώνου που βρίσκονται απέναντι από τον άξονα που εξετάζομε. Οι αποστάσεις των ακραίων αυτών σημείων από καθέναν απ' τους εν λόγω άξονες είναι:

$$d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{2}\cdot\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \tag{3.42}$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς καθέναν απ' τους δύο αυτούς άξονες δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.42) και (3.12):

$$W_{z,1} = W_{z,2} = W_{\omega,1} = W_{\omega,2} = \frac{I_z}{d_1} = \frac{\dfrac{\alpha^4}{12}}{\dfrac{\sqrt{2}\cdot\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 6}\alpha^3 \tag{3.43}$$

γ) ***Κύκλος*** (διαμέτρου D).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8δ, τα ακραία σημεία του κύκλου ως προς οποιονδήποτε από τους άξονες συμμετρίας που διέρχονται από το κέντρο του είναι τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου Α και Β, δηλαδή τα σημεία στα οποία τέμνει τον κύκλο η κάθετος στον άξονα που εξετάζομε και διέρχεται από το κέντρο του. Οι αποστάσεις των ακραίων αυτών σημείων από καθέναν απ' τους εν λόγω άξονες είναι:

$$d_1 = d_2 = \frac{D}{2} \tag{3.44}$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς καθέναν από τους άξονες αυτούς δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.44) και (3.13):

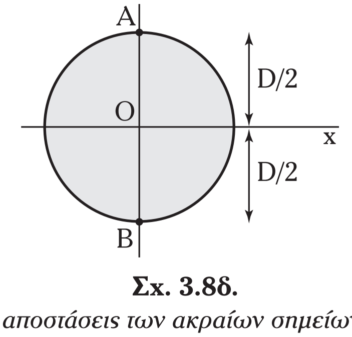
$$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \frac{I_x}{d_1} = \frac{\dfrac{\pi\cdot D^4}{64}}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi}{32}D^3 \tag{3.45}$$

δ) ***Έλλειψη*** (με μικρό ημιάξονα α και μεγάλο β).

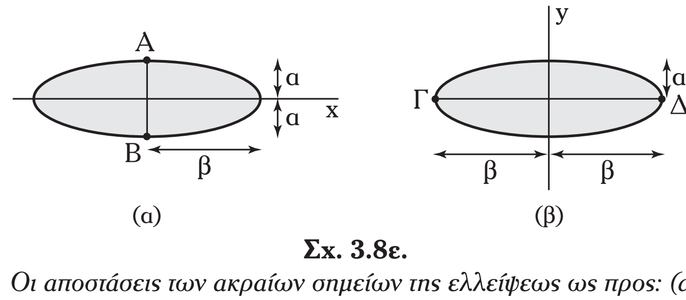
Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8ε(α), τα ακραία σημεία της ελλείψεως ως προς την ευθεία του μεγάλου άξονά της είναι τα σημεία της περιφέρειάς της Α και Β, δηλαδή τα σημεία στα οποία τέμνει την έλλειψη η κάθετος στο μεγάλο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Οι αποστάσεις των ακραίων αυτών σημείων απ' τον εν λόγω άξονα είναι:

$$d_1 = d_2 = \frac{\alpha}{2} \tag{3.46}$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς την ευθεία του μεγάλου άξονα της ελλείψεως δίνεται από



Σχ. 3.8δ.
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του κύκλου ως προς τους άξονες συμμετρίας.



Σχ. 3.8ε.
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων της ελλείψεως ως προς: (α) Το μεγάλο άξονα. (β) Το μικρό άξονα.

τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.46) και (3.14):

$$W_{x,1} = W_{x,2} = \frac{I_x}{d_1} = \frac{\dfrac{\pi \cdot \beta \cdot \alpha^3}{4}}{\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\pi}{8}\ \beta \cdot \alpha^2 \tag{3.47}$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8ε(β), τα ακραία σημεία της ελλείψεως ως προς την ευθεία του μικρού άξονά της είναι τα σημεία της περιφέρειάς της Γ και Δ, δηλαδή τα σημεία στα οποία τέμνει την έλλειψη η κάθετος στο μικρό άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Οι αποστάσεις των ακραίων αυτών σημείων απ' τον εν λόγω άξονα είναι:

$$d_1 = d_2 = \frac{\beta}{2} \tag{3.48}$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς την ευθεία του μικρού άξονα της ελλείψεως δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.48) και (3.15):

$$W_{y,1} = W_{y,2} = \frac{I_y}{d_1} = \frac{\dfrac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta^3}{4}}{\dfrac{\beta}{2}} = \frac{\pi}{8}\alpha \cdot \beta^2 \tag{3.49}$$

ε) ***Ημικύκλιο*** (διαμέτρου D).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8στ(α), τα ακραία σημεία του ημικυκλίου ως προς τον άξονα συμμετρίας, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στη διάμετρο του ημικυκλίου είναι τα σημεία της περιφέρειάς του Α και Β, δηλαδή τα άκρα της διαμέτρου του. Οι αποστάσεις των ακραίων αυτών σημείων απ' τον εν λόγω άξονα είναι:

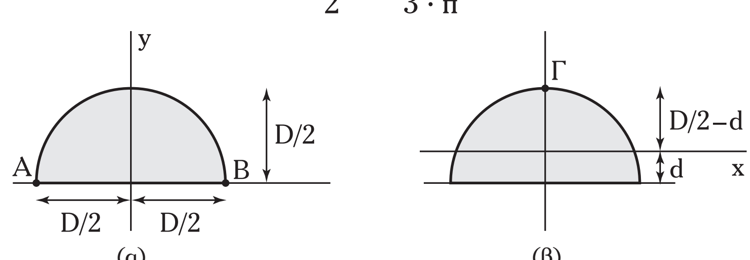
$$d_1 = d_2 = \frac{D}{2} \tag{3.50}$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς τον εν λόγω άξονα δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.50) και (3.16):

$$W_{y,1} = W_{y,2} = \frac{I_y}{d_1} = \frac{\dfrac{\pi \cdot D^4}{128}}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi}{64}\ D^3 \tag{3.51}$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8στ(β), το ακραίο σημείο του ημικυκλίου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου και είναι παράλληλος στη διάμετρό του, είναι το σημείο της περιφέρειάς του Γ. Η απόστασή του από τον εν λόγω άξονα είναι:

$$d_1 = \frac{D}{2} - \frac{2 \cdot D}{3 \cdot \pi} \tag{3.52}$$



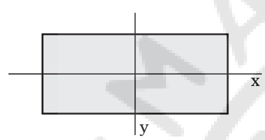
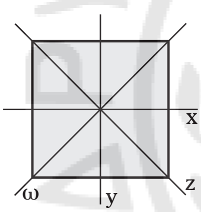
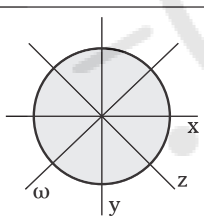
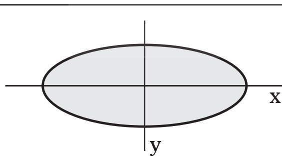
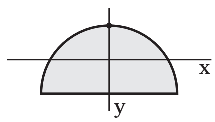
Σχ. 3.8στ.
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του ημικυκλίου ως προς: (α) Τον άξονα y. (β) Τον άξονα x.

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως του ημικυκλίου ως προς τον εν λόγω άξονα δίνεται από τη σχέση (3.34), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.52) και (3.17):

$$W_{x,1} = \frac{I_x}{d_1} = \frac{0{,}006875 \cdot D^4}{\frac{D}{2} - \frac{2 \cdot D}{3\pi}} = 0{,}02390 \cdot D^3 \qquad (3.53)$$

Η ***ροπή αντιστάσεως επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς κεντροβαρικούς άξονές τους*** παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.8.2.

Πίνακας 3.8.2.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Κεντροβαρικός άξονας υπολογισμού της ροπής αντιστάσεως***	***Ροπή αντιστάσεως***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Παράλληλος στη μικρή πλευρά.	$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = \frac{\alpha \cdot \beta^2}{6}$
			Παράλληλος στη μεγάλη πλευρά.	$W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \frac{\beta \cdot \alpha^2}{6}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Παράλληλοι στις πλευρές (δύο άξονες).	$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \frac{\alpha^3}{6}$
			Οι ευθείες των διαγωνίων (δύο άξονες).	$W_{z,1} = W_{z,2} = W_{\omega,1} = W_{\omega,2} = \frac{\alpha^3}{6\sqrt{2}}$
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (άπειροι άξονες).	$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \frac{\pi}{32} D^3$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Η ευθεία του μεγάλου άξονα.	$W_{x,1} = W_{x,2} = \frac{\pi}{8} \beta \cdot \alpha^2$
			Η ευθεία του μικρού άξονα.	$W_{y,1} = W_{y,2} = \frac{\pi}{8} \alpha \cdot \beta^2$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Κάθετος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου.	$W_{y,1} = W_{y,2} = \frac{\pi}{64} D^3$
			Παράλληλος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$W_{x,1} = 0{,}02390 \cdot D^3$

Παράδειγμα 19.

Να υπολογιστεί η ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου του παραδείγματος 12 (πλευρές α = 4 cm και β = 5 cm) ως προς τους ακόλουθους άξονες:

α) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 1).

β) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 2).

Λύση.

α) Από τον πίνακα 3.8.2 έχομε ότι η ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς τον άξονα 1 ισούται με:

$$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = \frac{\alpha \cdot \beta^2}{6} = \frac{4\ \text{cm} \cdot 5^2 \text{cm}^2}{6} = 16{,}67\ \text{cm}^3$$

β) Από τον πίνακα 3.8.2 έχομε ότι η ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς τον άξονα 2 ισούται με:

$$W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \frac{\beta \cdot \alpha^2}{6} = \frac{5\ \text{cm} \cdot 4^2 \text{cm}^2}{6} = 13{,}33\ \text{cm}^3$$

Παρατηρούμε ότι οι ροπές αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς τους δύο άξονες συμμετρίας του είναι διαφορετικές.

Ασκήσεις.

1. *Να υπολογίσετε την ακτίνα αδράνειας και τη ροπή αντιστάσεως της τετραγωνικής διατομής της ασκήσεως 1 της παραγράφου 3.6 ως προς τους άξονες που αναφέρονται στην ίδια άσκηση.*

2. *Να υπολογίσετε την ακτίνα αδράνειας και τη ροπή αντιστάσεως του συνθέτου σχήματος της ασκήσεως 5 της παραγράφου 3.6 ως προς τον άξονα που αναφέρεται στην ίδια άσκηση.*

3. *Να υπολογίσετε την ακτίνα αδράνειας και τη ροπή αντιστάσεως του συνθέτου σχήματος της ασκήσεως 6 της παραγράφου 3.6 ως προς τον άξονα που αναφέρεται στην ίδια άσκηση.*

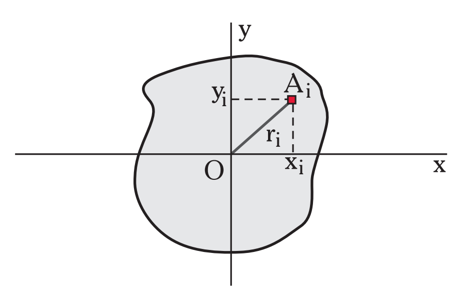
3.9 Πολική ροπή αδράνειας.

Όπως αναφέραμε (παράγρ. 3.4), η πολική ροπή αδράνειας αποτελεί μία ακόμη από τις ιδιότητες των διατομών των δοκών. Ας θεωρήσομε την επιφάνεια του σχήματος 3.9α και το σημείο Ο, στο οποίο τέμνονται οι κάθετοι άξονες x και y. Η επιφάνεια αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες A_i που απέχουν απόσταση r_i από το σημείο Ο, που ονομάζεται πόλος.

Πολική ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς ένα σημείο Ο ονομάζομε το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών επιφανειών που απαρτίζουν την επιφάνεια επί το τετράγωνο της αποστάσεως των στοιχειωδών επιφανειών από το σημείο Ο.

Δηλαδή η πολική ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς το σημείο Ο παρέχεται από τη σχέση $I_O = \sum_i A_i \cdot r_i^2$. Όμως ισχύει ότι $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Επειδή $I_x = \sum_i A_i \cdot x_i^2$ και $I_y = \sum_i A_i \cdot y_i^2$ οι ροπές αδράνειας της επιφάνειας ως προς τους άξονες x και y που τέμνονται στο σημείο Ο, η πολική ροπή αδράνειας I_O της επιφάνειας παρέχεται από τη σχέση:

$$I_O = I_x + I_y \tag{3.54}$$



Σχ. 3.9α.
Επιφάνεια και το σημείο τομής Ο των αξόνων x και y.

Οι ***μονάδες μετρήσεως της πολικής ροπής αδράνειας*** παρέχονται στον πίνακα 3.9.1.

Πίνακας 3.9.1.

Μέγεθος	***Διεθνές Σύστημα***	***C.G.S.***	***Τεχνικό Σύστημα***	***Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα***
Πολική ροπή αδράνειας	1 m^4	1 cm^4	1 m^4	1 ft^4

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η πολική ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη θέση του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της πολικής ροπής αδράνειας I_O το δείκτη Ο που δείχνει το σημείο, ως προς το οποίο υπολογίζεται. Εάν αλλάξει το σημείο, αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό μιας άλλης τιμής πολικής ροπής αδράνειας ως προς το νέο σημείο.

Τέλος, σημειώνομε ότι στο πλαίσιο της Αντοχής Υλικών μάς ενδιαφέρουν μόνο τα σημεία που περιέχονται στο επίπεδο των διατόμων. Στο εξής, όπου αναφερόμαστε σε σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται η πολική ροπή αδράνειας εννοούμε σημείο που περιέχεται στο επίπεδο της υπό εξέταση διατομή.

3.9.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η πολική ροπή αδράνειας;

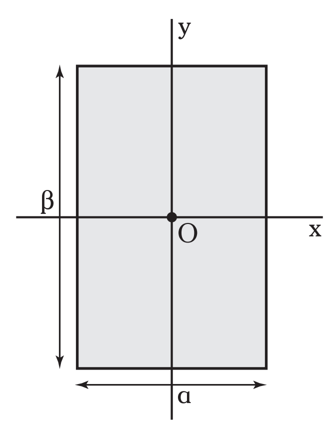
Η γνώση της πολικής ροπής αδράνειας είναι απαραίτητη για τη μελέτη των καταπονήσεων σωμάτων σε στρέψη, τις οποίες παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 5. Συγκεκριμένα, η πολική ροπή αδράνειας χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό των μεγίστων τάσεων λειτουργίας, καθώς και των παραμορφώσεων των σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη. Έτσι, η γνώση της πολικής ροπής αδράνειας μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές των σωμάτων, ώστε αυτά να αντέχουν καταπονούμενα σε στρέψη και να υφίστανται τις μικρότερες παραμορφώσεις κατά την καταπόνησή τους (βλ. Κεφ. 5).

3.9.2 Πώς υπολογίζεται η πολική ροπή αδράνειας;

Ο υπολογισμός της πολικής ροπής αδράνειας μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.54). Καταρχήν χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιο σημείο Ο πρέπει να την υπολογίσομε. Έπειτα προσδιορίζομε τους άξονες x και y που τέμνονται στο σημείο Ο και είναι κάθετοι μεταξύ τους. Ακολούθως υπολογίζομε τις ροπές αδράνειας I_x και I_y της επιφάνειας ως προς τους άξονες x και y, σύμφωνα με όσα αναφέρομε στην παράγραφο 3.6. Τέλος, υπολογίζομε την πολική ροπή αδράνειας προσθέτοντας τις δύο ροπές αδράνειας που υπολογίσαμε, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.54). Η ανωτέρω διαδικασία εφαρμόζεται τόσο για τα απλά όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον υπολογισμό της πολικής ροπής αδράνειας παρουσιάζουν τα σημεία που αποτελούν το κέντρο βάρους των απλών σχημάτων. Τα σημεία αυτά είναι προφανώς σημεία τομείς των κεντροβαρικών αξόνων ως προς τους οποίους έχομε υπολογίσει τη ροπή αδράνειας (βλ. υποπαράγρ. 3.6.3). Επίσης, στις περισσότερες περιπτώσεις τα σημεία αυτά είναι και σημεία συμμετρίας των απλών σχημάτων. Οι πολικές ροπές αδράνειας παρέχονται ως απλές συναρτήσεις των χαρακτηριστικών μεγεθών των απλών σχημάτων.

Ειδικότερα, η πολική ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο βάρους τους για τα διάφορα απλά σχήματα, έχει ως εξής:



Σχ. 3.9β.
Σημείο τομής Ο των διαγωνίων ορθογώνιας επιφάνειας.

α) ***Ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη β).

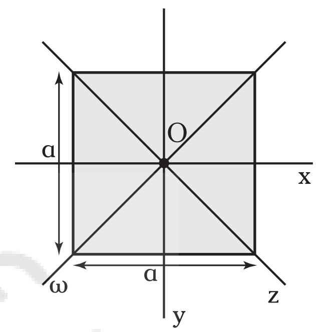
Το σχήμα 3.9β παρουσιάζει το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου, το οποίο για ομογενές ορθογώνιο, συμπίπτει, όπως έχομε δει, με το κέντρο βάρους του. Η πολική ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.54) αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.10) και (3.11):

$$I_O = I_x + I_y = \frac{\alpha \cdot \beta^3}{12} + \frac{\beta \cdot \alpha^3}{12} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{12} \qquad (3.55)$$

β) ***Τετράγωνο*** (με πλευρά α).

Το σχήμα 3.9γ παρουσιάζει το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του τετραγώνου, το οποίο για ομογενές τετράγωνο, συμπίπτει, όπως έχουμε δει, με το κέντρο βάρους του. Η πολική ροπή αδράνειας του τετραγώνου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.54) αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη σχέση (3.12):

$$I_O = I_x + I_y = I_z + I_w = \frac{\alpha^4}{12} + \frac{\alpha^4}{12} = \frac{\alpha^4}{6} \qquad (3.56)$$

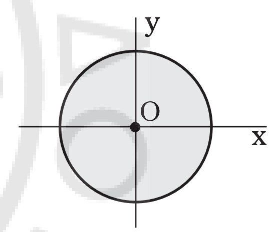


Σχ. 3.9γ.
Σημείο τομής Ο των διαγωνίων τετραγωνικής επιφάνειας.

γ) ***Κύκλος*** (με διάμετρο D).

Το σχήμα 3.9δ παρουσιάζει κυκλική επιφάνεια με κέντρο Ο, το οποίο για ομογενή κύκλο, συμπίπτει, όπως έχομε δει, με το κέντρο βάρους του. Η πολική ροπή αδράνειας του κύκλου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.54) αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη σχέση (3.13):

$$I_O = I_x + I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} + \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \qquad (3.57)$$

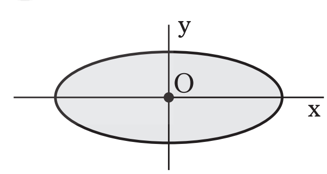


Σχ. 3.9δ.
Κυκλική επιφάνεια με κέντρο Ο.

δ) ***Έλλειψη*** (με μικρό ημιάξονα α και μεγάλο β).

Το σχήμα 3.9ε παρουσιάζει επιφάνεια ελλείψεως με κέντρο Ο, το οποίο για ομογενή έλλειψη, συμπίπτει, όπως έχομε δει, με το κέντρο βάρους της. Η πολική ροπή αδράνειας της ελλείψεως ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.54) αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.14) και (3.15):

$$I_O = I_x + I_y = \frac{\pi \cdot \beta \cdot \alpha^3}{4} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta^3}{4} = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{4} \qquad (3.58)$$

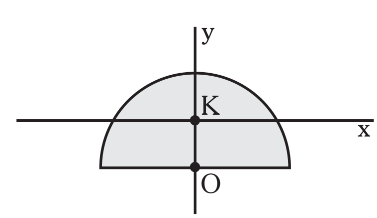


Σχ. 3.9ε.
Ελλειπτική επιφάνεια με κέντρο Ο.

ε) ***Ημικύκλιο*** (με διάμετρο D).

Το σχήμα 3.9στ παρουσιάζει επιφάνεια ημικυκλίου με κέντρο Ο και κέντρο βάρους (για ομογενές ημικύκλιο) Κ. Η πολική ροπή αδράνειας του ημικυκλίου ως προς το σημείο Κ δίνεται από τη σχέση (3.54) αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.16) και (3.17):

$$I_K = I_x + I_y = 0{,}006875 \cdot D^4 + \frac{\pi \cdot D^4}{128} = 0{,}0314 \cdot D^4 \qquad (3.59)$$

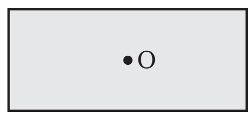
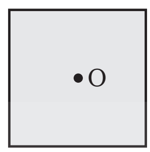
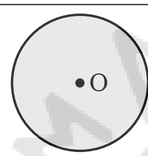
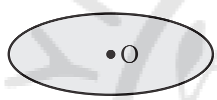
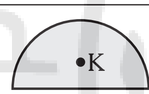


Σχ. 3.9στ.
Επιφάνεια ημικυκλίου με κέντρο Ο και κέντρο βάρους Κ.

Η πολική ροπή αδράνειας επιφανειών που έχουν

απλά σχήματα ως προς το κέντρο βάρους τους παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.9.2.

Πίνακας 3.9.2.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Σημείο υπολογισμού της πολικής ροπής αδράνειας***	***Πολική ροπή αδράνειας***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Σημείο τομής των διαγωνίων.	$I_O = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2+\beta^2)}{12}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Σημείο τομής των διαγωνίων.	$I_O = \frac{\alpha^4}{6}$
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Το κέντρο του κύκλου.	$I_O = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Το κέντρο της ελλείψεως.	$I_O = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2+\beta^2)}{4}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$I_K = 0{,}0314 \cdot D^4$

Παράδειγμα 20.

Να υπολογιστεί η πολική ροπή αδράνειας του ορθογωνίου του παραδείγματος 12 (πλευρές α = 4 cm και β = 5 cm) ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του O.

Λύση.

Από τον πίνακα 3.9.2 γνωρίζομε ότι η πολική ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του ισούται με:

$$I_O = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2+\beta^2)}{12} = \frac{4\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} \cdot (4^2\text{cm}^2 + 5^2\text{cm}^2)}{12} = 68{,}33\ \text{cm}^4 .$$

3.10 Πολική ροπή αντιστάσεως.

Όπως αναφέραμε (παράγρ. 3.4), η πολική ροπή αντιστάσεως αποτελεί μία ακόμη από τις ιδιότητες των διατομών των δοκών. Η πολική ροπή αντιστάσεως ορίζεται κατ' αναλογία της ροπής αντιστάσεως. Συγκεκριμένα:

Πολική ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας ως προς ένα σημείο O ονομάζομε το πηλίκο της πολικής ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς το σημείο O προς την απόσταση των ακραίων σημείων της επιφάνειας από το εν λόγω σημείο.

Ας θεωρήσομε την επιφάνεια του σχήματος 3.9α και το σημείο O, στο οποίο τέμνονται οι κάθετοι άξονες x και y. Στο σχήμα 3.10α απεικονίζεται η απόσταση d_1 του ακραίου σημείου της επιφάνειας από το σημείο O.

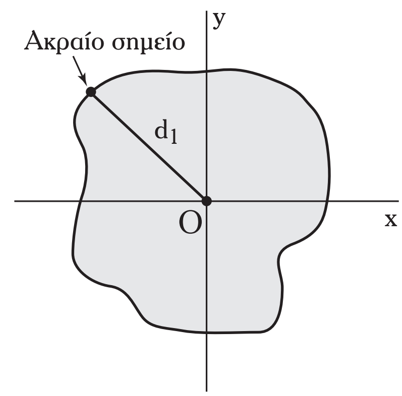
Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως $W_{O,1}$ της επιφάνειας του σχήματος 3.10α, ως προς το σημείο O, με πολική ροπή αδράνειας I_O παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W_{O,1} = \frac{I_O}{d_1} \tag{3.60}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της πολικής ροπής αντιστάσεως*** παρουσιάζονται στο πίνακα 3.10.1.

Πίνακας 3.10.1.

Μέγεθος	*Διεθνές Σύστημα*	*C.G.S.*	*Τεχνικό Σύστημα*	*Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα*
Πολική ροπή αντιστάσεως	$1\ m^3$	$1\ cm^3$	$1\ m^3$	$1\ ft^3$



Σχ. 3.10α.
Η απόσταση του ακραίου σημείου της επιφάνειας από το σημείο τομής O των αξόνων x και y.

Πρέπει να σημειώσομε ότι η πολική ροπή αντιστάσεως εξαρτάται από τη θέση του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι αφενός η πολική ροπή αδράνειας που εισάγεται στον αριθμητή της σχέσεως (3.60) και αφετέρου η απόσταση των ακραίων σημείων που εισάγεται στον παρονομαστή της σχέσεως (3.60) εξαρτώνται από τη θέση του σημείου O ως προς το οποίο υπολογίζονται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της πολικής ροπής αντιστάσεως το δείκτη O που δείχνει το σημείο αυτό.

Στην περίπτωση που το σημείο ως προς το οποίο γίνονται οι υπολογισμοί είναι τέτοιο, ώστε να έχομε δύο ακραία σημεία με αποστάσεις $d_1 = d_2 = d$, τότε η πολική ροπή αντιστάσεως είναι:

$$W_{O,1} = W_{O,2} = \frac{I_O}{d} \tag{3.61}$$

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι το πλήθος των ακραίων σημείων μιας επιφάνειας ως προς ένα σημείο O εξαρτάται από το είδος της επιφάνειας. Το πλήθος των ακραίων σημείων μπορεί να είναι ακόμη και άπειρο, όπως θα δούμε παρακάτω, ανάλογα με την επιφάνεια.

3.10.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η πολική ροπή αντιστάσεως;

Η πολική ροπή αντιστάσεως χρησιμοποιείται για τη μελέτη των καταπονήσεων σωμάτων σε στρέψη, τις οποίες παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 5. Συγκεκριμένα, η πολική ροπή αντιστάσεως χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό των μεγίστων τάσεων λειτουργίας, καθώς και των παραμορφώσεων των σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη. Έτσι, η γνώση της πολικής ροπής αντιστάσεως μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές των σωμάτων, ώστε αυτά να αντέχουν καταπονούμενα σε στρέψη και να υφίστανται τις μικρότερες παραμορφώσεις κατά την καταπόνησή τους. (βλ. Κεφ. 5).

3.10.2 Πώς υπολογίζεται η πολική ροπή αντιστάσεως;

Ο υπολογισμός της πολικής ροπής αντιστάσεως μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.60). Καταρχήν χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιο σημείο O πρέπει να υπολογίσομε την πολική ροπή αντιστάσεως. Έπειτα υπολογίζομε την πολική ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς το σημείο αυτό, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.9. Στη συνέχεια υπολογίζομε τις αποστάσεις των ακραίων σημείων της επιφάνειας από το σημείο O. Τέλος, εφαρμόζομε τη σχέση (3.60) και υπολογίζομε την πολική ροπή αντιστάσεως. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται τόσο για τα απλά, όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Ειδικότερα, η πολική ροπή αντιστάσεως ως προς το κέντρο βάρους τους για τα διάφορα απλά σχήματα έχει ως εξής:

α) ***Ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη β).

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.10β, τα ακραία σημεία του ορθογωνίου ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του Ο είναι οι τέσσερεις κορυφές του Α, Β, Γ και Δ. Οι αποστάσεις τους από το σημείο Ο είναι:

$$d_A = d_B = d_\Gamma = d_\Delta = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \tag{3.62}$$

Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.60), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.55) και (3.62):

$$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{I_O}{d_A} = \frac{\dfrac{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{12}}{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} = \frac{1}{6}\alpha\cdot\beta\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \tag{3.63}$$

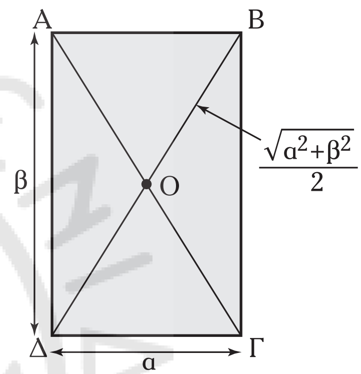
β) ***Τετράγωνο*** (με πλευρά α).

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.10γ, τα ακραία σημεία του τετραγώνου ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του Ο είναι οι τέσσερεις κορυφές του Α, Β, Γ και Δ. Οι αποστάσεις τους από το σημείο Ο είναι:

$$d_A = d_B = d_\Gamma = d_\Delta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \tag{3.64}$$

Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως του τετραγώνου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.60), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.56) και (3.64):

$$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{I_O}{d_A} = \frac{\dfrac{\alpha^4}{6}}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}} = \frac{\alpha^3}{6\sqrt{2}} \tag{3.65}$$



Σχ. 3.10β.
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του ορθογωνίου από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

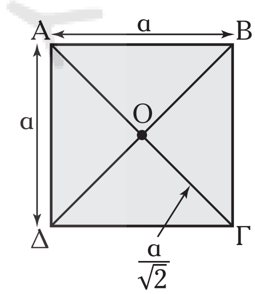
γ) ***Κύκλος*** (διαμέτρου D).

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.10δ, τα ακραία σημεία του κύκλου ως προς το κέντρο του Ο είναι προφανώς τα σημεία της περιφέρειάς του. Οι αποστάσεις τους από το σημείο Ο είναι:

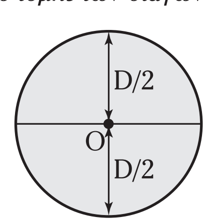
$$d = \frac{D}{2} \tag{3.66}$$

Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως του κύκλου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.60), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.57) και (3.66):

$$W_O = \frac{I_O}{d} = \frac{\dfrac{\pi\cdot D^4}{32}}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi\cdot D^3}{16} \tag{3.67}$$



Σχ. 3.10γ.
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του τετραγώνου από το σημείο τομής των διαγωνίων του.



Σχ. 3.10δ.
Κυκλική επιφάνεια.

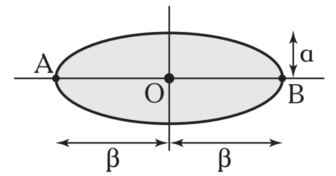
δ) ***Έλλειψη*** (με μικρό ημιάξονα α και μεγάλο β).

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.10ε, τα ακραία σημεία της ελλείψεως ως προς το κέντρο της Ο είναι προφανώς τα σημεία Α και Β που αποτελούν τα άκρα του μεγάλου άξονά της. Οι αποστάσεις τους από το σημείο Ο είναι:

$$d_A = d_B = \beta \tag{3.68}$$

Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως της ελλείψεως ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.60), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.58) και (3.68):

$$W_{O,A} = W_{O,B} = \frac{I_O}{d_A} = \frac{\dfrac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{4}}{\beta} = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{4} \tag{3.69}$$

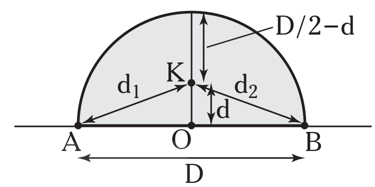


Σχ. 3.10ε.
Αποστάσεις των ακραίων σημείων της ελλείψεως από το κέντρο Ο.

ε) ***Ημικύκλιο*** (με διάμετρο D).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.10στ, τα ακραία σημεία του ημικυκλίου ως προς το κέντρο βάρους Κ είναι τα σημεία Α και Β, δηλαδή τα άκρα της διαμέτρου του. Οι αποστάσεις των ακραίων αυτών σημείων από το κέντρο βάρους Κ είναι:

$$d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{16 + 9\pi^2} \cdot D}{6 \cdot \pi} = 0{,}543\ D \tag{3.70}$$



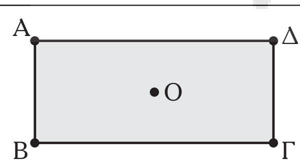
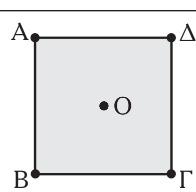
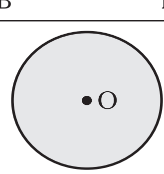
Σχ. 3.10στ.
Αποστάσεις των ακραίων σημείων του ημικυκλίου από το κέντρο βάρους Κ.

Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως του ημικυκλίου ως προς κέντρο βάρους Κ δίνεται από τη σχέση (3.60), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.59) και (3.70):

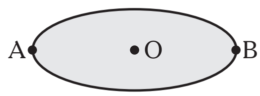
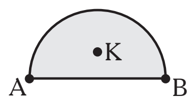
$$W_{K,A} = W_{K,B} = \frac{I_\kappa}{d_1} = \frac{0{,}0314\ D^4}{0{,}543\ D} = 0{,}0578\ D^3 \tag{3.71}$$

Η ***πολική ροπή αντιστάσεως επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς το κέντρο βάρους τους*** παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.10.2.

Πίνακας 3.10.2.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Σημείο υπολογισμού της πολικής ροπής αντιστάσεως***	***Πολική ροπή αντιστάσεως***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Το σημείο τομής των διαγωνίων.	$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{6}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Το σημείο τομής των διαγωνίων.	$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{\alpha^3}{6\sqrt{2}}$
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Το κέντρο του κύκλου.	$W_O = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$

(συνεχίζεται)

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Σημείο υπολογισμού της πολικής ροπής αντιστάσεως***	***Πολική ροπή αντιστάσεως***
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Το κέντρο της ελλείψεως.	$W_{O,A} = W_{O,B} = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot (\alpha^2 + \beta^2}{4}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$W_{K,A} = W_{K,B} = 0{,}0578\ D^3$

Παράδειγμα 21.

Να υπολογιστεί η πολική ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου του παραδείγματος 12 (πλευρές $\alpha = 4$ cm και $\beta = 5$ cm) ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του Ο.

Λύση.

Από τον πίνακα 3.10.2 γνωρίζομε ότι η πολική ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του ισούται με:

$$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{6} = \frac{4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot \sqrt{4^2\text{cm}^2 + 5^2\text{cm}^2}}{6} = 21{,}34\text{ cm}^3$$

Ασκήσεις.

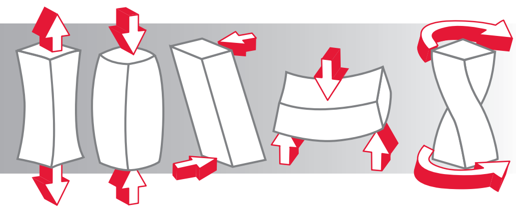
1. *Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α = 6 cm. Να υπολογίσετε:*
α) Την πολική ροπή αδράνειάς του.
β) Την πολική ροπή αντιστάσεώς του ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του.

2. *Δίνεται έλλειψη με μικρό ημιάξονα α = 3 cm και μεγάλο β = 5 cm. Να υπολογίσετε:*
α) Την πολική ροπή αδράνειάς της.
β) Την πολική ροπή αντιστάσεώς της ως προς το σημείο τομής του μεγάλου ημιάξονα με το μικρό.

3. *Να υπολογίσετε ως προς το κέντρο βάρους του:*
α) Την πολική ροπή αδράνειας.
β) Την πολική ροπή αντιστάσεως του σύνθετου γεωμετρικού σχήματος της ασκήσεως 6 της παραγράφου 3.6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κάμψη



4.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε την καταπόνηση της κάμψεως. Συγκεκριμένα, παρέχομε τον ορισμό και τα είδη κάμψεως και αναλύομε την περίπτωση της καθαρής κάμψεως εξηγώντας τις προκαλούμενες τάσεις και παραμορφώσεις. Επίσης, περιγράφομε τον τρόπο επιλύσεως των υπερστατικών προβλημάτων κάμψεως.

Ο πίνακας 4.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 4.1.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Ακτίνα ελαστικής γραμμής	R	m, cm
Απόσταση από άξονα	y	cm, mm
Βέλος κάμψεως	f	m, cm
Γωνία στροφής των ακραίων διατομών	φ	rad, °
Επιτρεπόμενη τάση κάμψεως	$\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως	$f_{\varepsilon\pi}$	m, cm
Μέγιστο βέλος κάμψεως	f_{max}	m, cm
Τάση κάμψεως	$\sigma_{\kappa\alpha}$	N/cm^2, N/mm^2

4.2 Η καταπόνηση της κάμψεως.

Ας θεωρήσομε τη δοκό του σχήματος 4.2α. Η δοκός είναι οριζόντια και στηρίζεται στα δύο άκρα της. Στη δοκό δεν ενεργεί καμμία εξωτερική δύναμη. Ο άξονάς της είναι ευθύγραμμος. Στη συνέχεια, στη δοκό ενεργούν δύο δυνάμεις F_1 και F_2, οι οποίες είναι κάθετες στον άξονά της. Αποτέλεσμα της δράσεως των δύο δυνάμεων είναι ότι η δοκός υφίσταται καμπύλωση και ο άξονάς της λαμβάνει καμπύλη μορφή. Η παραμόρφωση αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2α(β). Λέμε στην περίπτωση αυτή ότι η δοκός καταπονείται σε κάμψη.

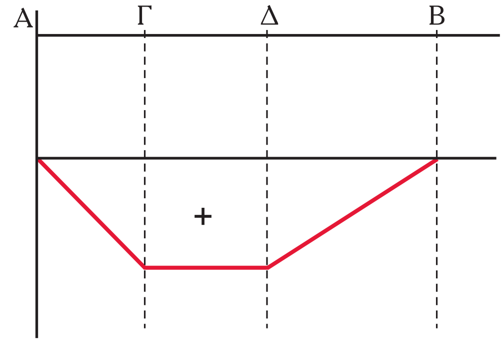
Σχ. 4.2α.

(α) Δοκός στην οποία δεν ενεργεί εξωτερική δύναμη. (β) Η δοκός του σχήματος (α) που καταπονείται σε κάμψη.

Γενικότερα:

Ένα σώμα λέμε ότι καταπονείται σε κάμψη όταν στηρίζεται σ' ένα ή περισσότερα σημεία και οι δυνάμεις που ενεργούν σ' αυτό είναι κάθετες στον άξονά του.

Εάν παρατηρήσομε με μεγαλύτερη προσοχή τη δοκό του σχήματος 4.2α(β) που καταπονείται σε κάμψη, βλέπομε ότι το ένα τμήμα της –αυτό που βρίσκεται πάνω από τον άξονά της– θλίβεται, ενώ το άλλο –αυτό που βρίσκεται κάτω από τον άξονά της– εφελκύεται. Το γεγονός αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί και με το Διάγραμμα Καπτικών Ροπών της δοκού, το οποίο κατασκευάζεται σύμφωνα με όσα αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3. Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών για τη δοκό του σχήματος 4.2α(β) παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2β. Το διάγραμμα είναι θετικό, κάτι που σημαίνει ότι το τμήμα της δοκού που βρίσκεται πάνω από τον άξονά της θλίβεται, ενώ το τμήμα της που βρίσκεται κάτω από τον άξονα εφελκύεται.



Σχ. 4.2β.
Το διάγραμμα καμπτικών ροπών για τη δοκό του σχήματος 4.2α που καταπονείται σε κάμψη.

Η καταπόνηση της κάμψεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε κάμψη είναι οι δοκοί (πρόβολοι, αμφιέρειστες, προέχουσες, αμφιπροέχουσες κ.λπ.), οι γερανογέφυρες, οι άξονες που είναι στερεωμένοι στο σώμα μηχανών κ.λπ..

4.2.1 Είδη κάμψεων.

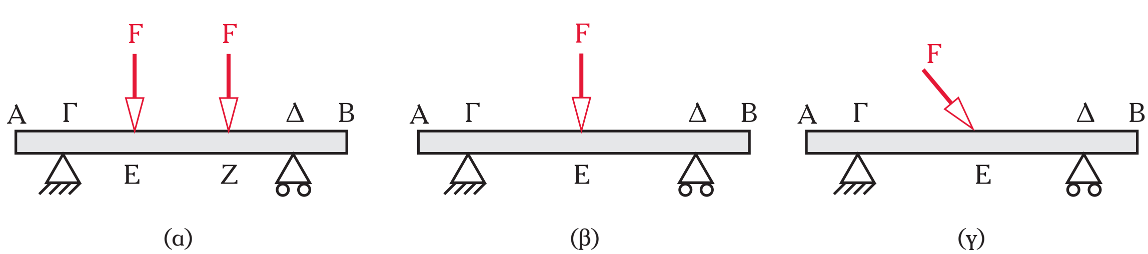
Στην παράγραφο 3.3 είδαμε τις έννοιες των ορθών δυνάμεων, των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών μιας δοκού. Με κριτήριο το ποιες είναι οι ορθές δυνάμεις, οι τέμνουσες δυνάμεις και οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται σε μία δοκό που καταπονείται σε κάμψη, οι κάμψεις διακρίνονται στις εξής τρεις κατηγορίες:

α) ***Καθαρή κάμψη*** που έχομε όταν συντρέχουν σωρευτικά οι ακόλουθες συνθήκες:
- Η ορθή δύναμη είναι μηδενική.
- Η τέμνουσα δύναμη είναι μηδενική.
- Η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός.

Το σχήμα 4.2γ(α) παρουσιάζει μία δοκό, στην οποία το τμήμα ΕΖ καταπονείται σε καθαρή κάμψη αφού οι δύο δυνάμεις είναι ίσες και συμμετρικές ως προς το μέσο του ΓΔ.

β) ***Κοινή κάμψη*** που έχομε όταν συντρέχουν σωρευτικά οι ακόλουθες συνθήκες:
- Η ορθή δύναμη είναι μηδενική.
- Η τέμνουσα δύναμη είναι διάφορη του μηδενός.
- Η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός.

Το σχήμα 4.2γ(β) παρουσιάζει μία δοκό που καταπονείται σε κοινή κάμψη.



Σχ. 4.2γ.
Δοκός που καταπονείται σε: (α) Καθαρή κάμψη. (β) Κοινή κάμψη. (γ) Σύνθετη κάμψη.

γ) ***Σύνθετη κάμψη*** που έχομε όταν συντρέχουν σωρευτικά οι ακόλουθες συνθήκες:
– Η ορθή δύναμη είναι διάφορη του μηδενός.
– Η τέμνουσα δύναμη είναι διάφορη του μηδενός.
– Η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός.

Το σχήμα 4.2γ(γ) παρουσιάζει μία δοκό που καταπονείται σε σύνθετη κάμψη.

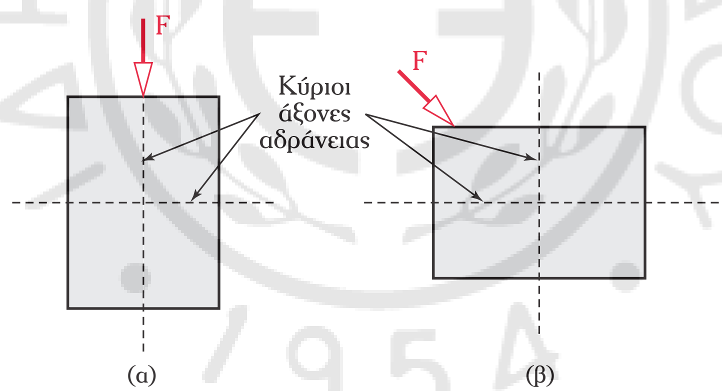
Περαιτέρω, με κριτήριο τη διεύθυνση των εξωτερικών φορτίων που ενεργούν στη δοκό που καταπονείται σε κάμψη, οι κάμψεις διακρίνονται στις εξής δύο κατηγορίες:

α) Συμμετρική κάμψη που έχομε όταν όλα τα εξωτερικά φορτία ενεργούν στη διεύθυνση κύριου άξονα αδράνειας του καταπονούμενου σώματος. Το σχήμα 4.2δ(α) παρουσιάζει τη διατομή μίας δοκού που καταπονείται σε συμμετρική κάμψη.

β) Μη συμμετρική ή λοξή κάμψη που έχομε όταν ένα τουλάχιστον εξωτερικό φορτίο δεν ενεργεί στη διεύθυνση κύριου άξονα αδράνειας του καταπονούμενου σώματος. Το σχήμα 4.2δ(β) παρουσιάζει τη διατομή μίας δοκού που καταπονείται σε μη συμμετρική κάμψη.

Συνδυάζοντας τις ανωτέρω δύο κατηγοριοποιήσεις κάμψεων, οι κάμψεις διακρίνονται στις ακόλουθες έξι κατηγορίες:
α) Συμμετρική καθαρή κάμψη.
β) Συμμετρική κοινή κάμψη.
γ) Συμμετρική σύνθετη κάμψη.
δ) Μη συμμετρική ή λοξή καθαρή κάμψη.
ε) Μη συμμετρική ή λοξή κοινή κάμψη.
στ) Μη συμμετρική ή λοξή σύνθετη κάμψη.

Από τις ανωτέρω περιπτώσεις εξετάζομε λεπτομερώς στη συνέχεια την περίπτωση της συμμετρικής καθαρής κάμψεως[1].



Σχ. 4.2δ.
Διάμετρος δοκού που καταπονείται σε: (α) Συμμετρική κάμψη. (β) Λοξή κάμψη.

4.3 Συμμετρική καθαρή κάμψη.

Ας θεωρήσομε τη δοκό του σχήματος 4.3α(α) που καταπονείται σε κάμψη λόγω της δράσεως των κατακορύφων δυνάμεων F_1 και F_2. Επειδή στο τμήμα ΓΔ ισχύει ότι:
α) η ορθή δύναμη είναι μηδενική [σχ. 4.3α(β)],
β) η τέμνουσα δύναμη είναι μηδενική [σχ. 4.3α(γ)] και,
γ) η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός [σχ. 4.3α(δ)],
η καταπόνηση στο τμήμα ΓΔ είναι καθαρή κάμψη.

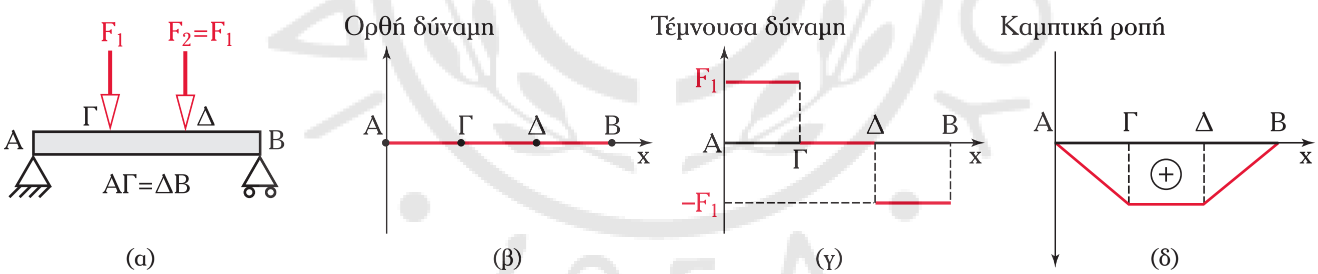
---
[1] Οι υπόλοιπες κατηγορίες δεν αναπτύσσονται στο παρόν βιβλίο επειδή δεν περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα του μαθήματος «Αντοχή Υλικών».

Αποτέλεσμα της δράσεως των εξωτερικών φορτίων είναι ότι η δοκός υφίσταται καμπύλωση και ο άξονάς της παίρνει καμπύλη μορφή. Για να εξετάσομε με λεπτομέρεια τι συμβαίνει ακριβώς κατά την κάμψη θεωρούμε ότι η δοκός αποτελείται από δέσμες παραλλήλων ινών, οι οποίες είναι τοποθετημένες κατά οριζόντια στρώματα, παράλληλα προς τον άξονά της. Το σχήμα 4.3β(α) παρουσιάζει την εικόνα των δεσμών παραλλήλων ινών πριν την εφαρμογή των φορτίων. Κατά την εφαρμογή των φορτίων, οι ίνες δεν συμπεριφέρονται όλες κατά τον ίδιο τρόπο. Συγκεκριμένα, οι ίνες που είναι πάνω από τον άξονα της δοκού εμφανίζουν ελάττωση του μήκους τους, δηλαδή καταπονούνται σε θλίψη. Μάλιστα, οι ίνες αυτές ελαττώνουν το μήκος τους τόσο, όσο περισσότερο απέχουν από τον άξονα της δοκού. Αντίθετα, οι ίνες που είναι κάτω από τον άξονα της δοκού εμφανίζουν αύξηση του μήκους τους, δηλαδή καταπονούνται σε εφελκυσμό. Μάλιστα, οι ίνες αυτές αυξάνουν το μήκος τους τόσο, όσο περισσότερο απέχουν από τον άξονα της δοκού.

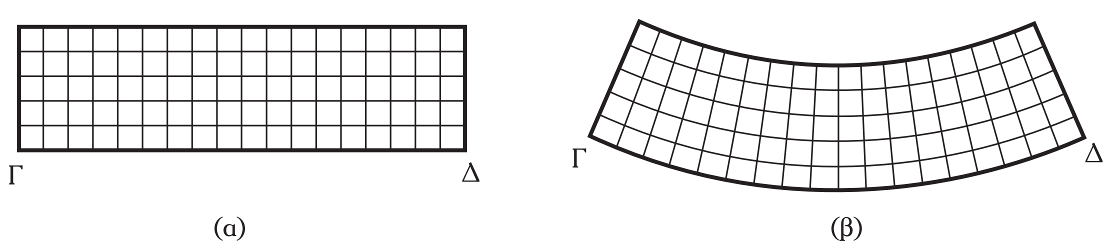
Μεταξύ των ινών που θλίβονται και αυτών που εφελκύονται υπάρχει ένα στρώμα ινών που ούτε θλίβονται ούτε εφελκύονται, αλλά, όπως λέμε, παραμένουν ***ουδέτερες***. Το επίπεδο στο οποίο οι ίνες αυτές βρίσκονται ονομάζεται ***ουδέτερο επίπεδο***. Η τομή του ουδέτερου επιπέδου με τη διατομή της δοκού είναι ευθεία και ονομάζεται ***ουδέτερη γραμμή.*** Ο γεωμετρικός άξονας της δοκού βρίσκεται πάνω στο ουδέτερο επίπεδο και γι' αυτό ονομάζεται ***ουδέτερος άξονας***.

Το συνολικό αποτέλεσμα των ινών που εφελκύονται ανάλογα με την απόστασή τους από τον άξονα της δοκού, που παραμένουν ουδέτερες και των ινών που θλίβονται ανάλογα με την απόστασή τους από τον άξονα της δοκού, είναι η δημιουργία ολισθήσεως μεταξύ των στρωμάτων τους. Το σχήμα 4.3β(β) παρουσιάζει την εικόνα των δεσμών παραλλήλων ινών κατά την εφαρμογή των φορτίων.

Συνεπώς, ***η καθαρή κάμψη είναι μία σύνθετη καταπόνηση αποτελούμενη από καταπονήσεις σε εφελκυσμό και θλίψη***. Άρα, για τη μελέτη της καθαρής κάμψεως πρέπει να λάβομε υπόψη τις εμφανιζόμενες ορθές τάσεις θλίψεως και εφελκυσμού[1]. Η μελέτη αυτή απαιτεί



Σχ. 4.3α.
(α) Δοκός που καταπονείται σε καθαρή κάμψη. (β) Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων. (γ) Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων. (δ) Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.



Σχ. 4.3β.
Η εικόνα των δεσμών παραλλήλων ινών της δοκού στο τμήμα ΓΔ: (α) Πριν να ενεργήσουν τα φορτία. (β) Κατά την καταπόνηση σε καθαρή κάμψη.

[1] Στην περίπτωση της κοινής κάμψεως επί πλέον των ορθών τάσεων εμφανίζονται και διατμητικές τάσεις.

την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Ωστόσο, η επίλυση του συστήματος αυτού είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και γι' αυτόν το λόγο δεν μπορεί να τύχει εφαρμογής στα καθημερινά τεχνικά προβλήματα. Έτσι, έχει προταθεί η χρησιμοποίηση μίας άλλης προσεγγίσεως για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών, η οποία ονομάζεται ***τεχνική θεωρία της κάμψεως***.

4.3.1 Η τεχνική θεωρία της κάμψεως.

Η τεχνική θεωρία της κάμψεως αναπτύχθηκε στηριζόμενη στις ακόλουθες παραδοχές:

α) Πριν από την παραμόρφωσή της, η δοκός είναι ***ευθύγραμμη***.

β) Η δοκός έχει ***σταθερή διατομή*** σε όλο το μήκος της και η μεγαλύτερη διάσταση της εγκάρσιας διατομής είναι μικρότερη από το μισό του μήκους της δοκού.

γ) Οι εξωτερικές δυνάμεις είναι ***συνεπίπεδες*** (βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο), ενεργούν κάθετα στον άξονα της δοκού και δεν καταπονούν το σώμα σε στρέψη, εφελκυσμό ή θλίψη, αλλά μόνο σε κάμψη.

δ) Οι εγκάρσιες διατομές, που είναι επίπεδες πριν την καμπτική παραμόρφωση παραμένουν ***επίπεδες και μετά την παραμόρφωση***.

ε) Το υλικό της δοκού είναι ***ομογενές***, δηλαδή έχει σε όλα τα σημεία του τις ίδιες ιδιότητες, ***ισότροπο***, δηλαδή έχει τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις και ***ακολουθεί το νόμο του Hooke*** έχοντας το ίδιο μέτρο ελαστικότητας για τις αναπτυσσόμενες εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις.

Εάν τουλάχιστον μία από τις ανωτέρω παραδοχές της τεχνικής θεωρίας της κάμψεως δεν ισχύει σε κάποιο πρόβλημα κάμψεως που καλούμαστε να αντιμετωπίσομε, τότε πρέπει να έχομε κατά νου ότι οι λύσεις που λαμβάνομε από την εφαρμογή της δεν θα είναι ικανοποιητικές για το πρόβλημά μας.

4.3.2 Οι τάσεις στη συμμετρική καθαρή κάμψη.

Σύμφωνα με την τεχνική θεωρία της κάμψεως, η τάση κάμψεως σε ένα σημείο της διατομής δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη, όπως αυτή του σχήματος 4.3β(α), εξαρτάται από:

α) Το μέγεθος των φορτίων.

β) Τη θέση των φορτίων.

γ) Το μήκος της δοκού.

δ) Το μέγεθος της διατομής.

ε) Τη μορφή της διατομής.

στ) Την τοποθέτηση της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση των φορτίων.

ζ) Την απόσταση του σημείου της διατομής από τον άξονα.

Η εξάρτηση από το μέγεθος των φορτίων, το μήκος της δοκού και τη θέση των φορτίων εκφράζεται μέσω της καμπτικής ροπής M που είναι συνάρτηση αυτών. Η εξάρτηση από το μέγεθος και τη μορφή τη διατομής καθώς και από την τοποθέτησή της σε σχέση με τη διεύθυνση του φορτίου, εκφράζεται μέσω της ροπής αδράνειας I_x που είναι συνάρτηση αυτών.

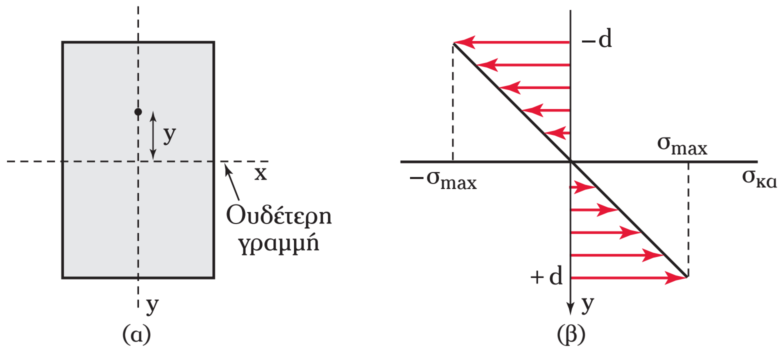
Οι ανωτέρω εξαρτήσεις εκφράζονται στην ακόλουθη σχέση που παρέχει την τάση κάμψεως $\sigma_{\kappa\alpha}$ σε ένα σημείο διατομής δοκού που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα x που είναι και ουδέτερη γραμμή της κάμψεως:

$$\sigma_{\kappa\alpha} = \frac{M}{I_x} \cdot y \tag{4.1}$$

Από η σχέση (4.1) διαπιστώνομε ότι η τάση κάμψεως σ' ένα σημείο της διατομής της δοκού:

α) Είναι ανάλογη της καμπτικής ροπής.

β) Είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας της διατομής.



Σχ. 4.3γ.
(α) Ορθογώνια διατομή δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. (β) Η γραφική παράσταση της τάσεως κάμψεως $\sigma_{κα}$ ως προς την απόσταση y.

γ) Είναι ανάλογη της αποστάσεως y του σημείου από τον άξονα x.

Έτσι, για σταθερή καμπτική ροπή, η γραφική παράσταση της τάσεως κάμψεως $\sigma_{κα}$ ως προς την απόσταση y είναι ευθεία γραμμή και απεικονίζεται στο σχήμα 4.3γ(β). Η απόσταση y λαμβάνει αρνητικές και θετικές τιμές ανάλογα με το εάν το σημείο ενδιαφέροντος είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα x, αντίστοιχα. Έτσι, οι τάσεις κάμψεως λαμβάνουν και αρνητικές και θετικές τιμές. Όλα τα σημεία της ανώτερης γραμμής της διατομής έχουν την ίδια μέγιστη αρνητική τάση και όλα τα σημεία της κατώτερης την ίδια μέγιστη θετική τάση. Οι θετικές τάσεις αντιστοιχούν σε εφελκυστικές τάσεις και οι αρνητικές σε θλιπτικές. Το γεγονός αυτό έρχεται σε συμφωνία με το σχήμα 4.3β(β).

Συνεπώς, δεδομένου ότι η καμπτική ροπή είναι σταθερή σε όλη τη διατομή, ***η τάση κάμψεως μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο της διατομής*** και λαμβάνει τις ακρότατες τιμές της στα άκρα της διατομής που έχουν τη μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα x. Έτσι, εάν είναι y = ±d οι αποστάσεις των ακραίων σημείων της διατομής από τον άξονα των x, ***οι ακρότατες τιμές της τάσεως κάμψεως*** στην υπό εξέταση διατομή δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma_{ακρ} = \pm \frac{M}{I_x} \cdot d \tag{4.2}$$

Το πρόσημο (–) αναφέρεται σε θλιπτική τάση και το πρόσημο (+) σε εφελκυστική (για θετική καμπτική ροπή). Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ροπής αντιστάσεως ως προς τον άξονα x που παρουσιάζομε στην παράγραφο 3.8:

$$W_x = \frac{I_x}{d} \tag{4.3}$$

η σχέση (4.2) γράφεται:

$$\sigma_{ακρ} = \pm \frac{M}{W_x} \tag{4.4}$$

4.3.3 Η σχέση κάμψεως.

Για να αποφεύγεται η θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε (συμμετρική καθαρή) κάμψη, πρέπει οι τάσεις που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες από την τάση στην οποία το υλικό θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί μία επιτρεπόμενη τάση κάμψεως $\sigma_{επ,κα}$, η οποία πρέπει να είναι απολύτως μικρότερη από την επιτρεπόμενη. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$-\sigma_{επ,κα} \leq \sigma_{κα} \leq \sigma_{επ,κα} \Leftrightarrow -\sigma_{επ,κα} \leq \frac{M}{I_x} \cdot y \leq \sigma_{επ,κα} \tag{4.5}$$

Η σχέση (4.5) αποτελεί τη ***σχέση κάμψεως***. Η ανισότητα $-\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \leq \sigma_{\kappa\alpha}$ χρησιμοποιείται προκειμένου να καλύψει και την περίπτωση των θλιπτικών τάσεων που είναι αρνητικές.

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.4), η σχέση (4.5) για y = ±d γράφεται:

$$-\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \leq \pm\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \qquad (4.6)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί μία άλλη έκφραση της σχέσεως κάμψεως, η οποία κυρίως χρησιμοποιείται στην επίλυση των προβλημάτων (συμμετρικής καθαρής) κάμψεως. Το πρόσημο (–) αναφέρεται σε θλιπτική τάση και το (+) σε εφελκυστική. Λόγω της συμμετρίας, οι δύο ακρότατες τιμές είναι αντίθετες. Έτσι, στα προβλήματα αρκεί να θεωρούμε μόνο την εφελκυστική τιμή (τη μέγιστη τιμή αυτής).

4.3.4 Εφαρμογές της σχέσεως κάμψεως.

Η σχέση κάμψεως χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων της καθαρής κάμψεως. Κατ' αναλογία των καταπονήσεων του εφελκυσμού, της θλίψεως και της διατμήσεως, τα προβλήματα της καθαρής κάμψεως διακρίνονται στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

α) Κατηγορία Ι – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.

β) Κατηγορία ΙΙ – Προβλήματα διαστασιολογήσεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

γ) Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού ικανότητας φορτίσεως (ή μέγιστης καμπτικής ροπής).

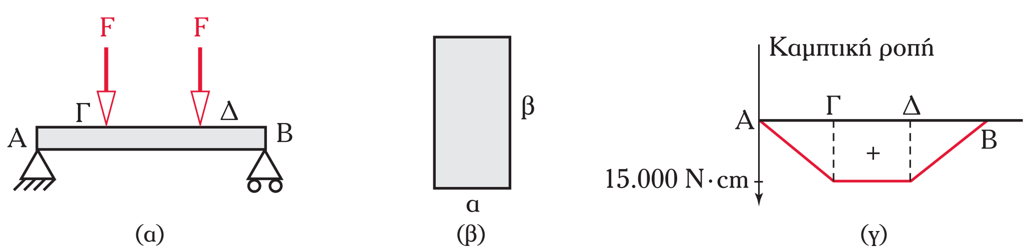
Η διαδικασία επιλύσεως των ανωτέρω προβλημάτων είναι ανάλογη μ' αυτήν που ακολουθήσαμε στις απλές καταπονήσεις του Κεφαλαίου 2. Επί πλέον, πρέπει να έχομε κατά νου τα ακόλουθα:

Πρώτον το ρόλο της δυνάμεως που είχαμε στις καταπονήσεις του Κεφαλαίου 2 έχει στην καταπόνηση της κάμψεως «αναλάβει» η καμπτική ροπή. Εάν η τελευταία δεν δίνεται απευθείας, πρέπει να υπολογιστεί με τη βοήθεια του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφομε στην παράγραφο 3.3.

Δεύτερον το ρόλο της επιφάνειας της διατομής που είχαμε στις καταπονήσεις του Κεφαλαίου 2 έχει στην καταπόνηση της κάμψεως «αναλάβει» η ροπή αντιστάσεως. Εάν η τελευταία δεν δίνεται απευθείας, πρέπει να υπολογιστεί με τη διαδικασία της παραγράφου 3.8 ή από τον πίνακα 3.8.2.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η δοκός ΑΒ του σχήματος 4.3δ(α) με ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 2 cm και β = 4 cm. Η δοκός στηρίζεται στη μικρή πλευρά της διατομής της [σχ. 4.3δ(β)]. Το τμήμα της δοκού ΓΔ καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στη δοκό παρουσιάζονται στο σχήμα 4.3δ(γ). Να υπολογιστεί η μέγιστη τάση κάμψεως στις δια-



Σχ. 4.3δ.
(α) Δοκός ΑΒ. (β) Η διατομή της δοκού. (γ) Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

τομές της δοκού στο τμήμα της ΓΔ. Εάν η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$= 8.000 N/cm^2, φορτίζεται το τμήμα ΓΔ της δοκού κανονικά;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 2 cm	$\sigma_{\alpha\kappa\rho}$ = ;
β = 4 cm	$\sigma_{\alpha\kappa\rho}$? $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$
M = 15.000 N · cm	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$ = 8.000 N/ cm^2	

Λύση.

Λόγω της συμμετρίας, αρκεί να αναφερθούμε μόνο στις εφελκυστικές τάσεις. Από το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών έχομε ότι η καμπτική ροπή στο τμήμα ΓΔ είναι: M = 15.000 N · cm.

Η ροπή αντιστάσεως της ορθογώνιας διατομής ως προς τον άξονα x, που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι (βλ. πίνακα 3.8.2):

$$W_x = \frac{\alpha \cdot \beta^2}{6} = \frac{2\text{cm} \cdot (4\text{ cm})^2}{6} = 5{,}33\text{ cm}^3$$

Η μέγιστη τάση κάμψεως παρέχεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = \frac{M}{W_x} = \frac{15.000\text{ N}\cdot\text{cm}}{5{,}33\cdot\text{cm}^3} = 2.814{,}3\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Επειδή η τάση αυτή είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη, το τμήμα ΓΔ της δοκού φορτίζεται κανονικά.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί ποια πρέπει να είναι η πλευρά της διατομής δοκού με τετραγωνική διατομή, η οποία θα καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη εάν αναπτύσσεται μέγιστη καμπτική ροπή M = 54.000 N · cm και η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$ = 12.000 N/cm^2.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
M = 54.000 N · cm	α = ;
$\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$ = 12.000 N/cm^2	

Λύση.

Λόγω της συμμετρίας, αρκεί να αναφερθούμε μόνο στις εφελκυστικές τάσεις. Η μέγιστη τάση κάμψεως αναπτύσσεται στα ακραία σημεία της διατομής. Από τη σχέση της κάμψεως έχομε ότι πρέπει:

$$\frac{M}{W_x} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \tag{1}$$

όπου η ροπή αντιστάσεως της τετραγωνικής διατομής με πλευρά α είναι (βλ. πίνακα 3.8.2):

$$W_x = \frac{\alpha^3}{6} \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) και λύνοντας ως προς την πλευρά α έχομε:

$$\frac{M}{W_x} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow \frac{M}{\frac{\alpha^3}{6}} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow \alpha^3 \ge \frac{6\cdot M}{\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}} \Leftrightarrow \alpha \ge \sqrt[3]{\frac{6\cdot M}{\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}}} \Leftrightarrow \alpha \ge \sqrt[3]{\frac{6\cdot 54.000\text{ N}\cdot\text{cm}}{12.000\text{ N}/\text{cm}^2}} \Leftrightarrow \alpha \ge 3\text{ cm}$$

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί η μέγιστη καμπτική ροπή που επιτρέπεται να αναπτύσσεται σε δοκό με κυκλική διατομή ακτίνας R = 2 cm, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{επ,κα} = 7.000\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
R = 2 cm	M = ;
$\sigma_{επ,κα} = 7.000\ N/cm^2$	

Λύση.

Λόγω της συμμετρίας, αρκεί να αναφερθούμε μόνο στις εφελκυστικές τάσεις. Η μέγιστη τάση κάμψεως αναπτύσσεται στα ακραία σημεία της διατομής. Από τη σχέση της κάμψεως έχομε ότι πρέπει:

$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{επ,κα} \qquad (1)$$

Η ροπή αντιστάσεως της κυκλικής διατομής με ακτίνα R είναι (βλ. πίνακα 3.8.2):

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot R^3}{4} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) και λύνοντας ως προς τη ζητούμενη καμπτική ροπή έχομε:

$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{επ,κα} \Leftrightarrow \frac{M}{\frac{\pi \cdot R^3}{4}} \leq \sigma_{επ,κα} \Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot R^3}{4} \cdot \sigma_{επ,κα} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot 2^3 cm^3}{4} \cdot 7.000 \frac{N}{cm^2} \Leftrightarrow M \leq 43.960\ N{\cdot}cm$$

Άρα, η μέγιστη επιτρεπόμενη καμπτική ροπή είναι 43.960 N·cm.

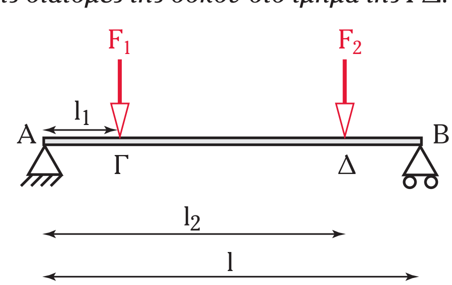
Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί η μέγιστη καμπτική ροπή που επιτρέπεται να αναπτύσσεται σε δοκό με τετραγωνική διατομή πλευράς α = 4 cm, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{επ,κα} = 12.000\ N/cm^2$.*

2. *Να υπολογιστεί ποια πρέπει να είναι η ακτίνα της διατομής δοκού με κυκλική διατομή, η οποία θα καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη εάν αναπτύσσεται καμπτική ροπή M = 40.000 N · cm και η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{επ,κα} = 10.000\ N/cm^2$.*

3. *Δίνεται δοκός ΑΒ με τετραγωνική διατομή πλευράς β = 4 cm. Το τμήμα της δοκού ΓΔ καταπονείται σε σύμμετρη καθαρή κάμψη. Οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στο τμήμα ΓΔ είναι M = 12.000 N · cm. Να υπολογισθεί η μέγιστη τάση κάμψεως στις διατομές της δοκού στο τμήμα της ΓΔ. Εάν η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{επ,κα} = 18.000\ N/cm^2$, φορτίζεται το τμήμα ΓΔ της δοκού κανονικά;*

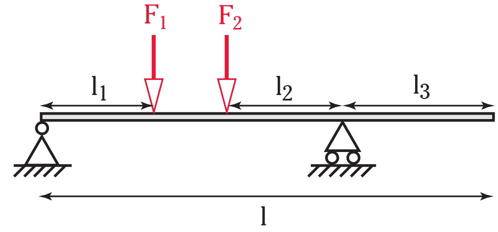
4. *Δίνεται δοκός μήκους l = 100 cm με ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 4 cm και β = 3 cm. Η δοκός στηρίζεται στα δύο άκρα της και στα σημεία Γ και Δ αυτής εφαρμόζονται δύο φορτία F_1 = 4.000 N και F_2 = 4.000 N σε αποστάσεις l_1 = 20 cm και l_2 = 80 cm, αντίστοιχα από το ένα άκρο της δοκού, όπως δείχνει το σχήμα 4.3ε. Να υπολογιστεί η μέγιστη τάση κάμψεως στις διατομές της*



Σχ. 4.3ε.

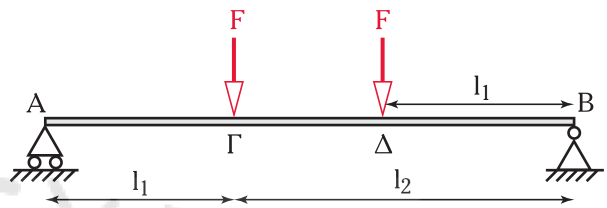
δοκού μεταξύ των σημείων της Γ και Δ. Η στήριξη της δοκού πραγματοποιείται ως προς τη μεγάλη πλευρά της ορθογώνιας διατομής της.

Υπόδειξη: *Προσδιορίστε πρώτα τη μέγιστη καμπτική ροπή ακολουθώντας τη διαδικασία κατασκευής του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών που παρουσιάζομε στην παράγραφο 3.3.*



Σχ. 4.3στ.

5. *Ποια πρέπει να είναι η διάμετρος της κυκλικής διατομής της δοκού μήκους $l = 120$ cm του σχήματος 4.3στ, στην οποία ενεργούν οι δυνάμεις $F_1 = 3.000$ N και $F_2 = 3.000$ N σε αποστάσεις $l_1 = 30$ cm και $l_2 = 30$ cm, αντίστοιχα, όταν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{επ,κα} = 6.000$ N/ cm^2; Δίνεται $l_3 = 40$ cm.*



Σχ. 4.3ζ.

6. *Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που επιτρέπεται να εφαρμοστεί στη δοκό του σχήματος 4.3ζ, όταν η διατομή της είναι τετραγωνική με πλευρά $a = 2$ cm ώστε το τμήμα της ΓΔ να φορτίζεται κανονικά; Δίνονται $l_1 = 50$ cm και $l_2 = 90$ cm και η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως $\sigma_{επ,κα} = 12.000$ N/ cm^2.*

7. *Δοκός που έχει ορθογώνια διατομή διαστάσεων $a = 4$ cm και $\beta = 6$ cm καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη με καμπτική ροπή $M = 40.000$ N · cm. Ποια είναι η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη δοκό στις ακόλουθες περιπτώσεις:*
α) Όταν η διατομή τοποθετηθεί με την πλευρά $a = 4$ cm κατακόρυφη;
β) Όταν η διατομή τοποθετηθεί με την πλευρά $\beta = 6$ cm κατακόρυφη;
Εάν η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{επ,κα} = 12.000$ N/ cm^2, η δοκός φορτίζεται κανονικά και στις δύο περιπτώσεις;

4.4 Παραμορφώσεις της καθαρής κάμψεως.

Σε κάθε δοκό που καταπονείται σε κάμψη δημιουργούνται παραμορφώσεις του γεωμετρικού της άξονα που αποτελεί τον ουδέτερο άξονα, με αποτέλεσμα να τον μετατοπίζουν από την ευθύγραμμη οριζόντια θέση σε μία καμπύλη γραμμή. Οι παραμορφώσεις μετρούνται με τη μετατόπιση κάθε σημείου του ουδέτερου άξονα από τη θέση που είχε πριν την καταπόνηση σ' αυτήν που βρίσκεται μετά τη φόρτιση. Η μετατόπιση αυτή ονομάζεται βέλος κάμψεως ή βύθιση και συμβολίζεται με f. Δηλαδή:

Βέλος κάμψεως ή ***βύθιση*** ενός σημείου του ουδέτερου άξονα της δοκού που καταπονείται σε κάμψη ονομάζεται η μετατόπισή του από τη θέση που είχε πριν τη φόρτιση στη θέση που βρίσκεται μετά απ' αυτήν.

Όλα τα βέλη κάμψεως δεν έχουν την ίδια τιμή και εξαρτώνται από τους ακόλουθους παράγοντες:

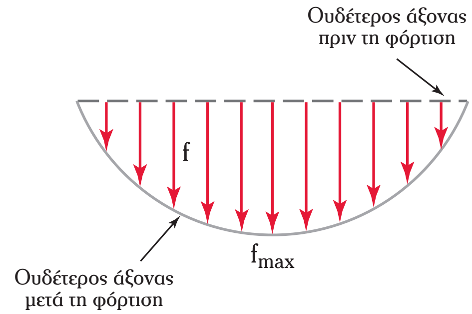
α) Είναι ανάλογα της φορτίσεως.
β) Εξαρτώνται από τα σημεία που οι φορτίσεις ενεργούν.
γ) Εξαρτώνται από τις διαστάσεις της δοκού.
δ) Εξαρτώνται από τη ροπή αδράνειας της διατομής.
ε) Εξαρτώνται από τον τρόπο στηρίξεως της δοκού.

Σε κάποια θέση το βέλος κάμψεως λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του f_{max}. Το μεγαλύτερο βέλος κάμψεως μίας δοκού ονομάζεται ***βέλος κάμψεως της δοκού***. Το σχήμα 4.4α παρουσιάζει τον ουδέτερο άξονα πριν τη φόρτιση, τον ουδέτερο άξονα κατά τη φόρτιση και τα βέλη κάμψεως μίας δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη.

Η μέγιστη τιμή του βέλους κάμψεως πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μια επιτρεπόμενη τιμή $f_{επ}$:

$$f_{max} \leq f_{επ} \qquad (4.7)$$

Ο υπολογισμός του βέλους κάμψεως των δοκών πραγματοποιείται με διάφορες μεθόδους, των οποίων η εφαρμογή ωστόσο δεν είναι εύκολη. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τα βέλη κάμψεως που παρέχονται από πίνακες (πίν. 4.4.1).



Σχ. 4.4α.
Τα βέλη κάμψεως.

Πίνακας 4.4.1.
Βέλη κάμψεως δοκών.

Δοκός	***Παράμετροι***	***Βέλος κάμψεως***
Πρόβολος δοκός με εφαρμογή κάθετου φορτίου στο ελεύθερο άκρο	Φορτίο F, μήκος δοκού l, ροπή αδράνειας I_m, μέτρο ελαστικότητας E	$f_{max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_m}$, στην άκρη της δοκού
Πρόβολος δοκός με εφαρμογή κάθετου φορτίου σε απόσταση από το πακτωμένο άκρο	Φορτίο F, μήκος δοκού l, ροπή αδράνειας I_m, μέτρο ελαστικότητας E, απόσταση από το πακτωμένο άκρο α	$f_{max} = \frac{F \cdot α^3}{3 \cdot E \cdot I_m}$, στην άκρη της δοκού
Αμφιέρειστη δοκός με εφαρμογή δύο καθέτων ίσων φορτίων σε ίσες αποστάσεις από τα δύο άκρα	Φορτία F, μήκος δοκού l, ροπή αδράνειας I_m, μέτρο ελαστικότητας E, αποστάσεις από τα άκρα α	$f_{max} = \frac{F \cdot α \cdot (8 \cdot α^2 + 12 \cdot α \cdot β + 3β^2)}{24 \cdot E \cdot I_m}$ $β = l - 2 \cdot α$

Οι επιτρεπόμενες τιμές του βέλους κάμψεως παρέχονται επίσης από πίνακες (πίν. 4.4.2), ως συνάρτηση του μήκους l της δοκού.

Πίνακας 4.4.2.
Επιτρεπόμενες τιμές βέλους κάμψεως.

Είδος έργου	***Επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως***
Σιδηροκατασκευή	$f_{επ} = l/400$
Οικοδομικές κατασκευές	$f_{επ} = l/400$
Ξύλινοι δοκοί	$f_{επ} = l/300$
Άτρακτοι μηχανών	$f_{επ} = l/1.000$ έως $f_{επ} = 3 \cdot l/1.000$
Δύσκαμπτοι άτρακτοι μηχανών	$f_{επ} = l/1.000$ έως $f_{επ} = 5 \cdot l/1.000$
Γερανογέφυρες (ηλεκτροκίνητες)	$f_{επ} = l/1.000$ έως $f_{επ} = 13 \cdot l/1.000$
Σκυρόδεμα	$f_{επ} = l/500$

Με βάση τη σχέση (4.7), το μέγιστο βέλος κάμψεως μας οδηγεί στην επιλογή της διατομής μιας δοκού. Συγκεκριμένα, υπολογίζομε την απαιτούμενη ροπή αδράνειας και απ' αυτήν τις διαστάσεις της διατομής. Σημειώνομε ότι οι σχέσεις (4.7) και (4.6) πρέπει να συναληθεύουν. Αυτό σημαίνει ότι εάν σε μία δοκό παρουσιαστεί βέλος κάμψεως μεγαλύτερο απ' το επιτρεπόμενο, παρόλο που μπορεί οι αναπτυσσόμενες τάσεις κάμψεως να είναι μικρότερες απ' την επιτρεπόμενη, εντούτοις πρέπει να αυξήσομε τη διατομή, ώστε το μέγιστο βέλος κάμψεως να γίνει μικρότερο απ' το επιτρεπόμενο.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται αμφιέρειστη δοκός μήκους $l = 90$ cm με κυκλική διατομή, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη με την εφαρμογή δύο καθέτων ίσων φορτίων $F = 1.000$ N σε ίσες αποστάσεις $α = 5$ cm από τα δύο άκρα της δοκού. Να υπολογιστεί η μικρότερη ακτίνα της κυκλικής διατομής της δοκού στρογγυλοποιημένη στον πλησιέστερο ακέραιο που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί, εάν το επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως είναι $f_{επ} = l/400$, η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $σ_{επ,κα} = 7.000$ N/cm^2 και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της είναι $E = 2 \cdot 10^6$ N/cm^2.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 90$ cm	$r = ;$
$F = 1.000$ N	
$α = 5$ cm	
$f_{επ} = l/400$	
$σ_{επ,κα} = 7.000$ N/cm^2	
$E = 2 \cdot 10^6$ N/cm^2	

Λύση.

Η ακτίνα της κυκλικής διατομής πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα και η σχέση της κάμψεως:

$$\frac{M}{W_x} \leq σ_{επ,κα} \tag{1}$$

και η σχέση για το επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως:

$$f_{max} \leq f_{επ} \tag{2}$$

Το μέγιστο βέλος κάμψεως για τη δοκό του παραδείγματος δίνεται από τον πίνακα 4.4.1:

$$f_{max} = \frac{F \cdot α \cdot (8 \cdot α^2 + 12 \cdot α \cdot β + 3β^2)}{24 \cdot E \cdot I_m}$$

όπου $β = l - 2 \cdot α = 90 \text{ cm} - 2 \cdot 5 \text{ cm} = 80$ cm και I_m η ροπή αδράνειας της διατομής.

Επειδή $f_{επ} = l/400$, έχομε:

$$\frac{F \cdot α \cdot (8 \cdot α^2 + 12 \cdot α \cdot β + 3β^2)}{24 \cdot E \cdot I_m} \leq \frac{l}{400} \Leftrightarrow I_m \geq \frac{400 \cdot F \cdot α \cdot (8 \cdot α^2 + 12 \cdot α \cdot β + 3β^2)}{24 \cdot E \cdot l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_m \geq \frac{400 \cdot 1.000 \text{ N} \cdot 5 \text{ cm} \cdot (8 \cdot 5^2 \text{cm}^2 + 12 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 80 \text{ cm} + 3 \cdot 80^2 \text{cm}^2)}{24 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2 \cdot 90 \text{ cm}} \Leftrightarrow I_m \geq 11{,}2 \text{ cm}^4$$

Από τον πίνακα 3.6.2 έχομε ότι η ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής δίνεται από τη σχέση: $I_m = \dfrac{π \cdot r^4}{4}$. Έτσι έχομε:

$$\frac{π \cdot r^4}{4} \geq 11{,}2 \text{ cm}^4 \Leftrightarrow r^4 \geq 14{,}27 \text{ cm}^4 \Leftrightarrow r \geq 1{,}94 \text{ cm} \tag{3}$$

Η ζητούμενη ακτίνα της κυκλικής διατομής πρέπει να ικανοποιεί και τη σχέση κάμψεως.

Η καμπτική ροπή στο τμήμα της δοκού μεταξύ των δύο δυνάμεων είναι:

$$M = F \cdot \alpha = 1.000\ N \cdot 5\ cm = 5.000\ N \cdot cm$$

Από τον πίνακα 3.8.2 έχομε ότι η ροπή αντιστάσεως της κυκλικής διατομής δίνεται από τη σχέση: $W_x = \dfrac{\pi \cdot r^3}{4}$

Αντικαθιστώντας στη σχέση κάμψεως έχομε:

$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow \frac{M}{\dfrac{\pi \cdot r^3}{4}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow r^3 \geq \frac{4 \cdot M}{\pi \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}} \Leftrightarrow r^3 \geq \frac{4 \cdot 5.000\ N{\cdot}cm}{\pi \cdot 7.000\ N/cm^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 \geq 0{,}91\ cm^3 \Leftrightarrow r \geq 0{,}97\ cm \qquad (4)$$

Οι ανισότητες (3) και (4) πρέπει να συναληθεύουν. Άρα πρέπει $r \geq 1{,}94$ cm. Επειδή η ακτίνα πρέπει να είναι στρογγυλοποιημένη στον πλησιέστερο ακέραιο, επιλέγομε $r = 2$ cm.

4.4.1 Υπολογισμός ελαστικής γραμμής.

Μας ενδιαφέρει επίσης, να προσδιορίζομε το σχήμα της καμπύλης, στην οποία μετατοπίζεται ο γεωμετρικός άξονας της δοκού από την ευθύγραμμη οριζόντια θέση, δηλαδή, όπως λέμε, να προσδιορίζομε το σχήμα της ελαστικής γραμμής της δοκού.

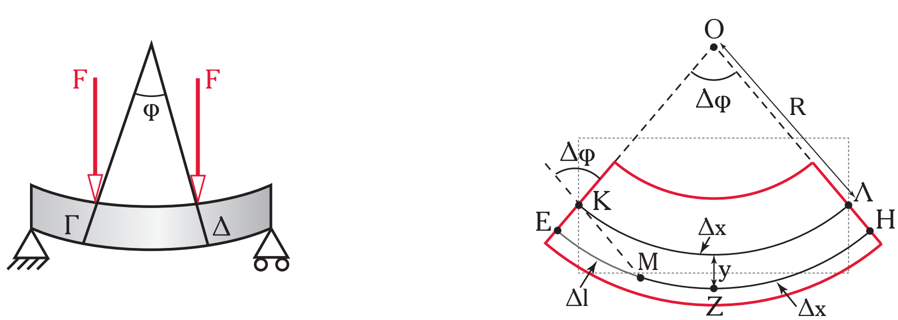
Ως ελαστική γραμμή ονομάζομε την καμπύλη στην οποία μετατρέπεται ο άξονας της δοκού κατά την καταπόνηση σε κάμψη.

Ας θεωρήσομε τη δοκό μήκους l του σχήματος 4.4β(α), η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Ο άξονας της δοκού καμπυλώνεται, έχοντας τα κοίλα προς τα πάνω.

Ας θεωρήσομε στοιχειώδες τμήμα της δοκού που έχει μήκος Δx, το οποίο φαίνεται σε μεγέθυνση στο σχήμα 4.4β(β). Η γραμμή ΚΛ αποτελεί τον ουδέτερο άξονα. Πριν τη φόρτιση της δοκού, το στοιχειώδες τμήμα ήταν ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Μετά τη φόρτιση, παραμορφώνεται· ωστόσο με βάση τις υποθέσεις της τεχνικής θεωρίας της κάμψεως [παράγρ. 4.3.1(δ)], οι ακραίες διατομές του παραμένουν επίπεδες. Λόγω της παραμορφώσεως, οι ακραίες αυτές διατομές είναι συγκλίνουσες, σχηματίζοντας μεταξύ τους γωνία Δφ. Το σημείο τομής τους Ο αποτελεί το κέντρο καμπυλότητάς τους με ακτίνα R. Ισχύει ότι:

$$\Delta x = R \cdot \Delta\varphi \qquad (4.8)$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσομε την τυχαία ίνα ΕΖΗ του στοιχειώδους τμήματος, η οποία βρίσκεται σε απόσταση y από τη γραμμή ΚΛ. Η ίνα αυτή υφίσταται επιμήκυνση Δl που δίνεται από



(α) (β)

Σχ. 4.4β.
(α) Δοκός καταπονούμενη σε συμμετρική καθαρή κάμψη. (β) Στοιχειώδες τμήμα της δοκού.

τη σχέση:

$$\Delta l = y \cdot \Delta\varphi \tag{4.9}$$

Όμως, για την επιμήκυνση Δl ισχύει ο νόμος του Hooke (βλ. σχέσεις 1.4 και 1.5). Έτσι έχομε:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{\Delta x} \tag{4.10}$$

όπου Ε είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της δοκού και σ η αναπτυσσόμενη τάση κάμψεως στην ίνα ΕΖΗ. Η τάση αυτή δίνεται από τη σχέση κάμψεως (βλ. σχέση 4.1):

$$\sigma = \frac{M}{I_m} \cdot y \tag{4.11}$$

όπου Μ η καμπτική ροπή και I_m η ροπή αδράνειας της διατομής της δοκού ως προς τον άξονα της ουδέτερης γραμμής.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.8), (4.9) και (4.11) στη σχέση (4.10) έχομε:

$$\frac{M}{I_m} \cdot y = E \cdot \frac{y \cdot \Delta\varphi}{R \cdot \Delta\varphi} \Leftrightarrow R = \frac{E \cdot I_m}{M} \tag{4.12}$$

Συνεπώς, η ελαστική γραμμή είναι ***κυκλικό τόξο*** με ακτίνα $R = \dfrac{E \cdot I_m}{M}$.

Επισημαίνομε ότι η ελαστική γραμμή είναι κυκλικό τόξο μόνο στις περιοχές της δοκού στις οποίες αναπτύσσεται καθαρή κάμψη, δηλαδή η τιμή της καμπτικής ροπής είναι σταθερή.

4.4.2 Γωνία στροφής των ακραίων διατομών.

Στη μελέτη της κάμψεως ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο υπολογισμός της γωνίας στροφής των ακραίων διατομών της δοκού (ή του τμήματός της) που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Η γωνία αυτή είναι η γωνία φ που φαίνεται στο σχήμα 4.4β(α). Αποδεικνύεται ότι η γωνία φ δίνεται από τη σχέση (σε ακτίνια):

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I_m} \tag{4.13}$$

Η ποσότητα $E \cdot I_m$ που εμφανίζεται στις σχέσεις (4.12) και (4.13) ονομάζεται ***μέτρο δυσκαμψίας***. Από τη σχέση (4.13) έχομε ότι η ποσότητα $E \cdot I_m/l$ αποτελεί την καμπτική ροπή που χρειάζεται η δοκός, ώστε να στραφούν οι ακραίες διατομές της κατά μοναδιαία γωνία στροφής.

Παράδειγμα 5.

Για τη δοκό του παραδείγματος 4, να υπολογιστούν:

α) Η ακτίνα καμπυλότητας της ελαστικής γραμμής και

β) η γωνία στροφής των ακραίων διατομών του τμήματος της δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη.

Λύση.

α) Η ελαστική γραμμή είναι κυκλικό τόξο με ακτίνα $R = \dfrac{E \cdot I_m}{M}$

Η ροπή αδράνειας για r = 2 cm είναι: $I_m = \dfrac{\pi \cdot r^4}{4} = \dfrac{\pi \cdot 2^4 cm^4}{4} = 12{,}56\ cm^4$

Έτσι έχομε: $R = \dfrac{E \cdot I_m}{M} = \dfrac{2 \cdot 10^6\ N/cm^2 \cdot 12{,}56\ cm^4}{5.000\ N \cdot cm} = 5.024\ cm = 50{,}24\ m$

β) Η γωνία στροφής των ακραίων διατομών της δοκού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varphi=\frac{M \cdot l}{E \cdot I_m}=\frac{5.000\ N{\cdot}cm \cdot 90\ cm}{2{\cdot}10^6\ N/cm^2{\cdot}12{,}56\ cm^4} = 17{,}9 \cdot 10^{-3}\ rad \approx 1^o$$

4.4.3 Σύγκριση συμμετρικής καθαρής κάμψεως με εφελκυσμό και θλίψη.

Στα προηγούμενα είδαμε ότι η συμμετρική καθαρή κάμψη έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων. Για λόγους καλύτερης κατανοήσεως της κάμψεως παραθέτομε στον πίνακα 4.4.3 συνοπτικά τις ομοιότητες και τις διαφορές της κάμψεως με τον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Πίνακας 4.4.3.

Θέμα	***Κάμψη***	***Εφελκυσμός***	***Θλίψη***
Είδος τάσεων	Ορθές	Ορθές	Ορθές
Εφελκυστικές ή θλιπτικές τάσεις	Εφελκυστικές και θλιπτικές	Μόνο εφελκυστικές	Μόνο θλιπτικές
Μεταβλητότητα τάσεων στη διατομή	Μεταβλητή τάση	Σταθερή τάση	Σταθερή τάση
Επιτρεπόμενη τάση	Ορίζεται	Ορίζεται	Ορίζεται
Παραμορφώσεις	Βέλος κάμψεως, αλλαγή σχήματος ουδέτερης γραμμής, στροφή των ακραίων διατομών	Επιμήκυνση (αύξηση του μήκους) και μείωση διατομής	Επιβράχυνση (μείωση του μήκους) και αύξηση διατομής

Ασκήσεις.

1. *Δίνεται αμφιέρειστη δοκός μήκους l = 120 cm με τετραγωνική διατομή, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη με την εφαρμογή δύο καθέτων ίσων φορτίων F = 1.500 N σε ίσες αποστάσεις a = 15 cm από τα δύο άκρα της δοκού. Να υπολογιστεί η πλευρά της τετραγωνικής διατομής της δοκού στρογγυλοποιημένη στον πλησιέστερο ακέραιο που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί, εάν το επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως είναι $f_{επ} = l/300$, η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως $σ_{επ,κα}$ = 8.500 N/cm^2 και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της είναι $E = 1{,}9 \cdot 10^6$ N/cm^2.*

2. *Για τη δοκό της ασκήσεως 1, να υπολογιστούν:*
α) Η ακτίνα καμπυλότητας της ελαστικής γραμμής.
β) Η γωνία στροφής των ακραίων διατομών του τμήματος της δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη.

4.5 Υπερστατικά προβλήματα κάμψεως.

Κατ' αναλογία των υπερστατικών προβλημάτων εφελκυσμού και θλίψεως που περιγράφομε στην παράγραφο 2.7, έχομε και τα ***υπερστατικά προβλήματα κάμψεως***. Στα προβλήματα αυτά, δεν μπορούν να υπολογισθούν οι δυνάμεις που καταπονούν ένα σώμα με τη βοήθεια μόνο των σχέσεων στατικής ισορροπίας:

$$\sum F = 0 \tag{4.14}$$

$$\sum M = 0 \tag{4.15}$$

αλλά απαιτούνται πρόσθετες σχέσεις (εξισώσεις). Το πλήθος των προσθέτων σχέσεων που απαιτούνται ονομάζεται ***βαθμός υπερστατικότητας*** του προβλήματός μας.

Οι πρόσθετες εξισώσεις προκύπτουν κυρίως από την παραμορφωμένη κατάσταση. Τέτοιες εξισώσεις, μεταξύ άλλων, είναι:

α) Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής.

β) Η εξίσωση που ορίζεται από την ισότητα του βέλους κάμψεως με το μηδέν για τις στηρίξεις της αρθρώσεως ή της κυλίσεως.

γ) Οι εξισώσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της ***αρχής της επαλληλίας***.

Η αρχή της επαλληλίας μάς λέει ότι οι δυνάμεις που ενεργούν ταυτόχρονα σ' ένα σώμα προκαλούν τις ίδιες παραμορφώσεις που θα προκαλούσαν αν ενεργούσαν σ' αυτό χωριστά. Έτσι, η ολική παραμόρφωση που προκαλείται στο σώμα από τις δυνάμεις αυτές, ισούται με το άθροισμα των παραμορφώσεων που θα προκαλούσε η καθεμία αν ενεργούσε χωριστά.

Με βάση τα παραπάνω, η επίλυση των υπερστατικών προβλημάτων κάμψεως πραγματοποιείται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

α) Λαμβάνομε τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας χωρίς τις τυχόν παραμορφώσεις.

β) Εξετάζομε εάν το πλήθος των ανωτέρω εξισώσεων είναι αρκετό, ώστε να προσδιοριστούν οι άγνωστες δυνάμεις που καταπονούν το σώμα.

γ) Εάν το πλήθος των ανωτέρω εξισώσεων δεν είναι αρκετό:

– Σχεδιάζομε το σύστημα στην παραμορφωμένη κατάσταση.
– Λαμβάνομε τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στην κατάσταση αυτή και
– θεωρούμε την εξίσωση της ελαστικής γραμμής.

δ) Επιλύομε το σύστημα των εξισώσεων που έχομε στη διάθεσή μας από τα βήματα (α) και (γ).

Σημειώνεται ότι για να γίνει η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων στο βήμα (δ), πρέπει το πλήθος τους να ισούται με τα άγνωστα μεγέθη.

Αφού υπολογίσομε με την ανωτέρω διαδικασία τις άγνωστες δυνάμεις, μπορούμε στη συνέχεια να προσδιορίσομε τις αναπτυσσόμενες τάσεις κάμψεως, σύμφωνα με όσα αναφέρομε στις προηγούμενες παραγράφους.

Παράδειγμα 6.

Δίνεται η δοκός μήκους l = 100 cm του σχήματος 4.5α(α), στο μέσο της οποίας ενεργεί κατακόρυφη δύναμη F = 1.000 N. Προκειμένου να είμαστε σε θέση να μελετήσομε την καταπόνηση της κάμψεως, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις από τις στηρίξεις A και B.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 100 cm	F_A = ;
F = 1.000 N	F_B = ;
α = l/2 = 50 cm	

Λύση.

Η δοκός στηρίζεται στο σημείο A με πάκτωση και στο σημείο B με κύλιση. Στο σημείο A εφαρμόζεται η αντίδραση F_A και η ροπή πακτώσεως $M_{πακ}$. Στο σημείο B αναπτύσσεται η κατακόρυφη αντίδραση F_B, [σχ. 4.5α(β)]. Η αντίδραση F_A αναλύεται σε δύο συνιστώσες, τις $F_{A,x}$ και $F_{A,y}$, [σχ. 4.5α(γ)]. Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, εφαρμόζομε τις σχέσεις στατικής ισορροπίας της δοκού:

$$F_{A,x} = 0 \tag{1}$$

$$F_{A,y} + F_B - F = 0 \tag{2}$$

$$M_{\pi\alpha\kappa} + F \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0 \qquad (3)$$

Από τη σχέση (1) συμπεραίνομε ότι $F_{A,y} = F_A$. Αντικαθιστώντας στη (2) έχομε:

$$F_A + F_B - F = 0 \qquad (4)$$

Επομένως, έχομε δύο εξισώσεις, τις (3) και (4) με τρεις αγνώστους, τους F_A, F_B και $M_{\pi\alpha\kappa}$. Άρα, έχομε ένα υπερστατικό πρόβλημα με βαθμό υπερστατικότητας 1 και χρειαζόμαστε μία επί πλέον εξίσωση για να το λύσομε.

Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας. Εάν στη θέση της στηρίξεως στο σημείο Β τοποθετήσομε την άγνωστη αντίδραση F_B, τότε έχομε μία πρόβολο δοκό ΑΒ, στην οποία ενεργούν συγχρόνως η δύναμη F και η άγνωστη κατακόρυφη δύναμη F_B. Οι δυνάμεις αυτές προκαλούν στο άκρο Β της προβόλου κατακόρυφες μετατοπίσεις, οι οποίες περιγράφονται απ' τα μέγιστα βέλη κάμψεως στο σημείο Β, όπως φαίνονται στο σχήμα 4.5β.

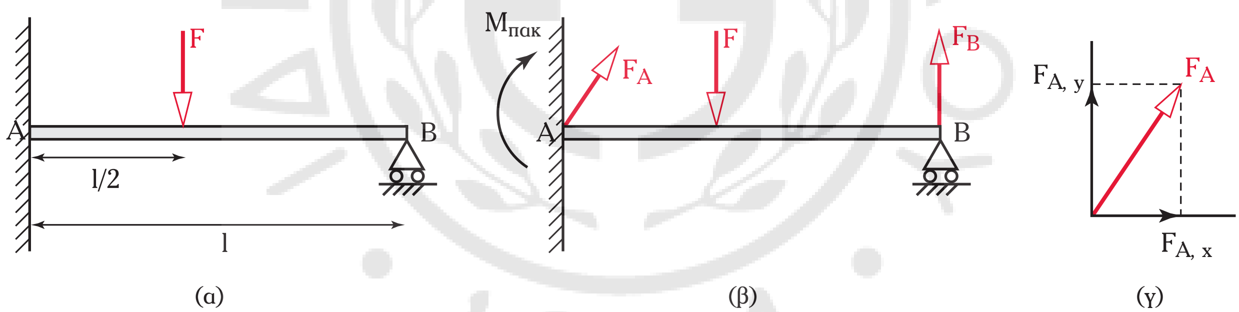
Εάν Ε είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου και I_m η ροπή αδράνειας της διατομής της, τα μέγιστα βέλη κάμψεως παρέχονται από τον πίνακα 4.4.2. Είναι: $f_{1,max} = \dfrac{F \cdot \alpha^3}{3 \cdot E \cdot I_m}$, όπου $\alpha = l/2$.

Άρα,

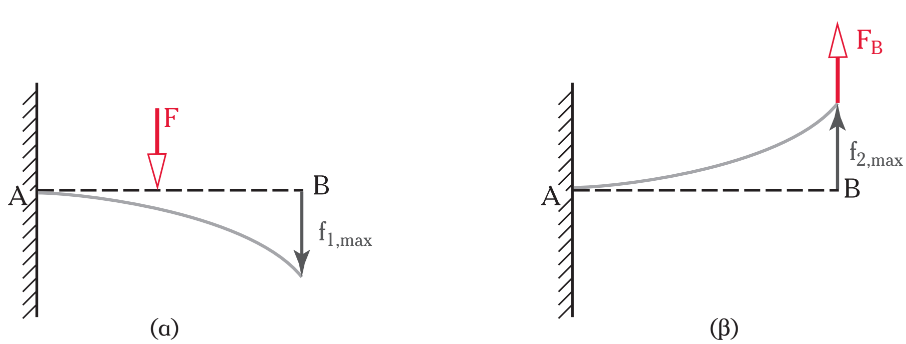
$$f_{1,max} = \frac{F \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_m} \qquad (5)$$

Επίσης, είναι:

$$f_{2,max} = -\frac{F_B \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_m} \qquad (6)$$



Σχ. 4.5α.
(α) Το σχήμα του παραδείγματος 6. (β) Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στη δοκό. (γ) Η ανάλυση της αντιδράσεως F_A.



Σχ. 4.5β.
(α) Η κάμψη της προβόλου δοκού λόγω της δυνάμεως F. (β) Η κάμψη της προβόλου δοκού λόγω της αντιδράσεως F_B.

όπου το πρόσημο (–) σημαίνει βέλος προς τα πάνω, αντίθετα από το $f_{1,max}$, όπως δείχνει το σχήμα 4.5β. Όμως η στήριξη της δοκού στο σημείο Β είναι ανυποχώρητη. Συνεπώς, η μετατόπιση του σημείου Β από την ταυτόχρονη δράση των δυνάμεων F και F_B είναι μηδενική. Άρα έχομε:

$$f_{1,max} + f_{2,max} = 0 \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις (5) και (6) στην (7) λαμβάνομε:

$$\frac{F \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_m} - \frac{F_B \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_m} = 0 \Leftrightarrow F = 8 \cdot F_B \qquad (8)$$

Έχομε τώρα τρεις εξισώσεις, τις (3), (4) και (8), από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσομε τις ζητούμενες δυνάμεις F_A και F_B. Από τη σχέση (8) έχομε:

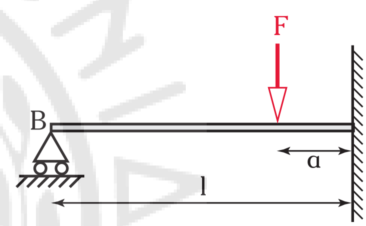
$$F_B = \frac{F}{8} = \frac{1.000\ N}{8} = 125\ N$$

Από τη σχέση (4) έχομε:

$$F_A = F - F_B = 1.000\ N - 125\ N = 875\ N$$

Άσκηση.

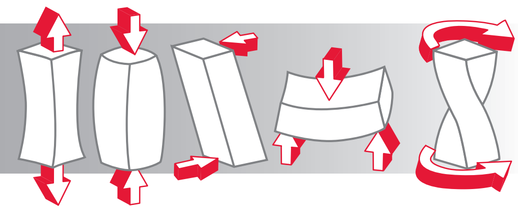
Δίνεται η δοκός μήκους l = 80 cm του σχήματος 4.5γ, στην οποία ενεργεί κατακόρυφη δύναμη F = 2.500 N σε απόσταση α = 20 cm από το άκρο Α. Προκειμένου να είμαστε σε θέση να μελετήσομε την καταπόνηση της κάμψεως, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα σημεία στηρίξεως Α και Β και η ροπή πακτώσεως στο σημείο στηρίξεως Α.



Σχ. 4.5γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Στρέψη



5.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε την καταπόνηση της στρέψεως. Συγκεκριμένα, δίνομε τον ορισμό της, παρουσιάζομε ξεχωριστά τις περιπτώσεις της στρέψεως σε δοκό κυκλικής και μη κυκλικής διατομής, αναπτύσσομε παραδείγματα εφαρμογής της και εξηγούμε τις προκαλούμενες τάσεις και παραμορφώσεις. Περαιτέρω, εξετάζομε τις περιπτώσεις της στρέψεως ράβδου με λεπτά τοιχώματα και της στρέψεως περιστρεφόμενου άξονα και παραθέτομε σχετικά παραδείγματα.

Ο πίνακας 5.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 5.1.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Αριθμός στροφών ανά μονάδα χρόνου	n	rpm, rps
Γωνιακή παραμόρφωση (ολισθήσεως)	γ	rad,°
Επιτρεπόμενη τάση στρέψεως	$\tau_{επ,\, στ}$	N/cm^2, N/mm^2
Ισχύς	P	W, PS, kpm/s
Μέγιστη τάση στρέψεως	τ_{max}	N/cm^2, N/mm^2
Στροφή	θ	rad,°
Τάση στρέψεως	$\tau_{στ}$	N/cm^2, N/mm^2

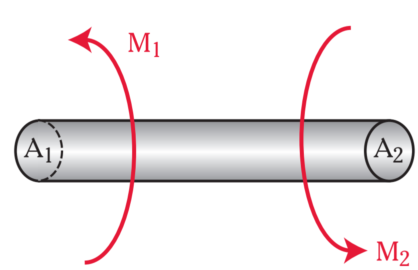
5.2 Η καταπόνηση της στρέψεως.

Ας θεωρήσομε τη ράβδο του σχήματος 5.2α. Στη διατομή A_1 της ράβδου ενεργεί ροπή M_1, ενώ στη διατομή A_2 ροπή M_2 και μάλιστα η ροπή M_2 είναι ίση με τη M_1, αλλά αντίθετης φοράς. Η ροπή M_1 τείνει να περιστρέψει τη διατομή A_1 της ράβδου κατά τη φορά που δείχνει το σχετικό βέλος στο σχήμα, ενώ η ροπή M_2 τείνει να περιστρέψει τη διατομή A_2 της ράβδου κατά την αντίθετη φορά. Στην κατάσταση αυτή η ράβδος λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη.

Γενικότερα:

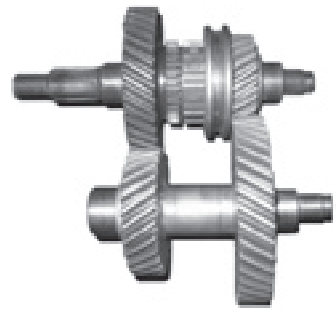
Ένα στερεό σώμα λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη όταν σε δύο διατομές κάθετες στον άξονα του σώματος ενεργούν δύο ροπές ίσες αλλά αντίθετης φοράς.

Η καταπόνηση της στρέψεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη είναι τα ημιαξόνια των αυτοκινήτων, ο κορμός του κατσαβιδιού κατά την περιστροφή μιας βίδας, ο άξονας ενός ηλεκτροκινητήρα κ.λπ..



Σχ. 5.2α.
Ράβδος που καταπονείται σε στρέψη.

Επίσης, στην καθημερινή μας ζωή η καταπόνηση της στρέψεως εμφανίζεται πολλές φορές ταυτοχρόνως με άλλες καταπονήσεις, όπως με κάμψη, θλίψη ή εφελκυσμό. Χαρακτηριστικά αναφέρομε το παράδειγμα των δύο ατράκτων με γρανάζια του σχήματος 5.2β. Κάθε μία από τις δύο ατράκτους καταπονείται σε στρέψη. Ταυτόχρονα, κάθε μία από τις δύο ατράκτους καταπονείται σε κάμψη, η οποία οφείλεται στη δύναμη που εξασκεί το γρανάζι της άλλης ατράκτου. Περισσότερες πληροφορίες για την έννοια των ατράκτων παρουσιάζομε στην παράγραφο 5.6.



Σχ. 5.2β.

5.3 Τάσεις στρέψεως σε δοκό κυκλικής διατομής.

Προκειμένου να μελετήσομε αναλυτικά την καταπόνηση της στρέψεως, ας θεωρήσομε τη δοκό κυκλικής διατομής του σχήματος 5.3α. Η δοκός είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της και έχει μήκος L και ακτίνα R ή ισοδύναμα διάμετρο D = 2 R. Πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε καταπονήσεως σε στρέψη μπορούμε να χαράξομε στην περιφέρεια της δοκού ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ παράλληλο στον άξονα της δοκού.

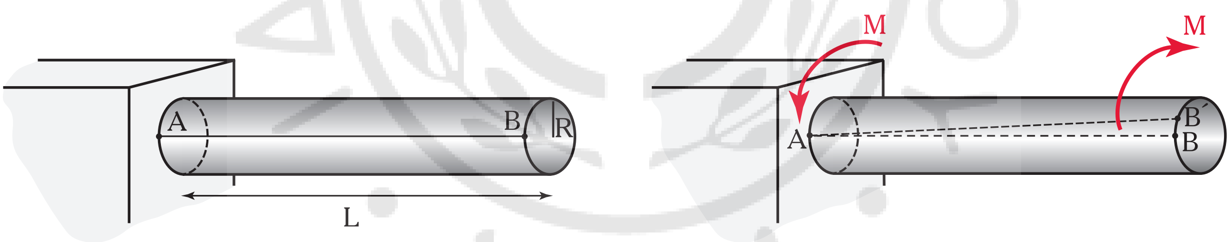
Στη συνέχεια, στο ελεύθερο άκρο της δοκού εφαρμόζομε ροπή Μ, η οποία ονομάζεται ***ροπή στρέψεως***. Με την εφαρμογή της ροπής αυτής, στο πακτωμένο άκρο της δοκού εμφανίζεται ροπή ίση και αντίθετη με την Μ, η οποία προέρχεται από το πακτωμένο άκρο. Κατά συνέπεια, η δοκός καταπονείται σε στρέψη.

Η καταπόνηση σε στρέψη της δοκού χαρακτηρίζεται από τα εξής:

α) Το σημείο Β του ελεύθερου άκρου της δοκού περιστρέφεται[1] φτάνοντας σε νέα θέση Β΄, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3β(α). Η περιστροφή του σημείου Β γίνεται κατά γωνία θ, η οποία ονομάζεται ***στροφή***. Η στροφή αποτελεί το μέτρο της παραμορφώσεως της κυκλικής διατομής του ελεύθερου άκρου της ράβδου.

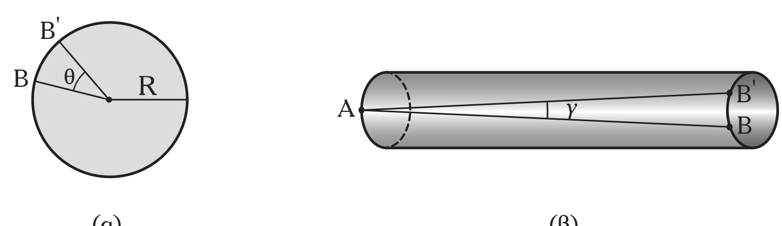
Το μήκος του διανυόμενου τόξου ΒΒ΄ ισούται με:

$$BB' = R \cdot \theta \tag{5.1}$$



Σχ. 5.3α.

Δοκός κυκλικής διατομής: (α) Πριν την καταπόνηση σε στρέψη. (β) Καταπονούμενη σε στρέψη.



Σχ. 5.3β.

Κατά την καταπόνηση σε στρέψη της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 5.3α: (α) Το σημείο Β περιστρέφεται κατά γωνία θ. (β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μετακινείται κατά γωνία γ.

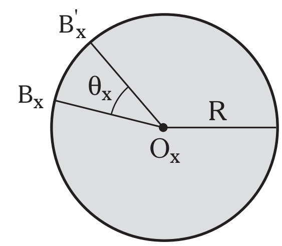
[1] Έχομε κάνει την παραδοχή ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται πριν από την παραμόρφωση πάνω σε μία οποιαδήποτε διατομή της δοκού κάθετη στον άξονά της εξακολουθούν να βρίσκονται στην ίδια κάθετη διατομή και μετά την παραμόρφωσή της.

όπου η στροφή θ μετρείται σε ακτίνια.

β) Ανάλογη περιστροφή μ' αυτήν που εκτελεί το σημείο Β εκτελούν και όλα τα ενδιάμεσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

γ) Έτσι, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μετακινείται φτάνοντας σε νέα θέση ΑΒ΄, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3β(β). Η μετακίνηση του τμήματος ΑΒ γίνεται κατά γωνία γ, η οποία ονομάζεται ***γωνιακή παραμόρφωση (ολισθήσεως)***. Το διανυόμενο τόξο ΒΒ΄ έχει μήκος ίσο με:

$$BB' = L \cdot \gamma \tag{5.2}$$



Σχ. 5.3γ.
Κατά την καταπόνηση σε στρέψη της δοκού κυκλικής διατομής (σχ. 5.3α) το σημείο B_x περιστρέφεται κατά γωνία θ_x.

όπου η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια.

Με συνδυασμό των εξισώσεων (5.1) και (5.2) προκύπτει η ακόλουθη σχέση μεταξύ της γωνιακής παραμορφώσεως ολισθήσεως και της στροφής, που εμφανίζει η διατομή του ελεύθερου άκρου της δοκού:

$$\gamma = \frac{R \cdot \theta}{L} \tag{5.3}$$

Ας εξετάσομε στη συνέχεια, με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, την παραμόρφωση που προκαλείται από την καταπόνηση σε στρέψη, σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού. Κάθε ενδιάμεσο τυχαίο σημείο B_x του τμήματος ΑΒ χαρακτηρίζεται απ' την απόσταση του x από το πακτωμένο άκρο. Λόγω της ροπής στρέψεως, το σημείο B_x περιστρέφεται φτάνοντας σε νέα θέση B_x' (σχ. 5.3γ). Έτσι, συνολικά η κυκλική διατομή της δοκού που αντιστοιχεί στο σημείο B_x περιστρέφεται κατά στροφή θ_x, η οποία εξαρτάται από την απόσταση x. Η στροφή θ_x αποτελεί το μέτρο της παραμορφώσεως της κυκλικής διατομής της δοκού που βρίσκεται σε απόσταση x από το πακτωμένο άκρο. Το μήκος του διανυόμενου τόξου B_xB_x' ισούται με:

$$B_xB_x' = R \cdot \theta_x \tag{5.4}$$

όπου η στροφή θ_x μετρείται σε ακτίνια.

Εξάλλου, η μετακίνηση του τμήματος AB_x γίνεται κατά τη γωνιακή παραμόρφωση γ, η οποία είναι σταθερή για όλες τις διατομές της δοκού (για συγκεκριμένη ροπή στρέψεως). Το διανυόμενο τόξο B_xB_x' έχει μήκος ίσο με:

$$B_xB_x' = x \cdot \gamma \tag{5.5}$$

όπου η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια.

Με συνδυασμό των εξισώσεων (5.4) και (5.5) προκύπτει η ακόλουθη σχέση μεταξύ της στροφής που εμφανίζει η διατομή της δοκού που βρίσκεται σε απόσταση x και της αποστάσεως x:

$$\theta_x = \frac{\gamma}{R} x \tag{5.6}$$

Συνεπώς, για συγκεκριμένη ροπή στρέψεως:

Η στροφή μίας διατομής της δοκού κυκλικής διατομής μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση της διατομής από το πακτωμένο άκρο της δοκού.

Έτσι, όσο πλησιάζομε προς το ελεύθερο άκρο της δοκού, τόσο μεγαλύτερη είναι η στροφή.

Ειδικές περιπτώσεις:

α) Όπως προκύπτει από την εξίσωση (5.6) θέτοντας x = 0 η στροφή για τη διατομή του πακτωμένου άκρου είναι ίση με το μηδέν.

β) Όπως προκύπτει από την εξίσωση (5.6) θέτοντας x = L η στροφή για τη διατομή του ελεύθερου άκρου είναι ίση με $\theta = \frac{\gamma}{R} L$, σε πλήρη συμφωνία με την εξίσωση (5.3).

5.3.1 Ο νόμος του Hooke για τη στρέψη.

Στη συνέχεια, ας εξετάσομε τι συμβαίνει όταν μεταβάλλομε τη ροπή στρέψεως που ενεργεί στο ελεύθερο άκρο της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 5.3α. Καταρχήν, εάν σταματήσομε την εφαρμογή της ροπής στρέψεως (περίπτωση μηδενικής ροπής στρέψεως) τότε, τόσο η γωνιακή παραμόρφωση όσο και η στροφή όλων των διατομών της δοκού αναιρούνται.

Εάν διπλασιάσομε τη ροπή στρέψεως, τότε η στροφή των διατομών της δοκού διπλασιάζεται. Το ίδιο ισχύει και για τη γωνιακή παραμόρφωση. Εάν τριπλασιάσομε τη ροπή στρέψεως, τότε η στροφή των διατομών της δοκού τριπλασιάζεται. Εάν, στη συνέχεια μηδενίσομε την εφαρμογή της ροπής στρέψεως τότε και πάλι, τόσο η γωνιακή παραμόρφωση όσο και η στροφή όλων των διατομών της δοκού αναιρούνται. Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι ο νόμος του Hooke ισχύει και για την καταπόνηση της στρέψεως σε δοκό κυκλικής διατομής.

Συνεπώς, ο νόμος του Hooke για τη στρέψη διατυπώνεται ως εξής:

α) ***Η στροφή είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως.***

β) ***Η γωνιακή παραμόρφωση είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως.***

Κατ' αναλογία των περιπτώσεων του εφελκυσμού και της θλίψεως και επειδή όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μέγιστη τάση στρέψεως είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως, ο νόμος του Hooke γράφεται επίσης στην ακόλουθη μορφή:

$$\tau_{max} = G \cdot \gamma \qquad (5.7)$$

όπου τ_{max} η μέγιστη τάση στρέψεως (βλ. υποπαράγρ. 5.3.2) και G το μέτρο ολισθήσεως του υλικού.

Επισημαίνεται ότι η γωνιακή παραμόρφωση γ μειώνεται για σημεία στο εσωτερικό μιας διατομής και μηδενίζεται στο κέντρο της. Έτσι οι τάσεις στρέψεως έχουν μηδενική τιμή στο κέντρο της κυκλικής διατομής και μέγιστη τιμή στην περιφέρεια του κύκλου με γραμμική μεταβολή στο ενδιάμεσο.

Ωστόσο, όπως συμβαίνει και στις αντίστοιχες περιπτώσεις των άλλων καταπονήσεων, το ανωτέρω φαινόμενο εμφανίζεται μέχρι ένα όριο. Έτσι και στην περίπτωση της στρέψεως έχομε το ***όριο αναλογίας της στρέψεως,*** το όριο ελαστικότητας της στρέψεως και το ***όριο διαρροής της στρέψεως*** (βλ. παράγρ. 1.3 σχετικά με το πείραμα του εφελκυσμού). Εάν κατά τη στρέψη, η εφαρμοζόμενη ροπή στρέψεως υπερβεί το όριο ελαστικότητας της στρέψεως τότε έχομε μόνιμη παραμόρφωση, η οποία εκδηλώνεται με μία μόνιμη στροφή.

5.3.2 Οι τάσεις στρέψεως και η σχέση στρέψεως.

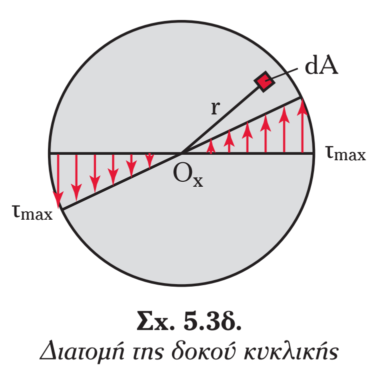
Στο επίπεδο κάθε διατομής της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 5.3α, αναπτύσσονται, λόγω της ροπής στρέψεως, διατμητικές τάσεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***τάσεις στρέψεως***.

Στη συνέχεια, ας θεωρήσομε τη διατομή Α της δοκού που απεικονίζεται στο σχήμα 5.3δ. Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA της διατομής υπάρχει τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$, λόγω της εφαρμοζόμενης σε αυτό εσωτερικής δυνάμεως F_{dA}, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\sigma\tau} = \tau_{\sigma\tau} \cdot dA \qquad (5.8)$$

Η δύναμη F_{dA} προκαλεί μία εσωτερική ροπή M_{dA} στο στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA που βρίσκεται σε απόσταση r από τον άξονα της δοκού. Η ροπή M_{dA}, λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση (5.8), δίνεται από τη σχέση:

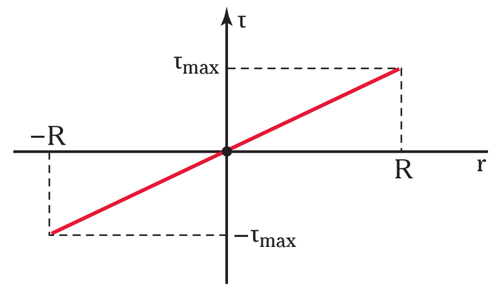
$$M_{dA} = F_{dA} \cdot r \Leftrightarrow M_{dA} = \tau_{\sigma\tau} \cdot r \cdot dA \qquad (5.9)$$



Σχ. 5.3δ.
Διατομή της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 5.3α.

Δεδομένου ότι η διατομή βρίσκεται σε ισορροπία, το άθροισμα όλων των ροπών M_{dA} όλων των στοιχειωδών τμημάτων επιφάνειας dA της διατομής ισούται με τη ροπή στρέψεως M, δηλαδή έχομε:

$$M = \int_A \tau_{\sigma\tau} \cdot r \cdot dA \qquad (5.10)$$



Σχ. 5.3ε.
Η τάση στρέψεως είναι ανάλογη της αποστάσεως από το κέντρο της κυκλικής διατομής.

Όμως, η τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ δεν είναι σταθερή και μάλιστα εξαρτάται από την απόσταση r της στοιχειώδους επιφάνειας dA από το κέντρο της κυκλικής διατομής, στην οποία αντιστοιχεί. Συγκεκριμένα, η τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ είναι μεγαλύτερη στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής και ελαττώνεται όσο η απόσταση r μικραίνει (σχ. 5.3δ). Η τάση στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ είναι μηδενική στο κέντρο της κυκλικής διατομής. Το σχήμα 5.3ε απεικονίζει τη σχέση μεταξύ της τάσεως στρέψεως $\tau_{\sigma\tau}$ και της αποστάσεως r. Η σχέση αυτή είναι της μορφής:

$$\tau_{\sigma\tau} = K \cdot r \qquad (5.11)$$

όπου K είναι μια σταθερά αναλογίας.

Γράφοντας τη σχέση (5.11) για την τάση στρέψεως στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής της δοκού (όπου $r = R$) έχομε:

$$\tau_{max} = K \cdot R \qquad (5.12)$$

Η τάση τ_{max} αντιπροσωπεύει τη μέγιστη τάση στρέψεως που αντιστοιχεί στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής της δοκού. Απαλείφοντας τη σταθερά K από τις εξισώσεις (5.11) και (5.12) έχομε:

$$\tau_{\sigma\tau} = \frac{\tau_{max}}{R} \cdot r \qquad (5.13)$$

Περαιτέρω, εισάγοντας τη σχέση (5.13) στη σχέση (5.10) λαμβάνομε:

$$M = \int_A \frac{\tau_{max}}{R} \cdot r \cdot r \cdot dA \Leftrightarrow M = \frac{\tau_{max}}{R} \cdot \int_A r^2 dA \qquad (5.14)$$

Όμως το ολοκλήρωμα

$$I_0 = \int_A r^2 dA \qquad (5.15)$$

αποτελεί την ***πολική ροπή αδράνειας*** (παράγρ. 3.9). Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.15) στην εξίσωση (5.14) και λύνοντας ως προς τη μέγιστη τάση στρέψεως, λαμβάνομε:

$$\tau_{max} = \frac{R}{I_o} \cdot M \qquad (5.16)$$

Επίσης, το πηλίκον

$$W_0 = \frac{I_o}{R} \qquad (5.17)$$

είναι η πολική ροπή αντιστάσεως (παράγρ. 3.10). Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.17) στην εξίσωση (5.16) και λύνοντας ως προς τη μέγιστη τάση στρέψεως, λαμβάνομε:

$$\tau_{max} = \frac{1}{W_o} \cdot M \qquad (5.18)$$

Η σχέση (5.18), όπως και η σχέση (5.16), χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μέγιστης τάσεως στρέψεως. Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη από την ***επιτρεπόμενη τάση στρέψεως***, η οποία συμβολίζεται με $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$. Δηλαδή, με βάση τις σχέσεις (5.16) και (5.18), πρέπει να ισχύει:

$$\tau_{max} = \frac{R}{I_o} \cdot M \ \leq \tau_{επ,στ} \tag{5.19}$$

ή ισοδύναμα

$$\tau_{max} = \frac{1}{W_o} \cdot M \leq \tau_{επ,στ} \tag{5.20}$$

Για την κυκλική διατομή της δοκού διαμέτρου D, τα μεγέθη της πολικής ροπής αδράνειας και της πολικής ροπής αντιστάσεως δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις (βλ. πίνακες 3.9.2 και 3.10.2):

$$I_o = \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \tag{5.21}$$

$$W_o = \frac{\pi}{16} D^3 \tag{5.22}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.21) στην (5.19) είτε τη σχέση (5.22) στην (5.20) λαμβάνομε:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{επ,στ} \tag{5.23}$$

Η σχέση (5.23) αποτελεί τη ***σχέση στρέψεως για δοκό κυκλικής διατομής*** και χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων στρέψεως για δοκούς κυκλικής διατομής.

Παράδειγμα 1.

Η τάση θραύσεως ενός υλικού σε εφελκυσμό είναι ίση με $\sigma_{θρ,εφ} = 3.000 \ \frac{N}{cm^2}$. Να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως εάν λαμβάνεται ίση με το 80% της τάσεως θραύσεως σε εφελκυσμό.

Λύση.

Η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι:

$$\tau_{επ,σπ} = 0{,}8 \cdot \sigma_{θρ,εφ} = 0{,}8 \cdot 3.000 \frac{N}{cm^2} = 2.400 \frac{N}{cm^2}.$$

5.3.3 Προβλήματα στρέψεως.

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στη στρέψη δοκών κυκλικής διατομής είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων που έχομε μελετήσει. Δηλαδή, αφορούν:

α) Στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας.
β) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της διατομής.
γ) Στον υπολογισμό της ικανότητας φορτίσεως

και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων.

Παράδειγμα 2.

Ποια είναι η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου D = 40 mm όταν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι 4.000 N/cm^2;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
D = 40 mm	M_{max} = ;
$\tau_{επ,στ}$ = 4.000 N/cm^2	

Λύση.

Λύνομε τη σχέση στρέψεως για δοκό κυκλικής διατομής ως προς τη ροπή στρέψεως:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot 4^3\,cm^3}{16} \cdot 4.000\,\frac{N}{cm^2} \Leftrightarrow M \leq 50.240\ N{\cdot}cm$$

Άρα η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί στη δοκό είναι M_{max} = 50.240 N·cm.

5.3.4 Υπολογισμός στροφής και γωνιακής παραμορφώσεως.

Όπως προαναφέραμε, η παραμόρφωση που υφίσταται η δοκός κυκλικής διατομής του σχήματος 5.3α, η οποία καταπονείται σε στρέψη μετρείται πρώτον από τη γωνιακή παραμόρφωση της δοκού και δεύτερον από τη στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού.

Ακολουθεί η παρουσίαση του υπολογισμού καθεμιάς από τις παραμορφώσεις αυτές.

1) Γωνιακή παραμόρφωση της δοκού.

Από το νόμο του Hooke για τη στρέψη γνωρίζομε ότι η γωνιακή παραμόρφωση της δοκού που καταπονείται σε στρέψη είναι ανάλογη της μέγιστης τάσεως στρέψεως, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\tau_{max} = G \cdot \gamma \qquad (5.24)$$

όπου η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια και G είναι το μέτρο ολισθήσεως του υλικού που καταπονείται σε στρέψη.

Ο πίνακας 5.3 παρουσιάζει το ***μέτρο ολισθήσεως για διάφορα υλικά***.

Πίνακας 5.3.

Υλικό	***Μέτρο ολισθήσεως***
Ορείχαλκος κασσιτέρου	$3{,}5 \cdot 10^6$ N/cm²
Ορείχαλκος ψευδαργύρου	$3{,}0 \cdot 10^6$ N/cm²
Αλουμίνιο	$2{,}7 \cdot 10^6$ N/cm²
Χαλκός	$4{,}0 \cdot 10^6$ N/cm²
Φαιός σίδηρος	$4{,}0 \cdot 10^6$ N/cm²
Σφυρήλατος σίδηρος	$7{,}0 \cdot 10^6$ N/cm²
Χάλυβας	$8{,}0 \cdot 10^6$ N/cm²

Λύνοντας τη σχέση (5.24) ως προς τη γωνιακή παραμόρφωση έχομε:

$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G} \qquad (5.25)$$

Δεδομένου ότι η μέγιστη τάση στρέψεως τ_{max} πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση στρέψεως $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$, συμπεραίνομε ότι η γωνιακή παραμόρφωση πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μία μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή $\gamma_{\varepsilon\pi}$ που ισούται με:

$$\gamma_{\varepsilon\pi} = \frac{\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}}{G} \qquad (5.26)$$

Αντικαθιστώντας τη μέγιστη τάση στρέψεως τ_{max} από τη σχέση (5.19) στην εξίσωση (5.25) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.26) έχομε:

$$\gamma = \frac{R}{I_o \cdot G} \cdot M \leq \gamma_{\varepsilon\pi} \qquad (5.27)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας τη μέγιστη τάση στρέψεως τ_{max} από τη σχέση (5.20) στην εξίσωση (5.25) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.26) έχομε:

$$\gamma = \frac{1}{W_o \cdot G} \cdot M \le \gamma_{\varepsilon\pi} \tag{5.28}$$

Οι σχέσεις (5.27) και (5.28) παρέχουν τη γωνία ολισθήσεως όταν είναι γνωστές η πολική ροπή αδράνειας I_o ή η πολική ροπή αντιστάσεως W_o της δοκού, αντίστοιχα.

Περαιτέρω, αντικαθιστώντας τη σχέση (5.21), που ορίζει την πολική ροπή αδράνειας της δοκού κυκλικής διατομής στη σχέση (5.27) ή ισοδύναμα τη σχέση (5.22) που ορίζει την πολική ροπή αντιστάσεως της δοκού κυκλικής διατομής στη σχέση (5.28), λαμβάνομε:

$$\gamma = \frac{16}{\pi \cdot G \cdot D^3} \cdot M \le \gamma_{\varepsilon\pi} \tag{5.29}$$

όπου, υπενθυμίζομε, η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια.

Η σχέση (5.29) παρέχει τη γωνιακή παραμόρφωση σε σχέση με την εξωτερική ροπή στρέψεως.

Από τη σχέση (5.29) διαπιστώνομε ότι η γωνιακή παραμόρφωση της δοκού:

α) Είναι ανάλογη της εξωτερικής ροπής στρέψεως.

β) Εξαρτάται από το υλικό της δοκού. Όσο πιο μικρό είναι το μέτρο ολισθήσεως του υλικού τόσο πιο μεγάλη είναι η γωνιακή παραμόρφωση (για την ίδια ροπή στρέψεως και για δοκούς με κυκλικές διατομές ίδιας διαμέτρου).

γ) Εξαρτάται από τη διάμετρο της δοκού. Όσο πιο μεγάλη είναι η διάμετρος της δοκού τόσο πιο μικρή είναι η γωνιακή παραμόρφωση (για την ίδια ροπή στρέψεως και για το ίδιο υλικό).

2) Στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού.

Η στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσεως (5.6): $\theta_x = \frac{\gamma}{R} x$. Δεδομένου ότι, όπως προαναφέραμε, η γωνιακή παραμόρφωση πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή $\gamma_{\varepsilon\pi}$, η στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή $\theta_{x,\varepsilon\pi}$, η οποία ισούται με:

$$\theta_{x,\varepsilon\pi} = \frac{\gamma_{\varepsilon\pi}}{R} \cdot x \tag{5.30}$$

Σημειώνομε ότι η μέγιστη στροφή δεν είναι ίδια για όλες τις κυκλικές διατομές της δοκού, αλλά εξαρτάται από την απόσταση x της κυκλικής διατομής από το πακτωμένο άκρο.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.27) στην εξίσωση (5.6) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.30) έχομε:

$$\theta_x = \frac{M}{I_o \cdot G} \cdot x \le \theta_{x,\varepsilon\pi} \tag{5.31}$$

όπου η στροφή μετρείται σε ακτίνια. Το γινόμενο της πολικής ροπής αδράνειας επί του μέτρου ολισθήσεως του υλικού:

$$M\Delta\Sigma = I_o \cdot G \tag{5.32}$$

ονομάζεται ***μέτρο δυστρεψίας***. Το μέτρο δυστρεψίας μιας δοκού δείχνει πόσο δύσκολα παραμορφώνεται η δοκός στρεπτικά όταν ασκούνται επάνω της στρεπτικές ροπές. Το μέτρο είναι αντίστοιχο του μέτρου δυσκαμψίας που αφορά στην καταπόνηση σε κάμψη και είδαμε στην υποπαράγραφο 4.4.2. Από τη σχέση (5.31) διαπιστώνομε ότι όσο πιο μεγάλο είναι το μέτρο δυστρεψίας, τόσο πιο μικρή είναι η στροφή.

Περαιτέρω, αντικαθιστώντας τη σχέση (5.21) που ορίζει την πολική ροπή αδράνειας της δοκού κυκλικής διατομής, στη σχέση (5.31) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $D = 2 \cdot R$, έχομε:

$$\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi} \tag{5.33}$$

όπου, υπενθυμίζομε, η γωνία θ_x μετρείται σε ακτίνια.

Η σχέση (5.33) παρέχει τη στροφή σε σχέση με την εξωτερική ροπή.

Σημειώνομε ότι πολλές φορές οι μέγιστες επιτρεπόμενες τιμές $\gamma_{\varepsilon\pi}$ και $\theta_{x,\,\varepsilon\pi}$ ορίζονται ανεξαρτήτως της σχέσεως τους με την $\tau_{\varepsilon\pi,\,\sigma\tau}$. Έτσι όταν εξετάζομε τη στρέψη μιας δοκού πρέπει οι σχέσεις (5.23), (5.29) και (5.31) να συναληθεύουν ώστε η δοκός να καταπονείται σε στρέψη εντός των επιτρεπομένων ορίων.

Παράδειγμα 3.

Ποια είναι η μέγιστη τάση στρέψεως και ποιες παραμορφώσεις αναμένεται να δημιουργηθούν σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής, διαμέτρου D = 8 cm και μήκους L = 100 cm, που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της και στο άλλο δέχεται εξωτερική ροπή στρέψεως M = 10.000 N · cm; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως;

Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}45^\circ/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 1000\ N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 8 \cdot 10^6\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
D = 8 cm (R = 4 cm)	τ_{max} = ;
L = 100 cm	γ = ;
M = 10.000 N · cm	θ_L = ;
$\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}45^\circ/m$	τ_{max} ? $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$
$\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 1000\ N/cm^2$	
$G = 8 \cdot 10^6\ N/cm^2$	

Λύση.

Η μέγιστη τάση στρέψεως υπολογίζεται από τη σχέση στρέψεως:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \Leftrightarrow \tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot 8^3\, cm^3} \cdot 10.000\ N \cdot cm = 99{,}5 \frac{N}{cm^2}$$

Η μέγιστη τάση στρέψεως είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση στρέψεως.

Η παραμόρφωση που υφίσταται η δοκός μετρείται από τη γωνιακή παραμόρφωση και τη στροφή κάθε κυκλικής διατομής της. Η γωνιακή παραμόρφωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G} \Leftrightarrow \gamma = \frac{99{,}5 \frac{N}{cm^2}}{8 \cdot 10^6 \frac{N}{cm^2}} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\, rad$$

Η στροφή της δοκού στο ελεύθερο άκρο της υπολογίζεται από τη σχέση $\theta_x = \frac{\gamma}{R} x$ για x = L:

$$\theta_L = \frac{\gamma}{R} L = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-5}}{4\ cm} 100\ cm = 3 \cdot 10^{-4}\, rad = 3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0{,}017^\circ.$$

Όμως, η επιτρεπόμενη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού είναι:

$$\theta_{L,\varepsilon\pi} = 0{,}45^\circ/m \cdot 100\ cm = 0{,}45^\circ,$$

δηλαδή μεγαλύτερη από τη στροφή που υπολογίσαμε μόλις προηγούμενα. Συνεπώς, η ράβδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής ροπής στρέψεως M=10.000 N · cm.

Η στροφή της δοκού στο ελεύθερο άκρο της ισούται με $0{,}017^{o}$.

Παράδειγμα 4.

Ποια είναι η μέγιστη εξωτερική ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου D = 6 cm και μήκους L = 90 cm που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}25^{o}/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 3.000\ N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 7 \cdot 10^6\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
D = 6 cm (R = 3 cm)	M_{max} = ;
L = 90 cm	
$\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}25^{o}/m = 0{,}25 \cdot \frac{\pi}{180} rad \cdot \frac{1}{100cm} = 4{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{cm}$	
$\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 3.000\ N/cm^2$	
$G = 7 \cdot 10^6\ N/cm^2$	

Λύση.

Η εξωτερική ροπή στρέψεως πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα:

α) Η σχέση στρέψεως: $\tau = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$ και

β) η σχέση που μας δίνει τη στροφή: $\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}$.

Από τη σχέση στρέψεως έχομε:

$$M \leq \frac{\pi \cdot D^3 \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}}{16} \Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot 6^3 cm^3 \cdot 3000\,N/cm^2}{16} \Leftrightarrow M \leq 12{,}7 \cdot 10^4\,N \cdot cm$$

Από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού έχομε:

$$\frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{x,\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow M \leq \theta_{x,\varepsilon\pi} \cdot \frac{\pi \cdot G \cdot D^4}{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq 4{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{cm} \cdot \frac{\pi \cdot 7 \cdot 10^6 \frac{N}{cm^2} \cdot 6^4 cm^4}{32} \Leftrightarrow M \leq 3{,}9 \cdot 10^4\ N \cdot cm$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις συμπεραίνομε ότι η μέγιστη εξωτερική ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί στη ράβδο είναι ίση με $M = 3{,}9 \cdot 10^4\ N \cdot cm$.

Ασκήσεις.

1. *Ποια είναι η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε δοκό κυκλικής διατομής ακτίνας R = 10 mm όταν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι 2.500 N/cm²;*

2. *Ποια είναι η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε δοκό κυκλικής διατομής με διάμετρο D = 60 mm και μήκος L = 50 cm, ώστε η στροφή να μην υπερβαίνει τις 0,3°/m; Δίνεται το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 8 \cdot 10^6\ N/cm^2$.*

3. *Ποια μέγιστη τάση στρέψεως και ποιες παραμορφώσεις αναμένεται να δημιουργηθούν σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου D = 6 cm και μήκους L = 60 cm, που είναι πακτωμένη* *στο ένα άκρο της και δέχεται εξωτερική ροπή στρέψεως $M = 8.000\ N \cdot cm$; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}35^o/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 3.000\ N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 7{,}1 \cdot 10^6\ N/cm^2$.*

4. *Ποια είναι η μέγιστη εξωτερική ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου $D = 7\ cm$ και μήκους $L = 80\ cm$, που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}3^o/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.500\ N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 8{,}3 \cdot 10^6\ N/cm^2$.*

5.4 Τάσεις στρέψεως σε δοκό μη κυκλικής διατομής.

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε την περίπτωση της καταπονήσεως σε στρέψη δοκού κυκλικής διατομής. Στη γενική περίπτωση καταπόνηση σε στρέψη μπορεί να υφίσταται δοκός οποιουδήποτε σχήματος διατομής. Έτσι, μία δοκός μπορεί να έχει διατομή σχήματος τετραγώνου, ορθογωνίου, ελλείψεως κ.λπ..

Η μελέτη της καταπονήσεως σε στρέψη των δοκών αυτών λόγω της εφαρμογής εξωτερικής ροπής στρέψεως Μ γίνεται με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για τη μελέτη της περιπτώσεως δοκού κυκλικής διατομής. Ωστόσο, όταν οι διατομές δεν είναι κυκλικές το πρόβλημα περιπλέκεται γιατί οι κυκλικές διατομές είναι οι μόνες που παραμένουν επίπεδες μετά τη στρεπτική παραμόρφωση. Συγκεκριμένα, ***όλες οι άλλες διατομές πλην του δακτυλίου στρεβλώνονται***. Έτσι χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές σχέσεις.

Η ανάλυση καταλήγει στα ακόλουθα συμπεράσματα:

α) Στην περίπτωση της τετραγωνικής διατομής η μέγιστη τάση στρέψεως εμφανίζεται στο μέσο των τεσσάρων πλευρών του τετραγώνου, ενώ η ελάχιστη, που ισούται με μηδέν, εμφανίζεται στις άκρες των πλευρών του (κορυφές).

β) Στην περίπτωση της ορθογώνιας διατομής η μέγιστη τάση στρέψεως εμφανίζεται στο μέσον των δύο μεγάλων πλευρών του ορθογωνίου, ενώ η ελάχιστη, που ισούται με μηδέν, εμφανίζεται στις άκρες των πλευρών του (κορυφές).

Ακολουθώντας την ίδια πορεία, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, για τη γενική περίπτωση δοκού τυχαίας διατομής Α αποδεικνύονται οι ακόλουθες σχέσεις:

α) Μέγιστη τάση στρέψεως:

$$\tau_{max} = \frac{1}{W_A} \cdot M \le \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \tag{5.34}$$

β) Στροφή:

$$\theta_x = \frac{M}{I_A \cdot G} \cdot x \le \theta_{x,\varepsilon\pi} \tag{5.35}$$

όπου το μέγεθος W_A είναι αντίστοιχο του μεγέθους της πολικής ροπής αντιστάσεως που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την περίπτωση της κυκλικής διατομής. Ομοίως, το μέγεθος I_A είναι αντίστοιχο του μεγέθους της πολικής ροπής αδράνειας που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την περίπτωση της κυκλικής διατομής. Τα μεγέθη W_A και I_A είναι αυτά που διαφοροποιούνται μεταξύ των δοκών διαφόρων διατομών, καθώς εξαρτώνται απ' το είδος της διατομής κάθε δοκού. Το παράδειγμα που ακολουθεί διευκρινίζει τα παραπάνω για την περίπτωση ορθογώνιας διατομής.

Παράδειγμα 5.

Ποια είναι η μέγιστη τάση στρέψεως που αναπτύσσεται σε μία δοκό ορθογώνιας διατομής, στην οποία εφαρμόζεται εξωτερική ροπή στρέψεως ίση με $M = 2 \cdot 10^4\ N \cdot cm$; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως; Δίνεται ότι η αντίστοιχη πολική ροπή αντιστάσεως της διατομής της δοκού είναι $W = 20\ cm^3$ και η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{επ,στ} = 4.000\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$M = 2{\cdot}10^4\ N \cdot cm$	$\tau_{max} = ;$
$W = 20\ cm^3$	
$\tau_{επ,στ} = 4.000\ N/cm^2$	

Λύση.

Η μέγιστη τάση στρέψεως υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau_{max} = \frac{M}{W} = \frac{2 \cdot 10^4\ N \cdot cm}{20\ cm^3} = 1.000\ \frac{N}{cm^2}$$

Επειδή $\tau_{max} < \tau_{επ,στ}$, η δοκός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως.

Ασκήσεις.

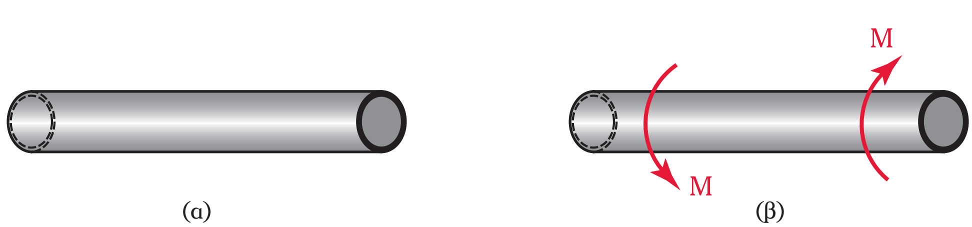
1. *Πόση ροπή στρέψεως επιτρέπεται να ενεργήσει σε μία δοκό με τετραγωνική διατομή πλευράς α = 50 mm; Η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι* $\tau_{επ,στ} = 4.000\ N/cm^2$ *και η αντίστοιχη πολική ροπή αντιστάσεως δίνεται από τη σχέση* $W = 0{,}2 \cdot a^3$.

2. *Ποια είναι η μέγιστη τάση στρέψεως που αναπτύσσεται σε μία δοκό ορθογωνικής διατομής, στην οποία εφαρμόζεται εξωτερική ροπή στρέψεως ίση με* $M = 3 \cdot 10^4\ N \cdot cm$*; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως; Δίνεται ότι η αντίστοιχη πολική ροπή αντιστάσεως της διατομής της δοκού είναι* $W = 30\ cm^3$ *και η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι* $\tau_{επ,στ} = 5.000\ N/cm^2$.

5.5 Στρέψη ράβδου με λεπτά τοιχώματα.

Ας μελετήσομε τώρα την καταπόνηση σε στρέψη ράβδου δακτυλιοειδούς διατομής με λεπτά τοιχώματα, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα 5.5. Μία τέτοια ράβδος είναι γνωστή και ως ***κοιλοδοκός*** με λεπτά τοιχώματα. Η κοιλοδοκός έχει μήκος L και ακτίνες R_1 και R_2 ($R_1 > R_2$) ή ισοδύναμα διαμέτρους $D_1 = 2 \cdot R_1$ και $D_2 = 2 \cdot R_2$ ($D_1 > D_2$) αντίστοιχα και πάχος $t = R_1 - R_2$. Η κοιλοδοκός καταπονείται σε στρέψη λόγω της εφαρμογής αντίρροπων εξωτερικών ροπών στρέψεως M στα άκρα της.

Η μελέτη της καταπονήσεως σε στρέψη της κοιλοδοκού γίνεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις προηγούμενες ενότητες για την περίπτωση της δοκού κυκλικής διατομής και για τη γενική περίπτωση δοκού μη κυκλικής διατομής. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τις σχέσεις



Σχ. 5.5.
Κοιλοδοκός με λεπτά τοιχώματα: (α) Πριν την καταπόνηση σε στρέψη. (β) Καταπόνηση σε στρέψη.

(5.34) και (5.35) της δοκού μη κυκλικής διατομής για την περίπτωση που η διατομή είναι ένας δακτύλιος με διαμέτρους D_1 και D_2.

Η πολική ροπή αδράνειας του δακτυλίου με μικρό πάχος t δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{\pi}{32} \cdot \left(D_1 + D_2\right)^3 \cdot t \tag{5.36}$$

Η πολική ροπή αντιστάσεως του δακτυλίου με μικρό πάχος t δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{\pi}{8}\left(D_1 + D_2\right)^2 \cdot t \tag{5.37}$$

Πολλές φορές, αντί για τις διαμέτρους D_1 και D_2 του δακτυλίου, είναι γνωστή η μέση ακτίνα του:

$$r = \frac{D_1 + D_2}{4} \tag{5.38}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.38) στις σχέσεις (5.36) και (5.37) λαμβάνομε τις ακόλουθες σχέσεις για την πολική ροπή αδράνειας και την πολική ροπή αντιστάσεως του δακτυλίου:

$$I = 2\pi \cdot r^3 \cdot t \tag{5.39}$$

$$W = 2\pi \cdot r^2 \cdot t \tag{5.40}$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω σχέσεις (5.40) και (5.39) στις σχέσεις (5.34) και (5.35), αντίστοιχα, λαμβάνομε:

α) Μέγιστη τάση στρέψεως (αντιστοιχεί στο μικρότερο πάχος):

$$\tau_{max} = \frac{1}{2\pi \cdot r^2 \cdot t} \cdot M \le \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \tag{5.41}$$

β) Στροφή:

$$\theta_x = \frac{M}{2\pi \cdot G \cdot r^3 \cdot t} \cdot x \le \theta_{x,\varepsilon\pi} \tag{5.42}$$

Η σχέση (5.41) αποτελεί τη ***σχέση στρέψεως για κοιλοδοκό*** με λεπτά τοιχώματα και η σχέση (5.42) παρέχει τη στροφή σε σχέση με την εξωτερική ροπή στρέψεως. Η σχέση (5.41) χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων στρέψεως κοιλοδοκών με λεπτά τοιχώματα. Τα προβλήματα που εμφανίζονται είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων που έχομε μελετήσει. Δηλαδή, αφορούν:

α) Στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας.

β) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της διατομής.

γ) Στον υπολογισμό της ικανότητας φορτίσεως

και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων.

Παράδειγμα 6.

Κοιλοδοκός με λεπτά τοιχώματα έχει μήκος L= 60 cm και μέση ακτίνα r = 4 cm. Η κοιλοδοκός καταπονείται σε στρέψη με εξωτερική ροπή στρέψεως M = 30.000 N · cm. Να υπολογιστεί το πάχος των τοιχωμάτων της εάν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi} = 3.000\ N/cm^2$ και η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}20^o/m$. Δίνεται το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 7 \cdot 10^6\ N/cm^2$. Επίσης, το πάχος λαμβάνει τιμές που είναι πολλαπλάσια του 0,1 cm.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
r = 4 cm	t = ;
L= 60 cm	
M = 30.000 N·cm	
$\tau_{\varepsilon\pi}$ = 3.000 N/cm^2	
$\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}20° / \text{m} = 0{,}20 \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \cdot \frac{1}{100\text{cm}} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$	
G = 7·10^6 N/cm^2	

Λύση.

Το πάχος του τοιχώματος πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε να ικανοποιούνται:

α) Η σχέση στρέψεως: $\tau_{max} = \frac{1}{2\pi r^2 \cdot t} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi}$ και

β) η σχέση που μας δίνει τη στροφή: $\theta_x = \frac{M}{2\pi \cdot G \cdot r^3 \cdot t} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}$.

Από τη σχέση στρέψεως έχομε:

$$\frac{M}{2\pi r^2 \cdot t} \leq \tau_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow t \geq \frac{M}{2\pi r^2 \cdot \tau_{\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow t \geq \frac{30.000\ \text{N}\cdot\text{cm}}{2\pi \cdot 4^2\text{cm}^2 \cdot 3.000\ \text{N}/\text{cm}^2} \Leftrightarrow t \geq 0{,}10\ \text{cm}$$

Από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού (x=L) έχομε:

$$\frac{M}{2\pi \cdot Gr^3 t} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \frac{M}{2\pi \cdot Gr^3 t} \cdot L \leq \theta_{\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow$$

$$t \geq \frac{M}{2\pi \cdot G \cdot \theta_{\varepsilon\pi} r^3} \Leftrightarrow t \geq \frac{30.000\ \text{N}\cdot\text{cm}}{2\pi \cdot 7 \cdot 10^6\ \text{N}/\text{cm}^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{rad}/\text{cm} \cdot 4^3\ \text{cm}^3} \Leftrightarrow t \geq 0{,}31\ \text{cm}.$$

Από τις δύο παραπάνω τιμές λαμβάνομε τη μεγαλύτερη, στρογγυλοποιώντας τη στη μεγαλύτερη τυποποιημένη τιμή. Άρα έχομε t = 0,40 cm.

Άσκηση.

Κοιλοδοκός με λεπτά τοιχώματα έχει μήκος L = 80 cm και μέση ακτίνα r = 5 cm. Η κοιλοδοκός καταπονείται σε στρέψη με εξωτερική ροπή στρέψεως M = 48.000 N · cm. Να υπολογιστεί το πάχος των τοιχωμάτων της εάν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi}$ = 4.800 N/cm^2 και η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi}$ = 0,30^o/m. Δίνεται το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού G = 6 · 10^6 N/cm^2.

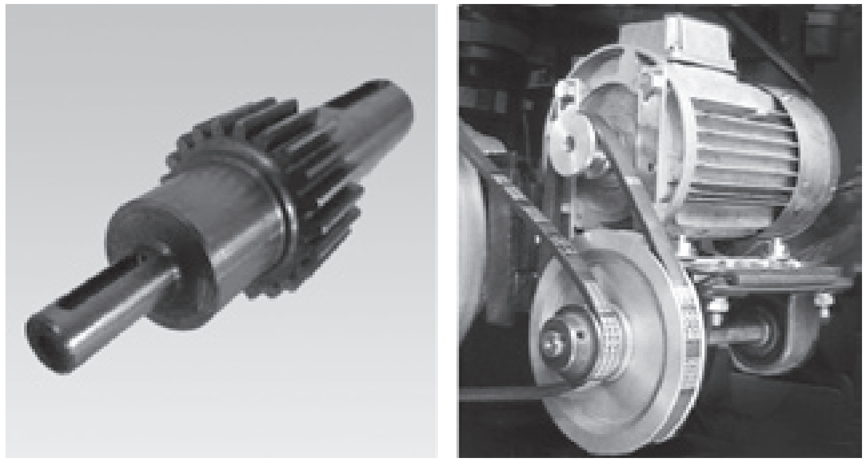
5.6 Στρέψη περιστρεφόμενου άξονα.

Στην παρούσα παράγραφο εξετάζομε τη στρέψη περιστρεφόμενου άξονα ή αλλιώς ατράκτου.

Άτρακτος ονομάζεται κάθε άξονας κυκλικής ή κοίλης διατομής ή μερικές φορές τετραγωνικής διατομής, ο οποίος περιστρεφόμενος μεταφέρει ισχύ και καταπονείται σε στρέψη ή ταυτόχρονα σε κάμψη και στρέψη, λόγω των γραναζιών ή τροχαλιών που φέρει για τη μετάδοση της κινήσεως.

Το σχήμα 5.6 παρουσιάζει ατράκτους που φέρουν γρανάζια ή ιμάντες για τη μετάδοση της κινήσεως.

Σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει στις προηγούμενες παραγράφους, για τη μελέτη της στρέ-



Σχ. 5.6.
Παραδείγματα ατράκτων που φέρουν γρανάζια ή ιμάντα.

ψεως της ατράκτου πρέπει να γνωρίζομε τη ροπή στρέψεως. Ωστόσο, στην περίπτωση των ατράκτων, συνήθως δεν είναι γνωστή η ροπή στρέψεως Μ, αλλά είναι γνωστά τα ακόλουθα μεγέθη:

α) Η ισχύς P που η άτρακτος (καλείται να) μεταφέρει, και

β) ο αριθμός των στροφών n της ατράκτου ανά μονάδα χρόνου.

Όμως, από τα μεγέθη αυτά είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ροπής στρέψεως μέσω της σχέσεως:

$$P = M \cdot \omega \tag{5.43}$$

όπου με ω συμβολίζεται η γωνιακή ταχύτητα της ατράκτου που δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \tag{5.44}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.43) και (5.44) και λύνοντας ως προς τη ροπή στρέψεως, λαμβάνομε:

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \tag{5.45}$$

Έχοντας υπολογίσει τη ροπή στρέψεως, εφαρμόζομε τις υπόλοιπες σχέσεις που συναντήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους ανάλογα με τη διατομή της ατράκτου.

5.6.1 Μονάδες μετρήσεως ισχύος και αριθμού στροφών ανά μονάδα χρόνου.

Στο σημείο αυτό, αναφορικά με τις μονάδες μετρήσεως των μεγεθών της ισχύος P και του αριθμού των στροφών ανά μονάδα χρόνου n, πρέπει να σημειώσομε τα ακόλουθα:

Η σχέση μεταξύ των μονάδων μετρήσεως της ισχύος είναι η εξής:

1 PS = 75 kpm/s =736 W =0,736 kW

Η σχέση μεταξύ των μονάδων μετρήσεως του αριθμού των στροφών ανά μονάδα χρόνου είναι η εξής:

1 rpm =1/60 rps.

5.6.2 Διαστασιολόγηση περιστρεφόμενου άξονα.

Στην υποπαράγραφο αυτή εξετάζομε το πρόβλημα της διαστασιολογήσεως της ατράκτου, εστιάζοντας το ενδιαφέρον μας στην άτρακτο κυκλικής διατομής. Θέλομε να υπολογίσομε τη διάμετρο της διατομής της, ώστε η άτρακτος να είναι σε θέση να μεταφέρει συγκεκριμένη ισχύ, με συγκεκριμένο αριθμό στροφών ανά λεπτό, χωρίς να γίνει υπέρβαση του ορίου αντοχής της.

Όπως έχομε αναφέρει, για να μην γίνει υπέρβαση του ορίου αντοχής της ατράκτου πρέπει η μέγιστη τάση στρέψεως να μην υπερβεί την επιτρεπόμενη τιμή τάσεως στρέψεως και η στροφή να μην υπερβεί την επιτρεπόμενη τιμή στροφής.

Για την περίπτωση δοκού κυκλικής διατομής ισχύει η σχέση (5.23): $\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$. Αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη σχέση (5.45): $M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}$ και λύνοντας ως προς τη διάμετρο D, έχομε:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow D^3 \geq \frac{8 \cdot P}{\pi^2 \cdot n \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}} \Leftrightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot P}{\pi^2 \cdot n \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}}} \qquad (5.46)$$

Με όμοιο τρόπο από τη σχέση (5.33): $\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}$, για x = L, αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη σχέση (5.45): $M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}$ και λύνοντας ως προς τη διάμετρο D έχομε:

$$\frac{32}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow D^4 \geq \frac{16 \cdot P \cdot L}{\pi^2 \cdot G \cdot n \cdot \theta_{L,\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{16 \cdot P \cdot L}{\pi^2 \cdot G \cdot n \cdot \theta_{L,\varepsilon\pi}}} \qquad (5.47)$$

Έτσι έχομε δύο τιμές για τη διάμετρο D της ατράκτου. Απ' αυτές παίρνομε τη μεγαλύτερη τιμή.

Ανάλογα με τα παραπάνω αντιμετωπίζεται και το πρόβλημα της διαστασιολογήσεως ατράκτου με διατομή που είναι διαφορετική από την κυκλική που εξετάσαμε.

Παράδειγμα 7.

Ράβδος κυκλικής διατομής έχει μήκος L = 50 cm. Η ράβδος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα n = 300 rpm για τη μεταφορά ισχύος P = 15 kW. Να υπολογιστεί πόση κατ' ελάχιστον πρέπει να είναι η διάμετρος της κυκλικής διατομής της ράβδου. Δίνεται ότι για τη ράβδο η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.500\ N/cm^2$, η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}20^\circ/m$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 6 \cdot 10^6\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
L = 50 cm	D = ;
n = 300 rpm	
P = 15 kW	
$\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.500\ N/cm^2$	
$\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}20^\circ / m = 0{,}20 \cdot \frac{\pi}{180} rad \cdot \frac{1}{100cm} = 3{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{cm}$	
$G = 6 \cdot 10^6\ N/cm^2$	

Λύση.

Για να μην γίνει υπέρβαση του ορίου αντοχής της ατράκτου πρέπει η μέγιστη τάση στρέψεως να μην υπερβαίνει την επιτρεπόμενη τιμή τάσεως στρέψεως και η στροφή να μην υπερβαίνει την επιτρεπόμενη τιμή στροφής.

Η ροπή στρέψεως υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{15.000\ W}{2 \cdot \pi \cdot 300 \cdot \frac{1}{60sec}} = 477{,}7\ N \cdot m = 477{,}7\ N \cdot 100\ cm = 47.770\ N \cdot cm$$

Έτσι, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, η ζητούμενη διάμετρος πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις ακόλουθες σχέσεις:

α) Τη σχέση στρέψεως: $\tau_{max} = \dfrac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$ και

β) τη σχέση που μας δίνει τη στροφή: $\theta_x = \dfrac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}$.

Από τη σχέση στρέψεως έχομε:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow D^3 \geq \frac{16 \cdot M}{\pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}} \Leftrightarrow D^3 \geq \frac{16 \cdot 47.770\ N \cdot cm}{\pi \cdot 4.500\ N / cm^2} \Leftrightarrow D^3 \geq 54{,}09\ cm^3 \Leftrightarrow D \geq 3{,}8\ cm$$

Από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού (x = L) έχομε:

$$\frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow D^4 \geq \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot \theta_{\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D^4 \geq \frac{32 \cdot 47.770\ N{\cdot}cm}{\pi \cdot 6 \cdot 10^6 \dfrac{N}{cm^2} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5} \dfrac{rad}{cm}} \Leftrightarrow D^4 \geq 2.318\ cm^4 \Leftrightarrow D \geq 6{,}94\ cm$$

Από τις δύο παραπάνω τιμές λαμβάνομε τη μεγαλύτερη, στρογγυλοποιώντας την στη μεγαλύτερη τυποποιημένη τιμή. Άρα έχομε D = 7 cm.

Παράδειγμα 8.

Αντέχει η ράβδος του Παραδείγματος 7 να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα n = 600 rpm για τη μεταφορά ισχύος P = 35 kW; Εάν όχι, να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα με την οποία επιτρέπεται να περιστρέφεται η άτρακτος για τη μεταφορά της ανωτέρω ισχύος.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
D = 7 cm	n_{min} = ;
L = 50 cm	n ; n_{min}
P = 35 kW = 35.000 N·100 cm/sec	
$\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.500\ N/cm^2$	
n = 600 rpm	
$\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}20^o / m = 0{,}20 \cdot \dfrac{\pi}{180} rad \cdot \dfrac{1}{100cm} = 3{,}5 \cdot 10^{-5} \dfrac{rad}{cm}$	
$G = 6 \cdot 10^6\ N/cm^2$	

Λύση.

Η ροπή στρέψεως υπολογίζεται από τη σχέση: $M = \dfrac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}$.

Η ζητούμενη συχνότητα πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις ακόλουθες σχέσεις:

α) Τη σχέση στρέψεως: $\tau_{max} = \dfrac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$ και

β) τη σχέση που μας δίνει τη στροφή: $\theta_x = \dfrac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}$.

Αντικαθιστώντας τη ροπή στρέψεως στη σχέση στρέψεως έχομε:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \le \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \le \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow n \ge \frac{8 \cdot P}{\pi^2 \cdot D^3 \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}} \Leftrightarrow n \ge \frac{8 \cdot 35.000\ N \cdot 100cm / sec}{\pi^2 \cdot 7^3\, cm^3 \cdot 4.500\ N / cm^2}$$

$$\ge 1{,}84 / sec \Leftrightarrow n \ge 1{,}84 \frac{60}{60sec} \Leftrightarrow n \ge 110{,}4\ rpm$$

Ομοίως, από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού (x = L) έχομε:

$$\frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \le \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \frac{32 \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \le \theta_{\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow \frac{16 \cdot P}{\pi^2 \cdot n \cdot G \cdot D^4} \le \theta_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow n \ge \frac{16 \cdot P}{\pi^2 \cdot \theta_{\varepsilon\pi} \cdot G \cdot D^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \ge \frac{16 \cdot 35.000\ N \cdot 100cm / sec}{\pi^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{cm} \cdot 6 \cdot 10^6 N / cm^2 \cdot 7^4\, cm^4} \Leftrightarrow n \ge 11{,}26 / sec \Leftrightarrow n \ge 11{,}26 \frac{60}{60\ sec} \Leftrightarrow n \ge 676\ rpm$$

Άρα, η ράβδος δεν αντέχει να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα n = 600 rpm για τη μεταφορά της ισχύος P = 35 kW. Η ελάχιστη συχνότητα που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί για τη μεταφορά της ισχύος αυτής είναι n_{min} = 676 rpm.

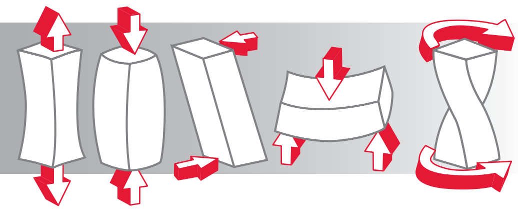
Ασκήσεις.

1. *Ράβδος κυκλικής διατομής έχει μήκος L = 100 cm. Η ράβδος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα n= 400 rpm για τη μεταφορά ισχύος P = 30 kW. Να υπολογιστεί πόση κατ' ελάχιστον πρέπει να είναι η διάμετρος της κυκλικής διατομής της ράβδου. Δίνεται ότι για τη ράβδο η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$ = 6.000 N/cm^2, η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi}$ = 0,30^o/m και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού G = 8,6 · 10^6 N/cm^2.*

2. *Ποια είναι η μέγιστη ισχύς που επιτρέπεται να μεταφέρει η ράβδος της ασκήσεως 1 όταν χρησιμοποιείται ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα n = 600 rpm;*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Λυγισμός



6.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε το λυγισμό. Συγκεκριμένα, παρέχομε τον ορισμό του, παρουσιάζομε τους λόγους για τους οποίους εμφανίζεται, αναλύομε την έννοια του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και ορίζομε τα μεγέθη του ισοδύναμου μήκους λυγισμού και της λυγηρότητας. Περαιτέρω, παραθέτομε τη θεωρία του Euler και τη μέθοδο των συντελεστών ω και αναπτύσσομε σχετικά παραδείγματα.

Ο πίνακας 6.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 6.1.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Επιτρεπόμενη τάση λυγισμού	$\sigma_{επ,λυ}$	N/cm^2, N/mm^2
Ισοδύναμο μήκος λυγισμού	$l_α$	cm, mm
Κρίσιμη τάση λυγισμού	$\sigma_κ$	N/cm^2, N/mm^2
Κρίσιμο φορτίο λυγισμού	$F_κ$	N
Λυγηρότητα	λ	Αδιάστατο
Οριακή λυγηρότητα	$\lambda_{ορ}$	Αδιάστατο
Συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού	α	Αδιάστατο
Συντελεστής λυγισμού	ω	Αδιάστατο

6.2 Ο λυγισμός.

Ας θεωρήσομε τη λεπτή και μακριά ράβδο του σχήματος 6.2. Στη ράβδο ενεργούν δύο δυνάμεις, οι οποίες έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά. Οι δύο δυνάμεις έχουν την τάση να μειώσουν το μήκος της ράβδου, δηλαδή έχομε καταπόνηση σε θλίψη. Η θλιβόμενη ράβδος για σχετικά μικρές τιμές του θλιπτικού φορτίου ισορροπεί ευθύγραμμη. Αυξανομένου του φορτίου υπάρχει κάποια τιμή για την οποία η ράβδος εκτρέπεται από την ευθύγραμμη θέση ισορροπίας της και ισορροπεί καμπυλωμένη. Το φορτίο αυτό ονομάζεται κρίσιμο φορτίο λυγισμού (βλ. παράγρ. 6.3). Στην κατάσταση αυτή λέμε ότι η αντοχή της ράβδου σε θλίψη εξαντλείται με εκδήλωση λυγισμού.

Συνεπώς σε μια ευθύγραμμη ράβδο λέμε ότι εκδηλώνεται λυγισμός όταν σ' αυτήν ενεργούν αξονικά δύο ίσες και αντίρροπες δυνάμεις κατά τέτοιον μέτρο, ώστε η ράβδος εκτρέπεται από την ευθύγραμμη θέση ισορροπίας και ισορροπεί καμπυλωμένη.

Σχ. 6.2.
Ράβδος στην οποία ενεργούν θλιπτικές δυνάμεις.

Εάν μετά το λυγισμό οι αναπτυσσόμενες τάσεις σε όλες τις θέσεις της ράβδου είναι μικρότερες από το όριο ελαστικότητας, τότε μετά την αφαίρεση των φορτίων η ράβδος επανέρχεται στην ευθύγραμμη θέση της. Στην περίπτωση αυτή έχομε ελαστικό λυγισμό. Εάν σε κάποιες θέσεις της ράβδου αναπτυχθούν μόνιμες παραμορφώσεις η ράβδος δεν επανέρχεται στην ευθύγραμμη θέση της ή δεν επανέρχεται πλήρως. Στην περίπτωση αυτή έχομε ανελαστικό λυγισμό. Σε κάθε περίπτωση θεωρείται ότι η στάθμη του εξωτερικού φορτίου που προκαλεί λυγισμό αντιστοιχεί σε εξάντληση της αντοχής της ράβδου σε θλίψη.

Ο λυγισμός, παρά τις όποιες ομοιότητες έχει με τη θλίψη και την κάμψη, είναι διαφορετικός τόσο απ' τη θλίψη όσο και απ' την κάμψη. Συγκεκριμένα, ο λυγισμός δεν είναι τύπος καταπονήσεως όπως η θλίψη και η κάμψη, αλλά μορφή αστοχίας. Επίσης, παρόλο που στο λυγισμό οι δύο δυνάμεις ενεργούν όπως και στη θλίψη, δηλαδή αξονικά, έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά, εντούτοις ο λυγισμός διαφέρει απ' τη θλίψη γιατί στο λυγισμό η ράβδος κάμπτεται, ενώ στην περίπτωση της θλίψεως παραμένει ευθύγραμμη. Σημειώνομε ότι ο λυγισμός συνοδεύεται πάντοτε και από καταπόνηση σε θλίψη, ωστόσο η θλίψη δεν συνοδεύεται απαραίτητα από λυγισμό.

Συγκριτικά με την κάμψη, αναφέρομε ότι, παρόλο που και στο λυγισμό και στην κάμψη η ράβδος χάνει το ευθύγραμμο της μορφής της και κάμπτεται, εντούτοις ο λυγισμός διαφέρει απ' την κάμψη γιατί στο λυγισμό οι δυνάμεις ενεργούν αξονικά, ενώ στην κάμψη δρουν εγκάρσια στον άξονα της ράβδου.

Περαιτέρω, ο λυγισμός εμφανίζεται μετά από μία τιμή δυνάμεως, πράγμα που δεν συμβαίνει ούτε στη θλίψη ούτε στην κάμψη. Αυτό αποτελεί ένα ακόμη σημείο ως προς το οποίο ο λυγισμός διαφέρει από τη θλίψη και την κάμψη.

Επίσης, για να έχομε λυγισμό, πρέπει το μήκος του σώματος L να είναι μεγαλύτερο από το πενταπλάσιο της διαμέτρου d της διατομής του (εάν η διατομή είναι κυκλική) ή το οκταπλάσιο της μικρότερης πλευράς α της διατομής του (εάν η διατομή δεν είναι κυκλική). Δηλαδή, πρέπει να ισχύει η ανισότητα:

$$L > 5 \cdot d \quad \text{ή} \quad L > 8 \cdot \alpha \tag{6.1}$$

6.2.1 Λόγοι εμφανίσεως του λυγισμού.

Από συστηματικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν για την εξήγηση της εμφανίσεως του φαινομένου του λυγισμού, προκύπτει ότι μια θλιβόμενη ράβδος σε στάθμη φορτίσεως χαμηλότερη από τη στάθμη που προκαλεί λυγισμό ισορροπεί ευθύγραμμη και ευσταθώς. Αυτό σημαίνει ότι εάν κάποιος εκτρέψει τη ράβδο από την ευθύγραμμη θέση ισορροπίας της, η ράβδος θα επανέλθει μέσω μίας ταλαντώσεως στην αρχική της ευθύγραμμη θέση. Για τη στάθμη του κρίσιμου φορτίου λυγισμού η ράβδος ισορροπεί ευθύγραμμη σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας. Εάν για κάποιο ασήμαντο αίτιο ή ατέλεια, όπως αυτά που αναφέρομε στη συνέχεια, η ράβδος εκτραπεί από την ευθύγραμμη ισορροπία της, εμφανίζει λυγισμό. Τα εν λόγω αίτια ή ατέλειες είναι τα ακόλουθα:

α) Το υλικό του σώματος είναι ελαττωματικό με αποτέλεσμα την ανομοιομορφία στην κατανομή των τάσεων, οι οποίες εφαρμόζονται στη διατομή του σώματος.

β) Λόγω κακής κατασκευής, το σώμα έχει μικρή καμπυλότητα.

γ) Υπάρχουν διάφορες ατέλειες στην κατασκευή του σώματος.

δ) Οι εφαρμοζόμενες στο σώμα δυνάμεις δεν είναι απολύτως αξονικές. Δηλαδή, υπάρχει μικρή απόκλιση της εφαρμοζόμενης δυνάμεως απ' τον άξονα του σώματος. Θεωρητικά, οι δυνάμεις που καταπονούν ένα σώμα σε λυγισμό ενεργούν στον άξονά του. Ωστόσο, λόγω του μεγάλου μήκους του σώματος συγκριτικά με τη διατομή του, οι δυνάμεις δεν ενεργούν ακριβώς πάνω στον άξονά του. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την πρόκληση πλευρικής κάμψεως στο σώμα.

ε) Υπάρχουν διάφοροι κραδασμοί στο σώμα που ενεργούν εγκάρσια στον άξονά του. Οι κραδασμοί αυτοί είναι συνηθισμένοι στις μηχανές και προέρχονται από τη λειτουργία τους. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και οι σεισμικές δονήσεις, οι οποίες επηρεάζουν τις κολόνες των κτηρίων.

Καθένας από τους ανωτέρω λόγους έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ροπών κάμψεως στο σώμα. Οι ροπές αυτές αυξάνουν την καμπυλότητα του σώματος.

Λυγισμός παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Ως χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων στα οποία μπορεί να εκδηλωθεί ο λυγισμός αναφέρομε τα ακόλουθα:

α) Τα έμβολα των υδραυλικών ανυψωτήρων.
β) Τα έμβολα των υδραυλικών ανελκυστήρων.
γ) Τα υποστυλώματα των κατοικιών.
δ) Οι κολόνες των υποστέγων.
ε) Οι διωστήρες των μηχανών.

6.3 Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Ας μελετήσομε σχολαστικά την επενέργεια μεταβλητής δυνάμεως που δρα κατά τον άξονα λεπτής και μακριάς ράβδου. Το ένα άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο, ενώ το άλλο είναι ελεύθερο [σχ. 6.3(α)]. Η δύναμη δρα στο ελεύθερο άκρο της. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της εφαρμοζόμενης δυνάμεως η ράβδος θλίβεται με αποτέλεσμα να βραχύνεται, αλλά παραμένει ευθύγραμμη [σχ. 6.3(β)]. Στην κατάσταση αυτή, όπως ήδη έχομε αναφέρει, εάν η ράβδος καμπυλωθεί ελαφρά από κάποια εξωτερική αιτία, τότε μόλις η αιτία αυτή αρθεί, η ράβδος επανέρχεται αμέσως στην αρχική της ευθύγραμμη θέση. Η κατάσταση αυτή είναι μια κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας.

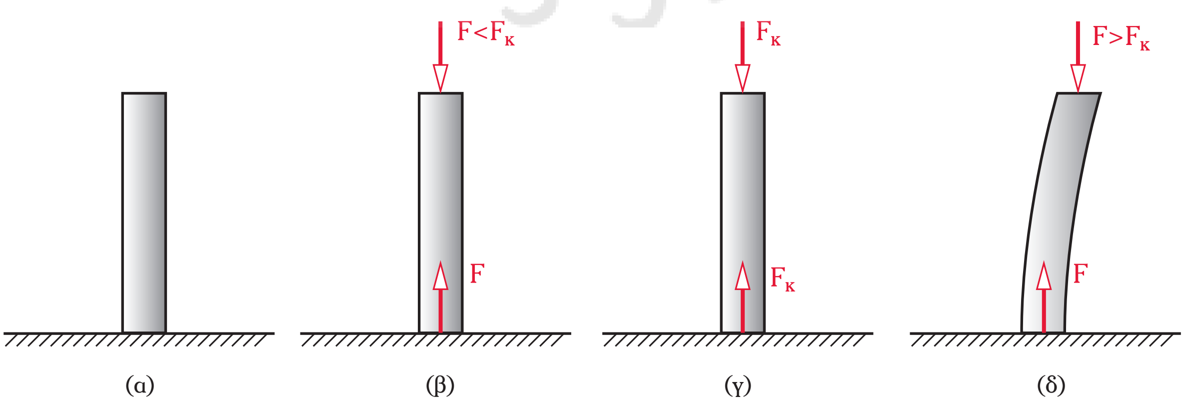
Εάν συνεχίσομε να αυξάνομε κι άλλο την εφαρμοζόμενη δύναμη, παρατηρούμε ότι η δύναμη φτάνει σε μία τιμή $F_κ$ [σχ. 6.3(γ)], από την οποία και μετά, για τους λόγους που προαναφέραμε εξαντλείται η αντοχή της ράβδου σε θλίψη και η ράβδος λυγίζει [σχ. 6.3(δ)]. Η τιμή της δυνάμεως αυτής ονομάζεται ***κρίσιμο φορτίο λυγισμού*** και συμβολίζεται με $F_κ$. Συνεπώς:

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού ονομάζεται η αξονική θλιπτική δύναμη από την οποία και μετά εμφανίζεται ο λυγισμός.

Ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού είναι ιδιαίτερα σημαντικός για τη μη εκδήλωση του λυγισμού και δεν πρέπει να γίνεται υπέρβασή του.

Εκτός από την εξωτερική εφαρμοζόμενη δύναμη, ο λυγισμός εξαρτάται και από άλλους παράγοντες. Αυτοί είναι οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού, το σχήμα της διατομής της ράβδου, το μήκος της και ο τρόπος στηρίξεώς της στα άκρα. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μιας ράβδου εξαρτάται από:

α) Τον τρόπο στερεώσεως των άκρων της ράβδου.
β) Το μήκος της ράβδου.



Σχ. 6.3.
Μελέτη ράβδου που εκδηλώνει λυγισμό. (α) Δεν δρα εξωτερική δύναμη. (β) Δρα μικρή εξωτερική δύναμη. (γ) Δρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. (δ) Δρα φορτίο μεγαλύτερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

γ) Το σχήμα της διατομής της ράβδου.
δ) Το μέτρο ελαστικότητας της ράβδου.
Στις παραγράφους 6.5 και 6.6 παρουσιάζομε τις μεθόδους υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που λαμβάνουν υπόψη τους ανωτέρω παράγοντες.

6.4 Ισοδύναμο μήκος λυγισμού και λυγηρότητα μιας ράβδου.

Πριν προχωρήσομε στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, παρουσιάζομε τις έννοιες του ισοδύναμου μήκους λυγισμού και της λυγηρότητας μιας ράβδου, τις οποίες χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού αποτελεί ένα ισοδύναμο μήκος της ράβδου που λυγίζει. Για τον ορισμό της έννοιας του ισοδύναμου μήκους λυγισμού χρειάζεται να εξετάσομε τους τρόπους στερεώσεως των άκρων ράβδου που εμφανίζει λυγισμό. Η λυγηρότητα μιας ράβδου χαρακτηρίζει την ευαισθησία της ράβδου στο λυγισμό.

6.4.1 Τρόποι στερεώσεως των άκρων ράβδου.

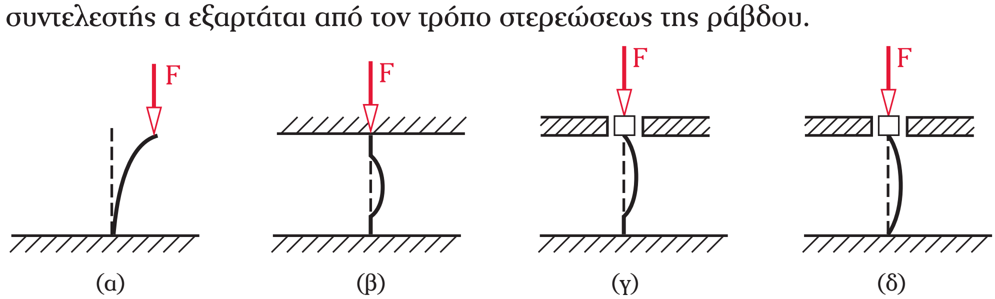
Οι δυνατοί τρόποι στερεώσεως των άκρων μιας ράβδου που εμφανίζει λυγισμό είναι οι ακόλουθοι τέσσερεις:
α) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο [σχ. 6.4(α)]. Με τον τρόπο αυτό στερεώνονται οι πάσσαλοι, οι στύλοι μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, τα έμβολα ανυψωτήρων συνεργείων αυτοκινήτων κ.λπ..
β) Αμφίπακτη ράβδος [σχ. 6.4(β)]. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα και η μία πάκτωση μπορεί να μετακινείται κατά τον άξονα της ράβδου. Τα δομικά υποστυλώματα αποτελούν παράδειγμα αμφίπακτης ράβδου.
γ) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και το άλλο άκρο της είναι αρθρωτό [σχ. 6.4(γ)]. Το αρθρωτό άκρο μπορεί να μετακινείται κατά τον άξονα της ράβδου.
δ) Αμφιαρθρωτή ράβδος [σχ. 6.4(δ)]. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο άκρα της ράβδου στηρίζονται με άρθρωση και μία από τις αρθρώσεις μπορεί να μετακινείται κατά τον άξονά της.

6.4.2 Ισοδύναμο μήκος λυγισμού.

Καθεμία απ' τις ανωτέρω τέσσερεις περιπτώσεις στερεώσεως της ράβδου χαρακτηρίζεται από το ***ισοδύναμο μήκος λυγισμού*** της. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού δεν είναι το πραγματικό μήκος της ράβδου, αλλά ένα ισοδύναμο μήκος που είναι συνάρτηση του πραγματικού μήκους της l. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού μάς επιτρέπει να εξετάζομε κατά ενιαίο τρόπο το λυγισμό της ράβδου στις ανωτέρω τέσσερεις περιπτώσεις στερεώσεως, αρκεί να αναφερόμαστε σ' αυτό αντί για το πραγματικό μήκος της. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού $l_α$ συνδέεται με το πραγματικό μήκος l της ράβδου μέσω της ακόλουθης σχέσεως:

$$l_α = α \cdot l \tag{6.2}$$

όπου ο συντελεστής α εξαρτάται από τον τρόπο στερεώσεως της ράβδου.



Σχ. 6.4.
Τρόποι στερεώσεως των άκρων ράβδου: (α) Ράβδος πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο. (β) Αμφίπακτη ράβδος. (γ) Ράβδος πακτωμένη στο ένα άκρο και αρθρωτή στο άλλο. (δ) Αμφιαρθρωτή ράβδος.

Ο πίνακας 6.4 παρουσιάζει τις τιμές του συντελεστή α για τις τέσσερεις περιπτώσεις στερεώσεως της ράβδου. Όπως βλέπομε απ' τον πίνακα, η αμφίπακτη ράβδος έχει το μικρότερο συντελεστή α = 0,5, ενώ η ράβδος που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο έχει το μεγαλύτερο συντελεστή α = 2.

Πίνακας 6.4.
Οι τιμές του συντελεστή του ισοδύναμου μήκους λυγισμού.

Τρόπος στερεώσεως ράβδου	***Συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού***
Πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο άκρο	2
Αμφίπακτη	0,5
Πακτωμένη στο ένα άκρο και αρθρωτό το άλλο	0,7
Αμφιαρθρωτή	1

Παράδειγμα 1.

Ράβδος έχει μήκος l = 90 cm. Να υπολογιστεί το ισοδύναμο μήκος λυγισμού της ράβδου στις ακόλουθες περιπτώσεις στηρίξεως:

α) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο.
β) Αμφίπακτη ράβδος.
γ) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και το άλλο της είναι αρθρωτό.
δ) Αμφιαρθρωτή ράβδος.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 90 cm	α) $l_{\alpha,1}$ = ;
$\alpha_1 = 2$	β) $l_{\alpha,2}$ = ;
$\alpha_2 = 0{,}5$	γ) $l_{\alpha,3}$ = ;
$\alpha_3 = 0{,}7$	δ) $l_{\alpha,4}$ = ;
$\alpha_4 = 1$	

Λύση.

Το ανηγμένο μήκος λυγισμού για τις τέσσερεις περιπτώσεις υπολογίζεται ως εξής:

α) $l_{\alpha,1} = \alpha_1 \cdot l = 2 \cdot 90\ \text{cm} = 180\ \text{cm}$
β) $l_{\alpha,2} = \alpha_2 \cdot l = 0{,}5 \cdot 90\ \text{cm} = 45\ \text{cm}$
γ) $l_{\alpha,3} = \alpha_3 \cdot l = 0{,}7 \cdot 90\ \text{cm} = 63\ \text{cm}$
δ) $l_{\alpha,4} = \alpha_4 \cdot l = 1 \cdot 90\ \text{cm} = 90\ \text{cm}$

6.4.3 Λυγηρότητα μιας ράβδου.

Μία ράβδος χαρακτηρίζεται από τη λυγηρότητά της. ***Λυγηρόρητα λ*** ονομάζεται το μέγεθος ***που ισούται με το πηλίκον του ισοδύναμου μήκους λυγισμού l_α προς την ακτίνα αδράνειας R_{I_δ} της διατομής της ράβδου:***

$$\lambda = \frac{l_\alpha}{R_{I_\delta}} \tag{6.3}$$

Η λυγηρότητα μιας ράβδου είναι ένα μέγεθος που δείχνει την ευαισθησία της ράβδου στο λυγισμό.

Όπως γνωρίζομε από την παράγραφο 3.7, η ακτίνα αδράνειας R_{I_δ} της ράβδου υπολογίζεται από την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου της ροπής αδράνειας I_δ της διατομής της ράβδου προς τη διατομή A, δηλαδή:

$$R_{I_\delta} = \sqrt{\frac{I_\delta}{A}} \tag{6.4}$$

Επίσης, από τη σχέση (6.2) γνωρίζομε ότι $l_\alpha = \alpha \cdot l$, όπου ο συντελεστής α εξαρτάται απ' τον τρόπο στερεώσεως της ράβδου. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.4) και (6.2) στη σχέση (6.3), λαμβάνομε:

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}} \tag{6.5}$$

Από τη σχέση (6.3) βλέπομε ότι η λυγηρότητα είναι καθαρός αριθμός (δηλ. δεν έχει μονάδες). Επίσης, από τη σχέση (6.5) συμπεραίνομε ότι η λυγηρότητα εξαρτάται από:

α) Το μήκος της ράβδου.

β) Τον τρόπο στερεώσεως της ράβδου.

γ) Την επιφάνεια της διατομής της ράβδου.

δ) Τη ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου, η οποία εξαρτάται από τη μορφή της διατομής και τις διαστάσεις αυτής.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί η λυγηρότητα αμφιαρθρωτής ράβδου που έχει μήκος l = 100 cm και κυκλική διατομή ακτίνας r = 20 mm.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 100 cm	λ = ;
r = 20 mm = 2 cm	
α = 1	

Λύση.

Η λυγηρότητα της ράβδου παρέχεται από τη σχέση: $\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}}$ (1)

Το εμβαδόν της κυκλικής διατομής είναι: $A = \pi \cdot r^2$ (2)

Από τον πίνακα 3.6.2, η ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής είναι: $I_\delta = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$ (3)

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) έχομε:

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}} = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot r^2}{\frac{\pi \cdot r^4}{4}}} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot l}{r} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 100\ \text{cm}}{2\ \text{cm}} = 100$$

Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί το ισοδύναμο μήκος λυγισμού ράβδου που έχει μήκος l = 120 cm, είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της, ενώ το άλλο είναι αρθρωτό.*

2. *Να υπολογιστεί η λυγηρότητα αμφίπακτης ράβδου που έχει μήκος l = 90 cm και τετραγωνική διατομή πλευράς x = 5 cm.*

3. *Η λυγηρότητα αμφιαρθρωτής ράβδου που έχει μήκος l = 120 cm και τετραγωνική διατομή ισούται με λ = 110. Να υπολογιστεί η πλευρά της τετραγωνικής διατομής.*

6.5 Ο τύπος του Euler.

Το πρόβλημα της ευρέσεως του κρίσιμου φορτίου λυγισμού απασχόλησε τον Ελβετό μαθηματικό Leonard Euler (1707-1783). Ο Euler μελέτησε το λυγισμό ράβδου κάνοντας τις ακόλουθες υποθέσεις:

α) Η ράβδος είναι ιδανικά ευθύγραμμη, δηλαδή έχει σταθερή διατομή σε όλο το μήκος της.

β) Η ράβδος αποτελείται από ισότροπο υλικό, δηλαδή παρουσιάζει τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες σε όλες τις κατευθύνσεις.

γ) Η φόρτιση της ράβδου είναι ιδανικά αξονική, κάτι που σημαίνει ότι η δύναμη που προκαλεί το λυγισμό ενεργεί ακριβώς στον άξονα της ράβδου.

δ) Η καταπόνηση λαμβάνει χώρα στην ελαστική περιοχή. Αυτό σημαίνει ότι η καταπόνηση λαμβάνει χώρα στην περιοχή όπου ισχύει ο νόμος του Hooke. Δηλαδή, η αναπτυσσόμενη τάση είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας, σημείο από το οποίο και πέρα δεν ισχύει ο νόμος του Hooke, σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει στο Κεφάλαιο 1.

Ο Euler υπολόγισε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού F_κ της ράβδου από τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός και ως ***τύπος του Euler***:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{l_\alpha^2} \tag{6.6}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου, I_δ είναι η ροπή αδράνειας της διατομής της και l_α είναι το ισοδύναμο μήκος λυγισμού της.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.6) το ισοδύναμο μήκος από τη σχέση (6.2) $l_\alpha = \alpha \cdot l$, όπου l είναι το μήκος της ράβδου και α ο συντελεστής που εξαρτάται από τον τρόπο στερεώσεώς της, λαμβάνομε:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{\alpha^2 \cdot l^2} \tag{6.7}$$

Από τη σχέση (6.7) διαπιστώνομε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες:

α) Το είδος του υλικού και συγκεκριμένα το μέτρο ελαστικότητάς του.

β) Τη ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου, η οποία καθορίζεται από τη μορφή και τις διαστάσεις της διατομής.

γ) Το μήκος της ράβδου.

δ) Τον τρόπο στερεώσεώς της.

Παρατηρούμε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι το ίδιο για όλες τις ράβδους ίδιας διατομής και ίδιου μήκους, οι οποίες είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό, ανεξαρτήτως του ορίου θραύσεώς τους. Δηλαδή, όλες οι ράβδοι ίδιας διατομής και ίδιου μήκους που είναι κατασκευασμένες από χάλυβα έχουν το ίδιο κρίσιμο φορτίο λυγισμού, παρόλο που η ποιότητα του χάλυβα μπορεί να είναι διαφορετική από ράβδο σε ράβδο.

Ωστόσο, μία ράβδος έχει διαφορετική ακτίνα αδράνειας ως προς κάθε κεντροβαρικό της άξονα και επομένως και διαφορετική λυγηρότητα.

Η ράβδος, εάν το φορτίο της σταδιακά αυξάνεται, θα λυγίσει καμπτόμενη ως προς τον άξονα ως προς τον οποίο έχει τη μεγαλύτερη λυγηρότητα.

Τέλος, τονίζομε και πάλι ότι ο τύπος του Euler εφαρμόζεται στην ελαστική περιοχή.

Παράδειγμα 3.

Να γραφεί ο τύπος του Euler για τους ακόλουθους τρόπους στερεώσεως ράβδου μήκους l, της οποία η διατομή έχει ροπή αδράνειας ίση με I_δ και το υλικό της έχει μέτρο ελαστικότητας ίσο με E:

α) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο.

β) Και τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα.

Λύση.

α) Για την περίπτωση αυτή είναι α = 2. Έτσι, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δίνεται από τη σχέση:

$$F_κ = \frac{π^2 \cdot E \cdot I_δ}{4 \cdot l^2}$$

β) Για την περίπτωση αυτή είναι α = 0,5. Έτσι, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δίνεται από τη σχέση:

$$F_κ = \frac{π^2 \cdot E \cdot I_δ}{0{,}5^2 \cdot l^2} = \frac{4 \cdot π^2 \cdot E \cdot I_δ}{l^2}$$

6.5.1 Κρίσιμη τάση λυγισμού.

Εκτός από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, μας ενδιαφέρει και η τάση που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Η τάση αυτή ονομάζεται κρίσιμη τάση λυγισμού. Δηλαδή:

Κρίσιμη τάση λυγισμού είναι η τάση που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Η κρίσιμη τάση λυγισμού $σ_κ$ ορίζεται ως το πηλίκον του κρίσιμου φορτίου λυγισμού $F_κ$ προς τη διατομή Α της ράβδου, δηλαδή:

$$σ_κ = \frac{F_κ}{A} \tag{6.8}$$

Η κρίσιμη τάση λυγισμού αποτελεί την τάση από την οποία η ράβδος εκδηλώνει λυγισμό.

6.5.2 Δεύτερη μορφή του τύπου του Euler.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.6) στη σχέση (6.8) έχομε:

$$σ_κ = \frac{π^2 \cdot E \cdot I_δ}{A \cdot l_α^2} \tag{6.9}$$

Όμως, η ακτίνα αδράνειας της ράβδου είναι $R_{I_δ} = \sqrt{\frac{I_δ}{A}}$ ή $R_{I_δ}^2 = \frac{I_δ}{A}$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.9) λαμβάνομε:

$$σ_κ = \frac{π^2 \cdot E \cdot R_{I_δ}^2}{l_α^2} \tag{6.10}$$

Από τη σχέση (6.3) γνωρίζομε ότι η λυγηρότητα λ της ράβδου ισούται με: $λ = \frac{l_α}{R_{I_δ}}$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.10) έχομε:

$$σ_κ = \frac{π^2 \cdot E}{λ^2} \tag{6.11}$$

Η σχέση (6.11) παρέχει την κρίσιμη τάση λυγισμού μίας ράβδου και είναι γνωστή ως ***δεύτερη μορφή του τύπου του Euler***. Από τη σχέση (6.11) διαπιστώνομε ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες:

α) Το είδος του υλικού της ράβδου και συγκεκριμένα το μέτρο ελαστικότητάς του και

β) τη λυγηρότητα της ράβδου.

Παρατηρούμε ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού δεν εξαρτάται από το όριο θραύσεως του υλικού. Για παράδειγμα, η κρίσιμη τάση λυγισμού των χαλυβδίνων ράβδων δεν εξαρτάται από την τάση θραύσεως των διαφόρων ποιοτήτων του χάλυβα, αλλά απ' τη λυγηρότητα κάθε ράβδου.

Παράδειγμα 4.

Να υπολογιστεί η κρίσιμη τάση λυγισμού ράβδου που έχει λυγηρότητα λ = 160. Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της $E = 2 \cdot 10^6$ N/cm^2.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\lambda = 160$	$\sigma_\kappa = ;$
$E = 2 \cdot 10^6$ N/cm^2	

Λύση.

Η κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \ N/cm^2}{160^2} = 770 \ N/cm^2$$

6.5.3 Περιοχή ισχύος του τύπου του Euler.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, ο τύπος του Euler εφαρμόζεται στην ελαστική περιοχή. Επομένως, η κρίσιμη τάση λυγισμού πρέπει να είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού της ράβδου σ_p, δηλαδή:

$$\sigma_\kappa \leq \sigma_P \qquad (6.12)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.11) στη σχέση (6.12) και λύνοντας ως προς τη λυγηρότητα λ λαμβάνομε:

$$\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_P \Leftrightarrow \lambda^2 \geq \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P} \Leftrightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P}} \qquad (6.13)$$

Η ποσότητα

$$\lambda_{o\rho} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P}} \qquad (6.14)$$

που βρίσκεται στο δεξί σκέλος της ανισότητας (6.13) ονομάζεται ***οριακή λυγηρότητα***. Η οριακή λυγηρότητα αποτελεί τη λυγηρότητα που αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας της ράβδου. Ο πίνακας 6.5.1 παρουσιάζει την οριακή λυγηρότητα ορισμένων υλικών.

Πίνακας 6.5.1.

Υλικό	***Οριακή λυγηρότητα***
Ξύλο	100
Μαλακός χάλυβας (St 37, St 42)	100
Σκληρός χάλυβας (St 50, St 60)	88
Χάλυβας ελατηρίων	60
Χυτοσίδηρος	80
Κράματα αλουμινίου	65

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.14) στην (6.13) λαμβάνομε:

$$\lambda \geq \lambda_{o\rho} \qquad (6.15)$$

Η σχέση (6.15) ορίζει τις τιμές λυγηρότητας για τις οποίες εφαρμόζεται ο τύπος του Euler.

Παράδειγμα 5.

Το υλικό μιας ράβδου έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 4{,}8 \cdot 10^6$ N/cm^2 και όριο αναλογίας

σ_p = 12.000 N/cm^2. Η ράβδος έχει τετραγωνική διατομή πλευράς b = 2 cm, μήκος l = 120 cm και τα δύο άκρα της είναι πακτωμένα.

α) Να υπολογιστεί η οριακή λυγηρότητα του υλικού της ράβδου.

β) Να υπολογιστεί η λυγηρότητα της ράβδου.

γ) Μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Euler για τη ράβδο;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$E = 4{,}8 \cdot 10^6$ N/cm^2	λ_{op} = ;
σ_p = 12.000 N/cm^2	λ = ;
b = 2 cm	$\lambda \ ? \ \lambda_{op}$
l = 120 cm	
α = 0,5	

Λύση.

α) Η οριακή λυγηρότητα του υλικού της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\lambda_{op} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^6 \ N/cm^2}{12.000 \ N/cm^2}} = 62{,}8$$

β) Επειδή η ράβδος είναι αμφίπακτη, ο συντελεστής ισοδύναμου μήκους της είναι: α = 0,5. Η λυγηρότητά της υπολογίζεται από τη σχέση: $\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\dfrac{A}{I_\delta}}$

Το εμβαδόν της διατομής είναι: $A = b^2$. Από τον πίνακα 3.6.2 έχομε ότι η ροπή αδράνειας της τετραγωνικής διατομής είναι: $I_\delta = \dfrac{b^4}{12}$. Έτσι, η λυγηρότητα της ράβδου είναι:

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}} = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{b^2}{\frac{b^4}{12}}} = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{12}{b^2}} = 0{,}5 \cdot 120 \ cm \cdot \sqrt{\frac{12}{2^2 \, cm^2}} = 103{,}9$$

γ) Επειδή η λυγηρότητα της ράβδου είναι μεγαλύτερη από την οριακή λυγηρότητα, ο τύπος του Euler μπορεί να εφαρμοστεί.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι ο λυγισμός στην πλαστική περιοχή, δηλαδή για λυγηρότητες μικρότερες της οριακής, μελετήθηκε από το Γερμανό μηχανικό Tetmajer το 19^o αιώνα. Ο Tetmajer πραγματοποίησε πολλά πειράματα, με τη βοήθεια των οποίων υπολόγισε τη σχέση μεταξύ της κρίσιμης τάσεως λυγισμού σ_κ και της λυγηρότητας λ. Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως ***τύπος Tetmajer***. Ο τύπος Tetmajer είναι ο ακόλουθος:

$$\sigma_\kappa = \alpha_o - \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_2 \cdot \lambda^2 \qquad (6.16)$$

όπου οι συντελεστές α_o, α_1 και α_2 εξαρτώνται από το υλικό. Ωστόσο, η μελέτη του τύπου του Tetmajer δεν εντάσσεται στους σκοπούς του παρόντος βιβλίου.

6.5.4 Επιτρεπόμενη τάση λυγισμού.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η τάση που πρέπει να αναπτύσσεται σε ράβδο για να μην εκδηλώσει λυγισμό πρέπει να είναι μικρότερη από την κρίσιμη τάση λυγισμού σ_κ. Μάλιστα, για λόγους ασφαλείας η τάση αυτή πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από την κρίσιμη τάση λυγισμού.

Έτσι, ορίζεται μια ανώτατη τιμή τάσεως, μέχρι την οποία επιτρέπεται να φορτιστεί η ράβδος για να μην εκδηλώσει λυγισμό. Αυτή η ανώτατη τιμή τάσεως ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση λυγισμού και συμβολίζεται με $\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}$. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση λυγισμού μιας ράβδου είναι η ανώτατη τιμή τάσεως μέχρι την οποία επιτρέπεται να φορτιστεί η ράβδος, ώστε να μη λυγίσει.

Η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού πρέπει να είναι κατά πολλές φορές μικρότερη από την κρίσιμη τάση λυγισμού. Ονομάζομε ***συντελεστή ασφαλείας*** ν τον αριθμό που μας δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}$ απ' την κρίσιμη τάση λυγισμού σ_κ. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας ορίζεται ως εξής:

$$\nu = \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}} \qquad (6.17)$$

Ο πίνακας 6.5.2 παρουσιάζει τους συντελεστές ασφαλείας που έχουν οριστεί στην πράξη για ορισμένα υλικά.

Πίνακας 6.5.2.

Υλικό	***Συντελεστής Ασφαλείας***
Ξύλο	10 έως 15
Χυτοσίδηρος	8
Χάλυβας	5
Βάκτρο εμβόλου	10
Διωστήρας	5

Παράδειγμα 6.

Δίνεται ο συντελεστής ασφαλείας $\nu = 8$ και η κρίσιμη τάση λυγισμού $\sigma_\kappa = 12.000\ \text{N/cm}^2$. Να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\nu = 8$	$\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon} = ;$
$\sigma_\kappa = 12.000\ \text{N/cm}^2$	

Λύση

Από τον ορισμό του συντελεστή ασφαλείας έχομε:

$$\nu = \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon} = \frac{\sigma_\kappa}{\nu} \Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon} = \frac{12.000\ \text{N}/\text{cm}^2}{8} = 1.500\ \text{N}/\text{cm}^2$$

Ο συντελεστής ασφαλείας χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων διαστασιολογήσεως σωμάτων για να μην εκδηλώσουν λυγισμό. Με τη βοήθειά του προσδιορίζεται η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού και στη συνέχεια οι διαστάσεις του σώματος, ώστε να μην λυγίσει.

6.5.5 Προβλήματα λυγισμού.

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στο λυγισμό είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις των καταπονήσεων που έχομε μελετήσει. Δηλαδή, αφορούν:

α) Στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας.
β) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της διατομής.
γ) Στον υπολογισμό του φορτίου για να μην εκδηλωθεί λυγισμός.

και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις περιπτώσεις των καταπονήσεων. Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.

Σε αμφίπακτη ράβδο μήκους $l = 240$ cm με κυκλική διατομή διαμέτρου $d = 45$ mm ενεργεί αξονικά θλιπτική δύναμη $F = 5.000$ N. Αν η ράβδος έχει οριακή λυγηρότητα $\lambda_{op} = 90$ και ο συντελεστής ασφαλείας είναι $\nu = 5$ να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά. Δίνεται $E = 2 \cdot 10^6\ N/cm^2$.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$l = 240$ cm	F ? F_κ
$d = 45$ mm	
$F = 5.000$ N	
$\alpha = 0,5$	
$\lambda_{op} = 90$	
$\nu = 5$	
$E = 2 \cdot 10^6\ N/cm^2$	

Λύση.

Για να φορτίζεται η ράβδος κανονικά πρέπει η δύναμη φορτίσεως να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το επιτρεπόμενο φορτίο, το οποίο είναι $\nu = 5$ φορές μικρότερο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Το τελευταίο υπολογίζεται από τον τύπο του Euler, εφόσον αυτός μπορεί όντως να εφαρμοστεί, δηλαδή εφόσον η λυγηρότητα της ράβδου είναι μεγαλύτερη απ' την οριακή.

α) Αρχικά υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας της διατομής:

$$I_\delta = \frac{\pi\ d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4,5^4\ cm^4}{64} = 20,12\ cm^4$$

β) Στη συνέχεια υπολογίζομε την επιφάνεια της διατομής:

$$A = \frac{\pi\ d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4,5^2 cm^2}{4} = 15,90\ cm^2$$

γ) Επειδή η ράβδος είναι αμφίπακτη έχομε: $\alpha = 0,5$.

Άρα, η λυγηρότητα της ράβδου είναι: $\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}} = 0,5 \cdot 240\ cm \cdot \sqrt{\frac{15,90\ cm^2}{20,12\ cm^4}} = 106,7$

δ) Διαπιστώνομε ότι η λυγηρότητα της ράβδου είναι μεγαλύτερη από την οριακή. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσομε τον τύπο του Euler για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου. Έχομε:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{\alpha^2 \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 N/cm^2 \cdot 20,12\ cm^4}{0,5^2 \cdot 240^2 cm^2} = 27.552\ N$$

Άρα το επιτρεπόμενο φορτίο είναι: $F_{\varepsilon\pi} = F_\kappa/\nu = 27.552\ N/5 = 5.510$ N.

Επειδή η δύναμη $F = 5.000$ N είναι μικρότερη από το επιτρεπόμενο φορτίο, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

Παράδειγμα 8.

Στύλος έχει τετραγωνική διατομή και μήκος $l = 5$ m. Στηρίζεται με πάκτωση και στα δύο άκρα του και φορτίζεται με φορτίο F = 3.900 N που δρα αξονικά. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του στύλου είναι $E = 100.000\ N/cm^2$, ο συντελεστής ασφαλείας είναι $\nu = 3$ και η οριακή λυγηρότητα $\lambda_{op} = 70$. Να βρεθεί η πλευρά της διατομής του στύλου.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 5 m	b =;
F = 3.900 N	
$E = 100.000\ N/cm^2$	
α = 0,5	
$\nu = 3$	
$\lambda_{op} = 70$	

Λύση.

α) Αρχικά υπολογίζομε το ισοδύναμο μήκος του στύλου: $l_\alpha = \alpha \cdot l = 0{,}5 \cdot 5m = 250$ cm.

β) Υπολογίζομε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας:

$$\nu = \frac{F_\kappa}{F} \Leftrightarrow F_\kappa = \nu F = 3 \cdot 3900\ N = 11.700\ N$$

γ) Δεχόμαστε ότι ισχύει ο τύπος του Euler και από αυτόν υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2\ E\ I_\delta}{l_\alpha{}^2} \Leftrightarrow I_\delta = \frac{F_\kappa\ l_\alpha{}^2}{\pi^2\ E} = \frac{11.700\ N \cdot 250^2 cm^2}{3{,}14^2 \cdot 10^5\ \ N/cm^2} = 741{,}7\ cm^4$$

δ) Γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας δίνεται απ' τη σχέση: $I_\delta = \dfrac{b^4}{12}$

ε) Υπολογίζομε την πλευρά της διατομής: $b = \sqrt[4]{12 I_\delta} = \sqrt[4]{12 \cdot 741{,}7\ cm^4} = 9{,}7\ cm$. Επιλέγομε b = 10 cm.

στ) Πρέπει να ελέγξομε την ισχύ του τύπου του Euler. Αρχικά, υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας από την πλευρά που βρήκαμε: $I_\delta = \dfrac{b^4}{12} = \dfrac{10^4 cm^4}{12} = 833\ cm$.

ζ) Η διατομή έχει εμβαδόν: $A = b^2 = 10^2\ cm^2 = 100\ cm^2$.

Άρα, ο συντελεστής λυγηρότητας είναι: $\lambda = l_\alpha \sqrt{\dfrac{A}{I_\delta}} = 250\ cm\ \sqrt{\dfrac{100\ cm^2}{833\ cm^4}} = 86{,}6$

Επειδή η λυγηρότητα είναι μεγαλύτερη από την οριακή, συμπεραίνομε ότι ισχύει ο τύπος του Euler.

Ασκήσεις.

1. *Το υλικό μιας ράβδου έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 5{,}2 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και όριο αναλογίας $\sigma_p = 10.000\ N/cm^2$. Η ράβδος έχει κυκλική διατομή διαμέτρου D = 6 cm και μήκος l = 150 cm και τα δύο άκρα της είναι στερεωμένα με άρθρωση.*
α) Να υπολογιστεί η οριακή λυγηρότητα του υλικού της ράβδου.
β) Να υπολογιστεί η λυγηρότητα της ράβδου.
γ) Μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Euler για τη ράβδο;

2. *Να εξετάσετε εάν μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Euler για τη ράβδο της ασκήσεως 1 όταν αυτή τοποθετηθεί με το ένα άκρο της πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο.*

3. *Αμφιαρθρωτός στύλος έχει κυκλική διατομή διαμέτρου $d = 20$ cm και ύψος $l = 3$ m. Ο στύλος δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο. Εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του είναι $E = 3{,}4 \cdot 10^6$ N/cm^2, να υπολογίσετε:*
α) Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.
β) Την κρίσιμη τάση λυγισμού.
γ) Την επιτρεπόμενη τάση λυγισμού για συντελεστή ασφαλείας $\nu = 5$.

4. *Στύλος πακτωμένος στο ένα άκρο του και ελεύθερος στο άλλο έχει μήκος $l = 60$ cm. Ο στύλος δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο $F = 20.000$ N. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του στύλου είναι $E = 4{,}3 \cdot 10^6$ N/cm^2 και ο συντελεστής ασφαλείας $\nu = 6$. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος του στύλου για να μην λυγίσει;*

5. *Ράβδος έχει μήκος $l = 50$ cm και τετραγωνική διατομή με πλευρά $x = 5$ cm. Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεως της ράβδου σε λυγισμό; Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου $E = 4{,}3 \cdot 10^6$ N/cm^2 και ο συντελεστής ασφαλείας $\nu = 4$.*

6. *Αμφιαρθρωτή ράβδος με ορθογώνια διατομή $b = 30$ mm $\times$ $c = 50$ mm δέχεται αξονική θλιπτική δύναμη. Ποιο είναι το ελάχιστο μήκος της ράβδου για το οποίο εφαρμόζεται ο τύπος του Euler; Δίνεται το όριο αναλογίας $\sigma_p = 24.000$ N/cm^2 και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}7 \cdot 10^6$ N/cm^2 του υλικού της ράβδου.*

6.6 Η μέθοδος των συντελεστών ω.

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η επίλυση των προβλημάτων διαστασιολογήσεως σώματος για να μην εκδηλώσει λυγισμό, χρησιμοποιεί την έννοια του συντελεστή ασφαλείας. Ωστόσο, ο συντελεστής αυτός έχει υποκειμενικό χαρακτήρα. Ο καθορισμός του γίνεται με βάση την προσωπική εκτίμηση του προσώπου που επιλύει το πρόβλημα διαστασιολογήσεως. Η εκτίμηση αυτή πολλές φορές πηγάζει απ' την εμπειρία του. Ο υποκειμενικός αυτός χαρακτήρας, ιδίως σε περιπτώσεις κατασκευών στις οποίες παρουσιάζονται πολλοί αστάθμητοι παράγοντες, καθώς και σε περιπτώσεις ελλείψεως αρκετής εμπειρίας, μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές αστοχίες.

Προκειμένου να αποφευχθεί ο υποκειμενικός χαρακτήρας με τη χρήση του συντελεστή ασφαλείας, αναπτύχθηκε η ***μέθοδος των συντελεστών ω***. Η μέθοδος αναπτύχθηκε από τους Γερμανικούς Κανονισμούς DIN και δεν βασίζεται στον ανθρώπινο παράγοντα. Η μέθοδος, όπως μαρτυρά και το όνομά της, βασίζεται στους συντελεστές ω.

6.6.1 Πεδίο εφαρμογής της μεθόδου των συντελεστών ω.

Η μέθοδος αυτή βρίσκει εφαρμογή στις δομικές κατασκευές, όπως είναι η κατασκευή γεφυρών, γερανών, οικοδομών κ.λπ. και στη μελέτη των στύλων. Ωστόσο, δεν εφαρμόζεται σε μηχανολογικές κατασκευές, δηλαδή για τον υπολογισμό εξαρτημάτων μηχανών. Έτσι, η μέθοδος αυτή δεν χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς σε πρέσσες, υδραυλικούς ανυψωτήρες, διωστήρες, γρύλους, βάκτρα, κοχλίες κ.λπ.. Επίσης, η μέθοδος των συντελεστών ω εφαρμόζεται ανεξάρτητα από την περιοχή παραμορφώσεων, δηλαδή ανεξάρτητα του εάν τα σώματα εκδηλώνουν λυγισμό στην ελαστική ή στην πλαστική περιοχή. Με άλλα λόγια η μέθοδος εφαρμόζεται για οποιαδήποτε λυγηρότητα.

6.6.2 Ο συντελεστής ω.

Ως ***συντελεστής ω*** ή ***συντελεστής λυγισμού ω*** ορίζεται ο λόγος της επιτρεπόμενης τάσεως σε θλίψη $\sigma_{επ,θλ}$ προς την επιτρεπόμενη τάση σε λυγισμό $\sigma_{επ,λυ}$:

$$\omega = \frac{\sigma_{επ,θλ}}{\sigma_{επ,λυ}} \tag{6.18}$$

Ο συντελεστής ω είναι καθαρός αριθμός και επειδή ισχύει $\sigma_{επ,λυ} < \sigma_{επ,θλ}$ είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Ο συντελεστής ω εξαρτάται από το υλικό και τη λυγηρότητα.

Ο πίνακας 6.6.1 παρουσιάζει τις ***τιμές του συντελεστή ω για διάφορα υλικά*** και για διάφορες τιμές της λυγηρότητας λ. Οι τιμές αυτές παρέχονται από τους Γερμανικούς Κανονισμούς DIN.

Πίνακας 6.6.1.

λ	***Χάλυβας St 37 St 38***	***Χάλυβας St 52***	***Ξύλο***	***Χυτοσίδηρος***
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,00	1,00	1,07	1,01
20	1,04	1,06	1,15	1,05
30	1,08	1,11	1,25	1,11
40	1,14	1,19	1,36	1,22
50	1,21	1,28	1,50	1,39
60	1,30	1,41	1,67	1,67
70	1,41	1,58	1,87	2,21
80	1,55	1,79	2,14	3,50
90	1,71	2,05	2,50	4,43
100	1,90	2,53	3,00	5,45
110	2,11	3,06	3,73	6,63
120	2,43	3,65	4,55	7,78
130	2,85	4,28	5,48	9,25
140	3,31	4,96	6,51	10,70
150	3,80	5,70	7,65	12,30
160	4,32	6,48	8,91	14,00
170	4,88	7,32	10,29	15,80
180	5,47	8,21	11,80	17,70
190	6,10	9,14	13,43	19,70
200	6,75	10,13	15,20	21,90
210	7,45	11,17	17,11	
220	8,17	12,26	19,17	
230	8,93	13,40	21,37	
240	9,73	14,59	23,73	
250	10,55	15,83	26,25	

Μεγαλύτερη ανάλυση των τιμών του ω παρέχεται στους πίνακες του Παραρτήματος ΙΙ. Οι πίνακες αυτοί έχουν τη μορφή του πίνακα 6.6.2.

Πίνακας 6.6.2.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02
20	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Έτσι, εάν θέλομε να βρούμε την τιμή του συντελεστή ω για τιμή λυγηρότητας λ = 27 από τον πίνακα 6.6.2, βρίσκομε τη γραμμή που αντιστοιχεί σε λ = 20 και τη στήλη που αντιστοιχεί σε λ+ = 7. Το σημείο τομής της εν λόγω γραμμής με την εν λόγω στήλη, μας δίνει την τιμή του ω = 1,04.

Στις περιπτώσεις που η τιμή της λυγηρότητας δεν περιλαμβάνεται ακριβώς στον πίνακα, τότε χρησιμοποιούμε γραμμική παρεμβολή, προκειμένου να υπολογίσομε την τιμή του ω που αντιστοιχεί στην εν λόγω τιμή της λυγηρότητας. Η γραμμική παρεμβολή εφαρμόζεται σύμφωνα με το παράδειγμα 9.

Παράδειγμα 9.

Η τιμή της λυγηρότητας μιας ράβδου από χάλυβα St 37 είναι λ = 111,5. Ποιος είναι ο συντελεστής ω της ράβδου;

Λύση.

Ο πίνακας 6.6.1 δεν μας δίνει απευθείας τη ζητούμενη τιμή για λ = 111,5. Η τιμή λ = 111,5 βρίσκεται μεταξύ των τιμών $\lambda_1 = 110$ και $\lambda_2 = 120$, με αντίστοιχες τιμές $\omega_1 = 2{,}11$ και $\omega_2 = 2{,}43$. Για να υπολογίσομε τη ζητούμενη τιμή πραγματοποιούμε γραμμική παρεμβολή εφαρμόζοντας την ακόλουθη σχέση:

$$\omega = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda - \lambda_1) = 2{,}11 + \frac{2{,}43 - 2{,}11}{120 - 110}(111{,}5 - 110) = 2{,}158$$

6.6.3 Η μέθοδος των συντελεστών ω.

Η μέθοδος βασίζεται στην ακόλουθη ανισότητα:

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \tag{6.19}$$

Δηλαδή, σύμφωνα με τη μέθοδο των συντελεστών ω, το θλιπτικό φορτίο F πολλαπλασιάζεται με το συντελεστή ω και το γινόμενο διαιρείται με το εμβαδό Α της διατομής. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει πρέπει να είναι μικρότερο απ' την επιτρεπόμενη τάση στη θλίψη.

Η σχέση (6.19) θυμίζει την ανισότητα $\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ που ισχύει στην καθαρή θλίψη χωρίς λυγισμό. Δηλαδή, η μέθοδος των συντελεστών ω μετατρέπει τους υπολογισμούς του λυγισμού σε υπολογισμούς θλίψεως με τη χρήση των συντελεστών ω.

Η μέθοδος των συντελεστών ω εφαρμόζεται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

α) Επιλογή των διαστάσεων της διατομής:
- Κατ' εκτίμηση ή
- με τη βοήθεια της σχέσεως που ισχύει για τη θλίψη: $A > \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}$ και σχετική προσαύξηση.

β) Υπολογισμός του ισοδύναμου μήκους λυγισμού: $l_\alpha = \alpha \cdot l$

γ) Υπολογισμός της ακτίνας αδράνειας: $R_{I_\delta} = \sqrt{I_\delta / A}$.

δ) Υπολογισμός της λυγηρότητας: $\lambda = l_\alpha / R_{I_\delta}$.

ε) Εύρεση απ' τον αντίστοιχο πίνακα του συντελεστή ω.

στ) Εφαρμογή της σχέσεως: $\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A}$.

ζ) Έλεγχος της ανισότητας: $\sigma \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$

Εάν η ανισότητα ισχύει, τότε έγινε επιλογή κατάλληλης διατομής.

Εάν η ανισότητα δεν ισχύει ξεκινάμε τη διαδικασία από το σημείο (α) επιλέγοντας μεγαλύτερες διαστάσεις διατομής.

Το παράδειγμα 10 παρουσιάζει την εφαρμογή των ανωτέρω βημάτων.

Παράδειγμα 10.

Ξύλινος στύλος με τετράγωνη διατομή έχει μήκος l = 4 m. Αν ο στύλος στηρίζεται με άρθρωση στα δύο άκρα και δέχεται αξονικό φορτίο F = 12.000 N, να βρεθεί με χρήση της μεθόδου των συντελεστών ω η κατάλληλη διατομή του στύλου. Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ = 700 N/cm^2.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
l = 4 m	b = ;
F = 12.000 N	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ = 700 N/cm^2	
α = 1	

Λύση.

α) Αρχικά επιλέγομε την πλευρά b της διατομής A με τη βοήθεια της σχέσεως που ισχύει για τη θλίψη:

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow b^2 = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}} \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{12.000\text{N}}{700\text{N}/\text{cm}^2}} = 4{,}14\text{cm}$$

Θεωρώντας και σχετική προσαύξηση λαμβάνομε b = 8 cm.

β) Υπολογίζομε το ισοδύναμο μήκος λυγισμού: $l_\alpha = \alpha \cdot l = 1 \cdot 4$ m = 400 cm

γ) Υπολογίζομε την ακτίνα αδράνειας: $R_{I_\delta} = \sqrt{\frac{I_\delta}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b^4}{12}}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \sqrt{\frac{8^2\,\text{cm}^2}{12}} = 2{,}31$ cm

δ) Υπολογίζομε τη λυγηρότητα του στύλου: $\lambda = \frac{l_\alpha}{R_{I_\delta}} = \frac{400\text{cm}}{2{,}31\text{cm}} = 173{,}2$

ε) Από τον πίνακα του Παραρτήματος ΙΙ βρίσκομε το συντελεστή ω = 10,73.

στ) Εφαρμόζομε τη σχέση $\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} = 10{,}73 \cdot \frac{12.000\,\text{N}}{8^2\,\text{cm}^2} = 2.012\,\text{N}/\text{cm}^2$

ζ) Επειδή $\sigma > \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ δεν έχομε επιλέξει κατάλληλη διατομή.

η) Επαναλαμβάνομε τα προηγούμενα λαμβάνοντας b = 12 cm. Έχομε:

$$R_{I_\delta} = \sqrt{\frac{I_\delta}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b^4}{12}}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \sqrt{\frac{12^2\,\text{cm}^2}{12}} = 3{,}46\text{ cm},\ \lambda = \frac{l_\alpha}{R_{I_\delta}} = \frac{400\text{ cm}}{3{,}46\text{ cm}} = 115{,}60\text{ , } \omega = 4{,}21$$

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} = 4{,}21 \cdot \frac{12.000\,\text{N}}{12^2\,\text{cm}^2} = 350{,}8\,\text{N}/\text{cm}^2$$

Άρα, η επιλογή b = 12 cm είναι κατάλληλη.

Σχετικά με τη μέθοδο των συντελεστών ω σημειώνομε τα ακόλουθα σημεία:

α) Η μέθοδος δεν υπολογίζει συγκεκριμένες πραγματικές τάσεις. Η $\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ είναι μια φανταστική τάση.

β) Η μέθοδος ελέγχει την ευστάθεια μιας θλιβόμενης ράβδου, ώστε να μην λυγίσει.

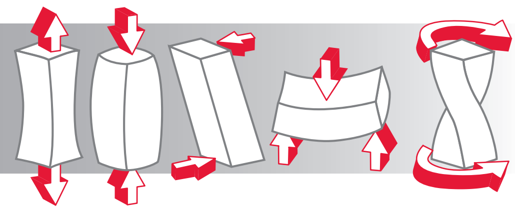
γ) Ακριβώς επειδή η μέθοδος είναι μέθοδος ελέγχου, δεν μπορούμε με τη βοήθειά της να υπολογίσομε την απαιτούμενη διατομή λύνοντας τον τύπο $\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$. Για να υπολογίσομε απ' τη σχέση αυτή τη διατομή πρέπει να έχομε διαθέσιμο το συντελεστή ω. Ωστόσο, ο συντελεστής ω εξαρτάται από τη λυγηρότητα και ο υπολογισμός της λυγηρότητας εξαρτάται από τις διαστάσεις της διατομής.

Άσκηση.

Ράβδος με κυκλική διατομή έχει μήκος $l = 2{,}2$ m. Αν η ράβδος στηρίζεται με πάκτωση και στα δύο άκρα και δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο $F = 20.000$ N, να βρεθεί με χρήση της μεθόδου των συντελεστών ω η κατάλληλη διατομή της ράβδου. Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = 900$ N/cm^2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Σύνθετες καταπονήσεις



7.1 Εισαγωγή.

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε τις απλές καταπονήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις σύνθετες καταπονήσεις. Σύνθετη καταπόνηση έχομε όταν ένα στερεό σώμα καταπονείται ταυτόχρονα σε δύο ή περισσότερα είδη απλών καταπονήσεων.

Οι απλές καταπονήσεις που έχομε μελετήσει αφορούν στις περιπτώσεις αξονικής καταπονήσεως σωμάτων σε εφελκυσμό και θλίψη από δυνάμεις κάθετες στη διατομή τους, οι οποίες εφαρμόζονται σε σημεία που συμπίπτουν με το κέντρο βάρους της διατομής των σωμάτων.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις, κατά τις οποίες η καταπόνηση σωμάτων προέρχεται από δυνάμεις κάθετες στη διατομή τους, οι οποίες εφαρμόζονται σε σημεία που δεν συμπίπτουν με το κέντρο βάρους της διατομής των σωμάτων. Λέμε τότε ότι έχομε έκκεντρη κάθετη φόρτιση. Δηλαδή:

Έκκεντρη κάθετη φόρτιση ενός σώματος έχομε όταν εφαρμόζεται σε αυτό δύναμη κάθετη στη διατομή του, με σημείο εφαρμογής διαφορετικό από το κέντρο βάρους της.

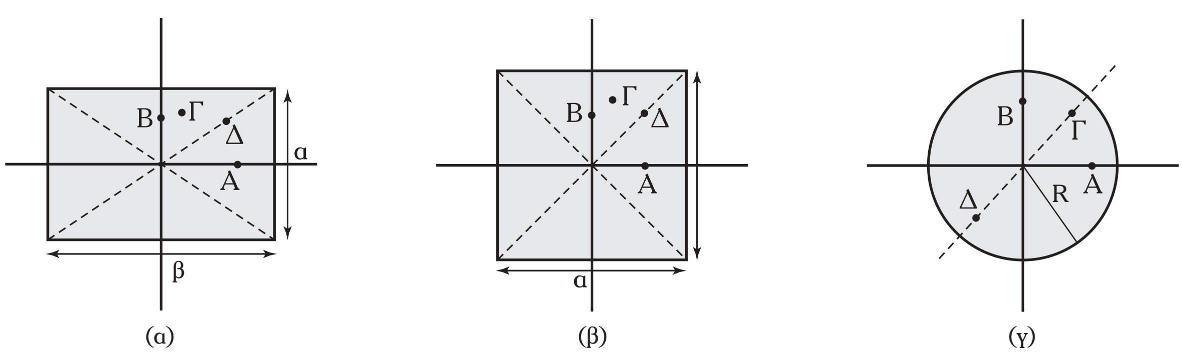
Η απόσταση του σημείου εφαρμογής των καθέτων στη διατομή δυνάμεων από το κέντρο βάρους της διατομής ονομάζεται ***εκκεντρότητα***. Η εκκεντρότητα συμβολίζεται ως e.

Ανάλογα με την ακριβή θέση του σημείου εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως, αυτή διακρίνεται σε:

α) ***Απλή εκκεντρότητα***, που έχομε όταν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως βρίσκεται πάνω σ' έναν από τους κύριους άξονες της διατομής. Επί πλέον, εάν ο κύριος άξονας πάνω στον οποίο βρίσκεται το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως είναι και άξονας συμμετρίας, τότε λέμε ότι έχομε ***απλή σύμμετρη εκκεντρότητα***.

β) ***Διπλή εκκεντρότητα***, που έχομε όταν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως δεν βρίσκεται πάνω σ' έναν από τους κύριους άξονες της διατομής, αλλά σε τυχαίο σημείο.

Το σχήμα 7.1 παρουσιάζει διάφορες περιπτώσεις σημείων εφαρμογής έκκεντρης κάθετης φορτίσεως. Τα σημεία Α και Β της ορθογώνιας διατομής παρουσιάζουν απλή εκκεντρότητα και μάλιστα απλή σύμμετρη εκκεντρότητα, ενώ τα σημεία Γ και Δ αυτής παρουσιάζουν διπλή εκκε-



Σχ. 7.1.
Παραδείγματα εφαρμογής σημείων έκκεντρης κάθετης φορτίσεως σε:
(α) Ορθογώνια διατομή (β) τετραγωνική διατομή και (γ) κυκλική διατομή.

ντρότητα. Τα σημεία Α, Β και Δ της τετραγωνικής διατομής παρουσιάζουν απλή σύμμετρη εκκεντρότητα, ενώ το σημείο Γ διπλή εκκεντρότητα. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ της κυκλικής διατομής παρουσιάζουν απλή σύμμετρη εκκεντρότητα.

Σε πλήρη αντιστοιχία με την προαναφερθείσα κατηγοριοποίηση της εκκεντρότητας σε απλή και διπλή, οι καταπονήσεις που προκαλούνται από έκκεντρη κάθετη φόρτιση κατηγοριοποιούνται στις ακόλουθες δύο κατηγορίες:

α) ***Απλές (έκκεντρες) καταπονήσεις,*** οι οποίες συμβαίνουν στις περιπτώσεις απλής εκκεντρότητας. Στην περίπτωση που έχομε απλή σύμμετρη εκκεντρότητα, οι προκαλούμενες καταπονήσεις ονομάζονται ***απλές σύμμετρες καταπονήσεις***.

β) ***Ασύμμετρες*** ή ***λοξές καταπονήσεις***, οι οποίες συμβαίνουν στις περιπτώσεις διπλής εκκεντρότητας.

Οι καταπονήσεις που προκαλούνται από έκκεντρη κάθετη φόρτιση είναι ο έκκεντρος εφελκυσμός και η έκκεντρη θλίψη σε αντιστοιχία του αξονικού εφελκυσμού και της αξονικής θλίψεως, που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Οι ανωτέρω έκκεντρες καταπονήσεις είναι σύνθετες. Απ' αυτές μας απασχολεί στη συνέχεια κυρίως η έκκεντρη θλίψη.

Ειδικότερα, στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζομε την έννοια της ισοδύναμης τάσεως και της ουδέτερης γραμμής, αναλύομε την καταπόνηση της έκκεντρης θλίψεως, περιγράφομε την έννοια του πυρήνα διατομής και μελετούμε την καταπόνηση της έκκεντρης θλίψεως σε υλικά χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό, το λυγισμό στην έκκεντρη θλίψη και τη σύνθετη καταπόνηση της στρέψεως και της αξονικής καταπονήσεως.

Ο πίνακας 7.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 7.1.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις Μονάδες Μετρήσεως***
Ακρότατο διατμητικής τάσεως	$\tau_{\alpha\kappa\rho}$	N/cm^2
Ακρότατο ισοδύναμης τάσεως	$\sigma_{\alpha\kappa\rho}$	N/cm^2
Απόσταση αδρανούς περιοχής διατομής	h_{ε}	cm, mm
Απόσταση σημείου εφαρμογής φορτίου	h	cm, mm
Γωνία	φ	°, rad
Εκκεντρότητα	e	cm, mm
Ισοδύναμη τάση	$\sigma_{\iota\sigma}$	N/cm^2
Μέγιστη τάση	σ_{max}	N/cm^2

7.2 Ισοδύναμη τάση.

Οι σύνθετες καταπονήσεις αναλύονται σ' ένα σύνολο απλών καταπονήσεων. Σε καθεμία από τις καταπονήσεις αυτές αναπτύσσονται οι αντίστοιχες τάσεις, οι οποίες, ανάλογα με το είδος της απλής καταπονήσεως, μπορεί να είναι ***ορθές*** ή ***διατμητικές***. Από το σύνολο των τάσεων αυτών υπολογίζεται μία ***ισοδύναμη τάση***, η οποία τις αντιπροσωπεύει. Η τάση αυτή συμβολίζεται με $\sigma_{\iota\sigma}$. Η λειτουργία της κατασκευής είναι ασφαλής όταν η ισοδύναμη τάση είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση του υλικού της $\sigma_{\varepsilon\pi}$:

$$\sigma_{\iota\sigma} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \tag{7.1}$$

Η ισοδύναμη τάση υπολογίζεται ως εξής:

1) Συνύπαρξη πολλών ορθών τάσεων.

Αν σε μία διατομή υπάρχουν πολλές ορθές τάσεις, τότε η ισοδύναμη προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμά τους, δηλαδή:

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sum_{\kappa} \sigma_{\kappa} \tag{7.2}$$

Στο παραπάνω αλγεβρικό άθροισμα, οι εφελκυστικές τάσεις λαμβάνονται θετικές και οι θλιπτικές αρνητικές.

2) Συνύπαρξη ορθών και διατμητικών τάσεων.

Αν σε μία διατομή υπάρχουν ορθές τάσεις σ και διατμητικές τ, για την εύρεση της ισοδύναμης τάσεως έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις και έχουν προταθεί αντίστοιχες σχέσεις. Οι αρχές των βασικών θεωρητικών προσεγγίσεων παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 1.14, κατά την περιγραφή των κριτηρίων αστοχίας. Από τις προταθείσες σχέσεις υπολογισμού της ισοδύναμης τάσεως αναφέρομε τις εξής:

α) ***Θεωρία της μέγιστης ορθής τάσεως.***

$$\sigma_{\iota\sigma} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right) \tag{7.3}$$

β) ***Θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσεως.***

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \tag{7.4}$$

γ) ***Θεωρία μέγιστου έργου παραμορφώσεως.***

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \tag{7.5}$$

Παράδειγμα 1.

Σε σώμα αναπτύσσονται οι ακόλουθες μέγιστες τάσεις:

α) Εφελκυστική τάση $\sigma_{\varepsilon\varphi} = 8.000\ N/cm^2$.

β) Θλιπτική τάση $\sigma_{\theta\lambda} = 12.000\ N/cm^2$.

γ) Διατμητική τάση $\tau = 3.000\ N/cm^2$.

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη τάση, χρησιμοποιώντας τη θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσεως. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 14.000\ N/cm^2$, το σώμα φορτίζεται κανονικά;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
$\sigma_{\varepsilon\varphi} = 8.000\ N/cm^2$	$\sigma_{\iota\sigma} = ;$
$\sigma_{\theta\lambda} = 12.000\ N/cm^2$	$\sigma_{\iota\sigma}\ ?\ \sigma_{\varepsilon\pi}$
$\tau = 3.000\ N/cm^2$	
$\sigma_{\varepsilon\pi} = 14.000\ N/cm^2$	

Λύση.

Αρχικά υπολογίζομε την ισοδύναμη ορθή τάση:

$$\sigma = \sigma_{\varepsilon\varphi} - \sigma_{\theta\lambda} = 8.000\ N/cm^2 - 12.000\ N/cm^2 = -4.000\ N/cm^2$$

Σύμφωνα με τη θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσεως, η ισοδύναμη τάση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sqrt{\left(-4.000\ N/cm^2\right)^2 + 4 \cdot \left(3.000\ N/cm^2\right)^2} = 7.211\ N/cm^2$$

Επειδή η ισοδύναμη τάση είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη, συμπεραίνομε ότι το σώμα φορτίζεται κανονικά.

7.2.1 Ουδέτερη γραμμή.

Όπως είδαμε ανωτέρω, η ορθή τάση σ' ένα σημείο προκύπτει ως το αλγεβρικό άθροισμα των ορθών τάσεων που αναπτύσσονται σ' αυτό. Έτσι, υπάρχουν σημεία που το αλγεβρικό άθροισμα των ορθών τάσεων είναι μηδέν. Τα σημεία αυτά συνήθως σχηματίζουν μια γραμμή, η οποία ονομάζεται ***ουδέτερη γραμμή***. Δηλαδή, η ουδέτερη γραμμή είναι η γραμμή που περιλαμβάνει τα σημεία, στα οποία η συνολική ορθή τάση μηδενίζεται. Εκατέρωθεν της ουδέτερης γραμμής υπάρχουν σημεία με θετική συνολική ορθή τάση (εφελκυστικές τάσεις) και σημεία με αρνητική συνολική ορθή τάση (θλιπτικές τάσεις). Με άλλα λόγια:

Ουδέτερη γραμμή μιας διατομής ονομάζεται η γραμμή που χωρίζει τη διατομή σε περιοχή που αναπτύσσονται εφελκυστικές και σε περιοχή που αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις.

Στην περίπτωση της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως, η ουδέτερη γραμμή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Η θέση της ουδέτερης γραμμής εξαρτάται από το σημείο εφαρμογής της κάθετης δυνάμεως.

β) Το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται πάντοτε μεταξύ του σημείου που ενεργεί η κάθετη στη διατομή δύναμη και της ουδέτερης γραμμής.

γ) Εξαιτίας της ανωτέρω ιδιότητας, υπάρχει μία θέση εφαρμογής της κάθετης δυνάμεως, για την οποία η ουδέτερη γραμμή εφάπτεται της διατομής ή συμπίπτει με μία πλευρά της.

δ) Όταν η δύναμη τείνει να εφαρμοστεί στο κέντρο βάρους της διατομής, δηλαδή έχομε αξονική καταπόνηση, η ουδέτερη γραμμή τείνει στο άπειρο.

ε) Όταν η εκκεντρότητα της κάθετης φορτίσεως τείνει στο άπειρο, έχομε καθαρή κάμψη και τότε η ουδέτερη γραμμή τείνει στο κέντρο βάρους.

Άσκηση.

Σε σώμα αναπτύσσονται οι ακόλουθες μέγιστες τάσεις:
α) Εφελκυστική τάση $\sigma_{\varepsilon\varphi} = 6.000\ N/cm^2$
β) Θλιπτική τάση $\sigma_{\theta\lambda} = 4.500\ N/cm^2$
γ) Διατμητική τάση $\tau = 4.000\ N/cm^2$
Να υπολογιστεί η ισοδύναμη τάση, χρησιμοποιώντας τη θεωρία της μέγιστης ορθής τάσεως. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 22.000\ N/cm^2$*, το σώμα φορτίζεται κανονικά;*

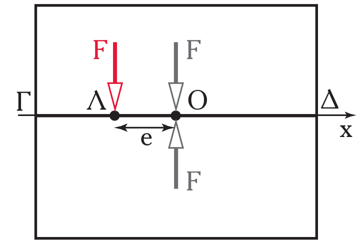
7.3 Έκκεντρη θλίψη.

Ας θεωρήσομε τη διατομή εμβαδού Α του σχήματος 7.3α, στο σημείο Λ της οποίας εφαρμόζεται κάθετη έκκεντρη θλιπτική δύναμη F με απλή σύμμετρη εκκεντρότητα e (το σημείο Λ βρίσκεται πάνω σε άξονα συμμετρίας του σώματος).

Προκειμένου να προσδιορίσομε τις αναπτυσσόμενες τάσεις στη διατομή, θεωρούμε ότι στο κέντρο βάρους Ο της διατομής εφαρμόζονται δύο δυνάμεις παράλληλες και ίσες με F, αλλά με αντίθετες μεταξύ τους φορές. Με τον τρόπο αυτό έχομε ένα ισοδύναμο σύστημα τριών δυνάμεων, το οποίο αποτελείται:

Πρώτον από τη δύναμη F που ενεργεί στο κέντρο βάρους Ο και είναι ομόρροπη με την κάθετη έκκεντρη θλιπτική δύναμη F και ***δεύτερον*** από το ζεύγος των υπολοίπων δύο δυνάμεων F που δίνουν ροπή:

$$M = F \cdot e \tag{7.6}$$



Σχ. 7.3α.
Εφαρμογή κάθετης έκκεντρης θλιπτικής δυνάμεως F με απλή σύμμετρη εκκεντρότητα e.

Έτσι έχομε σύνθετη καταπόνηση:

α) Η δύναμη F που ενεργεί στο κέντρο βάρους O και είναι ομόρροπη με την κάθετη έκκεντρη θλιπτική δύναμη F προκαλεί ***αξονική θλίψη***. Οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις, σύμφωνα με όσα έχομε πει, είναι:

$$\sigma_{\theta\lambda} = -\frac{F}{A} \tag{7.7}$$

όπου το πρόσημο πλην δηλώνει ότι έχομε θλίψη (αρνητικές τάσεις).

β) Το ζεύγος των υπολοίπων δύο δυνάμεων F προκαλεί ***κάμψη***. Εάν W είναι η ροπή αντιστάσεως της διατομής, οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις, σύμφωνα με όσα έχομε πει και λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (4.4), κυμαίνονται μεταξύ των τιμών:

$$\sigma_{\kappa\alpha} = \pm\frac{M}{W} \Leftrightarrow \sigma_{\kappa\alpha} = \pm\frac{F \cdot e}{W} \tag{7.8}$$

Έτσι, η συνολική ορθή τάση που αναπτύσσεται στο σώμα προκύπτει ως το αλγεβρικό άθροισμα των δύο παραπάνω τάσεων και κυμαίνεται μεταξύ των ακολούθων τιμών:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{W} \tag{7.9}$$

Η γραφική παράσταση των αναπτυσσομένων συνολικών τάσεων παρουσιάζεται στο σχήμα 7.3β.

Από τη σχέση (7.9) διαπιστώνομε τα εξής:

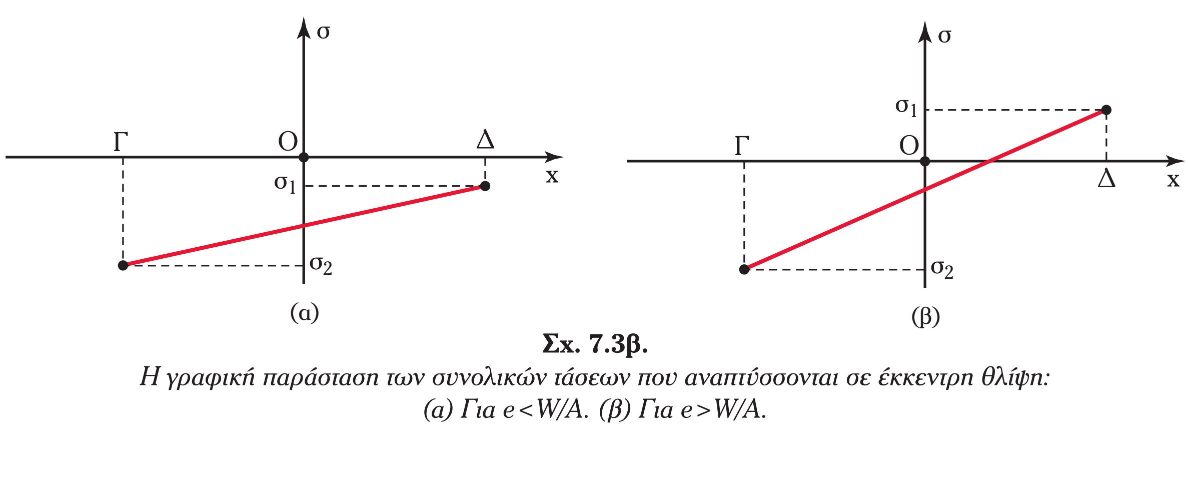
α) Η μέγιστη τάση αναπτύσσεται στο μέρος που εφαρμόζεται η δύναμη F και είναι θλιπτική.

β) Εάν έχομε μικρή εκκεντρότητα, ώστε $\frac{F}{A} > \frac{F \cdot e}{W}$, τότε στη διατομή έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις [σχ. 7.3β(α)].

γ) Υπάρχει μία τιμή εκκεντρότητας και συγκεκριμένα η $e = \frac{W}{A}$, για την οποία αρχίζουν να εμφανίζονται μηδενικές τάσεις.

δ) Εάν έχομε μεγάλη εκκεντρότητα, ώστε $\frac{F}{A} < \frac{F \cdot e}{W}$, τότε στη διατομή έχομε τόσο θλιπτικές όσο και εφελκυστικές τάσεις [σχ. 7.3β(β)].

ε) Η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται στην πλευρά της διατομής που είναι αντίθετη σ' αυτήν, στην οποία ενεργεί η δύναμη. Η ουδέτερη γραμμή πλησιάζει προς το κέντρο βάρους όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα. Εάν έχομε άπειρη εκκεντρότητα, τότε η ουδέτερη γραμμή περνά απ' το κέντρο βάρους και έχομε περίπτωση καθαρής κάμψεως. Εάν η εκκεντρότητα είναι μηδενική, τότε η ουδέτερη γραμμή τείνει στο άπειρο και έχομε αξονική θλίψη.



Σχ. 7.3β.
Η γραφική παράσταση των συνολικών τάσεων που αναπτύσσονται σε έκκεντρη θλίψη: (α) Για e<W/A. (β) Για e>W/A.

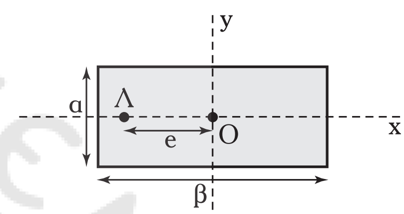
Η ανωτέρω ανάλυση εφαρμόζεται κατ' αναλογία και στην περίπτωση που έχομε έκκεντρη κάθετη εφελκυστική δύναμη.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η ορθογώνια διατομή του σχήματος 7.3γ με πλευρές α = 2 cm και β = 3 cm. Στο σημείο Λ, το οποίο απέχει απόσταση e από το κέντρο βάρους Ο, δρα κάθετη θλιπτική δύναμη F = 10.000 N. Να υπολογιστούν:

α) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις.
β) Η εκκεντρότητα e για την οποία αρχίζομε να έχομε και μηδενικές τάσεις.
γ) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις.
δ) Τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται στην περίπτωση β.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 2 cm	α) e = ;
β = 3 cm	β) e = ;
F = 10.000 N	γ) e = ;
	δ) σ = ;



Σχ. 7.3γ.

Λύση.

Το εμβαδόν της ορθογώνιας διατομής ισούται με: A = α · β = 2 cm · 3 cm = 6 cm^2.

Η ροπή αντιστάσεώς της ως προς τον άξονα x είναι (πίν. 3.8.2):

$$W = \frac{1}{6}\alpha \cdot \beta^2 = \frac{1}{6} 2\,\text{cm} \cdot 3^2 \text{cm}^2 = 3\,\text{cm}^3 .$$

Τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται κατά την έκκεντρη θλίψη είναι:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{W} \qquad (1)$$

Μηδενισμό της τάσεως αρχίζομε να έχομε όταν:

$$\frac{F}{A} = \frac{F \cdot e}{W} \Leftrightarrow e = \frac{W}{A} \Leftrightarrow e = \frac{\frac{1}{6}\alpha \cdot \beta^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\beta}{6} = \frac{3\,\text{cm}}{6} = 0{,}5\,\text{cm}$$

Έτσι:

α) Έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις όταν η εκκεντρότητα είναι μικρότερη από 0,5 cm.
β) Μηδενικές τάσεις αρχίζομε να έχομε όταν η εκκεντρότητα είναι ίση με 0,5 cm.
γ) Έχομε και εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις όταν η εκκεντρότητα είναι μεγαλύτερη από 0,5 cm.
δ) Στην περίπτωση που έχομε e = 0,5 cm, τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται δίνονται από τη σχέση (1):

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{W} = -\frac{10.000\,\text{N}}{6\,\text{cm}^2} \pm \frac{10.000\,\text{N} \cdot 0{,}5\,\text{cm}}{3\,\text{cm}^3}$$, δηλαδή είναι σ = 0 και $\sigma = -3.333 \dfrac{\text{N}}{\text{cm}^2}$.

Άσκηση.

Δίνεται κυκλική διατομή ακτίνας r = 3 cm. Στη διατομή δρα έκκεντρη κάθετη θλιπτική δύναμη F = 8.000 N. Να υπολογιστούν:

α) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις.

β) Η εκκεντρότητα e για την οποία αρχίζομε να έχομε και μηδενικές τάσεις.
γ) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις.
δ) Τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται στις ανωτέρω περιπτώσεις.
Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 22.000\ N/cm^2$*, το σώμα φορτίζεται κανονικά σε όλες τις περιπτώσεις;*

7.4 Πυρήνας διατομής.

Όπως είδαμε παραπάνω, η έκκεντρη κάθετη φόρτιση ενός σώματος προκαλεί τόσο εφελκυστικές, όσο και θλιπτικές τάσεις στη διατομή του καταπονούμενου σώματος. Κάτι ανάλογο είδαμε και στο Κεφάλαιο 4, στην περίπτωση της καταπονήσεως σε καθαρή κάμψη μίας αμφιέρειστης δοκού, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση εφελκυομένων και θλιβομένων ινών στη δοκό. Επομένως, για να μην αστοχεί ένα υλικό καταπονούμενο με έκκεντρη κάθετη φόρτιση πρέπει να αντέχει και σε εφελκυσμό και σε θλίψη.

Ωστόσο, υπάρχουν υλικά τα οποία, παρόλο που παρουσιάζουν μεγάλη αντοχή στην καταπόνηση σε θλίψη, εντούτοις παρουσιάζουν πολύ μικρή ή και μηδαμινή αντοχή στην καταπόνηση σε εφελκυσμό. Παραδείγματα τέτοιων υλικών είναι ο χυτοσίδηρος, το άοπλο σκυρόδεμα, το έδαφος, τα κεραμικά υλικά κ.ά..

Για να αποφεύγεται κατά την έκκεντρη κάθετη φόρτιση η αστοχία των σωμάτων που είναι φτιαγμένα από τα υλικά αυτά, πρέπει η διατομή τους να κατασκευάζεται κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να μην παρουσιάζονται κατά την καταπόνηση καθόλου εφελκυστικές τάσεις, αλλά μόνο θλιπτικές. Αυτό επιτυγχάνεται εάν η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται εκτός της περιμέτρου της διατομής του σώματος ή στη χειρότερη περίπτωση εφάπτεται σ' αυτήν. Για να ικανοποιηθεί η ανωτέρω συνθήκη για τη θέση της ουδέτερης γραμμής πρέπει η θέση του σημείου εφαρμογής της κάθετης φορτίσεως να βρίσκεται σε συγκεκριμένη περιοχή της διατομής. Ή ισοδύναμα, πρέπει να προσδιοριστεί μια περιοχή της διατομής γύρω από το κέντρο βάρους της, η οποία έχει την ιδιότητα ότι εάν στα σημεία που βρίσκονται μέσα στην περιοχή αυτή εφαρμοστεί έκκεντρη κάθετη θλιπτική φόρτιση δεν θα παρουσιαστούν εφελκυστικές τάσεις στη διατομή, αλλά μόνο θλιπτικές. Η περιοχή αυτή ονομάζεται πυρήνας της διατομής. Δηλαδή:

Πυρήνας της διατομής ενός σώματος ονομάζεται η περιοχή της διατομής γύρω απ' το κέντρο βάρους της, η οποία περιλαμβάνει όλα τα σημεία, στα οποία εάν εφαρμοστεί έκκεντρη κάθετη θλιπτική φόρτιση θα παρουσιαστούν μόνο θλιπτικές και καθόλου εφελκυστικές τάσεις στη διατομή.

Το σχήμα 7.4α παρουσιάζει ένα παράδειγμα πυρήνα διατομής ενός σώματος. Ο πυρήνας σημειώνεται με κόκκινο χρώμα. Το σημείο Ο αποτελεί το κέντρο βάρους της διατομής. Ας θεωρήσομε ένα σημείο Α της διατομής που βρίσκεται στην περιφέρεια του πυρήνα της διατομής, στο οποίο εφαρμόζεται έκκεντρη κάθετη φόρτιση. Η ευθεία που ενώνει το σημείο Α με το κέντρο βάρους Ο ονομάζεται ***γραμμή του φορτίου***. Η απόσταση του Α από το κέντρο βάρους Ο ονομάζεται ***ακτίνα του πυρήνα*** ή ***ακτίνα αντιστάσεως της διατομής***.

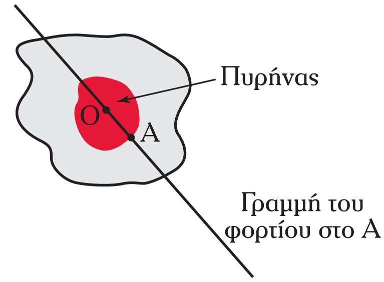
7.4.1 Ιδιότητες πυρήνων διατομών.

Οι πυρήνες των διατομών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Ο πυρήνας διατομής είναι πάντα ένα κυρτό σχήμα. Δεν υπάρχουν κοίλοι πυρήνες διατομής.

β) Η μορφή του πυρήνα διατομής εξαρτάται μόνο απ' το σχήμα της διατομής.

γ) Εάν η διατομή ενός σώματος είναι πολυγωνική με *ν* πλευρές, τότε ο πυρήνας της είναι επίσης ένα πολύγωνο με *ν* πλευρές. Μάλιστα, σε κάθε πλευρά της πολυγωνικής διατομής

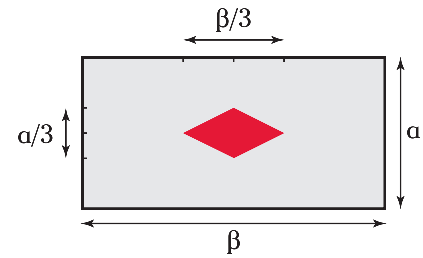


Σχ. 7.4α.
Παράδειγμα πυρήνα διατομής.

αντιστοιχεί μία κορυφή του πυρήνα και σε κάθε κορυφή της πολυγωνικής διατομής αντιστοιχεί μία πλευρά του πυρήνα. Το σημείο του πυρήνα που αντιστοιχεί σε μία πλευρά της πολυγωνικής διατομής ονομάζεται ***αντίπολος της πλευράς***.

δ) Εάν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως διατρέχει την περίμετρο του πυρήνα μιας διατομής, τότε η ουδέτερη γραμμή περιβάλλει τη διατομή.

ε) Εάν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως περιγράφει την περίμετρο μιας διατομής, τότε η ουδέτερη γραμμή περιγράφει τον πυρήνα.



Σχ. 7.4β.
Ορθογώνια διατομή με τον πυρήνα της.

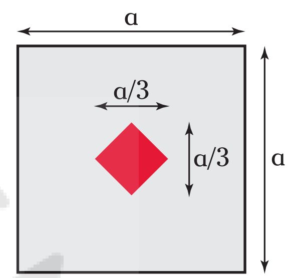
7.4.2 Πυρήνες διατομής απλών σχημάτων.

Εξετάζομε τις ακόλουθες περιπτώσεις απλών σχημάτων:

α) ***Ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β).

Προκειμένου να προσδιορίσομε την περίμετρο του πυρήνα, πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό του, να βρούμε τα σημεία εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης δυνάμεως, ώστε οι πλευρές του ορθογωνίου να γίνουν ουδέτερη γραμμή. Αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας τη διατομής του ορθογωνίου είναι ένας ρόμβος με το ίδιο κέντρο και διαγώνιες ίσες με $\frac{α}{3}$ και $\frac{β}{3}$. Το σχήμα 7.4β παρουσιάζει την ορθογώνια διατομή με τον πυρήνα της.

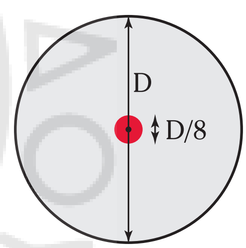
Όταν η μία πλευρά του ορθογωνίου μεγαλώσει πολύ, τότε ο πυρήνας του τείνει να γίνει μια λωρίδα πλάτους ίση με το ένα τρίτο της άλλης πλευράς.



Σχ. 7.4γ.
Τετραγωνική διατομή με τον πυρήνα της.

β) ***Τετράγωνο*** (με πλευρά α).

Η περίπτωση του τετραγώνου αντιμετωπίζεται όπως και η περίπτωση του ορθογωνίου. Αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας του τετραγώνου είναι τετράγωνο με το ίδιο κέντρο και διαγώνιες ίσες με $\frac{α}{3}$. Το σχήμα 7.4γ παρουσιάζει την τετραγωνική διατομή με τον πυρήνα της.



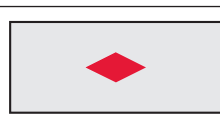
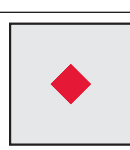
Σχ. 7.4δ.
Κυκλική διατομή με τον πυρήνα της.

γ) ***Κύκλος*** (με διάμετρο D).

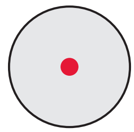
Αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας του κύκλου είναι κύκλος με το ίδιο κέντρο και διάμετρο ίση με $\frac{D}{8}$. Το σχήμα 7.4δ παρουσιάζει την κυκλική διατομή με τον πυρήνα της.

Τα ανωτέρω συνοψίζονται στον πίνακα 7.4.

Πίνακας 7.4.
Πυρήνες διατομής απλών σχημάτων.

Σχήμα διατομής		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Πυρήνας διατομής***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β	Ρόμβος με διαγώνιες $\frac{α}{3}$ και $\frac{β}{3}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α	Τετράγωνο με διαγώνιες $\frac{α}{3}$

(συνεχίζεται)

Σχήμα διατομής		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Πυρήνας διατομής***
Κύκλος		Η διάμετρος D	Κύκλος με διάμετρο $\frac{D}{8}$

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί ο πυρήνας τετραγωνικής διατομής με πλευρά α = 4 cm. Πόσο είναι το εμβαδόν του συγκριτικά με το μέγεθος της διατομής;

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 4 cm	$α_π$ = ;
	$E_π/E$ = ;

Λύση.

Ο πυρήνας της τετραγωνικής διατομής είναι τετράγωνο με το ίδιο κέντρο και διαγώνιες ίσες με $\frac{α}{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4γ. Η πλευρά $α_π$ του πυρήνα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$α_π = \sqrt{\left(\frac{α}{6}\right)^2 + \left(\frac{α}{6}\right)^2} = \sqrt{2}\frac{α}{6} = \sqrt{2}\frac{4\ \text{cm}}{6} = 0{,}94\ \text{cm}$$

Ο λόγος του εμβαδού του πυρήνα προς το εμβαδόν της τετραγωνικής διατομής είναι:

$$\frac{E_π}{E} = \frac{α_π^2}{α^2} = \frac{0{,}94^2\,\text{cm}^2}{4^2\,\text{cm}^2} = 0{,}055.$$

Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί ο πυρήνας ορθογώνιας διατομής με πλευρές α = 4 cm και β = 6 cm. Πόσο είναι το εμβαδόν του συγκριτικά με το μέγεθος της διατομής;*
2. *Να υπολογιστεί ο πυρήνας κυκλικής διατομής με ακτίνα R = 2 cm. Πόσο είναι το εμβαδόν του συγκριτικά με το μέγεθος της διατομής;*

7.5 Έκκεντρη θλίψη χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό.

Σε περιπτώσεις που η έκκεντρη θλιπτική δύναμη αναγκαστικά πρέπει να δρα έξω από τον πυρήνα της διατομής και το υλικό δεν διαθέτει αντοχή σε εφελκυσμό, φροντίζομε ώστε να αναπτυχθούν θλιπτικές τάσεις σε ένα μόνο τμήμα της διατομής, ενώ το υπόλοιπό της να παραμείνει αδρανές. Η περιοχή αυτή ονομάζεται ***αδρανής περιοχή της διατομής***.

Η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή της διατομής από την αδρανή είναι ευθεία γραμμή. Ο προσδιορισμός της απαιτεί πολύπλοκους υπολογισμούς. Αποδεικνύεται ότι εάν η διατομή έχει τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας και το σημείο εφαρμογής του φορτίου βρίσκεται πάνω σ' αυτόν, τότε η γραμμή αυτή είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας της διατομής. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνομε ότι η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή απ' την αδρανή δεν είναι η ουδέτερη γραμμή της διατομής.

Η αντιμετώπιση των προβλημάτων της έκκεντρης θλίψεως υλικών χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό εξαρτάται απ' το σχήμα της διατομής. Στη συνέχεια παραθέτομε τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τον υπολογισμό της γραμμής που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή απ' την αδρανή για τις περιπτώσεις της ορθογώνιας και της κυκλικής διατομής.

7.5.1 Ορθογώνια διατομή.

Ας θεωρήσομε την ορθογώνια διατομή με πλευρές α και β του σχήματος 7.5α(α). Το σχήμα απεικονίζει και τον πυρήνα της διατομής. Στο σημείο Μ που βρίσκεται πάνω στον άξονα των y, σε απόσταση h από την πλευρά ΑΔ, εφαρμόζεται έκκεντρα κάθετο θλιπτικό φορτίο F.

Το σημείο Μ πρέπει να βρίσκεται εκτός του πυρήνα της ορθογώνιας διατομής. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει (η αρχή των αξόνων Ο βρίσκεται στο μέσο της πλευράς ΑΔ):

$$h < \frac{\beta}{3} \tag{7.10}$$

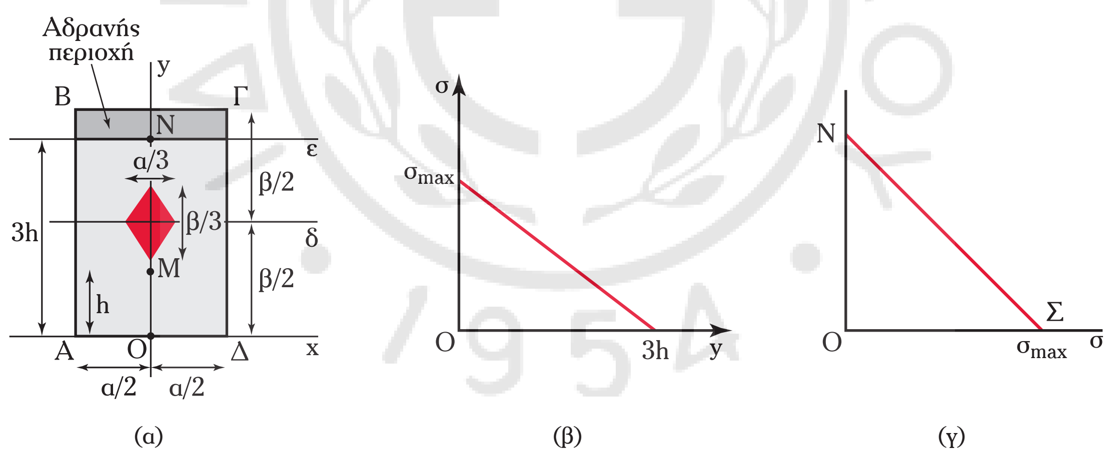
Η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή από την αδρανή είναι η ευθεία ε που εικονίζεται στο σχήμα 7.5α(α). Αποδεικνύεται[1] ότι η γραμμή αυτή βρίσκεται σε απόσταση h_ε ίση με $3 \cdot h$ από την πλευρά ΑΔ, δηλαδή:

$$h_\varepsilon = 3 \cdot h \tag{7.11}$$

Επίσης, οι αναπτυσσόμενες θλιπτικές τάσεις κατά μήκος του άξονα των y (είναι αρνητικές ως θλιπτικές) κυμαίνονται κατ' απόλυτη τιμή από μηδέν στη γραμμή ε μέχρι μία μέγιστη τιμή σ_{max} στην πλευρά ΑΔ. Ειδικότερα, η σχέση των τάσεων αυτών ως προς την απόστασή τους από την πλευρά ΑΔ είναι γραμμική. Η σχέση αυτή παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 7.5α(β) (εμφανίζονται οι απόλυτες τιμές τάσεων). Επίσης το σχήμα 7.5α(γ) παρουσιάζει την κατανομή των τάσεων κατά μήκος του τμήματος ΟΝ.

Η μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) θλιπτική τάση που αναπτύσσεται[2] παρέχεται από την ακόλουθη σχέση[3]:

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot \alpha \cdot h} \tag{7.12}$$



Σχ. 7.5α.
(α) Ορθογώνια διατομή με τον πυρήνα της που καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη με την εφαρμογή φορτίου στο σημείο Μ. (β) Η εξάρτηση των αναπτυσσομένων θλιπτικών τάσεων σε σχέση με την απόσταση κατά τον άξονα των y. (γ) Κατανομή των τάσεων.

[1] Επειδή η συνισταμένη δύναμη που προκύπτει από τις επί μέρους δυνάμεις επί των στοιχειωδών μικρών επιφανειών της ενεργού διατομής πρέπει να περνάει από το σημείο Μ αλλά και από το κέντρο βάρους του τριγωνικού διαγράμματος του σχήματος 7.5α(γ) προκύπτει ότι $ON = 3 \cdot OM$.

[2] Η εξωτερική δύναμη F πρέπει να ισορροπείται από το στερεό των τάσεων που είναι τριγωνικό πρίσμα με βάση το τρίγωνο ΟΝΣ του σχήματος 7.5α(γ) και ύψος ΑΔ = α. Έτσι ισχύει $F = \frac{1}{2}\, 3h\, \sigma_{max}\, \alpha$, απ' όπου προκύπτει η σχέση (7.12).

[3] Προσέξτε ότι στον παρονομαστή υπάρχει η πλευρά α που είναι η κάθετη στον άξονα συμμετρίας y, πάνω στον οποίο βρίσκεται το σημείο εφαρμογής του φορτίου.

Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$, δηλαδή πρέπει:

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot \alpha \cdot h} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \tag{7.13}$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί τη ***σχέση έκκεντρης θλίψεως ορθογώνιας διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό***.

Εάν το σημείο εφαρμογής του θλιπτικού φορτίου F βίσκεται πάνω στην ευθεία δ, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα των x, σε απόσταση $h < \frac{\alpha}{3}$ από το μέσο της πλευράς ΓΔ, με παρόμοιο τρόπο καταλήγομε στην ακόλουθη αντίστοιχη σχέση έκκεντρης θλίψεως:

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot \beta \cdot h} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \tag{7.14}$$

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στην έκκεντρη θλίψη ορθογώνιας διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που συναντήσαμε στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων. Δηλαδή, αφορούν:

α) Στο υπολογισμό της μέγιστης τάσεως λειτουργίας.

β) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της ορθογώνιας διατομής.

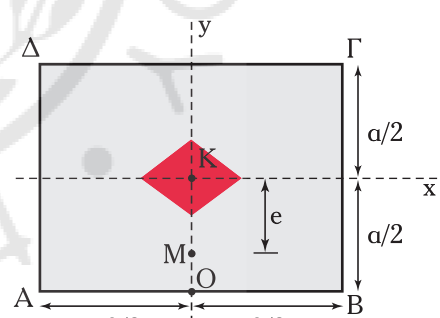
γ) Στον υπολογισμό του φορτίου που αντέχει η ορθογώνια διατομή

και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων.

Παράδειγμα 4.

Ράβδος από υλικό με μηδενική αντοχή σε εφελκυσμό έχει ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 3 cm × β = 4 cm. Η ράβδος καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη από δύναμη που ενεργεί σε σημείο Μ που απέχει απόσταση e = 1 cm από το κέντρο βάρους της διατομής Κ, όπως δείχνει το σχήμα 7.5β. Να προσδιοριστεί το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο, εάν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ = 8.000 N/cm^2.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
α = 3 cm	F = ;
β = 4 cm	
e = 1 cm	
$\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ = 8.000 N/cm^2	



Σχ. 7.5β.

Λύση.

Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας y της διατομής και απέχει απόσταση

$$h = \frac{\alpha}{2} - e = \frac{3\,\text{cm}}{2} - 1\,\text{cm} = 0,5\,\text{cm}$$

από το σημείο Ο. Ο πυρήνας της διατομής καλύπτει αποστάσεις μέχρι $\frac{\alpha}{6} = 0,5\,\text{cm}$ από το κέντρο βάρους Κ πάνω στον άξονα y. Επομένως, το σημείο Μ βρίσκεται εκτός του πυρήνα της διατομής.

Το ζητούμενο φορτίο δίνεται από τη σχέση έκκεντρης θλίψεως ορθογώνιας διατομής, χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό[1]:

[1] Χρησιμοποιούμε στον παρονομαστή την πλευρά β, καθώς αυτή είναι η κάθετη στον άξονα y.

$$\frac{2 \cdot F}{3 \cdot \beta \cdot h} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \Leftrightarrow F \le \frac{3}{2} \cdot \beta \cdot h \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \Leftrightarrow F \le \frac{3}{2} \cdot 4\,cm \cdot 0,5\,cm \cdot 8.000 \frac{N}{cm^2} \Leftrightarrow F \le 24.000\,N$$

7.5.2 Κυκλική διατομή.

Ας θεωρήσομε την κυκλική διατομή διαμέτρου D του σχήματος 7.5γ. Το σχήμα απεικονίζει και τον πυρήνα της διατομής. Στο σημείο Μ που βρίσκεται πάνω στον άξονα των x, σε απόσταση h από το σημείο Α, εφαρμόζεται έκκεντρα κάθετο φορτίο F.

Για να υπάρχει αδρανής περιοχή, το σημείο Μ πρέπει να βρίσκεται εκτός του πυρήνα της κυκλικής διατομής. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$h < \frac{7 \cdot D}{16} \tag{7.15}$$

Η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή από την αδρανή είναι η ευθεία ε που εικονίζεται στο σχήμα 7.5γ. Αποδεικνύεται ότι η γραμμή αυτή βρίσκεται σε απόσταση h_ε από το σημείο Α, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$h_\varepsilon = 2,33 \cdot h + 2,33 \cdot \frac{h^3}{D^2} \tag{7.16}$$

Επίσης, οι αναπτυσσόμενες θλιπτικές τάσεις (είναι αρνητικές ως θλιπτικές) κυμαίνονται κατ' απόλυτη τιμή από μηδέν στη γραμμή ε μέχρι μια μέγιστη τιμή σ_{max}, η οποία παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

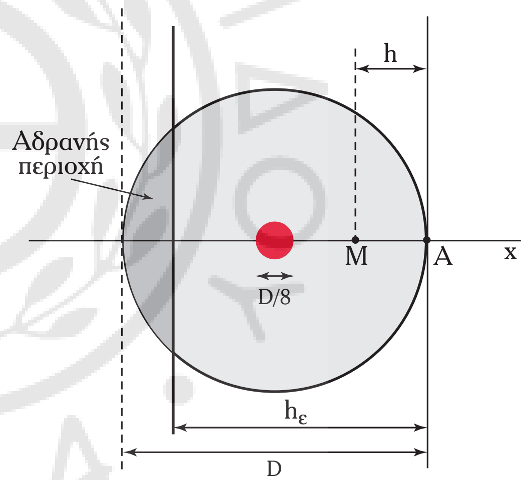
$$\sigma_{max} = \left(0,372 + 0,112\frac{h}{D}\right) \cdot \frac{F}{h\sqrt{h_\varepsilon \cdot h}} \tag{7.17}$$

Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$, δηλαδή πρέπει:

$$\sigma_{max} = \left(0,372 + 0,112\frac{h}{D}\right) \cdot \frac{F}{h\sqrt{h_\varepsilon \cdot h}} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \tag{7. 18}$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί τη ***σχέση έκκεντρης θλίψεως κυκλικής διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό***.

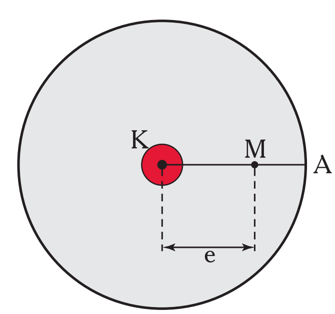
Τα προβλήματα που εμφανίζονται στην έκκεντρη θλίψη κυκλικής διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που συναντήσαμε στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων.



Σχ. 7.5γ.
Κυκλική διατομή με τον πυρήνα της που καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη με την εφαρμογή φορτίου στο σημείο Μ.

Άσκηση.

Ράβδος από υλικό με αμελητέα αντοχή σε εφελκυσμό έχει κυκλική διατομή ακτίνας r = 8 cm. Η ράβδος καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη από δύναμη που ενεργεί στο σημείο Μ που απέχει απόσταση e = 5 cm από το κέντρο βάρους της διατομής Κ, όπως δείχνει το σχήμα 7.5δ. Να προσδιοριστεί το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο εάν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ = 6.000 N/cm².



Σχ. 7.5δ.

7.6 Έκκεντρη θλίψη και λυγισμός

Στο Κεφάλαιο 6 μελετήσαμε την εκδήλωση λυγισμού σε ράβδους που καταπονούνται σε αξονική θλίψη. Στην παράγραφο αυτή μελετούμε την περίπτωση του λυγισμού ράβδων που καταπονούνται σε έκκεντρη θλίψη.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη ράβδο του σχήματος 7.6α(α) με μήκος L, η οποία στηρίζεται με πάκτωση στο κάτω άκρο της. Στο πάνω άκρο της η ράβδος δέχεται θλιπτική δύναμη F, η οποία δεν ενεργεί αξονικά αλλά έκκεντρα, με εκκεντρότητα e. Αυξάνοντας σταδιακά τη θλιπτική δύναμη F παρατηρούμε ότι η ράβδος αρχίζει να εμφανίζει καμπύλωση, δηλαδή να λυγίζει [σχ. 7.6α(β)].

Η καμπύλωση της ράβδου περιγράφεται από την απόκλιση x (κατά τον οριζόντιο άξονα) κάθε διατομής της ράβδου, η οποία υπολογίζεται από τον αρχικό κατακόρυφο άξονα της ράβδου [σχ. 7.6α(β)]. Είναι εμφανές ότι η απόκλιση x δεν είναι η ίδια για όλες τις διατομές της ράβδου, αλλά εξαρτάται από τη θέση κάθε διατομής, δηλαδή από την απόσταση y κάθε διατομής από το πακτωμένο άκρο της ράβδου. Η διατομή του πακτωμένου άκρου της ράβδου που βρίσκεται στη θέση y_A=0 εμφανίζει μηδενική απόκλιση x (x_A = 0). Η διατομή του πάνω άκρου της ράβδου που βρίσκεται στη θέση y_B=L εμφανίζει τη μέγιστη απόκλιση x, την οποία ονομάζομε z (x_B=z). Έτσι, το σημείο εφαρμογής της θλιπτικής δυνάμεως στο σχήμα 7.6α(β) απέχει από τον αρχικό κατακόρυφο άξονα της ράβδου απόσταση x=z+e.

Η καμπτική ροπή M σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της ράβδου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M = F \cdot (z + e - x) \tag{7.19}$$

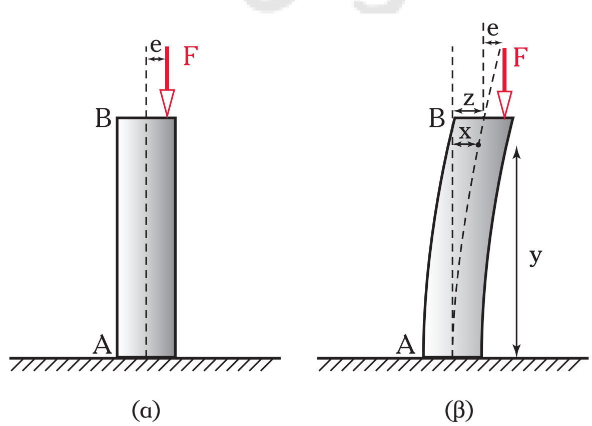
Αποδεικνύεται ότι η απόκλιση x κάθε διατομής της ράβδου από τον αρχικό κατακόρυφο άξονά της παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$x = (z + e) \cdot \left[1 - \text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I_\delta}} y \right) \right] \tag{7.20}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου, I_δ η ροπή αδράνειας της διατομής της και συν η συνάρτηση του συνημιτόνου.

Θέτοντας y_A = 0 στην εξίσωση (7.20), για τη διατομή του πακτωμένου άκρου της ράβδου λαμβάνομε:

$$x_A = (z + e) \cdot \left[1 - \text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I_\delta}} 0 \right) \right] = (z + e) \cdot (1 - 1) = 0.$$



Σχ. 7.6α.
(α) Ράβδος στην οποία εφαρμόζεται έκκεντρη θλιπτική δύναμη. (β) Η ράβδος λυγίζει.

Από την εξίσωση (7.20) μπορούμε να υπολογίσομε την απόκλιση z του πάνω άκρου της ράβδου, θέτοντας $y_B = L$ και $x_B = z$:

$$z=(z+e)\cdot\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_\delta}}L\right)\right]\Leftrightarrow z=z-z\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_\delta}}L\right)+e\cdot\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_\delta}}L\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=e\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_\delta}}L\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_\delta}}L\right)} \tag{7.21}$$

Η σχέση (7.21) περιγράφει την εξάρτηση της αποκλίσεως z από τη θλιπτική δύναμη F για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας (σχ. 7.6β).

Γνωρίζομε από τη σχέση (6.6) ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για ράβδο πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο (συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού α = 2) είναι:

$$F_\kappa=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_\delta}{4\cdot L^2} \tag{7.22}$$

Το συνημίτονο της σχέσεως (7.21) όταν η F γίνει ίση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (σχέση 7.22) είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{F_\kappa}{E\cdot I_\delta}}L\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_\delta}{4\cdot L^2}}{E\cdot I_\delta}}L\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\cdot L}{2\cdot L}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$$

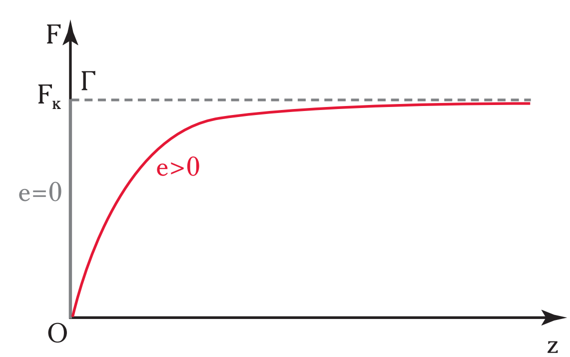
Έτσι για $F=F_\kappa$, η σχέση (7.21) οδηγεί σε άπειρη τιμή της αποκλίσεως z (για e>0). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της μηδενικής εκκεντρότητας (e=0). Στην περίπτωση αυτή, για $F=F_\kappa$, η σχέση (7.21) οδηγεί σε απροσδιόριστη τιμή της αποκλίσεως z.

Από το σχήμα 7.6β συμπεραίνομε τα εξής:

α) Η σχέση ανάμεσα στην απόκλιση z και τη θλιπτική δύναμη F δεν είναι γραμμική.

β) Για μηδενική εκκεντρότητα [δηλαδή για αξονική καταπόνηση (e = 0)] και θλιπτική δύναμη μικρότερη από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, η γραφική παράσταση αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ (πράσινη γραμμή). Δηλαδή έχομε μηδενική απόκλιση z όσο η θλιπτική δύναμη είναι μικρότερη από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (βλ. Κεφ. 6).

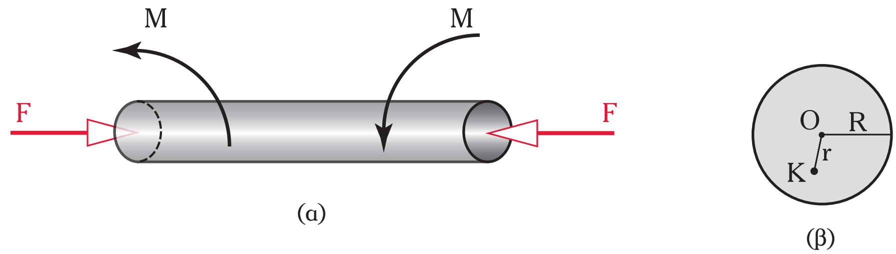
γ) Για μη μηδενική εκκεντρότητα, η απόκλιση z αρχικά (για μικρές τιμές της θλιπτικής δυνάμεως) αυξάνει με αργό ρυθμό με την αύξηση της θλιπτικής δυνάμεως F. Στη συνέχεια, όσο αυξάνει η θλιπτική δύναμη τόσο πιο μεγάλη είναι η αύξηση της αποκλίσεως z. Όταν η θλιπτική δύναμη πλησιάζει την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ο ρυθμός αυξήσεως της αποκλίσεως z είναι ακόμη μεγαλύτερος και μάλιστα η απόκλιση τείνει στο άπειρο.



Σχ. 7.6β.
Σχέση αποκλίσεως z και δυνάμεως F για την έκκεντρη θλίψη.

7.7 Στρέψη και αξονική καταπόνηση.

Είναι συχνή η περίπτωση μια ράβδος να καταπονείται ταυτοχρόνως και σε στρέψη και



Σχ. 7.7.
(α) Ράβδος που καταπονείται συγχρόνως σε στρέψη και θλίψη. (β) Η κυκλική διατομή της ράβδου.

σε θλίψη ή εφελκυσμό. Το σχήμα 7.7 παρουσιάζει μια ράβδο με κυκλική διατομή ακτίνας R που καταπονείται συγχρόνως σε στρέψη από ροπή M και σε θλίψη από αξονική δύναμη F.

Ας θεωρήσομε τώρα ένα τυχαίο σημείο K της διατομής της ράβδου, το οποίο απέχει απόσταση r από το κέντρο βάρους O. Σ' αυτό, σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει στα Κεφάλαια 2 και 5, αναπτύσσονται οι ακόλουθες τάσεις:

α) Διατμητική τάση τ, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{2 \cdot M \cdot r}{\pi \cdot R^4} \tag{7.23}$$

β) Ορθή τάση σ, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{F}{\pi \cdot R^2} \tag{7.24}$$

Ο συνδυασμός αυτών των δύο τάσεων παρέχει την ισοδύναμη τάση που εφαρμόζεται στο σημείο K.

Αποδεικνύεται ότι οι ακρότατες τιμές της ισοδύναμης τάσεως, με βάση τη θεωρία της μέγιστης ορθής τάσεως, που αναπτύσσονται στη ράβδο παρέχονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}}\right) \tag{7.25}$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι οι ακρότατες τιμές της διατμητικής τάσεως παρουσιάζονται στα άκρα της διατομής και παρέχονται από τη σχέση:

$$\tau_{\alpha\kappa\rho} = \pm \frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}} \tag{7.26}$$

Η ράβδος φορτίζεται κανονικά εάν οι τάσεις των σχέσεων (7.25) και (7.26) είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες επιτρεπόμενες τιμές.

Παράδειγμα 5.

Σε ράβδο κυκλικής διατομής με διάμετρο D = 4 cm, εφαρμόζεται αξονική θλιπτική δύναμη F = 25.000 N συγχρόνως με ροπή στρέψεως M = 800 N · cm. Να υπολογιστούν:

α) Τα ακρότατα των αναπτυσσομένων τάσεων.

β) Τα ακρότατα των διατμητικών τάσεων.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
D = 4 cm ⇒ R = 2 cm	$\sigma_{\alpha\kappa\rho}$ = ;
F = 25.000 N	$\tau_{\alpha\kappa\rho}$ = ;
M = 800 N · cm	

Λύση.

α) Τα ακρότατα των αναπτυσσομένων τάσεων δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = -\frac{F}{2\cdot\pi\cdot R^2}\cdot\left(1\pm\sqrt{1+\frac{16\cdot M^2}{F^2\cdot R^2}}\right) = -\frac{25.000\ N}{2\cdot\pi\cdot 2^2 cm^2}\cdot\left(1\pm\sqrt{1+\frac{16\cdot 800^2 N^2\cdot cm^2}{25.000^2 N^2\cdot 2^2 cm^2}}\right) =$$

$$= -1.992\frac{N}{cm^2}\ \text{ και }\ -2\frac{N}{cm^2}$$

β) Τα ακρότατα των διατμητικών τάσεων δίνονται από τη σχέση:

$$\tau_{\alpha\kappa\rho} = \pm\frac{F}{2\cdot\pi\cdot R^2}\cdot\sqrt{1+\frac{16\cdot M^2}{F^2\cdot R^2}} = \pm\frac{25.000N}{2\cdot\pi\cdot 2^2 cm^2}\sqrt{1+\frac{16\cdot 800^2\ N^2\cdot cm^2}{25.000^2\ N^2\cdot 2^2 cm^2}} = \pm 997\frac{N}{cm^2}$$

Άσκηση

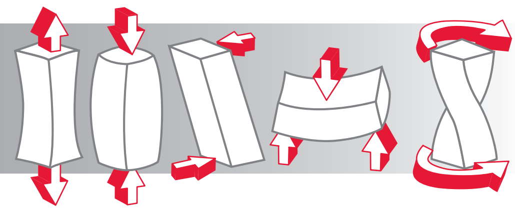
Σε ράβδο κυκλικής διατομής με ακτίνα r = 18 mm, εφαρμόζεται θλιπτική δύναμη F = 12.000 N συγχρόνως με ροπή στρέψεως M = 120 N · cm. Να υπολογιστούν:

α) Τα ακρότατα των αναπτυσσομένων τάσεων.

β) Τα ακρότατα των διατμητικών τάσεων.

Εάν οι επιτρεπόμενες τάσεις είναι $\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 10.000 N/cm^2 και $\tau_{\varepsilon\pi}$ = 1.500 N/cm^2, φορτίζεται η ράβδος κανονικά;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Πίνακας αντιστοιχίσεως Ελληνικής και Αγγλικής ορολογίας

Ελληνικός όρος	***Αγγλικός όρος***
Αντοχή υλικών	Strength of Materials
Αστοχία υλικού	Material failure
Άτρακτος	Shaft
Διάτμηση	Shear
Δοκός	Beam
Δύναμη	Force
Εγκοπές	Notches
Εκκεντρότητα	Eccentricity
Ερπυσμός	Creep
Εφελκυσμός	Tensile
Θλίψη	Compression
Κάμψη	Bending
Κέντρο βάρους (Κεντροειδές)	Center of gravity (Centroid)
Κόπωση	Fatigue
Κρίσιμο φορτίο	Critical force
Λυγηρότητα	Slenderness
Λυγισμός	Buckling
Μέτρο ελαστικότητας	Modulus of elasticity
Όλκιμο υλικό	Ductile material
Όριο ελαστικότητας	Yield strength
Όριο θραύσεως	Ultimate strength
Ροπή	Moment
Ροπή αδράνειας	Moment og inertia
Σκληρόμετρο	Durometer
Σκληρότητα	Hardness
Στρέψη	Torsion
Συγκέντρωση τάσεων	Stress Concentration
Τάση	Stress
Τάση θραύσεως	Breaking strength
Τάση κοπώσεως	Fatigue stress
Ψαθυρό υλικό	Brittle material

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Πίνακες συντελεστών λυγισμού.

A) Χάλυβας St37.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02
20	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10
40	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16
50	1,17	1,18	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25
60	1,26	1,27	1,29	1,30	1,31	1,32	1,34	1,35	1,36	1,38
70	1,39	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56
80	1,59	1,61	1,63	1,66	1,69	1,71	1,74	1,78	1,81	1,84
90	1,88	1,92	1,95	2,00	2,04	2,09	2,14	2,19	2,24	2,30
100	2,36	2,41	2,46	2,51	2,56	2,61	2,66	2,71	2,76	2,81
110	2,86	2,91	2,97	3,02	3,07	3,13	3,18	3,24	3,29	3,35
120	3,40	3,46	3,52	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,87	3,93
130	4,00	4,06	4,12	4,18	4,25	4,31	4,37	4,44	4,50	4,57
140	4,63	4,70	4,77	4,83	4,90	4,97	5,04	5,11	5,18	5,25
150	5,32	5,39	5,46	5,53	5,61	5,68	5,75	5,83	5,90	5,98
160	6,05	6,13	6,20	6,28	6,36	6,44	6,51	6,59	6,67	6,75
170	6,83	6,91	6,99	7,08	7,16	7,24	7,32	7,41	7,49	7,57
180	7,66	7,75	7,83	7,92	8,00	8,09	8,18	8,27	8,36	8,44
190	8,53	8,62	8,72	8,81	8,90	8,99	9,08	9,17	9,27	9,36
200	9,46	9,55	9,65	9,74	9,84	9,94	10,03	10,13	10,23	10,33
210	10,43	10,53	10,63	10,73	10,83	10,93	11,03	11,13	11,24	11,34
220	11,44	11,55	11,65	11,76	11,86	11,97	12,08	12,18	12,29	12,40
230	12,51	12,62	12,72	12,83	12,94	13,06	13,17	13,28	13,39	13,50
240	13,62	13,73	13,84	13,96	14,08	14,19	14,31	14,42	14,54	14,66
250	14,78	–	–	–	–	–	–	–	–	–

B) Χάλυβες St52 (DIN 1050).

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03
20	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06
30	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,12
40	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21
50	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33
60	1,35	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52
70	1,54	1,57	1,59	1,62	1,65	1,68	1,71	1,74	1,78	1,81
80	1,85	1,89	1,93	1,98	2,03	2,08	2,13	2,19	2,25	2,32
90	2,39	2,47	2,55	2,64	2,74	2,84	2,96	3,08	3,22	3,38

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	3,55	3,62	3,69	3,76	3,84	3,91	3,98	4,06	4,14	4,21
110	4,29	4,37	4,45	4,53	4,61	4,69	4,77	4,85	4,94	5,02
120	5,11	5,19	5,28	5,37	5,45	5,54	5,63	5,72	5,81	5,90
130	5,99	6,09	6,18	6,27	6,37	6,46	6,56	6,66	6,75	6,85
140	6,95	7,05	7,15	7,25	7,35	7,46	7,56	7,66	7,77	7,87
150	7,98	8,09	8,19	8,30	8,41	8,52	8,63	8,74	8,85	8,97
160	9,08	9,19	9,31	9,42	9,54	9,65	9,77	9,89	10,01	10,13
170	10,25	10,37	10,49	10,61	10,75	10,86	10,98	11,11	11,24	11,36
180	11,49	11,62	11,75	11,88	12,01	12,14	12,27	12,40	12,53	12,67
190	12,80	12,94	13,07	13,21	13,35	13,48	13,62	13,76	13,90	14,04
200	14,18	14,53	14,47	14,61	14,76	14,90	15,05	15,20	15,34	15,49
210	15,64	15,79	15,94	16,09	16,24	16,39	16,55	16,70	16,85	17,01
220	17,16	17,32	17,48	17,64	17,79	17,95	18,11	18,27	18,44	18,60
230	18,76	18,92	19,09	19,25	19,42	19,58	19,75	19,92	20,09	20,26
240	20,43	20,60	20,77	20,94	21,11	21,29	21,46	21,64	21,81	21,99
250	22,16	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Γ) Χυτοσίδηρος.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05
20	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10
30	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21
40	1,22	1,24	1,25	1,27	1,29	1,31	1,32	1,34	1,36	1,37
50	1,39	1,42	1,45	1,47	1,50	1,53	1,56	1,59	1,61	1,64
60	1,67	1,72	1,78	1,83	1,89	1,94	1,99	2,05	2,10	2,16
70	2,21	2,34	2,47	2,60	2,73	2,86	2,98	3,11	3,24	3,37
80	3,50	3,59	3,69	3,78	3,87	3,97	4,06	4,15	4,24	4,34
90	4,43	4,53	4,63	4,74	4,84	4,94	5,04	5,14	5,25	5,35
100	5,45	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Δ) Ξύλο.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,06
10	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15
20	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24
30	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35
40	1,36	1,38	1,39	1,40	1,42	1,43	1,44	1,46	1,47	1,49
50	1,50	1,52	1,53	1,55	1,56	1,58	1,60	1,61	1,63	1,65
60	1,67	1,69	1,70	1,72	1,74	1,76	1,79	1,81	1,83	1,85
70	1,87	1,90	1,92	1,95	1,97	2,00	2,03	2,05	2,08	2,11
80	2,14	2,17	2,21	2,24	2,27	2,31	2,34	2,38	2,42	2,46

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	2,50	2,54	2,58	2,63	2,68	2,73	2,78	2,83	2,88	2,94
100	3,00	3,07	3,14	3,21	3,28	3,35	3,43	3,50	3,57	3,65
110	3,73	3,81	3,89	3,97	4,05	4,13	4,21	4,29	4,38	4,46
120	4,55	4,64	4,73	4,82	4,91	5,00	5,09	5,19	5,28	5,38
130	5,48	5,57	5,67	5,77	5,88	5,98	6,08	6,19	6,29	6,40
140	6,51	6,62	6,73	6,84	6,95	7,07	7,18	7,30	7,41	7,53
150	7,65	7,77	7,90	8,02	8,14	8,27	8,39	8,52	8,65	8,78
160	8,91	9,04	9,18	9,31	9,45	9,58	9,72	9,86	10,00	10,15
170	10,29	10,43	10,58	10,73	10,88	11,03	11,18	11,33	11,48	11,64
180	11,80	11,95	12,11	12,27	12,44	12,60	12,76	12,93	13,09	13,26
190	13,43	13,61	13,78	13,95	14,12	14,30	14,48	14,66	14,84	15,03
200	15,20	15,38	15,57	15,76	15,95	16,14	16,33	16,52	16,71	16,91
210	17,11	17,31	17,51	17,71	17,92	18,12	18,33	18,53	18,74	18,95
220	19,17	19,38	19,60	19,81	20,03	20,25	20,47	20,69	20,92	21,14
230	21,37	21,60	21,83	22,06	22,30	22,53	22,77	23,01	23,25	23,49
240	23,73	23,98	24,22	24,47	24,72	24,97	25,22	25,48	25,73	25,99
250	26,25	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ε) Κράματα αλουμινίου Al-Cu-Mg.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
20	1,03	1,04	1,06	1,07	1,10	1,11	1,13	1,14	1,16	1,17
30	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37
40	1,39	1,41	1,44	1,46	1,49	1,52	1,54	1,56	1,59	1,63
50	1,66	1,69	1,73	1,76	1,80	1,83	1,87	1,90	1,93	1,96
60	1,99	2,05	2,11	2,16	2,22	2,28	2,34	2,39	2,45	2,51
70	2,57	2,65	2,73	2,81	2,88	2,96	3,04	3,12	3,20	3,28
80	3,36	3,45	3,54	3,63	3,72	3,81	3,90	3,99	4,08	4,17
90	4,26	4,36	4,46	4,56	4,66	4,75	4,85	4,95	5,05	5,15
100	5,25	5,36	5,47	5,58	5,69	5,80	5,92	6,03	6,14	6,25
110	6,36	6,48	6,60	6,72	6,84	6,96	7,08	7,21	7,33	7,45
120	7,57	7,70	7,83	7,96	8,09	8,22	8,35	8,48	8,62	8,74
130	8,88	9,02	9,16	9,31	9,45	9,59	9,73	9,87	10,02	10,16
140	10,30	10,45	10,60	10,75	10,91	11,06	11,21	11,36	11,52	11,67
150	11,82	11,98	12,15	12,31	12,47	12,63	12,80	12,96	13,12	13,29
160	13,45	13,62	13,79	13,97	14,15	14,32	14,49	14,67	14,84	15,02
170	15,19	15,37	15,55	15,74	15,93	16,11	16,29	16,48	16,66	16,85
180	17,03	17,22	17,42	17,61	17,80	18,00	18,20	18,40	18,60	18,78
190	18,97	19,17	19,38	19,58	19,79	19,99	20,20	20,40	20,61	20,81
200	21,02	21,23	21,45	21,66	21,88	22,09	22,31	22,52	22,74	22,95
210	23,17	23,39	23,62	23,85	24,07	24,30	24,53	24,75	24,98	25,20
220	25,43	25,67	25,90	26,14	26,38	26,61	26,85	27,10	27,32	27,56

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
230	27,80	28,05	28,54	28,80	29,03	29,28	29,33	29,53	29,78	30,02
240	30,27	30,53	30,78	31,04	31,30	31,55	31,81	32,07	32,33	32,58
250	32,84	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ΣΤ) Κράματα αλουμινίου Al-Mg3, F18.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02
30	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06
40	1,06	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14
50	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,22	1,22	1,23	1,25
60	1,26	1,27	1,28	1,29	1,31	1,32	1,33	1,34	1,36	1,37
70	1,38	1,39	1,40	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,51
80	1,52	1,53	1,55	1,57	1,58	1,60	1,62	1,63	1,64	1,66
90	1,68	1,70	1,72	1,74	1,76	1,77	1,79	1,81	1,83	1,85
100	1,87	1,89	1,91	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07
110	2,09	2,12	2,16	2,19	2,23	2,26	2,29	2,33	2,36	2,39
120	2,43	2,47	2,51	2,56	2,60	2,64	2,68	2,72	2,76	2,81
130	2,85	2,89	2,94	2,98	3,03	3,07	3,12	3,16	3,21	3,25
140	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,54	3,60	3,64	3,69	3,71
150	3,79	3,84	3,89	3,95	3,99	4,05	4,10	4,15	4,21	4,26
160	4,31	4,37	4,42	4,48	4,53	4,59	4,65	4,70	4,76	4,81
170	4,87	4,93	4,99	5,05	5,11	5,16	5,22	5,28	5,34	5,40
180	5,46	5,52	5,58	5,64	5,71	5,77	5,83	5,89	5,95	6,02
190	6,08	6,14	6,21	6,28	6,34	6,41	6,48	6,54	6,61	6,67
200	6,74	6,81	6,88	6,95	7,02	7,08	7,15	7,22	7,29	7,36
210	7,43	7,50	7,57	7,65	7,72	7,79	7,87	7,94	8,01	8,09
220	8,16	8,23	8,30	8,38	8,45	8,52	8,60	8,67	8,74	8,82
230	8,92	8,99	9,08	9,16	9,24	9,31	9,39	9,47	9,55	9,63
240	9,71	9,79	9,87	9,95	10,04	10,12	10,20	10,28	10,37	10,45
250	10,53	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ζ) Χάλυβας St 37 (DIN 4114).

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
30	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13
40	1,14	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,19	1,19	1,20
50	1,21	1,22	1,23	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29
60	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40
70	1,41	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,50	1,52	1,53
80	1,55	1,56	1,58	1,59	1,61	1,62	1,64	1,66	1,68	1,69

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	1,71	1,73	1,74	1,76	1,78	1,80	1,82	1,84	1,86	1,88
100	1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07	2,09
110	2,11	2,14	2,16	2,18	2,21	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81
130	2,85	2,90	2,94	2,99	3,03	3,08	3,12	3,17	3,22	3,26
140	3,31	3,36	3,41	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75
150	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,06	4,11	4,16	4,22	4,27
160	4,32	4,38	4,43	4,49	4,54	4,60	4,65	4,71	4,77	4,82
170	4,88	4,94	5,00	5,05	5,11	5,17	5,23	5,29	5,35	5,41
180	5,47	5,53	5,59	5,66	5,72	5,78	5,84	5,91	5,97	6,03
190	6,10	6,16	6,23	6,29	6,36	6,42	6,49	6,55	6,62	6,69
200	6,75	6,82	6,89	6,96	7,03	7,10	7,17	7,24	7,31	7,38
210	7,45	7,52	7,59	7,66	7,73	7,81	7,88	7,95	8,03	8,10
220	8,17	8,25	8,32	8,40	8,47	8,55	8,63	8,70	8,78	8,86
230	8,93	9,01	9,09	9,17	9,25	9,33	9,41	9,49	9,57	9,65
240	9,73	9,81	9,89	9,97	10,05	10,14	10,22	10,30	10,39	10,47
250	10,55	Δεν απαιτείται παρεμβολή για ενδιάμεσες τιμές								

Η) Χάλυβας St 52 (DIN 4114).

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11
30	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18
40	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27
50	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40
60	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,49	1,51	1,53	1,54	1,56
70	1,58	1,60	1,62	1,64	1,66	1,68	1,70	1,72	1,74	1,77
80	1,79	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	1,93	1,95	1,98	2,01
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,38	2,43	2,48
100	2,53	2,58	2,64	2,69	2,74	2,79	2,85	2,90	2,95	3,01
110	3,06	3,12	3,18	3,23	3,29	3,35	3,41	3,47	3,53	3,59
120	3,65	3,71	3,77	3,83	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22
130	4,28	4,35	4,41	4,48	4,55	4,62	4,69	4,75	4,82	4,89
140	4,96	5,04	5,11	5,18	5,25	5,33	5,40	5,47	5,55	5,62
150	5,70	5,78	5,85	5,93	6,01	6,09	6,16	6,24	6,32	6,40
160	6,48	6,57	6,65	6,73	6,81	6,90	6,98	7,06	7,15	7,23
170	7,32	7,41	7,49	7,58	7,67	7,76	7,85	7,94	8,03	8,12
180	8,21	8,30	8,39	8,48	8,58	8,67	8,76	8,86	8,95	9,05
190	9,14	9,24	9,34	9,44	9,53	9,63	9,73	9,83	9,93	10,03
200	10,13	10,23	10,34	10,44	10,54	10,65	10,75	10,85	10,96	11,06
210	11,17	11,28	11,38	11,49	11,60	11,71	11,82	11,93	12,04	12,15
220	12,26	12,37	12,48	12,60	12,71	12,82	12,94	13,05	13,17	13,28
230	13,40	13,52	13,63	13,75	13,87	13,99	14,11	14,23	14,35	14,47
240	14,59	14,71	14,83	14,96	15,08	15,20	15,33	15,45	15,58	15,71
250	15,83	Δεν απαιτείται παρεμβολή για ενδιάμεσες τιμές								

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 1.

1. *Τι ονομάζεται τάση που αναπτύσσεται σε μία επιφάνεια; Ποια είναι τα είδη των τάσεων;*
2. *Διατυπώστε το νόμο ελαστικότητας του Hooke και σχολιάστε το πεδίο εφαρμογής του.*
3. *Σχεδιάστε ένα τυπικό διάγραμμα εφελκυσμού-θλίψεως και περιγράψτε συνοπτικά τι συμβαίνει σε καθένα από τα τμήματά του.*
4. *Ποια υλικά ονομάζονται όλκιμα και ποια ψαθυρά; Σχεδιάστε ενδεικτικά διαγράμματα εφελκυσμού των ολκίμων και των ψαθυρών υλικών. Αναφέρατε παραδείγματα ολκίμων και ψαθυρών υλικών.*
5. *Περιγράψτε τις επιδράσεις που έχει η μεταβολή της θερμοκρασίας στις διαστάσεις μιας ράβδου, καθώς και στα όρια αντοχής της. Εξαρτώνται οι επιδράσεις αυτές από το υλικό της ράβδου;*
6. *Τι είναι ο ερπυσμός ενός υλικού; Ποια μεγέθη χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της ιδιότητας του ερπυσμού των υλικών;*
7. *Τι ονομάζομε κόπωση ενός υλικού; Τι μας δείχνει το διάγραμμα κοπώσεως;*
8. *Τι ονομάζεται συγκέντρωση τάσεων; Πώς ορίζεται ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων;*
9. *Διατυπώστε τον ορισμό της επιφανειακής πιέσεως και αναφέρετε τις μονάδες μετρήσεώς της. Εξηγήστε γιατί χρησιμοποιούμε μεγάλες επιφάνειες επαφής μεταξύ δύο σωμάτων, προκειμένου να μεταβιβαστούν μεγάλες θλιπτικές δυνάμεις απ' το ένα στο άλλο.*
10. *Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι καταπονήσεις; Αναφέρατε παραδείγματα απλών καταπονήσεων.*
11. *Πότε λέμε ότι ένα υλικό αστοχεί; Τι είναι η επιτρεπόμενη τάση και τι ο συντελεστής ασφαλείας;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 2.

1. *Πότε λέμε ότι ένα σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό; Ποιες είναι οι παραμορφώσεις των σωμάτων που καταπονούνται σε εφελκυσμό και πώς υπολογίζονται;*
2. *Διατυπώστε τη σχέση εφελκυσμού και εξηγήστε τα μεγέθη που αυτή περιλαμβάνει. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να τηρούνται, ώστε να ισχύει η σχέση εφελκυσμού;*
3. *Πότε λέμε ότι ένα σώμα καταπονείται σε θλίψη; Ποιες είναι οι παραμορφώσεις των σωμάτων που καταπονούνται σε θλίψη και πώς υπολογίζονται;*
4. *Διατυπώστε τη σχέση θλίψεως και εξηγήστε τα μεγέθη που αυτή περιλαμβάνει. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να τηρούνται, ώστε να ισχύει η σχέση θλίψεως;*
5. *Ποιο φαινόμενο ονομάζεται σύνθλιψη άντυγας οπής και από ποια σχέση περιγράφεται;*
6. *Τι είδους τάσεις εμφανίζονται σε κυλινδρικά δοχεία πιέσεως με λεπτά τοιχώματα που περιέχουν ρευστό; Από ποιους παράγοντες εξαρτώνται οι τάσεις αυτές;*
7. *Ποιες τάσεις αναπτύσσονται σ' ένα σώμα όταν παρεμποδίζεται η ελεύθερη μεταβολή του μήκους του κατά τις θερμοκρασιακές μεταβολές; Από ποιους παράγοντες εξαρτώνται οι τάσεις αυτές;*
8. *Πότε λέμε ότι ένα σώμα καταπονείται σε διάτμηση; Ποιες είναι οι παραμορφώσεις των σωμάτων που καταπονούνται σε διάτμηση και πώς υπολογίζονται;*
9. *Διατυπώστε τη σχέση διατμήσεως και εξηγήστε τα μεγέθη που αυτή περιλαμβάνει. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να τηρούνται, ώστε να ισχύει η σχέση διατμήσεως;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 3.

1. *Σε ποιες βασικές κατηγορίες διακρίνονται οι δοκοί με κριτήριο τον τρόπο στηρίξεώς τους; Σχεδιάστε χαρακτηριστικό σχήμα για καθεμία απ' τις κατηγορίες αυτές.*
2. *Ποιες είναι οι δύο κατηγορίες, στις οποίες ταξινομούνται οι εσωτερικές δυνάμεις μιας δοκού και σε τι διαφέρουν μεταξύ τους; Τι απεικονίζουν το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων;*

3. *Τι απεικονίζει το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών και πώς σχεδιάζεται; Ποια η σχέση μεταξύ του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων και του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών;*
4. *Αναφέρατε τις ιδιότητες της διατομής μιας δοκού.*
5. *Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Steiner και να εξηγήσετε τη σημασία του για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας επιφανειών.*
6. *Πώς ορίζονται η ακτίνα αδράνειας και η ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας; Ποιες είναι οι μονάδες μετρήσεως καθενός από τα δύο μεγέθη;*
7. *Πώς ορίζονται η πολική ροπή αδράνειας και η πολική ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας; Ποιες είναι οι μονάδες μετρήσεως καθενός από τα δύο μεγέθη;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 4.

1. *Πότε ένα σώμα καταπονείται σε κάμψη;*
2. *Δώστε τη σχέση κάμψεως στην περίπτωση της συμμετρικής καθαρής κάμψεως και εξηγήστε τα μεγέθη που περιλαμβάνει. Τι εκφράζει η σχέση κάμψεως;*
3. *Τι ονομάζομε ουδέτερο επίπεδο, τι ουδέτερη γραμμή και τι ελαστική γραμμή ενός σώματος που καταπονείται σε κάμψη;*
4. *Ποιες είναι οι παραμορφώσεις που εμφανίζονται στη συμμετρική καθαρή κάμψη;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 5.

1. *Πότε ένα σώμα καταπονείται σε στρέψη; Αναφέρατε τουλάχιστον δύο παραδείγματα σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη.*
2. *Διατυπώστε τη σχέση στρέψεως για δοκό κυκλικής διατομής και εξηγήστε τα μεγέθη που η σχέση περιλαμβάνει.*
3. *Διατυπώστε τη σχέση που παρέχει τη στροφή δοκού κυκλικής διατομής σε σχέση με την εξωτερική ροπή στρέψεως.*
4. *Διατυπώστε τη σχέση στρέψεως για κοιλοδοκό και εξηγήστε τα μεγέθη που η σχέση περιλαμβάνει.*
5. *Περιγράψτε συνοπτικά πώς υπολογίζομε τη διάμετρο ατράκτου (διαστασιολόγηση) κυκλικής διατομής, ώστε να είναι σε θέση να μεταφέρει συγκεκριμένη ισχύ με συγκεκριμένο αριθμό στροφών ανά λεπτό.*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 6.

1. *Πότε λέμε ότι μία ράβδος εκδηλώνει λυγισμό; Αναφέρετε παραδείγματα σωμάτων που εκδηλώνουν λυγισμό.*
2. *Τι ονομάζομε κρίσιμο φορτίο λυγισμού και από ποιους παράγοντες εξαρτάται;*
3. *Διατυπώστε τον τύπο του Euler στις δύο μορφές του και αναφέρετε τις παραδοχές, στις οποίες στηρίζεται η εξαγωγή τους.*
4. *Τι είναι η οριακή λυγηρότητα και τι η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού; Για ποιο λόγο τις χρησιμοποιούμε;*
5. *Περιγράψτε τα βήματα της μεθόδου των συντελεστών ω.*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 7.

1. *Πότε έχομε έκκεντρη κάθετη φόρτιση και τι ονομάζομε εκκεντρότητα;*
2. *Τι ονομάζομε ισοδύναμη τάση; Πώς υπολογίζεται η ισοδύναμη τάση στην περίπτωση που έχομε μόνο ορθές τάσεις;*
3. *Πώς μπορεί να φορτιστεί με έκκεντρη θλίψη, ώστε να μην υποστεί θραύση, ράβδος με ορθογώνια διατομή από υλικό που έχει μηδενική αντοχή σε εφελκυσμό; Διατυπώστε τη σχέση έκκεντρης θλίψεως ορθογώνιας διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό.*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδριανόπουλος Ν., Κυριαζή Ε. και Λιακόπουλος Κ., «Πειραματική Αντοχή των Υλικών», Εκδόσεις Συμεών, 1991.

Βελαώρας Ι., «Αντοχή Υλικών», Εκδόσεις Ίων, 2003.

Βουθούνης Π., «Τεχνική Μηχανική – Αντοχή των Υλικών», 2010.

Γδουτός Ε., «Μηχανική του Στερεού Σώματος Ι και ΙΙ», Εκδόσεις Κυριακίδη, 1979.

Γκαρούτσος Γ., «Μηχανική Παραμορφώσιμου Στερεού ΙΙ: Αντοχή Υλικών», Εκδόσεις SPIN, 2008.

Κερμανίδης Θ., «Αντοχή Υλικών», Εκδόσεις Κυριακίδη, 1990.

Κοϊμτζής Μ., «Αντοχή των Υλικών Α'», University Studio Press, 2001.

Κωβαίος Μ., «Αντοχή των Υλικών», Αθήνα, 1977.

Λόκκας Φ., «Εγχειρίδιο Αρχών και Μεθόδων στην Αντοχή Υλικών», ΤΕΙ Λάρισας, 2003.

Παπαμίχος Ε., «Αντοχή των υλικών», Εκδόσεις Τζιόλα, 2006.

Πανταλέων Ε., «Δομομηχανική ΙΙ – Αντοχή Υλικών», Έκδοση Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, 2001.

Σωτηροπούλου Α. και Πασσά Δ., «Αντοχή Υλικών – Εργαστηριακές Εφαρμογές», Εκδόσεις Ίων, 2003.

Χαρώνης Π., «Αντοχή των Υλικών», Σύγχρονη Εκδοτική, 2002.

Beer F. and Johnston R., «Mechanics for Engineers – Statics», McGraw-Hill Book Company, 1987.

Beer F. and Johnston R., «Mechanics for Engineers – Dynamics», McGraw-Hill Book Company, 1987.

Feodosyev V., «Strength of Materials», MIR Publishers, 1976.

Gere J.and Timosenko S., «Mechanics of Materials», PWS-KEN Publishing Company, 1990.

Nash W., «Strength of Materials», Schaum's outline series, Εκδόσεις ΕΣΠΙ, 1988.

Timoshenko S. and Gere J., «Mechanics of Materials», Van Nostrand Reinhold Co., 1973.

Urry S. and Turner P. «Strength of Materials and Mechanics of Solids», Pitman Publishing, 1974.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο Πρώτο
Εισαγωγικές έννοιες

Κεφάλαιο Δεύτερο
Εφελκυσμός – Θλίψη – Διάτμηση

Κεφάλαιο Τρίτο

Στατική θεωρία της δοκού

Κεφάλαιο Τέταρτο
Κάμψη

Κεφάλαιο Πέμπτο
Στρέψη

Κεφάλαιο Έκτο
Λυγισμός

Κεφάλαιο Έβδομο
Σύνθετες καταπονήσεις

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

1954