1. Γενικοί ορισμοί

1.1 Οριακό σημείο του πεδίου ορισμού συνάρτησης

Ένα σημείο x_0 ονομάζεται οριακό σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f $(\Pi\text{O} \subseteq \mathbb{R})$, αν και μόνο αν σε κάθε περιοχή του x_0 υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του Π.Ο. διαφορετικό του x_0.

Π.χ. Π.Ο. $=[0,\ 15]$ και x_0 =6.

-∞ 0 6 15 +∞

<-----------------------●-----------------●--------------------●----------------------->

1.2 Μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού συνάρτησης

Ένα σημείο x_0 ονομάζεται μεμονωμένο σημείο του Π.Ο. της συνάρτησης f $(\Pi\text{O} \subseteq \mathbb{R})$, αν και μόνο αν $x_0 \in$ Π.Ο. και υπάρχει περιοχή του x_0, έστω $\pi(x_0)$, που το μόνο κοινό σημείο που έχει με το Π.Ο. είναι το x_0. Π.χ. Π.Ο. $=[0,\ 15]\cup\{16\}$ και x_0=16.

-∞ 0 15 16 +∞

<-----------------------●---------------------------●----------●----------------------->

1.3 Εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού συνάρτησης

Ένα σημείο x_0 ονομάζεται εσωτερικό σημείο του Π.Ο. της συνάρτησης f $(\Pi\text{O} \subseteq \mathbb{R})$, αν και μόνο αν το $x_0 \in$ Π.Ο. και υπάρχει περιοχή του x_0, έστω $\pi(x_0)$, τέτοια ώστε $\pi(x_0) \subseteq$ Π.Ο. Π.χ. Π.Ο. $=[0,\ 15]$ και $x_0 = 6$.

-∞ 0 6 15 +∞

<-----------------------●-----------------●--------------------●----------------------->

Παρατήρηση. Κάθε εσωτερικό σημείο του Π.Ο. είναι και οριακό, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει αφού το οριακό σημείο δεν είναι απαραίτητα σημείο του Π.Ο.

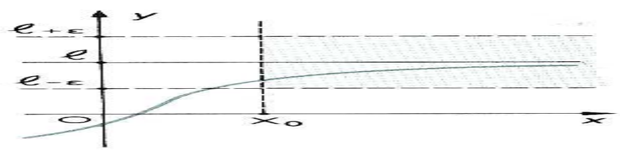
2. Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to +\infty$

Για να εξετάσουμε την συμπεριφορά συνάρτησης f για πολύ μεγάλες τιμές της μεταβλητής x, πρέπει το Π.Ο. της να μην είναι φραγμένο άνω. Θεωρούμε δηλαδή ότι περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ όπου $a \in \mathbb{R}$.

2.1 Πραγματική οριακή τιμή όταν $x \to +\infty$

Έστω συνάρτηση f της οποίας το Π.Ο. δεν είναι φραγμένο άνω. Λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο τον $\ell \in \mathbb{R}$, όταν $\forall \varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει $x_0 > 0$, εξαρτώμενο από το ε, έτσι ώστε $\forall x \in \Pi\text{O}$ με $x > x_0$ να ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Δηλαδή:

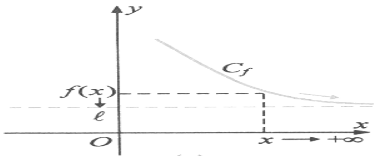
Σχήμα 1



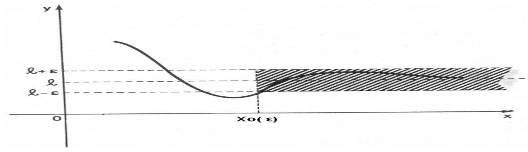
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \Pi\text{O},\ \text{με}\ x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \ell] = 0$.

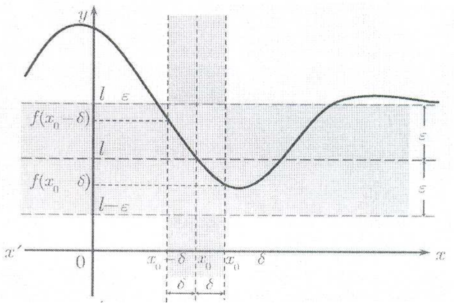
Επειδή $\left|f(x)-\ell\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|-f(x)-(-\ell)\right|<\varepsilon$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-f) = -l$.



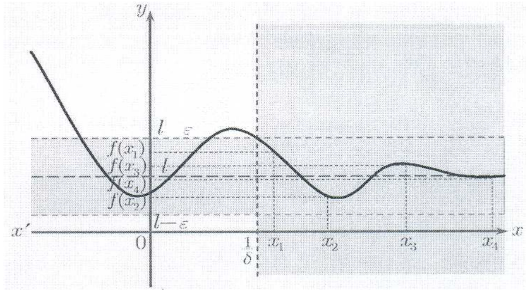
Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Π.χ. 1. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$.

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ έχει Π.Ο.$=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Έστω ε>0.

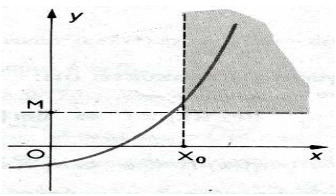
Τότε, για κάθε $x>1$ έχουμε $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2x+1-2x+2}{x-1}\right|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{x-1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow 0<\dfrac{3}{x-1}<\varepsilon$ (διότι x>1) $\Leftrightarrow x>1+\dfrac{3}{\varepsilon}$. Αν εκλέξουμε $x_0>1+\dfrac{3}{\varepsilon}$, για κάθε x του Π.Ο. της f με $x>x_0$ ισχύει ότι $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$.

2.2 Οριακή τιμή συνάρτησης το $+\infty$ όταν $x\to+\infty$

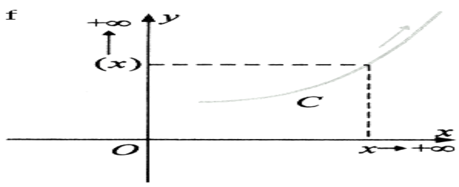
Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$, όριο το $+\infty$, όταν $\forall M>0$ υπάρχει $x_0>0$, εξαρτώμενο από το Μ, τέτοιο ώστε $\forall x\in$ΠΟ με $x>x_0$, να ισχύει ότι $f(x)>M$.

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists x_0(\mathrm{M})>0:\forall x\varepsilon \text{ΠΟ}_f\ \mu\varepsilon\ x>x_0 \Rightarrow f(x)>\mathrm{M}$.

Επειδή $f(x)>M \Leftrightarrow -f(x)<-M$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-f)(x)=-\infty$.

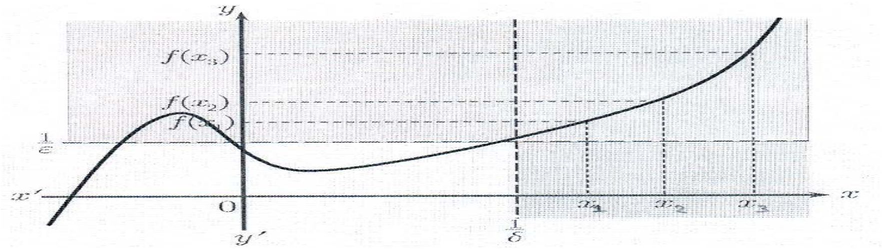


Σχήμα 6



Σχήμα 7

Σχήμα 8



Π.χ. 2. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\sqrt{x^2-1}$. Έχει $\Pi\text{O}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Έστω $M>0$. Τότε $\sqrt{x^2-1}>M \Leftrightarrow x^2-1>M^2 \Leftrightarrow x^2>M+1 \Leftrightarrow x>\sqrt{1+M^2}$.

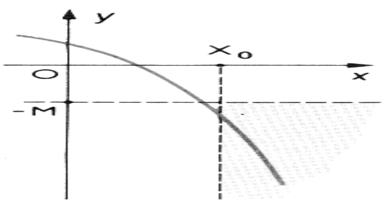
Άρα, αν επιλέξουμε $x_0>\sqrt{1+M^2}$, τότε $\forall x\in\Pi\text{O}$ με $x>x_0$ είναι $\sqrt{x^2-1}>M$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$.

2.3 Οριακή τιμή συνάρτησης το $-\infty$ όταν $x\to+\infty$

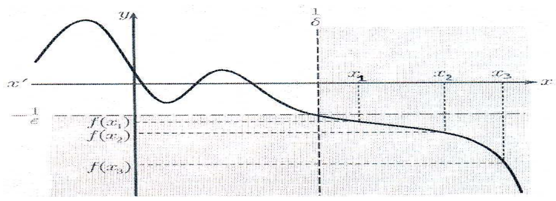
Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$, όριο το $-\infty$, όταν $\forall M>0$ υπάρχει $\exists x_0>0$ εξαρτώμενο από το Μ, τέτοιο ώστε $\forall x\in\Pi\text{O}$ με $x>x_0$, να ισχύει ότι $f(x)<-M$. Δηλαδή:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists x_0(M)>0: \forall x\in\Pi\text{O}$ με $x>x_0 \Rightarrow f(x)<-M$.

Επειδή $f(x)>M \Leftrightarrow -f(x)<-M$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-f)(x)=+\infty$.



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Π.χ. 3. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+5\right)=-\infty$.

Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x)=-x^2+5$. Έχει $\Pi\text{O}=\mathbb{R}$.

Έστω $M>0$. Τότε για $x>0$ ισχύει $-x^2+5<-M \Leftrightarrow x^2>M+5 \Leftrightarrow x>\sqrt{M+5}$.

Αν επιλέξουμε $x_0>\sqrt{M+5}$, τότε $\forall x\in\Pi\text{O}$ με $x>x_0$ ισχύει $-x^2+5<-M$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+5)=-\infty$.

2.4 Ιδιότητες των ορίων

Έστω συναρτήσεις f,g με κοινό πεδίο ορισμού όχι φραγμένο άνω, που έχουν στο $+\infty$ πεπερασμένα όρια. Τότε:

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

Οι παραπάνω προτάσεις επεκτείνονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού όχι φραγμένο άνω.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$, • $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lambda\cdot f(x)\right)=\lambda\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

• Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}$.

Στην παραπάνω περίπτωση επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\neq 0$, ισχύει ότι σε μία περιοχή του $+\infty$ είναι $g(x)\neq 0$.

• Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)>0$ και $k\in\mathbb{N}^*$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$.

Στην παραπάνω περίπτωση σε μία περιοχή του $+\infty$ είναι $f(x)>0$ και εκεί ορίζεται η συνάρτηση $\sqrt[k]{f(x)}$.

Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης όταν $x\to+\infty$

Έστω συνάρτηση f, με ΠΟ που περιέχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha_\nu\neq 0$, με τύπο: $f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+a_0$, όπου $\alpha_i\in\mathbb{R}$ για κάθε $i=1,\ldots,\nu$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^\nu\left(\alpha_\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{x}+\frac{\alpha_{\nu-2}}{x^2}+\frac{\alpha_{\nu-3}}{x^3}+\ldots+\frac{\alpha_3}{x^{\nu-3}}+\frac{\alpha_2}{x^{\nu-2}}+\frac{\alpha_1}{x^{\nu-1}}+\frac{\alpha_0}{x^\nu}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\nu\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{x}+\frac{\alpha_{\nu-2}}{x^2}+\frac{\alpha_{\nu-3}}{x^3}+\ldots+\frac{\alpha_3}{x^{\nu-3}}+\frac{\alpha_2}{x^{\nu-2}}+\frac{\alpha_1}{x^{\nu-1}}+\frac{\alpha_0}{x^\nu}\right)=$$

$$(+\infty)\cdot(\alpha_n+0+0+0+\ldots+0+0+0+0)=(+\infty)\cdot(\alpha_\nu)=\begin{cases}+\infty\text{, όταν } \alpha_\nu>0\\ -\infty\text{, όταν } \alpha_\nu<0\end{cases}.$$

Δηλαδή, το όριο στο $+\infty$ κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $+\infty$ του μεγιστοβάθμιου όρου της. Άρα • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_\nu x^\nu\right)$.

Όριο ρητής συνάρτησης όταν $x\to+\infty$

Έστω ρητή συνάρτηση f, $f(x)=\dfrac{\alpha_\kappa x^\kappa+\alpha_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\alpha_{\kappa-2}x^{\kappa-2}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\lambda x^\lambda+\beta_{\lambda-1}x^{\lambda-1}+\beta_{\lambda-2}x^{\lambda-2}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}$

Είναι $f(x)=\dfrac{\alpha_\kappa x^\kappa\left(1+\frac{\alpha_{\kappa-1}}{\alpha_\kappa}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{\alpha_0}{\alpha_\kappa}\cdot\frac{1}{x^\kappa}\right)}{\beta_\lambda x^\lambda\left(1+\frac{\beta_{\lambda-1}}{\beta_\lambda}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{\beta_0}{\beta_\lambda}\cdot\frac{1}{x^\lambda}\right)}$, άρα • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_\kappa x^\kappa}{\beta_\lambda x^\lambda}$

Δηλαδή, το όριο στο $+\infty$ ρητής συνάρτησης, ισούται με το όριο στο $+\infty$ του λόγου των μεγιστοβαθμίων όρων αριθμητή και παρονομαστή.

$$\text{Όταν } x\to+\infty \text{ είναι}:\begin{cases}+\infty,\ \text{αν } \kappa>\lambda \text{ και } \dfrac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda}>0\\ -\infty,\ \text{αν } \kappa>\lambda \text{ και } \dfrac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda}<0\\ 0,\ \text{αν } \kappa<\lambda\\ \dfrac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda},\ \text{αν } \kappa=\lambda\end{cases}$$

2.5 Παραδείγματα

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^5-7x+9\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^5\cdot\left(3-\frac{7}{x^4}+\frac{9}{x^5}\right)\right]=$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^5\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{7}{x^4}+\frac{9}{x^5}\right)=(+\infty)\cdot 3=+\infty\,.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^8+7x^2+6\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^8\cdot\left(-3+\frac{7}{x^6}+\frac{6}{x^8}\right)\right]=$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^8\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{7}{x^6}+\frac{6}{x^8}\right)=(+\infty)\cdot(-3)=-\infty\,.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{2x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{2-\frac{5}{x}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\frac{3}{2}\,.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{2x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{2-\frac{5}{x}}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=(+\infty)\frac{3}{2}=+\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{2x^2-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=0\cdot\frac{3}{2}=0\,.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{1}{1}=1\,.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt[3]{x^3+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}}=\frac{2}{1}=2\,.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdot\frac{\sqrt{1+0}-0}{1-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}=0$$

➢ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

➢ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}+\sqrt[3]{x^2(x+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)=(+\infty)\cdot\left(\sqrt[3]{1-0}+\sqrt[3]{1+0}\right)=(+\infty).$$

➢ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1$$

Π.χ. 4. Βρείτε τους $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=\beta$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}-\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\alpha\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\alpha\right)=(+\infty)\cdot(1-a).$$

• Όταν $1-a>0\Rightarrow 1>a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=+\infty$

• Όταν $1-a<0\Rightarrow 1<a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=-\infty$

• Όταν $1-a=0\Rightarrow 1=a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=(+\infty)\cdot 0=?$ (De L' Hospital)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}=0\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\lim\limits_{x\to+\infty}1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

Άρα, είναι $a=1$ και $\beta=0$.

Π.χ. 5. Βρείτε τα $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=11$ αν $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-\alpha x-\beta$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\alpha x-\beta\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=(+\infty)\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-\lim_{x\to+\infty}\alpha-\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta}{x}\right)=(+\infty)(1-a)$$

• Όταν $1-a>0\Rightarrow 1>a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Όταν $1-a<0\Rightarrow 1<a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

• Όταν $1-a=0\Rightarrow 1=a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\cdot 0=?$ (De L' Hospital)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-(x+\beta)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}^{\,2}-(x+\beta)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+\beta)}=\ldots=1-\beta$$

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=11\Rightarrow 1-\beta=11\Rightarrow\beta=-10$.

Π.χ. 6. Αν $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+8}+(a-3)x$, βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ για το $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(a-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2})}+(a-3)x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)\right]=$$

$$(+\infty)(1+a-3)=(+\infty)(a-2)$$

- Όταν $a-2>0 \Leftrightarrow a>2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Όταν $a-2<0 \Leftrightarrow a<2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- Όταν $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$ τότε απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$.

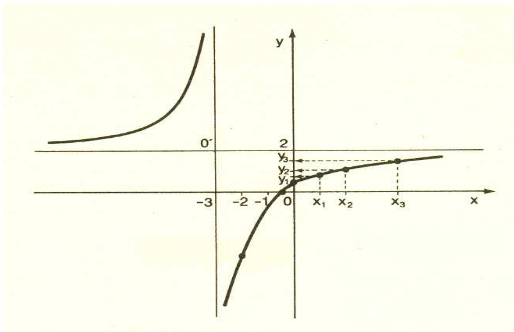
Είναι $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+8}-x$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+8}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+8}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+2x+8}+x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+8}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{8}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{8}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1}=$$

$$\frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Π.χ. 7. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$. Είναι ΠΟ=$\mathbb{R}-\{-3\}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η ευθεία $x=-3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.



Σχήμα 11

2.6 Άσκηση

Να βρεθούν εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3x+4}$, (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3x+4}$, (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3x^2+4}$, (δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+4x+5\right)$,

(ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-7x^2+6\right)$, (στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}$, (ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{x^2-1}$, (η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+1}$,

(θ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$, (ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$, (ια) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$, (ιβ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x}{5x^2-1}$,

(ιγ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, (ιδ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, (ιε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

3. Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x\to-\infty$

Για να εξετάσουμε την συμπεριφορά συνάρτησης για πολύ μικρές τιμές της μεταβλητής x, πρέπει το πεδίο ορισμού της να μην είναι φραγμένο κάτω. Θεωρούμε ότι περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ όπου $a\in\mathbb{R}$.

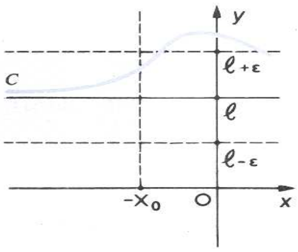
3.1 Πραγματική οριακή τιμή όταν $x\to-\infty$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο κάτω. Θα λέμε ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο τον $\ell\in\mathbb{R}$, όταν $\forall\varepsilon>0$ οσοδήποτε μικρό, $\exists x_0>0$, εξαρτώμενο από το ε, τέτοιο ώστε $\forall x\in$ΠΟ με $x<x_0$, να ισχύει $\left|f(x)-\ell\right|<\varepsilon$.

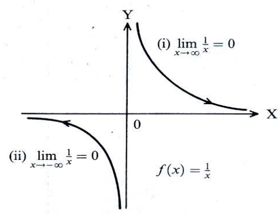
Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists x_0(\varepsilon)>0 : \forall x\in \Pi\mathrm{O},\ \text{με}\ x<-x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\ell\right]=0$.

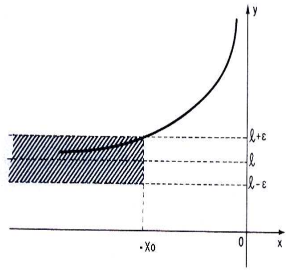
Επειδή $|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|-f(x)-(-\ell)\right|<\varepsilon$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(-f)(x)=-l$.



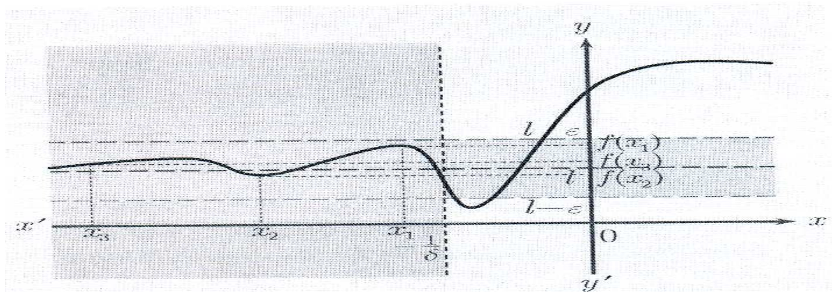
Σχήμα 12



Σχήμα 13



Σχήμα 14



Σχήμα 15

Π.χ. 8. Δείξτε με τον ορισμό, ότι για την συνάρτηση f, $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

Είναι $\Pi\mathrm{O}=\mathbb{R}-\{1\}$, άρα η f ορίζεται σε μία περιοχή του $-\infty$.

$$|f(x)-2| = \left|\frac{2x-3}{x+1}-2\right| = \left|\frac{5}{x+1}\right| = \frac{5}{|x+1|}.$$

Αφού $x\to-\infty$, υποθέτω ότι: $x<-1 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow |x+1|=-(x+1)$

Άρα, $|f(x)-2|=-\dfrac{5}{x+1}<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{5}{x+1}>-\varepsilon \Leftrightarrow x+1<\dfrac{-5}{\varepsilon}$.

Άρα, κάθε $x<-\left(1+\dfrac{5}{\varepsilon}\right)$, ικανοποιεί τον περιορισμό $x<-1$ και την $|f(x)-2|<\varepsilon$.

Αν επιλέξουμε $x_0(\varepsilon)=\left(1+\dfrac{5}{\varepsilon}\right)$ ισχύει ότι

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0(\varepsilon)=\left(1+\frac{5}{\varepsilon}\right)>0 : \forall x\in\Pi\mathrm{O}\ \text{με}\ x<-x_0(\varepsilon)\Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon,$$

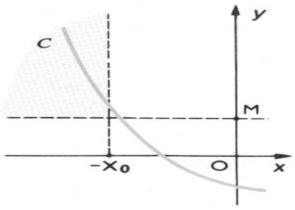
άρα, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

3.2 Οριακή τιμή συνάρτησης το $+\infty$ όταν $x\to-\infty$

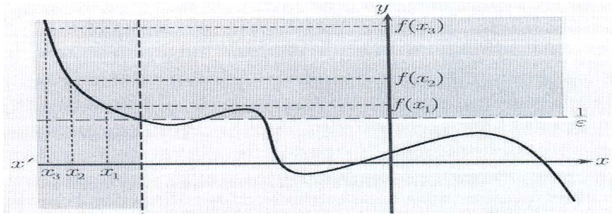
Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο κάτω. Θα λέμε ότι η f έχει στο $-\infty$, όριο το $+\infty$, όταν $\forall M>0$, $\exists x_0>0$ εξαρτώμενο από το Μ, τέτοιο ώστε $\forall x\in\Pi\mathrm{O}$ με $x<-x_0$, να ισχύει ότι $f(x)>M$.

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists x_0(\mathrm{M})>0:\forall x\varepsilon\Pi\mathrm{O}\ \mu\varepsilon\ x<-x_0 \Rightarrow f(x)>M$.

Επειδή $f(x)>M \Leftrightarrow -f(x)<-M$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-f\right)(x)=-\infty$.



Σχήμα 16



Σχήμα 17

Π.χ. 9. Δείξτε με τον ορισμό ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ για την συνάρτηση $f, f(x)=x^2-2x$.

Είναι $\Pi\mathrm{O}=\mathbb{R}$. Επίσης $f(x)=x^2-2x>-2x>\ \varepsilon \Leftrightarrow\ x<-\dfrac{\varepsilon}{2}$.

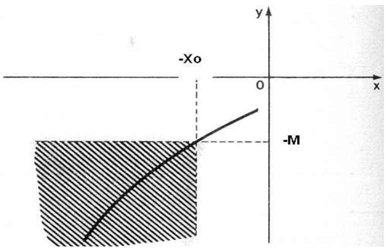
Άρα, $\forall M>0,\ \exists x_0(M)=\dfrac{\varepsilon}{2}>0:\forall x\in\Pi\mathrm{O}$ με $x<-x_0 \Rightarrow f(x)>M$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

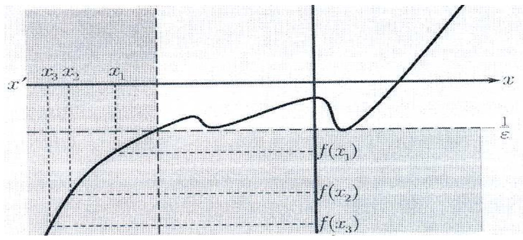
3.3 Οριακή τιμή συνάρτησης το $-\infty$ όταν $x\to-\infty$.

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο κάτω. Θα λέμε ότι η f έχει στο $-\infty$, όριο το $-\infty$, όταν $\forall M>0$, $\exists x_0>0$ εξαρτώμενο από το Μ, τέτοιο ώστε $\forall x\in\Pi\mathrm{O}$ με $x<-x_0$ να ισχύει ότι $f(x)<-M$. Δηλαδή

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists x_0(M)>0:\forall x\varepsilon\Pi\mathrm{O}\ \mu\varepsilon\ x<-x_0 \Rightarrow f(x)<-M$.

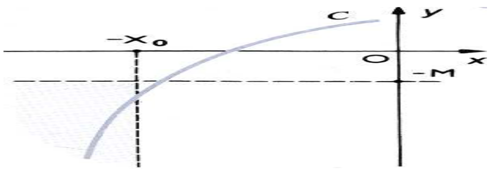


Σχήμα 18



Σχήμα 19

Σχήμα 20



Π.χ. 10. Δείξτε με τον ορισμό ότι για την συνάρτηση $f, f(x)=x^3$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Είναι $\Pi\mathrm{O}=\mathbb{R}$. Έστω $M>0$. Τότε, για $x<0$ είναι $x^3<-M \Leftrightarrow x<-\sqrt[3]{M}$.

Αν εκλέξουμε $x_0\geq-\sqrt[3]{M}$, τότε η σχέση $x^3<-M$ ισχύει $\forall x<-x_0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$. Γενικότερα ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}=-\infty$, $k\in\mathbb{N}$.

3.4 Ιδιότητες των ορίων

Έστω συναρτήσεις f,g με κοινό ΠΟ όχι φραγμένο κάτω που έχουν στο $-\infty$ πεπερασμένα όρια. Τότε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

Οι παραπάνω προτάσεις επεκτείνονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων με ΠΟ μη φραγμένο κάτω.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$,
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\lambda\cdot f(x)\right]=\lambda\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
- Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)}$.

Στην παραπάνω περίπτωση, επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\neq 0$, ισχύει ότι σε μία περιοχή του $-\infty$ είναι $g(x)\neq 0$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού ορίου συνάρτησης όταν $x\to-\infty$ είναι οι ιδιότητες:

- $\lim\limits_{-\infty}f=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{-\infty}(-f)=-\infty$, • $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2k}=+\infty,\kappa\in\mathbb{N}^*$, • $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2k+1}=-\infty,\kappa\in\mathbb{N}$

Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης όταν $x\to-\infty$

Έστω συνάρτηση f, με ΠΟ που περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,a)$ όπου $a\in\mathbb{R}$, $a_\nu\neq 0$ με τύπο $f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+a_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+a_1x+a_0$, όπου $a_i\in\mathbb{R}$ για κάθε $i=1,\nu$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^\nu\cdot\left(a_\nu+\frac{a_{\nu-1}}{x}+\frac{a_{\nu-2}}{x^2}+\frac{a_{\nu-3}}{x^3}+\ldots+\frac{a_3}{x^{\nu-3}}+\frac{a_2}{x^{\nu-2}}+\frac{a_1}{x^{\nu-1}}+\frac{a_0}{x^\nu}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^\nu\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(a_\nu+\frac{a_{\nu-1}}{x}+\frac{a_{\nu-2}}{x^2}+\ldots+\frac{a_2}{x^{\nu-2}}+\frac{a_1}{x^{\nu-1}}+\frac{a_0}{x^\nu}\right)=$$

$$\begin{cases}(+\infty)\cdot\alpha_\nu\ ,\ \text{όταν}\ \nu\ \text{άρτιος} & \begin{cases}+\infty\ ,\ \text{όταν}\ \alpha_\nu>0\\ -\infty,\ \text{όταν}\ \alpha_\nu<0\end{cases}\\[2ex] (-\infty)\cdot\alpha_\nu,\ \text{όταν ν περιττός} & \begin{cases}-\infty\ ,\ \text{όταν}\ \alpha_\nu>0\\ +\infty,\ \text{όταν}\ \alpha_\nu<0\end{cases}\end{cases}$$

Όριο ρητής συνάρτησης όταν $x\to-\infty$

Το όριο της ρητής συνάρτησης

$$f,f(x)=\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0}{\beta_\lambda x^\lambda+\beta_{\lambda-1}x^{\lambda-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0}=\frac{a_kx^k\left(1+\frac{a_{k-1}}{a_k}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_0}{a_k}\cdot\frac{1}{x^k}\right)}{\beta_\lambda x^\lambda\left(1+\frac{\beta_{\lambda-1}}{\beta_\lambda}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{\beta_0}{\beta_\lambda}\cdot\frac{1}{x^\lambda}\right)}$$

είναι • $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha_\kappa x^\kappa}{\beta_\lambda x^\lambda}$.

Δηλαδή το όριο στο $-\infty$ ρητής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $-\infty$ του λόγου των μεγιστοβαθμίων όρων αριθμητή και παρονομαστή.

$$\text{Όταν } x \to -\infty \text{ είναι } \begin{cases} -\infty \text{ , αν } k > \lambda \text{ και } \dfrac{\alpha_k}{\beta_\lambda} > 0 \\ +\infty, \text{ αν } k > \lambda \text{ και } \dfrac{\alpha_k}{\beta_\lambda} < 0 \\ 0, \quad \text{αν } k < \lambda \\ \dfrac{\alpha_k}{\beta_\lambda}, \text{ αν } k = \lambda \end{cases}$$

3.5 Παραδείγματα

➢ $$\lim_{x\to-\infty}(3x^5-7x+9)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^5\cdot\left(3-\frac{7}{x^4}+\frac{9}{x^5}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^5\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{7}{x^4}+\frac{9}{x^5}\right)=(-\infty)\cdot 3=-\infty\,.$$

➢ $$\lim_{x\to-\infty}(-3x^8+7x^2+6)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^8\cdot\left(-3+\frac{7}{x^6}+\frac{6}{x^8}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^8\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{7}{x^6}+\frac{6}{x^8}\right)=(+\infty)\cdot(-3)=-\infty\,.$$

➢ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{2x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{2-\frac{5}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\frac{3}{2}\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4}{2x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{2-\frac{5}{x}}=\lim_{x\to-\infty}x\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)}=(-\infty)\cdot\frac{3}{2}=-\infty$$

➢ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{2x^2-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{x\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}=0\cdot\frac{3}{2}=0$$

➢ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\,,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty\,,$$

$$\text{Άρα }\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}=+\infty$$

➢ $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{\sqrt{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right]}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right]}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{1}=\frac{1+1}{1}=2$$

➢ $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$

Άρα υπάρχουν 2 περιπτώσεις

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$ και
- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}==-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{4+\frac{1}{x}}==-\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

➢ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-|x-1|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-|x-1|}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{x}=3$

Επεξήγηση: $$\frac{2x-|x-1|}{x}=\begin{cases}\frac{2x-x+1}{x}=\frac{x+1}{x}, & x\geq 1\\ \frac{2x+x-1}{x}=\frac{3x-1}{x}, & x<1\end{cases}$$

Π.χ. 11. Βρείτε το Π.Ο. της συνάρτησης $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\lambda x$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και τα $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}+\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda\right]$

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}=(-\infty,\ +\infty)$.

Όταν $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda\right]=(+\infty)\cdot(1+\lambda)$$

- Όταν $1+\lambda>0\Leftrightarrow\lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
- Όταν $1+\lambda<0\Leftrightarrow\lambda<-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
- Όταν $1+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-1$, είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση συζυγούς παράστασης.

Όταν $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-\lambda\right]=(+\infty)\cdot(1-\lambda)$$

• Όταν $1-\lambda>0\Leftrightarrow 1>\lambda$, τότε $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

• Όταν $1-\lambda<0\Leftrightarrow 1<\lambda$, τότε $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

• Όταν $1-\lambda=0\Leftrightarrow \lambda=1$, είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Π.χ. 12. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ αν f, $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^3+5x+2}{\lambda x^2+3}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\lambda-1)x^3+5x+2}{\lambda x^2+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left[(\lambda-1)+5\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}\right]}{x^2\left(\lambda+\frac{3}{x^2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\lambda-1)+5\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}}{\lambda+\frac{3}{x^2}}=(\pm\infty)\cdot\frac{\lim_{x\to\pm\infty}\left[(\lambda-1)+5\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}\right]}{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\lambda+\frac{3}{x^2}\right)}=(\pm\infty)\cdot\frac{\lambda-1}{\lambda},$$ όπου $\lambda\neq 0$.

• Όταν $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}>0\Rightarrow \lambda^2\dfrac{\lambda-1}{\lambda}>0\Rightarrow \lambda(\lambda-1)>0\Rightarrow \lambda\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

• Όταν $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}<0\Rightarrow \lambda^2\dfrac{\lambda-1}{\lambda}<0\Rightarrow \lambda(\lambda-1)<0\Rightarrow \lambda\in(0,1)$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

• Όταν $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}=0\Rightarrow \lambda-1=0\Rightarrow \lambda=1$, τότε $f(x)=\dfrac{5x+2}{x^2+3}$ άρα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x+2}{x^2+3}=0$.

Π.χ. 13. Έστω συνάρτηση f, $f(x)=\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}-kx$, όπου $\alpha,\beta,k\in\mathbb{R}$. Να υπολογισθούν τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών α,β,k.

Είναι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2\left(a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)}-kx\right]=$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[|x|\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]$$

Όταν $x\to+\infty$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-k\right]=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-k\right]=(+\infty)\left(\sqrt{a}-k\right)$$

• Όταν $\sqrt{a}-k>0 \Leftrightarrow \sqrt{a}>k$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Όταν $\sqrt{a}-k<0 \Leftrightarrow \sqrt{a}<k$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

• Όταν $\sqrt{a}-k=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=k$, είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Όταν $x\to-\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x)\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}+k\right]=\lim_{x\to-\infty}(-x)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}+k\right]=(-\infty)\left(\sqrt{a}-k\right)$$

• Όταν $\sqrt{a}+k>0 \Leftrightarrow \sqrt{a}>-k$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

• Όταν $\sqrt{a}+k<0 \Leftrightarrow \sqrt{a}<-k$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

• Όταν $\sqrt{a}+k=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=-k$, είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Π.χ. 14. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ αν $f, f(x)=\dfrac{4x^2}{x+3}-(ax+\beta)$.

$$f(x)=\frac{4x^2}{x+3}-(ax+\beta)=\frac{4x^2-(ax+\beta)(x+3)}{x+3}=\frac{(4-\alpha)x^2-(3a+\beta)x-3\beta}{x+3}$$

Για να είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ πρέπει $4-\alpha=0, 3a+\beta=0$. Άρα $\alpha=4$, $\beta=-12$.

3.6 Άσκηση

Να βρεθούν εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{3x+4}$, (β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{3x+4}$, (γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{3x^2+4}$,

(δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+4x+5\right)$, (ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}$, (στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-7x^2+6\right)$,

(ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-7x^2+6\right)$, (η) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x}{x^2-1}$, (θ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+1}$,

(ι) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2+1\right)$, (ια) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x}{5x^2-1}$, (ιβ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$,

(ιγ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$, (ιδ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$, (ιε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x}{5x^2-1}$,

(ιστ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x+1}{x+1}$, (ιζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, (ιη) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$,

(ιθ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, (κ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-6x^7}{9x^2-3}$, (κα) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-3x^4+x^2+1\right)$, (κβ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+x-2}{x^2-4}$, (κγ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-|x-5|}{x^2+|x-3|}$, (κδ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x-3}{x+1}$,

(κε) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x-3}{x+1}$, (κστ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt[3]{x^2+x+1}$

(κζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}+x\right)$, (κη) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-2x\right)$,

(κθ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+2x+5}\right)$, (κι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt[4]{16x^4+x^2+3}\right)$,

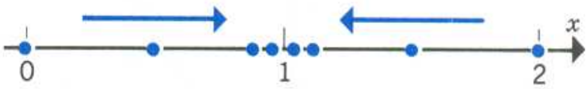
(λ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)$, (λα) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}$.

4.1 Πραγματική οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x\to x_0\in\mathbb{R}$

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=3x-1$ με $\Pi O=\mathbb{R}$. Παρατηρώ ότι όσο το x πλησιάζει την τιμή 1 στο ΠΟ, τόσο το $y=f(x)$ πλησιάζει προς την τιμή 2.

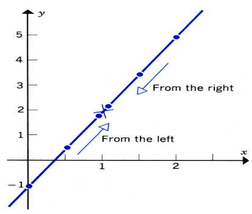
Το x μπορεί να πλησιάσει την τιμή 1 είτε από δεξιά (δηλαδή το x είναι μεγαλύτερο από το 1 και συνεχώς μειώνεται προκειμένου να το προσεγγίσει), είτε από αριστερά (δηλαδή το x είναι μικρότερο από το 1 και συνεχώς αυξάνεται προκειμένου να το προσεγγίσει).

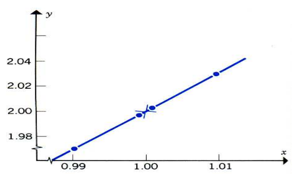
Σχήμα 21



Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ο παρακάτω πίνακας. Στην 1^{η} στήλη το x παίρνει τιμές αυξανόμενες, αλλά μικρότερες του 1, προκειμένου να το προσεγγίσει από αριστερά και συγχρόνως στη 2^{η} στήλη βλέπομε τις τιμές που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή $y=3x-1$ για κάθε μία τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

x	$y=3x-1$	x	$y=3x-1$
0.00000	−1.00000	2.00000	5.00000
0.50000	0.50000	1.50000	3.50000
0.90000	1.70000	1.10000	2.30000
0.99000	1.97000	1.01000	2.03000
0.99900	1.99700	1.00100	2.00300
⋮	⋮	⋮	⋮

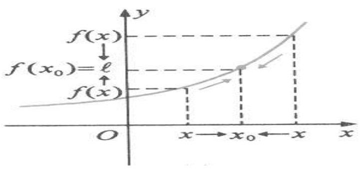




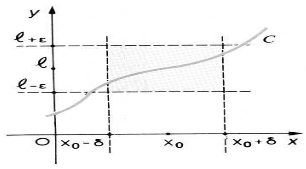
Αντιστοίχως, στην 3^{η} στήλη το x παίρνει τιμές διαρκώς ελλαττούμενες, αλλά μεγαλύτερες του 1, προκειμένου να το προσεγγίσει από δεξιά και συγχρόνως στην 4^{η} στήλη, βλέπουμε τις τιμές που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή $y=3x-1$ για κάθε μία τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Το 2 ονομάζεται όριο της συνάρτησης $f, f(x)=3x-1$ του x τείνοντος στο 1 και συμβολίζεται $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ που περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο $x_0\in\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο τον $\ell\in\mathbb{R}$ όταν $\forall\varepsilon>0$ οσοδήποτε μικρό, υπάρχει $\exists\delta>0$ που εξαρτάται από το ε, τέτοιο ώστε $\forall x\in\Pi O$ με $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ να είναι $f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$. Δηλαδή

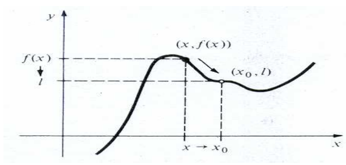
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall x\in \Pi.O.,\ \text{με } 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$



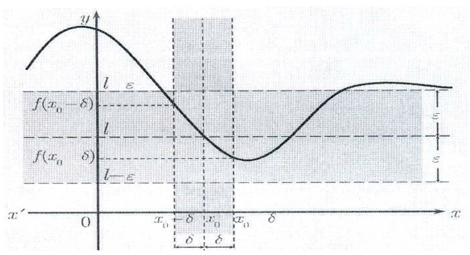
Σχήμα 22



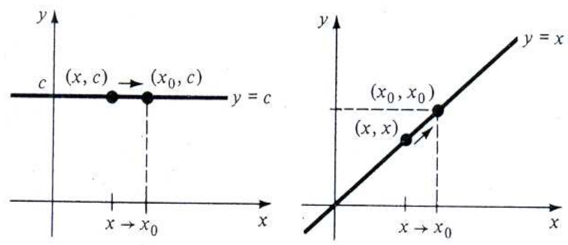
Σχήμα 23



Σχήμα 24

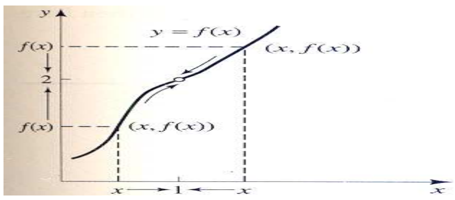


Σχήμα 25

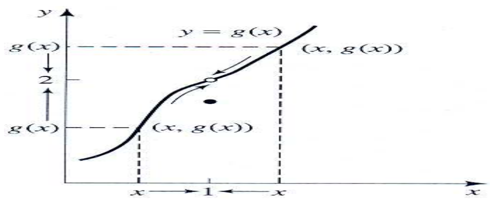


Σχήμα 26

Παρατήρηση



Σχήμα 27

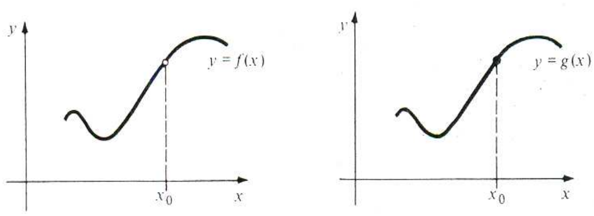


Σχήμα 28

Ανεξάρτητα του πως το x πλησιάζει το 1, είναι $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 2$.

Παρατήρηση

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g είναι ταυτόσημες κοντά στη θέση x_0, εκτός ίσως από το μεμονωμένο σημείο $x = x_0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

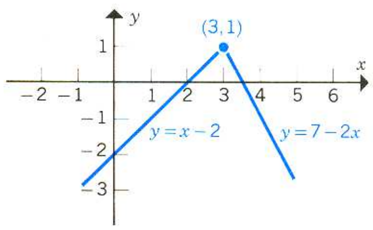


Σχήμα 29

Π.χ. 15. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 3} f(x)$ για τη συνάρτηση $f, f(x) = \begin{cases} x-2, & x \le 3 \\ 7-2x, & x \ge 3 \end{cases}$.

Αντικαθιστώντας έχουμε τον ακόλουθο πίνακα για τιμές του x που προσεγγίζουν την τιμή 3 από δεξιά και αριστερά, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$.

x	$y = x - 2$	x	$y = 7 - 2x$
2.0000	0.0000	4.0000	−1.0000
2.5000	0.5000	3.5000	0.0000
2.9000	0.9000	3.1000	0.8000
2.9900	0.9900	3.0100	0.9800
2.9990	0.9990	3.0010	0.9980
2.9999	0.9999	3.0001	0.9998
⋮	⋮	⋮	⋮

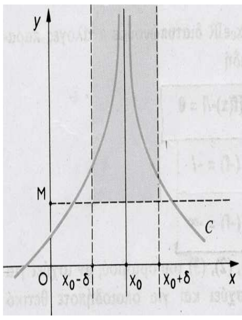


Σχήμα 30

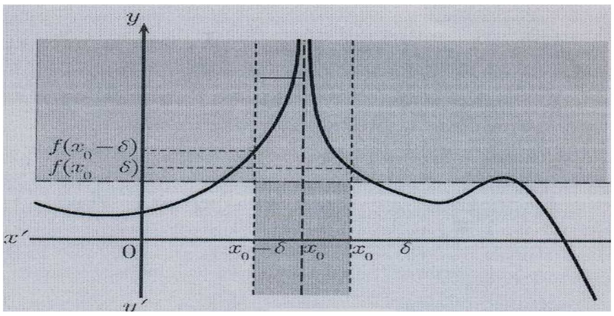
4.2 Οριακή τιμή συνάρτησης το $+\infty$ όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ που περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο το $+\infty$, όταν $\forall M > 0$ οσοδήποτε μεγάλο, $\exists \delta > 0$ που εξαρτάται από το M, τέτοιος ώστε $\forall x \in$ ΠΟ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) > M$. Δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta = \delta(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$



Σχήμα 31

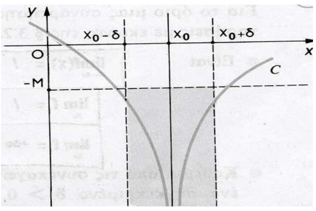


Σχήμα 32

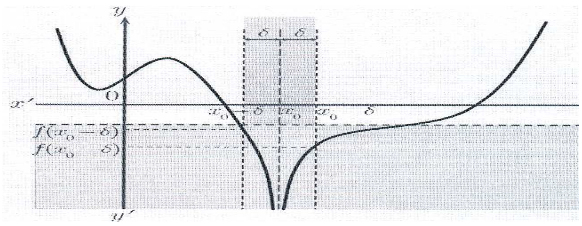
4.3 Οριακή τιμή συνάρτησης το $-\infty$ όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ που περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο το $-\infty$ όταν $\forall M > 0$ οσοδήποτε μεγάλο, $\exists \delta > 0$ που εξαρτάται από το Μ, τέτοιος ώστε $\forall x \in$ ΠΟ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) < -M$. Δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta = \delta(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$



Σχήμα 33



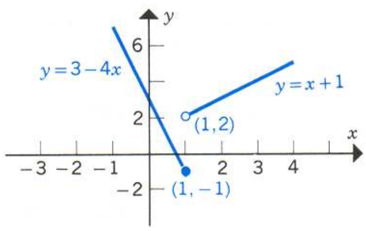
Σχήμα 34

4.4 Πλευρικά όρια συνάρτησης όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$.

Π.χ. 16. Έστω συνάρτηση f, $f(x) = \begin{cases} 3 - 4x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεθεί το $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Αντικαθιστώντας, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

x	$y = 3 - 4x$	x	$y = x + 1$
0.0000	3.0000	2.0000	3.0000
0.5000	1.0000	1.5000	2.5000
0.9000	−0.6000	1.1000	2.1000
0.9900	−0.9600	1.0100	2.0100
0.9990	−0.9960	1.0010	2.0010
0.9999	−0.9996	1.0001	2.0001
⋮	⋮	⋮	⋮



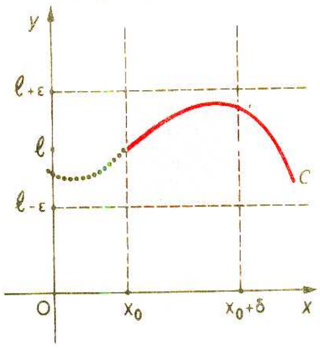
Σχήμα 35

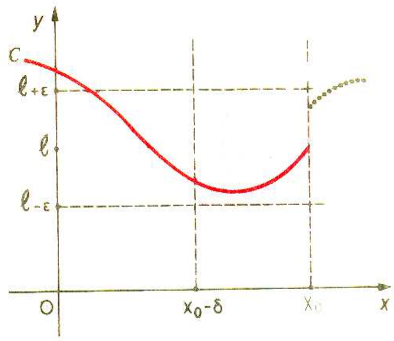
Ισχύει ότι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$. Εφόσον το από δεξιά όριο της f στη θέση $x_0 = 1$ είναι διαφορετικό από το από αριστερά της όριο στη συγκεκριμένη θέση, λέμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στη θέση $x_0 = 1$. Η ύπαρξη του $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν εξαρτάται από το αν ορίζεται ή όχι το $f(1)$, ούτε από την τιμή του $f(1)$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση f με Π.Ο.$=$Α. Αν το Α περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και ο περιορισμός f_1 της f στο (x_0, β) έχει στη θέση x_0 όριο ℓ, λέμε ότι η f έχει στη θέση x_0 όριο από δεξιά το ℓ.

Αν το A περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (a, x_0) και ο περιορισμός f_2 της f στο (a, x_0) έχει στη θέση x_0 όριο ℓ, λέμε ότι η f έχει στη θέση x_0 όριο από αριστερά το ℓ.

Σχήμα 36





Πλάγια, οριζόντια & κατακόρυφη ασύμπτωτη

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης $y = f(x)$ ονομάζονται οι ευθείες οι οποίες, για πολύ μικρές ή μεγάλες τιμές των x, y προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μία ευθεία $x = \alpha$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f, όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Π.χ. 17. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f, f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Η ευθεία $y = \beta$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f όταν ισχύει ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \beta$.

Π.χ. 18. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$ Άρα, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ σε μία περιοχή του $+\infty$.

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f, όταν ισχύει ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta) \right] = 0$.

Η ασύμπτωτη είναι πλάγια όταν $\lambda \neq 0$ και οριζόντια όταν $\lambda = 0$.

Π.χ. 19. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$ Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Η εύρεση οριζόντιας ή πλάγιας ασύμπτωτης γίνεται με την βοήθεια της πρότασης: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, αν και μόνο αν $\lambda=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $\beta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]$, όπου $\lambda,\beta\in\Re$.

Παρατηρήσεις

1. Οι γραφικές παραστάσεις των ρητών συναρτήσεων έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες της μορφής $x=a$, όπου a είναι ρίζα του παρονομαστή μόνο. Σε περίπτωση που το a είναι ρίζα και του αριθμητή, τότε για να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη η ευθεία $x=a$, πρέπει το a να είναι ρίζα του παρονομαστή με μεγαλύτερη πολλαπλότητα από αυτήν του αριθμητή.

2. Καθώς $x\to+\infty$ (ή $x\to-\infty$) δεν είναι δυνατό να υπάρχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης. Επομένως έχουμε το πολύ δύο ασύμπτωτες της μορφής $y=\lambda x+\beta$.

3. Η γραφική παράσταση των πολυωνυμικών συναρτήσεων με βαθμό $\nu\geq 2$ δεν έχει οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

Πράγματι, αν $f, f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$, όπου $a_\nu\neq 0$ και $\nu\geq 2$, τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_\nu x^\nu}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_\nu x^{\nu-1}\right)=a_\nu\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{\nu-1}=\pm\infty$.

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f, f(x)=ax+\beta$ που είναι η ευθεία $y=ax+\beta$ έχει ασύμπτωτη την ίδια την ευθεία.

4. Είναι δυνατό η γραφική παράσταση συνάρτησης να τέμνει μία ασύμπτωτη της, σε ένα τουλάχιστο σημείο.

5. Για τη γραφική παράσταση των ρητών συναρτήσεων ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- Όταν ο βαθμός αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη.
- Όταν ο βαθμός αριθμητή είναι κατά ένα μεγαλύτερος του βαθμού παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη.
- Όταν ο αριθμητής έχει βαθμό τουλάχιστον κατά δυο μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, τότε δεν υπάρχουν οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

6. Αν είναι $f(x)=\lambda x+\beta+g(x)$ με $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0$, τότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, διότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0$.

Π.χ. 20. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\dfrac{x^5}{x^2-4}$.

$x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-\infty$.

Άρα, οι ευθείες $x=\pm 2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Είναι $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Άρα, δεν υπάρχουν οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Π.χ. 21. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+2x+3}$.

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+2x+3>0$.
Άρα, δεν υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ ή $\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ ή $\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$.
Άρα, η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda=1$ και $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-2$. Άρα, η ευθεία $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $+\infty$.
Είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda=1$ και $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-2$. Άρα, η ευθεία $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $-\infty$.

Π.χ. 22. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\frac{3|x|-2x+1}{x+3}$.

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης. Είναι $\lim_{x\to-3}(x+3)=0$ και $\lim_{x\to-3}\left[3|x|-2x+1\right]=16>0$. Συνεπώς, είναι $\lim_{x\to-3^+}f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-3^-}f(x)=-\infty$.
Άρα, η ευθεία $x=-3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. Η γραφική παράσταση προσεγγίζει την ευθεία $x=-3$ από δεξιά και από αριστερά.

Εύρεση οριζόντιας–πλάγιας ασύμπτωτης.

Είναι $f, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x+3}, x\geq 0\\ \dfrac{1-5x}{x+3}, x<0 \text{ και } x\neq -3\end{cases}$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda=0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=1$. Άρα, η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $+\infty$.
Είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda=0$ και $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-5$. Άρα, η ευθεία $y=-5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $-\infty$.

Π.χ. 23. Βρείτε τις ασύμπτωτες της $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{x-1}$.

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης. Είναι $D(f)=(1,+\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η ευθεία $x=1$. Είναι $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=+\infty$. Άρα, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη γραφικής παράστασης της f.

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1=\lambda$,

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}=\frac{2}{1+1}=1=\beta$ Άρα, η $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Π.χ. 24. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-\frac{2x^2+x-1}{x+2}\right]=0$.

Έστω $f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x+2}$, τότε $\lim_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-f(x)\right]=0\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+\beta)\right]=0$

Άρα, η $y=ax+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f για $x\to-\infty$.

Άρα, • $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, • $\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=3$.

Παρατήρηση. Έστω συνάρτηση $f,f(x)$. Η ευθεία $y=ax+\beta$ ονομάζεται πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης f αν και μόνο αν $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=ax+\beta$ ή ισοδύναμα $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0$. Εύρεση των α, β. $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ & $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\beta$

Μελέτη περιπτώσεων

- Αν $a=0$, $\beta=0$ οριζόντια ασύμπτωτη είναι ο άξονας xx'.
- Αν $a=0$, $\beta\neq0$ οριζόντια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y=\beta$.
- Αν $a\neq0,\beta=0$ πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y=ax$.
- Αν $a\neq0$, $\beta\neq0$ πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y=ax+\beta$.

Π.χ. 25. Έστω συνάρτηση $f,f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}$. Να βρεθεί η ασύμπτωτη $y=ax+\beta$ της γραφικής της παράστασης σε μία περιοχή του $+\infty$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=ax+\beta\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}-ax-\beta\right]=\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{\beta}{x}\right]\right\}=(+\infty)(4-a)$$

- Όταν $4-a>0\Leftrightarrow4>a$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=+\infty$.
- Όταν $4-a<0\Leftrightarrow4<a$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=-\infty$.
- Όταν $4-a=0\Leftrightarrow4=a$, είναι $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=(+\infty)0$ (?) Απροσδιόριστη μορφή. Συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}-4x-\beta\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}-x\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+1}-3x\right]-\beta$$

Χρησιμοποιώντας δύο φορές συζυγή παράσταση έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}-x\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+1}-3x\right]-\beta=0+0-\beta=-\beta.$$

Άρα, $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0\Leftrightarrow a=4,\ \beta=0$.

Π.χ. 26. Βρείτε αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Είναι ΠΟ $=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$, • $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$

$$\bullet\ \beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

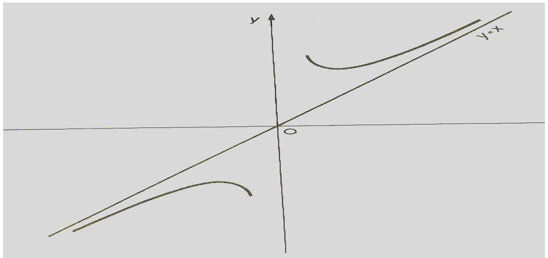
Άρα, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f όταν το x τείνει στο $+\infty$.

Επίσης είναι • $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$

$$\bullet\ \beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα, η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Σχήμα 37



Εμπειρικός κανόνας. Όταν ο βαθμός αριθμητή είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό παρονομαστή, τότε υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

Π.χ. 27. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f, f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-8}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$.

1^{ος} τρόπος. Είναι • $\alpha=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+3}{4x^2-8x}=0$,

$$\bullet\ \beta=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-0x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{4x-8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Άρα, η ευθεία (ε) $y=\alpha x+\beta=0x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ αλλά και του $-\infty$.

2^{ος} τρόπος. Είναι

$$f(x)-(ax+\beta)=\frac{2x+3}{4x-8}-(ax+\beta)=\frac{-4ax^2+(2-4\beta+8\alpha)x+3+8\beta}{4x-8}$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+\beta)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{-4ax^2+(2-4\beta+8\alpha)x+3+8\beta}{4x-8}\right]$, συνεπώς

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+\beta)\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-4ax^2+(2-4\beta+8\alpha)x+3+8\beta}{4x-8}\right]=0\Rightarrow$$

$\begin{cases}-4\alpha=0\\ 2-4\beta+8\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ Άρα, η (ε) $y=\alpha x+\beta=0x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ αλλά και του $-\infty$.

Π.χ. 28. Βρείτε τις ασύμπτωτες της $f, f(x)=\sqrt{x^2+x}$ στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$.

$f(x)=\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x(x+1)}$, $\qquad D(f)=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

Είναι • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1=a$, • $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\dfrac{1}{2}$

Άρα, η ευθεία (ε) $y=\alpha x+\beta=x+\dfrac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Ομοίως • $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1=a$, • $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα, η (ε) $y=\alpha x+\beta=-x-\dfrac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2+5x-1}{x+2}-(ax+\beta)\right]=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-\sqrt{x^2+x+2}\right]=0$.

2. Βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f, f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x^2+ax+\beta}$ να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1$, $x=2$. Εξετάστε αν η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

3. Βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5}$, (β) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, (γ) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$, (δ) $f(x)=3x+\dfrac{1}{x^2}$,

(ε) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, (στ) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-3}$, (ζ) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, (η) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x}}$

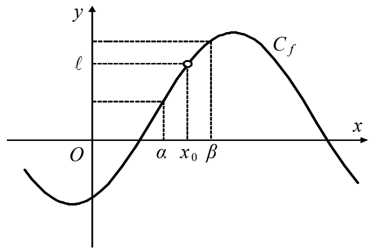
(θ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{x}$, (ι) $f(x)=1-\dfrac{|x|}{x-2}$, (ια) $f(x)=-x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

(ιβ) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$, (ιγ) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}$, (ιδ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$.

4.5 Γενικές ιδιότητες των ορίων

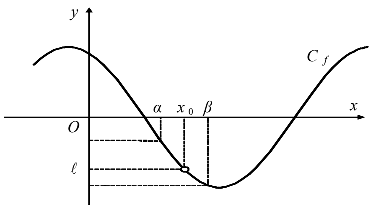
• Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε κοντά στο x_0 ισχύει ότι $f(x)>0$

• Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε κοντά στο x_0 ισχύει ότι $f(x)<0$



0

Σχήμα 38



Σχήμα 39

Γενικότερα, έστω ότι μία συνάρτηση f έχει όριο στην θέση x_0 το $\ell \neq 0$. Τότε, σε μία περιοχή του x_0 οι τιμές που παίρνει η f, έχουν το πρόσημο του ορίου της. Για την ενιαία διατύπωση της ιδιότητας αυτής, θεωρούμε ως πρόσημο του $+\infty$ το $+$ και του $-\infty$ το $-$. Τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων δεν ισχύουν. Πράγματι, για την συνάρτηση $f, f(x)=x^2$ με $\Pi\text{Ο}=\mathbb{R}$, ισχύει ότι κοντά στην θέση $x_0=0$ είναι $f(x)>0$ ενώ $\lim_{x\to 0} x^2=0$.

Παρατήρηση. Αν σε ένα διάστημα του x_0 οι τιμές της συνάρτησης f είναι θετικές (ή αρνητικές) και υπάρχει το όριο της f του x τείνοντος στο x_0, τότε το όριο αυτό αποκλείεται να είναι αρνητικό (ή θετικό), αλλά δεν αποκλείεται να είναι μηδέν.

Πράγματι, οι τιμές της συνάρτησης $f, f(x)=\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι θετικές, αλλά το όριο της στο $+\infty$ είναι μηδέν.

• Έστω συναρτήσεις f,g με κοινό Π.Ο. και $f(x)\leq g(x)$ για κάθε x του κοινού τους Π.Ο., έχουν όριο στο $x_0 \in$ Π.Ο., ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Ομοίως αν $f(x)<g(x)$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Πράγματι αν $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$, κοντά στη θέση $x_0=0$ του Π.Ο. τους, ισχύει ότι $f(x)<g(x)$ αλλά $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x = 0$.

• Αν η f έχει στην θέση x_0 όριο το μηδέν και η g είναι φραγμένη σε μία περιοχή του x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ έχει στο x_0 όριο το μηδέν.

Π.χ. 29. Έστω συναρτήσεις $f, f(x)=x-5$, $g, g(x)=2x$.

Είναι $\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}(x-5)=0$, $\lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5}(2x)=10$.

Άρα $\lim_{x\to 5}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to 5}\left[(x-5)2x\right]=0$.

• Έστω ότι για τις συναρτήσεις f,g σε μία περιοχή του x_0 ισχύει ότι $|g(x)|<|f(x)|$.

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=0$, τότε είναι $\lim_{x\to x_o} g(x) = 0$.

Π.χ. 30. Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot \text{ημ}\frac{1}{x}\right)=0$.

Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$, ισχύει ότι $\left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, είναι $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

• Αν μία συνάρτηση έχει στην θέση x_0 πεπερασμένο όριο ℓ, τότε είναι φραγμένη σε μία περιοχή του x_0.

• Αν συνάρτηση f έχει στην θέση x_0 πεπερασμένο όριο, τότε $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to x_o} f(x) \right|$

• Αν συνάρτηση f έχει στην θέση x_0 όριο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = +\infty$.

Κριτήριο μη σύγκλισης. Μία συνάρτηση f <u>δεν έχει</u> στην θέση x_0 πεπερασμένο όριο (δηλαδή ή δεν υπάρχει το όριο ή υπάρχει και είναι $+\infty$ ή $-\infty$), αν υπάρχει ε>0 οσοδήποτε μικρό, ώστε σε κάθε διάστημα του x_0 να υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.

Παραδείγματα με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής.

Π.χ. 31. Έστω συνάρτηση $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x^2}{f^4(x)+1}$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Επειδή $x^2 \geq 0$ και $f^4(x) + 1 \geq 1 \geq 0$, είναι $0 \leq \dfrac{x^2}{f^4(x)+1} \leq \dfrac{x^2}{1}$, δηλαδή $0 \leq f(x) \leq x^2$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Π.χ. 32. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Είναι γνωστό ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq 1 + x$.

Αν στη θέση του x θέσομε $-x$ η ανωτέρω σχέση γίνεται $e^{-x} \geq 1 - x$.

Για $x \in (-1,1)$ είναι $e^x \leq \dfrac{1}{1+x}$.

Έτσι είναι $1 + x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \leq \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \leq \dfrac{x}{x-1}$.

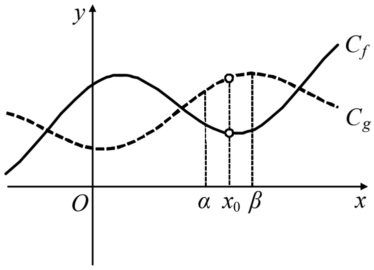
$$\begin{cases} \text{Αν } 0<x<1, \text{ είναι } 1 \leq \dfrac{e^x - 1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x} \\ \text{Αν } -1<x<0, \text{ είναι } 1 \geq \dfrac{e^x - 1}{x} \geq \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1$ είναι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

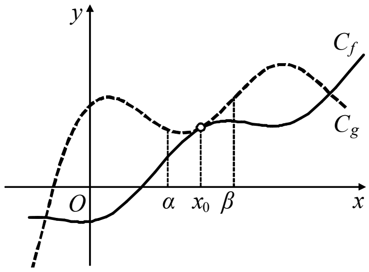
Όρια & διάταξη

Έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για τις συναρτήσεις f, g σε μία περιοχή του x_0.

• Αν οι f, g έχουν στη θέση x_0 πεπερασμένα όρια, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$.



Σχήμα 40



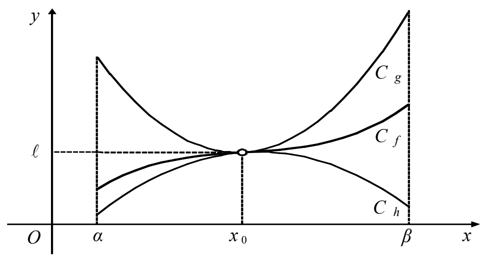
Σχήμα 41

• Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty$

• Αν $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$

• Αν για τις συναρτήσεις h, f, g σε μία περιοχή του σημείου x_0 ισχύει $h(x) \le f(x) \le g(x)$ και οι h, g έχουν στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$, τότε και η f έχει στη θέση x_0 όριο ℓ. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως κριτήριο παρεμβολής.

Σχήμα 42



Όρια & πράξεις

• $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

• $\lim\limits_{x\to x_0}[k\cdot f(x)] = k\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $, k\in\mathbb{R}$

Οι ως άνω προτάσεις επεκτείνονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων.

• $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

• $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ne 0$

• $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$,

• $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu$ $, \nu\in\mathbb{N}$

• $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, όταν $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0.

Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης όταν $x \to x_0$

Για μία πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ισχύει ότι • $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Απόδειξη

Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0\right) =$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right) + \lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right) + \lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}\right) + \ldots + \lim_{x\to x_0}\left(\alpha_2 x^2\right) + \lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right) + \lim_{x\to x_0}\alpha_0 =$$

$\alpha_\nu \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_2 \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x^2 + \alpha_1 \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x + \alpha_0 =$

$= \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = P(x_0)$.

Όριο ρητής συνάρτησης. Για μία ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με $Q(x_0) \neq 0$, ισχύει ότι • $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Απόδειξη. Για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0)$ Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0)$.

Παρατήρηση

Αν $P(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_o)}{Q(x_o)} = \dfrac{0}{Q(x_o)} = 0$.

Αν $P(x_0) = 0$ και $Q(x_0) = 0$, τότε

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{(x-x_o)\cdot P_1(x_o)}{(x-x_o)\cdot Q_1(x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{P_1(x_o)}{Q(x_o)}$ κ.ο.κ.

Τριγωνομετρικά όρια. • $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, • $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$, • $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$,

• $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$, $x_0 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ • $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0$, $x_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$.

Όριο αθροίσματος

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Όριο γινομένου

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	α>0	α<0	α>0	α<0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	- ∞	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Όριο πηλίκου

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	α >0	$a < 0$	$a < 0$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	;	;

Απροσδιόριστες μορφές για τα όρια των πράξεων συναρτήσεων είναι: $(+\infty)+(-\infty)$, $0(\pm\infty)$, $\dfrac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, $\dfrac{0}{0}$.

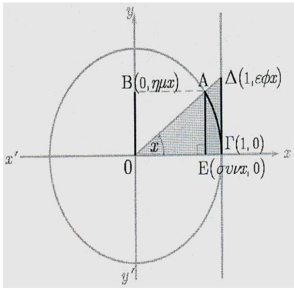
Από τον ορισμό του ορίου συνάρτησης στην θέση x_0, προκύπτουν οι ιδιότητες

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(-f)(x)=-l$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(-f)(x)=-\infty$

Π.χ. 33. Να δειχθεί ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 4x}{x}=4$.

Για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, συγκρίνοντας τα εμβαδά των τριγώνων ΟΑΕ, ΟΓΔ και του κυκλικού τομέα ΟΑΓ, προκύπτει

Σχήμα 43



$$\mathrm{E}_{\mathrm{OAE}}<\mathrm{E}_{\mathrm{OA\Gamma}}<\mathrm{E}_{\mathrm{O\Gamma\Delta}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OE}\cdot\mathrm{AE}<\frac{1}{2}\cdot x\cdot\pi\cdot 1^2<\frac{1}{2}\cdot\mathrm{O\Gamma}\cdot\Gamma\Delta \Leftrightarrow$$

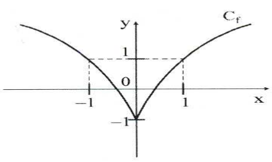
$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x<x<1\cdot\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x<\frac{x}{\eta\mu x}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}<\frac{\eta\mu x}{x}<\sigma\upsilon\nu x .$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=1$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}=1$.

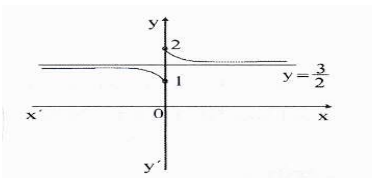
Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\ 4x}{x}=4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\ 4x}{4x}=4\cdot 1=4$

4.6 Παραδείγματα

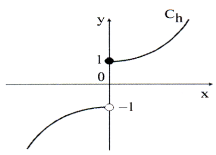
1. Υπολογίστε εφόσον υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ του σχήματος 44.



Σχήμα 44



Σχήμα 45

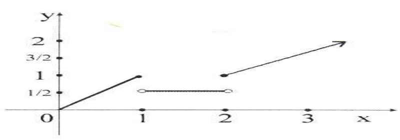


Σχήμα 46

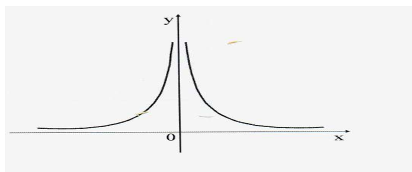
Το σημείο $x_0 = 0$ είναι διφορούμενο, διότι άλλος ο τύπος της f δεξιά του $\left(x > x_0\right)$ και άλλος αριστερά του $\left(x < x_0\right)$.
Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.
Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$, είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.

2. Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ για τηνσυνάρτηση του σχήματος 45. Το σημείο $x_0 = 0$ είναι διφορούμενο, διότι άλλος ο τύπος της f δεξιά του $\left(x > x_0\right)$ και άλλος αριστερά του $\left(x < x_0\right)$.
Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.
Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
Επίσης είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

3. Υπολογίστε εφόσον υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ για την συνάρτηση του σχήματος 46. Το σημείο $x_0 = 0$ είναι διφορούμενο. Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -1$. Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.



Σχήμα 47



Σχήμα 48

4. Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ για την συνάρτηση του σχήματος 47.
Επειδή $\Pi.\text{O.} = [0, +\infty)$ είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$.
Το σημείο $x_0 = 1$ είναι διφορούμενο, άρα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$. Επειδή $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2} \neq 1 = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Το σημείο $x_0 = 2$ είναι διφορούμενο, άρα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Επειδή $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \neq \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Τέλος είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5. Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ για τη συνάρτηση του σχήματος 48.

Είναι $\Pi O=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$. Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$.

6. Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+3x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(x^3+3\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(x^3+3)=0+3=3$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)}{1}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)}{(x-3)}=\dfrac{4}{-1}=-4$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)^2\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)}{(x-1)\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)}{(x-2)}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$

$$=(-3)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\begin{cases}(-3)\cdot(+\infty)=-\infty\,,\ \text{όταν}\ x>1\\(-3)\cdot(-\infty)=+\infty\,,\ \text{όταν}\ x<1\end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-10x+24}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4}{x-6}=-4$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+4x-12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+7}{x+6}=\dfrac{9}{8}$
- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}(x-2)=1\\\lim\limits_{x\to 3^-}(-x+2)=-1\end{cases}$ Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{(x-1)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+5}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=$

$$\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\cdot(+\infty)=+\infty,\ \text{διότι}\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty\\\dfrac{1}{3}\cdot(-\infty)=-\infty,\ \text{διότι}\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty\end{cases}$$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2(x+5)}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x(x-3)}=0$
- $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x(x-3)}=0$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

➢ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^3(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+5}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=$

$\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot(+\infty)=+\infty$, διοτι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

➢ Όταν $x\to 0^+\Rightarrow\dfrac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow\dfrac{9}{x}\to+\infty\Rightarrow\dfrac{-9}{x}\to-\infty$

Όταν $x\to 0^-\Rightarrow\dfrac{1}{x}\to-\infty\Rightarrow\dfrac{9}{x}\to-\infty\Rightarrow\dfrac{-9}{x}\to+\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9|x|}{x^2-9|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+9x}{x^2-9x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\left(1+\frac{9}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\frac{9}{x}}{1-\frac{9}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{9}{x}\right)}=\dfrac{+\infty}{-\infty}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-9x}{x^2+9x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\left(1-\frac{9}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{9}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\frac{9}{x}}{1+\frac{9}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-\frac{9}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\frac{9}{x}\right)}=\dfrac{+\infty}{-\infty}=-\infty\end{cases}$$

7. Να υπολογισθούν οι $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$ αν $f,f(x)=\dfrac{x^2+2ax-\beta+5}{2x-4}$.

Είναι ΠΟ $=\mathbb{R}-\{2\}$. Αφού το 2 είναι ρίζα του παρονομαστή, πρέπει να είναι και του αριθμητή. Συνεπώς, $9+4\alpha-\beta=0\Rightarrow\beta=9+4\alpha$.

Άρα, το $f(x)$ γράφεται ως $f(x)=\dfrac{x^2+2ax-\beta+5}{2x-4}=\dfrac{x^2+2ax-(4\alpha+9)+5}{2(x-2)}=$

$$\frac{(x-2)(x+2)+2\alpha(x-2)}{2(x-2)}=\frac{x+2+2\alpha}{2}$$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2+2\alpha}{2}=\dfrac{2+2+2\alpha}{2}=2+\alpha$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1\Leftrightarrow 2+\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=-1$. Και από $\beta=9+4\alpha=9+4(-1)=5$

8. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ για τον $a\in\mathbb{R}$ αν $f,f(x)=\sqrt{x^2+2x+8}+(\alpha-3)x$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(\alpha-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}+(\alpha-3)x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(\alpha-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[|x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(\alpha-3)x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(\alpha-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(\alpha-3)x\right]=$$

$$(+\infty)\,(1+\alpha-3)=(+\infty)\,(\alpha-2)\,.$$

- Όταν $\alpha-2>0\Leftrightarrow\alpha>2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- Όταν α – 2 < 0 ⇔ α<2, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Όταν α – 2= 0 ⇔ α=2 , τότε (+∞) 0 = απροσδιόριστη μορφή , οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης, άρα η συνάρτηση f γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+8}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+8}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+8}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+8}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{8}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1\right]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{8}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1}$$

$$= \frac{2\,+\,0}{\sqrt{1\,+\,0\,+\,0}\,+1} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$.

Θέτομε $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$, άρα $\lim\limits_{x\to x_o} h(x) = +\infty$.

Επειδή $g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = f(x)\frac{1}{h(x)}$ είναι $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = \lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)\frac{1}{h(x)}\right] = \ell\cdot 0 = 0$.

10. Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \frac{x^2+\alpha x-\beta}{|x-2|}$. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Πρέπει το 2 να είναι ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $2\alpha+4=\beta$.

$$f(x) = \frac{x^2+ax-\beta}{|x-2|} = \frac{x^2+ax-(2\alpha+4)}{|x-2|} = \frac{(x-2)(x+2)+\alpha(x-2)}{|x-2|} = \frac{(x-2)(x+2+\alpha)}{|x-2|} =$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+2+\alpha)}{x-2} = x+2+\alpha, & x>2\\[2ex] \dfrac{(x-2)(x+2+\alpha)}{-(x-2)} = -x-2-\alpha, & x<2\end{cases}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x+2+\alpha) = 4+\alpha$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-x-2-\alpha) = -4-\alpha$.

Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4+\alpha = -4-\alpha = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

Άρα $\alpha = -4$ οπότε $\beta = 2\alpha+4 = -4$.

11. Να υπολογισθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ για $f, f(x) = \frac{x^2+2ax-\beta+5}{2x-4}$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}-\{-2\}$. Αφού το 2 είναι ρίζα του παρονομαστή πρέπει να είναι ρίζα και του αριθμητή. Δηλαδή $9+4a-\beta=0 \Rightarrow \beta = 9+4a$.

$$f(x) = \frac{x^2+2ax-\beta+5}{2x-4} = \frac{x^2+2ax-(9+4a)+5}{2(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)+2a(x-2)}{2(x-2)} = \frac{(x+2)+2a}{2}$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2+2a}{2} = \dfrac{2+2+2a}{2} = 2+a$.
Για να είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ πρέπει $2+a=1 \Rightarrow a=-1$, οπότε $\beta = 4a+9=5$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \in \mathbb{R}$ αν $f, f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - \kappa x$.

2. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 1-\lambda^3$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda^4 + \lambda$;

3. Είναι καλώς ορισμένα τα $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{5-x}$, $\lim\limits_{x\to -2}(\ln x)$, $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{-x^2+5x-6}$;

4. Αν $\alpha \neq \beta$, δείξτε ότι $\nexists \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ για $f, f(x) = \begin{cases} \alpha x - \alpha\beta, & x \le \alpha \\ \beta x - \beta^2, & x > \alpha \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5. Βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$ για $f, f(x) = \begin{cases} 4\alpha x^2 - \beta x - 4\alpha, & x \le 2 \\ 3\beta x - 2\alpha - 2, & x > 2 \end{cases}$.

6. Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \dfrac{x^2+ax-\beta}{|x-3|}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογισθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

7. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν τα όρια

(i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ για $f, f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le 1 \\ \lambda^2 x - 13, & x > 1 \end{cases}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ για $f, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x < 2 \\ 3+\lambda x, & x \ge 2 \end{cases}$.

8. Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \dfrac{|x|(x+1)}{x}$. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

9. Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}, & x \in (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(2,+\infty) \\ \dfrac{1-x}{x+2}, & x \in (0,2) \end{cases}$.

Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

10. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ για την συνάρτηση $f, f(x) = \begin{cases} x+5, & x \le 2 \\ x^2-3, & x > 2 \end{cases}$.

11. Εξετάστε αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ για $f, f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le -2 \\ x^2+5, & -2 < x < 0 \\ 6-x, & x \ge 0 \end{cases}$.

12. Υπολογίστε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+x+2}{x-1}+\beta x=4$.

Υπολογίστε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(2x)+a}{x^2}+\beta=4$.

13. Υπολογίστε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\mu^2-3\mu\right)x^2+2x+4}{x^2-4}=\ell\in\Re$.

14. Αν $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}-ax-\beta$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$ (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+1$.

15. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\lambda}{(x-1)^2}$, όπου $f(x)=x^{2\nu}-2x^{\nu}$, (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\lambda x\right)=l\in\Re$

16. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\dfrac{ax^{\nu}+\beta x^{\mu}+\gamma}{x-1}$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Ποιά σχέση συνδέει τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to1}f(x)\in\mathbb{R}$; Βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ σε σχέση με τα α,β,γ.

17. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+3}{x-2}$, (β) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{2x^2+x+4}$, (γ) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$,

(δ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$, (ε) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{-x^2+2x-1}$, (στ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x-3}{2x^2-2}$,

(ζ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5+2x^3-3}{x^4+x^3-2}$, (η) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$, (θ) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+4x-4}{x^2+6x+8}$,

(ι) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$, (ια) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x+2}{x}$, (ιβ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$,

(ιγ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{|x-3|}$, (ιδ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+1}{\eta\mu x}$, (ιε) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{\sigma\upsilon\nu x-1}$,

(ιστ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(4x)}{x}$, (ιζ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(6x)}{2x}$, (ιη) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(-4x)}{5x}$,

(ιθ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}$, (κ) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$, (κα) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)-1}{x}$,

(κβ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$, (κγ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$, (κδ) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3-2x-1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$,

(κε) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{2x}$, (κστ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{8x+1}-3}{x-1}$, (κζ) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+5x-6}{|x-1|}$,

(κη) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-3x-2}{|x|-1}$, (κθ) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x^2-2x|-|x^2-5x+6|}{|x-2|}$, (κι) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}$,

(λ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x-1|+x^2+x-2}{x^2+3x-4}$, (λα) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x-1|-2x}{|x-2|\cdot(x+2)}$, (λβ) $\lim\limits_{x\to27}\dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$, (λγ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$, (λδ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$, (λε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|}$,

(λστ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^3-5^3}$, (λζ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$, (λη) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+5}{2|x|\cdot x}$,

(λι) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x|+x}{|x+1|\cdot(x+2)}$, (λκ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$, (μ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

(μα) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, (μβ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi x-\eta\mu x}{x^3}$, (μγ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+3}-2}$

(μδ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{x}{3}\right)$, (με) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-x-2}$, (μστ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x^2-4}$,

(μζ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x^2+7}}$, (μη) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2-\eta\mu x}$, (μθ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$,

(μι) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}-3}{x-1}$, (μκ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$, (μλ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x|x|}$,

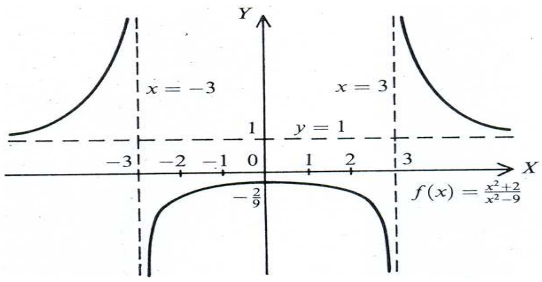
(ν) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-4x+3}$, (να) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{|x|\cdot\eta\mu x}$, (νβ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+x^2-x-2}{x^2-4}$,

(νγ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-3x+2}$, (νδ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2)}$, (νε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\varepsilon\phi x}{2x-\eta\mu x}$,

(νστ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\cdot\eta\mu^2 x}$, (νζ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x^2-x}$, (νη) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\varepsilon\phi 5x}$,

(νθ) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\eta\mu x\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$, (νι) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot\sigma\upsilon\nu(2x)+2\cdot\eta\mu(2x)+\beta}{x}$.

18. Για την γραφική παράσταση του σχήματος 49, να υπολογισθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$.



Σχήμα 49

5. Βασικά όρια συναρτήσεων

- $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} x^k = x_o^k$ όπου k ορισμένος φυσικός αριθμός.
- $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} ax^k = ax_o^k$, $k\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, $k\in\mathbb{N}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$, αν κ άρτιος φυσικός αριθμός.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$, αν κ περιττός φυσικός αριθμός.

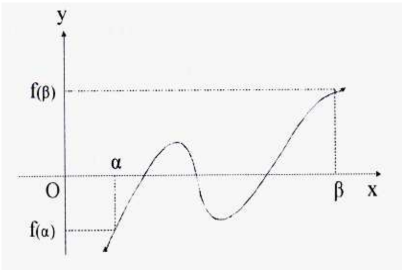
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και γενικότερα • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$, αν κ φυσικός αριθμός.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και γενικότερα • $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$, αν κ φυσικός αριθμός.

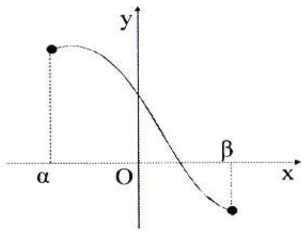
• $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, • $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$.

6. Θεώρημα του Bolzano

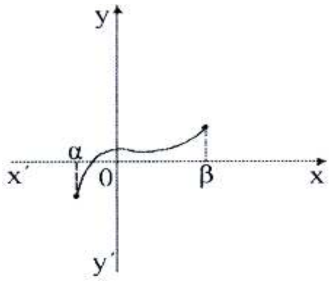
• Έστω συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και στα άκρα α,β έχει ετερόσημες τιμές, δηλαδή $f(a)\cdot f(\beta)<0$. Τότε, η f μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του ανοικτού διαστήματος (α,β).



Σχήμα 50



Σχήμα 51

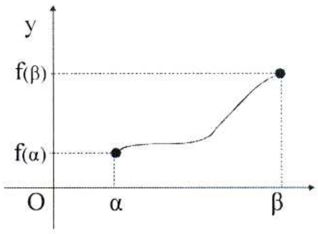


Σχήμα 52

Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και οι τιμές της στα α,β είναι ετερόσημες, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α,β). Η πρόταση αυτή οφείλεται στους μαθηματικούς Bolzano και Weierstrass γιά αυτό στη βιβλιογραφία συναντάται ως θεώρημα που φέρει το όνομα τους.

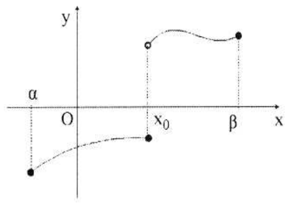
Παρατήρηση

Για να ισχύει το θεώρημα, πρέπει να ικανοποιούνται και οι δύο προϋποθέσεις του.



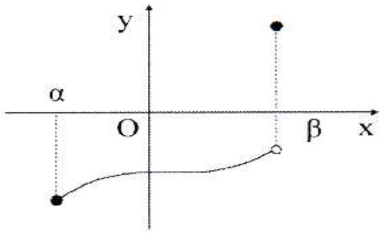
f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
αλλά $f(a)\cdot f(\beta)>0$

Σχήμα 53



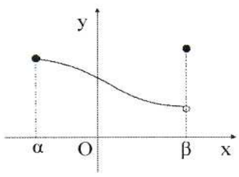
$f(a)\cdot f(\beta)<0$ αλλά
f ασυνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Σχήμα 54



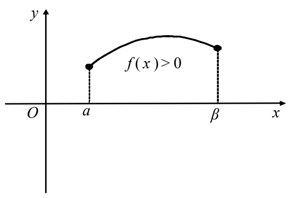
$f(a)\cdot f(\beta)<0$ αλλά
f συνεχής στο $[\alpha,\beta)$

Σχήμα 55

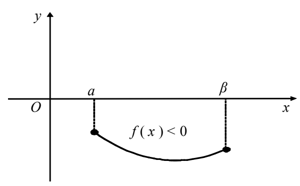


$f(a)\cdot f(\beta)>0$ και
f συνεχής στο $[\alpha,\beta)$

Σχήμα 56



Σχήμα 57



Σχήμα 58

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:
• Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα χωρίς να μηδενίζεται σ' αυτό, τότε είναι θετική (σχήμα 57) ή αρνητική (σχήμα 58), σε κάθε σημείο του διαστήματος αυτού. Δηλαδή, διατηρεί πρόσημο στο διάστημα.
• Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Π.χ. 34. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,\pi)$. Η συνάρτηση $f, f(x) = x^2 - x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$f(0) = 0^2 - 0 \cdot \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$, $\quad f(\pi) = \pi^2 - \pi \cdot \eta\mu\pi - \sigma\upsilon\nu\pi = \pi^2 + 1 > 0$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,\pi)$.

Π.χ. 35. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστο μία πραγματική ρίζα. Αν $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Άρα υπάρχουν $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, δηλαδή $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.
Η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$, άρα η εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Γενίκευση. Με την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται η πρόταση «Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.»

Π.χ. 36. Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$, δείξτε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^2+1}{x-\alpha} + \dfrac{x^6+1}{x-\beta} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α, β).
Η ανωτέρω εξίσωση γράφεται $(x^2+1) \cdot (x-\beta) + (x^6+1) \cdot (x-\alpha) = 0$.
Η συνάρτηση $f(x) = (x^2+1) \cdot (x-\beta) + (x^6+1) \cdot (x-\alpha)$, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ διότι

$f(\alpha) = (\alpha^2+1) \cdot (\alpha-\beta) + (\alpha^6+1) \cdot (\alpha-\alpha) = (\alpha^2+1) \cdot (\alpha-\beta) < 0$ και

$f(\beta) = (\beta^2+1) \cdot (\beta-\beta) + (\beta^6+1) \cdot (\beta-\alpha) = (\beta^6+1) \cdot (\beta-\alpha) > 0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο (α, β).

Π.χ. 37. Δείξτε ότι η εξίσωση $x = a \cdot \eta\mu x + \beta$, με $\alpha, \beta > 0$, έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα, που δεν υπερβαίνει τον αριθμό $\alpha + \beta$.
Η συνάρτηση $f, f(x) = x - a \cdot \eta\mu x - \beta$ είναι συνεχής στο $[0, \alpha+\beta]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $f(0) = 0 - a \cdot \eta\mu 0 - \beta = -\beta < 0$ και

$f(a+\beta) = \alpha + \beta - a \cdot \eta\mu(\alpha+\beta) - \beta = \alpha[1 - \eta\mu(\alpha+\beta)] \geq 0$ διότι $\alpha > 0$, $\eta\mu(\alpha+\beta) \leq 1$

$$\begin{cases} \text{Αν ημ(α+β) =1, τότε } f(\alpha+\beta)=0 \text{ \& ο αριθμός (α+β) είναι ρίζα της εξίσωσης } f(x)=0 \\ \text{Αν ημ(α+β)} \neq 1, \text{ τότε } f(\alpha+\beta)>0 \text{ ,άρα } f(0)\cdot f(\alpha+\beta)<0, \text{ άρα από Bolzano η εξίσωση } f(x)=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα } (0,\ \alpha+\beta) \end{cases}$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, η εξίσωση $x-a\cdot\eta\mu x-\beta=0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο $[0,\ \alpha+\beta]$.

Π.χ. 38. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και δε μηδενίζεται για καμία τιμή του $x\in[\alpha,\ \beta]$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\ \beta]$.

Έστω ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[\alpha,\beta]$ με $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)<0$. Τότε από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,\beta)$, ώστε $f(x_0)=0$ που είναι άτοπο. Άρα η f έχει σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

Άσκηση. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4+5x^3-x^2+x-1=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

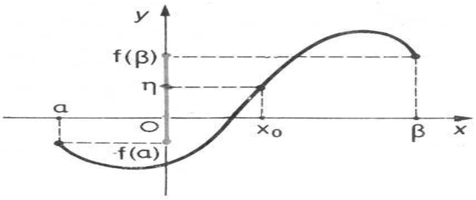
7. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(a)\neq f(\beta)$. Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$, $f(\beta)$ (Σχήμα 59).

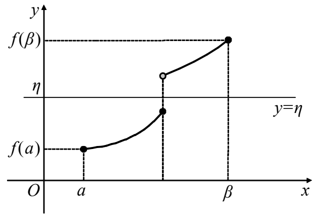
Το θεώρημα αυτό γεωμετρικά, εκφράζει ότι κάθε σημείο του άξονα yy' που βρίσκεται μεταξύ των $f(a), f(\beta)$ είναι τιμή της συνάρτησης. Δηλαδή, από κάθε τέτοιο σημείο, μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα xx' τέμνει την γραφική παράσταση της f σε τουλάχιστον ένα σημείο. Το θεώρημα οφείλεται στον μαθηματικό Darboux γιά αυτό στην βιβλιογραφία συναντιέται ως θεώρημα που φέρει το όνομα του.

Απόδειξη. Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Θα δειχθεί ότι για $\forall\eta\in(f(\alpha),f(\beta))$, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\eta$. Προς τούτο θεωρώ τη συνάρτηση g, $g(x)=f(x)-\eta$, που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Άρα, η g ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος Bolzano συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta \Leftrightarrow f(x_0)=\eta$.



Σχήμα 59

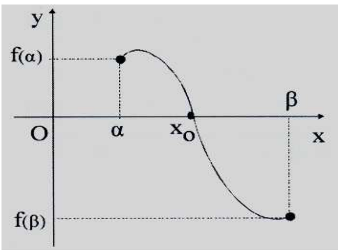


Σχήμα 60

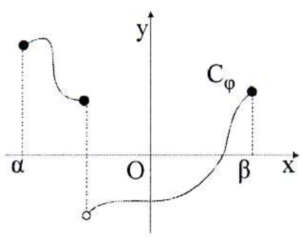
Σχόλιο. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $\left[a,\beta\right]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές (Σχήμα 60).

Πόρισμα. Μία συνεχής συνάρτηση f απεικονίζει ένα οποιοδήποτε διάστημα (όχι κατ΄ ανάγκη κλειστό ή φραγμένο) σε διάστημα. Αποδεικνύεται πως η εικόνα κλειστού διαστήματος, με συνεχή συνάρτηση, είναι κλειστό διάστημα (σχήμα 61).

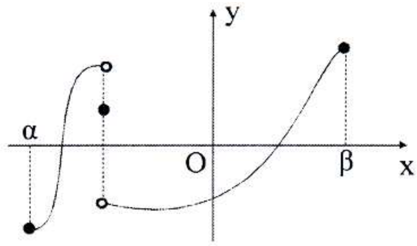
Η εικόνα κλειστού διαστήματος με συνάρτηση φ, μπορεί να είναι κλειστό διάστημα, χωρίς η φ να είναι συνεχής (σχήματα 62, 63).



Σχήμα 61

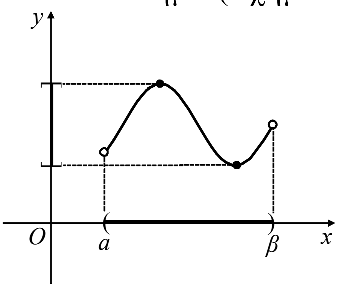


Σχήμα 62

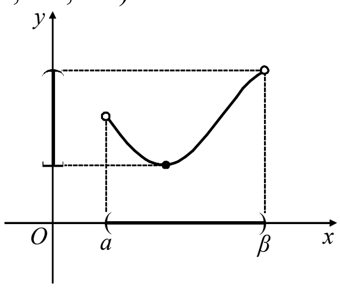


Σχήμα 63

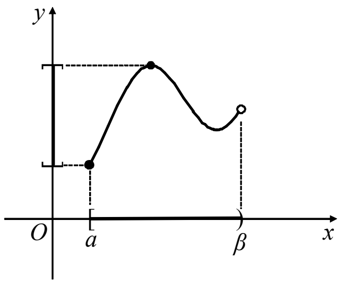
Η εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς, μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα (Σχήματα 64, 65, 66).



Σχήμα 64



Σχήμα 65



Σχήμα 66

Π.χ. 39. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και οι τιμές της είναι ρητοί αριθμοί, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

Έστω ότι η f όχι σταθερή στο Δ. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \neq f(x_2)$. Από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών, η f παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των ρητών $f(x_1), f(x_2)$, άρα παίρνει και άρρητες τιμές, που είναι άτοπο. Άρα, η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

Π.χ. 40. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ και $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$, δείξτε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

Επειδή f συνεχής με $f(\alpha)<f(\beta)$ από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών, για κάθε αριθμό η, έστω, $\eta=f(\gamma)$ μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ με $f(x_0)=\eta=f(\gamma)$. Όμως $\gamma>\beta$ άρα για $x_0<\gamma$ ισχύει $f(x_0)=f(\gamma)$, άρα η f όχι 1 – 1 άρα δεν είναι αντιστρέψιμη.

Π.χ. 41. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ με $f(x_o)=\frac{2}{5}f(a)+\frac{3}{5}f(\beta)$.

Μέθοδος εργασίας. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, προκειμένου να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\eta$, αρκεί να δειχθεί ότι ο αριθμός η βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$. [Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών].

Αρκεί να δειχθεί ότι ο αριθμός $\eta=\frac{2}{5}f(a)+\frac{3}{5}f(\beta)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$. Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Αρκεί να δειχθεί ότι

$$f(a)\ <\ \frac{2}{5}f(a)+\frac{3}{5}f(\beta)\ <f(\beta)\Leftrightarrow\ 5f(a)\ <2f(a)+3f(\beta)\ <\ 5f(\beta)$$

$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}3f(a)<3f(\beta)\\2f(a)<2f(\beta)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}f(a)<f(\beta)\\f(a)<f(\beta)\end{Bmatrix}$ που ισχύουν. Ομοίως και όταν $f(\alpha)>f(\beta)$.

8. Συνέχεια συναρτήσεων

8.1. Γενικοί ορισμοί

8.1 .1 Συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0 του Π.Ο. της

Μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ, λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Παρατήρηση. Αν θέσουμε $x=x_0+\Delta x$ $(\Delta x=x-x_0)$ τότε η ανωτέρω συνθήκη γράφεται $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}_{\Delta f(x)}\right]=0\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$.

Παρατήρηση. Αν μία συνάρτηση δεν είναι ορισμένη στο σημείο x_0, δεν μιλάμε για συνέχεια της στο σημείο αυτό. Μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ χωρίς η f να είναι ορισμένη στο σημείο x_0, αρκεί να είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

8.1.2. Συνάρτηση ασυνεχής στο σημείο x_0 του Π.Ο. της

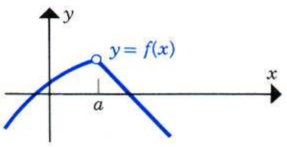
Μία συνάρτηση f λέγεται ασυνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν δεν είναι συνεχής στο x_0 δηλαδή ισχύει μία τουλάχιστον από τις παρακάτω περιπτώσεις: (**α**) Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(**β**) Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

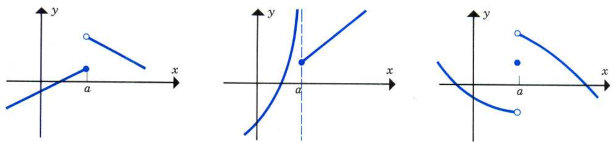
(**γ**) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

8.1.3. Πλευρική συνέχεια συνάρτησης στο σημείο x_0 του Π.Ο. της

Περίπτωση 1^{η}. Όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, αλλά δεν υπάρχει το $f(\alpha)$ (Σχήμα 67).



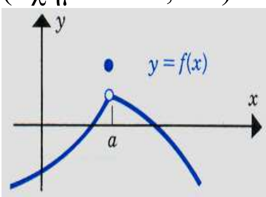
Σχήμα 67



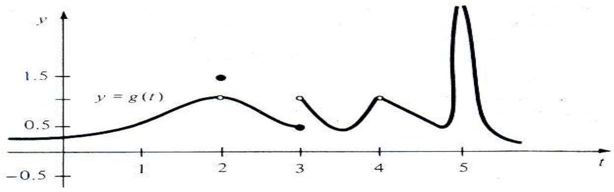
Σχήμα 68

Περίπτωση 2^{η}. Όταν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ αλλά υπάρχει το $f(\alpha)$ (Σχήμα 68).

Περίπτωση 3^{η}. Όταν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(\alpha)$, αλλά $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(\alpha)$ (Σχήματα 69, 70).



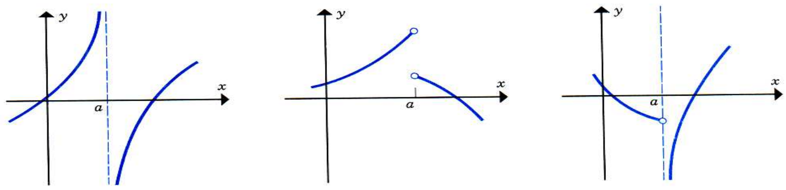
Σχήμα 69



Σχήμα 70

Περίπτωση 4^{η}. Όταν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ και το $f(\alpha)$ δεν ορίζεται.

Σχήμα 71



8.1.4. Συνάρτηση συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό, υπάρχει $\delta > 0$ που εξαρτάται από το ε, τέτοιο ώστε $\forall x \in \Delta : |x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

8.2. Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων
Θεώρημα μέγιστης & ελάχιστης τιμής

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε στο διάστημα αυτό παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο.

• Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε στο διάστημα αυτό είναι και φραγμένη.

•Αν f $1-1$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(\alpha)]$.

• Η εικόνα $f(\Delta)$ διαστήματος Δ μέσω συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

• Αν f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a,β), τότε το πεδίο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)\right)$.

• Αν f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (a,β), τότε το πεδίο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right)$.

• Το όριο συνάρτησης αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

8.3 Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

• Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
• Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
• Η εκθετική & η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.
• Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις.
• Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
•Αν f συνεχής τότε οι συναρτήσεις $|f|$, $\sqrt[k]{f}$ είναι συνεχείς.

Αντιπαράδειγμα. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, παντού ασυνεχούς, ενώ η $|f|$ είναι παντού συνεχής. Η $f, f(x)=\begin{cases} 1, \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ -1, \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι παντού ασυνεχής, ενώ η συνάρτηση $|f|, |f|(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

• Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.
Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι συνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι συνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση $f(x)=a^x$ με $a>0$, είναι συνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x)=\log_a x$ με $a>0$ και $a\neq 1$ είναι συνεχής $\forall x>0$.

Η συνάρτηση $f(x)=x^a$ με $\Pi\text{O}=(0,+\infty)$ και a σταθερό αριθμό, είναι συνεχής $\forall x\in\Pi\text{O}$.

8.4. Βασικές προτάσεις στις συνεχείς συναρτήσεις

1. Αν οι f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και στο $x_0\in\Delta$ είναι συνεχείς, τότε και οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0.

2. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο Δ, τότε οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ είναι συνεχείς στο Δ. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πράγματι αν $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ τότε $(f+g)(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$.

Οι f,g είναι ασυνεχείς στην θέση $x_0=0$ ενώ η $f+g$ είναι συνεχής στην θέση $x_0=0$.

Έστω $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ αν } x \text{ ρητός}\\ 1, \text{ αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1, \text{ αν } x \text{ ρητός}\\ -1, \text{ αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$ ασυνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους, Το γινόμενο τους, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left.\begin{cases}-1, \text{ αν } x \text{ ρητός}\\ -1, \text{ αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}\right\}=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

3. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η g ασυνεχής στο σημείο x_0, οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ είναι ασυνεχείς στο x_0.

4. Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και στο $x_0\in\Delta$ είναι συνεχής με $f\left(x_0\right)\neq 0$, η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο x_0.

5. Αν οι f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού Δ και στο $x_0\in\Delta$ είναι συνεχείς, με $g\left(x_0\right)\neq 0$, η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.

6. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο κοινό διάστημα ορισμού Δ και $g\left(x_0\right)\neq 0\ \forall x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο Δ.

8.5. Παραδείγματα

1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 1\\ 3-x^2, & x>1\end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$\forall x<1,\ f(x)=x+1$ συνεχής ως πολυωνυμική.

$\forall x>1,\ f(x)=3-x^2$ συνεχής ως πολυωνυμική. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$.

Η θέση $x_0=1$ είναι διφορούμενη.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3-x^2\right)=3-1^2=2$, $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x+1\right)=1+1=2$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στη θέση $x_0=1$. Τελικά η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f, f(x)=x+\ln x,\ x\in[1,e]$.

$\forall x_1,x_2\in[1,e]$ με $x_1<x_2$ ισχύει $\ln x_1<\ln x_2$, άρα

$x_1+\ln x_1<x_2+\ln x_2 \Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αφού είναι συνεχής ως άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων, έχει πεδίο τιμών το διάστημα $\left[f(1), f(e)\right]=\left[1+\ln 1,\ e+\ln e\right]=\left[1,\ e+1\right]$.

3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $x^2 f(x)=1-\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)$. Ποια η τιμή $f(0)$;

$\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ είναι $f(x)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)}{x^2}=\dfrac{2\ \eta\mu^2 x}{x^2}=2\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2$ και αφού η f συνεχής, ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=2$.

4. Να βρεθούν οι $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x)=\begin{cases}\beta x+2\alpha-1, & x\geq 1\\ \dfrac{x^2+x+\alpha}{x-1}, & x<1\end{cases}$ να είναι συνεχής.

Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. $\forall x>1$ η f συνεχής ως πολυωνυμική.
$\forall x<1$ η f συνεχής ως ρητή. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2+x+\alpha}{x-1}\right)\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2+x-2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$.

Πρέπει το 1 να είναι ρίζα αριθμητή, ώστε να είναι δυνατή η απαλοιφή του παρονομαστή, δηλαδή $x^2+x+a=0\Leftrightarrow 1^2+1+a=0\Leftrightarrow a=-2$.
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\beta x+2\alpha-1)=\lim\limits_{x\to 1^+}[\beta+2(-2)-1]=\beta-5$. Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή $\beta-5=3\Leftrightarrow\beta=8$. Για να είναι συνεχής η f στη θέση 1 πρέπει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ που ισχύει. Άρα για $(\alpha,\beta)=(-2,8)$ η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5. Να εξετασθεί ως προς την συνέχεια στη θέση $x_0=\dfrac{1}{\ln 2}$ η συνάρτηση

$$f, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{1}{\ln 2}\\ \dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq\dfrac{1}{\ln 2}\ \kappa\alpha\iota\ x\neq 0\end{cases}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\ln 2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{\ln 2}^+}\dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}\overset{*}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\ln 2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{\ln 2}^-}\dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}\overset{*}{=}-\infty$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\ln 2}} f(x)$, οπότε η f ασυνεχής στη θέση $x_0=\dfrac{1}{\ln 2}$.

Επεξηγήσεις

$$x\to\frac{1}{\ln 2}^+\Rightarrow x>\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow \ln 2>\frac{1}{x}\Rightarrow e^{\ln 2}>e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln 2>\frac{1}{x}\Rightarrow 2>e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow 2-e^{\frac{1}{x}}>0$$

$$x\to\frac{1}{\ln 2}^-\Rightarrow x<\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow \ln 2<\frac{1}{x}\Rightarrow e^{\ln 2}<e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow 2<e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow 2-e^{\frac{1}{x}}<0$$

6. Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $f, f(x)=\min\{x^2+1,\ 9x-7\}$.

Έστω $A=x^2+1$, $B=9x-7$. Τότε:

$A-B>0\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow \min\{A,B\}=B$

$A-B<0\Leftrightarrow A<B\Leftrightarrow \min\{A,B\}=A$

$A-B=0\Leftrightarrow A=B\Leftrightarrow \min\{A,B\}=A=B$

x	$-\infty$		1		8		$+\infty$
Α − Β		+	0	−	0	+	

Επεξήγηση. $A-B=x^2-9x-8\quad(\Delta=8>0,\ \rho_1=1,\ \rho_2=8)$

Άρα $f, f(x)=\begin{cases} 9x-7\ , & x\in(-\infty,1)\cup(8,+\infty) \\ x^2+1\ , & x\in(1,8) \\ 2\ , & x=1 \\ 65\ , & x=8 \end{cases}$.

Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{\ 1, 8\ \}$.

Εξετάζω την συνέχεια της συνάρτησης στη θέση $x_0=1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+1)=2 \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(9x-7)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x)=2.$$ Επίσης είναι $f(1)=2$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στην θέση $x_0=1$.

Εξετάζω την συνέχεια της συνάρτησης στη θέση $x_0=8$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to8^+}(9x-7)=65 \\ \lim\limits_{x\to8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to8^-}(x^2+1)=65 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to8} f(x)=65.$$ Επίσης είναι $f(8)=65$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στην θέση $x_0=8$.

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το σύνολο $\Re$.

7. Εξετάστε ως προς την συνέχεια στην θέση $x_0=1$, την $f, f(x)=\begin{cases} 1 & ,x=1 \\ 5^{\frac{1}{x-1}} & ,x\neq1 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} 5^{\frac{1}{x-1}} \overset{*}{=} \lim\limits_{y\to-\infty} 5^y=0$, $\qquad \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} 5^{\frac{1}{x-1}} \overset{*}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} 5^y=+\infty$.

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, συνεπώς η f είναι ασυνεχής στην θέση $x_0=1$.

Επεξήγηση. $x\to1^- \Rightarrow \dfrac{1}{x-1}\to-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to1^-} 5^{\frac{1}{x-1}} \overset{*}{=} \lim\limits_{y\to-\infty} 5^y=0$.

$x\to1^+ \Rightarrow \dfrac{1}{x-1}\to+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to1^+} 5^{\frac{1}{x-1}} \overset{*}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} 5^y=+\infty$.

8. Βρείτε τα $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ για συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν $x-x^2\le f(x)\le x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(x-x^2\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to0} x=0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

$$\begin{cases} \text{Αν } x>0 \Rightarrow \dfrac{x-x^2}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \Rightarrow 1-x\le\dfrac{f(x)}{x}\le1 \\ \text{Επειδή } \lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1\ \&\ \lim\limits_{x\to0^+}1=1 \text{ είναι } \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Αν } x<0 \Rightarrow \dfrac{x-x^2}{x}\ge\dfrac{f(x)}{x}\ge\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \Rightarrow 1-x\ge\dfrac{f(x)}{x}\ge1 \\ \text{Επειδή } \lim\limits_{x\to0^-}(1-x)=1\ \&\ \lim\limits_{x\to0^-}1=1 \text{ είναι } \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=1 \end{cases}$$

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(\nu)=0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα .

Αν η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$, τότε η f αφού είναι συνεχής πρέπει να διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή οι τιμές $f(1),f(2),f(3),...,f(\nu)$ να είναι ομόσημες, οπότε δε γίνεται να έχουν άθροισμα μηδέν, πράγμα άτοπο. Συνεπώς, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

10. Δείξτε με κατάλληλα αντιπαραδείγματα, ότι <u>δεν</u> αληθεύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί:

(**i**) Αν η f είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ τότε παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $(\alpha,\beta]$.

(**ii**) Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η $\frac{1}{f}$ συνεχής στο x_0.

(**iii**) Αν η f παίρνει θετική τιμή σε κάποιο x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχει περιοχή του x_0, στην οποία η f παίρνει θετική τιμή.

(**iv**) Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη.

Για κάθε έναν ψευδή ισχυρισμό να γράψετε την επιπλέον συνθήκη ή περιορισμό που απαιτείται ώστε να είναι αληθής.

(**i**) Η $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής, ισχύει $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$, άρα η f δεν έχει μέγιστο στο πεδίο ορισμού της, οπότε ο ισχυρισμός ήταν ψευδής.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα του ισχυρισμού, πρέπει η f να ορίζεται σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Η κλειστότητα του διαστήματος αποτελεί ικανή συνθήκη, αλλά όχι αναγκαία.

(**ii**) Αν $f(x)=x$ με ΠΟ$=\mathbb{R}$ και $x_0=0$, η f είναι συνεχής στη θέση $x_0=0$, όμως η $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ είναι ασυνεχής στη θέση $x_0=0$, αφού εκεί δεν ορίζεται.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα πρέπει και αρκεί $f(x_0)\neq 0$.

(**iii**) Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases}-1, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$. Τότε $f(0)=1>0$, αλλά δεν υπάρχει περιοχή του μηδέν ώστε $f(x)>0$ διότι $f(x)<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}^*$.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα πρέπει και αρκεί η f να είναι συνεχής στο x_0.

(**iv**) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\varepsilon\varphi x$ και ΠΟ$=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη φραγμένη, διότι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\varepsilon\varphi x=+\infty$ και $\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}}\varepsilon\varphi x=-\infty$.

Μία αναγκαία συνθήκη για να είναι φραγμένη, είναι να ορίζεται σε κλειστό διάστημα ή αν ορίζεται σε ανοικτό ή ημιανοικτό, να υπάρχουν τα όρια στα ανοικτά άκρα και να είναι πεπερασμένα .

11. Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια στην θέση $x_0 = 0$ η $f, f(x) = \begin{cases} 5, & x = 0 \\ \dfrac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$. Όταν $x \to 0^- \Rightarrow \dfrac{1}{x} \to -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to -\infty} 3^y = 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{5}{1+0} = 5$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

Όταν $x \to 0^+ \Rightarrow \dfrac{1}{x} \to +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to +\infty} 3^y = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{5}{1+(+\infty)} = 0$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 5 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Συνεπώς η συνάρτηση f στη θέση $x_0 = 0$ είναι ασυνεχής.

Επειδή $f(0) = 5 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ είναι συνεχής η συνάρτηση f στη θέση $x_0 = 0$ από αριστερά.

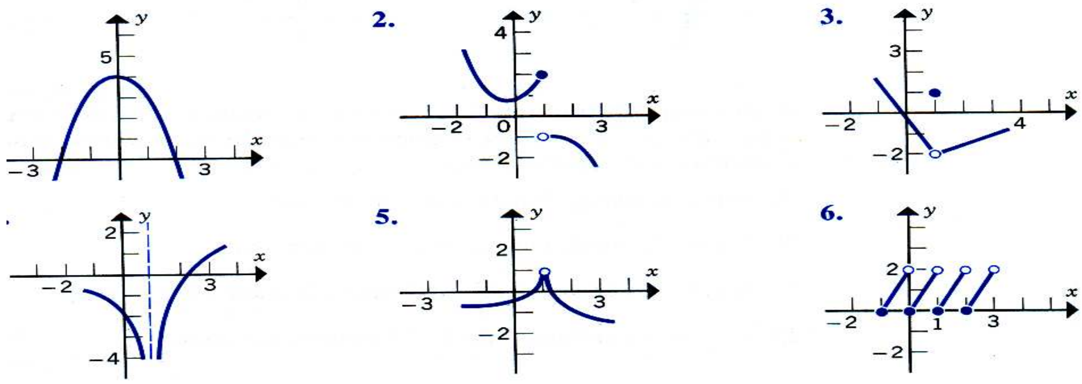
8.6. Ασκήσεις.

1. Βρείτε α∈ℝ ώστε η $f, f(x) = \begin{cases} 3^{x+1}, & x < 0 \\ 3\alpha + x, & x \geq 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στην θέση $x_0 = 0$.

2. Βρείτε τα α,β ∈ℝ ώστε η συνάρτηση $f, f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 0 \\ x+\beta, & x < 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

3. Αν $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$ να μελετηθεί fog ως προς την συνέχεια.

4. Να βρεθούν με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, τα $f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.



Σχήμα 72.

5. Για ποιά τιμή του $a \in \mathbb{R}$, η $f, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha, & x \leq 0 \\ \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στην θέση 0;

6. Υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ ώστε $f(x_0) = 0$ αν $f, f(x) = \begin{cases} x^2+2, & -2 \leq x < 0 \\ -x^2 - 2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$;

7. Βρείτε $\alpha \in \mathbb{R}$ αν η $f, f(x)=\begin{cases} 2x^2+1 & ,x\le 1 \\ \dfrac{x^2+ax-3}{x+1} & ,\ x>1 \end{cases}$ είναι συνεχής στην θέση $x_0=1$.

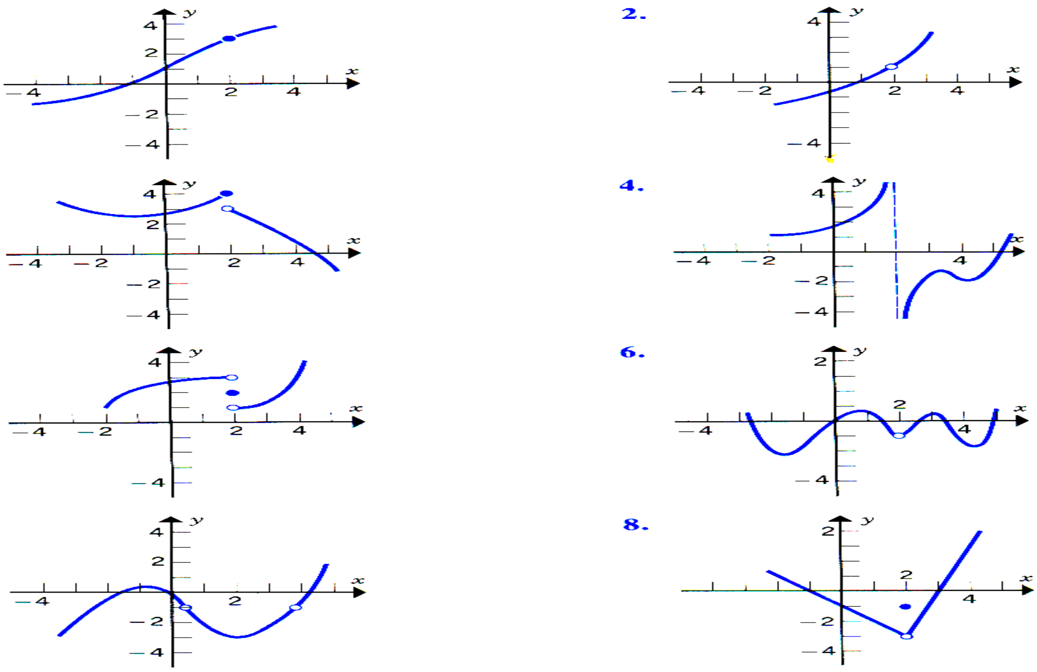
8. Βρείτε τα $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η $f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+(\beta-1)x+6}{x-3}, & x\ne 3 \\ 7, & x=3 \end{cases}$.

Απάντηση $(a,\ \beta)=(3,\ -10)$

9. Βρείτε τα $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η $f, f(x)=\begin{cases} ax+\beta-4, & x<-2 \\ \sigma\upsilon\nu(\pi x), & -2\le x\le 1 \\ \dfrac{ax+\beta}{1+x^2}, & x>1 \end{cases}$

$$f, f(x)=\begin{cases} ax+\beta-4, & x<-2 \\ \sigma\upsilon\nu(\pi x), & -2\le x\le 1 \\ \dfrac{ax+\beta}{1+x^2}, & x>1 \end{cases}.$$

10. Βρείτε τα $f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ εφόσον αυτά υπάρχουν και μελετήστε τις συναρτήσεις ως προς την συνέχεια στην θέση $x_0=2$ και στο πεδίο ορισμού τους.



Σχήμα 73

11. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού τους οι συναρτήσεις:

$$f, f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x<2 \\ 2, & x=2 \\ 2x+1, & x>2 \end{cases} \qquad g, g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2}, & x\ne 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$$

$$h, h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\cdot\sqrt{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad t, t(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\cdot(x+1)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

$$u, u(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}\qquad v, v(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1\\ -x^2+1, & -1\leq x\leq 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$$

$$k, k(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad E, E(x)=\begin{cases}\lambda x^3+(\lambda+1)x+1, & x\leq 1\\ 2\lambda x^2+(\lambda+2)x+3, & x>1\end{cases}\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Pi, \Pi(x)=\frac{|x^3-2x^2-x+2|}{x^3-x^2+x-1}$$

12. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού τους οι συναρτήσεις:

(α) $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ 2, & x=1\\ x-1, & x>1\end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 2, & x=1\\ x, & x>1\end{cases}$ (γ) $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x<1\\ 0, & x=1\\ x^2, & x>1\end{cases}$

(δ) $f(x)=|x|$ (ε) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leq 0\\ 3\sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$ (στ) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 0\\ 1-2x, & x>0\end{cases}$

(ζ) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leq 1\\ x, & x>1\end{cases}$ (η) $f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x\leq 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$ (θ) $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$

(ι) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\end{cases}$ (ια) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(ιβ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2\\ 12, & x=2\end{cases}$ (ιγ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+\eta\mu(2x)}{x+\eta\mu x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

(ιδ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ (ιε) $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(ιστ) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leq 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$, (ιζ) $g, g(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leq 0\\ 1-4x, & x>0\end{cases}$, (ιη) $h, h(x)=\begin{cases}x+2, & x<2\\ x^2, & x\geq 2\end{cases}$

13. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού τους οι συναρτήσεις:

$f, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$, $u, u(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ 2x, & -1\leq x\leq 1\\ 3x-1, & x>1\end{cases}$, $v, v(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,

$t, t(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leq 0\\ 3\cos x, & x>0\end{cases}$, $\phi, \phi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2\\ 12, & x=2\end{cases}$, $\sigma, \sigma(x)=\begin{cases}e^x+1, & x\leq 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$,

$g, g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leq 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$, $\theta, \theta(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$, $w, w(x)=\begin{cases}ax+1, & x\geq 0\\ x+\beta, & x<0\end{cases}$,

$\xi, \xi(x)=|x|-x$.

14. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού τους οι συναρτήσεις:

$f, f(x)=\begin{cases}e^x-e\cdot x, & x\leq 1\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x>1\end{cases}$ $g, g(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{1}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\end{cases}$

$h, h(x)=\begin{cases}x^3\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $u, u(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1\\ x^2+1, & x\leq 1\end{cases}$

$v, v(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ $w, w(x)=\begin{cases}\eta\mu x\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$z, z(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x+x^2}{x+\eta\mu x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ $\phi, \phi(x)=\begin{cases}\cos x+\lambda\cdot\sin x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\\ (2\lambda+1)\cdot\tan x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

15. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού τους, οι συναρτήσεις:

$f(x)=\sqrt{|x|}$, $g(x)=x-\sqrt{x-[x]}$, $h(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$, $u(x)=\dfrac{\cos^3 x-1}{3-\cos^2 x}$

$v(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $w(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, $z(x)=\begin{cases}2x+1, & -1\leq x<4\\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x\geq 4\end{cases}$

$t(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$, $\phi(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x, & x\leq 0\end{cases}$, $\sigma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$$\omega(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x} \ , & x\neq 0 \\ \ \ 0 \ , & x=0 \end{cases},$$

$$(x)=\begin{cases} -2\cdot\sin x, & x\leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a\cdot\sin x+\beta, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x \ , & \dfrac{\pi}{2}\leq x \end{cases}$$

Ασκήσεις για επίλυση σε όρια & συνέχεια συναρτήσεων

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα όρια • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+3x^2}{x^2}$, • $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-10x+24}$, • $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+4x-12}$,

• $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2(x+5)}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^3(x+5)}$, • $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x}$, • $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-3x}$,

• $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}$, • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+9|x|}{x^2-9|x|}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^5-7x+9)$,

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^8+7x^2+6)$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2}$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt[3]{x^3+4}}$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$,

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-|x-1|}{x}$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$,

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}+\sqrt[3]{x^2(x+1)}\right)$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$,

• $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-7x+12}$, • $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-1|-2x}{|x-2|\cdot(x+2)}$, • $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x|+x}{|x+1|\cdot(x+2)}$, • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+5}{2|x|\cdot x}$,

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$, • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, • $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$,

• $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$, • $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^3-5^3}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$,

• $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$, • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x^3}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+3}-2}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{x}{3}\right)$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-3x^4+x^2+1\right)$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+x-2}{x^2-4}$, • $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x^2-x}$

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-|x-5|}{x^2+|x-3|}$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x-3}{x+1}$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x-3}{x+1}$,

• $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-x-2}$, • $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x^2-4}$, • $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x^2+7}}$,

• $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2-\eta\mu x}$, • $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$, • $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}-3}{x-1}$, • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x|x|}$,

• $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-4x+3}$, • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+1}{|x|\cdot\eta\mu x}$, • $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x-2|+x^2-x-2}{x^2-4}$, • $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-3x+2}$,

• $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2)}$, • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\varepsilon\varphi x}{2x-\eta\mu x}$, • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\cdot\eta\mu^2 x}$,

• $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\varepsilon\varphi 5x}$, • $\lim\limits_{x\to0}\left[\eta\mu x\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$, • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt[3]{x^2+x+1}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}+x\right)$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-2x\right)$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+2x+5}\right)$,

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt[4]{16x^4+x^2+3}\right)$, • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)$,

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}$, • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cdot\sigma\upsilon\nu(2x)+2\cdot\eta\mu(2x)+\beta}{x}$,

Άσκηση 2. Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ αν $f, f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 2\\ x-1, & x>2\end{cases}$;

Άσκηση 3. Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ αν $f, f(x)=\dfrac{|x|(x+1)}{x}$;

Άσκηση 4. Βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ αν $f, f(x)=\dfrac{x^2+ax-\beta}{|x-2|}$

Άσκηση 5. Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ για $f, f(x)=\begin{cases}x+5, & x\le 2\\ x^2-3, & x>2\end{cases}$;

Άσκηση 6. Υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ αν $f, f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le -2\\ x^2+5, & -2<x<0\\ 6-x, & x\ge 0\end{cases}$;

Άσκηση 7. Βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$ αν $f, f(x)=\dfrac{x^2+2ax-\beta+5}{2x-4}$.

Άσκηση 8. Αν $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+8}+(a-3)x$ βρείτε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 9. Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ αν

$$f, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x+2}, & x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(2,+\infty)\\ \dfrac{1-x}{x+2} & ,x\in(0,2)\end{cases};$$

Άσκηση 10. Αν $f, f(x)=\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}-kx$ βρείτε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ αν για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta,k\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 11. Εύρεση πεδίου ορισμού της $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\lambda x$ με $\lambda\in\mathbb{R}$. Υπολογισμός $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 12. Αν $f, f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^3+5x+2}{\lambda x^2+3}$ βρείτε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ αν για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 13. Βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ αν $f, f(x)=\dfrac{4x^2}{x+3}-\left(ax+\beta\right)$.

Άσκηση 14. Βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=\beta$.

Άσκηση 15. Εύρεση ασύμπτωτων γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-8}$.

Άσκηση 16. Βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=11$ αν $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-\alpha x-\beta$.

Άσκηση 17. Εύρεση ασύμπτωτων γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f, f(x)=\sqrt{x^2+x}$ στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$.

Άσκηση 18. Εξετάστε ως προς τη συνέχεια την $f, f(x)=min\left\{x^2+1,\ 9x-7\right\}$.

Άσκηση 19. Βρείτε $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x)=\begin{cases}\beta x+2\alpha-1 & ,x\ge 1\\ \dfrac{x^2+x+a}{x-1} & ,x<1\end{cases}$ να είναι συνεχής.

Άσκηση 20. Βρείτε $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ,x\le 1\\ \dfrac{x^2+ax-3}{x+1} & ,x>1\end{cases}$ να είναι συνεχής στη θέση $x_0=1$.

Άσκηση 21. Βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όπου $f, f(x)=\begin{cases}x+2 & ,x\le 1\\ \lambda^2 x-13 & ,x>1\end{cases}$

(ii) $\lim_{x\to 2} f(x)$ όπου $f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x<2 \\ 3+\lambda x, & x\geq 2 \end{cases}$.

Άσκηση 22. Μελετήστε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις:

$f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$, $g, g(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\leq 0 \\ 1-4x, & x>0 \end{cases}$, $h, h(x)=\begin{cases} x+2, & x<2 \\ x^2, & x\geq 2 \end{cases}$

$u, u(x)=\begin{cases} x+1, & x<-1 \\ 2x, & -1\leq x\leq 1 \\ 3x-1, & x>1 \end{cases}$, $v, v(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $t, t(x)=\begin{cases} 2x+3, & x\leq 0 \\ 3\cos x, & x>0 \end{cases}$,

$\phi, \phi(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2 \\ 12, & x=2 \end{cases}$, $\sigma, \sigma(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\leq 0 \\ \ln(x+1), & x>0 \end{cases}$, $\theta, \theta(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\leq 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

$\theta, \theta(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\leq 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$, $w, w(x)=\begin{cases} ax+1, & x\geq 0 \\ x+\beta, & x<0 \end{cases}$, $\xi, \xi(x)=|x|-x$.

$f, f(x)=\begin{cases} e^x-e\cdot x, & x\leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x>1 \end{cases}$ $\quad f, f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leq x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \end{cases}$

$f, f(x)=\begin{cases} x^3\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\quad f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \\ x^2+1, & x\leq 1 \end{cases}$ $\quad f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$

$g, g(x)=\begin{cases} \eta\mu x\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\quad g, g(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 2x+x^2}{x+\eta\mu x}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$

Άσκηση 23. Βρείτε $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η $f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+(\beta-1)x+6}{x-3}, & x\neq 3 \\ 7, & x=3 \end{cases}$. **Απάντηση** (α,β)=(3,-10)

Άσκηση 24. Βρείτε $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η

$$f, f(x)=\begin{cases} ax+\beta-4, & x<-2 \\ \cos(\pi x), & -2\leq x\leq 1 \\ \dfrac{ax+\beta}{1+x^2}, & x>1 \end{cases}$$

Άσκηση 25. Μελετήστε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις:

$f(x)=\sqrt{|x|}$, $\quad f(x)=x-\sqrt{x-[x]}$, $\quad f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$, $\quad f(x)=\dfrac{\cos^3 x-1}{3-\cos^2 x}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\qquad f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},\qquad f(x)=\begin{cases}2x+1, & -1\le x<4\\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x\ge 4\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases},\qquad f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x, & x\le 0\end{cases},\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x+\lambda\cdot\sin x\ , & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\\ (2\lambda+1)\cdot\tan x\ , & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}\ , & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-2\cdot\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ a\cdot\sin x+\beta, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x\ , & \dfrac{\pi}{2}\le x\end{cases},\qquad f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x<2\\ 2, & x=2\\ 2x+1, & x>2\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases},\qquad h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\cdot\sqrt{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

$$t(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\cdot(x+1)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases},\qquad u(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},$$

$$v(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1\\ -x^2+1, & -1\le x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases},\qquad k(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

$$E(x)=\begin{cases}\lambda x^3+(\lambda+1)x+1, & x\le 1\\ 2\lambda x^2+(\lambda+2)x+3, & x>1\end{cases}\ \lambda\in\mathbb{R},\ \Pi,\Pi(x)=\frac{|x^3-2x^2-x+2|}{x^3-x^2+x-1}$$

Άσκηση 26. Ποια σχέση συνδέει τους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to 1}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ αν $f, f(x)=\dfrac{ax^{\nu}+\beta x^{\mu}+\gamma}{x-1}$; Υπολογισμός $\lim_{x\to 1}f(x)$ σε σχέση με τα α,β,γ.

Άσκηση 27. Αν $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}-ax-\beta$, βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε (α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ και (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+1$.

Άσκηση 28. Εύρεση $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα όρια (α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\lambda}{(x-1)^2}$, όπου $f(x)=x^{2\nu}-2x^{\nu}$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\lambda x\right)=l\in\Re$.

Άσκηση 29. Εύρεση $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+x+2}{x-1}+\beta x=4$.

Άσκηση 30. Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0=1$ την $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 5^{\frac{1}{x-1}}, & x\neq1\end{cases}$.

Άσκηση 31. Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0=\dfrac{1}{\ln 2}$ την

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{1}{\ln 2}\\ \dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq\dfrac{1}{\ln 2}\ \&\ x\neq0\end{cases}.$$

Άσκηση 32. Εύρεση $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(2x)+a}{x^2}+\beta=4$.

Άσκηση 33. Εύρεση $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\mu^2-3\mu\right)x^2+2x+4}{x^2-4}=\ell\in\Re$.

Άσκηση 34. Εξετάστε ως προς την συνέχεια στην θέση $x_0=0$ την

$$f,f(x)=\begin{cases}5 & ,x=0\\ \dfrac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}} & ,x\neq0\end{cases}.$$

Λύσεις των ασκήσεων

Άσκηση 1

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+3x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x^3+3)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(x^3+3)=3$
- $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-10x+24}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4}{x-6}=-4$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+4x-12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+7}{x+6}=\dfrac{9}{8}$
-

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^2(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-1)(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+5}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\cdot(+\infty)=+\infty,\ \text{διοτι}\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty\\[2ex] \dfrac{1}{3}\cdot(-\infty)=-\infty,\ \text{διοτι}\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty\end{cases}$$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2(x+5)}$.

-

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^3(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-1)^2(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+5}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(+\infty)=+\infty,\ \text{διοτι}\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

-

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x(x-3)}=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x(x-3)}=0$$

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\sqrt{x(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x(x-3)}=0$$

x	-∞	0		3	+∞
x(x-3)	+	0	-	0	+

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}(x-2)=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 3^-}(-x+2)=-1\end{cases}$ Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}$.

Σχόλιο για το επόμενο

- Όταν $x\to 0^+\Rightarrow\dfrac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow\dfrac{9}{x}\to+\infty\Rightarrow\dfrac{-9}{x}\to-\infty$
- Όταν $x\to 0^-\Rightarrow\dfrac{1}{x}\to-\infty\Rightarrow\dfrac{9}{x}\to-\infty\Rightarrow\dfrac{-9}{x}\to+\infty$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9|x|}{x^2-9|x|}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+9x}{x^2-9x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\left(1+\frac{9}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{9}{x}}{1-\frac{9}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{9}{x}\right)}=\frac{+\infty}{-\infty}=-\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-9x}{x^2+9x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\left(1-\frac{9}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{9}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\frac{9}{x}}{1+\frac{9}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-\frac{9}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\frac{9}{x}\right)}=\frac{+\infty}{-\infty}=-\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {\scriptstyle x\to 0^-}\end{cases}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^5-7x+9\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^5\left(3-7\frac{1}{x^4}+9\frac{1}{x^5}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}x^5\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(3-7\frac{1}{x^4}+9\frac{1}{x^5}\right)=(+\infty)\cdot 3=+\infty$$

- $$\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^8+7x^2+6\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^8\left(-3+7\frac{1}{x^6}+6\frac{1}{x^8}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}x^8\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(-3+7\frac{1}{x^6}+6\frac{1}{x^8}\right)=(+\infty)\cdot(-3)=-\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt[3]{x^3+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}}=\frac{2}{1}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty,\quad \text{Άρα}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}=+\infty$$

Σχόλιο για το επόμενο

$$\frac{2x-|x-1|}{x}=\begin{cases}\dfrac{2x-x+1}{x}=\dfrac{x+1}{x}, & x\ge 1\\[2ex] \dfrac{2x+x-1}{x}=\dfrac{3x-1}{x}, & x<1\end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-|x-1|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$, - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|x-1|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{x}=3$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$ Άρα, υπάρχουν 2 περιπτώσεις

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$ και

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{4+\frac{1}{x}}=-\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

- $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{\sqrt{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right]}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right]}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{1}=\frac{1+1}{1}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdot\frac{\sqrt{1+0}-0}{1-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}+\sqrt[3]{x^2(x+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)=$$

$$(+\infty)\cdot\left(\sqrt[3]{1-0}+\sqrt[3]{1+0}\right)=(+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1$$

Άσκηση 2. Θα πρέπει το 2 να είναι ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $2\alpha+4=\beta$.

$$f(x)=\frac{x^2+ax-\beta}{|x-2|}=\frac{x^2+ax-(2\alpha+4)}{|x-2|}=\frac{(x-2)(x+2)+\alpha(x-2)}{|x-2|}=\frac{(x-2)(x+2+\alpha)}{|x-2|}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+2+\alpha)}{x-2}=x+2+\alpha, & x>2\\[2ex] \dfrac{(x-2)(x+2+\alpha)}{-(x-2)}=-x-2-\alpha, & x<2\end{cases}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(x+2+\alpha)=4+\alpha$ και $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(-x-2-\alpha)=-4-\alpha$.

Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ θα πρέπει $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=4+\alpha=-4-\alpha=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$.

Άρα, $\alpha=-4$ οπότε $\beta=2\alpha+4=-4$.

Άσκηση 3. Είναι $D(f)=\Re-\{-2\}$. Αφού το 2 είναι ρίζα του παρονομαστή θα πρέπει να είναι ρίζα και του αριθμητή. Δηλαδή $9+4a-\beta=0\Rightarrow\beta=9+4a$.

$$f(x)=\frac{x^2+2ax-\beta+5}{2x-4}=\frac{x^2+2ax-(9+4a)+5}{2(x-2)}=\frac{(x-2)(x+2)+2a(x-2)}{2(x-2)}=\frac{(x+2)+2a}{2}$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2+2a}{2}=\dfrac{2+2+2a}{2}=2+a$.

Για να είναι $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$ πρέπει $2+a=1\Rightarrow a=-1$, οπότε $\beta=4a+9=5$.

Άσκηση 4

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(a-3)x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2})}+(a-3)x\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+(a-3)\right]=(+\infty)(1+a-3)=(+\infty)(a-2)$$

• Όταν $a-2>0 \Leftrightarrow a>2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Όταν $a-2<0 \Leftrightarrow a<2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

• Όταν $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$ τότε απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$.

Είναι $f, f(x)=\sqrt{x^2+2x+8}-x$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+8}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+8}^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+8}+x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+8}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{8}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{8}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1}=$$

$$\frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

Άσκηση 5

Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}-kx\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2\left(a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)}-kx\right]=$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[|x|\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]$$

Όταν $x\to+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-k\right]=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-k\right]=(+\infty)\left(\sqrt{a}-k\right)$$

• Όταν $\sqrt{a}-k>0 \Leftrightarrow \sqrt{a}>k$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• Όταν $\sqrt{a}-k<0 \Leftrightarrow \sqrt{a}<k$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

• Όταν $\sqrt{a}-k=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=k$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Όταν $x\to-\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}-kx\right]=$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x)\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}+k\right]=\lim_{x\to-\infty}(-x)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{a+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}+k\right]=(-\infty)\left(\sqrt{a}-k\right)$$

• Όταν $\sqrt{a}+k>0 \Leftrightarrow \sqrt{a}>-k$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

• Όταν $\sqrt{a}+k<0 \Leftrightarrow \sqrt{a}<-k$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

• Όταν $\sqrt{a}+k=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=-k$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Άσκηση 6

Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}+\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda\right]$

Όταν $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda\right]=(+\infty)\cdot(1+\lambda)$$

• Όταν $1+\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Όταν $1+\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda<-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

• Όταν $1+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$, τότε απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Όταν $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-\lambda\right]=(+\infty)\cdot(1-\lambda)$$

• Όταν $1-\lambda>0 \Leftrightarrow 1>\lambda$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

• Όταν $1-\lambda<0 \Leftrightarrow 1<\lambda$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

• Όταν $1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Άσκηση 7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^3+5x+2}{\lambda x^2+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3\left[(\lambda-1)+5\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}\right]}{x^2\left(\lambda+\frac{3}{x^2}\right)}=$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\lambda-1)+5\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}}{\lambda+\frac{3}{x^2}}=(\pm\infty)\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[(\lambda-1)+5\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}\right]}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\lambda+\frac{3}{x^2}\right)}=(\pm\infty)\cdot\frac{\lambda-1}{\lambda},$$ όπου $\lambda\neq 0$.

• Όταν $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}>0 \Rightarrow \lambda^2\dfrac{\lambda-1}{\lambda}>0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)>0 \Rightarrow \lambda\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

• Όταν $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}<0 \Rightarrow \lambda^2\dfrac{\lambda-1}{\lambda}<0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)<0 \Rightarrow \lambda\in(0,1)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

- Όταν $\frac{\lambda-1}{\lambda}=0 \Rightarrow \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$, τότε $f(x)=\frac{5x+2}{x^2+3}$ άρα, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5x+2}{x^2+3}=0$

Άσκηση 8

$$f(x)=\frac{4x^2}{x+3}-(ax+\beta)=\frac{4x^2-(ax+\beta)(x+3)}{x+3}=\frac{(4-\alpha)x^2-(3a+\beta)x-3\beta}{x+3}$$

Για να είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ θα πρέπει $4-\alpha=0$ και $3a+\beta=0$.

Άρα, $\alpha=4$ και $\beta=-12$.

Άσκηση 9

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}-\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\alpha\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\alpha\right)=(+\infty)\cdot(1-a).$$

- Όταν $1-a>0 \Rightarrow 1>a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=+\infty$.
- Όταν $1-a<0 \Rightarrow 1<a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=-\infty$.
- Όταν $1-a=0 \Rightarrow 1=a$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\alpha x\right)=(+\infty)\cdot 0=?$ (De L' Hospital)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}=0\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\lim\limits_{x\to+\infty}1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

Άρα, είναι $a=1$ και $\beta=0$.

Άσκηση 10. Είναι $D(f)=\Re-\{2\}$.

1^{ος} τρόπος. Είναι $\alpha=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{4x^2-8x}=0$ και

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-0x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{4x-8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Άρα, η ευθεία (ε) $y=\alpha x+\beta=0x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της ομογραφικής συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$.

2^{ος} τρόπος.

Είναι $f(x)-(ax+\beta)=\frac{2x+3}{4x-8}-(ax+\beta)=\frac{-4ax^2+(2-4\beta+8\alpha)x+3+8\beta}{4x-8}$

Άρα, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+\beta)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-4ax^2+(2-4\beta+8\alpha)x+3+8\beta}{4x-8}\right]$, συνεπώς

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+\beta)\right]=0\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-4ax^2+(2-4\beta+8\alpha)x+3+8\beta}{4x-8}\right]=0\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases}-4\alpha=0\\ 2-4\beta+8\alpha=0\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0,5\end{cases}$$

Οπότε η ευθεία (ε) $y=\alpha x+\beta=0x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της ομογραφικής συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$.

Άσκηση 11

• $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\alpha x-\beta\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)\right]=$

$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=$

$(+\infty)\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-\lim_{x\to+\infty}\alpha-\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta}{x}\right)=(+\infty)(1-a)$

• Όταν $1-a>0\Rightarrow 1>a$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Όταν $1-a<0\Rightarrow 1<a$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

• Όταν $1-a=0\Rightarrow 1=a$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\cdot 0=?$ (De L' Hospital)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-(x+\beta)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}^2-(x+\beta)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+\beta)}=\ldots=1-\beta$$

Άρα, είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=11\Rightarrow 1-\beta=11\Rightarrow \beta=-10$.

Άσκηση 12. $f(x)=\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x(x+1)}$, $D(f)=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1=a$ και $\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\frac{1}{2}$

Άρα, η ευθεία (ε) $y=\alpha x+\beta=x+\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Ομοίως $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1=a$ και $\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=-\frac{1}{2}$.

Άρα, η ευθεία (ε) $y=\alpha x+\beta=-x-\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$.

Άσκηση 13. Έστω $A=x^2+1$ και $B=9x-7$.

• Όταν $A-B>0\Rightarrow A>B\Rightarrow \min\{x^2+1,9x-7\}=9x-7$.

• Όταν $A-B<0\Rightarrow A<B\Rightarrow \min\{x^2+1,9x-7\}=x^2+1$.

• Όταν $A-B=0\Rightarrow A=B\Rightarrow \min\{x^2+1,9x-7\}=x^2+1=9x-7$.

Είναι $A-B=x^2-9x-8$, δηλαδή τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=8>0$ και ρίζες $\rho_1=1$, $\rho_2=8$. Για το πρόσημο του τριωνύμου ισχύει ο παρακάτω πίνακας.

x	-∞ 1 8 +∞
A-B	+ 0 - 0 +

Άρα, η συνάρτηση $f, f(x)=\min\left\{x^2+1, 9x-7\right\}$ γράφεται απλούστερα ως εξής

$$f, f(x)=\begin{cases} 9x-7, & x\in(-\infty,1)\cup(8,+\infty) \\ x^2+1, & x\in(1,8) \\ 2, & x=1 \\ 65, & x=1 \end{cases}$$

Ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $\Re-\left\{1,8\right\}$.

Εξετάζω την συνέχεια της συνάρτησης στην θέση $x_0=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+1)=2 \\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(9x-7)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=2.$$ Επίσης είναι $f(1)=2$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στην θέση $x_0=1$.

Εξετάζω την συνέχεια της συνάρτησης στη θέση $x_0=8$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to8^+}f(x)=\lim\limits_{x\to8^+}(9x-7)=65 \\ \lim\limits_{x\to8^-}f(x)=\lim\limits_{x\to8^-}(x^2+1)=65\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to8}f(x)=65.$$ Επίσης είναι $f(8)=65$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στην θέση $x_0=8$.

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το σύνολο $\Re$.

Άσκηση 14. Για κάθε x>1 η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Για κάθε x<1 η συνάρτηση f είναι συνεχής ως ρητή.Συνεπώς η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο $\Re-\left\{1,\right\}$.

Εξετάζω την συνέχεια της συνάρτησης στην θέση $x_0=1$.

Είναι $f(1)=\beta-5$ και $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x+a}{x-1}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+2)=3$

*Θα πρέπει το 1 να είναι ρίζα του αριθμητή. Δηλαδή $a=-2$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x+a}{x-1}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+2)=3$.

Οπότε $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\beta-5 \\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=\beta-5=3\Rightarrow\beta=8.$$ Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$.

Άσκηση 15

Είναι $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}5^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{\psi\to-\infty}5^y=0$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}5^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{y\to+\infty}5^y=+\infty$.

Άρα, ασυνεχής η συνάρτηση f στην θέση $x_0=1$.

Επεξήγηση

• Όταν $x \to 1^- \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to -\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} 5^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{y\to -\infty} 5^y = 0$.

• Όταν $x \to 1^+ \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to +\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} 5^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{y\to +\infty} 5^y = +\infty$.

Άσκηση 16

Είναι • $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\ln 2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{\ln 2}^+} \frac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$, • $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\ln 2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{\ln 2}^-} \frac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$.

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\ln 2}} f(x)$.

Συνεπώς, ασυνεχής η συνάρτηση f στην θέση $x_0 = \frac{1}{\ln 2}$.

Επεξήγηση

Είναι $x \to \frac{1}{\ln 2}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 > \frac{1}{x} \underset{*}{\Longrightarrow} e^{\ln 2} > e^{1/x} \Rightarrow 2 > e^{1/x} \Rightarrow 2 - e^{1/x} > 0$.

Είναι $x \to \frac{1}{\ln 2}^- \Rightarrow x < \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 < \frac{1}{x} \underset{*}{\Longrightarrow} e^{\ln 2} < e^{1/x} \Rightarrow 2 > e^{1/x} \Rightarrow 2 - e^{1/x} < 0$

Σημείωση. Ισχύει ότι $x_1 > x_2 \underset{a>1}{\Longrightarrow} a^{x_1} > a^{x_2}$.

Άσκηση 17.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$. Όταν $x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to -\infty} 3^y = 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{5}{1+0} = 5$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$. Όταν $x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to +\infty} 3^y = +\infty$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{5}{1+(+\infty)} = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 5 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Συνεπώς, η συνάρτηση f στην θέση $x_0 = 0$ είναι ασυνεχής.

Επειδή $f(0) = 5 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ είναι συνεχής η συνάρτηση f στην θέση $x_0 = 0$ από αριστερά.