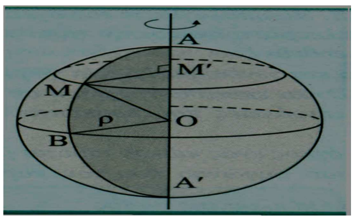
Εισαγωγή. Ο Ευκλείδης, θεωρούσε ότι το πέμπτο αίτημα του ήταν αναπόδεικτο. Οι μαθηματικοί, στην προσπάθεια τους να βρουν μία απόδειξη για το αίτημα αυτό, ανακάλυψαν νέες γεωμετρίες στις οποίες δεν ισχύει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^0. Επίσης ανακάλυψαν ότι είναι δυνατόν από σημείο εκτός ευθείας να διέρχονται άπειρες ευθείες παράλληλες προς την ευθεία.

Επειδή η Γη μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση σφαιρική, η σφαιρική (ή ελλειπτική) γεωμετρία βρίσκει άφθονες εφαρμογές σχετιζόμενες με το σχήμα της Γης, όπως είναι η ναυσιπλοΐα (υπολογισμοί πορείας), η αστρονομία (μελέτη κίνησης ουρανίων σωμάτων) και η χαρτογραφία (λόγω της καμπυλότητας της σφαίρας η επιφάνεια της δεν είναι δυνατό να αναπτυχθεί στο επίπεδο, άρα οι χάρτες δε μπορεί να είναι ακριβείς).

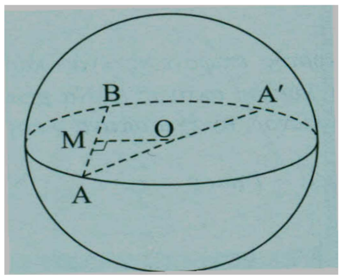
Ορισμός σφαίρας. Η σφαίρα, παρόλο που από την εποπτεία είναι γνωστό στερεό σώμα, μπορεί να ορισθεί γεωμετρικά ως στερεό εκ περιστροφής αλλά και ως γεωμετρικός τόπος. Σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό, σφαίρα ονομάζεται το στερεό σώμα του οποίου η επιφάνεια διαγράφεται από ημικύκλιο που περιστρέφεται πλήρως περί τη διάμετρο του (σχήμα 1). Η επιφάνεια που διαγράφει το ημικύκλιο ονομάζεται **σφαιρική επιφάνεια** ή επιφάνεια της σφαίρας. Το μέσον Ο του ημικυκλίου ονομάζεται **κέντρο** της σφαίρας. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το κέντρο της σφαίρας με οποιοδήποτε σημείο της σφαιρικής της επιφάνειας ονομάζεται **ακτίνα** της σφαίρας.

Σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό, σφαίρα ονομάζεται το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν σταθερή απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο (σχήμα 2). Το σημείο Ο ονομάζεται κέντρο της σφαίρας και το ευθύγραμμο τμήμα $OA=\rho$ ακτίνα της σφαίρας. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα είναι δύο τυχαία σημεία μίας σφαιρικής επιφάνειας, ονομάζεται **χορδή** της αντίστοιχης σφαίρας.

Αν μία χορδή διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, τότε ονομάζεται **διάμετρος** της σφαίρας. Στο σχήμα 2 το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι χορδή της σφαίρας, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα AA' διάμετρος της σφαίρας. Κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας είναι άκρο μίας μοναδικής διαμέτρου της σφαίρας. Όλες οι διάμετροι της σφαίρας έχουν μήκος ίσο με το διπλάσιο της ακτίνας της. Στο σχήμα 1 για τη διάμετρο AA' ισχύει ότι $AA'=2\rho$. Κάθε ευθεία διερχόμενη από το κέντρο Ο της σφαίρας (σχήμα 2) τέμνει τη σφαίρα σε δύο σημεία A, A' τα οποία ονομάζονται **αντιδιαμετρικά**.



Σχήμα 1 . Η σφαίρα ως στερεό εκ περιστροφής.



Σχήμα 2. ΑΒ: Χορδή, ΑΑ΄ διάμετρος.

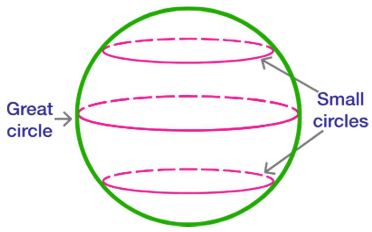
Προτάσεις. Οι παρακάτω προτάσεις είναι άμεση απόρροια των ορισμών της σφαίρας.

- Κάθε σφαίρα έχει ένα μόνο κέντρο O.
- Κάθε χορδή σφαίρας είναι μικρότερη από τη διάμετρο.
- Τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία του χώρου ορίζουν πάντα μία και μοναδική σφαιρική επιφάνεια.

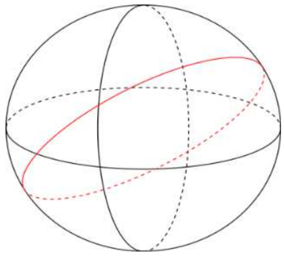
• Αν AB είναι χορδή σφαίρας και M το μέσον της χορδής, τότε το ευθύγραμμο τμήμα OM είναι κάθετο στη χορδή (σχήμα 2).

Παρατήρηση. Επειδή μία ευθεία δε μπορεί να έχει περισσότερα από δύο κοινά σημεία με έναν κύκλο και επειδή όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας ισαπέχουν από το κέντρο της, έπεται ότι σε μία σφαιρική επιφάνεια δεν υπάρχουν τρία ή περισσότερα συνευθειακά σημεία.

Μέγιστος κύκλος. Κάθε κύκλος της σφαιρικής επιφάνειας ο οποίος έχει ως κέντρο του το κέντρο της σφαίρας (σχήμα 3), έχει μεγαλύτερη διάμετρο (άρα και ακτίνα) από κάθε άλλον κύκλο της ίδιας σφαιρικής επιφάνειας ο οποίος έχει ως διάμετρο μία χορδή της σφαίρας. Μέγιστοι κύκλοι ονομάζονται οι κύκλοι με την παραπάνω ιδιότητα. Δύο μέγιστοι κύκλοι είναι πάντα ίσοι και τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία (σχήμα 4). Από δύο αντιδιαμετρικά σημεία της σφαιρικής επιφάνειας διέρχεται μοναδικός μέγιστος κύκλος.



Σχήμα 3. Μέγιστος κύκλος σφαίρας.



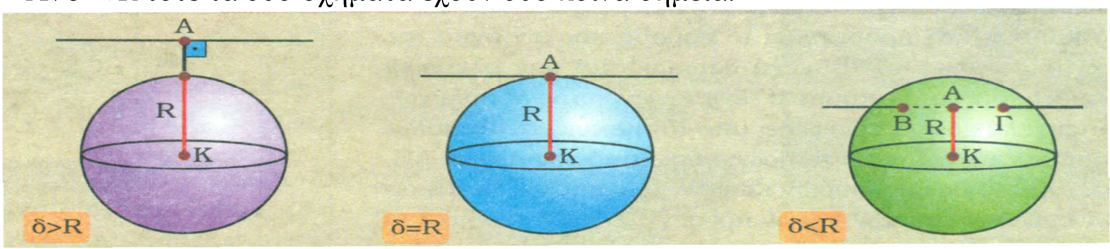
Σχήμα 4. Τομές μεγίστων κύκλων.

Σχετικές θέσεις ευθείας και σφαίρας. Οι σχετικές θέσεις ευθείας και σφαίρας ανάγονται στις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (σχήμα 5). Αν δ είναι η απόσταση της ευθείας από το κέντρο K της σφαίρας (K, R) τότε υπάρχουν οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις.

• Αν $\delta > R$ τότε τα δύο σχήματα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

• Αν $\delta = R$ τότε τα δύο σχήματα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι η ευθεία με τη σφαίρα εφάπτονται στο κοινό τους σημείο.

• Αν $\delta < R$ τότε τα δύο σχήματα έχουν δύο κοινά σημεία.

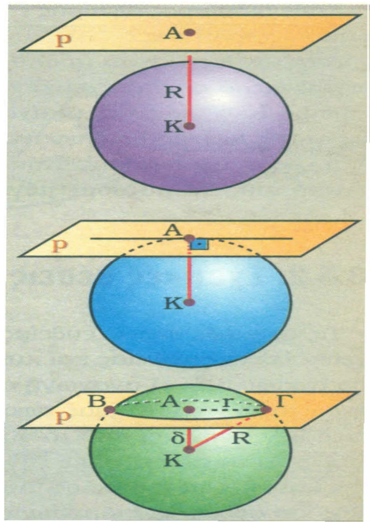


Σχήμα 5. Σχετικές θέσεις ευθείας και σφαίρας.

Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας. Οι σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας (σχήμα 6) καθορίζονται από την ελάχιστη απόσταση δ του επιπέδου p από το κέντρο K της σφαίρας (K, R). Υπάρχουν οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις.

• Αν $\delta > R$ τότε τα δύο σχήματα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

• Αν $\delta = R$ τότε τα δύο σχήματα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι το επίπεδο p με τη σφαίρα (K, R) εφάπτονται στο κοινό τους σημείο A το οποίο ονομάζεται **σημείο επαφής**.

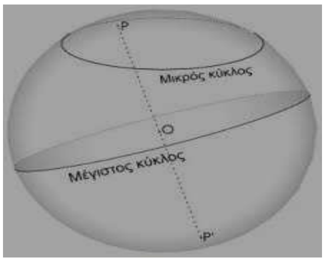


• Αν $\delta < R$ τότε η τομή του επιπέδου p και της σφαίρας (K, R) είναι κύκλος ακτίνας $r = \sqrt{R^2 - \delta^2}$.

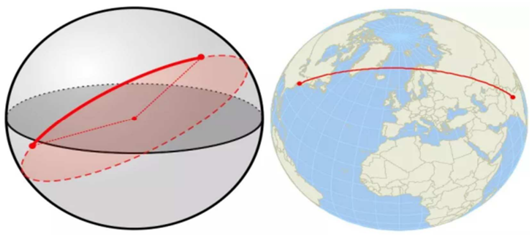
Ειδική περίπτωση. Αν $\delta = 0$, δηλαδή το επίπεδο p περιέχει το κέντρο της σφαίρας (K, R) τότε η τομή της σφαίρας με το επίπεδο είναι μέγιστος κύκλος διότι $r = R$.

Σχήμα 6. Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας.

Αν ένα επίπεδο τέμνει μία σφαίρα, η τομή τους πάντα είναι ένας κύκλος. Αν το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας ο κύκλος ονομάζεται μέγιστος, ενώ σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται ελάχιστος κύκλος. Ένας μέγιστος κύκλος είναι και ο **Ισημερινός** (Equator). Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία μίας σφαίρας (σχήμα 7) διέρχονται άπειροι μικροί κύκλοι, αλλά μόνο ένας μέγιστος (σχήμα 9), που ορίζει και τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ των σημείων αυτών. **Απόσταση** δύο σημείων μίας σφαίρας ονομάζεται το μικρότερο από τα δυο τόξα του μεγίστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία αυτά (σχήμα 8).



Σχήμα 7. Μέγιστος κύκλος & μικρός κύκλος σφαίρας.



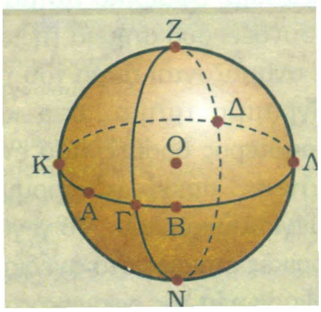
Σχήμα 8. Απόσταση 2 σημείων σφαίρας.

Όλοι οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας είναι ίσοι μεταξύ τους.
Οι μέγιστοι κύκλοι διχοτομούν ο ένας τον άλλο.
Κάθε μέγιστος κύκλος χωρίζει τη σφαίρα σε δύο ίσα μέση που ονομάζονται **ημισφαίρια**.
Η τομή δύο μεγίστων κύκλων είναι πάντα η κοινή τους διάμετρος.
Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων μίας σφαίρας είναι το τόξο του μεγίστου κύκλου το οποίο ορίζεται από αυτά τα σημεία (σχήμα 8). Το γεγονός αυτό εκμεταλλεύονται οι αεροπορικές και ναυτιλιακές εταιρείες κατά το σχεδιασμό των δρομολογίων.
Από δύο αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι (σχήμα 9). Πχ. Από τους πόλους της Γης διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι που είναι όλοι οι μεσημβρινοί της γήινης σφαίρας.

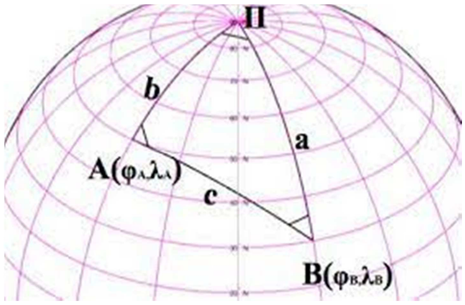
Πίνακας 1. Ιδιότητες των μέγιστων κύκλων της σφαίρας.

Στον ευκλείδειο χώρο των δύο διαστάσεων, η συντομότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία γραμμή, ενώ μεταξύ δύο σημείων μίας σφαιρικής επιφάνειας είναι το τόξο το οποίο ορίζεται επί του μέγιστου κύκλου του διερχόμενου από αυτά τα δύο σημεία. Για το λόγο αυτό τα πλοία και τα αεροπλάνα ταξιδεύουν επί μεγίστων κύκλων. Συνεπώς δεν είναι αφύσικο να αναμένουμε να έχουν οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας ιδιότητες ανάλογες με αυτές που έχουν οι ευθείες γραμμές στην επιπεδομετρία. Δύο μέγιστοι κύκλοι σφαίρας **τέμνονται κάθετα**, όταν τα επίπεδα στα οποία ανήκουν (και διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας) είναι κάθετα μεταξύ τους. Πχ. στη γήινη σφαίρα οι μεσημβρινοί τέμνουν κάθετα τον Ισημερινό.

Σφαιρικό τμήμα ονομάζεται εκείνο το τμήμα του μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο σημεία της σφαιρικής επιφάνειας (σχήμα 10). Τα σημεία αυτά ονομάζονται **άκρα** του σφαιρικού τμήματος.



Σχήμα 9. Μόνο ένας μέγιστος κύκλος διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.



Σχήμα 10. Τα σφαιρικά τμήματα ΑΠ & ΒΠ.

Αξίωμα ευκλείδειας γεωμετρίας.	Αντίστοιχο αξίωμα στη σφαίρα.
Από δύο σημεία του επιπέδου διέρχεται μία μοναδική ευθεία.	Από δύο σημεία της σφαίρας διέρχεται τουλάχιστον ένας κύκλος.
Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλη προς την ευθεία.	Δύο μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας τέμνονται πάντα.

Πίνακας 2. Προσαρμογή αξιωμάτων ευκλείδειας γεωμετρίας στη σφαίρα.

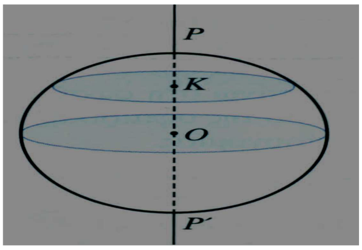
Δύο μικροί κύκλοι ονομάζονται παράλληλοι όταν τα επίπεδα τους είναι παράλληλα (σχήμα 11).
Δύο μικροί κύκλοι είναι ίσοι όταν ισαπέχουν από το κέντρο της σφαίρας.
Όταν δύο μικροί κύκλοι δεν ισαπέχουν από το κέντρο της σφαίρας, τότε μικρότερος είναι αυτός που απέχει περισσότερο από το κέντρο της σφαίρας.
Τρία σημεία της σφαιρικής επιφάνειας ορίζουν πάντα ένα μικρό κύκλο.
Η ευθεία που ενώνει το κέντρο της σφαίρας με το κέντρο ενός μικρού κύκλου είναι κάθετη στο επίπεδο του μικρού κύκλου (σχήμα 12).

Πίνακας 3. Ιδιότητες των μικρών κύκλων της σφαίρας.

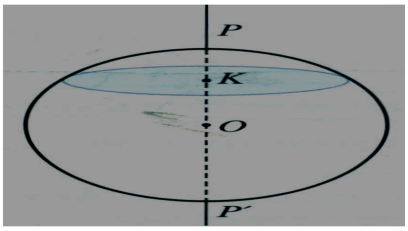
Άξονας του κύκλου ονομάζεται η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στο επίπεδο του (σχήμα 13). Τα σημεία που ο άξονας τέμνει τη σφαίρα ονομάζονται **πόλοι** του κύκλου. **Σφαιρική ακτίνα** ενός κύκλου ονομάζεται το τόξο που συνδέει ένα σημείο του κύκλου με τον κοντινότερο πόλο. Η σφαιρική ακτίνα κάθε μεγίστου κύκλου είναι 90^0.

Όλα τα σημεία ενός τυχαίου κύκλου ισαπέχουν από τους πόλους του (σχήμα 14).
Τα τόξα των μεγίστων κύκλων που ξεκινούν από τους πόλους του κύκλου και καταλήγουν στα σημεία του, είναι ίσα (σχήμα 15).

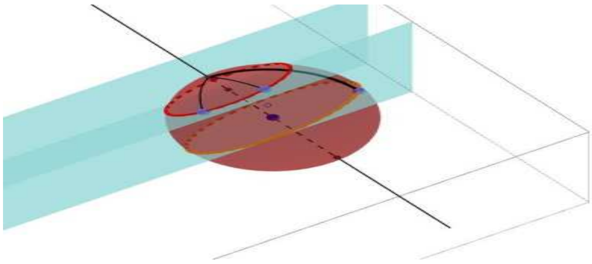
Πίνακας 4. Ιδιότητες των πόλων του κύκλου.



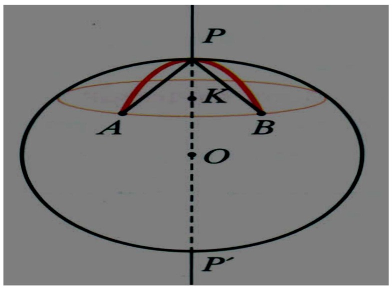
Σχήμα 11. Παράλληλοι κύκλοι



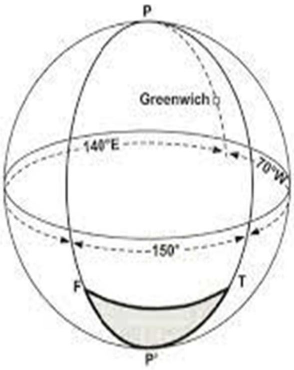
Σχήμα 12. PP΄ κάθετο στο επίπεδο του μικρού κύκλου.



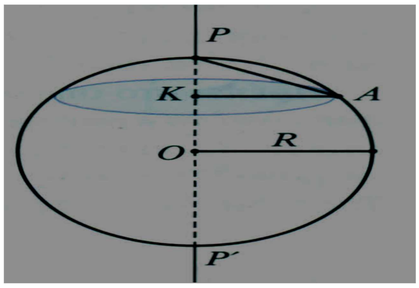
Σχήμα 13. Άξονας κύκλου.



Σχήμα 14. Είναι PA=PB.



Σχήμα 15. Ίσα τόξα $P'F = P'T$.



Σχήμα 16. PA= πολική απόσταση.

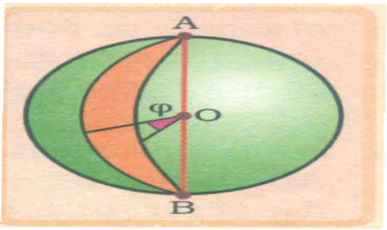
Η απόσταση κάθε σημείου του κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου, είναι σταθερή και ονομάζεται πολική απόσταση (σχήμα 16).

Μέτρηση σφαίρας. Για πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη υπολογίστηκαν ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας καθώς και οι όγκοι και τα εμβαδά των κυρτών επιφανειών κυλίνδρου, κώνου και κόλουρου κώνου. Αποδεικνύεται ότι ο όγκος σφαίρας ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ και το εμβαδόν της σφαιρικής της επιφάνειας δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E} = 4\pi R^2$ δηλαδή ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μέγιστων κύκλων.

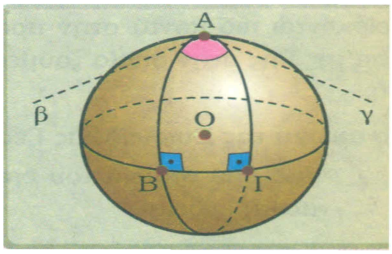
Σφαιρική άτρακτος & σφαιρικός όνυχας. Έστω σφαίρα (O, ρ) και φ το μέτρο μίας δίεδρης γωνίας που έχει ως ακμή τη διάμετρο AB (σχήμα 17). **Σφαιρική άτρακτος** ονομάζεται εκείνο το τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των εδρών της δίεδρης γωνίας. Η γωνία μεταξύ των ημιπεριφερειών ονομάζεται **γωνία του ατράκτου**. **Σφαιρικός όνυχας** ονομάζεται το στερεό που περικλείεται από τις έδρες της δίεδρης γωνίας και τη σφαιρική άτρακτο. **Βάση του στερεού όνυχα** ονομάζεται ο άτρακτος που περιέχεται μεταξύ των ημικυκλίων. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

• Δύο άτρακτοι με ίσες γωνίες, στην ίδια σφαίρα ή σε σφαίρες ίδιας ακτίνας, είναι ίσοι.

- Ο λόγος των εμβαδών δύο ατράκτων, στην ίδια σφαίρα ή σε σφαίρες ίδιας ακτίνας, ισούται με το λόγο των γωνιών τους.
- Το εμβαδόν ενός ατράκτου ισούται με το διπλάσιο της γωνίας του.



Σχήμα 17. Σφαιρική άτρακτος & σφαιρικός όνυχας.

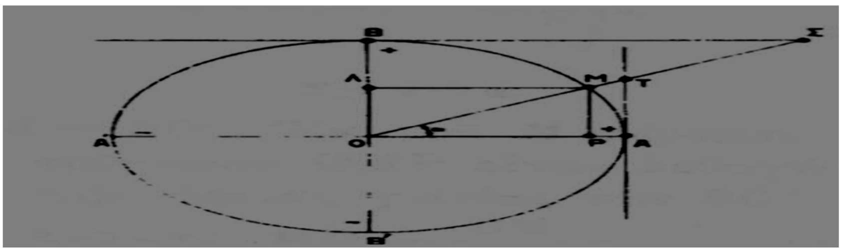


Σχήμα 18. Σφαιρική γωνία A.

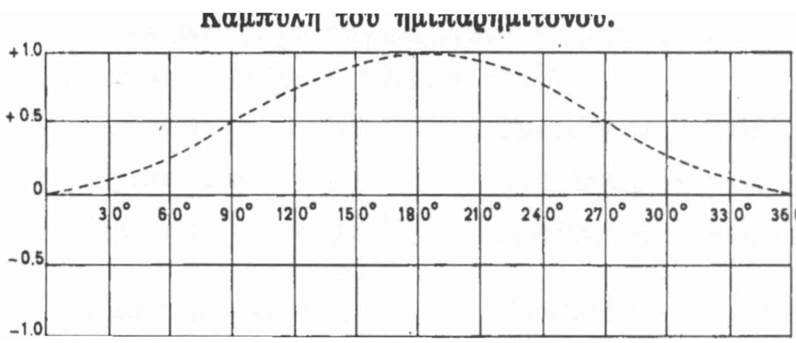
Σφαιρική γωνία ονομάζεται το τμήμα της σφαίρας το ευρισκόμενο μεταξύ δύο τεμνόμενων τόξων μέγιστων κύκλων (σχήμα 18). Τα τόξα αυτά ονομάζονται **πλευρές** της γωνίας και το σημείο τομής τους ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας. Τα τόξα αυτά τέμνονται και σε ένα άλλο σημείο της σφαίρας, αντιδιαμετρικό της κορυφής. Κάθε σφαιρική γωνία κορυφής A έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της γωνίας $\beta\mathrm{A}\gamma$ όπου $\mathrm{A}\beta$, $\mathrm{A}\gamma$ είναι οι εφαπτόμενες της σφαίρας στο σημείο A. Αφού ως μέτρο της σφαιρικής γωνίας $\measuredangle \mathrm{BA\Gamma}$ ορίσαμε το μέτρο της ευθύγραμμης γωνίας $\measuredangle \beta\mathrm{A}\gamma$, ισχύει ότι $\measuredangle \mathrm{A} = \measuredangle \beta\mathrm{A}\gamma = \measuredangle \mathrm{BA\Gamma}$. Δηλαδή το μέτρο μίας σφαιρικής γωνίας είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι ημιευθείες που είναι εφαπτόμενες στις πλευρές της γωνίας, στην κορυφή της.

Παρημίτονο (versine) & ημιπαριμήτονο (haversine). Η παράσταση $1-\sigma\upsilon\nu\omega$ ονομάζεται παρημίτονο της γωνίας ω. Στο σχήμα 19 γεωμετρικά η παράσταση του παρημιτόνου είναι (PA). Η παράσταση $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}$ ονομάζεται ημιπαρημίτονο της γωνίας ω. Δηλαδή $\eta\mu\pi\rho\omega = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}$. Από τον ορισμό του προκύπτει ότι το ημιπαρημίτονο είναι πάντα θετικό (σχήμα 20). Στο ίδιο σχήμα για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω ισχύουν: $\sigma\upsilon\nu\omega = \mathrm{OP}$, $\eta\mu\omega = \mathrm{O\Lambda}$, $\varepsilon\varphi\omega = \mathrm{AT}$, $\sigma\varphi\omega = \mathrm{B\Sigma}$, $\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \mathrm{OT}$, $\sigma\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{1}{\eta\mu\omega} = \mathrm{O\Sigma}$.

Σχήμα 19. ημπρ ω=ΡΑ.



Σχήμα 20. Καμπύλη του ημιπαρημιτόνου.



Πίνακας 5. Τριγωνομετρικοί όροι & συντμήσεις τους.

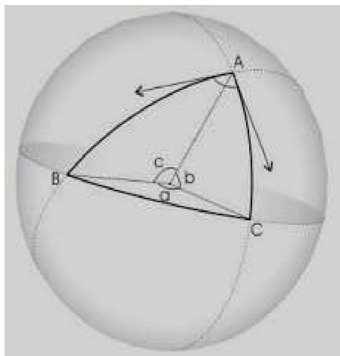
Ελληνικοί όροι.	Αγγλικοί όροι	Συντμήσεις
Ημίτονο	Sine	sin
Συνημίτονο	Cosine	cos
Εφαπτομένη	Tangent	tan
Συνεφαπτομένη	Cotangent	cot
Τέμνουσα	Secant	sec
Συντέμνουσα	Cosecant	cosec
Παρημίτονο	Versine	ver
Ημιπαριμήτονο	Haversine	hav

Πίνακας 6. Τιμές ημιπαρημιτόνου, τέμνουσας & συντέμνουσας.

Τιμές γωνίας	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Τιμές ημιπαρημιτόνου	0	0,5	1	0,5	0
Τιμές τέμνουσας	1	∞	-1	∞	1

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το τμήμα της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των τριών, τεμνομένων ανά δύο, τόξων μεγίστων κύκλων, υπό τον όρο ότι τα τόξα είναι μικρότερα από ημικύκλια. Στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 21, τα σημεία τομής A, B, C των μεγίστων κύκλων ονομάζονται **κορυφές** και τα τόξα AB, BC, CA ονομάζονται **πλευρές** του σφαιρικού τριγώνου.

Οι γωνίες που σχηματίζουν οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ανά δύο, ονομάζονται **γωνίες** του σφαιρικού τριγώνου, μετρώνται σε μοίρες και συμβολίζονται με τα γράμματα των κορυφών A, B, C. Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου συμβολίζονται με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών δηλαδή $AB = c, BC = a, CA = b$. Στη σφαιρική γεωμετρία, η σφαίρα δεν επηρεάζεται από την ακτίνα της, διότι όλα τα μετρούμενα μεγέθη (μήκη πλευρών και γωνίες κορυφών) μετρώνται με τόξα μεγίστων κύκλων και όχι με μήκη.



Σχήμα 21. Σφαιρικό τρίγωνο ABC.

Ιδιότητες κάθε σφαιρικού τριγώνου ABC.
Για τις πλευρές του είναι $0 < a < 180^0$, $0 < b < 180^0$, $0 < c < 180^0$.
Για το άθροισμα των πλευρών του είναι $a + b + c < 360^0$.
Κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.
Κάθε γωνία του τριγώνου είναι μικρότερη των 180^0.
Για το άθροισμα των γωνιών του είναι $180^0 < A + B + C < 540^0$.
Κάθε γωνία του τριγώνου αν αυξηθεί κατά 180^0 γίνεται μεγαλύτερη από το άθροισμα των άλλων δύο. Δηλαδή κυκλικά είναι $A + 180^0 > B + C$, $B + 180^0 > A + C$, $C + 180^0 > A + B$.
Απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του και αντίστροφα, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του.
Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοιότροπα άνισα γωνίες.
Αν είναι ισόπλευρο το τρίγωνο τότε είναι και ισογώνιο.
Αν είναι ισοσκελές το τρίγωνο τότε έχει ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι των

ίσων πλευρών του. Επίσης, η διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
Τα κάθετα τόξα μεγίστων κύκλων στα μέσα των πλευρών του τριγώνου (μεσοκάθετοι), διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
Τα τόξα μεγίστων κύκλων που διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου (διχοτόμοι) διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.
Τα τόξα μεγίστων κύκλων που διέρχονται από τις κορυφές του και είναι κάθετα στις απέναντι πλευρές (ύψη) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
Ισχύει το θεώρημα ημιτόνου $\frac{\eta\mu a}{\eta\mu A}=\frac{\eta\mu b}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu c}{\eta\mu C}$.
Ισχύει το θεώρημα συνημιτόνου (κυκλικά) $\sigma\upsilon\nu a=\sigma\upsilon\nu b\cdot\sigma\upsilon\nu c+\eta\mu b\cdot\eta\mu c\cdot\sigma\upsilon\nu A$, $\sigma\upsilon\nu b=\sigma\upsilon\nu c\cdot\sigma\upsilon\nu a+\eta\mu c\cdot\eta\mu a\cdot\sigma\upsilon\nu B$, $\sigma\upsilon\nu c=\sigma\upsilon\nu a\cdot\sigma\upsilon\nu b+\eta\mu a\cdot\eta\mu b\cdot\sigma\upsilon\nu C$.
Αν $\frac{a+b}{2}>90^0$ τότε $\frac{A+B}{2}>90^0$. Αν $\frac{a+b}{2}<90^0$ τότε $\frac{A+B}{2}<90^0$.

Πίνακας 7. Ιδιότητες κάθε σφαιρικού τριγώνου ABC.

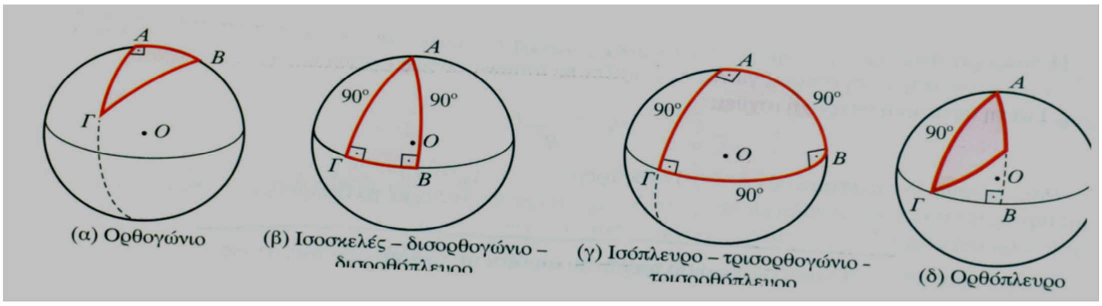
Είδη σφαιρικών τριγώνων. Το κάθε σφαιρικό τρίγωνο ανάλογα με τις γωνίες του χαρακτηρίζεται (σχήματα 22, 23) ως:

- (μονο)**ορθογώνιο**, όταν μία σφαιρική γωνία του είναι ορθή $\left(90^0\right)$.
- **δισορθογώνιο**, όταν δύο σφαιρικές γωνίες του είναι ορθές.
- **τρισορθογώνιο**, όταν και οι τρεις σφαιρικές γωνίες του είναι ορθές.

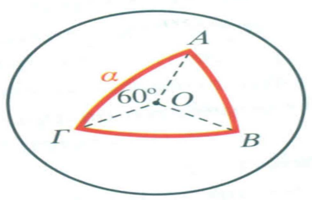
Το κάθε σφαιρικό τρίγωνο ανάλογα με τις πλευρές του (σχήμα 24) χαρακτηρίζεται ως:

- (μονο)**ορθόπλευρο**, όταν μία πλευρά του είναι ορθή.
- **δισορθόπλευρο**, όταν δύο πλευρές του είναι ορθές.
- **τρισορθόπλευρο**, όταν και οι τρεις πλευρές του είναι ορθές.
- **ισοσκελές**, όταν δύο πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.
- **ισόπλευρο**, όταν οι τρεις πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.
- **σκαληνό**, όταν οι τρεις πλευρές του είναι άνισες μεταξύ τους

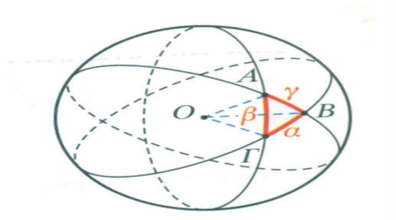
Τυχαίο (ή **πλάγιο** ή **κοινό**) ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο που δεν έχει αναγκαστικά μία πλευρά του ή μία γωνία του ίση με 90^0. Ως μονάδα μέτρησης των γωνιών και των πλευρών (σχήμα 25) θεωρούμε την ορθή γωνία. Ως μονάδα μέτρησης των εμβαδών θεωρούμε το εμβαδόν του τρισορθογώνιου τριγώνου, δηλαδή το 1/8 της σφαίρας. Κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου ίση με a rad έχει μήκος $a\cdot R$.



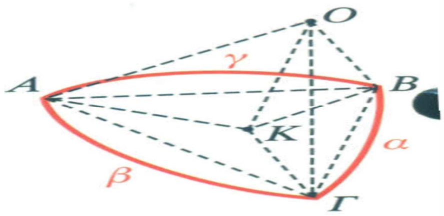
Σχήμα 22. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις σφαιρικών τριγώνων.



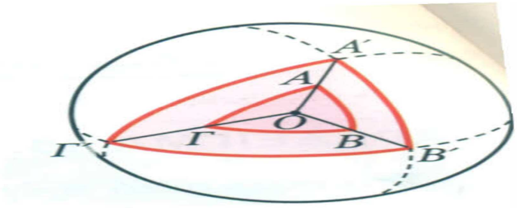
Σχήμα 23. A, B, Γ οι γωνίες του τριγώνου.



Σχήμα 24. α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου.



Σχήμα 25. $\alpha + \beta + \gamma < 360^0$.



Σχήμα 26. Πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$.

Πολικό σφαιρικό τρίγωνο. Το σφαιρικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ που έχει ως κορυφές τους πόλους των μεγίστων κύκλων των τόξων των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, ονομάζεται πολικό τρίγωνο του τριγώνου $AB\Gamma$ (σχήμα 26) όπου Α΄, Β΄, Γ΄ είναι ο πόλος του μεγίστου κύκλου ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ο ευρισκόμενος στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή Α, Β, Γ, αντίστοιχα. Επειδή σε κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου αντιστοιχούν δύο πόλοι, επιλέγεται την κάθε φορά ο πλησιέστερος στην κορυφή Α, Β, Γ οπότε προκύπτουν οι Α΄, Β΄, Γ΄.

Αν ένα σφαιρικό τρίγωνο είναι πολικό ενός άλλου, τότε και το δεύτερο είναι πολικό του πρώτου.
Στα πολικά τρίγωνα οι πλευρές του ενός είναι παραπληρώματα των γωνιών του άλλου. Δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις: $A + \alpha' = B + \beta' = \Gamma + \gamma' = 180^0 (= 2 \text{ ορθές})$ & $A' + \alpha = B' + \beta = \Gamma' + \gamma = 180^0 (= 2 \text{ ορθές})$
Οι τρίεδρες γωνίες που αντιστοιχούν σε δύο πολικά τρίγωνα είναι παραπληρωματικές.
Το πολικό τρίγωνο ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου είναι ένα (μονο)ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο και αντιστρόφως.
Ένα τρισορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο είναι πολικό του εαυτού του, δηλαδή συμπίπτει με το πολικό του.

Πίνακας 8. Ιδιότητες πολικών τριγώνων.

Σφαιρική υπεροχή. Βασική ιδιότητα ενός σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ότι πάντα το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο από π. Η διαφορά $2S = (A + B + \Gamma) - \pi$ ονομάζεται **σφαιρική υπεροχή** του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός) και ισούται με τη στερεά γωνία που ορίζει το τρίγωνο, όπως φαίνεται από το κέντρο της σφαίρας. Επίσης ισχύει ότι $2S = \dfrac{(AB\Gamma)}{R^2}$ όπου $(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ και R η ακτίνα της σφαίρας.

Για τη σφαιρική υπεροχή ενός τρισορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $2S = (Α + Β + Γ) - \pi = (90^0 + 90^0 + 90^0) - \pi = 90^0$. Το εμβαδόν $(ΑΒΓ)$ του ανωτέρω τριγώνου ισούται με το 1/8 του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας.

Πόρισμα 1. Αν ως μονάδα μέτρησης των εμβαδών ληφθεί το εμβαδόν του τρισορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου τότε η σφαιρική υπεροχή κάθε σφαιρικού τριγώνου ισούται με το εμβαδόν του.

Πόρισμα 2. Το εμβαδόν $(ΑΒΓ)$ ενός σφαιρικού τριγώνου, σε τετραγωνικά μέτρα, ισούται με το γινόμενο της σφαιρικής του υπεροχής $2S$ επί το 1/8 του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας. Δηλαδή ισχύει ότι $(ΑΒΓ) = 2S\frac{Ε}{8} = 2S\frac{4\pi R^2}{8} = 2S\frac{\pi R^2}{2}$ με τις γωνίες $Α, Β, Γ$ να μετρώνται σε μοίρες.

Κάθε μία από τις γωνίες σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το S.
Σε τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με ημιπερίμετρο 2τ, σφαιρική υπεροχή $2S$ και $Ε$ το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ισχύει ο τύπος $\sigma\varphi\frac{\tau}{2} = \sqrt{\sigma\varphi\frac{S}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{Α-Ε}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{Β-Ε}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{Γ-Ε}{2}}$ και διά πολώσεως ο τύπος $\varepsilon\varphi\frac{S}{2} = \sqrt{\varepsilon\varphi\frac{\tau}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\tau-\alpha}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\tau-\beta}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\tau-\gamma}{2}}$.

Πίνακας 9. Ιδιότητες της σφαιρικής υπεροχής.

Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων τυχαίων σφαιρικών τριγώνων.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

Τύποι συνημιτόνων ή θεμελιώδεις σχέσεις πρώτου είδους.
$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu Α$ $\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu Β$ $\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu Γ$
Τύποι ημιτόνων ή θεμελιώδεις σχέσεις δευτέρου είδους.
$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu Α} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu Β} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu Γ}$
Πολικοί τύποι των θεμελιωδών.
$\sigma\upsilon\nu Α = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu Β\cdot\eta\mu Γ - \sigma\upsilon\nu Β\cdot\sigma\upsilon\nu Γ$ $\sigma\upsilon\nu Β = \sigma\upsilon\nu\beta\cdot\eta\mu Γ\cdot\eta\mu Α - \sigma\upsilon\nu Γ\cdot\sigma\upsilon\nu Α$ $\sigma\upsilon\nu Γ = \sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\eta\mu Α\cdot\eta\mu Β - \sigma\upsilon\nu Α\cdot\sigma\upsilon\nu Β$
Τύποι των μισών γωνιών.
$\varepsilon\varphi\frac{Α}{2} = \frac{Κ}{\eta\mu(\tau-\alpha)}$, $\varepsilon\varphi\frac{Β}{2} = \frac{Κ}{\eta\mu(\tau-\beta)}$, $\varepsilon\varphi\frac{Γ}{2} = \frac{Κ}{\eta\mu(\tau-\gamma)}$ όπου $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ και $Κ = \sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau}}$.
Τύποι των μισών πλευρών.
$\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{Κ}{\sigma\upsilon\nu(Τ-Α)}$, $\sigma\varphi\frac{\beta}{2} = \frac{Κ}{\sigma\upsilon\nu(Τ-Β)}$, $\sigma\varphi\frac{\gamma}{2} = \frac{Κ}{\sigma\upsilon\nu(Τ-Γ)}$ όπου

$\mathrm{T}=\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{2}$, $\mathrm{K}=\sqrt{\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{T}-\mathrm{A})\cdot\sigma\upsilon\nu(\mathrm{T}-\mathrm{B})\cdot\sigma\upsilon\nu(\mathrm{T}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(180^0-\mathrm{T})}}$
Αναλογικοί τύποι του Gauss (ή Dalambre).
$\dfrac{\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}}$, $\dfrac{\eta\mu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu\frac{\gamma}{2}}$, $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}}$, $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}}{\eta\mu\frac{\gamma}{2}}$
Αναλογικοί τύποι του Napier (κυκλική εναλλαγή).
$\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{\alpha-\beta}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\eta\mu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}$, $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}{\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}$
Τύποι των τεσσάρων συνεχόμενων στοιχείων.
$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{B}=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi\mathrm{A}+\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}$, $\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi\mathrm{A}+\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma$ $\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma$, $\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{A}=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\mathrm{A}$ $\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{A}=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\mathrm{A}$, $\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{B}=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}$
Τύποι για τα ημιπαρημίτονα των γωνιών (κυκλική εναλλαγή).
$\eta\mu\pi\rho\mathrm{A}=\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$ $\eta\mu\pi\rho\mathrm{B}=\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha$ $\eta\mu\pi\rho\Gamma=\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta$
Τύποι για τα ημιπαρημίτονα των πλευρών (κυκλική εναλλαγή).
$\eta\mu\pi\rho\alpha=\eta\mu\pi\rho(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\pi\rho\mathrm{A}$ $\eta\mu\pi\rho\beta=\eta\mu\pi\rho(\gamma-\alpha)+\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\pi\rho\mathrm{B}$ $\eta\mu\pi\rho\gamma=\eta\mu\pi\rho(\alpha-\beta)+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\pi\rho\Gamma$

Πίνακας 10. Τύποι για τυχαία σφαιρικά τρίγωνα.

Τυπολόγιο & μέθοδος εργασίας για επίλυση τυχαίων σφαιρικών τριγώνων.

Επίλυση σφαιρικού τριγώνου ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης όλων των στοιχείων του (πλευρές, γωνίες) όταν δίνονται τρία στοιχεία του. Προς τούτο γίνεται χρήση τριγωνομετρικών τύπων και πινάκων Norie's.

1^{η} περίπτωση. Όταν δίνονται οι τρεις πλευρές.
Α΄ τρόπος. Χρήση τύπων των μισών γωνιών $\varepsilon\varphi\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\dfrac{\mathrm{K}}{\eta\mu(\tau-\alpha)}$ όπου $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ και $\mathrm{K}=\sqrt{\dfrac{\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau}}$.

Β΄ τρόπος. Κυκλική χρήση των τύπων ημιπαρημίτονων των γωνιών $\eta\mu\pi\rho\mathrm{A} = \eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$.

2η περίπτωση. Όταν δίνονται οι τρεις γωνίες.

Α΄ τρόπος. Χρήση τύπων των μισών πλευρών $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{K}}{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{T}-\mathrm{A})}$ όπου $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{2}$ και $\mathrm{K} = \sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{T}-\mathrm{A})\cdot\sigma\upsilon\nu(\mathrm{T}-\mathrm{B})\cdot\sigma\upsilon\nu(\mathrm{T}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(180^0-\mathrm{T})}}$

Β΄ τρόπος. Εργαζόμαστε με το πολικό τρίγωνο.

3η περίπτωση. Δίνονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία.

Α΄ τρόπος. Χρήση των αναλογικών τύπων του John Napier.

$\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$ για τον υπολογισμό του αθροίσματος $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$,

$\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = \eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$ για τον υπολογισμό της διαφοράς $\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$,

$\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$ για τον υπολογισμό της πλευράς γ

Β΄ τρόπος. Χρήση των τύπων ημιπαρημιτόνων των πλευρών $\eta\mu\pi\rho\gamma = \eta\mu\pi\rho(\alpha-\beta)+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\pi\rho\Gamma$

Έλεγχος. Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις.

$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \eta\mu\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{A} = \eta\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{B} = \eta\mu\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma$

4η περίπτωση. Δίνονται μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες $(\alpha,\ \mathrm{B},\ \Gamma)$.

Α΄ τρόπος. Χρήση των αναλογικών τύπων του John Napier.

$\varepsilon\varphi\frac{\beta+\gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}\tau\varepsilon\mu\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ για τον υπολογισμό του αθροίσματος $\frac{\beta+\gamma}{2}$,

$\varepsilon\varphi\frac{\beta-\gamma}{2} = \eta\mu\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ για τον υπολογισμό της διαφοράς $\frac{\beta-\gamma}{2}$,

$\sigma\varphi\frac{\mathrm{A}}{2} = \eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\beta-\gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}$ για τον υπολογισμό της γωνίας A

Β΄ τρόπος. Εργαζόμαστε με το πολικό τρίγωνο. Με χρήση των τύπων $\mathrm{A}' = 180^0-\alpha$, $\beta' = 180^0-\mathrm{B}$, $\gamma' = 180^0-\Gamma$ επιλύουμε το πολικό τρίγωνο σύμφωνα με τον α΄ τρόπο της περίπτωσης 3.

5η περίπτωση. Δίνονται δύο πλευρές και η γωνία απέναντι από μία από αυτές $(\alpha,\ \beta,\ \mathrm{B})$.

Χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων σε συνδυασμό με τους αναλογικούς τύπους του Napier.

$\eta\mu\mathrm{A} = \frac{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\mathrm{B}}{\eta\mu\beta} \Rightarrow \eta\mu\mathrm{A} = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\mathrm{B}\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta$ για τον υπολογισμό της γωνίας A,

$\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha-\beta}{2}$ για τον υπολογισμό της γωνίας Γ,

$\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} = \eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha-\beta}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$ για τον υπολογισμό της πλευράς γ,

Υπολογισμοί αθροίσματος $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$ και διαφοράς $\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$.
6^{η} περίπτωση. Δίνονται δύο γωνίες και η πλευρά η απέναντι σε μία από αυτές $(\mathrm{A},\ \Gamma,\ \alpha)$.
Α΄ τρόπος. Χρήση του νόμου των ημιτόνων σε συνδυασμό με τους αναλογικούς τύπους του Napier. $\eta\mu\gamma=\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{A}\cdot\eta\mu\alpha$ για τον υπολογισμό της πλευράς γ, $\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\mathrm{A}-\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha-\gamma}{2}$ για τον υπολογισμό της πλευράς β, $\sigma\varphi\frac{\mathrm{B}}{2}=\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}-\Gamma}{2}$ για τον υπολογισμό της γωνίας B.
Β΄ τρόπος. Χρησιμοποιούμε τους τύπους $\alpha'=180^0-\mathrm{A}$, $\gamma'=180^0-\Gamma$, $\mathrm{A}'=180^0-\alpha$ και επιλύουμε το πολικό τρίγωνο $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ σύμφωνα με την περίπτωση 5.

Πίνακας 11. Μεθοδολογία επίλυσης τυχαίων σφαιρικών τριγώνων.

Τυπολόγιο & μέθοδος εργασίας για επίλυση ορθογωνίων & ορθόπλευρων σφαιρικών τριγώνων. Γίνεται χρήση των παρακάτω δύο θεωρημάτων των τεταρτημορίων και των δύο μνημονικών κανόνων του Napier.

1^o θεώρημα των τεταρτημορίων. Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο μία γωνία (πλην της ορθής) και η απέναντι πλευρά της ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο, δηλαδή είναι και οι δύο αμβλείες ή και οι δύο οξείες.

2^o θεώρημα των τεταρτημορίων. Αν η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο 1^o τεταρτημόριο (οξεία) τότε οι άλλες δύο πλευρές και οι δύο γωνίες (πλην της ορθής) ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο, δηλαδή είναι και οι δύο αμβλείες ή και οι δύο οξείες.

Δηλαδή $\mathrm{B\Gamma}<90^0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A\Gamma, AB, B, \Gamma}<90^0\\ \text{ή}\\ \mathrm{A\Gamma, AB, B, \Gamma}>90^0\end{cases}$

Αν η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο 2^o τεταρτημόριο (οξεία) τότε οι άλλες δύο πλευρές και οι δύο γωνίες (πλην της ορθής) ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια (η μία οξεία και η άλλη αμβλεία).

Δηλαδή $\mathrm{B\Gamma}>90^0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A\Gamma, B}<90^0\ \ \&\ \ \mathrm{AB, \Gamma}>90^0\\ \text{ή}\\ \mathrm{A\Gamma, B}>90^0\ \ \&\ \ \mathrm{AB, \Gamma}<90^0\end{cases}$

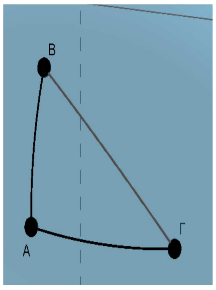
Τα δύο αυτά θεωρήματα μας βοηθούν στην επιλογή της σωστής γωνίας από τους πίνακες, όταν είναι γνωστός κάποιος τριγωνομετρικός της αριθμός.

Τύποι Napier. Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{A}=90^0$ ισχύουν

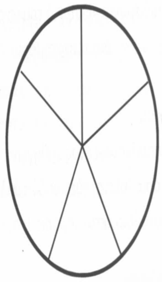
Πίνακας 12. Τύποι του Napier.

1	$\eta\mu\beta=\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\mathrm{B}$	**6**	$\eta\mu\beta=\varepsilon\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\Gamma$
2	$\eta\mu\gamma=\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\Gamma$	**7**	$\eta\mu\gamma=\varepsilon\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}$
3	$\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma$	**8**	$\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\varphi\mathrm{B}\cdot\sigma\varphi\Gamma$
4	$\sigma\upsilon\nu\Gamma=\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{B}$	**9**	$\sigma\upsilon\nu\Gamma=\varepsilon\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\alpha$
5	$\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\eta\mu\Gamma$	**10**	$\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=\varepsilon\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\alpha$

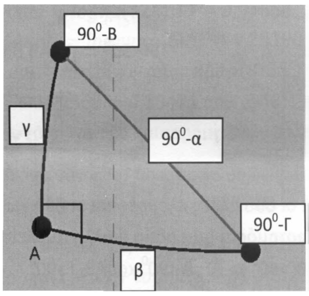
Μνημονικοί κανόνες Napier. Δημιουργήθηκαν προκειμένου να μπορούμε εύκολα να επιλέγουμε ποιον από τους δέκα προηγούμενους τύπους θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε. Αρχικά κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=90^0$ (σχήμα 27) και έναν κυκλικό δίσκο χωρισμένο σε πέντε τομείς (σχήμα 28). Ακολούθως, ονομάζουμε τα στοιχεία του σφαιρικού τριγώνου αλλάζοντας την πλευρά α σε $90^0-\alpha$ και τις γωνίες B,Γ σε 90^0-B και $90^0-\Gamma$ αντίστοιχα (σχήμα 29).



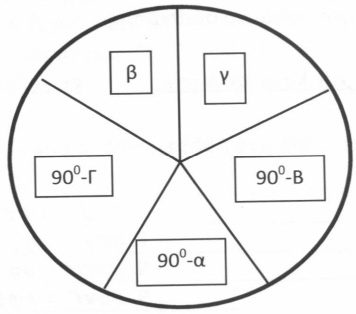
Σχήμα 27. $A=90^0$.



Σχήμα 28.



Σχήμα 29.



Σχήμα 30.

Ξεκινώντας από έναν κυκλικό τομέα (σχήμα 30) στον κύκλο μεταφέρουμε τα στοιχεία από το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ στον κυκλικό δίσκο, κυκλικά και αριστερόστροφα πλην της ορθής γωνίας A. Κάθε στοιχείο του κυκλικού δίσκου έχει δύο γειτονικά ή **προσκείμενα** στοιχεία (πχ. το $90^0-\alpha$ έχει προσκείμενα τα $90^0-\Gamma$ & 90^0-B). Κάθε στοιχείο στον κυκλικό δίσκο έχει δύο **απέναντι** στοιχεία (πχ. το $90^0-\alpha$ έχει απέναντι τα β,γ).

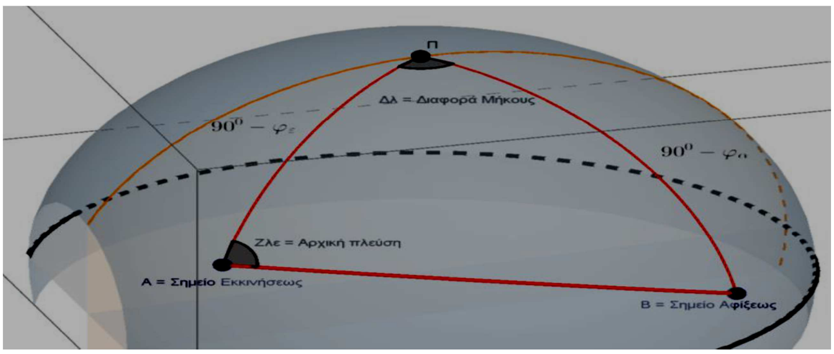
1^ος^ μνημονικός κανόνας. Το ημίτονο κάθε στοιχείου στον κυκλικό δίσκο ισούται με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκείμενων στοιχείων του. Ενδεικτικά $\eta\mu\left(90^0-B\right)=\varepsilon\varphi\left(90^0-\alpha\right)\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B=\sigma\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\gamma$ (τύπος 10, πίνακα 12)

2^ος^ μνημονικός κανόνας. Το ημίτονο κάθε στοιχείου στον κυκλικό δίσκο ισούται με το γινόμενο των συνημιτόνων των απέναντι στοιχείων του. Ενδεικτικά $\eta\mu\left(90^0-B\right)=\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\Gamma\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B=\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$ (τύπος 5, πίνακα 12).

Προς επίλυση ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου επιλέγουμε με τη βοήθεια του κυκλικού δίσκου τρεις από τους δέκα τύπους, έτσι ώστε να περιέχουν έναν άγνωστο και δύο γνωστά στοιχεία. Δε χρησιμοποιούμε ένα στοιχείο το οποίο υπολογίσαμε για τον υπολογισμό ενός άλλου. Για την επιλογή της σωστής γωνίας από τους πίνακες γίνεται χρήση των θεωρημάτων των τεταρτημορίων. Τέλος, για την επιλογή του τύπου επαλήθευσης διαλέγουμε έναν τύπο που συνδυάζει και τα τρία στοιχεία που βρήκαμε.

Τρίγωνο ορθοδρομίας (ή Γήινο τρίγωνο) ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο ΠAB (σχήμα 31) το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης με A να είναι το σημείο εκκίνησης, B να είναι το σημείο άφιξης και Π τον πόλο της Γης τον ευρισκόμενο στο ίδιο ημισφαίριο με το σημείο εκκίνησης A.

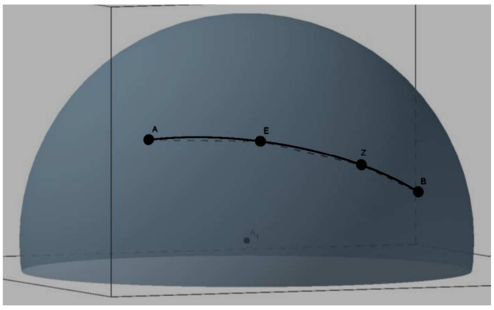
Σχήμα 31. Τρίγωνο ορθοδρομίας.



Για την πλευρά ΠΑ είναι $\Pi A = 90^0 - \varphi_\varepsilon$, όπου φ_ε το γεωγραφικό πλάτος του σημείου εκκίνησης A.
Για την πλευρά ΠΒ είναι $\Pi B = 90^0 - \varphi_\alpha$, αν τα A, B βρίσκονται στο ίδιο ημισφαίριο (ομώνυμα) και $\Pi B = 90^0 + \varphi_\alpha$ σε διαφορετική περίπτωση (ετερώνυμα), όπου φ_α το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης B.
Ορθοδρομική απόσταση ονομάζεται η πλευρά $AB = \gamma$.
Διαφορά μηκών των σημείων A, B ονομάζεται η γωνία $\Pi = \Delta_\lambda$.
Αρχική πλεύση ονομάζεται η γωνία $A = Z_{\lambda\varepsilon}$.
Τελική πλεύση ονομάζεται η γωνία B.

Πίνακας 13. Τα στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας.

Ορθοδρομικό τόξο ονομάζεται εκείνο το τόξο μεγίστου κύκλου που συνδέει δύο σημεία της επιφάνειας της Γης και είναι μικρότερο από 180^0 (σχήμα 32). Το μέτρο αυτού του τόξου είναι η ορθοδρομική απόσταση στο τρίγωνο ορθοδρομίας και αν υπολογιστεί σε πρώτα λεπτά της μοίρας, δίνει την απόσταση σε ναυτικά μίλια.



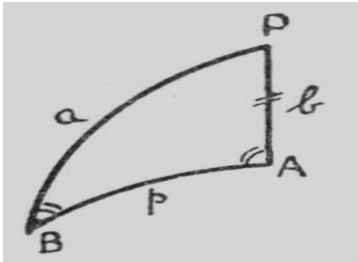
Σχήμα 32. Ορθοδρομικό τόξο.

Η πλεύση πλοίου πάνω στο ορθοδρομικό τόξο (Great circle sailing) συνεπάγεται τη συνεχή μεταβολή της πορείας του. Επειδή αυτό πρακτικά είναι αδύνατο, η πλεύση γίνεται πάνω σε μία τεθλασμένη γραμμή, οι κορυφές της οποίας είναι σημεία του ορθοδρομικού τόξου. Αυτός ο πλους ονομάζεται **ορθοδρομικός πλους** και οι κορυφές του **ενδιάμεσα σημεία**.

Υπολογισμός ορθοδρομικής απόστασης AB **& αρχικής πλεύσης** $Z_{\lambda\varepsilon}$. Για τον υπολογισμό της ορθοδρομικής απόστασης AB ανάμεσα στα σημεία $A(\varphi_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$, $B(\varphi_\alpha, \lambda_\alpha)$ της επιφάνειας της Γης και την αρχική πλεύση $Z_{\lambda\varepsilon}$, θα γίνει επίλυση του τριγώνου ΠΑΒ χρησιμοποιώντας τους τύπους ημιπαριμητόνων διότι είναι γνωστές οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία $(\Pi\Gamma\Pi)$.

Επίλυση ορθόπλευρων σφαιρικών τριγώνων. Ορθόπλευρο ονομάζεται εκείνο το σφαιρικό τρίγωνο που έχει μία του πλευρά μέτρου 90^0. Το πολικό τρίγωνο κάθε ορθόπλευρου τριγώνου είναι ορθογώνιο, διότι αν $\alpha = 90^0$ από τη σχέση $A' + \alpha = 180^0$ έπεται ότι $A' = 90^0$. Συνεπώς, για την επίλυση ενός ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου αρκεί να γίνει επίλυση του πολικού του με χρήση των γνωστών τύπων και στη συνέχεια να προσδιορισθούν τα άγνωστα στοιχεία του δοθέντος τριγώνου με εφαρμογή ελαφρά αλλαγμένων των τύπων του Napier. Το συνημίτονο ενός στοιχείου ισούται με το γινόμενο των συνεφαπτομένων των προσκείμενων στοιχείων ή με το γινόμενο των ημιτόνων των αντικειμενικών στοιχείων, αν αντί των στην ορθή πλευρά προσκείμενων γωνιών λάβουμε τα συμπληρώματα τους.

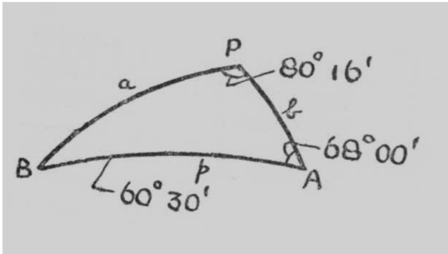
Θα γίνει τοποθέτηση των στοιχείων σε πέντε τομείς κύκλου, παραλείποντας την ορθή γωνία και ακολούθως θα εργασθούμε όπως στα ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα.



Εφαρμογή 1. Επίλυση σφαιρικού τριγώνου ABP αν $b = 26^o\ 21'$, $B = 52^o\ 22'$, $A = 104^o\ 44'$.

Λύση. Για τον υπολογισμό του a είναι $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin a = \sin b \cdot \sin A \cdot \cos ecB \Leftrightarrow$

$\log \sin a = \log \sin b + \log \sin A + \log \cos ecB = 9 \cdot 64724 + 9 \cdot 98548 + 10 \cdot 10131 = 9 \cdot 73403$ άρα, $a = 32^o\ 50'$.



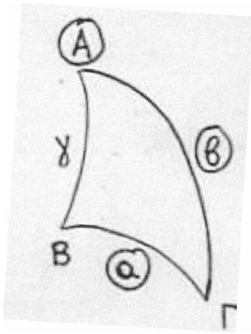
Εφαρμογή 2. Αν στο σφαιρικό τρίγωνο ABP αν P είναι πόλος, τα A,B βρίσκονται στο βόρειο ημισφαίριο και $\sphericalangle A = 68^0\ 00'$, $AB = 60^0\ 30'$, $\sphericalangle P = 80^0\ 16'$ βρείτε το γεωγραφικό πλάτος (latitude) της B.

Λύση.

$\frac{\sin \alpha}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin p}{\sin P} \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin p \cdot \sin \mathrm{A} \cdot \cos ecP \Leftrightarrow$

$\log \sin \alpha = \log \sin p + \log \sin \mathrm{A} + \log \cos ecP =$

$9{,}93970 + 9{,}96717 + 10{,}00630 = 9{,}91317$. Άρα, $a = 54^0\ 58'$, συνεπώς latitude $B = 35^0\ 02'N$ διότι αφού P είναι μεγαλύτερο από A πρέπει p μεγαλύτερο από a και εφόσον $p = 60^0\ 30'$ η μόνη δυνατή τιμή είναι $a = 54^0\ 58'$ και όχι $a = 125^0\ 02'$.



Εφαρμογή 3. Σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\sphericalangle \mathrm{A} = 30^0$, $\beta = 100^0$, $\alpha = 40^0$, υπολογίστε την γωνία $\sphericalangle \mathrm{B}$.

Λύση. Είναι

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} \Rightarrow \frac{\eta\mu 40^0}{\eta\mu 30^0} = \frac{\eta\mu 100^0}{\eta\mu\mathrm{B}} \Rightarrow \log\frac{\eta\mu 40^0}{\eta\mu 30^0} = \log\frac{\eta\mu 100^0}{\eta\mu\mathrm{B}} \Rightarrow$$

$\log \eta\mu 40^0 - \log \eta\mu 30^0 = \log \eta\mu 100^0 - \log \eta\mu\mathrm{B} \Rightarrow$

$\log \eta\mu\mathrm{B} = \log \eta\mu 100^0 + \log \eta\mu 30^0 - \log \eta\mu 40^0 = 9{,}99335 + 9{,}69887 - 9{,}80807 = 9{,}88425$

$\sphericalangle \mathrm{B} = 50^0$ ή $\sphericalangle \mathrm{B} = 130^0$ δεκτή. Απέναντι από γωνία μεγαλύτερη των 90^0 βρίσκεται πλευρά μεγαλύτερη από 90^0 και αντίστροφα.

Εφαρμογή 4. Βρείτε τις γωνίες σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ με $\alpha = 113^0\ 02'$, $\beta = 82^0\ 40'$, $\gamma = 74^0\ 54'$.

Λύση. Είναι, $2\tau = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow \tau = 135^0\ 18'$, $\tau - \beta = 52^0\ 38'$, $\tau - \gamma = 60^0\ 24'$

- Είναι $\eta\mu\pi\rho\mathrm{A} = \dfrac{\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma} = \dfrac{\eta\mu\left(52^0\ 38'\right)\cdot\eta\mu\left(60^0\ 24'\right)}{\eta\mu\left(82^0\ 40'\right)\cdot\eta\mu\left(74^0\ 54'\right)} \Rightarrow$

$$\log \eta\mu\pi\rho\mathrm{A} = \log\frac{\eta\mu\left(52^0\ 38'\right)\cdot\eta\mu\left(60^0\ 24'\right)}{\eta\mu\left(82^0\ 40'\right)\cdot\eta\mu\left(74^0\ 54'\right)} =$$

$$\log\left[\eta\mu\left(52^0\ 38'\right)\cdot\eta\mu\left(60^0\ 24'\right)\right] - \log\left[\eta\mu\left(82^0\ 40'\right)\cdot\eta\mu\left(74^0\ 54'\right)\right] =$$

$\log\eta\mu\left(52^0\ 38'\right) + \log\eta\mu\left(60^0\ 24'\right) - \log\eta\mu\left(82^0\ 40'\right) - \log\eta\mu\left(74^0\ 54'\right) =$

$9{,}90024 + 9{,}93927 - 9{,}99643 - 9{,}98474 = 19{,}83951 - 19{,}98117 =$

$29,83951(+10)-19,98117=9,85834$. Άρα, $\sphericalangle A=116^0\ 19'$

• Είναι $\eta\mu\pi\rho\Gamma=\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta \Rightarrow$

$\log\eta\mu\pi\rho\Gamma=\log\eta\mu(\tau-\alpha)+\log\eta\mu(\tau-\beta)+\log\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha+\log\sigma\tau\varepsilon\mu\beta=$

$\log\eta\mu(22^0 16')+\log\eta\mu(52^0\ 38')+\log\sigma\tau\varepsilon\mu(113^0\ 02')+\log\sigma\tau\varepsilon\mu(82^0\ 40')=$

$9,57855+9,90024+10,03608+10,00357=39,51844(-30)=9,51844$.

Άρα, $\sphericalangle\Gamma=70^0\ 07'$

• Είναι $\eta\mu\pi\rho\mathrm{B}=\dfrac{\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\alpha}=\dfrac{\eta\mu(60^0\ 24')\cdot\eta\mu(22^0\ 16')}{\eta\mu(74^0\ 54')\cdot\eta\mu(113^0\ 02')}\Rightarrow$

$\log\eta\mu\pi\rho\mathrm{B}=\log\left[\eta\mu(60^0\ 24')\cdot\eta\mu(22^0\ 16')\right]-\log\left[\eta\mu(74^0\ 54')\cdot\eta\mu(113^0\ 02')\right]=$

$\log\eta\mu(60^0\ 24')+\log\eta\mu(22^0\ 16')-\log(74^0\ 54')-\log(113^0\ 02')=$

$9,93927+9,57855-9,98474-9,96392=19,51782(+10)-19,94866=$

$29,51782-19,94866=9,56916$.

Επειδή το $9,56916$ δεν υπάρχει στους πίνακες των ημιπαρημιτόνων θα γίνει παρεμβολή από την οποία προκύπτει ότι $\sphericalangle B=75^0\ 0,1'625$.

Παρεμβολή.

Σε διάστημα πλάτους $d=16$ αντιστοιχεί τόξο $1'$.

Σε διάστημα πλάτους $d=10$ αντιστοιχεί τόξο $x=\dfrac{1\cdot 10}{16}\cong 0,62$.

←------ $d=16$ ------→	
$9,56906<9,56916<9,56922$	
↓ ← $d=10$ → ↓	
$75^0\ 01'$	$75^0\ 02'$

Εφαρμογή 5. Βρείτε την πλευρά β σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ αν $\sphericalangle\mathrm{B}=112^0\ 10'$, $\gamma=72^0\ 13'$ και $\alpha=35^0\ 03'$.

Λύση. Είναι $\eta\mu\pi\rho\beta=\eta\mu\pi\rho(\gamma-\alpha)+\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\pi\rho\mathrm{B}$.

Θέτω $\eta\mu\pi\rho\mathrm{K}=\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\pi\rho\mathrm{B}$. (1)

Άρα, $\eta\mu\pi\rho\beta=\eta\mu\pi\rho(\gamma-\alpha)+\eta\mu\pi\rho\mathrm{K}=\eta\mu\pi\rho(37^0\ 10')+\eta\mu\pi\rho\mathrm{K}$ (2)

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$\log\eta\mu\pi\rho\mathrm{K}=\log(\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\pi\rho\mathrm{B})=\log\eta\mu\gamma+\log\eta\mu\alpha+\log\eta\mu\pi\rho\mathrm{B}=$

$\log\eta\mu(72^0\ 13')+\log\eta\mu(35^0\ 03')+\log\eta\mu\pi\rho(112^0\ 10')=$

$9,9784+9,75913+9,83800=29,57587=9,57587(-20)$

Άρα, μετά από την παρεμβολή 1, προκύπτει ότι $\eta\mu\pi\rho\mathrm{K}=0,37659$.

Συνεπώς, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$\eta\mu\pi\rho\beta=\eta\mu\pi\rho(37^0\ 10')+\eta\mu\pi\rho\mathrm{K}=\eta\mu\pi\rho(37^0\ 10')+0,37659=0,10156+0,37659=0,47815$

και μετά από την παρεμβολή 2 προκύπτει ότι $\beta=87^0\ 29',73=87^0\ 29'\ 44''$.

Παρεμβολή 1. Σε $d=16$ αντιστοιχεί $d=14$.

Σε $d=10$ αντιστοιχεί $x=\dfrac{14\cdot 10}{16}=8,75\cong 9$

$$\begin{array}{r} 0,37650 \\ +\qquad 9 \\ \hline 0,37659 \end{array}$$

←-------- $d=16$ -----→
$9,57577<9,57587<9,57593$
↓ ←- $d=10$ -→ ↓
0,37650 0,37664
←----- $d=14$ ------→

Παρεμβολή 2. Σε $d=15$ αντιστοιχεί $d=1'$.

Σε $d=11$ αντιστοιχεί $x=\dfrac{1\cdot 11}{15}=0,73'=0,73\cdot 60''=43,8''\cong 44''$

←-------- $d=15$ -------→
$0,47804<0,47815<0,47819$
↓ ←- $d=11$ -→ ↓
$87^0\ 29'\ 44''$ $87^0\ 30'$
←----- $d=1'$ ------→

Εφαρμογή 6. Χωρίς χρήση τύπων ημιπαρημιτόνων βρείτε το p αν δίνονται $\sphericalangle P=50^0$, $z=70^0\ 45'$, $x=62^0\ 10'$.

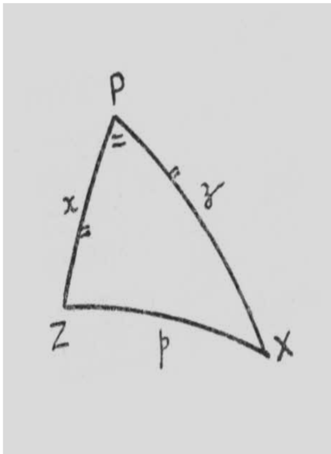
Λύση. Είναι $z-x=8^0\ 35'$. Θα γίνει χρήση του τύπου

$$\log\cos p=\frac{\log\cos(z-x)}{\log 2+\log\sin z+\log\sin x+2\log\sin\dfrac{P}{2}}=\frac{\log\cos\left(8^0\ 35'\right)}{0,30103+9,97501+9,94660+\underbrace{2\cdot 9,62595}_{9,25190}}=$$

$9,47454$, $\quad anti\log 0,29823$, $\quad nat\cos(z-x)=0,98880$, $\quad nat\cos p=0,69057$,

$p=46^0\ 19'5$.

Εφαρμογή 7. Επιλύστε το σφαιρικό τρίγωνο PZX αν $x=55^0\ 14'$, $\sphericalangle P=54^0\ 01'$, $\sphericalangle Z=121^0\ 25'$. Δηλαδή δίνονται μία πλευρά και οι προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες.



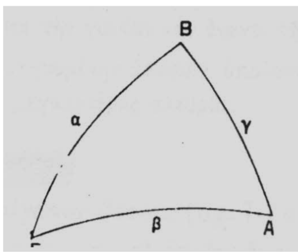
Λύση. Από το πολικό τρίγωνο είναι $X'=124^0\ 46'$, $p'=125^0\ 59'$, $z'=58^0\ 35'$, $p'-z'=67^0\ 24'$, δηλαδή δύο πλευρές και η περιεχόμενη τους γωνία. Συνεπώς,

$havx'=havX'\cdot\sin p'\cdot\sin z'+hav(p'-z')$ άρα

$x'=134^0\ 26'$, οπότε $X=45^0\ 34'$.

LoghavX΄	9,89493
Logsinp΄	9,93115
Logsinz΄	9,90805
log	**9,73413**
nat	0,54217
nathav	0,30785
nathavx΄	**0,85002**

Εφαρμογή 8. Υπολογίστε την πλευρά a σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ με $\sphericalangle A=40^0$, $\gamma=30^0$, $\beta=80^0$.



Λύση. Είναι $(\beta-\gamma)=50^0$ και

$\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho \mathrm{A} \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma + \eta\mu\pi\rho\left(\beta-\gamma\right)$ (1).

Θέτω $\eta\mu\pi\rho \mathrm{K} = \eta\mu\pi\rho \mathrm{A} \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma$, άρ η (1) γράφεται ως

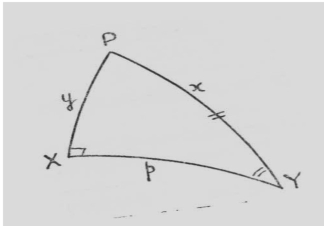
$\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho \mathrm{K} + \eta\mu\pi\rho\left(\beta-\gamma\right) = 0,05760 + 0,17861 = 0,23621$.

Άρα, $a = 58^0\ 09'\ \frac{1}{2}$.

Επεξήγηση.

$$\eta\mu\pi\rho \mathrm{K} = \eta\mu\pi\rho \mathrm{A} \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \Rightarrow \log \eta\mu\pi\rho \mathrm{K} = \log\left[\eta\mu\pi\rho \mathrm{A} \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma\right] =$$
$$\log \eta\mu\pi\rho \mathrm{A} + \log \eta\mu\beta + \log \eta\mu\gamma =$$
$$9,06810 + 9,99335 + 9,69897 = 8,76042$$

Άρα, $\eta\mu\pi\rho \mathrm{K} = 0,05760$.



Εφαρμογή 9. Υπολογίστε τις πλευρές p, y σφαιρικού τριγώνου PXY αν $x = 118^0\ 20'$, $Y = 24^0\ 05'$.

Εύρεση p. Είναι $x > 90^0$ άρα πρέπει $y < 90^0$ διότι αφού είναι $Y < 90^0$ θα ισχύει ότι $p > 90^0$. Η Y είναι στη μέση με γειτονικές πλευρές x, p.

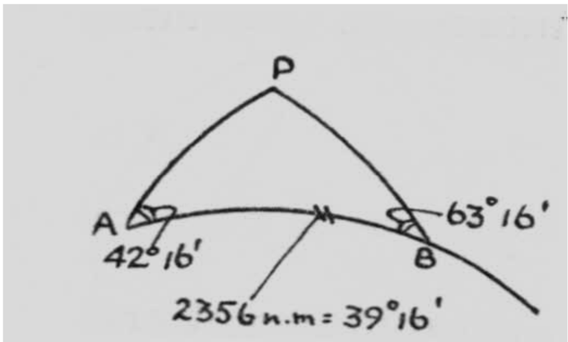
$$\text{Είναι } \cos Y = \tan p \cdot \cot x \Rightarrow \tan p = \cos Y \cdot \tan x \Rightarrow \log\tan p = \log\cos Y + \log\tan x =$$
$$\log\cos\left(24^0\ 05'\right) + \log\tan\left(118^0\ 20'\right) =$$
$$9,96045 + 10,26825 = 10,22870$$

Οπότε $59^0\ 26'$, άρα $p = 120^0\ 34'$.

Εύρεση y. Είναι x, Y μαζί. Το y είναι μόνο του άρα είναι το μεσαίο τμήμα. Τα x, Y είναι αντίθετα. Ισχύει ότι:

$$\sin y = \sin x \cdot \sin Y \Rightarrow \log\sin y = \log\sin x + \log\sin Y = \log\sin\left(118^0\ 20'\right) + \log\sin\left(24^0\ 05'\right) =$$
$$9,94458 + 9,61073 = 9,55531$$

Οπότε $21^0\ 03'$, άρα $y = 21^0\ 03'$.



Εφαρμογή 10. Για δεδομένο μέγιστο κύκλο από το σημείο Α στο σημείο Β το αρχικό ίχνος της γωνίας είναι $042^0\ 16'$ και το τελικό ίχνος της γωνίας είναι $116^0\ 44'$ και η διανυθείσα απόσταση είναι 2356 $\nu.\mu.$.

Αν το μήκος του σημείου Α είναι $02^0\ 16'$ E, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

Λύση. Δίνονται μία πλευρά και οι δύο προσκείμενες της γωνίες. Από το πολικό τρίγωνο είναι $\alpha' = 137^0\ 44'$, $b' = 116^0\ 44'$, $P' = 140^0\ 44'$ και

$$hav p' = hav P' \cdot \sin\alpha' \cdot \sin b' + hav\left(\alpha' - b'\right)$$
$$= hav\left(140^0\ 44'\right) \cdot \sin\left(137^0\ 44'\right) \cdot \sin\left(116^0\ 44'\right) + hav 21^0.$$

Είναι $p' = 97^0\ 36'$, άρα $P = 82^0\ 24'$ οπότε το γεωγρ. μήκος του Β είναι $84^0\ 40'$ E.

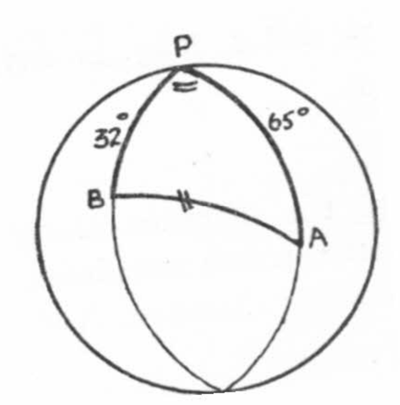
Είναι

$$havA' = \frac{hav\alpha' - hav\left(b' - p'\right)}{\sin b' \cdot \sin p'} = \frac{hav\left(137^0\ 44'\right) - hav\left(19^0\ 08'\right)}{\sin\left(116^0\ 44'\right) \cdot \sin\left(97^0\ 36'\right)} \Rightarrow A' = 154^0\ 34' \Rightarrow a = 25^0\ 26'$$

Άρα, το γεωγραφικό πλάτος του σημείου Β είναι $64^0\ 34'\ N$.

Εφαρμογή 11. Πλοίο που ταξιδεύει προς τα δυτικά πάνω σε μέγιστο κύκλο, ξεκινά από σημείο $\left(25^0 N, 120^0\ W\right)$ προς σημείο με γεωγραφικό πλάτος $58^0 N$.

Αν το η διαφορά μήκους ισούται με την απόσταση μεγίστου κύκλου, βρείτε το γεωγραφικό μήκος του σημείου άφιξης και την τελική πορεία.

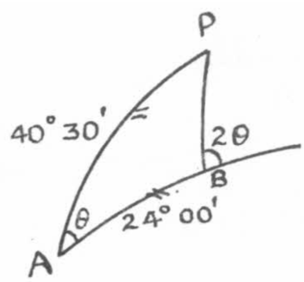


Λύση. Στο σφαιρικό τρίγωνο ABP ισχύει $havAB = havP \cdot \sin PA \cdot \sin PB + hav\left(PA - PB\right)$ και επειδή $AB = P$ είναι $havP = havP \cdot \sin 65^0 \cdot \sin 32^0 + hav33^0 \Rightarrow havP = \dfrac{hav33^0}{1 - \sin 65^0 \cdot \sin 32^0}$ και λύνοντας με χρήση λογαρίθμων, προκύπτει ότι $P = 46^0\ 24'$, άρα το ζητούμενο γεωγραφικό μήκος του σημείου άφιξης είναι $166^0\ 24'\ W$.

Από τον τύπο $\dfrac{\sin B}{\sin 65^0} = \dfrac{\sin P}{\sin AB} = 1 \Rightarrow \sin B = \sin 65^0$. Άρα, $B = 65^0$ καιη τελική πορεία είναι $N\ 65^0\ W$.

Εφαρμογή 12. Αεροπλάνο πετά κατά μήκος μεγίστου κύκλου από σημείο A γεωγραφικού πλάτους $49^0\ 30'\ N$, με κατεύθυνση βορειοανατολική, για απόσταση 1.440 $\nu.\mu.$ προς σημείο B γεωγραφικού πλάτους $N 2\theta^0\ E$.

Βρείτε την αρχική πορεία και το γεωγραφικό πλάτος του σημείου B .



Λύση. Από τύπο των 4 τμημάτων είναι $\cot PA \cdot \sin AB = \cot\left(180^0 - 2\theta\right) \cdot \sin\theta + \cos\theta \cdot \cos AB$

και θέτοντας $\cot PA \cdot \sin AB = Q$ προκύπτει $Q = -\cot\left(2\theta\right) \cdot \sin\theta + \cos\theta \cdot \cos 24^0$

$$= \cos\theta \cdot \cos 24^0 - \sin\theta \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{2\cos^2\theta \cdot \cos 24^0 - \cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta}{2\cos\theta} \Rightarrow$$

$$Q \cdot 2\cos\theta = \cos^2\theta\left(2\cos 24^0 - 2\right) + 1 \Rightarrow 0{,}173\cos^2\theta + 0{,}952\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = 25^0\ 36'$$

Άρα, η αρχική πορεία είναι $N 25^0\ 36'\ E$.

Από τον τύπο των ημιτόνων προκύπτει ότι $\dfrac{\sin PB}{\sin\left(25^0\ 36'\ \right)} = \dfrac{\sin 40^0\ 30'}{\sin 128^0\ 48'} \Rightarrow PB = 111^0\ 06'$.

Άρα, το γεωγραφικό πλάτος του σημείου B είναι $68^0\ 54'$.

Εφαρμογή 13. Βρείτε την πλευρά a σφαιρικού τριγώνου ABC περιμέτρου $146^0\ 02'$ με $A=90^0$, $B+C=108^0\ 04'$.

Λύση. Είναι $2S=146^0\ 02' \Rightarrow S=73^0\ 01'$ όπου $2s=a+b+c$ και

$$\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \Rightarrow \frac{\cos 54^0\ 02'}{\sin 45^0}=\frac{\cos\frac{2s-a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos s\cdot\cos\frac{a}{2}+\sin s\cdot\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=$$

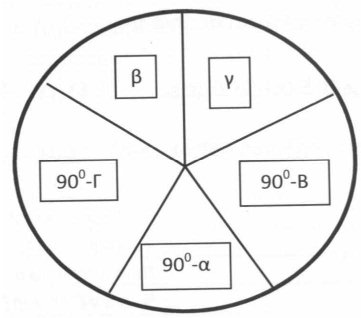
$\cos s+\sin s\cdot\tan\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}=29^0\ 23' \Rightarrow a=58^0\ 46'$.

Εφαρμογή 14. Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=90^0$, $\beta=115^0$ και $\gamma=62^0$.

Λύση. Για τον υπολογισμό των στοιχείων του πολικού τριγώνου $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ είναι: $\beta+\mathrm{B'}=180^0 \Leftrightarrow \mathrm{B'}=65^0$ και $\gamma+\Gamma'=180^0 \Leftrightarrow \Gamma'=118^0$.

Άρα, πρέπει να επιλυθεί το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ με $\mathrm{A'}=90^0$, $\mathrm{B'}=65^0$, $\Gamma'=118^0$. Από την επίλυση του (εφαρμογή 15) προκύπτουν $\alpha'=104^0\ 21'$, $\beta'=61^0\ 24'$, $\gamma'=121^0\ 12'$. Άρα, $\mathrm{A}+\alpha'=180^0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=75^0\ 39'$, $\mathrm{B}+\beta'=180^0 \Leftrightarrow \mathrm{B}=118^0\ 36'$, $\Gamma+\gamma'=180^0 \Leftrightarrow \Gamma=58^0\ 48'$.

Εφαρμογή 15. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}=90^0$, $\mathrm{B}=65^0$ και $\Gamma=118^0$.



Υπολογισμός της α. Επειδή η $90^0-\alpha$ έχει προσκείμενες τις $90^0-\Gamma$ και $90^0-\mathrm{B}$ είναι $\eta\mu\left(90^0-\alpha\right)=\varepsilon\varphi\left(90^0-\Gamma\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(90^0-\mathrm{B}\right) \Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\varphi\mathrm{B}\cdot\sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow \log\sigma\upsilon\nu\alpha=\log\sigma\varphi\mathrm{B}+\log\sigma\varphi\Gamma=$ $9,66867+9,72567=9,39434$. Από τους πίνακες προκύπτει ότι $a=75^0\ 49'$ ή $a=104^0\ 21'$. Αφού η Γ είναι αμβλεία και η B είναι οξεία πρέπει $\alpha>90^0$, συνεπώς επιλέγεται η λύση $a=104^0\ 21'$.

Υπολογισμός της γ. Επειδή η $90^0-\Gamma$ έχει απέναντι τις γ και $90^0-\mathrm{B}$ είναι $\eta\mu\left(90^0-\Gamma\right)=\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\mathrm{B}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma=\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{B} \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma=\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\mathrm{B}}=\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{B} \Leftrightarrow \log\sigma\upsilon\nu\gamma=\log\sigma\upsilon\nu\Gamma+\log\sigma\tau\varepsilon\mu\mathrm{B}=$$

$\log\sigma\upsilon\nu 118^0+\log\sigma\tau\varepsilon\mu 65^0=9,67161+0,04272=9,71433$. Από τους πίνακες προκύπτει ότι $\gamma=58^0\ 48'$ ή $\gamma=121^0\ 12'$. Επειδή $\Gamma>90^0$ επιλέγεται η λύση $\gamma=121^0\ 12'$.

Υπολογισμός της β. Επειδή η $90^0-\mathrm{B}$ έχει απέναντι τις $90^0-\Gamma$, β είναι $\eta\mu\left(90^0-\mathrm{B}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\Gamma\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow \log \sigma\upsilon\nu\beta = \log \sigma\upsilon\nu 65^0 + \log \sigma\tau\varepsilon\mu 118^0 = 9,62595 + 0,005407 = 9,68002$. Από τους πίνακες προκύπτει ότι $\beta = 61^0\ 24'$ ή $\beta = 118^0\ 36'$. Επειδή η B είναι οξεία επιλέγεται η λύση $\beta = 61^0\ 24'$.

Τύπος επαλήθευσης. Η $90^0 - \alpha$ έχει απέναντι τις β, γ και είναι

$\eta\mu\left(90^0 - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$

$\log \sigma\upsilon\nu\left(104^0\ 21\right) = \log \sigma\upsilon\nu\left(61^0\ 24'\right) + \log \sigma\upsilon\nu\left(121^0\ 12'\right) \Leftrightarrow$

$9,39418 - 9,68006 + 9,71435 \Leftrightarrow 9,394 = 9,394$ με στρογγυλοποίηση στο χιλιοστό.

Ιστορικό σημείωμα. Η σφαιρική τριγωνομετρία εμφανίστηκε πολύ νωρίτερα από την επίπεδη τριγωνομετρία. Οι ιδιότητες των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων και οι διάφορες περιπτώσεις επίλυσης τους ήταν γνωστές ήδη στους Μενέλαο (1ος αιώνας π.Χ.) και Πτολεμαίο (2ος αιώνας π.Χ.). Τη λύση σκαληνών σφαιρικών τριγώνων, οι αρχαίοι Έλληνες την ανήγαγαν στη λύση ορθογωνίων.

Ο Νασιρεντίν Τουσί (13ος αιώνας) από το Αζερμπαϊτζάν (ή την Περσία σύμφωνα με τον G. Loria) εξέτασε συστηματικά όλες τις περιπτώσεις επίλυσης σκαληνών σφαιρικών τριγώνων και πρώτος έδωσε τη λύση σε δύο εξαιρετικά δύσκολες περιπτώσεις. Οι θεμελιώδεις τύποι των σκαληνών σφαιρικών τριγώνων ανήκουν στον Άραβα Αμπού–αλ–Βέφα (10ος αιώνας), στον Γερμανό μαθηματικό Regiomontanus (μέσα 15ου αιώνα μ.Χ.), στον Γάλλο F. Viete (2ο μισό του 16ου αιώνα μ.Χ.) και στον Ελβετό Euler (από 1753 έως 1779) ο οποίος έδωσε όλο το σύστημα των τύπων της σφαιρικής τριγωνομετρίας. Σημαντική υπήρξε η προσφορά του Σκωτσέζου θεολόγου και μαθηματικού John Napier στην εύρεση τύπων για πρακτικές εφαρμογές. Υπερβολικές ονομάζονται εκείνες οι γεωμετρίες στις οποίες τα τρίγωνα τους έχουν άθροισμα μικρότερο των 180^0, που ισοδυναμεί με την ύπαρξη πολλών παράλληλων ευθειών που άγονται από σημείο εκτός ευθείας.