1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ὁ ἱδρυτής καί χορηγός τοῦ «Ἱδρύματος Εὐγενίδου», πολύ νωρίς πρόβλεψε καί σχημάτισε τήν πεποίθηση ὅτι ἡ ἄρτια κατάρτιση τῶν τεχνικῶν μας, σέ συνδυασμό μέ τήν ἐθνική ἀγωγή, θά ἦταν ἀναγκαῖος καί ἀποφασιστικός παράγοντας τῆς προόδου τοῦ Ἔθνους μας.

Τήν πεποίθησή του αὐτή ὁ Εὐγενίδης ἐκδήλωσε μέ τή γενναιόφρονα πράξη εὐεργεσίας, νά κληροδοτήσει σεβαστό ποσό γιά τή σύσταση Ἱδρύματος πού θά εἶχε σκοπό νά συμβάλλει στήν τεχνική ἐκπαίδευση τῶν νέων τῆς Ἑλλάδας.

Ἔτσι τό Φεβρουάριο τοῦ 1956 συστήθηκε τό «Ἵδρυμα Εὐγενίδου», τοῦ ὁποίου τήν διοίκηση ἀνέλαβε ἡ ἀδελφή του κυρία Μαριάνθη Σίμου, σύμφωνα μέ τήν ἐπιθυμία τοῦ διαθέτη.

Ἀπό τό 1956 μέχρι σήμερα ἡ συμβολή τοῦ Ἱδρύματος στήν τεχνική ἐκπαίδευση πραγματοποιεῖται μέ διάφορες δραστηριότητες. Ὅμως ἀπ' αὐτές ἡ σημαντικότερη, πού κρίθηκε ἀπό τήν ἀρχή ὡς πρώτης ἀνάγκης, εἶναι ἡ ἔκδοση βιβλίων γιά τούς μαθητές τῶν τεχνικῶν σχολῶν.

Μέχρι σήμερα ἐκδόθηκαν 150 τόμοι βιβλίων, πού ἔχουν διατεθεῖ σέ πολλά ἑκατομμύρια τεύχη, καί καλύπτουν ἀνάγκες τῶν Κατώτερων καί Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ Ὑπ. Παιδείας, τῶν Σχολῶν τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἀπασχολήσεως Ἐργατικοῦ Δυναμικοῦ (ΟΑΕΔ) καί τῶν Δημοσίων Σχολῶν Ἐμπορικοῦ Ναυτικοῦ.

Μοναδική φροντίδα τοῦ Ἱδρύματος σ' αὐτή τήν ἐκδοτική του προσπάθεια ἦταν καί εἶναι ἡ ποιότητα τῶν βιβλίων, ἀπό ἄποψη ὄχι μόνον ἐπιστημονική, παιδαγωγική καί γλωσσική, ἀλλά καί ἀπό ἄποψη ἐμφανίσεως, ὥστε τό βιβλίο νά ἀγαπηθεῖ ἀπό τούς νέους.

Γιά τήν ἐπιστημονική καί παιδαγωγική ποιότητα τῶν βιβλίων, τά κείμενα ὑποβάλλονται σέ πολλές ἐπεξεργασίες καί βελτιώνονται πρίν ἀπό κάθε νέα ἔκδοση.

Ἰδιαίτερη σημασία ἀπέδωσε τό Ἵδρυμα ἀπό τήν ἀρχή στήν ποιότητα τῶν βιβλίων ἀπό γλωσσική ἄποψη, γιατί πιστεύει ὅτι καί τά τεχνικά βιβλία, ὅταν εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα ἄρτια καί ὁμοιόμορφη ἀλλά καί κατάλληλη γιά τή στάθμη τῶν μαθητῶν, μποροῦν νά συμβάλλουν στήν γλωσσική διαπαιδαγώγηση τῶν μαθητῶν.

Ἔτσι μέ ἀπόφαση πού πάρθηκε ἤδη ἀπό τό 1956 ὅλα τά βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Τεχνίτη, δηλαδή τά βιβλία γιά τίς Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, ὅπως ἀργότερα καί γιά τίς Σχολές τοῦ ΟΑΕΔ, εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα δημοτική μέ βάση τήν γραμματική τοῦ Τριανταφυλλίδη, ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα βιβλία εἶναι γραμμένα στήν ἁπλή καθαρεύουσα. Ἡ γλωσσική ἐπεξεργασία τῶν βιβλίων γίνεται ἀπό φιλολόγους τοῦ Ἱδρύματος καί ἔτσι ἐξασφαλίζεται ἡ ἑνιαία σύνταξη καί ὁρολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Ἡ ποιότητα τοῦ χαρτιοῦ, τό εἶδος τῶν τυπογραφικῶν στοιχείων, τά σωστά σχήματα καί ἡ καλαίσθητη σελιδοποίηση, τό ἐξώφυλλο καί τό μέγεθος τοῦ βιβλίου περιλαμβάνονται καί αὐτά στίς φροντίδες τοῦ Ἱδρύματος.

Τό Ἵδρυμα θεώρησε ὅτι εἶναι ὑποχρέωσή του, σύμφωνα μέ τό πνεῦμα τοῦ ἱδρυτῆ του, νά θέσει στήν διάθεση τοῦ Κράτους ὅλη αὐτή τήν πείρα του τῶν 20 ἐτῶν, ἀναλαμβάνοντας τήν ἔκδοση τῶν βιβλίων καί γιά τίς νέες Τεχνικές καί Ἐπαγγελματικές Σχολές καί τά νέα Τεχνικά καί Ἐπαγγελματικά Λύκεια.

Γ' ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤΡΑΤΗ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΑΘΗΝΑ
1983

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Λίγα λόγια τοῦ συγγραφέα

Τό βιβλίο αὐτό περιέχει κυρίως τήν ὕλη πού τό Ὑπουργεῖο ἔχει καθορίσει γιά τό μάθημα Κορμοῦ τῶν μαθηματικῶν τῆς Γ΄ τάξεως Λυκείου. Γίνεται ὅμως καί ἀναφορά σέ μερικές (πολύ λίγες) ἔννοιες, πού «πρέπει νά μάθει ὁ μαθητής» καί οἱ ὁποῖες θά ἀναλυθοῦν διεξοδικότερα κατά τή διδασκαλία τοῦ μαθήματος τῆς Ἐπιλογῆς.

Συγκεκριμένα δίνονται οἱ ὁρισμοί καί οἱ ἐξισώσεις τοῦ κύκλου, τῆς ἐλλείψεως, τῆς παραβολῆς καί τῆς ὑπερβολῆς.

Αὐτό ἔγινε — μέ εὐθύνη τοῦ συγγραφέα — γιά δυό λόγους:

α) Γιά νά διευκρινισθοῦν ἔννοιες καί σχέσεις συναφεῖς (π.χ. ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = ax^2 + \beta x + \gamma$).

β) Γιά νά μήν ἀποτελεῖ ἄγνωστο τόπο γιά τούς ἀπόφοιτους τοῦ Λυκείου ἡ ἔννοια καί ἡ γεωμετρική φυσιογνωμία τῶν κωνικῶν τομῶν, μολονότι ἔρχονται ἀναγκαστικά σέ ἐπαφή μ' αὐτά τά σχήματα ἀπό ἄλλες προσβάσεις (Φυσική — Κοσμογραφία).

Πάντως ὅσοι παράγραφοι, θέματα, ἀσκήσεις ἔχουν ἀστερίσκο δέν πρέπει νά διδαχθοῦν στό μάθημα Κορμοῦ· εἶναι ὑλικό γιά τό μάθημα Ἐπιλογῆς.

Ἐξάλλου ἰδιότητες καί ἐφαρμογές πού εἶναι γραμμένες μέ μικρά στοιχεῖα — καί δέν φέρουν ἀστερίσκο — ἀφίνονται στήν κρίση τοῦ διδάσκοντος.

Στό τέλος τοῦ βιβλίου παραθέτονται καί λίγα στοιχεῖα Περιγραφικῆς Στατιστικῆς, σύμφωνα πάντοτε μέ τό ἀναλυτικό πρόγραμμα Κορμοῦ.

Ὁ συγγραφέας κατέβαλε ἰδιαίτερη προσπάθεια γιά νά παρουσιάσει μέ τόν ἁπλούστερο δυνατό τρόπο τό πρόσθετο αὐτό ὑλικό καί νά εὐκολύνει ἔτσι — στό μέτρο τῶν δυνάμεών του — τό ἔργο καί τῶν μαθητῶν καί τῶν δασκάλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΑΙ Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

1.1 Ἀναγκαιότητα τοῦ διανύσματος.

Μᾶς πληροφόρησαν ὅτι ἕνα πυροβόλο ἐκτοξεύει βλήματα πού ἔχουν στό ξεκίνημά τους «ταχύτητα» ἴση π.χ. μέ 2500 km/h.

Εἶναι ἄραγε δυνατό, μόνο μ' αὐτό τό στοιχεῖο, νά καθορίσομε τήν τροχιά πού θά διαγράψει ἕνα βλῆμα αὐτοῦ τοῦ πυροβόλου καί νά βροῦμε σέ ποιό σημεῖο τοῦ ἐδάφους (περίπου τουλάχιστον) θά προσκρούσει τό βλῆμα;

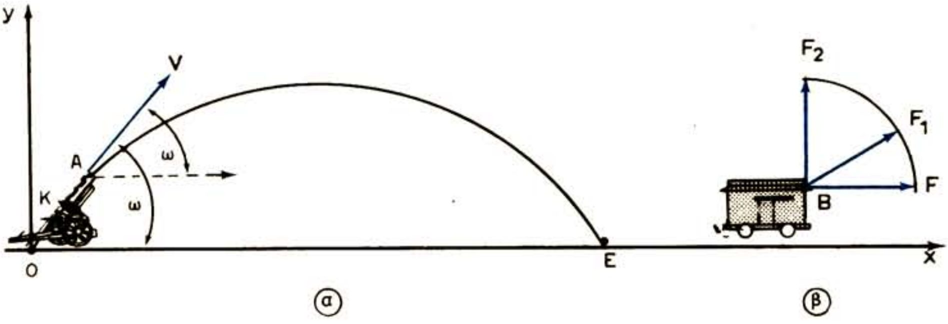
Καί ἄν δέν ἔχει κανείς τίς ἀπαραίτητες γνώσεις γιά νά ἀντιμετωπίσει ἕνα τέτοιο πρόβλημα, εἶναι εὔκολο νά συμπεράνει ὅτι: «χρειαζόμαστε ἀκόμα (τουλάχιστον) καί τή γωνία $\widehat{\omega}$, πού σχηματίζει ὁ σωλήνας ΚΑ [σχ. 1.1 (α)] τοῦ πυροβόλου μέ τήν προβολή του Ox πάνω στόν ὁρίζοντα».

Βλέπομε λοιπόν ὅτι, δέν εἶναι ἀρκετό τό **φυσικό μέγεθος**, πού ὀνομάσαμε **ταχύτητα**, νά δίνεται μ' ἕνα μόνον ἀριθμό (ὅπως 2500 km/h). Πρέπει νά συνοδεύεται καί ἀπό πληροφορίες σχετικά μέ τόν τρόπο «ἐνεργείας του». Πρέπει δηλαδή νά γνωρίζομε πάνω σέ ποιά εὐθεία καί μέ ποιά φορά «ἐνεργεῖ» ἡ ταχύτητα, ἄν θέλομε νά ὁδηγηθοῦμε σέ σωστά καί πλήρη συμπεράσματα σχετικά μέ τ' ἀποτελέσματά της.

Ἔτσι, στό παράδειγμά μας, τήν ταχύτητα τοῦ βλήματος τήν παραστήσαμε μέ τό βέλος $\overrightarrow{AV}$.

Στό σχῆμα 1.1 (β) ἐμφανίζεται μιά ἄλλη παρόμοια περίπτωση.

Ἄν σ' ἕνα σημεῖο Β τοῦ ὀχήματος ἐνεργήσει μιά **δύναμη**, τό ἀποτέλεσμα τῆς δράσεώς της θά ἐξαρτηθεῖ καί ἀπό τόν «τρόπο ἐνεργείας» αὐτῆς τῆς δυνάμεως. Ἔστω καί ἄν οἱ δυνάμεις, πού δηλώνονται μέ τά βέλη $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BF_1}$, $\overrightarrow{BF_2}$, ἔχουν τήν ἴδια ἔνταση, οἱ συνέπειες τῆς ἐφαρμογῆς τους δέν εἶναι οἱ ἴδιες.



Σχ. 1.1.

Παρουσιάζεται κι ἐδῶ ἡ ἴδια ἀναγκαιότητα, ὅπως προηγούμενα μέ τήν ταχύτητα· πρέπει δηλαδή νά γνωρίζομε, πέρα ἀπό τήν ἔνταση (τό μέτρο) μιᾶς δυνάμεως, καί τήν εὐθεία ἐνεργείας ἀλλά καί τή φορά της.

Ὑπάρχουν τελικά δυό εἴδη φυσικῶν μεγεθῶν:

α) Ἐκεῖνα πού μποροῦν νά ὁρισθοῦν μέ τή χρησιμοποίηση ἑνός ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι τό **μέτρο** τοῦ μεγέθους καί τά μεγέθη αὐτά λέγονται **ἀριθμητικά** ἤ **βαθμωτά**. Τέτοια π.χ. μεγέθη εἶναι ἡ **μάζα**, ὁ **ὄγκος**, ἡ **πυκνότητα**, ἡ **θερμοκρασία** ἑνός σώματος, ἡ **ἀπόσταση** μεταξύ δύο πόλεων.

β) Ὅλα ἐκεῖνα πού ἀπαιτοῦν γιά τόν πλήρη καθορισμό τους μιά ἔνδειξη ὡς πρός τόν «τρόπο ἐνεργείας τους»· αὐτά πού δέν μποροῦν νά ὁρισθοῦν χωρίς τή μεσολάβηση τῶν ἐννοιῶν τῆς **διευθύνσεως καί τῆς φορᾶς**, αὐτά πού ἐμφανίζονται μ' ἕνα συμφυή **προσανατολισμό**.

Τά μεγέθη αὐτά, ὅπως ἡ **δύναμη**, ἡ **ταχύτητα**, ἡ **ἐπιτάχυνση**, ἡ **πίεση** κλπ., λέγονται **διανυσματικά μεγέθη**.

Ἡ λέξη **διάνυσμα** μᾶς θυμίζει γενικά ὄχι μόνο τή «μετάβαση» ἀπό μιάν ἀρχική κατάσταση Α σέ μιά τελική Β, ἀλλά ἀκόμα καί τόν «τρόπο μεταβάσεως» ἀπό τήν κατάσταση Α στή Β.

Σύμφωνα μ' αὐτή τήν ἰδέα, πολλῶν εἰδῶν μεταβολές θά μποροῦσαν νά χαρακτηρισθοῦν ὡς διανύσματα. Ἔτσι π.χ., μολονότι ἡ θερμοκρασία εἶναι ἕνα ἀριθμητικό μέγεθος, αὐτό πού χαρακτηρίζει τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας γύρω ἀπό ἕνα σημεῖο Α, συναρτήσει τῆς διευθύνσεως, εἶναι ἕνα διάνυσμα.

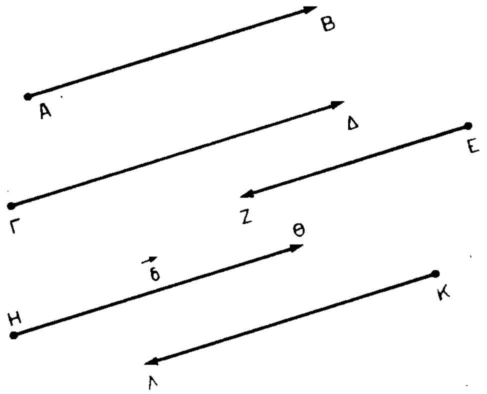
Τί εἶναι λοιπόν τό διάνυσμα;

Πρίν περάσομε στή διεξοδική μελέτη τοῦ διανύσματος, καί κλείνοντας αὐτή τήν εἰσαγωγή, θά μπορούσαμε, σύμφωνα καί μέ τά προηγούμενα, νά δώσομε τήν ἑπόμενη ἀπάντηση: **Διάνυσμα εἶναι ἡ μαθηματική εἰκόνα — ἡ μαθηματική παράσταση ἑνός διανυσματικοῦ μεγέθους.**

1.2 Τό ἐφαρμοστό διάνυσμα καί τά στοιχεῖα του.

Μιά κατάλληλη ἐπινόηση γιά τήν παράσταση ἑνός προσανατολισμένου μεγέθους θά ἦταν κάθε τί πού θά ἐπέτρεπε νά ὁρίσομε συγχρόνως ἕνα **ποσό**, μιά **διεύθυνση** καί μιά **φορά**.

Δυό σημεῖα Ἀ καί Β στό χῶρο (σχ. 1.2) ὅταν τό ἕνα (ἔστω τό Α) χα-



Σχ. 1.2.

ρακτηρίζεται ὡς **ἀρχή** καί τό ἄλλο (τό Β) ὡς **πέρας**, μαζί μέ τό τμῆμα πού ὁρίζουν αὐτά τά σημεῖα, εἶναι μιά καλή εἰκόνα διανυσματικοῦ μεγέθους.

Γι' αὐτό τό λόγο:

Ὀνομάζομε ἐφαρμοστό διάνυσμα ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, μέ ὁρισμένα ἄκρα, μαζί μέ μιά φορά πάνω σ' αὐτό τό τμῆμα.

Ἔτσι δυό σημεῖα Α καί Β, ἐνῶ ὁρίζουν ἕνα καί μόνο τμῆμα (τό ΑΒ ἤ τό ΒΑ ἀδιάφορα), μᾶς παρέχουν δυό διαφορετικά διανύσματα· τό ἕνα μέ ἀρχή τό Α καί πέρας τό Β (συμβολικά: $\overrightarrow{AB}$) καί τό ἄλλο μέ ἀρχή τό Β καί πέρας τό Α (συμβολικά: $\overrightarrow{BA}$).

Δυό ἐφαρμοστά διανύσματα, πού κεῖνται στήν ἴδια εὐθεία ἤ σέ παράλληλες εὐθεῖες, λέγονται **παράλληλα** ἤ **συγγραμμικά διανύσματα**· λέμε ἀκόμα, σ' αὐτή τήν περίπτωση, ὅτι τά διανύσματα ἔχουν τήν **ἴδια διεύθυνση**. Π.χ. ὅλα τά ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ σχήματος 1.2 ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση.

Σέ κάθε σύνολο παραλλήλων εὐθειῶν, σέ κάθε δηλαδή διεύθυνση, ἀνήκουν δυό ἀντίθετες φορές (κατευθύνσεις).

Δυό παράλληλα ἐφαρμοστά διανύσματα, ἄν ἔχουν καί τήν ἴδια φορά, λέγονται **ὁμόρροπα**· δυό παράλληλα ἐφαρμοστά διανύσματα μέ ἀντίθετες φορές, λέγονται **ἀντίρροπα**.

Τά ἐφαρμοστά π.χ. διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 1.2) εἶναι ὁμόρροπα, ἐνῶ τά $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{EZ}$ εἶναι ἀντίρροπα.

Δυό ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται **ἴσα** (ἤ ἰσοδύναμα) ἄν εἶναι ὁμόρροπα καί ἰσομήκη, ὅπως π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{H\Theta}$ (σχ. 1.2)

Δυό ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται **ἀντίθετα** ἄν εἶναι ἀντίρροπα καί ἰσομήκη, ὅπως π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{K\Lambda}$ (ἤ τά $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{BA}$, σχ. 1.2).

Ἀπό ὅσα ἀναφέραμε προκύπτει ἀβίαστα τό ἀκόλουθο σημαντικό συμπέρασμα: «Κάθε ἐφαρμοστό διάνυσμα ἔχει τρία γνωρίσματα, τρία στοιχεῖα: α) **διεύθυνση** (ἡ εὐθεία ὅπου κεῖται* τό διάνυσμα καί κάθε παράλληλη πρός αὐτή), β) **φορά** καί γ) **μῆκος**».

Ἐδῶ εἶναι ἀναγκαῖο νά γίνει ἡ διευκρίνιση ὅτι τά προηγούμενα ἀναφέρονται σέ διανύσματα τῶν ὁποίων τά ἄκρα εἶναι διαφορετικά. Καί τοῦτο διότι εἶναι σκόπιμο (ὅπως θά δοῦμε καί παρακάτω) νά δεχθοῦμε τήν ὕπαρξη τοῦ (λεγόμενου) **μηδενικοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος**· δηλαδή ἑνός (συμβατικοῦ) διανύσματος, στό ὁποῖο ἡ ἀρχή καί τό πέρας συμπίπτουν.

Δυό ὁποιαδήποτε ἐφαρμοστά μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, εἶναι ἴσα, διότι: α) τά μήκη τους εἶναι ἴσα (ὡς μηδενικά)· β) μποροῦμε νά πάρομε ὡς κοινή διεύθυνσή τους δυό εὐθεῖες, ἀπό τά A καί B, παράλληλες μεταξύ τους· γ) δεχόμαστε τέλος ὅτι ἔχουν καί τήν ἴδια φορά (ὅποια θέλομε πάνω στά στηρίγματά τους).

1.3 Τό ἐλεύθερο διάνυσμα.

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, τά διάφορα ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ χώρου διαμερίζονται σέ κλάσεις ἴσων μεταξύ τους διανυσμάτων.

Δυό ἐφαρμοστά διανύσματα ἀπό διαφορετικές κλάσεις εἶναι ἄνισα, διότι, γιά νά ἀνήκουν σέ διαφορετικές κλάσεις, θά διαφέρουν σ' ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά τρία στοιχεῖα (διεύθυνση, φορά, μῆκος).

Ἕνα ἀπειροσύνολο ἀπό ἴσα μεταξύ τους ἐφαρμοστά διανύσματα λέγεται ἐλεύθερο διάνυσμα ἤ συντόμως **διάνυσμα.**

Συνεπῶς ἕνα (ἐλεύθερο) διάνυσμα εἶναι μιά κλάση ἴσων ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, δηλαδή ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, τήν ἴδια φορά καί τό ἴδιο μῆκος.

Γι' αὐτό μποροῦμε ἀκόμα νά λέμε ὅτι: **Διάνυσμα (μή μηδενικό) εἶναι τό σύστημα μιᾶς διευθύνσεως, μιᾶς φορᾶς, συσχετισμένης μ' αὐτή τή διεύθυνση, καί ἑνός μήκους $\neq 0$· μηδενικό δέ διάνυσμα εἶναι τό σύστημα μιᾶς ὁποιασδήποτε διευθύνσεως, μιᾶς ὁποιασδήποτε συσχετισμένης φορᾶς καί τοῦ μηδενικοῦ μήκους.**

Ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα ἀντιπροσωπεύεται ἀπό κάποιο ἐφαρμοστό καί σημειώνεται συνήθως μ' ἕνα μικρό γράμμα ἐπιγραμμισμένο μ' ἕνα βέλος, ὅπως: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ (σχ. 1.2) . Γιά νά δηλώσομε ὅτι ἕνα διάνυσμα εἶναι μηδενικό θά γράφομε: $\vec{\alpha} = \vec{0}$. Γιά νά δηλώσομε ὅτι ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\delta}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό ἕνα ἐφαρμοστό $\overrightarrow{H\Theta}$ θά γράφομε $\vec{\delta} = \overrightarrow{H\Theta}$.

---

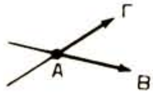
* Ἡ εὐθεία ὅπου κεῖται ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα λέγεται καί φορέας ἤ στήριγμα τοῦ διανύσματος.

Μέτρο ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$ λέγεται τό μῆκος ὁποιουδήποτε ἀπό τά ἐφαρμοστά διανύσματα πού ἀπαρτίζουν τό (ἐλεύθερο) διάνυσμα $\vec{\delta}$· συμβολικά γράφομε $|\vec{\delta}|$.

Στή Γεωμετρία καί τή Φυσική γίνεται συχνά χρήση τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος. Ἔτσι π.χ. ἡ μεταφορά ἑνός σχήματος καθορίζεται μ' ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα. Ἐπίσης μιά δύναμη, πού ἐνεργεῖ πάνω σ' ἕνα σῶμα, καθορίζεται ἀπό ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα, ὅταν δέν παίζει ρόλο τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως.

1.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

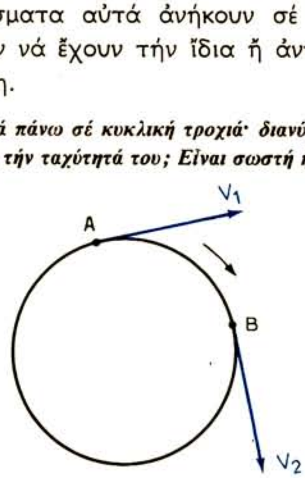
1) Μποροῦμε, γιά τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A\Gamma}$, τοῦ σχήματος 1·4α νά θέσομε τό ἐρώτημα: Ἔχουν τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A\Gamma}$ τήν ἴδια ἤ διαφορετικές φορές;



Σχ. 1.4α.

Ὄχι. Διότι τά διανύσματα αὐτά ἀνήκουν σέ διαφορετικές διευθύνσεις καί δυό διανύσματα μποροῦν νά ἔχουν τήν ἴδια ἤ ἀντίθετες φορές μόνον ὅταν ἀνήκουν στήν ἴδια διεύθυνση.

2) Ἕνα κινητό κινεῖται ὁμαλά πάνω σέ κυκλική τροχιά· διανύει δηλαδή ἴσα κυκλικά τόξα σέ ἴσους χρόνους. Πῶς θά παραστήσομε τήν ταχύτητά του; Εἶναι σωστή ἡ διατύπωση: «Τό κινητό διατηρεῖ σταθερή ταχύτητα»; (σχ. 1.4β)



Σχ. 1.4β.

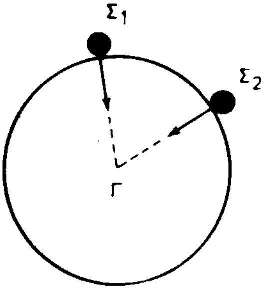
ι) Τήν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ, σ' ἕνα σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του, θά τήν παραστήσομε μ' ἕνα διάνυσμα πάνω στήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, στό σημεῖο Α. Τό διάνυσμα αὐτό ἔχει ὡς ἀρχή τό σημεῖο Α.

ιι) Ἡ διατύπωση δέν εἶναι σωστή, διότι οἱ ταχύτητες $\overrightarrow{AV_1}$ καί $\overrightarrow{BV_2}$, σέ διαφορετικά σημεῖα τῆς τροχιᾶς, ἔχουν διαφορετικές διευθύνσεις καί συνεπῶς δέν μποροῦν νά εἶναι ἴσες.

Ἐκεῖνο πού μποροῦμε νά ποῦμε στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι: «τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ διατηρεῖται σταθερό»· δηλαδή ἔχομε: $|\overrightarrow{AV_1}| = |\overrightarrow{BV_2}|$.

3) Τό βάρος ἑνός σώματος εἶναι ἀριθμητικό ἤ διανυσματικό μέγεθος; (σχ. 1.4γ)

Τό βάρος ἑνός σώματος (Σ) εἶναι δύναμη· εἶναι ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία τό (Σ) ἕλκεται ἀπό τή Γῆ [ὅταν τό (Σ) βρίσκεται πάνω στή Γῆ]. Ἄρα τό βάρος εἶναι διανυσματικό μέγεθος. Σκόπιμο εἶναι νά παρατηρήσομε ὅτι, τό βάρος ἑνός σώματος ἀλλάζει διεύθυνση ἀπό τόπο σέ τόπο,



Σχ. 1.4γ.

διότι κάθε φορά ἔχει φορέα τήν εὐθεία πού συνδέει τό σῶμα μέ τό κέντρο τῆς Γῆς. Ἐξάλλου καί ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ βάρους, ἑνός καί τοῦ ἴδιου σώματος, δέν εἶναι ἡ ἴδια σ' ὅλα τά σημεῖα τῆς Γῆς. Καί ἄν ἀκόμα θεωρήσομε, λόγω τῆς ἀμελητέας διαφορᾶς, σταθερή τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ βάρους ἑνός σώματος πάνω στή Γῆ, αὐτή ἀλλάζει πάρα πολύ ὅταν τό ἴδιο σῶμα βρεθεῖ π.χ. πάνω στή Σελήνη.

1.5 Ἀσκήσεις.

1. Ποιά κοινά γνωρίσματα ἔχουν οἱ ταχύτητες ὅλων τῶν αὐτοκινήτων πού κινοῦνται πάνω στόν ἴδιο δρόμο;

2. Τί εἴδους τετράπλευρο ὁρίζουν τά ἄκρα δυό ἴσων ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, πού δέν κεῖνται στήν αὐτή εὐθεία;

3. Δίνεται ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καί ἕνα ἄλλο $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τό ὁποῖο μετατοπίζεται πάνω στό φορέα του (ε) καί γιά τό ὁποῖο γνωρίζομε ὅτι $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$. Τί ἔχετε νά πεῖτε γιά τήν εὐθεία (ε) καί γιά τά ζεύγη τῶν διανυσμάτων $\left(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Delta}\right)$ πού ὁρίζονται γιά κάθε θέση τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

4. Θεωροῦμε ἕνα κυρτό τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις τίς πλευρές ΑΒ καί ΓΔ. Ἄς εἶναι Ε, Ζ, Η καί Θ τά μέσα ἀντιστοίχως τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΒΓ καί τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ. Ἐφόσον τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μετατοπίζονται πάνω στούς φορεῖς τους, τί ἔχετε νά πεῖτε γιά τά διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ καί $\overrightarrow{H\Theta}$; Ἄν ειδικότερα εἶναι $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|$ τί εἶναι τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί τί τό διάνυσμα $\overrightarrow{H\Theta}$;

5. Τί ἔχετε νά πεῖτε γιά τήν ταχύτητα τοῦ βλήματος, στό σχῆμα 1.1 , ἄν τό κινητό διαγράφει τή σημειούμενη τροχιά;

6. Νά βρεῖτε καί νά ἀναφέρετε διάφορα ἀριθμητικά καί διανυσματικά μεγέθη.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

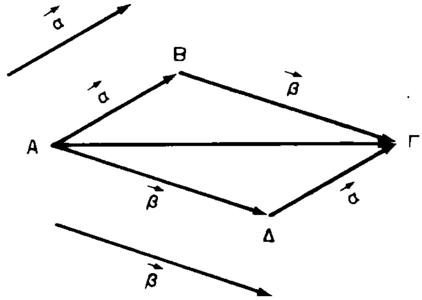
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2.1 Ἄθροισμα καί διαφορά διανυσμάτων.

α) Ἄθροισμα ἐφαρμοστῶν καί ἐλευθέρων διανυσμάτων.

Δυό ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{B\Gamma}$ (σχ. 2.1α) τέτοια ὥστε τό πέρας τοῦ ἑνός νά ταυτίζεται μέ τήν ἀρχή τοῦ ἄλλου, λέγονται **διαδοχικά**.

Ἄθροισμα δυό διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ καί $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ (σχ. 2.1α) λέγεται τό διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, δηλαδή ἐκεῖνο πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου καί πέρας τό πέρας τοῦ δευτέρου. Γράφομε: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.



Σχ. 2.1α.

Ἄθροισμα δυό ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ λέγεται τό ἐλεύθερο διάνυσμα πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ (σχ. 2.1α), ἄν τό $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ εἶναι τό ἄθροισμα δυό διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, πού ἀντιπροσωπεύουν ἀντίστοιχα τό $\vec{\alpha}$ καί τό $\vec{\beta}$. Ἄν δηλαδή εἶναι $\vec{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ καί $\vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, τότε ἔχομε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

Ἄν τά διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\alpha}_1$ εἶναι δυό ἀντίθετα διανύσματα καί $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}$ (σχ. 2.1α), τότε τό $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ θά εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}_1$. Ἔτσι θά ἔχομε $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_1 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$.

Τό ἄθροισμα δηλαδή δυό ἀντιθέτων διανυσμάτων εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα.

β) Ἰδιότητες τοῦ ἀθροίσματος. Γιά τό ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων ἰσχύουν οἱ γνωστές, καί ἀπό τήν πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν, ἰδιότητες:

I) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα).

II) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ἰδιότητα).

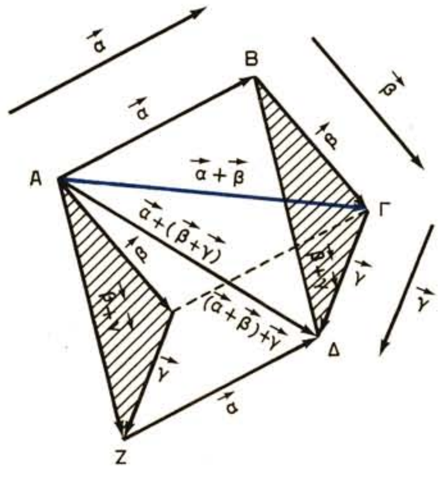
Τό σχῆμα 2.1α μᾶς παρέχει, σύμφωνα μέ τίς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου, μιά γεωμετρική ἐπιβεβαίωση τῆς ἀντιμεταθετικῆς ἰδιότητας.

Ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα ἐπίσης, γίνεται προφανής στό σχῆμα 2.1β, καί προκύπτει ἀπό τίς βασικές ἰδιότητες τοῦ τριγώνου καί τοῦ παραλληλογράμμου.

Ὅπως καί στήν πρόσθεση τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔτσι κι ἐδῶ μποροῦμε, μέ τόν ἴδιο τρόπο (στηριζόμενοι στίς προηγούμενες ἰδιότητες), νά ἐπεκτείνομε τό νόημα τοῦ ἀθροίσματος δυό διανυσμάτων σέ περισσότερα ἀπό δυό.

Ἔτσι π.χ. ἔχομε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta}$.

Παρατηρήσεις: ι) Νά πῶς γίνεται πρακτικά ἡ πρόσθεση δυό ἤ περισσοτέρων διανυσμάτων, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, . . ., πού κεῖνται στό ἴδιο ἐπίπεδο. Μέ ἀρχή τυχαῖο σημεῖο Α (σχ. 2.1β) σχεδιάζομε ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἴσο μέ τό $\vec{\alpha}$· ἀκολούθως μέ ἀρχή τό Β σχεδιάζομε ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἴσο μέ τό $\vec{\beta}$· ὅμοια μέ ἀρχή τό Γ σχεδιάζομε ἐφαρμοστό διάνυσμα ἴσο μέ τό $\vec{\gamma}$ κ.ο.κ. Ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων θά εἶναι τό διάνυσμα μέ ἀρχή τό Α καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου ἀπό τά θεωρούμενα διαδοχικά διανύσματα.



Σχ. 2.1β.

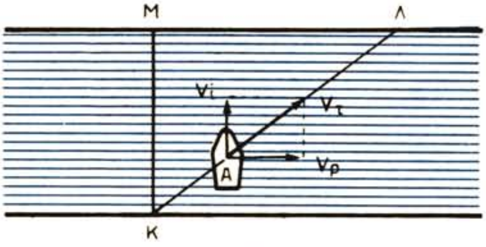
ιι) Εἴδαμε παραπάνω, ὅτι τό ἄθροισμα δυό ἀντιθέτων διανυσμάτων εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα. Γενικά, τό ἄθροισμα διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν (καί μή μηδενικῶν) διανυσμάτων εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα, ἄν τό πέρας τοῦ τελευταίου διανύσματος ταυτίζεται μέ τήν ἀρχή τοῦ πρώτου.

Ἔχομε π.χ. (σχ. 2.1β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

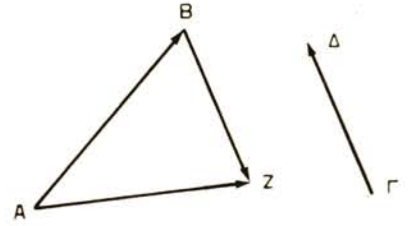
Νά λοιπόν γιατί εἶναι σκόπιμη ἡ **εἰσαγωγή τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος** μέσα στό σύνολο τῶν διανυσμάτων.

Σημείωση: Τό νόημα πού δόθηκε στό ἄθροισμα δυό διανυσμάτων συμβιβάζεται μέ τή «φυσική συμπεριφορά» δυό ὁμοειδῶν διανυσματικῶν μεγεθῶν, ὅταν αὐτά ἐνεργοῦν συγχρόνως.

Ἔτσι π.χ. ἄν Α εἶναι ἕνα ποταμόπλοιο (σχ. 2.1γ), $\overrightarrow{AV_\rho}$ ἡ ταχύτητα τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ καί $\overrightarrow{AV_1} \perp \overrightarrow{AV_\rho}$ ἡ ταχύτητα πού ἀναπτύσσει τό ποταμόπλοιο σέ νερά πού ἠρεμοῦν, τότε: τό ποταμόπλοιο Α θά κινηθεῖ τελικά σάν νά εἶχε ταχύτητα τήν $\overrightarrow{AV_T}$, πού αὐτή δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τή σύνθεση τῶν ταχυτήτων $\overrightarrow{AV_\rho}$ καί $\overrightarrow{AV_1}$· εἶναι δέ $\overrightarrow{AV_T} = \overrightarrow{AV_\rho} + \overrightarrow{AV_1}$. Ἔτσι τό ποταμόπλοιο θά κινηθεῖ κατά μῆκος τῆς εὐθείας ΚΛ καί ὄχι τῆς ΚΜ πού εἶναι παράλληλη τῆς AV_1 (κάθετη πρός τή διεύθυνση τοῦ ρεύματος).



Σχ. 2.1γ.



Σχ. 2.1δ.

γ) **Διαφορά ἑνός διανύσματος $\vec{\beta}$ ἀπό ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$** λέγεται ἕνα διάνυσμα $\vec{\gamma}$, ἄν γιά τό $\vec{\gamma}$ ἰσχύει $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$.

Εἶναι δηλαδή $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma} \iff \vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Ἄν $\vec{\beta_1}$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$, τότε ἔχομε $\vec{\alpha} + \vec{\beta_1} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Πράγματι: $\vec{\beta} + (\vec{\alpha} + \vec{\beta_1}) = \vec{\beta} + (\vec{\beta_1} + \vec{\alpha}) = (\vec{\beta} + \vec{\beta_1}) + \vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Ὥστε: **Γιά νά ἀφαιρέσομε ἕνα διάνυσμα $\vec{\beta}$ ἀπό ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, ἀρκεῖ νά προσθέσομε στό $\vec{\alpha}$ τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$.**

Ἔτσι στό σχῆμα 2.1δ ἔχομε:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{AZ}, \text{ ἄν } \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

2.2 Γινόμενο διανύσματος ἐπί πραγματικόν ἀριθμό.

Ὀνομάζομε **γινόμενο ἑνός διανύσματος $\vec{\alpha}$ ἐπί ἕνα πραγματικόν ἀριθμό $\lambda \neq 0$**, ἕνα διάνυσμα $\vec{\beta}$ πού ἔχει: I) διεύθυνση τήν ἴδια μέ τή διεύθυνση τοῦ $\vec{\alpha}$· II) φορά τήν ἴδια ἤ ἀντίθετη πρός τή φορά τοῦ $\vec{\alpha}$, καθόσον $\lambda > 0$ ἤ $\lambda < 0$· καί III) μέτρο ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ $\vec{\alpha}$ ἐπί τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ λ $(|\vec{\beta}| = |\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|)$.

Ἄν $\lambda = 0$ εἴτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ὁρίζεται: $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Γιά τό γινόμενο διανύσματος ἐπί πραγματικόν ἀριθμό ἰσχύουν οἱ παρακάτω **ἰδιότητες:**

I) $\kappa(\lambda\vec{\alpha}) = (\kappa\lambda)\vec{\alpha} = (\lambda\kappa)\vec{\alpha} = \lambda(\kappa\vec{\alpha})$, ὅπου κ καί λ πραγματικοί ἀριθμοί.

II) $(\kappa + \lambda)\vec{\alpha} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\alpha}$.

Δηλαδή: Ἡ πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διανύσματος ἐπί πραγματικόν ἀριθμό εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν.

III) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ (βλέπε σχῆμα 2.4β).

Δηλαδή: Ἡ πράξη εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση τῶν διανυσμάτων.

Ἀπό τή σχέση $\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$ (μέ $\vec{\alpha} \neq 0$) παράγεται καί ὁ λόγος δυό παραλλήλων διανυσμάτων. Λέμε δηλαδή, ὅτι ὁ λόγος ἑνός διανύσματος $\vec{\beta}$ πρός ἕνα παράλληλο καί μή μηδενικό $\vec{\alpha}$

εἶναι ὁ πραγματικός ἀριθμός λ, καί γράφομε $\dfrac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}} = \lambda$, ὅταν καί μόνο εἶναι $\vec{\beta} = \lambda\,\vec{\alpha}$.

Παρατήρηση: Τό διάνυσμα $(-1)\cdot\vec{\alpha}$ εἶναι, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου διανύσματος ἐπί πραγματικόν ἀριθμό, τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\alpha}$. Ἀντί $(-1)\cdot\vec{\alpha}$ γράφομε συνήθως $-\vec{\alpha}$.

2.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1) Ἄν ἡ ταχύτητα $\overrightarrow{AV_\rho}$ — στό σχῆμα 2.1γ — *ἔχει μέτρο 6 km/h καί ἡ* $\overrightarrow{AV_\iota}$, *8 km/h τότε νά βρεθεῖ: I) Τό μέτρο τῆς ταχύτητας* $\overrightarrow{AV_\tau}$. *II) ὁ χρόνος πού χρειάζεται τό πλοῖο γιά τά περάσει ἀπό τή μιάν ὄχθη τοῦ ποταμοῦ στήν ἄλλη, ἄν τό πλάτος τοῦ ποταμοῦ εἶναι 150 μέτρα.*

I) Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο $AV_\rho V_\tau$ ἔχομε: $\left|\overrightarrow{AV_\rho}\right|^2 + \left|\overrightarrow{V_\rho V_\tau}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AV_\tau}\right|^2$ δηλαδή $\left|\overrightarrow{AV_\tau}\right|^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Longrightarrow \left|\overrightarrow{AV_\tau}\right| = 10$ km/h.

II) Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα $AV_\rho V_\tau$ καί ΛΜΚ παίρνομε:

$$\frac{\mathrm{ΛΚ}}{AV_\tau} = \frac{\mathrm{ΜΚ}}{V_\rho V_\tau} \Longrightarrow \mathrm{ΚΛ} = 150\ \mathrm{m}\cdot\frac{10\ \mathrm{km/h}}{8\ \mathrm{km/h}} = 187{,}5\ \mathrm{m}.$$

Ὁ χρόνος $$t = \frac{\mathrm{s}\ \ \text{διάστημα}}{\left|\vec{\upsilon}\right|\ \text{μέτρο ταχύτητας}} = \frac{187{,}5\ \mathrm{m}}{10\,\mathrm{km/h}} \qquad (1)\cdot$$

ἀλλά $10\ \mathrm{km/h} = \dfrac{10000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \dfrac{25}{9}\ \mathrm{m/s}$ καί ἡ τιμή τῆς (1) γίνεται $\dfrac{187{,}5\cdot 9}{25}\ \mathrm{s} = 67{,}5\ \mathrm{s} = 1$ λεπτό καί 7,5 δευτερόλεπτα.

2) Θεωροῦμε τρία διαφορετικά σημεῖα Α, Β, Γ καί γράφομε τίς σχέσεις:

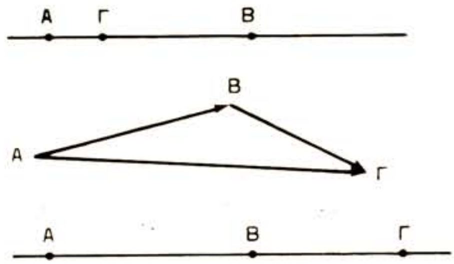
I) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}\cdot$ *II)* $AB + B\Gamma = A\Gamma$ (σχ. 2.3α).

Τί παρατηρήσεις ἔχετε νά διατυπώσετε γι' αὐτές τίς σχέσεις;

Ἡ πρώτη σχέση ἐκφράζει τό ἄθροισμα δυό διαδοχικῶν διανυσμάτων, καί εἶναι σωστή, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, γιά ὁποιαδήποτε σημεῖα Α, Β, Γ, εἴτε αὐτά ἀνήκουν εἴτε δέν ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία.

Ἡ δεύτερη σχέση ἀναφέρεται σέ εὐθύγραμμα τμήματα (ὄχι σέ διανύσματα) καί εἶναι σωστή μόνο σέ μιά εἰδική περίπτωση· ὅταν τά σημεῖα εἶναι συνευθειακά καί ἐφόσον τό Β κεῖται μεταξύ τῶν Α καί Γ. Σέ κάθε ἄλλη περίπτωση ἔχομε $AB + B\Gamma > A\Gamma$.

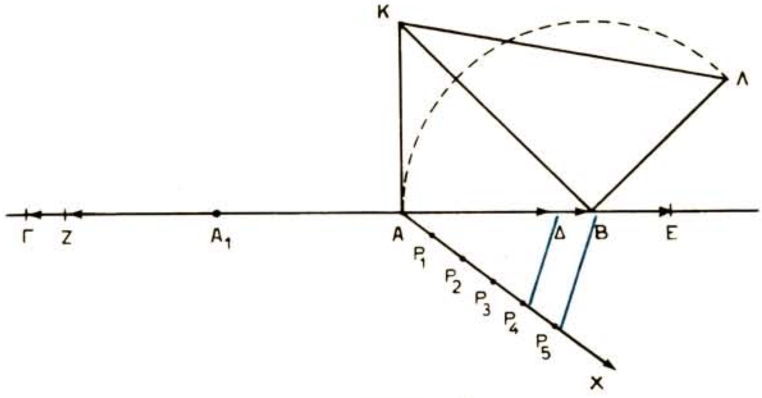
Δέν εἶναι χωρίς ἀξία νά παρατηρήσομε ἀκόμα (γιά ἄλλη μιά φορά) ὅτι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$, ἐνῶ τό ἄθροισμα $AB + B\Gamma + \Gamma A$ δίνει τήν περίμετρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 2.3α.

3) Ἂν $\overrightarrow{AB}$ ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα, νά κατασκευασθοῦν πάνω στό φορέα του διανύσματα ἴσα πρός $-2\cdot\overrightarrow{AB}$, $\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ καί $-\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Γιά νά ὁρίσομε ἕνα διάνυσμα ἴσο μέ $-2\overrightarrow{AB}$ παίρνομε, πάνω στήν ἡμιευθεία τήν ἀντίθετη τῆς ἡμιευθείας ΑΒ, δυό διαδοχικά τμήματα ἴσα μέ τό τμῆμα ΑΒ, τά AA_1 καί $A_1\Gamma$ (σχ. 2.3β).



Σχ. 2.3β.

Τότε διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma} = -2\overrightarrow{AB}$.

Γιά νά ὁρίσομε διάνυσμα ἴσο μέ $\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$, φέρομε τυχαία ἡμιευθεία Αx καί πάνω σ' αὐτή παίρνομε τά διαδοχικά καί ἴσα μεταξύ τους τμήματα AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5 (τό πρῶτο αὐθαίρετα)· ἀκολούθως φέρνομε τήν P_5B καί ἀπό τό P_4 τήν παράλληλη εὐθεία πρός τήν P_5B. Ἂν Δ τό σημεῖο τομῆς αὐτῆς τῆς τελευταίας μέ τήν ἡμιευθεία ΑΒ, τότε διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{4}{5}\,\overrightarrow{AB}$.

Γιά τόν προσδιορισμό διανυσμάτων ἴσων μέ $\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ καί $-\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{AB}$ ἐκτελοῦμε τά ἑπόμενα βήματα. Μέ μιά κάθετη πλευρά τήν ΑΒ σχεδιάζομε τό ἰσοσκελές ὀρθογώνιο τρίγωνο ΚΑΒ ($\widehat{KAB} = 1^L$, ΑΚ = ΑΒ)· ἀκολούθως φέρομε τή ΒΛ ⊥ ΒΚ καί παίρνομε τμῆμα ΒΛ ἴσο μέ ΑΒ.

Ἔχομε: $(KB)^2 = (AB)^2 + (AK)^2 = 2(AB)^2 \Longrightarrow KB = \sqrt{2}\cdot AB$ καί

$$(K\Lambda)^2 = (KB)^2 + (B\Lambda)^2 = 2(AB)^2 + (AB)^2 = 3(AB)^2 \Longrightarrow K\Lambda = \sqrt{3}\cdot AB.$$

Ἔτσι βλέπομε ὅτι τό τμῆμα ΚΒ ἔχει μέτρο τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ ΑΒ ἐπί τόν πραγματικό ἀριθμό $\sqrt{2}$ καί τό ΚΛ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ ΑΒ ἐπί τόν ἀριθμό $\sqrt{3}$. Παίρνομε τώρα, πάνω στήν ἡμιευθεία ΑΒ, τμῆμα ΑΕ ἴσο μέ τό ΚΒ καί, πάνω στήν ἀντίθετη ἡμιευθεία τῆς ΑΒ, τμῆμα ΑΖ ἴσο μέ ΚΛ· τό διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ εἶναι τότε ἴσο μέ τό $\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ καί τό $\overrightarrow{AZ}$ ἴσο μέ $-\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{AB}$.

2.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά ὑπολογισθεῖ τό μέτρο τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$ ἄν:

I) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=8\ \text{cm}$ καί γωνία $\widehat{AB\Gamma}=120°$· II) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=5\ \text{cm}$, $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=12\ \text{cm}$ καί γωνία $\widehat{AB\Gamma}=90°$.

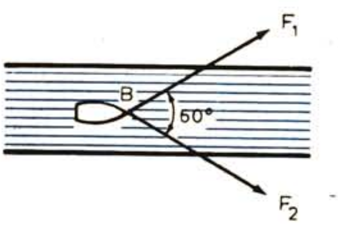
2. I) Σχεδιάστε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί ἀκολούθως προσδιορίστε τά διανύσματα:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}\ \text{καί}\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

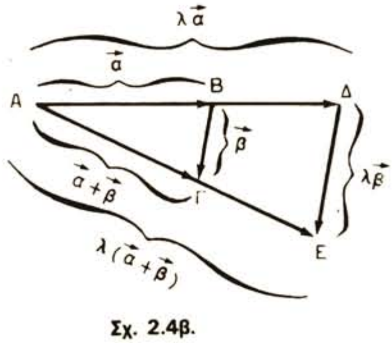
II) Σχεδιάστε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί ἀκολούθως προσδιορίστε τά διανύσματα:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$.

3. Δυό ἐργάτες τραβοῦν, ἀπό τίς ὄχθες ἑνός καναλιοῦ (ὁ ἕνας ἀπό τή μιά καί ὁ ἄλλος ἀπό τήν ἄλλη), μιά βάρκα (σχ. 2.4α). Ἄν ὁ καθένας ἀσκεῖ δύναμη ἐντάσεως 20 kp καί τά σκοινιά ἕλξεως σχηματίζουν γωνία 60°, νά καθορισθεῖ ἡ διεύθυνση κινήσεως τῆς βάρκας καί ἡ δύναμη πού ἀσκεῖται πάνω της.



Σχ. 2.4α.



Σχ. 2.4β.

4.* Μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος 2.4β καί στηριζόμενοι στίς ἰδιότητες τῶν ὁμοίων τριγώνων ν' ἀποδείξετε τήν ἰδιότητα $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

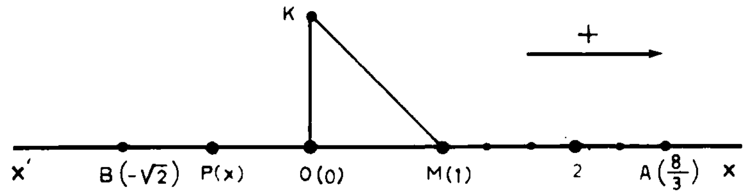
Η ΕΥΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΝΩ Σ' ΑΥΤΗ

3.1 Προσανατολισμένη εὐθεία-ἄξονας. Τετμημένη σημείου.

Ὅπως ὅλοι γνωρίζομε, πάνω σέ μιά εὐθεία διακρίνομε δυό ἀντίθετες φορές· δηλαδή δυό τρόπους διατάξεως τῶν σημείων της.

Ἂν λοιπόν, πάνω σέ μιά ἀπέρατη εὐθεία $x'x$ (σχ. 3.1), ἡ μιά ἀπό τίς δυό φορές (κατευθύνσεις) χαρακτηρισθεῖ ὡς **θετική φορά** (καί συνεπῶς ἡ ἄλλη ὡς ἀρνητική), τότε αὐτή ἡ εὐθεία λέγεται **προσανατολισμένη**.

Σημείωση: Παίρνομε συνήθως ὡς θετική φορά αὐτή πού δηλώνομε μέ τήν ἔκφραση «ἀπ' ἀριστερά πρός τά δεξιά».



Σχ. 3.1.

Προχωροῦμε τώρα στόν ἐφοδιασμό μιᾶς προσανατολισμένης εὐθείας καί μέ ἄλλα στοιχεῖα.

Παίρνομε ἀρχικά πάνω στήν προσανατολισμένη εὐθεία ἕνα σημεῖο O (ὅποιο θέλομε) καί θεωροῦμε τίς δυό ἡμιευθεῖες μέ ἀρχή τό O. Αὐτή πού διαγράφεται κατά τή θετική φορά θά τήν ὀνομάζομε **θετική ἡμιευθεία**, μέ ἀρχή τό O, καί τήν ἄλλη **ἀρνητική**.

Ὁρίζομε ἀκολούθως, στή θετική ἡμιευθεία, ἕνα σημεῖο M (σχ. 3.1), τέτοιο ὥστε τό τμῆμα OM νά εἶναι ἐκεῖνο πού θέλομε νά χρησιμοποιοῦμε ὡς μονάδα μήκους.

Τό σημεῖο M, ὅπως καί τό τμῆμα OM, λέγεται **μοναδιαῖο**· ἐπίσης καί τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **μοναδιαῖο διάνυσμα**.

Ὅταν ὅλα αὐτά ἔχουν γίνει, λέμε ὅτι ἔχομε ὁρίσει πάνω στήν εὐθεία ἕναν **ἄξονα**· ἤ συντομότερα:

«Ἡ εὐθεία ἔγινε ἕνας ἄξονας».

Τώρα μποροῦμε ν' ἀντιστοιχίσομε σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα ἕνα καί μόνον ἕνα πραγματικόν ἀριθμό.

Στήν ἀρχή O τοῦ ἄξονα ἀντιστοιχίζεται ὁ ἀριθμός μηδέν καί στό σημεῖο M ὁ ἀριθμός 1.

Σ' ἕνα σημεῖο A τοῦ **θετικοῦ ἡμιάξονα** ἀντιστοιχίζεται ὁ θετικός ἀριθμός πού προκύπτει ἀπό τή μέτρηση τοῦ τμήματος OA μέ μονάδα τό OM. Ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι καί τό μέτρο τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$.

Σ' ἕνα σημεῖο B τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονα ἀντιστοιχίζεται ἕνας ἀρνητικός ἀριθμός· ὁ ἀντίθετος ἀκριβῶς τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$.

Ἀντίστροφα, ἕνας πραγματικός ἀριθμός εἶναι ἀντίστοιχος ἑνός καί μόνο σημείου τοῦ ἄξονα. Ὁ ἀριθμός π.χ. $\frac{8}{3}$ εἶναι ἀντίστοιχος τοῦ σημείου Α τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα (σχ. 3.1), ἄν βέβαια τό τμῆμα ΟΑ προκύπτει ἀπό τό ἄθροισμα δυό τμημάτων ἴσων πρός τό ΟΜ καί δυό τμημάτων ἴσων πρός τό τρίτο τοῦ ΟΜ. Ὅμοια ὁ ἀριθμός $-\sqrt{2}$ εἶναι ἀντίστοιχος τοῦ σημείου Β τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονα, ἄν τό τμῆμα ΟΒ εἶναι ἴσο μέ τήν ὑποτείνουσα ΚΜ τοῦ ὀρθογωνίου καί ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΚΟΜ (σχ. 3.1).

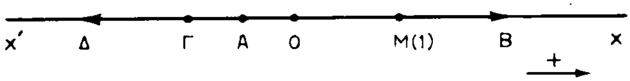
Ἔτσι ἔχομε κατασκευάσει μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἄξονα καί ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν· ἔχομε, ὅπως λέμε, κατασκευάσει τήν **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**.

Ὁ **πραγματικός ἀριθμός**, πού ἀντιστοιχίζεται σ' ἕνα σημεῖο Ρ ἑνός ἄξονα, λέγεται **τετμημένη** αὐτοῦ τοῦ σημείου.

Σημειώνομε γενικά τήν τετμημένη π.χ. μέ τό γράμμα x· καί δηλώνομε ὅτι τό σημεῖο Ρ ἔχει τετμημένη x μέ τή γραφή Ρ(x). Οἱ συμβολισμοί π.χ. $A\left(\frac{8}{3}\right)$ καί $B(-\sqrt{2})$ σημαίνουν ὅτι τό Α ἔχει τετμημένη $\frac{8}{3}$ καί τό Β, $-\sqrt{2}$.

3.2 Τετμημένη διανύσματος παραλλήλου πρός ἄξονα.

Θεωροῦμε ἕναν ἄξονα x′x καί πάνω σ' αὐτόν (ἤ σέ εὐθεῖες παράλληλές του) παίρνομε διάφορα ἐφαρμοστά διανύσματα, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ κτλ. (σχ. 3.2).



Σχ. 3.2.

Θά ὀνομάζομε **τετμημένη ἑνός διανύσματος** $\overrightarrow{AB}$, πού εἶναι παράλληλο πρός ἕναν ἄξονα x′x ἤ κεῖται πάνω σ' αὐτόν, τό λόγο $\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}}$, ὅπου $\overrightarrow{OM}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ ἄξονα. Γράφομε συμβολικά $\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}}$, ὁπότε $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Ἡ τετμημένη ἑνός διανύσματος εἶναι θετικός ἀριθμός, ἄν φορά τοῦ διανύσματος εἶναι ἐκείνη πού χαρακτηρίστηκε ὡς θετική φορά τοῦ ἄξονα· ἰσοῦται τότε ἡ τετμημένη μέ τό μέτρο τοῦ διανύσματος. (Στό σχῆμα 3.2 εἶναι $\overline{AB} > 0$).

Ἄν τό διάνυσμα ἔχει φορά τήν ἀρνητική τοῦ ἄξονα, τότε ἡ τετμημένη του ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό τόν ἀντίθετο τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος. (Στό σχῆμα 3.2 εἶναι $\overline{\Gamma\Delta} < 0$).

Ἄν P ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα, τότε ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{OP}$, ὅπου O ἡ ἀρχή, ταυτίζεται μέ τήν τετμημένη τοῦ σημείου P. (σχ. 3.1)

Εἶναι ἐξάλλου φανερό ὅτι δυό ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα* ἑνός ἄξονα ἔχουν ἴσες τετμημένες καί ἀντίστροφα, ἄν οἱ τετμημένες δυό ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, πάνω στόν αὐτόν ἄξονα, εἶναι ἴσες, τότε καί τά διανύσματα θά εἶναι ἴσα.

Ἀκόμα εἶναι εὔκολο νά συμπεράνομε ὅτι: **ὁ λόγος δυό διανυσμάτων, παραλλήλων πρός ἕναν ἄξονα, ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν τετμημένων τους.**

$\left(\text{Ἄν } \vec{\alpha} \text{ καί } \vec{\beta} \text{ δυό παράλληλα διανύσματα πρός ἕναν ἄξονα, τότε } \dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\right)$.

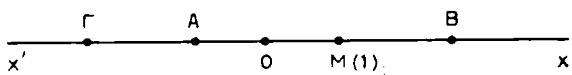
3.3 Πρόταση τοῦ Chasles (Σάλ).

Παίρνομε ἕναν ἄξονα $x'x$ καί πάνω σ' αὐτόν τρία τυχαῖα σημεῖα A, B, Γ (σχ. 3.3)

Γιά τίς τετμημένες $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$ καί $\overline{A\Gamma}$ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ καί $\overrightarrow{A\Gamma}$ ἰσχύει ἡ ἑπόμενη σχέση:

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma} \quad \textbf{(σχέση Σάλ).}$$

Δηλαδή: Τό ἄθροισμα τῶν τετμημένων δυό διανυσμάτων, παραλλήλων πρός ἄξονα, ἰσοῦται μέ τήν τετμημένη τοῦ ἀθροίσματος τῶν διανυσμάτων.



Σχ. 3.3.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, εἶναι διαδοχικά, ἰσχύει (σύμφωνα μέ τό γνωστό ὁρισμό) ἡ σχέση $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ (1).

Ἄν $\vec{\mu} = \overrightarrow{OM}$ (ὅπου $\overrightarrow{OM}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα), τότε $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{\mu}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \overline{B\Gamma} \cdot \vec{\mu}$ καί $\overrightarrow{A\Gamma} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu}$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται:

$\overline{AB} \cdot \vec{\mu} + \overline{B\Gamma} \cdot \vec{\mu} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu}$ ἤ (σύμφωνα μέ τόν ἐπιμεριστικό νόμο) $(\overline{AB} + \overline{B\Gamma})\vec{\mu} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu}$ (2).

Ἀλλά ἀπό τή (2) συμπεραίνομε ὅτι $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$ (γιατί;)

Ἕνα σημαντικό πόρισμα. Ἄς εἶναι A καί B σημεῖα (διαφορετικά) ἑνός ἄξονα μέ τετμημένες ἀντίστοιχα α καί β ($\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$).

Ἔχομε: $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB}$ (σχέση τοῦ Chasles γιά τά σημεῖα A,O,B)

ἤ $\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB}$· δηλαδή $\boxed{\overline{AB} = \beta - \alpha}$

---

* Ἕνα διάνυσμα πού μετατοπίζεται πάνω στό φορέα του λέγεται συνήθως **ὀλισθαῖνον διάνυσμα.**

Ὥστε: **Ἡ τετμημένη ἑνός διανύσματος πάνω σέ ἄξονα ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπό τήν τετμημένη τοῦ πέρατος τοῦ διανύσματος.**

Παρατηρήσεις: I) Δέν πρέπει νά μᾶς διαφεύγει τό γεγονός, ὅτι ἡ προηγούμενη σχέση τοῦ Chasles εἶναι μιά σχέση ἀριθμητική. (Σημειώνεται στό πρῶτο μέλος της τό ἄθροισμα δυό πραγματικῶν ἀριθμῶν).

II) Ἡ σχέση $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{A\Gamma}$ δέν ἔχει νόημα ἄν τά σημεῖα Α, Β, Γ δέν ἀνήκουν στόν αὐτόν ἄξονα (ἄν δηλαδή εἶναι κορυφές τριγώνου), διότι τότε οἱ φορές τῶν διανυσμάτων δέν συσχετίζονται.

III) Ἡ σχέση $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$ ἔχει νόημα γιά ὁποιαδήποτε σημεῖα, ἀλλά δέν ἀληθεύει ὅταν τά σημεῖα δέν ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία ἤ ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία ἀλλά δέν ἔχουν κατάλληλη διάταξη.

Μποροῦμε νά γράφομε (γιά κάθε περίπτωση) $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\geqslant\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$ (ὑποτίθεται ὅτι χρησιμοποιήθηκε τό ἴδιο τμῆμα ὡς μονάδα μετρήσεως).

Ἡ ἰσότητα ἰσχύει ὅταν τά σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι συνευθειακά καί τό Β κεῖται μεταξύ τῶν Α καί Γ.

IV) Ἡ σχέση $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{A\Gamma}$ μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς: $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A}=0$, διότι: $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{A\Gamma} \Leftrightarrow \overline{AB}+\overline{B\Gamma}-\overline{A\Gamma}=0 \Leftrightarrow \overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A}=0$.

3.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ἄν $A(x_1)$ καί $B(x_2)$ σημεῖα ἄξονα καί Κ τό μέσο τοῦ ΑΒ, τότε ἡ τετμημένη τοῦ Κ ἰσοῦται μέ $\frac{x_1+x_2}{2}$.

(Δηλαδή: **Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου ἑνός τμήματος, πάνω σέ ἄξονα, ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος).**

Ἔχομε: $\overline{OK}=\overline{OA}+\overline{AK}$· ἀλλά $\overline{OA}=x_1$ καί $\overline{AK}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{x_2-x_1}{2}$ (γιατί;)·

συνεπῶς $\overline{OK}=x_1+\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$.

2. I) Ἄν Α, Β, Γ, Δ ὁποιαδήποτε σημεῖα ἑνός ἄξονα, τότε:

$$\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{A\Delta}.$$

II) Ἄν $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{\nu-1}, P_\nu$ σημεῖα μέ ὁποιαδήποτε διάταξη πάνω σ᾽ ἕναν ἄξονα, τότε $\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\ldots+\overline{P_{\nu-1}P_\nu}=\overline{P_1P_\nu}$.

I) Ἔχομε: $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}=(\overline{AB}+\overline{B\Gamma})+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{A\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{A\Delta}$.

II) Ἔχομε:
$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_3}$$
$$\overline{P_1P_3}+\overline{P_3P_4}=\overline{P_1P_4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$\overline{P_1P_{\nu-1}}+\overline{P_{\nu-1}P_\nu}=\overline{P_1P_\nu}$ · προσθέτομε τά ὁμώνυμα μέλη τῶν παρα-

πάνω ἰσοτήτων καί παίρνομε:

$$\left(\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \ldots + \overline{P_{\nu-1}P_\nu}\right) + \overline{P_1P_3} + \overline{P_1P_4} + \ldots + \overline{P_1P_{\nu-1}} =$$
$$= \overline{P_1P_3} + \overline{P_1P_4} + \ldots + \overline{P_1P_{\nu-1}} + \overline{P_1P_\nu} \Longrightarrow \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \ldots + \overline{P_{\nu-1}P_\nu} = \overline{P_1P_\nu}$$

3) *Ἄν A, B, Γ, Δ σημεῖα ἄξονα ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι:* $\overline{\Delta A}^2 \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta B}^2 \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{\Delta\Gamma}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = 0$.

Ἔχομε $\overline{\Delta A}^2 \cdot \overline{B\Gamma} = (\alpha - \delta)^2 \cdot (\gamma - \beta) = \gamma\alpha^2 - 2\alpha\delta\gamma + \gamma\delta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\delta\beta - \beta\delta^2$.

Ὅμοια $\overline{\Delta B}^2 \cdot \overline{\Gamma A} = \alpha\beta^2 - 2\beta\delta\alpha + \alpha\delta^2 - \gamma\beta^2 + 2\beta\gamma\delta - \gamma\delta^2$ καί $\overline{\Delta\Gamma}^2 \cdot \overline{AB} = \beta\gamma^2 - 2\gamma\delta\beta + \beta\delta^2 - \alpha\gamma^2 + 2\gamma\delta\alpha - \alpha\delta^2$.

Ἔτσι παίρνομε $\overline{\Delta A}^2 \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta B}^2 \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{\Delta\Gamma}^2 \cdot \overline{AB} = \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 - \beta\alpha^2 - \gamma\beta^2 - \alpha\gamma^2$ (1).

Ἐξάλλου $\overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma) = -\alpha\beta^2 - \gamma\alpha^2 - \beta\gamma^2 + \beta\alpha^2 + \gamma\beta^2 + \alpha\gamma^2$ (2).

Ἀπό τίς (1) καί (2) παίρνομε τελικά τή ζητούμενη (προσθέτοντας τά ὁμώνυμα μέλη).

3.5 Ἀσκήσεις.

1. Πάνω σέ ἄξονα θεωροῦμε:

I) Τά σημεῖα A (7,5) καί B (2,3)· νά καθορισθεῖ ἡ τετμημένη καί τό μέτρο τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

II) Τό σημεῖο $\Delta\left(-\frac{6}{7}\right)$ καί τό ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ μέ τετμημένη -2. Νά καθορισθεῖ τό μέτρο τοῦ διανύσματος καί ἡ τετμημένη τοῦ E.

2. Δίνονται τά σημεῖα A, B, Γ, Δ ἑνός ἄξονα γιά τά ὁποῖα ἔχομε: $\overline{AB} = -8$, $\overline{B\Gamma} = -3$ καί $\overline{\Gamma\Delta} = +5$. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί $\overline{\Gamma A}$, $\overline{A\Delta}$, $\overline{\Delta B}$, $\overline{B\Gamma} + \overline{\Delta A}$.

3. Πάνω σ' ἄξονα παίρνομε τά σημεῖα $A(-1)$, $B\left(-\frac{17}{5}\right)$, $\Gamma(\sqrt{2})$ καί $\Delta(4)$.

I) Νά ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοί $\overline{AB}$, $\overline{A\Gamma}$, $\overline{\Delta A}$, $\overline{\Gamma B}$.

II) Ἄν O ἡ ἀρχή τοῦ ἄξονα καί πάρομε σάν νέα ἀρχή τό σημεῖο O_1 γιά τό ὁποῖο $\overline{OO_1} = -2$, νά βρεθοῦν οἱ νέες τετμημένες τῶν σημείων A, B, Γ καί Δ.

(Ὑποτίθεται ὅτι διατηροῦμε τό μῆκος τοῦ μοναδιαίου διανύσματος).

4. Ἄν A, B, Γ σημεῖα ἑνός ἄξονα, K τό μέσο τοῦ AB καί Λ τό μέσο τοῦ BΓ τότε:

I) $\overline{\Gamma A} + \overline{\Gamma B} = 2\overline{\Gamma K}$ καί II) $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = \overline{A\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\Lambda}^2$.

5. Δίνεται σέ ἄξονα ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τό ὁποῖο ἔχει τετμημένη $\overline{AB} = 8$. Νά κατασκευασθεῖ τό σημεῖο P τοῦ ἄξονα γιά τό ὁποῖο εἶναι:

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{4}{9} \text{ ἤ } -\frac{3}{2} \text{ ἤ } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ἤ } \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

6. Ἄν γιά τά σημεῖα ἑνός ἄξονα ἰσχύει ἡ ἰσότητα $\overline{AB}^3 + \overline{B\Gamma}^3 + \overline{\Gamma A}^3 = 0$, τότε δύο τουλάχιστον ἀπ' αὐτά συμπίπτουν. (Ὑπόδειξη: ἐφαρμόστε τήν ταυτότητα

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ στό ἄθροισμα $\overline{AB}^3 + \overline{B\Gamma}^3$).

7. Ἄν A, B, Γ, Δ σημεῖα ἑνός ἄξονα τότε:

I) $\overline{\Delta A} \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta B} \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{\Delta\Gamma} \cdot \overline{AB} = 0$

II) $\overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma\Delta} \cdot \overline{\Delta B} - \overline{\Gamma\Delta} \cdot \overline{\Delta A} \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{\Delta A} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{B\Delta} - \overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = 0$.

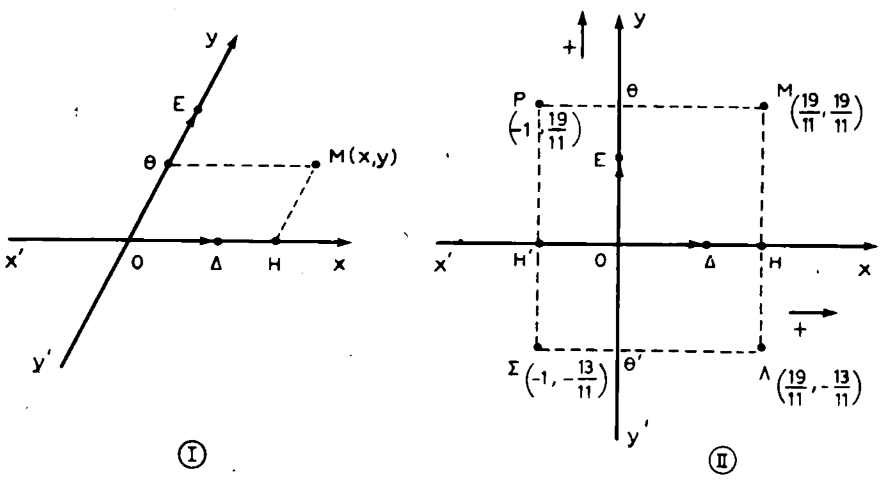
8. Ἄν A(α), B(β), P(x) σημεῖα ἑνός ἄξονα καί τέτοια ὥστε νά ἔχομε $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ τετμημένη x τοῦ P συναρτήσει τῶν α, β καί λ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

4.1 Συντεταγμένες σημείου ὡς πρός δύο ἄξονες.

Παίρνομε πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο δυό τεμνόμενες εὐθεῖες $x'x$ καί $y'y$ καί ἄς εἶναι Ο τό σημεῖο τῆς τομῆς τους [σχ. 4.1 (Ι καί ΙΙ)]. Προσανατολίζομε τίς εὐθεῖες καί, μέ κοινή ἀρχή τό σημεῖο τομῆς τους Ο, καθορίζομε τά μοναδιαῖα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΔ}$ καί $\overrightarrow{ΟΕ}$, ἀντίστοιχα πάνω στή $x'x$ καί $y'y$. Ἔτσι ἔχομε κατασκευάσει στό ἐπίπεδο **ἕνα σύστημα δυό ἀξόνων.**



Σχ. 4.1.

Μέ βάση αὐτό τό σύστημα (καί κάθε παρόμοιο), μποροῦμε νά ἀντιστοιχίζομε κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου πρός ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἀντίστροφα κάθε διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν πρός ἕνα καί μόνο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.

Νά πῶς πραγματώνεται αὐτή ἡ ἀντιστοιχία.

Ἀπό τό σημεῖο Μ φέρνομε τίς παράλληλες πρός τίς $y'y$ καί $x'x$ καί ἄς εἶναι Η καί Θ τά σημεῖα τομῆς τους μέ τούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$ ἀντίστοιχα.

Ἡ τετμημένη τοῦ Η, ὁ λόγος δηλαδή $x = \dfrac{\overrightarrow{ΟΗ}}{\overrightarrow{ΟΔ}}$, θά λέγεται τώρα **τετμημένη τοῦ σημείου Μ** καί ἡ τετμημένη τοῦ Θ, ὁ λόγος $y = \dfrac{\overrightarrow{ΟΘ}}{\overrightarrow{ΟΕ}}$, θά λέγεται (γιά διάκριση) **τεταγμένη τοῦ σημείου Μ.**

Οἱ δυό αὐτοί ἀριθμοί x καί y λέγονται μαζί **καρτεσιανές ἤ παράλληλες**

συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ· καί γιά νά δηλώσομε ὅτι ἕνα σημεῖο Μ ἔχει συντεταγμένες τούς ἀριθμούς π.χ. $\frac{-\sqrt{6}}{5}$ καί 49 γράφομε $M\left(\frac{-\sqrt{6}}{5}, 49\right)$.

Τό ζεῦγος (x, y), τῶν συντεταγμένων ἑνός σημείου Μ, εἶναι ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχίζεται σ' αὐτό τό σημεῖο.

Ἀντίστροφα, ἄν (x, y) εἶναι ἕνα δοσμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε σ' αὐτό ἀντιστοιχίζεται – πάντα μέ βάση τό σύστημα τῶν ἀξόνων πού ἔχομε κατασκευάσει – ἕνα καί μόνο σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου. Τό σημεῖο Μ προσδιορίζεται μέ τήν ἀκόλουθη διαδικασία.

Πάνω στόν ἄξονα x'x τῶν **τετμημένων** παίρνομε ἐκεῖνο τό σημεῖο Η πού ἔχει τετμημένη x καί πάνω στόν ἄξονα y'y τῶν **τεταγμένων** παίρνομε ἐκεῖνο τό σημεῖο Θ πού ἔχει τετμημένη y.

Ἀπό τό Η φέρνομε παράλληλη πρός τήν y'y καί ἀπό τό Θ παράλληλη πρός τήν x'x· τό σημεῖο τομῆς αὐτῶν τῶν δυό εὐθειῶν πού φέραμε εἶναι τό μοναδικό σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου πού ἀντιστοιχίζεται στό ζεῦγος (x, y).

Τό σημεῖο πού ὁρίζεται π.χ. ἀπό τό ζεῦγος (–2, 5) εἶναι, ὅπως εὔκολα βλέπομε, διαφορετικό ἀπό τό σημεῖο πού ὁρίζεται ἀπό τό ζεῦγος (5, –2)· ἐφόσον βέβαια ὁ ἀριθμός πού κατέχει τήν πρώτη θέση εἶναι πάντα ἡ τετμημένη, καί ὁ ἑπόμενος ἡ τεταγμένη. Βλέπομε συνεπῶς ὅτι, τά ζεύγη (–2, 5) καί (5, –2) εἶναι διαφορετικά (δέν εἶναι ἴσα), μολονότι ἀποτελοῦνται ἀπό τά ἴδια στοιχεῖα. Τέτοια ζεύγη, ὅπου ἡ ἀλλαγή τῆς σειρᾶς τῶν στοιχείων συνεπάγεται καί ἀλλαγή τοῦ «ἀντικειμένου» πού ἐκφράζουν, λέγονται **διατεταγμένα ζεύγη**.

Ὅταν λοιπόν δίνομε ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς συντεταγμένες ἑνός σημείου, δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι, ὁ πρῶτος ἀριθμός θά εἶναι πάντα ἡ τετμημένη τοῦ σημείου καί ὁ δεύτερος ἡ τεταγμένη.

Τά σημεῖα τοῦ ἄξονα x'x δίνονται τώρα μέ ζεύγη, τῶν ὁποίων τό δεύτερο στοιχεῖο εἶναι ὁ ἀριθμός 0· δηλαδή μέ ζεύγη τῆς μορφῆς (x, 0). Ὅμοια τά σημεῖα τοῦ ἄξονα y'y δίνονται μέ ζεύγη τῶν ὁποίων τό πρῶτο στοιχεῖο εἶναι ὁ ἀριθμός 0, δηλαδή μέ ζεύγη τῆς μορφῆς (0, y). Ἡ ἀρχή τέλος τῶν ἀξόνων δίνεται ἀπό τό ζεῦγος (0, 0).

Ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ ἄξονες μπορεῖ, ἀπό λογική ἄποψη, νά εἶναι ὁποιαδήποτε. Ἐντούτοις οἱ περισσότεροι τύποι καί ἐξισώσεις, πού μορφώνομε μέ τίς συντεταγμένες ἤ γιά τίς συντεταγμένες σημείων, εἶναι ἁπλούστεροι ὅταν οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι.

Γι' αὐτό τό λόγο κυρίως θά παίρνομε ἀπό δῶ καί πέρα, χωρίς ἐξαίρεση, τούς ἄξονες ὀρθογώνιους.

Ἐξάλλου τά μήκη τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων μπορεῖ γενικά νά εἶναι ἄνισα· συνηθίζεται ὅμως, ἐκτός ἀπό ἐξαιρετικές περιπτώσεις, νά παίρνονται ἰσομήκη.

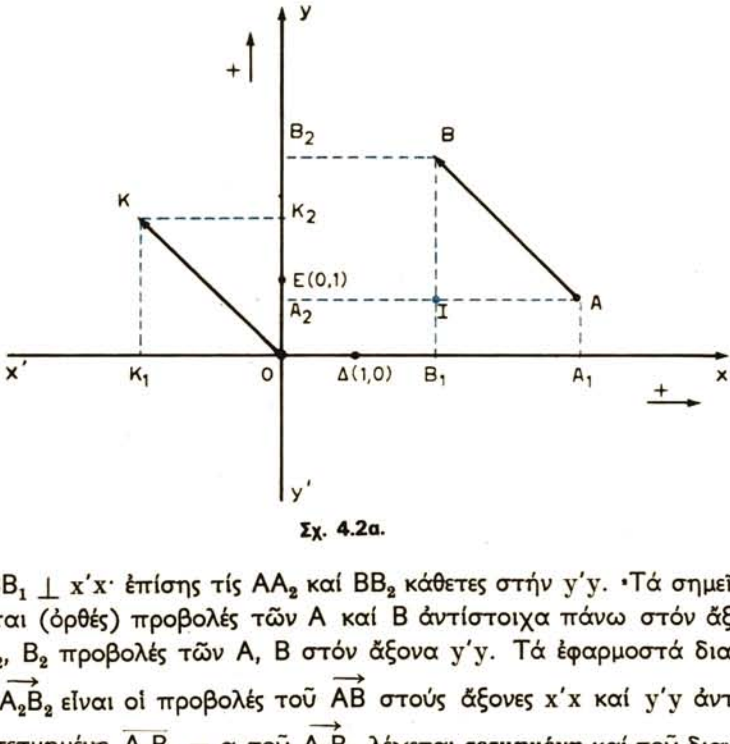
Ἕνα τέτοιο σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων, ὅπου δηλαδή οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι καί τά μοναδιαῖα διανύσματα εἶναι ἰσομήκη, λέγεται **ὀρθοκανονικό**.

Παρατήρηση: Είναι εύκολο νά διαπιστώσομε ὅτι:

Ὅταν ἕνα σημεῖο ἀνήκει στό ἐσωτερικό τῆς πρώτης γωνίας $x\widehat{O}y$ (Ox, Oy οἱ θετικοί ἡμιάξονες), τότε καί οἱ δυό συντεταγμένες εἶναι θετικοί ἀριθμοί· ὅταν ἀνήκει στό ἐσωτερικό τῆς 2ης γωνίας $y'\widehat{O}x$, τότε εἶναι $x < 0$ καί $y > 0$· ὅταν ἀνήκει στό ἐσωτερικό τῆς τρίτης γωνίας $x'\widehat{O}y'$ εἶναι $x < 0$ καί $y < 0$· ὅταν τέλος ἀνήκει στό ἐσωτερικό τῆς τέταρτης γωνίας $y'\widehat{O}x$ εἶναι $x > 0$ καί $y < 0$.

4.2 Συντεταγμένες διανυσμάτων στό ἐπίπεδο καί βασικές σχέσεις.

α) Συντεταγμένες ἐφαρμοστοῦ καί ἐλευθέρου διανύσματος. Πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο κατασκευάζομε ἕνα **ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων**· καί ἄς εἶναι $\overrightarrow{AB}$ ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 4.2α) Φέρνομε τήν $AA_1 \perp x'x$



Σχ. 4.2α.

καί τήν $BB_1 \perp x'x$· ἐπίσης τίς AA_2 καί BB_2 κάθετες στήν $y'y$. Τά σημεῖα A_1 καί B_1 λέγονται (ὀρθές) προβολές τῶν A καί B ἀντίστοιχα πάνω στόν ἄξονα $x'x$, καί τά A_2, B_2 προβολές τῶν A, B στόν ἄξονα $y'y$. Τά ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{A_1B_1}$ καί $\overrightarrow{A_2B_2}$ εἶναι οἱ προβολές τοῦ $\overrightarrow{AB}$ στούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$ ἀντίστοιχα.

Ἡ τετμημένη $\overline{A_1B_1} = \alpha$ τοῦ $\overrightarrow{A_1B_1}$ λέγεται **τετμημένη** καί τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καί ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ λέγεται **τεταγμένη** τοῦ $\overrightarrow{AB}$· οἱ δυό μαζί λέγονται (καρτεσιανές) **συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{AB}$.**

Ἐπειδή: $\overline{OA_1} + \overline{A_1B_1} = \overline{OB_1} \Rightarrow x_1 + \alpha = x_2$, θά εἶναι:

$\boxed{\alpha = x_2 - x_1}$ ὅμοια παίρνομε $\boxed{\beta = y_2 - y_1}$

Δηλαδή: **«Παίρνομε τίς συντεταγμένες προβολές ἑνός διανύσματος, ἄν ἀπό τίς συντεταγμένες τοῦ πέρατος ἀφαιρέσομε τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του».**

Ἄς **σχεδιάσομε** τώρα τό ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$, ἴσο πρός τό $\overrightarrow{AB}$, μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων (σχ. 4.2α).

Ἀπό τά ἴσα τρίγωνα ABI καί OKK_1 παίρνομε $\overrightarrow{OK_1} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A_1B_1}$ καί $\overrightarrow{OK_2} = \overrightarrow{K_1K} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Συμπεραίνομε λοιπόν ὅτι:

«Δυό ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα ἔχουν ἴσες ὁμώνυμες συντεταγμένες».

Ἰσχύει βέβαια καί τό ἀντίστροφο· ὅτι δηλαδή:

«Ἄν οἱ ὁμώνυμες συντεταγμένες δυό ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων εἶναι ἴσες, τότε τά διανύσματα θά εἶναι ἴσα».

Εἶναι χρήσιμο νά παρατηρήσομε ἐδῶ ὅτι ἕνα ὁποιοδήποτε ἐλεύθερο διάνυσμα στό ἐπίπεδο μπορεῖ νά ἀντιπροσωπεύεται ἀπό ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων· καί ἀκόμα, ὅτι οἱ συντεταγμένες ἑνός διανύσματος μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων ταυτίζονται μέ τίς συντεταγμένες τοῦ πέρατος αὐτοῦ τοῦ διανύσματος.

Ὕστερα ἀπό τούς προηγούμενους ὁρισμούς καί τίς ἰδιότητές τους, καί ἐπειδή σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζεται (μέ βάση ἕνα σύστημα ἀξόνων) ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἀντίστροφα σ' ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχίζεται ἕνα καί μόνο σημεῖο ἤ, πράγμα πού εἶναι τό ἴδιο, ἕνα καί μόνο ἐφαρμοστό διάνυσμα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, μποροῦμε νά λέμε:

«Μεταξύ ὅλων τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου καί ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία».

Σημείωση: Τά ἐφαρμοστά διανύσματα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων τά ὀνομάζομε μερικές φορές καί **διανυσματικές ἀκτίνες.**

β) Συντελεστής διευθύνσεως διανύσματος. Θέλομε τώρα νά βροῦμε σχέσεις μεταξύ παραλλήλων διανυσμάτων καί τῶν συντεταγμένων τους.

Γιά νά ἁπλοποιήσομε τό ἔργο μας θά πάρομε διανύσματα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων (γιατί;)

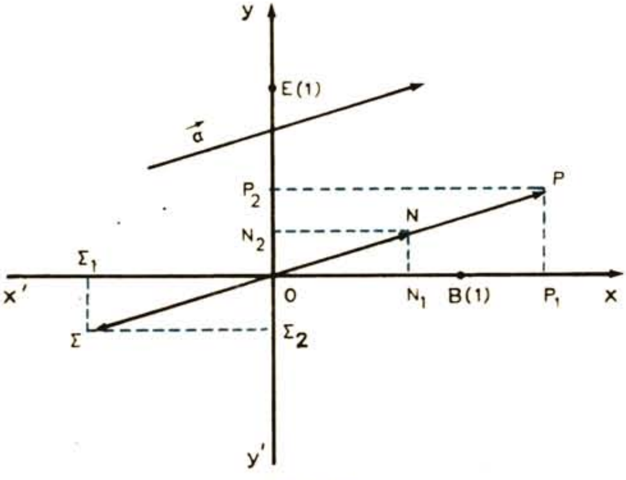
Ἄς θεωρήσομε λοιπόν τά ὁμόρροπα διανύσματα $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ καί τό $\overrightarrow{O\Sigma}$ ἀντίρροπο τῶν προηγουμένων (σχ. 4.2β). Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα OP_1P καί ON_1N παίρνομε:

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{ON}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{ON_1}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{N_1N}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{ON_2}} \Longrightarrow \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{ON_2}}{\overline{ON_1}}. \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα OP_1P καί $O\Sigma_1\Sigma$ παίρνομε:

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{O\Sigma}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{O\Sigma_1}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{\Sigma_1\Sigma}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{O\Sigma_2}} \Longrightarrow \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{O\Sigma_2}}{\overline{O\Sigma_1}}. \qquad (2)$$

'Από τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε: $\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{ON_2}}{\overline{ON_1}} = \frac{\overline{O\Sigma_2}}{\overline{O\Sigma_1}}$.



Σχ. 4.2β.

"Ωστε: **«Ἂν δυό μή μηδενικά διανύσματα εἶναι παράλληλα, τότε οἱ συντεταγμένες τοῦ ἑνός εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ ἄλλου».**

'Ισχύει βέβαια καί τό ἀντίστροφο· δηλαδή:

«Ἂν οἱ συντεταγμένες ἑνός διανύσματος εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες ἑνός ἄλλου, τότε αὐτά τά διανύσματα εἶναι παράλληλα».

Βλέπομε λοιπόν ὅτι: **ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρός τήν τετμημένη ἑνός μή μηδενικοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}$ (ὄχι παράλληλου πρός τόν y'y) μένει σταθερός (ἀναλλοίωτος) μέσα σ' ὅλο τό σύνολο τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρός τό $\vec{\alpha}$.**

Ἄρα ὁ λόγος αὐτός χαρακτηρίζει τή διεύθυνση τοῦ διανύσματος καί γι' αὐτό ὀνομάζεται **συντελεστής διευθύνσεως** τοῦ διανύσματος.

Μποροῦμε λοιπόν νά λέμε: **«Δυό διανύσματα ἔχουν τόν ἴδιο συντελεστή διευθύνσεως ὅταν καί μόνο τά διανύσματα αὐτά εἶναι παράλληλα».**

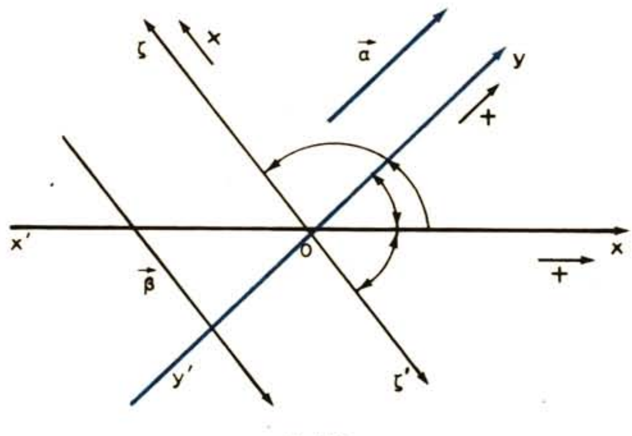
γ) **Γωνία ἄξονα καί διανύσματος — γωνία δύο ἀξόνων.**

Ὁρισμοί: Κατεύθυνση ἑνός ὄχι μηδενικοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}$ θά ὀνομάζομε τήν ὁποιαδήποτε ἡμιευθεία Oy (σχ. 4.2γ) πού ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τή διεύθυνση καί τή φορά τοῦ διανύσματος.

Γωνία ἄξονα καί διανύσματος, σ' ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο, ὀνομάζομε τήν ὁποιαδήποτε γωνία πού ἔχει πρώτη πλευρά τόν θετικό ἡμιάξονα καί δεύτερη πλευρά τήν ἡμιευθεία μέ ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ ἄξονα καί κατεύθυνση τήν κατεύθυνση τοῦ διανύσματος.

Στό σχῆμα π.χ. 4.2γ γωνία τοῦ ἄξονα x'x καί τοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}$ εἶναι μιά γωνία μέ πρώτη πλευρά τήν ἡμιευθεία Ox καί δεύτερη πλευρά τήν ἡμιευθεία Oy, ἄν ἡ Oy εἶναι παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τό διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Ὅμοια, γωνία τοῦ ἄξονα x'x καί τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}$ εἶναι μιά γωνία $(\widehat{Ox, O\zeta'})$, ἄν ἡ Oζ' εἶναι ἡμιευθεία παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τό διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Γωνία δύο ἀξόνων ὀνομάζομε τή γωνία τῶν θετικῶν κατευθύνσεων αὐτῶν τῶν ἀξόνων. Στό σχῆμα 4.2γ γωνία τῶν ἀξόνων x'x καί y'y εἶναι μιά γωνία $(\widehat{Ox, Oy})$ καί γωνία τῶν ἀξόνων x'x καί ζ'ζ εἶναι μιά γωνία $(\widehat{Ox, O\zeta})$.



Σχ. 4.2γ.

Σημείωση: Εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσομε ὅτι: **Ὅταν τό σύστημά μας εἶναι ὀρθοκανονικό, τότε ὁ συντελεστής διευθύνσεως ἑνός διανύσματος ἰσοῦται μέ τήν τριγωνομετρική ἐφαπτομένη τῆς γωνίας τοῦ ἄξονα καί τοῦ διανύσματος.**
(Ἡ ἀπόδειξη ἄς γίνει, ὡς ἄσκηση, ἀπό τό μαθητή).

Παρατηρήσεις: ι) Κάθε διάνυσμα παράλληλο πρός τόν ἄξονα x'x ἔχει τεταγμένη μηδέν (γιατί;) καί συνεπῶς ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα τῶν τετμημένων ἰσοῦται μέ μηδέν.

ιι) Κάθε διάνυσμα παράλληλο πρός τόν ἄξονα y'y ἔχει τετμημένη μηδέν καί συνεπῶς ἕνα τέτοιο διάνυσμα δέν ἔχει γιά συντελεστή διευθύνσεως ἕναν ἀριθμό. **Συμφωνᾶμε νά λέμε** ὅτι τά διανύσματα αὐτά ἔχουν συντελεστή διευθύνσεως τό ἄπειρο (∞). Γνώρισμα τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα τῶν τεταγμένων εἶναι ἡ ἰδιότητα ὅτι ἔχουν τετμημένη μηδέν καθώς καί ἡ ἰδιότητα νά ἔχουν συντελεστή διευθύνσεως τό ∞.

Σημείωση: Συντελεστής διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας λέγεται ὁ συντελεστής διευθύνσεως ἑνός ὁποιουδήποτε διανύσματος παραλλήλου πρός τήν εὐθεία.

δ) Μέτρο διανύσματος συναρτήσει τῶν συντεταγμένων του. Ἄς εἶναι $\overrightarrow{OP}$ τό ἐφαρμοστό διάνυσμα, μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, τό ἴσο πρός ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ (α_1, α_2). Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο OP_1P (σχ. 4.2β: P_1 ἡ προβολή τοῦ P στήν εὐθεία x'x) παίρνομε: $\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = (\overline{OP_1})^2 + (\overline{P_1P})^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.

Ἄρα γιά τό μέτρο $\left|\vec{\alpha}\right|$ ἑνός διανύσματος $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$ ἔχομε (σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων) :

$$\boxed{\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

4.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: Ἡ τετμημένη καθώς καί ἡ τεταγμένη τοῦ ἀθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετμημένων καί ἀντίστοιχα τῶν τεταγμένων τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$.

Παίρνομε δυό διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἴσα ἀντιστοίχως πρός τό $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ($\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$). Ἄν A_1, B_1 καί Γ_1 εἶναι οἱ προβολές τῶν A, B καί Γ πάνω στόν ἄξονα τῶν τετμημένων, τότε (σύμφωνα μέ τή σχέση τοῦ Chasles) θά ἔχομε: $\overline{A_1\Gamma_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1\Gamma_1}$· ἀλλά $\overline{A_1\Gamma_1}$ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{A\Gamma}$, ἀθροίσματος τῶν $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, καί $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1\Gamma_1}$ οἱ τετμημένες τῶν $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἀντιστοίχως.

Ὅμοια ἐργαζόμαστε καί γιά τίς τεταγμένες. (Νά γίνει τό σχῆμα).

2) Νά ἐκφρασθοῦν οἱ συντεταγμένες (x', y') τοῦ μέσου Μ ἑνός τμήματος ΑΒ, τοῦ ἐπιπέδου xOy, συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος.

Ἄς εἶναι $A_1(x_1)$, $B_1(x_2)$ οἱ προβολές τῶν Α καί Β στόν ἄξονα x'x καί $A_2(y_1)$, $B_2(y_2)$ οἱ προβολές τους στόν ἄξονα y'y.

Ἰσχύει τό θεώρημα: «Ἡ προβολή τοῦ μέσου ἑνός τμήματος, πάνω σ' ἕναν ἄξονα, εἶναι τό μέσο τῆς προβολῆς τοῦ τμήματος.» (Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη).

Ἔτσι, ἄν $M_1(x')$ εἶναι ἡ προβολή τοῦ Μ στόν ἄξονα x'x θά ἔχομε:

$\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1}$ ἤ $x' - x_1 = x_2 - x'$ (1). (Γνωρίζομε ὅτι: ἡ τετμημένη διανύσματος ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπό τήν τετμημένη τοῦ πέρατος).

Τελικά ἀπό τήν (1) παίρνομε $x' = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Ἐργαζόμαστε ὅμοια καί στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων καί παίρνομε:

$$y' = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

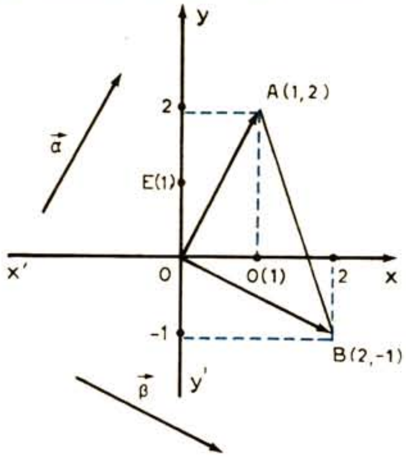
3) Ἂν (v_1, v_2) οἱ συντεταγμένες ἑνός ἐλεύθερου διανύσματος $\vec{v}$ καί $\vec{\delta}$ καί $\vec{\varepsilon}$ τά μοναδιαῖα διανύσματα τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, τότε $\vec{v} = v_1 \vec{\delta} + v_2 \vec{\varepsilon}$.

Ἂς εἶναι $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ (ὅπου O ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων) καί A_1, A_2 οἱ προβολές τοῦ A στούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$ ἀντίστοιχα.

Ἔχομε: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overline{OA_1} \cdot \vec{\delta} + \overline{OA_2} \cdot \vec{\varepsilon} =$
$= v_1 \vec{\delta} + v_2 \vec{\varepsilon}.$

4) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ διευθύνσεις τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}\,(1,2)$ καί $\vec{\beta}\,(2, -1)$ εἶναι ὀρθογώνιες μεταξύ τους. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε γιά τούς συντελεστές διευθύνσεως αὐτῶν τῶν διανυσμάτων (σχ. 4.3).

Θεωροῦμε τίς διανυσματικές ἀκτίνες $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ (σχ. 4.3) καί ορίζομε τίς συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{AB}$· δηλαδή $\overrightarrow{AB}\,(2-1, -1-2)$ ἤτοι $\overrightarrow{AB}\,(1, -3)$.



Σχ. 4.3.

Ἔχομε: $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ καί $\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$

καί $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = 10.$ Ἀλλά καί $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 1^2 + (-3)^2 = 10\cdot$

ἄρα $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ καί συνεπῶς $\widehat{AOB} = 90°$.

Συντελεστής διευθύνσεως τοῦ $\vec{\alpha}$ εἶναι ὁ ἀριθμός $\lambda_1 = \frac{2}{1} = 2$ καί τοῦ $\vec{\beta}$ ὁ ἀριθμός $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$· παρατηροῦμε ὅτι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$

5) Θεωροῦμε τά σημεῖα A (2, 0), B (0, 1) καί P (3, 1). Νά προσδιορισθεῖ ὁ

λόγος $\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OP}}$ *, ἄν M τό σημεῖο τομῆς τῶν OP καί AB καί νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ M.*

Ἔχομε: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ (1). Ἄς εἶναι $\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OP}} = \kappa$ καί $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda$, ὁπότε

$\overrightarrow{OM} = \kappa \cdot \overrightarrow{OP}$ καί $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$· ἔτσι ἡ (1) γίνεται $\kappa \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ (2).

Εἶναι ὅμως $\overrightarrow{OP} = 3\vec{\delta} + \vec{\varepsilon}$ (βλέπε ἐφαρμογή 3) καί $\overrightarrow{AB} = -2\vec{\delta} + \vec{\varepsilon}$ (διότι οἱ συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $(0-2,\ 1-0) = (-2,\ 1)$).

Ἡ (2) τώρα γράφεται: $\kappa(3\vec{\delta} + \vec{\varepsilon}) = 2\vec{\delta} + \lambda(-2\vec{\delta} + \vec{\varepsilon})$ ἤ

$$3\kappa\vec{\delta} + \kappa\vec{\varepsilon} = (2-2\lambda)\vec{\delta} + \lambda\vec{\varepsilon}.$$

Γνωρίζομε ὅμως ὅτι δυό ἴσα διανύσματα ἔχουν ἴσες ὁμώνυμες συντεταγμένες. Ἄρα πρέπει νά ἔχομε $3\kappa = 2 - 2\lambda$ (I) καί $\kappa = \lambda$ (II).

Ἀπό τό σύστημα τῶν (I) καί (II) παίρνομε $\kappa = \lambda = \dfrac{2}{5}$.

Εἶναι λοιπόν $\overrightarrow{OM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{OP}, \left(\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OP}} = \dfrac{2}{5}\right)$, ἤ $\overrightarrow{OM} = \dfrac{2}{5}(3\vec{\delta} + \vec{\varepsilon}) = \dfrac{6}{5}\vec{\delta} + \dfrac{2}{5}\vec{\varepsilon}$.

Ὥστε οἱ συντεταγμένες τοῦ M εἶναι $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.

4.4 Ἀσκήσεις.

1. Σέ σχέση μ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων νά σχεδιασθεῖ διάνυσμα μέ συντεταγμένες $(-2, 2)$. Ἀκολούθως νά κατασκευασθεῖ ἡ εὐθεία ἡ παράλληλη πρός αὐτό τό διάνυσμα, πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $A(-4, \sqrt{6})$.

2. Διάνυσμα $\overrightarrow{ZP}$ ἔχει συντεταγμένες $\left(8, -\dfrac{7}{9}\right)$· ἄν πέρας εἶναι τό $P(-1, -1)$, νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του. Ἀκολούθως νά ὁρισθοῦν οἱ συντεταγμένες ἐκείνου τοῦ σημείου M τῆς ZP γιά τό ὁποῖο ἔχομε $\dfrac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MP}} = -\dfrac{1}{3}$.

3. Δίνονται τά σημεῖα $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$ καί $\Gamma(0, 3)$.

I) Νά ὁρισθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Δ γιά τό ὁποῖο ἔχομε $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$.

II) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο.

4. Δίνονται τά διανύσματα $\vec{\alpha}\left(\sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ καί $\vec{\beta}(-6, \beta_2)$. Νά βρεθεῖ ἡ τεταγμένη β_2 τοῦ β, ἄν γνωρίζομε ὅτι $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$.

5. Δίνονται τά διανύσματα $\vec{\alpha}(-4, 7)$ καί $\vec{\beta}(5, -3)$.

I) Νά ὁρισθοῦν οἱ συντεταγμένες, τά μέτρα καί οἱ συντελεστές διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ καί $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

II) Ποιός εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $4\vec{\beta} + 5\vec{\alpha}$;

III) Νά σχεδιασθεῖ ἕνας ἀντιπρόσωπος γιά καθένα ἀπό τά προηγούμενα διανύσματα, μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

6. Δίνονται τά διανύσματα $\vec{\alpha}(-9, 13)$, $\vec{\beta}\left(3, -\frac{13}{3}\right)$, $\vec{\gamma}(-18, 26)$, $\vec{\zeta}(-8, 12)$ καί $\vec{\eta}(9, 12)$. Ὑπάρχουν μεταξύ αὐτῶν παράλληλα διανύσματα; Ἄν ναί, εἶναι τότε αὐτά ὁμόρροπα ἤ ἀντίρροπα;

7.* Δίνονται τά διανύσματα $\vec{\alpha}(11, -5)$, $\vec{\beta}(3x-1, y+2)$, $\vec{\gamma}(4-x, 5+2y)$, $\vec{\kappa}(3, 4)$, $\vec{\lambda}(-20, 15)$.

I) Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν x καί y, ἄν τά διανύσματα $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ καί $3\vec{\alpha}-\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ εἶναι ἀντίστοιχα παράλληλα πρός τά $\vec{\kappa}$ καί $\vec{\lambda}$.

II) Τί εἶναι οἱ διευθύνσεις τῶν $\vec{\kappa}$ καί $\vec{\lambda}$ μεταξύ τους;

8. Δίνονται τά σημεῖα Α(1, 1), Β(−1, 0) καί Γ(0, −1). I) Νά καθορισθεῖ τό εἶδος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

II) Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ καί $\overrightarrow{\Gamma P}$ ἄν Μ, Ν καί Ρ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ καί ΑΒ ἀντιστοίχως.

III) Νά διαπιστώσετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΜ, ΒΝ καί ΓΡ ἔχουν κοινό σημεῖο καί νά προσδιορίσετε τίς συντεταγμένες του.

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

5.1 Διανυσματική καί ἀναλυτική ἐξίσωση εὐθείας.

α) Διανυσματική ἐξίσωση εὐθείας. Θέλομε νά βροῦμε διανυσματική σχέση πού νά ἱκανοποιεῖται ἀποκλειστικά ἀπό τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας στό ἐπίπεδο, δηλαδή ἀπό τίς συντεταγμένες τῶν σημείων της μέ βάση ἕνα σύστημα συντεταγμένων. Μιά τέτοια σχέση θά λέγεται **διανυσματική ἐξίσωση τῆς εὐθείας** στό ἐπίπεδο (σχ. 5.1).

Μιά εὐθεία εἶναι ὁρισμένη ἄν δίνονται δυό σημεῖα της ἤ ἕνα σημεῖο της καί ἕνα ὄχι μηδενικό διάνυσμα, πρός τό ὁποῖο ἡ εὐθεία εἶναι παράλληλη.

Ἄς θεωρήσομε λοιπόν ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων καί μιά εὐθεία (ε) πού ὁρίζεται ἀπό δυό σημεῖα $A(x_1, y_1)$ καί $B(x_2, y_2)$ ἤ (πράγμα τό ἴδιο) ἀπό τό σημεῖο $A(x_1, y_1)$ καί ἀπό τό μή μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}(v_1, v_2)$, πρός τό ὁποῖο ἡ (ε) εἶναι παράλληλη. Θά ἀναζητήσομε μιά διανυσματική σχέση τήν ὁποία νά ἱκανοποιοῦν τά σημεῖα τῆς εὐθείας μας καί μόνον αὐτά.

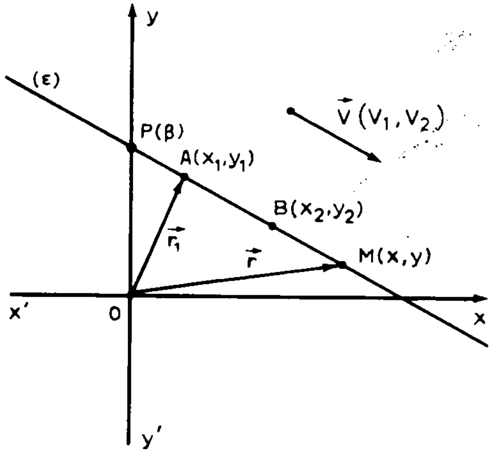
Πρός τοῦτο παίρνομε τυχαῖο σημεῖο Μ τῆς (ε) καί φέρνομε τή σταθερή διανυσματική ἀκτίνα $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$ καί τή μεταβλητή $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Γιά κάθε σημεῖο Μ τῆς (ε) ἔχομε: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ (1). Ἀλλά $\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ ἤ $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{v}$, ὅπου t ὁ κατάλληλος κάθε φορά πραγματικός ἀριθμός μέ τόν ὁποῖο πρέπει νά πολλαπλασιάζομε τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (ἤ τό $\vec{v}$) γιά νά προκύπτει τό συγγραμμικό του διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$.

Ἔτσι ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{ἤ} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{v}} \qquad (2)$$

Ἡ μεταβλητή t, πού παίρνει ἐδῶ πραγματικές τιμές, λέγεται **παράμετρος**.



Σχ. 5.1.

Ἀντίστροφα, ἄν δώσομε στήν παράμετρο t μιά τυχαία πραγματική τιμή, τότε τό δεύτερο μέλος τῆς ἐξισώσεως (2) παρέχει διάνυσμα πού τό πέρας του κεῖται ἐπί τῆς (ε), ἄν βέβαια ἡ ἀρχή τοῦ διανύσματος εἶναι τό σημεῖο Ο. Πράγματι:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\cdot\overrightarrow{AB} \text{ ἤ } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\cdot\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = t\cdot\overrightarrow{AB}\cdot$$

τά ἐφαρμοστά διανύσματα συνεπῶς $\overrightarrow{AM}$ καί $\overrightarrow{AB}$ εἶναι συγγραμμικά καί, ἐπειδή ἔχουν κοινή ἀρχή, ἕπεται ὅτι τά στηρίγματά τους συμπίπτουν.

Ἡ σχέση (2), πού, γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τῆς t, παρέχει τίς διανυσματικές ἀκτίνες τῶν σημείων τῆς θεωρούμενης εὐθείας καί μόνον αὐτές, λέγεται **διανυσματική (παραμετρική) ἐξίσωση τῆς εὐθείας.**

β) Ἀναλυτική ἐξίσωση εὐθείας. Ἄς εἶναι (x, y) οἱ συντεταγμένες τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ καί (x_1, y_1), (x_2, y_2) καί (v_1, v_2) οἱ συντεταγμένες ἀντίστοιχα τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OA}$, τοῦ σημείου Β καί τοῦ διανύσματος $\vec{v}$ (σχ. 5.1).

Μποροῦμε τότε στή θέση τῆς ἐξισώσεως (2) νά γράψομε τίς ἀκόλουθες δυό ἐξισώσεις: [Βλέπε καί ἐφαρμογή 4.3 (1)].

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \quad \text{ἤ} \quad \left\{\begin{aligned} y &= y_1 + t\cdot v_2 \\ x &= x_1 + t\cdot v_1 \end{aligned}\right.$$

ἤ ἀκόμα τίς ἐξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1 = t(y_2 - y_1) \\ x - x_1 = t(x_2 - x_1) \end{array}\right\} \quad \text{ἤ} \quad \left\{\begin{array}{l} y - y_1 = t \cdot v_2 \\ x - x_1 = t \cdot v_1 \ . \end{array}\right. \tag{3}$$

Ἄν $x_2 - x_1 \neq 0$ $(x_2 \neq x_1)$ καί $t \neq 0$, τότε ἀπό τίς ἐξισώσεις (3) μέ διαίρεση κατά μέλη παίρνομε:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{v_2}{v_1}} \tag{4}$$

Ἡ ἐξίσωση (4) ἐκφράζει τήν ἀλληλεξάρτηση τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας μή παράλληλης πρός τόν ἄξονα y′y· αὐτῆς πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα (x_1, y_1) καί (x_2, y_2) ἤ αὐτῆς πού εἶναι παράλληλη πρός τό ἐλεύθερο διάνυσμα (v_1, v_2) καί διέρχεται ἀπό τό σημεῖο (x_1, y_1). Ἡ ἐξίσωση αὐτή, καθώς καί κάθε ἄλλη πού προκύπτει ἀπ' αὐτή μέ κατάλληλο μετασχηματισμό, λέγεται **ἀναλυτική ἐξίσωση εὐθείας**.

Ἐπειδή οἱ ἴσοι λόγοι $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$ εἶναι ὁ κοινός συντελεστής διευθύνσεως, ἔστω α, τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{v}$ καί συνεπῶς καί τῆς εὐθείας (ε), ἡ ἐξίσωση (4) γράφεται:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \alpha} \tag{5}$$

Καί λέμε ὅτι: ἡ **(5) εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού δέν εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα y′y, διέρχεται ἀπό τό σημεῖο (x_1, y_1) καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως α.**

Ἄν ὡς ἀρχικό σημεῖο (x_1, y_1) τῆς εὐθείας πάρομε τό σημεῖο τομῆς της μέ τόν ἄξονα y′y, δηλαδή ἐκεῖνο γιά τό ὁποῖο ἔχομε $x_1 = 0$ καί $y_1 = \beta$, τότε ἡ ἐξίσωση (5) γίνεται

$$\boxed{y = \alpha x + \beta} \tag{6}$$

Μποροῦμε τώρα νά λέμε γενικά ὅτι: **ἡ ἐξίσωση (6) εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο (0, β) καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως ἴσο μέ α.**

Διότι καί ἀντιστρόφως τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες (x, y) ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση (6), κεῖνται σέ μιά καί τήν ἴδια εὐθεία.

Πράγματι ἡ ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ προκύπτει, μέ ἀπαλοιφή τοῦ t, ἀπό τό σύστημα τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων

$y = \beta + t \cdot \alpha$

$x = 0 + t \cdot 1$, καί αὐτές οἱ τελευταῖες μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν ἀπό τή διανυσματική ἐξίσωση $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{\alpha}$, ὅπου P τό σημεῖο τοῦ ἄξονα y′y μέ συντεταγμένες (0, β) καί $\overrightarrow{\alpha}$ τό διάνυσμα μέ συντεταγμένες (1, α).

Ἡ ἐξίσωση μιᾶς εὐθείας παράλληλης πρός τόν ἄξονα x′x εἶναι :

$\boxed{y = \beta}$, διότι ὁ συντελεστής διευθύνσεως κάθε τέτοιας εὐθείας εἶναι μηδέν.

Ἡ ἐξίσωση μιᾶς εὐθείας παράλληλης πρός τόν ἄξονα $y'y$ (ὁπότε ὁ συντελεστής διευθύνσεως δέν εἶναι ἀριθμός) εἶναι $\boxed{x = \gamma}$, ὅπου γ ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας μέ τόν ἄξονα $x'x$ (γιατί;).

Ὁ ἄξονας $x'x$ ἔχει ὡς ἐξίσωση τήν $\boxed{y = 0}$ καί ὁ ἄξονας $y'y$ ἔχει ὡς ἐξίσωση τήν $\boxed{x = 0}$

Ἡ ἐξίσωση $y = \alpha x$ ($\alpha \neq 0$) εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἄσκηση: Νά σχεδιασθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $4x - 5y + 7 = 0$. Ἐπίσης νά ὁρισθεῖ ὁ συντελεστής διευθύνσεώς της καί νά βρεθοῦν τά σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας μέ τούς ἄξονες.

5.2 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1) Δίνεται ἡ ἐξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, ὅπου A, B, Γ δοσμένοι πραγματικοί ἀριθμοί καί $|A| + |B| > 0$· δηλαδή οἱ A καί B ὄχι συγχρόνως μηδέν. Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωση σέ σχέση μ' ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων στό ἐπίπεδο;

Ἄν $A = 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $By + \Gamma = 0$ ἤ $y = -\frac{\Gamma}{B}$. Ἡ τελευταία ὅμως ἐξίσωση παριστάνει, ὅπως πλέον γνωρίζομε, εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα $x'x$ ἡ ὁποία τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο $-\frac{\Gamma}{B}$· ἐφόσον καί $\Gamma = 0$ ἡ εὐθεία ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα $x'x$.

Ἄν $B = 0$, τότε παίρνομε $x = -\frac{\Gamma}{A}$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή παριστάνει εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα $y'y$ πού τέμνει τόν ἄξονα $x'x$ στό σημεῖο $-\frac{\Gamma}{A}$· ἐφόσον καί $\Gamma = 0$ ἡ εὐθεία ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα $y'y$.

Ἄν $A \neq 0$ καί $B \neq 0$, τότε παίρνομε $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή παριστάνει εὐθεία πού τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο $-\frac{\Gamma}{B}$ καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως $-\frac{A}{B}$, δηλαδή εἶναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα μέ συντεταγμένες $(B, -A)$. Τό σημεῖο τομῆς τῆς εὐθείας μέ τόν ἄξονα $x'x$ ἔχει τετμημένη $-\frac{\Gamma}{A}$ (γιατί;).

Ἄν $\Gamma = 0$ (μέ $|A| + |B| > 0$), ἡ εὐθεία διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

2) Δίνονται οἱ ἐξισώσεις $Ax + By + \Gamma = 0$ καί $A'x + B'y + \Gamma' = 0$, μέ

ὅλες τίς σταθερές (Α, Β, Γ, Α΄, Β΄, Γ΄) μή μηδενικές. Τί ἔχετε νά πῆτε γιά τίς εὐθεῖες πού παριστάνουν, ἄν εἶναι $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'}$; Νά διατυπωθεῖ ἕνα παράδειγμα.

Οἱ ἐξισώσεις γράφονται ἰσοδύναμα :

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$ καί $y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{\Gamma'}{B'}$· ἀλλά ἀπό τήν ἰσότητα $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ παίρνομε $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ ἤ $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ καί ἀπό τήν $\frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'} \Longrightarrow -\frac{\Gamma'}{B'} = -\frac{\Gamma}{B}$. Οἱ εὐθεῖες κατά συνέπεια συμπίπτουν.

Δυό τέτοιες ἐξισώσεις εἶναι π.χ. οἱ ἀκόλουθες:

$$5x - 9y + 12 = 0 \quad \text{καί} \quad \frac{5}{3}x - 3y + 4 = 0.$$

Σημείωση: Ἐφόσον $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{\Gamma}{\Gamma'}$, τότε εἶναι φανερό ὅτι οἱ εὐθεῖες μας εἶναι παράλληλες χωρίς νά συμπίπτουν.

3) Δίνεται ἡ εὐθεία (ε) μέ ἐξίσωση $x - 2y + 2 = 0$.

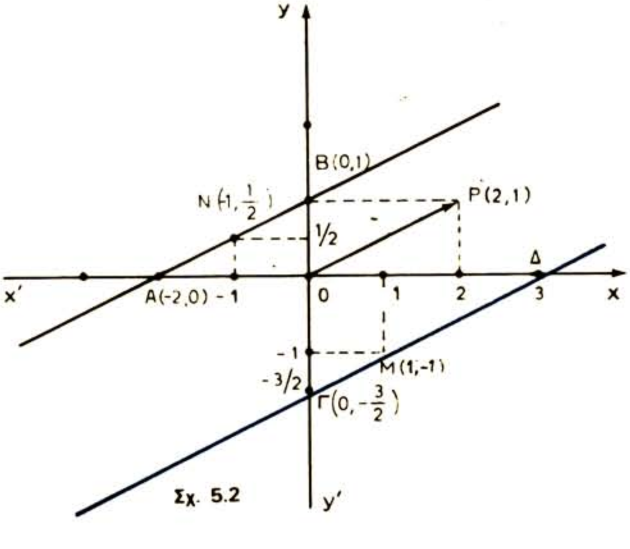
α) Νά σχεδιασθεῖ: Ι) ὕστερα ἀπό τόν προσδιορισμό ἑνός σημείου της καί ἑνός παράλληλου διανύσματος· ΙΙ) μέ τόν προσδιορισμό δυό σημείων της.

β) Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση εὐθείας (ε΄) πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Μ (1, —1) καί εἶναι παράλληλη πρός τήν (ε).

γ) Νά βρεθοῦν τά σημεῖα τομῆς τῆς (ε΄) μέ τούς ἄξονες.

α) Ἐπιλύομε τήν ἐξίσωση ὡς πρός y καί ἔχομε $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας εἶναι τό (0,1)· αὐτό εἶναι καί τό σημεῖο τομῆς της μέ τόν ἄξονα y΄y (σχ. 5.2). Ἕνα διάνυσμα παράλληλο τῆς (ε) εἶναι τό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ μέ συντεταγμένες τοῦ πέρατος (2,1).



Σχ. 5.2

Γιά νά σχεδιάσομε τήν (ε) φέρνομε άπό τό B (0, 1) τήν παράλληλη εὐθεία πρός τήν OP. Γιά νά βροῦμε ἕνα δεύτερο σημεῖο τῆς (ε) δίνομε στό x μιά τυχαία τιμή $\neq 0$ καί ὁρίζομε, ἀπό τήν ἐξίσωση, τήν ἀντίστοιχη τιμή τοῦ y. Ἔτσι π.χ. γιά $x = -1$ παίρνομε $y = \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{2}$· ὥστε ἕνα δεύτερο σημεῖο τῆς εὐθείας εἶναι τό $N\left(-1, \frac{1}{2}\right)$. Θά μπορούσαμε βέβαια νά βροῦμε τό σημεῖο τομῆς τῆς (ε) μέ τόν ἄξονα x'x· ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά δώσομε στό y τήν τιμή 0.

β) Ἀφοῦ ἡ (ε') εἶναι παράλληλη πρός τήν (ε) θά εἶναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ καί συνεπῶς θά ἔχει ἐξίσωση τῆς μορφῆς $y = \frac{1}{2}x + \beta_1$ (2). Γιά νά ἔχομε τήν ἐξίσωση τῆς (ε') ἀρκεῖ τώρα νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ β_1. Ἐπειδή ἡ (ε') διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $M(1, -1)$, φανερό εἶναι ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ M πρέπει νά πληροῦν τήν ἐξίσωση (2). Ἄρα πρέπει νά ἔχομε:

$$-1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \beta_1 \Longrightarrow \beta_1 = -\frac{3}{2}.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωση τῆς (ε)' εἶναι ἡ:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{ἤ} \quad x - 2y - 3 = 0.$$

Τό σημεῖο τομῆς τῆς (ε') μέ τόν ἄξονα y'y εἶναι τό σημεῖο $\Gamma\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ καί τό σημεῖο τομῆς μέ τόν ἄξονα x'x ἔχει τετμημένη:

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Longrightarrow x = 3.$$

Σημείωση: Γνωρίζοντας τό συντελεστή διευθύνσεως τῆς εὐθείας, πού ἰσοῦται μέ $\frac{1}{2}$, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσομε καί τήν ἐξίσωση (5) τῆς παραγράφου 5.1 (β), ὁπότε βρίσκομε: $\frac{y+1}{x-1} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x - 2y - 3 = 0.$

4. Δίνονται τά σημεῖα $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ καί $\Gamma(x_3, y_3)$. Νά βρεθεῖ ἡ συνθήκη πού ἱκανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν A, B, Γ ἐφόσον τά σημεῖα αὐτά ἀνήκουν σέ μιά εὐθεία ὄχι παράλληλη πρός τήν y'y.

Ἄς εἶναι $y = \alpha x + \beta$ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας ὅπου κεῖνται τά σημεῖα, τότε πρέπει νά ἔχομε:

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta \ (1), \quad y_2 = \alpha x_2 + \beta \ (2) \quad \text{καί} \quad y_3 = \alpha x_3 + \beta \ (3).$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) παίρνομε (ἄν ἀφαιρέσομε τά ὁμώνυμα μέλη) $y_1 - y_2 = \alpha(x_1 - x_2)$ (1') καί ἀπό τίς (1) καί (3) $y_1 - y_3 = \alpha(x_1 - x_3)$ (2').

Ἀπό τίς (1') καί (2') παίρνομε $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$.

5.3 Ἀσκήσεις.

1. Νά λυθοῦν γραφικά τά συστήματα:

$$\text{I)}\ \begin{matrix} 2x + 3y = 0 \\ x - y \ = 1 \end{matrix} \qquad \text{II)}\ \begin{matrix} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{matrix}$$

(Δηλαδή νά σχεδιασθοῦν οἱ εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις αὐτές τοῦ συστήματος (I) — ὕστερα τοῦ (II)— καί νά βρεθεῖ τό σημεῖο τῆς τομῆς τους, ἐφόσον ὑπάρχει).

2. Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἀνίσωση: $2x + 3y - 6 > 0$.

(Δηλαδή νά ἐντοπισθοῦν τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τά ὁποῖα, ὡς πρός ἕνα σύστημα ἀξόνων, ἔχουν συντεταγμένες (x, y) πού δίνουν θετική ἀριθμητική τιμή στό πολυώνυμο $2x + 3y - 6$).

Ὑπόδειξη: Ἀφοῦ σχεδιάσετε τήν εὐθεία $2x + 3y - 6 = 0$ παρατηρεῖστε (καί ἀποδεῖξτε) ὅτι οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ ἑνός ἡμιεπιπέδου, ὡς πρός αὐτή τήν εὐθεία, δίνουν στό πολυώνυμο $2x + 3y - 6$ θετική τιμή καί ὅτι οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου δίνουν στό $2x + 3y - 6$ τιμή ἀρνητική.

3. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες $4x - 5y = 1$, $-8x + 10y = 2$, $3x + 2y = 0$, $6x + 4y = -1$ σχηματίζουν παραλληλόγραμμο καί νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν κορυφῶν αὐτοῦ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἀκολούθως ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται, ἀφοῦ πρῶτα βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν διαγωνίων.

Ποιά τά μέτρα τῶν πλευρῶν καί τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου; Νά σχεδιαστοῦν οἱ 6 παραπάνω εὐθεῖες.

4. Νά ὁρισθεῖ ἡ τιμή τοῦ λ ἔτσι ὥστε οἱ εὐθεῖες, $4x - 2y = 1$, $3x + 9y - 12 = 0$ καί $(\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y - 7\lambda + 13 = 0$ νά ἔχουν κοινό σημεῖο.

5.* Νά πάρετε στό σχέδιό σας 4 σημεῖα Α, Β, Γ, Δ (μέ τίς συντεταγμένες τους ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα) πού νά εἶναι κορυφές κυρτοῦ τετραπλεύρου καί ἀκολούθως νά βρῆτε:

I) Τίς ἐξισώσεις τῶν πλευρικῶν εὐθειῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καί τά μέτρα τῶν πλευρῶν του.

II) Τίς συντεταγμένες τῶν μέσων Ε, Ζ, Η, Θ, Κ καί Λ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καί τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΔ ἀντιστοίχως.

III) Τίς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν ΕΗ, ΖΘ καί ΚΛ καί τά μέτρα αὐτῶν τῶν τμημάτων.

IV) Τίς ἐξισώσεις καί τά μέτρα τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΔ καθώς καί τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων.

Ν' ἀποδείξετε τέλος ὅτι οἱ εὐθεῖες ΕΗ, ΖΘ καί ΚΛ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τοῦ ὁποίου νά βρῆτε τίς συντεταγμένες.

6. I) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα $(-4, 3)$, $\left(1, \frac{11}{7}\right)$ καί $(3, 1)$ κεῖνται στήν ἴδια εὐθεία. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωσή της καί ποῦ τέμνει τούς ἄξονες; Νά γίνει ἡ σχεδίαση τῆς εὐθείας.

II) Νά ὁρισθεῖ ἡ τιμή τοῦ x, ἔτσι ὥστε τά σημεῖα $(x, -4)$, $(2, -2)$ καί $\left(-5, \frac{3}{7}\right)$ νά κεῖνται στήν ἴδια εὐθεία.

7. Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τριῶν εὐθειῶν πού ὁρίζονται ὡς ἑξῆς: ἡ πρώτη διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $(7, 0)$ καί $(0, -11)$, ἡ δεύτερη ἀπό τά $\left(\frac{4}{5}, \sqrt{5}\right)$ καί $(\sqrt{3}, -6)$ καί ἡ τρίτη διέρχεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν $x + y - 1 = 0$ καί $x - y + 2 = 0$ καί εἶναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα $(1, \sqrt{2})$.

Νά γίνει ἡ σχεδίαση τῶν παραπάνω εὐθειῶν.

8. Δίνονται οἱ εὐθεῖες α) $4x - 6y - 1 = 0$ καί β) $3x + 2y = 0$. Ἀφοῦ παρατηρήσετε ὅτι αὐτές εἶναι ἀντίστοιχα παράλληλες πρός τά διανύσματα $(6, 4)$ καί $(-2, 3)$, ν' ἀποδείξετε ἀκολούθως ὅτι οἱ εὐθεῖες εἶναι κάθετες. Νά γίνει τό κατάλληλο σχέδιο.

9.* Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού: α) διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί εἶναι κάθετη πρός τό διάνυσμα $(2, -4)$· β) διέρχεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν $y = -4$ καί $x = 2$ καί εἶναι κάθετη πρός τό διάνυσμα $(8, 4)$. Νά σχεδιασθοῦν οἱ εὐθεῖες.

10.* Δίνονται τά σημεῖα $A(-5, 5)$, $B(7, 2)$ καί $\Gamma(-1, -1)$. I) Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ διάμεσες αὐτές διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες αὐτοῦ τοῦ σημείου; Νά γενικευθεῖ ἡ ἀπόδειξη γιά τίς διάμεσες τυχαίου τριγώνου. II) Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν ὑψῶν στό παραπάνω τρίγωνο καί ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες αὐτές ἔχουν κοινό σημεῖο. III) Νά βρεθοῦν τά μέτρα τῶν διαμέσων καί τῶν ὑψῶν.

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη.

1. Ποιά σημεῖα πάνω σ' ἕναν ἄξονα x'x παριστάνει καθεμιά ἀπό τίς ἀκόλουθες σχέσεις:

α) $3x - 1 > 2$· β) $x - \sqrt{2} < 1$.

2.* Ἄν γιά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἑνός ἄξονα ἰσχύει ἡ ἰσότητα $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = -\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}}$, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $2(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$, ὅπου α, β, γ, δ εἶναι οἱ τετμημένες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντίστοιχα.

3. Μέ κέντρο τήν ἀρχή ἑνός ὀρθοκανονικοῦ συστήματος καί ἀκτίνα μέτρου 2 σχεδιάζομε κύκλο πού τέμνει τόν ἡμιάξονα Ox στό Α. Ἀκολούθως σχεδιάζομε τό κανονικό ἑξάγωνο, τό ἐγγεγραμμένο σ' αὐτόν τόν κύκλο, πού ἔχει μιά κορυφή του τό σημεῖο Α. Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν ἄλλων κορυφῶν τοῦ ἑξαγώνου.

4. Νά βρεθεῖ ἡ ἀναλυτική καί ἡ διανυσματική ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $A(6, -8)$ καί $B(1, -5)$ καί τῆς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $B(1, -5)$ καί εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία $-2x + 9y - 10 = 0$.

5. Νά βρεθεῖ ἡ διανυσματική καί ἡ συνήθης ἀναλυτική ἐξίσωση τῆς εὐθείας, τῆς ὁποίας οἱ ἀναλυτικές παραμετρικές ἐξισώσεις εἶναι $x = 7 - 3t$ καί $y = 13 + 21t$.

6. Νά ὁρισθεῖ ἡ τιμή τῆς παραμέτρου λ ἔτσι, ὥστε οἱ εὐθεῖες $(\lambda - 2)x = (\lambda - 1)y + 1$ καί $-2\lambda x + (2\lambda + 5)y = 3$ α) νά εἶναι παράλληλες καί β) νά ταυτίζονται.

7.* Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες τήν ἐπαληθεύουν, ἀποτελεῖται ἀπό δυό εὐθεῖες, τίς ὁποῖες νά προσδιορίσετε καί νά σχεδιάσετε.

(**Ὑπόδειξη:** Τό πολυώνυμο $x^2 + y^2 + 2xy - 1$ νά γίνει γινόμενο πρωτοβαθμίων ὡς πρός x καί y πολυωνύμων).

8.* Δίνονται τά σημεῖα $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $B\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$ καί $K(2, 2)$. Ἄν τό Κ εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

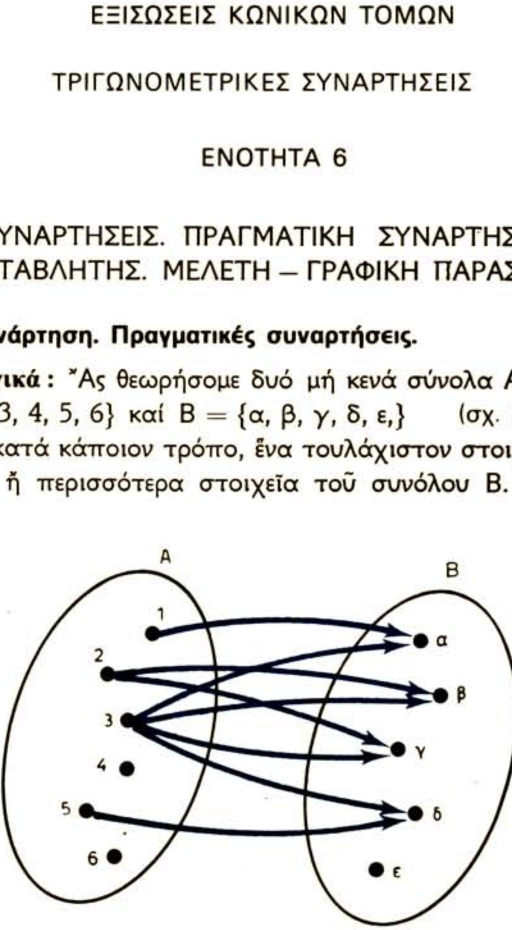
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ. ΜΕΛΕΤΗ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

6.1 Τί εἶναι ἡ συνάρτηση. Πραγματικές συναρτήσεις.

α) **Εἰσαγωγικά:** Ἄς θεωρήσομε δυό μή κενά σύνολα A καί B καί ἄς εἶναι π.χ. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ καί $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,\}$ (σχ. 6.1α). Ἄς ὑποθέσομε ἀκόμα ὅτι, κατά κάποιον τρόπο, ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖο τοῦ συνόλου A συνδέεται μ' ἕνα ἤ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ συνόλου B.



Σχ. 6.1α.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε, ὅτι ἔχομε μιά **διμελή (μιά δυαδική) σχέση ἀπό τό σύνολο A (πρῶτο σύνολο) πρός τό σύνολο B (δεύτερο σύνολο).**

Ἔχομε ὁρίσει, κατ' αὐτό τόν τρόπο, ἕνα σύνολο R διατεταγμένων ζευγῶν μέ πρῶτα στοιχεῖα ἀπό τό A καί δεύτερα ἀπό τό B.

Στή σχέση πού ἐμφανίζει παραστατικά τό σχῆμα 6.1α τό σύνολο R εἶναι: $R = \{(1, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta,) (3, \gamma), (3, \delta), (5, \delta)\}$ καί τό σύνολο αὐτό τό ὀνομάζομε **γράφημα** τῆς θεωρούμενης σχέσεως.

Ὅλα τά στοιχεῖα $x \in A$, καθένα ἀπό τά ὁποῖα ἔχει ἕνα (τουλάχιστον) ἀντίστοιχο $y \in B$, ἀποτελοῦν ἕνα ὑποσύνολο τοῦ A πού λέγεται **πεδίο ὁρισμοῦ** τῆς σχέσεως. Στό παράδειγμά μας πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό σύνολο $\Delta = \{1, 2, 3, 5\} \subset A$.

Ὅλα τά στοιχεῖα $y \in B$, καθένα ἀπό τά ὁποῖα εἶναι ἀντίστοιχο ἑνός (τουλάχιστον) $x \in A$, ἀποτελοῦν ἕνα ὑποσύνολο τοῦ B πού λέγεται **πεδίο τιμῶν** τῆς σχέσεως. Στό παράδειγμά μας πεδίο τιμῶν εἶναι τό σύνολο $E = \{\alpha, \beta\ \gamma, \delta\}$.

Γιά νά δηλώσομε συμβολικά ὅτι ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος (x, y), μέ $x \in A$ καί $y \in B$, ἀνήκει σ' ἕνα σύνολο R μιᾶς σχέσεως **σ** ἀπό τό A πρός τό B γράφομε:

$$A \ni x \xrightarrow{\sigma} y \in B$$ καί διαβάζομε:

«Στό x τοῦ A ἀντιστοιχίζεται, μέσω τῆς **σ**, τό y τοῦ B». Τά σύμβολα x καί y, πού παίρνουν τιμές μέσα στά σύνολα A καί B ἀντίστοιχα, πού ἀντιπροσωπεύουν δηλαδή διάφορα στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων, λέγονται **μεταβλητές**· καί τό x λέγεται εἰδικότερα **ἀνεξάρτητη μεταβλητή**, ἐνῶ τό y λέγεται **ἐξαρτημένη μεταβλητή**.

Θά θεωρήσομε τώρα καί τό σύνολο
$S = \{(\alpha, 1), (\beta, 2), (\gamma, 2), (\alpha, 3), (\beta, 3), (\gamma, 3), (\delta, 3), (\delta, 5\}$, δηλαδή τό σύνολο τῶν ζευγῶν πού παράγονται ἀπό τά ζεύγη καί μόνο τοῦ παραπάνω συνόλου R μέ ἐναλλαγή τῶν στοιχείων τους.

Ἐνῶ τό σύνολο R εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$, τό σύνολο S εἶναι ὑποσύνολο τοῦ γινομένου $B \times A$.

Ἡ σχέση πού δίνεται ἀπό τό σύνολο S, καί ἡ ὁποία εἶναι μιά σχέση ἀπό τό σύνολο B (πρῶτο σύνολο) πρός τό σύνολο A (δεύτερο σύνολο), λέγεται **ἀντίστροφη** ἐκείνης πού δίνεται ἀπό τό σύνολο R.

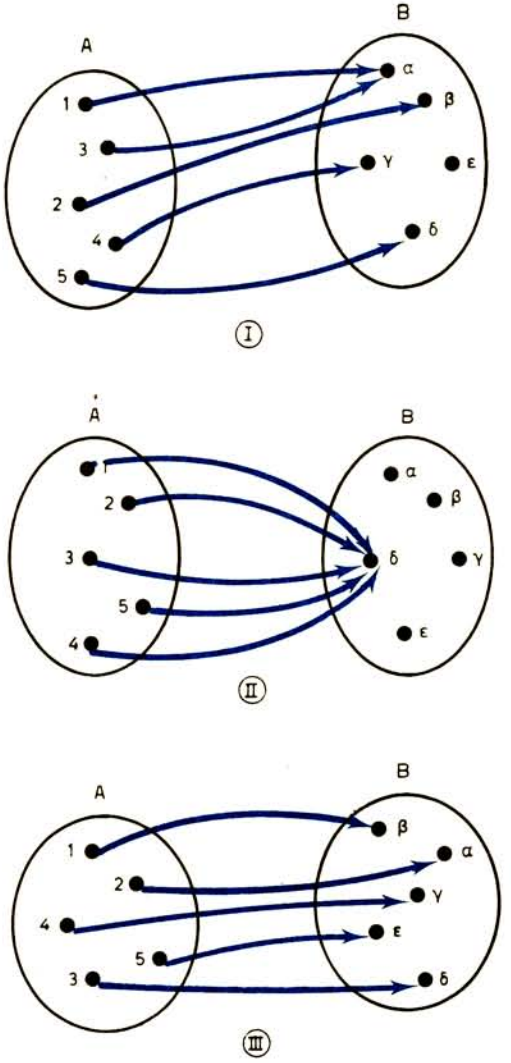
Δηλαδή: **Δύο σχέσεις πού δίνονται ἀπό τά σύνολα διατεταγμένων ζευγῶν R καί S λέγονται ἀντίστροφες ὅταν καί μόνο ὅταν τά ζεύγη τῆς μιᾶς προκύπτουν μέ ἀντιμετάθεση τῶν στοιχείων τῶν ζευγῶν τῆς ἄλλης.**

Ἄν τό σύνολο R παριστάνει τήν πρώτη σχέση, τότε τό σύνολο S τῆς ἀντίστροφης σχέσεως συνηθίζομε νά τό σημειώνομε μέ τό συμβολισμό R^{-1}, πού θυμίζει τό συμβολισμό μέ τόν ὁποῖο στήν Ἀριθμητική σημειώνομε τόν ἀντίστροφο ἑνός μή μηδενικοῦ ἀριθμοῦ.

Εἶναι πολύ εὔκολο, ἀλλά καί πολύ χρήσιμο, νά παρατηρήσομε ὅτι: **πεδίο τιμῶν μιᾶς σχέσεως R εἶναι τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς ἀντίστροφῆς της R^{-1} καί πεδίο ὁρισμοῦ τῆς R τό πεδίο τιμῶν τῆς R^{-1}.**

β) **Ὁρισμός τῆς συναρτήσεως**: Ἄς παρατηρήσομε προσεκτικά τίς σχέσεις πού παριστάνουν τά γραφήματα τοῦ σχήματος 6.1β. Διαπιστώνομε ὅτι καί στίς τρεῖς περιπτώσεις πού εἰκονίζονται δέν ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ A στό ὁποῖο ν' ἀντιστοιχίζονται περισσότερα ἀπό ἕνα στοιχεῖα τοῦ B, πράγμα πού δέν συμβαίνει στό γράφημα τοῦ σχήματος 6.1α. Ἐκεῖ στό στοιχεῖο 2 τοῦ A ἀντιστοιχίζονται τό β καί τό γ τοῦ Β καί στό 3 τοῦ Α τά α, β, γ καί δ τοῦ Β.

Τό κοινό γνώρισμα πού διακρίναμε στίς σχέσεις πού ἐκφράζονται ἀπό τά γραφήματα τοῦ σχήματος 6.1β I, II καί III κατατάσσει αὐτές τίς σχέσεις σέ μιά ἰδιαίτερη κατηγορία πολύ σημαντική καί γιά τά Μαθηματικά καί γιά τίς ἐφαρμογές· οἱ σχέσεις αὐτές λέγονται **συναρτήσεις.**



Σχ. 6.1β.

Δηλαδή: **Μιά δυαδική σχέση, ἀπό ἕνα σύνολο Α πρός ἕνα σύνολο Β, λέγεται συνάρτηση ἄν καί μόνον ἄν σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται ἕνα καί μόνον ἕνα τοῦ Β.** (Τό σύνολο Α εἶναι συγχρόνως καί τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως).

Μπορεῖ, σέ μιά συνάρτηση, σέ δυό ἤ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ πρώτου συνόλου νά ἀντιστοιχίζεται τό ἴδιο στοιχεῖο τοῦ δευτέρου συνόλου· αὐτό π.χ. συμβαίνει στό γράφημα τοῦ σχήματος 6.1β (I) γιά τά στοιχεῖα 1 καί 3 τοῦ A, τά ὁποῖα ἔχουν ἀντίστοιχο τό στοιχεῖο $\alpha \in B$. Μπορεῖ ἀκόμα σέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως νά ἀντιστοιχίζεται τό ἴδιο στοιχεῖο τοῦ B· τότε λέμε ὅτι ἡ **συνάρτηση εἶναι σταθερή** [σχ. 6.1β (II)].

Γιά νά δηλώσομε συμβολικά ὅτι ἔχομε μιά συνάρτηση ἀπό ἕνα σύνολο A πρός ἕνα σύνολο B γράφομε:

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \in B \quad \text{καί διαβάζομε:}$$

«Στό x τοῦ A ἀντιστοιχίζεται, μέσω τῆς συναρτήσεως f, τό y τοῦ B». Συνηθίζομε ὅμως, ὅταν μάλιστα εἶναι γνωστά ἀπό πρίν τά σύνολα A καί B, νά χρησιμοποιοῦμε τόν συντομότερο συμβολισμό: $y = f(x)$.

Ἡ ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συναρτήσεως δέν εἶναι κατανάγκη συνάρτηση· γιά νά συμβαίνει αὐτό πρέπει κάθε στοιχεῖο τοῦ δεύτερου συνόλου νά εἶναι ἀντίστοιχο ἑνός μόνο στοιχείου τοῦ πρώτου συνόλου. Ἔτσι ἀπό τίς συναρτήσεις πού ἀπεικονίζονται στό σχῆμα 6.1β μόνο στήν τρίτη συνάρτηση ἡ ἀντίστροφη σχέση εἶναι ἐπίσης συνάρτηση.

Ὅταν καί ἡ ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συναρτήσεως συμβαίνει νά εἶναι συνάρτηση, τότε αὐτή ἡ σχέση εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία*.

Ἐπειδή στά παραπάνω παραδείγματα τά σύνολα A καί B ἦταν διαφορετικά, δέν πρέπει ν' ἀποκομίσομε τήν ἐντύπωση ὅτι ἀποκλείεται νά εἶναι καί ἴσα. Ὁρίζομε δηλαδή καί σχέσεις, καί ἰδιαίτερα συναρτήσεις, μέσα σ' ἕνα καί τό ἴδιο σύνολο A. Δηλαδή συναρτήσεις πού εἶναι ὁρισμένες μέσα σ' ἕνα σύνολο A καί πού παίρνουν συγχρόνως τιμές ἀπό τό ἴδιο τό σύνολο A.

γ) **Πραγματικές συναρτήσεις.** Ἄν τό δεύτερο σύνολο μιᾶς συναρτήσεως, αὐτό δηλαδή ὅπου ἡ συνάρτηση παίρνει τίς τιμές της, εἶναι τό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **πραγματική.** Ἄν ἐπιπλέον καί τό πρῶτο σύνολο εἶναι τό σύνολο $\mathbb{R}$ ἤ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$, τότε μιλᾶμε γιά **πραγματική συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.**

Μιά ἀκολουθία π.χ. πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς μέ πρῶτο σύνολο καί πεδίο ὁρισμοῦ συγχρόνως τό σύνολο $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· διότι, ὅπως γνωρίζομε, σέ μιάν ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, κάθε φυσικός ἀριθμός ἔχει ἀντίστοιχο ἕνα καί μόνον ἕναν πραγματικόν ἀριθμό.

Ἀπό δῶ καί πέρα θά ἀσχοληθοῦμε ἀποκλειστικά μέ πραγματικές συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καί ὅταν θά μιλᾶμε γιά συνάρτηση θά ἐννοοῦμε πάντα μιά συνάρτηση αὐτῆς τῆς κατηγορίας.

6.2 Πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Θεωροῦμε μιά σχέση μέ πρῶτο σύνολο A (σύνολο ἀφετηρίας) τό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί μέ δεύτερο σύνολο B (σύνολο καταλήξεως)

*Δηλαδή μιά ἀντιστοιχία (μεταξύ τῶν στοιχείων δύο συνόλων A καί B) ὅπου οὔτε ἕνα στοιχεῖο τοῦ A συνδέεται μέ περισσότερα ἀπό ἕνα στοιχεῖα τοῦ B, οὔτε ἕνα τοῦ B μέ περισσότερα ἀπό ἕνα τοῦ A.

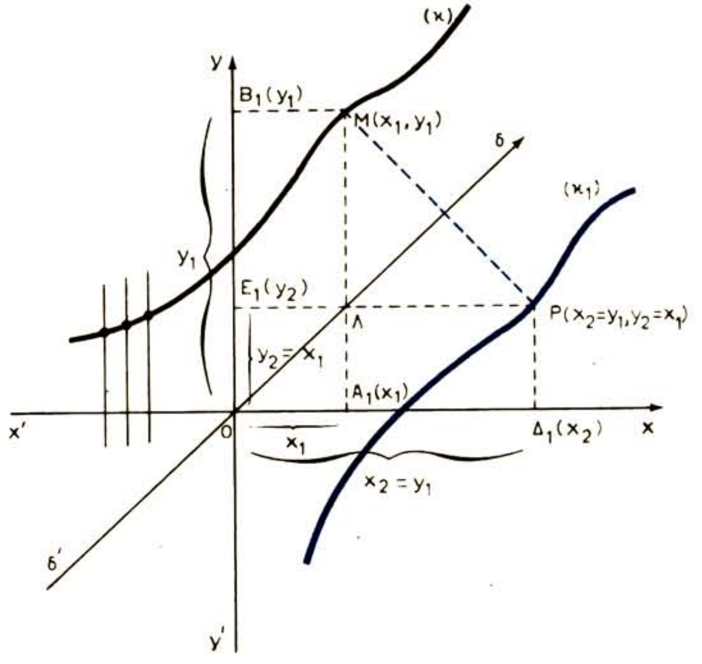
πάλι τό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν· δηλαδή $A = B = \mathbb{R}$. Κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (x, y) αὐτῆς τῆς σχέσεως εἶναι τότε ἕνα ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν καί παριστάνεται, ὅπως γνωρίζομε, στό ἐπίπεδο, μ' ἕνα σημεῖο.

Τό σύνολο τῶν παραστατικῶν σημείων μιᾶς τέτοιας σχέσεως εἶναι μία κατάλληλη ὀπτική παράσταση τῆς σχέσεως καί λέγεται, σ' αὐτήν εἰδικά τήν περίπτωση, **γραφική (ἤ γεωμετρική) παράσταση τῆς σχέσεως.**

Ὅταν εἰδικότερα ἡ σχέση μας εἶναι μιά συνάρτηση, τότε ἡ γραφική της παράσταση ἤ θ' ἀποτελεῖται ἀπό μεμονωμένα σημεῖα (ὅπως π.χ. συμβαίνει γιά μιάν ἀκολουθία) ἤ καί ὄχι.

Πάντως κάθε εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα y΄y θά ἔχει ἕνα τό πολύ κοινό σημεῖο μέ τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (σχ. 6.2α).

Ὁ συνηθέστερος τρόπος μέ τόν ὁποῖο δίνομε τό νόμο παραγωγῆς μιᾶς συναρτήσεως y τοῦ x, εἶναι ἡ κατασκευή μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως f(x) τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x· καί τότε, ὅταν λέμε: **«δίνεται ἡ συνάρτηση y = f(x)»,** ἐννοοῦμε ὅτι γράψαμε μιάν ἐξίσωση μεταξύ τῶν x καί y, τέτοια ὥστε ἡ τιμή πού παίρνει ἡ παράσταση f(x), γιά μιά τιμή τοῦ x ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, νά εἶναι ἡ ἀντίστοιχη τιμή τοῦ y.



Σχ. 6.2α.

Εἶναι σημαντικό, σέ μιά τέτοια περίπτωση, νά προσδιορίζομε, ὅταν δέν δίνεται ἐξαρχῆς, **τό μέγιστο ἐπιτρεπόμενο πεδίο ὁρισμοῦ γιά κάθε τύπο συναρτήσεως.** Αὐτό σημαίνει ὅτι καθορίζομε γιά ποιές πραγματικές τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς ἡ παράσταση f(x) ἔχει νόημα ἀριθμοῦ καί μάλιστα πραγματικοῦ.

Ἐκεῖνες οἱ πραγματικές τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες συμβαίνει ἡ παράσταση f(x) νά μήν ἔχει νόημα ἤ νά μήν παίρνει πραγματικές τιμές, ἀποκλείονται, καί μέγιστο πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεώς μας εἶναι ἡ ἕνωση τῶν διαστημάτων πού ἀπομένουν γιά τίς τιμές τοῦ x.

Ἄς πάρομε γιά παράδειγμα τή συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τόν ἀλγεβρικό τύπο: $y = \frac{(x-5)\sqrt{4x-16}}{x^2-12x+35}$· αὐτός γράφεται ἐπίσης: $y = \frac{(x-5)\sqrt{4(x-4)}}{(x-5)(x-7)}$.

Ἡ $\sqrt{4(x-4)} = 2\sqrt{x-4}$ εἶναι πραγματικός ἀριθμός ἐφόσον $x - 4 \geqslant 0$, δηλαδή γιά $x \geqslant 4$· ἄρα ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ ἀποκλείεται τό διάστημα $(-\infty, 4)$.

Ἐξάλλου ἐξαιροῦνται καί οἱ τιμές $x = 5$ καί $x = 7$, διότι αὐτές μηδενίζουν τόν παρονομαστή. Ὥστε τελικά τό εὐρύτερο πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεώς μας εἶναι ἡ ἕνωση τῶν διαστημάτων $[4, 5) \cup (5, 7) \cup (7, +\infty)$.

Εἶναι σκόπιμο καί πολλές φορές χρήσιμο νά καθορίζομε (ἄν μποροῦμε) καί τό πεδίο τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως.

Πρέπει νά τονίσομε σ' αὐτή τή θέση ὅτι: Ἄν σέ μιά σχέση μέ τό σύμβολο x δηλώνομε τά στοιχεῖα τοῦ πρώτου συνόλου A καί μέ τό y τά στοιχεῖα τοῦ δευτέρου συνόλου B τότε, στήν ἀντίστροφη σχέση, μέ τό x θά δηλώσομε τίς τιμές ἀπό τό B, ἀφοῦ τώρα πρῶτο σύνολο εἶναι τό B, καί μέ y τίς ἀντίστοιχες τιμές ἀπό τό A, ἀφοῦ τό A εἶναι τώρα τό δεύτερο σύνολο.

Ἄν π.χ. $(-1, 2)$, $(0, 5)$, $\left(\frac{4}{7}, \sqrt{3}\right)$ εἶναι μερικά διατεταγμένα ζεύγη μιᾶς σχέσεως R, τότε στήν ἀντίστροφη σχέση R^{-1} θά συναντήσομε ἀντιστοίχως τά ζεύγη $(2, -1)$, $(5, 0)$ καί $\left(\sqrt{3}, \frac{4}{7}\right)$.

Καί ἐνῶ στήν ἀρχική σχέση παίρνομε τίς τιμές $-1, 0$ καί $\frac{4}{7}$ πάνω στόν ἄξονα x'x καί ἀντίστοιχα τίς τιμές $2, 5, \sqrt{3}$ πάνω στόν ἄξονα y'y, ὅταν θέλομε νά προσδιορίσομε τά παραστατικά σημεῖα τῶν προηγουμένων ζευγῶν, γιά νά τοποθετήσομε τά παραστατικά σημεῖα τῆς ἀντίστροφης σχέσεως R^{-1} θά πάρουμε τίς τιμές $2, 5$ καί $\sqrt{3}$ πάνω στόν ἄξονα x'x καί ἀντίστοιχα τίς τιμές -1, 0, $\frac{4}{7}$ πάνω στόν ἄξονα y'y.

Ὕστερα ἀπό τά προηγούμενα προκύπτουν **δυό σημαντικά συμπεράσματα:**

I) Ἄν $y = f(x)$ εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς σχέσως R μεταξύ τῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x καί y, τότε βρίσκομε τήν ἐξίσωση τῆς ἀντίστροφης σχέσεως R^{-1} ἄν ἐναλλάξομε, μέσα στήν ἐξίσωση τῆς R, τά γράμματα x καί y· δηλαδή ἡ R^{-1} ἐκφράζεται μέ τήν ἐξίσωση $x = f(y)$.

II) Οἱ γραφικές παραστάσεις δυό ἀντιστρόφων σχέσεων (συναρτήσεων) εἶ-

ναι σχήματα συμμετρικά ὡς πρός τήν εὐθεία, πού διχοτομεῖ τήν πρώτη καί τρίτη γωνία τῶν ἀξόνων.

Πράγματι : Ἄν M_1 (x_1, y_1) εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως (κ) (σχ. 6.2α) μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$, τότε θά ὑπάρχει στή γραφική παράσταση ($κ_1$) τῆς ἀντίστροφης σχέσεως $x = f(y)$ τό σημεῖο $P(x_2 = y_1,\ y_2 = x_1)$, δηλαδή τό σημεῖο πού ἔχει ὡς τετμημένη τήν τεταγμένη τοῦ M καί ὡς τεταγμένη τήν τετμημένη τοῦ M. Δέν εἶναι δύσκολο νά διαπιστώσομε ὅτι τά σημεῖα M καί P εἶναι δυό σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'Oy'}$.

Τήν ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$, ὅταν ἡ σχέση εἶναι συνάρτηση, τή συμβολίζομε συνήθως μέ $y = f^{-1}(x)$.

Θά ἐφαρμόσομε τά προηγούμενα σέ δυό ἁπλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = 5x - 7$. Ποιός τύπος δίνει τήν ἀντίστροφη σχέση; Εἶναι ἡ ἀντίστροφη σχέση συνάρτηση; Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῶν σχέσεων.

Ἡ παράσταση $5x - 7$, πού εἶναι ἕνα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο τοῦ x, μᾶς δίνει μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό σύνολο $\mathbb{R}$, διότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$ τό πολυώνυμο $5x - 7$ παίρνει μιά καί μόνο μιά πραγματική τιμή. Ἡ ἀντίστροφη σχέση δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $x = 5y - 7$, ἄρα τήν $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{7}{5}$ πού ὁρίζει ἐπίσης συνάρτηση. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως εἶναι τό σύνολο $\mathbb{R}$ πού εἶναι πεδίο τιμῶν τῆς ἀρχικῆς.

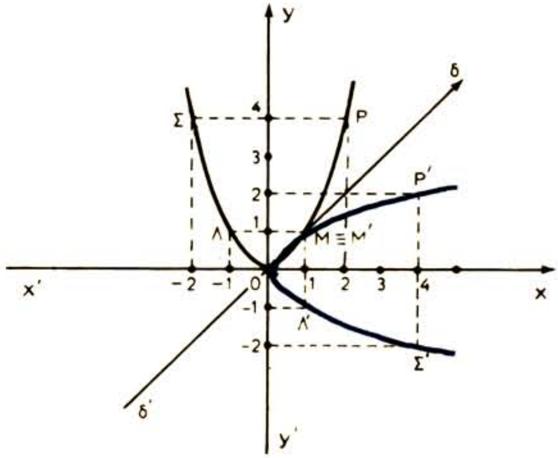
Ὅπως ξέρομε, οἱ δυό παραπάνω ἐξισώσεις παριστάνουν εὐθεῖες· ἐδῶ λέμε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν δυό αὐτῶν ἀντιστρόφων **γραμμικῶν συναρτήσεων** εἶναι δυό εὐθεῖες συμμετρικές ὡς πρός τή διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'Oy'}$. (Νά γίνει τό σχῆμα).

Παράδειγμα 2. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $y = x^2$ μέ $x \in \mathbb{R}$.

Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῆς σχέσεως πού προκύπτει μεταξύ x καί y καί νά γίνει ἡ γραφική παράσταση αὐτῆς καθώς καί τῆς ἀντίστροφης σχέσεως.

Ἡ σχέση εἶναι προφανῶς συνάρτηση, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διότι τό μονώνυμο x^2 παίρνει, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, μιά καί μόνο μιά πραγματική τιμή.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = x^2$ εἶναι ἡ καμπύλη ΣΛΟΜΡ (σχ. 6.2β) ὅπου $Σ(-2, 4)$, $Λ(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $M(1, 1)$ καί $P(2, 4)$ εἶναι μερικά παραστατικά σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως. Ἡ ἀντίστροφη σχέση δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $x = y^2$· ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $y = \sqrt{x}$ καί $y = -\sqrt{x}$. Ἔτσι βλέπομε ὅτι ἡ ἀντίστροφη σχέση δέν εἶναι συνάρτηση, διότι σέ μιά θετική τιμή τοῦ x ἀντιστοιχίζονται δυό ἀντίθετες τιμές τοῦ y. Π.χ. γιά $x = 4$ παίρνομε $y = 2$ καί $y = -2$. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως $y = \pm\sqrt{x}$ εἶναι τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(x \geqslant 0)$· ἄρα αὐτό εἶναι τό πεδίο τιμῶν τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως $y = x^2$ $(y \geqslant 0)$. Ἐνῶ ἡ ἐξίσωση $x = y^2$ δέν ὁρίζει συνάρτηση y τοῦ x, ἡ καθεμιά χωριστά ἀπό τίς ἐξισώσεις $y = \sqrt{x}$ καί $y = -\sqrt{x}$ ὁρίζει συνάρτηση μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$· ἡ μία ἔχει πεδίο τιμῶν τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν πραγματικῶν καί ἡ ἄλλη τῶν ὄχι θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 6.2β.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς μιᾶς εἶναι τό τόξο ΟΜΡ', συμμετρικό τοῦ ΟΜΡ (Μ ≡ Μ') ὡς πρός τή διχοτόμο δ'δ τῆς $\widehat{xOy}$, καί ἡ γραφική παράσταση τῆς ἄλλης εἶναι τό τόξο ΟΛ'Σ', συμμετρικό τοῦ τόξου ΟΛΣ. Ἡ καμπύλη Ρ'ΜΟΛ'Σ' εἶναι συμμετρική τῆς ΣΛΟΜΡ ὡς πρός τήν εὐθεία δ'δ. Λέμε ἐπίσης ὅτι ἡ καμπύλη ΣΛΟΜΡ ἔχει ἐξίσωση τήν $y = x^2$ καί ἡ Ρ'ΜΟΛ'Σ' τήν $x = y^2$.

6.3 Μονοτονία συναρτήσεων. Ἀκρότατα.

α) **Αὔξουσες καί φθίνουσες συναρτήσεις.** Ἄς θεωρήσομε μιά συνάρτηση f (x) ὁρισμένη τουλάχιστο μέσα σ' ἕνα διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$. Ἄν, γιά δυό ὁποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές x_1, x_2 τοῦ Δ μέ $x_1 < x_2$ ἔχομε $f(x)_1 \leqslant f(x_2)$, τότε ἡ συνάρτηση f(x) λέγεται **αὔξουσα** μέσα στό διάστημα [α, β]· ἄν εἰδικότερα μέ $x_1 < x_2$ εἶναι $f(x_1) < f(x_2)$, ἡ συνάρτηση λέγεται **γνησίως αὔξουσα.**

Ὅμοια, ὅταν μέ $x_1 < x_2$ ἔχομε $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, τότε ἡ συνάρτηση f(x) λέγεται **φθίνουσα**· καί ἐφόσον $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ἡ f(x) λέγεται **γνησίως φθίνουσα.**

Μιά συνάρτηση πού εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα λέγεται **μονότονος. Μιά συνάρτηση εἶναι συγχρόνως αὔξουσα καί φθίνουσα ἄν καί μόνον ἄν εἶναι σταθερά** (γιατί;).

Βασική ἐφαρμογή: Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἄν $\alpha > 0$ καί γνησίως φθίνουσα ἄν $\alpha < 0$, σ' ὅλο τό πεδίο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (τό πεδίο ὁρισμοῦ της).

Ι) Μέ $\alpha > 0$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow \alpha x_1 < \alpha x_2 \Longrightarrow \alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta$, δηλαδή $y_1 < y_2$· ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα.

ΙΙ) Μέ $\alpha < 0$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow \alpha x_1 > \alpha x_2 \Longrightarrow \alpha x_1 + \beta > \alpha x_2 + \beta$, δηλαδή $y_1 > y_2$· ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ἕνα σημαντικό θεώρημα. **Ἄν μιά συνάρτηση $f(x)$ εἶναι γνησίως αὔξουσα (ἀντίστοιχα φθίνουσα) μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν Δ καί πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο Ε ἐπίσης πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ ἀντίστροφη σχέση $f^{-1}(x)$ εἶναι ἐπίσης συνάρτηση καί εἶναι καί αὐτή αὔξουσα (ἀντίστοιχα φθίνουσα) μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό Ε καί πεδίο τιμῶν τό Δ.**

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή μέ $x_1 < x_2$ ἔχομε πάντα (στήν προκείμενη περίπτωση) $f(x_1) < f(x_2)$ [ἀντίστοιχα $f(x_1) > f(x_2)$] παρατηροῦμε ὅτι σέ δυό διαφορετικές τιμές τοῦ x ἀντιστοιχίζονται δυό διαφορετικές τιμές τοῦ $y = f(x)$· δηλαδή δέν ὑπάρχει τιμή τοῦ y (στοιχεῖο τοῦ Ε) πού νά εἶναι ἀντίστοιχη δυό ἤ περισσοτέρων τιμῶν τοῦ x (στοιχείων τοῦ Δ). **Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν x καί y εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.** Καί ὅταν μιά ἀντιστοιχία εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη, τότε καί ἡ ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συναρτήσεως εἶναι πάλι συνάρτηση. Ὅταν στίς τιμές $x_1 < x_2$ ἀντιστοιχίζονται μέσω τῆς $f(x)$ τιμές $y_1 < y_2$ (ἀντίστοιχα $y_1 > y_2$), τότε ἀντίστροφα σέ τιμές $y_1 < y_2$ (ἤ $y_1 > y_2$) θά ἀντιστοιχίζονται διά τῆς $f^{-1}(x)$ τιμές $x_1 < x_2$. Δηλαδή τό εἶδος τῆς μονοτονίας (αὔξουσα - φθίνουσα) τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως διατηρεῖται καί στήν ἀντίστροφη.

β) **Μέγιστα καί ἐλάχιστα συναρτήσεων**: Ἄς θεωρήσομε τή συνάρτηση $y = -2x^2 + 5$ πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$. Παρατηροῦμε ὅτι $-2x^2 \leqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ καί ἑπομένως $-2x^2 + 5 \leqslant 5$. Ἡ τιμή ὅμως 5 εἶναι αὐτή, πού ἀντιστοιχίζεται στήν τιμή $x = 0$, δηλαδή $5 = f(0)$. Ὥστε $5 = f(0) \geqslant -2x^2 + 5 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ἡ τιμή λοιπόν $5 = f(0)$ εἶναι ἡ μεγαλύτερη τιμή πού μπορεῖ νά πάρει ἡ συνάρτηση καί αὐτό συμβαίνει γιά $x = 0$. Γι' αὐτό λέμε ὅτι: **Ἡ συνάρτηση $-2x^2 + 5$ παρουσιάζει μέγιστο στό σημεῖο 0· ἡ τιμή $f(0)$ καλεῖται μεγίστη τιμή τῆς συναρτήσεως $f(x)$.**

Ἄν θεωρήσομε τή συνάρτηση $y = 2x^2 + 5$, τότε ἔχομε $5 = f(0) \leqslant 2x^2 + 5 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ἄρα ἡ τιμή τώρα $f(0)$ εἶναι ἡ μικρότερη τιμή πού παίρνει ἡ συνάρτηση. Γι' αὐτό λέμε ὅτι: **Ἡ συνάρτηση $2x^2 + 5$ παρουσιάζει ἐλάχιστο στό σημεῖο 0· ἡ τιμή $f(0)$ καλεῖται ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως $f(x)$.**

Γενικά: **Λέμε ὅτι μιά συνάρτηση $f(x)$, ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα Δ, παρουσιάζει ὁλικό μέγιστο σ' ἕνα σημεῖο x_0 τοῦ Δ, ἄν καί μόνον ἄν εἶναι $f(x) \leqslant f(x_0)$ $\forall x \in \Delta$.**

Ἐπίσης λέμε ὅτι μιά συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ὁλικό ἐλάχιστο σ' ἕνα σημεῖο x_0 τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της Δ, ἄν καί μόνον ἄν εἶναι $f(x) \geqslant f(x_0)$ $\forall x \in \Delta$.

Τήν τιμή $f(x_0)$ ὀνομάζομε ἀντίστοιχα μεγίστη ἤ ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως $f(x)$.

Ἄν γιά ἕνα σημεῖο ρ ἑνός διαστήματος $(\alpha < x < \beta)$, πού περιέχεται στό πεδίο ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως, συμβαίνει νά ἔχομε $f(x) \leqslant f(\rho)$ (ἀντίστοιχα $f(x) \geqslant f(\rho)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε λέμε ὅτι ἡ $f(x)$ **παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (ἀντίστοιχα τοπικό ἐλάχιστο) στό σημεῖο ρ.**

Τά τοπικά μέγιστα καί ἐλάχιστα μιᾶς συναρτήσεως τά ὀνομάζομε μαζί (τοπικά) **ἀκρότατα.**

6.4 Μελέτη καί γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως.

Ἡ μονοτονία καί τό σχετικό θέμα τῶν ἀκροτάτων, ἄν ὑπάρχουν, εἶναι ἀπό τά πιό σημαντικά γνωρίσματα μιᾶς συναρτήσεως καί γι' αὐτό σ' αὐτά ἀναφέρονται τά πρῶτα ἐρωτήματα πού θέτομε ὅταν μελετᾶμε μιά συνάρτηση. Ἄς σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἀπάντηση σ' αὐτά δίνει χρήσιμες πληροφορίες γιά νά ἐπιτύχομε τή σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως, πού εἶναι τό ἀναγκαῖο συμπλήρωμα τῆς ὅλης σπουδῆς τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως.

Ἡ γραφική παράσταση πέρα ἀπό τό ὅτι δίνει μιά συνοπτική εἰκόνα τῶν ἰδιοτήτων καί τῶν ἰδιαιτέρων χαρακτηριστικῶν μιᾶς συναρτήσεως, μπορεῖ νά εἶναι ἡ ἀφετηρία γιά τήν ἐξαγωγή ἀξιολόγων συμπερασμάτων, κυρίως ὅταν ἀποτελεῖ τήν ἐποπτική ἔκφραση τῆς ἀλληλεπιδράσεως δύο φυσικῶν μεταβλητῶν μεγεθῶν.

Οἱ γνώσεις πού μέχρι τώρα διαθέτομε μᾶς ἐπιτρέπουν νά διατυπώσομε τούς ἀκόλουθους κανόνες γιά τή μελέτη καί τή σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς δοσμένης συναρτήσεως $y = f(x)$.

I) **Καθορίζομε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως καί, ἄν μᾶς εἶναι βολικό, καί τό πεδίο τιμῶν.**

II) **Προσδιορίζομε ἐκεῖνα τά διαστήματα, μέσα στό πεδίο ὁρισμοῦ, στά ὁποῖα ἡ συνάρτηση εἶναι αὔξουσα καί ἐκεῖνα στά ὁποῖα εἶναι φθίνουσα.**

III) **Βρίσκομε τά τοπικά ἀκρότατα. Εἶναι τά σημεῖα ἐκεῖνα σέ μιά περιοχή* τῶν ὁποίων ἀλλάζει τό εἶδος τῆς μονοτονίας. Ἄν π.χ. ἀριστερά μιᾶς τιμῆς x_0 τοῦ x $(x < x_0)$ ἡ συνάρτηση εἶναι αὔξουσα καί δεξιά $(x > x_0)$ εἶναι φθίνουσα, τότε στή θέση x_0 ἔχομε τοπικό μέγιστο· ἄν ἀντίθετα ἀριστερά τοῦ x_0 ἡ συνάρτηση εἶναι φθίνουσα καί δεξιά τοῦ x_0 αὔξουσα, τότε στή θέση x_0 ἔχομε τοπικό ἐλάχιστο.**

IV) **Προσδιορίζομε (ἄν μποροῦμε) τίς πραγματικές τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x πού μηδενίζουν τήν παράσταση $f(x)$. Ἔτσι καθορίζομε τά σημεῖα, στά ὁποῖα ἡ γραφική παράσταση τέμνει τόν ἄξονα $x'x$.**

Ἡ τιμή $f(0)$ εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου, στό ὁποῖο ἡ συνάρτηση τέμνει τόν ἄξονα $y'y$.

V) **Τοποθετοῦμε στό σχέδιό μας ὅλα τά σημεῖα πού ἔχομε προσδιορίσει, δηλαδή τά ἀκρότατα καί τά σημεῖα τομῆς τῆς γραφικῆς μέ τούς ἄξονες (ἄν καί**

***Περιοχή μέ κέντρο α** ὀνομάζομε κάθε ἀνοιχτό διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$.

ὅσα ὑπάρχουν). Ἀκολούθως δίνοντας μερικές ἀκόμα τιμές στή μεταβλητή x, μέ προσωπική ἐκτίμηση, βρίσκομε κι ἄλλα σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως καί μετά προβαίνομε στή σχεδίασή της.

Παρατήρηση: Ὅταν ἔχομε προσδιορίσει τό πεδίο τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως, εἶναι συχνά πολύ εὔκολο νά διακρίνομε τά τοπικά της ἀκρότατα.

Σημείωση: Μποροῦμε τίς διάφορες πραγματικές συναρτήσεις, πού δίνονται μέσω «ἀλγεβρικῶν τύπων», νά τίς κατατάξομε σέ κατηγορίες, σύμφωνα μέ τά εἰδικά χαρακτηριστικά πού ἐμφανίζουν. Ἡ ἀναγνώριση τῆς κατηγορίας στήν ὁποία ὑπάγεται μιά συνάρτηση μᾶς διευκολύνει πολλές φορές στή μεθόδευση τῆς μελέτης. Θά ἀναφέρομε ἐδῶ τά σημαντικότερα γιά μᾶς εἴδη συναρτήσεων.

I) **Πολυωνυμική συνάρτηση:** Εἶναι κάθε συνάρτηση τῆς μορφῆς: $y = \alpha_o x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$, ὅπου $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ ὁρισμένοι πραγματικοί ἀριθμοί καί $\nu, \nu - 1, \ldots$ φυσικοί.

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση μπορεῖ νά ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ της ὅλο τό σύνολο $\mathbb{R}$ - μπορεῖ νά εἶναι ὁρισμένη παντοῦ μέσα στό $\mathbb{R}$ - (γιατί;).

II) **Ρητή συνάρτηση:** Εἶναι κάθε συνάρτηση τῆς μορφῆς $y = \dfrac{\Pi(x)}{P(x)}$, ὅπου $\Pi(x)$ καί $P(x)$ πολυώνυμα μέ πραγματικούς συντελεστές. **Μιά ρητή συνάρτηση μπορεῖ νά εἶναι ὁρισμένη σ' ὅλο τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ ἐξαίρεση ἐκείνων τῶν τιμῶν πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή** (γιατί;).

III) **Ἄρτια συνάρτηση:** Ἔτσι ὀνομάζεται μιά συνάρτηση $y = f(x)$ πού παίρνει τήν ἴδια τιμή γιά ἀντίθετες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. Οἱ συναρτήσεις π.χ. $y = x^2 + 1$, $y = 2x^4 + x^2 + 1$ εἶναι ἄρτιες (γιατί;). Ὅταν ἔχομε μελετήσει μιά ἄρτια συνάρτηση γιά τίς θετικές π.χ. τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς, τότε γνωρίζομε τί ἰσχύει καί γιά τίς ἀρνητικές τιμές τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

IV) **Περιττή συνάρτηση:** Ἔτσι ὀνομάζεται μιά συνάρτηση πού παίρνει ἀντίθετες τιμές γιά ἀντίθετες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. Ἡ συνάρτηση π.χ. $y = x^3 + x$ εἶναι μιά περιττή συνάρτηση, διότι:

$$(-x_0)^3 + (-x_0) = -x^3{}_0 - x_0 = -(x^3{}_0 + x_0).$$

6.5 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Ἐπειδή τό πολυώνυμο $x^2 + 1$ δέν μηδενίζεται γιά καμμιά πραγματική τιμή τοῦ x, ἕπεται ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι τό $\mathbb{R}$.

Ἐπιλύομε τήν παραπάνω ἐξίσωση ὡς πρός x καί παίρνομε:
$2x = yx^2 + y \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ (1).

Οἱ τιμές τοῦ x προκύπτουν ἀπό τόν τύπο: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - y^2}}{y}$ (2) (μέ $y \neq 0$)· εἶναι δηλαδή οἱ λύσεις τῆς δευτεροβάθμιας ὡς πρός x ἐξισώσεως (1).

Πρέπει ὅμως ἡ μεταβλητή y νά παίρνει τέτοιες πραγματικές τιμές ὥστε ὁ τύπος (2) νά μᾶς δίνει πραγματικές τιμές καί γιά τό x· ἄρα πρέπει νά ἔχομε: $1 - y^2 \geqslant 0 \iff y^2 \leqslant 1 \iff |y| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant y \leqslant 1$. Γιά $y = 0$ ἀπό τήν (1) παίρνομε $x = 0$. Ὥστε τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι τό κλειστό διάστημα $[-1, 1]$. Μποροῦμε συνακόλουθα νά ποῦμε ὅτι ἡ τιμή -1 εἶναι ἡ ἐλαχίστη καί ἡ $+1$ ἡ μεγίστη τιμή τῆς συναρτήσεως.

2. Θεωροῦμε τή συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}$.

I) Νά βρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ της. II) Νά καθορισθοῦν, ἄν ὑπάρχουν, τά τοπικά ἀκρότατα.

I) Ἐπειδή εἶναι $x^2 - 1 = 0$ γιά $x = -1$ ἤ $x = 1$ συμπεραίνομε ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό σύνολο $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

II) Παίρνομε τήν ἐξίσωση:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1} = y$$

καί τήν ἐπιλύομε ὡς πρός x. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή $x^2 + 2x + 3 = yx^2 - y$ ἤ τήν $(1 - y)\,x^2 + 2x + y + 3 = 0$, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρός x ρίζες πραγματικές, ἄν ἡ διακρίνουσα $\Delta = 4 - 4\,(1 - y)\cdot(y + 3) \geqslant 0$ ἤ $y^2 + 2y - 2 \geqslant 0$.

Ἡ τελευταία ἀνίσωση ἀληθεύει ἄν $y \leqslant -1 - \sqrt{3}$ ἤ $y \geqslant -1 + \sqrt{3}$. Ἄρα τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ ἕνωση τῶν διαστημάτων $(-\infty, -1 - \sqrt{3}]$ καί $[-1 + \sqrt{3}, +\infty)$. Ἑπομένως ἡ τιμή $y_1 = -1 - \sqrt{3}$ εἶναι τοπικό μέγιστο, ἐνῶ ἡ τιμή $y_2 = -1 + \sqrt{3}$ τοπικό ἐλάχιστο.

3. Νά γίνει ἡ μελέτη καί ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων: I) $y = 10^x$ *καί II)* $y = \lambda o\gamma\, x$.

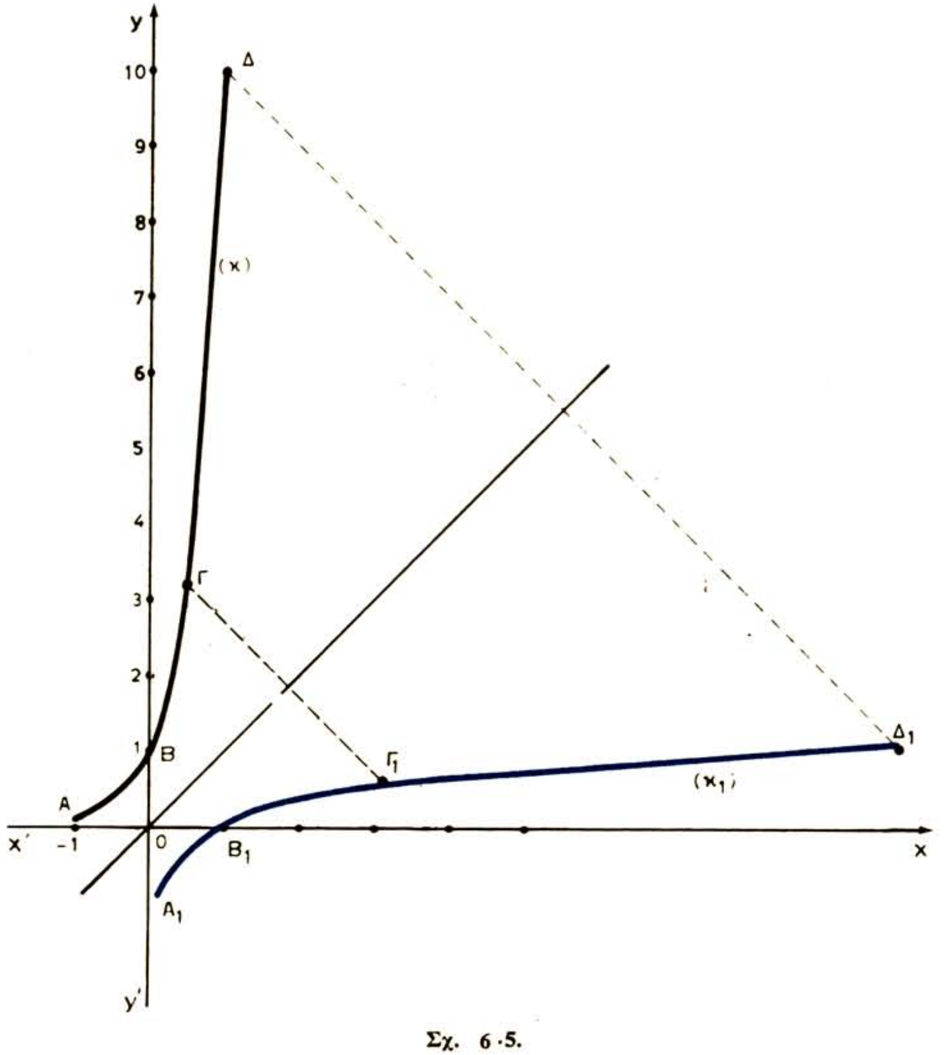
I) Ἡ συνάρτηση $y = 10^x$, ἡ ὁποία λέγεται ***ἐκθετική συνάρτηση,*** ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ὁλόκληρο τό σύνολο $\mathbb{R}$.

Ἔχομε $0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow 1 \leqslant 10^{x_1} < 10^{x_2}$, $x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{-x_1} > 10^{-x_2} \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{10^{x_1}} > \dfrac{1}{10^{x_2}} \geqslant 1 \Rightarrow 10^{x_1} < 10^{x_2} \leqslant 1$ καί $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{x_1} < 1 < 10^{x_2}$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα σ' ὅλο τό πεδίο ὁρισμοῦ της. Παρατηροῦμε ἐπιπλέον ὅτι: ὅταν τό x αὐξάνει ἀπεριόριστα καί τείνει, ὅπως λέμε, πρός τό $+\infty$, τότε καί τό y τείνει στό $+\infty$· ἐνῶ, ὅταν τό x τείνει στό $-\infty$, τό $y = \dfrac{1}{10^{-x}}$ τείνει στό 0. Συμπεραίνομε δηλαδή ὅτι πεδίο τιμῶν τῆς συναρτή-

σεως εἶναι τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Μερικά ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καί y	x	-2	-1	0	$1/2$	1	2
	y	$1/100$	$1/10$	1	$\sqrt{10}$	10	100

Κατασκευάζομε τόν παραπάνω πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καί y καί, ὡς πρός ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, σημειώνομε μερικά σημεῖα ὅπως τά A $\left(-1, \frac{1}{10}\right)$, B (0, 1), Γ $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{10}\right)$ καί Δ (1, 10) καί μέ τή βοήθεια αὐτῶν τῶν σημείων σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (σχ. 6.5).



Σχ. 6·5.

Ἀπό τόν πίνακα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν ἀλλά καί ἀπό τή γραφική παράσταση βλέπομε πόσο «γρήγορα κατεβαίνουν» οἱ τιμές τῆς y πρός τό μηδέν, ὅταν ἡ x παίρνει ὁλοένα μικρότερες ἀρνητικές τιμές καί ἀντίθετα πόσο «γρήγορα ἀνεβαίνουν» πρός τό $+\infty$ ὅταν ἡ x παίρνει ὁλοένα μεγαλύτερες θετικές τιμές. Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό σημεῖο Α τῆς καμπύλης μέ ἐξίσωση $y = 10^x$ (σχ. 6·5) μετατοπίζεται πρός τ' ἀριστερά, ἡ ἀπόστασή του ἀπό τήν εὐθεία x'x γίνεται ὅλο καί μικρότερη καί τείνει στό μηδέν.

Ἐκφράζομε αὐτή τήν ἰδιότητα λέγοντας ὅτι ἡ καμπύλη (κ) ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία x'x.

Γενικά λέμε ὅτι, ἕνας ἀπεριόριστος κλάδος ἐπίπεδης γραμμῆς ἔχει ἀσύμπτωτη μιά εὐθεία (ε) τοῦ ἐπιπέδου, ἄν ἡ ἀπόσταση ἀπό τήν (ε) ἑνός σημείου πού διαγράφει τόν ἀπεριόριστο κλάδο ἔχει ὅριο τό μηδέν. Π.χ. ὁ ἀπεριόριστος κλάδος $y = \frac{1}{x}$ γιά $0 < x \leqslant 1$ τῆς γραμμῆς μέ ἐξίσωση $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $x = 0$ (τόν ἄξονα y'y) καί ὁ ἀπεριόριστος κλάδος $y = x + \frac{1}{x}$ γιά $1 \leqslant x < +\infty$ τῆς γραμμῆς μέ ἐξίσωση $y = x + \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $y = x$ (διχοτόμο τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$).

II) Ἡ συνάρτηση πού προκύπτει ὅταν σέ κάθε $x > 0$ ἀντιστοιχίσομε τό $\lambda o\gamma_{10} x$ (ὁ ὁποῖος εἶναι μοναδικός) λέγεται λογαριθμική συνάρτηση καί εἶναι **ἀντίστροφη** τῆς ἐκθετικῆς μέ τύπο $y = 10^x$, ἐπειδή:

$$y = 10^x \iff x = \lambda o\gamma_{10} y$$

Ἡ λογαριθμική συνάρτηση ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}^+$ (τό πεδίο τιμῶν τῆς $y = 10^x$) καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R}$ (τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $y = 10^x$). Εἶναι καί αὐτή, ὅπως καί ἡ ἐκθετική, γνησίως αὔξουσα σέ ὅλο τό πεδίο ὁρισμοῦ της. Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεώς μας εἶναι ἡ γραμμή $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, συμμετρική τῆς ΑΒΓΔ ὡς πρός τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = x$ (τή διχοτόμο δηλαδή τῶν γωνιῶν $x\widehat{O}y$ καί $x'\widehat{O}y'$). Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ὁ κλάδος $y = \lambda o\gamma x$ γιά $0 < x \leqslant 1$ τῆς καμπύλης (κ_1), ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία y'y.

4. Ἄν x καί ω δυό μεταβλητές μέ $x \geqslant 0$ καί $\omega \geqslant 0$ καί $x + \omega = \alpha$, ὅπου α σταθερά > 0, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: «τό γινόμενο xω γίνεται μέγιστο, ὅταν $x = \omega = \frac{\alpha}{2}$».

Ἄν θέσομε $y = x\omega$ καί ἀντικαταστήσομε τό ω μέ $\alpha - x$ (λόγω τῆς $x + \omega = \alpha$) ἔχομε τή συνάρτηση $y = x(\alpha - x) = -x^2 + \alpha x$ (1) μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $0 \leqslant x \leqslant \alpha$. Βρίσκομε τό πεδίο τιμῶν τῆς (1) ἄν τήν ἐπιλύσομε ὡς πρός x καί ἀπαιτήσομε ἡ δευτεροβάθμια ὡς πρός x ἐξίσωση $x^2 - \alpha x + y = 0$ (2) νά ἔχει πραγματικές λύσεις. Πρός τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\alpha^2 - 4y \geqslant 0$ (γιατί;)· δηλαδή $y \leqslant \frac{\alpha^2}{4}$.

Ἄρα τό πεδίο τιμῶν τῆς (1) εἶναι τό διάστημα $\left[0, \frac{\alpha^2}{4}\right]$ καί ἡ μεγίστη τιμή τῆς συναρτήσεως (τοῦ γινομένου $x\omega$) εἶναι $\frac{\alpha^2}{4}$.

Γιά $y = \frac{\alpha^2}{4}$ ἡ (2) ἔχει ἴσες ρίζες, τίς $x_1 = x_2 = \frac{\alpha}{2}$.

Ὥστε μέ $x = \omega = \frac{\alpha}{2}$ τό γινόμενο $x\omega$ παίρνει τή μεγαλύτερη δυνατή τιμή, ἴση μέ $\frac{\alpha^2}{4}$.

5. Ἄν x καί ω δυό μεταβλητές μέ $x > 0$ καί $\omega > 0$ καί $x\omega = \kappa^2$, ὅπου κ ὁρισμένος θετικός ἀριθμός, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: «Τό ἄθροισμα $x + \omega$ γίνεται ἐλάχιστο ὅταν $x = \omega = \kappa$».

Θέτομε $y = x + \omega$ ὁπότε, λόγω τῆς $x\omega = \kappa^2$, ἔχομε τή συνάρτηση $y = x + \frac{\kappa^2}{x}$ (1). Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς (1) εἶναι τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν. Τό πεδίο τιμῶν τό βρίσκομε ἄν ἐπιλύσομε τήν (1) ὡς πρός x. Ἔχομε $y = x + \frac{\kappa^2}{x} \Longleftrightarrow x^2 - yx + \kappa^2 = 0$ (2). Ἀπαιτοῦμε τώρα ἡ (2) νά ἔχει ὡς πρός x λύσεις πραγματικές. Πρός τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $y^2 - 4\kappa^2 \geqslant 0$ (γιατί;) ἤ $y^2 \geqslant 4\kappa^2$· δηλαδή $y \geqslant 2\kappa$ (διότι $y > 0$). Ἄρα τό πεδίο τιμῶν τῆς (1) εἶναι τό διάστημα $[2\kappa, +\infty)$ καί ἡ ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως (τοῦ ἀθροίσματος $x + \omega$) εἶναι 2κ. Γιά $y = 2\kappa$ ἡ (2) ἔχει ἴσες ρίζες τίς $x_1 = x_2 = \frac{y}{2} = \kappa$. Ὥστε μέ $x = \omega = \kappa$ τό ἄθροισμα $x + \omega$ παίρνει τή μικρότερη δυνατή τιμή, ἴση μέ 2κ.

6. I) Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα μέ τήν ἴδια περίμετρο 2α ποιό ἔχει τό μέγιστο ἐμβαδόν;

II) Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα μέ τό ἴδιο ἐμβαδόν κ^2 ποιό ἔχει τήν ἐλαχίστη περίμετρο;

I) Ἄν x καί ω οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχομε $x + \omega = \alpha$. Σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα 4 τό ἐμβαδόν $x\omega$ γίνεται μέγιστο ὅταν $x = \omega = \frac{\alpha}{2}$. Τό τετράγωνο λοιπόν μέ πλευρά $\frac{\alpha}{2}$ ἔχει τό μέγιστο ἐμβαδόν, ἴσο μέ $\frac{\alpha^2}{4}$.

II) Ἄν x καί ω οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχομε $x\omega = \kappa^2$.

Σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα 5 ή ήμιπερίμετρος $x + \omega$ γίνεται έλαχίστη όταν $x = \omega = \kappa$. Έτσι πάλι τό τετράγωνο, μέ πλευρά τώρα ίση πρός κ, έχει τήν έλαχίστη περίμετρο.

7. Οί συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ άς έχουν τό ίδιο πεδίο όρισμοῦ καί τά πεδία τιμῶν τους άς είναι ύποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν πραγματικῶν άριθμῶν· τότε: άν καί οί δυό συναρτήσεις είναι αὔξουσες (φθίνουσες) θά είναι αὔξουσα (άντίστοιχα φθίνουσα) καί ή συνάρτηση $f(x) \cdot g(x)$.

Μέ $x_1 < x_2$ έχομε $0 < f(x_1) \leqslant f(x_2)$ [ή $f(x_1) \geqslant f(x_2) > 0$] καί συγχρόνως $0 < g(x_1) \leqslant g(x_2)$ [ή $g(x_1) \geqslant g(x_2) > 0$].

Άρα θά είναι καί $0 < f(x_1) \cdot g(x_1) \leqslant f(x_2) \cdot g(x_2)$ [ή $f(x_1) g(x_1) \geqslant f(x_2) g(x_2) > 0$].

Σημείωση: Όπως ξέρομε, όταν έχομε άνισότητες όμοιόστροφες μέ θετικούς όρους μποροῦμε νά τίς πολλαπλασιάσομε κατά μέλη.

6.6 Άσκήσεις.

1. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. Νά καθορισθοῦν τά πεδία όρισμοῦ καί τιμῶν, καί νά έξετασθεῖ ή συνάρτηση ώς πρός τή μονοτονία.

(**Ύπόδειξη**: Γιά $x \neq \pm 1$ μπορεῖτε νά χρησιμοποιήσετε άντί $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}$ τήν έκφραση $y = \dfrac{x-2}{x+1}$).

2. Δίνεται ή συνάρτηση $y = |4x - 6| + 6$. Νά γίνει ή μελέτη καί ή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως.

(**Ύπόδειξη**: Νά διακρίνετε δύο περιπτώσεις: $4x - 6 \leqslant 0$ καί $4x - 6 \geqslant 0$).

3. Νά βρεθοῦν τά πεδία τιμῶν καί νά γίνουν οί γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων: I) $y = \dfrac{|x|}{x}$. II) $y = \text{Ακ}(x)$, όπου μέ τό συμβολισμό Ακ (x) έννοοῦμε, γιά κάθε πραγματική τιμή x, τόν μεγαλύτερο άκέραιο πού δέν ξεπερνᾶ τό x, δηλαδή $\text{Ακ}(x) \leqslant x < \text{Ακ}(x) + 1$. Π.χ. $\text{Ακ}\left(-\dfrac{15}{4}\right) = -4$, $\text{Ακ}\left(\sqrt{53}\right) = 7$, $\text{Ακ}(-17) = -17$.

4. Νά βρεθοῦν τά άκρότατα (άν ύπάρχουν) τῶν συναρτήσεων: I) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$. II) $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$. III) $y = \dfrac{5x}{x^2 + x + 1}$.

5. Νά γίνει ή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων: I) $y = 2^x$. II) $y = \lambda o\gamma_2 x$.

6. Άν οί συναρτήσεις f καί g, μέ τό ίδιο πεδίο όρισμοῦ, είναι καί οί δυό αὔξουσες (άντίστοιχα φθίνουσες), τότε καί ή συνάρτηση $f + g$ θά είναι έπίσης αὔξουσα (άντίστοιχα φθίνουσα).

7. Άν f είναι μιά μονότονη συνάρτηση σ' ένα διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί κ μιά σταθερά, νά έξετάσετε άπό άποψη μονοτονίας τίς συναρτήσεις: $f + \kappa$, κf, $\dfrac{1}{f}$ (έφόσον $f > 0$), f^2 καί $\sqrt{f}$ (έφόσον $f \geqslant 0$).

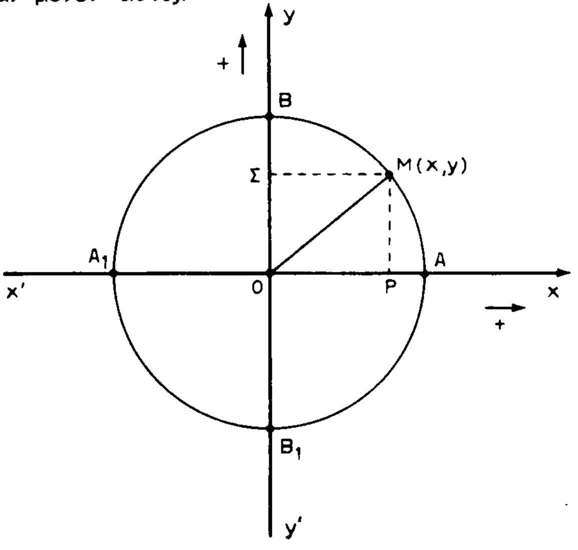
8. Άπό όλα τά όρθογώνια τρίγωνα μέ τό ίδιο έμβαδόν (έστω τό κ^2) ποιό είναι έκεῖνο πού έχει τήν πιό μικρή ύποτείνουσα;

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ Η ΕΛΛΕΙΨΗ

7.1 Ἡ ἐξίσωση κύκλου μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Θεωροῦμε ἕναν κύκλο * πού ἔχει ὡς κέντρο τήν ἀρχή O ἑνός ὀρθοκανονικοῦ συστήματος ἀξόνων καί ἀκτίνα ἴση μέ ρ (ρ τό μέτρο ἑνός δοσμένου τμήματος). Θέλομε νά βροῦμε μιά σχέση πού νά ἱκανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ κύκλου καί μόνον αὐτές.



Σχ. 7.1.

Ἄς πάρομε ἕνα τυχαῖο σημεῖο M(x, y) τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 7.1)· ἄν P καί Σ εἶναι οἱ προβολές τοῦ M στούς ἄξονες x'x καί y'y ἀντιστοίχως, θά ἔχομε $\overline{OP} = x$ καί $\overline{PM} = \overline{O\Sigma} = y$. Γιά ν' ἀνήκει τό σημεῖο M(x, y) στόν κύκλο (O, ρ), πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $|\overrightarrow{OM}| = \rho$ ἤ $|\overrightarrow{OM}|^2 = \rho^2$. Ἀλλά εἶναι πάντα (γιά κάθε σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου) $x^2 + y^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$ καί συνεπῶς ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά ἀνήκει ἕνα σημεῖο M(x, y) στόν κύκλο (O, ρ), εἶναι

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2} \qquad (1)$$

Ἡ σχέση (1), ἐπειδή ἱκανοποιεῖται ἀπό τά σημεῖα τοῦ κύκλου (O, ρ) καί μόνον ἀπ' αὐτά, λέγεται **ἐξίσωση** αὐτοῦ **τοῦ κύκλου.**

Ἄν ἐπιλύσομε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός y θά πάρομε $y^2 = \rho^2 - x^2$ καί τελικά:

---

* Ὅταν ἐδῶ μιλᾶμε γιά κύκλο, ἐννοοῦμε ὅ,τι μέχρι τώρα καλούσαμε περιφέρεια κύκλου.

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad (1\alpha) \quad \text{ἤ} \quad y = -\sqrt{\rho^2 - x^2} \quad (1\beta).$$

Ἔτσι βλέπομε ὅτι σέ κάθε κατάλληλη πραγματική τιμή τοῦ x ($|x| \leqslant \rho$) ἀντιστοιχίζονται δυό ἀντίθετες τιμές τοῦ y. Ἄρα ἡ σχέση (1) δέν εἶναι συνάρτηση· χωρίζεται ὅμως σέ δυό συναρτήσεις, τίς (1α) καί (1β), μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων (1α) καί (1β) προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση $\rho^2 - x^2 \geqslant 0$. Ἔχομε $\rho^2 - x^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2 \leqslant \rho^2 \Longleftrightarrow |x| \leqslant \rho \Longleftrightarrow -\rho \leqslant x \leqslant \rho$· δηλαδή τό πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό κλειστό διάστημα $[-\rho, \rho]$.

Πεδίο τιμῶν τῆς σχέσεως (1) εἶναι τό ἴδιο διάστημα $[-\rho, \rho]$, **διότι ἡ σχέση μας εἶναι συμμετρική ὡς πρός x καί y.** Εἰδικά, πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως (1α) εἶναι τό διάστημα $[0, \rho]$, ἐνῶ τῆς (1β) εἶναι τό διάστημα $[-\rho, 0]$.

Ἡ συνάρτηση (1α) εἶναι γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $[-\rho, 0]$ καί γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $[0, \rho]$ (γιατί;) καί ἔχει ὡς γραφική παράσταση τό ἡμικύκλιο A_1BA (σχ. 7.1), ἐνῶ ἡ συνάρτηση (1β) εἶναι γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $[-\rho, 0]$ καί γνησίως αὔξουσα στό $[0, \rho]$ καί ἔχει ὡς γραφική παράσταση τό ἡμικύκλιο A_1B_1A.

7.2 Ἡ ἔλλειψη καί ἡ ἐξίσωσή της.

α) **Ὁρισμός τῆς ἐλλείψεως.** Ἄν E_1 καί E εἶναι δυό ὁποιαδήποτε ὁρισμένα σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου καί 2α ἕνα ὁποιοδήποτε δοσμένο τμῆμα μέ $2\alpha > E_1E$, τότε τό σύνολο τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα ἔχομε $ME_1 + ME = 2\alpha$ (I) λέγεται **ἔλλειψη.**

Δηλαδή: **Ἔλλειψη λέγεται ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων M ἑνός ἐπιπέδου, τά ὁποῖα ἔχουν σταθερό ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπό δυό δοσμένα σημεῖα E_1 καί E τοῦ ἐπιπέδου ($ME_1 + ME = 2\alpha > E_1E > 0$).**

Τά σταθερά σημεῖα E_1 καί E λέγονται **ἑστίες** τῆς ἐλλείψεως.

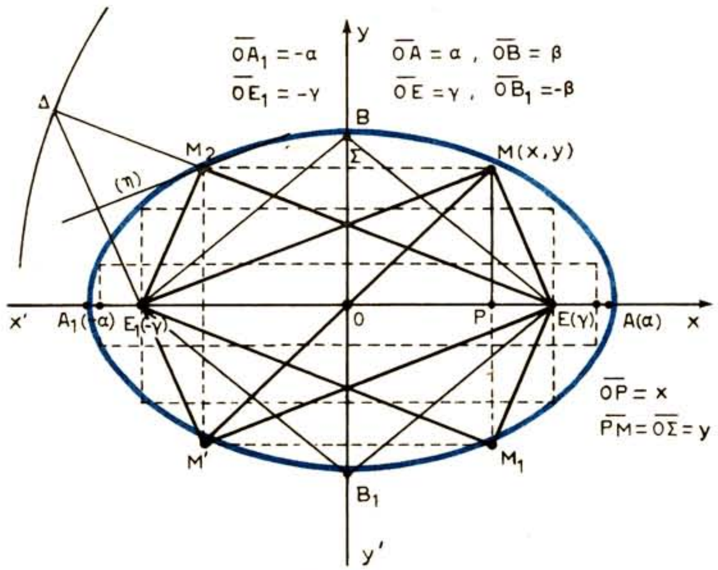
Σχεδιάζομε τήν εὐθεία E_1E καί ἐπίσης τήν εὐθεία $y'y$ τή μεσοκάθετη στό τμῆμα E_1E (σχ. 7.2). Εἶναι πολύ εὔκολο ν' ἀποδείξομε ὅτι οἱ εὐθεῖες E_1E καί $y'y$ εἶναι ἄξονες (ὀρθῆς) συμμετρίας τοῦ τόπου καί συνεπῶς τό σημεῖο τομῆς O τῶν E_1E καί $y'y$ ($O \equiv$ μέσο τοῦ E_1E) εἶναι κέντρο συμμετρίας. Πράγματι ἄν M εἶναι ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς ἐλλείψεως, τότε τό M_1, συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τήν E_1E, τό M_2 συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τήν $y'y$ καθώς καί τό M' συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός O ἀνήκουν ἐπίσης στόν τόπο.

Φανερό εἶναι ἀκόμα ὅτι τά σημεῖα B_1 καί B τοῦ ἄξονα $y'y$, γιά τά ὁποῖα ἔχομε $EB_1 = EB = \alpha$, καθώς καί τά σημεῖα A_1, A τοῦ ἄξονα E_1E, γιά τά ὁποῖα ἔχομε $OA_1 = OA = \alpha$, ἀνήκουν στόν τόπο μας.

Θά παραστήσομε μέ 2γ τό τμῆμα E_1E καί μέ 2β τό τμῆμα B_1B· τότε ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο BOE παίρνομε:

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \qquad \text{(II)}$$

Μέ τά σύμβολα α, β, γ θά ἐννοοῦμε καί τά μέτρα τῶν τμημάτων OA, OB καί OE ἀντιστοίχως. Τά τμήματα 2α καί 2β λέγονται ἀντίστοιχα **μεγάλος** καί



Σχ. 7.2.

μικρός ἄξονας τῆς ἐλλείψεως.

β) **Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως.** Ὕστερα ἀπό τά παραπάνω εἶναι φυσικό νά ζητήσομε τήν ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως ὡς πρός τό ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων πού εἶναι φτιαγμένο πάνω στούς ἄξονες συμμετρίας τοῦ τόπου. Τόν πρῶτο ἄξονα x'x θά τόν πάρομε πάνω στήν E_1E μέ θετική κατεύθυνση ἀπό τό E_1 πρός τό E.

Θέλομε νά βροῦμε, ὅπως καί γιά τόν κύκλο, τή σχέση πού ἱκανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων μιᾶς ἐλλείψεως καί μόνο αὐτές.

Ἄς θεωρήσομε ἕνα σημεῖο M(x, y) τοῦ τόπου (τῆς ἐλλείψεως) τοῦ ὁποίου οἱ προβολές στούς ἄξονες x'x καί y'y εἶναι ἀντίστοιχα τά σημεῖα P καί Σ (σχ. 7.2)· τότε $\overline{OP} = x$ καί $\overline{PM} = \overline{O\Sigma} = y$.

Ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα E_1PM καί EPM ἔχομε:

$$(ME_1)^2 = (\overline{E_1P})^2 + (\overline{PM})^2 \quad (\text{III}) \quad \text{καί} \quad (ME)^2 = (\overline{EP})^2 + (\overline{PM})^2 \quad (\text{IV}).$$

Ἀλλά $\overline{E_1P} = \overline{E_1O} + \overline{OP} = \gamma + x$ καί $\overline{EP} = \overline{EO} + \overline{OP} = -\gamma + x$ (σχέση Chasles).

Ἔτσι οἱ ἰσότητες (III) καί (IV) γράφονται ἀντίστοιχα:

$$(ME_1)^2 = (x + \gamma)^2 + y^2 \Longrightarrow ME_1 = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} \qquad (\text{III}\alpha)$$

$$(ME)^2 = (x - \gamma)^2 + y^2 \Longrightarrow ME = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} \qquad (\text{IV}\alpha)$$

Συνδυάζοντας τίς σχέσεις (I), (IIIα) καί (IVα) ἔχομε τήν ἐξίσωση:

$$\sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2) + 2\gamma x} + \sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2) - 2\gamma x} = 2\alpha \quad (2).$$

Τετραγωνίζομε τά μέλη τῆς (2) καί παίρνομε:

$$2(x^2+\gamma^2+y^2)+2\sqrt{[(x^2+\gamma^2+y^2)+2\gamma x][(x^2+\gamma^2+y^2)-2\gamma x]}=4\alpha^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{(x^2+\gamma^2+y^2)^2-4\gamma^2x^2}=2\alpha^2-(x^2+\gamma^2+y^2) \quad (2').$$

Τετραγωνίζομε πάλι τά μέλη τῆς (2′) καί παίρνομε διαδοχικά:

$$(x^2+\gamma^2+y^2)^2-4\gamma^2x^2=4\alpha^4+(x^2+\gamma^2+y^2)^2-4\alpha^2(x^2+\gamma^2+y^2)\Longrightarrow$$

$$\alpha^2(x^2+\gamma^2+y^2)-\gamma^2x^2=\alpha^4\Longrightarrow$$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\alpha^2\gamma^2-\gamma^2x^2=\alpha^4\Longrightarrow$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2=\alpha^4-\alpha^2\gamma^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2).$$

Ἡ τελευταία λόγω τῆς (ΙΙ) γράφεται:

$$\boxed{\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2} \quad (3)$$

ἤ διαιρώντας καί τά δυό μέλη διά $\alpha^2\beta^2$

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1} \quad (4)$$

Ὥστε οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ τόπου θά ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση (3) (πού εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν (4)).

Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο: Δηλαδή κάθε σημεῖο Μ τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες (x,y) ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση (3) ἀνήκει στήν ἔλλειψη μέ ἄξονες 2α καί 2β.

Ὕστερα ἀπ' ὅλα τά παραπάνω μποροῦμε πλέον νά λέμε ὅτι:

Ἐξίσωση μιᾶς ἐλλείψεως μέ ἑστιακή ἀπόσταση 2γ ($E_1E=2\gamma$) καί μεγάλον ἄξονα 2α($\alpha>\gamma>0$) εἶναι ἡ ἐξίσωση (3) ἤ (4) ἰσοδυνάμως, ὅπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ (2β ὁ μικρός ἄξονας).

Σημείωση: Γιά νά σχεδιάσομε μιά ἔλλειψη μποροῦμε νά πάρομε ἕνα λεπτό νῆμα νάϋλον καί νά καρφώσομε τά ἄκρα του σέ δυό σημεῖα E_1, Ε πού ἔχουν ἀπόσταση μικρότερη ἀπό τό μῆκος τοῦ νήματος.

Ὕστερα μέ τήν ἄκρη τοῦ μολυβιοῦ μας τεντώνομε τό νῆμα καί, μετατοπίζοντας συνεχῶς τό μολύβι, γράφομε μιά γραμμή. Ἡ γραμμή αὐτή εἶναι μιά ἔλλειψη μέ ἑστίες τά σημεῖα E_1 καί Ε καί μεγάλον ἄξονα ἴσο πρός τό μῆκος τοῦ νήματος.

Ἐφαρμογή: Νά σχεδιασθεῖ ἡ ἔλλειψη μέ ἐξίσωση $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. (Νά λάβετε μοναδιαῖο μῆκος τό 1 cm).

Περιγραφή: Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνομε ἕνα τμῆμα E_1E ἴσο μέ 6 cm ($2\gamma=2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=2\sqrt{25-16}=2\cdot 3$). Ὁρίζομε πάνω στήν E_1E τά σημεῖα A_1, Α γιά τά ὁποῖα $OA_1=OA=5$ cm (Ο μέσο τοῦ E_1E, $2\alpha=10$ cm) καί πάνω στή μεσοκάθετη τοῦ E_1E τά σημεῖα B_1, Β γιά τά ὁποῖα $OB_1=OB=4$ cm ($2\beta=8$ cm). Τά σημεῖα A_1, Α, B_1, Β ἀνήκουν στήν ἔλλειψη πού θέλομε νά σχεδιάσομε. Ἀκολούθως ἐργαζόμαστε, μ' ἕνα νῆμα μήκους 10 cm, ὅπως περιγράφομε παραπάνω.

Ἕνας ἄλλος τρόπος σχεδιάσεως εἶναι νά προσδιορίσομε ἀρκετά σημεῖα τῆς ἐλλείψεως μέ τήν παρακάτω ἁπλή γεωμετρική κατασκευή καί ὕστερα νά χαράξομε τήν καμπύλη πού περνᾶ ἀπ' αὐτά τά σημεῖα.

Μέ κέντρο τή μιά ἑστία, ἔστω τήν Ε, καί ἀκτίνα ἴση μέ 2α γράφομε κύκλο (σχ. 7.2). Παίρνομε τώρα ἕνα τυχαῖο σημεῖο Δ τοῦ κύκλου (Ε, 2α) καί κατασκευάζομε τήν εὐθεία (η) μεσοκάθετη στό τμῆμα $E_1\Delta$. Ἄν ἡ (η) τέμνει τήν ΕΔ στό M_2 θά ἔχομε $M_2E_1 + M_2E = M_2\Delta + M_2E = E\Delta = 2\alpha$· ἄρα τό M_2 εἶναι σημεῖο τῆς ἐλλείψεως. [Παρατηρεῖστε ὅτι ἡ (η) εἶναι ἐφαπτομένη στήν καμπύλη].

(Νά γίνει τό πλῆρες σχέδιο τῆς ἐλλείψεως μέ τήν παραπάνω σχεδίαση).

γ) **Ἡ ἔλλειψη ὡς γραφική παράσταση δυό συναρτήσεων.** Ἡ σχέση πού προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση (3) δέν εἶναι συνάρτηση, διότι σέ μιά κατάλληλη πραγματική τιμή τοῦ x ($|x| \leqslant \alpha$) ἀντιστοιχοῦν γενικά δυό ἀντίθετες πραγματικές τιμές τοῦ y.

Ἐπιλύομε τήν ἐξίσωση (3) ὡς πρός y καί παίρνομε τίς ἀκόλουθες δύο ἐκφράσεις:

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \qquad (7\alpha)$$

καί

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \qquad (7\beta).$$

Οἱ ἐκφράσεις αὐτές μᾶς δίνουν συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ πού προκύπτει ἀπό τή σχέση $\alpha^2 - x^2 \geqslant 0$. Ἀλλά $\alpha^2 - x^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2 \leqslant \alpha^2 \Longleftrightarrow |x| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$· ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων (7α) καί (7β) εἶναι, ὅπως εἴδαμε καί παραπάνω, τό διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

Βρίσκομε τό πεδίο τιμῶν τῆς y στή σχέση (3), δηλαδή τήν ἕνωση τῶν πεδίων τιμῶν τῶν (7α) καί (7β), ἄν ἐπιλύσομε τήν (3) ὡς πρός x. Ἔτσι παίρνομε $x = \pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\beta^2 - y^2}$, ὁπότε ἔχομε: $\beta^2 - y^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow y^2 \leqslant \beta^2 \Longleftrightarrow |y| \leqslant \beta \Longleftrightarrow -\beta \leqslant y \leqslant \beta$.

Ὥστε τό πεδίο τιμῶν τῆς y στή σχέση (3) εἶναι τό διάστημα $[-\beta, \beta]$ καί εἰδικότερα, τό πεδίο τιμῶν τῆς (7α) εἶναι τό διάστημα $[0, \beta]$ καί τῆς (7β) τό διάστημα $[-\beta, 0]$.

Ἡ συνάρτηση (7α) ἔχει ὡς γραφική παράσταση τήν ἡμιέλλειψη A_1BA ἀπό τή μεριά τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα Oy (σχ. 7.2) καί ἡ συνάρτηση (7β) ἔχει ὡς γραφική παράσταση τήν ἡμιέλλειψη A_1B_1A.

7.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή μονοτονία ἡ συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τόν τύπο: $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, *μέ* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, *στό διάστημα* $\Delta = [-\alpha, \alpha]$.

Ἄς πάρομε τά σημεῖα x_1, x_2 μέ $-\alpha \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$· ἔχομε διαδοχικά: $-\alpha \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0 \Longrightarrow \alpha^2 \geqslant x_1^2 > x_2^2 \geqslant 0 \Longrightarrow -\alpha^2 \leqslant -x_1^2 < -x_2^2 \leqslant 0 \Longrightarrow$

$$0 \leqslant \alpha^2 - x_1^2 < \alpha^2 - x_2^2 \leqslant \alpha^2 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x_1^2) < \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x_2^2) \leqslant \beta^2$$

$$\Longrightarrow \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x_1^2} < \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x_2^2}, \text{ δηλαδή: } y_1 < y_2.$$

Ὥστε στό διάστημα $[-\alpha, 0]$ ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Περνᾶμε τώρα στό ὑπόλοιπο διάστημα $[0, \alpha]$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ. Ἔχομε:

$$0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \alpha \Longrightarrow 0 \leqslant x_1^2 < x_2^2 \leqslant \alpha^2 \Longrightarrow 0 \geqslant -x_1^2 > -x_2^2 \geqslant -\alpha^2 \Longrightarrow$$

$$\alpha^2 \geqslant \alpha^2 - x_1^2 > \alpha^2 - x_2^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \beta^2 \geqslant \frac{\beta^2}{\alpha_2}(\alpha^2 - x_1^2) > \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x_2^2) \geqslant 0,$$

ἄρα: $y_1 > y_2$.

Ὥστε στό διάστημα $[0, \alpha]$ ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Στή θέση $x = 0$ ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο· αὐτό εἶναι ἴσο μέ β ($y_{\mu\epsilon\gamma} = \beta$).

Ὅμοια βρίσκομε ὅτι ἡ συνάρτηση $y = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ εἶναι γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $[-\alpha, 0]$ καί γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $[0, \alpha]$ καί ὅτι παρουσιάζει ἐλάχιστο στή θέση $x = 0$, τό ὁποῖο ἰσοῦται μέ $-\beta$. Διακρίνομε αὐτά τά συμπεράσματα ἄν ρίξομε μιά ματιά στή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων, δηλαδή στή γραμμή πού ἔχει ἐξίσωση τή $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$.

2.* *Νά γίνει ἡ γραφική λύση τοῦ συστήματος $x^2 + y^2 = 4$ (I) καί $x + y = \lambda$ (II). Ἐφαρμογή γιά $\lambda = 2\sqrt{2}$.*

Σχεδιάζομε τόν κύκλο μέ κέντρο τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων καί μέ ἀκτίνα ἴση μέ 2 καί τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση τή (II) ἤ τήν ἰσοδύναμή της $y = -x + \lambda$ (σχ. 7.3α) Ἄν οἱ γραμμές αὐτές ἔχουν κοινά σημεῖα, τότε τό σύστημα ἔχει πραγματικές λύσεις· εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων. Τά κοινά λοιπόν σημεῖα τῶν γραμμῶν πού παριστάνουν οἱ ἐξισώσεις (I) καί (II) μᾶς παρέχουν γραφικά τίς πραγματικές λύσεις τοῦ συστήματος.

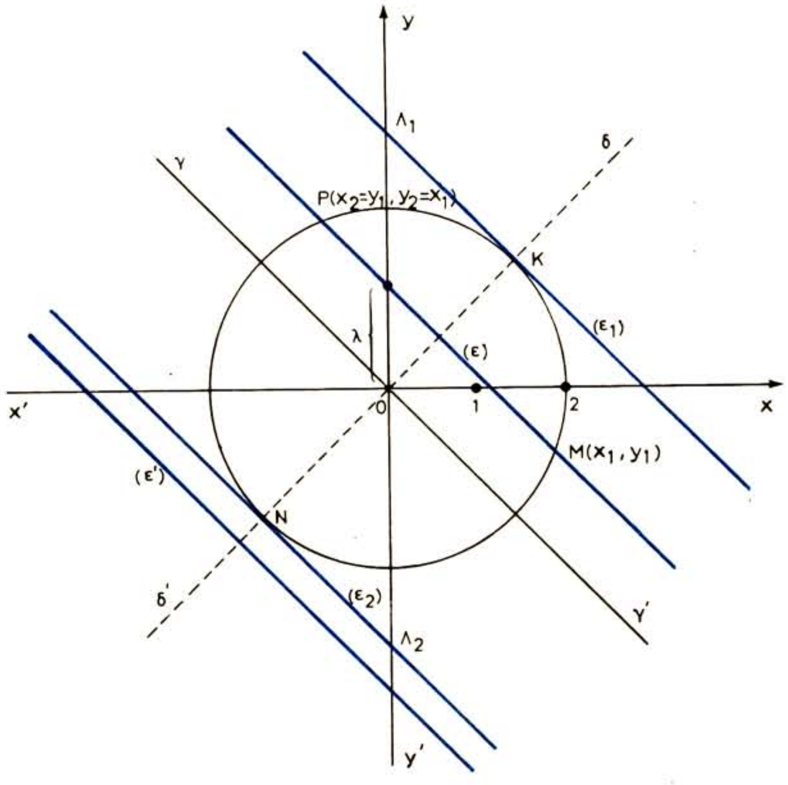
Οἱ εὐθεῖες (ε) μέ ἐξισώσεις $y = -x + \lambda$ εἶναι παράλληλες πρός τή διχοτόμο $y'y$ τῶν γωνιῶν $x'\widehat{O}y$ καί $y'\widehat{O}x$ (γιατί;) καί ὅσες ἀπ' αὐτές τίς εὐθεῖες τέμνουν τόν κύκλο (O,2) θά τόν τέμνουν σέ σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός τήν $\delta'\delta$, διχοτόμο τῶν γωνιῶν $x'\widehat{O}y'$ καί $x\widehat{O}y$.

Οἱ τιμές τῆς παραμέτρου λ εἶναι οἱ τεταγμένες τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν (ε) μέ τόν ἄξονα $y'y$.

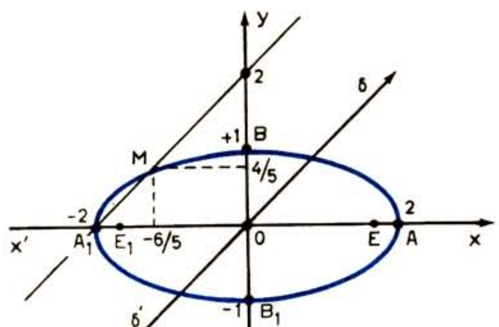
Ἄς εἶναι (ε_1) ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = -x + 2\sqrt{2}$, Λ_1 τό σημεῖο τομῆς της μέ τήν $y'y$ καί K τό σημεῖο τομῆς της μέ τήν $\delta'\delta$. Τό ὀρθογώνιο στό K τρίγωνο $OK\Lambda_1$ εἶναι ἰσοσκελές· ἐπομένως $2(OK)^2 = (O\Lambda_1)^2$, δηλαδή $2(OK)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Longrightarrow OK = 2$. Ἄρα ἡ εὐθεία ($\varepsilon_1$) ἐφάπτεται στόν κύκλο (O) στό σημεῖο K. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό σύστημα $x^2 + y^2 = 4$ καί $x + y = 2\sqrt{2}$ ἔχει οὐσιαστικά μιά πραγματική λύση.

Ὅμοια βλέπομε ὅτι καί ἡ εὐθεία (ε_2), μέ ἐξίσωση $y = -x - 2\sqrt{2}$, ἐφάπτεται στόν κύκλο στό σημεῖο N, ἀντιδιαμετρικό τοῦ K. Ὕστερα ἀπ' αὐτά εἶναι φανερό ὅτι:

Ὅταν $-2\sqrt{2} < \lambda < 2\sqrt{2}$, τό σύστημα ἔχει δυό πραγματικές λύσεις· ὅταν $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$ τό σύστημα ἔχει μιά διπλή πραγματική λύση καί ὅταν $\lambda < -2\sqrt{2}$ ἤ $\lambda > 2\sqrt{2}$, τό σύστημα **δέν** ἔχει πραγματικές λύσεις.



Σχ. 7.3α.



Σχ. 7.3β.

3.* Νά γίνει ή γραφική λύση τοῦ συστήματος: $x^2 + 4y^2 = 4$ ***[I] καί*** $y = x + 2$ ***[II].***

Ἡ ἐξίσωση (I) εἶναι ἐξίσωση ἐλλείψεως μέ μεγάλον ἄξονα 4 καί μικρό 2 $\left(\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1\right)$

καί ἡ (II) εἶναι ἐξίσωση εὐθείας παράλληλης πρός τή διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'Oy'}$ πού τέμνει τόν ἄξονα y'y στό σημεῖο 2.

Σχεδιάζομε αὐτές τίς γραμμές (σχῆμα 7.3β) καί βλέπομε ὅτι ἔχουν κοινά σημεῖα τά $A_1\,(-2,\,0)$ καί $M\left(-\frac{6}{5},\ \frac{4}{5}\right)$· αὐτά τά σημεῖα ἀποτελοῦν καί τή γραφική λύση τοῦ συστήματος τῶν (I) καί (II).

7.4 Ἀσκήσεις.

1.* Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου πού ἔχει κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μέ κορυφές τά σημεῖα Β (– 2, 0), Γ (2, 0) καί Α (0, 5).

2.* Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου στό τρίγωνο ΑΒΓ μέ κορυφές τά σημεῖα Α (–4, 3), Β (3, –4), Γ $(1, -2\sqrt{6})$.

3. Νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων: I) $6x^2 + 6y^2 = 30$· II) $x^2 + 2y^2 = 2$· III) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$· IV) $25x^2 + 49y^2 = 1225$.

4.* Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραμέτρου λ ὥστε ἡ εὐθεία $y = 2x + \lambda$ νά εἶναι ἐφαπτομένη στόν κύκλο $x^2 + y^2 = 6$.

5.* Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν σχέσεων: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ καί $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. Τί παρατηρεῖτε γιά τή γραμμή πού παριστάνει ἡ δεύτερη ἐξίσωση;

6.* Ν' ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 4$ παριστάνει κύκλο πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο (1, 0) καί ἀκτίνα μέ μέτρο 2.

7.* Νά χαραχθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $x^2 + (y+1)^2 = 4$.

8.* Νά σχεδιασθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Ποιά εἶναι ἡ θέση τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ὡς πρός αὐτή τή γραφική παράσταση;

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΥΠΟ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

8.1 Μελέτη καί γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού δίνεται ἀπό τόν ἀλγεβρικό τύπο: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$).

Ἡ σχέση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (1) παράγει μιά συνάρτηση y τοῦ x ὁρισμένη παντοῦ μέσα στό σύνολο $\mathbb{R}$, ὅπως ἐξάλλου κάθε πολυώνυμο τοῦ x· διότι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ἡ παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει μιά καί μόνο μιά πραγματική τιμή.

Γιά τήν παραπέρα μελέτη τῆς συναρτήσεως θά μετασχηματίσομε τό δευτεροβάθμιο ὡς πρός x τριώνυμο σέ μιά καταλληλότερη γιά τό σκοπό μας μορφή.

Γράφομε: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) =$

$$= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right] =$$

$$= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

Τώρα διακρίνομε δυό περιπτώσεις, καθόσον $\alpha > 0$ ἤ $\alpha < 0$.

I) $\alpha > 0$: Θά μελετήσομε τή μονοτονία τῆς συναρτήσεως ἀρχικά στό διάστημα: $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$.

Ἔχομε: $x_1 < x_2 \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha} \Longrightarrow x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} < x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \leqslant 0 \Longrightarrow$

$$\left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \alpha\left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 > \alpha\left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \alpha\left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} > \alpha\left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \geqslant \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

Δηλαδή $y_1 > y_2 \geqslant \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Ἄρα στό διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ **ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.**

Θά ἐξετάσομε τώρα τό ἴδιο ζήτημα στό διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

Ἔχομε: $-\frac{\beta}{2\alpha} \leqslant x_1 < x_2 \Longrightarrow 0 \leqslant x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} < x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \Longrightarrow$

$$0 \leqslant \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \Longrightarrow 0 \leqslant \alpha\left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 < \alpha\left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \leqslant \alpha\left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} < \alpha\left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

Δηλαδή $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \leqslant y_1 < y_2$. Ἄρα στό διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ ἡ **συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα.**

Ὥστε, μέ $\alpha > 0$ ἡ συνάρτηση εἶναι φθίνουσα, ὅταν τό x παίρνει τιμές στό διάστημα $\left(-\infty \quad -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καί αὔξουσα, ὅταν τό x παίρνει τιμές στό διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Συνεπῶς γιά τήν τιμή $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ συνάρτηση παίρνει ἐλάχιστη τιμή καί αὐτή εἶναι: $y_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

ΙΙ) $\alpha < 0$. Ἀκολουθώντας ἀκριβῶς τήν παραπάνω διαδικασία βρίσκομε ὅτι:

Ἡ συνάρτηση (μέ $\alpha < 0$) εἶναι γνησίως αὔξουσα ὅταν τό x παίρνει τιμές στό διάστημα $\left(-\infty\ ,\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$ καί γνησίως φθίνουσα ὅταν τό x παίρνει τιμές στό διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha}\ ,\ +\infty\right)$. Γιά τήν τιμή $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ἡ συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή, τήν $y_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

Στήν πρώτη περίπτωση ($\alpha > 0$) τό πεδίο τιμῶν εἶναι τό διάστημα $\left[\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\ ,\ +\infty\right)$ καί στή δεύτερη περίπτωση ($\alpha < 0$) τό διάστημα $\left(-\infty\ ,\ \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\right]$.

Τό σημεῖο μέ συντεταγμένες $\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\ ,\ \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\right)$ λέγεται **κορυφή** τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως.

Ἄν $x' = -\dfrac{\beta}{2\alpha} + \rho$ καί $x'' = -\dfrac{\beta}{2\alpha} - \rho$ δυό τιμές συμμετρικές ὡς πρός τήν τιμή $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, ὁπότε ἔχομε $x' + \dfrac{\beta}{2\alpha} = \rho$ καί $x'' + \dfrac{\beta}{2\alpha} = -\rho$ $(\rho > 0)$, τότε θά εἶναι

$$y' = \alpha\left(x' + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha\rho^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} =$$

$$= \alpha\cdot(-\rho)^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = \alpha\left(x'' + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = y''.$$

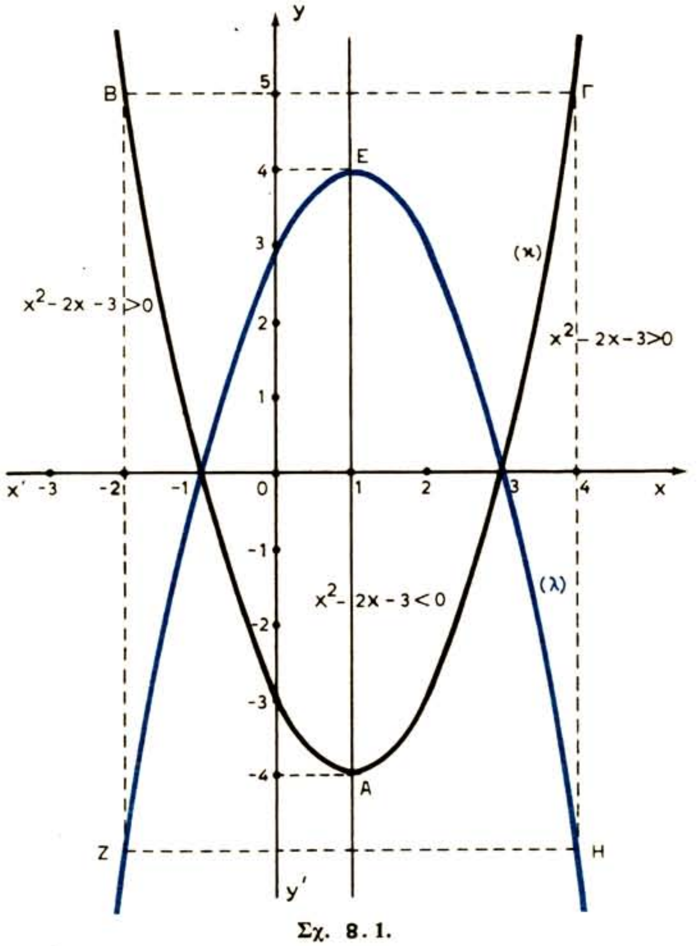
Ὥστε σέ κάθε ζεῦγος συμμετρικῶν, ὡς πρός τήν $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, τιμῶν τοῦ x ἀντιστοιχίζεται ἡ αὐτή τιμή τοῦ y.

Ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα προκύπτουν δυό ἀξιόλογα συμπεράσματα:

Ι) **Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή τῆς γραφικῆς παραστάσεως καί εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα y'y, δηλαδή τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.**

ΙΙ) **Ἡ ἀντίστροφη πρός τή συνάρτηση σχέση δέν εἶναι συνάρτηση, διότι σέ μιά τιμή τοῦ y ἀντιστοιχίζονται ἐν γένει δυό διαφορετικές τιμές τοῦ x.**

Γιά νά σχεδιάσομε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως φτιάχνομε πρῶτα ἕναν πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καί y· ἀκολούθως τοποθετοῦμε τήν κορυφή τῆς καμπύλης, χαράσσομε τόν ἄξονα συμμετρίας καί μαρκάρομε τά παραστατικά σημεῖα, τῶν ὁποίων ἔχομε καθορίσει τίς συντεταγμένες (σχ. 8.1).



Σχ. 8.1.

Μεταξύ τῶν σημείων πού προκαταβολικά ἔχομε προσδιορίσει εἶναι καί τό σημεῖο τομῆς τῆς καμπύλης μέ τόν ἄξονα y'y· αὐτό ἔχει συντεταγμένες (0, γ).

Ἐπίσης, ἄν ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (2) ἔχει ρίζες πραγματικές, τότε προσδιορίζοντας αὐτές τίς ρίζες ἔχομε τά κοινά σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως μέ τόν ἄξονα x'x.

Ἄν οἱ πραγματικές ρίζες (ὅταν ὑπάρχουν) τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι τέτοιοι ἀριθμοί πού τά ἀντίστοιχά τους σημεῖα πάνω στόν ἄξονα x'x τοποθετοῦνται μέ δυσκολία, τότε προτιμᾶμε νά σχεδιάσομε τή γραφική παράσταση χρησιμοποιώντας ἄλλα σημεῖα καί νά οριστοῦμε τά κοινά της σημεῖα μέ τόν ἄξονα x'x μετά τή σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, ἐπειδή οἱ τετμημένες τῶν κοινῶν σημείων τῆς γραφικῆς παραστάσεως καί τοῦ ἄξονα x'x εἶναι οἱ τιμές πού μηδενίζουν τό πολυώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, λέμε ὅτι ἔχομε κάνει τή γραφική ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Ἄν ἡ ἐξίσωση (2) ἔχει ἴσες ρίζες, τότε ἡ εὐθεία x'x θά εἶναι ἐφαπτομένη τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Στό σχῆμα 8.1 ἔχομε σχεδιάσει τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού προκύπτουν ἀπό τούς τύπους:

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ (I) καί $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ (II).

Τά πολυώνυμα $x^2 - 2x - 3$, $-x^2 + 2x + 3$ παίρνουν ἀντίθετες τιμές γιά τήν ἴδια τιμή τοῦ x· συνεπῶς οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων (I) καί (II) εἶναι σχήματα συμμετρικά ὡς πρός τήν εὐθεία x΄x.

Γιά τή σχεδίαση τῆς (I) χρησιμοποιήθηκαν τά σημεῖα (–2, 5), (–1, 0), (1, –4), (3, 0) καί (4, 5) καί γιά τή σχεδίαση τῆς (II) τά σημεῖα (–2, –5), (–1, 0), (1, 4), (3, 0) καί (4, –5).

Ἄν ἡ ἐξίσωση (2) δέν ἔχει ρίζες πραγματικές, τότε ἡ γραφική παράσταση τῆς (1) δέν θά΄χει κοινά σημεῖα μέ τόν ἄξονα x΄x· καί ἄν $\alpha > 0$, ἡ καμπύλη θά ἔχει τή μορφή τῆς (u) (σχ. 8.1) καί θά βρίσκεται ὁλόκληρη στό ἡμιεπίπεδο πού ἔχει σύνορο τήν x΄x καί περιέχει τόν θετικό ἡμιάξονα 0y, ἄν ὅμως $\alpha < 0$ ἡ καμπύλη θά ἔχει τή μορφή τῆς (λ) (σχ. 8.1) καί θά βρίσκεται ὁλόκληρη στό ἡμιεπίπεδο μέ $y < 0$.

Μέ τή σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἔχομε καί τή γραφική ἐπίλυση τῆς ἀνισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ (ἀντίστοιχα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$), διότι ἀπό τό σχῆμα προκύπτουν ἄμεσα οἱ τιμές τοῦ x γιά τίς ὁποῖες ἔχομε $y > 0$ (ἀντίστοιχα $y < 0$).

8.2 Ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς μέ ἄξονα τετμημένων τόν ἄξονα συμμετρίας της.

α) **Ὁρισμός καί ἐξίσωση τῆς παραβολῆς.** Παραβολή λέγεται ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καθένα ἀπό τά ὁποῖα ἀπέχει ἐξίσου ἀπό μιά δοσμένη εὐθεία (δ) τοῦ ἐπιπέδου καί ἀπό ἕνα δοσμένο σημεῖο Ε, πού δέν ἀνήκει στή (δ). Τό σημεῖο Ε λέγεται ἑστία καί ἡ εὐθεία (δ) **διευθετοῦσα** τῆς παραβολῆς.

Φέρομε ἀπό τό Ε τήν εὐθεία x΄x κάθετη στή διευθετοῦσα καί ἄς εἶναι Κ τό σημεῖο τομῆς της μέ τή (δ) (σχ. 8.2)

Εἶναι προφανές ὅτι ὁ τόπος δέχεται ἄξονα (ὀρθῆς) συμμετρίας τήν εὐθεία ΕΚ· δηλαδή ἄν Μ ἕνα σημεῖο τῆς παραβολῆς, τότε καί τό Μ΄, συμμετρικό τοῦ Μ ὡς πρός τήν ΕΚ, θ' ἀνήκει στόν τόπο. Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι καί τό μέσο Ο τοῦ τμήματος ΚΕ θ' ἀνήκει στόν τόπο.

Θά ἀναζητήσομε τώρα τήν ἐξίσωση τῆς παραβολῆς στό σύστημα πού ἔχει ἄξονα τῶν τετμημένων πάνω στήν εὐθεία ΕΚ μέ θετική κατεύθυνση ἀπό τό Κ πρός τό Ε καί ἄξονα τεταγμένων πάνω στήν εὐθεία τήν κάθετη πρός τήν ΚΕ στό μέσο Ο τοῦ ΚΕ.

Στό παραπάνω σύστημα ἀξόνων τό σημεῖο Ο (μέσο τοῦ ΕΚ) ἀνήκει στήν εὐθεία y΄y καί ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τῆς παραβολῆς κεῖνται στό ἡμιεπίπεδο πού ἔχει σύνορο τήν y΄y καί περιέχει τόν θετικό ἡμιάξονα Ox (σχ. 8.2) Αὐτό σημαίνει ὅτι τό σημεῖο Ο θά ἔχει τετμημένη μηδέν καί ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τῆς παραβολῆς θά ἔχουν θετικές τετμημένες.

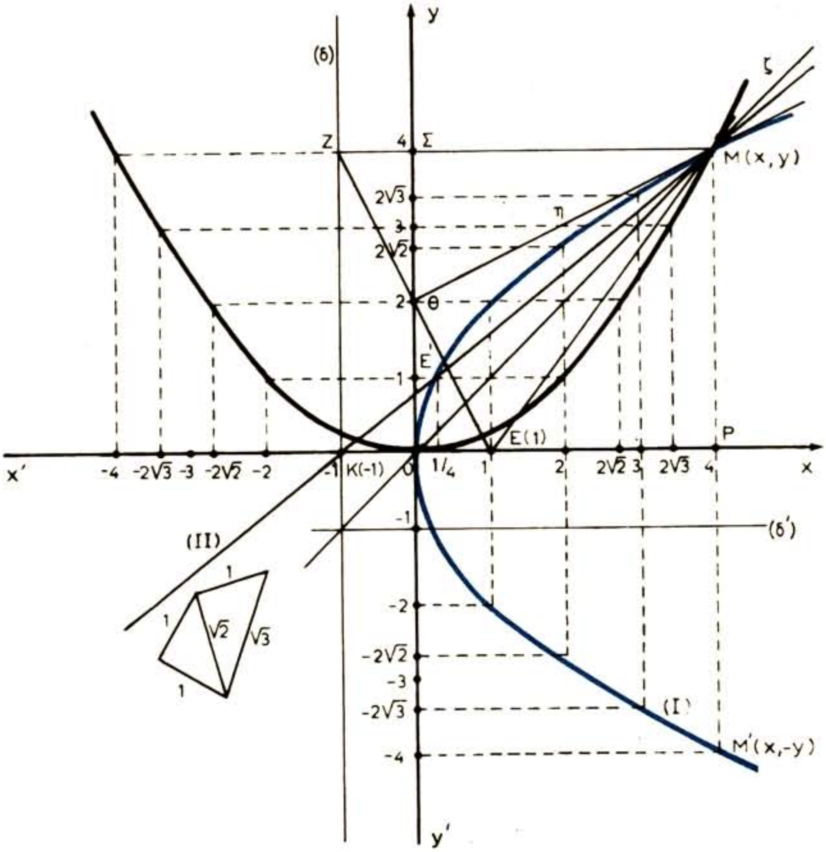
Θά παραστήσομε τό μέτρο τοῦ $\overrightarrow{KE}$ μέ α ($\alpha > 0$), ὁπότε οἱ συντεταγμένες τοῦ Ε θά εἶναι $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ καί τοῦ Κ $\left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ · ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας (δ) εἶναι

τότε $x = -\frac{\alpha}{2}$.

Ἄς εἶναι Μ(x, y) ἕνα σημεῖο τοῦ ἡμιεπιπέδου (y΄y, Ox) καί Ρ, Σ οἱ προβολές τοῦ Μ πάνω στούς ἄξονες x΄x καί y΄y ἀντίστοιχα. Ἔστω ἀκόμα ὅτι ἡ ΜΣ τέμνει τή (δ) στό σημεῖο Ζ.

Γιά ν' ἀνήκει τό σημεῖο M(x, y) στόν τόπο πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχομε: $|\overrightarrow{ZM}| = |\overrightarrow{EM}|$ ἤ ἰσοδύναμα $|\overrightarrow{ZM}|^2 = |\overrightarrow{EM}|^2$ (3). Ἀλλά $|\overrightarrow{ZM}|^2 = |\overrightarrow{KP}|^2 = (\overline{KO} + \overline{OP})^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2$ καί $|\overrightarrow{EM}|^2 = \overline{EP}^2 + \overline{PM}^2 = (\overline{EO} + \overline{OP})^2 + y^2 = \left(-\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 + y^2$. Γιά ν' ἀνήκει λοιπόν ἕνα σημεῖο M(x, y) στήν παραβολή πρέπει καί ἀρκεῖ, σύμφωνα μέ τήν (3), νά ἔχομε: $\left(-\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2$, δηλαδή:

$$\boxed{y^2 = 2ax} \tag{4}$$



Σχ. 8.2.

Ὥστε, στό σύστημα ἀξόνων πού περιγράψαμε πιό πάνω, ἡ ἐξίσωση (4) εἶναι ἡ ἐξίσωση παραβολῆς τῆς ὁποίας ἡ ἑστία ἔχει ἀπόσταση **α** ἀπό τή διευθετούσα.

Ἡ ἐξίσωση (4) δέν ὁρίζει συνάρτηση y τοῦ x διότι σέ κάθε $x > 0$ ἀντιστοιχίζονται, μέσω τῆς (4), δυό ἀντίθετες τιμές τοῦ y.

Μποροῦμε ὅμως, ἄν θέλομε, νά πάρομε στή θέση τῆς (4) τό ἰσοδύναμό της ζεῦγος ἐξισώσεων $y = \sqrt{2\alpha x}$ (4_{I}) καί $y = -\sqrt{2\alpha x}$ (4_{II}), καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες ὁρίζει καί μιά συνάρτηση y τοῦ x μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ἡ (4_{I}) ἔχει πεδίο τιμῶν τό διάστημα $[0, +\infty)$ καί γραφική παράσταση τόν «ἀπεριόριστο βραχίονα» ΟΜ ... (σχ. 8.2), ἐνῶ ἡ (4_{II}) ἔχει πεδίο τιμῶν τό διάστημα $(-\infty, 0]$ καί γραφική παράσταση τόν «ἀπεριόριστο βραχίονα» ΟΜ'.... Προφανῶς ἡ (4_{I}) εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐνῶ ἡ (4_{II}) εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Στό σχῆμα 8.2 ἔχομε σχεδιάσει (μέ μπλέ χάραξη) εἰδικά τήν παραβολή μέ ἐξίσωση $y^2 = 4x$ $(y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x,\ \alpha = 2)$.

Γιά τή σχεδίαση χρησιμοποιήσαμε τόν παρακάτω πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν.

x	0	1	2	3	4
y	0	$-2,\ 2$	$-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}$	$-4,\ 4$

Ἐξάλλου μποροῦμε νά μαρκάρομε ὅσα θέλομε σημεῖα τῆς παραβολῆς μέ τήν ἀκόλουθη ἁπλή γεωμετρική κατασκευή.

Παίρνομε ἕνα τυχαῖο σημεῖο Ζ τῆς (δ) καί φέρνομε τήν ΕΖ. Στό Ζ ὑψώνομε τήν εὐθεία ΖΣ τήν κάθετη πρός τή (δ) καί κατασκευάζομε καί τή μεσοκάθετη Θη τοῦ ΕΖ. Τό σημεῖο τομῆς, ἔστω Μ, τῆς ΖΣ μέ τή Θη εἶναι σημεῖο τοῦ τόπου, διότι ΜΖ = ΜΕ καί ΜΖ $\perp$ (δ)· ἡ εὐθεία ΘΜ εἶναι μάλιστα ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης στό σημεῖο Μ. (Παρατηρεῖστε ὅτι τό μέσο τοῦ ΕΖ θά εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῆς ΕΖ μέ τήν y'y).

β) **Ἀντιστροφή τῆς σχέσεως πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $y^2 = 2\alpha x$ (4) μέ $\alpha > 0$.** Ἐναλλάσσοντας τά γράμματα x καί y στήν ἐξίσωση (4) παίρνομε, ὅπως γνωρίζομε, τήν ἐξίσωση πού μᾶς δίνει τή σχέση τήν ἀντίστροφη ἐκείνης πού ὁρίζει ἡ παραπάνω ἐξίσωση. Ἔχομε δηλαδή τήν ἐξίσωση $y = \dfrac{1}{2\alpha} x^2$ (5) μέ $\alpha > 0$.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση (5) εἶναι τῆς μορφῆς $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ὅπου $\beta = 0$ καί $\gamma = 0$, καί παρέχει συνεπῶς συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς (5) θά εἶναι, ὅπως γνωρίζομε, μιά καμπύλη συμμετρική τῆς παραβολῆς μέ ἐξίσωση τήν $y^2 = 2\alpha x$, ὡς πρός τή διχοτόμο Οζ τῶν γωνιῶν $\widehat{x'Oy'}$ καί $\widehat{xOy}$ (σχ. 8.2). Διαπιστώνομε λοιπόν ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς (5) εἶναι μιά παραβολή μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία y'y, διευθετούσα τή (δ') συμμετρική τῆς (δ) ὡς πρός τήν Οζ καί ἑστία τό σημεῖο Ε' συμμετρικό τοῦ Ε ὡς πρός τήν Οζ ἐπίσης. Μποροῦμε μάλιστα νά διαπιστώσομε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς (5) προκύπτει μέ στροφή τῆς παραβολῆς (4) περί τό Ο κατά 90° καί μέ φορά τέτοια ὥστε ὁ ἡμιάξονας Οx νά ταυτιστεῖ μέ τόν ἡμιάξονα Οy.

Στό σχῆμα 8.2 ἔχομε σχεδιάσει τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2\cdot$ χρησιμοποιήσαμε συνεπῶς τόν παραπάνω πίνακα παίρνοντας ὅμως τίς τιμές $0, \mp 2, \mp 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{3}$ καί ∓ 4 στόν ἄξονα x'x καί τίς ἀντίστοιχες τιμές 0, 1, 2, 3, 4 στόν ἄξονα y'y.

Εἶναι προφανές τώρα ὅτι παραβολή εἶναι ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως πού προκύπτει ἀπό ἐξίσωση τῆς μορφῆς $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\cdot$ ἡ διαφορά εἶναι ὅτι ὁ ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς τῆς παραβολῆς εἶναι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ πάνω στήν ὁποία βρίσκεται ἡ ἑστία τῆς καμπύλης καί πρός τήν ὁποία εἶναι κάθετη ἡ διευθετούσα της. Ἐξάλλου μποροῦμε εὔκολα νά ἐπαληθεύσομε ὅτι ἡ **ἑστία ἔχει συντεταγμένες** $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 + 1}{4\alpha}\right)$ καί ἡ **διευθετούσα ἔχει ἐξίσωση** $y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 - 1}{4\alpha}$.

(Παρατηρεῖστε: $y = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \Longleftrightarrow y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, ὁπότε, θέτοντας $Y = y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ καί $x + \frac{\beta}{2\alpha} = X$, παίρνομε $X^2 = \frac{1}{\alpha}Y = 2\cdot\frac{1}{2\alpha}Y$. Ἔτσι βλέπομε ὅτι ἡ ἑστία ἀπέχει ἀπό τήν κορυφή ἀπόσταση $Y_1 = \frac{1}{4\alpha}$ καί συνεπῶς παίρνομε:

$$y_1 - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{1}{4\alpha} \Longrightarrow y_1 = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 + 1}{4\alpha}\Bigg)$$

8.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ἐπιλύοντας τήν ἐξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) ὡς πρός x νά βρῆτε τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως πού ὁρίζει αὐτή ἡ ἐξίσωση.

Ἔχομε: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Longleftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma - y = 0$ (1). Ἡ ἐξίσωση

(I) πρέπει νά ἔχει πραγματικές λύσεις ὡς πρός x· γι' αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ διακρίνουσά της $\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot (\gamma - y)$ νά μή γίνεται ἀρνητικός ἀριθμός. Δηλαδή πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχομε: $\beta^2 - 4\alpha(\gamma - y) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y \geqslant 0$ $\Longleftrightarrow 4\alpha y \geqslant 4\alpha\gamma - \beta^2$ (2). Τώρα διακρίνομε δυό περιπτώσεις, καθόσον $\alpha > 0$ ἤ $\alpha < 0$.

I) Ὅταν $\alpha > 0$ ἀπό τή (2) παίρνομε $y \geqslant \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ (2α). Ἡ (2α) μᾶς λέει ὅτι τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι τό διάστημα $\left[\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha},\ +\infty\right)$ καί ὅτι ἡ τιμή $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη. (Μεγίστη δέν ὑπάρχει).

II) Ὅταν $\alpha < 0$ ἀπό τή (2) παίρνομε $y \leqslant \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ (2β). Ἡ (2β) μᾶς λέει ὅτι τό πεδίο τιμῶν εἶναι τώρα τό διάστημα $\left(-\infty,\ \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right]$ καί ὅτι ἡ τιμή $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ εἶναι ἡ μεγίστη τιμή τῆς συναρτήσεως. (Ἐλαχίστη δέν ὑπάρχει).

2. Νά ἐπιλυθεῖ γραφικά τό σύστημα $y^2 = 4x$ (I) καί $5y = 4x + 4$ (II).

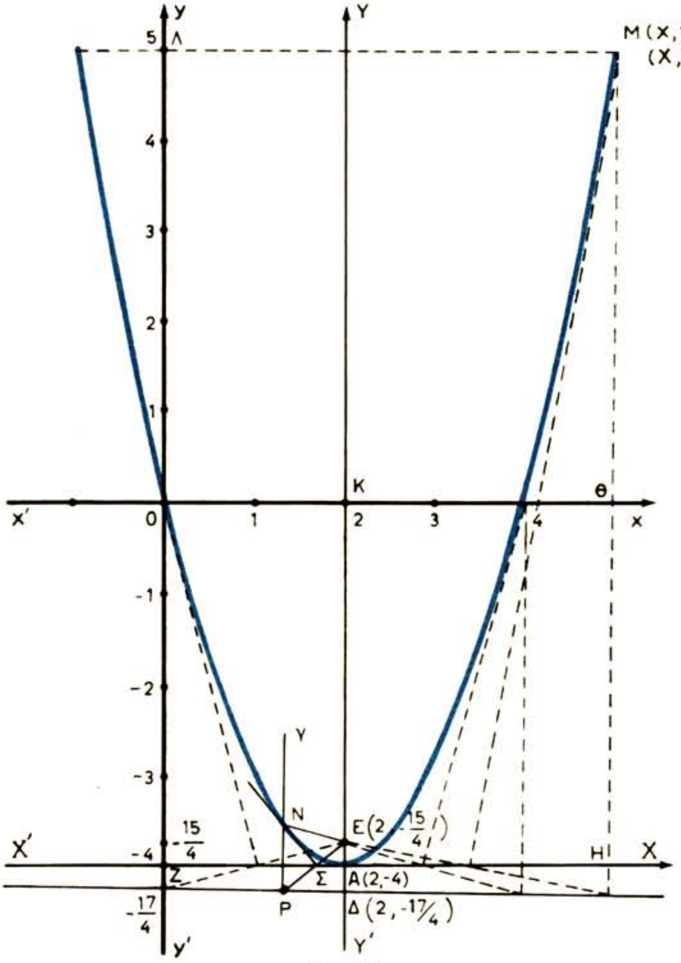
Σχεδιάζομε στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων τίς γραμμές πού παριστάνουν οἱ ἐξισώσεις (I) καί (II). Ὅπως πλέον γνωρίζομε, ἡ (I) εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς μέ ἑστία τό σημεῖο Ε(1, 0) καί διευθετούσα τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση $x = -1$· ἡ (II) εἶναι ἡ ἐξίσωση εὐθείας (σχ. 8.2). Ὅταν, ὅπως συμβαίνει στό παράδειγμά μας, οἱ γραμμές (I) καί (II) ἔχουν δυό κοινά σημεῖα, τότε τό σύστημα ἔχει δυό πραγματικές λύσεις καί φυσικά οἱ λύσεις αὐτές δίνονται ἀπό τίς συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων. Ἄν ἡ εὐθεία ἦταν ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, τότε τό σύστημα θά εἶχε δυό ἴσες πραγματικές λύσεις καί ἄν εὐθεία καί καμπύλη δέν εἶχαν κοινό σημεῖο, τό σύστημα δέν θά εἶχε πραγματικές λύσεις.

3.* Δίνεται ἡ ἐξίσωση $y = x^2 - 4x$. Νά σχεδιασθεῖ ἡ παραβολή τήν ὁποία παριστάνει ἀφοῦ πρῶτα προσδιοριστοῦν ἡ ἑστία καί ἡ διευθετούσα τῆς παραβολῆς καί τοποθετηθοῦν μερικά σημεῖα τῆς καμπύλης μέ γεωμετρική κατασκευή.

Γράφομε πρῶτα τήν ἐξίσωση ὡς ἑξῆς: $y = (x-2)^2 - 4$ (1) καί ὁρίζομε σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων τό σημεῖο Α(2, –4). Ἡ εὐθεία Y'AY μέ ἐξίσωση $x = 2$ εἶναι, ὅπως γνωρίζομε, ἄξονας συμμετρίας τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (1) καί διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α(2, –4) (σχ. 8.3). Γιά $x = 2$ ἡ συνάρτηση πού ὁρίζει ἡ (1) παίρνει τήν ἐλαχίστη τιμή της $y = -4$ καί τό ἀντίστοιχο παραστατικό σημεῖο εἶναι βέβαια τό Α.

Φέρνομε τώρα ἀπό τό Α τήν εὐθεία X'AX παράλληλη πρός τήν x'x, ἄρα κάθετη στήν AY.

Ἄς εἶναι M(x, y) ἕνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (1). Θέτομε τό ἐρώτημα: τί μορφή θά πάρει ἡ (1) ἄν θεωρήσομε σάν ἄξονες συντεταγμένων τούς X'AX καί Y'AY μέ ἀρχή τό Α, μοναδιαῖα τμήματα ἴσα πρός τά μοναδιαῖα τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος καί μέ θετικές κατευθύνσεις τίς ἴδιες μέ τίς θετικές κατευθύνσεις τῶν πρώτων ἀξόνων;



Σχ. 8.3.

Ἄς εἶναι (X, Y) οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου M(x, y) στό νέο σύστημα.

Θά ἔχομε: $X = \overline{AH} = \overline{K\Theta} = \overline{KO} + \overline{O\Theta} = -2 + x$ καί $Y = \overline{HM} = \overline{Z\Lambda} = \overline{ZO} + \overline{O\Lambda} = 4 + y$· ἑπομένως ἡ (1), πού γράφεται καί μέ τή μορφή $y + 4 = (x-2)^2$, θά μετασχηματισθεῖ στήν $Y = X^2$ (2) ὡς πρός τό νέο σύστημα ἀξόνων (σχ. 8.3).

Ἡ ἐξίσωση ὅμως (2), πού γράφεται $X^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot Y$, εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς παραβολῆς μέ ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα Y′Y τῶν τεταγμένων καί ἑστία τό σημεῖο Ε $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$. Ὥστε ἡ παραβολή πού ἔχει ἐξίσωση τή (2) θά ἔχει ἑστία τό σημεῖο Ε μέ συντεταγμένες $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ὡς πρός τούς νέους ἄξονες, καί ἄρα $\left(2, -\frac{15}{4}\right)$ ὡς πρός τούς παλιούς, καί διευθετοῦσα τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση $Y = -\frac{1}{4}$ ὡς πρός τό νέο σύστημα, ἄρα τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση

$$y = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4} \text{ ὡς πρός τό ἀρχικό.}$$

Γιά νά βροῦμε γραφικά ἕνα σημεῖο τῆς παραβολῆς (1) παίρνομε ἕνα σημεῖο Ρ τῆς διευθετούσας καί στό Ρ ὑψώνομε τήν Ργ κάθετη πρός τήν ΡΔ (τή διευθετοῦσα)· ἀκολούθως σχεδιάζομε τήν ΕΡ καί, ἄν Σ εἶναι τό σημεῖο τομῆς της μέ τήν Χ'ΑΧ, τότε στό Σ ὑψώνομε κάθετη πρός τήν ΕΡ· ἄν Ν εἶναι τό σημεῖο τομῆς αὐτῆς τῆς κάθετης μέ τή Ργ, τότε τό Ν εἶναι σημεῖο τῆς παραβολῆς (γιατί;).

4. Δίνεται ἡ συνάρτηση πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $y = x^2 + 2x + 4$ ***(I) καί θεωροῦμε καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις*** $y = \lambda x$ ***(II). Νά βρεθοῦν ἐκεῖνες οἱ πραγματικές τιμές τῆς παραμέτρου λ, γιά τίς ὁποῖες οἱ εὐθεῖες πού προκύπτουν ἀπό τή (II) εἶναι ἐφαπτόμενες τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (I).***

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (I) τό y μέ λx καί παίρνομε τήν ὡς πρός x ἐξίσωση $x^2 + (2-\lambda)x + 4 = 0$ (III). Γιά νά ἐφάπτεται μιά εὐθεία τῆς δέσμης* (II) στή γραφική παράσταση τῆς (I) πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωση (III) νά ἔχει διπλή ρίζα. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία καί ἡ καμπύλη (I) θά ἔχουν δυό ταυτιζόμενα κοινά σημεῖα. Πρέπει λοιπόν νά ἔχομε: Διακρίνουσα τῆς (III) $= (2-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $\lambda^2 - 4\lambda - 12$ εἶναι $\lambda_1 = -2$ καί $\lambda_2 = 6$.

Ὥστε οἱ εὐθεῖες τῆς δέσμης (II) πού ἐφάπτονται στήν παραβολή (I) ἔχουν ἐξίσωση $y = 6x$ καί $y = -2x$.

(Νά γίνει τό σχῆμα καί νά βρεθοῦν τά σημεῖα ἐπαφῆς).

8.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνει ἡ μελέτη καί νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων τῶν συναρτήσεων πού ὁρίζουν οἱ ἐξισώσεις: I) $y = x^2 + 2$ · II) $y = x^2 - 2$. Τί παρατηρεῖτε σχετικά μέ τή μορφή τῶν δυό γραφικῶν παραστάσεων;

2. Νά γίνει ἡ μελέτη καί ἡ χάραξη τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν σχέσεων πού ὁρίζουν οἱ ἐξισώσεις:
I) $y = \frac{1}{3}x^2$ · II) $y^2 = 3x$ · III) $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$ · IV) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

3. Νά ἐπιλυθοῦν γραφικά οἱ ἀνισώσεις:
I) $-x^2 + x + 20 > 0$ · II) $x^2 - x + 1 < 0$ · III) $x^2 - 3x + 9 > 0$.

4. Νά γίνει ἡ μελέτη καί ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $y = x^2 - |x|$.

---

* Τό σύνολο τῶν εὐθειῶν (II) ἀποτελεῖ μιά δέσμη εὐθειῶν πού διέρχονται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

5. Θεωροῦμε τή γραφική παράσταση (C) τῆς συναρτήσεως πού ορίζει ἡ ἐξίσωση $y = x^2$, σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, καί μιά εὐθεία (δ) πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $A(0, +1)$ καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως λ. Ἡ (δ) τέμνει τή (C) στά σημεῖα M_1, M_2, τῶν ὁποίων οἱ προβολές στόν ἄξονα x'x εἶναι $B(x_1)$ καί $\Gamma(x_2)$ ἀντιστοίχως. Ἀποδεῖξτε ὅτι: I) τό γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ ἔχει μιά τιμή ἀνεξάρτητη ἀπό τό λ· II) τό τρίγωνο ΒΑΓ εἶναι ὀρθογώνιο.

6. I) Νά προσδιοριστοῦν τά διαστήματα μονοτονίας καί τά πεδία τιμῶν τῶν συναρτήσεων $y = x^2 - 4x + 3$ καί $y = -x^2 + 6x - 5$. II) Νά γίνουν οἱ γραφικές τους παραστάσεις στό ἴδιο ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων καί νά ὑπολογιστοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων τους. III) Νά ἐξηγήσετε πῶς, ἀπό τίς παραπάνω γραφικές παραστάσεις, παίρνομε τίς λύσεις τῆς ἀνισώσεως $x^2 - 4x + 3 < -x^2 + 6x - 5$;

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΥΠΟ $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

9.1 Οἱ συναρτήσεις τίς ὁποῖες ὁρίζουν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς: $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. (1)

(ὅπου: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ καί $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ μέ συνέπεια τήν $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Ἑρμηνεία τῶν συνθηκῶν πού ἐπιβάλαμε στίς σταθερές α, β, γ, δ.

Μέ $\gamma = 0$ καί $\delta \neq 0$ θά εἴχαμε $y = \dfrac{\alpha}{\delta}x + \dfrac{\beta}{\delta}$· δηλαδή ἐξίσωση εὐθείας.

Ἄν $\gamma \neq 0$, ἀλλά $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$, θά εἴχαμε $y = \dfrac{0}{\gamma x + \delta} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$.

Ἄν $\gamma \neq 0$ καί $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, τότε $\dfrac{\alpha}{\gamma} \cdot \delta = \beta$. Καλοῦμε ρ τό πηλίκο $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ καί ἔχομε $\alpha = \rho\gamma$, $\beta = \rho\delta$. Ἑπομένως στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\rho\gamma x + \rho\delta}{\gamma x + \delta} = \frac{\rho(\gamma x + \delta)}{\gamma x + \delta} = \rho = \text{σταθερά γιά}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$.

Οἱ παραπάνω συνθῆκες ἔχουν λοιπόν ἐπιβληθεῖ γιά νά ἔχομε ἕνα νέο τύπο συναρτήσεως. Ἡ συνάρτηση τοῦ νέου αὐτοῦ τύπου (1) λέγεται **ὁμογραφική.**

α) **Ἡ ἁπλούστερη ἐξίσωση τῆς μορφῆς (1) εἶναι προφανῶς ἡ ἐξίσωση** $y = \dfrac{\beta}{x}$ (2), **μέ** $\beta \neq 0$, καί μέ τή συνάρτηση πού παρέχει αὐτή ἡ ἐξίσωση θά ἀσχοληθοῦμε ἀρχικά.

Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως (2) εἶναι τό σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$· ἐπειδή $y=\frac{\beta}{x} \Longrightarrow x=\frac{\beta}{y}$, συμπεραίνομε ὅτι καί τό πεδίο τιμῶν εἶναι τό ἴδιο σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$.

Θά μελετήσομε τή συνάρτηση ὡς πρός τή μονοτονία πρῶτα στό διάστημα $(-\infty, 0)$ καί ὕστερα στό διάστημα $(0, +\infty)$, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις, καθόσον $\beta > 0$ καί $\beta < 0$.

I) $\boldsymbol{\beta > 0}$: $x_1 < x_2 < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} < 0 \Longrightarrow \frac{\beta}{x_2} < \frac{\beta}{x_1} < 0 \Longrightarrow$ $y_2 < y_1$. Ἄρα στό **διάστημα $(-\infty, 0)$** ἡ συνάρτηση εἶναι **γνησίως φθίνουσα.**

Περνᾶμε τώρα στό δεύτερο διάστημα. Ἔχομε: $0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x_2}$ $< \frac{1}{x_1} \Longrightarrow 0 < \frac{\beta}{x_2} < \frac{\beta}{x_1} \Longrightarrow y_2 < y_1$. Ἄρα **καί στό διάστημα $(0, +\infty)$** ἡ συνάρτηση εἶναι **γνησίως φθίνουσα.**

Ἡ συνάρτηση δέν παρουσιάζει τοπικά ἀκρότατα, διότι, σέ καθένα ἀπό τά διαστήματα, ὅπου εἶναι ὁρισμένη, ἡ **μονοτονία της δέν ἀλλάζει εἶδος.**

Ὅταν ἡ x παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(-\infty, 0)$, τότε καί ἡ $y=\frac{\beta}{x}$ (μέ $\beta > 0$) παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(-\infty, 0)$. Ὅταν ἡ x παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(0, +\infty)$, τότε καί ἡ y παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(0, +\infty)$.

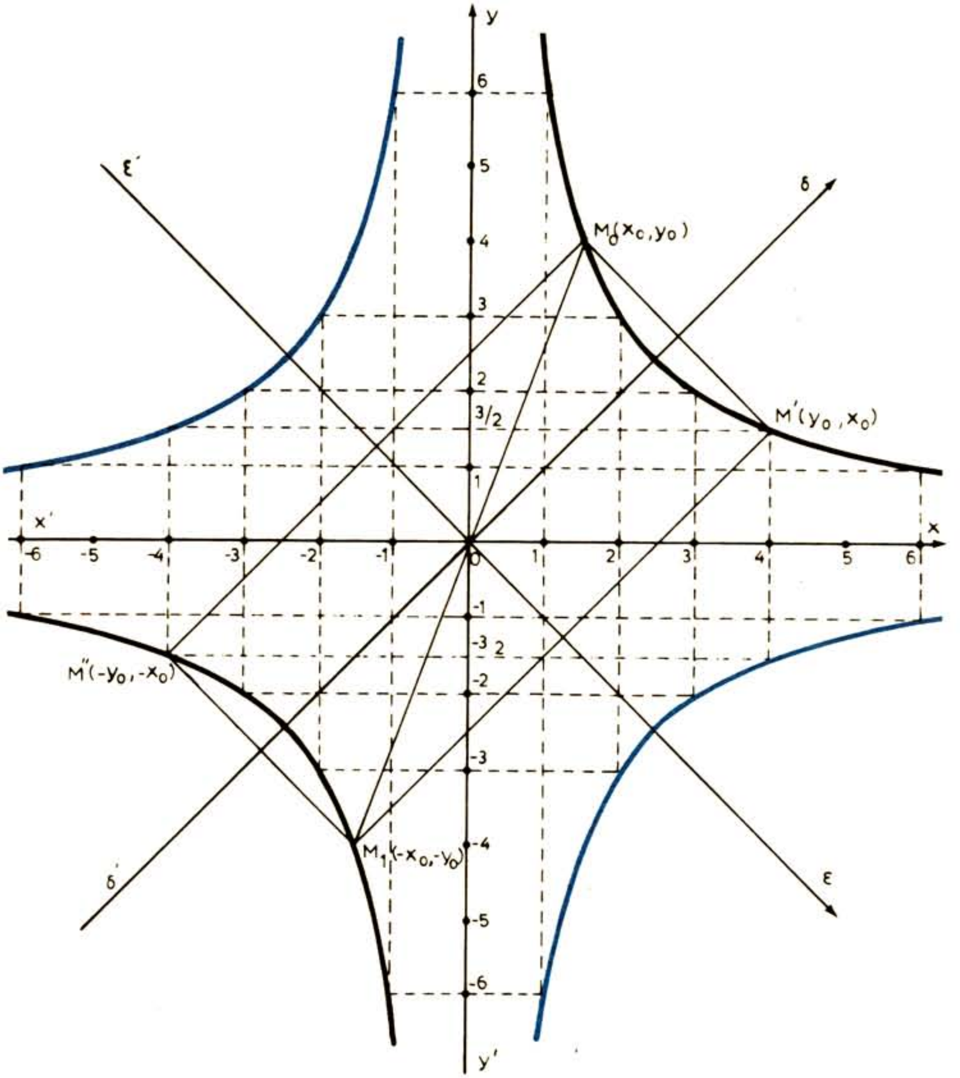
Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό δυό μέρη (κλάδους) ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα βρίσκεται μέσα στήν τρίτη γωνία $x'\widehat{O}y'$ καί τό ἄλλο μέσα στήν πρώτη γωνία $x\widehat{O}y$ τῶν ἀξόνων (σχ. 9.1α)

II) $\boldsymbol{\beta < 0}$: Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἐργασίας, ὅπως στήν πρώτη περίπτωση ($\beta > 0$), βγάζομε τά ἀντιστοίχως ὅμοια συμπεράσματα. Δηλαδή: Στό διάστημα $(-\infty, 0)$ εἶναι τώρα ἡ συνάρτηση **γνησίως αὔξουσα** καθώς ἐπίσης καί στό διάστημα $(0, +\infty)$. Δέν παρουσιάζει τοπικά ἀκρότατα, διότι καί στά δυό διαστήματα διατηρεῖ τό εἶδος τῆς μονοτονίας της.

Ὅταν ἡ x παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(-\infty, 0)$ τώρα ἡ $y=\frac{\beta}{x}$ παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(0, +\infty)$ καί ὅταν ἡ x παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(0, +\infty)$ ἡ y παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος $(-\infty, 0)$ (σχ. 9.1α: μπλέ χάραξη).

Ὁ ἄξονας y'y εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς γραφικῆς παραστάσεως, διότι ὅταν $x \xrightarrow{\text{τείνει στό}} 0$ ἀπό ἀρνητικές (ἀντίστοιχα θετικές) τιμές, τότε ἡ παράσταση $\frac{\beta}{x}$ τείνει στό $-\infty$ (ἀντίστοιχα στό $+\infty$) ἐφόσον $\beta > 0$ καί τείνει στό $+\infty$ (ἀντίστοιχα στό $-\infty$) ἄν $\beta < 0$.

Ὁ ἄξονας ἐπίσης x΄x εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς γραφικῆς παραστάσεως, διότι ὅταν $x \to +\infty$ ἤ $x \to -\infty$, τότε $y \to 0$.



Σχ. 9.1α.

Διατυπώνομε μερικές ἀκόμα σημαντικές παρατηρήσεις σχετικά μέ τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεώς μας.

Ἄς θεωρήσομε ἕνα ζεῦγος ἀντίστοιχων τιμῶν (x_o, y_o) καί τό σημεῖο $M_o(x_o, y_o)$ πού ἀντιστοιχίζεται σ' αὐτό τό ζεῦγος· τότε θά ἔχομε:

$$y_o = \frac{\beta}{x_o} \Longleftrightarrow y_o x_o = \beta.$$

Τό σημεῖο $M'(x' = y_o, y' = x_o)$ εἶναι συμμετρικό τοῦ M_o ὡς πρός τήν δ'δ (σχ. 9.1α) διχοτόμο τῶν γωνιῶν $x'\widehat{O}y'$ καί $x\widehat{O}y$· τό $M''(x'' = -y_o, y'' = -x_o)$ εἶναι συμμετρικό τοῦ M_o ὡς πρός τήν ε'ε διχοτόμο τῶν γωνιῶν $y\widehat{O}x'$ καί $y'\widehat{O}x$· τό σημεῖο τέλος $M_1(x_1 = -x_o, y_1 = -y_o)$ εἶναι συμμετρικό τοῦ M_o ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Ἔχομε ὅμως $y_o x_o = \beta \Longleftrightarrow x_o y_o = \beta$, δηλαδή $y'x' = \beta$·
$y_o x_o = \beta \Longleftrightarrow x_o y_o = \beta \Longleftrightarrow (-x_o)\cdot(-y_o) = \beta$, δηλαδή $y''\cdot x'' = \beta$·
$y_o\cdot x_o = \beta \Longleftrightarrow (-y_o)(-x_o) = \beta$, δηλαδή $y_1 x_1 = \beta$.

Ὥστε ἄν M_o εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = \frac{\beta}{x}$, τότε τά συμμετρικά τοῦ M_o ὡς πρός τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων καί τό συμμετρικό ὡς πρός τήν ἀρχή ἀνήκουν ἐπίσης στή γραφική παράσταση. Δηλαδή ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἔχει τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων ὡς ἄξονες (ὀρθῆς) συμμετρίας καί τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων κέντρο συμμετρίας (σχ. 9.1α).

Ὕστερα ἀπ' ὅλα τά παραπάνω, μέ τή χρησιμοποίηση καί μερικῶν παραστατικῶν σημείων τῶν ὁποίων ἔχομε προσδιορίσει τίς συντεταγμένες, σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση.

Στό σχῆμα 9.1α, χρησιμοποιώντας καί τόν παρακάτω πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν, ἔχομε σχεδιάσει τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων:

$$y = \frac{6}{x} \quad \text{καί} \quad y = -\frac{6}{x}.$$

x	1	2	3	4	6
y	6	3	2	$^3/_2$	1
y	− 6	− 3	− 2	− $^3/_2$	− 1

Παρατήρηση : Ἐπειδή $y = \frac{\beta}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{\beta}{y}$, βλέπομε ὅτι ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση ταυτίζεται μέ τήν ἀρχική, πράγμα ἐξάλλου πού φαίνεται καί ἀπό τή γραφική παράσταση, ἡ ὁποία ἔχει ἄξονα συμμετρίας τή διχοτόμο τῆς πρώτης καί τρίτης γωνίας τῶν ἀξόνων.

β) **Στηριζόμενοι στά προηγούμενα συμπεράσματα θά μελετήσομε τώρα τή γενική μορφή** $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ (3) **τῆς ὁμογραφικῆς συναρτήσεως.**

Παρατηροῦμε ἀρχικά ὅτι **πεδίο ὁρισμοῦ** τῆς συναρτήσεως εἶναι τό σύνολο $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$. Γιά νά βροῦμε τό πεδίο τιμῶν ἐπιλύομε τήν ἐξίσωση $y = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ ὡς πρός x καί παίρνομε $x = \dfrac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha}$. Ἔτσι βρίσκομε ὡς πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\alpha}{\gamma}\right\}$· (γιατί;).

Γιά τήν παραπέρα μελέτη τῆς συναρτήσεως γράφομε τήν ἐξίσωση (3) μέ τήν ἑξῆς μορφή: $y = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta - \dfrac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma x + \delta} = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}}{\gamma\left(x + \dfrac{\delta}{\gamma}\right)} = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \dfrac{\delta}{\gamma}}$

δηλαδή γράφομε: $y = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\kappa}{x + \dfrac{\delta}{\gamma}}$ (4).

$\Big(\dfrac{\alpha}{\gamma}$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha x + \beta$ διά τοῦ $\gamma x + \delta$ καί $\beta - \dfrac{\alpha\delta}{\gamma}$ τό ὑπόλοιπο· θέσαμε ἐξάλλου $\dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} = \kappa\Big)$.

Θά καλέσομε Y τήν παράσταση $y - \dfrac{\alpha}{\gamma}$ καί X τήν $x + \dfrac{\delta}{\gamma}$· ἔτσι ἡ (4) θά γραφεῖ: $Y = \dfrac{\kappa}{X}$ (5).

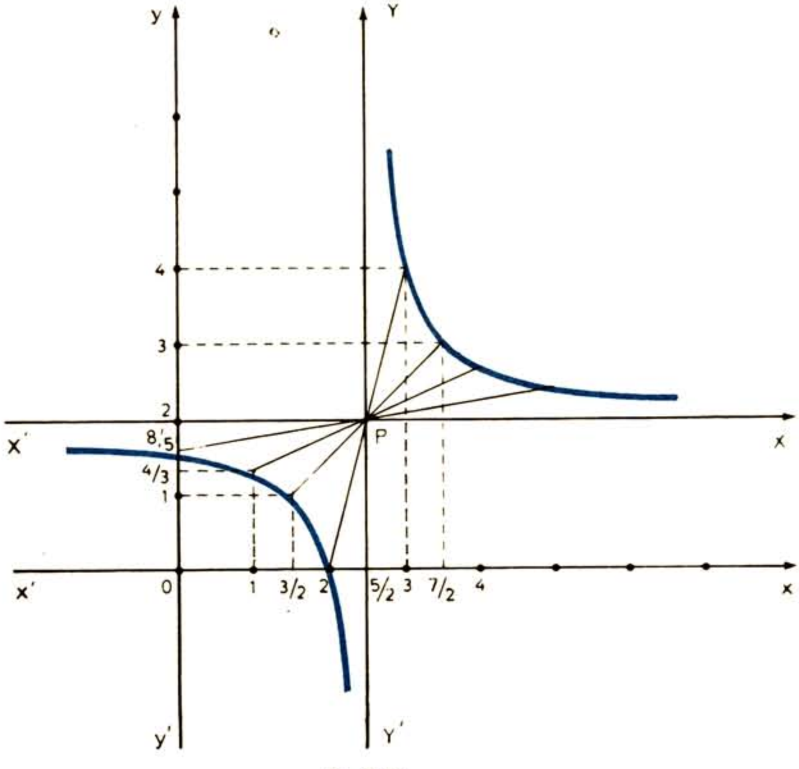
Παρατηρώντας τήν (5) σέ συνδυασμό μέ τήν (4) καί λαμβάνοντας ὑπόψη τίς προηγούμενες διαπιστώσεις τίς σχετικές μέ τή μορφή (5) καταλήγομε στά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

Ἡ γραφική παράσταση τῆς (4) ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία X'X (σχ. 9.1 β) μέ ἐξίσωση $y = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ (ἔχομε $y \to \dfrac{\alpha}{\gamma}$, ὁπότε $Y \to 0$, ὅταν $x \to \pm\infty$, ὁπότε καί $X \to \pm\infty$)· αὐτή εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα x'x. Ἐπίσης ἡ εὐθεία Y'Y μέ ἐξίσωση $x = -\dfrac{\delta}{\gamma}$, παράλληλη τῆς y'y, εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς γραφικῆς παραστάσεως, ἐπειδή ὅταν $x \to -\dfrac{\delta}{\gamma}$, ὁπότε $X \to 0$, τότε y καί $Y \to \pm\infty$.

Ὅταν $\kappa > 0$ ἡ συνάρτηση εἶναι **γνησίως φθίνουσα** καί στά δυό διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$ καί $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό δυό κλάδους πού βρίσκονται μέσα στίς γωνίες XPY καί X'PY' τῶν ἀσυμπτώτων (σχ. 9.1β)

Ὅταν $\kappa < 0$ ἡ συνάρτηση εἶναι **γνησίως αὔξουσα** καί στά δυό διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$ καί $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$ καί ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δυό κλάδους μέσα στίς γωνίες YPX' καί Y'PX τῶν ἀσυμπτώτων.

Καί στίς δυό περιπτώσεις τά δυό μέρη τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀσυμπτώτων καί ὡς πρός τό σημεῖο τομῆς τῶν ἀσυμπτώτων.



Σχ. 9.1β.

Στό σχῆμα (9.1β) χρησιμοποιώντας τά παραπάνω συμπεράσματα καί τόν παρακάτω πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν, ἔχομε σχεδιάσει τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση:

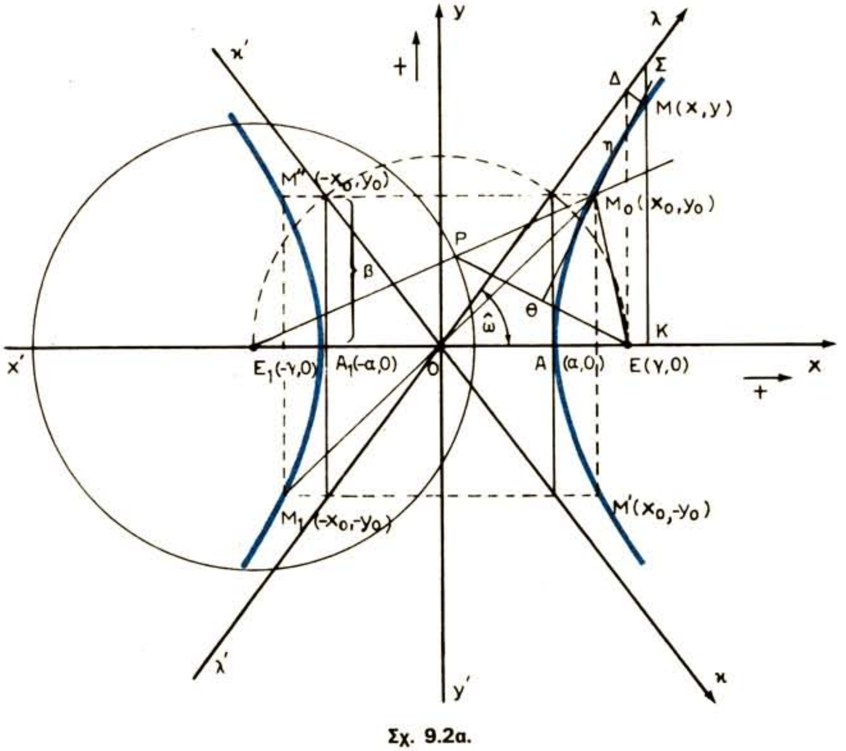
$$y = \frac{4x-8}{2x-5} = 2 + \frac{2}{2x-5}.$$

x	0	1	$^3/_2$	2	3	$^7/_2$
y	$^8/_5$	$^4/_3$	1	0	4	3

9.2 Ἡ ὑπερβολή καί ἡ ἐξίσωσή της.

α) **Ὁρισμός καί ἐξίσωση.** **Ὑπερβολή** λέγεται ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου πού ἔχουν διαφορά ἀποστάσεων, ἀπό δυό δοσμένα σημεῖα E_1 καί E τοῦ ἐπιπέδου, ἴση μ' ἕνα δοσμένο τμῆμα $2\alpha < E_1E = 2\gamma$ (σχ. 9.2α). Στόν τόπο συνεπῶς ἀνήκει κάθε σημεῖο M γιά τό ὁποῖο ἔχομε $ME_1 - ME = 2\alpha$ καί κάθε σημεῖο M γιά τό ὁποῖο ἔχομε $ME - ME_1 = 2\alpha$.

Τά σημεῖα E_1, E λέγονται ἑστίες καί ἡ ἀπόσταση $E_1E = 2\gamma$ ἑστιακή ἀπόσταση τῆς ὑπερβολῆς. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ εὐθεία E_1E καθώς καί ἡ $y'y$, μεσοκάθετη τοῦ EE_1, εἶναι ἄξονες (ὀρθῆς) συμμετρίας τοῦ τόπου· συνεπῶς καί τό μέσο O τοῦ E_1E (τό σημεῖο τομῆς τῶν E_1E, $y'y$) εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς ὑπερβολῆς (σχ. 9.2α).



Σχ. 9.2α.

Θά προτιμήσομε γιά σύστημα συντεταγμένων αὐτό πού ἔχει πρῶτον ἄξονα $x'x$ πάνω στήν E_1E καί δεύτερο τόν $y'y$, δηλαδή τούς ἄξονες συμμετρίας τῆς καμπύλης.

Θέλομε τώρα στό παραπάνω σύστημα νά βροῦμε τή σχέση πού ἱκανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ τόπου μας καί μόνον αὐτές· νά βροῦμε δηλαδή τήν ἐξίσωση τῆς ὑπερβολῆς. Ἐφαρμόζοντας ἀνάλογη διαδικασία μ' ἐκείνη πού χρησιμοποιήσαμε γιά νά προσδιορίσομε τήν ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως βρίσκομε:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\gamma^2-a^2}=1} \qquad (6)$$

ἤ, θέτοντας $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$,

$$(7\alpha)\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1} \Longleftrightarrow \boxed{\beta^2x^2-a^2y^2=a^2\beta^2} \quad (7\beta)$$

β) **Ἡ ὑπερβολή γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων.**

Ἄν ἐπιλύσομε τήν (7β) ὡς πρός y παίρνομε:

$$y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}\ (8\alpha)\ \text{καί}\ y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}\ (8\beta).$$

Παρατηροῦμε συνεπῶς ὅτι ἡ ἐξίσωση 7(α ἤ β) δέν ὁρίζει συνάρτηση y τοῦ x, διότι σέ μιά κατάλληλη τιμή τῆς μεταβλητῆς x ἀντιστοιχίζονται δυό ἀντίθετες τιμές τῆς y (οἱ 8α, 8β).

Καθεμιά ὅμως ἀπό τίς σχέσεις (8α), (8β), πού μαζί ἀποτελοῦν ἕνα ζευγάρι ἐξισώσεων ἰσοδύναμο πρός τήν (7β), ὁρίζει συνάρτησή μέ **κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τήν ἕνωση διαστημάτων** $(-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty)$.

(Πράγματι: $x^2-\alpha^2\geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2\geqslant\alpha^2 \Longleftrightarrow |x|\geqslant|\alpha| \Longleftrightarrow \{x\geqslant\alpha$ ἤ $x\leqslant-\alpha$).

Πεδίο τιμῶν τῆς (8α) εἶναι τό διάστημα $[0,+\infty)$ καί τῆς (8β) τό διάστημα $(-\infty,0]$ (γιατί;).

Ἡ καμπύλη ἀποτελεῖται συνολικά ἀπό δυό πανομοιότυπα μέρη πού καλοῦμε κλάδους ὁ καθένας ἀπό τούς ὁποίους ἔχει δυό «ἀπεριόριστους βραχίονες», συμμετρικούς ὡς πρός τόν ἄξονα x'x.

Ὁ δεξιά κλάδος τῆς ὑπερβολῆς «ἀρχίζει» ἀπό τό σημεῖο A(α, 0) [δεξιά κορυφή τῆς ὑπερβολῆς: (σχ. 9.2α)] καί «ἀναπτύσσεται» στά δεξιά τοῦ ἄξονα y'y. Ὁ ἀριστερά κλάδος εἶναι συμμετρικός τοῦ προηγουμένου ὡς πρός τόν ἄξονα y'y καθώς καί ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἔχει κορυφή τό σημεῖο $A_1(-\alpha, 0)$.

Οἱ βραχίονες AM_o . . ., καί AM'' . . ., αὐτοί δηλαδή πού κεῖνται στό ἡμιεπίπεδο $y>0$ (σχ. 9.2α), ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (8α), ἐνῶ οἱ ἄλλοι δυό βραχίονες ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση τῆς (8β).

Ἡ εὐθεία λ'λ μέ ἐξίσωση $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ (σχ. 9.2α) εἶναι μιά ἀσύμπτωτη τῆς ὑπερβολῆς.

Πράγματι: Ἂς εἶναι $M(x, y)$ ἕνα σημεῖο τοῦ δεξιά ἄνω βραχίονα τῆς ὑπερβολῆς καί $MK \perp x'x$ $[K \in (x'x)]$, $M\Delta \perp \lambda'\lambda$.

Ἂν Σ τό σημεῖο τομῆς τῆς ΜΚ μέ τήν λ'λ, τότε θά ἔχομε $\overline{K\Sigma} = \frac{\beta}{\alpha}x$,

$$\overline{KM} = y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2} \text{ καί } \overline{M\Sigma} = \overline{K\Sigma} - \overline{KM} = \frac{\beta}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2} > 0.$$

Ἀλλά $M\Delta = M\Sigma \cdot \text{ημ}\,\widehat{M\Sigma\Delta} = M\Sigma \cdot \text{συν}\,\widehat{xO\Sigma} = M\Sigma \cdot \text{συν}\,\omega$· ἄρα:

$$M\Delta = \left(\frac{\beta}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)\text{συν}\,\omega = \frac{\beta\,\text{συν}\,\omega}{\alpha}\cdot\left(x - \sqrt{x^2-\alpha^2}\right) =$$

$$= \frac{\beta\,\text{συν}\,\omega}{\alpha}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-\alpha^2})(x+\sqrt{x^2-\alpha^2})}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\beta\,\text{συν}\,\omega}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}} =$$

$$= \text{εφ}\omega\cdot\text{συν}\,\omega\cdot\frac{\alpha^2}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}\cdot\text{ημ}\,\omega.$$

Ὅταν ὅμως $x \to \infty$, τότε $\frac{\alpha^2}{x^2+\sqrt{x^2-\alpha^2}} \to 0$, ὁπότε καί $M\Delta \to 0$.

Ὅμοια ἀποδεικνύομε ὅτι καί ἡ εὐθεία κ'κ, συμμετρική τῆς λ'λ ὡς πρός τούς ἄξονες, μέ ἐξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$, εἶναι μιά δεύτερη ἀσύμπτωτη τῆς ὑπερβολῆς.

Γιά νά σχεδιάσομε μιά ὑπερβολή, τῆς ὁποίας γνωρίζομε τήν ἑστιακή ἀπόσταση $E_1E = 2\gamma$ καί τό τμῆμα 2α (ἤ τά μέτρα αὐτῶν τῶν τμημάτων), παίρνομε δυό σημεῖα E_1, E, σέ ἀπόσταση 2γ, καί ἐκλέγομε ὅπως παραπάνω τούς ἄξονες συντεταγμένων· ἀκολούθως σχεδιάζομε τίς ἀσύμπτωτες καί τοποθετοῦμε καί τίς κορυφές $A(\alpha, 0)$, $A_1(-\alpha, 0)$. Ὕστερα μέσω τῶν ἐξισώσεων (8α) καί (8β) προσδιορίζομε μερικά σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς καί τελικά προβαίνομε στή χάραξη τῆς γραμμῆς.

Μποροῦμε ἐξάλλου νά προσδιορίσομε γραφικά ὅσα θέλομε σημεῖα τῆς καμπύλης, ἐφαρμόζοντας τήν ἀκόλουθη ἁπλή γεωμετρική κατασκευή. Μέ κέντρο τή μιά ἑστία, ἔστω τήν E_1, καί ἀκτίνα ἴση μέ 2α γράφομε κύκλο. Ἂν Ρ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου $(E_1, 2\alpha)$, μή κείμενο πάνω στόν ἄξονα x'x, φέρομε τή μεσοκάθετη Θη τοῦ ΕΡ καί ὁρίζομε τό σημεῖο τομῆς της M_o (σχ. 9.2α). μέ τήν εὐθεία E_1P. Τό σημεῖο M_o εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς ὑπερβολῆς, διότι $M_oP = M_oE$ καί συνεπῶς $|M_oE_1 - M_oE| = |M_oE_1 - M_oP| = E_1P = 2\alpha$.

Ἂν σέ μιά ὑπερβολή ἔχομε εἰδικότερα $\gamma = \alpha\sqrt{2}$, ὁπότε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2$, τότε ἡ ἐξίσωσή της γίνεται:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2 = \frac{\gamma^2}{2}} \qquad (9)$$

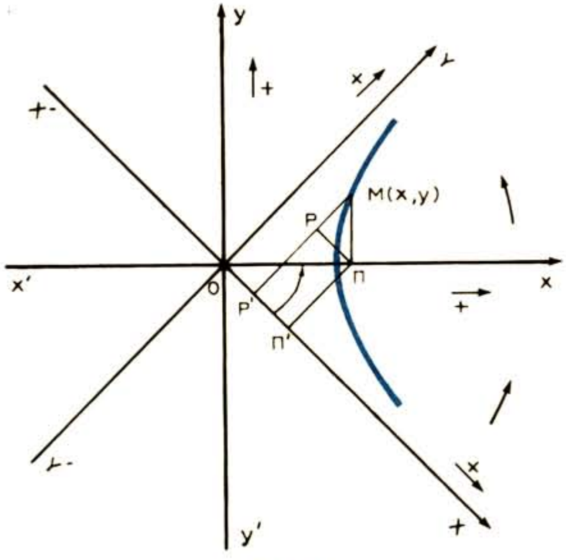
Μιά τέτοια ὑπερβολή ὀνομάζεται **ἰσοσκελής** καί οἱ ἀσύμπτωτες αὐτῆς εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων, καί συνεπῶς κάθετες μεταξύ τους.

***Θά ἀναζητήσομε τώρα τήν ἐξίσωση τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ὡς πρός ἄξονες συντεταγμένων τίς ὀρθογώνιες ἀσύμπτωτες αὐτῆς.**

Παίρνομε γιά ἄξονα τετμημένων X'OX τήν ἀσύμπτωτη πού ἔχει ἐξίσωση (ὡς πρός τούς ἀρχικούς ἄξονες) $y = -x$ καί γιά ἄξονα τεταγμένων Y'OY τήν ἀσύμπτωτη μέ ἐξίσωση $y = x$ (σχ. 9.2β).

Τίς θετικές φορές $\overrightarrow{OX}$ καί $\overrightarrow{OY}$ τίς ἐκλέγομε ἔτσι ὥστε νά εἶναι $\widehat{XOx} = +45°$ καί $\widehat{xOY} = +45°$.

Ἕνα σημεῖο M(x, y) τοῦ ἐπιπέδου θά ἔχει ὡς πρός τό νέο σύστημα XOY συντεταγμένες (X, Y) πού τή σχέση τους πρός τίς παλιές (x, y) τή βρίσκομε εὔκολα παρατηρώντας τό σχῆμα 9.2β.



Σχ. 9.2β.

Ἀκριβῶς ἔχομε: $X = \overline{OP'} = \overline{O\Pi'} + \overline{\Pi'P'} = \overline{O\Pi'} - \overline{P'\Pi'} = \overline{O\Pi'} - \overline{P\Pi} =$

$$= \overline{O\Pi} \cdot \text{συν}\, 45° - \overline{\Pi M}\, \text{ημ}\, 45° = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

($MP' \perp X'X$, $M\Pi \perp x'x$, $\Pi\Pi' \perp X'X$ καί $\Pi P \parallel X'X$).

$$Y = \overline{P'M} = \overline{P'P} + \overline{PM} = \overline{\Pi'\Pi} + \overline{PM} = \overline{O\Pi} \cdot \text{ημ}\, 45° + \overline{\Pi M} \cdot \text{συν}\, 45° =$$

$$= x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Ὥστε ἡ μετάβαση ἀπό τίς παλιές συντεταγμένες (x, y), ἑνός σημείου M τοῦ ἐπιπέδου, στίς νέες συντεταγμένες του (X, Y) γίνεται βάσει τῶν σχέσεων

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad (10\alpha) \\ Y &= \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad (10\beta) \end{aligned}\right\} \text{ πού ἰσοδυναμοῦν μέ τίς } \left\{\begin{aligned} x &= \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right.$$

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω οἱ συντεταγμένες $(x\ ,\ y)$ — ὡς πρός τό ἀρχικό σύστημα xoy — κάθε σημείου Μ τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση $x^2 - y^2 = \alpha^2 \Longleftrightarrow (x-y)(x+y) = \alpha^2 = \frac{\gamma^2}{2}$ (11).

Εἰσάγοντας στήν (11) τίς ἐκφράσεις τῶν $x - y$ καί $x + y$, ἀπό τίς (10α), (10β), μέσω τῶν X καί Y ἀντίστοιχα, παίρνομε τή σχέση $X \cdot Y = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\gamma^2}{4}$.

Ἀπό τήν τελευταία σχέση πορίζόμαστε τήν $Y = \frac{\alpha^2}{2X}$, ἡ ὁποία μᾶς λέει ὅτι ἡ μεταβλητή Y εἶναι μιά ὁμογραφική συνάρτηση τῆς μεταβλητῆς X.

Μποροῦμε λοιπόν, ἄν ἀναφερθοῦμε σέ ὅσα ἐκθέσαμε στίς παραγράφους 9.1 (α) καί 9.1 (β), νά συμπεράνομε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ὁμογραφικῶν συναρτήσεων, πού σχεδιάσαμε ἐκεῖ, εἶναι **ἰσοσκελεῖς ὑπερβολές.**

Σημείωση: Ὁ κύκλος, ἡ ἔλλειψη, ἡ παραβολή καί ἡ ὑπερβολή λέγονται μαζί **κωνικές τομές.** Διότι, ὅπως ἀποδεικνύεται, μποροῦμε νά πάρομε αὐτές τίς καμπύλες ὡς τομές ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἀπό ἐπίπεδο.

9.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά γίνει ἡ μελέτη καί νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού ὁρίζουν οἱ ἐξισώσεις: I) $y = \frac{3}{2x-1}$ *καί II)* $y = \frac{x-1}{x}$.

I) Ἡ συνάρτηση ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$ (γιατί;). Εἶναι γνησίως φθίνουσα καί στά δυό διαστήματα $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right)$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Ἔχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $y = 0$ (τόν ἄξονα $x'x$) καί $x = \frac{1}{2}$. Ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δυό κλάδους μέσα στήν πρώτη καί τρίτη γωνία τῶν ἀσυμπτώτων.

Χρησιμοποιώντας καί τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν νά χαράξετε τή γραφική παράσταση.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{3}{5}$	-1	-3	3	1

II) Ἔχομε $y = \frac{x-1}{x} = 1 + \frac{-1}{x}$. Ἡ συνάρτηση ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$. Εἶναι γνησίως αὔξουσα καί στά δυό διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Ἔχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $y = 1$ καί $x = 0$ (τόν ἄξονα $y'y$).

Ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δυό κλάδους μέσα στή δεύτερη καί τέταρτη γωνία τῶν ἀσυμπτώτων. Χρησιμοποιώντας καί τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν νά χαράξετε τή γραφική παράσταση.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	3	0	$\frac{1}{2}$

2. ***α) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση*** $y = \frac{-6x-7}{2x+4}$ ***(I). Παρατηρώντας ὅτι αὐτή ἡ γραφική παράσταση εἶναι μιά ἰσοσκελής ὑπερβολή νά καθορίσετε τίς ἑστίες της.***

β) Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν πού διέρχονται ἀπό τό σημεῖο $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$ ***καί ἐφάπτονται στήν ὑπερβολή (I).***

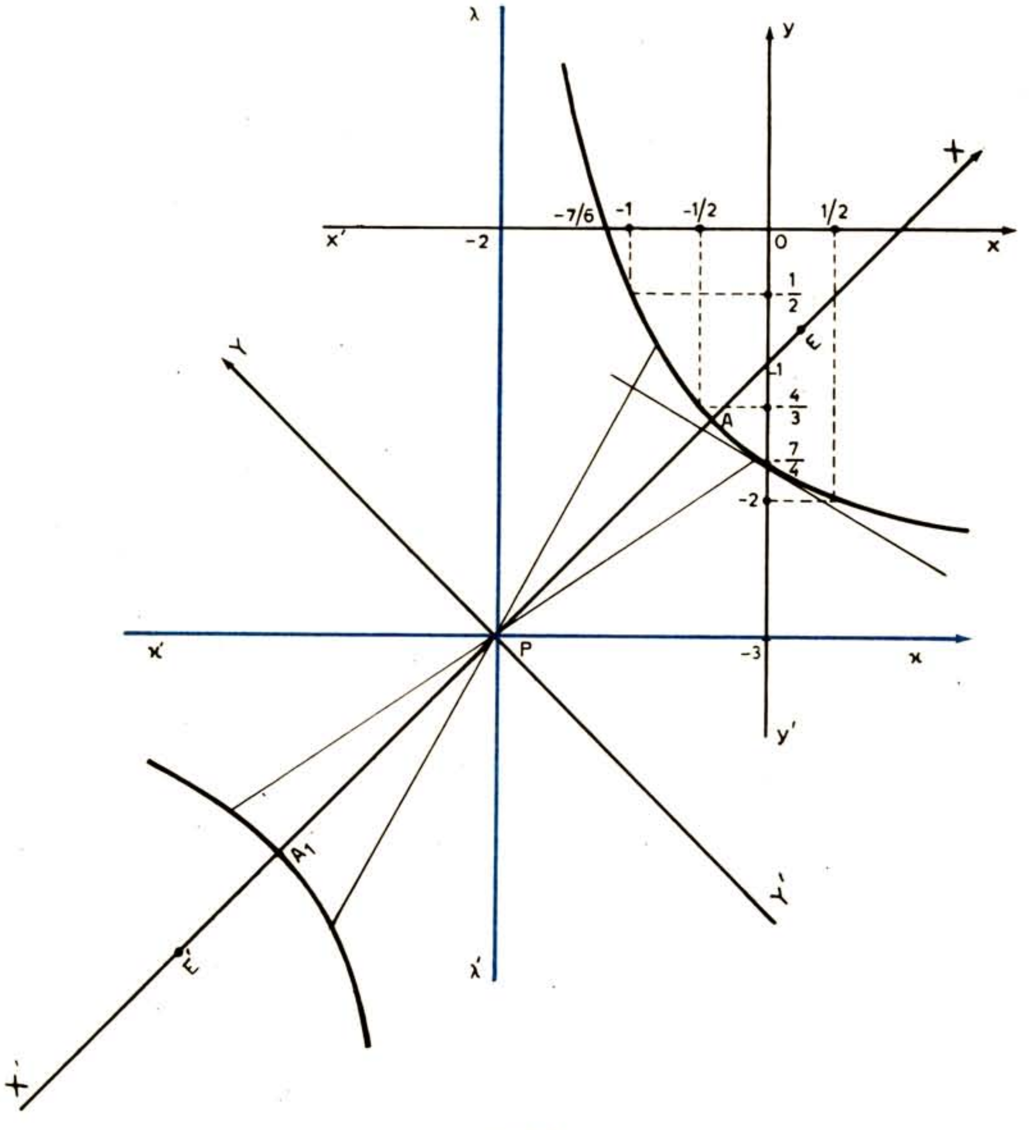
α) Γράφομε ἀρχικά τήν (I) ὡς ἑξῆς: $y = -3 + \frac{5}{2x+4}$ (II). Ἀσύμπτωτες τῆς καμπύλης εἶναι οἱ εὐθεῖες $y = -3$ καί $x = -2$ (σχ. 9.3) Τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν εἶναι ἀντιστοίχως τά σύνολα $\mathbb{R} - \{-2\}$ καί $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Γιά τή σχεδίαση χρησιμοποιήθηκε καί ὁ παρακάτω πίνακας ἀντίστοιχων τιμῶν:

x	$-\frac{7}{6}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{4}$	-2

Ἄν θέσομε $y+3=\lambda$ καὶ $2x+4 = 2\kappa$, τότε ἡ ἐξίσωση (II) γράφεται $\kappa\lambda = \frac{5}{2}$ (III). Μέ ἄξονες συντεταγμένων τίς ἀσύμπτωτες $\kappa'\kappa$ καί $\lambda'\lambda$ ἡ (III) θά εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (I). Εἶναι λοιπόν ἡ καμπύλη μιά ἰσοσκελής ὑπερβολή, τῆς ὁποίας οἱ ἑστίες E_1 καί E κεῖνται στή διχοτόμο $X'X$ τῆς γωνίας $\widehat{\kappa P \lambda}$ καί ἀπέχουν ἀπό τό σημεῖο τομῆς P τῶν $\kappa'\kappa$ καί $\lambda'\lambda$ ἀπόσταση ἴση μέ $\gamma = \sqrt{2\cdot 5}$ $\left(\text{διότι } \frac{\gamma^2}{4} = \frac{5}{2}\right)$.

Ἡ ἐξίσωση τῆς καμπύλης μέ ἄξονες συντεταγμένων $X'X$ καί $Y'Y$, διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀσυμπτώτων, εἶναι $X^2 - Y^2 = 5$ $\left(\alpha^2 = \frac{\gamma^2}{2}\right)$.



Σχ. 9.3.

β) Ἂς εἶναι δ ὁ συντελεστής διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$· τότε ἡ ἐξίσωση αὐτῆς τῆς εὐθείας θά εἶναι: $\dfrac{y+\frac{7}{4}}{x} =$

$= \delta \iff y = \delta x - \frac{7}{4}$ (1).

Τά κοινά σημεῖα τῶν γραμμῶν (Ι) καί (1) θά ἔχουν ἴσες τεταγμένες καί οἱ τετμημένες τους συνεπῶς θά ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση $\frac{-6x-7}{2x+4} = \delta x - \frac{7}{4} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 4\delta x^2 + (8\delta + 5)x = 0$ (2). Γιά νά εἶναι ὅμως μιά εὐθεία τῆς μορφῆς (1) ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς (Ι) πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ρίζες τῆς (2) νά εἶναι ἴσες. Τότε ἡ εὐθεία καί ἡ καμπύλη ἔχουν δυό ταυτιζόμενα κοινά σημεῖα. Ἐπειδή ἡ (2) ἔχει μιά ρίζα τό μηδέν γιά $\forall\ \delta \in \mathbb{R}$, συμπεραίνομε ὅτι αὐτή πρέπει νά εἶναι διπλή. Πρός τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $8\delta + 5 = 0 \Longrightarrow \delta = -\frac{5}{8}$ (γιατί;).

Ὥστε ὑπάρχει μία καί μόνο ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$, αὐτή πού ἔχει συντελεστή διευθύνσεως $-\frac{5}{8}$· εἶναι λοιπόν ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = -\frac{5}{8}x - \frac{7}{4}$. Τό σημεῖο ἐπαφῆς ἔχει τετμημένη μηδέν καί συνεπῶς εἶναι τό σημεῖο $\left(0,\ y = \frac{-6\cdot 0 - 7}{2\cdot 0 + 4} = -\frac{7}{4}\right)$ τῆς ὑπερβολῆς. Βρήκαμε ἔτσι τήν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας στό σημεῖο $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$ τῆς ὑπερβολῆς.

9.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνει ἡ μελέτη καί νά χαραχθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν σχέσεων πού ὁρίζουν οἱ ἐξισώσεις: Ι) $y = \frac{-3}{5x+10}$ · ΙΙ) $y = \frac{7x}{4x-10}$ · ΙΙΙ) $x^2 - y^2 = 8$ ·

IV) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ · V) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

2.* Δίνεται ἡ σχέση πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $2xy + 4x - 3y - 2 = 0$. Ι) Νά γίνει ἡ μελέτη της. ΙΙ) Νά γίνει ἡ γραφική παράστασή της σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων. ΙΙΙ) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι ἡ γραφική παράσταση εἶναι μιά ἰσοσκελής ὑπερβολή νά βρῆτε τίς συντεταγμένες τῶν ἑστιῶν καί τῶν κορυφῶν αὐτῆς τῆς ὑπερβολῆς.

3.* Νά δοθοῦν γραφικά οἱ πραγματικές λύσεις (ἄν ὑπάρχουν) σέ καθένα ἀπό τά ἀκόλουθα συστήματα : 1) $2xy + 4x - 3y - 2 = 0$ (Ι) καί $y = 2x - 1$ (ΙΙ). 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (Ι) καί $y = x - 5$ (ΙΙ).

4.* Δίνεται ἡ ἐξίσωση $y = \frac{1}{x-1}$ (Ι). α) Νά βρεθοῦν ἐκεῖνες οἱ εὐθεῖες — ἄν ὑπάρχουν — πού διέρχονται ἀπό τό σημεῖο $(1, -1)$ καί ἐφάπτονται στή γραφική παράσταση τῆς (Ι). β) Ὑπάρχουν ἄραγε εὐθεῖες παράλληλες πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{xOy}$ πού νά ἐφάπτονται στή γραφική παράσταση τῆς (Ι);

5.* Δίνεται ἡ ἐξίσωση $x^2 - y^2 = 9$ (Ι). α) Νά βρεθοῦν — ἄν ὑπάρχουν — οἱ εὐθεῖες πού εἶναι παράλληλες πρός τό διάνυσμα $\vec{v}$ $(4, -3)$ καί ἐφάπτονται στήν καμπύλη πού παριστάνει ἡ (I). β) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι τό σημεῖο (5, 4) ἀνήκει στήν καμπύλη (I) νά βρεῖτε τήν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης στό σημεῖο (5, 4).

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη.

1.* Νά βρεθοῦν γραφικά οἱ πραγματικές λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(I)} \quad \text{καί} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{(II)}.$$

2*. Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ καί $\mathcal{A}(f) = (-8, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Εἶναι ἄραγε δυνατό νά βροῦμε δυό συναρτήσεις g(x) καί h(x) ἀπό τίς ὁποῖες ἡ πρώτη νά εἶναι ἄρτια, ἡ δεύτερη περιττή καί τέτοιες ὥστε νά εἶναι $f(x) = g(x) + h(x)$;

(**Ὑπόδειξη**: Παρατηρῆστε ὅτι πρέπει νά ἔχομε $\dfrac{1+x}{1-x} = g(x) + h(x)$, ἀλλά καί $\dfrac{1-x}{1+x} = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$).

3.* Νά προσδιορισθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ καί τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως πού παρέχει ὁ τύπος $y = \dfrac{1}{A\kappa(x) - 1}$.

(**Ὑπόδειξη**: Γιά τό πεδίο ὁρισμοῦ ἐξετάστε γιά ποιά x μηδενίζεται ὁ παρονομαστής $A\kappa(x) - 1$. Γιά τό πεδίο τιμῶν παρατηρῆστε ὅτι: Ἄν $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $\forall$ x μέ $-\nu \leqslant x < -(\nu - 1)$ εἶναι $A\kappa(x) = -\nu$ καί συνεπῶς $y = -\dfrac{1}{\nu + 1}$, ἐνῶ $\forall$ x μέ $\nu \leqslant x < \nu + 1$ εἶναι $A\kappa(x) = \nu$ καί συνεπῶς $y = \dfrac{1}{\nu - 1}$ (μέ $\nu \neq 1$)).

4.* Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$. I) Νά βρεῖτε τό πεδίο ὁρισμοῦ της. II) Ἄν x_1, x_2 δυό διαφορετικές τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς καί y_1, y_2 οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως θά παραστήσομε μέ Δx τή διαφορά $x_2 - x_1$ καί μέ Δy τή διαφορά $y_2 - y_1$. Νά μελετήσετε τό πρόσημο τοῦ λόγου $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ γιά νά βρεῖτε μέσω αὐτοῦ τό εἶδος τῆς μονοτονίας τῆς συναρτήσεως.

(**Ὑπόδειξη**: Παρατηρῆστε ὅτι, ὅταν $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ σ' ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$, τότε ἡ συνάρτηση y εἶναι γνησίως αὔξουσα στό διάστημα καί ὅτι, ὅταν $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, τότε εἶναι γνησίως φθίνουσα).

5.* Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο: $y = \dfrac{|x| - 1}{x^2 - 1} - \dfrac{x^2 - |x|}{x^2 - 2|x| + 1}$.

Νά καθορίσετε τό πεδίο ὁρισμοῦ της καί νά γράψετε τόν τύπο της μέ τόν ἁπλούστερο δυνατό τρόπο.

6.* Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο: $y = x - 2 + \dfrac{x(x^2 - 1)}{|x^2 - 1|}$. Νά γίνει ἡ μελέτη τῆς συναρτήσεως ὡς πρός τή μονοτονία καί νά χαραχθεῖ ἡ γραφική της παράσταση.

(**Ὑπόδειξη**: Νά ἐργαστεῖτε χωριστά στά διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ καί $(1, +\infty)$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της).

7.* Δίνεται ἡ ὑπερβολή (Υ) μέ ἐξίσωση $yx = 6$. I) Ἀφοῦ σχεδιάσετε τήν (Υ) (ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα) νά μαρκάρετε τά σημεῖα της Α, Β, Γ μέ τετμημένες ἀντίστοιχα 1, −2 καί 3. ΙΙ) Νά σχηματίσετε τήν ἐξίσωση τῆς κάθετης ἀπό τό Α πρός τή ΒΓ καί ν' ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία αὐτή τέμνει τήν (Υ) στό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

(**Ὑπόδειξη**: Ἀφοῦ ὑπολογίσετε τίς συντεταγμένες τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Δ τῆς κάθετης ἀπό τό Α πρός τή ΒΓ μέ τήν ὑπερβολή (Υ), ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ΔΓ εἶναι κάθετη πρός τήν ΑΒ).

8.* Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση πού παρέχει ὁ τύπος $y = \dfrac{|x-1|}{(x-1)\cdot|x|}$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα.

(**Ὑπόδειξη**: Νά διακρίνετε τρεῖς περιπτώσεις. 1) $x < 0$ · 2) $0 < x < 1$ · 3) $x > 1$ καί νά ἐργαστεῖτε στά διαστήματα $(-\infty, 0)$ $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ χωριστά).

9.* Νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα παραλλήλων χορδῶν τῆς παραβολῆς $y^2 = 2\alpha x$ ἀνήκουν σέ εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα συμμετρίας τῆς παραβολῆς.

(**Ὑπόδειξη**: Ἄν P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2) δυό σημεῖα τῆς παραβολῆς, ὁ συντελεστής διευθύνσεως $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (I) διατηρεῖται ὁ ἴδιος γιά ὅλες τίς παράλληλες χορδές πρός τήν P_1P_2. Ἀπό $y_2^2 = 2\alpha x_2$, $y_1^2 = 2\alpha x_1$ καί ἀπό τήν (I) ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ τεταγμένη $\dfrac{y_1 + y_2}{2}$ τοῦ μέσου Μ τοῦ P_1 P_2 μένει σταθερή).

10.* Μέ τή μέθοδο πού ὑποδείξαμε στήν προηγούμενη ἄσκηση ν' ἀποδείξετε τό ἑξῆς: Τά μέσα παράλληλων χορδῶν τῆς ἐλλείψεως $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ (ἀντίστοιχα τῆς ὑπερβολῆς $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$) ἀνήκουν σέ μιά εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως (ἀντίστοιχα τῆς ὑπερβολῆς).

11.* Θεωροῦμε τήν ἔλλειψη $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ καί τήν εὐθεία $y = \lambda x + \mu$ ὅπου λ δοσμένη σταθερά καί μ μεταβλητή. Νά προσδιοριστοῦν οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς μ γιά τίς ὁποῖες ἡ εὐθεία ἔχει δυό, ἕνα ἤ κανένα κοινό σημεῖο μέ τήν ἔλλειψη.

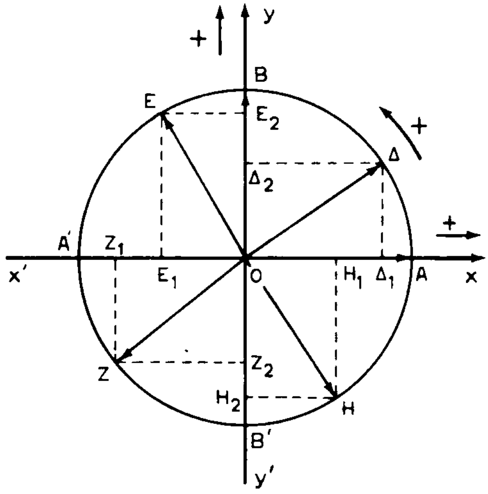
12.* Θεωροῦμε τήν ὑπερβολή $\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$. Νά δείξετε χρησιμοποιώντας ἐξισώσεις: 1) ὅτι ἡ ὑπερβολή δέν ἔχει κοινά σημεῖα μέ τίς ἀσύμπτωτές της, 2) ὅτι κάθε παράλληλη πρός μιάν ἀσύμπτωτη τέμνει τήν ὑπερβολή σ' ἕνα μοναδικό σημεῖο καί 3) ὅτι ἡ εὐθεία $y = \lambda x + \mu$ $\left(\lambda, \mu \text{ δοσμένες σταθερές, ἤ } \lambda \neq \pm \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ ἔχει μέ τήν ὑπερβολή δυό, ἕνα ἤ κανένα κοινά σημεῖα καθόσο $\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 + \mu^2$ εἶναι > 0, $= 0$ ἤ < 0. Πῶς κατανέμονται στούς κλάδους τά σημεῖα τομῆς, ὅταν ὑπάρχουν;

ΕΝΟΤΗΤΑ 10

ΟΙ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

10.1 Οἱ τριγωνομετρικές συναρτήσεις συν x καί ημ x.

Κατασκευάζομε έναν τριγωνομετρικό κύκλο (O, R = 1, $\circlearrowleft$+), τοποθετοῦμε τούς ἄξονες συνημιτόνων Ox καί ἡμιτόνων Oy καί παίρνομε καί ἕνα τόξο μέ ἀρχή τήν ἀρχή A τῶν τόξων καί πέρας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Δ (ἤ E ἤ Z ἤ H, σχ. 10.1) πάνω στόν κύκλο.



Σχ. 10.1.

Ἡ διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OA}$ πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή A τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$ λέγεται συνήθως **ἀρχική ἀκτίνα** τοῦ τόξου καί αὐτή πού διέρχεται ἀπό τό πέρας Δ τοῦ τόξου, λέγεται **τελική**.

Ἄς εἶναι Δ_1 καί Δ_2 οἱ προβολές τοῦ Δ στόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων καί τῶν ἡμιτόνων ἀντιστοίχως. Τότε:

ι) **Ὀνομάζομε συνημίτονο ἑνός τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$, μέ ἀρχή A τήν ἀρχή τῶν τόξων, τό σχετικό μέτρο τῆς προβολῆς $\overrightarrow{O\Delta_1}$ τῆς τελικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{O\Delta}$ πάνω στόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.**

Μ' ἄλλα λόγια, τό συνημίτονο εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{O\Delta}$ (ἤ, πράγμα τό ἴδιο, τοῦ πέρατος Δ τοῦ τόξου), στό ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, μέ ἄξονα τετμημένων τόν Ox, ἄξονα τεταγμένων τόν Oy καί μέ μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\overrightarrow{OA}$.

Ἄν x εἶναι τό σχετικό μέτρο ἑνός τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$, τότε συνημίτονο τοῦ x εἶναι ὁ ἀριθμός $\overline{O\Delta_1}$. (Συμβολικά: **συν x = $\overline{O\Delta_1}$**).

ιι) **Ὀνομάζομε ἡμίτονο ἑνός τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$ τό σχετικό μέτρο τῆς προβολῆς $\overrightarrow{O\Delta_2}$ τῆς τελικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{O\Delta}$ πάνω στόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.**

Δηλαδή τό ἡμίτονο εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{O\Delta}$ στό ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων πού περιγράψαμε παραπάνω. (Συμβολικά: **ημ x = $\overline{O\Delta_2}$**).

Σέ κάθε τόξο μέ σχετικό μέτρο έναν άριθμό $x \in \mathbb{R}$, άντιστοιχίζεται έτσι ένας καί μόνον ένας πραγματικός άριθμός ώς συνημίτονο καί ένας καί μόνον ένας ώς ήμίτονο. Είναι προφανές έξάλλου ότι όλα τά (προσημασμένα) τόξα μέ τά ίδια άκρα έχουν τό ίδιο συνημίτονο καί τό ίδιο ήμίτονο. Συνεπώς **δυό τόξα τών όποίων τά μέτρα διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 360° (ή τοῦ 2π), έχουν ίσα συνημίτονα καί ίσα ήμίτονα.**

Συμβολικά:
$$\sigma\upsilon\nu(360^\circ\kappa + x) = \sigma\upsilon\nu\, x$$
$$\eta\mu\,(360^\circ\kappa + x) = \eta\mu\, x \qquad \forall\, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{καί} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Γιά τά τόξα π.χ. 750°, 390°, 30°, –330°, –690° έχομε συν 750° = συν 390° = $= \sigma\upsilon\nu\, 30^\circ = \sigma\upsilon\nu\,(-330^\circ) = \sigma\upsilon\nu\,(-690^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καί $\eta\mu\, 750^\circ = \eta\mu\, 390^\circ =$ $= \eta\mu\, 30^\circ = \eta\mu\,(-330^\circ) = \eta\mu\,(-690^\circ) = \frac{1}{2}$.

Άντιστοιχίζοντας σέ κάθε προσημασμένο τόξο x τό συνημίτονό του καί τό ήμίτονό του έχομε κατασκευάσει δυό πραγματικές συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο όρισμοῦ όλο τό σύνολο $\mathbb{R}$ τών πραγματικών άριθμών.

Γράφομε συμβολικά: $\boxed{y = \sigma\upsilon\nu\, x}$ (1) , $\boxed{y = \eta\mu\, x}$ (2)

Όπως εὔκολα προκύπτει άπό τήν έποπτεία τοῦ σχήματος 10.1 καί σύμφωνα μέ τούς όρισμούς, **πεδίο τιμών καί γιά τίς δύο συναρτήσεις είναι τό διάστημα [–1, 1].**

Έχομε δηλαδή γιά όποιοδήποτε τόξο x:

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 \leqslant \sigma\upsilon\nu\, x \leqslant 1 \iff |\sigma\upsilon\nu\, x| \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \eta\mu\, x \leqslant 1 \iff |\eta\mu\, x| \leqslant 1 \end{array}}$$

Σχετικά μέ τά διαστήματα μονοτονίας τών συναρτήσεων (1) καί (2) μποροῦμε νά διατυπώσομε τά άκόλουθα προφανή συμπεράσματα:

$$\text{I)}\ \ 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2} \implies \begin{cases} 1 = \sigma\upsilon\nu\, 0 \geqslant \sigma\upsilon\nu\, x_1 > \sigma\upsilon\nu\, x_2 \geqslant \sigma\upsilon\nu\, \frac{\pi}{2} = 0 \\ 0 = \eta\mu\, 0 \leqslant \eta\mu\, x_1 < \eta\mu\, x_2 \leqslant \eta\mu\, \frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$$

Δηλαδή: **Στό διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τό συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα συ-**

νάρτηση καί τό ἡμίτονο γνησίως αὔξουσα. Καί οἱ δυό παίρνουν τίς τιμές τοῦ διαστήματος [0, 1].

II) $\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi \Longrightarrow \begin{cases} 0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \geqslant \sigma\upsilon\nu\, x_1 > \sigma\upsilon\nu\, x_2 \geqslant \sigma\upsilon\nu\,\pi = -1 \\ 1 = \eta\mu\,\frac{\pi}{2} \geqslant \eta\mu\, x_1 > \eta\mu\, x_2 \geqslant \eta\mu\,\pi = 0. \end{cases}$

Στό διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ καί οἱ δυό συναρτήσεις εἶναι γνησίως φθίνουσες. Τό συνημίτονο παίρνει ἀντίστοιχα τίς τιμές τοῦ διαστήματος [—1, 0] καί τό ἡμίτονο τίς τιμές τοῦ διαστήματος [0, 1].

III) $\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} -1 = \sigma\upsilon\nu\,\pi \leqslant \sigma\upsilon\nu\, x_1 < \sigma\upsilon\nu\, x_2 \leqslant \sigma\upsilon\nu\,\frac{3\pi}{2} = 0 \\ 0 = \eta\mu\pi \geqslant \eta\mu\, x_1 > \eta\mu\, x_2 \geqslant \eta\mu\,\frac{3\pi}{2} = -1. \end{cases}$

Στό διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ τό συνημίτονο εἶναι συνάρτηση γνησίως αὔξουσα καί τό ἡμίτονο γνησίως φθίνουσα. Καί οἱ δυό παίρνουν τίς τιμές τοῦ διαστήματος [—1, 0].

IV) $\frac{3\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 2\pi \Longrightarrow \begin{cases} 0 = \sigma\upsilon\nu\,\frac{3\pi}{2} \leqslant \sigma\upsilon\nu\, x_1 < \sigma\upsilon\nu\, x_2 \leqslant \sigma\upsilon\nu\, 2\pi = 1 \\ -1 = \eta\mu\,\frac{3\pi}{2} \leqslant \eta\mu\, x_1 < \eta\mu\, x_2 \leqslant \eta\mu\, 2\pi = 0. \end{cases}$

Στό διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ καί οἱ δυό συναρτήσεις εἶναι γνησίως αὔξουσες. Τό συνημίτονο παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος [0, 1] καί τό ἡμίτονο τίς τιμές τοῦ διαστήματος [—1, 0].

Καταγράφομε συνοπτικά τά προηγούμενα συμπεράσματα στόν ἑπόμενο πίνακα:

x	$0°$ ↓		$90°$ ↓		$180°$ ↓		$270°$ ↓		$360°$ ↓
συν x	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
ημ x	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0

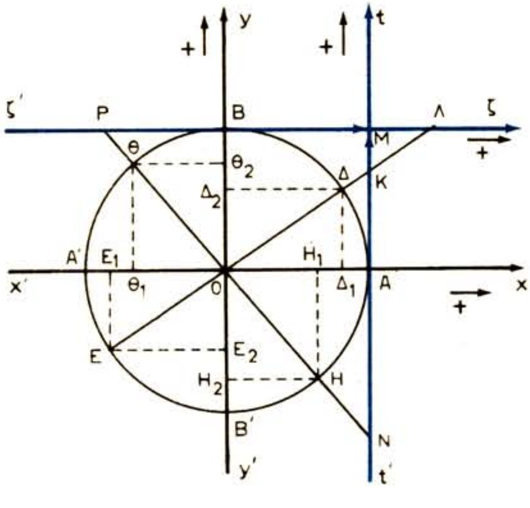
Ὅταν γιά μιά συνάρτηση f (x), μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$, ὑπάρχει ἀριθμός $\omega \neq 0$.

τέτοιος ὥστε νά ἔχομε $f(x) = f(x + \omega)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **περιοδική μέ περίοδο τόν ἀριθμό ω.**

Ἐπειδή συν $(2\pi + x) =$ συν x καί ημ $(2\pi + x) =$ ημ x, $\forall x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνομε ὅτι οἱ συναρτήσεις συν x καί ημ x εἶναι περιοδικές μέ περίοδο 2π. Ἀλλά καί κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $2\kappa\pi$, ὅπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, εἶναι περίοδος τῶν δυό συναρτήσεων, ἀφοῦ συν $(2\kappa\pi + x) =$ συν x καί ημ $(2\kappa\pi + x) =$ ημ x $\forall x \in \mathbb{R}$ καί $\forall \kappa \in \mathbb{Z}$· ὁ ἀριθμός 2π εἶναι ἁπλῶς ἡ ἐλαχίστη θετική περίοδος.

10.2 Οἱ τριγωνομετρικές συναρτήσεις εφ x καί σφ x.

Στό σημεῖο Α — ἀρχή τῶν τόξων σ' ἕνα τριγωνομετρικό κύκλο (σχ. 10.2) — κατασκευάζομε τήν εὐθεία t't ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καί πάνω σ' αὐτή ὁρίζομε ἄξονα μέ ἀρχή τό Α καί μοναδιαῖο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ ἴσο πρός τό $\overrightarrow{OB}$, τό μοναδιαῖο δηλαδή τοῦ ἄξονα y'y τῶν ἡμιτόνων. Τόν ἄξονα t't τόν ὀνομάζομε **ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων.**



Σχ. 10.2.

Φέρνομε ἀκόμα καί τήν εὐθεία ζ'ζ, ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό σημεῖο Β, πέρας τοῦ πρώτου τεταρτημορίου (σχ. 10.2). καί ὁρίζομε πάνω σ' αὐτή ἄξονα μέ ἀρχή τό Β καί μοναδιαῖο διάνυσμα $\overrightarrow{BM}$ ἴσο πρός τό $\overrightarrow{OA}$, τό μοναδιαῖο δηλαδή τοῦ ἄξονα x'x τῶν ἡμιτόνων. Τόν ἄξονα ζ'ζ τόν ὀνομάζομε **ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων.**

Ἄς εἶναι τώρα Δ τό πέρας ἑνός τόξου καί Κ, Λ τά σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας ΟΔ μέ τούς ἄξονες t't καί ζ'ζ ἀντιστοίχως· τότε τό σχετικό μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AK}$ τό ὀνομάζομε **ἐφαπτομένη** τοῦ τόξου $\widehat{A\Delta}$ καί τό σχετικό μέτρο τοῦ $\overrightarrow{B\Lambda}$ **συνεφαπτο-**

μένη τοῦ $\overset{\frown}{ΑΔ}$. Δηλαδή:

Ἐφαπτομένη ἑνός τόξου $\overset{\frown}{ΑΔ}$ (Α ἡ ἀρχή τῶν τόξων) λέγεται τό σχετικό μέτρο τοῦ διανύσματος πού ἔχει ἀρχή τό σημεῖο Α καί πέρας τό σημεῖο τομῆς τοῦ ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων μέ τήν εὐθεία ΟΔ τῆς τελικῆς ἀκτίνας.

Συμβολικά: εφ x = $\overline{ΑΚ}$ (σχ. 10.2).

Συνεφαπτομένη ἑνός τόξου $\overset{\frown}{ΑΔ}$ λέγεται τό σχετικό μέτρο τοῦ διανύσματος πού ἔχει ἀρχή τό πέρας Β τοῦ πρώτου τεταρτημορίου καί πέρας τό σημεῖο τομῆς τοῦ ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων μέ τήν εὐθεία ΟΔ τῆς τελικῆς ἀκτίνας.

Συμβολικά: σφ x = $\overline{ΒΛ}$ (σχ. 10.2).

Παρατηρήσεις: Γιά τά τόξα πού ἔχουν πέρας τό σημεῖο Β ἤ τό Β', ἀντιδιαμετρικό τοῦ Β, δέν ὁρίζεται ἐφαπτομένη, διότι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΒ καί ΟΒ' εἶναι παράλληλες πρός τήν εὐθεία t't. Ὥστε κάθε τόξο πού ἔχει μέτρο $κπ + \frac{π}{2}$, ὅπου $κ \in \mathbb{Z}$, δέν ἔχει ἐφαπτομένη.

Ἐπίσης γιά τά τόξα πού λήγουν στό σημεῖο Α ἤ στό Α', ἀντιδιαμετρικό τοῦ Α, δέν ὁρίζεται συνεφαπτομένη, διότι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΑ' εἶναι παράλληλες πρός τήν εὐθεία ζ'ζ. Ὥστε κάθε τόξο πού ἔχει μέτρο κπ, ὅπου $κ \in \mathbb{Z}$, δέν ἔχει συνεφαπτομένη.

Ἐπειδή σέ κάθε τόξο, μέ ἐξαίρεση τά τόξα $κπ + \frac{π}{2}$ γιά τήν ἐφαπτομένη καί τά τόξα κπ γιά τή συνεφαπτομένη, **ἀντιστοιχίζεται ἕνας καί μόνον ἕνας πραγματικός ἀριθμός ὡς ἐφαπτομένη καί ἕνας καί μόνον ἕνας ὡς συνεφαπτομένη, ἔχομε δυό ἀκόμα, σχετικές μ' ἕνα τόξο, συναρτήσεις μέ τύπους:**

$$\boxed{y = εφ\, x} \quad (3) \qquad \boxed{y = σφ\, x} \quad (4)$$

Ἡ (3) ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $\left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$ καί γενικά **κάθε διάστημα τῆς μορφῆς** $\left(κπ - \frac{π}{2}, κπ + \frac{π}{2}\right)$ καί ἡ (4) τό διάστημα (0, π) καί γενικά **κάθε διάστημα τῆς μορφῆς** $\left(κπ, (κ+1)π\right)$, ὅπου $κ \in \mathbb{Z}$, (γιατί;).

Πεδίο τιμῶν καί γιά τίς δυό συναρτήσεις εἶναι ὅλο τό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (γιατί;).

Γιά τά διαστήματα μονοτονίας τῶν συναρτήσεων εφ x καί σφ x, ἀπό τήν ἐποπτεία τοῦ σχήματος καί τούς ὁρισμούς προκύπτουν τά ἀκόλουθα συμπεράσματα, πού καταγράφομε συνοπτικά στούς παρακάτω πίνακες.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\varepsilon\varphi\, x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sigma\varphi\, x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ / $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Παρατηρώντας τό σχῆμα καί σύμφωνα μέ τούς ὁρισμούς συμπεραίνομε ὅτι: **Τόξα πού ἔχουν τό ἴδιο πέρας (καί τήν ἴδια πάντα ἀρχή) ἤ πέρατα συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου (ἀντιδιαμετρικά σημεῖα) ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη.** Δυό τέτοια ὅμως τόξα διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ π (ἤ τῶν 180°). **Ἄρα $\varepsilon\varphi(x+\kappa\pi) = \varepsilon\varphi\, x$ καί $\sigma\varphi(x+\kappa\pi) = \sigma\varphi x$· οἱ συναρτήσεις λοιπόν $\varepsilon\varphi\, x$ καί $\sigma\varphi\, x$ εἶναι περιοδικές μέ ἐλάχιστη θετική περίοδο τόν ἀριθμό π.**

Σημείωση 1: Ὁρίζομε ὡς **τέμνουσα** ἑνός τόξου x τόν ἀντίστροφο ἀριθμό τοῦ συνx καί ὡς **συντέμνουσα** τόν ἀντίστροφο τοῦ ημx, ἐφόσον $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ καί $\eta\mu x \neq 0$. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως **τεμx** μπορεῖ νά εἶναι π.χ. τό ἀνοικτό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ καί γενικά κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $\left(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, καί τῆς **στεμx** κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $[\kappa\pi, (\kappa+1)\pi]$ ὅπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Οἱ συναρτήσεις πού προκύπτουν ἀπό τούς τύπους $y = \sigma\upsilon\nu\, x$, $y = \eta\mu\, x$, $y = \varepsilon\varphi\, x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $y = \sigma\varphi\, x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $y = \tau\varepsilon\mu\, x = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $y = \sigma\tau\varepsilon\mu\, x = \dfrac{1}{\eta\mu x}$ λέγονται **τριγωνομετρικές** ἤ **κυκλικές συναρτήσεις** καί οἱ ἀριθμοί συν x, ημ x, εφ x, σφ x, τεμ x, στεμ x **τριγωνομετρικοί ἀριθμοί** τοῦ τόξου x.

Σημείωση 2: Ἐπειδή σέ κάθε τόξο $\overset{\frown}{A\Delta}$, ἑνός τριγωνομετρικοῦ κύκλου (O, R = = 1, ↺ +) ἀντιστοιχίζεται καί μιά προσανατολισμένη ἐπίκεντρη γωνία, μιά γωνία δηλαδή πού ἔχει ἀρχική πλευρά τήν OA καί τελική τήν OΔ καί σχετικό μέτρο τό μέτρο τοῦ ἀντίστοιχου τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$, συμπεραίνομε ὅτι: μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά **ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη μιᾶς ὁποιασδήποτε προσημασμένης (θετικῆς ἤ ἀρνητικῆς) γωνίας ἐννοώντας ἀντίστοιχα τό ἡμίτονο, συνημίτονο, τήν ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη τοῦ τόξου πού ἔχει τό ἴδιο σχετικό μέτρο μέ τή θεωρούμενη γωνία.**

Ἄς παρατηρήσομε: Ὅταν τό πέρας ἑνός τόξου x εἶναι σημεῖο τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, τότε τό τόξο ἔχει ὅλους τούς τριγωνομετρικούς του ἀριθμούς θετικούς. Ὅταν τό πέρας εἶναι σημεῖο τοῦ β' τεταρτημορίου, τότε τό τόξο ἔχει τό ἡμίτονο καί τή συντέμνουσα θετικούς ἀριθμούς καί ὅλους τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἀρνητικούς· ὅταν τό πέρας εἶναι σημεῖο τοῦ γ′ τεταρτημορίου τότε ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ὅλοι οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί ἀρνητικοί· τέλος ὅταν τό πέρας εἶναι σημεῖο τοῦ δ′ τεταρτημορίου τότε τό συνημίτονο καί ἡ τέμνουσα εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ὅλοι οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου εἶναι ἀρνητικοί.

10.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

I) $y = \eta\mu\, x$ *καί* $y = \sigma\upsilon\nu\, x$ *γιά* $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi.$

II) $y = \varepsilon\varphi\, x$ *γιά* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ *καί* $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$

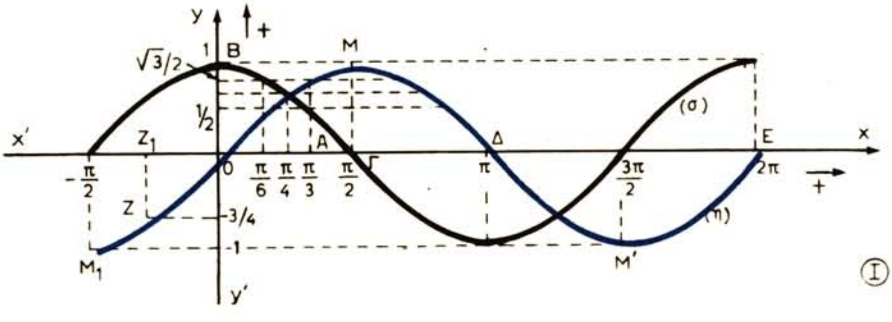
III) $y = \sigma\varphi\, x$ *γιά* $0 < x < \pi$ *καί* $\pi < x < 2\pi.$

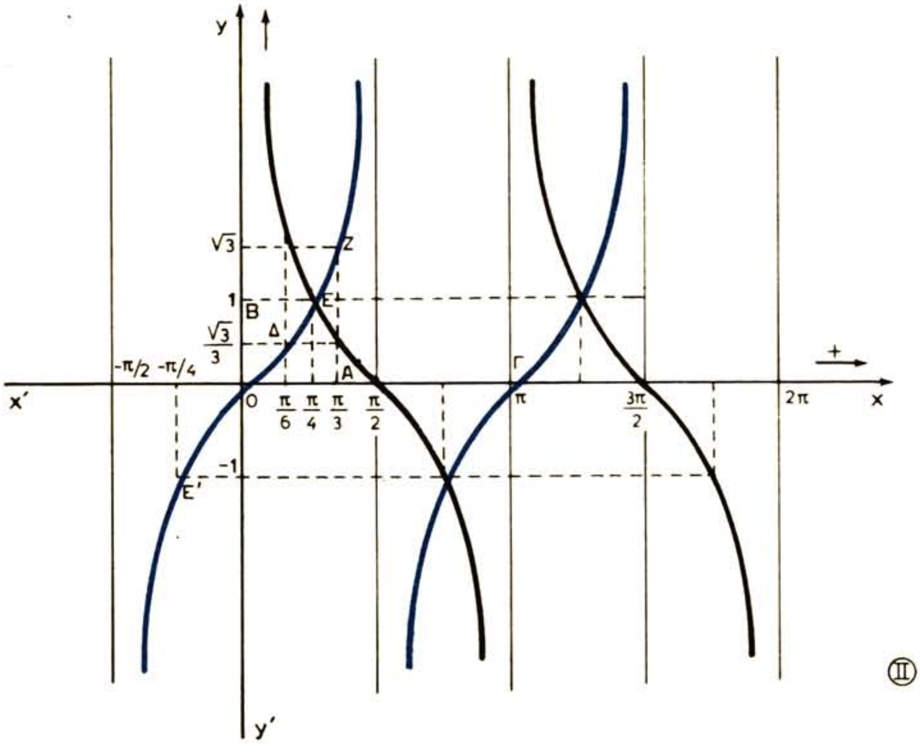
Κατασκευάζομε ἀρχικά ἕνα ζεῦγος ὀρθογωνίων προσανατολισμένων εὐθειῶν x′y καί y′y καί πάνω στή θετική ἡμιευθεία Ox παίρνομε ἕνα τμῆμα OA μήκους $\frac{\pi}{3} \simeq 1{,}05$ [σχ. 10.3(I)]. Σημειώνομε πάνω στόν ἄξονα x′x καί τά σημεῖα $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$

Ἀκολούθως πάνω στή θετική ἡμιευθεία Oy παίρνομε ἕνα τμῆμα OB = = OA $\simeq$ 1,05 καί τό θεωροῦμε ὡς μοναδιαῖο γιά τόν ἄξονα y′y.

I_α) **Πάνω στόν ἄξονα y′y** τοποθετοῦμε τά σημεῖα $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$, προσδιορίζομε τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου μέ συντεταγμένες $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ καί σχεδιάζομε τό τόξο OM. Εἶναι εὔκολο νά παρατηρήσομε ὅτι: τό τόξο MΔ εἶναι συμμετρικό τοῦ OM ὡς πρός τήν MΓ καί τό τόξο ΔM′E συμμετρικό τοῦ OMΔ ὡς πρός τό σημεῖο Δ· ἐπίσης τό OM_1 εἶναι συμμετρικό τοῦ OM ὡς πρός τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ημ x, ἐφόσον πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι ὅλο τό σύνολο ℝ, εἶναι μιά ἀπεριόριστη «κυματοειδής«» γραμμή (η) [σχ. 10.3(I)], πού λέγεται **ἡμιτονοειδής καμπύλη** καί πού ἀποτελεῖται ἀπό τόξα ἴσα πρός τό OMΔM′E· καθένα ἀπ' αὐτά τά ἴσα τόξα μπορεῖ νά προκύψει ἀπό





Σχ. 10.3.

τό προηγούμενό του, στή σειρά, μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ἴσο πρός τό $\overrightarrow{OE}$ ἤ ἀπό τό ἑπόμενό του στή σειρά μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ἴσο πρός τό $\overrightarrow{EO} = -\overrightarrow{OE}$.

I_β) **Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως συν x** γίνεται μέ τήν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε γιά τό ἡμίτονο καί εἶναι καμπύλη (σ) [σχ. 10.3(I)] ἴση πρός τήν ἡμιτονοειδή. Μπορεῖ μάλιστα νά προκύψει καί μέ μεταφορά τῆς ἡμιτονοειδοῦς κατά διάνυσμα ἴσο πρός τό $\overrightarrow{\Gamma O}$.

II) **Γιά νά σχεδιάσομε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως εφ x** ορίζομε τά σημεῖα μέ συντεταγμένες $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ καί χαράσσομε τόν βραχίονα ΟΔΕΖ . . . [σχ. 10.3(II)]. ὁ ὁποῖος ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $x = \frac{\pi}{2}$. Ὁ βραχίονας ΟΕ' . . . εἶναι συμμετρικός τοῦ ΟΔ ὡς πρός τήν ἀρχή Ο καί ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $x = -\frac{\pi}{2}$. Ἔτσι γιά τό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ παίρνομε ἕναν ἀπεριόριστο κλάδο μέ δυό βραχίονες συμμετρικούς ὡς πρός τό σημεῖο Ο (0, 0). Γιά τό διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ἔχομε, ὡς γραφική παράσταση, ἕναν κλάδο ἴσο πρός τόν προηγούμενο, πού προκύπτει ἀπ' αὐτόν μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ἴσο μέ $\overrightarrow{O\Gamma}$ (ὅπου $|\overrightarrow{O\Gamma}| = \pi$) [σχ. 10.3(II)].

III) **Ἡ γραφική παράσταση τῆς σφx** γίνεται μέ τήν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε γιά τήν ἐφαπτομένη καί ἀποτελεῖται ἀπό ἴσους ἀπεριόριστους κλάδους πού ἔχουν ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες. . . $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi, \ldots$

Παρατήρηση: Ὅπως καί ἀπό τό σχῆμα 10 · 3 (I) βλέπομε, τά σημεῖα τῶν γραφικῶν παραστάσεων μέ τεταγμένες -1 καί $+1$ εἶναι τοπικά ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων $y = \eta\mu\, x$ καί $y = \sigma\upsilon\nu\, x$.

2. Νά σημειωθοῦν πάνω στόν τριγωνομετρικό κύκλο τά πέρατα τῶν τόξων πού δίνουν τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $4\eta\mu\, x + 3 = 0$ καί νά βρεθεῖ γραφικά ἐκείνη ἡ λύση πού περιέχεται στό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Παρατηροῦμε ἀρχικά ὅτι $4\eta\mu\, x + 3 = 0 \Longleftrightarrow \eta\mu\, x = -\frac{3}{4}$.

I) Πάνω στόν ἀρνητικό ἡμιάξονα Oy' παίρνομε σημεῖο P τέτοιο ὥστε $\overline{OP} = -\frac{3}{4}$ καί ἀπ' αὐτό φέρνομε εὐθεία (ε) παράλληλη πρός τόν ἄξονα x'x. Ἄν ἡ (ε) τέμνει τόν τριγωνομετρικό κύκλο στά σημεῖα Κ καί Λ, αὐτά εἶναι τά πέρατα ὅλων τῶν τόξων μέ ἀρχή τό σημεῖο Α πού δίνουν τίς ἄπειρες λύσεις τῆς ἐξισώσεως (γιατί;). (Νά γίνει τό σχῆμα).

II) Ἀφοῦ σχεδιάσομε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \text{ημ}\, x$ [σχ. 10.3(I)], φέρνομε ἀπό τό σημεῖο τοῦ ἄξονα y'y μέ τεταγμένη $-\frac{3}{4}$ εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα x'x πού τέμνει τό μέρος τῆς καμπύλης (η), τό περιεχόμενο μεταξύ τῶν εὐθειῶν $x = -\frac{\pi}{2}$ καί $x = \frac{\pi}{2}$, ἔστω στό Z. Ἄν Z_1 ἡ προβολή τοῦ Z στόν ἄξονα x'x, τότε ἡ τετμημένη τοῦ Z_1 δίνει ἐκείνη τή λύση (σέ ἀκτίνια) τῆς ἐξισώσεως ἡ ὁποία περιέχεται στό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (Νά ὑπολογισθεῖ κατά προσέγγιση).

10.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

I) $y = \text{ημ}\, x - \frac{1}{2}$ στό διάστημα $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

II) $y = 1 - \text{συν}\, x$ στό διάστημα $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

III) $y = 2 + \text{εφ}\, x$ στό διάστημα $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

VI) $y = -2 + \text{σφ}\, x$ στό διάστημα $0 < x < \pi$.

2*. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

I) $y = \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ στό διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

II) $y = \text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ στό διάστημα $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$.

3*. I) Νά σημειωθοῦν πάνω στόν τριγωνομετρικό κύκλο τά πέρατα τῶν τόξων πού δίνουν τίς λύσεις τῶν ἐξισώσεων: α) $5\text{συν}\, x + 4 = 0$· β) $-3\text{εφ}\, x + 4 = 0$· γ) $2\, \text{ημ}\, x - \sqrt{2} = 0$.

II) Νά βρεθοῦν γραφικά οἱ λύσεις τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων οἱ περιεχόμενες στό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4*. Νά βρεθεῖ ἡ ἐλαχίστη θετική περίοδος τῶν συναρτήσεων:

$$\text{ημ}\, 2x, \quad \text{συν}\, \frac{3x}{4}, \quad \text{εφ}\, (-4x), \quad \text{σφ}\left(\frac{5x}{3}\right).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 11

ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

11.1 Ὁριακές τιμές συναρτήσεων.

α) **Ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή τείνει πρός μιάν ὁρισμένη πραγματική τιμή.**

Παράδειγμα 1ο. Ἄς πάρομε τή συνάρτηση μέ τύπο $f(x) = 4x - 1$ πού, ὅπως ξέρομε, εἶναι ὁρισμένη σ' ὅλο τό σύνολο $\mathbb{R}$.

Γιά $x = 2$ ἔχομε ἀντίστοιχα $y = f(2) = 7$.

Ὅταν δίνομε στό x τιμές μεγαλύτερες ἤ μικρότερες τοῦ 2, ἀλλά ὅλο καί πιό γειτονικές στήν τιμή 2, διαπιστώνομε, ἀπό τόν παρακάτω πίνακα, ὅτι οἱ ἀντίστοιχες τιμές τοῦ y εἶναι ὅλο καί πιό κοντινές στόν ἀριθμό 7 (ἀντίστοιχα μεγαλύτερες ἤ μικρότερες).

x	1,7	1,8	1,9	1,99	**2**	2,01	2,1	2,2	2,3
y	5,8	6,2	6,6	6,96	**7**	7,04	7,4	7,8	8,2

Μποροῦμε ν' ἀποδείξομε ὅτι σέ κάθε δοσμένο ἀριθμό $\epsilon > 0$ εἶναι δυνατό ν' ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ὥστε: γιά κάθε τιμή τοῦ x (μέ $x \neq 2$) γιά τήν ὁποία εἶναι $|x - 2| < \delta$ νά ἔχομε ἀντίστοιχα $|f(x) - 7| < \epsilon$.

Πράγματι: Θέλομε νά ἔχομε $|(4x - 1) - 7| < \varepsilon$, ὅπου ε ἕνας αὐθαίρετα δοσμένος θετικός ἀριθμός. Εἶναι $|4x - 1 - 7| < \varepsilon \iff 4|x - 2| < \varepsilon \iff$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \iff -\frac{\varepsilon}{4} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{4} \iff 2 - \frac{\varepsilon}{4} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Γιά ἀριθμό δ μποροῦμε λοιπόν νά πάρομε τόν $\frac{\varepsilon}{4}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

ὅταν ὁ x παίρνει τιμές μέσα στό διάστημα $\left(2 - \frac{\varepsilon}{4},\ 2 + \frac{\varepsilon}{4}\right)$, τότε οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς $f(x)$ θά διαφέρουν ἀπό τήν τιμή 7 λιγότερο ἀπό ε.

Ἄν π.χ. θέλομε νά ἔχομε $|f(x) - 7| < 0{,}04$, τότε ὁ x πρέπει καί ἀρκεῖ νά παίρνει τιμές μέσα στό διάστημα $(1{,}99,\ 2{,}01)$.

Ἐκφράζομε τήν παραπάνω ἰδιότητα λέγοντας ὅτι:

Ὅταν ὁ x τείνει πρός τόν (ἀριθμό) 2, ἡ συνάρτηση $f(x) = 4x - 1$ ἔχει ὁριακή τιμή (ἔχει ὅριο) τόν (ἀριθμό) 7.

Γράφομε συμβολικά: $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ (limes = ὅριο).

Παρατηροῦμε ὅτι, στό παράδειγμά μας, ἡ ὁριακή τιμή τῆς συναρτήσεως, ὅταν $x \to 2$, εἶναι ἡ ἴδια ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως πού ἀντιστοιχίζεται στήν τιμή $x = 2$ τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς.

Παράδειγμα 2ο. Ἄς θεωρήσομε τώρα τή συνάρτηση μέ τύπο:

$g(x) = \dfrac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2}$, ἡ ὁποία εἶναι ὁρισμένη στό σύνολο $\mathbb{R} - \{2\}$.

Τιμές τῆς συναρτήσεως $g(x)$ εἶναι οἱ τιμές τοῦ πολυωνύμου:

$$4x - 1 = \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, \ [4x^2 - 9x + 2 = (x-2)(4x-1)].$$

Ἄρα: $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} (4x - 1) = 7.$

Ἐδῶ παρατηροῦμε τά ἑξῆς: Μολονότι ἡ συνάρτηση δέν εἶναι ὁρισμένη στή θέση 2, μολονότι δηλαδή δέν ὑπάρχει στήν τιμή 2 ἀντίστοιχη τιμή τῆς συναρτήσεως, ὑπάρχει ὅμως ὁριακή τιμή ὅταν $x \to 2$· ὑπάρχει, μ' ἄλλα λόγια, ἀριθμός (ἐδῶ εἶναι ὁ ἀριθμός 7) πρός τόν ὁποῖο «ἀδιάκοπα πλησιάζουν» οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως καθόσον οἱ τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς γίνονται ὁλοένα πιό γειτονικές μέ τόν 2.

Λέμε γενικά ὅτι μιά συνάρτηση $f(x)$ ὁρισμένη τουλάχιστον σέ μιά περιοχή τοῦ $x_0 \in \mathbb{R}$, καί ὄχι κατ' ἀνάγκην καί στό x_0, ἔχει ὁριακή τιμή $a \in R$ καί σημειώνομε $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε θετικό ἀριθμό ϵ ὑπάρχει ἕνας ἄλλος θετικός δ πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό ϵ τέτοιος ὥστε, γιά κάθε $x \neq x_0$ νά ἔχομε:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

Παράδειγμα 3ο. Θά πάρομε τώρα τή συνάρτηση μέ τύπο $\varphi(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$.

Αὐτή εἶναι ὁρισμένη στό σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$. Ἐπειδή γιά $\forall x < 0$ ἡ παραπάνω παράσταση γράφεται $x + \dfrac{-x}{x} = x - 1$, ἐνῶ γιά $\forall x > 0$ γράφεται $x + \dfrac{x}{x} = x + 1$, καί ἐπειδή ὁ ἀριθμός μηδέν δέν ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, σκεφτόμαστε ὅτι ἔχει ἐνδιαφέρον ν' ἀσχοληθοῦμε μέ τή «συμπεριφορά» τῆς συναρτήσεως γύρω ἀπό τή θέση $x = 0$.

Ἔτσι διακρίνομε δυό περιπτώσεις, καθόσον $x < 0$ ἤ $x > 0$, καί ἀναζητοῦμε (ἄν ὑπάρχει) ὁριακή τιμή τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$, ὅταν «ὁ x τείνει στό μηδέν μέσω ἀρνητικῶν τιμῶν» ἤ, ὅπως ἀλλιῶς λέμε, ὅταν **«ὁ x τείνει στό μηδέν ἀπό ἀριστερά»** καί ἐπίσης ὅταν **«ὁ x τείνει στό μηδέν ἀπό δεξιά»** (ὅταν ὁ x τείνει στό μηδέν μέσω θετικῶν τιμῶν).

Σημειώνομε συμβολικά γιά τίς δυό περιπτώσεις ἀντίστοιχα:

$\lim_{x \to 0^-} \varphi(x)$	$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x)$

Καί ἔχομε:

μέ $x < 0$	*μέ* $x > 0$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1) = -1$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1$

Ὅπως βλέπομε, ἡ ὁριακή τιμή τῆς συναρτήσεως, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέσω ἀρνητικῶν τιμῶν, εἶναι διαφορετική ἀπό τήν ὁριακή της τιμή, ὅταν ὁ x τείνει στό μηδέν μέσω θετικῶν τιμῶν. Τά δυό (διαφορετικά) αὐτά ὅρια τά λέμε **μονόπλευρα.**

Ἐπειδή στό παράδειγμά μας, τά δυό μονόπλευρα ὅρια, ἀπ' ἀριστερά καί δεξιά τοῦ μηδενός, εἶναι διαφορετικά, λέμε ὅτι **ἡ συνάρτηση δέν ἔχει ὅριο στή θέση μηδέν.**

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγομε καί ὅταν δέν ὑπάρχει τουλάχιστον τό ἕνα ἀπό τά μονόπλευρα ὅρια. Ἀντιθέτως ὅταν ὑπάρχουν καί τά δύο μονόπλευρα ὅρια σέ ἕνα σημεῖο x_0 καί εἶναι ἴσα, τότε λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση ἔχει ὅριο στό σημεῖο x_0 πού εἶναι ἴσο μέ τό κοινό μονόπλευρο ὅριο. Ἔτσι στό παράδειγμα 2 ἔχομε:

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 7.$

Παράδειγμα 4ο. Θεωροῦμε ἀκόμα τή συνάρτηση πού παρέχει ἡ ἐξίσωση $y = \text{Aκ}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$, ἡ ὁποία εἶναι ὁρισμένη παντοῦ μέσα στό $\mathbb{R}$. Ζητᾶμε, ἄν ὑπάρχει, τό $\lim\limits_{x \to 0} y$. Παρατηροῦμε ὅτι $f(0) = 1$, ἐνῶ $f(x) = 0$ γιά $\forall\, x \neq 0$,

διότι $0 < \dfrac{1}{1+x^2} < 1\ \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ἄρα ἔχομε $\lim\limits_{x \to 0} y = 0$.

Ὥστε στήν προκειμένη περίπτωση ἡ συνάρτηση, πού εἶναι ὁρισμένη στή θέση $x = 0$, ἔχει καί ὁριακή τιμή ὅταν $x \to 0$, ἀλλά αὐτή ἡ ὁριακή τιμή εἶναι διαφορετική ἀπό τήν τιμή πού παίρνει ἡ συνάρτηση γιά $x = 0$· εἶναι δηλαδή $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

Παράδειγμα 5ο. Θά πάρομε τέλος τή συνάρτηση μέ τύπο $\sigma(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2}$, τῆς ὁποίας πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$. Εἶναι εὔκολο ν' ἀποδείξομε ὅτι γιά ὁποιονδήποτε αὐθαίρετα δοσμένο ἀριθμό $M > 0$ ὑπάρχει ἀντίστοιχα ἕνα σύνολο τιμῶν τοῦ x τῆς μορφῆς $(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$ μέ $\delta > 0$ ἐξαρτώμενο ἀπό τό M, γιά τό ὁποῖο ἔχομε:

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M.$$

Πράγματι: $\dfrac{4}{(x-1)^2} > M \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} < \dfrac{1}{M} \Leftrightarrow (x-1)^2 < \dfrac{4}{M} \Leftrightarrow$

$$|x-1| < \frac{2}{\sqrt{M}} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{M}} < x-1 < \frac{2}{\sqrt{M}} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{\sqrt{M}} < x < 1+\frac{2}{\sqrt{M}}.$$

Ἄν π.χ. $M = 10000$, γιά νά ἔχομε $y > 10000$ πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ x νά παίρνει τιμές στό διάστημα $1 - \dfrac{2}{100} < x < 1 + \dfrac{2}{100}$ δηλαδή στό $0{,}98 < x < 1{,}02$.

Ἐκφράζομε τήν παραπάνω ἰδιότητα λέγοντας: **ὅταν ὁ x τείνει στόν ἀριθμό 1, ἡ συνάρτηση σ(x) τείνει στό $+\infty$ ἤ ὅτι ἔχει ὅριο τό $+\infty$.** Γράφομε συμβολικά: $\lim\limits_{x \to 1} \sigma(x) = +\infty$.

Ὅμοια γιά τή συνάρτηση μέ τύπο $y = -\dfrac{4}{(x-1)^2}$ ἔχομε:

$$\lim_{x \to 1} \left(-\frac{4}{(x-1)^2}\right) = -\infty .$$

Γιά τή συνάρτηση ὅμως μέ τύπο $\rho(x) = \dfrac{1}{x-1}$, πού ἔχει τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ μέ τή σ(x), ἔχομε:

$$\lim_{x \to 1^-} \rho(x) = -\infty \quad (\text{διότι γιά } \forall\, x < 1 \text{ εἶναι } \frac{1}{x-1} < 0)\cdot$$

$$\text{καί} \quad \lim_{x \to 1^+} \rho(x) = +\infty \quad (\text{διότι γιά } \forall\, x > 1 \text{ εἶναι } \frac{1}{x-1} > 0).$$

Δηλαδή ἡ συνάρτηση ρ(x) δέν ἔχει ὡς ὅριο τό ἴδιο «προσημασμένο ἄπειρο» ὅταν $x \to 1$ ἀπ' ἀριστερά ἤ ἀπό δεξιά τοῦ 1. Ἄρα ἡ συνάρτηση ρ(x) δέν ἔχει ὅριο στή θέση 1.

β) **Ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή αὐξάνει ἀπολύτως ἀπεριόριστα καί τείνει μέσω θετικῶν (ἀντίστοιχα ἀρνητικῶν) τιμῶν πρός τό $+\infty$ (ἀντιστοίχως πρός τό $-\infty$).**

Ἄς θεωρήσομε πάλι τήν παραπάνω συνάρτηση μέ τύπο $\rho(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Εἶναι εὔκολο νά πεισθοῦμε ὅτι ἡ ρ(x) παίρνει τιμές ἀπολύτως μικρότερες ἀπό ὁποιονδήποτε ἀριθμό $\varepsilon > 0$, ἀρκεῖ ὁ x νά παίρνει τιμές ἀπολύτως μεγαλύτερες ἀπό κατάλληλα ὁριζόμενο ἀριθμό $P > 0$.

Πράγματι: Εἶναι $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| < \varepsilon \iff |x-1| > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x-1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ἤ} \\ x-1 < -\dfrac{1}{\varepsilon} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ἤ} \\ x < 1 - \dfrac{1}{\varepsilon} \end{array}\right.$$

Ἄν π.χ. θέλομε νά εἶναι $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| < \dfrac{1}{1000}$ πρέπει καί ἀρκεῖ νά δίνομε στό x τιμές $> 1 + 1000 = 1001$ ἤ $< 1 - 1000 = -999$.

Ἐκφράζομε τήν παραπάνω ἰδιότητα λέγοντας ὅτι:

Ὅταν τό x τείνει στό $+\infty$ (ἀντιστοίχως στό $-\infty$) ἡ συνάρτηση ρ(x) τείνει στό μηδέν. Γράφομε συμβολικά:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = 0$ **(ἀντιστοίχως** $\lim\limits_{x \to -\infty} \rho(x) = 0$**).**

Όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \rho(x) = \alpha$, γιά συντομία θά γράφομε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \rho(x) = \alpha$.

Όμοια συμπεραίνομε ὅτι π.χ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2+\dfrac{1}{x-1}\right) = 2.$

Ἄς πάρομε ὅμως καί τή συνάρτηση μέ τύπο $y = 25x^2$. Παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιονδήποτε δοσμένο ἀριθμό $M > 0$ μποροῦμε πάντοτε νά προσδιορίσομε ἕναν $P > 0$ τέτοιον ὥστε γιά τιμές τοῦ x (θετικές ἤ ἀρνητικές) μέ $|x| > P$ νά εἶναι $25x^2 > M$.

Πράγματι: εἶναι $f(x) = 25x^2 > M \Longleftrightarrow |x| > \dfrac{\sqrt{M}}{5} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{\sqrt{M}}{5} \\ \text{ἤ} \\ x < -\dfrac{\sqrt{M}}{5} \end{cases}$$

. Ἄν π.χ. $M = 90000$ θά ἔχομε $y > 90000\ \forall\, x > \dfrac{300}{5} = 60$

ἤ $x < -\dfrac{300}{5} = -60.$

Ἐκφράζομε τήν ἰδιότητα αὐτή λέγοντας: ὅταν τό x **τείνει στό $+\infty$ (ἀντιστοίχως στό $-\infty$), ἡ συνάρτηση τείνει στό $+\infty$ (ἤ ἔχει ὅριο τό $+\infty$).**

Γράφομε συμβολικά: **$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, (ἀντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$).**

Όμοια συμπεραίνομε ὅτι: π.χ.: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, ἐνῶ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

11.2 Ἰδιότητες τῶν ὁρίων.

α) **Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$, $\varphi(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ καί σέ μιά θέση $x = x_0$ ἔχομε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ καί εἶναι, σέ μιά περιοχή τοῦ x_0, $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = l$.**

β) **Θεωροῦμε δυό συναρτήσεις** $f(x)$ καί $g(x)$ μέ τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ καί ὑποθέτομε ὅτι σέ μιά θέση $x = x_0$ ἤ μέ $x \to \pm\infty$ οἱ συναρτήσεις ἔχουν ὁριακές τιμές ὁρισμένους πραγματικούς ἀριθμούς. Τότε γιά τά ὅρια αὐτά θά ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες:

I) **$\lim\,[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.**

II) **$\lim\,[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$.**

III) **$\lim\,[f(x) : g(x)] = \lim f(x) : \lim g(x)$, ἐφόσον $\lim g(x) \neq 0$.**

IV) **$\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}$, ἐφόσον $f(x) \geqslant 0$ γιά κάθε τιμή τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ.**

v) **Ἄν κ σταθερά, τότε $\lim [\kappa f(x)] = \kappa \lim f(x)$.**

γ) **Θεωροῦμε δυό συναρτήσεις** $f(x)$ καί $g(x)$ μέ τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ καί ὑποθέτομε ὅτι σέ μιά θέση $x = x_o$ ἤ μέ $x \to +\infty$ ἤ $x \to -\infty$ ἡ μιά τουλάχιστον ἀπό τίς συναρτήσεις ἔχει ὅριο ἕνα προσημασμένο ἄπειρο ($+\infty$ ἤ $-\infty$). Σ' αὐτές τίς περιπτώσεις ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες:

I) Ἄν $\lim f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ μέ $\kappa \neq 0$ καί $\lim g(x) = \pm\infty$, τότε:

$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$ ἐφόσον $\kappa > 0$ καί $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \mp\infty$ ἐφόσον $\kappa < 0$.

II) Ἄν $\lim f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ καί $\lim g(x) = \pm\infty$, τότε $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

III) Ἄν $\lim f(x) = +\infty$ καί $\lim g(x) = +\infty$, τότε καί $\lim [f(x) + g(x)] = +\infty$· ἐπίσης μέ $\lim f(x) = -\infty$ καί $\lim g(x) = -\infty$ ἔχομε $\lim [f(x) + g(x)] = -\infty$.

Πράξεις μέ ὁριακές τιμές: Οἱ προηγούμενες ἰδιότητες (β) καί (γ) περιέχονται συνοπτικά στόν παρακάτω πίνακα, ὅπου μέ φ, ω συμβολίζομε δυό συναρτήσεις καί μέ φ_o, ω_o τίς ὁριακές τους τιμές ἀντίστοιχα, ὅταν αὐτές εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

φ	ω	$\varphi + \omega$	$\varphi \cdot \omega$	$\dfrac{\varphi}{\omega}$
φ_o	ω_o	$\varphi_o + \omega_o$	$\varphi_o \cdot \omega_o$	$\dfrac{\varphi_o}{\omega_o}$ ($\omega_o \neq 0$)
φ_o	∞	∞	∞ (ἄν $\varphi_o \neq 0$)	0
∞	ω_o	∞	∞ (ἄν $\omega_o \neq 0$)	∞
0	0	0	0	;
0	∞	∞	;	0
∞	0	∞	;	;
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	;
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;
$+\infty$	$-\infty$	;	$-\infty$	;
$-\infty$	$+\infty$	;	$-\infty$	;

Σημείωση : Ὑποτίθεται ὅτι οἱ συναρτήσεις ἔχουν τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ καί ὅτι ἔχουν ὅριο ἕναν ὁρισμένο πραγματικό ἀριθμό ἤ ἕνα προσημασμένο ἄπειρο, ὅταν $x \to x_o \in \mathbb{R}$ ἤ $x \to \pm\infty$.

Τά ἐρωτηματικά, ὅπου ὑπάρχουν, ἔχουν τό νόημα ὅτι ἡ ὁριακή τιμή τοῦ ἀθροίσματος ἤ τοῦ γινομένου ἤ τοῦ πηλίκου, στίς ἀντίστοιχες περιπτώσεις, δέν καθορίζεται ἀπό τά πρίν καί μονοσήμαντα μέσω τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν δυό ἀρχικῶν συναρτήσεων· ὑπάρχει — ὅπως συνήθως διατυπώνομε — ἀπροσδιοριστία.

Ἄν π.χ. $\varphi(x) \to 0$ καί $\omega(x) \to 0$ (μέ $x \to x_o$ ἤ $x \to \pm\infty$), τό πηλίκο $\dfrac{\varphi(x)}{\omega(x)}$ μπορεῖ κατά περίπτωση νά ἔχει ὅριο τό 0 ἤ ἕναν ἄλλο πραγματικό ἀριθμό ἤ τό $+\infty$ ἤ τό $-\infty$ ἤ ἀκόμα νά μήν ἔχει κανένα ὅριο.

Παρακάτω στίς ἐφαρμογές θά προσδιορίσομε τίς ὁριακές τιμές σέ μερικές περιπτώσεις ἀπροσδιοριστίας.

δ) **Δυό σημαντικές ἰδιότητες γιά τίς ὁριακές τιμές πολυωνύμων.**

1. Ὅπως εἴδαμε καί στό 1ο παράδειγμα (παράγρ. 11.1(α)), **ἡ ὁριακή τιμή ἑνός πολυωνύμου f(x) σέ κάθε θέση $x_o \in \mathbb{R}$ εἶναι ἡ ἴδια ἡ τιμή πού παίρνει τό πολυώνυμο γιά $x = x_o$· δηλαδή ἔχομε πάντοτε $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.**

2. **Τό ὅριο ἑνός πολυωνύμου τοῦ x, ὅταν $x \to \pm\infty$, εἶναι τό ἴδιο μέ τό ὅριο τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ πολυωνύμου.**

Δηλαδή : ἄν $f(x) = \alpha_o x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ (μέ $\alpha_o \neq 0$), τότε :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha_o x^\nu \quad \text{καί} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \alpha_o x^\nu.$$

Πράγματι :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(\alpha_o x^\nu) \cdot \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_o x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_o x^2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_o x^\nu}\right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (\alpha_o x^\nu) \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_o x} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_o x^\nu}\right) = \lim_{x \to +\infty} (\alpha_o x^\nu),$$

$$\text{διότι} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_o x} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_o x^\nu}\right) = 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 1.$$

Παρατηρήσεις: Ι) Θά ὀνομάζομε **πόλο** μιᾶς ρητῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ κάθε τιμή $x = \alpha \in \mathbb{R}$ γιά τήν ὁποία ἔχομε $\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = \pm\infty$ ἤ $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = \pm\infty$. Ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $x = \alpha$ (παράλληλη στόν ἄξονα $y'y$) εἶναι τότε μιά ἀσύμπτωτη τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως.

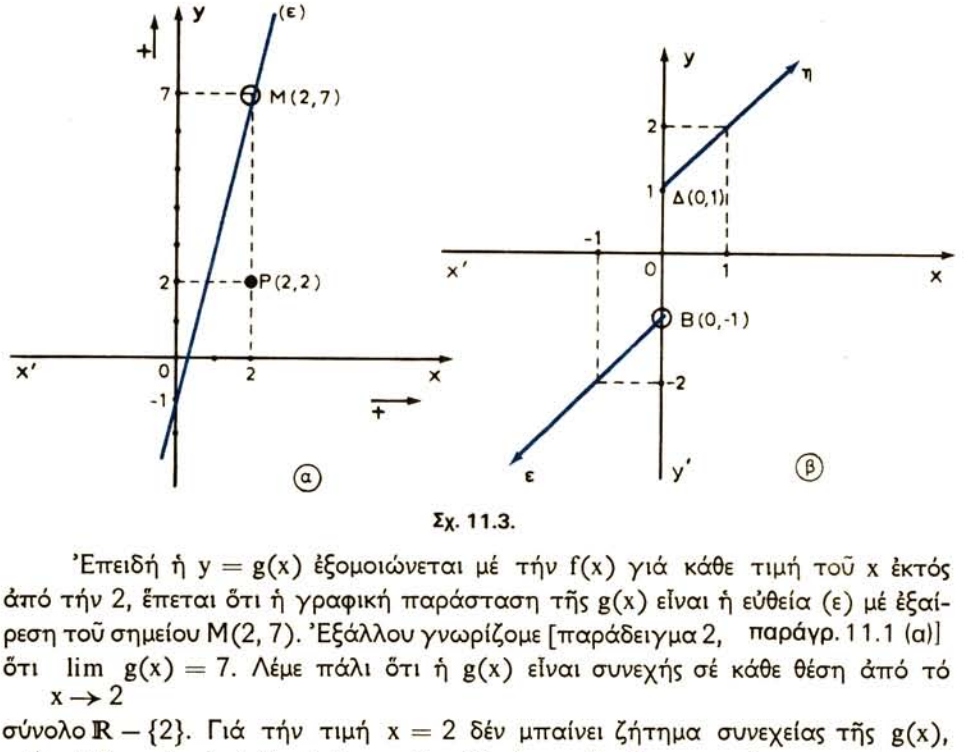
ΙΙ) Τά σύμβολα $+\infty$, $-\infty$ δέν πρέπει σέ καμιά περίπτωση νά θεωροῦνται ὡς ἀριθμοί.

11.3 Συναρτήσεις συνεχεῖς. Σημεῖα ἀσυνεχείας.

α) **Γνωρίζομε πλέον** ὅτι κάθε πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι συνάρτηση ὁρισμένη παντοῦ μέσα στό $\mathbb{R}$ καί ὅτι ἡ τιμή πού παίρνει ἡ συνάρτηση, γιά μιά ὁποιαδήποτε τιμή x_o τοῦ x, ταυτίζεται μέ τήν ὁριακή τιμή τῆς συναρτήσεως σ' αὐτή τή θέση x_o.

Ἐκφράζομε αὐτή τήν ἰδιότητα συνοπτικά λέγοντας ὅτι: **ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής παντοῦ μέσα στό πεδίο ὁρισμοῦ της.**

Ἄς πάρομε ὅμως τή συνάρτηση μέ τύπο $g(x) = \dfrac{(x-2)\,(4x-1)}{x-2}$, πού εἶναι ὁρισμένη στό $\mathbb{R} - \{2\}$ καί ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $f(x) = 4x - 1 \;\forall\, x \neq 2$. Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 4x - 1$ εἶναι μιά εὐθεία (ε) πού ὁρίζεται π.χ. ἀπό τά σημεῖα $(0, -1)$ καί $(2, 7)$ [σχ. 11.3(α)]



Σχ. 11.3.

Ἐπειδή ἡ $y = g(x)$ ἐξομοιώνεται μέ τήν $f(x)$ γιά κάθε τιμή τοῦ x ἐκτός ἀπό τήν 2, ἔπεται ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $g(x)$ εἶναι ἡ εὐθεία (ε) μέ ἐξαίρεση τοῦ σημείου $M(2, 7)$. Ἐξάλλου γνωρίζομε [παράδειγμα 2, παράγρ. 11.1 (α)] ὅτι $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 7$. Λέμε πάλι ὅτι ἡ $g(x)$ εἶναι συνεχής σέ κάθε θέση ἀπό τό σύνολο $\mathbb{R} - \{2\}$. Γιά τήν τιμή $x = 2$ δέν μπαίνει ζήτημα συνεχείας τῆς $g(x)$, μιά καί ἡ τιμή αὐτή δέν ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Ἄς θεωρήσωμε τώρα καί τίς δύο συναρτήσεις $g_1(x)$, $g_2(x)$ πού δίνονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους:

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\,(4x-1)}{x-2} & \forall\, x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{γιά } x = 2 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(4x-1)}{x-2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 2 & \text{γιά } x = 2 \end{cases}$$

Οἱ συναρτήσεις αὐτές εἶναι πλέον παντοῦ ὁρισμένες μέσα στό $\mathbb{R}$. Ἐπίσης $\lim\limits_{x \to 2} g_1(x) = \lim\limits_{x \to 2} (4x-1) = 7 = \lim\limits_{x \to 2} g_2(x)$.

Γιά τή $g_1(x)$ ἔχομε $\lim\limits_{x \to 2} g_1(x) = g_1(2)$ καί συνεπῶς ἡ $g_1(x)$ εἶναι συνεχής καί στή θέση 2. Ἡ $g_2(x)$ ὅμως δέν εἶναι συνεχής στή θέση 2, διότι ἡ ὁριακή της τιμή 7, ὅταν $x \to 2$, δέν συμπίπτει μέ τήν τιμή $g_2(2) = 2$ τῆς συναρτήσεως γιά $x = 2$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $g_1(x)$ εἶναι ἡ εὐθεία (ε) [σχ. 11.3 (α)] μαζί καί μέ τό σημεῖο Μ(2, 7), ἐνῶ τῆς $g_2(x)$ εἶναι ἡ εὐθεία (ε) χωρίς τό σημεῖο Μ (2,7), ἀλλά μαζί μέ τό σημεῖο Ρ (2, 2).

Ἀπό τά προηγούμενα μποροῦμε νά συμπεράνομε τόν παρακάτω ὁρισμό: Μιά συνάρτηση f(x) λέγεται συνεχής σέ μιά θέση x_0 τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της ἄν καί μόνον ἄν ἔχει ὁριακή τιμή ὅταν $x \to x_0$ καί ἡ ὁριακή αὐτή τιμή ταυτίζεται μέ τήν τιμή $f(x_0)$ τῆς συναρτήσεως γιά $x = x_0$. Ἄν στή θέση x_0 ἡ f(x) δέν εἶναι συνεχής ,τότε ἡ συνάρτηση λέγεται ἀσυνεχής στό x_0 καί τό x_0 σημεῖο ἀσυνεχείας τῆς f.

Μιά συνάρτηση λέγεται συνεχής στό πεδίο ὁρισμοῦ της ἄν εἶναι συνεχής σέ κάθε θέση $x = x_0$ ἀπό τό πεδίο αὐτό.

Τώρα μποροῦμε νά καταλάβομε ὅτι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζει ὁ τύπος:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + \dfrac{|x|}{x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & \text{γιά } x = 0 \end{cases}$$

δέν εἶναι συνεχής στή θέση 0, διότι ἡ συνάρτηση δέν ἔχει ὁριακή τιμή ὅταν $x \to 0$ [παράδειγμα 3, παράγρ. 11.1(α)].

Ἡ γραφική παράσταση τῆς παραπάνω συναρτήσεως φ(x) ἀποτελεῖται ἀπό τίς ἡμιευθεῖες Βε (χωρίς τήν ἀρχή Β) καί Δη (μέ τήν ἀρχή Δ) πού εἶναι ἀντίστοιχα οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x - 1$ μέ $x < 0$ καί $y = x + 1$ μέ $x \geqslant 0$ [σχ. 11.3(β)].

Ὅμοια ἡ συνάρτηση $y = \text{Ακ}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ [παράδειγμα 4, παράγρ. 11.1(α)] δέν εἶναι συνεχής στή θέση 0, διότι, ἄν καί ἔχει ὁριακή τιμή ὅταν $x \to 0$, αὐτή ἡ ὁριακή τιμή δέν ἰσοῦται μέ τήν τιμή τῆς συναρτήσεως γιά $x = 0$. [Εἶναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ἐνῶ $f(0) = 1$].

β) Νά τώρα μερικές ἀξιόλογες ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

1. Ἄν δυό συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς σ' ἕνα καί τό ἴδιο διάστημα [α, β] τότε: τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά καί τό γινόμενό τους εἶναι ἐπίσης συνεχής συνάρτηση στό διάστημα [α, β]· ἀκόμα τό πηλίκο εἶναι συνεχής συνάρτηση γιά κάθε τιμή τοῦ $x \in [\alpha, \beta]$ πού δέ μηδενίζει τόν παρονομαστή.

2. Ἄν μιά συνάρτηση f(x) εἶναι συνεχής σ' ἕνα διάστημα [α, β], τότε παίρνει τουλάχιστο μιά φορά κάθε τιμή περιεχόμενη μεταξύ f(α) καί f(β). Εἰδικά, ἄν f(α) καί f(β) εἶναι ἀριθμοί ἑτερόσημοι, ἡ f(x) μηδενίζεται τουλάχιστο γιά μιά τιμή $x = x_o$ μέ $\alpha < x_o < \beta$.

Παρατηρήσεις. Ὁ προσδιορισμός τῶν ὁριακῶν τιμῶν συναρτήσεων ἀποσκοπεῖ κυρίως στόν καθορισμό τῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ στά ἄκρα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της ἤ στίς περιοχές τιμῶν τοῦ x πού δέν ἀνήκουν στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Ἡ ἐξέταση τῆς συνεχείας, πού θεμελιώνεται πάνω στήν ὁριακή τιμή, ἀποτελεῖ μέρος τῆς ἔρευνας γιά τή συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως γύρω ἀπό κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

Ὅταν ἡ συνάρτηση δέν εἶναι συνεχής σέ κάποια θέση, τότε ἐκεῖ παρουσιάζεται μιά «διακοπή», ἕνα «κενό», ἕνα «πήδημα» στίς τιμές τῆς συναρτήσεως. Ἔχομε μιά ἄμεση ἐποπτική εἰκόνα αὐτοῦ τοῦ «χάσματος» ἄν κατασκευάσομε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως· τότε στά σημεῖα ἀσυνεχείας βλέπομε ὅτι ἡ γραμμή «κόβεται» καί ἡ γραφική παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό ξεχωριστά κομμάτια.

11.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Δίνονται οἱ παρακάτω τρεῖς συναρτήσεις μέ τύπους:

$$I)\ f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \cdot \quad II)\ g(x) = \frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} \cdot \quad III)\ h(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1}.$$

Νά βρεθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τά $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$ *καί* $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

Καί οἱ τρεῖς συναρτήσεις ἔχουν πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}$, διότι οἱ παρονομαστές δέν μηδενίζονται μέ πραγματικές τιμές τοῦ x. Ἐπειδή μέ $x \to \infty$ οἱ ἀριθμητές καί οἱ παρονομαστές τείνουν στό ἄπειρο, δέν μποροῦμε νά ἐφαρμόσομε τόν κανόνα τοῦ πηλίκου.

Ἔχομε: I) $$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$ καί τώρα:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

II) $$g(x) = \frac{x^2\left(4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$$ καί ἀκολούθως:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \frac{\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{4}{2} = 2.$$

III) $h(x) = \dfrac{x^3\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x \cdot \dfrac{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ καί συνεπῶς

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= -\infty \cdot \frac{2+0+0}{1+0+0} = -\infty \cdot 2 = -\infty.$$

Παρατήρηση: Μποροῦμε νά βγάλομε τό ἑξῆς γενικό συμπέρασμα: Ὅταν ἔχομε μιά ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολυωνύμων) τότε: ἄν ὁ βαθμός τοῦ παρονομαστῆ εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό βαθμό τοῦ ἀριθμητῆ τό ὅριο τῆς συναρτήσεως, γιά $x \to \pm\infty$, εἶναι τό μηδέν· ἄν ἀριθμητής καί παρονομαστής εἶναι πολυώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, τό ὅριο εἶναι τό πηλίκο τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβαθμίων ὅρων· ἄν ὁ ἀριθμητής εἶναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπό τόν βαθμό τοῦ παρονομαστῆ, τότε τό ὅριο τῆς συναρτήσεως εἶναι ἕνα προσημασμένο ἄπειρο (γιά $x \to \pm\infty$).

2. Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = (x-2)^2 + \sqrt{\dfrac{4|x|}{x^2+2}}$.
Νά βρεθεῖ τό $\lim\limits_{x \to 0} y$.

Ἔχομε: $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} (x-2)^2 + \sqrt{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4|x|}{x^2+2}} = 2^2 + 0 = 4.$

3. Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$ *καί πεδίο ὁρισμοῦ τό* $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$. *Νά βρεθοῦν τά* $\lim\limits_{x \to 1} y$ *καί* $\lim\limits_{x \to -2} y$.

Ἐπειδή μέ $x = 1$ μηδενίζεται ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής, ἕπεται ὅτι δέν μποροῦμε νά ἐφαρμόσομε τόν κανόνα τοῦ πηλίκου.

Ἔχομε: $y = \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x^2+1}{x+2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$·

ἄρα: $\lim\limits_{x \to 1} y = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+1)}{\lim\limits_{x \to 1}(x+2)} = \dfrac{2}{3}.$

Όταν $x \to -2$ τότε $\lim\limits_{x \to -2} (x^2+1) = 5$, ενώ τό $x+2$ τείνει στό μηδέν μέσω άρνητικών τιμών, όταν $x \to -2^-$, καί μέσω θετικών τιμών όταν $x \to -2^+$. Άρα:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2+1}{x+2} = -\infty \quad \text{καί}$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2+1}{x+2} = +\infty .$$

Έπειδή τά μονόπλευρα όρια είναι διαφορετικά συμπεραίνομε ότι ή συνάρτηση γιά $x \to -2$ δέν έχει όριο.

4. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$, όρισμένη στό $\mathbb{R}$ (γιατί;). Νά βρεθοῦν τά $\lim\limits_{x \to -\infty} y$ καί $\lim\limits_{x \to +\infty} y$.

Πεδίο όρισμοῦ μπορεῖ νά εἶναι τό $\mathbb{R}$ διότι $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Έπειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 3)} = +\infty$

καί $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$, έπεται ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

Έπειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = +\infty$ καί $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$, έπεται ότι δέν μποροῦμε νά έφαρμόσομε τόν κανόνα τοῦ άθροίσματος·
$[+\infty + (-\infty) \overset{?}{=}]$.

Γι' αὐτό πρῶτα μετασχηματίζομε κατάλληλα τήν παράσταση. Γράφομε:

$$y = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \frac{(x^2 + 2x + 3) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} =$$

$$= \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \frac{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \quad (\text{μέ } x > 0). \quad \text{Τώρα παίρνομε:}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

5. *Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο* $y = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)}$.

Ἄραγε μπορεῖ νά εἶναι συνεχής παντοῦ μέσα στό $\mathbb{R}$; Ἄν ὄχι, μήπως ὑπάρχει δυνατότητα μέ κατάλληλη συμπλήρωση τοῦ ὁρισμοῦ νά ἐξουδετερώσομε τήν ἀσυνέχεια ὅπου ὑπάρχει;

Ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ πού δέν μηδενίζει τόν παρονομαστή. Ἐπειδή οἱ τιμές $x = -2$ καί $x = 1$ μηδενίζουν τόν παρονομαστή δέν μποροῦν ν' ἀνήκουν στό πεδίο ὁρισμοῦ· συνεπῶς γι' αὐτές δέν μπαίνει ζήτημα συνεχείας. Ἐπειδή $\lim\limits_{x \to 1} y = \frac{2}{3}$ (βλέπε τό παραπάνω παράδειγμα 3), ἄς θεωρήσομε τή συνάρτηση πού ὁρίζει ὁ τύπος $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} & \forall\, x \in \mathbb{R} - \{1, -2\} \\ \dfrac{2}{3} & \text{γιά } x = 1. \end{cases}$

τότε ἡ νέα συνάρτηση εἶναι συνεχής καί στή θέση 1.

Γιά τήν τιμή $x = -2$ ὅμως δέν ἔχομε τή δυνατότητα νά ἐπεκτείνομε τόν ὁρισμό ἔτσι ὥστε ἡ προκύπτουσα συνάρτηση νά εἶναι συνεχής στή θέση $x = -2$, διότι $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = -\infty$ καί $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = +\infty$.

6. *Θεωροῦμε τή συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο:*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{γιά } 0 \leqslant x < 1 \\ 2 & \text{γιά } x = 1 \\ 4 - x & \text{γιά } x > 1. \end{cases}$$

Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια μέσα στό πεδίο ὁρισμοῦ της καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

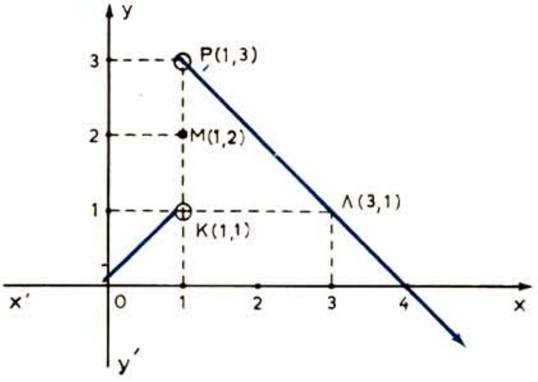
Οἱ συναρτήσεις $y = x$ καί $y = 4 - x$ εἶναι παντοῦ συνεχεῖς μέσα στό $\mathbb{R}$· συνεπῶς καί ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχής στά διαστήματα $[0, 1)$, $(1, +\infty)$.

Ἀπομένει λοιπόν νά ἐξετάσομε τί συμβαίνει στή θέση $x = 1$. Ἔχομε:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 \quad \text{καί} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x) = 3.$$

Ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι ὁρισμένη στή θέση 1 (ἀφοῦ $f(1) = 2$), ἀλλά δέν ἔχει ὁριακή τιμή σ' αὐτή τή θέση, διότι τά μονόπλευρα ὅρια εἶναι διαφορετικά· συνεπῶς στή θέση 1 ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἀσυνέχεια.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς παραπάνω συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό τό τμῆμα ΟΚ χωρίς τό σημεῖο Κ(1, 1) (σχ. 11.4α). ἀπό τό ἀπομονωμένο σημεῖο Μ(1, 2) καί ἀπό τήν ἡμιευθεία ΡΛ χωρίς τήν ἀρχή της Ρ(1, 3).

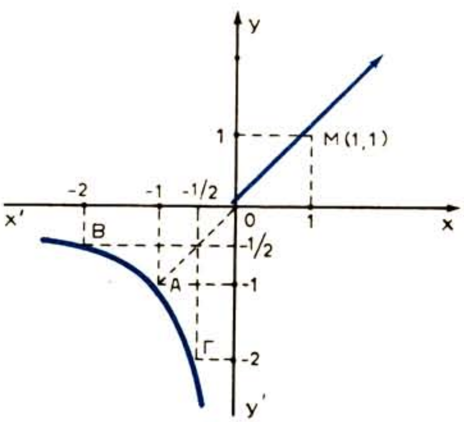


Σχ. 11.4α.

7. Θεωροῦμε τή συνάρτηση πού ὁρίζει ὁ τύπος:

$$f(x) = \begin{cases} x \ \forall \ x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} \ \forall \ x < 0. \end{cases}$$

Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.



Σχ. 11.4β.

Ἐπειδή ἡ συνάρτηση $y = x$ εἶναι παντοῦ συνεχής μέσα στό $\mathbb{R}$ καί ἡ $y = \dfrac{1}{x}$ ἐπίσης παντοῦ συνεχής μέσα στό $\mathbb{R} - \{0\}$, ἕπεται ὅτι καί ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχής μέσα στό $\mathbb{R} - \{0\}$.

Θά ἐξετάσομε λοιπόν τί συμβαίνει στή θέση $x = 0$.

Ἔχομε $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,

Ἐνῶ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$. Ὥστε ἡ συνάρτησή μας εἶναι ἀσυνεχής στή θέση 0.

Ἡ γραφική της παράσταση (σχ. 11.4β) ἀποτελεῖται ἀπό τόν κλάδο μέ $y < 0$ τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $yx = 1$ καί ἀπό τήν ἡμιευθεία ΟΜ.

11.5 Ἀσκήσεις.

1. Νά βρεθοῦν τά παρακάτω ὅρια: I) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$· II) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$·

III) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x^2-6x+2}}{3-\sqrt{10x^2-19x+10}}$· IV) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2+x+3}$· V) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{2x^2+x-3}$·

VI) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-x+1}{2x+4}$· VII) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-x+1}{2x+4}$· VIII) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x+3}$·

IX) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{2x+3}$· X) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{9}{(x-2)^2}$· XI) $\lim\limits_{x \to 5^+} (7+\sqrt{x-5})$·

XII) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x}$· XIII) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-x}$· XIV) $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x^2-x}$·

XV) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2-x}$.

2. Δίνεται ἡ συνάρτηση πού ὁρίζει ὁ τύπος $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(x-1)}{x} & \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}. \\ 1 \text{ γιά } x = 0 \end{cases}$

Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

3. Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt{4x^2+2x+10} - 2x$.

α) Νά καθοριστεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ της· β) νά βρεθοῦν τά $\lim\limits_{x \to -\infty} y$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y$·

γ) νά βρεθεῖ τό $\lim\limits_{x \to 1} y$.

4. Νά βρεθοῦν τά παράκατω ὅρια: I) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$ · II) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$ ·

III) $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$· IV) $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$ · V) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2+5}{|x|\,x}$ ·

VI) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2+5}{|x|\,x}$ · VII) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2+x}{x-2}$ · VIII) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2+x}{x-2}$·

IX) $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ · X) $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$·

XI) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$· XII) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^8+5x^3-1}{x^6+x^2-7}$·

XIII) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + 1}{2x^3 + x + 1}$ · XIV) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}$ ·

XV) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x^2)$.

5.* Νά μελετηθοῦν ὡς πρός τή συνέχεια καί νά παρασταθοῦν γραφικά οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπό τούς τύπους:

I) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{γιά } x = 0 \end{cases}$ II) $g(x) = \begin{cases} x & \text{ἄν } x \in [0, 1] \\ 2 + x & \text{ἄν } x \in (1, 2] \end{cases}$,

III) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ἄν } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{ἄν } x \neq 0 \end{cases}$ · IV) $\sigma(x) = \begin{cases} |x| & \text{γιά } x < 0 \\ x & \text{γιά } 0 \leqslant x < 2 \\ x^2 & \text{γιά } x \geqslant 2 \end{cases}$

6.* Γιά ποιές τιμές τοῦ $x > 1$ ἔχομε: α) $\dfrac{5}{3} - \dfrac{5x + 9}{3x - 3} < \dfrac{1}{1000}$ ·

β) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - 1 < \dfrac{1}{100}$ · γ) $\dfrac{\sqrt{4x} + 1}{\sqrt{4x} - 2} - 1 < \dfrac{1}{100}$;

7.* Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἔχομε $|f(x)| > 1000$ ἄν:

α) $f(x) = x^3$ · β) $f(x) = 2x^3 - 458$ · γ) $f(x) = (x + 1)\sqrt{|x + 1|}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 12

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

12.1 Τό νόημα καί ἡ σημασία τῆς παραγώγου.

α) **Εἰσαγωγικά.** Ὅλα σχεδόν τά φαινόμενα μέ τά ὁποῖα ἀσχολοῦνται οἱ φυσικές ἐπιστῆμες καί τά προβλήματα πού ἀντιμετωπίζει ἡ τεχνική, ἐκφράζονται μέσω συναρτήσεων. Μελετώντας αὐτές τίς συναρτήσεις καί τίς συναφεῖς γραφικές τους παραστάσεις, πορίζόμαστε χρήσιμες πληροφορίες γιά τήν ἐξέλιξη τῶν φαινομένων μέσα σέ κατάλληλα ἐκλεγμένα διαστήματα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν. Οἱ μέχρι τώρα γνώσεις μας γιά τίς ὁριακές τιμές μᾶς ἐπιτρέπουν νά κάνομε μερικές διαπιστώσεις ὡς πρός τή συμπεριφορά μιᾶς συναρτήσεως ἐντός ἤ στά ἄκρα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της· καί πρίν ἀπ' ὅλα ὡς πρός τή συνέχεια. Ἔτσι μποροῦμε νά ξέρομε ἄν ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως ἀλλάζει ἤ ὄχι μέ «ἅλματα», ἄν καί πότε αὐτή αὐξάνεται ἀπεριόριστα· ἄν μ' ἄλλα λόγια ἡ ἀντίστοιχη γραφική παράσταση θά εἶναι ἤ ὄχι μιά «ἀδιάσπαστη», μιά ἀπεριόριστη ἤ ὄχι γραμμή. Δέν μποροῦμε ὅμως, μόνο μέσω τῆς συνεχείας, νά διαπιστώσομε πόσο μεγάλη εἶναι, σέ διάφορες θέσεις, ἡ «τάση μεταβολῆς» τῆς συναρτήσεως καί ἀντίστοιχα πόσο ἀπότομα θά ἀνέρχεται ἤ θά κατέρχεται ἡ γραφική παράστασή της σέ μιά ὁρισμένη περιοχή. Οὔτε ξέρομε νά βρίσκομε, ἄν ὑπάρχουν καί σέ ποιές θέσεις, τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως.

Ἡ ἀπάντηση σέ τέτοια ἐρωτήματα, πού γιά τίς ἐφαρμογές ἔχουν μεγάλη σημασία, κάνει ἀναγκαία μιά νέα χρήση τῆς ἰδέας τοῦ ὁρίου.

Μ' αὐτή πετυχαίνομε νά δώσομε μέ σαφήνεια καί πληρότητα τό νόημα καί τήν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας σέ καμπύλη, σ' ἕνα σημεῖο της, καί νά μεταφέρομε σέ μιά καμπύλη τήν ἔννοια τῆς «κλίσεως» μιᾶς εὐθείας.

Ἔτσι γεννήθηκε, μέσω τῶν ὁριακῶν τιμῶν, μιά νέα μαθηματική ἔννοια πού ἔπαιξε καθοριστικό ρόλο στήν παραπέρα ἀνάπτυξη τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλά καί τῶν ἄλλων Ἐπιστημῶν καί τῆς Τεχνικῆς.

Ἡ ἔννοια αὐτή εἶναι ἡ **παράγωγος** καί μ' αὐτή θ' ἀσχοληθοῦμε λίγο στά παρακάτω.

β) **Μιά πρώτη ἰδέα γιά τήν παράγωγο καί τό διαφορικό.**

Ἡ πιό ἁπλή σχέση ἀνάμεσα σέ δυό ἀλληλοεξαρτώμενα μεταβλητά ποσά εἶναι ἡ σχέση τῆς ἀναλογίας· δηλαδή ἡ σχέση πού δίνεται ἀπό τόν ἀλγεβρικό τύπο $y = \alpha x$ (1), ὅπου α ἕνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός $\neq 0$ καί x, y μεταβλητές. Ἄς πάρομε ὅμως τή συνάρτηση πού ὁρίζει ὁ κάπως γενικότερος τύπος $y = \alpha x + \beta$ (2), ὅπου β ἐπίσης ἕνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός. Τό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο (2) μᾶς ὁρίζει στό $\mathbb{R}$ τήν ἁπλούστερη, ὅπως ξέρομε, συνάρτηση μετά τή σταθερή $y = c$.

Θά θεωρήσομε τώρα ἕνα ἀρχικό ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν (x_o, y_o) τῆς (2) καί ἀκολούθως ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο ζεῦγος (x, y) ἀντιστοίχων τιμῶν· τότε θά ἔχομε $y_o = \alpha x_o + \beta$ καί $y = \alpha x + \beta$ καί συνεπῶς $y - y_o = \alpha(x - x_o)$ (3).

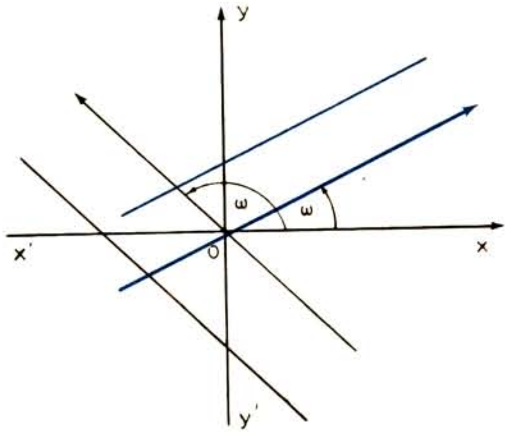
Θά παριστάνομε τή θετική ἤ ἀρνητική διαφορά τιμῶν $x - x_o$ μέ Δx καί θά τήν ὀνομάζομε, γιά συντομία, «αὔξηση» τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς· ἐπίσης τή διαφορά $y - y_o$ θά τήν παριστάνομε μέ Δy καί θά τήν ὀνομάζομε αὔξηση τῆς συναρτήσεως. Ἡ (3) τώρα γράφεται $\Delta y = \alpha \cdot \Delta x$ (3′).

Ἀπό τήν (3′) συμπεραίνομε ὅτι ἡ αὔξηση Δy τῆς συναρτήσεως, ἀπό μιά ἀρχική τιμή y_o σέ μιάν ἄλλη y, εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἀντίστοιχη αὔξηση Δx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς· δηλαδή ὁ λόγος $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha$, τῶν ἀντιστοίχων αὐξήσεων (μεταβολῶν), διατηρεῖται σταθερός καί εἶναι ἀνεξάρτητος ὄχι μόνο ἀπό τήν τιμή x ἀλλά καί ἀπό τήν ἀρχική τιμή x_o. Ἔτσι γιά νά βρίσκομε κάθε φορά τήν αὔξηση Δy τῆς y πού ἀντιστοιχίζεται σέ μιά δοσμένη αὔξηση Δx τῆς x δέν ἔχομε παρά νά πολλαπλασιάζομε αὐτή τήν αὔξηση Δx ἐπί τό σταθερό συντελεστή α.

Γνωρίζομε ἐξάλλου ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς (2), σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, εἶναι μιά εὐθεία καί ὅτι ὁ σταθερός συντελεστής α εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως αὐτῆς τῆς εὐθείας· διαπιστώνομε ἐπιπλέον ὅτι ὁ συντελεστής αὐτός ἰσοῦται μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας πού σχηματίζει ἡ εὐθεία μέ τόν ἄξονα Ox (εφ$\omega = \alpha$: σχ. 12.1α).

Ἄς πάρομε τώρα τή συνάρτηση μέ τύπο: $y = 2x^2$ (4). Γιά μιά τιμή x_o τοῦ x θά ἔχομε $y_o = 2x_0^2$ καί συνεπῶς: $\Delta y = y - y_o = 2x^2 - 2x_0^2$ (5).

Ἐπειδή $\Delta x = x - x_o \Longrightarrow x = \Delta x + x_o$, ἡ (5) γίνεται:



Σχ. 12.1α.

$\Delta y = 2(x_o + \Delta x)^2 - 2x_o^2 = 2x_o^2 + 4x_o \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x_o^2 = 4x_o \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$·
δηλαδή ἔχομε τελικά: $\Delta y = 4x_o \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$ (6).

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: Ἄν ἀπό τό δεύτερο μέλος τῆς ἰσότητας (6) ἔλειπε ὁ ὅρος $2(\Delta x)^2$, τότε ἡ αὔξηση Δy τῆς συναρτήσεως, πού θά ἦταν ἴση μέ $4x_o \cdot \Delta x$, θά ἐξαρτιόταν βέβαια ἀπό τήν ἀρχική τιμή x_o τῆς μεταβλητῆς, ἀλλά πάντως θά ἦταν ἀνάλογη πρός τήν αὔξηση Δx αὐτῆς τῆς μεταβλητῆς (μέ συντελεστή ἀναλογίας τό $4x_o$).

Κατά συνέπεια εἶναι φυσικό νά ἀναζητήσομε κάτω ἀπό ποιές συνθῆκες ἡ ἐπίδραση τῆς παρουσίας τοῦ ὅρου $2(\Delta x)^2$ θά μποροῦσε νά μειωθεῖ ἔτσι ὥστε στήν περιοχή τουλάχιστο τῆς θέσεως x_o (δηλαδή γιά τιμές x γειτονικές πρός τήν x_o) νά ἰσχύει κατά προσέγγιση ἡ ἀναλογία μεταξύ Δx καί Δy.

Ἄς θεωρήσομε ὡς ἀρχική τιμή x_o τήν τιμή 1· τότε:

$$\Delta y = y - 2 = 4\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Μέ Δx π·χ· $= \dfrac{1}{10}$ παίρνομε $\Delta y = 0{,}4 + 0{,}02 = 0{,}42$.

Κρατώντας, ἀπό τήν ὁλική αὔξηση 0,42, τό μέρος $4\Delta x = 0{,}4 = 0{,}40$, κάνομε σφάλμα ἴσο μέ $\dfrac{0{,}02}{0{,}42} = \dfrac{1}{21}$ τῆς ὁλικῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως.

Ἄν ὡς Δx πάρομε $\dfrac{1}{100}$ π.χ., τότε $\Delta y = 0{,}04 + 0{,}0002 = 0{,}04002$· ἄν κρατήσομε τώρα τό μέρος $4\Delta x = 0{,}04$, τό σφάλμα μας περιορίζεται στό $\dfrac{0{,}0002}{0{,}0402} = \dfrac{2}{402} = \dfrac{1}{201}$ τῆς ὁλικῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως. Ἔτσι βλέπομε ὅτι ὅσο πιό μικρή εἶναι ἡ $|\Delta x|$, τόσο πιό μικρό μέρος τῆς ὁλικῆς αὐξήσεως Δy «χάνομε» ἄν κρατήσομε μόνο τό κομμάτι $4\Delta x$. Ὅταν λοιπόν τό μέρος

$2(\Delta x)^2$ μπορεῖ νά εἶναι ἀμελητέο, σέ σχέση μέ τήν ὁλική αὔξηση Δy, τότε τό μέρος $4\Delta x$ μπορεῖ νά θεωρεῖται ὡς τό «κύριο μέρος» αὐτῆς τῆς αὐξήσεως Δy καί συνεπῶς **«περίπου ἰσοδύναμο» μέ τήν ὅλη αὔξηση.**

Θά μιλήσομε τώρα κάπως γενικότερα, ἀλλ' ὁπωσδήποτε μέ τρόπο πού μᾶς εἶναι γνώριμος ὕστερα ἀπό τήν προηγούμενη θεωρία γιά τίς ὁριακές τιμές.

Γυρίζομε στή σχέση (6) καί διαπιστώνομε: I) Ὅταν $\Delta x \to 0$, δηλαδή ὅταν $x \to x_o$, τότε καί $\lim\limits_{x \to x_o} (y - y_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} [4x_o \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2] = 0.$

Ὥστε ὅταν ἡ αὔξηση τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς τείνει στό μηδέν, τότε καί ἡ αὔξηση τῆς συναρτήσεως $f(x) = 2x^2$ τείνει στό μηδέν. Αὐτό ὅμως σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησή μας εἶναι συνεχής στή θέση x_o διότι:

$$\lim_{x \to x_o} (y - y_o) = 0 \iff \lim_{x \to x_o} y = y_o \text{ δηλαδή } \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$

II) Διαιρώντας καί τά δύο μέλη τῆς (6) διά Δx παίρνομε $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ $4x_o + 2\Delta x$ καί βλέπομε ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ τῶν αὐξήσεων συναρτήσεως καί ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς ἐξαρτᾶται καί ἀπό τήν ἀρχική τιμή x_o καί ἀπό τήν αὔξηση Δx τῆς μεταβλητῆς x.

Ἄν ὅμως $\Delta x \to 0$ $(x \to x_o)$, τότε:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = 4x_o.$$

Ἡ παραπάνω ὁριακή τιμή $4x_o$ τοῦ πηλίκου διαφορῶν (αὐξήσεων) $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ γιά $x \to x_o$, πού ἐξαρτᾶται πλέον μόνο ἀπό τήν ἀρχική τιμή x_o, εἶναι ὁ συντελεστής μέ τόν ὁποῖο πρέπει νά πολλαπλασιάζομε τήν αὔξηση Δx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς γιά νά παίρνομε τό **«κύριο μέρος»** $4x_o \cdot \Delta x$ τῆς ὁλικῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως.

Ὁ συντελεστής $4x_o$ λέγεται παράγωγος τῆς συναρτήσεως $f(x) = 2x^2$ στή θέση x_o· τό δέ γινόμενο $4x_o\Delta x$, πού ἀντικαθιστᾶ τήν ὁλική αὔξηση Δy, ὅταν τό $2(\Delta x)^2$ θεωρεῖται ἀμελητέο, **λέγεται διαφορικό τῆς $f(x)$ στή θέση x_o καί τό συμβολίζομε μέ dy** γιά νά τό διακρίνομε ἀπό τήν αὔξηση Δy.

Ἄς σημειωθεῖ ὅτι στήν εἰδική περίπτωση τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως $y = \alpha x + \beta$ τό διαφορικό dy εἶναι ἴσο μέ τήν αὔξηση Δy.

Πράγματι, σέ μιά θέση x_o, ἔχομε $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(\alpha x + \beta) - (\alpha x_o + \beta)}{x - x_o} =$

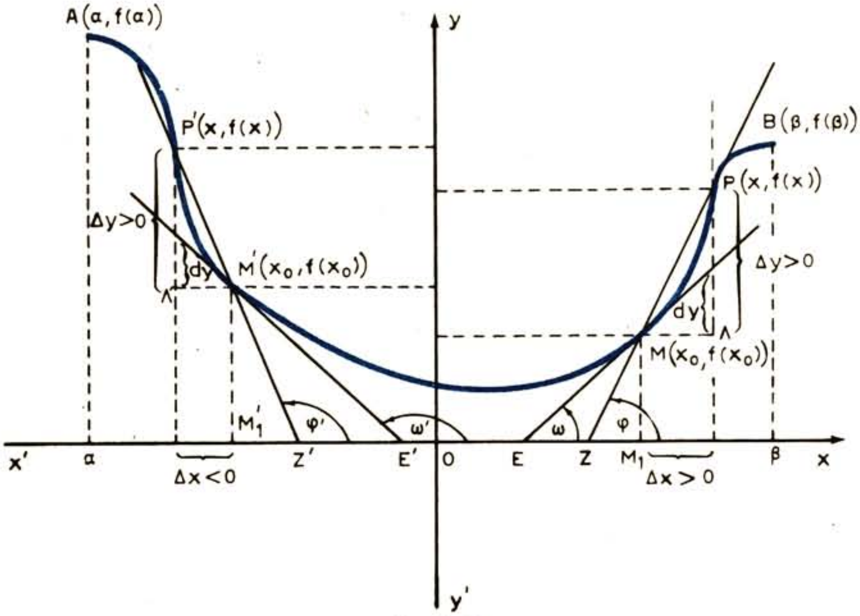
$= \dfrac{\alpha(x - x_o)}{x - x_o} = \alpha$ καί συνεπῶς $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha$· δηλαδή ἡ παράγωγος εἶναι α καί ἑπομένως τό διαφορικό $dy = \alpha \cdot \Delta x$. Ἰσχύει ὅμως καί ἡ ἰσότητα $\Delta y = \alpha \cdot \Delta x$, ἄρα $\Delta y = dy$.

Μέ $\alpha = 1$ καί $\beta = 0$ ἡ γραμμική συνάρτηση γίνεται $y = x$ καί συνεπῶς ἔχομε $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Μποροῦμε λοιπόν νά γράφομε, στή σχέση $dy = 4x_o \Delta x$, dx ἀντί Δx καί νά ἔχομε ἔτσι (γιά τή συνάρτηση $y = 2x^2$ στή θέση x_o) τόν τύπο:

$$\boxed{dy = 4x_o\, dx \iff \frac{dy}{dx} = 4x_o}$$

γ) Ἐξίσωση τῆς εὐθείας τῆς ἐφαπτομένης σ' ἕνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς συναρτήσεως. Ὁρισμός τῆς παραγώγου.

Ἄς εἶναι $y = f(x)$ μιά συνάρτηση ὁρισμένη καί συνεχής τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα [α, β] καί ἔστω AM'MB ἡ γραφική της παράσταση γιά τό παραπάνω διάστημα (σχ. 12.1β).



Σχ. 12.1β.

Παίρνομε ἕνα σημεῖο M τῆς καμπύλης μέ συντεταγμένες $(x_o, f(x_o))$ καί ἕνα δεύτερο σημεῖο της $P(x, f(x))$, ὅπου $x_o, x \in [\alpha, \beta]$ καί $x_o \neq x$.

Θα παραστήσομε μέ Δy τή διαφορά $f(x) - f(x_o)$ καί μέ Δx τή διαφορά $x - x_o$ καί, ὅπως ἤδη εἴπαμε, θά ὀνομάζομε αὐτές τίς διαφορές αὔξηση τῆς συναρτήσεως καί τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς ἀντίστοιχα.

Γνωρίζομε ὅτι ὁ λόγος $\lambda = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \dfrac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$.

εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{MP}$ καί συνεπῶς καί τῆς εὐθείας MP.

Ἄρα ἡ ἐξίσωση $\dfrac{y - f(x_o)}{x - x_o} = \dfrac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (7) εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας MP.

Ὅταν τό σημεῖο P μετατοπίζεται πάνω στήν καμπύλη καί τείνει πρός τό σημεῖο M, τότε ἡ τετμημένη του x τείνει στό x_o καί συνεπῶς ἡ αὔξηση $x - x_o = \Delta x$ τείνει στό 0· ἀλλά τότε, ἐπειδή ὑποθέσαμε ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής, θά ἔχομε καί $f(x) - f(x_o) = \Delta y \rightarrow 0$.

Μέ τίς παραπάνω προϋποθέσεις ($x \rightarrow x_o \Longrightarrow f(x) \rightarrow f(x_o)$), τό πηλίκο διαφορῶν (αὐξήσεων) $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ παίρνει τήν «ἀπροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$» καί μπορεῖ νά ἔχει ἤ ὄχι ὁριακή τιμή ἕναν πραγματικό ἀριθμό.

Ἄν συμβαίνει νά εἶναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = l,$$

ὅπου l ἕνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός, τότε: **ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση τήν $\dfrac{y - f(x_o)}{x - x_o} = l$ ἤ $y = f(x_o) + l(x - x_o)$ ὀνομάζεται ἐφαπτομένη τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς f(x) στό σημεῖο $M(x_0, y_0 = f(x_0))$ καί ὁ ἀριθμός l παράγωγος τῆς f(x) στή θέση x_0. Δηλαδή παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως f, στό σημεῖο x_0, ἡ ὁποία εἶναι ὁρισμένη σέ ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, λέγεται τό ὅριο τοῦ πηλίκου διαφορῶν $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, μέ $x \rightarrow x_0$, ἄν αὐτό ὑπάρχει καί εἶναι πραγματικός ἀριθμός.**

Συμβολικά ὁ l σημειώνεται μέ $f'(x_o)$· δηλαδή γράφομε:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)} \qquad (8)$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραφικῆς παραστάσεως γράφεται:

$$\boxed{y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)} \qquad (9)$$

Ἐφόσον ὑπάρχει τό ὅριο τοῦ πηλίκου $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, γιά $x \rightarrow x_o$, λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f(x) παραγωγίζεται (ἔχει παράγωγο) στή θέση x_o. Ἄν ἡ συνάρτηση f(x) ἔχει παράγωγο σέ κάθε σημεῖο ἑνός διαστήματος Δ ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ της, τότε, ἀντιστοιχίζοντας σέ κάθε $x \in \Delta$ τήν τιμή τῆς παραγώγου $f'(x)$, κατασκευάζομε μιά νέα συνάρτηση πού λέγεται **παράγωγος συνάρτηση ἤ ἁπλά παράγωγος τῆς $f(x)$ στό Δ.**

Τό γινόμενο τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ ἐπί τήν αὔξηση Δx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς θά τό λέμε διαφορικό τῆς $f(x)$ καί θά τό θεωροῦμε ἰσοδύναμο μέ τήν ὁλική αὔξηση τῆς συναρτήσεως ὅταν $\Delta x \to 0$.

Ἐξάλλου, ὅπως εἴδαμε πιό πάνω, ἡ αὔξηση Δx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς εἶναι ἴση μέ τό διαφορικό dx τῆς συναρτήσεως $y = x$· ἔτσι ἔχομε γενικά:

$$\boxed{dy = f'(x)dx \iff \frac{dy}{dx} = f'(x)} \qquad (10)$$

Παρατηρήσεις: Ι) Ἡ τριγωνομετρική ἐφαπτομένη τῆς γωνίας φ (εφ φ) πού ἡ εὐθεία ΜΡ σχηματίζει μέ τόν ἄξονα $x'x$ (σχ. 12.1β) ἰσοῦται, ὅπως ξέρομε, μέ τό συντελεστή διευθύνσεως τῆς εὐθείας ΜΡ, ὁ ὁποῖος λέγεται καί **κλίση** τῆς εὐθείας πρός τόν ἄξονα $x'x$. Ἀπό τό σχῆμα 12.1β προκύπτει τώρα ὅτι, ὅταν ὑπάρχει παράγωγος $f'(x_o)$ στή θέση x_o, τότε ἡ κλίση $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ τῆς εὐθείας ΜΡ ἔχει ὅριο τόν ἀριθμό $f'(x_o)$ γιά $x \to x_o$. Συνεπῶς ἡ κλίση $f'(x_o)$ τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραφικῆς παραστάσεως στό σημεῖο της $M(x_o, f(x_o))$ εἶναι ἴση μέ τήν τριγωνομετρική ἐφαπτομένη τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ πού ἡ ἐφαπτομένη εὐθεία σχηματίζει μέ τόν ἄξονα $x'x$: $f'(x_o) =$ εφ ω. Ἡ γωνία ω εἶναι ὀξεία ἤ ἀμβλεία καθόσον $f'(x_o) \geqslant 0$ ἤ $f'(x_o) < 0$.

ΙΙ) Ὅταν τό πεδίο ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ εἶναι ἕνα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ καί τό x_o εἶναι τό ἀριστερό ἄκρο τοῦ διαστήματος ($x_o = \alpha$), τότε παίρνομε τό $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ καί ἐφόσον αὐτό ὑπάρχει λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ ἔχει παράγωγο στή θέση α ἀπό δεξιά. Ὅμοια ἄν ὑπάρχει τό $\lim\limits_{x \to \beta^-} \dfrac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$, τότε λέμε ὅτι ἡ $f(x)$ ἔχει παράγωγο στή θέση β ἀπ' ἀριστερά. Ἡ ἀπ' ἀριστερά ἤ ἀπό δεξιά παράγωγος σέ μιά θέση λέγεται **μονόπλευρη παράγωγος.**

Σημείωση: Ἔστω $f(x)$ μιά συνάρτηση ὁρισμένη, συνεχής καί παραγωγίσιμη μέσα σ' ἕνα διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ καί ἔστω $\sigma(x)$ ἡ παράγωγος (συνάρτηση) τῆς $f(x)$. Ἄν καί ἡ $\sigma(x)$ παραγωγίζεται ἐπίσης μέσα στό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ τῆς $\sigma(x)$ λέγεται δεύτερη παράγωγος τῆς $f(x)$ καί σημειώνεται συμβολικά μέ $f''(x)$. Ἡ $\sigma(x) = f'(x)$ λέγεται τότε πρώτη παράγωγος τῆς $f(x)$.

Ὅμοια μιλᾶμε καί γιά τρίτη κλπ παράγωγο τῆς $f(x)$, ὅταν βέβαια ὑπάρχουν.

12.2 Μιά ἐφαρμογή στή Φυσική.

Θεωροῦμε πάνω σ' ἕναν ἄξονα x'x ἕνα κινητό σημεῖο P (σχ. 12.2), τοῦ ὁποίου ἡ θέση, γιά τό χρονικό διάστημα πού πραγματοποιεῖται ἡ κίνηση, εἶναι ὁρισμένη σέ κάθε χρονική στιγμή t.

Σχ. 12.2.

Αὐτό οὐσιαστικά σημαίνει ὅτι ἡ τετμημένη x δίνεται ἀπό μιά γνωστή συνάρτηση $x = f(t)$ (1) τοῦ χρόνου t.

Ἄν ἡ συνάρτηση (1) εἶναι γραμμική, δηλαδή ἄν $x = \lambda t + \beta$ ὅπου λ καί β ὁρισμένοι πραγματικοί ἀριθμοί καί $\lambda \neq 0$, τότε τό κινητό διανύει, πάνω στήν τροχιά του x'x, σέ ἴσους χρόνους ἴσα διανύσματα. Μ' ἄλλα λόγια ἔχομε $f(t) - f(t_o) = \lambda(t - t_o) = \lambda(t' - t'_o) = f(t') - f(t'_o)$ ἄν $t - t_o = t' - t_o'$.

Συνεπῶς τό πηλίκο $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lambda$ μένει ἐδῶ σταθερό γιά ὅλα τά Δt.

Αὐτός ὁ σταθερός λόγος λέγεται, στήν προκειμένη περίπτωση, **μέτρο τῆς ταχύτητας (ἤ συντομότερα ταχύτητα) τοῦ κινητοῦ καί ἡ κίνηση χαρακτηρίζεται ὡς ἰσοταχής ἤ ὁμαλή εὐθύγραμμη.**

Ἄς ὑποθέσομε τώρα ὅτι ἡ συνάρτηση (1) δέν εἶναι γραμμική· τότε τό πηλίκο $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$ δέν θά διατηρεῖται σταθερό στά διάφορα χρονικά διαστήματα $t - t_o$.

Αὐτό τό (μεταβαλλόμενο) πηλίκο τό ὀνομάζομε **μέση ταχύτητα γιά τό χρονικό διάστημα $t - t_o$.**

Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὑπάρχει, προσδιορίζομε ἀκολούθως τό:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

αὐτό τό ὅριο, πού εἶναι ἡ παράγωγος τῆς $f(t)$ στή θέση t_o, λέγεται **ταχύτητα τοῦ P κατά τή χρονική στιγμή t_o.**

Ἄν μέ $V(t)$ παραστήσομε τήν παράγωγο (συνάρτηση) $f'(t)$ τῆς $f(t)$, γιά κάθε χρονική στιγμή t ἀπό τό χρονικό διάστημα ὅπου πραγματοποιεῖται ἡ κίνηση, τότε ἡ ἐξίσωση $V = V(t)$ εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ταχύτητας γιά τήν παραπάνω χρονική περίοδο.

12.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ἡ παράγωγος κάθε σταθερῆς συναρτήσεως εἶναι μηδέν.

Πράγματι : Ἄν $f(x) = c$, ὅπου c μιά σταθερά, τότε: $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} =$

$$= \frac{c - c}{x - x_o} = \frac{0}{x - x_o} = 0$$ γιά ὁποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές x καί x_o. Ἄρα καί $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = 0$.

2. Ἡ παράγωγος τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως $y = \alpha x + \beta$ (μέ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ καί $\alpha \neq 0$) εἶναι: $f'(x) = \alpha$.

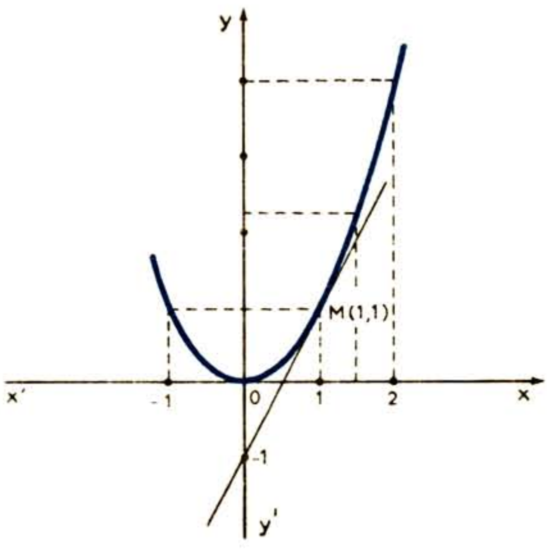
Πράγματι : $$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{\alpha(x - x_o)}{x - x_o} = \alpha \qquad \forall\, x \neq x_o.$$

Ἄρα $$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \alpha.$$

3. Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = x^2$ (I) καί ἀκολούθως νά προσδιοριστοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν πού ἐφάπτονται στά σημεῖα $x = 0$ καί $x = 1$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (I).

Ἔχομε: $$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} = \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o} = x + x_o \quad \forall\, x \neq x_o.$$

Ἄρα: $$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} (x + x_o) = 2x_o.$$



Σχ. 12.3.

Ἐπειδή ἡ παράγωγος τῆς x^2 στή θέση x_o εἶναι $2x_o$, γιά κάθε $x_o \in \mathbb{R}$, συμπεραίνομε ὅτι ἡ παράγωγος συνάρτηση τῆς x^2 εἶναι 2x. **Ὥστε $(x^2)' = 2x$.**

Τό σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (I) μέ $x = 0$ (σχ. 12.3) εἶναι ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων. Ἄρα ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης στό σημεῖο $O(0, 0)$ εἶναι:

$$\frac{y-0}{x-0} = 0 \rightarrow y = 0$$ πρόκειται συνεπῶς γιά τόν ἄξονα x'x.

Τό σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως μέ $x = 1$ εἶναι τό $M(1, 1)$ (σχ. 12.3), διότι ἀπό τήν (I) παίρνομε $f(1) = 1^2 = 1$.

Ἐπειδή ἡ παράγωγος συνάρτηση τῆς x^2 εἶναι $2x$, ἕπεται ὅτι ἡ παράγωγος στή θέση 1 ἰσοῦται μέ $2 \cdot 1 = 2$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης στό σημεῖο $M(1, 1)$ εἶναι: $\dfrac{y-1}{x-1} = 2 \Longrightarrow y = 2x - 1$.

12.4 Ἀσκήσεις.

1. α) Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = 5x^2 + 7x - 6$ (α).

β) Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν (ε) καί (η) πού ἐφάπτονται μέ τή γραφική παράσταση τῆς (α) στά σημεῖα της μέ τετμημένες $-0{,}7$ καί -1 ἀντίστοιχα. γ) Νά ὑπολογιστεῖ ἡ γωνία τῆς (η) μέ τόν ἄξονα x'x.

2. Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = x^3$ (α). I) Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς (α). II) Νά προσδιοριστοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν πού ἐφάπτονται στή γραφική παράσταση τῆς (α) στά σημεῖα μέ τετμημένες 0, -1 καί $+1$.

3.* Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y = \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$· νά βρεθεῖ ἡ παράγωγός της.

ΕΝΟΤΗΤΑ 13

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

13.1 Ἰδιότητες τῶν παραγώγων. Παράγωγοι στοιχειωδῶν συναρτήσεων.

α) **Ὁ ἀπευθείας προσδιορισμός τῆς παραγώγου βάσει τοῦ ὁρισμοῦ της** εἶναι εὔκολος μόνο γιά λίγες βασικές συναρτήσεις.

Γιά τήν παραγώγιση ἄλλων συναρτήσεων χρησιμοποιοῦμε τά ἀποτελέσματα πού βρίσκομε μέ τόν παραπάνω ἄμεσο προσδιορισμό σέ συνδυασμό μέ ὁρισμένες γενικές ἰδιότητες τῶν παραγώγων.

Παρακάτω ἐκθέτομε πρῶτα αὐτές τίς γενικές ἰδιότητες.

Πρόταση 1. Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη μέσα σ' ἕνα διάστημα Δ εἶναι καί συνεχής μέσα στό ἴδιο διάστημα.

Πράγματι: Ἀπό $f(x) - f(x_o) = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot (x - x_o)$ μέ $x \neq x_o$, συμπεραίνομε ὅτι $\lim\limits_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot \lim\limits_{x \to x_o} (x - x_o) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] = f'(x_o) \cdot 0 = 0.$$

Ἄρα $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$· ἡ τελευταία ἰσότητα σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι συνεχής στό σημεῖο x_o τοῦ διαστήματος Δ.

Τό ἀντίστροφο δέν ἀληθεύει. Δηλαδή μπορεῖ μιά συνάρτηση νά εἶναι συνεχής σ' ἕνα σημεῖο x_o τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, χωρίς νά εἶναι ἀναγκαστικά καί παραγωγίσιμη σ' αὐτό.

Ἄς πάρομε γιά παράδειγμα τή συνάρτηση μέ τύπο $y = |x|$, ἡ ὁποία εἶναι παντοῦ συνεχής μέσα στό $\mathbb{R}$, ἀκόμα καί στό σημεῖο 0· διότι $\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$ καί $\lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0 = f(0)$.

Ἐντούτοις ἡ $|x|$ δέν ἔχει παράγωγο στή θέση 0 διότι:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

καί $$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Ἄς θεωρήσομε ἀκόμα τή συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt[3]{x}$. Ἡ συνάρτηση εἶναι παντοῦ συνεχής μέσα στό $\mathbb{R}$· ὅμως στή θέση 0 δέν ἔχει ὡς παράγωγο ἕναν πραγματικό ἀριθμό. Πράγματι: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$. Ἔτσι, ἡ συνάρτηση $\sqrt[3]{x}$ δέν ἔχει παράγωγο γιά $x = 0$ μολονότι εἶναι συνεχής στή θέση 0. Λέμε ὅμως μερικές φορές, **ἐπεκτείνοντας τήν ἔννοια τῆς παραγώγου,** ὅτι ἡ παράγωγος στό σημεῖο 0 εἶναι τό σύν ἄπειρο. Γεωμετρικά αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \sqrt[3]{x}$ ἔχει ἐφαπτομένη στό σημεῖο $O(0, 0)$ (στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων) τόν ἄξονα Oy.

Πρόταση 2. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ παραγωγίζονται σ' ἕνα διάστημα Δ, τότε καί οἱ συναρτήσεις $f(x) + g(x)$ καί $f(x) - g(x)$ παραγωγίζονται στό ἴδιο διάστημα καί μάλιστα εἶναι $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

[Δηλαδή ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος (ἀντίστοιχα τῆς διαφορᾶς) δύο συναρτήσεων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα (ἀντίστοιχα τή διαφορά) τῶν παραγώγων].

Πράγματι μέ $x \neq x_o$ ἔχομε: $\dfrac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_o) \pm g(x_o)]}{x - x_o} =$

$= \dfrac{[f(x) - f(x_o)] \pm [g(x) - g(x_o)]}{x - x_o} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \pm \dfrac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$. Ἄρα

$$\lim_{x \to x_o} \frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x) \pm g(x_o)]}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \pm$$

$$\pm \lim \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \cdot \text{ δηλαδή } [f(x_o) \pm g(x_o)]' = f'(x_o) \pm g'(x_o).$$

Παρατήρηση: Ἡ ἰδιότητα $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ γενικεύεται γιά ἕνα ὁποιοδήποτε πλῆθος συναρτήσεων. Δηλαδή $[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\nu(x)]' = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_\nu(x)$, ἐφόσον οἱ συναρτήσεις εἶναι παραγωγίσιμες μέσα σ' ἕνα κοινό διάστημα. (Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη μέ μαθηματική ἐπαγωγή).

Πρόταση 3. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ παραγωγίζονται μέσα σ' ἕνα διάστημα Δ, τότε καί ἡ συνάρτηση $f(x) \cdot g(x)$ παραγωγίζεται καί εἶναι $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Πράγματι μέ $x \neq x_o$ ἔχομε:

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_o) \cdot g(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x)\, g(x) - f(x_o)\, g(x) + f(x_o)\, g(x) - f(x_o)\, g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x)\, g(x) - f(x_o)\, g(x)}{x - x_o} + \frac{f(x_o)\, g(x) - f(x_o)\, g(x_o)}{x - x_o} = g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} +$$

$$+ f(x_o) \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}. \text{ Ἄρα } \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)\, g(x) - f(x_o)\, g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} g(x) \cdot \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + f(x_o) \cdot \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x(x_o)}.$$

Ἐπειδή ἡ $g(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη θά εἶναι καί συνεχής καί συνεπῶς ἔχομε $\lim_{x \to x_o} g(x) = g(x_o)$. Ὥστε $[f(x_o) \cdot g(x_o)]' = g(x_o)\, f'(x_o) + f(x_o)\, g'(x_o)$.

Παρατήρηση. Ἡ ἰδιότητα γενικεύεται. Δηλαδή $[f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_\nu(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \ldots f_\nu(x) + f_1(x) \cdot f'_2(x) \cdot f_3(x) \ldots f_\nu(x) + \ldots + f_1(x)\, f_2(x) \cdot f_3(x) \ldots f'_\nu(x)$, ἐφόσον οἱ συναρτήσεις παραγωγίζονται μέσα σ' ἕνα κοινό διάστημα Δ.

(Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς).

Πόρισμα: Ἄν $f(x)$ μιά συνάρτηση παραγωγίσιμη (σ' ἕνα διάστημα) καί c μιά σταθερά $\neq 0$, τότε $(c\, f(x))' = c\, f'(x)$.

Ἐφαρμογή. «Εἶναι $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$ καί $(\alpha x^\nu)' = \nu\alpha x^{\nu-1}$, ἄν $\nu \in \mathbb{N}$».

Πράγματι, σύμφωνα μέ τή γενίκευση τῆς προτάσεως 3 ἔχομε: $(x^\nu)' = (x \cdot x \ldots x)' = x' \cdot x \cdot x \ldots x + x \cdot x' \cdot x \ldots x + \ldots + x \cdot x \ldots x' = \nu x^{\nu-1}$, διότι $x' = 1$.

Ἀκολούθως, σύμφωνα καί μέ τό ἀμέσως προηγούμενο πόρισμα, ἔχομε $(\alpha x^\nu)' = \nu\alpha x^{\nu-1}$, ὅπου $\alpha \in \mathbb{R}$ καί $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα. Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τοῦ πολυωνύμου $\sqrt{5}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 1$.

Σύμφωνα μέ τήν πρόταση 2 καί τήν παραπάνω ἐφαρμογή παίρνομε:

$$\left(\sqrt{5}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 1\right)' = 4\sqrt{5}x^3 - \frac{7}{2}\cdot 2x^1 + 0 = 4\sqrt{5}x^3 - 7x.$$

Πρόταση 3. Ἄν οἱ συναρτήσεις f(x) καί g(x) παραγωγίζονται μέσα σ' ἕνα διάστημα Δ καί εἶναι $g(x) \neq 0 \ \forall\ x \in \Delta$, τότε:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{γιά } x \in \Delta).$$

Θά βροῦμε πρῶτα τήν παράγωγο τῆς $\frac{1}{g(x)}$. Μέ $x \neq x_o$ ἔχομε:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_o)}}{x - x_o} = \frac{\frac{g(x_o) - g(x)}{g(x)g(x_o)}}{x - x_o} = \frac{1}{g(x)g(x_o)} \cdot \frac{g(x_o) - g(x)}{x - x_o} \quad \text{καί συνεπῶς}$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_o)}}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{1}{g(x)g(x_o)} \cdot \lim_{x \to x_o} \frac{g(x_o) - g(x)}{x - x_o}.$$

Ἀλλά $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{g(x)g(x_o)} = \frac{1}{g^2(x_o)}$ [διότι $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = g(x_o)$ ἀφοῦ ἡ g(x) σάν παραγωγίσιμη εἶναι καί συνεχής] καί

$$\lim_{x \to x_o} \frac{g(x_o) - g(x)}{x - x_o} = -\lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} = -g'(x_o).$$

Ἄρα: $\left[\frac{1}{g(x_o)}\right]' = \frac{-g'(x_o)}{g^2(x_o)}$.

Τώρα, σύμφωνα καί μέ τόν κανόνα παραγωγίσεως γινομένου, παίρνομε:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ἐφαρμογή: ***Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y = x^{-\nu}$ ὅπου $\nu \in \mathbb{N}$· εἶναι $(x^{-\nu})' = -\nu\cdot x^{-\nu-1}$.***

Πράγματι ἔχομε: $(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'\cdot x^\nu - 1\cdot(x^\nu)'}{x^{2\nu}} =$

$$= \frac{0 - \nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\frac{\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu\cdot\frac{1}{x^{2\nu-\nu+1}} = -\nu\cdot\frac{1}{x^{\nu+1}} = -\nu\cdot x^{-\nu-1}.$$

Παρατήρηση: Βλέπομε (στήν παραπάνω ἐφαρμογή) ὅτι ὁ κανόνας παραγωγίσεως δυνάμεως μέ ἐκθέτη φυσικό (ἐφαρμογή προτάσεως 3) ἰσχύει καί σέ δύναμη μέ ἐκθέτη ἀρνητικό ἀκέραιο.

β) **Οἱ τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημ x, συν x, εφ x, σφ x εἶναι συνεχεῖς καί παραγωγίσιμες παντοῦ μέσα στό πεδίο ὁρισμοῦ τους** (τά μέτρα τῶν τόξων δίνονται σέ ἀκτίνια).

Ι) **Ἔχομε γιά τό ἡμίτονο:** $\eta\mu\, x - \eta\mu\, x_o = 2\eta\mu\,\dfrac{x - x_o}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{x + x^o}{2}$. Ἀλλά

$$\left|\eta\mu\,\frac{x - x_o}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x - x_o}{2}\right| \text{ (γιατί;) καί } \left|\sigma\upsilon\nu\,\frac{x + x_o}{2}\right| \leqslant 1. \text{ Ἄρα:}$$

$\left|\eta\mu\, x - \eta\mu\, x_o\right| \leqslant 2 \cdot \left|\dfrac{x - x_o}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_o| \cdot$ καί ἐπειδή $\lim\limits_{x \to x_o} |x - x_o| = 0$,

συμπεραίνομε ὅτι καί $\lim\limits_{x \to x_o} |\eta\mu\, x - \eta\mu\, x_o| = 0$ καί συνεπῶς $\lim\limits_{x \to x_o} \eta\mu\, x = \eta\mu\, x_o$.

Ὅμοια ἀποδεικνύομε ὅτι καί τό συνημίτονο εἶναι συνάρτηση συνεχής.

Ὡς πρός τήν **ἐφαπτομένη** $= \dfrac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}$ καί τή **συνεφαπτομένη** $= \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}$ ἀρκεῖ νά παρατηρήσομε ὅτι εἶναι πηλίκα συνεχῶν συναρτήσεων καί συνεπῶς εἶναι κι αὐτές συνεχεῖς [βλέπε πρόταση 1 τῆς παραγράφου 11.3(β)].

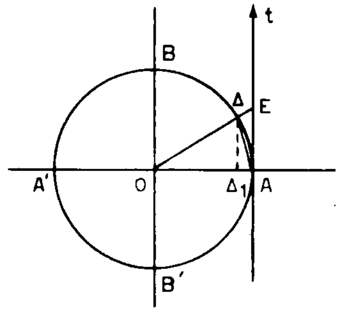
ΙΙ) **Προσδιορίζομε τώρα τίς παραγώγους:** Ἔχομε: $\dfrac{\eta\mu\, x - \eta\mu\, x_o}{x - x_o} =$

$$= \frac{2\eta\mu\,\dfrac{x - x_o}{2}}{x - x_o} \cdot \sigma\upsilon\nu\,\frac{x + x_o}{2} = \frac{\eta\mu\,\dfrac{x - x_o}{2}}{\dfrac{x - x_o}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu\,\frac{x + x_o}{2} =$$

$$= \frac{\eta\mu\,\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu\,\frac{2x_o + \Delta x}{2} = \frac{\eta\mu\,\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x_o + \frac{\Delta x}{2}\right), \quad (x = x_o + \Delta x).$$

Θ' ἀποδείξομε ὅτι: $\lim\limits_{\omega \to 0} \dfrac{\eta\mu\,\omega}{\omega} = 1$. Παίρνομε σ' ἕναν τριγωνομετρικό κύκλο ἕνα θετικό τόξο $\widehat{A\Delta} = \omega$ rad ὅπου $0 < \omega < \dfrac{\pi}{2}$ (σχ. 13.1) καί ἄς εἶναι Ε τό σημεῖο τομῆς τῆς τελικῆς ἀκτίνας τοῦ τόξου μέ τόν ἄξονα At τῶν ἐφαπτομένων. Ἔχομε: ἐμβαδόν τριγώνου $(\overset{\Delta}{O A \Delta}) <$ ἐμ. κυκλικοῦ τομέα $(OA\Delta) <$ $<$ ἐμ. τριγώνου $\overset{\Delta}{OAE} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \overline{\Delta_1\Delta} < \pi \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 \cdot \dfrac{\omega}{2\pi} < \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \overline{AE} \cdot$

καί ἐπειδή $|\overrightarrow{OA}| = 1$, παίρνομε: $\overline{\Delta_1\Delta} < \omega < \overline{AE}$ (I). Ἀλλά $\overline{\Delta_1\Delta} = \eta\mu\, \omega$ καί



Σχ. 13.1.

$\overline{AE} = \varepsilon\varphi\, \omega$ καί συνεπῶς ἡ σχέση (I) γράφεται $\eta\mu\, \omega < \omega < \varepsilon\varphi\, \omega \Longrightarrow$ $1 < \dfrac{\omega}{\eta\mu\, \omega} < \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\, \omega} \Longrightarrow 1 > \dfrac{\eta\mu\, \omega}{\omega} > \sigma\upsilon\nu\, \omega$ (II). Ἐπειδή $0 < \sigma\upsilon\nu\, \omega < 1$ $\left(\text{γιά τόξα τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος } (0, \frac{\pi}{2})\right)$ καί ἐπειδή $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma\upsilon\nu\, \omega = 1$ (τό συνημίτονο εἶναι συνάρτηση συνεχής) συμπεραίνομε ἀπό τή (II) ὅτι καί $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\eta\mu\, \omega}{\omega} = 1$. Ἄν $\omega < 0$ γράφομε $\dfrac{\eta\mu\, \omega}{\omega} = \dfrac{\eta\mu\,(-\omega)}{(-\omega)}$ καί βρίσκομε πάλι $\lim\limits_{\omega \to 0^-} \dfrac{\eta\mu\, \omega}{\omega} = \lim\limits_{-\omega \to 0^+} \dfrac{\eta\mu\,(-\omega)}{-\omega} = 1\cdot$ $(\omega < 0 \Longleftrightarrow -\omega > 0)$.

Ὕστερα ἀπ' αὐτό παίρνομε :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\eta\mu\, x - \eta\mu\, x_o}{x - x_o} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\eta\mu \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sigma\upsilon\nu \left(x_o + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$= 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(x_o) = \sigma\upsilon\nu\, x_o$. [Εἶναι $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sigma\upsilon\nu\,(x_o + \frac{\Delta x}{2}) = \sigma\upsilon\nu(x_o)$ διότι τό συνημίτονο εἶναι συνάρτηση συνεχής].

Ὥστε : $\boxed{(\eta\mu\, x)' = \sigma\upsilon\nu\, x}$

Ὅμοια βρίσκομε ὅτι: $\boxed{(\sigma\upsilon\nu\, x)' = -\eta\mu\, x}$

Γιά τήν εφ x καί σφ x ἔχομε:

$$(\varepsilon\varphi\, x)' = \left(\frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}\right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x(\eta\mu\, x)' - \eta\mu\, x(\sigma\upsilon\nu\, x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

καί $\quad (\sigma\varphi\, x)' = \left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}\right)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}.$

Ὥστε: $\boxed{(\varepsilon\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$ καί $\boxed{(\sigma\varphi\, x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}}$

13.2 Ἡ παράγωγος τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως μιᾶς δοσμένης συναρτήσεως y = f(x).

Ἄν ἡ ἀντίστροφη σχέση $x = \sigma(y)$ μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἶναι ἐπίσης συνάρτηση καί ἡ $f(x)$ ἔχει σ' ἕνα διάστημα (α, β) παράγωγο $f'(x) \neq 0$, τότε καί ἡ $\sigma(y)$ ἔχει παράγωγο στό πεδίο ὁρισμοῦ της καί εἶναι $\sigma'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ σέ ἀντίστοιχες θέσεις x καί y.

Ἄς εἶναι (x_o, y_o) καί (x, y) ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x, y στίς συναρτησιακές σχέσεις $y = f(x)$ καί $x = \sigma(y)$. Θέτομε $\Delta x = x - x_o$ καί $\Delta y = y - y_o$. Ἐπειδή ἡ $f(x)$ ὡς παραγωγίσιμη εἶναι καί συνεχής ἔχομε $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ καί συνεπῶς $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$. Εἶναι ὅμως $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, ἄρα:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_o)}.$$

Ὥστε ὄχι μόνο ὑπάρχει τό $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$, δηλαδή ἡ παράγωγος $\sigma'(y_o)$, ἀλλά εἶναι καί $\sigma'(y_o) = \dfrac{1}{f'(x_o)}$.

Ἐφαρμογή 1. ***Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = \sqrt{x}$ (1), ἄν $x > 0$.***

Ἀντίστροφη τῆς (1) εἶναι ἡ συνάρτηση $x = y^2$ μέ $y > 0$. Ἔχομε σύμφωνα μέ τόν παραπάνω τύπο: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{(y^2)'} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ἄμεσος προσδιορισμός:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_o})(\sqrt{x} + \sqrt{x_o})}{(x - x_o)(\sqrt{x} + \sqrt{x_o})} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o}{(x - x_o)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_o}\right)} = \lim_{x \to x_o} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_o}} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}.$$

Ἐφαρμογή 2. Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέ τύπο:

$$y = \sqrt[\lambda]{x} = x^{\frac{1}{\lambda}} \ \textit{(2), ὅπου } \lambda \textit{ φυσικός} > 2 \ \textit{ καί } \ x > 0.$$

Ἀντίστροφη τῆς (2) εἶναι ἡ συνάρτηση $x = y^{\lambda}$ μέ $y > 0$.

Ἔχομε: $\left(\sqrt[\lambda]{x}\right)' = \dfrac{1}{(y^{\lambda})'} = \dfrac{1}{\lambda y^{\lambda-1}} = \dfrac{1}{\lambda\left(\sqrt[\lambda]{x}\right)^{\lambda-1}} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[\lambda]{x^{\lambda-1}}} =$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} = \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

13.3 Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως.

Ἄν σέ μιά συνάρτηση $y = f(\omega)$ ἀντικαταστήσομε τή μεταβλητή ω μέ μιά συνάρτηση ἄλλης μεταβλητῆς x, ἄν δηλαδή θέσομε $\omega = g(x)$, τότε ἡ προκύπτουσα συνάρτηση $y = f\left(g(x)\right)$ λέγεται **σύνθετη συνάρτηση.** Ἄν π.χ. ἔχομε $y = \eta\mu\,\omega$ (I) καί $\omega = 5x$ (II), τότε λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $y = \eta\mu\,(5x)$ (III) προέρχεται ἀπό τή σύνθεση τῶν συναρτήσεων (II) καί (I).

Γιά νά βροῦμε τήν παράγωγο τῆς συναρτήσεως (III) ὡς πρός x πρέπει νά χρησιμοποιήσομε τήν παράγωγο τῆς (I) ὡς πρός ω καί τήν παράγωγο τῆς ω ὡς πρός x. Πρός τοῦτο χρησιμοποιοῦμε τόν τύπο τοῦ διαφορικοῦ ὁ ὁποῖος (ὅπως ἀποδεικνύεται) ἰσχύει πάντοτε. Δηλαδή γράφομε γιά τήν (I) : $dy =$ $= (\eta\mu\,\omega)'\,d\omega$· ἀκολούθως ἀπό τήν (II) ἔχομε $d\omega = (5x)'\,dx$ καί συνεπῶς $dy =$ $= (\eta\mu\,\omega)'\,(5x)'dx = (\sigma\upsilon\nu\,\omega) \cdot 5 \cdot dx = (5\sigma\upsilon\nu\,5x)dx \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5\sigma\upsilon\nu\,5x$. Ὥστε $(\eta\mu\,5x)'_x = 5\sigma\upsilon\nu\,5x$.

[Ὁ συμβολισμός $(\eta\mu\,5x)'_x$ σημαίνει: «Ἡ παράγωγος τοῦ ημ 5x ὡς πρός x»].

Γενικά. Ἔστω $y = f(\omega)$ καί $\omega = g(x)$· θέλομε νά βροῦμε τήν παράγωγο τῆς $y = f(g(x))$ ὡς πρός x (τήν y'_x).

Ἔχομε: $dy = f'_{\omega}(\omega) \cdot d\omega = f'_{\omega}(\omega) \cdot g'_x(x) \cdot dx \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'_{\omega}(\omega) \cdot g'(x)$·

δηλαδή $\boxed{y'_x = y'_{\omega} \cdot \omega'_x}$

Ἐφαρμογή. ***Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέ τύπο*** $y = x^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{x^{\kappa}}$, ***ὅπου*** $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ ***καί*** $x > 0$.

Ἐπειδή $x^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\kappa}$, γράφομε $\omega = x^{\frac{1}{\lambda}}$ (I) καί $y = \omega^{\kappa}$ (II). Ἀκολούθως παίρνομε $y'_x = (\omega^\kappa)'_\omega \cdot \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)' = \kappa\,\omega^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \kappa\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} =$

$\frac{\kappa}{\lambda} \cdot x^{\frac{\kappa-\lambda}{\lambda}} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot x^{\frac{\kappa}{\lambda}-1}$.

Παρατήρηση. Ἐπειδή καί $\left(x^{-\frac{\kappa}{\lambda}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{\kappa}{\lambda}}}\right)' = \frac{-\left(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)'}{\left(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^2} =$

$= \frac{-\frac{\kappa}{\lambda} x^{\frac{\kappa}{\lambda}-1}}{x^{\frac{2\kappa}{\lambda}}} = -\frac{\kappa}{\lambda} \cdot x^{\frac{\kappa-\lambda}{\lambda}} : x^{\frac{2\kappa}{\lambda}} = -\frac{\kappa}{\lambda} x^{-\frac{\kappa}{\lambda}-1}$, συμπεραίνομε ὅτι ὁ κανόνας τῆς παραγωγίσεως δυνάμεως ἰσχύει καί ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἕνα πηλίκο ἀκεραίων.

῾Ο παρακάτω πίνακας περιέχει συνοπτικά τά προηγούμενα συμπεράσματα.

Συνάρτηση	c σταθερά	x	$f(x) \pm g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) : g(x)$	x^ρ $\rho =$ ρητός $\neq 0$	ημ x	συν x	εφ x	σφ x	$f(\omega)$, $\omega = g(x)$
Παράγωγος	0	1	$f'(x) \pm g'(x)$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	$\frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$	$\rho x^{\rho-1}$	συν x	$-$ημ x	$\frac{1}{\text{συν}^2 x}$	$-\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$	$f'_x = f'_\omega \cdot \omega'_x$

13.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά ἐξεταστεῖ ἄν ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = |x^2 - 1|$ (1) ἔχει παράγωγο στό σημεῖο $x = 1$.

Ἐπειδή γιά $x \geqslant 1$ (καθώς καί γιά $x \leqslant -1$) ἡ (1) γράφεται $y = x^2 - 1$ ἐνῶ γιά $-1 < x < 1$ ἡ (1) γράφεται $y = 1 - x^2$, θά ἀναζητήσομε μονόπλευρες παραγώγους στή θέση 1.

Μέ $x_o = 1$ καί $\Delta x > 0$ ἔχομε: $y_o = x_o^2 - 1$, $y_o + \Delta y = (x_o + \Delta x)^2 - 1 =$ $= x_o^2 + 2x_o\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 = (x_o^2 - 1) + 2x_o\,\Delta x + (\Delta x)^2 \Longrightarrow \Delta y = 2x_o\,\Delta x +$

$$+ (\Delta x)^2 \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_o = 2.$$

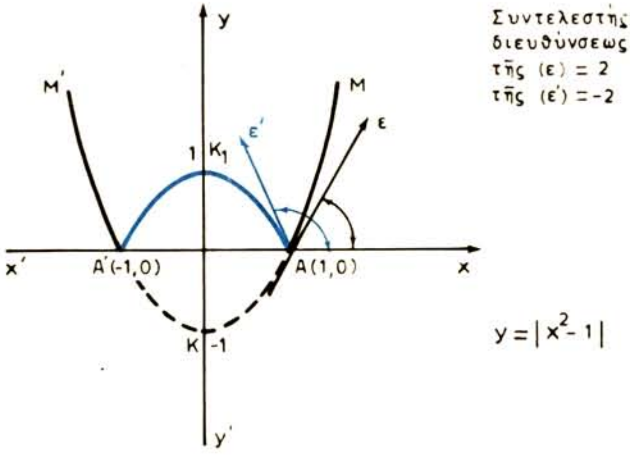
Μέ $x_o = 1$ καί $-1 < \Delta x < 0$ ἔχομε: $y_o = 1 - x_o^2$, $y_o + \Delta y = 1 - (x_o + \Delta x)^2 =$,

$$= (1 - x_o^2) - 2x_o\,\Delta x - (\Delta x)^2 = y_o - 2x_o\Delta x - (\Delta x)^2 \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2x_o - \Delta x \Longrightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2x_o = -2.$$

῞Οπως βλέπομε ἡ συνάρτησή μας δέν ἔχει παράγωγο στή θέση 1, διότι ἔχει βέβαια μονόπλευρες παραγώγους ἀπό ἀριστερά καί ἀπό δεξιά τοῦ σημείου 1, ἀλλά αὐτές δέν συμπίπτουν. Ἡ συνάρτηση εἶναι πάντως στή θέση 1 συνεχής, διότι:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 = f(1) = \lim_{x \to 1^-} (1 - x^2) = \lim_{x \to 1^-} f(x).$$



Σχ. 13.4.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό τό παραβολικό τόξο $A'K_1A$ (σχ. 13.4) καί τούς βραχίονες A'M', AM τῆς παραβολῆς M'KM μέ ἐξίσωση $y = x^2 - 1$· τό τόξο $A'K_1A$ μέ τήν μπλέ χάραξη εἶναι συμμετρικό τοῦ A'KA ὡς πρός τόν ἄξονα x'x.

2. Νά βρεθοῦν οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων μέ τύπους:

$$I)\ y = \sqrt{x^2+1}\cdot \quad II)\ y = \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ μέ } 0 < x < \frac{\pi}{4}\cdot \quad III)\ y = \sigma\upsilon\nu^3 2x.$$

I) Θέτομε $\omega = x^2 + 1$ καί $y = \sqrt{\omega}$. Ἀκολούθως ἔχομε:

$$y'_x = (\sqrt{\omega})' \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

II) Θέτομε $\omega = 4x - \frac{\pi}{2}$ καί $y = \varepsilon\varphi\,\omega$ καί παίρνομε: $y'_x =$

$$(\varepsilon\varphi\,\omega)' \cdot \left(4x - \frac{\pi}{2}\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \cdot 4 = \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{\eta\mu^2 4x}.$$

III) Θέτομε $\varphi = 2x$, $\omega = \sigma\upsilon\nu\,\varphi$ καί $y = \omega^3$, ὁπότε: $y'_x =$
$(\omega^3)' \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi)' \cdot (2x)' = 3\omega^2 \cdot (-\eta\mu\,\varphi) \cdot 2 = -6 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\,\varphi \cdot \eta\mu\,\varphi = -6\eta\mu\,2x\,\sigma\upsilon\nu^2\,2x.$

13.5 Ἀσκήσεις.

1. Νά βρεθοῦν οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων μέ τύπους:

I) $y = (x^2 + 3x - 6)^2 \cdot$ II) $y = x^2(x+2)^2(x+3)\cdot$ III) $y = \text{τεμ}\, x + \text{στεμ}\, x$ μέ $0 < x < \frac{\pi}{2}\cdot$

IV) $y = \frac{6x^5 - 8x^3 + 1}{4x^4 + 2x^2 + 7}\cdot$ V) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}\cdot$ VI) $y = \sqrt{\text{ημ}\, x}$ μέ $0 \leqslant x \leqslant \pi\cdot$ VII) $y =$ $= \sqrt[3]{\text{εφ}\, x}$ μέ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

2. Νά βρεθεῖ ἡ πρώτη καί ἡ δεύτερη παράγωγος καθεμιᾶς ἀπό τίς συναρτήσεις πού δίνονται μέ τούς παρακάτω τύπους: I) $y = \text{συν}^2\frac{5x}{4}\cdot$ II) $y = \sqrt[3]{\text{σφ}^2 4x}$ μέ $0 < x < \frac{\pi}{4}\cdot$ III) $y = \sqrt[5]{(x^2+1)^3}\cdot$ IV) $y = \frac{\text{συν}\, x - \text{ημ}\, x}{\sqrt[3]{\text{ημ}\, 2x}}$ μέ $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3. I) Ὑπολογίστε τίς παραγώγους 1ης, 2ης, 3ης καί 4ης τάξεως τῶν συναρτήσεων ημ x καί συν x (x δηλώνει ἀκτίνια). Τί παρατηρεῖτε;

II) Ὑπολογίστε τίς παραγώγους 1ης καί 2ης τάξεως τῶν συναρτήσεων $f(x) = \text{ημ}(\alpha x + \beta)$ καί $g(x) = \text{συν}(\alpha x + \beta)$, ὅπου α καί β σταθερές.

III) Ὑπολογίστε τήν παράγωγο τῆς συναρτήσεως $\sigma(\omega) = \text{ημ}\omega$, ὅπου ω δηλώνει μοῖρες.

(**Ὑπόδειξη**: Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι μεταξύ τῶν μέτρων ω καί x ἑνός καί τοῦ ἴδιου τόξου σέ μοῖρες καί ἀντίστοιχα σέ ἀκτίνια ἰσχύει ἡ σχέση: $\omega = \frac{180^\circ}{\pi}x\cdot$ ἄρα $\Delta\omega = \frac{180^\circ}{\pi}\cdot\Delta x$).

4. Θεωροῦμε τή συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἄν $\varphi'(\rho) = 0$, τότε $\varphi(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$.

(Ὑποθέτομε ὅτι οἱ συναρτήσεις f(x) καί g(x) ἔχουν παραγώγους στή θέση $x = \rho$ καί ὅτι $g(\rho) \neq 0$ καί $g'(\rho) \neq 0$).

ΕΝΟΤΗΤΑ 14

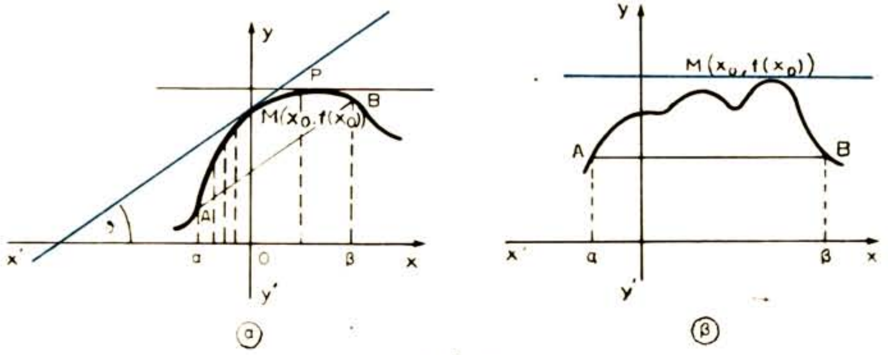
ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

14.1 Τό Θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς καί ἡ μονοτονία.

α) Ἄς θεωρήσομε μιά συνάρτηση f(x) συνεχή καί παραγωγίσιμη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα [α, β] καί ἄς ὑποθέσομε ὅτι ἡ γραμμή ΑΜΡΒ [σχ. 14.1(α)] εἶναι ἡ γραφική παράστασή της.

Παρατηροῦμε ὅτι σέ κάθε σημεῖο τοῦ τόξου ΑΡ, ὅπου ἡ συνάρτηση εἶναι αὔξουσα, ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἶναι θετικός (ἡ κλίση $\text{εφ}\theta > 0$) καί ἐλαττώνεται διαρκῶς καθόσον οἱ τιμές τῶν τεταγμένων αὐξάνουν. Στό σημεῖο Ρ, ὅπου ἡ τεταγμένη παίρνει τή μεγαλύτερη τιμή ἀπό ὅλες ἐκεῖνες πού ἀντιστοιχίζονται στίς τιμές τοῦ διαστήματος [α, β], ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ἔχει γίνει παράλληλη πρός τόν ἄξονα x'x.

Στά σημεῖα τοῦ τόξου PB, ὅπου ἡ συνάρτηση εἶναι φθίνουσα, οἱ συντελεστές διευθύνσεως τῶν ἐφαπτομένων εἶναι ἀριθμοί ἀρνητικοί (εφθ < 0). Ξέρομε ὅμως ὅτι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης, σ' ἕνα σημεῖο $M(x_o, f(x_o))$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$, εἶναι ἡ παράγωγος τῆς $f(x)$ στή θέση x_o.



Σχ. 14.1.

Εἶναι λοιπόν φανερό ὅτι: ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ – ὅταν ὑπάρχει – συνδέεται σέ κάθε θέση τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς $f(x)$ ἄμεσα μέ τόν τρόπο μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως γύρω ἀπό τό θεωρούμενο σημεῖο.

Πιό συγκεκριμένα: μέ τή βοήθεια τῆς παραγώγου μποροῦμε νά βρίσκομε τά διαστήματα καί τό εἶδος τῆς μονοτονίας μιᾶς συναρτήσεως καί νά προσδιορίζομε τά σημεῖα στά ὁποῖα ἡ συνάρτησή μας ἐμφανίζει τοπικά ἀκρότατα.

Τά θεωρήματα πού ἀκολουθοῦν ἔχουν σάν σκοπό νά ἐξυπηρετήσουν τούς παραπάνω στόχους.

Θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ.

«Ἄν $f(x)$ μιά συνάρτηση συνεχής καί παραγωγίσιμη σ' ἕνα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ὑπάρχει ἀριθμός $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ὥστε $f'(x_o) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (1)».

Ἐπειδή ὁ λόγος $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ [σχ. 14.1(α)] καί συνεπῶς καί τῆς εὐθείας AB καί ἐπειδή $f'(x_o)$ εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς εὐθείας τῆς ἐφαπτομένης στό σημεῖο M τῆς καμπύλης AMPB, εἶναι φανερό ὅτι **ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς εἶναι ἡ παρακάτω:**

«Ἄν μιά καμπύλη AMB (A, B τά ἄκρα της) ἔχει ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο της, τότε ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο M τῆς καμπύλης ὅπου ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλη πρός τή χορδή AB».

Ἄν εἰδικότερα συμβαίνει νά εἶναι $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε ἀπό τήν σχέση (1) παίρνομε $f'(x_o) = 0$· ἔτσι προκύπτει ἡ παρακάτω πρόταση πού ὀνομάζεται **θεώρημα τοῦ Rolle.**

«Ἄν μιά συνάρτηση $f(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη σ' ἕνα διάστημα $[\alpha, \beta]$ καί εἶναι $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον σημεῖο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ γιά τό ὁποῖο ἔχομε $f'(x_0) = 0$».

Ἀπό γραφική ἄποψη σημαίνει ὅτι ὑπάρχει σημεῖο Μ τοῦ τόξου ΑΜΒ [σχ. 14.1(β)] στό ὁποῖο ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα x'x.

β) **Στηριζόμενοι στό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς** βγάζομε τήν παρακάτω πολύ σημαντική συνέπεια γιά τή μονοτονία μιᾶς συναρτήσεως.

«Θεωροῦμε μιά συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη σ' ἕνα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ἄν $f'(x) \geqslant 0$ $\forall$ $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ἡ $f(x)$ εἶναι αὔξουσα μέσα σ' αὐτό τό διάστημα. Ἄν $f'(x) \leqslant 0$ $\forall$ $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ἡ $f(x)$ εἶναι φθίνουσα μέσα στό ἴδιο διάστημα».

Πράγματι: Ἄς εἶναι x_1 καί x_2 δυό τιμές τοῦ διαστήματος $[\alpha, \beta]$ μέ $x_2 > x_1$, τότε, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς, ὑπάρχει ἀριθμός $\rho \in (x_1, x_2)$ τέτοιος ὥστε $f(x_2) - f(x)_1 = (x_2 - x_1) f'(\rho)$ (2). Ἄν τώρα εἶναι $f'(\rho) \geqslant 0$, ἀπό τήν (2) παίρνομε $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ (ἀφοῦ $x_2 > x_1 \Longleftrightarrow x_2 - x_1 > 0$)· δηλαδή ἡ συνάρτηση **εἶναι αὔξουσα.** Ἄν ὅμως $f'(\rho) \leqslant 0$, τότε ἔχομε (πάλι ἀπό τήν (2)) $f(x_2) \leqslant f(x_1)$· δηλαδή ἡ συνάρτηση **εἶναι φθίνουσα.**

14.2 Ἡ μονοτονία καί τά ἀκρότατα.

Εἶναι ἐνδιαφέρον νά ἐξετάσομε τώρα πῶς, μέσω τῆς παραγώγου, μποροῦμε νά ἀναγνωρίσομε ἄν ὑπάρχουν τοπικά ἀκρότατα μιᾶς συναρτήσεως καί σέ ποιά σημεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Ἡ παρακάτω πρόταση ὑποδεικνύει τή διαδικασία πού πρέπει τελικά νά ἀκολουθήσομε.

Θεωροῦμε μιά συνάρτηση $f(x)$ συνεχή καί παραγωγίσιμη σ' ἕνα διάστημα (α, β).

I) **Ἄν ἡ $f(x)$ δέχεται σέ μιά θέση $x_o \in (\alpha, \beta)$ τοπικό ἀκρότατο, τότε ἡ (πρώτη) παράγωγος σ' αὐτή τή θέση θά ἰσοῦται μέ μηδέν ($f'(x_o) = 0$).**

II) **Ἀντίστροφα: Ἄν γιά μιά τιμή $x_o \in (\alpha, \beta)$ εἶναι $f'(x_o) = 0$, δέν ἕπεται κατανάγκη ὅτι ἡ $f(x)$ θά παρουσιάζει στή θέση x_o τοπικό ἀκρότατο. Γιά νά συμβαίνει αὐτό ἀρκεῖ ἐπιπλέον οἱ τιμές τῆς παραγώγου ἀριστερά καί δεξιά τοῦ σημείου x_o (γιά τό ὁποῖο ἔχομε $f'(x_o) = 0$), σ' ἕνα διάστημα πού περιέχει τόν ἀριθμό x_o, νά εἶναι ἑτερόσημες.**

Πράγματι:

I) Ἔστω ὅτι ἡ $f(x)$ παρουσιάζει στή θέση x_o τοπικό μέγιστο. Αὐτό σημαίνει ὅτι ὑπάρχει ἕνα διάστημα (κ, λ) πού περιέχει τόν ἀριθμό x_o $(\kappa < x_o < \lambda)$, στό ὁποῖο ἔχομε $f(x_o) \geqslant f(x)$ $\forall$ $x \in (\kappa, \lambda)$, εἴτε εἶναι ὁ $x < x_o$ εἴτε εἶναι $x > x_o$, ὁπότε:

$$\text{ἄν} \quad x < x_o, \quad \text{τότε:} \quad \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geqslant 0 \quad \text{καί}$$

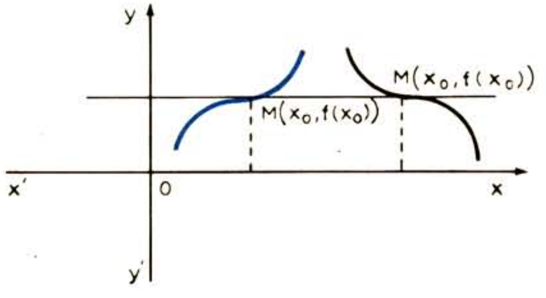
ἄν $x > x_o$, τότε: $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leqslant 0.$

Ἔτσι ὅμως: $\lim\limits_{x \to x_o^-} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) \geqslant 0$ καί

$$\lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) \leqslant 0$$

ἄρα κατανάγκη $f'(x_o) = 0$.

II) **Ἀντίστροφα,** ἡ συνθήκη $f'(x_o) = 0$ δέν εἶναι μόνη της ἱκανή γιά νά παρουσιάζει ἡ συνάρτηση τοπικό ἀκρότατο στή θέση x_o. Σημαίνει βέβαια ὁπωσδήποτε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη, στό σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $f(x)$ μέ τετμημένη x_o, εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα $x'x$· μπορεῖ ὅμως ἡ γραφική παράσταση νά ἔχει στήν περιοχή τοῦ σημείου $M_o(x_o, f(x_o),)$ τή μιά ἤ τήν ἄλλη μορφή πού ἐμφανίζει τό σχῆμα 14.2 ,ὅπου βλέπομε ὅτι ἡ μονοτονία τῆς συναρτήσεως δέν ἀλλάζει κατά τή «διάβαση» τῆς συναρτήσεως ἀπό τήν τιμή x_o.



Σχ. 14.2.

Ὅταν ὅμως ἡ παράγωγος ἀπό θετική ἀριστερά τοῦ x_o μετατρέπεται σέ ἀρνητική δεξιά τοῦ x_o, τότε ἡ συνάρτηση ἀπό αὔξουσα (ἀριστερά τοῦ x_o) μετατρέπεται σέ φθίνουσα (δεξιά τοῦ x_o).

Αὐτό σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν τιμές τοῦ $x < x_o$ γιά τίς ὁποῖες εἶναι $f(x_o) \geqslant f(x)$ καί ἐπίσης τιμές $x > x_o$ γιά τίς ὁποῖες πάλι εἶναι $f(x_o) \geqslant f(x)$. Ἄρα στή θέση x_o ἡ συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Ὅμοια, ὅταν ἡ παράγωγος ἀπό ἀρνητική ἀριστερά γίνεται θετική δεξιά τοῦ x_o, τότε στή θέση x_o ἡ συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ἐλάχιστο.

Ὥστε: **Μιά συνάρτηση $f(x)$, πού ἔχει παράγωγο σ' ἕνα διάστημα (α, β), παρουσιάζει σέ μιά θέση $x_o \in (\alpha, \beta)$ τοπικό μέγιστο ἄν $f'(x_o) = 0$ καί ἄν ἡ παράγωγος $f'(x)$ ἀπό θετική ἀριστερά γίνεται ἀρνητική δεξιά τοῦ x_o. Ἐπίσης παρουσιάζει τοπικό ἐλάχιστο ἄν $f'(x_o) = 0$ καί ἄν ἡ $f'(x)$ ἀπό ἀρνητική ἀριστερά γίνεται θετική δεξιά τοῦ x_o.**

Γιά νά βροῦμε λοιπόν σέ ποιά σημεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της μιά παραγωγίσιμη συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ἀκρότατα **προσδιορίζομε τίς τιμές πού μηδενίζουν τήν παράγωγο καί ἐξετάζομε τά πρόσημα τῆς παραγώγου στίς περιοχές τῶν σημείων μηδενισμοῦ της.**

Ἐκεῖ ὅπου τά πρόσημα ἀλλάζουν ἔχομε τοπικά ἀκρότατα, ἐκεῖ ὅπου διατηροῦνται τοπικά ἀκρότατα δέν ὑπάρχουν.

Παράδειγμα: Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο:

$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 6x + 1$. **Νά καθοριστοῦν τά διαστήματα μονοτονίας καί τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως.**

Ἔχομε: $y' = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = x^4 - x^3 - 7x^2 + 7x + 6x - 6 =$
$= x^3(x-1) - 7x(x-1) + 6(x-1) = (x-1)(x^3 - 7x + 6) =$
$= (x-1)(x^3 - x - 6x + 6) = (x-1)[x(x^2-1) - 6(x-1)] =$
$= (x-1)^2 \cdot [x(x+1) - 6] = (x-1)^2 \cdot (x^2 + x - 6)$. Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $x^2 + x - 6$ εἶναι $x_1 = -3$ καί $x_2 = 2$ καί συνεπῶς $y' = (x-1)^2(x+3)(x-2)$.

Κατασκευάζομε τώρα τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν καί μεταβολῶν, ἀφοῦ παρατηρήσομε ὅτι γιά $\forall x \in (-3, 1) \cup (1, 2)$ ἡ παράσταση $(x-1)^2(x+3)(x-2)$ διατηρεῖται ἀρνητική, ἐπειδή τό $(x-1)^2$ εἶναι θετικό γιά $\forall x \neq 1$ καί τό γινόμενο $(x+3)(x-2)$ παίρνει ἀρνητικές τιμές στό διάστημα $(-3, 2)$.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	μεγ $\frac{1433}{20}$	$\searrow$		$\searrow$	ελ $-\frac{19}{15}$	$\nearrow$	

14.3 Προσδιορισμός ὁριακῶν τιμῶν μέσω τῶν παραγώγων. Κανόνας τοῦ L'Hospital (Λοπιτάλ).

Τό παρακάτω θεώρημα, πού ἀναφέρεται συνήθως ὡς κανόνας τοῦ L'Hospital, μᾶς δίνει τή δυνατότητα νά ὑπολογίζομε, μέσω τῶν παραγώγων, εὔκολα καί σύντομα διάφορες ὁριακές τιμές.

Θεώρημα. Ἄν δυό συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$, ὁρισμένες μέσα σ' ἕνα διάστημα $[α, β]$, μηδενίζονται γιά μιά τιμή $ρ \in [α, β]$ καί ἔχουν παραγώγους συνεχεῖς μέσα στό $[α, β]$, τότε $\lim\limits_{x \to ρ} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to ρ} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. (Ἐφόσον τό $\lim\limits_{x \to ρ} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ὑπάρχει).

Πράγματι: Ἔχομε $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\dfrac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}}{\dfrac{g(x)-g(\rho)}{x-\rho}} = \dfrac{f'(x') \text{ ὅπου } x' \in (x, \rho)}{g'(x'') \text{ ὅπου } x'' \in (x, \rho)}$.

Ἄρα $\lim\limits_{x \to \rho} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \rho} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. [Εἶναι $\dfrac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho} = f'(x')$ καί $\dfrac{g(x)-g(\rho)}{x-\rho} = g'(x'')$ κατά τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς].

Σημείωση: Ἀποδεικνύεται ὅτι τό θεώρημα ἰσχύει καί ὅταν: $\lim f(x) = \pm\infty$ καί $\lim g(x) = \pm\infty$.

Ἐφαρμογή: ***Νά βρεθεῖ:*** I) τό $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu\, x}{x}$. II) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi\, x}{x}$.

Ἔχομε: I) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu\, x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\eta\mu\, x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x}{1} = 1$.

II) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi\, x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\varepsilon\varphi\, x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1} = 1$.

14.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Γενικοί κανόνες γιά τή μελέτη τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως καί γιά τή χάραξη τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

I) Καθορίζομε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

II) Ἄν ἡ τιμή $x = 0$ ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ὁρίζομε τήν τιμή $f(0)$· εἶναι ἐκεῖνο τό σημεῖο τοῦ ἄξονα $y'y$ πού ἀνήκει στή γραφική παράσταση τῆς $f(x)$.

III) Προσδιορίζομε, ἄν μποροῦμε, τίς ρίζες τῆς $f(x)$, δηλαδή τίς τιμές τοῦ x πού ἀπεικονίζονται στόν ἀριθμό μηδέν.

IV) Βρίσκομε τά σημεῖα ἀσυνεχείας ἄν ὑπάρχουν, καθορίζοντας σέ ποιές θέσεις τά (ὑπάρχοντα) μονόπλευρα ὅρια τῆς συναρτήσεως εἶναι διαφορετικά καί σέ ποιές θέσεις ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως δέν ταυτίζεται μέ τήν ὁριακή της τιμή.

V) Ὑπολογίζομε τήν παράγωγο τῆς συναρτήσεως καί καθορίζομε τίς τιμές τοῦ x πού τή μηδενίζουν.

VI) Καθορίζοντας πότε ἡ παράγωγος παίρνει τιμές ἀρνητικές καί πότε θετικές, βρίσκομε τά διαστήματα μονοτονίας καί τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως (ἄν ὑπάρχουν).

VII) Προσδιορίζομε τίς ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων, ἄν ὑπάρχουν, καί τίς σχεδιάζομε σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

VIII) Τοποθετοῦμε, ὡς πρός τό παραπάνω σύστημα συντεταγμένων, ὅλα τά σημεῖα πού ἔχομε προσδιορίσει, τά σημεῖα δηλαδή πάνω στούς ἄξονες καί τά ἀκρότατα.

IX) Βρίσκομε μερικά ἀκόμα σημεῖα κατά προσωπική μας ἐκτίμηση καί τελικά προβαίνομε στή χάραξη τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Παρατήρηση: Ἀπό τή γραφική παράσταση μποροῦμε νά διακρίνομε καί τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως.

Σημείωση γιά τόν προσδιορισμό τῶν ἀσυμπτώτων.

Ὅταν $y = \dfrac{\Pi(x)}{P(x)}$ εἶναι μιά ρητή συνάρτηση, ὅταν δηλαδή οἱ παραστάσεις $\Pi(x)$ καί $P(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ x, βρίσκομε τίς ἀσύμπτωτες τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως ἐφαρμόζοντας τούς παρακάτω κανόνες:

α) Ἄν ὁ παρονομαστής $P(x)$ εἶναι πολυώνυμο μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἀπό τόν ἀριθμητή, τότε ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = 0$ (δηλαδή ὁ ἄξονας $x'x$) εἶναι ἀσύμπτωτη· διότι ἔχομε $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

β) Ἄν τά πολυώνυμα $\Pi(x)$ καί $P(x)$ εἶναι ἰσοβάθμια, τότε ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = \kappa$, ὅπου κ ὁ λόγος τοῦ συντελεστῆ τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ $\Pi(x)$ πρός τό συντελεστή τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ $P(x)$, εἶναι ἀσύμπτωτη· διότι τότε ἔχομε $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\Pi(x)}{P(x)} = \kappa$.

γ) Ἄν γιά μιά τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$ ἔχομε $P(\alpha) = 0$ καί $\Pi(\alpha) \neq 0$, τότε ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $x = \alpha$ εἶναι ἀσύμπτωτη (παράλληλη πρός τόν ἄξονα $y'y$)· διότι τότε ἔχομε $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \pm\infty$

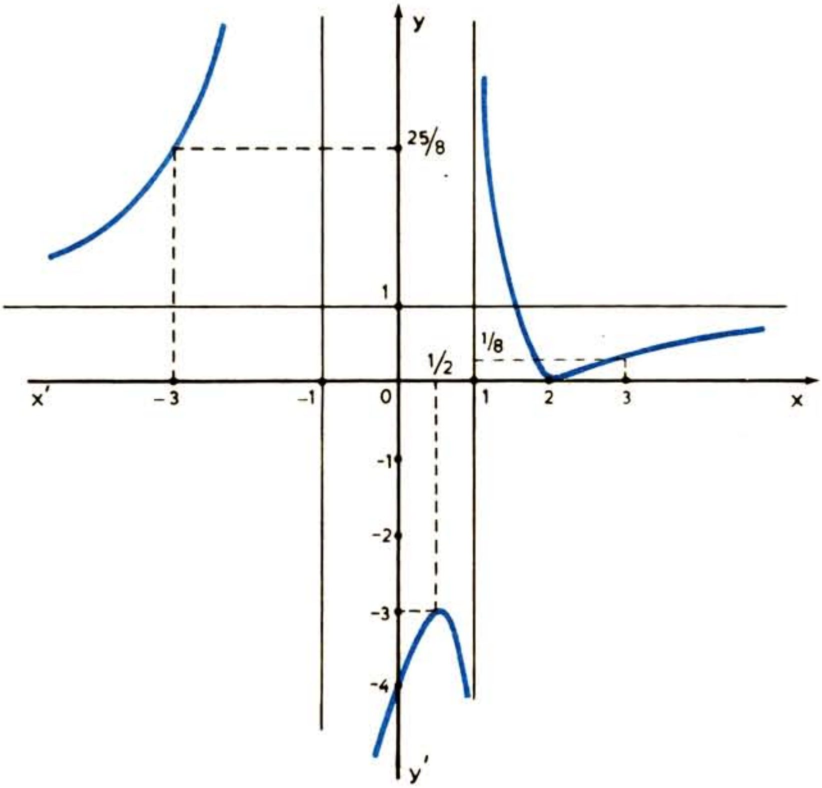
δ) Ἄν ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητῆ εἶναι κατά μονάδα μεγαλύτερος ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστῆ, τότε ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἔχει πλάγια ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = \lambda x + \beta$, ὅπου $\lambda x + \beta$ εἶναι τό πηλίκο τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ $\Pi(x)$ διά τοῦ $P(x)$.

Παράδειγμα: Νά βρεθοῦν οἱ ἀσύμπτωτες τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν συναρτήσεων μέ τύπους:

$$\text{I)}\ \ y = \frac{x^2 + x + 2}{(x-2)(x^2+1)}\cdot \qquad \text{II)}\ \ y = \frac{8x^2 + 7}{(2x-6)(2x+6)}\cdot \qquad \text{III)}\ \ y = \frac{4x^2+1}{2x-1}.$$

Ἀσύμπτωτες τῆς (I) εἶναι οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $x = 2$ καί $y = 0$· τῆς (II) οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $x = 3$, $x = -3$ καί $y = 2$· ἡ (III) ἔχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $x = \dfrac{1}{2}$ καί $y = 2x + 1$ $\left(\text{ἐπειδή } f(x) = \dfrac{4x^2+1}{2x-1} = \right.$ $\left. = 2x + 1 + \dfrac{2}{2x-1}\right)$.

2. Νά γίνει ή μελέτη καί νά σχεδιαστεῖ ή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού όρίζει ό τύπος $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-2)^2}{(x-1)\,(x+1)}$ (α) (σχ. 14.4α).



Σχ. 14.4α.

I) Τό πεδίο όρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι: $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$.

II) Γιά $x = 0$ παίρνομε $y = -4$.

III) Ἔχομε $y = 0$ γιά $x = 2$ $[f(2) = 0]$· καί ἐπειδή ό ἀριθμός 2 εἶναι διπλή ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\dfrac{(x-2)^2}{(x-1)\,(x+1)} = 0$, συμπεραίνομε ὅτι ή εὐθεία x'x εἶναι ἐφαπτομένη τῆς γραφικῆς παραστάσεως στό σημεῖο (2, 0).

IV) Ἡ συνάρτηση εἶναι παντοῦ συνεχής μέσα στό πεδίο όρισμοῦ της.

V) Βρίσκομε $y' = \dfrac{2(x-2)\,(2x-1)}{(x^2-1)^2}$. Οἱ τιμές πού μηδενίζουν τήν y' εἶναι $x = \dfrac{1}{2}$ καί $x = 2$.

VI) Ἔχομε $y' > 0$ γιά $x < \dfrac{1}{2}$ ἤ $x > 2$ καί $y' < 0$ γιά $\dfrac{1}{2} < x < 2$.

Κατασκευάζομε τώρα τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν καί μεταβολῶν.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
y'	0 ↖	+	‖	+	0 ↓	−	‖	−	0 ↓	+	0 ↗
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	μεγ $= -3$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	ελ $= 0$	↗	1

Στή θέση $x = \frac{1}{2}$ ἡ συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο κι αὐτό ἰσοῦται μέ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = -3$ καί στή θέση $x = 2$ τοπικό ἐλάχιστο ἴσο μέ $f(2) = 0$.

VII) Ἀσύμπτωτες τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἶναι οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $x = -1$ καί $x = 1$ (παράλληλες πρός τόν ἄξονα y'y), διότι ὅταν $x \to -1^{\mp}$ ἤ $x \to 1^{\pm}$ τότε $y \to \pm\infty$· ἐπίσης ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = 1$ (παράλληλη πρός τόν ἄξονα x'x), διότι:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

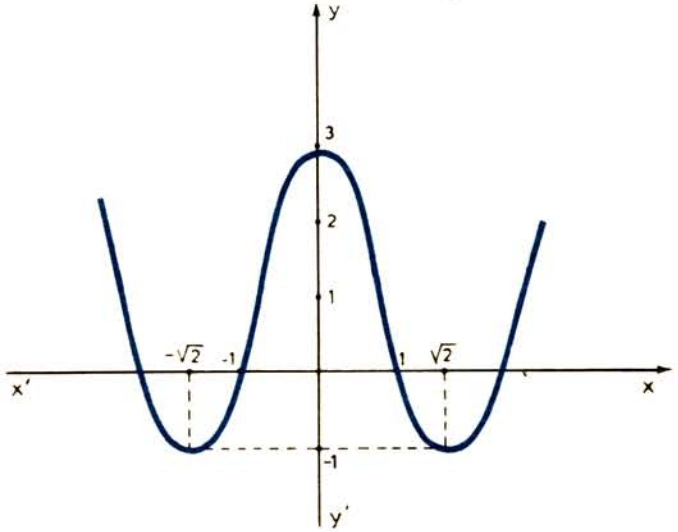
VIII) Ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων τοποθετοῦμε τά σημεῖα $(0, -4)$, $(2, 0)$, σχεδιάζομε τίς ἀσύμπτωτες καί ὁρίζομε ἀκόμα καί τά σημεῖα $\left(-3, \frac{25}{8}\right)$, $\left(3, \frac{1}{8}\right)$. Ἀκολούθως χαράσσομε τή γραφική παράσταση.

Παρατηρώντας τή γραφική παράσταση εὔκολα διαπιστώνομε ὅτι τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ ἕνωση τῶν διαστημάτων $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

3. Νά μελετηθεῖ καί νά παρασταθεῖ γραφικά ἡ συνάρτηση $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

Ἡ συνάρτηση, σάν πολυώνυμο, εἶναι ὁρισμένη καί συνεχής παντοῦ μέσα στό $\mathbb{R}$. Ἡ παράγωγός της εἶναι $y' = 4x^3 - 8x$ καί μηδενίζεται γιά $x = -\sqrt{2}$, 0 καί $\sqrt{2}$. Μέ $x = 0$ παίρνομε $y = 3$. Κατασκευάζομε τόν παρακάτω πίνακα καί σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, χρησιμοποιώντας ὅτι ἤδη βρήκαμε καί τοποθετώντας καί μερικά ἀκόμα σημεῖα (σχ. 14.4β).

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$-\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 ελ	$\nearrow$	3 μεγ	$\searrow$	-1 ελ	$\nearrow$	$+\infty$



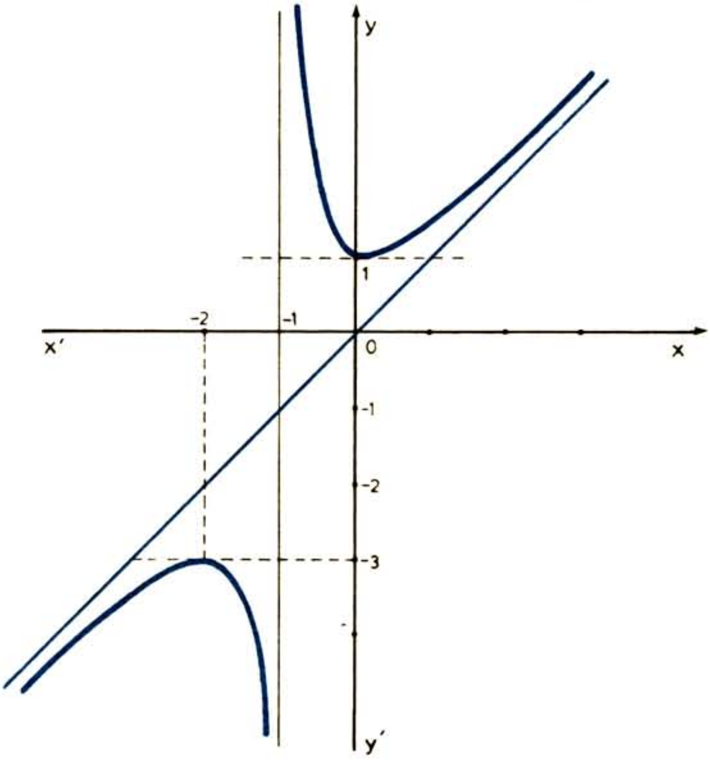
Σχ. 14.4β.

4. Νά γίνει ή μελέτη τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ ***καί νά χαραχθεῖ ή γραφική της παράσταση.***

Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι τό σύνολο $\mathbb{R} - \{-1\}$. Ἡ παράγωγός της εἶναι: $y' = \dfrac{(x+2)x}{(x+1)^2}$. Στά σημεῖα -2 καί 0, γιά τά ὁποῖα ἔχομε $f'(-2) = 0$ καί $f'(0) = 0$, ἡ συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ἀκρότατα, διότι στήν περιοχή αὐτῶν τῶν σημείων ἀλλάζει ἡ μονοτονία τῆς συναρτήσεως. Ὁ παρακάτω πίνακας ἐκφράζει τήν ὅλη μεταβολή τῆς συναρτήσεώς μας· χρησιμοποιώντας τά περιλαμβανόμενα σ' αὐτόν καί τίς εὐθεῖες $y = x$ καί $x = -1$ πού εἶναι ἀσύμπτωτες, σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση. (σχ. 14.4γ).

x	$-\infty$		-2		-1		0	$+\infty$
y'		$+$	$0 \downarrow$	$-$	‖	$-$	$0 \downarrow$	
y		$\nearrow$	μεγ $= -3$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	ελ $= 1$	$\nearrow$

Σημείωση : Ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = x$ (πού εἶναι διχοτόμος τῆς 1ης καί 3ης γωνίας τῶν ἀξόνων) εἶναι πλάγια ἀσύμπτωτη, διότι ἀκέραιο μέρος τοῦ πηλίκου τοῦ $x^2 + x + 1$ διά τοῦ $x + 1$ εἶναι τό μονώνυμο x.



Σχ. 14.4γ.

5. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές: I) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\sigma\upsilon\nu\, x}{x - \frac{\pi}{3}}$.

II) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 4}{x^6 + 4x^5 - x^2 - 2x - 2}$. III) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \eta\mu\, x}{x^2}$.

IV) $\lim\limits_{x \to 0} (x\, \sigma\varphi\, x)$.

I) Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής μηδενίζονται μέ $x = \frac{\pi}{3}$. Ἄρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\sigma\upsilon\nu\, x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{(1 - 2\sigma\upsilon\nu\, x)'}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)'} =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\eta\mu\, x}{1} = \sqrt{3}$

II) Εὔκολα διαπιστώνομε ὅτι καί τά δυό πολυώνυμα (ἀριθμητῆ, παρονομαστῆ) μηδενίζονται μέ $x = 1$. Συνεπῶς παίρνομε:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(6x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 4)'}{(x^6 + 4x^5 - x^2 - 2x - 2)'} = \lim_{x \to 1} \frac{42x^6 - 20x^3 + 9x^2}{6x^5 + 20x^4 - 2x - 2} = \frac{31}{22}.$$

III) Ἔχομε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - \eta\mu\, x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu\, x}{2x}$. Ἐπειδή οἱ παραστάσεις $1 - \sigma\upsilon\nu\, x$ καί $2x$ μηδενίζονται καί οἱ δυό μέ $x = 0$ ἐφαρμόζομε ξανά τόν κάνόνα τοῦ L'Hospital καί παίρνομε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu\, x)'}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu\, x}{2} = 0.$$

IV) Ἔχομε: $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \sigma\varphi\, x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\varphi\, x}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sigma\varphi\, x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\eta\mu^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2)'}{(\eta\mu^2 x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{2\eta\mu\, x\; \sigma\upsilon\nu\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\eta\mu\, x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\, x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

14.5 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνει ἡ μελέτη, ὡς πρός τή μονοτονία καί τά ἀκρότατα, τῶν συναρτήσεων πού δίνονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους: I) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ · II) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ · III) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 30x$ · IV) $y = (x+2)^2(2x-7)$ · V) $y = x - \eta\mu\, 2x$ · VI) $y = x + \varepsilon\varphi\, x$ μέ $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

2. Ὡς ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς ν' ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω προτάσεις:

I) Ἄν ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ ἰσοῦται μέ μηδέν σέ κάθε σημεῖο ἑνός διαστήματος (α, β), τότε ἡ $f(x)$ εἶναι σταθερή σ' αὐτό τό διάστημα.

II) Ἄν δυό συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν ἴσες (πεπερασμένες) παραγώγους σέ κάθε σημεῖο ἑνός διαστήματος (α, β), τότε οἱ συναρτήσεις θά διαφέρουν, σ' αὐτό τό διάστημα, κατά σταθερόν ἀριθμό.

3. Νά μελετηθοῦν καί νά παρασταθοῦν γραφικά οἱ συναρτήσεις πού δίνονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους:

I) $y = \dfrac{5x+6}{7x-11}$ · II) $y = x^4 + x^2 + 1$ · III) $y = x^3 - 3x - 2$ · IV) $y = \sigma\upsilon\nu\, x + \sigma\upsilon\nu\, 2x$ · V) $y = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 2x - 8}$.

4. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές:

I) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{εφ}\, x\right] = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\frac{1}{\text{εφ}\, x}}$. II) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{ημ}\, 7x}{\text{ημ}\, 5x}$.

III) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{εφ}\, 10\, x}{4x}$. IV) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{εφ}\, 8x}{\text{εφ}\, 4x}$. V) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \text{συν}\, x}{x - \pi}$.

VI) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{ημ}\, x}{x^3}$. VII) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{συν}\, x - \text{συν}\, 2\, x}{x^2}$.

5. Νά βρεθεῖ πολυώνυμο τῆς μορφῆς $x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ μηδενιζόμενο διά $x = 0$ καί τό ὁποῖο παίρνει τοπικά ἀκρότατα στίς θέσεις $x = -\frac{7}{3}$ καί $x = 1$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 15

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

15.1 Ἕνα πρόβλημα καί πῶς λύεται μέ μιά μέθοδο τοῦ Ἀρχιμήδη.

α) **«Θεωροῦμε τήν παραβολή μέ ἐξίσωση, ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων, $y = x^2$»**

Παίρνομε ἕνα σημεῖο Α(α) τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα $\vec{Ox}$ καί ὁρίζομε καί τό ἀντίστοιχο σημεῖο $P(\alpha, \alpha^2)$ τῆς παραβολῆς.

Θέλομε νά ὑπολογίσομε τό ἐμβαδόν τοῦ μέρους τοῦ ἐπιπέδου πού περικλείεται μεταξύ τοῦ τόξου ΟΡ τῆς παραβολῆς, τοῦ ἡμιάξονα $\vec{Ox}$ καί τῆς $PA \perp Ox$. Τό μικτόγραμμο αὐτό σχῆμα θά τό λέμε **παραβολικό χωρίο.** (σχ. 15.1α)

Χωρίζομε τό τμῆμα ΟΑ σέ ἴσα μέρη, π.χ. σέ 6, μέ τά σημεῖα A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $A_6 \equiv A$ καί κατασκευάζομε: I) τά ἐσωτερικά στό παραβολικό χωρίο ὀρθογώνια $A_1 M_1 E_1 A_2$ ($A_1M_1 \perp Ox$, $M_1E_1 \parallel Ox$, $M_2 A_2 \perp Ox$), $A_2 M_2 E_2 A_3$ ($E_2 A_3 \perp Ox$, $M_2 E_2 \parallel Ox$), $A_3 M_3 E_3 A_4$, $A_4 M_4 E_4 A_5$ καί $A_5M_5E_5A$ [σχ. 15.1α(α)]. καί II) τά ἐξωτερικά $OA_1 M_1 \Delta_1$ ($M_1 \Delta_1 \perp Oy$), $A_1 A_2 M_2 \Delta_2$ ($M_2 \Delta_2 \perp Oy$, $\Delta_2 A_1 \parallel Oy$), $A_2 A_3 M_3 \Delta_3$, $A_3 A_4 M_4 \Delta_4$, $A_4 A_5 M_5 \Delta_5$ καί $A_5 AP\Delta_6$ [σχ. 15.1α(β)]

Παρατηροῦμε ὅτι: τό ἐμβαδόν Ε τοῦ παραβολικοῦ χωρίου ΟΑΡ περιέχεται μεταξύ τῶν δύο ἀθροισμάτων.

$$\sigma_6 = 0 + (A_1 M_1 E_1 A_2) + (A_2 M_2 E_2 A_3) + (A_3 M_3 E_3 A_4) + (A_4 M_4 E_4 A_5) + (A_5 M_5 E_5 A_6) = 0 + \frac{\alpha}{6}\cdot\left(\frac{\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6}\cdot\left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6}\cdot\left(\frac{3\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6}\cdot\left(\frac{4\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6}\cdot\left(\frac{5\alpha}{6}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{6}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2).$$

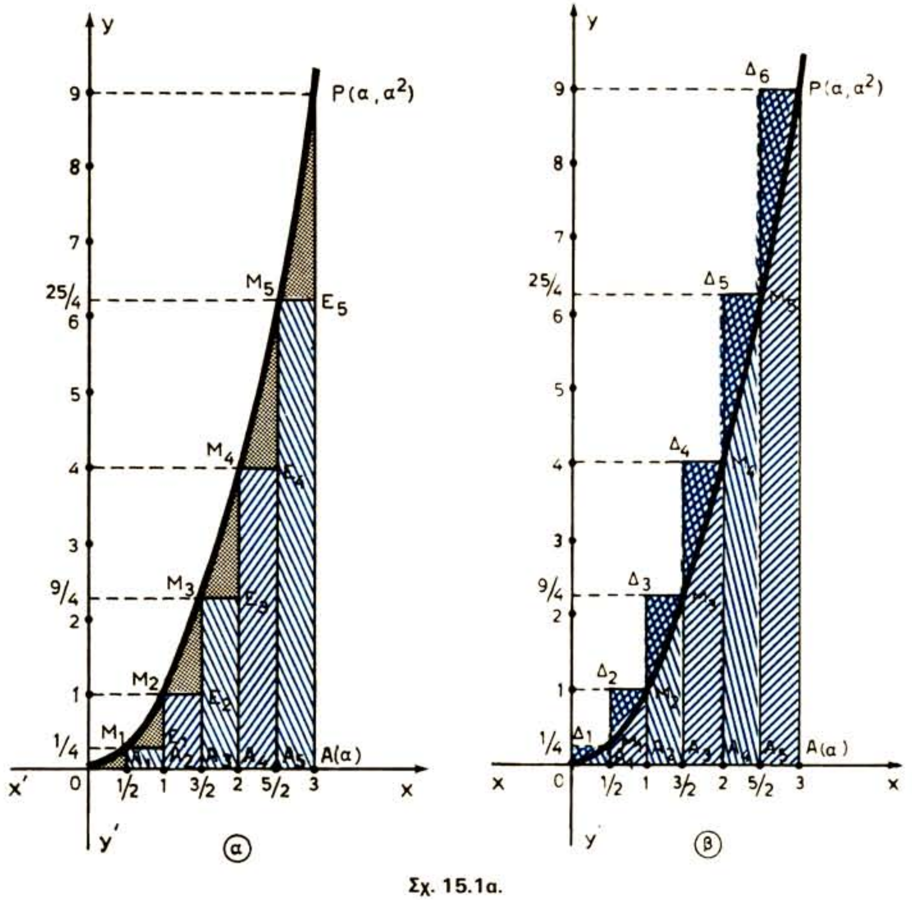
Καί $\Sigma_6 = (OA_1 M_1 \Delta_1) + (A_1 A_2 M_2 \Delta_2) + (A_2 A_3 M_3 \Delta_3) + (A_3 A_4 M_4 \Delta_4) +$

$+ (A_4 A_5 M_5 \Delta_5) + (A_5 AP\Delta_6) = \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{3\alpha}{6}\right)^2 +$

$+ \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{4\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{5\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{6\alpha}{6}\right)^2 =$

$= \left(\frac{\alpha}{6}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)$· δηλαδή ἔχομε $\boldsymbol{\sigma_6} < E < \boldsymbol{\Sigma_6}$.

[Εἶναι $OA_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = A_4 A_5 = A_5 A = \frac{\alpha}{6}$, $A_1 M_1 =$
$= \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2$, $(A_2 M_2) = \left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2$, ..., $AP = \left(\frac{6\alpha}{6}\right)^2 = \alpha^2$] ·



Σχ. 15.1α.

Γενικά ἄν χωρίσομε τό τμῆμα ΟΑ σέ ν ἴσα μέρη θά ἔχομε πάντα ($\forall \nu \in \mathbb{N}$) $\boldsymbol{\sigma_\nu} < E < \boldsymbol{\Sigma_\nu}$ (I), ὅπου:

$\boldsymbol{\sigma_1} = 0$, $\boldsymbol{\sigma_2} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 \cdot (0 + 1^2)$, $\boldsymbol{\sigma_3} = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 \cdot (0 + 1^2 + 2^2)$, ..., $\boldsymbol{\sigma_\nu} =$

$$= \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^3 \cdot [0 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (\nu - 1)^2], \text{ καί } \Sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{1}\right)^3 \cdot 1^2, \ \Sigma_2 =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2), \Sigma_3 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2), \ldots,$$

$$\Sigma_\nu = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2).$$

Ἐπειδή $\Sigma_\nu - \sigma_\nu = \alpha^3 \cdot \frac{1}{\nu}$ καί συνεπῶς $\lim\limits_{\nu \to \infty} (\Sigma_\nu - \sigma_\nu) =$ $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left(\alpha^3 \cdot \frac{1}{\nu}\right) = \alpha^3 \cdot \lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu} = 0$, ἔπεται ὅτι $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Sigma_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} \sigma_\nu$· ἄρα λόγω τῆς (I) πρέπει νά ἔχομε $E = \lim\limits_{\nu \to \infty} \Sigma_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} \sigma_\nu$.

Γιά νά βροῦμε λοιπόν τό ἐμβαδόν E τοῦ παραπάνω παραβολικοῦ χωρίου ἀρκεῖ νά ὑπολογίσομε τό $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Sigma_\nu$ (ἤ τό $\lim\limits_{\nu \to \infty} \sigma_\nu$).

Εἶναι $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$ καί ἐπομένως

$$\Sigma_\nu = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^3 \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^3} =$$

$$\frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu} = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\left(2 + \frac{1}{\nu}\right).$$

ἀλλά $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = 1$ καί $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left(2 + \frac{1}{\nu}\right) = 2$ καί συνεπῶς

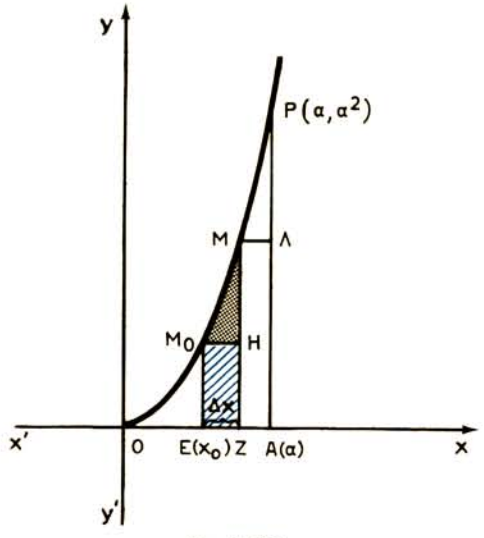
$$\lim_{\nu \to \infty} \Sigma_\nu = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \lim_{\nu \to \infty} \left(2 + \frac{1}{\nu}\right) = \frac{\alpha^3}{6} \cdot 2 = \frac{\alpha^3}{3}.$$

ὥστε: $\boxed{E = \frac{a^3}{3}}$

Ὁ τρόπος πού χρησιμοποιήσαμε πιό πάνω γιά νά ὑπολογίσομε τό ἐμβαδόν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου εἶναι ἡ διατύπωση, στή σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, τῆς μεθόδου πού χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης γιά νά ἐπιλύσει αὐτό τό πρόβλημα καί ἄλλα παρόμοια.

Ἡ μέθοδος αὐτή ὀνομάστηκε **μέθοδος τῆς ἐξαντλήσεως** καί ἡ ἀνάπτυξή της ἔδωσε γένεση σ' ἕναν κλάδο τῶν Μαθηματικῶν πού λέγεται **ὁλοκληρωτικός Λογισμός**· αὐτός παρέχει γενικές μεθόδους γιά τήν πραγμάτευση ὄχι μόνο τοῦ προβλήματος τοῦ ἐμβαδοῦ μικτογράμμων ἐπιπέδων σχημάτων ἀλλά καί ποικίλων ἄλλων ζητημάτων ἀπό τά Μαθηματικά, ἀπό τίς φυσικές Ἐπιστῆμες καί τήν Τεχνική. Κεντρική ἔννοια τοῦ κλάδου εἶναι τό «ὁλοκλήρωμα», τό «ὁρισμένο» καί τό «ἀόριστο», πού παρουσιάζομε σύντομα ἀμέσως παρακάτω.

β) Θεωροῦμε ξανά τό παραβολικό χωρίο ΟΑΡ, μιά τιμή $x_o > 0$, τό ἀντίστοιχο σημεῖο $E(x_o)$ τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων καί τό ἀντίστοιχο σημεῖο $M_o\ (x_o, x_o^2)$ τῆς παραβολῆς $y = x^2$ (σχ. 15.1β).



Σχ. 15.1β.

Ἄς εἶναι ἀκολούθως Δx μιά αὔξηση τῆς μεταβλητῆς x καί $Z(x = x_o + \Delta x)$, $M\left(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2\right)$ τά ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ ἄξονα καί τῆς παραβολῆς. Φέρνομε τέλος καί τήν $M_oH \perp ZM$. Τό μικτόγραμμο χωρίο $EZMM_o$, μέρος τοῦ ἀρχικοῦ παραβολικοῦ χωρίου ΟΑΡ [Ρ τό σημεῖο μέ συντεταγμένες (α, α^2)], ἀποτελεῖται ἀπό τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο $EZHM_o$ καί τό μικτόγραμμο τρίγωνο M_oHM· εἶναι δέ ἐμβ. $(EZHM_o) = \overline{EM_o} \cdot \overline{EZ} = x_o^2 \cdot \Delta x$ $(\Delta x > 0)$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει μιά συνάρτηση Φ(x), τέτοια ὥστε νά ἔχομε $\Delta\Phi(x) = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi\ (x_o) = x_0^2 \cdot \Delta x +$ ἐμβ. $(M_o\ HM)$ καί τῆς ὁποίας τό διαφορικό στή θέση x_o εἶναι τό $x_o^2\ \Delta x = x_o^2\ dx$· ἔτσι ἔχομε

$$\boxed{d\Phi\ (x) = x_0^2\ dx} \qquad (1)$$

Παίρνοντας τό διαφορικό $x_0^2\,dx$ ἀντί γιά τήν ὁλική αὔξηση $\Delta\Phi = x_o^2\ \Delta x +$ + ἐμβ. $(M_o\,HM)$ τῆς Φ(x) ἀντικαθιστοῦμε τήν «παραβολική ταινία» $E\,M_o\,MZ$ μέ τό ὀρθογώνιο EM_oHZ.

Ἄς ὑποθέσομε τώρα ὅτι τό παραβολικό χωρίο ΟΑΡ ἔχει χωρισθεῖ σέ «λεπτές» παραβολικές ταινίες μέ πλάτος μικρότερο ἤ ἴσο πρός τό ΕΖ καί ἄς θεωρήσομε τό ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ὅπως τό EM_oHZ, ἄθροισμα πού θά συμβολίσομε μέ $\Sigma x^2 dx$.

Ὅσο πιό μικρό ἐκλέγεται τό $EZ = \Delta x$, τόσο πιό μικρή θά εἶναι ἡ διαφορά τοῦ $\Sigma_o x^2 dx$ ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ταινιῶν, ὅπως ἡ M_oEZM, πού συναποτελοῦν τό παραβολικό χωρίο ΟΑΡ.

Ὅταν $\Delta x \to 0$, ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει τό ὅριο τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπάνω ὀρθογωνίων, πού τό καθένα τους ἔχει ὅριο τό μηδέν καί πού τό πλῆθος τους ἔχει ὅριο τό ἄπειρο, καί ὅτι αὐτό τό ὅριο ἰσοῦται μέ $\Phi(\alpha) - \Phi(0)$, ὅπου $\Phi(x)$ ἡ συνάρτηση τοῦ διαφορικοῦ τύπου (1), δηλαδή μιά συνάρτηση μέ παράγωγο x^2 $(\Phi'(x) = x^2)$.

Ἐπειδή $\left(\frac{1}{3} x^3 + c\right)' = x^2$, ὅπου c μιά αὐθαίρετη σταθερά, καταλαβαίνομε ὅτι $\Phi(x) = \frac{1}{3} x^3 + c$. Ἔχομε λοιπόν $\lim \sum_{x=0}^{x=\alpha} x^2 dx = \Phi(\alpha) - \Phi(0) =$

$$= \left(\frac{1}{3}\alpha^3 + c\right) - \left(\frac{1}{3}0^3 + c\right) = \frac{1}{3}\alpha^3.$$

Τό παραπάνω ὅριο τό ὀνομάζομε **ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x) = x^2$ ἀπό 0 ἕως α,** καί τό παριστάνομε συμβολικά μέ:

$$\boxed{\int_0^a x^2\, dx}$$

Οἱ ἀκραῖες τιμές 0 καί α τῆς μεταβλητῆς x λέγονται **ἄκρα τοῦ ὁλοκληρώματος.**

Ἡ συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, μέ c αὐθαίρετη σταθερά, πού ἔχει ὡς παράγωγο τή συνάρτηση x^2, λέγεται **ἀόριστο ὁλοκλήρωμα** τοῦ διαφορικοῦ x^2dx ἤ **παράγουσα** (συνάρτηση) τῆς $f(x) = x^2$ καί συμβολίζεται, κατ' ἀντιστοιχία πρός τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα, μέ

$$\boxed{\int x^2\, dx}$$

Ἔτσι ἀπό τόν διαφορικό τύπο (1) παίρνομε τόν τύπο:

$$\boxed{\int d\Phi(x) = \int x^2\, dx = \Phi(x) = \frac{1}{3}x^3 + c} \qquad (2)$$

γ) **Γενικά μποροῦμε νά διατυπώσομε τά ἀκόλουθα:**

Ἄν f(x) εἶναι μιά συνάρτηση συνεχής σ' ἕνα διάστημα [α, β], τότε ὑπάρχουν στό [α, β] συναρτήσεις $\Phi(x)$ τέτοιες ὥστε νά εἶναι $\Phi'(x) = f(x)$ γιά $\forall\ x \in [\alpha, \beta]$. Οἱ συναρτήσεις αὐτές διαφέρουν ἡ μιά ἀπό τήν ἄλλη κατά μία σταθερά· ἔτσι ἄν $\varphi(x)$ εἶναι μιά ἀπ' αὐτές, τότε ὅλες οἱ ἄλλες δίνονται ἀπό τόν τύπο $\Phi(x) = \varphi(x) + c$ ὅπου c σταθερά.

Κάθε συνάρτηση $\Phi(x) = \varphi(x) + c$ λέγεται **ἀόριστο ὁλοκλήρωμα** (ἀκριβῶς ἐπειδή ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς c ἀφήνεται ἀπροσδιόριστη) ἤ **παράγουσα** τῆς f(x) στό διάστημα [α, β] καί συμβολίζεται μέ $\int f(x)dx$.

Ἔτσι ἔχομε $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (\Phi(x))' = (\varphi(x) + c)' = f(x)$ καί συνεπῶς $d\int f(x)dx = d\left(\varphi(x) + c\right) = \left(\varphi(x) + c\right)'dx = f(x)dx$.

Ἡ διαφορά $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = (\varphi(\beta) + c) - (\varphi(\alpha) + c)$ λέγεται **ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα τῆς f(x) ἀπό α ἕως β,** ἐπειδή εἶναι ἕνας ὁρισμένος ἀριθμός ἀνεξάρτητος ἀπό τήν τιμή τῆς c, καί συμβολίζεται μέ $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Ἄν $f(x) \geqslant 0$ γιά $\forall\ x \in [\alpha, \beta]$, τότε τό $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τοῦ ἐπιπέδου χωρίου πού περικλείεται ἀπό τόν ἄξονα x'x, ἀπό τή γραφική παράσταση τῆς $y = f(x)$ στό [α, β], ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, καί ἀπό τίς δυό εὐθεῖες $x = \alpha$ καί $x = \beta$ τίς παράλληλες πρός τόν ἄξονα y'y.

Σημείωση: Μονάδα ἐμβαδοῦ εἶναι τό τετράγωνο μέ πλευρά τό κοινό μῆκος τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τῶν δύο ἀξόνων συντεταγμένων.

Παράδειγμα: Ἔστω $f(x) = \lambda\kappa + \mu$ γιά $x \in \mathbb{R}$ μέ λ καί μ σταθερές· τότε:

$$\int (\lambda x + \mu)dx = \frac{1}{2}\lambda x^2 + \mu x + c \quad \text{καί} \quad \int_{x_1}^{x_2} (\lambda x + \mu)\,dx =$$

$$\lambda\,(x_2^2 - x_1^2) + \mu\,(x_2 - x_1).$$

Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι: Γιά νά ὑπολογίσομε ἕνα ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ἀρκεῖ νά βροῦμε τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\int f(x)dx$, δηλαδή μιά συνάρτηση $\Phi(x)$ μέ $\Phi'(x) = f(x)$ στό [α, β].

Ἔχομε τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \Big[\Phi(x)\Big]_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$.

Π.χ. $\int_{-2}^{2} x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}\,x^5\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{5}\cdot 2^5 - \frac{1}{5}\cdot(-2)^5 = \frac{1}{5}\cdot 2^6 = \frac{64}{5}$.

15.2 Θεμελιώδεις ἰδιότητες τοῦ ὁλοκληρώματος.

Σύμφωνα μέ τούς προηγούμενους ὁρισμούς εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσομε ὅτι γιά τό ὁλοκλήρωμα ἰσχύουν οἱ παρακάτω βασικές ἰδιότητες:

I) Ἂν f(x) μιά συνάρτηση συνεχής σ' ἕνα διάστημα [α, β] καί $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx$.

II) Ἂν $x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx$.

III) Μέ c = σταθερά ἰσχύει: $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ καί $\int_{\alpha}^{\beta} c\,f(x)\,dx =$

$= c\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

IV) Ἂν f(x) καί g(x) δυό συναρτήσεις συνεχεῖς στό διάστημα [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

Πραγματικά, ἄν $\Phi(x) = \int f(x)\,dx$ καί $\Omega(x) = \int g(x)\,dx$ εἶναι δύο παράγουσες τῶν f(x) καί g(x) ἀντιστοίχως, τότε $\Phi(x) + \Omega(x)$ εἶναι μιά παράγουσα τῆς $f(x) + g(x)$ καί ἐπομένως:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \Big[\,\Phi(x) + \Omega(x)\,\Big]_{\alpha}^{\beta} = \Big(\Phi(\beta) + \Omega(\beta)\Big) - \Big(\Phi(\alpha) + \Omega(\alpha)\Big) =$$

$$= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) + \Omega(\beta) - \Omega(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx.$$

Ἄσκηση. Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων I ἕως καί III.

15.3 Μερικά στοιχειώδη ὁλοκληρώματα.

I) Ἔχομε: $\left(\dfrac{1}{\kappa+1}\,x^{\kappa+1}\right)' = x^{\kappa}$, ἐφόσον $\kappa \neq -1$, καί

συνεπῶς $\int x^{\kappa}\,dx = \dfrac{1}{\kappa+1}\cdot x^{\kappa+1} + c$ (1), (μέ $\kappa \neq -1$), ὅπου c αὐθαίρετη σταθερή.

II) $(\eta\mu\, x)' = \sigma\upsilon\nu\, x \implies \int \sigma\upsilon\nu\, x\,dx = \eta\mu\, x + c$ (2)

III) $(-\sigma\upsilon\nu\, x)' = \eta\mu\, x \implies \int \eta\mu\, x\,dx = -\sigma\upsilon\nu\, x + c$ (3)

IV) $(\varepsilon\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \implies \int \dfrac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi\, x + c$ (4)

V) $(-\sigma\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x} \implies \int \dfrac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\sigma\varphi\, x + c\,.$ (5)

Κλείνουμε ἐδῶ τά ἐλάχιστα στοιχεῖα τοῦ Διαφορικοῦ καί Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, πού ἐκθέσαμε σ' αὐτό τό κεφάλαιο, παραθέτοντας τά λόγια μέ τά ὁποῖα ἀρχίζει τό ἐξαίρετο βιβλίο του «Διαφορικός καί Ὁλοκληρωτικός Λογισμός» ὁ καθηγητής τοῦ Τεχνολογικοῦ Ἰνστιτούτου τῆς Καλιφόρνιας Τόμ Ἄποστολ

«Ἡ τόσο μεγάλη πρόοδος, πού στά τελευταῖα ἑκατό χρόνια σημειώθηκε στήν Ἐπιστήμη καί στήν Τεχνολογία, κατά μεγάλο μέρος ὀφείλεται στήν ἀνάπτυξη τῶν Μαθηματικῶν.

Ὁ κλάδος τῶν Μαθηματικῶν πού εἶναι γνωστός μέ τό ὄνομα Διαφορικός καί Ὁλοκληρωτικός Λογισμός χρησιμεύει σάν ἕνα φυσικό καί πολυδύναμο ἐργαλεῖο γιά τήν πραγμάτευση ποικιλίας προβλημάτων πού παρουσιάζονται στή Φυσική, στήν Ἀστρονομία, στή Μηχανολογία, στή Χημεία, στή Γεωλογία, στή Βιολογία καθώς καί σέ ἄλλα πεδία τῆς ἀνθρώπινης δραστηριότητας, ἀνάμεσα στά ὁποῖα θά πρέπει νά κατατάξουμε, στά τελευταῖα μᾶλλον χρόνια, καί τίς κοινωνικές Ἐπιστῆμες . . . ».

15.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά βρεθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

$$I)\ \int (4x^3+3x^2+2x+1)dx\cdot\quad II)\ \int \sqrt{x}\,dx\cdot\quad III)\ \int \sqrt[5]{x^3}\,dx\cdot\quad IV)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\cdot$$

Ἔχομε: I) $\int (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx = \int 4x^3\,dx + \int 3x^2\,dx + \int 2x\,dx + \int dx =$

$= 4\int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx + 2\int x\,dx + x = 4\cdot\frac{1}{4}x^4 + 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 +$

$+ x + c = x^4 + x^3 + x^2 + x + c\cdot$

$$II)\ \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\,x^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$III)\ \int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{5}{8}\cdot x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c\,.$$

$$IV)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot x^{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\,x^{\frac{1}{2}} + c =$$

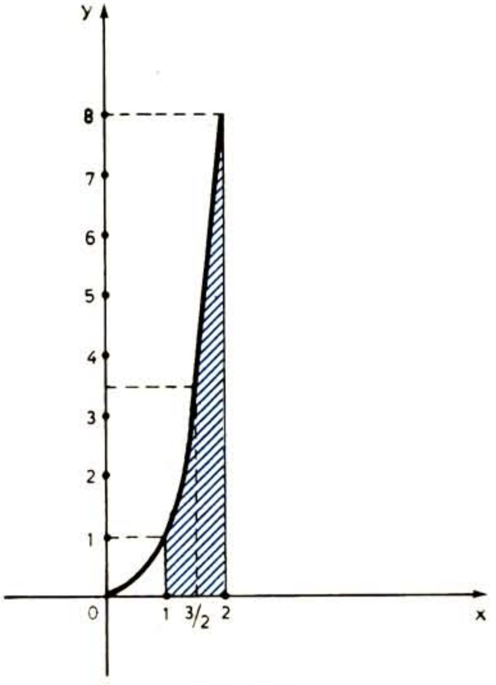
$= 2\sqrt{x} + c$ (γιά $x \geqslant 0$).

2. Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = x^3$ λέγεται κυβική παραβολή. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου τῆς παραπάνω κυβικῆς παραβολῆς, μεταξύ τῶν εὐθειῶν $x = 1$ καί $x = 2$ (σχ. 15.4α).

Ζητᾶμε τήν τιμή τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος $\int_1^2 x^3\,dx$.

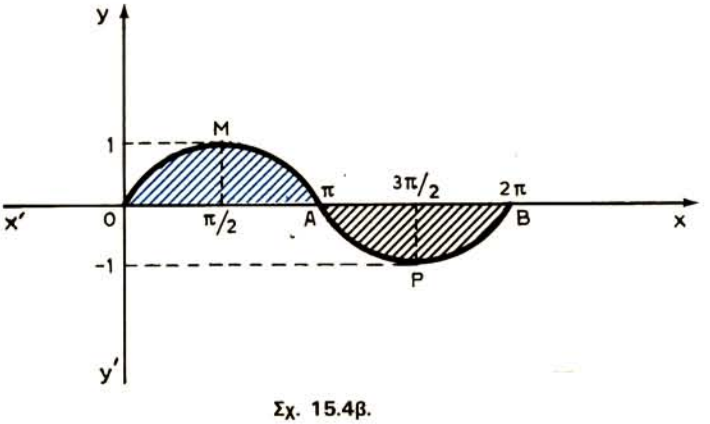
Ἐπειδή $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c$, ἔχομε:

$$\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + c\right]_1^2 = \left(\frac{1}{4}2^4 + c\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 + c\right) = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$



Σχ. 15.4α.

3. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου μεταξύ τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης $y = \eta\mu\, x$, ἀπό τή θέση Ο (0, 0) ἕως τή θέση 2π, καί τοῦ ἄξονα $\overrightarrow{Ox}$ (σχ. 15.4β).



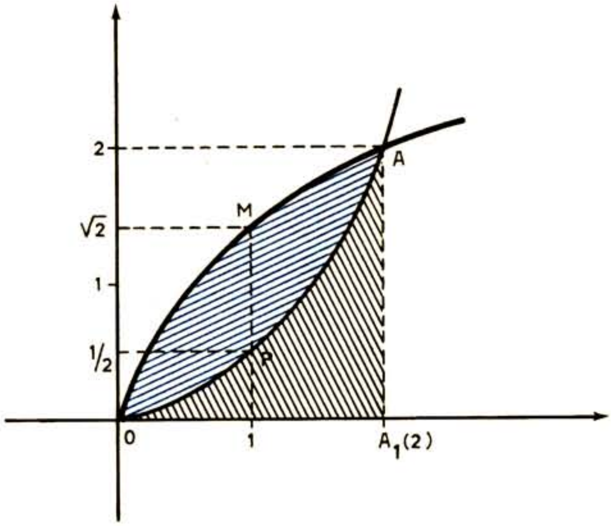
Σχ. 15.4β.

Ἐπειδή τά μικτόγραμμα σχήματα ΟΜΑ καί ΑΡΒ εἶναι ἴσα θά ἔχουν καί ἴσα ἐμβαδά.

Ἡ συνάρτηση ὅμως ημx παίρνει ἀρνητικές τιμές στό διάστημα (π, 2π) καί εἶναι ἐπίσης $\int_{\pi}^{2\pi}$ ημ x $= \Big[-$ συν x$\Big]_{\pi}^{2\pi} = -$ συν $2\pi - (-$ συν $\pi) = -1 - (+1)$ $= -2 < 0$.

Ἄν δέν θέλομε νά μιλᾶμε καί γιά ἀρνητικό ἐμβαδόν, ὑπολογίζομε τό ἐμβαδόν τοῦ ΟΜΑ, πού ἰσοῦται μέ $\int_{0}^{\pi}$ ημ x dx $= \Big[-$ συν x$\Big]_{0}^{\pi} = -$ συν $\pi - (-$συν $0) =$ $= 2$, καί τό διπλασιάζομε γιά νά ἔχομε τό ἐμβαδόν ἀπό τή θέση Ο (0,0) ἕως τή θέση 2π.

4. Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις πού δίνονται γιά $x \geqslant 0$ ἀπό τούς τύπους $y = \frac{1}{2}x^2$ (I) καί $y = \sqrt{2x}$ (II) ὡς πρός τό αὐτό ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου ΟΜΑΡΟ τό περιεχόμενο μεταξύ τῶν τόξων ΟΡΑ καί ΟΜΑ τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν (I) καί (II), ὅπου Α τό κοινό τους σημεῖο ἐκτός ἀπό τό Ο (σχ. 15.4γ).



Σχ. 15.4γ.

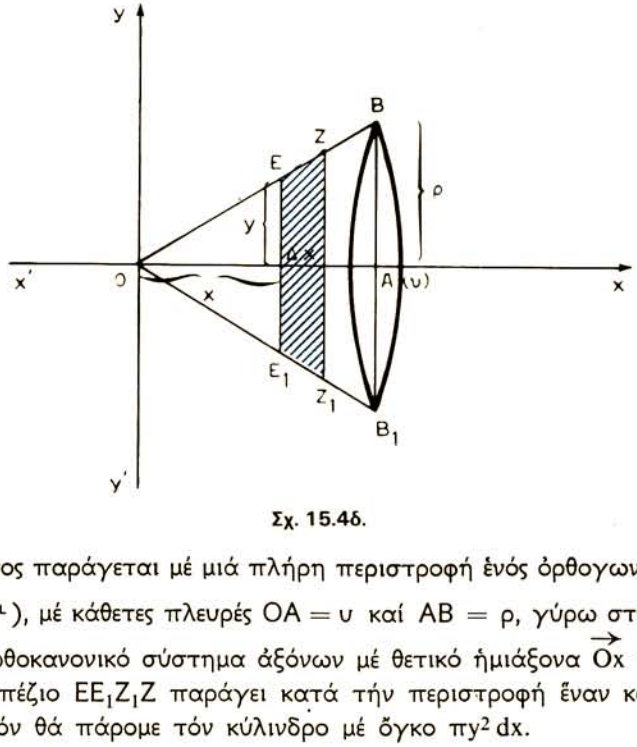
Γιά νά βροῦμε τό 2ο κοινό σημεῖο ἐξισώνομε τά δεύτερα μέλη τῶν (I) καί (II). Παίρνομε $\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2x} \Longrightarrow \frac{1}{4}x^4 = 2x \Longrightarrow x^3 = 8 \Longrightarrow x = 2$· ἄρα τό 2ο κοινό σημεῖο Α τῶν γραμμῶν ἔχει συντεταγμένες $\left(2, \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2\right)$.

Εἶναι εὔκολο, μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος, νά καταλάβομε ὅτι τό ζητούμενο ἐμβαδό εἶναι: $E = \int_0^2 \sqrt{2x}\, dx - \int_0^2 \frac{1}{2} x^2\, dx.$

Ἔχομε $\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2^3} =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{2^4} = \frac{8}{3}$ καί $\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{6}\cdot 8 = \frac{4}{3}$ καί συνεπῶς $E = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

5. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος κώνου μέ ὕψος υ καί ἀκτίνα βάσεως ρ (σχ. 15.4δ).



Σχ. 15.4δ.

Ὁ κῶνος παράγεται μέ μιά πλήρη περιστροφή ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ($\widehat{A} = 1^L$), μέ κάθετες πλευρές ΟΑ = υ καί ΑΒ = ρ, γύρω στήν εὐθεία ΟΑ. Θεωροῦμε ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων μέ θετικό ἡμιάξονα $\overrightarrow{Ox}$ τήν ἡμιευθεία ΟΑ. Τό τραπέζιο EE_1Z_1Z παράγει κατά τήν περιστροφή ἕναν κόλουρο κῶνο· ἀντί γι' αὐτόν θά πάρομε τόν κύλινδρο μέ ὄγκο $\pi y^2\,dx$.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται μέ: $V = \int_0^{\upsilon} \pi y^2 dx$. Ἀλλά $\frac{y}{x} = \frac{\rho}{\upsilon} \Longrightarrow$ $y = \frac{\rho}{\upsilon}x$ καί συνεπῶς $V = \int_0^{\upsilon} \pi\frac{\rho^2}{\upsilon^2}x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$.

15.5 Ἀσκήσεις.

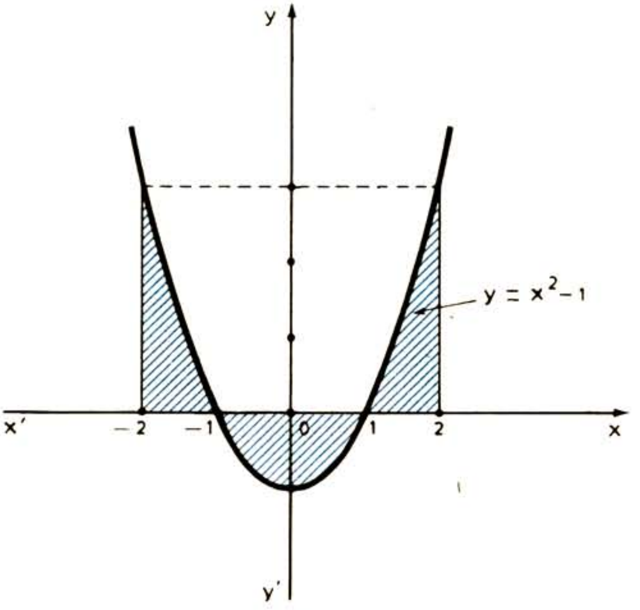
1. Νά βρεθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

I) $\int (2x^8 - 4x^5 + 3x^2)\,dx$ · II) $\int x^{\frac{8}{9}}\,dx$ · III) $\int$ συν$^2 x dx$ καί $\int$ ημ$^2 x\,dx$.

(Χρησιμοποιῆστε τό μετασχηματισμό συν$^2 x = \frac{1}{2}(1 + $συν$\,2x)$ καί ημ$^2 x = \frac{1}{2}(1 - $συν$\,2x)$)

IV) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,2x}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}$. V) $\int \frac{dx}{\eta\mu^2 2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\,2x}{\eta\mu^2 2x}$ · VI) $\int \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)dx$·
VII) $\int \eta\mu\left((4x - \frac{\pi}{2}\right)dx$.

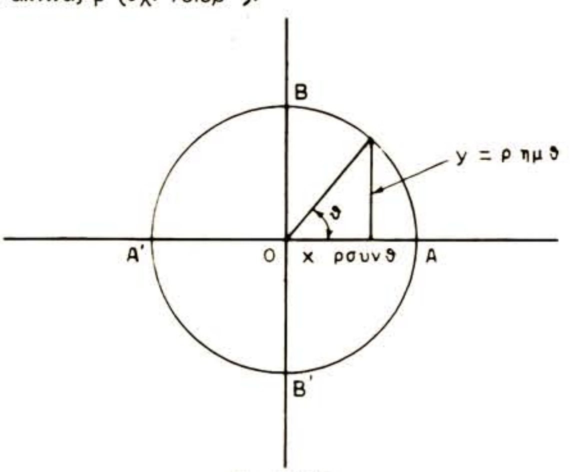
2. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδόν τῶν τριῶν διαγραμμισμένων χωρίων τοῦ σχήματος *15.5α.*



Σχ. 15.5α.

3. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδόν τῶν χωρίων πού ὁρίζονται ἀπό τήν καμπύλη μέ ἐξίσωση $y = x^2 - 2x - 3$, ἀπό τούς ἄξονες συντεταγμένων καί ἀπό τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση $x = \frac{7}{2}$.

4. Ὑπολογίζοντας τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^\rho y dx$, ὅπου $y = \rho\eta\mu\,\theta$ καί $x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta$ νά βρεῖτε τό ἐμβαδόν κύκλου ἀκτίνας ρ (σχ. *15.5β*).



Σχ. 15.5β.

(**Ὑπόδειξη:** $dx = -\rho\,\eta\mu\theta\, d\theta,\ \int_0^{\rho} y dx = -\rho^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \eta\mu^2\theta d\theta$).

5. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν χωρίων πού ὁρίζονται ἀπό τή γραμμή μέ ἐξίσωση $y = \sigma\upsilon\nu\, x$ καί ἀπό τό τμῆμα τοῦ ἄξονα Ox μέ ἄκρα τό σημεῖο O καί τό σημεῖο $\frac{3\pi}{2}$.

6. Νά προσδιορισθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν παραβολῶν ($y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$) πού διέρχονται ἀπό τά σημεῖα $(-1, 0)$ καί $(3, 0)$ καί ἡ μιά ἔχει κορυφή τό σημεῖο $(1, -2)$ καί ἡ ἄλλη τό $(1, 1)$· ἀκολούθως νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ πεπερασμένου χωρίου πού περιέχεται μεταξύ τῶν δυό παραβολῶν.

7. Ἡ δύναμη πού ἀσκοῦμε γιά νά ἐπιβάλομε σ' ἕνα ἐλατήριο ἐπιμήκυνση x εἶναι ἴση μέ κx, ὅπου κ μιά θετική σταθερά πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό ἐλατήριο. Τό δαπανόμενο ἔργο γιά ν' αὐξήσομε τήν ἐπιμήκυνση κατά Δx εἶναι $\kappa x \cdot \Delta x$. Νά βρεθεῖ τό ὁλικό ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιά μιά ἐπιμήκυνση s ἀπό τή θέση 0.

(**Ὑπόδειξη:** Παρατηρῆστε ὅτι $W_{o\lambda} = \int_0^s \kappa x\, dx$).

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη.

1. Νά προσδιορισθοῦν τά παρακάτω ὅρια:

I) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$. II) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3}$.

III) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$. IV) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - x\right)$ · V) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4+1} - x\right)$ ·

VI) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)^3}{x^3 - 5^3}$ · VII) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu\, 2x}{x^2}$ · VIII) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu\, x}{x - 2\eta\mu\, x}$ ·

IX) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1}$ · X) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right]$ ·

XI) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$. XII) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi\, 5x}{\eta\mu\, 7x}$ · XIII) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\eta\mu\, 3x}{2x - 3\eta\mu\, 2x}$.

XIV) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\, x} - \varepsilon\varphi\, x\right]$ · XV) $\lim\limits_{x \to \alpha} \left[(\alpha^2 - x^2)\, \varepsilon\varphi\, \dfrac{\pi x}{2\alpha}\right]$ · XVI) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \eta\mu\, x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\, x}}$

XVII) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\eta\mu\, 3x}{1 - 2\sigma\upsilon\nu\, x}$.

2.* Νά γίνει ή μελέτη τῆς συναρτήσεως πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ καί νά κατασκευαστεῖ ἡ παραστατική της καμπύλη (Κ). Ἀκολούθως νά προσδιοριστεῖ ἡ ἐφαπτομένη τῆς (Κ) στό σημεῖο Ο (0,0).

3. Θεωροῦμε τή συνάρτηση f(x) πού δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|} & \text{γιά } x \neq 0. \\ 1 & \text{γιά } x = 0. \end{cases}$$

Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

4.* Μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ θεωροῦμε τή συνάρτηση f(x) πού δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu\, x + \dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\, 2x}}{\eta\mu\, x} & \text{γιά } x \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{γιά } x = 0. \end{cases}$$

Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής στή θέση $x = 0$.

5.* Δίνεται ἡ συνάρτηση πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $y = \sqrt{x^2+x+1} - \alpha x$, μέ $\alpha \in \mathbf{R}$ · νά βρεθοῦν τά ὅρια αὐτῆς τῆς συναρτήσεως ὅταν $x \to \pm\infty$.

6.* Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Νά βρεθεῖ τό $\lim \frac{y}{x} = \lambda$ καί ἀκολούθως τό $\lim (y - \lambda x)$, ὅταν $x \to \pm\infty$.

7.* Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $[0, +\infty)$.

I) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι γνησίως αὔξουσα μέσα σ' ὅλο τό πεδίο ὁρισμοῦ της.

II) Νά δώσετε τήν ἔκφραση τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως $y = f^{-1}(x)$ καί ἀκολούθως νά σχεδιάσετε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων f(x) καί $f^{-1}(x)$ στό ἴδιο ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

8. Νά βρεθοῦν οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων πού δίνονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους:

I) $y = x^3(x+1)^2$ · II) $y = \frac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^3}$ · III) $y = 2x^2 : \sqrt{1+x^2}$ ·

IV) $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^3 \cdot \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^4$ · V) $y = \eta\mu^2 \frac{x}{4} : \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{5}}$ ·

VI) $y = \frac{\varepsilon\varphi\, x}{1 + \sigma\varphi^2 x} \left(\text{μέ } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

9.* I) Νά βρεθοῦν τά: $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\, \eta\mu \frac{1}{x}\right)$ καί $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\eta\mu \frac{1}{x}$.

II) Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις f(x) καί g(x) πού δίνονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} x\, \eta\mu \dfrac{1}{x} & \text{γιά } x \neq 0 \\ 0 & \text{γιά } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\, \eta\mu \dfrac{1}{x} & \text{γιά } x \neq 0 \\ 0 & \text{γιά } x = 0. \end{cases}$$

Νά ἐξετάσετε ἄν οἱ συναρτήσεις αὐτές εἶναι συνεχεῖς καί παραγωγίσιμες στή θέση $x = 0$.

10.* Θεωροῦμε τή συνάρτηση f (x) μέ τύπο: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^3 \pi |x|}{x^2} & \text{γιά } x \neq 0 \\ 0 & \text{γιά } x = 0. \end{cases}$

Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι συνεχής καί παραγωγίσιμη στή θέση $x = 0$.

11.* Θεωροῦμε τή συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τόν τύπο $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

Ι) Νά βρεῖτε τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν· ΙΙ) νά διαμορφώσετε τόν τύπο τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως $\overset{-1}{f}(x)$. ΙΙΙ) νά σχεδιάσετε τίς γραφικές παραστάσεις καί τῶν δυό συναρτήσεων στό ἴδιο ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

12.* Θεωροῦμε τή συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$ καί γράφομε τή σχέση τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς μέ τή μορφή:

$$f(x + h) - f(x) = h \cdot f'(x + \theta h), \text{ ὅπου } h > 0 \text{ καί } 0 < \theta < 1.$$

Ν' ἀποδείξετε ὅτι ὁ ἀριθμός θ παίρνει μιά ὁρισμένη τιμή, ἀνεξάρτητη ἀπό τίς τιμές τῶν α, β, γ, x καί h, καί νά δώσετε μιά γεωμετρική ἑρμηνεία σ' αὐτή τήν ἰδιότητα.

13.* Νά γίνει ἡ μελέτη καί ἡ γραφική τῶν συναρτήσεων πού δίνονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους:

Ι) $y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$ · ΙΙ) $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ · ΙΙΙ) $y = \dfrac{\eta\mu\, x - \sigma\upsilon\nu\, x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

14.* Νά βρεῖτε τίς γωνίες τῶν γραμμῶν μέ ἐξισώσεις:

α) $y = x^2$ καί $y = \dfrac{1}{2}x$ · β) $y = x^3 + x^2$ καί $y = 2x$. (Δηλαδή τή γωνία τῶν ἐφαπτομένων στά κοινά σημεῖα).

15.* Προσδιορίστε συναρτήσεις f(x) γιά τίς ὁποῖες ἔχομε:

Ι) $f'(x) = -4$ · ΙΙ) $f'(x) = 5x - 3$ · ΙΙΙ) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ · ΙV) $f''(x) = 7$.

V) $f''(x) = \eta\mu\, x$ · VΙ) $f''(x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ · VΙΙ) $f''(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu\, x$.

16.* Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ συνάρτηση μέ τύπο $f(x) = x \cdot |x|$ ἔχει πρώτη καί δεύτερη παράγωγο στίς θέσεις $x = 0$ καί $x = 1$.

17.* Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1$. Ι) Νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση. ΙΙ) Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες πού σχηματίζουν οἱ ἐφαπτομένες τῆς γραφικῆς παραστάσεως στίς θέσεις -1 καί $+1$, μέ τόν ἄξονα x'x. ΙΙΙ) Σέ ποιά θέση ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλη πρός τήν x'x.

18.* Νά βρεθοῦν τά ὁλοκληρώματα:

Ι) $\int (x+1)(x+2)^2\,dx$ · ΙΙ) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ · ΙΙΙ) $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

ΙV) $\int_1^3 \dfrac{|x-2|}{(x^2-4x)}\,dx$ · V) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x\,dx$ · VΙ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\varepsilon\varphi\, x}{\sigma\upsilon\nu\, 2x}\,dx$ ·

VΙΙ) $\int (\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 \omega t + \beta\,\eta\mu^2 \omega t)\,dt$ · VΙΙΙ) $\int \sigma\upsilon\nu^2 x\,\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$ ·

ΙΧ) $\int \eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu\, 2x\,dx$.

19. I) Νά ὑπολογίσετε τά ὁρισμένα ὁλοκληρώματα:

α) $\int_{-1}^{1} 4x^3\,dx$ καί β) $\int_{-2}^{2} 4x^4\,dx$.

II) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου μεταξύ τοῦ ἄξονα x'x, τῶν εὐθειῶν $x = -1$ καί $x = 1$, καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = 4x^4$.

III) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου μεταξύ τοῦ ἄξονα x'x, τῶν εὐθειῶν $x = -2$ καί $x = 2$, καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = 4x^3$.

IV) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου μεταξύ τῶν τόξων τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν $y = 4x^3$ καί $y = 4x^4$ πού ὁρίζονται ἀπό τά κοινά σημεῖα αὐτῶν τῶν γραμμῶν.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

1.1 Γενικά.

Ἀπό τά πολύ παλιά χρόνια, δηλαδή πρίν 4 καί 5 χιλιάδες χρόνια ἀπό σήμερα, ὅταν ἀναπτύσσονταν καί ἄκμαζαν οἱ πρῶτοι ἀνατολικοί πολιτισμοί τῆς ἀρχαίας Κίνας, τῶν Σουμερίων, τῆς χώρας τοῦ Νείλου, τῶν Περσῶν καί φυσικά ὅταν στή Μεσόγειο ἀνθοῦσε ὁ Ἑλληνικός Πολιτισμός καί ἀργότερα ὅταν στόν τότε γνωστό κόσμο κυριαρχοῦσε ἡ PAX ROMANA, ὅλα τά κράτη ἔκαναν ἀπαριθμήσεις καί μετρήσεις πραγμάτων, προϊόντων, ζώων καί ἀνθρώπων καί γενικά διάφορες καταγραφές πού παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες διοικητικῆς φύσεως· ἔκαναν δηλαδή καί τότε **ἀπογραφές** προσώπων καί ἀγαθῶν **ἐπί κρατικοῦ ἐπιπέδου.**

Δέν εἶναι λοιπόν ὑπερβολή νά δεχθοῦμε ὅτι ἡ συγκέντρωση **στατιστικῶν πληροφοριῶν** ἄρχισε εὐθύς μόλις οἱ ἀνθρώπινες κοινωνίες πέρασαν ἀπό τίς ἄναρχες ὁμάδες τῶν γενῶν στήν κρατική ὀργάνωση. Ἡ ἴδια ἡ λέξη «στατιστική» προέρχεται ἀπό τή Λατινική λέξη «STATUS», πού σημαίνει κατάσταση, καθεστώς. Τί εἶναι λοιπόν ἡ **Στατιστική;**

Σύμφωνα μέ τή σύγχρονη ἀντίληψη γι' αὐτή, θά μπορούσαμε νά ποῦμε ὅτι:

Στατιστική εἶναι ἡ Ἐπιστήμη πού ἀποβλέπει στήν ἑρμηνεία μιᾶς μεγάλης κατηγορίας φαινομένων, γεγονότων ἤ καταστάσεων μέσω τῆς ἐπεξεργασίας καί μελέτης πληροφοριῶν πού προέρχονται ἀπό παρατηρήσεις ἤ καί πειράματα καί ἐπιδέχονται ταξινόμηση καί ὁμαδοποίηση.

Ἡ Στατιστική δέν ἀρκεῖται σήμερα, ὅπως γινόταν μέχρι τόν 18ο αἰώνα, στήν καταγραφή καί τή συσσώρευση **στατιστικῶν δεδομένων,** προχωρεῖ - ὅπως εἴπαμε - στήν ἐπεξεργασία τῶν συγκεντρωμένων **στοιχείων** γιά νά βγάλει τήν ἀκριβή σημασία τους, πέρα ἀπό τίς προσωπικές ἐπιδράσεις καί ἐκτιμήσεις τοῦ Παρατηρητῆ. Οἱ θεωρητικές βάσεις τῆς Στατιστικῆς θεμελιώνονται καί ἡ μεθοδολογική της ἀνάπτυξη ὀφείλεται στή Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων, ἡ ὁποία, μέ ἀφετηρία τή μελέτη τῶν τυχερῶν παιγνιδιῶν, ἐμφανίστηκε κατά τόν 18ο αἰώνα καί ἀναπτύχθηκε ραγδαία σ' ἕναν ἰδιαίτερο κλάδο τῶν Μαθηματικῶν.

Καί ἀκριβῶς τά δεδομένα πού συγκεντρώνομε καί ἐξετάζομε, σέ μιά στατιστική μελέτη, παρουσιάζουν μεταβολές πού δέν μποροῦν νά προβλεφθοῦν ἤ νά ἐξηγηθοῦν, πού ὑπόκεινται δηλαδή στήν ἐπίδραση αὐτοῦ πού ὀνομάζομε «τύχη». Τέτοια εἶναι π.χ. ἡ περίπτωση τῶν βιολογικῶν δεδομένων, ὅπως τό βάρος ἤ τό ὕψος τῶν ἀνθρώπων ἤ ἀκόμα ἡ ἀρτηριακή πίεση κτλ.

Εἶναι π.χ. ὁ καπνός συντελεστικός παράγων τοῦ καρκίνου τῶν πνευμόνων; ἡ ἱλαρά ἡ ἐμφανιζόμενη κατά τήν ἀνάπτυξη τοῦ ἀνθρώπου εἶναι πραγματικά ὑπεύθυνη τῶν καρδιακῶν ἀλλοιώσεων; Σέ τέτοια καί ἄλλα παρόμοια ἐρωτήματα ἰατρικῆς φύσεως ἡ ἀπάντηση δέν μπορεῖ νά προκύψει (πρός τό παρόν τουλάχιστον) παρά μόνον ἀπό τή Στατιστική.

Διότι ἡ στατιστική διαδικασία εἶναι ἡ εἰδική ἐκείνη μέθοδος (θά μπορούσαμε νά ποῦμε), ἡ μόνη δυνατή ἄλλωστε, γιά νά διεισδύσομε σέ φαινόμενα καί καταστάσεις πού δέν μποροῦν νά ἀναπαραχθοῦν μέ πειράματα (σύμφωνα μέ τήν κλασσική ἔννοια τοῦ ὅρου, ὅπως π.χ. τά πειράματα τῆς Φυσικῆς), ἀλλά μόνο νά παρατηρηθοῦν, νά περιγραφοῦν καί νά καταγραφοῦν· ἀκόμα, εἶναι ἡ κατάλληλη μέθοδος γιά νά ἀντιληφθοῦμε φαινόμενα, τῶν ὁποίων δέν ἐλέγχομε τίς αἰτίες πού τά παράγουν εἴτε διότι αὐτές μᾶς εἶναι ἄγνωστες εἴτε διότι εἶναι πολυάριθμες καί σύνθετες, πράγμα πού ἰσοδυναμεῖ στήν πράξη μέ ἄγνοια.

Ἐν τούτοις ἡ στατιστική διαδικασία ἔρχεται πολλές φορές νά συμπληρώσει ἤ καί νά ἐπιβεβαιώσει πορίσματα πού ἔχουν προκύψει μέ τίς μεθόδους τῶν **ἀκριβῶν** Ἐπιστημῶν. Αὐτό εἶναι κατεξοχήν ἐντυπωσιακό στήν ἴδια τή Φυσική ὅπου ἡ στατιστική σπουδή τῶν «μικροφαινομένων» ἔρχεται πολύ συχνά νά δώσει «τό κλειδί» τῶν «ἀκριβῶν νόμων», αὐτῶν πού ἀπορρέουν κατά τή μελέτη σέ μακροσκοπική κλίμακα.

1.2 Διαίρεση τῆς στατιστικῆς.

Μιά διεξοδική στατιστική ἔρευνα ἀποτελεῖται ἀπό τρεῖς φάσεις, πού ἀναπαράγουν - θά μπορούσαμε νά ποῦμε - τά στάδια ἀναπτύξεως τῆς Στατιστικῆς.

Ἡ πρώτη φάση ἀρχίζει μέ τή συλλογή τῶν **στατιστικῶν στοιχείων** καί συνεχίζεται μέ τήν ταξινόμηση καί παρουσίασή τους κάτω ἀπό μιά «συμπυκνωμένη» μορφή. Ἐπιδιώκομε ἐδῶ νά κάνομε ὅσο γίνεται σαφή καί προσιτή τή γενική εἰκόνα τοῦ **στατιστικοῦ μας πληθυσμοῦ** (τῶν στατιστικῶν δεδομένων) καί νά βγάλομε τίς οὐσιώδεις πληροφορίες πού περιέχονται μέσα στά στατιστικά δεδομένα. Ἡ παραπάνω ἐπεξεργασία ἀποτελεῖ τό περιεχόμενο καί εἶναι τό ἀντικείμενο τῆς λεγόμενης **Περιγραφικῆς Στατιστικῆς.**

Σέ μιά δεύτερη φάση, ξεκινώντας ἀπό τά συμπυκνωμένα συμπεράσματα πού πήραμε στό τέλος τῆς πρώτης διαδικασίας, ἐπιδιώκομε νά ἀντιληφθοῦμε τή σημασία τῶν στοιχείων πού συγκεντρώσαμε, νά ἀναλύσομε καί νά ἐξηγήσομε αὐτά τά στοιχεῖα. Ἡ φάση αὐτή εἶναι - θά μπορούσαμε νά ποῦμε - ἡ **ἑρμηνευτική Στατιστική** καί θεμελιώνεται ἐξ ὁλοκλήρου στά πορίσματα τοῦ Λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων.

Τέλος, σ' ἕνα τελευταῖο στάδιο προσπαθοῦμε νά βγάλομε ἀπό τή στατιστική γνώση τοῦ «παρελθόντος» προβλέψεις γιά τό μέλλον· αὐτό συνήθως συμβαίνει κυρίως σέ προβλήματα οἰκονομικῆς μορφῆς.

1.3 Μέθοδοι ἐργασίας.

Πρακτικά ἡ στατιστική μελέτη ἀρχίζει ἀπό τή συγκέντρωση καί καταγραφή πληροφοριῶν καί μετρήσεων πάνω σέ μιά ἤ περισσότερες μεταβλητές ἰδιότητες ἑνός ὁρισμένου συνόλου Σ. Τό σύνολο αὐτό Σ λέγεται **στατιστικός πληθυσμός** ἤ ἁπλά **πληθυσμός** καί τά στοιχεῖα του χαρακτηρίζονται ὡς ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ· οἱ πληροφορίες ἐξάλλου, πού ἀποτελοῦν τό ἀντικείμενο τῆς στατιστικῆς μας ἔρευνας, λέγονται **παρατηρήσεις** ἤ **στατιστικά δεδομένα** ἤ ἀκόμα καί **στατιστικά στοιχεῖα.** Ὅταν τά στατιστικά δεδομένα προκύπτουν ἀπό ὅλα τά ἄτομα (στοιχεῖα) τοῦ (στατιστικοῦ) πληθυσμοῦ πού μᾶς ἐνδιαφέρει, τότε λέμε ὅτι ἔχομε κάνει **ἀπογραφή** αὐτοῦ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἔτσι π.χ. κάνομε ἀπογραφή ὅλων τῶν ἐργατῶν καί ἰδιωτικῶν ὑπαλλήλων μιᾶς πόλεως, ὅταν ἀπαριθμοῦμε τούς ἐργάτες καί ὑπαλλήλους πού ἐργάζονται σέ κάθε παραγωγικό τομέα τῆς οἰκονομίας ἀλλά καί ἐκείνους πού ἐργάζονται στή μεταφορά, διανομή καί ἐμπορεία τῶν προϊόντων καί ἀκόμα καί ἐκείνους πού ἐργάζονται στίς λεγόμενες ὑπηρεσίες (π.χ. στά τουριστικά ἐπαγγέλματα).

Μιά ἀπογραφή ὅμως, ὅταν μάλιστα ὁ στατιστικός πληθυσμός εἶναι πολυάριθμος, ἀπαιτεῖ μεγάλη ὀργάνωση, πολύ χρόνο καί εἶναι συχνά δαπανηρή· ἄλλοτε πάλι μιά ἀπογραφή μπορεῖ νά εἶναι ἀνέφικτη. Γι' αὐτούς τούς λόγους ὄχι σπάνια καταφεύγομε στή λεγόμενη **δειγματοληψία,** κατά τήν ὁποία οἱ παρατηρήσεις μας δέν ἀναφέρονται σέ ὅλα τά ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ, ἀλλά σ' ἕνα **δεῖγμα** του, μέ ἄλλα λόγια σ' ἕνα ἀντιπροσωπευτικό ὑποσύνολο τοῦ πληθυσμοῦ. Γιά τήν ἐπιλογή τῶν δειγμάτων ἐφαρμόζομε διάφορους κανόνες καί μεθόδους ἔτσι, ὥστε τά ἀποτελέσματα τῆς ἔρευνάς μας - στό μέτρο τοῦ δυνατοῦ - νά μήν εἶναι οὐσιωδῶς διάφορα ἀπό ἐκεῖνα πού θά παίρναμε ἄν χρησιμοποιούσαμε ὁλόκληρο τό σχετικό πληθυσμό.

Οἱ παραπάνω γραμμές καθώς καί τά λίγα Μαθήματα πού ἀκολουθοῦν, καί τά ὁποῖα περιορίζονται στίς βάσεις τῆς Περιγραφικῆς Στατιστικῆς, δέν ἐξασφαλίζουν πληρότητα ἀναπτύξεως τοῦ θέματος· ἁπλῶς ἐπιδιώκεται μ' αὐτά νά δειχθεῖ στόν ἀναγνώστη ἡ ἀξία καί ἡ σημασία τῆς Στατιστικῆς σ' ὅλες τίς Ἐπιστῆμες, ἀπό τήν Οἰκονομία μέχρι τή Φυσική καί τήν Ἀστρονομία, ἀλλά καί στή σύγχρονη ὀργάνωση τῆς κοινωνικῆς ζωῆς, καί νά προκαλέσουν τό ἐνδιαφέρον του.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ. ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ. ΠΙΝΑΚΕΣ

2.1 Ταξινόμηση παρατηρήσεων.

Ἡ ἀπασχόλησή μας μέ τά στοιχεῖα ἑνός κάποιου συνόλου ἀφορᾶ βεβαίως - ὅπως εἴπαμε καί παραπάνω - στή συγκριτική μελέτη μιᾶς ἤ περισσοτέρων ἰδιοτήτων τῶν θεωρούμενων στοιχείων. Οἱ ἰδιότητες αὐτές μπορεῖ νά εἶναι **ποιοτικές,** ὅπως π.χ. τό χρῶμα τῶν ματιῶν τῶν παιδιῶν μιᾶς κατασκηνώσεως ἤ τό εἶδος τῶν βιβλίων μιᾶς γενικῆς βιβλιοθήκης (λογοτεχνικά, ἐγκυκλοπαιδικά, ἐπιστημονικά)· μπορεῖ ἐπίσης νά εἶναι **ποσοτικές,** ὅπως τά βάρη ἤ τά ὕψη τῶν ἑλληνίδων μιᾶς ὁρισμένης ἡλικίας, τό πλῆθος τῶν ἀγοριῶν μέσα σέ κάθε οἰκογένεια ἑνός χωριοῦ, τά ποσοστά τῆς χοληστερίνης στό αἷμα μιᾶς ὁμάδας ἀσθενῶν κλπ. Ἐπειδή μιά ποσοτική ἰδιότητα ἐμφανίζεται, στά διάφορα ἄτομα ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ, μέ διάφορες ἀριθμητικές **τιμές** τήν ὀνομάζομε συνήθως **ποσοτική μεταβλητή** ἤ ἁπλᾶ **μεταβλητή.** Ἐνίοτε καί μιά ποιοτική ἰδιότητα τήν ὀνομάζομε **ποιοτική μεταβλητή,** μιά πού καί οἱ ποιοτικές ἰδιότητες ἐμφανίζονται μέ διάφορες ἀποχρώσεις, παραλλαγές, ἀκόμα καί εἰδικότερες κατηγορίες.

Ἄν ἔχομε στή διάθεσή μας τά ἀποτελέσματα κάποιων παρατηρήσεων, ἕνα σύνολο, συγκεκριμένα, ἀριθμητικῶν τιμῶν x_1, x_2, ..., x_K μιᾶς μεταβλητῆς, τιμῶν πού ἀναφέρονται σέ κάποια ἰδιότητα τῶν ἀτόμων ἑνός πληθυσμοῦ, τότε τό πρῶτο βῆμα τῆς στατιστικῆς ἐπεξεργασίας εἶναι νά ταξινομήσομε αὐτά τά ἀποτελέσματα. Τίς διάφορες τιμές μιᾶς μεταβλητῆς x τίς ἔχομε πάρει προφανῶς κατά μιά τυχαία τάξη· εὔλογο εἶναι ν' ἀρχίσομε μέ τήν καταγραφή αὐτῶν τῶν τιμῶν κατ' αὐξανόμενο μέγεθος. Αὐτή τήν προεργασία τήν ὀνομάζομε **ταξινόμηση τῶν δεδομένων.** Ἀκολουθεῖ ἡ παρουσίαση τῶν ταξινομημένων παρατηρήσεων μέ μιά μορφή προσιτή καί βολική γιά μελέτη καί ἐξαγωγή συμπερασμάτων.

2.2 Συχνότητες μιᾶς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς. Κατανομή.

Ἄς ξεκινήσομε μέ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1ο.

«Ἕνα χωριό Κ ἔχει 175 οἰκογένειες. Θέλομε νά μελετήσομε τί σχετικά συμβαίνει μέ τό πλῆθος τῶν παιδιῶν στίς οἰκογένειες τοῦ χωριοῦ Κ». Ἀρχικά σημειώνομε - μέ μιά ὁποιαδήποτε σειρά - τό πλῆθος τῶν παιδιῶν πού ἔχει καθεμιά ἀπό τίς 175 οἰκογένειες. Ὕστερα ἀπαριθμοῦμε τό πλῆθος τῶν οἰκογενειῶν πού ἔχουν μηδέν (0) παιδιά, τό πλῆθος τῶν οἰκογενειῶν πού ἔχουν ἕνα (1) παιδί, πού ἔχουν δύο (2) παιδιά κ.ο.κ. μέχρι συμπληρώσεως τοῦ στατιστικοῦ μας πληθυσμοῦ.

Ἄς ὑποθέσομε ὅτι βρήκαμε: μηδέν παιδιά ἔχουν (δέν ἔχουν παιδιά) 2 οἰκογένειες· ἀπό ἕνα παιδί 5 οἰκογένειες· ἀπό 2 παιδιά ἔχουν 12 οἰκογένειες· ἀπό 3 παιδιά 30 οἰκογένειες· ἀπό 4, 34 οἰκογένειες· ἀπό 5, 42 οἰκογένειες· ἀπό 6, 20 οἰκογένειες· ἀπό 7 παιδιά, πάλι 20 οἰκογένειες· ἀπό 8, 7 οἰκογένειες· καί ἀπό 9 παιδιά ἔχουν 3 οἰκογένειες».

Μέχρις ἐδῶ ἔχομε κάνει τήν ταξινόμηση τῶν στατιστικῶν μας δεδομένων.

Ἡ ἰδιότητα πού μᾶς ἐνδιαφέρει στό παραπάνω παράδειγμα εἶναι τό πλῆθος τῶν παιδιῶν σέ καθεμιά οἰκογένεια· εἶναι λοιπόν ἡ ἰδιότητα αὐτή μιά ποσοτική μεταβλητή x (ὅπου x πλῆθος παιδιῶν κατά οἰκογένεια) καί οἱ μή ἀρνητικοί ἀκέραιοι 0,1,2,3,4,5,6,7,8 καί 9 εἶναι οἱ τιμές της. Ἐπειδή μάλιστα οἱ τιμές πού παίρνει ἡ μεταβλητή αὐτή εἶναι ἀριθμοί μεμονωμένοι, καί εἰδικά ἐδῶ ἀκέραιοι, καί δέν ὑπάρχει ἡ δυνατότητα νά πάρει αὐτή τιμές ἀνάμεσα σέ δύο διαδοχικούς ἀκεραίους, λέγεται **ἀσυνεχής μεταβλητή.** Οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί 2,5,12,30,34,42,20,20,7,3 τῶν οἰκογενειῶν λέγονται **ἀπόλυτες συχνότητες** ἤ ἁπλά **συχνότητες** τῶν τιμῶν 0,1,2 κτλ. Λέμε π.χ. ὅτι ἡ (ἀπόλυτη) **συχνότητα** τῆς τιμῆς 5 εἶναι 42.

Γενικά ὀνομάζομε ἀπόλυτη συχνότητα ἤ ἁπλά συχνότητα μιᾶς τιμῆς (μιᾶς μεταβλητῆς) τόν μή ἀρνητικό ἀκέραιο ἀριθμό Σ πού δηλώνει πόσες φορές ἐμφανίζεται ἡ θεωρούμενη τιμή x τῆς ἐξεταζόμενης μεταβλητῆς μέσα σ' ἕνα σύνολο παρατηρήσεων.

Ἄν Σ_1, Σ_2, ..., Σ_κ εἶναι οἱ συχνότητες ἀντιστοίχως τῶν διαφορετικῶν μεταξύ τους τιμῶν x_1, x_2, ... x_κ μιᾶς μεταβλητῆς x καί ν εἶναι τό πλῆθος τῶν ἀτόμων τοῦ ἐξεταζόμενου στατιστικοῦ πληθυσμοῦ - στό παραπάνω παράδειγμα ἔχομε ν = 175 - τότε φανερό εἶναι ὅτι ἰσχύει:

$$\boxed{\nu = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_\kappa}$$

Δηλαδή:

Τό ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος ὅλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ.

Οἱ διάφορες συχνότητες πού βρίσκομε μέ τήν ταξινόμηση τῶν παρατηρήσεών μας ἀποτελοῦν αὐτό πού συνήθως λέμε **κατανομή συχνοτήτων** τῶν τιμῶν τῆς (θεωρούμενης) μεταβλητῆς. Στό παραπάνω παράδειγμα ἡ κατανομή συχνοτήτων πού διαπιστώνομε εἶναι 2,5,12,30,34,42,20,20,7,3. Παρατηροῦμε μάλιστα ὅτι στό ἀναφερόμενο παράδειγμα ἡ συχνότητα 20 ἐμφανίζεται δύο φορές· ὥστε εἶναι δυνατό μιά ἤ περισσότερες συχνότητες νά ἐμφανίζονται περισσότερο ἀπό μιά φορά. Μπορεῖ ἀκόμα ἡ συχνότητα μιᾶς τιμῆς νά ἰσοῦται μέ μηδέν· αὐτό σημαίνει ὅτι ἐκείνη ἡ τιμή δέν ἀντιστοιχίζεται μήτε σ' ἕνα ἄτομο τοῦ πληθυσμοῦ.

Γιά νά μποροῦμε νά συγκρίνομε διαφορετικούς πληθυσμούς ὡς πρός τήν ἴδια ἰδιότητα τῶν στοιχείων τους καί νά βγάζομε χρήσιμα συμπεράσματα εἶναι ἐνδιαφέρον νά κάνομε ἀναγωγή τῶν ἀπόλυτων συχνοτήτων στόν ὅλο πληθυσμό, νά ορίζομε δηλαδή τούς λόγους τῶν συχνοτήτων τῶν διαφόρων τιμῶν πρός τό πλῆθος ὅλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ. Ὁ **λόγος ἀκριβῶς μιᾶς ἀπόλυτης συχνότητας Σ πρός τό πλῆθος ν ὅλων τῶν ἀτόμων ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ, λέγεται σχετική συχνότητα.**

Ἄν λοιπόν μέ σ συμβολίσομε γενικά τή σχετική συχνότητα, ἔχομε τόν τύπο $\sigma = \frac{\Sigma}{\nu}$. Ἔτσι ἄν σ_1, σ_2, ... σ_κ εἶναι οἱ σχετικές συχνότητες πού ἀντιστοιχοῦν στίς (ἀπόλυτες) συχνότητες Σ_1, Σ_2,..., Σ_κ, ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ μέ ν ἄτομα, τότε παίρνομε:

$$\boxed{\sigma_1\ \sigma_2 + \ldots + \sigma_\kappa = \Sigma\sigma_i\,^{*} = \frac{\Sigma_1}{\nu} + \frac{\Sigma_2}{\nu} + \ldots + \frac{\Sigma_x}{\nu} = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1} \quad (1)$$

Δηλαδή: **τό ἄθροισμα τῶν σχετικῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ τή μονάδα.**

Στό προηγούμενο παράδειγμα οἱ σχετικές συχνότητες εἶναι:

$$\sigma_1 = \frac{2}{175}\,^{**} \simeq 0{,}0114,$$

---

* Ὁ συμβολισμός $\sum_1^\kappa \sigma_i$ σημαίνει τό ἄθροισμα τῶν ὅρων σ_1, σ_2, ..., ὅπου τό i παίρνει τιμές (φυσικές) ἀπό 1 ἕως κα' κ.

** Τό σύμβολο $\simeq$ σημαίνει περίπου ἴσο.

$$\sigma_2 = \frac{5}{175} \simeq 0{,}0286 \text{ κτλ.}$$

Πολλές φορές ἡ σχετική συχνότητα μιᾶς τιμῆς x_i ἀνάγεται σέ 100 περιπτώσεις· δίνεται δηλαδή τό ἰσοδύναμο τοῦ ἀριθμοῦ ἐμφανίσεως τῆς ὁρισμένης αὐτῆς τιμῆς (τῆς μεταβλητῆς) μέσα σέ πληθυσμό 100 ἀτόμων. Αὐτό τόν ἀριθμό θά τόν ὀνομάζομε **ἑκατοστιαία συχνότητα** καί τόν βρίσκομε ἄν πολλαπλασιάσομε τή σχετική συχνότητα ἐπί 100. Ἔχομε δηλαδή, ἄν μέ ϵ συμβολίσομε τήν ἑκατοστιαία συχνότητα:

$$\epsilon = 100 \, . \, \sigma$$

Διότι ἄν: σέ πληθυσμό ν ἡ συχνότητα μιᾶς τιμῆς x εἶναι Σ
σέ πληθυσμό 100 ἡ συχνότητα τῆς ἴδιας τιμῆς εἶναι; =

$$\Sigma \, . \frac{100}{\nu} = \frac{\Sigma}{\nu} \, . \, 100 = \sigma \, . \, 100.$$

Εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα $\sum_{1}^{\kappa} \epsilon_i$ τῶν ἑκατοστιαίων συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ 100 ἀφοῦ $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_\kappa = 100(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\kappa) = 100 \, . \, 1 = 100$· ἐξάλλου, ὅπως εἴπαμε, οἱ ἀριθμοί $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \epsilon_\kappa$ δέν εἶναι παρά οἱ ἀριθμοί μέ τούς ὁποίους θά ἔπρεπε νά ἐμφανίζονται μέσα σέ πληθυσμό 100 οἱ τιμές $x_1, x_2, \ldots x_\kappa$ ἀντιστοίχως γιά νά διατηροῦν αὐτοί οἱ ἀριθμοί τήν ἀναλογία μέ τήν ὁποία ἐμφανίζονται μέσα στόν ἀρχικό πληθυσμό ν.

(Θέλομε μ' ἄλλα λόγια νά ἰσχύει: $\dfrac{\epsilon_i}{100} = \dfrac{\Sigma_1}{\nu} = \sigma_i$)

Μερικές φορές εἶναι χρήσιμη καί ἡ λεγόμενη **ἀθροιστική συχνότητα** διαδοχικῶν τιμῶν, πού εἶναι τό ἄθροισμα τῆς συχνότητας μιᾶς τιμῆς μαζί μέ τίς συχνότητες ὅλων τῶν προηγουμένων (μικροτέρων) τιμῶν. Ἔτσι ἔχομε:
$A_1 = \Sigma_1, A_2 = \Sigma_1 + \Sigma_2, A_3 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \ldots, A_\kappa = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_\kappa = \nu$, ἄν μέ A_i σημειώσομε τήν ἀθροιστική συχνότητα μέχρι τῆς τιμῆς x_i.

2.3 Πίνακες συχνοτήτων.

Γιά νά ἔχομε μιά συνοπτική εἰκόνα τῆς κατανομῆς τῶν συχνοτήτων τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς καί γενικά τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς πρώτης, ὅπως παραπάνω, ἐπεξεργασίας τῶν στοιχείων ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ, κατασκευάζομε συγκεντρωτικούς **πίνακες,** ὅπου σέ χωριστές στῆλες καταγράφομε διατεταγμένα τίς τιμές τῆς ἐξεταζόμενης μεταβλητῆς, τίς ἀντίστοιχες συχνότητες, σχετικές συχνότητες κτλ.

Ὁ παρακάτω πίνακας 2.3.1 εἶναι ὁ πίνακας συχνοτήτων τοῦ προηγούμενου πρώτου παραδείγματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.1.
Κατανομή ἀριθμοῦ οἰκογενειῶν κατά τό πλῆθος τῶν παιδιῶν.

Πλῆθος παιδιῶν	Ἀριθμός οἰκογενειῶν (ἀπόλυτη συχνότηταΣ)	Σχετική συχνότητα $\sigma = \Sigma/\nu$	Ἑκατοστιαία συχνότητα $\epsilon = 100 . \sigma$	Ἀθροιστική συχνότητα F
0	2	$\frac{2}{175} \simeq 0,114$	1,14	2
1	5	$\frac{5}{175} \simeq 0,0286$	2,86	7
2	12	$\frac{12}{175} \simeq 0,0686$	6,86	19
3	30	$\frac{30}{175} \simeq 0,1714$	17,14	49
4	34	$\frac{34}{175} \simeq 0,1943$	19,43	83
5	42	$\frac{42}{175} \simeq 0,2400$	24.00	125
6	20	$\frac{20}{175} \simeq 0,1143$	11,43	.45
7	20	$\frac{20}{175} \simeq 0,1143$	11,43	165
8	7	$\frac{7}{175} \simeq 0,0400$	4,00	172
9	3	$\frac{3}{175} \simeq 0,0171$	1,71	175
ἀθροίσματα	$\Sigma_1+\Sigma_2+...+\Sigma_{10}= 175$	$\sigma_1 +\sigma_2+...+\sigma_{10} = 1$	$\Sigma_1+\Sigma_2+...+\Sigma_{10} =100$	

Ἄς κατασκευάσομε τώρα - γιά ἄσκηση - τόν πίνακα συχνοτήτων μιᾶς μεταβλητῆς πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ποιοτική. Ἡ ποιοτική αὐτή ἰδιότητα εἶναι οἱ τάξεις ἑνός (ἑξαταξίου) δημοτικοῦ σχολείου.

Παράδειγμα 2ο.

«Σ' ἕνα ἑξατάξιο δημοτικό σχολεῖο μέ τήν ἔναρξη τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1978 - 79 γράφηκαν: Στήν Α' τάξη 38 μαθητές· στή Β' τάξη 40· στή Γ' 38· στή Δ' 34· στήν Ε'

30 καί στήν ΣΤ΄ 28 μαθητές. Νά κατασκευασθεῖ ὁ πίνακας συχνοτήτων».
('Η ποιοτική ἰδιότητα εἶναι «οἱ τάξεις τοῦ σχολείου». 'Εξάλλου, ὅπως παρατηροῦμε, τά στοιχεῖα δίνονται ἐξαρχῆς ταξινομημένα).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.2.

Κατανομή τῶν μαθητῶν Δημοτικοῦ σχολείου κατά τάξεις.

Τάξεις σχολείου	'Αριθμός Μαθητῶν κατά τάξη (ἀπόλυτη συχνότητα Σ)	Σχετική συχνότητα $\sigma = \Sigma/\nu$	'Εκατοστιαία συχνότητα $\epsilon = 100 . 6$
Α΄	38	$\frac{38}{208} \simeq 0,1827$	$18,27 \simeq 18$
Β΄	40	$\frac{40}{208} \simeq 0,1923$	$19,23 \simeq 19$
Γ΄	38	$\frac{38}{208} \simeq 0,1827$	$18,27 \simeq 18$
Δ΄	34	$\frac{34}{208} \simeq 0,1635$	$16,35 \simeq 16$
Ε΄	30	$\frac{30}{208} \simeq 0,1442$	$14,42 \simeq 14$
ΣΤ΄	28	$\frac{28}{208} \simeq 0,1349$	$13,46 \simeq 13$
ΟΛΙΚΑ	$\nu = 28$	$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5+\sigma_6 = 1$	$\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6 = 100$

"Οπως παρατηροῦμε, τό πλῆθος ὅλων τῶν μαθητῶν (τῶν ἀτόμων) τοῦ στατιστικοῦ πληθυσμοῦ) προκύπτει - στό παράδειγμα 2 - ἄν προσθέσομε τίς γνωστές ἀπόλυτες συχνότητες τῶν ἕξι «τιμῶν» τῆς μεταβλητῆς (πίνακας 2.3.2).

2.4 'Ομαδοποίηση δεδομένων, ὅταν ἡ μεταβλητή εἶναι συνεχής.

"Οταν ἡ ἐξεταζόμενη ἰδιότητα εἶναι μιά ποσοτική ἰδιότητα καί μπορεῖ νά παίρνει ὅλες τίς δυνατές τιμές ἑνός δοσμένου διαστήματος, ὅπως π.χ. ὅταν πρόκειται γιά τό ὕψος ἤ τό βάρος μιᾶς ὁμάδας ἀνθρώπων, ζώων ἤ καί ἀντικειμένων, τότε ἡ μελετώμενη μεταβλητή ὀνομάζεται **συνεχής.**

Σέ μιά τέτοια περίπτωση τό πλῆθος τῶν παρατηρούμενων διαφορετικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἶναι συνήθως πολύ μεγάλο καί μάλιστα ὅταν ὁ θεωρούμενος στατιστικός πληθυσμός εἶναι πολυάριθμος· οἱ συχνότητες ἀντίστοιχα τῶν διαφόρων τιμῶν εἶναι μικρές καί ἡ κατανομή τους πολύ διάσπαρτη καί συνεπῶς διόλου εὔχρηστη.

Ἀναγκαζόμαστε τότε νά κάνομε ἀναγωγή καί «σύμπτυξη» τοῦ πλήθους τῶν δυνατῶν τιμῶν, ὁμαδοποιώντας πολλές γειτονικές τιμές. Ἀκριβέστερα ἡ ὅλη ἐργασία γίνεται ὡς ἑξῆς: χωρίζομε τό διάστημα τῶν δυνατῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς σέ ἕνα ὁρισμένο πλῆθος διαστημάτων, τοῦ ἴδιου (κατά προτίμηση) **πλάτους**, καί μέσα σέ καθένα ἀπ' αὐτά τά ὑποδιαστήματα, πού λέγονται **τάξεις** ἤ **κλάσεις**, ἀπαριθμοῦμε τούς ἀντίστοιχους μερικότερους πληθυσμούς. Ἔτσι, σέ μιά ὁμαδοποίηση τῶν παρατηρήσεων, δέν ἔχομε πλέον συχνότητα (ἤ σχετική συχνότητα) μιᾶς κάποιας τιμῆς, ἀλλά **συχνότητα κλάσεως** (ἤ ἀντίστοιχα σχετική συχνότητα κλάσεως). Γιά νά γίνει σαφέστερη ἡ σχετική διαδικασία σ' αὐτές τίς περιπτώσεις θά ἐπεξεργασθοῦμε κι ἐδῶ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3ο.

«Ἔχομε νά μελετήσομε τό βάρος 100 προσώπων. Τά βάρη **κυμαίνονται ἀπό 40 ὡς 45 kg***, δηλαδή οἱ τιμές τοῦ βάρους β ἱκανοποιοῦν τή σχέση $40 \leqslant \beta < 75$*. Χωρίζομε τό διάστημα μεταβολῆς σέ ὑποδιαστήματα τῶν 5 kg* (τό πλάτος τοῦ κάθε ὑποδιαστήματος εἶναι 5) συμφωνώντας τό κάθε διάστημα νά εἶναι κλειστό ἀπό ἀριστερά (ὅπως καί τό ὁλικό διάστημα [40,75)). Ἔτσι ἔχομε τίς παρακάτω ἑπτά κλάσεις [40,45), [45,50), [50,55), [55,60), [60,65), [65,70), [70,75).

Ἔστω ἀκόμα ὅτι οἱ ἀντίστοιχες (ἀπόλυτες) συχνότητες κλάσεως βρέθηκαν, ὕστερα ἀπό ὁμαδοποίηση (ἄθροιση) τῶν περιπτώσεων πού πέφτουν μέσα σέ κάθε κλάση, ἴσες μέ: 5,12,31,31,16,3,2. Νά γίνει ἡ πινακοποίηση τῶν συχνοτήτων τῶν κλάσεων» (πίνακας 2.4.1).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.1.

Κατανομή βαρῶν 100 προσώπων.

Κλάσεις	Μέση τιμή	Ἀπόλυτη συχνότητα Σ	Σχετική συχνότητα $\sigma = \Sigma/\nu$	Ἑκατοστιαία συχνότητα $\epsilon = 100.\sigma$	Ἀθροιστική συχνότητα
[40,45)	42,5	5	0,05	5	5
[45,50)	47,5	12	0,12	12	17
[50,55)	52,5	31	0,31	31	48
[55,60)	57,5	31	0,31	31	79
[60,65)	62,5	16	0,16	16	95
[65,70)	67,5	3	0,03	3	98
[70,75)	72,5	2	0,02	2	100
ΟΛΙΚΑ		$\nu = 100$	$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5+\sigma_6+\sigma_7=1$	$\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6+\epsilon_7=100$	

Ἔχει ἐνδιαφέρον νά συζητήσομε ἀκόμα λίγο πάνω στόν τρόπο ἐκλογῆς τῶν τάξεων. Πρέπει καταρχήν ὅλες οἱ κλάσεις - τό εἴπαμε ἤδη - νά ἔχουν τό ἴδιο πλάτος

* Ἡ σχέση $40 \leq \beta$ δέ σημαίνει ὅτι ἔχομε συναντήσει τιμή ἴση μέ 40, ἀλλά ὅτι ὁπωσδήποτε δέν ὑπάρχει τιμή κάτω ἀπό 40.

καί νά εἶναι γειτονικές, χωρίς ἐπικαλύψεις καί χωρίς χάσματα (πηδήματα). Γι' αὐτό τίς παίρνομε κλειστές ἀπό τό ἕνα μέρος (π.χ. ἀριστερά) καί ἀνοικτές ἀπό τό ἄλλο.

Μποροῦμε ἀκόμα νά χαρακτηρίζομε τίς διάφορες κλάσεις σημειώνοντας τήν τιμή πού βρίσκεται ἀκριβῶς στό μέσο τοῦ κάθε ὑποδιαστήματος· τήν τιμή αὐτή τήν ὀνομάζομε **μεσαία τιμή** (ἤ **μέσο σημεῖο**) τῆς κλάσεως. Ἡ μεσαία τιμή μιᾶς τάξεως εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ἀκραίων τιμῶν τῆς τάξεως. Στό παραπάνω παράδειγμα βλέπομε ὅτι οἱ μεσαῖες διαδοχικές τιμές εἶναι:

$$\frac{40+45}{2}=42{,}5,\qquad \frac{45+50}{2}=47{,}5,\ldots,\ 72{,}5.$$

Μέ τή χρησιμοποίηση τῶν μεσαίων τιμῶν καί τήν ἐξομοίωση καί ἀντικατάσταση ὅλων τῶν τιμῶν μιᾶς κλάσεως μέ μιά μοναδική τιμή, ἐκείνη τοῦ μέσου σημείου, ξαναγυρνοῦμε πάλι στήν περίπτωση μιᾶς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς.

Σημείωση: Εἶναι ἐνδεχόμενο μιά κλάση νά ἔχει ἀπόλυτη συχνότητα μηδέν, ὅπως ἀκριβῶς καί μιά κάποια τιμή μιᾶς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς.

Παρατήρηση. Ἀπό τήν προσεκτική μελέτη τῶν διαφόρων στηλῶν καταλαβαίνομε εὔκολα τή σημασία καί τήν ἀξία τῆς καθεμιᾶς. Ἔτσι π.χ. ἀπό τήν 3η στήλη τοῦ πίνακα 2.4.1 πληροφορούμαστε ὅτι 12 πρόσωπα ἔχουν μέσο βάρος 47,5 kg*· ἀπό τήν 6η στήλη τοῦ ἴδιου πίνακα βλέπομε ὅτι 79 πρόσωπα ἔχουν βάρος κάτω ἀπό 60 kg*· ἀπό τήν 4η στήλη τοῦ πίνακα 2.3.1 διαπιστώνομε ὅτι τό 24% τῶν οἰκογενειῶν ἔχουν 5 παιδιά.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

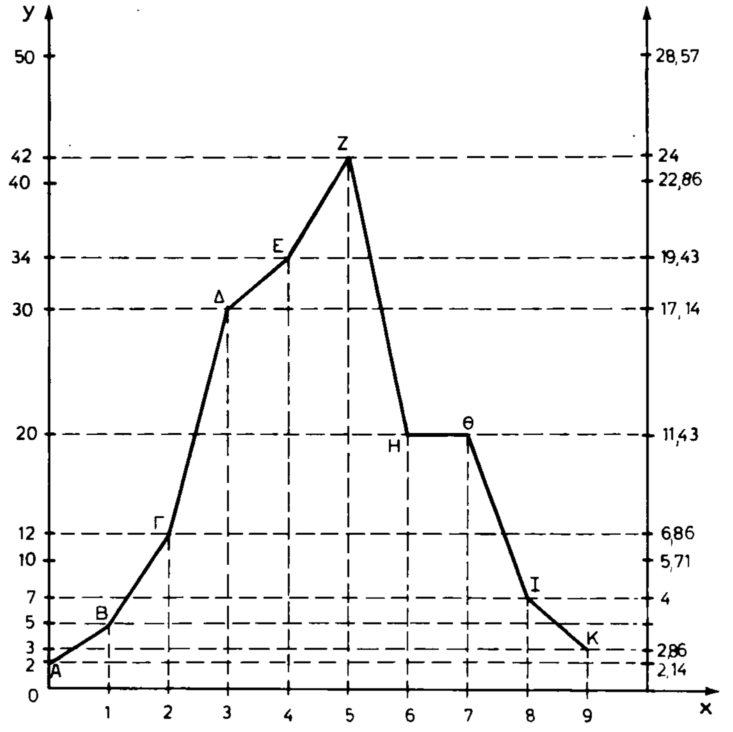
3.1 Τό πολύγωνο συχνοτήτων.

Εἶναι ἐνδιαφέρον καί χρήσιμο νά συνοδεύομε τούς πίνακες κατανομῆς συχνοτήτων, πού παρουσιάζουν συγκεντρωτικά ἀριθμητικά στοιχεῖα, μέ κατάλληλες κατά περίπτωση γραφικές παραστάσεις.

Μιά γραφική παράσταση εἶναι μιά εἰκόνα πού παρέχει ἄμεσα τή γενική συμπεριφορά τῶν στατιστικῶν στοιχείων· καί ἡ ἀμεσότητα τῶν ἐντυπώσεων εἶναι τέτοια, ὥστε ὄχι σπάνια ἀντικαθιστοῦμε ὁλότελα τούς πίνακες μέ γραφικές παραστάσεις.

Οἱ γραφικές αὐτές παραστάσεις παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία· στήν περίπτωση ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν λέγονται συνήθως **διαγράμματα συχνοτήτων.**

Ἄς δοῦμε ἀμέσως πῶς κατασκευάζεται τό διάγραμμα συχνοτήτων τοῦ πίνακα 2.3.1. Οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς καί οἱ ἀντίστοιχες (ἀπόλυτες) συχνότητες ἀποτελοῦν διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν· στό παράδειγμα 1 (παράγρ. 2.2) εἶναι: (0,2), (1,5), (2,12), (3,30), (4,34), (5,42), (6,20), (7,20), (8,7), (9,3). Τά πρῶτα στοιχεῖα αὐτῶν τῶν (διατεταγμένων) ζευγῶν δηλώνουν πλῆθος παιδιῶν καί τά δεύτερα στοιχεῖα δηλώνουν τίς ἀντίστοιχες συχνότητες. Σ' αὐτή τήν περίπτωση παίρνομε ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καί πάνω στόν ἄξονα τῶν τετμημένων σημειώνομε τίς τιμές τῆς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς (σχ. 3.1), ἐνῶ στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων σημειώνομε τίς συχνότητες. Τό μῆκος τοῦ μοναδιαίου διανύσματος πάνω στόν ἄξονα τῶν τετμημένων ἐκφράζει μιάν ὁρισμένη τιμή τῆς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς (στό θεωρούμενο παράδειγμα τό ἕνα παιδί) καί πάνω στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων ἕνα ὁρισμένο πλῆθος ἀτόμων ἀπό τό στατιστικό πληθυσμό, π.χ. 10. Ἀκολού-



Σχ. 3.1.

θως ὁρίζομε, κατά τά γνωστά, τά παραστατικά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ τῶν προηγουμένων διατεταγμένων ζευγῶν. Αὐτά τά μεμονωμένα σημεῖα μποροῦμε νά θεωρήσομε ὅτι ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση (τό διάγραμμα) τῶν συχνοτήτων στό θεωρούμενο παράδειγμα. Ἐν τούτοις σχεδιάζομε (συνήθως) καί τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ (σχ. 3.1) καί παίρνομε ἔτσι μιά συνεχή πολυγωνική (τεθλασμένη) γραμμή. Ἡ γραμμή αὐτή λέγεται **πολύγωνο συχνοτήτων.**

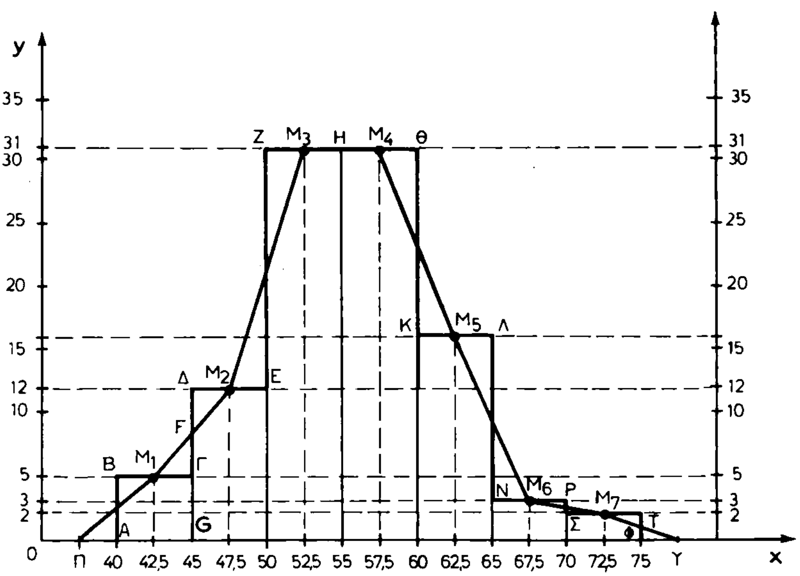
3.2 Τό ἱστόγραμμα συχνοτήτων.

Ὁ συνηθέστερα χρησιμοποιούμενος τρόπος γραφικῆς παραστάσεως συχνοτή-

των συνεχοῦς ποσοτικῆς μεταβλητῆς εἶναι τό λεγόμενο **ἱστόγραμμα συχνοτήτων.**

Πάνω στόν ἄξονα τῶν τετμημένων παίρνομε ἴσα διαδοχικά τμήματα, καθένα ἀπό τά ὁποῖα ἐκφράζει τό διάστημα μιᾶς κλάσεως. Ἀκολούθως κατασκευάζομε ὀρθογώνια μέ βάσεις τά διαστήματα τῶν κλάσεων καί ἐμβαδά ἴσα πρός τίς ἀντίστοιχες συχνότητες. Ἄν οἱ κλάσεις ἔχουν ἴσα πλάτη, τότε τίς βάσεις τῶν ὀρθογωνίων τίς παίρνομε ἴσες (σχ. 3.2) καί συνεπῶς τά ὕψη τῶν ὀρθογωνίων εἶναι τότε ἀνάλογα πρός τίς ἀντίστοιχες συχνότητες, μιά καί τά ἐμβαδά αὐτῶν τῶν ὀρθογωνίων θεωροῦνται ἴσα πρός τίς συχνότητες. Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά δεχθοῦμε ὅτι τά ὕψη τῶν διαδοχικῶν ὀρθογωνίων τοῦ ἱστογράμματος παριστάνουν τίς συχνότητες τῶν ἀντίστοιχων κλάσεων, τίς ὁποῖες συχνότητες σημειώνομε καί πάνω στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων*.

Τό ἐμβαδόν τοῦ σχήματος πού ὁρίζεται ἀπό τήν πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛΝΡΣΤΦ καί τό τμῆμα ΑΦ τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων (σχ. 3.2) εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαδοχικῶν ὀρθογωνίων, καί παριστάνει τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ ἐξεταζόμενου στατιστικοῦ πληθυσμοῦ.



Σχ. 3.2.

Στό σχῆμα 3.2 ἔχομε σχεδιάσει τό ἱστόγραμμα τοῦ παραδείγματος 3 (παράγραφος 2.4) καί παρατηροῦμε ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ ἱστογράμματος, πού εἶναι ἴσο μέ:

$$(5 + 12 + 31 + 31 + 16 + 3 + 2) \cdot \frac{A\Phi}{5} = 100 \cdot AG,$$

ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν προσώπων, τῶν ὁποίων τό βάρος ἐξετάσαμε, ἄν βέβαια θεωρήσομε μοναδιαῖα τά μήκη τῶν ἴσων πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων.

* Εἶναι σάν νά δεχόμαστε ὅτι οἱ πλευρές τῶν ὀρθογωνίων, πού εἶναι πάνω στόν ἄξονα τῶν x, ἔχουν μέτρο ἕνα.

Ἂν συνδέσομε μέ εὐθύγραμμα τμήματα τά μέσα M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 καί M_7 (σχ. 3.2) τῶν ἄνω πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων τοῦ ἱστογράμματος, ἡ πολυγωνική γραμμή $\Pi M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 Y$, ὅπου Π καί Υ εἶναι τά σημεῖα τομῆς τοῦ ἄξονα Ox μέ τίς εὐθεῖες πού ὁρίζουν τά σημεῖα M_1, M_7 μέ τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ἱστογράμματος (πρώτης) καί ΤΦ (τελευταίας) ἀντιστοίχως, λέγεται πάλι **πολύγωνο συχνοτήτων.**

Εἶναι τώρα ἐνδιαφέρον νά παρατηρήσομε ὅτι κάθε πλευρά τοῦ πολυγώνου συχνοτήτων κόβει καί ἀφήνει ἀπέξω ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, ὅπως π.χ. τό $\Delta M_2 F$ (σχ. 3.2)· αὐτό ὅμως ἀντικαθίσταται ἀπό ἕνα ἴσο ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού ἀνήκει στό ἐσωτερικό τοῦ πολυγώνου καί ἔχει τή μιά κάθετή του πλευρά πάνω στόν ἄξονα τῶν x ἤ πάνω στήν ἄνω βάση τοῦ προηγούμενου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ὅπως π.χ. συμβαίνει μέ τό $M_1 \Gamma F$, ζευγάρι τοῦ $\Delta M_2 F$. Ἔτσι ἡ ἐπιφάνεια ἡ περικλειόμενη ἀπό τό πολύγωνο συχνοτήτων καί τόν ἄξονα Ox εἶναι ἀκριβῶς ἰσοδύναμη μέ τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἱστογράμματος. Συνεπῶς τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου πού ὁρίζεται ἀπό τό πολύγωνο συχνοτήτων καί τόν ἄξονα τῶν x ἐκφράζει (ὅπως ἀκριβῶς καί τό ἱστόγραμμα) τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ ἐξεταζόμενου στατιστικοῦ πληθυσμοῦ.

3.3 Τό πολύγωνο τῶν σχετικῶν συχνοτήτων καί τό πολύγωνο τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων.

Ἂν στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων τοποθετήσομε ὄχι τίς ἀπόλυτες συχνότητες ἀλλά τίς σχετικές, ἔχομε τότε τό **πολύγωνο τῶν σχετικῶν συχνοτήτων.** Ἐπειδή $\sigma = \frac{\Sigma}{\nu} = \Sigma . \frac{1}{\nu}$, ἐπειδή δηλαδή οἱ ἀριθμοί πού ἐκφράζουν τίς σχετικές συχνότητες εἶναι ἀνάλογοι πρός ἐκείνους πού ἐκφράζουν τίς ἀπόλυτες $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{1}{\nu}$, μέ συντελεστή $\frac{1}{\nu}$, ἕπεται ὅτι ἡ μορφή τοῦ ἱστογράμματος καί τοῦ πολυγώνου συχνοτήτων δέν ἀλλάζει ὅταν περνᾶμε ἀπό τίς ἀπόλυτες στίς σχετικές συχνότητες. Ἂν μάλιστα στά σημεῖα τῶν συχνοτήτων (πάνω στόν ἄξονα Oψ) σημειώσομε τίς ἀντίστοιχες σχετικές συχνότητες, τότε τό ἴδιο ἀκριβῶς σχῆμα (ἱστόγραμμα, πολύγωνο συχνοτήτων) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἱστόγραμμα καί πολύγωνο ἀντίστοιχα τῶν σχετικῶν συχνοτήτων. Προτιμᾶμε κιόλας στή θέση τῶν σχετικῶν συχνοτήτων νά παίρνομε τίς ἑκατοστιαῖες συχνότητες πού εἶναι - καθώς γνωρίζομε - τά ἑκατονταπλάσια τῶν σχετικῶν. Οἱ ἀριθμοί τότε, οἱ σημειούμενοι πάνω στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων, ἐκφράζουν σέ πόσα ἑκατοστά τοῦ ὁλικοῦ πληθυσμοῦ ἐμφανίζονται οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς μεταβλητῆς πού σημειώνονται στόν ἄξονα τῶν τετμημένων. Σ' αὐτή τήν κλίμακα - τῆς ἑκατοστιαίας συχνότητας - εἶναι κατασκευασμένοι, στά σχήματα 3.1 καί 3.2, οἱ ἄξονες οἱ παράλληλοι πρός τούς ἄξονες Oψ*.

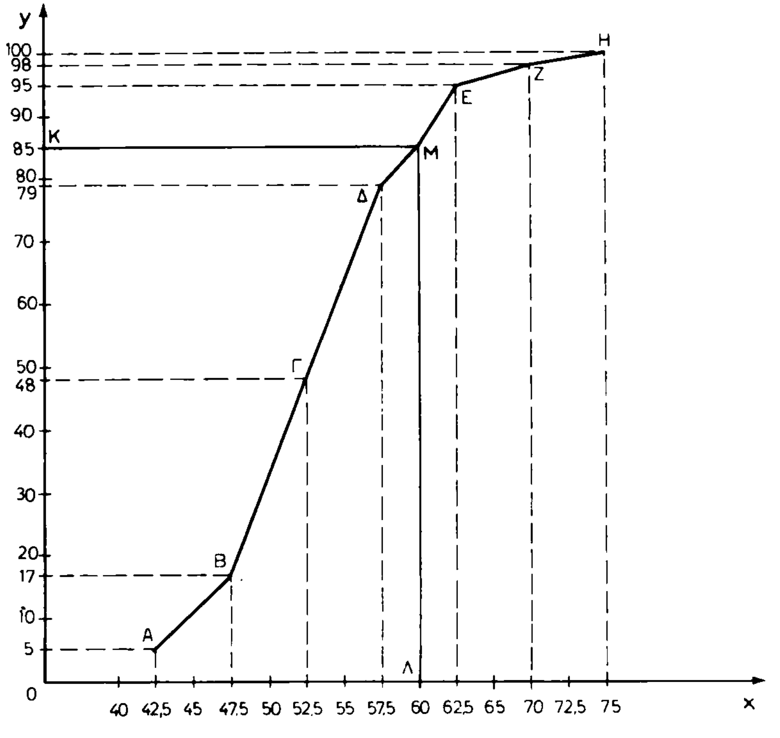
Πολλές φορές μᾶς εἶναι χρήσιμη ἡ γραφική παράσταση τῆς ἀθροιστικῆς συχνό-

---

* Στήν περίπτωση πού παριστάνει τό σχῆμα 3.2 οἱ τιμές τῆς ἀπόλυτης συχνότητας ταυτίζονται μέ ἐκεῖνες τῆς ἑκατοστιαίας, διότι ἡ ὁλική συχνότητα συμβαίνει νά εἶναι 100. Ἄρα μπορεῖ ὁ 2ος κατακόρυφος ἄξονας νά παραλειφθεῖ.

τητας. Ἂν ἀπεικονίσομε τά διατεταγμένα ζεύγη μέ πρῶτα στοιχεῖα τίς διαδοχικές τιμές μιᾶς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς ἤ τά μεσαῖα σημεῖα τῶν κλάσεων μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς καί δεύτερα τίς ἀντίστοιχες ἀθροιστικές συχνότητες, παίρνομε **τό πολύγωνο τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας.**

Στό σχῆμα 3.3 ἔχομε σχεδιάσει τό πολύγωνο τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας κατανομῆς κατά βάρη τῶν 100 προσώπων τοῦ παραδείγματος 3 (παράγρ. 2.4).



Σχ. 3.3.

Σύμφωνα μέ τό παραπάνω σχῆμα, ἄν π.χ. στό σημεῖο Κ (0,85) τοῦ ἄξονα τῶν τεταγμένων φέρομε κάθετη πρός τήν Οψ καί ἀπό τό σημεῖο τομῆς αὐτῆς τῆς καθέτης, ἔστω Μ, μέ τό διάγραμμα τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας φέρομε τήν κάθετη πρός τόν ἄξονα Οx, τότε πρέπει νά συμπεράνομε ὅτι 85 ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ μας ἔχουν ὁπωσδήποτε βάρος κάτω ἀπό 60 κιλά.

3.4 Τό ραβδόγραμμα καί τό κυκλικό διάγραμμα.

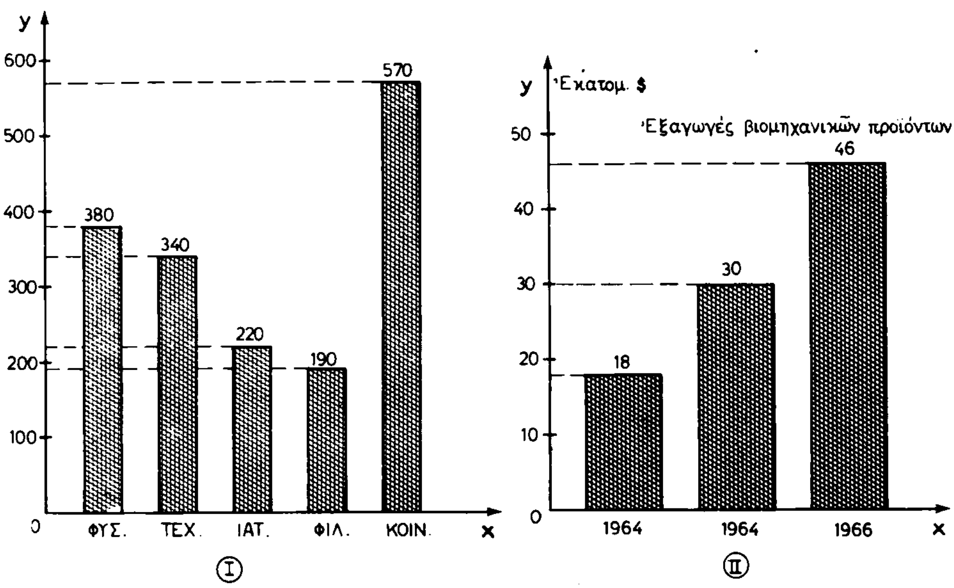
Μιά ἁπλή καί εὔκολη στήν ἀνάγνωση γραφική παράσταση εἶναι τό **ραβδόγραμμα.** Αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό ὀρθογώνια μέ ἴσες βάσεις πάνω στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων καί ὕψη ἀνάλογα πρός τίς ἀντίστοιχες συχνότητες. Τά ὀρθογώνια αὐτά δέν ἔχουν (κατανάγκην) συμπίπτουσες πλευρές καί τά τμήματα τῶν βάσεων ἔχουν συμβατικό νόημα, δεδομένου ὅτι αὐτός ὁ τρόπος γραφικῆς παραστάσεως - ὅπως καί ὁ ἀμέσως ἑπόμενος - χρησιμοποιεῖται κυρίως ὅταν ἡ μεταβλητή εἶναι ποιοτική ἤ ὅταν πρόκειται γιά κατανομή συχνοτήτων σέ διακεκριμένες χρονικές περιόδους.

Ἀλλά ἄς μιλήσομε καλύτερα μέ παραδείγματα.

Παράδειγμα 4ο.

«Μέσα στό ἡμερολογιακό ἔτος 1978 ἀπό τό Πανεπιστήμιο Π ἀποφοίτησαν: ἀπό τίς Φυσικομαθηματικές σχολές 380· ἀπό τίς Τεχνικές Σχολές 340· ἀπό τίς Ἰατρικές 220· ἀπό τίς Φιλοσοφικές 190 καί ἀπό τίς Σχολές Κοινωνικῶν Ἐπιστημῶν 570. Νά δοθεῖ μέ ραβδόγραμμα ἡ γραφική παράσταση τῆς κατανομῆς τῶν συχνοτήτων».

Στό σχῆμα 3.4α(I) ἔχομε σχεδιάσει τό ραβδόγραμμα τῆς κατανομῆς τῶν συχνοτήτων τοῦ πληθυσμοῦ τῶν 1700 = 380 + 340 + 220 + 190 + 570 ἀποφοίτων τοῦ Πανεπιστημίου Π (κατά τό ἔτος 1978) μέ βάση τήν ποιοτική μεταβλητή «εἶδος πανεπιστημιακῆς Σχολῆς».

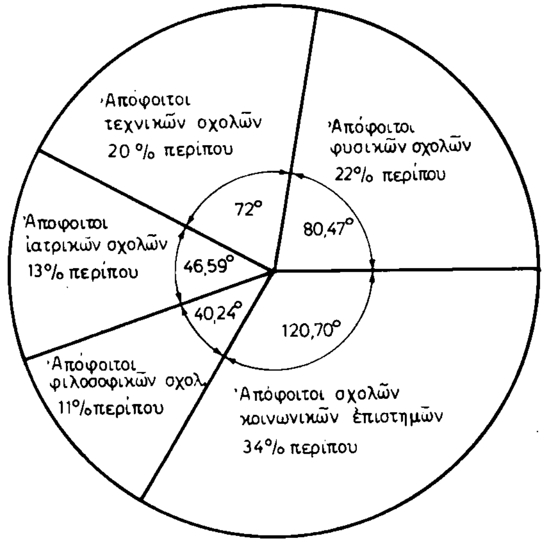


Σχ. 3.4α.

Στό σχῆμα 3.4α(II) βλέπομε τό ραβδόγραμμα πού ἐκφράζει τό ὕψος ἐξαγωγῆς - σέ ἑκατομμύρια δολλάρια - βιομηχανικῶν προϊόντων τῆς χώρας μας κατά τήν τριετία 1964, 65, 66.

Ἕνας ἄλλος ἀκόμη, ἐξίσου ἁπλός, τρόπος γραφικῆς ἐκφράσεως μιᾶς κατανομῆς εἶναι τό κυκλικό διάγραμμα. Τό κυκλικό διάγραμμα δέν εἶναι τίποτε περισσότερο ἀπό ἕναν κυκλικό δίσκο χωρισμένο σέ κυκλικούς τομεῖς, τῶν ὁποίων τά ἐμβαδά παριστάνουν τίς συχνότητες κατανομῆς τοῦ ἐξεταζόμενου πληθυσμοῦ (σχ. 3.4β)*. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἐπίκεντρες γωνίες τῶν κυκλικῶν τομέων θά ἔχουν μέτρα ἀνάλογα πρός τίς συχνότητες.

Τό σχῆμα 3.4β εἶναι τό κυκλικό διάγραμμα τοῦ παραπάνω παραδείγματος 4.



Σχ. 3.4β.

Ἀρχικά μετατρέπομε τίς σχετικές συχνότητες:

$$\frac{380}{1700} = \frac{38}{170} \quad \frac{34}{170} \quad \frac{22}{170} \quad \frac{19}{170} \quad \frac{57}{170}$$

σέ μοῖρες, δηλαδή σέ μέρη τοῦ 360 ἀνάλογα. Συγκεκριμένα παίρνομε:

$$\frac{38}{170} \,.\, 360 \simeq 0{,}2235294 \,.\, 360 \simeq 80{,}47°, \qquad \frac{360}{170} \,.\, 34 = \frac{36}{17} \,.\, 34 = 72°,$$

$$\frac{36}{17} \,.\, 22 \simeq 2{,}117647 \,.\, 22 \simeq 46{,}59°, \qquad \frac{36}{17} \,.\, 19 \simeq 2{,}117647 \,.\, 19 \simeq 40{,}24°$$

καί $$\frac{36}{17} \,.\, 57 \simeq 120{,}70°.$$

(Παρατηρεῖστε: 22% + 20% + 13% + 11% + 34% = 100%)

---

* Θεωροῦμε ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ δίσκου παριστάνει ὁλόκληρο τόν πληθυσμό.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΙΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

4.1 Γενικά.

Μιά κατανομή συχνοτήτων μᾶς δίνει βέβαια ἀρκετές χρήσιμες πληροφορίες γιά μιά μεταβλητή (ποσοτική ἤ ποιοτική) ἑνός πληθυσμοῦ πού μελετᾶμε. Οἱ πίνακες κατανομῆς τῶν συχνοτήτων καί πολύ περισσότερο οἱ γραφικές τους παραστάσεις μᾶς διευκολύνουν νά ἀποκτήσομε μιά συνολική καί πλήρη ἐποπτεία τοῦ πληθυσμοῦ πού ἐξετάζομε σέ συνδυασμό μέ τή συσχετισμένη μεταβλητή πού μᾶς ἐνδιαφέρει. Ἐντούτοις ἡ ἀνάγνωση μιᾶς κατανομῆς συχνοτήτων (ἀπό ἕναν πίνακα) δέν εἶναι πάντα πολύ βολική καί ὁπωσδήποτε δέν ἐπιτρέπει τή γρήγορη παραγωγή μιᾶς γενικῆς ἰδέας αὐτῆς τῆς κατανομῆς. Ἀκόμα, μόνο μέ τούς πίνακες καί τά διαγράμματα τῶν συχνοτήτων, δέν εἶναι δυνατό νά ἀντιληφθοῦμε τήν ὕπαρξη νομοτελειακῆς συνθέσεως τῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν. Ἀναζητοῦμε λοιπόν νά παρουσιάσομε τά βασικά χαρακτηριστικά ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ κάτω ἀπό μιά μορφή πιό λακωνική, μέ τή βοήθεια ἑνός ὁρισμένου πλήθους τυπικῶν τιμῶν, πού λέγονται **χαρακτηριστικές τιμές.**

Αὐτές πού ἐμεῖς ἐδῶ θά ἐξετάσομε εἶναι οἱ ἑξῆς: ὁ **ἀριθμητικός μέσος** (ἤ μέση τιμή) τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς, ἡ **διάμεσος τιμή** καί ἡ **ἐπικρατοῦσα τιμή.**

4.2 Ἀριθμητικός μέσος (ἤ μέση τιμή).

Ἄν $x_1, x_2, x_3, \dots x_\nu$ εἶναι οἱ τιμές μιᾶς ποσοτικῆς μεταβλητῆς x, τότε τό πηλίκο τοῦ ἀθροίσματος $\sum_{i=1}^{i=\nu} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_\nu$ διά τοῦ πλήθους ν αὐτῶν τῶν τιμῶν λέγεται **μέση τιμή** ἤ **ἀριθμητικός μέσος** (τῆς μεταβλητῆς x). Ἄν αὐτή τήν τιμή τή σημειώσουμε μέ $\overline{x}$ (διαβάζομε: x ἐπιγραμμισμένο), τότε γράφομε:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_\nu}{\nu}} \quad \text{ἤ συντομότερα} \quad \boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{1}^{\nu} x_i}{\nu}} \qquad (1)$$

Ἄν π.χ. 2,47, 4,89, 6,09, 5,49, 5,13, 6,13, 8,01 καί 10,27 εἶναι ὀκτώ τιμές μιᾶς μεταβλητῆς (ἀποτελέσματα, ἄς ποῦμε, 8 μετρήσεων ἑνός μεταβαλλόμενου μεγέθους), τότε ἡ μέση τιμή τους εἶναι:

$$\frac{2{,}47 + 4{,}89 + 6{,}09 + 5{,}49 + 5{,}13 + 6{,}13 + 8{,}01 + 10{,}27}{8} = \frac{48{,}48}{8} = 6{,}06 \simeq 6.$$

Στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία μιά ἤ περισσότερες τιμές ἐμφανίζονται ὄχι μόνο μιά φορά, ὅταν δηλαδή ἡ (ἀπόλυτη) συχνότητα μιᾶς τιμῆς δέν εἶναι ἡ μονάδα, εἶναι φανερό ὅτι πρέπει νά τήν προσθέσομε - αὐτή τήν τιμή - τόσες φορές, ὅσες ἔχει παρατηρηθεῖ· μέ ἄλλα λόγια πρέπει νά προσθέσομε τό γινόμενο τῆς λογιζόμενης τιμῆς ἐπί τήν ἀντίστοιχη συχνότητα. Πιό συγκεκριμένα: Ἄν ὑποθέσομε ὅτι οἱ τιμές $x_1, x_2 \ldots, x_\kappa$ παρουσιάζουν ἀντίστοιχα συχνότητες (ἀπόλυτες) $\Sigma_1, \Sigma_2 \ldots, \Sigma_\kappa$· τότε ἡ μέση τιμή δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma_1 x_1 + \Sigma_2 x_2 + \ldots + \Sigma_\kappa x_\kappa}{\nu} = \frac{\Sigma_1}{\nu} . x_1 + \frac{\Sigma_2}{\nu} . x_2 + \ldots + \frac{\Sigma_\kappa}{\nu} . x_\kappa .} \qquad (2)$$

Οἱ παραπάνω συντελεστές $\frac{\Sigma_1}{\nu}, \frac{\Sigma_2}{\nu}, \ldots, \frac{\Sigma_\kappa}{\nu}$ τοῦ τύπου (2) δέν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπό τίς σχετικές συχνότητες $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\kappa$. Ἔτσι ἔχομε καί τόν τύπο:

$$\boxed{\bar{x} = \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \ldots + \sigma_\kappa x_\kappa = \sum_{i=1}^{i=\kappa} \sigma_i x_i} \qquad (3)$$

Στήν κατανομή π.χ. πού περιγράψαμε στόν Πίνακα 2.3.1 ἡ μέση τιμή εἶναι ἴση μέ:

$$\frac{2.0 + 5.1 + 12.2 + 30.3 + 34.4 + 42.5 + 20.6 + 20.7 + 7.8 + 3.9}{175} =$$

$$= \frac{808}{175} \simeq 4{,}62.$$

Ὅταν οἱ τιμές τῆς x εἶναι ὁμαδοποιημένες σέ κλάσεις, τότε κάθε κλάση ἀντιπροσωπεύεται, ὅπως γνωρίζομε, ἀπό τή μεσαία τιμή της καί τότε στόν τύπο (2) τά $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ παριστάνουν τά κέντρα (τίς μεσαῖες τιμές) τῶν κλάσεων ἐνῶ, $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\kappa$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ συχνότητες αὐτῶν τῶν κλάσεων.

Ἔτσι ὁ ἀριθμητικός μέσος στήν κατανομή πού δίνεται ἀπό τόν πίνακα 2.4.1 ἰσοῦται μέ:

$$\frac{5 . 42{,}5 + 12 . 47{,}5 + 31 . 52{,}5 + 31 . 57{,}5 + 16 . 62{,}5 + 3 . 67{,}5 + 2 . 72{,}5}{100} =$$

$$= \frac{212{,}5 + 570 + 1627{,}5 + 1782{,}5 + 1000 + 202{,}5 + 145}{100} = 55{,}40.$$

Μποροῦμε λοιπόν νά λέμε ὅτι τό **μέσο βάρος** τῶν 100 προσώπων πού ἀναφέρονται στόν πίνακα 2.4.1 εἶναι περίπου 55,5 κιλά.

Ἄν $\bar{x}$ ὁ ἀριθμητικός μέσος μιᾶς ἀριθμητικῆς σειρᾶς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ν τιμῶν, τότε τή διαφορά $x_i - \bar{x}$, ὅπου $i = 1, 2, \ldots, \nu$, τήν ὀνομάζομε **ἀπόκλιση** τῆς τιμῆς x_i ἀπό τόν ἀριθμητικό μέσο $\bar{x}$ τῶν θεωρούμενων τιμῶν. Παρατηροῦμε ὅτι:

$$x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + \ldots + x_\nu - \bar{x} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) - \nu\bar{x} =$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) - \nu . \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} = 0 \cdot$$

δηλαδή τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀποκλίσεων εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

4.3 Διάμεσος τιμή. Ἐπικρατοῦσα τιμή.

Ἔστω $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu$ οἱ τιμές μιᾶς μεταβλητῆς ταξινομημένες κατ' αὐξανόμενο μέγεθος σ' ἕναν πληθυσμό μέ ν στοιχεῖα. Ἄν ν περιττός ($\nu = 2\rho - 1$), τότε ἡ τιμή $x_\delta = x_\rho$, ὅπου $\rho = \frac{\nu + 1}{2}$, πού εἶναι ὁ μεσαῖος ὅρος τῆς ἀκολουθίας τῶν τιμῶν, λέγεται **διάμεσος** (τιμή) αὐτῶν τῶν τιμῶν. Ἄν ὅμως ν εἶναι ἄρτιος ($\nu = 2\rho$), τότε **διάμεσος** τῶν τιμῶν λέγεται τό ἡμιάθροισμα τῶν ὅρων x_ρ καί $x_{\rho+1}$, δηλαδή ὁ ἀριθμός:

$$x_\delta = \frac{x_\rho + x_{\rho+1}}{2}$$

Ἄν π.χ. οἱ μεμονωμένες τιμές μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι: 7, 19, 23, 23, 34, 47, 50, 50, 63, ἡ διάμεσος τιμή εἶναι ὁ ἀριθμός 34, ἐνῶ ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν ἴδιων τιμῶν ἰσοῦται μέ:

$$\frac{7 + 19 + 23 + 23 + 34 + 47 + 50 + 50 + 63}{9} = \frac{316}{9} \simeq 35{,}1$$

Ἄν ὅμως οἱ τιμές πού διαθέτομε εἶναι π.χ.:
6, 16, 43, 50, 51, 52, 52, 60, 60, 68, τότε ἡ διάμεσος τιμή ἰσοῦται μέ

$\frac{51 + 52}{2} = \frac{103}{2} = 51{,}5$ (τό ἡμιάθροισμα τοῦ 5ου καί 6ου ὅρου), ἐνῶ ὁ ἀριθμητικός μέσος αὐτῶν τῶν τιμῶν ἰσοῦται μέ:

$$\frac{6 + 16 + 43 + 50 + 51 + 52 + 52 + 60 + 60 + 68}{10} = 45{,}8.$$

Παρατηροῦμε ὅτι: στό πρῶτο παραπάνω παράδειγμα ἡ διαφορά μεταξύ μέσου ἀριθμητικοῦ καί διαμέσου τιμῆς δέν εἶναι σημαντική· τό ἀντίθετο ὅμως συμβαίνει στό δεύτερο παράδειγμα.

Ἡ διάμεσος τιμή στό παράδειγμα 1 τῆς παραγράφου 2.2 εἶναι ἡ τιμή τῆς τάξεως $\frac{175 + 1}{2} = 88$, ἀφοῦ στήν προκείμενη περίπτωση εἶναι $\nu = 175$. Παρατηρώντας τόν πίνακα τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας διαπιστώσομε ὅτι ἡ διάμεσος βρίσκεται στήν 6η ὁριζόντια γραμμή καί συνεπῶς εἶναι $x_\delta = 5$. Παραπάνω ἔχομε βρεῖ ὅτι ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν ἴδιων τιμῶν εἶναι ἴσος μέ 4,62 (σελ. 197).

Ὁ ὑπολογισμός τῆς διαμέσου στήν περίπτωση ὁμαδοποιημένων παρατηρήσεων παρουσιάζει δυσκολίες, ἐπειδή δέν γνωρίζομε μέ ἀκρίβεια τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς.

Ἐπικρατοῦσα τιμή ὀνομάζομε ἐκείνη τήν τιμή, ἀνάμεσα σ' ὅλες τίς ἐμφανιζόμενες τιμές τῆς μεταβλητῆς μας, πού παρουσιάζει τή μεγαλύτερη συχνότητα.

Στό παράδειγμα 1 (παράγρ. 2.2) ἐπικρατοῦσα τιμή εἶναι ἡ $x_\varepsilon = 5$, διότι αὐτή ἔχει τή μεγαλύτερη συχνότητα ἴση μέ $\Sigma_6 = 42$. Παρατηροῦμε ὅτι στό ἀναφερόμενο παράδειγμα ἡ διάμεσος τιμή x_δ καί ἡ ἐπικρατούσα τιμή x_ϵ εἶναι ἴσες ($x_\delta = x_\epsilon = 5$).

Παρατήρηση: Ἀπό τίς τρεῖς παραπάνω κεντρικές τιμές (ἀριθμητικός μέσος, διάμεσος, ἐπικρατούσα τιμή) ἐκείνη πού ἐκφράζεται ἀπό ἕναν καθορισμένο καί εὔκολα προσδιοριζόμενο ἀριθμό εἶναι ὁ **ἀριθμητικός μέσος.** Γι' αὐτό τό λόγο **ἡ μέση τιμή** εἶναι ἐκείνη πού πιό πολύ χρησιμοποιεῖται στή στατιστική πράξη.

Τῶν δύο ἄλλων τιμῶν δέν εἶναι πάντα πολύ εὔκολος ὁ προσδιορισμός καί ὄχι σπάνια οἱ ἀριθμοί πού τίς ἐκφράζουν ἔχουν προκύψει μέ μιά προσεγγιστική διαδικασία. Πάντως σέ μερικές περιπτώσεις ἡ μιά ἤ ἡ ἄλλη (ἀπό τή διάμεσο καί τήν ἐπικρατούσα τιμή) εἶναι προτιμητέα γιά τόν ἐντοπισμό τοῦ σημείου γύρω ἀπό τό ὁποῖο βρίσκονται (κατά «προτίμηση») οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς μας.

4.4 Διακύμανση κατανομῆς — Τυπική ἀπόκλιση.

Ἄς ξεκινήσομε πάλι μέ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5ο.

«Δύο μαθητές α καί β τοῦ ἴδιου Γυμνασίου καί τῆς ἴδιας τάξεως πῆραν στό τέλος μιᾶς σχολικῆς χρονιᾶς τούς παρακάτω βαθμούς:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ	Νέα Ἑλλ.	Ἀρχαῖα	Μαθημ.	Φυσ/μεία	Ἱστορ.	Γεωγρ.	Θρησκ.	Μουσ.	Τεχν.	Γυμν.
Μαθητής α'	15	10	15	16	10	10	10	11	11	14
Μαθητής β'	12	11	7	12	12	13	15	10	10	20 »

Οἱ βαθμοί λοιπόν τοῦ α' (οἱ τιμές τῆς στατιστικῆς μεταβλητῆς) κατ' αὐξανόμενο μέγεθος εἶναι:

$$10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 11,\ 11,\ 14,\ 15,\ 15,\ 16.$$

Οἱ βαθμοί τοῦ β' εἶναι: (κατά αὐξανόμενο μέγεθος)

$$7,\ 10,\ 10,\ 11,\ 12,\ 12,\ 12,\ 13,\ 15,\ 20.$$

Ὁ στατιστικός μας πληθυσμός καί στίς δύο περιπτώσεις εἶναι τό πλῆθος 10 τῶν μαθημάτων. Στήν πρώτη περίπτωση οἱ συχνότητες τῶν διαφορετικῶν τιμῶν 10, 11, 14, 15, 16 εἶναι ἀντίστοιχα 4, 2, 1, 2, 1· στή δεύτερη περίπτωση οἱ συχνότητες τῶν διαφορετικῶν τιμῶν 7, 10, 11, 12, 13, 15, 20 εἶναι ἀντίστοιχα 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1.

Ἡ διάμεσος στήν πρώτη περίπτωση εἶναι:

$$x_\delta = \frac{11 + 11}{2} = 11$$

καί στή δεύτερη εἶναι

$$x_\delta = \frac{12 + 12}{2} = 12.$$

Ἡ ἐπικρατούσα τιμή στήν πρώτη περίπτωση εἶναι $x_\epsilon = 10$, ἐνῶ στή δεύτερη εἶναι $x_\epsilon = 12$.

Τέλος ἡ μέση τιμή στήν πρώτη περίπτωση εἶναι:

$$\frac{4.10 + 2.11 + 14 + 2.15 + 16}{10} = \frac{122}{10} = 12{,}2$$

καί στή δεύτερη εἶναι ἐπίσης:

$$\frac{7 + 2.10 + 11 + 3.12 + 13 + 15 + 20}{10} = 12{,}2.$$

Ἄν σταθοῦμε στή διάμεσο καί στήν ἐπικρατούσα τιμή διαπιστώνομε ὅτι στήν περίπτωση τοῦ μαθητῆ β εἶναι ἴσες καί ἔχομε τήν αἴσθηση ὅτι ἡ μία ἤ ἡ ἄλλη ἐκφράζει τό πραγματικό «δυναμικό» τοῦ μαθητῆ β. Στήν πρώτη περίπτωση (τοῦ μαθητῆ α)· οἱ δύο αὐτές τιμές παρουσιάζουν μικρή διαφορά (11 — 10), ἀλλά ἀμέσως αἰσθανόμαστε ὅτι καί ἡ μεγαλύτερη ἀπό τίς δύο τιμές ἀδικεῖ τό μαθητή α, πολύ περισσότερο μάλιστα πού τόν ἐμφανίζει πιό ἀδύνατο ἀπό τόν β, μολονότι ἄλλη ἐντύπωση παρέχει ἡ μελέτη ὅλης τῆς κλίμακας τῶν βαθμῶν.

Φαίνεται λοιπόν ὅτι πιό κοντά στήν πραγματικότητα εἶναι ὁ ἀριθμητικός μέσος (ὁ μέσος ὅρος) τῶν βαθμῶν πού εἶναι ὁ ἴδιος καί γιά τούς δύο μαθητές. Πράγματι αὐτή ἡ κεντρική τιμή χαρακτηρίζει «δικαιότερα» - στήν προκείμενη περίπτωση - τό μέγεθος τῶν δυνατοτήτων τῶν δύο μαθητῶν καί αὐτή ἡ χαρακτηριστική τιμή χρησιμοποιεῖται, ὅπως ξέρομε, στή σχολική πράξη.

Θά μπορούσαμε λοιπόν νά κλείσομε ἐδῶ τό ζήτημα ἄν δέν εἴχαμε νά κάνομε δύο σημαντικές παρατηρήσεις πού φαίνονται νά ἀνατρέπουν τίς προηγούμενες ἐκτιμήσεις μας.

Πρῶτον, οἱ βαθμοί τοῦ πρώτου μαθητῆ κατανέμονται ἀπό 10, πού εἶναι ὁ μικρότερος, μέχρι 16 πού εἶναι ὁ μέγιστος· παρουσιάζουν - ὅπως λέμε - μικρή **διασπορά** καί ἔχουν βέβαια μικρό σχετικό εὖρος κατανομῆς (16 — 10 = 6). Ἀντίθετα ἡ διασπορά τῶν βαθμῶν τοῦ δεύτερου, ἀπό 7 μέχρι 20, εἶναι σημαντικά μεγαλύτερη ἀπό ἐκείνη τοῦ πρώτου, ὅπως ἐπίσης μεγάλο εἶναι τό εὖρος 13 = 20 — 7 τῆς μεταβολῆς. Οἱ διαπιστώσεις αὐτές, μαζί μέ τό γεγονός ὅτι ὁ μαθητής β παρουσιάζει ἔντονη ἀδυναμία σ' ἕνα ἀπό τά σημαντικότερα μαθήματα, χρωματίζουν τώρα ἐντελῶς διαφορετικά τή συνεκτίμηση τῶν ἱκανοτήτων τῶν δύο μαθητῶν.

Ἡ δεύτερη παρατήρηση εἶναι τά ἐντελῶς διαφορετικά ἀποτελέσματα γιά τούς δύο μαθητές, μολονότι στό τέλος τῆς σχολικῆς χρονιᾶς εἶχαν ἐπιτύχει τόν ἴδιο μέσο ὅρο. Ὁ πρῶτος, ὡς γνωστόν, προάγεται, ἐνῶ ὁ δεύτερος μένει ἀνεξεταστέος στά Μαθηματικά.

Βλέπομε λοιπόν ὅτι μόνες οἱ χαρακτηριστικές τιμές δέν εἶναι πάντοτε ἐπαρκεῖς γιά τήν ἀξιολόγηση μιᾶς κατανομῆς. Γι' αὐτό τό λόγο ἀναζητοῦμε καί προσδιορίζομε ἕνα μέγεθος, τό ὁποῖο δηλώνει τό «βαθμό» ἀπομακρύνσεως (ἤ συγκεντρώσεως) τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἀπό τή μέση τιμή της ἤ γενικότερα ἀπό μιά χαρακτηριστική τιμή.

Τό πλάτος τῆς κατανομῆς δέν εἶναι κατάλληλο γιά νά δώσει τήν εἰκόνα τῆς διασπορᾶς, διότι ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς ἀκραῖες τιμές καί μπορεῖ νά ὁδηγήσει σέ σφαλερές ἐντυπώσεις.

Ἄς πάρομε, χρησιμοποιώντας τό παραπάνω παράδειγμα 5, ὅλες τίς ἀποκλίσεις

τῶν μεμονωμένων τιμῶν ἀπό τή μέση τιμή. Στήν περίπτωση τοῦ πρώτου π.χ. μαθητῆ ἔχομε:
$10 - 12{,}2 = -2{,}2$, $10 - 12{,}2 = -2{,}2$, $10 - 12{,}2 = -2{,}2$, $10 - 12{,}2 = -2{,}2$, $11 - 12{,}2 = -1{,}2$, $11 - 12{,}2 = -1{,}2$, $14 - 2{,}2 = 1{,}8$, $15 - 12{,}2 = 2{,}8$, $15 - 12{,}2 = 2{,}8$, $16 - 12{,}2 = 3{,}8$.

Εἶναι ὅμως $(-2{,}2) + (-2{,}2) + (-2{,}2) + (-2{,}2) + (-1{,}2) + (-1{,}2) + 1{,}8 + 2{,}8 + 2{,}8 + 3{,}8 = 0$. Τό ἀποτέλεσμα αὐτό παρουσιάζεται πάντοτε· δηλαδή τό ἄθροισμα $\sum_{1}^{v} (x_i - \overline{x})$ ὅλων τῶν ἀποκλίσεων εἶναι πάντοτε μηδέν. Ἔτσι ἡ συνολική διασπορά δέν μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μέ τήν ἀθροιστική συνεκτίμηση τῶν ἀποκλίσεων. Κάπως ἔτσι φτάνομε στήν ἰδέα νά χρησιμοποιήσομε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων. Νά πάρομε δηλαδή - προκειμένου γιά τό παραπάνω παράδειγμα - τό ἄθροισμα:
$(-2{,}2)^2 + (-2{,}2)^2 + (-2{,}2)^2 + (-2{,}2)^2 + (-1{,}2)^2 + (-1{,}2)^2 + (1{,}8)^2 + (2{,}8)^2 + (2{,}8)^2 + (3{,}8)^2 = 55{,}60$. Τόν ἀριθμό αὐτό τόν διαιροῦμε μέ τό πλῆθος τῶν μεμονωμένων τιμῶν, πού εἶναι τό ἴδιο μέ τό πλῆθος τῶν προσθετέων (τῶν μεμονωμένων περιπτώσεων) τοῦ παραπάνω ἀθροίσματος, καί παίρνομε $\frac{55{,}60}{10} = 5{,}56$.

Ὁ τελευταῖος ἀριθμός (ὁ 5,56) εἶναι αἰσθητά διάφορος ἀπό τίς πραγματικές ἀποκλίσεις, ἀλλά καί ἔχει ἄλλη διάσταση, μιά καί προέρχεται ἀκριβῶς ἀπό τά τετράγωνα τῶν ἀρχικῶν τιμῶν. Παίρνομε λοιπόν στή θέση του τήν τετραγωνική του ρίζα πού στό παράδειγμά μας εἶναι $\sqrt{5{,}56} \simeq 2{,}36$.

Ὁ ἀριθμητικός μέσος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν μεμονωμένων ἀποκλίσεων, δηλαδή τό πηλίκο τοῦ ἀθροίσματος $(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_v - \overline{x})^2$ διά τοῦ πλήθους v τοῦ πληθυσμοῦ, ὀνομάζεται **διακύμανση κατανομῆς** ἤ **μέση τετραγωνική ἀπόκλιση** καί ἡ θετική τετραγωνική της ρίζα λέγεται **τυπική ἀπόκλιση**· ἄν αὐτή τήν παραστήσομε μέ α, ἔχομε τούς τύπους:

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{v}} \quad (1\text{ι}), \quad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{v}}} \qquad (1\text{ιι})$$

ὅπου $i = 1, 2, \dots, v$

Ἄς ὑπολογίσομε ἀκόμα τήν τυπική ἀπόκλιση καί στή δεύτερη περίπτωση τοῦ παραδείγματος 5.
Ἔχομε:

$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = (7 - 12{,}2)^2 + 2(10 - 12{,}2)^2 + (11 - 12{,}2)^2 + 3(12 - 12{,}2)^2 + (13 - 12{,}2)^2 + (15 - 12{,}2)^2 + (20 - 12{,}2)^2 = (-5{,}2)^2 + 2\,(-2{,}2)^2 + (-1{,}2)^2 + 3\,(-0{,}2)^2 + (0{,}8)^2 + (2{,}8)^2 + (7{,}8)^2 = 107{,}6$.

$$\alpha^2 = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{v} = \frac{107{,}6}{10} = 10{,}76 \quad \text{καί}$$

τελικά $\alpha = \sqrt{10{,}76} \simeq 3{,}28$.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ἡ διασπορά τῶν βαθμῶν τοῦ δεύτερου μαθητῆ, ἀπό τήν κοινή καί γιά τούς δύο μέση τιμή (12,2), εἶναι ἐντονότερη ἀπό τή διασπορά τῶν βαθμῶν τοῦ πρώτου. Αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ μέσος ὅρος 12,2 ἐκφράζει πιστότερα τήν πραγματική δυναμικότητα καί ἀξία τοῦ πρώτου μαθητῆ, διότι οἱ βαθμοί του (μικρότεροι ἤ μεγαλύτεροι τοῦ 12,2) εἶναι πιό κοντά σ' αὐτόν τό μέσο ὅρο ἀπό ὅ,τι συμβαίνει μέ τούς βαθμούς τοῦ δεύτερου μαθητῆ. Ποιά εἶναι λοιπόν ἡ σημασία τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως; **Ἡ μέση τιμή $\overline{x}$ καί ἡ τυπική ἀπόκλιση** μᾶς δίνουν τή δυνατότητα νά ἀντιληφθοῦμε - αὐτό πλέον εἶναι φανερό - τήν τάση καί τή φυσιογνωμία κατανομῆς τῶν συχνοτήτων, ὅταν μάλιστα ἡ διασπορά τῶν στοιχείων γύρω ἀπό τόν ἀριθμητικό μέσο ἐμφανίζεται μέ μιά συμμετρικότητα. Εἰδικότερα, ὅταν ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι μικρή, τότε τά στοιχεῖα τείνουν νά **συμπυκνωθοῦν** γύρω ἀπό τή μέση τιμή, ἐνῶ ὅταν αὐτή εἶναι μεγάλη, τά στοιχεῖα τείνουν νά **ἀπομακρυνθοῦν** ἀπό τήν περιοχή τῆς μέσης τιμῆς.

Ἐπειδή: $\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_v - \overline{x})^2 =$
$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2 - 2\overline{x}\,(x_1 + x_2 + \dots + x_v) + v \,.\, x^2 =$
$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) - 2\overline{x} \,.\, v\overline{x} + v\overline{x}^2 = \Sigma x_1^2 - v\overline{x}^2$,
οἱ τύποι 1ι καί 1ιι γίνονται ἀντίστοιχα:

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{v} - \overline{x}^2} \ (2\text{ι}), \qquad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{v} - \overline{x}^2}} \qquad (2\text{ιι})$$

Στήν περίπτωση μιᾶς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς, γιά νά ὑπολογίσομε τίς ἀποκλίσεις, χρησιμοποιοῦμε τίς μεσαῖες τιμές τῶν κλάσεων.

Γιά ἐφαρμογή θά ὑπολογίσομε ἀκόμα καί τήν τυπική ἀπόκλιση τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς πού μᾶς δίνει ὁ Πίνακας 2.4.1.

Βρίσκομε πρῶτα τόν ἀριθμητικό μέσο $\overline{x} = 58{,}90$ καί ἀκολούθως κατασκευάζομε τόν πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4.1.

Μέσες τιμές κλάσεων	Ἀπόλυτη συχνότητα	x_1^2 i ἀπό 1 ἕως 7	$\Sigma_i\, x_i^2$
42,5	5	$42{,}5^2 = 1806{,}25$	5 . 1806,25 = 9031,25
47,5	12	$47{,}5^2 = 2256{,}25$	12 . 2256,25 = 27075
52,5	31	$52{,}5^2 = 2756{,}25$	31 . 2756,25 = 85443,75
57,5	31	$57{,}5^2 = 3306{,}25$	31 . 3306,25 = 102493,75
62,5	16	$62{,}5^2 = 3906{,}25$	16 . 3906,25 = 62500
67,5	3	$67{,}5^2 = 4556{,}25$	3 . 4556,25 = 13668,75
72,5	2	$72{,}5^2 = 5256{,}25$	2 . 5256,25 = 10512,5
Ἀθροίσματα	100		310725

Τό ἄθροισμα $\Sigma\Sigma_i\, x_i^2$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν μεμονωμένων καί ἐπαναλαμβανομένων κατά τήν ἀντίστοιχη συχνότητα τιμῶν, ἐνῶ ὁ στατιστικός πληθυσμός εἶναι $v = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_\kappa$ · ἐδῶ (στό παράδειγμα) ἴση μέ 100. Ἔτσι σύμφωνα μέ τόν τύπο (2ιι) παίρνομε:

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sum_{\kappa=1}^{\kappa} \Sigma_i x_i^2}{\nu}-\overline{x}^2}=\sqrt{\frac{310725}{100}-(55{,}40)^2}=$$

$$=\sqrt{3107{,}25-3069{,}16}=\sqrt{38{,}09}\simeq 6{,}17.$$

Σημείωση: Ἡ τυπική ἀπόκλιση, πού εἶναι τό μέτρο τῆς διαφορᾶς, ἐκφράζεται μέ τίς ἀρχικές μονάδες μετρήσεως τῶν στοιχείων.

Ἀσκήσεις.

1. Μιά βιβλιοθήκη περιέχει συνολικά 1024 τόμους βιβλίων. 352 ἀπό αὐτά εἶναι λογοτεχνικά· 127 ἐγκυκλοπαιδικά· 45 ἱστορικά καί τά ὑπόλοιπα μαθηματικά. Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομῆς τῶν συχνοτήτων καί νά σχεδιάσετε τό ραβδόγραμμα τῆς ἑκατοστιαίας συχνότητας.

2. Στήν πρώτη τάξη ἑνός Λυκείου φοιτοῦν 38 παιδιά. Τό ὕψος αὐτῶν τῶν μαθητῶν κυμαίνεται ἀπό 155 cm ἕως 185 cm. 9 μαθητές ἔχουν ὕψος ἀπό [155, 160) cm· 14 παιδιά ἔχουν ὕψος ἀπό [160, 165) cm· 10 παιδιά ἔχουν ὕψος ἀπό [165, 170)· 4 μαθητές ἔχουν ὕψος ἀπό [170, 175) καί ἕνας μαθητής ἔχει ὕψος 183 cm.
Νά γίνουν: ὁ πίνακας κατανομῆς συχνοτήτων, τό ἱστόγραμμα καί τό πολύγωνο τῶν ἑκατοστιαίων συχνοτήτων καί νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν ὑψῶν.

3. Γιά τ' ἀποτελέσματα τῶν ἀπολυτηρίων ἐξετάσεων τῆς Γ' Λυκείου ἑνός σχολείου ἔχομε τίς πληροφορίες πού περιέχει ὁ παρακείμενος πίνακας. Ἀφοῦ συμπληρώσετε μέ τούς κατάλληλους ἀριθμούς τά κενά πλαίσια τοῦ πίνακα νά κατασκευάσετε τό ραβδόγραμμα καί τό κυκλικό διάγραμμα τῆς κατανομῆς τῶν συχνοτήτων.

Ἀποτελέσματα	Μαθητές	%
Ἄριστα	3	- - - -
Λίαν καλῶς	12	- - - -
Καλῶς	12	- - - -
Σχεδόν καλῶς	- - - -	25
Ἄθροισμα	36	- - - -

4. Σ' ἕνα Γυμνάσιο ὑπηρετοῦν 6 φιλόλογοι, 3 μαθηματικοί, 2 φυσικοί, 1 χημικός, 1 φυσιογνώστης, 1 γυμναστής, 1 θεολόγος, 2 ξένων γλωσσῶν, 1 μουσικός καί 1 τῶν τεχνικῶν. Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα συχνοτήτων τοῦ διδακτικοῦ προσωπικοῦ τοῦ Γυμνασίου καί ἕνα κατάλληλο (κατά τήν κρίση σας) διάγραμμα.

5. Μετρήσαμε τή διάρκεια ζωῆς (σέ ὧρες) 44 ἠλεκτρονικῶν λαμπτήρων καί βρήκαμε τά παρακάτω ἀποτελέσματα:

1045	639	982	791	953	912	701	888	1150	800	653
1065	1018	1080	1001	1078	1111	802	913	1033	900	783
1073	951	732	999	897	1070	1053	739	955	620	893
1019	812	845	698	944	673	1004	1025	756	730	1033

Νά ὁμαδοποιήσετε τίς παραπάνω παρατηρήσεις σέ κλάσεις μέ πλάτος 100 ὡρῶν· νά κατασκευάσετε τόν πίνακα συχνοτήτων καί νά σχεδιάσετε τό ἱστόγραμμα καί τό πολύγωνο συχνότητας.

6. Κατά τό 1964 ἡ παραγωγή τῶν κυριότερων κτηνοτροφικῶν προϊόντων τῆς χώρας μας ἦταν: Κρέας 214 χιλιάδες τόννοι· Γάλα 1077 χιλ. τόννοι· Αὐγά 78 χιλ. τόννοι καί Τυρί 101,2 χιλ. τόννοι. Νά κατασκευάσετε τό σχετικό ραβδόγραμμα.

7. Σ' ἕνα διαγώνισμα στά Μαθηματικά οἱ 39 μαθητές μιᾶς τάξεως πῆραν τούς παρακάτω βαθμούς:

13,	9,	14,	16,	11,	10,	10,	12,	17,	16,	12,	13,	15
19,	12,	16,	8,	18,	13,	14,	15,	11,	10,	9,	18,	20
9,	15,	15,	14,	13,	13,	14,	13,	12,	16,	12,	17,	13

Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομῆς συχνοτήτων (ἀπόλυτης, σχετικῆς, ἑκατοστιαίας, ἀθροιστικῆς)· νά σχεδιάσετε τό διάγραμμα τῆς ἑκατοστιαίας καί τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας· νά βρεῖτε τόν ἀριθμητικό μέσο, τή διάμεσο τιμή καί τήν ἐπικρατούσα τιμή.

8. Οἱ ξένοι τουρίστες πού ἦλθαν στή χώρα μας κατά τά ἔτη 1959 ἕως καί 1965 ἦταν σέ χιλιάδες ἄτομα:

Ἔτος	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
Τουρίστες	340,0	399,4	494,2	597,9	741,2	757,5	971,1

Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομῆς τῶν συχνοτήτων, τό πολύγωνο συχνότητας, τό πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας καί τό σχετικό ραβδόγραμμα. Νά βρεῖτε ἀκόμα τόν ἀριθμητικό μέσο καί τή διάμεσο τιμή.

9. Οἱ 36 ὑπάλληλοι ἑνός καταστήματος ἔχουν τίς παρακάτω ἡλικίες:

16, 18, 18, 20, 20, 20, 24, 23, 21, 24, 28, 29,
30, 31, 31, 30, 29, 31, 35, 35, 33, 36, 40, 38,
41, 42, 41, 22, 25, 27, 39, 38, 59, 27, 34, 23

Νά ὁμαδοποιήσετε τίς παραπάνω τιμές σέ κλάσεις πλάτους 5 καί νά κατασκευάσετε τό ἀντίστοιχο ἱστόγραμμα.

10. Ἀπό τίς 24 οἰκογένειες μιᾶς πολυκατοικίας 2 δέν ἔχουν παιδιά· 4 ἔχουν ἀπό 1 παιδί· 10 ἔχουν ἀπό 2 παιδιά· 7 ἔχουν ἀπό 3 παιδιά καί 1 ἔχει 5 παιδιά. Νά βρεῖτε τήν τυπική ἀπόκλιση.

11. Ἡ μέση τιμή 7 διαδοχικῶν περιττῶν ἀκεραίων εἶναι 63. Ἀφοῦ βρεῖτε αὐτούς τούς ἀκεραίους νά προσδιορίσετε ἀκολούθως τή διάμεσο καί τήν τυπική ἀπόκλιση.

12. Οἱ ἐλάχιστες ἡμερήσιες θερμοκρασίες πού παρατηρήθηκαν στήν Ἀττική σέ 10 διαδοχικές ἡμέρες ἦταν: 16, 17, 18, 22, 21, 17, 24, 18, 21, 18. Νά προσδιορίσετε τή μέση τιμή, τή διάμεσο, τήν ἐπικρατούσα τιμή καί τήν τυπική ἀπόκλιση τῶν παραπάνω θερμοκρασιῶν.

13. Τό 1966 ὁ χερσαῖος ἑλλαδικός χῶρος παρουσίαζε τήν παρακάτω κατανομή: Γεωργικές καλλιέργειες 30%· Δασικές ἐκτάσεις 20,3%· Βοσκότοποι 38,2%· Οἰκισμοί 3,5%· Ἀμμώδεις ἐκτάσεις 4,8%. Ἐκτάσεις καλυπτόμενες ἀπό νερά 3,2%.
Νά κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα κατανομῆς.

14. Οἱ ὑπάλληλοι μιᾶς δημόσιας ὑπηρεσίας κατανέμονται ἀνάλογα μέ τά ἔτη ὑπηρεσίας ὡς ἑξῆς:

Ἔτη ὑπηρεσίας	1 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
Ἀριθμός ὑπαλλήλων	23	45	38	36	36	20	8

Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομῆς συχνοτήτων (ἀπόλυτης, σχετικῆς, ἀθροιστικῆς) καί νά βρεῖτε τίς χαρακτηριστικές τιμές $\bar{x}$, x_δ, x_ε καί τήν τυπική ἀπόκλιση.

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Μοίρες	Ἡμίτονο 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Μοίρες
				Συνημίτονο				

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Μοίρες	Συνημίτονο							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Μοίρες
	Ημίτονο							

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Μοίρες	Εφαπτομένη 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0	Μοίρες
	Συνεφαπτομένη							

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Μοίρες	Συνεφαπτομένη 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Μοίρες
	Ἐφαπτομένη							

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ