Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

Ευκλείδης Α' 115

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2020 ευρώ 3,00

Ο Θαλής και η Πυραμίδα του Χέοπα

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Κ +7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνασιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 115

Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2020

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί/ές αναγνώστες/ αναγνώστριες.

Ένα αντίδοτο για την πίεση που όλοι αισθανόμαστε, στις δύσκολες ημέρες της πανδημίας που μας κρατά κλεισμένες και κλεισμένους στα σπίτια μας, προτείνει η μαθήτρια Ιωάννα Αθηναίου με γράμμα που έστειλε στην συντακτική επιτροπή. Το παραθέτουμε:

«ΔΕΝ ΞΕΧΝΟΥΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΚΑΡΑΝΤΙΝΑΣ»

Η καραντίνα είναι λήθαργος, είναι απομόνωση, ιδιαίτερα για εμάς τους μαθητές.

Δύσκολες στιγμές για την ανθρωπότητα και ιδίως για την πόλη μας. Μια πόλη οπού ξεχείλιζε από κινητικότητα, εργατικότητα και πρόοδο. Παρά ταύτα, υπάρχει κάτι, αγαπητοί μου συμπολίτες, που δεν πρέπει να λησμονήσουμε κατά την διάρκεια της κρισιμότητας:

Τα Μαθηματικά!

Πολλοί από εσάς ίσως βρίσκουν την πρόταση μου αυτή υπερβολική και άλλοι και μη σημαντική σε σχέση με την δύσκολη αλλαγή στην κοινωνική μας ζωή.

Αξίζει όμως, θεωρώ, μια ανάγνωση το μήνυμα αυτό.

Τα Μαθηματικά δεν είναι απλώς ένα μάθημα αλλά ούτε και μια επιστήμη. Τα Μαθηματικά είναι ανθρώπινη επιθυμία με την οποία εκφράζεται ο κόσμος της λογικής που βρίσκεται μέσα μας.

Η λογική είναι εκ γενετής χαρακτηριστικό του ανθρώπου και εκφράζει την επιθυμία του για αναζήτηση, έρευνα και γνώση.

Δεν θα έπρεπε να μας τρομοκρατεί ο κόσμος της λογικής, διότι δεν είναι ένας κόσμος δίχως συναισθήματα όπως πολλοί από εσάς υποστηρίζουν. Αντιθέτως, η λογική εξισορροπεί τα συναισθήματα έτσι ώστε να μην υπάρχουν μετάπτωσης απολυτής ευτυχίας σε αβάσταχτη θλίψη και παρόμοιοι εξτρεμισμοί, που εύκολα οδηγούν τον νου σε κατάρρευση.

Η λογική επιφέρει ψυχική ισορροπία και αρμονία για να μπορέσουμε να παραμείνουμε όχι χαρούμενοι ούτε λυπημένοι αλλά δημιουργικοί και ευδαίμονες.

Με αυτόν τον τρόπο, αγαπητοί μου, επιδρά η λογική στην ευδαιμονία. Την λογική απελευθερώνουν τα Μαθηματικά. Και σε αυτό το σημείο θεωρώ πως όλοι μας μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι τα Μαθηματικά δεν είναι τίποτα λιγότερα και τίποτα περισσότερο από έναν δρόμο προς την ευδαιμονία.

Όποιος συνεπώς αρνείται τα Μαθηματικά, αρνείται και την ευδαιμονία Εσείς; είστε έτοιμοι να ευδαιμονήσετε?

Με εκτίμηση, **Ιωάννα Αθηναίου** (5ο Γυμνάσιο Ηρακλείου Αττικής)

Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358

Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Ο Θαλής και η Πυραμίδα του Χέοπα

Στάμη Τσικοπούλου

Οι πυραμίδες ήταν τάφοι για τους βασιλιάδες της αρχαίας Αιγύπτου, τους Φαραώ. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν στη ζωή μετά τον θάνατο γι' αυτό στον τάφο μαζί με τον νεκρό τοποθετούσαν και αντικείμενα που θα του ήταν απαραίτητα στη νέα του ζωή. Σκοπός της Πυραμίδας ήταν να «*στεγάσει*» το νεκρό βασιλιά κατά τη διάρκεια της μεταθανάτιας ζωής του.

Στην αρχαία Νεκρόπολη της Γκίζας, που βρίσκεται κοντά στα προάστια της σημερινής πρωτεύουσας της Αιγύπτου το Κάιρο, υπάρχουν τρεις μεγάλες πυραμίδες, που είναι και οι πιο γνωστές αιγυπτιακές πυραμίδες. Η μεγαλύτερη και η αρχαιότερη από αυτές είναι η Πυραμίδα του **Χέοπα**, γνωστή και ως **Μεγάλη Πυραμίδα**. Δίπλα της βρίσκονται οι Πυραμίδες του **Χεφρήνου**, ενός από τους πιο αξιόλογους διαδόχους του Χέοπα και του **Μυκερίνου**, διαδόχου του Χεφρήνου. Η Πυραμίδα του Χεφρήνου (αυτή με την άσπρη κορυφή) μοιάζει μεγαλύτερη από τη διπλανή του Χέοπα, καθώς είναι χτισμένη σε πιο ανυψωμένο επίπεδο και έχει μεγαλύτερη κλίση, ενώ στην πραγματικότητα είναι πιο μικρή και σε ύψος και σε όγκο. Οι τρεις αυτές πυραμίδες μαζί με τις μικρότερες πυραμίδες των Βασιλισσών, τους νεκρικούς ναούς και τους τάφους των αξιωματούχων σχημάτιζαν ένα απέραντο συγκρότημα. Στη Νεκρόπολη ανήκει και η περίφημη **Μεγάλη Σφίγγα**.

Η Πυραμίδα του Χέοπα είναι το αρχαιότερο από τα επτά θαύματα του αρχαίου κόσμου και το μόνο που σώζεται στις μέρες μας. Στο εσωτερικό της βρέθηκε η διπλανή σφραγίδα από πηλό, η οποία έχει γραμμένο πάνω της το όνομά του.

Ο αρχαίος Έλληνας ιστορικός, περιηγητής και γεωγράφος **Ηρόδοτος**, που επισκέφτηκε την Αίγυπτο πολλούς αιώνες μετά την κατασκευή της πυραμίδας, το 449 π.Χ., μας πληροφορεί ότι :"*η πυραμίδα χτίστηκε όπως κάνουν τα σκαλοπάτια, που ορισμένοι τα ονομάζουν ζωνάρια, άλλοι όμως αναβαθμίδες.*"

Έχει υπολογιστεί ότι για να χτιστεί η Πυραμίδα του Χέοπα χρησιμοποιήθηκαν 2.300.000 μονόλιθοι πέτρας (μεγάλη πέτρα που αποτελείται από ένα μόνο κομμάτι) που η μάζα της κάθε μιας από αυτές είναι 2,5-15 τόνοι. Το σχήμα τους είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις κατά μέσο όρο : 2,50μ μήκος, 1μ. πλάτος και 1,2μ ύψος. Η πυραμίδα έχει υπολογιστεί ότι έχει όγκο 2.521.000 κυβικά μέτρα και το βάρος της φθάνει τους 6,5 εκατομμύρια τόνους!

Η αρχική είσοδος είναι 17μ. ψηλότερα από το έδαφος

Ο Μέγας **Ναπολέων** είχε υπολογίσει ότι με αυτές τις μονολιθικές πέτρες θα μπορούσε να κτίσει ένα τοίχος ύψους 3 μέτρων κατά μήκος των συνόρων της Γαλλίας!

Αρχαία αιγυπτιακή τοιχογραφία

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκοβαν στο ορυχείο τα κομμάτια του βράχου, αλλά πριν τα τοποθετήσουν στην πυραμίδα τους έδιναν το σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οι περισσότεροι μονόλιθοι είναι από ασβεστόλιθο και θεωρείται ότι μετακινήθηκαν από τα κοντινά στη Γκίζα ορυχεία. Οι μεγαλύτεροι γρανιτένιοι μονόλιθοι, που έχουν βρεθεί στο θάλαμο του "Βασιλιά", ζυγίζουν από 25 μέχρι 80 τόνους ο καθένας και έχουν μεταφερθεί από το Ασσουάν, το οποίο βρίσκεται 800 χιλιόμετρα μακριά! Τους μονόλιθους τους μετέφεραν στην Γκίζα μέσα σε ξύλινες βάρκες, που ήταν μεταξύ τους δεμένες με σχοινιά. Για τη μεταφορά τους κατασκεύασαν ένα σύστημα καναλιών στον ποταμό Νείλο και ένα εσωτερικό λιμάνι, λίγα μόλις μέτρα από τη βάση της πυραμίδας.

Αναπαράσταση του τρόπου μεταφοράς των μονολίθων για την κατασκευή της πυραμίδας.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι κατά την κατασκευή της πυραμίδας κατασκεύαζαν κεκλιμένα επίπεδα, όπως οι ράμπες που κατασκευάζουν σήμερα οι τεχνίτες στις οικοδομές. Για να κυλήσουν τους ογκόλιθους πάνω στα κεκλιμένα επίπεδα, έβαζαν από κάτω τους χονδρά κυλινδρικά ξύλα. Το ίδιο κάνουμε και εμείς σήμερα σε πολλές περιπτώσεις, για παράδειγμα όταν θέλουμε να βγάλουμε τις βάρκες από τη θάλασσα.

Εξωτερικά οι πυραμίδες ήταν λείες και επίπεδες, γιατί είχαν ένα περίβλημα, που ήταν φτιαγμένο από λεπτόκοκκο λευκό ασβεστόλιθο ή ήταν επιστρωμένες με πλάκες, όπως αυτή του Χέοπα. Από τις τρεις πυραμίδες της Γκίζας, μόνο η Πυραμίδα του Χεφρήνου διατηρεί σήμερα ένα μέρος από τις αρχικές πέτρες επικάλυψης, κοντά στην κορυφή της, που είναι και το χαρακτηριστικό γνώρισμά της. Το 1.300 μ.Χ. ένας καταστροφικός σεισμός χαλάρωσε πολλές από τις πέτρες επικάλυψης, οι οποίες λίγα χρόνια αργότερα αφαιρέθηκαν, προκειμένου να χτιστούν τζαμιά και φρούρια στο γειτονικό Κάιρο. Σήμερα, μπορούμε να δούμε ορισμένες από αυτές σκορπισμένες γύρω από τη βάση της πυραμίδας.

Δεν υπάρχει ομοφωνία των επιστημόνων για το πώς ακριβώς χτίσθηκε η Πυραμίδα του Χέοπα. Ο Ηρόδοτος περιγράφει την κατασκευή της πυραμίδας το 450 π.Χ., δηλαδή ύστερα από περίπου 2.000 χρόνια. Το μόνο κείμενο που έχει βρεθεί, από την εποχή του φαραώ Χέοπα και ανακαλύφθηκε το 2013, είναι ένας πάπυρος γραμμένος από τον Merer, έναν υπεύθυνο μιας εξειδικευμένης ομάδας εργατών. Ο πάπυρος είναι ένα ημερολόγιο με στοιχεία που αφορούν τα «*λογιστικά*» του έργου δηλαδή, από πού και πώς μεταφέρθηκαν οι λίθοι, πόσος ήταν ο όγκος τους κ.ά, αλλά δεν καταγράφεται σε αυτόν η μέθοδος κατασκευής της πυραμίδας.

Το εσωτερικό της πυραμίδας είναι ένας λαβύρινθος από διαδρόμους που ανεβοκατεβαίνουν και από μικρά δωμάτια, που εμπόδιζαν την εύκολη διείσδυση των επίδοξων τυμβωρύχων στον κύριο χώρο, όπου βρισκόταν η σαρκοφάγος του Φαραώ.

«*Η Μεγάλη Πυραμίδα του Χέοπα μοιάζει με ελβετικό τυρί*», εξηγεί ο Αιγυπτιολόγος Mark Lehner. Μέσα σε αυτήν υπάρχουν τρεις θάλαμοι. Αυτός που βρίσκεται πιο χαμηλά, είναι σκαμμένος στο βραχώδες υπόστρωμα κάτω από την πυραμίδα και είναι ημιτελής. Οι λεγόμενοι θάλαμοι του Βασιλιά και της Βασίλισσας είναι κτισμένοι ψηλότερα σε διαφορετικά ύψη και συνδέονται με διαδρόμους. Ο πιο μεγάλος είναι γνωστός και ως «*Μεγάλη Στοά*» έχει μήκος σχεδόν 47 μέτρα, ύψος 8,6 μέτρα και πλάτος 1,2 έως 2 μέτρα.


Η «*Μεγάλη Στοά*»

Η βάση της Πυραμίδας του Χέοπα είναι ένα σχεδόν τέλειο τετράγωνο με μήκος πλευράς 230,4 μέτρα. Υπολογίζεται ότι χωρούν σε αυτήν 7 ή 8 γήπεδα ποδοσφαίρου! Καθεμιά από τις τέσσερις πλευρές της είναι προσανατολισμένη σε ένα από τα σημεία του ορίζοντα.

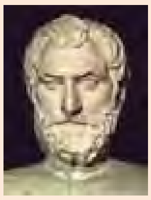
Η κατασκευή της πυραμίδας του Χέοπα ολοκληρώθηκε το **2.580 π.Χ**. (έναρξη 2.560 π.Χ).

Από τότε που ολοκληρώθηκε το κτίσιμο της πυραμίδας και για 2.000 χρόνια κανείς δεν είχε καταφέρει να μετρήσει το ύψος της, κάτι που κέντρισε το ενδιαφέρον του, **Θαλή** του Μιλήσιου, ενός από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, όταν αυτός επισκέφτηκε την Αίγυπτο. Σύμφωνα με τον Ιερώνυμο τον Ρόδιο, μαθητή του Αριστοτέλη: «*(ο Θαλής) κατόρθωσε να μετρήσει τις πυραμίδες, παρατηρώντας το μήκος της σκιάς τους, τη στιγμή που οι σκιές τους έχουν μέγεθος ίσο με το ύψος τους*».

Πώς όμως μπόρεσε ο Θαλής να μετρήσει το μήκος της σκιάς της πυραμίδας αφού ένα μέρος της δεν είναι ορατό, δεν εκτείνεται δηλαδή πέραν της πυραμίδας; Ιδιαίτερα τα μεσημέρια της καλοκαιρινής περιόδου επειδή οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν σχεδόν κατακόρυφες στο έδαφος η σκιά της πυραμίδας δεν είναι καθόλου ορατή. Την περίοδο αυτή οι ακτίνες του ήλου θα έπεφταν στο εσωτερικό της αν η πυραμίδα ήταν διαφανής.

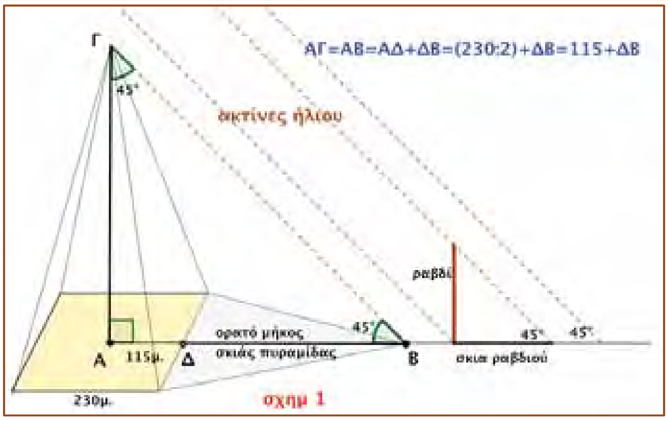
Ο Θαλής με τις αστρονομικές γνώσεις που είχε γνώριζε ότι στην περιοχή της Γκίζας, μόνο δύο ημέρες τον χρόνο, στις 21 Νοεμβρίου και στις 20 Ιανουαρίου η σκιά της πυραμίδας ήταν ορατή, οι ακτίνες του ήλιου, διέρχονταν το μεσημέρι από τον αξονά της (το ύψος της) και σχημάτιζαν με το επίπεδο του εδάφους γωνία 45°. Η γνώση αυτή υπήρξε καθοριστική για τη μέτρηση του ύψους της πυραμίδας. Γιατί τότε οι ακτίνες του ήλιου, το ύψος της πυραμίδας και η σκιά της σχηματίζουν ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο το ΑΒΓ (σχήμα 1). Εκείνη τη στιγμή όλα τα αντικείμενα, που ήταν κάθετα τοποθετημένα στο έδαφος, σχηματίζουν μια σκιά, με μήκος ίσο με το ύψος τους.

Ο Διογένης ο Λαέρτιος (3^{ος} αιώνας μ.Χ) αναφέρει ότι ο Θαλής εκτός από Μαθηματικά γνώριζε Μετεωρολογία και Αστρονομία. Υπολόγισε ότι η διάρκεια του έτους ήταν 365 ημέρες, ενώ μέχρι τότε θεωρούσαν ότι ήταν 360 ημέρες και οριοθέτησε χρονικά τις τέσσερις εποχές. Εντόπισε ημερολογιακά τα ηλιοστάσια και τις ισημερίες. Μελέτησε τις φάσεις της σελήνης, τη κίνηση των πλανητών και τη θέση των άστρων στον ουράνιο θόλο. Υπάρχουν δύο εκδοχές για τον τρόπο με τον οποίο ο Θαλής υπολόγισε το ύψος της Πυραμίδας χρησιμοποιώντας τη σκιά της .


Θαλής ο Μιλήσιος
(640-546 π.Χ.)

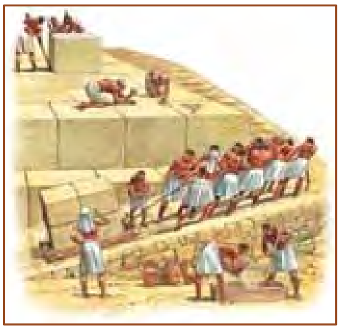
Η πρώτη, που είναι και η αρχαιότερη, διατυπώθηκε από τον Ιερώνυμο και αναφέρει ότι ο Θαλής προσδιόρισε το ύψος της Πυραμίδας μετρώντας τη σκιά της, τη στιγμή που η σκιά ενός

ανθρώπου ήταν ίση με το ύψος του. Η δεύτερη, διατυπώθηκε από τον Πλούταρχο και αναφέρει ότι ο Θαλής έστησε ένα κοντάρι και στη συνέχεια έκανε χρήση ομοίων τριγώνων.
Στο άρθρο αυτό, για διδακτικούς λόγους, υιοθετείται η πρώτη εκδοχή.



Μια από τις δύο αυτές ημέρες, έστησε πιθανά ο Θαλής το μεσημέρι ένα ραβδί κάθετα στο έδαφος, αφού πρώτα χάραξε έναν κύκλο γύρω από αυτό, με ακτίνα όσο το μήκος του και περίμενε τη χρονική στιγμή που το μήκος της σκιάς του ραβδιού άγγιξε τον κύκλο. Τότε ζήτησε από έναν συνεργάτη του, πιθανά έναν φελλάχο, να βάλει ένα σημάδι στην άκρη της σκιάς της πυραμίδας. Εκείνη τη στιγμή το ύψος της πυραμίδας ΑΓ ήταν ίσο με το μήκος της σκιά της ΑΒ. Ίσο δηλαδή με το μισό της πλευράς της βάσης της, που γνώριζε την τιμή του (ΑΔ=230:2=115μ.), συν το μήκος της σκιάς της (ΔΒ) που μπόρεσε να το μετρήσει αφού προεξείχε από αυτήν.

Ο Διογένης ο Λαέρτιος ισχυρίζεται ότι ο Θαλής χρησιμοποίησε τη σκιά του εαυτού του για να μετρήσει το ύψος της πυραμίδας. Είτε όμως χρησιμοποιώντας την σκιά ενός ραβδιού, είτε του σώματός του, ο Θαλής βρήκε ότι το ύψος της πυραμίδα ήταν 145,3 μέτρα. Το πραγματικό ύψος της πυραμίδας είναι 147 μέτρα. Δηλαδή ο Θαλής, με μόνο όπλο το μυαλό του και ένα ραβδί, μέτρησε το ύψος της πυραμίδας με σφάλμα μόνο 1,7 μέτρα!



Οι πυραμίδες της Γκίζας, όπως μας πληροφορεί ο Ηρόδοτος, χρειάστηκαν 20 χρόνια για να κτιστούν και ήταν έργο πολλών ανθρώπων:"*δούλευαν ασταμάτητα συνεργεία εκατό περίπου χιλιάδων ανθρώπων, το καθένα τους για ένα τρίμηνο*" πολλοί από τους οποίους πέθαναν κατά τη διάρκεια της κατασκευής. Σε αυτά τα 20 χρόνια θα πρέπει να προστεθούν και άλλα 10 χρόνια που χρειάστηκαν για να κατασκευαστούν οι δρόμοι, τα κανάλια και το λιμάνι ώστε να μεταφέρονται οι πέτρες από τα ορυχεία στην Γκίζα.

Οι πυραμίδες της Αιγύπτου εντυπωσιάζουν τους επισκέπτες για τον όγκο τους και την τεχνική που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή τους, ενώ προβληματίζουν τους σύγχρονους ειδικούς για το πώς μπόρεσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, μια κοινωνία της εποχής του χαλκού, να λύσουν τα προβλήματα μηχανικής και στατικής που αντιμετώπισαν κατά το κτίσιμό τους, παρόλο που οι θεωρητικές τους γνώσεις στη Γεωμετρία ήταν στοιχειώδεις και οι τεχνικές τους γνώσεις πρωτόγονες. Κυρίως όμως τους προβληματίζει ο τρόπος με τον οποίο μετέφεραν και τοποθετούσαν στην θέση τους τεράστιους μονόλιθους. Οι έρευνες για τον τρόπο κατασκευής των πυραμίδων δεν έχουν τελειώσει και πιθανόν στο μέλλον, οι αρχαιολογικές ανασκαφές, να δώσουν περισσότερες απαντήσεις.

Βιβλιογραφία

- *Howard Eves: «ΜΕΓΑΛΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»* Έως το 1650, Εκδόσεις Τροχαλία,1989.
- Heath Thomas: Η ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, τόμος 1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, Αθήνα 2001.
- Χρηστίδης Νίκος: Η μέτρηση του ύψους της Πυραμίδας του Χέοπα από τον Θαλή τον Μιλήσιο, Ευκλείδης Α, τεύχος 43, 2002, σελ 8-10.
- el.wikipedia.org › wiki › Πυραμίδα_του_Χέοπα

Άστραψε και βρόντηξε υπερβολικά

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

«Καθαρός ουρανός, αστραπές δε φοβάται» και
«Αν δεν αστράψει δεν βροντά κι αν δεν βροντά δεν βρέχει, κι αν δεν το ρίξει το νερό ο ποταμός δεν τρέχει».

Είναι γνωστό ότι οι μετεωρολόγοι είναι κυρίως Μαθηματικοί ή Φυσικοί. Η πρόγνωση του καιρού, αλλά και γενικότερα οι επιστημονικές προγνώσεις κάθε είδους απαιτούν γνώσεις και χρήση Μαθηματικών μοντέλων. Με βάση τα παραπάνω θεωρήσαμε σκόπιμο να παρουσιάσουμε κάποια ενδιαφέροντα θέματα που σχετίζονται με μετεωρολογικά φαινόμενα.

Όλοι έχουμε δει και ξέρουμε καλά τα μετεωρολογικά φαινόμενα που ονομάζονται **καταιγίδες.** Τελευταία μάλιστα οι μετεωρολόγοι τις βαφτίζουν δίνοντάς τους ονόματα κυρίως από την μυθολογία (Γηρυόνης, Νεφέλη, Ζηνοβία κ.ά.). Οι καταιγίδες φέρνουν κακοκαιρία, συνοδεύονται από ανέμους, βροχές, χαλάζι, ανεμοστρόβιλους, υδροστρόβιλους, αστραπές, κεραυνούς και βροντές.

Τα μετεωρολογικά φαινόμενα και ιδιαίτερα οι κεραυνοί όπως και σήμερα έτσι και στους αρχαίους λαούς προκαλούσαν δέος και φόβο. Οι αρχαίοι Έλληνες μάλιστα πίστευαν ότι έριχνε τους κεραυνούς ο Δίας από τον Όλυμπο ενώ τους κατασκεύαζε ο Ήφαιστος με τους τρείς Κύκλωπες βοηθούς του τον Βρόντη, το Στερόπη και τον Άργη.

Αργότερα οι Χριστιανοί έδωσαν τα δικά τους πιστεύω έτσι η αστραπή είναι πλέον η φωτιά που αφήνει πίσω του το άρμα του Προφήτη Ηλία καθώς διατρέχει τον ουρανό, ενώ η βροντή είναι ο θόρυβος από τα πόδια των αλόγων που σύρουν το άρμα του. Μια άλλη δοξασία λέει οι αστραπές και οι βροντές είναι οι κανονιοβολισμοί που ρίχνει ο Αρχάγγελος Μιχαήλ κατά του Σατανά, και πολλά άλλα. Ο λαός μάλιστα τους κεραυνούς τους ονομάζει αστροπελάκια.

Τι είναι και πως δημιουργούνται η αστραπή, ο κεραυνός και η βροντή;

Σήμερα με την ανάπτυξη της Μετεωρολογίας η ανθρωπότητα γνωρίζει ότι, τα νέφη αποτελούνται από εκατομμύρια μόρια νερού ή σωματίδια παγοκρυστάλλων και με την κίνηση που κάνουν γίνεται έντονη τριβή μεταξύ των παγοκρυστάλλων με αποτέλεσμα να απομακρύνονται ορισμένα ηλεκτρόνια από τα άτομά τους. Η διαδικασία αυτή καταλήγει στον πλήρη διαχωρισμό θετικού και αρνητικού φορτίου. Τα αρνητικά φορτία συγκεντρώνονται στα χαμηλότερα στρώματα και τα θετικά στην κορυφή έτσι το σύννεφο γίνεται ένας τεράστιος πυκνωτής και γύρω του δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο τεράστιας έντασης. Η ένταση είναι τόσο μεγάλη που τα άτομα και τα μόρια του αέρα πολώνονται, ο αέρας ιονίζεται, γίνεται πλάσμα που είναι εξαίρετος αγωγός του ηλεκτρισμού, τα ηλεκτρόνια και στο έδαφος κάτω από την καταιγίδα απωθούνται και η επιφάνεια της Γης φορτίζεται θετικά λόγω επαγωγής.

Όταν η διαφορά δυναμικού μεταξύ της αρνητικά φορτισμένης βάσης των νεφών και του θετικά φορτισμένου εδάφους ξεπεράσει ένα ορισμένο όριο, προκαλείται ηλεκτρική εκκένωση και εκδηλώνεται ο κεραυνός.

Ο σπινθήρας δημιουργείται όταν η συσσώρευση στατικού ηλεκτρισμού υπερνικά την αντίσταση που προβάλλει ο αέρας, ο οποίος όταν είναι ξηρός έχει αντίσταση μεγάλη, αλλά αν περιέχει υδρατμούς αναπτύσσεται τάση της τάξης των 10 εκατομμυρίων Volt και προκαλείται ένας γιγαντιαίος σπινθήρας, μια εκθαμβωτική λάμψη που την ακολουθεί μια ισχυρή έκρηξη και βροντή. Αν η ηλεκτρική εκκένωση γίνει μεταξύ νέφους και εδάφους έχουμε **κεραυνό**, αν γίνει μεταξύ νεφών ή μέσα στο ίδιο το νέφος λέγεται **αστραπή**.

Για τους μετεωρολόγους και οι αστραπές θεωρούνται κεραυνοί. Το 20% μόνο από όλες αυτές τις ηλεκτρικές εκκενώσεις είναι οι κεραυνοί, που όμως πολλές φορές σκοτώνουν ανθρώπους και ζώα.

Με την αστραπή απελευθερώνεται μεγάλη ποσότητα ενέργειας της τάξεως των 10^{10} Τζάουλ σε χρόνο λιγότερο από ένα χιλιοστό του δευτερολέπτου. Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της τεράστιας ενέργειας θερμαίνει τον αέρα στην περιοχή που εκδηλώνεται και σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από αυτή που έχει η επιφάνεια του Ήλιου.

Ο υπέρθερμος αυτός αέρας δημιουργεί την λάμψη και το ωστικό κύμα της έκρηξης που όταν είναι κοντά είναι ένας εκκωφαντικός κρότος ενώ αν είναι μακριά μας ακούμε μια βροντή, ένα μπουμπουνητό. Οι αστραπές παράγουν το όζον που συγκεντρώνεται στο κάτω μέρος της στρατόσφαιρας και μας προστατεύει από την υπεριώδη ακτινοβολία.

Όταν έχουμε καταιγίδες και η ατμόσφαιρα έχει χαμηλά ποσά υγρασίας, προκαλούνται πολλές φορές κεραυνοί χωρίς βροχή ή χαλάζι και χιόνι. Αυτές λέγονται ξηρές καταιγίδες, αφού το νερό των νεφών εξατμίζεται πριν φτάσει στο έδαφος. Οι κεραυνοί που εκδηλώνονται από ξηρές

καταιγίδες αποτελούν συχνά αιτία πρόκλησης δασικών πυρκαγιών.
Θα έχετε παρατηρήσει ότι η βροντή ακούγεται αφού περάσουν μερικά δευτερόλεπτα από τη στιγμή της αστραπής, την οποία βλέπουμε αμέσως όσο μακριά μας και αν είναι. Αυτό γιατί το φως έχει πολύ μεγάλη ταχύτητα 300.000 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο, ενώ ο ήχος μόλις 340 μέτρα το δευτερόλεπτο. Αν από την στιγμή της αστραπής μετρήσετε πόσα δευτερόλεπτα πέρασαν μέχρι να ακούσετε τη βροντή και τα πολλαπλασιάσετε με την ταχύτητα του ήχου θα βρείτε πόσο μακριά σας έγινε ο κεραυνός. Η βροντή μπορεί να ακουστεί, μέχρι να σβήσει, 20-25 χιλιόμετρα μακριά από το σημείο του κεραυνού. Όταν περάσει η καταιγίδα ακούμε από τους μετεωρολόγους ότι έπεσε τόσο ύψος βροχής, τόση ήταν η ταχύτητα του ανέμου, τόσες αστραπές είχαμε, κλπ.
Καλά το ύψος βροχής και η ταχύτητα του ανέμου με κάποια όργανα μετριούνται, **όμως οι αστραπές πως μετρήθηκαν;**
Το φως από έναν κεραυνό μπορούμε να το δούμε σε πάρα πολύ μεγάλες αποστάσεις. Έτσι οι επιστήμονες δημιούργησαν ένα δίκτυο ανιχνευτών που καταγράφει τους κεραυνούς. Το δίκτυο που είναι στην Ευρώπη ονομάζεται ΖΕΥΣ και περιλαμβάνει έξι ανιχνευτές-δέκτες οι οποίοι βρίσκονται: στην Ελλάδα(Αθήνα), στην Κύπρο (Λάρνακα), στη Ρουμανία (Ιάσιο), στην Ισπανία (Mazagon), στην Αγγλία (Μπέρμιγχαμ) και στη Δανία (Roskilde).

Που στηρίζεται η λειτουργία του; μα που αλλού, στα Μαθηματικά.

Η μέθοδος καταγραφής βασίζεται στο γεγονός ότι κατά τη διάρκεια του κεραυνού εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (5 - 15 KHz) η οποία και διαδίδεται σφαιρικά, σαν ένα μπαλόνι που φουσκώνει, από την τοποθεσία που έγινε ο κεραυνός με την ταχύτητα του φωτός. Το σύστημα ΖΕΥΣ με τους ανιχνευτές που διαθέτει καταγράφει αυτό το κύμα της ακτινοβολίας που προκαλεί ο κάθε κεραυνός. Αν είχαμε μόνο έναν ανιχνευτή μπορούσαμε να καταγράφουμε την ακτινοβολία κάθε κεραυνού χωριστά και έτσι να τους μετράμε. Επειδή όμως θέλουμε να καταγράφουμε και την ακριβή θέση σε σχέση με το έδαφος που εκδηλώνεται ένας κεραυνός, για αυτό χρειάζονται τέσσερις σταθμοί. Όταν ένας κεραυνός έρθει σε επαφή με το έδαφος το σφαιρικό κύμα που εκπέμπει το καταγράφουν όλοι οι σταθμοί από το σύστημα ΖΕΥΣ και σε διαφορετικούς χρόνους, αφού η απόσταση που έχει κάθε φορά ο κεραυνός από κάθε σταθμό είναι διαφορετική. Έτσι δύο διαφορετικοί σταθμοί καταγράφουν τον κεραυνό σε χρόνο που εξαρτάται από την απόστασή του από το σταθμό.

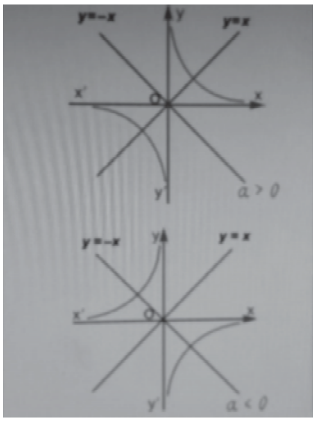
Εδω έρχονται τα Μαθηματικά

Στο τεύχος 92 του περιοδικού είχαμε δημοσιεύσει τη λειτουργία του συστήματος πλοήγησης(GRS), ανάλογη είναι και η αρχή λειτουργίας του συστήματος ΖΕΥΣ. Η διαφορά χρόνου άφιξης της κυματομορφής από κάθε κεραυνό σε κάθε ανιχνευτή, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε με ακρίβεια το σημείο εκδήλωσης του και την απόσταση.
Συγκεκριμένα όταν οι σταθμοί του συστήματος ΖΕΥΣ καταγράψουν έναν κεραυνό το κέντρο ελέγχου του συστήματος θέτει έναν από τους σταθμούς ως «σταθμό αναφοράς» και του αποδίδει μηδενική διαφορά χρόνου άφιξης του σήματος. Παράλληλα υπολογίζει τις αντίστοιχες διαφορές του χρόνου άφιξης στους υπόλοιπους σταθμούς με βάση το σταθμό αναφοράς. Στη συνέχεια υπολογίζει τον κοινό γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία η διαφορά άφιξης του σήματος μεταξύ του σταθμού αναφοράς και ενός άλλου σταθμού του δικτύου είναι ο ίδιος. Τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μία υπερβολή. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε σταθμό και

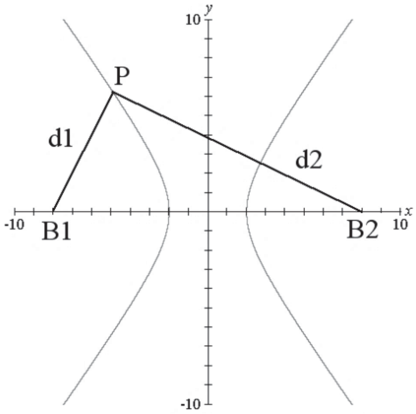
τελικά το σημείο που σημειώθηκε η ηλεκτρική εκκένωση ταυτίζεται με το σημείο τομής όλων των υπερβολών.

Τι λέμε υπερβολή στα μαθηματικά;

Ξέρουμε ότι αν έχουμε τις μεταβλητές χ, ψ που οι τιμές τους ανήκουν σε ανάλογα ποσά τότε ψ=αχ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μια ευθεία.



Σχ.1



Σχ.2

Αν οι μεταβλητές χ, ψ έχουν τιμές από αντιστρόφως ανάλογα ποσά τότε ψ=α/χ με α≠0 , η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι υπερβολή. Αυτή είναι η απλούστερη περίπτωση υπερβολής. Η υπερβολή έχει δύο κλάδους με κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων. Σχ.1.

Η γενική μορφή της υπερβολής είναι αυτή της οποίας βλέπουμε τη γραφική παράσταση στο Σχ.2. Όλα τα σημεία **P** του επιπέδου που είναι σημεία της υπερβολής έχουν την εξής ιδιότητα: **η διαφορά των αποστάσεών τους από τα σημεία B_1 και B_2 που λέγονται εστίες της υπερβολής, είναι σταθερή (ίδια για όλα). Δηλαδή η απόλυτη τιμή της διαφοράς PB_2-PB_1=2α<$2B_1B_2$.**

Αν τώρα πάμε στους ανιχνευτές του συστήματος ΖΕΥΣ και έστω ότι ο ανιχνευτής της Αθήνας κατέγραψε έναν κεραυνό τη χρονική στιγμή t_1 ενώ ο ανιχνευτής της Κύπρου τον κατέγραψε τη χρονική στιγμή t_2 με $t_1 < t_2$. Επομένως οι πιθανές θέσεις που εκδηλώθηκε ο κεραυνός είναι στην υπερβολή **PK-PA=υ.(t_2 - t_1),** όπου υ=ταχύτητα του κύματος. Αν πάρουμε τώρα και τις υπερβολές με δύο ακόμα άλλους ανιχνευτές θα βρούμε στην τομή τους ακριβώς το σημείο P του κεραυνού. Έτσι με τα μαθηματικά αφήσαμε άνεργο τον Ήφαιστο και χωρίς κεραυνούς το Δία.

Βιβλιογραφία

1. Μετεωρολογία και περιγραφική μετεωρολογία. Λεωνίδας Καραπιπέρης
   Καθηγητού μου στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
2. Άρθρα μου: στον Ευκλείδη Α΄ τ.34 και τ.92 για το GPS και Ευκλείδη Β΄τ.77
3. Το σύστημα ΖΕΥΣ του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών
4. Προβλέπω τον καιρό. Δημητρίου Ασημάκης
5. Μετεωρολογία. Λέκκας Αθανάσιος
6. Meteorology Today. C. Donald Ahrens, Robert Henson
7. Καιρός: Ο γιος της Γης και του Ήλιου. Δημήτρης Ζιακόπουλος
8. Αεροπορική Μετεωρολογία. Χατζηαλέκου Ουρανία
9. Εισαγωγή στην Ατμοσφαιρική Φυσική. Χρίστος Χαλδούπης

Πρόσθεση, Αφαίρεση ρητών

Αρδαβάνη Καλλιόπη – Μάλλιαρης Χρήστος

Οι ρητοί αριθμοί, δηλαδή οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί που μπορεί να γραφούν σαν κλάσματα, μας δημιουργούν μία σειρά από μαθηματικές απορίες.

- *Πώς γίνεται μερικές φορές ενώ ζητάμε πρόσθεση ρητών, τελικά να κάνουμε αφαίρεση;*
- *Γιατί η πρόσθεση ρητών δεν σημαίνει πάντα αύξηση;*
- *Πώς γίνεται να προσθέτουμε δύο αριθμούς και να έχουμε αποτέλεσμα 0;*
- *Γιατί η αφαίρεση ρητών δεν σημαίνει πάντα ελάττωση;*

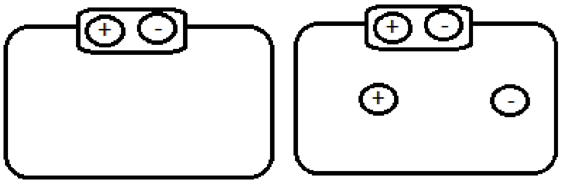
Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα αφού ανακαλύψουμε και δημιουργήσουμε τους κανόνες πράξεων με ρητούς αριθμούς μέσα από το παρακάτω παιχνίδι:

Σε ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι γνώσεων για παιδιά δημοτικού, ένας παίκτης απαντά σε μια σειρά ερωτήσεων ανά πεντάλεπτο.

Για την κάθε μία ερώτηση αν απαντήσει σωστά παίρνει από τη στίβα καρτών μία θετική κάρτα ενώ αν απαντήσει λάθος παίρνει μια αρνητική κάρτα.

Εμείς θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της τελικής βαθμολογίας του, το σκορ του.

Παρατηρήστε τις παρακάτω εικόνες του πίνακα του παιχνιδιού:



- στο πάνω μέρος του πίνακα του παιχνιδιού υπάρχει μία στίβα θετικών καρτών και μία αρνητικών.
- Αν ένας παίκτης απαντήσει μια σωστή ερώτηση και μία λάθος το σκορ του είναι 0. Το ίδιο συμβαίνει αν απαντήσει 2 λάθος και 2 σωστές.

Δηλαδή το άθροισμα δύο αντιθέτων αριθμών είναι 0 άρα

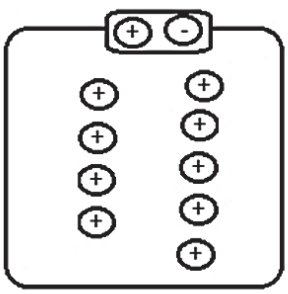
$\boxed{\alpha+(-\alpha)=0}$

Πρόσθεση ρητών

Μια παρέα τεσσάρων συνομίλικων μαθητών-μαθητριών, παίζει το παιχνίδι για δύο πεντάλεπτα. Η Κατερίνα απαντά **4 ερωτήσεις σωστά** στο πρώτο πεντάλεπτο και **5 ερωτήσεις σωστά** στο επόμενο πεντάλεπτο. Η Εύα απαντά **3 λάθος** στο πρώτο πεντάλεπτο και **4 λάθος** στο επόμενο. Ο Γιάννης απαντά **6 σωστά** στο πρώτο πεντάλεπτο και **2 λάθος** στο επόμενο. Ο Γρηγόρης απαντά **4 λάθος** στο πρώτο πεντάλεπτο και **2 σωστά** στο επόμενο.

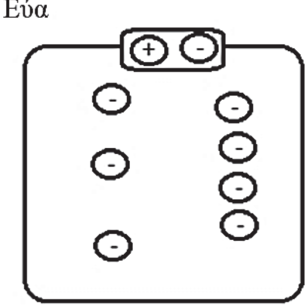
Ας σημειώσουμε στο κάθε πεντάλεπτο τις κάρτες που «κέρδισαν» για να βρούμε το σκορ του καθενός.

Κατερίνα

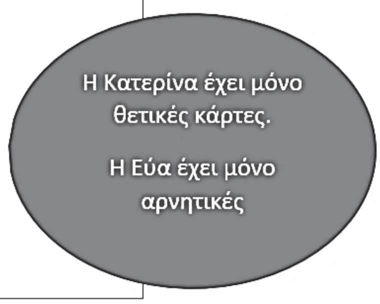


(+4) + (+5) = + 9

Εύα



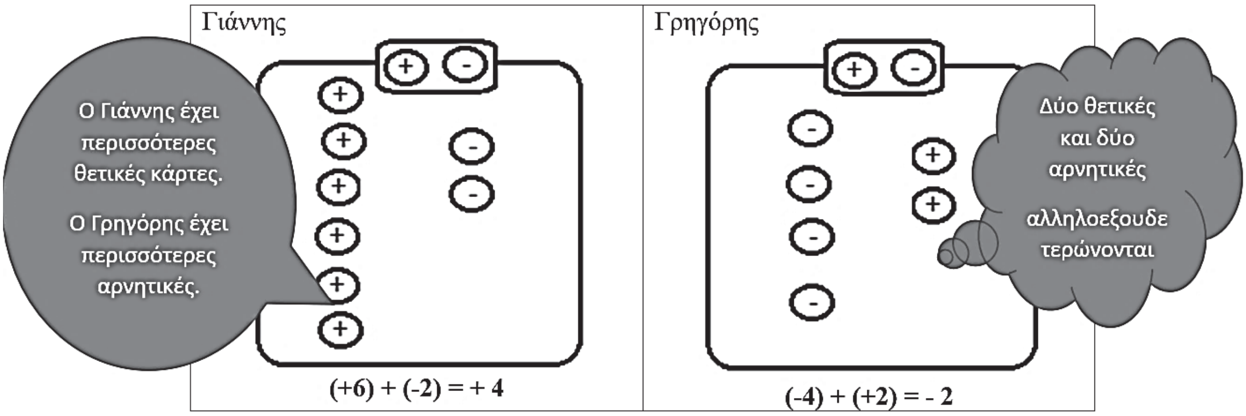
(-3) + (-4)= - 7



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί **+4, +5, +9 είναι ομόσημοι** και 4+5=9.

Επίσης οι αριθμοί **-3, -4, -7 είναι ομόσημοι** με $|-3| = 3$, $|-4| = 4$ και 3+4=7 **ΑΡΑ:**

Για να βρω το άθροισμα δύο ομόσημων ρητών προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους και βάζω πρόσημο αυτό που έχουν.



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί **+6, -2 είναι ετερόσημοι**, $|-2| = 2$ και 6-2=4.

Ομοίως οι αριθμοί **- 4, +2 είναι ετερόσημοι**, $|-4| = 4$ και 4-2=2, **ΑΡΑ:**

Για να βρω το άθροισμα δύο ετερόσημων ρητών αφαιρώ τις απόλυτες τιμές τους και βάζω πρόσημο του μεγαλύτερου κατά απόλυτο τιμή.

- Οι παίκτες Α και Β παίζουν και απαντούν σωστά ή λάθος σε ερωτήσεις 5 πεντάλεπτων σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

	1ο	2ο	3ο	4ο	5ο
Α	4 λάθος και 1 σωστή	6 λάθος και 2σωστές	7 σωστές	3 λάθος και 4 σωστές	5 σωστές και 2 λάθος
Β	4 σωστές	6 σωστές	8 λάθος	5 σωστές	6 λάθος

- ***Να γράψετε*** *τις αριθμητικές παραστάσεις που υπολογίζουν το σκορ καθενός παίκτη. Με πόσους τρόπους μπορούμε να υπολογίσουμε το σκορ του καθενός; Υπάρχει σύντομη λύση; Ποια είναι αυτή;*
- Η πρόσθεση ρητών σημαίνει πάντα αύξηση;

Εξάσκηση:

- *Να κάνετε τις πράξεις:*

(α) (+12)+(+15)=	*(β) -20+4=*	*(γ) (-9,5)+(+6,25)=*
(δ) $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{6}{3}\right)=$	*(ε)* $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-1\frac{2}{5}\right)=$	*(στ) (-11)+0=*

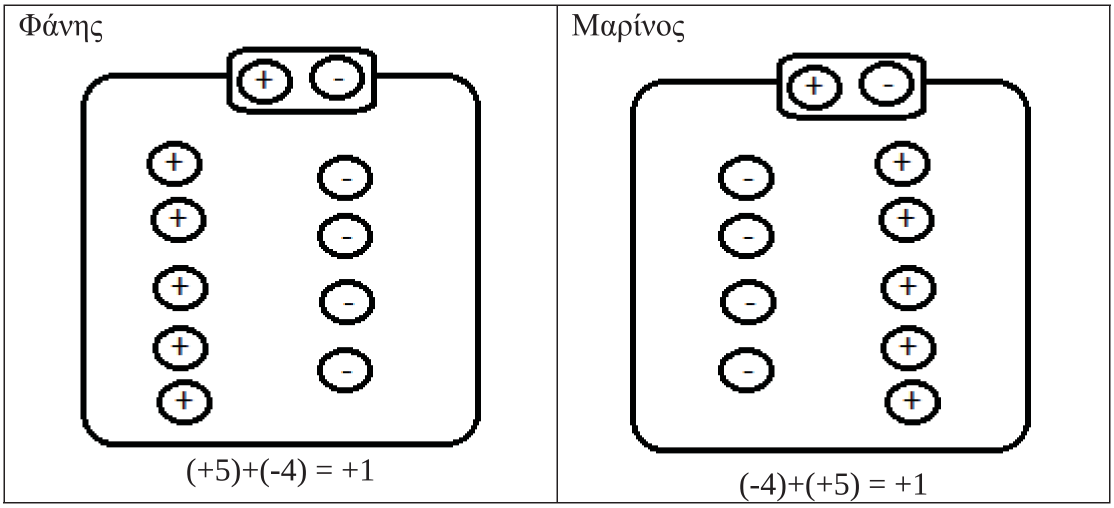
- *Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:*

(α) $(-1{,}3)+(+5)+(+3{,}2)+(-\frac{5}{2})+(+\frac{5}{3})+(+1{,}3)=$
(β) (-3)+(+1)+(+3,2)+(-1,1)+(+1,3)+(-5)=
(γ) +61+29-41-29=
(δ) $(-5)+(+\frac{1}{2})+(+12)+(-\frac{1}{2})=$

- *Ποιο είναι το συμπέρασμα σας για τους ρητούς α και β, αν:*
  (α) $\alpha + \beta = 0$
  (β) $\alpha + \beta = \alpha$
  (γ) $\alpha + \beta = 0$ και $\alpha + \beta = \alpha$

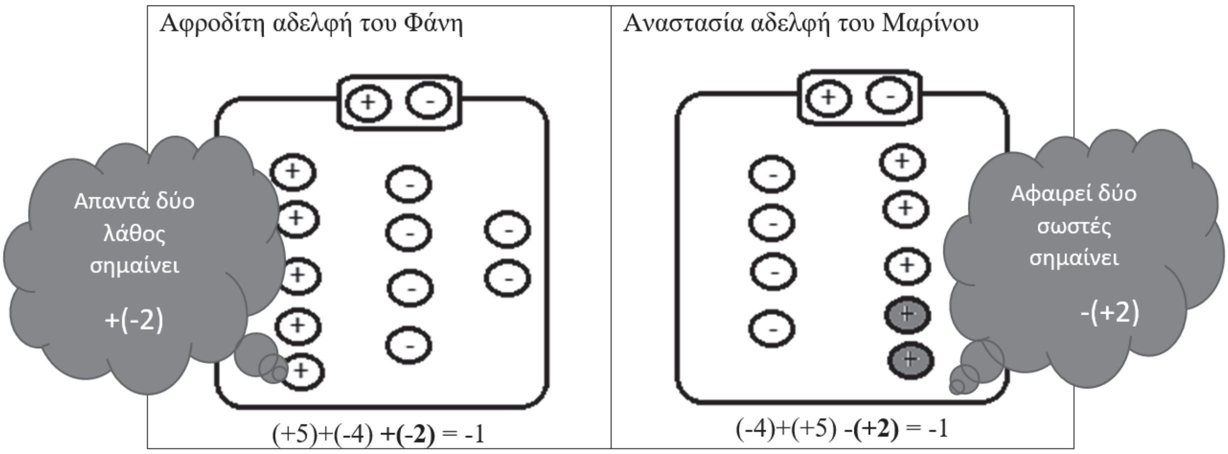
Αφαίρεση ρητών

Ο Φάνης και ο Μαρίνος παίζουν το παιχνίδι ερωτήσεων και μετά το 1ο πεντάλεπτο έχουν το ίδο σκορ = +1



Στο 2ο πεντάλεπτο συνεχίζουν το παιχνίδι οι μικρότερες αδελφούλες τους Αφροδίτη και Αναστασία. Η Αφροδίτη, αδελφούλα του Φάνη, ενεργοποιεί τις ερωτήσεις και απαντά λάθος σε δύο ερωτήσεις. Η Αναστασία, αδελφούλα του Μαρίνου, στην προσπάθεια της να παίξει αφαιρεί κατά λάθος δύο σωστές προηγούμενες απαντήσεις!

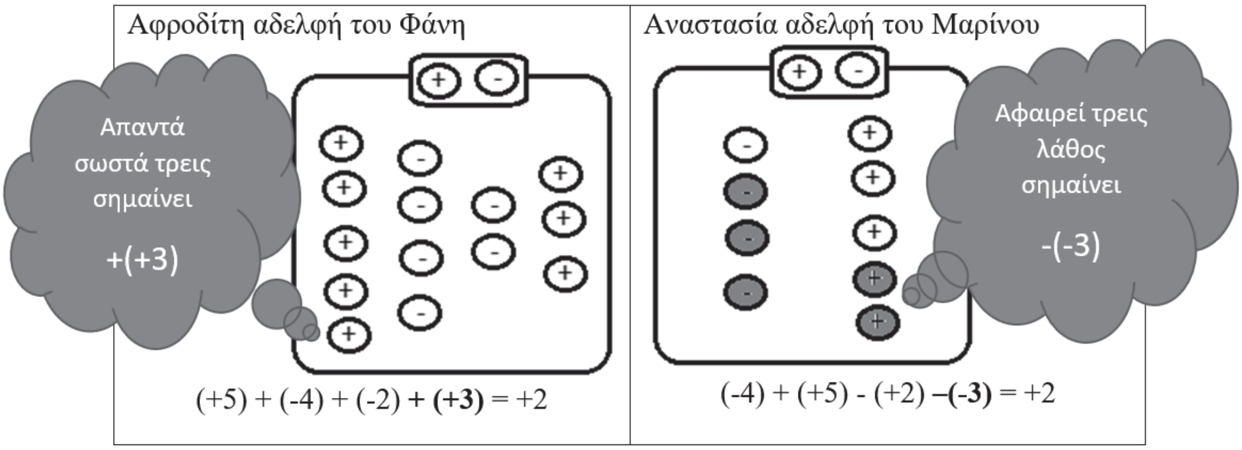
Ποιο είναι το σκορ των δύο φίλων τώρα; Ποιος από τους δύο φίλους ωφελήθηκε ή ζημιώθηκε περισσότερο;



Παρατηρούμε ότι με την παρέμβαση τους οι αδελφούλες ζημίωσαν τους δύο φίλους το ίδιο, δηλαδή οι ποσότητες **-(+2)** , **+(-2)** είναι ίσες,άρα **- (+2) = +(-2)**

Στο 3ο πεντάλεπτο συνεχίζοντας οι αδελφούλες «κατάφεραν» η μεν Αφροδίτη να παίξει και να απαντήσει σωστά σε τρεις νέες ερωτήσεις ενώ η Αναστασία να αφαιρέσει - ακυρώσει τρεις προηγούμενες λανθασμένες του αδελφού της Μαρίνου.

Ποιο είναι τώρα το νέο σκορ των φίλων; Ποιος από τους δύο ωφελήθηκε; `



Παρατηρούμε ότι οι δύο αδελφούλες ωφέλησαν τους αδελφούς τους το ίδιο, δηλαδή οι ποσότητες **–(-3), + (+3)** είναι ίσες ή ότι **–(-3) = + (+3).**

Συμπεραίνουμε ότι:

Για να κάνουμε αφαίρεση δύο ρητών αρκεί να προσθέσουμε στον Μειωτέο τον αντίθετο του Αφαιρετέου

δηλαδή $\boxed{\alpha - (+\beta) = \alpha + (-\beta)}$

- ***Εξετάστε*** *το συμπέρασμα και τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας αν οι δύο φίλοι είχαν διαφορετικό σκορ μετά το* 1^o *πεντάλεπτο, ενώ οι αδελφούλες τους διατηρούσαν την ίδια συμπεριφορά και είχαν τα ίδια αποτελέσματα στην προσπάθεια τους να παίξουν.*
- Η αφαίρεση ρητών σημαίνει πάντα ελάττωση;

Εξάσκηση:

- *Να κάνετε τις πράξεις:*

(α) (+9)-(+12)=	*(β) 7,3-(-15,14)=*	*(γ) (-17)-(+13)=*
(δ) (+27)-(-8)=	*(ε) -19-(-19)=*	*(στ) (+3-4)-(-2+3-1)=*

- *Να γράψετε τους επόμενους 3 όρους των πιο κάτω μοτίβων:*

(α) 10, 8, 6, 4, …, …, …

(β) 19, 14, 9, 4, …, …, …

(γ) -10, -7, -4, -1, …, …, …

(δ) $-1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -6, \dots, \dots, \dots$

- *Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:*

  (α) (+10)+(-15)+(-3)-(-1)-(+7)=

  (β) –(-7)+(-5)-(+8)+(-7)-(-15)=

  (γ) 12-(11-3)+(5-7)-(8+6)=

- *Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:*

  (α) …… - (-5) = +1

  (β) … - (+11) = +4

  (γ) -5 + … = 13

  (δ) +12 - … = -12

  (ε) |-11| + … = +20

  (στ) … - |-3| = +1

Ένα Πρόβλημα, πολλές προσεγγίσεις λύσης του

Ανδρέας Τριανταφύλλου

Στο 114ο τεύχος του περιοδικού Ευκλείδης Α΄ στη σελίδα 22, παρουσιάσαμε το παρακάτω πρόβλημα με μια σειρά από λύσεις του.

Πρόβλημα

Όταν ο Νίκος κάνει βολή στο μπάσκετ, είτε βάζει καλάθι με το σουτ, είτε αστοχεί. Στη διάρκεια της προπόνησης, για κάθε βολή που ο Νίκος βάζει καλάθι, παίρνει 5 βαθμούς από τον προπονητή του. Για κάθε χαμένη βολή, ο προπονητής του, τού αφαιρεί 2 βαθμούς. Ο Νίκος κάνει συνολικά 28 βολές, και καταλήγει να πάρει μηδενική βαθμολογία (0 βαθμοί). Πόσες εύστοχες βολές έκανε ο Νίκος;

Με αφορμή μια γενίκευση του προβλήματος που μας προτάθηκε από τον συνάδελφο Αδάμ Αγγελή, παρουσιάζουμε παρακάτω και άλλες προσεγγίσεις επίλυσης τού προβλήματος. Θεωρούμε ότι η γενίκευση, όπως υποδεικνύεται στο τέλος του άρθρου, μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά όποιον θέλει να δημιουργήσει παρόμοια προβλήματα με διαφορετικά αριθμητικά δεδομένα

… και άλλες λύσεις

- **6ος τρόπος (παραλλαγή του 1ου τρόπου)**

Ας υποθέσουμε ότι ο Νίκος δεν έβαλε κανένα καλάθι, τότε βαθμολογείται με -56 (28·2=56). Για να έχουμε όμως μηδενική βαθμολογία, προφανώς έχει και επιτυχείς βολές με βαθμολογία πολλαπλάσια του 5 και μικρότερη του 56. Να είναι 55; Αυτή αντιστοιχεί σε 11 επιτυχείς βολές και 17 ανεπιτυχείς με βαθμολογία -34. Δεν μας κάνει. Με την ίδια συλλογιστική απορρίπτουμε τις βαθμολογίες 50 (10 επιτυχείς βολές), 45 (9 επιτυχείς βολές) και καταλήγουμε στη βαθμολογία 40 που αντιστοιχεί σε 8 επιτυχείς βολές και 20 ανεπιτυχείς που βαθμολογούνται με -40 $(20 \cdot 2)$.

Άρα ο Νίκος έχει μηδενική βαθμολογία, αν βάλει καλάθι σε 8 βολές και χάσει σε 20.

- **7ος τρόπος**

Ο Νίκος κάνει συνολικά 28 βολές και ενώ παίρνει 5 βαθμούς για κάθε καλάθι και χάνει 2 για κάθε άστοχη βολή καταλήγει σε μηδενική βαθμολογία.

Για να έχει, τελικά, μηδενική βαθμολογία θα πρέπει οι βαθμοί που παίρνει για τις επιτυχημένες βολές να είναι αριθμός ίσος με τον αριθμό που αντιστοιχεί στις βολές που χάνει και επομένωσο αριθμός αυτός θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,2) δηλαδή του 10.

Έτσι, αν οι βαθμοί αντιστοιχούν στον αριθμό 10 θα έχουμε 10:5=**2** επιτυχείς βολές και 10:2= **5**ανεπιτυχείς, **2+5=7 βολές** *απορρίπτεται (αφού είναι* $\neq$ *28).* Ακολούθως, αν είναι 20 θα έχουμε 20:5=**4** επιτυχείς βολές και 20:2=**10**ανεπιτυχείς, **4+10=14***απορρίπτεται*, αν είναι 30 θα έχουμε 30:5=**6** επιτυχείς βολές και 30:2=**15**ανεπιτυχείς, **6 + 15 = 21** *απορρίπτεται.* Αν τώρα οι βαθμοί αντιστοιχούν στο αριθμό 40 θα έχουμε 40 : 5 = **8** επιτυχείς βολές και 40 : 2 = **20** ανεπιτυχείς.

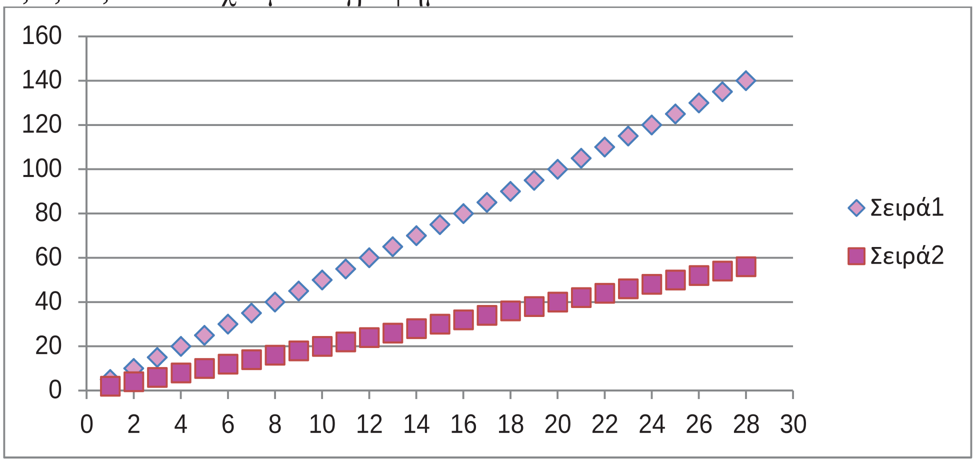
Δηλαδή, **8 + 20 = 28 βολές, *δεκτό,*** με βαθμολογία τον αριθμό 40 τόσο για τα 8 καλάθια που πέτυχε όσο και για τα 20 που έχασε.

Άρα ο Νίκος έχει μηδενική βαθμολογία, αν βάλει καλάθι σε 8 βολές και χάσει 20 βολές.

- **8ος τρόπος**

Για κάθε βολή, που ο Νίκος βάζει καλάθι, παίρνει 5 βαθμούς. Σε αυτή την περίπτωση από την $y=5x$ με x=1,2, …, 28 παίρνουμε τους βαθμούς για τις αντίστοιχες επιτυχείς βολές x. Με ανάλογη σκέψη από την $y_1=2x$ με x=1,2, …, 28 παίρνουμε τους βαθμούς για τις αντίστοιχες βολές x που χάνει.

Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των $y=5x$ (Σειρά 1) και $y_1=2x$ (Σειρά 2) για x = 1, 2, …, 28 και έχουμε το γράφημα:



Σύμφωνα με το πρόβλημα μετά τις 28 βολές έχουμε μηδενική βαθμολογία.

Δηλαδή, $y-y_1=0$ που σημαίνει $y = y_1$. Αυτό όμως συμβαίνει στα σημεία του γραφήματος που ανά δύο ορίζουν ευθεία (ή ευθείες) παράλληλη (ή παράλληλες) προς τον οριζόντιο άξονα. Παρατηρούμε στο γράφημά μας ότι τα σημεία με συντεταγμένες (4, 20), (10, 20) [έχουν τεταγμένη $y = y_1 = 20$], και (8, 40), (20, 40) με τεταγμένη $y = y_1 = 40$ ορίζουν δύο ευθείες παράλληλες προς τον οριζόντιο άξονα. Επειδή ο Νίκος κάνει συνολικά 28 βολές, η περίπτωση των σημείων (4, 20), (10, 20) απορρίπτεται και αποδεχόμαστε το δεύτερο ζευγάρι σημείων που έχει τετμημένες 8 και 20 δηλαδή, σύνολο βολών 28. Άρα ο Νίκος έχει μηδενική βαθμολογία αν βάλει καλάθι σε 8 βολές και αστοχήσει σε 20.

- **9ος τρόπος**

Ας συμβολίσουμε με **x** τον αριθμό των επιτυχημένων βολών και με **y** τον αριθμό των βολών που αστόχησε ο Νίκος.Επειδή για κάθε επιτυχή βολή παίρνει 5 βαθμούς δηλαδή 2,5 φορές περισσότερους από αυτούς που χάνει πρέπει 1x=2,5y.
Οπότε x+y=2,5y+yκαι επειδή x+y=28 έχουμε 28=3,5yαπό την οποία προκύπτει **y=8** και επομένως **x=20**.
Άρα ο Νίκος έχει μηδενική βαθμολογία αν βάλει καλάθι σε 8 βολές και αστοχήσει σε 20 βολές.

- **10ος τρόπος (παραλλαγή του 3ου τρόπου)**

Ας συμβολίσουμε με **α** τον αριθμό των επιτυχημένων βολών και με **β** τον αριθμό των βολών που αστόχησε ο Νίκος. Τότε το **5•α** αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που κέρδισε ο Νίκος για επιτυχημένες βολές, και το **2•β** αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που έχασε ο Νίκος από τις αποτυχημένες βολές.
Θέλουμε ο Νίκος να έχει τελικά μηδενική βαθμολογία, άρα **5α - 2β = 0.** Επομένως **5α = 2β** (1)
Η (1) γίνεται $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{2{,}5}\Leftrightarrow$ από ιδιότητα των αναλογιών $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{1+2{,}5}{2{,}5}$
$\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{3{,}5}{2{,}5}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{28}{\beta}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\beta=5\frac{28}{7}=20$.
Αλλά $\alpha+\beta=28$, οπότε $\alpha=28-\beta=28-20=8$.

Στη συνέχεια με βάση την παραπάνω λύση γίνεται προσπάθεια να γενικεύσουμε το πρόβλημα, αναζητώντας και τον τρόπο κατασκευής του

- **Γενίκευση**

Έστω **β** ο αριθμός των συνολικών βολών και **μ ένας παράγοντας του β**. Ο παράγοντας μ αναπτύσσεται σε άθροισμα δύο προσθετέων. Ας είναι μ_1 και μ_2 δύο από τους προσθετέους του μ. Οπότε $\mu=\mu_1+\mu_2$. Ακολούθως, αντιστοιχίζουμε στον μ_1 τους βαθμούς που παίρνει σε κάθε καλάθι που βάζει και στον μ_2 τους βαθμούς που αφαιρεί ο προπονητής του για κάθε χαμένη βολή.

Αν δεχτούμε ότι **x** είναι οι επιτυχημένες βολές και **y** οι αποτυχημένες θα έχουμε: σύμφωνα με το πρόβλημα β = x + y και $\mathbf{x}\cdot\mu_1-\mathbf{y}\cdot\mu_2=0$. Από την $\mathbf{x}\cdot\mu_1-\mathbf{y}\cdot\mu_2=0$ έχουμε $x\mu_1=y\mu_2 \Leftrightarrow$ $\frac{x}{y}=\frac{\mu_2}{\mu_1}$ και από γνωστή ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει

$$\frac{x+y}{y}=\frac{\mu_2+\mu_1}{\mu_1}\Leftrightarrow\frac{\beta}{y}=\frac{\mu}{\mu_1}\Leftrightarrow\mathbf{y}=\beta\frac{\mu_1}{\mu}$$

Όμοια $\frac{y}{x}=\frac{\mu_1}{\mu_2}\Leftrightarrow\frac{y+x}{x}=\frac{\mu_2+\mu_1}{\mu_2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{x}=\frac{\mu}{\mu_2}\Leftrightarrow\mathbf{x}=\beta\frac{\mu_2}{\mu}$. Επομένως ο $\mathbf{x=\beta\frac{\mu_2}{\mu}}$ είναι ο αριθμός των επιτυχημένων βολών και $\mathbf{y=\beta\frac{\mu_1}{\mu}}$ ο αριθμός των άστοχων βολών.

Εφαρμογή: Αν το σύνολο των βολών είναι β=28, όπως το πρόβλημά μας. Ένας από τους παράγοντες του 28 είναι ο μ = 7. Ο μ = 7 αναπτύσσεται σε $6+1, 5+2, 4+3$

Αν πάρουμε τον μ = 7 = 5 + 2 (όπως στο πρόβλημα) θα έχουμε $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 2$ και $x=\beta\frac{\mu_2}{\mu}=28\frac{2}{7}=8$ εύστοχες βολές και $\mathbf{y}=\beta\frac{\mu_1}{\mu}=28\frac{5}{7}=20$ άστοχες βολές.

Αν τώρα θεωρήσουμε το $7=6+1$, δηλαδή, $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 1$ θα έχουμε την λύση: $x=\beta\frac{\mu_2}{\mu}=28\frac{1}{7}=4$ εύστοχες βολές και $\mathbf{y}=\beta\frac{\mu_1}{\mu}=28\frac{6}{7}=24$ άστοχες βολές.

Επαλήθευση: $\mathbf{x}\cdot\mu_1-\mathbf{y}\cdot\mu_2=4\cdot6-24\cdot1=24-24=0$.

Άρα μπορούμε να διαμορφώσουμε νέο πρόβλημα:

*Όταν ο Νίκος κάνει βολή στο μπάσκετ, είτε βάζει καλάθι με το σουτ, είτε αστοχεί. Στη διάρκεια της προπόνησης, για κάθε βολή που ο Νίκος βάζει καλάθι, παίρνει **6** βαθμούς από τον προπονητή του. Για κάθε χαμένη βολή, ο προπονητής του, τού αφαιρεί **1** βαθμό. Ο Νίκος κάνει συνολικά 28 βολές, και καταλήγει να πάρει μηδενική βαθμολογία (0 βαθμοί). Πόσες εύστοχες βολές έκανε ο Νίκος;*

Ομοίως μπορούμε να διαμορφώσουμε νέα προβλήματα και για τους άλλους παράγοντες 2, 4, 14, 28 του 28.

Δημιουργείστε προβλήματα με διαφορετικό αριθμό βολών π.χ. β = 36 με τους κατάλληλους βαθμούς.

Τι παρατηρείτε στην περίπτωση που ο αριθμός των βολών είναι πρώτος αριθμός;

Περιμένουμε τις απαντήσεις σας στο **info@hms.gr**

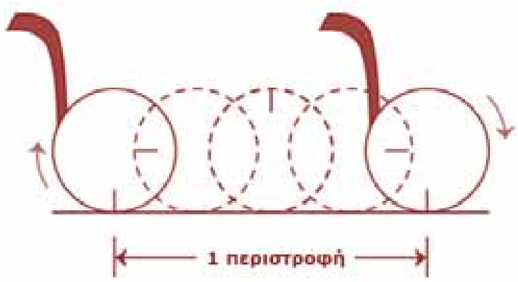
Μήκος Κύκλου και Εμβαδόν Κυκλικού Δίσκου

Στυλιανός Μαραγκάκης - Ανδρέας Τριανταφύλλου

Σε πολλά καταστήματα με μηχανολογικό εξοπλισμό πωλείται το παρακάτω εργαλείο (ρόδα) το οποίο, όπως υποστηρίζει ο κατασκευαστής του, είναι κατάλληλο για να μετρά αποστάσεις δύο σημείων πάνω στο έδαφος ή γενικότερα μήκος μιας διαδρομής. (Εικόνα 1)

Το μόνο που έχει να κάνει ο χειριστής του είναι να κυλίσει τη ρόδα, όπως δείχνει η εικόνα 2, από την αρχή μέχρι το τέλος της διαδρομής και τότε στο μαύρο κουτί που βρίσκεται στο κάτω μέρος της ρόδας εμφανίζεται το συνολικό μήκος της διαδρομής.

Εικόνα 1



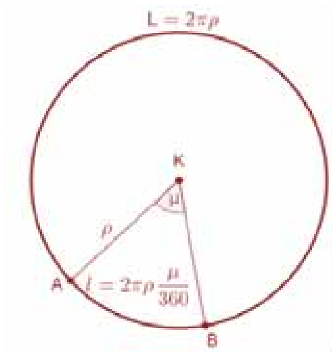
Εικόνα 2

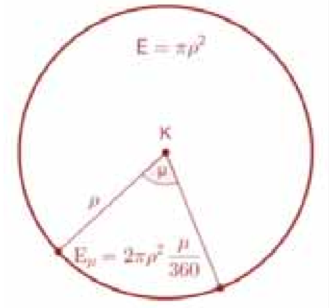
Τι υπολογισμούς άραγε κάνει ο μηχανισμός που βρίσκεται μέσα στο μαύρο κουτί;
Για να απαντήσει κάποιος σε αυτό χρειάζεται να διαθέτει ορισμένες βασικές γνώσεις σχετικά με τον υπολογισμό των βασικών μεγεθών σε ένα κύκλο.

- Το μήκος **L** του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση $\mathbf{L=\pi\,\delta}$ ή $\mathbf{L=2\pi\rho}$, όπου **δ** και **ρ** η διάμετρος και η ακτίνα του κύκλου αντίστοιχα.

Ο αριθμός **π** είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, για τον οποίο χρησιμοποιούμε στις εφαρμογές την προσεγγιστική τιμή **3,14.**

- Ένα τόξο $\mathbf{\mu^o}$ έχει μήκος $\mathbf{l = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}}$
- Το εμβαδόν **Ε** κυκλικού δίσκου με ακτίνα **ρ** και διάμετρο **δ** είναι: $\mathbf{E=\pi\rho^2}$ ή $\mathbf{E = \pi\,\frac{\delta^2}{4}}$.
- Το εμβαδόν $\mathbf{E_\mu}$ κυκλικού τομέα γωνίας $\mathbf{\mu^o}$ είναι μήκος $\mathbf{E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}}$



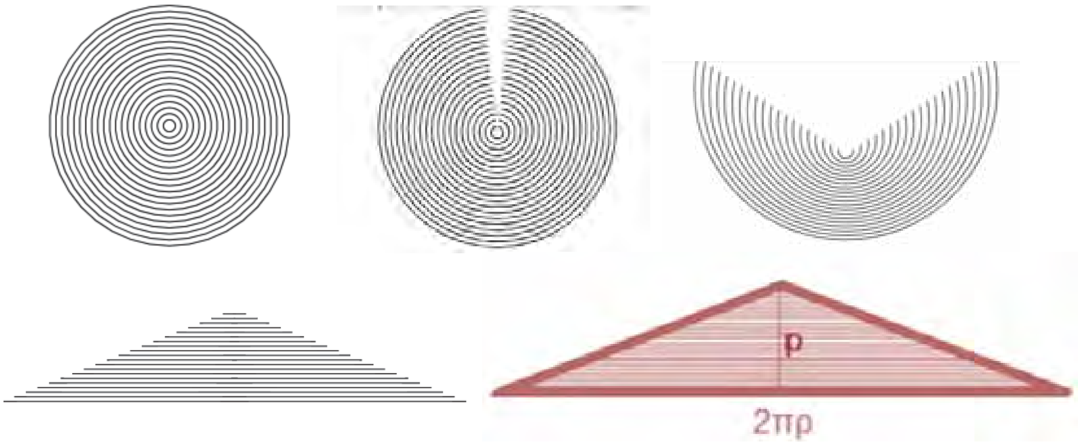


Για να υπολογίσουν εποπτικά το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου οι μαθηματικοί έχουν επινοήσει διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι και ο παρακάτω:

Για να βρούμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου[1] τον χωρίζουμε με ομόκεντρους κύκλους σε όσο ποιο λεπτούς κυκλικούς δακτυλίους μπορούμε. *Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε*

[1] https://www.mathsisfun.com/geometry/circle-area-lines.html

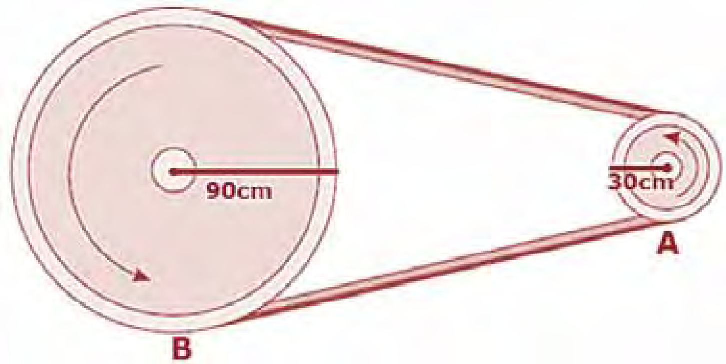
κατασκευαστικά τυλίγοντας κυκλικά ένα χοντρό σχοινί ή για μεγαλύτερη ακρίβεια κατασκευάζοντας ομόκεντρους δακτυλίους. Στη συνέχεια κόβουμε τον σχοινένιο κυκλικό δίσκο κατά μήκος μιας ακτίνας του. Κατόπιν αρχίζουμε να ανοίγουμε τους δακτυλίους όπως στο σχήμα μέχρι ο εξωτερικός δακτύλιος να ευθυγραμμιστεί …, οπότε παίρνουμε ένα τρίγωνο



Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\mathrm{E} = \dfrac{\boldsymbol{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\cdot\acute{\upsilon}\psi o\varsigma}}{\mathbf{2}}$ οπότε $\mathrm{E} = \dfrac{\mathbf{2}\pi\rho\cdot\rho}{\mathbf{2}}$, δηλαδή $\mathbf{E=\pi\rho^2}$

Λυμένες Ασκήσεις

- Σε ένα εργοστάσιο δύο τροχαλίες Α και Β μιας μηχανής συνδέονται με ιμάντα.
  α) Πόσες στροφές θα κάνει η τροχαλία Α αν η Β κάνει 2 στροφές.
  β) Πόσες στροφές θα πάρει η τροχαλία Α αν η Β πάρει ν στροφές (ν θετικός ακέραιος)
  γ) Αν οι ακτίνες των Α και Β είναι r και R αντίστοιχα με R=κ·r (κ θετικός ακέραιος) και η τροχαλία Α πάρει ν στροφές (ν θετικός ακέραιος), πόσες στροφές θα πάρει η Β;



Λύση

α) Για κάθε στροφή που κάνει μια τροχαλία ακτίνας ρ, ο ιμάντας που την συνδέει μετακινείται κατά μήκος 2πρ.

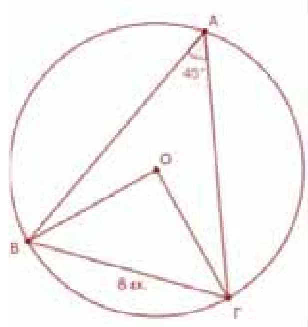
Οπότε σε μία στροφή η τροχαλία Β καλύπτει στον ιμάντα μήκος ℓ_B=2π·90εκ.=180πεκ. και σε δύο στροφές ℓ_B=180·πεκ.. Είναι φανερό ότι το ίδιο μήκος θα καλύψει και η τροχαλία Α. Όμως η τροχαλία Α κάνοντας μία στροφή καλύπτει μήκος ℓ_A=2π·30εκ.=60πεκ

Συνεπώς το μήκος 360π εκ. για να το καλύψει θα πρέπει να κάνει $\mathbf{360}\pi : \mathbf{60}\pi = \mathbf{6}$ στροφές.

β) Σε ν στροφές η τροχαλία Β καλύπτει στον ιμάντα μήκος ℓ_B=180·ν·π εκ. Είναι φανερό ότι το ίδιο μήκος θα καλύψει και η τροχαλία Α. Επειδή η τροχαλία Α κάνοντας μία στροφή καλύπτει μήκος ℓ_A=2π·30εκ.=60πεκ άρα το μήκος 180·ν·π εκ. για να το καλύψει θα πρέπει να κάνει (180·ν·π):60π=3ν στροφές.

γ) Το ερώτημα αυτό αποτελεί μία γενίκευση του αρχικού προβλήματος όπως παρουσιάζεται στην ερώτηση α). Με βάση τα προηγούμενα προσπαθήστε να αποδείξετε ότι η Β θα πάρει κ·ν στροφές.

- Να βρείτε το μήκος του κύκλου (Ο, ρ) καθώς και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκο (Ο, ρ) στο διπλανό σχήμα.



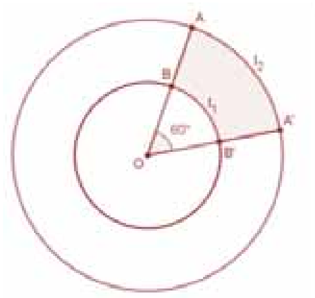
Λύση

Ξέρουμε ότι L=2πρ και Ε=πρ^2. Επειδή $\hat{A} = 45°$, θα έχουμε $B\hat{O}\Gamma = 90°$. Επομένως το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, αφού οι ΟΒ και ΟΓ είναι ακτίνες του κύκλου (Ο, ρ). Οπότε, λόγω Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε: $OB^2 + O\Gamma^2 = B\Gamma^2$ ή $\rho^2 + \rho^2 = 8^2$

Οπότε $2\rho^2 = 64$, άρα $\rho^2 = 32$. Δηλαδή $\rho = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$ εκ..

Άρα $L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\sqrt{2} = 25{,}12\sqrt{2} = 25{,}12 \cdot 1{,}414 = 35{,}53$ εκ. και $E = 3{,}14 \cdot 32 = 100{,}48$ τ.εκ..

- Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες $\rho_1 = 2$εκ. και $\rho_2 = 3$εκ. και μία επίκεντρη γωνία 60^o.Να βρείτε τα μήκη των τόξων που αντιστοιχούν σε αυτή τη γωνία και το εμβαδόν του μέρους του κυκλικού δακτυλίου που αντιστοιχεί σε αυτή τη γωνία.



Λύση

Ξέρουμε ότι το μήκος τόξου μ^o είναι $l = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$, οπότε

$$l_1 = 2\pi\rho_1 \cdot \frac{\mu}{360} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{2}{3}\pi \text{ και } l_2 = 2\pi\rho_2 \cdot \frac{\mu}{360} = 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{60}{360} = \pi$$

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα επίκεντρης γωνίας μ^o είναι: $E_{\kappa.\tau.} = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}$, οπότε

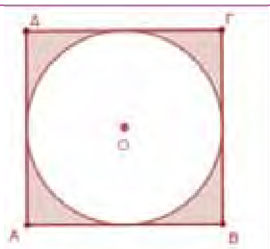
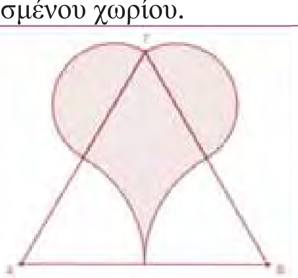
$$E_{OAA'} = \pi\rho_2{}^2 \cdot \frac{\mu}{360} = \pi \cdot 9 \cdot \frac{1}{6} = \pi \cdot \frac{3}{2} \text{τ.εκ. και } E_{OBB'} = \pi\rho_1{}^2 \cdot \frac{\mu}{360} = \pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} = \pi \cdot \frac{2}{3} \text{τ.εκ..}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E_{OAA'} - E_{OBB'} = \frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi - \frac{4}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \text{ τ.εκ.} = \frac{5}{6} \cdot 3{,}14 \text{ τ.εκ.} = 2{,}617 \text{ τ.εκ..}$$

Προτεινόμενες ασκήσεις για λύση

- Πριν ασχοληθείτε με τις παρακάτω ασκήσεις επιχειρήστε να απαντήσετε στο αρχικό ερώτημα για τον τρόπο λειτουργίας του μηχανισμού με τη ρόδα.

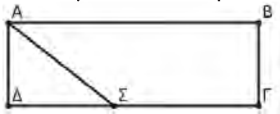
• Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 6 εκ. είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο (Ο, ρ). να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.	• Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τρείς ίσους κύκλους ακτίνας ρ=6 εκ. και κέντρα O_1, O_2, και O_3 που εφάπτονται ανά δύο. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.	• Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 4 εκ. σχηματίζουμε ημικύκλια και κυκλικούς τομείς, όπως στ σχήμα. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του καρδιόσχημου σκιασμένου χωρίου.
		

Προχωρημένα θέματα για όλους. Τάξη Β΄

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

Όσοι μαθητές, ή άλλοι αναγνώστες του Ευκλείδη Α΄, λύσουν κάποια από τα θέματα ή όλα, μπορούν να στείλουν τις λύσεις ηλεκτρονικά στην ΕΜΕ με θέμα: «ΛΥΤΕΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ Α». Μαζί με τη λύση θα αναγράφεται το ονοματεπώνυμό τους και το όνομα του σχολείου τους (αν είναι μαθητές). Εφόσον η λύση είναι μαθηματικά σωστή θα δημοσιεύεται με το όνομα του λύτη.

1) Που θα πρέπει να τοποθετηθεί το σημείο Σ ώστε το εμβαδόν του τραπεζίου να είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου;



2) Το άθροισμα τριών διαφορετικών πρώτων αριθμών είναι 40. Να υπολογίσετε τη διαφορά των δύο μεγαλύτερων από αυτούς.

3) Ένα κατάστημα ενδυμάτων πούλησε το $\frac{1}{3}$ του εμπορεύματος με κέρδος 15%, το $\frac{1}{4}$ του εμπορεύματος με κέρδος 20% και το υπόλοιπο εμπόρευμα το πούλησε με κέρδος 24%. Το συνολικό κέρδος από αυτές τις πωλήσεις ήταν 3.200€. Ποια ήταν η αρχική αξία των εμπορευμάτων; Σημείωση: Με τον όρο αρχική αξία εννοούμε το πόσο που είχε κοστίσει στον έμπορο το εμπόρευμα πριν το πουλήσει.

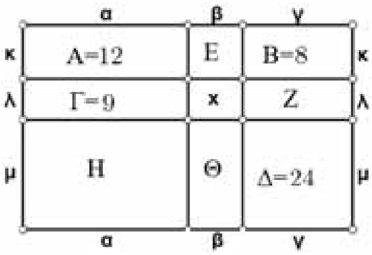
4) Το γινόμενο των τεσσάρων ψηφίων ενός τετραψήφιου αριθμού είναι 75. Με τι ισούται το άθροισμα των ψηφίων του;

5) Δίνεται το κλάσμα $\frac{2121212121210}{1121212121211}$. Να απλοποιήσετε το κλάσμα ώστε να φτάσει στην απλούστερη μορφή του. (Όταν ένα κλάσμα δεν επιδέχεται άλλη απλοποίηση συνήθως λέγεται ¨ανάγωγο¨)

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 114

1) Αφού $\frac{21}{5}<\frac{42}{\sqrt{x}}<\frac{21}{4}$ άρα $\frac{4}{21}<\frac{\sqrt{x}}{42}<\frac{5}{21}$ και επομένως $\frac{8}{42}<\frac{\sqrt{x}}{42}<\frac{10}{42}$ άρα $8<\sqrt{x}<10$ άρα $\sqrt{x}=9$ οπότε x=81

2) Από το σχήμα προκύπτει $\frac{\lambda}{\kappa}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Από αυτό προκύπτει ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου Ζ

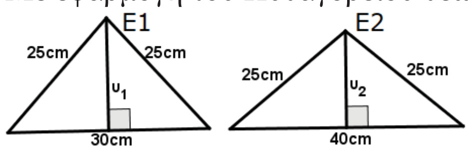


είναι 6 και κ=$\frac{4}{3}\lambda$. Από αυτό προκύπτει ότι ο λόγος $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ και από αυτό προκύπτει ότι το εμβαδόν του Η είναι 36. Αφού Ζ είναι 6 άρα μ=4λ και άρα κ + λ + μ =$\frac{4}{3}\lambda+\lambda+4\lambda=\frac{19}{3}\lambda$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι Α+Γ+Η=α·(κ+λ+μ) =57 και Β+Ζ+Δ=γ·(κ+λ+μ)=38 και επειδή το συνολικό εμβαδόν είναι 114 άρα Ε+x+Θ=β·(κ+λ+μ)=19. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι α=3β και γ=2β. Ισχύει (α+β+γ)·(κ+λ+μ)=114 και με βάση τα προηγούμενα $6\beta\cdot\frac{19}{3}\lambda=114$ άρα β·λ=3.

3) Η ηλικία του Γιώργου είναι ίση με το τριπλάσιο της ηλικίας που θα έχει μετά από τρία χρόνια μείον το τριπλάσιο της ηλικίας που είχε πριν τρία χρόνια. Πόσων χρόνων είναι ο Γιώργος; ΑΠ: 18 χρονών.

4) $[5\times(111\ldots..11)+1]^2-[4\times(111\ldots..11)+1]^2=1111\ldots.111$ (διπλάσια 1)

5) Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος προκύπτει ότι: υ_1=20cm και υ_2=15cm.



Ο λόγος των εμβαδών είναι $\frac{E1}{E2}=\frac{4\cdot 20}{5\cdot 15}=\frac{16}{15}$. Εδώ είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το τρίγωνο με τη μικρότερη βάση έχει μεγαλύτερο εμβαδόν.

Συστήματα 1ου Βαθμού

Λαγός Γιώργος – Τζίφας Νίκος

Με την εργασία μας αυτή απευθυνόμαστε στους μαθητές της Γ' τάξης και θέλουμε να τους βοηθήσουμε , να διευρύνουν τις γνώσεις τους στην επίλυση συστημάτων 1ου βαθμού, αλλά και γενικότερα για τις εφαρμογές που έχουν.
Αυτές τις γνώσεις εκτιμούμε ότι θα τις αποκτήσετε με την μελέτη και λύση καταλλήλων συστημάτων, που επιλέγουμε για τον λόγο αυτό.
Έχουμε μάλιστα την γνώμη ότι η άμεση συμμετοχή σας στην δραστηριότητα αυτή, θα συμβάλλει στην απόκτηση αυτής της εμπειρίας. Για τον λόγο αυτό θα σας δίνεται η δυνατότητα συμμετοχής στην επεξεργασία κάθε άσκησης.
Για να μελετήσετε αυτά που σας προτείνουμε παρακάτω, πρέπει να γνωρίζετε όλα όσα διδαχτήκατε στο σχολείο σας στο κεφάλαιο αυτό.
Θα διαπιστώσετε ότι με τις γνώσεις πάνω στα συστήματα έχετε την δυνατότητα:
Να επιλύετε συστήματα χρησιμοποιώντας και **''άλλες τεχνικές επίλυσης''** πέρα από αυτές που διδαχθήκατε, οι οποίες θα σας επιτρέπουν να απλοποιείτε την επίλυσή τους, **''Εφόσον φυσικά στα συστήματα που επεξεργάζεσθε μπορούν να εφαρμοσθούν οι τεχνικές αυτές''**.
Να επιλύετε συστήματα με περισσότερες εξισώσεις και αγνώστους.
Να χρησιμοποιείτε τα συστήματα γενικά για την επεξεργασία και άλλων θεμάτων.

1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3\chi+2\psi}{3}-\dfrac{2\psi-\chi}{2}=2 \\ 2\dfrac{3\chi+2\psi}{3}+\dfrac{2\psi-\chi}{2}=14 \end{array}\right\}$$

Λύση

Μπορείτε φυσικά να επεξεργασθείτε το σύστημα και να το φέρετε στην μορφή: $\left\{\begin{array}{l}\alpha_1\chi+\beta_1\psi=\gamma_1\\ \alpha_2\chi+\beta_2\psi=\gamma_2\end{array}\right\}$ και στην συνέχεια να το λύσετε.
Αν όμως παρατηρήσετε ότι σε κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματος αυτού υπάρχουν δύο κλασματικές παραστάσεις των αγνώστων χ και ψ, τότε κάνοντας χρήση βοηθητικού αγνώστου και θέτοντας:
$\frac{3\chi+2\psi}{3}=\kappa$ και $\frac{2\psi-\chi}{2}=\lambda$ το σύστημα γράφεται :

$$\left\{\begin{array}{l}\kappa-\lambda=2\\ 3\kappa+\lambda=14\end{array}\right\}$$

Ήλθε τώρα η σειρά σας να επιλύσετε τα συστήματα αυτά. Πρέπει να βρείτε αρχικά τις τιμές των κ και λ και στην συνέχεια τις τιμές των χ και ψ.

2. Να λυθεί το σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{c}x-2y+z=-5\\ 2x+y+3z=-2\\ 3x+y-2z=9\end{array}\right\}$$

Λύση

Με σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους πιθανόν να ασχολείστε για πρώτη φορά. Η επίλυσή του στηρίζεται σε κανόνες που ήδη γνωρίζετε και μπορείτε να το επιλύσετε
Γνωρίζετε ότι **:**

«Το σύστημα που προκύπτει μετά την απαλοιφή ενός αγνώστου μεταξύ των εξισώσεων ενός συστήματος έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό».
Για την επίλυσή του ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^0

Επιλέγουμε τυχαία δύο από τις εξισώσεις του συστήματος. Στην περίπτωσή μας την 1η και την 2η και έχουμε: $\begin{Bmatrix} x-2y+z=-5 \\ 2x+y+3z=-2 \end{Bmatrix}$ Απαλείφουμε τώρα ένα από τους αγνώστους, όποιον εμείς επιλέξουμε. **Εδώ επιλέγουμε τον ψ,** οπότε προκύπτει η εξίσωση: $\{5x+7z=-9\}$

Βήμα 2^0

Επιλέγουμε στην συνέχεια άλλες δύο από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος π.χ. την 2η και 3η εξίσωση. (μπορείτε φυσικά να επιλέξετε την1η και 3η) Τότε έχετε:

$$\begin{Bmatrix} 2x+y+3z=-2 \\ 3x+y-2z=9 \end{Bmatrix}$$

Στο σημείο αυτό απαλείφουμε **πάλι τον ίδιο άγνωστο ψ** και προκύπτει η εξίσωση: $\{x-5z=11\}$

Βήμα 3^0

Οι δύο εξισώσεις: $\{5x+7z=-9\}$ και $\{x-5z=11\}$ αποτελούν ένα σύστημα 1ου βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Το σύστημα αυτό είναι:

$$\begin{Bmatrix} 5x+7z=-9 \\ x-5z=11 \end{Bmatrix}$$

Ήλθε τώρα η σειρά σας. Να επιλύσετε αρχικά το σύστημα αυτό και αφού βρείτε τις τιμές των αγνώστων χ και z, στη συνέχεια με αντικατάσταση των τιμών τους σε μία από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος, να βρείτε και την τιμή του ψ.
Η λύση του συστήματος είναι: $(x=1, y=2\ z=-2\ )$

3. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}=\frac{\omega}{4}} \\ \boldsymbol{3\chi-4\psi+5\omega=28} \end{Bmatrix}$$

Λύση

Εάν χρησιμοποιήσετε τις δυνατότητες που σας δίνει η πρώτη εξίσωση του συστήματος με τους ίσους λόγους και θέσετε: $\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}=\frac{\omega}{4}$ =λ τότε θα προκύψουν οι εξισώσεις::
$\frac{\chi}{2}$ =λ ή χ=2λ, $\frac{\psi}{3}$ =λ ή ψ=3λ και τέλος $\frac{\omega}{4}$ =λ ή ω=4λ.
Συνεχίστε τώρα για να υπολογίσετε το λ αντικαθιστώντας τους αγνώστους χ, ψ, ω στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Εάν εργαστείτε σωστά θα βρείτε χ=4, ψ=6 και ω =8.

4. Να υπολογισθούν οι: χ,ψ,ω εάν γνωρίζετε ότι:

$$\boldsymbol{(\chi+\psi-4)^2+(\psi+\omega-5)^4+(\omega+\chi-7)^6=0}$$

Λύση

Για τον υπολογισμό των αγνώστων αυτών θα μελετήσουμε μαζί την παράσταση που μας δίνεται, προκειμένου να εξάγουμε τα συμπεράσματα που θα μας βοηθήσουν για να υπολογίσουμε τους αγνώστους.
Σημαντική παρατήρηση είναι ότι: **«η παράσταση αυτή είναι άθροισμα μη αρνητικών προσθετέων».**
Πράγματι οι προσθετέοι: $(\chi+\psi-4)^2$, $(\psi+\omega-5)^4$ και $(\omega+\chi-7)^6$ του αθροίσματος που μας δίνεται

είναι μη αρνητικοί, επειδή οι εκθέτες των δυνάμεων τους είναι άρτιοι.
Πρέπει τώρα να απαντήσουμε στο ερώτημα: «**Πότε ένα άθροισμα μη αρνητικών προσθετέων ισούται με μηδέν;»**
Η απάντηση είναι μία: **«Ένα άθροισμα μη αρνητικών προσθετέων ισούται με μηδέν εάν καθένας από τους προσθετέους αυτούς είναι μηδέν»**
Επομένως πρέπει : $(\chi+\psi-4)^2 = 0$, $(\psi+\omega-5)^4 = 0$ και $(\omega+\chi-7)^6 = 0$
Γνωρίζετε όμως ότι μία δύναμη είναι μηδέν, εάν η βάση της δύναμης είναι μηδέν.
Άρα πρέπει κάθε μία από τις ποσότητες: $\chi+\psi-4$, **ψ+**ω –5 και $\omega+\chi-7$ να ισούται με μηδέν.
Προκύπτει λοιπόν το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} \chi+\psi-4=0 \\ \psi+\omega-5=0 \\ \omega+\chi-7=0 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} \chi+\psi=4 \\ \psi+\omega=5 \\ \omega+\chi=7 \end{Bmatrix}$$

Προτείνουμε τώρα να συνεχίσετε και να επιλύσετε το σύστημα αυτό.
Μπορείτε φυσικά να το επιλύσετε, ακλουθώντας τις διαδικασίες που είδαμε παραπάνω, όταν ασχοληθήκαμε με το σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.
Σας προτείνουμε όμως να ακολουθήσετε μία άλλη πορεία:
Να προσθέσετε τις εξισώσεις του συστήματος κατά μέλη.
Τότε θα έχετε: $2(\chi+\psi+\omega)=16$ ή $\chi+\psi+\omega=8$.
Από εδώ και πέρα δεν θα δυσκολευτείτε για να υπολογίσετε τις τιμές των αγνώστων συνδυάζοντας την εξίσωση αυτή με κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματος.
των αγνώστων.

5. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{3}{\chi}-\dfrac{4}{\psi}=\dfrac{17}{6} \\ \dfrac{5}{\chi}+\dfrac{3}{\psi}=\dfrac{3}{2} \end{Bmatrix}$$

Λύση
Σας συμβουλεύουμε για την επίλυση του συστήματος αυτού να χρησιμοποιήσετε πάλι βοηθητικό άγνωστο και να θέσετε:

$$\frac{1}{\chi}=\kappa \text{ και } \frac{1}{\psi}=\lambda$$

Μετά την εφαρμογή των μετασχηματισμών το σύστημα γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} 3\kappa-4\lambda=\dfrac{17}{6} \\ 5\kappa+3\lambda=\dfrac{3}{2} \end{Bmatrix}$$

Προτείνουμε να το επιλύσετε να βρείτε τις τιμές των κ και λ και στην συνέχεια των χ και ψ.

6. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{Bmatrix} \chi+2(\psi+\omega)=15 \\ \psi+2(\omega+\chi)=14 \\ \omega+2(\chi+\psi)=11 \end{Bmatrix}$$

Λύση
Για την επίλυσή του σας προτείνουμε να χρησιμοποιήσετε βοηθητικό άγνωστο θέτοντας:

$$χ+ψ+ω = κ$$

Με την εισαγωγή του αγνώστου αυτού το σύστημα γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} χ + 2(κ - χ) = 15 \\ ψ + 2(κ - ψ) = 14 \\ ω + 2(κ - ω) = 11 \end{Bmatrix}$$

Στη συνέχεια να προσθέσετε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος αυτού και θα καταλήξετε στην εξίσωση: $(χ+ψ+ω) + 6κ - 2(χ+ψ+ω) = 40$ ή $κ = 8$.

Συνεχίζοντας θα βρείτε $χ = 1$, $ψ = 2$, $ω = 5$.

Για να εξασκηθείτε και άλλο στο αντικείμενο αυτό θα σας προτείνουμε παρόμοιες ασκήσεις, δίνοντας για κάθε μία σχετική υπόδειξη και τις απαντήσεις

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λυθεί ο σύστημα: $\begin{Bmatrix} \frac{2}{χ+ψ+1} + \frac{3}{3χ-2ψ-2} = 2 \\ \frac{3}{χ+ψ+1} - \frac{1}{3χ-2ψ-2} = \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$

Χρησιμοποιείστε βοηθητικούς αγνώστους. Να θέσετε : $\frac{1}{χ+ψ+1} = κ$ και $\frac{1}{3χ-2ψ-2} = λ$

Η λύση είναι: $χ = 2$, $ψ = 1$

2. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{Bmatrix} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 8 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{Bmatrix}$ $\left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}\right)$

3. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{Bmatrix} \frac{-3}{x-7} + \frac{5}{y+3} = 7 \\ \frac{3}{x-7} - \frac{1}{y+3} = -3 \end{Bmatrix}$ $\left(x = 8, y = \frac{-5}{2}\right)$

4. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{Bmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 6 \end{Bmatrix}$ $\left(x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{3}\right)$

5. Αν το σύστημα $\begin{Bmatrix} αx + βy = 1 \\ 2αx - βy = 5 \end{Bmatrix}$ έχει λύση $(x = 2, y = 3)$ να βρείτε τα α,β $\left(α = 1, β = \frac{-1}{3}\right)$

6. Το σύστημα $\begin{Bmatrix} αx + βy = 2α + γ \\ βx + αy = 4β + γ \end{Bmatrix}$ έχει λύση $(x = 1, y = -2)$

I. Να δείξετε ότι α= –β

II. Να βρείτε μία σχέση που να συνδέει τα α και γ

7. Να λύσετε το σύστημα $\begin{Bmatrix} x - y - 2z = 2 \\ 2x - y - 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{Bmatrix}$ $(x = 2, y = -6, z = 3)$

8. Να λύσετε το σύστημα $\begin{Bmatrix} 3x + y = 9 \\ 2y - 5z = 1 \\ x = 6 - 4z \end{Bmatrix}$ $(x = 2, y = 3, z = 1)$

9. Το άθροισμα των πλευρών ενός τριγώνου ανά δύο είναι 19, 23, 20 μέτρα. Να βρείτε το μήκος κάθε πλευράς. Τα μήκη των πλευρών είναι: (α=8, β=11, γ=12)

Προχωρημένα θέματα για όλους. Τάξη Γ΄

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

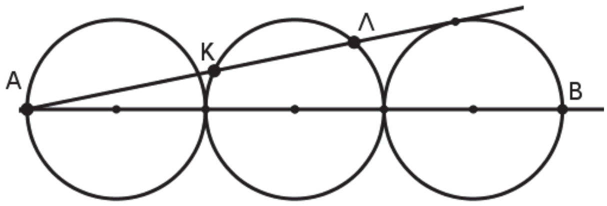
Όσοι μαθητές, ή άλλοι αναγνώστες του Ευκλείδη Α΄, λύσουν κάποια από τα θέματα ή όλα, μπορούν να στείλουν τις λύσεις ηλεκτρονικά στην ΕΜΕ με θέμα:

«ΛΥΤΕΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ Α».

Μαζί με τη λύση θα αναγράφεται το ονοματεπώνυμό τους και το όνομα του σχολείου τους (αν είναι μαθητές).

Εφόσον η λύση είναι μαθηματικά σωστή θα δημοσιεύεται με το όνομα του λύτη.

1) Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ έχουν τα κέντρα τους πάνω στην ευθεία ΑΒ και εφάπτονται, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Μία ευθεία από το Α εφάπτεται στον τρίτο κύκλο και τέμνει τον μεσαίο κύκλο στα Κ και Λ. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΚΛ με βάση την ακτίνα ρ.

2) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-25}{1975}+\frac{x-23}{1977}+\frac{x-21}{1979}+\frac{x-19}{1981}+\frac{x-17}{1983}+\frac{x-15}{1985}=\frac{x-1975}{25}+\frac{x-1977}{23}+\frac{x-1979}{21}+\frac{x-1981}{19}+\frac{x-1983}{17}+\frac{x-1985}{15}$$

Διαγωνισμός ΕΜΕ.

3) Πόσες τιμές του θετικού ακεραίου αριθμού ν καθιστούν το κλάσμα $\frac{(\nu+2)^2}{\nu-3}$ ακέραιο αριθμό;

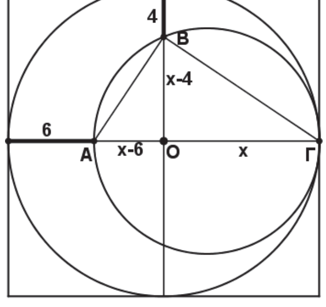
4) Σε ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών ακέραιους αριθμούς, η περίμετρος είναι ίση με 8 μονάδες μήκους. Να βρεθεί το εμβαδόν του.

5) Παρατηρήστε ότι: $3^2=8+1$, $5^2=3\cdot8+1$, $7^2=6\cdot8+1$, $9^2=10\cdot8+1$.

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις να διατυπώσετε έναν γενικό κανόνα που φαίνεται ότι ισχύει για τα τετράγωνα των περιττών αριθμών. Να αποδείξετε ότι ο κανόνας που διατυπώσατε ισχύει για κάθε περιττό αριθμό.

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 114

1) Στο τρίγωνο ΑΒΟ έχουμε $AB^2=(x-4)^2+(x-6)^2$, ενώ στο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε $B\Gamma^2=(x-4)^2+x^2$. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο άρα $AB^2+B\Gamma^2=A\Gamma^2$ δηλαδή $(x-4)^2+(x-6)^2+(x-4)^2+x^2=(2x-6)^2$



Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$4x^2-28x+68=4x^2-24x+36 \text{ άρα } 4x=32 \text{ οπότε } x=8$$

2) Έχουμε $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{\frac{x^2}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2}+1}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$ αλλά $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ άρα το άθροισμα

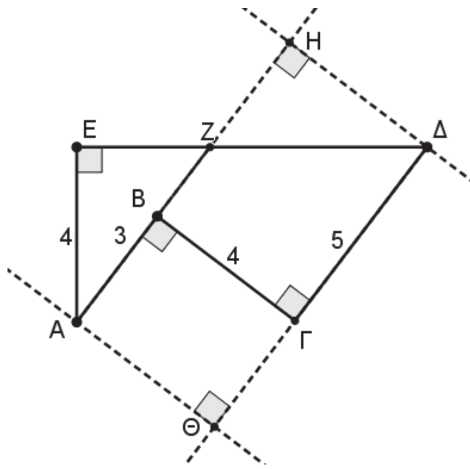
γίνεται:

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+1}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+1}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}=2\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Για να είναι η παράσταση αυτή ήταν ίση με 2 θα πρέπει $\alpha^2=\alpha^2+\beta^2$ άρα $\beta=0$ που είναι άτοπο.

3) Στην προέκταση της ΑΒ, η οποία κόβει την ΕΔ στο Ζ, φέρνουμε κάθετη από το Δ, που κόβει την προέκταση αυτή στο Η. Στην προέκταση της ΔΓ φέρνουμε κάθετη από το Α, που κόβει την προέκταση αυτή στο Θ.
Στα ορθογώνια που δημιουργούνται έχουμε ΗΔ=4 και επομένως τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΖΗΔ είναι ίσα (γιατί;).
Ακόμη ΓΘ =3 και επομένως ΘΔ=8 άρα και ΑΗ =8.
Από τα ίσα τρίγωνα ΑΕΖ και ΖΗΔ έχουμε

ΕΔ=ΕΖ+ΖΔ=ΗΖ+ΖΑ=8.



4) Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί πάνω στα 4 σφαιρίδια είναι οι α, β, γ, δ.
Με βάση την εκφώνηση θα έχουμε:

$$\alpha+\beta+\gamma=186,\ \ \alpha+\gamma+\delta=206,\ \ \beta+\gamma+\delta=215,\ \ \alpha+\beta+\delta=194.$$

Αν προσθέσουμε τις σχέσεις αυτές κατά μέλη θα έχουμε $3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=801$ άρα $\alpha+\beta+\gamma+\delta=267$.

Αφού $\alpha+\beta+\gamma=186$ και $\alpha+\beta+\gamma+\delta=267$ άρα $\delta=81$ που είναι ο μεγαλύτερος αριθμός από τους 4.

5) Όλοι οι προσθετέοι από τον τέταρτο και μετά έχουν τα 4 τελευταία ψηφία τους 2.222.

Οι 3 πρώτοι όροι έχουν άθροισμα 246, για τους υπόλοιπους 200 θα επαναληφθεί 200 φορές το 2.222.

Θα πρέπει επομένως να προσθέσουμε 246+200·2.222 οπότε προκύπτει 4444646 και επομένως τα 4 τελευταία ψηφία θα είναι 4646.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»

18 **Ιανουαρίου** 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Λύση

Ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν τα άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Επομένως τα ψηφία $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αρκεί να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi o\lambda.9$$

Επειδή $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$ έπεται ότι $10 \le \alpha+\beta+\gamma+\delta \le 30$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 18,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta \text{ ή } \alpha+\beta+\gamma+\delta = 27,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(1,2,6,9),(1,2,7,8),(1,3,5,9),(1,3,6,8).(1,4,5,8),(1,4,6,7),$$
$$(2,3,4,9),(2,3,5,8),(2,3,6,7),(2,4,5,7),(3,4,5,6)\}$$

$$\text{ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(4,6,8,9),(5,6,7,9),(3,7,8,9)\}.$$

Επιπλέον ένα ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε αρκεί ο ακέραιος $\overline{\gamma\delta}$ να είναι πολλαπλάσιος του 4. Η συνθήκη αυτή περιορίζει τις παραπάνω τετράδες στις :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(1,3,6,8) \text{ ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(3,4,5,6).$$

Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι είναι οι: 13068, 34056.

Πρόβλημα 2

Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Λύση

Έστω ότι ο Γιάννης είχε α ευρώ μαζί του, οπότε η Μαρία θα είχε $600-\alpha$ ευρώ. Τότε ο Γιάννης ξόδεψε $\alpha\cdot\frac{100}{9}\cdot\frac{1}{100}=\frac{\alpha}{9}$ ευρώ, ενώ η Μαρία ξόδεψε $(600-\alpha)\cdot\frac{100}{7}\cdot\frac{1}{100}=\frac{600-\alpha}{7}$. Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\alpha}{9}+\frac{600-\alpha}{7}=80\Leftrightarrow 7\alpha+9(600-\alpha)=5040$$
$$\Leftrightarrow 5400-2\alpha=5040\Leftrightarrow 2\alpha=360\Leftrightarrow \alpha=180.$$

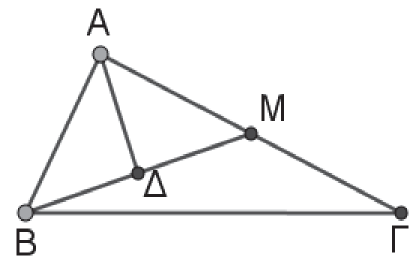
Άρα ο Γιάννης είχε μαζί του 180 ευρώ και η Μαρία είχε $600-180=420$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $AB=\alpha$ cm και $A\Gamma=2\alpha$ cm. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.

(α) **Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.**

(β) **Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.**



Σχήμα 1

Λύση

(α) Έχουμε: $(AB\Gamma)=2(ABM)\Rightarrow\frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma=2\frac{1}{2}AB\cdot AM\Rightarrow A\Gamma=2AM.$

Επομένως Μ μέσον ΑΓ και Ισχύει $AM=\frac{A\Gamma}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$ cm. Αφού και $AB=\alpha$ cm, έχουμε $AB=AM$. Επομένως το σημείο Α ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ και αφού Δ μέσον της ΒΜ, προκύπτει ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΜ. Άρα είναι $A\Delta\perp BM$.

Διαφορετικά, το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο, άρα και ύψος.

(β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο και ύψος, το ΑΔ θα είναι και διχοτόμος του. Επομένως $B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}M=45^0$. Όμως ισχύει ότι $A\hat{B}\Delta=A\hat{M}\Delta=45^0$ (αφού ΑΒΜ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο) επομένως ΑΒΔ και ΑΔΜ ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα δηλαδή $A\Delta=\Delta M=\Delta B=\frac{BM}{2}$. Τώρα έχουμε: $\frac{E_{\text{τετρ πλευράς } A\Delta}}{E_{\text{τετρ πλευράς } BM}}=\frac{A\Delta^2}{BM^2}=\frac{A\Delta^2}{(2A\Delta)^2}=\frac{1}{4}$.

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $A=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $B=\overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$A-B=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}=2020.$$

Επειδή πρέπει $A>2020$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha\geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha\geq 4$, τότε $A=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\geq 4000$, $B=\overline{\alpha\beta\gamma}<1000$, οπότε

$$A-B=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}>3000>2020, \text{ άτοπο.}$$

- Αν είναι $\alpha = 3$, τότε

$A - B = \overline{3\beta\gamma\delta} - \overline{3\beta\gamma} = 3000 + 100\beta + 10\gamma + \delta - 300 - 10\beta - \gamma = 2700 + 90\beta + 9\gamma + \delta > 2020$, άτοπο.

- Αν είναι $\alpha = 2$, τότε

$$A - B = \overline{2\beta\gamma\delta} - \overline{2\beta\gamma} = 2020 \Leftrightarrow 2000 + 100\beta + 10\gamma + \delta - 200 - 10\beta - \gamma = 2020$$
$$\Leftrightarrow 1800 + 90\beta + 9\gamma + \delta = 2020 \Leftrightarrow 90\beta + 9\gamma + \delta = 220.$$

Επειδή τα β, γ, δ είναι ψηφία, θα είναι $0 \leq 9\gamma + \delta \leq 90$, οπότε πρέπει $130 \leq 90\beta \leq 220 \Leftrightarrow \beta = 2$. Τότε $9\gamma + \delta = 40 \Rightarrow 31 \leq 9\gamma \leq 40 \Rightarrow \gamma = 4$. Επομένως: $\delta = 40 - 36 = 4$ και $A = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 2244$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες $\alpha + 9 = (\beta - 3)^2$ και $\beta + 9 = (\alpha - 3)^2$, να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + \beta^2$.

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γράφονται:

$$\alpha = \beta^2 - 6\beta \qquad (1)$$
$$\beta = \alpha^2 - 6\alpha \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2 - 6(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 7(\alpha + \beta) \qquad (3)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha - \beta = \beta^2 - \alpha^2 - 6(\beta - \alpha) \Leftrightarrow (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) - 5(\beta - \alpha) = 0 \qquad (4)$$
$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 5) = 0 \overset{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = 5. \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) λαμβάνουμε: $\alpha^2 + \beta^2 = 35$.

Πρόβλημα 2

Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $A = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $B = \overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε:

$$A - B = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} - \overline{\alpha\beta\gamma} = 2019.$$

Επειδή πρέπει $A > 2019$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha \geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha \geq 4$, τότε $A = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} \geq 4000$, $B = \overline{\alpha\beta\gamma} < 1000$, οπότε

$$A - B = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} - \overline{\alpha\beta\gamma} > 3000 > 2019, \text{ άτοπο.}$$

- Αν είναι $\alpha = 3$, τότε

$A - B = \overline{3\beta\gamma\delta} - \overline{3\beta\gamma} = 3000 + 100\beta + 10\gamma + \delta - 300 - 10\beta - \gamma = 2700 + 90\beta + 9\gamma + \delta > 2019$, άτοπο.

Πρόβλημα 3.

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α,β,γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:

(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και

(iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Λύση

Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ,λ,μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν: $2\alpha-1=\kappa\beta,\ \beta-1=\lambda\gamma,\ \gamma-1=\mu\alpha$.

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$2\alpha=\kappa\beta+1=\kappa\left(\lambda\gamma+1\right)+1=\kappa\left(\lambda(\mu\alpha+1)+1\right)+1\Rightarrow 2\alpha=\kappa\lambda\mu\alpha+\kappa\lambda+\kappa+1\Rightarrow \alpha=\frac{\kappa\lambda+\kappa+1}{2-\kappa\lambda\mu}.$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι:

$$2-\kappa\lambda\mu>0\Leftrightarrow \kappa\lambda\mu<2.$$

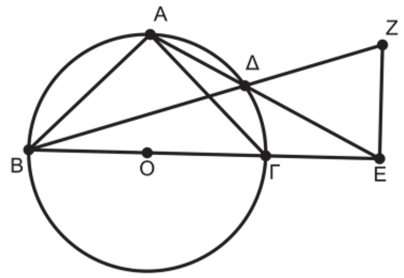
Επειδή οι κ,λ,μ είναι θετικοί ακέραιοι έχουμε μόνο την περίπτωση:

- $\kappa=\lambda=\mu=1$. Τότε $\alpha=3$.

  $\alpha=3,\ \gamma-1=\alpha,\ \beta-1=\gamma\Rightarrow\alpha=3,\ \gamma=4,\ \beta=5\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=(3,5,4)$.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z=90^0$.



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$

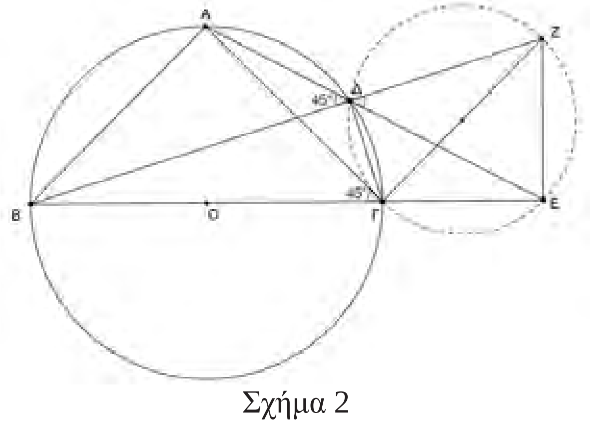
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E=EZ$

Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) Επειδή το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$, τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι ίσα και επιπλέον το άθροισμα μας τους είναι 180°, οπότε καθένα από αυτά θα είναι 90°. Επομένως η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Delta}B$ στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$ θα είναι ίση με $\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$.

Όμως οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $A\hat{\Delta}B$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, οπότε $E\hat{\Delta}Z=45^\circ$



Σχήμα 2

(β) Επειδή η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ Επομένως θα έχουμε και ότι $\Gamma\hat{\Delta}Z = 180^\circ - B\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Επίσης δίνεται ότι $\Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$. Επομένως ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα ΓΖ περνάει από τα σημεία Δ και Ε. Τότε η εγγεγραμμένη σε αυτόν το κύκλο γωνία $Z\hat{\Gamma}E$ βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμμένη γωνία $E\hat{\Delta}Z = 45^\circ$. Άρα είναι $Z\hat{\Gamma}E = 45^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Gamma E = EZ$.

37η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

Σάββατο 22 Φεβρουαρίου 2020

Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την ανίσωση:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3} - \frac{(x+2)^2}{2x} \geq -\frac{x}{16}.$$

Λύση

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3} - \frac{(x+2)^2}{2x} \geq -\frac{x}{16} \Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3} - \frac{(x+2)^2}{2x} + \frac{x}{16} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(x+2)^4 - 8(x+2)^2 x^2 + x^4}{16x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(4(x+2)^2 - x^2\right)^2}{16x^3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4(x+2)^2 - x^2\right)^2 \geq 0,\ x \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 0,\ x \neq 0 \text{ ή } 4(x+2)^2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } (2x+4+x)(2x+4-x) = 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } (3x+4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } x = -\frac{4}{3} \text{ ή } x = -4.$$

Διαφορετικά μπορούμε για $x \neq 0$ να εργαστούμε ως εξής:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3} - \frac{(x+2)^2}{2x} \geq -\frac{x}{16} \Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3} - \frac{(x+2)^2}{2x} + \frac{x}{16} \geq 0 \Leftrightarrow x\left[\frac{(x+2)^4}{x^4} - \frac{(x+2)^2}{2x^2} + \frac{1}{16}\right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(\frac{x+2}{x}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]^2 \geq 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } \frac{x+2}{x} = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } x = -\frac{4}{3} \text{ ή } x = -4$$

Πρόβλημα 2.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΖΔΕ συναρτήσει της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να βρείτε τη γωνία $B\hat{\Theta}Z$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

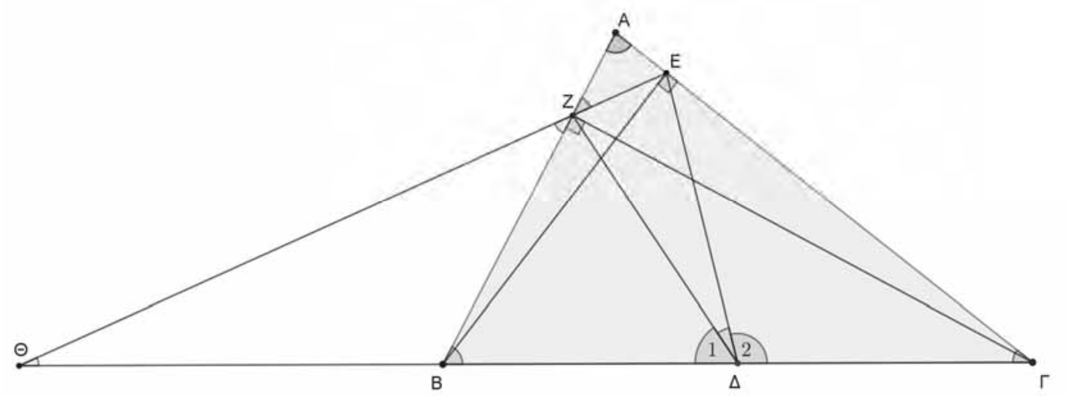
Λύση

(α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο και η ΖΔ είναι η διάμεσος του προς την υποτείνουσα, οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $Z\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = B\hat{\Delta}Z = 180^0 - 2\hat{B} \qquad (1)$$

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ βρίσκουμε και την ισότητα
$$\hat{\Delta}_2 = \Gamma\hat{\Delta}E = 180^0 - 2\hat{\Gamma} \qquad (2)$$
Άρα είναι $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \left(180^0 - 2\hat{B}\right) + \left(180^0 - 2\hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(180^0 - \hat{A}\right) = 2\hat{A}$,

οπότε
$$Z\hat{\Delta}E = 180^0 - \left(\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2\right) = 180^0 - 2\hat{A}.$$
Επιπλέον, επειδή το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές (αφού $\Delta Z = \Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$), έχουμε:
$$\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{E}Z = \frac{180 - (180^0 - 2\hat{A})}{2} = \hat{A}.$$



Σχήμα 1

(β) Από το τρίγωνο ΒΘΖ και τη σχέση μιας εξωτερικής γωνίας με τις απέναντι εσωτερικές έχουμε
$$\hat{B} = B\hat{\Theta}Z + B\hat{Z}\Theta. \qquad (3)$$
Όμως είναι
$$B\hat{Z}\Theta = A\hat{Z}E \qquad (4)$$
ως κατά κορυφή, ενώ από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΖΕΓ (αφού $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90^0$) έχουμε
$$A\hat{Z}E = \hat{\Gamma} \ . \qquad (5)$$
Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις λαμβάνουμε: $B\hat{\Theta}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης
$$\alpha + \beta + \gamma = \nu\alpha\beta\gamma \, . \qquad \textbf{(E)}$$
Για τις τιμές του ν που θα βρείτε, να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (Ε).

Λύση

Επειδή η εξίσωση είναι συμμετρική ως προς α,β,γ θα βρούμε ασχοληθούμε με την περίπτωση που ισχύει $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. Τότε έχουμε: $\alpha \le \alpha + \beta + \gamma \le 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \le \nu\alpha\beta\gamma \le 3\alpha \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} 1 \le \nu\beta\gamma \le 3$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\nu > 3$. Τότε . $\nu\beta\gamma > 3$, άτοπο.
- $\nu = 3$. Τότε $1 \le 3\beta\gamma \le 3 \Rightarrow \beta\gamma = 1 \Rightarrow \beta = \gamma = 1$, οπότε $\alpha + 2 = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$.
  Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,1,1)$.
- $\nu = 2$. Τότε $1 \le 2\beta\gamma \le 3 \Rightarrow \beta\gamma = 1 \Rightarrow \beta = \gamma = 1$, οπότε $\alpha + 2 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,1,1)$ και λόγω συμμετρίας τις λύσεις $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,1)$ και $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,2)$.

- $\nu=1$. Τότε $1\le\beta\gamma\le3\Rightarrow\beta\gamma\in\{1,2,3\}$.

  Αν $\beta\gamma=1$, τότε $\beta=\gamma=1$ και $\alpha+2=1$, αδύνατη.

  Αν $\beta\gamma=2$, τότε $\beta=2$, $\gamma=1$ και $\alpha+3=2\alpha\Leftrightarrow\alpha=3$.

  Επομένως, $(\alpha,\beta,\gamma)=(3,2,1)$ και λόγω συμμετρίας λύσεις είναι και οι τριάδες:

  $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,1,3),(\alpha,\beta,\gamma)=(3,2,1),(\alpha,\beta,\gamma)=(3,1,2),(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,3),(\alpha,\beta,\gamma)=(2,3,1)$.

  Αν $\beta\gamma=3$, τότε $\beta=3$, $\gamma=1$ και $\alpha+4=3\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$. (απορρίπτεται, γιατί $\alpha<\beta$).

Επομένως οι τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha+\beta+\gamma=\nu\alpha\beta\gamma$ είναι: $\nu=1$ ή 2 ή 3.

Πρόβλημα 4

Γράφουμε 99 κύκλους σε μία σειρά και στο εσωτερικό τους γράφουμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 99:

Χρωματίζουμε καθέναν από τους κύκλους με ένα από τα δύο χρώματα που διαθέτουμε: το κόκκινο (Κ) και το πράσινο (Π). Λέμε ότι ένας χρωματισμός είναι «*καλός*», αν έχει την ιδιότητα:

Οι κόκκινοι κύκλοι στο τμήμα των αριθμών από το 1 μέχρι και το 50 είναι περισσότεροι από τους κόκκινους κύκλους στο τμήμα των αριθμών από το 51 μέχρι και το 99.

(α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.

(β) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί «*καλοί*» χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.

(Σημείωση: Δύο χρωματισμοί είναι διαφορετικοί, αν έχουν διαφορετικό χρώμα σε έναν τουλάχιστον κύκλο).

Λύση

(α) Κάθε κύκλος μπορεί να χρωματιστεί με 2 διαφορετικά χρώματα, ανεξάρτητα από το χρωματισμό των υπολοίπων κύκλων. Επομένως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να κατασκευαστούν είναι:

$$\underbrace{2\cdot2\cdot2\ldots\cdot2}_{99-\text{φορές}}=2^{99}.$$

(β) Θεωρούμε ένα χρωματισμό $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51..............98\ 99}_{y-\text{κόκκινοι}}$. Ο χρωματισμός X είναι «*καλός*», αν $x>y$, ενώ ο χρωματισμός X είναι όχι καλός, αν $x\le y$.

Έστω Α το σύνολο των «καλών» χρωματισμών και Β το σύνολο των όχι καλών χρωματισμών. Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Β και αντιστρόφως.

Πράγματι, αν $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51..............98\ 99}_{y-\text{κόκκινοι}}\in A$, τότε $x>y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{(50-x)-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51..............98\ 99}_{(49-y)-\text{κόκκινοι}}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Β των *όχι καλών* χρωματισμών, γιατί: $x>y\Rightarrow-x<-y\Rightarrow49-x<49-y\Rightarrow50-x\le49-y$.

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Β.

Αντίστροφα, αν $X: \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 50}_{x-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51 \ldots\ldots 98\ 99}_{y-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota} \in B$, τότε $x \le y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y: \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 50}_{(50-x)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51 \ldots\ldots 98\ 99}_{(49-y)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Α των καλών χρωματισμών, γιατί: $x \le y \Rightarrow -x \ge -y \Rightarrow 49-x \ge 49-y \Rightarrow 50-x > 49-y$.

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Β αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Α.

Επομένως, μεταξύ των συνόλων Α και Β υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, οπότε τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, δηλαδή το πλήθος των καλών χρωματισμών είναι $\frac{2^{99}}{2} = 2^{98}$.

Ασκήσεις για λύση

Α60. Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους οι οποίοι έχουν άθροισμα ψηφίων 11 και ο αριθμός που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και των μονάδων είναι μεγαλύτερος κατά 594 από τον αρχικό αριθμό.

Λύση

Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$ ο αριθμός που ζητάμε, όπου α, β, γ ψηφία, $\alpha \ne 0$. Τότε θα έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 11 \text{ και}$$

$$\overline{\gamma\beta\alpha} - \overline{\alpha\beta\gamma} = 594 \Leftrightarrow 100\gamma + 10\beta + \gamma - (100\alpha + 10\beta + \gamma) = 594$$

$$\Leftrightarrow 99(\gamma - \alpha) = 594 \Leftrightarrow \gamma - \alpha = 6 \Leftrightarrow \gamma = \alpha + 6.$$

Επειδή $\gamma = \alpha + 6 \le 9 \Rightarrow \alpha \le 3$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha = 1$, οπότε $\gamma = 7$ και $\beta = 3$. Τότε $\overline{\alpha\beta\gamma} = 137$.
- $\alpha = 2$, οπότε $\gamma = 8$ και $\beta = 1$. Τότε $\overline{\alpha\beta\gamma} = 218$.
- $\alpha = 3$, οπότε $\gamma = 9$ και $\alpha + \gamma > 11$, άτοπο.

Α61. Αν α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3, \quad \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 10,$$

να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Λύση

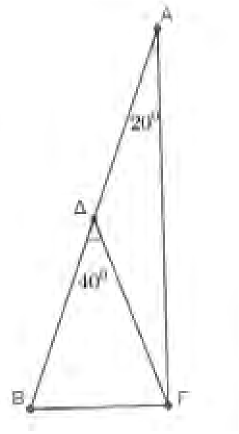
Από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\beta \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 10 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 = 10\alpha\beta \qquad (2)$$

Από την (1) με πολλαπλασιασμό των δύο μελών επί α, β διαδοχικά λαμβάνουμε:

$$\alpha^3+\alpha\beta^2=3\alpha^2\beta \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\beta^3=3\alpha\beta^2$$



από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta) \qquad (3)$$

η οποία σε συνδυασμό με τη σχέση (2) δίνει:

$$\alpha+\beta=5 \qquad (4)$$

Τότε από τη σχέση (1) έχουμε: $(\alpha+\beta)^2=5\alpha\beta \overset{(4)}{\Rightarrow} \alpha\beta=5$, οπότε

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1.$

Γ42. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma\hat{A}B=20^0$. Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και $\Gamma\hat{\Delta}B=40^0$, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\hat{B}\Gamma$.

Λύση

Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}B=\Delta\hat{A}\Gamma+\Delta\hat{\Gamma}A \Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}A=40^0-20^0=20^0$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές με . Επειδή Δ μέσον ΑΒ, θα είναι $B\Delta=\Delta A=\Delta\Gamma$, οπότε και το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με $B\Delta=\Delta\Gamma$, οπότε $A\hat{B}\Gamma=\frac{180^0-40^0}{2}=70^0.$

Ν38. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (μ,ν) που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mu\nu+5\mu+2\nu=121 \ .$$

Λύση

Η εξίσωση γίνεται:

$$\mu\nu+5\mu+2\nu=121 \Leftrightarrow \mu\nu+5\mu+2\nu+10=131 \Leftrightarrow (\mu+2)(\nu+5)=131$$
$$\Leftrightarrow \mu+2=1,\ \nu+5=131 \text{ ή } \mu+2=131,\ \nu+5=1 \Leftrightarrow (\mu,\nu)=(-1,\,126) \text{ ή } (\mu,\nu)=(129,\,-4).$$

Ασκήσεις για λύση

Α62. Έστω α,β,γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=\sqrt{3}\alpha\beta, \quad \alpha^2-\beta^2+\gamma^2=\sqrt{3}\alpha\gamma.$$

Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{\beta}{\gamma}$.

Ν39. Να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο ν στον οποίο, αν επισυνάψουμε δεξιά του οποιοδήποτε ψηφίο $\mu>0$, τότε ο ακέραιος που προκύπτει διαιρείται με το ν.

Γ43. Τα σημεία Α,Δ και Γ είναι συνευθειακά, έτσι ώστε $\Gamma\Delta=2\cdot A\Delta$. θεωρούμε σημείο β έτσι ώστε $\Gamma\hat{A}B=45^0$ και $\Gamma\hat{\Delta}B=60^0$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$.

Ανίχνευση και Εκπαίδευση Χαρισματικών Μαθητών

Γιάννης Νικολόπουλος

Μαθηματικός-Ειδικός Παιδαγωγός

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα παιδί είναι χαρισματικό; Πόσα είδη νοημοσύνης γνωρίζετε;

Παλαιότερα, αποκλειστικά ο Δείκτης Νοημοσύνης (Δ.Ν.) αποτελούσε το μοναδικό κριτήριο για τη χαρισματικότητα. Σήμερα, όμως, υπάρχουν αρκετοί ορισμοί, οι οποίοι δεν αρκούνται στον Δ.Ν. Μάλιστα, σύμφωνα με τον Gardner, υπάρχουν 8 είδη Νοημοσύνης! Θα στηριχθούμε στον ορισμό της χαρισματικότητας, σύμφωνα με τους Renzulli & Reis (1997), στα εξής γνωρίσματα:
1. Νοητική Ικανότητα, με Δ.Ν. πάνω από τον Μέσο Όρο.
2. Υψηλός βαθμός προσήλωσης σε συγκεκριμένο έργο και
3. Υψηλός βαθμός **δημιουργικότητας**.

Πώς όμως μπορούμε να ορίσουμε τη **δημιουργικότητα**; Η έννοια αυτή σχετίζεται με τη δημιουργία πρωτότυπων προτάσεων, οι οποίες είναι χρήσιμες στη ζωή. Βέβαια, η πρωτοτυπία και η χρησιμότητα εξαρτώνται κυρίως από το κοινωνικό περιβάλλον.

Εγκεφαλική ανατομία και λειτουργική εξέλιξη

Η νοημοσύνη βασίζεται τόσο σε βιολογικούς όσο και σε κοινωνικούς παράγοντες. Με το εγκεφαλογράφημα διαπιστώνουμε την κατάσταση του εγκεφάλου όπως έχει ολοκληρωθεί σήμερα τόσο από την γενετική όσο και την περιβαλλοντική επίδραση. Εξετάζουμε «κύματα ηλεκτρομαγνητικά» που εκπέμπονται σε διαφορετικές συχνότητες και είναι τα:

- Κύματα «βήτα»: παράγονται όταν είμαστε σε εγρήγορση ή σε ένταση.
- Κύματα «άλφα»: παράγονται όταν είμαστε σε κατάσταση φυσικής και νοητικής χαλάρωσης.
- Κύματα «θήτα»: παράγονται όταν βρισκόμαστε σε κατάσταση υπνηλίας.
- Κύματα «δέλτα»: παράγονται όταν βρισκόμαστε σε βαθύ ύπνο.

Οι επιστήμονες υποστηρίζουν ότι ο άνθρωπος παρουσιάζει μεγαλύτερη δυνατότητα μάθησης και αφομοίωσης των πληροφοριών, όταν βρίσκεται στην κατάσταση «άλφα», κατά την οποία ενεργοποιούνται πολλές εγκεφαλικές περιοχές [2].

Η εξέλιξη της νοημοσύνης από κοινωνικούς παράγοντες. Τα παιδιά βελτιώνουν την νοημοσύνη, αναπτύσσουν τις δεξιότητες τους μέσα από τις καθημερινές δραστηριότητες εκπαιδευτικές και μη στο περιβάλλον στο οποίο μεγαλώνουν. Για παράδειγμα, βλέπουμε παιδιά με ωριμότητα και νοητική χαλάρωση να αντιμετωπίζουν σοβαρά οικογενειακά προβλήματα, γιατί τους έκανε η ζωή να διαπαιδαγωγηθούν, ή επίσης αθλητές που με την εκγύμναση τους έχουν χαμηλούς καρδιακούς παλμούς (βραδυκαρδία) για να αντέχουν σε στιγμές αθλητικής υπερδραστηριότητας.

Και εδώ προκύπτουν τα εξής ερωτήματα: *Μπορεί κάποιος μαθητής να γυμνάσει, να ασκήσει το νοητικό του σύστημα, ώστε να φθάσει σε υψηλό ακαδημαϊκό επίπεδο; Μπορεί ένα παιδί με μέσο Δ.Ν. να γίνει πιο ευφυές;*

Η απάντηση είναι ναι. Αρκεί: «To fill the gap», δηλαδή να καλύψει το χάσμα γνώσεων και δεξιοτήτων. Δεν είναι κάτι εύκολο ή σύνηθες, αλλά είναι δυνατό. Για παράδειγμα, ο Nicholas Letchford, ένας μαθητής με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες έγινε Διδάκτορας στην Οξφόρδης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Υπήρξαν αρκετοί αδύναμοι μαθητές ακόμη και με μαθησιακές δυσκολίες, οι οποίοι με τη βοήθεια του κοινωνικού περίγυρου (εκπαιδευτικών, γονέων κ.τ.λ.) κατάφεραν να εξελιχθούν σε σημαντικούς μαθηματικούς και επιστήμονες στην κοινωνία [1].

Τρόποι ανίχνευσης των χαρισματικών παιδιών στον γνωστικό τομέα

Ενδείξεις ότι ένα παιδί είναι χαρισματικό:

Βρεφική ηλικία	Προσχολική ηλικία	Σχολική ηλικία
Αρχίζει να μιλάει νωρίς	Διαβάζει νωρίς και κατανοεί αυτά που διαβάζει.	Μαθαίνει σε πιο γρήγορο ρυθμό από τα παιδιά τυπικής ανάπτυξης (με καλό Δ.Ν.)
Οπτική, ακουστική και απτική αναζήτηση	Ζητά αιτιολογήσεις. Π.χ. «*Πού οφείλεται ότι η θάλασσα έχει υψηλό κύμα χωρίς στην ξηρά να έχουμε δυνατό αέρα;*», «*Η πολική αρκούδα πέφτει σε χειμερία νάρκη;*»	Καταπιάνεται με πολλά και διαφορετικά πράγματα, τα οποία φέρνει εις πέρας.
Διάδραση Κοινωνική	Έχει έντονη περιέργεια και εύστοχα ερωτήματα.	Μαθαίνει γρήγορα καινούριες λέξεις.
Εύκολη προσαρμογή	Παίζει επιτυχώς συνδυαστικά παιχνίδια όπως: Πάζλ, συναρμολογούμενα…	Έχει καλή μνήμη και θυμάται ιστορικά γεγονότα.
Ενστικτώδη κατανόηση	Έχει μεγάλη παρατηρητικότητα.	Διακρίνεται επίσης στις ξένες γλώσσες.

Για να διαγνωσθεί ένα παιδί ως χαρισματικό απαιτείται μια διαχρονική πορεία γιατί αξιόπιστα και ακριβή εργαλεία δεν υπάρχουν. Ένας συνδυασμός εργαλείων όπως (Raven Test, Numbers & Letters κ.τ.λ.) από ειδικούς που εξετάζουν Παρατηρητικότητα, Μνήμη Εργασίας, Οπτικοχωρική Ικανότητα μας δίνουν κάποια συμπεράσματα. Αρχική αξιολόγηση αποτελεί η επίδοση της μαθησιακής πορείας από τη σχολική και σπιτική φροντίδα και το σημαντικό κριτήριο είναι η Διαθεματική-Διαχρονική επιτυχία και διάκριση σε διαγωνισμούς. Κυρίως οι διαγωνισμοί της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας αποτελούν βάσεις για αξιολόγηση:

✓ **Παιχνίδι και Μαθηματικά**	✓ **Πυθαγόρας**	✓ **Θαλής**
✓ **Ευκλείδης**	✓ **Αρχιμήδης**	

Αντίστοιχα και άλλοι διαγωνισμοί όπως ο Ευρωπαϊκός Διαγωνισμός Καγκουρό, οι Πανελλήνιοι διαγωνισμοί Φυσικής (Αριστοτέλης), Χημείας και Ρομποτικής διευρύνουν την αξιολόγηση.

Η ανάπτυξη των Χαρισματικών παιδιών

Μια αξιόλογη μέθοδος για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης αποτελεί το Μοντέλο του Λογικού Επιχειρήματος του Richard Paul [3]. Εποικοδομητική είναι η εκπαιδευτική παρέμβαση βασισμένη στη Δομημένη Διερευνητική Μάθηση και τη STEM διδασκαλία.

Για να μπορέσει ένας μαθητής να γίνει χαρισματικός χρειάζεται να αναπτύξει και να εξελίξει ικανότητες και δεξιότητες, όπως: η Παρατηρητικότητα, η Μνήμη, η Λογική, η Οπτικοχωρική, η Κριτική Σκέψη, η Δημιουργικότητα, η Συνεργασία, η Πρωτοβουλία, η Ενσυναίσθηση κ.τ.λ. Παραδείγματα δραστηριοτήτων από την Προσχολική ηλικία για την ανάπτυξή τους:

Ανάπτυξη οπτικοχωρικών δεξιοτήτων μέσω της Γεωμετρίας και της Στερεομετρίας	Ετοιμότητα για γρήγορες και εύστοχες απαντήσεις.	Διδασκαλία της δεξιότητας δημιουργίας «ψαγμένων ερωτήσεων» και αυτοερωτήσεων.	Εξάσκηση σε ομοιότητες και διαφορές δύο ή τριών σχεδόν όμοιων εικόνων.

Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν το ιδιαίτερο δυναμικό τους και να τους προσφέρουν ευκαιρίες μάθησης αντίστοιχες του επιπέδου τους. Σεβόμενοι, λοιπόν, τους ρυθμούς μάθησής τους πρέπει να προσαρμόζονται στις ιδιαίτερες ικανότητές τους. Επομένως, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να **διαφοροποιούν** τη διδασκαλία τους, δεν πρέπει να διδάσκουν με βάση τον 'μέσο μαθητή' (ONE SIZE FITS ALL). Αυτός δυστυχώς ο σχεδιασμός δεν βοηθάει τον χαρισματικό μαθητή ενώ ταυτόχρονα δημιουργεί τους μαθητές των τελευταίων θρανίων που πληθαίνουν. Η διδασκαλία πρέπει να εδραιώνεται στην Ανάλυση, Παρατήρηση, Κατάταξη, Επίλυση, Επαλήθευση και Δομημένη Τεκμηρίωση με επιχειρήματα. Χρειάζεται Διδασκαλία Διερεύνησης, Εννοιολογικής Μάθησης, Ομαδικής Συμμετοχής και Εφαρμογής στην Πράξη. Μια διδασκαλία με Παραδείγματα και Αντιπαραδείγματα. Αυτή η διδασκαλία ενοποιεί την τάξη και αναπτύσσει όλους τους μαθητές, εν προκειμένω ο καλός θα βοηθήσει, θα διδάξει τον αδύνατο και θα μετατραπεί από μαθητής σε δάσκαλο, ρόλος ενίσχυσης της αυτοεκτίμησης και μεταγνωστικής ανάπτυξης, σημαντικός για την αυριανή του πορεία.

Αναφορές:

[1] Boaler, J. (2019). Everyone Can Learn Mathematics to High Levels. The Evidence from Neuroscience that Should Change our Teaching. Stanford University blog.

[2] Παπαδάτος, Γ. (2010). Ψυχοφυσιολογία. Αθήνα, Εκδόσεις: Παρισιάνου.

[3] Paul, R. & Elder, L. (2006). «Concepts and Tools» The Miniature Guide to Critical Thinking, The Foundation for Critical Thinking.

Η ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού

Δημήτρης Παπαιωάννου – Σπύρος Φερεντίνος

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων «ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ» της ΕΜΕ απευθύνεται σε μαθητές των τάξεων Β΄ Δημοτικού έως και Γ΄ Γυμνασίου. Σε αυτό το τεύχος του περιοδικού εγκαινιάζουμε μια ενότητα, η οποία αφορά στις απαραίτητες μαθηματικές ικανότητες για τον διαγωνισμό αυτό. Οι ικανότητες αυτές είναι:

Αριθμητική ικανότητα	• Να χειριζόμαστε αριθμητικά μεγέθη.
Γεωμετρική ικανότητα	• Να διακρίνουμε και να υπολογίζουμε γεωμετρικά μεγέθη.
Ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού	• Να εντοπίζουμε και να εφαρμόζουμε κανόνες (μοτίβα). • Αναλογικός συλλογισμός.
Συνδυαστική ικανότητα	• Να διακρίνουμε περιπτώσεις και να οργανώνουμε συνδυασμούς.
Ικανότητα μετάφρασης δεδομένων από ένα πλαίσιο σε άλλο	• Να βγάζουμε συμπεράσματα από ένα διάγραμμα, σχήμα ή εικόνα. • Να μεταφέρουμε δεδομένα από ένα πλαίσιο σε άλλο.
Αλγεβρική ικανότητα	• Να χειριζόμαστε αφηρημένες ποσότητες (συνήθως γράμματα). • Εξετάζεται μόνο στο Γυμνάσιο.
Ικανότητα λύσης προβλήματος	• Να συνδυάζουμε όλες ή ορισμένες από τις παραπάνω ικανότητες.
Αλγοριθμική ικανότητα	• Να εκτελούμε πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων με στόχο την επίλυση ενός προβλήματος. • Κύριο χαρακτηριστικό σχεδιασμού δράσεων στην Πληροφορική.

Σε κάθε τεύχος του περιοδικού θα αναλύεται μία από τις παραπάνω ικανότητες και θα παρουσιάζονται παραδείγματα από θέματα που τέθηκαν στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ. Τη φετινή χρονιά (2020) στον διαγωνισμό «ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ» μετείχαν περίπου 17.000 μαθητές από όλη την Ελλάδα.

Παράκληση προς τους αναγνώστες του περιοδικού: ***Να αποστείλετε κάποια δικά σας θέματα που να αντιστοιχούν στην ικανότητα που θα παρουσιάζεται στο τεύχος.*** **Τα πιο εύστοχα θέματα θα δημοσιεύονται στο περιοδικό!**

Ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού:

Επαγωγική σκέψη ή επαγωγικός συλλογισμός είναι ένας ιδιαίτερος και συγκεκριμένος τρόπος σκέψης. Παρακάτω θα αναφερθούμε στις δύο βασικές πτυχές του επαγωγικού συλλογισμού (1. *ικανότητα εντοπισμού και εφαρμογής κανόνων (μοτίβα*) και 2. *αναλογικός συλλογισμός*) και θα δώσουμε και από ένα παράδειγμα σε κάθε περίπτωση:

Ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού	•Να εντοπίζουμε και να εφαρμόζουμε κανόνες (μοτίβα). •Αναλογικός συλλογισμός.

1. Σε κάποια προβλήματα υπάρχει μια συνεχώς επαναλαμβανόμενη διαδικασία, κατά την οποία οι ποσότητες μεταβάλλονται συνεχώς με κάποιον σταθερό κανόνα (μοτίβο). Όταν εμείς αξιοποιήσουμε αυτό το μοτίβο, τότε εφαρμόζουμε επαγωγική σκέψη. Ας ονομάσουμε αυτή τη μορφή των προβλημάτων **Επαγωγική 1.**

Για παράδειγμα, *θα παραθέσουμε μια σειρά αριθμών, η οποία ξεκινά με τον αριθμό 3 και ο επόμενος αριθμός προκύπτει όταν διπλασιάσουμε τον προηγούμενο και προσθέσουμε το 5. Έτσι έχουμε τη σειρά* $3, 2\cdot 3+5=11, 2\cdot 11+5=27,\ldots$ *δηλαδή* $3, 11, 27,\ldots$.

2. Επαγωγική σκέψη εφαρμόζουμε και σε προβλήματα στα οποία σκεπτόμαστε με αναλογίες, και τότε εφαρμόζουμε αναλογικό συλλογισμό. Ας ονομάσουμε τη μορφή αυτή των προβλημάτων **Επαγωγική 2.**

Για παράδειγμα, *ανακατεύουμε 4 κιλά κόκκινο χρώμα με 10 κιλά κίτρινο και έχουμε μια συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί. Πόσα κιλά κίτρινο χρώμα πρέπει να ανακατέψουμε με 14 κιλά κόκκινο, για να έχουμε την ίδια απόχρωση του πορτοκαλί;*

Για να έχουμε την ίδια απόχρωση του πορτοκαλί, πρέπει να κρατηθεί η ίδια αναλογία μεταξύ κόκκινου και κίτρινου χρώματος. Επομένως, πρέπει να ισχύει η σχέση $\frac{4}{10}=\frac{14}{x}$, *όπου x ο αριθμός των κιλών του κίτρινου, επομένως* $4x = 14\cdot 10$ *άρα* $x=140:4=35$ *κιλά κίτρινο χρώμα.*

Παρακάτω θα αναφέρουμε θέματα που προέρχονται από τον διαγωνισμό Μαθηματικών ικανοτήτων της ΕΜΕ «ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ».

Επαγωγική 1. Μεταβολή ποσότητας με σταθερό κανόνα (μοτίβο)

Θέμα 1ο

Μία καμπάνα χτυπάει μία φορά κάθε τέταρτο της ώρας. Στο πρώτο χτύπημα η ώρα ήταν πέντε το πρωί. Μέχρι τις επτά παρά δέκα (το πρωί της ίδιας μέρας) πόσες φορές χτύπησε συνολικά η καμπάνα;

Α) 7 **Β)** 8 **Γ)** 9 **Δ)** 12 **Ε)** 20

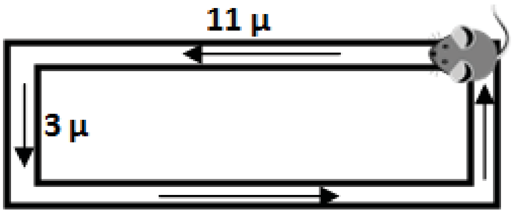
Πρέπει να υπολογίσουμε πόσες φορές θα χτυπήσει η καμπάνα μέχρι τις επτά παρά δέκα (6:50). Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα συνολικά χτυπήματα μέχρι τη ζητούμενη ώρα:

5:00	*5:15*	*5:30*	*5:45*	*6:00*	*6:15*	*6:30*	*6:45*	***Σύνολο***
1 φορά	*1 φορά*	*1 φορά*	*1 φορά*	*1 φορά*	*1 φορά*	*1 φορά*	*1 φορά*	***8 φορές***

Σωστή απάντηση: **Β).**

Θέμα 2^{ο} .

Ένα ποντικάκι έχει ξεκινήσει από τη θέση που φαίνεται στην εικόνα και κινείται συνεχώς, όπως δείχνουν τα βέλη. Κάποια στιγμή σταματά ακριβώς στη θέση από όπου ξεκίνησε. Πόσα μέτρα μπορεί να έχει περπατήσει συνολικά το ποντικάκι;



Α) 255 **Β)** 341 **Γ)** 560 **Δ)** 643 **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

Κάθε φορά που το ποντικάκι περνά από την αρχική του θέση, περπατά 11+3+11+3=28 μέτρα. Δηλαδή, την 1^{η} φορά περπατά 28 μέτρα, τη 2^{η} φορά $2\cdot 28=56$ μέτρα, την 3^{η} φορά $3\cdot 28=84$ μέτρα κοκ. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός πρέπει να είναι πολλαπλάσιος του 28. Από τους δοθέντες αριθμούς, μόνο ο 560 είναι πολλαπλάσιος του 28. Για να το βρούμε είτε προσθέτουμε κάθε φορά το 28 και έχουμε τη σειρά 28, 56, 84, 112, …, 560 είτε διαιρούμε κάθε μία από τις 4 απαντήσεις με το 28 και η διαίρεση πρέπει να βγει τέλεια, δηλαδή υπόλοιπο 0.

Σωστή απάντηση: **Γ)**

Θέμα 3^{ο}

Στις 3 Απριλίου του 2018, σε μια μικρή λίμνη εμφανίστηκαν 3 νούφαρα που έχουν την εξής ιδιότητα: κάθε 5 ημέρες διπλασιάζεται ο αριθμός τους. Την ημέρα που η λίμνη καλύφθηκε τελείως από 96 νούφαρα τη φωτογραφίσαμε. Ποια ημερομηνία έγινε η φωτογράφιση;

Α) 28 Απριλίου **Β)** 23 Απριλίου **Γ)** 26 Απριλίου

Δ) 23 Μαρτίου **Ε)** 18 Μαΐου

Επειδή ο αριθμός τους διπλασιάζεται κάθε 5 ημέρες και ο αρχικός αριθμός από νούφαρα ήταν 3 τότε προκύπτει η εξής σειρά αριθμών: 3, 6, 12, 24, 48, 96. Παρατηρούμε ότι τα νούφαρα διπλασιάστηκαν 5 φορές, άρα πέρασαν $5\cdot 5=25$ ημέρες. Συνεπώς αν από τις 3 Απριλίου προσθέσουμε 25 ημέρες τότε η ζητούμενη ημερομηνία είναι 25+3=28 Απριλίου.

Σωστή απάντηση: Α)

Θέμα 4ο

Ο κ. Βρασίδας πριν από αρκετά χρόνια είχε αγοράσει ένα αυτοκίνητο στην τιμή των 16.200€. Πέρυσι πούλησε το αυτοκίνητό του στην τιμή των 3.200€. Στην αγορά των αυτοκινήτων ισχύει ο εξής κανόνας:

Κάθε 4 χρόνια το αυτοκίνητο χάνει το $\frac{1}{3}$ της αξίας που είχε στην αρχή κάθε τετραετίας. Πότε είχε αγοράσει το παλιό του αμάξι;

Α) 2002 Β) 2007 Γ) 2008 Δ) 2010 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Από όταν ο κ. Βρασίδας αγόρασε το αυτοκίνητο του, αυτό ξεκίνησε να χάνει την αξία του. Πιο συγκεκριμένα κάθε 4 χρόνια χάνει το $\frac{1}{3}$ *της αξίας του. Άρα, αυτό σημαίνει ότι στο τέλος κάθε τετραετίας το αυτοκίνητο θα έχει τα* $\frac{2}{3}$ *της αξίας που είχε στην αρχή της. Δηλαδή,*

Στο τέλος της 1ης τετραετίας η αξία του αυτοκινήτου θα είναι με $\frac{2}{3}\cdot 16200 = 10800$ €

Στο τέλος της 2ης τετραετίας η αξία του αυτοκινήτου θα είναι με $\frac{2}{3}\cdot 10800 = 7200$ €

Στο τέλος της 3ης τετραετίας η αξία του αυτοκινήτου θα είναι με $\frac{2}{3}\cdot 7200 = 4800$ €

Στο τέλος της 4ης τετραετίας η αξία του αυτοκινήτου θα είναι με $\frac{2}{3}\cdot 4800 = 3200$ €

Δηλαδή έπρεπε να περάσουν 4 τετραετίες ($4\cdot 4 = 16$ *χρόνια) για να πέσει η τιμή του αυτοκινήτου στα 3200€. Υπενθυμίζουμε ότι το θέμα είχε τεθεί στο μαθηματικό διαγωνισμό ¨ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ¨ το έτος 2019, συνεπώς σωστή ημερομηνία είναι 2002.*

Σωστή απάντηση: **Β)**

Επαγωγική 2. Εφαρμογή αναλογικού συλλογισμού

Θέμα 5ο

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει 8 μπάλες ποδοσφαίρου και 4 μπάλες μπάσκετ την ημέρα. Σε πόσες μέρες θα κατασκευάσει συνολικά 48 μπάλες μπάσκετ και ποδοσφαίρου;

Α) 7 **Β)** 6 **Γ)** 5 **Δ)** 4 **Ε)** 15

Γνωρίζουμε ότι η βιοτεχνία κατασκευάζει 8 μπάλες ποδοσφαίρου και 4 μπάλες μπάσκετ την ημέρα, δηλαδή 12 μπάλες συνολικά την ημέρα. Πρέπει να υπολογίσουμε πόσες μέρες θα χρειαστεί για να κατασκευάσει 48 μπάλες, συνεπώς θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\frac{12}{1}=\frac{48}{x}$ *όπου x οι μέρες που χρειάζεται η βιοτεχνία, επομένως* $12\cdot x=48$ *άρα* $x=4$.

Σωστή απάντηση : **Δ)**

Θέμα 6^{ο}

Ένας αστροναύτης ζυγίζει στη Γη 72 κιλά και στο φεγγάρι 12 κιλά. Πόσο θα ζυγίζει στη Γη ένας άλλος αστροναύτης, ο οποίος ζυγίζει στο φεγγάρι 13 κιλά;

Α) 73 **Β)** 80 **Γ)** 75 **Δ)** 78 **Ε)** δεν μπορούμε να απαντήσουμε

Ξέρουμε ότι ο ένας αστροναύτης στη Γη ζυγίζει 72 κιλά στο φεγγάρι ζυγίζει 12 κιλά. Για να βρούμε πόσο θα ζυγίζει στη Γη ένας αστροναύτης που στο φεγγάρι ζυγίζει 13 κιλά θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\frac{12}{72}=\frac{13}{x}$ *όπου x τα κιλά του αστροναύτη στη Γη, επομένως* $12\cdot x=936$ *, άρα* $x=78$.

Σωστή απάντηση: **Δ)**

Θέμα 7^{ο}

Μια δεξαμενή πετρελαίου χωράει συνολικά 1500 λίτρα πετρέλαιο και είναι γεμάτη κατά τα $\frac{3}{5}$ της. Πόσα λίτρα πετρελαίου χωράει ακόμη;

Α) 600 **Β)** 500 **Γ)** 800 **Δ)** 900 **Ε)** 1000

Η δεξαμενή είναι γεμάτη κατά τα $\frac{3}{5}$ *της, οπότει το πετρέλαιο που πρέπει να συμπληρώσουμε για να γεμίσει είναι ίσο με τα* $\frac{2}{5}$. *Συνεπώς, θα πρέπει να ισχύει η σχέση* $\frac{2}{5}=\frac{x}{1500}$ *όπου x τα λίτρα πετρέλαιο που χρειαζόμαστε για να γεμίσει η δεξαμενή, επομένως* $5x=3000$, *άρα* $x=600$.

Σωστή απάντηση: **Α)**

Εναλλακτική στρατηγική: *Εφόσον η δεξαμενή χωράει συνολικά 1500 λίτρα πετρέλαιο, το* $\frac{1}{5}$ *της δεξαμενής θα χωράει 300 λίτρα, άρα τα* $\frac{2}{5}$ *θα χωρέσουν 600 λίτρα.*

Η μέθοδος αυτή, που συνδέεται με τον αναλογικό συλλογισμό, λέγεται ***αναγωγή στη μονάδα****. Στο συγκεκριμένο θέμα η μονάδα είναι το* $\frac{1}{5}$ *της δεξαμενής, διότι όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί που εμφανίζονται (*$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$*) είναι πολλαπλάσια του* $\frac{1}{5}$.

Θέμα 8ο

Σε μια πόλη της Ελλάδος το εισιτήριο στο αστικό λεωφορείο κοστίζει 1,20€ και διαρκεί για 90 λεπτά της ώρας.

Αποφασίστηκε, για λόγους ευκολίας, να εκδοθεί και ένα εισιτήριο που κοστίζει 1€.

Η διάρκεια του εισιτηρίου αυτού θα πρέπει να είναι:

Α) 1 ώρα
Β) 80 λεπτά της ώρας,
Γ) 75 λεπτά της ώρας,
Δ) 70 λεπτά της ώρας,
Ε) 65 λεπτά της ώρας.

Το εισιτήριο κοστίζει 1,20€ και διαρκεί για 90 λεπτά. Αν η τιμή του εισιτηρίου αλλάξει σε 1€, τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\frac{1,2}{90}=\frac{1}{x}$*, όπου x η διάρκεια σε λεπτά του καινούργιου εισιτηρίου, επομένως* $1,2\cdot x=90$*, άρα* $x=75$ *λεπτά της ώρας.*

Εναλλακτική στρατηγική: Το ίδιο θέμα να επιλυθεί με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα *(Υπόδειξη: Βρες τον ΜΚΔ των 1,20€ =120 λεπτά και 1€=100 λεπτά, δηλ. των 120 και 100)*

Σωστή απάντηση: **Γ)**

Θέμα 9ο

Ο κ. Ταξίδης έχει ένα αυτοκίνητο το οποίο, όταν έχει το ντεπόζιτο της βενζίνης γεμάτο, μπορεί να ταξιδέψει για 400 km αποκλειστικά στην εθνική οδό ή 300 km αποκλειστικά μέσα στην πόλη. Αφού γέμισε το ντεπόζιτο του αυτοκινήτου του με βενζίνη, πήγε ένα ταξίδι. Στην αρχή ταξίδεψε για 300 km στην εθνική οδό και στη συνέχεια οδήγησε μέσα στην πόλη, μέχρι που εξαντλήθηκαν τα καύσιμά του. Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε μέσα στην πόλη;

Α) 100km **Β)** 50km **Γ)** 75km **Δ)** 80km **Ε)** 150km

Αφού ο κ. Ταξίδης, ταξίδεψε για 300km εθνική οδό και όχι 400km, αυτό σημαίνει ότι το ντεπόζιτο του αυτοκινήτου δεν άδειασε, αλλά φτάνει ακόμη για 100km εθνικής οδού. Για να βρούμε πόσα km οδήγησης στην πόλη αντιστοιχούν τα 100km της εθνικής οδού, θα μας βοηθήσει η σχέση $\frac{400}{100}=\frac{300}{x}$, *όπου x τα km που αντιστοιχούν σε οδήγηση στην πόλη, επομένως 400·x=30.000, άρα x=75km.*

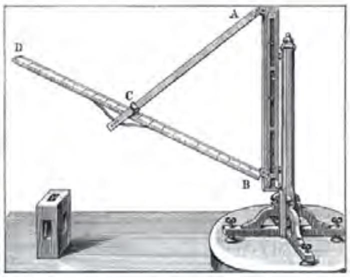
Σωστή απάντηση: **Γ)**

Μετρήσεις στο $3^{ο}$ Γυμνάσιο Καστοριάς

Με τους μαθητές του σχολείου μου (3ο Γυμνάσιο Καστοριάς) και συγκεκριμένα με τις τάξεις Β' και Γ', πειραματιστήκαμε με διαδικασίες μετρήσεων, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν στην αρχαιότητα και τις οποίες προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε θεωρητικά αλλά ταυτόχρονα να τις πραγματοποιήσουμε στην όμορφή μας Καστοριά.
Αυτό ήταν το θέμα μας παρουσίασης μας κατά την διάρκεια της 10ης Μαθηματικής εβδομάδας στη Θεσσαλονίκη.

Κατά την παρουσίασή μας και την εργασία μας μιλήσαμε για τα παρακάτω όργανα μετρήσεων:

Το ***τριγωνικόν*** (εικ.1) ή κανόνας του ***Πτολεμαίου***, Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου, είναι όργανο μέτρησης κατακόρυφων γωνιών. Είναι σχεδιασμένο ειδικά, ώστε να ξεπεραστεί το πρόβλημα βαθμονόμησης κυκλικών τόξων. Αποτελείται από δύο ράβδους ίδιου μήκους. Η μία είναι σταθερή και κατακόρυφη (η κατακορυφότητά της εξασφαλίζεται με το νήμα της στάθμης) και βαθμονομημένη (υποδιαιρείται σε 60 ίσα μέρη). Χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τον Πολωνό αστρονόμο και μαθηματικό ***Copernicus*** και τον Δανό Αστρονόμο, ***Tycho Brahe***



εικ.1

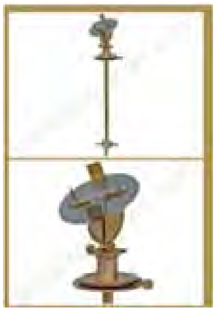
Ο τετράντας (εικ.2) του Έλληνα αστρονόμου ***Ιππάρχου*** Πρόκειται για ένα μετρητικό όργανο που χρησιμοποιούνταν (στην αστρονομία και τη ναυσιπλοΐα) για τον υπολογισμό αστρονομικών μεγεθών και (στην τοπογραφία και την οικοδομική) για τη μέτρηση γήινων αποστάσεων (π.χ. το ύψος ενός βουνού).


εικ.2

Ο ***εξάντας*** (εικ.3) είναι ένα γωνιομετρικό όργανο χαρακτηριζόμενο και αστρονομικό που χρησιμοποιείται στη ναυσιπλοΐα, από τους ναυτιλλόμενους για τη μέτρηση υψών ουρανίων σωμάτων καθώς και κατακόρυφες ή οριζόντιες γωνίες γήινων, ή επίγειων σταθερών αντικειμένων. Χρησιμοποιείται στη μέτρηση της γωνίας (ύψους) ενός σκοπούμενου ουράνιου σώματος (π.χ. Ήλιος, Σελήνη, Πλανήτες, Αστέρες), από τον ορίζοντα.


εικ.3

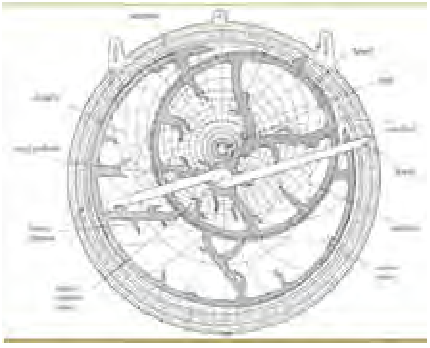
Ο ***[Θεοδόλιχος](#)*** (εικ.4) ονομάζεται το οπτικό όργανο που είναι εφοδιασμένο με γωνιομετρικό κύκλο και με τηλεσκοπική διόπτρα. Χρησιμοποιείται για να μετρήσουμε π.χ. με ακρίβεια τη γωνιακή απόσταση δύο αστέρων. Μαζί με ένα χωροβάτη έχουμε και την διόπτρα του ***Ήρωνος*** (εικ.5)



εικ.4

εικ.5

Ο ***αστρολάβος*** (εικ.6)είναι ένα ιστορικό αστρονομικό όργανο το οποίο χρησιμοποιούσαν οι ναυτικοί και οι αστρονόμοι για την ναυσιπλοΐα και την παρατήρηση του Ήλιου και των αστεριών από τον 3ο αιώνα π.Χ. μέχρι τον 18ο αιώνα μ.Χ. Ο αστρολάβος αποτελείται από έναν δίσκο, που το εξωτερικό του πλαίσιο υποδιαιρείται σε μοίρες, και σε έναν κανόνα (γωνιόμετρο) που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του.

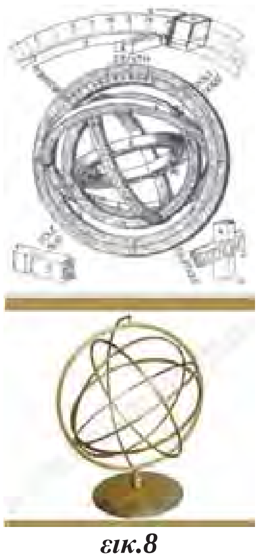


εικ.6

Αποτελείται από τη μήτρα, το τύμπανο και την αράχνη. Το τύμπανο είναι μπρούτζινος δίσκος χαραγμένος με γραμμές που αναπαριστούν τους μεσημβρινούς. Η αράχνη είναι ένας άλλος δίσκος που να παρουσιάζει τον περιστρεφόμενο χάρτη του ουρανού.
Οι δύο δίσκοι επικάθονται σε ένα τρίτο δίσκο, 4 τύμπανα (για κάθε κλίμα), μήτρα, Αράχνη, διάταξη σκόπευσης, τη μήτρα, που διαθέτει κλίμακα με ώρες, λεπτά, δευτερόλεπτα που περιστρέφονται γύρω από ένα κοινό άξονα.
Βλέπετε δίπλα και τον αστρολάβος του ***Jean Fusoris.*** (εικ.7) που κατασκευάστηκε στο Παρίσι το 1400.

εικ.7

Ο ***σφαιρικός αστρολάβος*** (εικ.8). Το σημαντικότερο από τα όργανα που χρησιμοποιεί ο Πτολεμαίος, και πιθανώς να χρησιμοποιείται στα χρόνια του Ίππαρχου, για τη μέτρηση των θέσεων των αστέρων.
Όργανο σύνθετο αποτελούμενο από πέντε ομόκεντρους κρίκους, χρησιμοποιήθηκε σε διάφορες παραλλαγές μέχρι τα χρόνια του Tycho Brahe.
Οι δύο ακίνητοι κύκλοι ήταν ο κατακόρυφος, που τον τοποθετούσαν στη διεύθυνση του μεσημβρινού του τόπου όπου γινόταν η παρατήρηση, και ο εκλειπτικός, κάθετος και ίσιος με τον κατακόρυφο και σταθερά συνδεμένος με αυτόν.

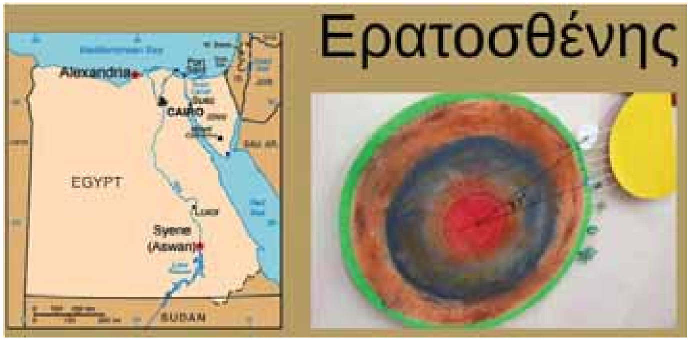


εικ.8

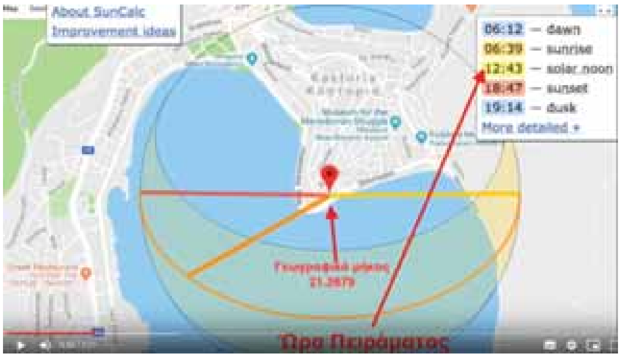
Οι τρεις μετρήσεις που πραγματοποιήσαμε αφορούν:

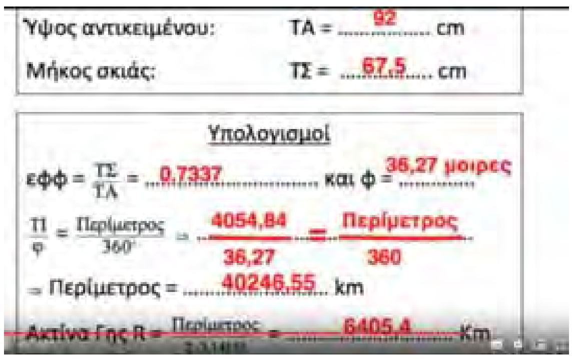
1η μέτρηση

Ακτίνα της Γης (όπως με τον Έλληνα μαθηματικό ***Ερατοσθένη***). Το πείραμα εκτελέστηκε σύμφωνα με τις οδηγίες και τα φύλλα εργασίας που πρότεινε το ***Εθνικό αστεροσκοπείο Αθηνών***. Αρχικά βρήκαμε ποια ημέρα πρέπει να κάνουμε το πείραμα (εαρινή ισημερία) και ποια ώρα (μεσημέρι-ο ήλιος στο υψηλότερο σημείο της περιοχής μας).



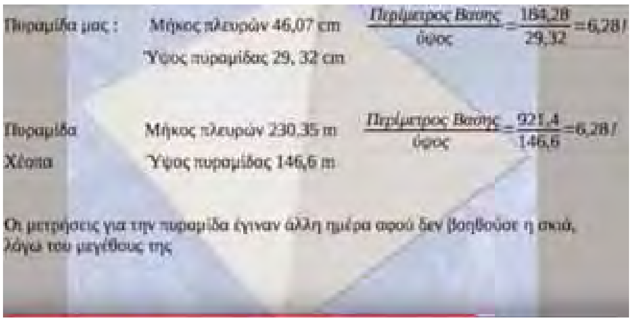
Βρήκαμε το σχολείο μας στον χάρτη της Google, προσδιορίσαμε το σημείο Ισημερινού με το ίδιο γεωγραφικό μήκος, καταγράψαμε την απόσταση του σχολείου μας και χρησιμοποιώντας τύπο εφαπτομένης και προσέγγιση του π=3,14159 καταλήξαμε σε ακτίνα της Γης=6405 Km περίπου





2η μέτρηση

Πυραμίδα του ***Χέοπα***, (όπως του Έλληνα Φιλοσόφου και μαθηματικού ***Θαλή***). Τα ραβδάκια μας και οι σκιές τους μαζί με την πυραμίδα (μοντέλο) που κατασκεύασαν οι μαθητές μας, μας οδήγησαν μαζί με τις αναλογίες στα βήματα που ακολούθησε και ο Θαλής στον υπολογισμό των πυραμίδων.



3η μέτρηση

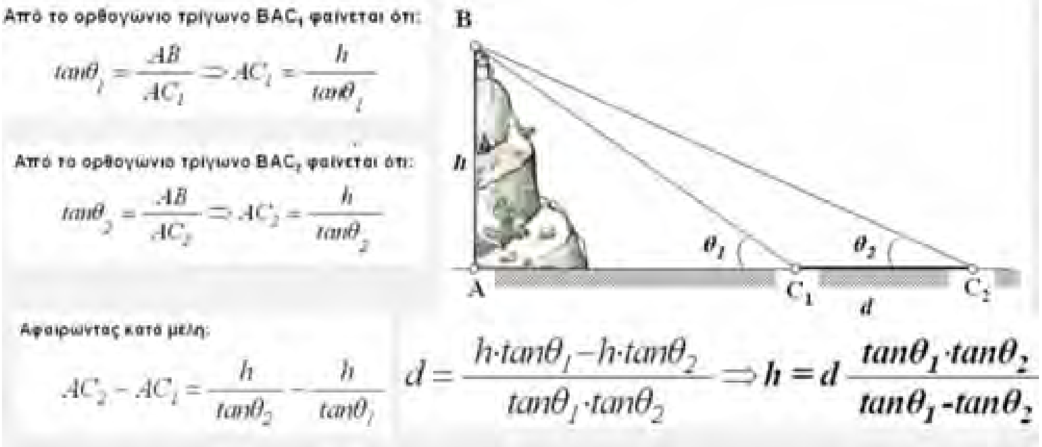
Υψομετρική διαφορά λίμνης Καστοριάς και Αγίου Αθανασίου Καστοριάς (όπως του Άραβα αστρονόμου και μαθηματικού ***Al Biruni***)

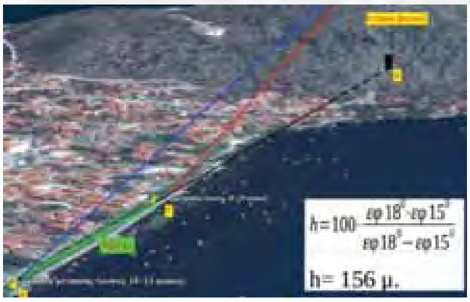
Είναι το πείραμα που εργαστήκαμε τον περισσότερο χρόνο. Χρειαστήκαμε μια νοητή ευθεία γραμμή, πάνω στο πλακόστρωτο της Νότιας Παραλίας Καστοριάς, όπου με την βοήθεια μιας μετροταινίας, μετρήσαμε μια απόσταση 100 μέτρων. Σημειώσαμε τα σημεία εκκίνησης και τέλους, από τα οποία, χρησιμοποιώντας τους αυτοσχέδιους αστρολάβους, οι οποίοι κατασκευάστηκαν με την βοήθεια της καθηγήτριας Τεχνολογίας, μετρήσαμε τις γωνίες με τις οποίες «φαινόταν» η κορυφή του Αγίου Αθανασίου Καστοριάς.

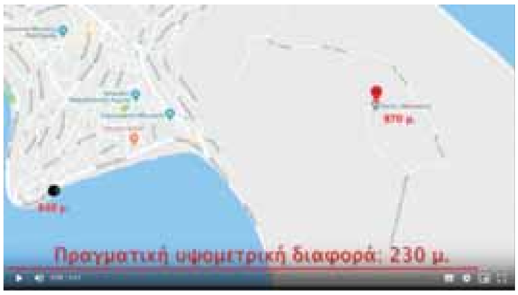
Κάναμε αρκετές μετρήσεις ώστε όλοι οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα και για να πετύχουμε ακριβέστερα αποτελέσματα.

Χρησιμοποιήσαμε τριγωνομετρία και πετύχαμε να βρούμε μια υψομετρική διαφορά περίπου 165 μέτρων. Η πραγματική, χρησιμοποιώντας τους χάρτες της Google, είναι 220 μέτρα, οπότε θεωρούμε ότι τα πήγαμε σχετικά καλά.

Οι τύποι που χρησιμοποιήσαμε είναι οι βασικοί τύποι υπολογισμού εφαπτομένης γωνίας.







Έχει ενδιαφέρον, νομίζουμε, να δείτε στους συνδέσμους που παραθέτουμε:

1) Το ***αρχείο παρουσίασης*** στην Θεσσαλονίκη. http://10h-math2018.blogspot.com/
2) Ένα, κατά την άποψή μας, ***εκπληκτικό βίντεο*** μέσα από το οποίο αναδεικνύονται τόσο η ομορφιά των μετρήσεων όσο και η ομορφιά της Καστοριάς. https://drive.google.com/file/d/1DtPAig8annvoeYiFQHpeC4UpNxLYe5_b/view
3) Πολλά στοιχεία που χρησιμοποιήσαμε εκτός από τα φύλλα εργασίας του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών και τα σχολικά βιβλία, είναι από το βιβλίο «Μέτρον γεωμετρικόν» (Δημήτριος Ρωσσικόπουλος, 2006) και από την ιστοσελίδα του ***Μουσείου Αρχαίας Ελληνικής τεχνολογίας Κοτσανά***, το οποίο άλλωστε αξίζει να το επισκεφθούν όλα τα σχολεία! http://kotsanas.com/
4) Ιστοσελίδα του εκπαιδευτικού Ζυγούρη Κων/νου με την δράση: http://kostaszig.blogspot.com/2018/04/blog-post.html

Με ιδιαίτερη χαρά
Οι εκπαιδευτικοί του σχολείου 3ου Γυμνασίου Καστοριάς

Αναστασιάδου Βασιλική, καθηγ. Τεχνολογίας
Ζυγούρης Κωνσταντίνος, Μαθηματικός
email : kostaszig@me.com

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΑΣ ΔΙΑΣΚΕΔΑΖΟΥΝ

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Αριθμητικά παιχνίδια με το 2020

$2020=(20+20).(20+20)+20.20+20$

$2020=44^2+8^2+(44+8)+4x8$

$2020=\frac{8^4}{2}-\frac{8^2}{2}+\frac{8^1}{2}$

$2020=1+2+3+\ldots+62+63+4$

$2020=(4^4-4)(4+4)+4$

$2020=2^2+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}$

ΓΡΙΦΟΙ

Ο 3 και ο άλλος: Ποιος είναι ο αριθμός που αν του προσθέσουμε το 3 ύστερα διαιρέσουμε το άθροισμα με 3, αφαιρέσουμε από το πηλίκο το 3 και πολλαπλασιάσουμε τη διαφορά επί 3 παίρνουμε έναν αριθμό που είναι τα 2/3 του αρχικού αριθμού μας;

Ο Εθνικός Ύμνος: Στο έτος που γεννήθηκε ο Διονύσιος Σολωμός (1798) προσθέστε τις στροφές που έχει ολόκληρος ο Εθνικός Ύμνος (158). Αφαιρέστε το άθροισμα από το φετινό έτος 2020 και το υπόλοιπο να διαιρεθεί δια 8. Ο αριθμός που θα προκύψει να προστεθεί σε έναν από τους αριθμούς (7, 11, 14, 18, 54, 58, 62, 93, 94, 98, 292). Ύστερα γράψε το άθροισμα ολογράφως και μέτρησε πόσα γράμματα έχει. Πήγαινε στον Εθνικό Ύμνο και μέτρησε από την αρχή τόσες λέξεις όσο είναι ο αριθμός που βρήκες. Έφτασες στη λέξη «τρομερή». Πώς το ξέρω;

Ο τετραψήφιος: Να βρεθεί ένας τετραψήφιος αριθμός που όταν πολλαπλασιαστεί επί 4 το γινόμενο είναι ο ίδιος αριθμός ανεστραμμένος. Ποιος είναι ο αριθμός;

Ο διψήφιος: Να βρεθεί ένας διψήφιος αριθμός ίσος προς το 7πλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του.

Αγορά πολλών αντικειμένων: Κάποιος αγόρασε 100 αντικείμενα με 100 €, εκ των οποίων άλλα μεν εστοίχισαν 2€ το καθένα, άλλα 1 € και τα υπόλοιπα 0,50 €. Πόσα αντικείμενα αγόρασε από το κάθε είδος ;

Απαντήσεις στους Γρίφους του ΕΥΚΛ Α 114

Η ψηφοφορία: Αφού με την διόρθωση του λάθους από τον διευθυντή μειώθηκαν τα «ΝΑΙ» κατά 9 και έμειναν 3 ήταν συνολικά 12. Αλλά αφού υπερείχαν των «ΟΧΙ» κατά το 1/5 άρα τα «ΟΧΙ» ήταν 10. Σύνολικά ψήφισαν 22 μαθητές.

Η πλαστελίνη: Τα κουλουράκια και οι πίτες έγιναν με την ίδια ποσότητα πλαστελίνης η οποία είναι πολλαπλάσιο του 20 και του 26 δηλαδή 260 γραμμάρια. Επομένως η μικρή ποσότητα που δόθηκε από την Κατερίνα στον αδελφό της είναι 40 γραμμάρια.

Ο ορειβάτης: Ο ορειβάτης κατεβαίνει με τριπλάσια ταχύτητα αυτής που ανεβαίνει. Άρα ο χρόνος ανόδου είναι τριπλάσιος του χρόνου καθόδου. Η συνολική διάρκεια ανόδου και καθόδου είναι 8 ώρες που μοιράζεται σε 6 ώρες ανόδου και 2 καθόδου. Άρα το ύψος του βουνού είναι 1500 μέτρα.

Η κληρονομιά: Η κόρη του Αργύρη του είπε, όποιο από τα δύο και να ισχύει η κληρονομιά είναι ίδια 35x60%=60x35%=21 εκατομμύρια.

Το γινόμενο: Ο 7632 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι: $2^4.3^2.53$. Οι αριθμοί που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι: 12x636 ή 16x477 ή 18x424 ή 24x318 ή 72x106 ή 36x212 ή 48x159 ή 144x53 . Όλα τα ψηφία και μόνο μια φορά είναι στο 48x159=7632 που αποτελεί και τη λύση στο πρόβλημα.

Το άθροισμα: Αν α είναι ο πρώτος οι επόμενοι είναι: α+1, α+2, α+3, α+4, α+5. Ο κάθε ένας από τους τρείς πρώτους είναι κατά τρείς μονάδες μικρότερος από τους αντίστοιχους μεγαλύτερους. Επομένως το άθροισμά τους είναι 9 μονάδες μικρότερο του 36.

Τα έσοδα: Το 2019 τα έσοδα(Ε) της εταιρείας μειώθηκαν 20% και είναι το 80/100xΕ άρα αυτά για να γίνουν 100/100xΕ πρέπει να αυξηθούν 25%.