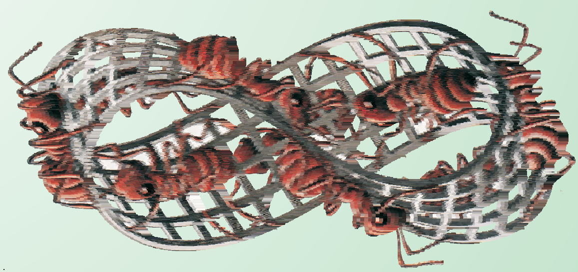
Μαθηματικό περιοδικό για το

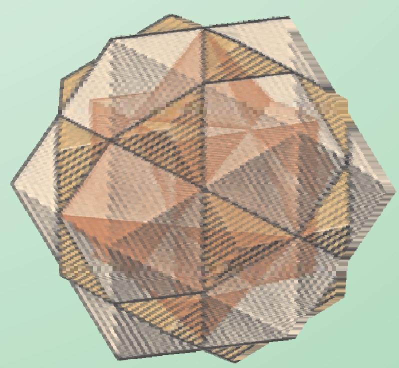
Ευκλείδης Α' Γυμνάσιο 122

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021 ευρώ 3,00

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων της ΕΜΕ, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ και η προσφορά του στην Αξιολόγηση του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος



Escher και μοτίβα



ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ +7) ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 122

Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2021

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ιωάννης Εμμανουήλ
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Κεΐσογλου Στέφανος

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητές και αγαπητοί μαθητές και συνάδελφοι,

Ευχόμαστε η νέα χρονιά να εξαφανίσει την επιδημία και να έχουμε πάλι όλοι μας μια φυσιολογική ζωή. Ας ευχηθούμε αυτή την χρονιά να ξεπεραστούν όλα τα προβλήματα και τα σχολεία να ξαναβρούν την δημιουργική ηρεμία. Η Συντακτική Επιτροπή του Ευκλείδη Α΄ θα συνεχίσει να παρουσιάζει από τις σελίδες του περιοδικού επίκαιρα και ενδιαφέροντα θέματα, για όλες και όλους τους μαθητές του Γυμνασίου. Τα περιοδικά της ΕΜΕ είναι προϊόν εθελοντικής εργασίας και προσφοράς συναδέλφων από όλη την Ελλάδα. Τα μαθηματικά αν και φαίνονται δύσκολα στα μάτια πολλών μαθητών, κρύβουν μια απλότητα και μια μαγεία, που αν την ανακαλύψουν θα γοητευτούν. Ο Ευκλείδης Α΄ είναι το περιοδικό που με κατάλληλα άρθρα θέλει να βοηθήσει στην κατεύθυνση αυτή, ώστε όλοι οι μαθητές και μαθήτριες να ανακαλύψουν αυτή την μαγεία.

Η ομάδα συντονισμού του περιοδικού.

Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού
Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Η Ρομποτική (Robotics)

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Από τη δεκαετία του 1960 ζούμε στη **διαστημική εποχή.** Ο άνθρωπος δημιούργησε μηχανές (διαστημόπλοια) που μπορούν να τον μεταφέρουν σε άλλους πλανήτες. Αυτό όμως θα ήταν αδύνατο μαθηματικά (υπολογιστικά) αν δεν είχαμε δημιουργήσει πρώτα τον υπολογιστή. Ο υπολογιστής λέγετε έτσι γιατί ξεκίνησε σαν εργαλείο στα χέρια των μαθηματικών, να υπολογίζει (επιλύει) γρήγορα τα προβλήματα. Σήμερα είμαστε στο παραπέντε της κατασκευής του κβαντικού υπολογιστή ενός υπέρ υπολογιστή που θα ανατρέψει τα δεδομένα της ανθρωπότητας. Η ηλεκτρονική πλέον κάνει «θαύματα» έτσι προχωρήσαμε από την αρχή της 3ης χιλιετίας στην **εποχή των ρομπότ.** Πολλά αντικείμενα που χρησιμοποιούμε είναι κατασκευασμένα από ρομπότ. Στέλνουμε ρομπότ σε πλανήτες, κομήτες κλπ για να πάρουμε πληροφορίες, αλλά και να δούμε την επιφάνειά τους ωσάν να είμαστε εκεί. Για όλα αυτά βέβαια χρειαζόμαστε τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή, τον οποίο θα μπορούσαμε να τον λέμε πλέον «***μαγικό παράθυρο***» ή «***παράθυρο του Σύμπαντος***», αφού μέσα από αυτόν μπορούμε να βλέπουμε τα πάντα σε όλο τον κόσμο, σε όλο το Σύμπαν. Μπορούμε να έχουμε τηλεργασία, τηλεκπαίδευση, τηλεδιάσκεψη, τηλε-ξενάγηση, τηλε-ιατρική, τηλε-χειρισμό συσκευών, τηλε-οδήγηση αυτοκινήτου, κ.ά.

Είμαστε λοιπόν στην εποχή της Ρομποτικής. Η **Ρομποτική** είναι ένας διεπιστημονικός κλάδος που συνδυάζει την πληροφορική με τη μηχανική. Η Ρομποτική περιλαμβάνει τον σχεδιασμό, την κατασκευή και την λειτουργία των ρομπότ. Στόχος της είναι ο σχεδιασμός μηχανών που μπορούν να βοηθήσουν ή να αντικαταστήσουν τον άνθρωπο στην εκτέλεση μιας εργασίας, η οποία μπορεί να συνδυάζει τη φυσική δραστηριότητα με τη διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Η λέξη Ρομπότ πρωτοεμφανίζεται το 1921 σε ένα θεατρικό έργο επιστημονικής φαντασίας. Συγγραφέας του έργου R.U.R. (Rossum's Universal Robots) ήταν ο Τσέχος Κάρελ Τσάπεκ και η λέξη ρομπότ προέρχεται από την σλαβική λέξη **robota** που σημαίνει εργασία/εργάτης. Τα έργα επιστημονικής φαντασίας έχουν επηρεάσει τον τρόπο με τον οποίο φανταζόμαστε τα ρομπότ. Τα βιβλία του Ρώσου συγγραφέα Ισαάκ Ασίμωφ τη δεκαετία του 1940 καθώς και κινηματογραφικά έργα όπως ο πόλεμος των άστρων, παρουσιάζουν τα Ρομπότ σαν ανθρωποειδή τα οποία μπορούν να περπατούν, να μιλούν, να βλέπουν, να ακούνε και να έχουν αισθήματα. Γενικά ως Ρομπότ θεωρούνται οι μηχανές οι οποίες ανεξάρτητα από την εμφάνισή τους, είναι ικανές να δράσουν σε ένα περιβάλλον στο οποίο λειτουργούν για να βοηθήσουν τον άνθρωπο στο έργο του ή να κατασκευάσουν κάτι που δεν μπορούν τα ανθρώπινα χέρια ή να εργαστούν εκεί που δεν είναι δυνατόν να πάει ο άνθρωπος. Τα ρομπότ λειτουργούν μέσα από κανόνες και δράσεις που ακολουθούν με βάση τα δεδομένα που αποκτώνται από τα αισθητήρια με τα οποία είναι εφοδιασμένα.

Τα πρώτα “Ρομπότ” (αυτόματες μηχανές) κατασκεύασαν οι Αρχαίοι Έλληνες όπως ο Ήρωνας, ο Αρχιμήδης κ.ά. Η λειτουργία των αυτομάτων αυτών στηριζόταν σε έξυπνους, αόρατους και αδιανόητους για τον κοινό νου μηχανισμούς, πολλές φορές μυστικούς. Ο μύθος του Δαιδάλου σχετικά με τον μαθητή του και ανιψιό του **Τάλω** που εφεύρε το **πριόνι** και το **διαβήτη**, λέει ότι τον γκρέμισε από την Ακρόπολη και γι’ αυτό κατασκεύασε αργότερα για τον Μίνωα τον γίγαντα Τάλω ώστε να αντιμετωπίσει το ηθικό πρόβλημα που δημιουργήθηκε.

Σημ. Μπορούμε να δούμε αυτά τα αρχαία ρομπότ με μια επίσκεψή μας στο Μουσείο Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας Κώστα Κοτσανά στην Αθήνα στο Κολωνάκι ή στο Κατάκολο ή στην Αρχαία Ολυμπία. Η έκθεση του Κ. Κοτσανά έχει μεταφερθεί σε όλο τον κόσμο και την έχουν θαυμάσει χιλιάδες άνθρωποι.

Ο **Τάλως** ήταν ο πρώτος άνθρωπος-μηχανή, ένα γιγάντιο ανθρωπόμορφο ρομπότ από χαλκό, που έβλεπε και ήταν ο άγρυπνος φρουρός της Κρήτης

Με τα Ρομπότ η παραγωγική διαδικασία στις βιομηχανίες αυτοματοποιείται. Οι μηχανές παίρνουν τη θέση του βιομηχανικού εργάτη στην παραγωγή αλλά και στην διακίνηση και αποθήκευση των προϊόντων. Η αυτοματοποίηση με την ανάπτυξη της τεχνολογίας από τον 20ο αιώνα έφερε αυξημένη παραγωγικότητα, βελτιωμένη ποιότητα και αύξηση του κέρδους των επιχειρήσεων. Τεράστια είναι και η βοήθεια στην επιστήμη, ιδιαίτερα την διαστημική και ιατρική.

Η Ρομποτική σήμερα δίνεται ως δημιουργικό παιχνίδι στα μικρά παιδιά, τα οποία πλέον από πολύ μικρή ηλικία εξοικειώνονται με τα ηλεκτρονικά.

Χρησιμοποιώντας εξαρτήματα που είναι σχεδιασμένα να κάνουν μια λειτουργία, μπορούν να δημιουργήσουν με την φαντασία τους τη δική τους κατασκευή, το δικό τους ρομπότ. Σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, με τη ρομποτική οι μαθητές μπορούν να δουλεύουν ομαδικά χρησιμοποιώντας εκπαιδευτικά πακέτα ρομποτικής που περιέχουν επεξεργαστή, για επεξεργασία των δεδομένων όπως κάνει το μυαλό μας, αισθητήρες οι οποίοι μεταφέρουν ερεθίσματα στον επεξεργαστή από το εξωτερικό περιβάλλον, κινητήρες και άλλα δομικά στοιχεία με τα οποία αλληλεπιδρά η συσκευή με το περιβάλλον της για την ολοκλήρωση του έργου.

Παράλληλα γίνονται Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί και Διεθνείς Ολυμπιάδες Ρομποτικής που οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να έρθουν σε επαφή με άλλα παιδιά από όλο τον κόσμο, να ανταλλάξουν εμπειρίες, ιδέες και τεχνογνωσία. Σκοπός να γίνουν οι μαθητές δημιουργικοί, να διατυπώνουν πρωτότυπες ιδέες και να τις υλοποιούν μέσα από την ομαδική συνεργασία. Έτσι, αναπτύσσοντας δεξιότητες προγραμματισμού και μηχανικής, αποκτούν γνώσεις σχετικά με την τεχνολογία αλλά και για πολλά ακόμα θέματα του σχολικού προγράμματος.

Η πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα μαθηματικά μέσω ρεαλιστικού προβλήματος με τη χρήση του Geogebra

Νίκος Μπακούλας, MSc Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών

Τα παιδιά στις μέρες μας, έχοντας από μικρή ηλικία πρόσβαση σε πολλές πηγές ενημέρωσης και ψυχαγωγίας χάρη στην ανάπτυξη της τεχνολογίας, αξιολογούν οτιδήποτε νέο συναντούν και συνήθως ανταποκρίνονται θετικά σε δραστηριότητες που τους εντυπωσιάζουν και τους προσφέρουν άμεση ευχαρίστηση. Το ίδιο ισχύει και για τα μαθηματικά, καθώς υπάρχουν πολλά παιδιά που από μικρή ηλικία τα έχουν αγαπήσει χάρη σε κάποια ερεθίσματα που έχουν δεχθεί αλλά και παιδιά που δεν τους αρέσουν και εκφράζουν αρκετά συχνά απορίες για τη χρησιμότητά τους. Χαρακτηριστικό είναι το ερώτημα που διατυπώνουν «*και που θα μας χρειαστεί αυτό που μαθαίνουμε;*». Ωστόσο, τα μαθηματικά είναι αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής όλων των ανθρώπων, είτε τα θεωρούν ενδιαφέροντα είτε όχι. Σκοπός του κάθε καθηγητή πρέπει να είναι η ανάδειξη της χρησιμότητας και της «μαγείας» των μαθηματικών όταν διδάσκει, για να πυροδοτήσει το ενδιαφέρον των μαθητών, να τους δώσει κίνητρο και να προκαλέσει την ενεργή συμμετοχή τους. Στον κλάδο της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΔτΜ), μία θεωρία που εστιάζει στην αξία των μαθηματικών και τη σύνδεσή τους με την καθημερινή ζωή των μαθητών είναι αυτή των « *Ρεαλιστικών Μαθηματικών*» που αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 70 από τον Freudenthal και τους συνεργάτες του. Η θεωρία αυτή τονίζει την αξία της εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών και εργαλείων εκ μέρους των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων και γενικότερα για τη μελέτη καταστάσεων που προέρχονται από την καθημερινότητά τους (Van Den Heuvel-Panhuizen, M.,2003). Στο πέρασμα των χρόνων και τη διαρκή ανάπτυξη του κλάδου της ΔτΜ έχουν γίνει πολλές έρευνες που έχουν ως σημείο εστίασης την αξία των ρεαλιστικών προβλημάτων, τα οποία έχουν κεντρικό ρόλο στα «*Ρεαλιστικά Μαθηματικά*», και τις διαδικασίες μαθηματικοποίησης αυτών από τους μαθητές μέσω κατάλληλων μοντέλων.

Ένα από τα πιο χρήσιμα κεφάλαια της διδακτέας ύλης του Γυμνασίου στο μάθημα της Γεωμετρίας, που είναι ικανό να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά μέσω επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων είναι αυτό των εμβαδών. Η έννοια του εμβαδού εντοπίζεται πολλές φορές σε καταστάσεις της καθημερινότητας των ανθρώπων είτε αυτοί είναι επαγγελματίες και τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της εργασίας τους, είτε απλά άνθρωποι που θέλουν, για παράδειγμα, να υπολογίσουν την έκταση ενός οικοπέδου ή την επιφάνεια ενός ορόφου του σπιτιού τους. Όσον αφορά στα επαγγέλματα στα οποία η έννοια του εμβαδού αξιοποιείται σε μεγάλο βαθμό, κάποια παραδείγματα είναι αυτό του αρχιτέκτονα, του πολιτικού μηχανικού, του τοπογράφου, όπως και πολλά ακόμα όπου είναι συνήθης ο ακριβής υπολογισμός του εμβαδού επιφανειών απλών αλλά και σύνθετων γεωμετρικών σχημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι συνήθως χρησιμοποιούν κατά την εργασία τους σύγχρονα ψηφιακά προγράμματα στα οποία τα μαθηματικά έχουν κεντρικό ρόλο. Σχετικά με τη διδασκαλία του κεφαλαίου των εμβαδών στους μαθητές είναι πολύ σημαντική η δημιουργία ρεαλιστικών προβλημάτων κατά την επίλυση των οποίων μπορούν να νοηματοδοτήσουν την έννοια του εμβαδού και μάλιστα σε διαφορετικούς χώρους εργασίας, τους οποίους διαμορφώνει κατάλληλα ο καθηγητής/σχεδιαστής της δραστηριότητας. Δεδομένου ότι σε πολλά από τα παραπάνω επαγγέλματα χρησιμοποιούνται κάποια εξελιγμένα ψηφιακά εργαλεία, θα ήταν ιδανική η αξιοποίηση από τον καθηγητή ενός προγράμματος μαθηματικού περιεχομένου που ναι μεν θα εστιάζει στη νοηματοδότηση της έννοιας του εμβαδού αλλά ταυτόχρονα θα δίνει στο μαθητή το ρόλο ενός επαγγελματία που χρησιμοποιεί τα μαθηματικά στην εργασία του. Άλλωστε, η εξέλιξη του κλάδου της ΔτΜ συνοδεύεται τις τελευταίες δεκαετίες από την ανάπτυξη των ψηφιακών τεχνολογιών, με πολλές έρευνες να τονίζουν την αξία τους στη μαθηματική εκπαίδευση. Ένα από τα πιο γνωστά και λειτουργικά ψηφιακά λογισμικά είναι το Geogebra, το οποίο αποτελεί ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας με βασικά πλεονεκτήματα τα εξής:

- Την αξιοποίηση αναπαραστάσεων και συμβόλων τόσο της άλγεβρας όσο και της γεωμετρίας
- Τον ακριβή σχεδιασμό σχημάτων & γραφικών παραστάσεων
- Το δυναμικό χειρισμό αυτών και
- Την εμφάνιση πολλών και διαφορετικών αναπαραστάσεων σε σύντομο χρονικό διάστημα

Όσον αφορά στο δυναμικό χειρισμό, οι Baccaglini-Frank και Mariotti (2010) έχουν τονίσει την αξία του συρσίματος (dragging), δηλαδή της μετακίνησης των στοιχείων ενός σχήματος η οποία έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία εικασιών από τους μαθητές, τις οποίες τελικά πρέπει να επιβεβαιώσουν μέσω κάποιας μαθηματικής απόδειξης.

Ακολουθεί ένα ενδεικτικό πρόβλημα για μαθητές της Β' Γυμνασίου που πραγματεύεται μία ρεαλιστική κατάσταση και για την επίλυση του οποίου αξιοποιείται το Geogebra.

Πρόβλημα

Ένας επιχειρηματίας διαθέτει μία έκταση σχήματος τραπεζίου με βάσεις 1000 και 400 μέτρα και ύψος 400 μέτρα, όπως φαίνεται και στο χάρτη.

Ερώτημα 1

Αφού μεταφέρετε με κατάλληλο τρόπο αυτό το οικόπεδο στο περιβάλλον του Geogebra, προσπαθήστε να βρείτε ένα τρόπο έτσι ώστε να το χωρίσετε σε δύο ισεμβαδικά μέρη, προκειμένου ο επιχειρηματίας να φτιάξει γραφεία στο ένα και στο άλλο να τοποθετήσει πάνελ που θα παράγουν ηλιακή ενέργεια.

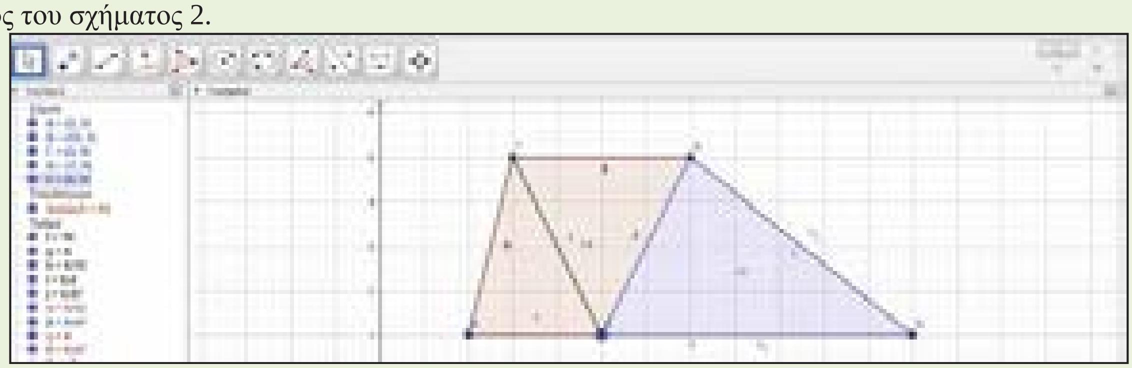
Στόχοι ερωτήματος

- Η εξοικείωση των μαθητών με τα εργαλεία του Geogebra: Κατασκευή ευθυγράμμων τμημάτων, τετραπλεύρων, παράλληλων ευθειών
- Αξιοποίηση της αναλογίας μέσω της μεταφοράς του σχήματος από το χάρτη στο Geogebra
- Πειραματισμός με το δυναμικό χειρισμό του σχήματος και δημιουργία εικασιών
- Αυστηρή μαθηματική απόδειξη μέσω αξιοποίησης των τύπων για τα εμβαδά των βασικών γεωμετρικών σχημάτων.

Ύστερα από την εκμάθηση των βασικών εντολών του Geogebra και τη δημιουργία του τραπεζίου προτείνεται να δοθεί στους μαθητές η εντολή να πάρουν ένα σημείο Ε εντός του σχήματος, ενώνοντάς το με τις κορυφές του τραπεζίου (βλ. Σχήμα 1) και να ξεκινήσουν να το κινούν προκειμένου να δημιουργήσουν δύο ισεμβαδικά χωρία με εμβαδό 28/2=14 τετραγωνικές μονάδες, το κάθε ένα από αυτά.

Σχήμα 1

Το ερώτημα αυτό είναι ανοικτό με αποτέλεσμα τη διερεύνηση εκ μέρους των μαθητών και τη δημιουργία πολλών διαφορετικών διαχωρισμών του τραπεζίου. Ένας πολύ πιθανός διαχωρισμός είναι αυτός του σχήματος 2.



Σχήμα 2

Σε αυτόν, το οικόπεδο χωρίζεται σε ένα μικρότερο τραπέζιο και ένα τρίγωνο, των οποίων οι τιμές αναγράφονται και είναι ίσες. Παρά την προφανή ισότητα των εμβαδών, δημιουργείται η ανάγκη απόδειξης αυτής, την οποία ο καθηγητής οφείλει να ζητήσει από τους μαθητές. Έτσι, θα αξιοποιήσουν τους τύπους για τα εμβαδά από τη θεωρία παρατηρώντας παράλληλα το σχήμα για την εύρεση των τιμών που θα χρειαστούν.

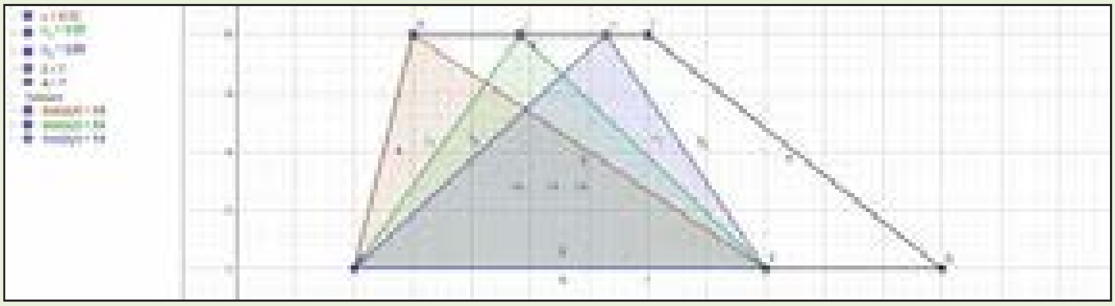
Ερώτημα 2

i) Προσπαθήστε να βρείτε ένα νέο διαχωρισμό από εκείνον του 1^{ου} ερωτήματος για το οικόπεδο

ii) Πόσοι διαφορετικοί διαχωρισμοί πιστεύετε πως υπάρχουν;

Στόχοι ερωτήματος

Ένας βασικός σκοπός του δεύτερου ερωτήματος είναι η εύρεση πολλαπλών λύσεων από τους μαθητές. Η συγκεκριμένη νοητική διεργασία είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους μαθητές γιατί δεν σταματούν να σκέφτονται μόλις βρουν μία απάντηση, αντιθέτως συνεχίζουν να παρατηρούν τα δεδομένα της άσκησης, να αναστοχάζονται και να δημιουργούν νέες ιδέες. Κατά τη διάρκεια εύρεσης περισσότερων λύσεων, ιδιαίτερα σημαντικός είναι και πάλι ο δυναμικός χειρισμός που προσφέρει το Geogebra. Στην προσπάθειά τους να βρουν κάποιο άλλο διαχωρισμό του οικοπέδου σε 14 και 14 τ.μ. οι μαθητές αναμένεται να σύρουν το σημείο Ε αλλά χωρίς να είναι σίγουροι για την ακριβή θέση που πρέπει να έχει και χωρίς να στηρίζονται σε κάποια μαθηματική απόδειξη. Μία πιθανή εικασία που ενδέχεται να προκύψει ύστερα από τον πειραματισμό των μαθητών είναι ότι το τραπέζιο παραμένει χωρισμένο σε δύο ισεμβαδικά χωρία καθώς το σημείο Ε κινείται στη μικρή του βάση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3

Η συγκεκριμένη εικασία απαιτεί και την κατάλληλη μαθηματική απόδειξη η οποία είναι παρόμοια με εκείνη του παράδοξου της ισότητας των εμβαδών δύο τριγώνων των οποίων η περίμετρος είναι διαφορετική και ενδεχομένως να τείνει και στο άπειρο σε ορισμένες περιπτώσεις. Αυτό και άλλα παρόμοια παράδοξα έχουν προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθηματικών από την αρχαιότητα (περίπου 3^{ο} αι. π.Χ.) και εντοπίζονται στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη στις προτάσεις 1.35-1.38 (Νεγρεπόντης & Φαρμάκη, 2019). Στο σχήμα 3 τα χρωματισμένα τρίγωνα έχουν κοινή βάση και την απέναντι κορυφή να κινείται με αποτέλεσμα τα μήκη των δύο πλευρών και η περίμετρος να αλλάζουν. Το ερώτημα 2, λοιπόν, αποτελεί την αφορμή για να αποδείξουν οι μαθητές μέσω του τύπου (β*υ)/2 ότι το εμβαδό ενός τριγώνου διατηρείται σταθερό καθώς παραμένουν σταθερά τα μήκη του ύψους και της βάσης του, παρά την κίνηση της κορυφής που βρίσκεται απέναντι από τη σταθερή βάση. Ως επέκταση του ερωτήματος 2, χάρη στο Geogebra ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα να τροποποιήσει το Σχήμα 3 και να κινεί επ' άπειρον την κορυφή του τριγώνου πάνω σε μία ευθεία παράλληλη της βάσης του τριγώνου και να εξηγήσει το παραπάνω παράδοξο στους μαθητές του, τονίζοντας παράλληλα την ιστορική σημασία του.

Βιβλιογραφία

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15(3), 225-253.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational studies in Mathematics, 54(1), 9-35.

Νεγρεπόντης Σ., Φαρμάκη Β. (2019). ΙΣΤΟΡΙΑ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΘΑΛΗ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ ΜΕΣΩ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ, ΖΗΝΩΝΟΣ, ΠΛΑΤΩΝΟΣ, ΘΕΑΙΤΗΤΟΥ, ΕΥΔΟΞΟΥ ΤΟΜΟΣ Ι. Αθήνα: ΕΚΚΡΕΜΕΣ, 190-201.

Α΄ Τάξη

Εξισώσεις και Προβλήματα

Στυλιανός Μαραγκάκης, Ανδρέας Τριανταφύλλου

Εξισώσεις

Σχετικά με τις εξισώσεις, πρέπει να είναι γνωστά τα παρακάτω:

Εξίσωση με ένα άγνωστο ονομάζεται η ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (μια μεταβλητή).

Στις εξισώσεις **μεταβλητή** ονομάζεται ένα γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου που αντικαθιστά έναν οποιοδήποτε αριθμό.

Άγνωστος ονομάζεται το γράμμα (η μεταβλητή) της εξίσωσης. Συνήθως ο άγνωστος σε μια εξίσωση είναι ο **x**.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που, αν πάρει τη θέση του αγνώστου, δίνει ισότητα που αληθεύει.

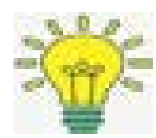
Επίλυση της εξίσωσης λέγεται η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης.

Παραδείγματα

Να διατυπώσετε με μαθηματικές εκφράσεις τις παρακάτω προτάσεις:

1. **Ένας αριθμός αυξημένος κατά 3.**
2. **Ένας αριθμός μειωμένος κατά 2, είναι μεγαλύτερος από τον 5.**
3. **Το μισό ενός αριθμού αυξημένο κατά 8 είναι ίσο με τον αριθμό.**

Λύση



1. $x+3$ **2.** $x-2>5$ **3.** $\frac{1}{2}\cdot x+8=x$

Μέθοδος επίλυσης εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού

- Για να λύσουμε μια εξίσωση που περιέχει πρόσθεση ή αφαίρεση χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: **Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.**
- **Δηλαδή: αν** $\alpha=\beta$, **τότε** $\alpha\pm\gamma=\beta\pm\gamma$
- Για να λύσουμε μια εξίσωση που περιέχει πρόσθεση ή αφαίρεση χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: **Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.**
- **Δηλαδή: αν** $\alpha=\beta$, **τότε** $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ ή $\alpha/\gamma=\beta/\gamma$, αν $\gamma\neq 0$
- Αν μας δίνουν μια ισότητα πηλίκων, **χρησιμοποιούμε τα χιαστί γινόμενα**, δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ με $\beta,\delta\neq 0$, ισχύει $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$.

Παραδείγματα

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $x+5=13$ **2.** $47{,}2+x=82{,}2$ **3.** $x-32=71$ **4.** $\frac{x}{3}=\frac{12}{9}$

Λύση

1. Στην εξίσωση x+5 = 13 για να τη λύσουμε πρέπει να απομονώσουμε στο πρώτο μέλος τον άγνωστο x. Αρκεί να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της τον αριθμό 5.

Οπότε x+5 – 5 = 13 – 5, επομένως x = 9.

2. Στην εξίσωση 47,2+ x = 82,2για να τη λύσουμε πρέπει να απομονώσουμε στο πρώτο μέλος τον άγνωστο x. Αρκεί να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της τον αριθμό 47,2.
Οπότε 47,2+ x – 47,2 = 82,2 – 47,2, επομένως x = 35.

3. Στην εξίσωση x–32 = 71 για να τη λύσουμε πρέπει να απομονώσουμε στο πρώτο μέλος τον άγνωστο x. Αρκεί να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της τον αριθμό 32. Οπότε x–32 + 32 = 71 + 32, επομένως x = 103.

4. Στην εξίσωση $\frac{x}{3}=\frac{12}{9}$ για να τη λύσουμε πρέπει να απομονώσουμε στο πρώτο μέλος τον άγνωστο x. Σύμφωνα με τα χιαστί γινόμενα έχουμε $9\cdot x=12\cdot 3$, δηλαδή $9\cdot x=36$ (1). Επομένως για να απομονώσουμε τον άγνωστο x στο πρώτο μέλος πρέπει να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) με τον αριθμό 9. Οπότε
$\frac{9\cdot x}{9}=\frac{36}{9}$. Άρα $x=\frac{36}{9}$, επομένως $x=4$.

Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α. $3\cdot(x+2)=10$ **Β.** $5\cdot(x+2)+2\cdot(3+x)=25$

Λύση

Α. Έχουμε $3\cdot(x+2)=10$,
οπότε $3x+3\cdot 2=10$
δηλαδή $3x+6=10$
επομένως $3x+6-6=10-6$
άρα $3x=10-6$
$3x=4$
$\frac{3x}{3}=\frac{4}{3}$ δηλαδή $x=\frac{4}{3}$

Β. Έχουμε $5\cdot(x+2)+2\cdot(3+x)=25$,
οπότε $5x+5\cdot 2+2\cdot 3+2x=25$
δηλαδή $5x+10+6+2x=25$ επομένως
$7x+16=25$
$7x+16-16=25-16$
άρα $7x=25-16$
$7x=9$
$\frac{7x}{7}=\frac{9}{7}$ δηλαδή $x=\frac{9}{7}$

Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α. $\frac{x+2}{2}=\frac{10}{6}$ **Β.** $\frac{3\cdot(1+x)}{7}=\frac{1}{2}$

Λύση

Α. Έχουμε $\frac{x+2}{2}=\frac{10}{6}$. Σύμφωνα με τα χιαστί γινόμενα έχουμε $6\cdot(x+2)=10\cdot 2$
οπότε $6x+6\cdot 2=20$
δηλαδή $6x+12=20$
επομένως $6x+12-12=20-12$
άρα $6x=20-12$
$6x=8$
$\frac{6x}{6}=\frac{8}{6}$ δηλαδή $x=\frac{8}{6}$ ή $x=\frac{4}{3}$

Β. Έχουμε $\frac{3\cdot(1+x)}{7}=\frac{1}{2}$, σύμφωνα με τα χιαστί γινόμενα έχουμε $2\cdot 3\cdot(1+x)=7\cdot 1$
οπότε $6\cdot(1+x)=7\cdot 1$
δηλαδή $6\cdot 1+6x=7$ επομένως
$6x+6-6=7-6$
άρα $6x=7-6$
$6x=1$
$\frac{6x}{6}=\frac{1}{6}$ δηλαδή $x=\frac{1}{6}$

Αν $\frac{x+5}{x}+\frac{y+6}{3y}=5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $X=\frac{5}{x}+\frac{2}{y}$

Λύση

Στην $\frac{x+5}{x}+\frac{y+6}{3y}=5$ (1), πρέπει να εκτελέσουμε τις πράξεις προσπαθώντας να εμφανίσουμε την παράσταση $\frac{5}{x}+\frac{2}{y}$

Από (1) έχουμε $\frac{x}{x}+\frac{5}{x}+\frac{y}{3y}+\frac{6}{3y}=5$ δηλαδή $1+\frac{5}{x}+\frac{1}{3}+\frac{6}{3y}=5$ ή $\frac{5}{x}+\frac{6}{3y}+1+\frac{1}{3}=5$

Οπότε απλοποιώντας το κλάσμα $\frac{6}{3y}$ έχουμε $\frac{5}{x}+\frac{2}{y}+1+\frac{1}{3}=5$ (2) και αφού $X=\frac{5}{x}+\frac{2}{y}$ η (2) γίνεται $X+1+\frac{1}{3}=5$. Επομένως $X+\frac{4}{3}=5$ ή $X+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=5-\frac{4}{3}$ ή $X=5-\frac{4}{3}$. Άρα $X=\frac{11}{3}$

Προβλήματα

Για τη λύση ενός προβλήματος με τη βοήθεια εξίσωσης, κάνουμε τα παρακάτω:

- Το διαβάζουμε καλά ώστε να μπορούμε να διακρίνουμε τα δεδομένα από τα ζητούμενα
- Προσδιορίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το συμβολίζουμε με ένα γράμμα π.χ. x, y, ω, ζ κλπ.
- Εκφράζουμε τα στοιχεία του προβλήματος με τη βοήθεια του αγνώστου, δηλαδή σχηματίζουμε όλες τις σχέσεις που πρέπει να ισχύουν για δεδομένα και τον άγνωστο του προβλήματος.
- Περιγράφουμε με μια εξίσωση το πρόβλημα
- Επιλύουμε την εξίσωση και επαληθεύουμε τη λύση που βρήκαμε

Η έκφραση «**μεγαλύτερο από**» συμβολίζεται με το (>), ενώ η έκφραση «**μικρότερο από**» συμβολίζεται με το (<).

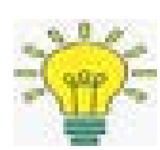
Με την έκφραση «**…-πλάσιο**» δηλώνουμε το γινόμενο του αριθμού που βρίσκεται πριν από το -πλάσιο με τη μεταβλητή π.χ. τριπλάσιο βάρος από ένα σακί είναι 3x, αν x είναι το βάρος του σακιού.

Με τις εκφράσεις «**ελαττώνουμε κατά**» ή «**μειώνουμε κατά**» ή «**αφαιρούμε**» ή «**μικρότερος κατά**» δηλώνουμε το μείον (-).

Με τις εκφράσεις «**αυξάνουμε κατά**» ή «**μεγαλύτερος κατά**» ή «**προσθέτουμε**» δηλώνουμε το μείον (+).

Με τις εκφράσεις «**είναι ίσο**» ή «**δίνει**» ή «**είναι**» ή «**βρίσκουμε**» ή «**ισούται με**» δηλώνουμε το ίσον (=).

❖ Δεν λύνονται όλα τα προβλήματα με εξίσωση.



❖ Όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα της καθημερινής ζωής, πρέπει να σκεφτόμαστε προσεκτικά και να χρησιμοποιούμε με έξυπνο τρόπο προγενέστερες γνώσεις μας

❖ Δεν ξεχνάμε ότι η επίλυση ή μη ενός προβλήματος με εξισώσεις, εξαρτάτε κατά κύριο λόγο από τη σωστή επιλογή του αγνώστου και την δημιουργία της σωστής εξίσωσης.

Παραδείγματα

Να βρείτε έναν αριθμό του οποίου το τριπλάσιο μειωμένο κατά 6 είναι $\frac{3}{2}$

Λύση

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός, οπότε το τριπλάσιό του είναι 3x.

Έτσι έχουμε $3x-6=\frac{3}{2}$ ή $3x=\frac{3}{2}+6$ ή $3x=\frac{3}{2}+\frac{12}{2}$ ή $3x=\frac{15}{2}$ και τελικά $x=\frac{15}{2\cdot 3}$, δηλαδή $x=\frac{15}{6}$. Οπότε $x=\frac{3\cdot 5}{3\cdot 2}$, άρα $x=\frac{5}{2}$.

Επαλήθευση: Το τριπλάσιό του $\frac{5}{2}$ είναι $3\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$. Έτσι $\frac{15}{2}-6=\frac{15}{2}-\frac{12}{2}=\frac{3}{2}$

Ανοίγουμε στην τύχη ένα βιβλίο και το άθροισμα των αριθμών των δύο αντικριστών σελίδων είναι 483. Να βρείτε σε ποιες σελίδες ανοίξαμε το βιβλίο.

Λύση

Οι αριθμοί δύο αντικριστών σελίδων ενός βιβλίου είναι διαδοχικοί αριθμοί. Δηλαδή αν ο ένας είναι ν, ο άλλος είναι ν+1.

Έτσι σχηματίζουμε την εξίσωση $\nu+(\nu+1)=483$ ή $\nu+\nu+1=483$ ή $2\nu+1=483$ ή $2\nu+1-1=483-1$ ή $2\nu=482$ ή $\frac{2\nu}{2}=\frac{482}{2}$ ή $\nu=241$ επομένως το βιβλίο το ανοίξαμε στις σελίδες 241 και 242.

Επαλήθευση: 241 + 242 = 483.

Ένας υπάλληλος παίρνει αύξηση στο μισθό του κατά το $\frac{1}{8}$ του μισθού του και ο μισθός του γίνεται 1.152€. Ποιος ήταν ο μισθός του πριν την αύξηση;

Λύση

Έστω x€ ο μισθός του υπαλλήλου πριν από την αύξηση. Τότε η αύξηση που έλαβε είναι $\frac{1}{8}x$.Επομένως έχουμε $x+\frac{1}{8}x=1.152$ ή $\frac{8x}{8}+\frac{x}{8}=\frac{1.152\cdot 8}{8}$ ή $\frac{8x+x}{8}=\frac{9.216}{8}$ ή $\frac{9x}{8}=\frac{9.216}{8}$.

Επειδή έχουμε ίσα κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή, πρέπει $9x=9.216$ ή $\frac{9x}{9}=\frac{9.216}{9}$ ή $x=\frac{9.216}{9}$ ή $x=1.024$€.

Επαλήθευση: $1.024+\frac{1}{8}1.024=1.024+128=1.152$€.

Πέντε διαδοχικοί αριθμοί, έχουν άθροισμα 385. Να βρεθεί ο μεσαίος από αυτούς

Λύση

Έστω x ο μικρότερος από αυτούς. Τότε οι άλλοι τέσσερεις είναι οι x+1, x+2, x+3 και x+4. Οπότε έχουμε $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=385$ ή $5x+10=385$ ή $5x+10-10=385-10$ ή $5x=385-10$ ή $5x=375$. Οπότε $\frac{5x}{5}=\frac{375}{5}$ ή $x=\frac{375}{5}$ ή $x=75$. Ο μεσαίος κατά σειρά αριθμός είναι ο x+2, επομένως είναι ο 75+2=77.

Επαλήθευση: $75+76+77+78+79=385$.

Ένας τεχνίτης με τον βοηθό του αναλαμβάνει ένα έργο. Το ημερομίσθιο του βοηθού είναι 60€, ενώ του τεχνίτη 90€. Το συνολικό ποσό που πήραν ως αμοιβή είναι 1.980€. Αν ο τεχνίτης εργάστηκε 12 ημέρες, πόσες ημέρες εργάστηκε ο βοηθός;

Λύση

Έστω x οι ημέρες που εργάστηκε ο βοηθός, τότε τα χρήματα που του αντιστοιχούν είναι 60x€. Τα χρήματα που αντιστοιχούν στον τεχνίτη είναι $12\cdot 90€ = 1.080€$. Οπότε $60x + 1.080 = 1.980$ ή $60x + 1.080 - 1.080 = 1.980 - 1.080$ ή $60x = 1.980 - 1.080$ ή $60x = 900$ ή $\frac{60x}{60} = \frac{900}{60}$ ή $x = \frac{900}{60}$ ή $x = 15$ ημέρες.

Επαλήθευση: $60\cdot 15x + 1.080 = 900 + 1.080 = 1.980€$

Εξισώσεις και Προβλήματα προς λύση

- Να λυθούν οι εξισώσεις

Α) $x + 5 = 18$ **Β)** $3\cdot(x+5) - 6 = 18$ **Γ)** $35x + 2\cdot(3x-1) = 100$

Δ) $\frac{1}{4} + \frac{x+5}{8} = 3$ **Ε)** $\frac{x}{4} - \frac{x}{6} = 2$ **ΣΤ)** $\frac{2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}}{3} = \frac{\frac{5}{2}}{x}$

- Να λυθούν με τη βοήθεια εξισώσεων τα προβλήματα

1. Τρεις φίλοι Α, Β και Γ έχουν συνολικά 28€. Αν ο Α έχει τετραπλάσια χρήματα από τον Β και ο Γ διπλάσια χρήματα από τον Β, να βρείτε πόσα χρήματα έχει ο Γ.

2. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 19εκ. και η βάση του 7εκ.. Να βρείτε τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

3. Το τριπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 16 μας δίνει 305. Ποιος είναι ο αριθμός;

4. Να βρείτε δύο αριθμούς που ο μεγαλύτερος από αυτούς είναι το πενταπλάσιο του μικρότερου μειωμένου κατά τρία και το άθροισμα του ενός έκτου του μικρότερου με τον μεγαλύτερο είναι ίσο με 90.

5. Μια θεατρική παράσταση παρακολούθησαν 919 γονείς και παιδιά. Το εισιτήριο για τους γονείς κοστίζει 20€, ενώ για τα παιδιά κοστίζει 8€ λιγότερο. Οι συνολικές εισπράξεις ήταν 16.828€. Πόσοι ήταν οι γονείς και πόσα τα παιδιά;

6. Να βρείτε τον φυσικό αριθμό x, ώστε $\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2021\cdot 1022}\right)\cdot x = 5\left(3^2\cdot 5^2 - 23\right)$, αξιοποιώντας τις παρακάτω ισότητες

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2021\cdot 1022} = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}$$

7. Σε ένα παιχνίδι πρέπει να απαντήσουμε 50 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση παίρνουμε 5 πόντους, και για κάθε λανθασμένη απάντηση 2 πόντους. Αν τελικά συγκεντρώσαμε 205 πόντους, πόσες ήταν οι σωστές απαντήσεις που δώσαμε;

Β΄ Τάξη

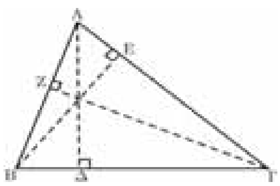
Εμβαδά Ευθυγράμμων Σχημάτων

Γιώργος Τσαπακίδης

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της Γεωμετρίας είναι η μέτρηση των σχημάτων, δηλαδή ο υπολογισμός των: • μηκών γραμμών, • εμβαδών επιφανειών, • όγκων στερεών.

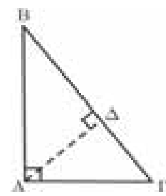
• Σ' αυτό το άρθρο θα υπολογίσουμε εμβαδά ευθύγραμμων σχημάτων, με τους απλούς τύπους εμβαδών:

Τριγώνου



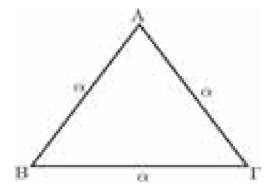
$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΒΕ = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΓΖ$$

Ορθογωνίου Τριγώνου



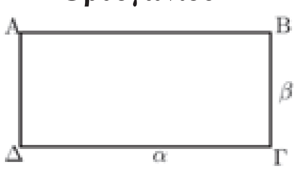
$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ$$

Ισόπλευρου Τριγώνου



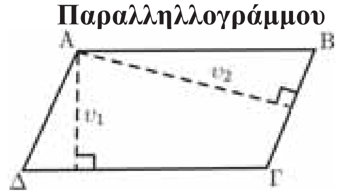
$$(ΑΒΓ) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ορθογωνίου



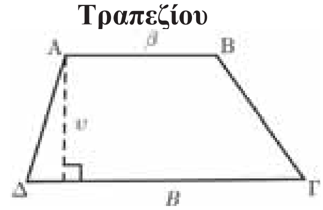
$$(ΑΒΓΔ) = a \cdot β$$

Παραλληλογράμμου



$$(ΑΒΓΔ) = ΔΓ \cdot υ_1 = ΒΓ \cdot υ_2$$

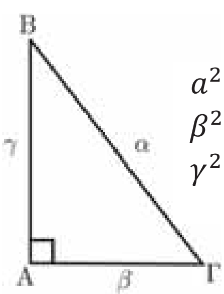
Τραπεζίου



$$(ΑΒΓΔ) = \frac{Β + β}{2} \cdot υ$$

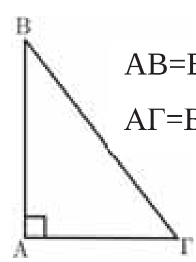
Όλοι οι προηγούμενοι τύποι ανάγονται σε υπολογισμούς μηκών ευθύγραμμων τμημάτων, ο υπολογισμός των οποίων γίνεται με:

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα



$$a^2 = β^2 + γ^2$$
$$β^2 = a^2 - γ^2$$
$$γ^2 = a^2 - β^2$$

Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών ορθογωνίου τριγώνου



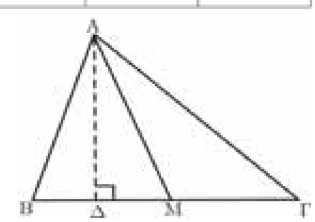
ΑΒ=ΒΓημΓ

ΑΓ=ΒΓσυνΓ

Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς βασικών γωνιών

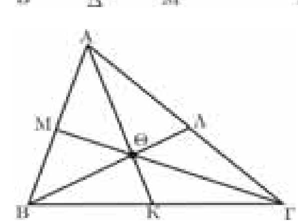
	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

• Στα προβλήματα εμβαδών, που εμφανίζονται μέσα ευθύγραμμων τμημάτων είναι πολύ πιθανόν να χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις:



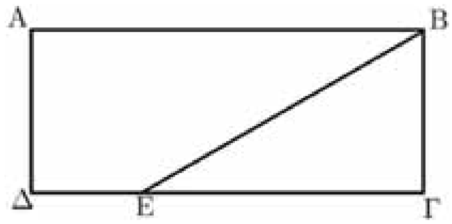
1. Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΓΜ έχουν ίσες βάσεις (ΒΜ=ΜΓ) και το ίδιο ύψος ΑΔ. Άρα ίσα εμβαδά.

2. Οι τρεις διάμεσοι κάθε τριγώνου το χωρίζουν σε έξι τρίγωνα με ίσα εμβαδά, αφού (ΑΒΚ)=(ΑΓΚ) (1) και (ΘΒΚ)=(ΘΓΚ) (2). Όπως επίσης (ΘΑΜ)=(ΘΒΜ) (3), (4) και (ΘΑΛ)=(ΘΓΛ) (5),(6) δηλαδή (ΘΑΜ)=(ΘΜΒ)=(ΘΚΒ)=(ΘΚΓ)=(ΘΓΛ)=(ΘΛΑ)= $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).



<table>
<tr><th>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</th><th>ΛΥΣΕΙΣ</th></tr>
<tr><td>

1.



Δεδομένα: ΑΒΓΔ ορθογώνιο

ΓΕ = $\frac{3}{5}$ ΓΔ

(ΒΓΕ) = 15

Ζητούμενο: (ΑΒΓΔ)

</td><td>

Έστω ΑΒ=ΓΔ=α και ΑΔ=ΒΓ=β.

ΓΕ = $\frac{3}{5}$ ΓΔ = $\frac{3}{5}$ α.

15=(ΒΓΕ)= $\frac{1}{2}$ ΓΕ · ΒΓ = $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ α·β, άρα

α·β=50.

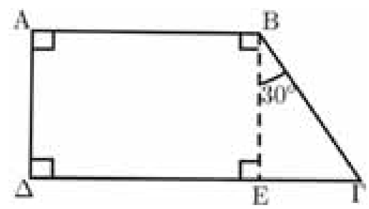
(ΑΒΓΔ)=αβ=50 τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.)

</td></tr>
<tr><td>

2. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι: $A = Δ = 90°$,

ΑΒ=ΒΓ=12 και $ΑΒΓ = 120°$. Ποιο είναι το εμβαδόν του;

</td><td>



Πρέπει να υπολογίσουμε το μήκος της βάσης ΓΔ. και του ύψους ΑΔ. Φέρνουμε ΒΕ ⊥ ΓΔ και έχουμε:

ΔΕ=ΑΒ=12, $ΕΒΓ = 120° - 90° = 30°$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ είναι:

ΕΓ=ΒΓημ30°=12 $\cdot \frac{1}{2} = 6$ και

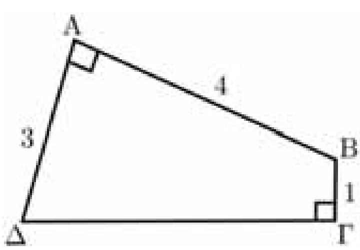
ΒΕ=ΒΓσυν30°=12 $\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, έτσι ΓΔ=$12 + 6 = 18$,

$ΑΔ = 6\sqrt{3}$.

$(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2} \cdot ΑΔ = \frac{12+18}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$ τ.μ.

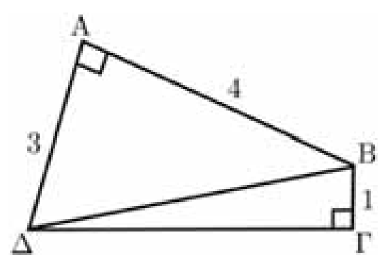
</td></tr>
<tr><td>

3.



Ποιο είναι το εμβαδόν του τετρά-πλευρου;

</td><td>



Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ:

$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, άρα ΒΔ=5.

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ:

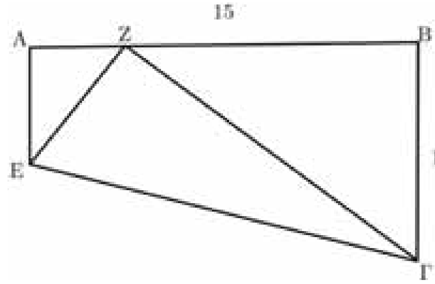
$ΔΓ^2 = ΒΔ^2 - ΒΓ^2 = 5^2 - 1^2 = 24$, άρα $ΔΓ = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$.

(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΓΒΔ) = $\frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΔ + \frac{1}{2} ΓΒ \cdot ΓΔ$

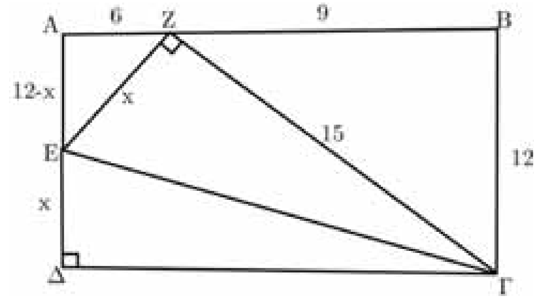
$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{6} = 6 + \sqrt{6}$ τ.μ.

</td></tr>
</table>

4.

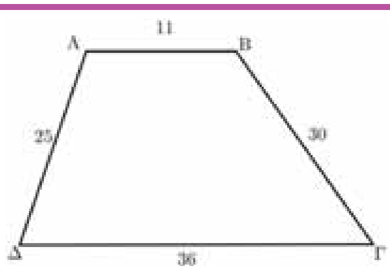


Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις 15Χ12. Διπλώνουμε τη μία κορυφή του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποιο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΖΕΓ;

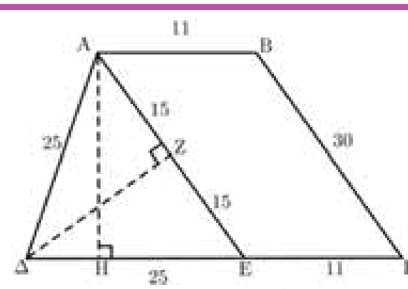


Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΓ έχουμε:
$BZ^2 = 15^2 - 12^2 = 81$, άρα ΒΖ = 9, έτσι ΑΖ=15–9=6.
Αν θέσουμε ΔΕ=ΕΖ=x τότε ΑΕ=12–x. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ έχουμε, διαδοχικά:
$EZ^2 = AE^2 + AZ^2, x^2 = (12-x)^2 + 6^2$, $x^2 = 144 - 24x + x^2 + 36, x = \frac{180}{24} = 7{,}5$ έτσι
$(ZE\Gamma) = \frac{1}{2} ZE \cdot Z\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 15 = 56{,}25$ τ.μ.

5.

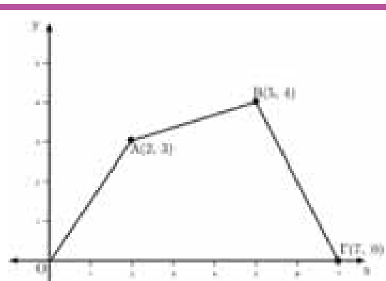


Ποιο είναι το εμβαδόν του παραπάνω τραπεζίου;

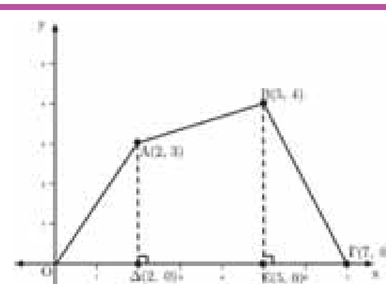


Φέρνουμε ΑΕ//ΒΓ, οπότε σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΕ, άρα ΕΓ=ΑΒ και ΑΕ=ΒΓ=30, έτσι ΔΕ=36–11=25. Είναι ΔΑ=25=ΔΕ, άρα το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές και αν φέρουμε τη ΔΖ ⊥ ΑΕ, το Ζ είναι μέσο του ΑΕ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΖ έχουμε: $\Delta Z^2 = 25^2 - 15^2 = 400$, έτσι ΔΖ=20. Αν ΑΗ⊥ΔΕ, έχουμε:
$(\Delta AE) = \frac{1}{2} AE \cdot \Delta Z = \frac{1}{2} \Delta E \cdot AH$, άρα $30 \cdot 20 = 25 \cdot AH$, οπότε ΑΗ=24.
$(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2} \cdot AH = \frac{11+36}{2} \cdot 24 = 564$ τ.μ.

6.



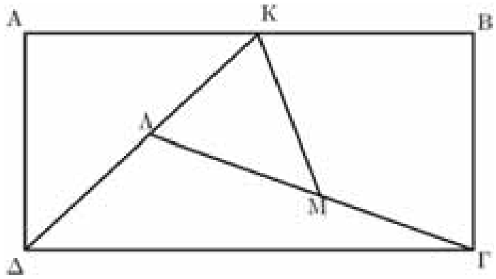
Ποιο είναι το εμβαδόν του τετράπλευρου ΟΑΒΓ;0



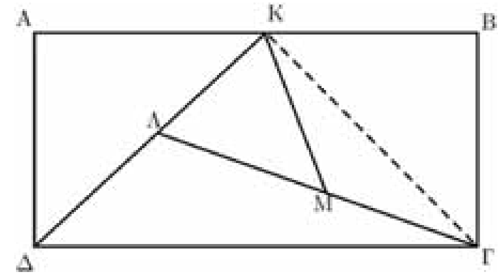
Αν ΑΔ και ΒΕ κάθετες στον άξονα Οx τότε Δ(2, 0) και Ε(5, 0) . Είναι:
(ΟΑΒΓ)=(ΟΑΔ)+(ΑΔΕΒ)+(ΒΕΓ)

$$= \frac{1}{2} O\Delta \cdot \Delta A + \frac{A\Delta + BE}{2} \cdot \Delta E + \frac{1}{2} E\Gamma \cdot BE$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + \frac{3+4}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4$$
$$= \frac{6+21+8}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5 \text{τ.μ.}$$

7.

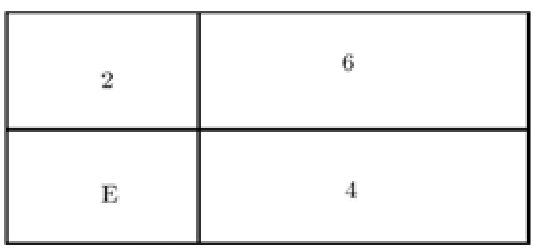


Το ορθογώνιο έχει εμβαδόν 8 τ.μ. . Κ είναι το μέσο του ΑΒ, το Λ το μέσο του ΔΚ και το Μ είναι το μέσο του ΓΛ. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ;

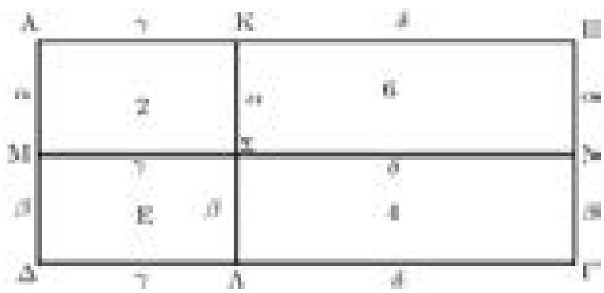


Έστω ΑΒ=α και ΑΔ=β, έτσι (ΑΒΓΔ)=αβ, άρα 8=αβ (1). (ΓΚΔ)= $\frac{1}{2}$ΔΓ·ΑΔ= $\frac{1}{2}$αβ = $\frac{1}{2}$ ·8 = 4. Το ΓΛ είναι διάμεσος του τριγώνου ΓΚΔ, άρα (ΓΚΛ)= $\frac{1}{2}$(ΓΚΔ)= $\frac{1}{2}$ ·4=2. Το ΚΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΓ, άρα (ΚΛΜ) = $\frac{1}{2}$ (ΚΛΓ)=$\frac{1}{2}$ · 2=1 τ.μ.

8.



Οι αριθμοί και το Ε αντιστοιχούν στα εμβαδά των ορθογωνίων στα οποία βρίσκονται. Ε=;

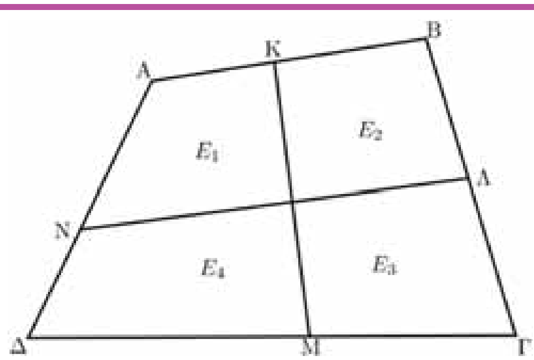


Θέτουμε ΑΜ=ΚΣ=ΒΝ=α, ΜΔ=ΣΛ=ΝΓ=β,
ΑΚ=ΜΣ=ΔΛ=γ,
ΚΒ=ΣΝ=ΛΓ=δ και έχουμε:

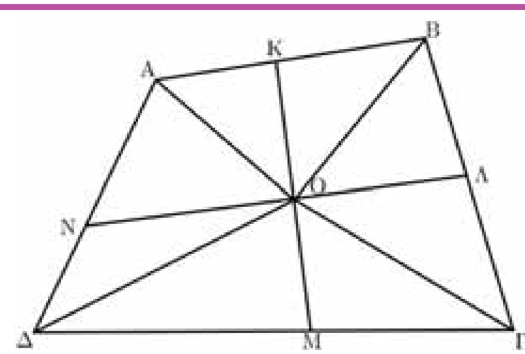
αγ=2 (1), αδ=6 (2), βδ=4 (3)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (3) και έχουμε διαδοχικά: αβγδ=8, οπότε 6βγ=8 (από τη (2)),
βγ= $\frac{4}{3}$,
Ε= $\frac{4}{3}$ τ.μ.

9.

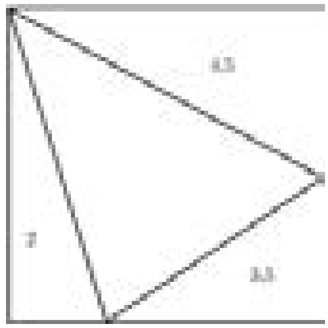


Τα Κ, Λ, Μ και Ν είναι μέσα των πλευρών του τετράπλευρου ΑΒΓΔ και $E1, E_2, E_3$ και E_4 τα εμβαδά των αντίστοιχων τετράπλευρων. Δείξτε ότι $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$.

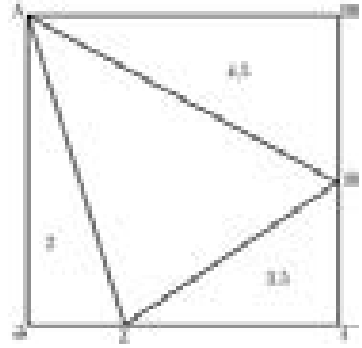


Έστω Ο το σημείο τομής των ΚΜ και ΛΝ. Το ΟΚ είναι διάμεσος του τριγώνου ΟΑΘ, άρα (ΟΚΑ)=(ΟΚΒ) (1). Όμοια, (ΟΛΓ)=(ΟΛΒ) (2), (ΟΜΓ)=(ΟΜΔ) (3), (ΟΝΑ)=(ΟΝΔ) (4). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3) και (4) έχουμε:
(ΟΚΑΝ)+(ΟΛΓΜ)=(ΟΚΒΛ)+(ΟΜΔΝ), άρα$E_1 + E_3 = E_2 + E_4$.

10.

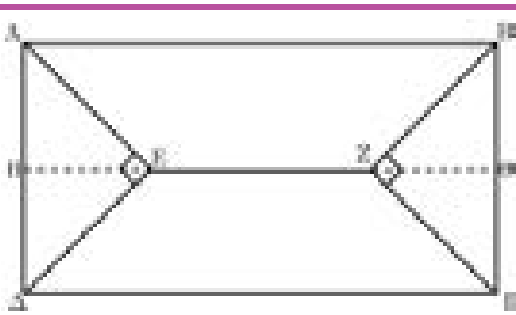


Οι αριθμοί δηλώνουν τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων. Αν το τετράπλευρο είναι τετράγωνο, ποιο είναι το εμβαδόν του;



Αν x είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε (ΑΔΖ)= $\frac{1}{2}$ ΑΔ $\cdot$ ΔΖ , $2 = \frac{1}{2}x \cdot \Delta Z, \Delta Z = \frac{4}{x}$, άρα ΖΓ=ΔΓ–ΖΓ=$x - \frac{4}{x} = \frac{x^2-4}{x}$.
(ΑΒΕ)= $\frac{1}{2}$ ΑΒ$\cdot$ ΒΕ, $4{,}5 = \frac{1}{2}x \cdot BE, BE = \frac{9}{x}$, άρα ΓΕ=ΓΒ–ΒΕ=$x - \frac{9}{x} = \frac{x^2-9}{x}$. Είναι: (ΓΕΖ)=3,5 , $\frac{1}{2}$ ΓΕ $\cdot$ ΓΖ=3,5 , $\frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x^2-9}{x} = 7$, $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$, $(x^2)^2 - 20x^2 + 36 = 0$. Τότε $x^2 = \frac{20 \pm 16}{2} \Leftrightarrow x^2 = 18$ ή $x^2 = 2 \Leftrightarrow$ Εμβαδόν τετραγώνου =18 ή Εμβαδόν τετραγώνου=2, απορρίπτεται γιατί το τετράγωνο έχει εμβαδόν >2+3,5+4,5=10.

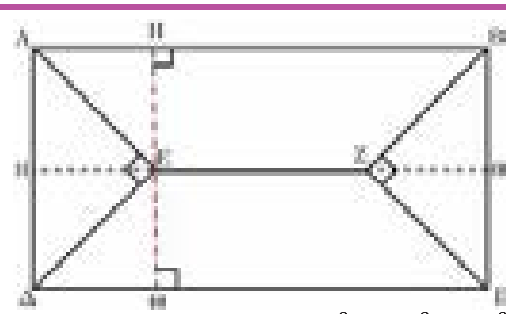
11.



Δεδομένα: ΑΒΓΔ ορθογώνιο.
ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ=ΖΓ=ΕΔ=1

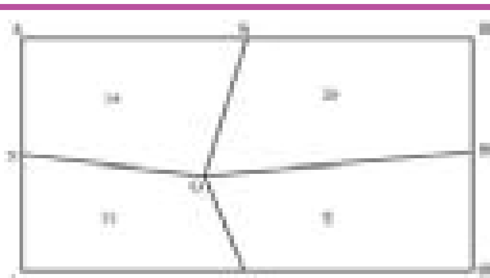
$A E \Delta = B Z \Gamma = 90°$

Ζητούμενο: Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

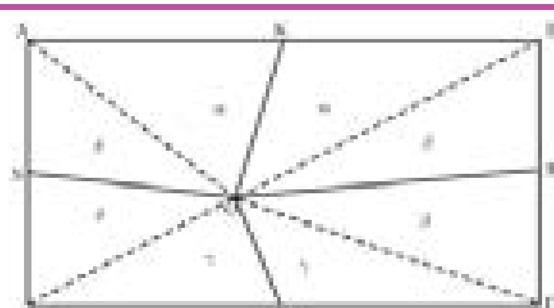


Από το ορθογώνιο ΕΑΔ έχουμε $A\Delta^2 = AE^2 + \Delta E^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, άρα ΑΔ= $\sqrt{2}$. Είναι ΕΑ=ΕΔ, άρα $E A \Delta = E \Delta A = 45°$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΕ έχουμε ΕΗ=ΑΕημ45°=$1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Όμοια, ΖΘ= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα ΑΒ=ΗΕ+ΕΖ+ΖΘ=$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$
(ΑΒΓΔ)=ΑΔ$\cdot$ ΑΒ= $\sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + 2$ τ.μ. .

12.

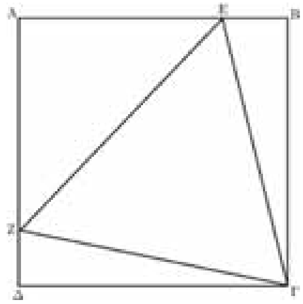


Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του και οι αριθμοί και το Ε τα εμβαδά των αντίστοιχων τετράπλευρων. Ε=;



Το ΟΚ είναι διάμεσος του τριγώνου ΟΑΒ, άρα (ΟΑΚ)=(ΟΒΚ)=α, όμοια: (ΟΒΛ)=(ΟΓΛ)=β, (ΟΓΜ)=(ΟΔΜ)=γ, (ΟΑΝ)=(ΟΔΝ)=δ. Είναι α+β=20, α+δ=18, γ+δ=15, άρα Ε=β+γ=(α+β)+(γ+δ)-(α+δ)=20+15-18=17 τ.μ.

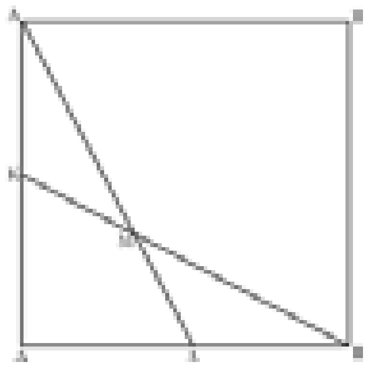
13.



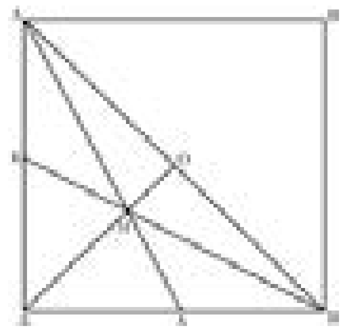
Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α. Ποιο είναι το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΓΕΖ;

Αν β η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου, τότε από τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΒΕ και ΓΔΖ έχουμε: $BE^2 = ΓE^2 - BΓ^2 = β^2 - α^2 (1)$ $ΔZ^2 = ΓZ^2 - ΔΓ^2 = β^2 - α^2$. Άρα ΒΕ=ΔΖ=x, οπότε η (1) γίνεται: $x^2 = β^2 - α^2$ (2) και ΑΕ=ΑΖ=α-x. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΖ έχουμε διαδοχικά $AE^2 + AZ^2 = EZ^2$, $2(α - x)^2 = β^2$, $2α^2 - 4αx + 2x^2 = x^2 + α^2$ (από την (2)) $x^2 - 4αx + α^2 = 0$, $x = \frac{4α\pm\sqrt{12α^2}}{2} = \frac{4α\pm 2α\sqrt{3}}{2} = (2\pm\sqrt{3})α$. Η λύση $x = (2+\sqrt{3})α > α$ απορρίπτεται, άρα $x = (2-\sqrt{3})α$, έτσι $β^2 = α^2 + x^2$ (από την (2)) $= α^2 + (2-\sqrt{3})^2α^2 = 4(2-\sqrt{3})α^2$. Άρα, $(ΑΒΓ) = \frac{β^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4(2-\sqrt{3})α^2\sqrt{3}}{4} = (2\sqrt{3}-3)α^2$.

14.

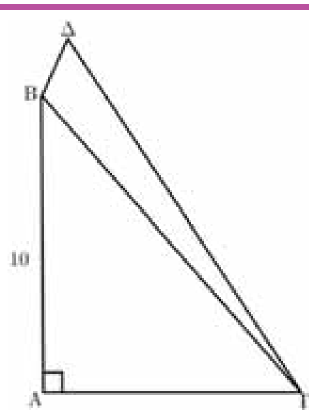


Η πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι α, τα Κ, Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΔ, ΔΓ. Αν οι ΑΛ, ΓΚ τέμνονται στο Μ, τότε ποιο είναι το εμβαδόν του ΒΑΜΓ;

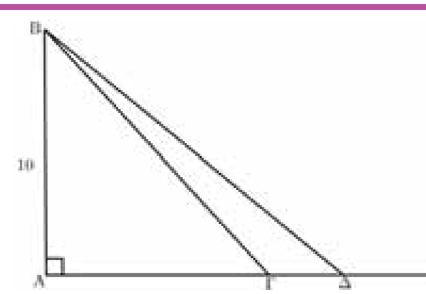


Στο τρίγωνο ΑΔΓ τα ΑΛ και ΓΚ είναι διάμεσοι και το Μ το κ.β. του, έτσι το ΔΜΟ είναι η τρίτη διάμεσος του ΑΔΓ, γι' αυτό (ΜΑΚ)=(ΜΚΔ)=(ΜΔΛ)=(ΜΛΓ)=(ΜΓΟ)=(ΜΟΑ)=
$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}αα = \frac{1}{2}α^2$.
(ΑΜΓΔ)=(ΑΜΓ)+(ΑΒΓ)=$2\cdot\frac{1}{12}α^2 + \frac{1}{2}α^2 = \frac{4}{6}α^2 = \frac{2}{3}α^2$.

15.



Στο παραπάνω σχήμα είναι: $A = 90°$, ΑΒ=10, $ΑΒΓ = 40°, ΒΔΓ = 45°$ και $ΒΓΔ = 5°$. Ποιο είναι το εμβαδόν του ΑΒΔΓ;



Είναι $ΓΒΔ = 180° - 45° - 5° = 130°$ και $ΒΓΑ = 180° - 90° - 40° = 50°$, έτσι $ΓΒΔ + ΒΓΑ = 180°$. Μπορούμε να τοποθετήσουμε το ΒΓΔ έτσι, ώστε το ΒΔ να βρεθεί στην προέκταση του ΑΓ (δηλαδή αντιστρέφουμε το ΒΔΓ ώστε η ΒΓ να γίνει η ΓΒ), όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε $ΑΒΔ = 40° + 5° = 45° = Δ$, οπότε το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΒ=10 και το εμβαδόν που ζητάμε θα είναι $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10 = 50$ τ.μ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

1. D.C. Alexander, G.M. Koeberlein, Elementary Geometry, Brooks/Cole, USA, 2007.
2. S.R. Clemens κ.α. Geometry, Addison-Welsey Publishing Company, USA, 1982.
3. H. R. Jacobs, Geometry, W.H. Free and Company USA, 1974.
4. Μ. Λάμπρου, Καγκουρό, Τόμος 14, Ηράκλειο.
5. S. Lang -G. Murrow, Geometry, Springer-Verlog, New York, 1998.
6. D. Rayner, General Mathematics: Revision and Practice, Oxford University Press, Great Britain, 1988.
7. Περιοδικό Quantum, τεύχος 44, Κάτοπτρο, Αθήνα.
8. Περιοδικό Φ, τεύχος Β, Βισκαδουράκης, Αθήνα.

B΄ Τάξη

Συνεργατική διδασκαλία γραφικών παραστάσεων περιγραφικής στατιστικής με χρήση λογισμικού υπολογιστικών φύλλων

Επιμέλεια: **Χρήστος Ζιώγας** – Μαθηματικός MSc

Περιγραφή

Πρόκειται για **συνδιδασκαλία των καθηγητών Μαθηματικών και Πληροφορικής** με απώτερο στόχο τη δημιουργία και παράλληλα την κατανόηση των διαγραμμάτων (ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα, κ.ά.) ή γραφικών παραστάσεων ή γραφημάτων. **Διασυνδέονται δυο γνωστικές περιοχές**, **τα μαθηματικά** (γραφικές παραστάσεις στατιστικής – ενότητα 4.2 του σχολικού βιβλίου) και η **πληροφορική** (παρουσίαση των δεδομένων με γραφικό τρόπο – ενότητα 9.1 του σχολικού βιβλίου) **στη Β' Γυμνασίου**. Ο βασικός σκοπός είναι διττός: η απομυθοποίηση των Μαθηματικών ως επιστήμη μηχανιστική, αφηρημένη και δύσκολη αλλά και η ανάδειξη της αμφίδρομης «επικοινωνίας» των δυο επιστημών. **Αποτελεί μια καινοτομία** στη διδακτική πρακτι-κή των εκπαιδευτικών.

Διαρκεί δυο διδακτικές ώρες. Πραγματοποιείται στο εργαστήριο πληροφορικής. Συμμετέχει ένα τμήμα της Β' τάξης. **Οι μαθητές εργάζονται κυρίως ομαδικά**, χωρισμένοι σε ομάδες των δυο ή τριών ατόμων έτσι ώστε κάθε ομάδα να διαθέτει Η/Υ. Στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές είναι εγκατεστημένο λογισμικό υπολογιστικών φύλλων (π.χ. Microsoft Excel), η διδασκαλία του οποίου προβλέπεται στο αναλυτικό πρόγραμμα του μαθήματος της Πληροφορικής Β' Γυμνασίου. Παράλληλα γίνεται χρήση του πίνακα του εργαστηρίου για τη διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. υπολογισμός επίκεντρων γωνιών κυκλικού δια-γράμματος, εξαγωγή στατιστικών συμπερασμάτων με τη βοήθεια ποσοστών, κ.ά.).

Διδακτικοί στόχοι

- Δημιουργία γραφημάτων χρησιμοποιώντας δεδομένα ενός υπολογιστικού φύλλου. Μετατροπή ενός γραφήματος με τα ίδια δεδομένα σε άλλο.
- Κατανόηση του σχεδιασμού και της χρησιμότητας των διαγραμμάτων.
- Δυνατότητα ανάκτησης πληροφοριών από την παρατήρηση γραφημάτων.
- Πρόκληση ενδιαφέροντος των μαθητών ως προς τα Μαθηματικά, την Πληρο-φορική, το συνδυασμού των δύο επιστημών, μέσω της διερευνητικής προσέγγισης.

Φάσεις υλοποίησης της συνδιδασκαλίας

❖ **1η φάση** (χρονική διάρκεια: 45 λεπτά).

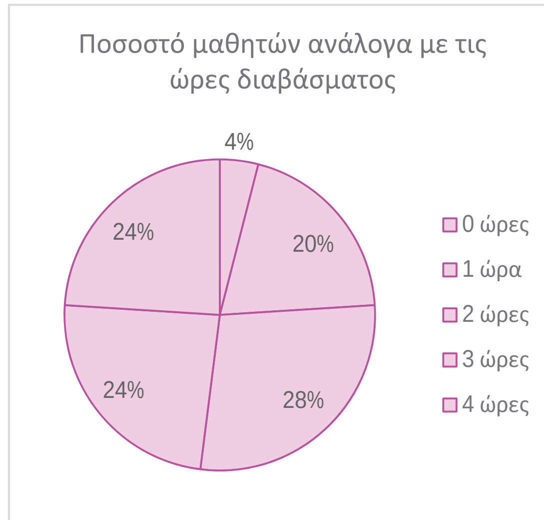
Αρχικά δίνεται στους μαθητές το Φύλλο Εργασίας (1). Οι μαθητές παρατηρούν διάφορα διαγράμματα, συζητούν και βρίσκουν ομοιότητες και διαφορές υπό την καθοδήγηση των καθηγητών τους. Στόχος της δραστηριότητας είναι να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να πραγματοποιηθεί συζήτηση για τα είδη και τη χρήση των γραφικών παραστάσεων. **Στη συνέχεια** οι μαθητές μαθαίνουν πως μπορούν να παραστήσουν κάποια δεδομένα με διαγράμματα. Κατανοούν διάφορα στοιχεία του σχεδιασμού των διαγραμμάτων και πειραματίζονται στη μετατροπή από ένα είδος σε άλλο. Συνειδητοποιούν ότι υπάρχει άμεσα και εύκολα η δυνατότητα ανάκτησης πληροφοριών από την παρατήρηση γραφημάτων.

Φύλλο Εργασίας (1)

Παρακάτω βλέπετε κάποια διαγράμματα (γραφικές παραστάσεις). Αναφέρονται σε μια έρευνα που έγινε στους 25 μαθητές του Β1 τμήματος του 5^{ου} Γυμνασίου Βόλου σχετικά με το πλήθος ωρών που διάβασαν το τελευταίο Σαββατοκύριακο.

- Παρατηρήστε τα και συζητήστε στην ομάδα σας για τις ομοιότητες και διαφορές που βρίσκετε μεταξύ τους καθώς και για την χρησιμότητά τους.

Γράφημα Α Γράφημα Β Γράφημα Γ Γράφημα Δ



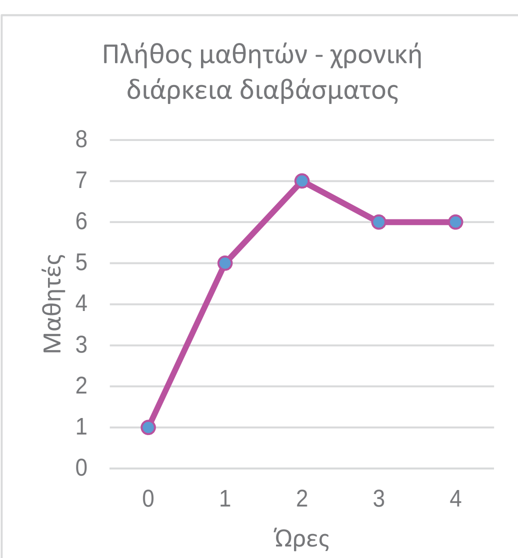
- Να αντιστοιχίσετε τα παραπάνω γραφήματα σε καθένα από τα επόμενα είδη διαγραμμάτων:

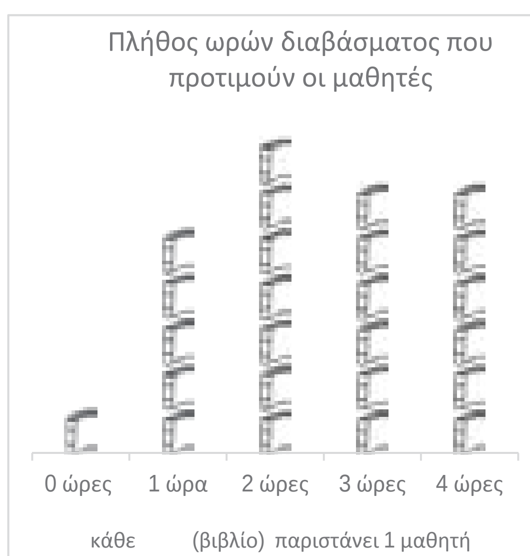
Κυκλικό διάγραμμα (**πίτα** στο Microsoft Excel) Γράφημα …..

Εικονόγραμμα (**στήλη** προσαρμοσμένη με εικόνες στο Excel) Γράφημα …..

Χρονόγραμμα (**γραμμή** στο Excel) Γράφημα …..

Ραβδόγραμμα (**ράβδος** ή **στήλη** στο Excel) Γράφημα …..





❖ **2^η φάση** (χρονική διάρκεια: 45 λεπτά).

Δίνεται στους μαθητές το Φύλλο Εργασίας (2) για εμπέδωση και εξάσκηση των όσων έμαθαν στην 1^η φάση.

Φύλλο Εργασίας (2)

1. Σε ένα διαγώνισμα με πέντε ερωτήσεις ο αριθμός των σωστών απαντήσεων από τους μαθητές ενός τμήματος Γυμνασίου, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Απαντήσεις	Μαθητές
Καμία ερώτηση	2
1 ερώτηση	4
2 ερωτήσεις	5
3 ερωτήσεις	6
4 ερωτήσεις	5
5 ερωτήσεις	4

Με τη βοήθεια του Microsoft Excel:

α) Να κατασκευάσετε κυκλικό γράφημα (πίτα) που να απεικονίζει τον αριθμό των σωστών απαντήσεων από τους μαθητές. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αφού πρώτα λάβετε υπόψη σας την αντίστοιχη θεωρία των Μαθηματικών:

- Ποιο ποσοστό των μαθητών του τμήματος απάντησε σωστά σε 2 ερωτήσεις;
- Πως μπορούμε να βρούμε την επίκεντρη γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στις δυο ερωτήσεις;

β) Να μετατρέψετε το παραπάνω κυκλικό γράφημα σε ραβδόγραμμα (στήλη). Να αλλάξετε το χρώμα των ράβδων των στηλών με ένα χρώμα της αρεσκείας σας.

γ) Να μετατρέψετε το ραβδόγραμμα σε γράφημα γραμμής.

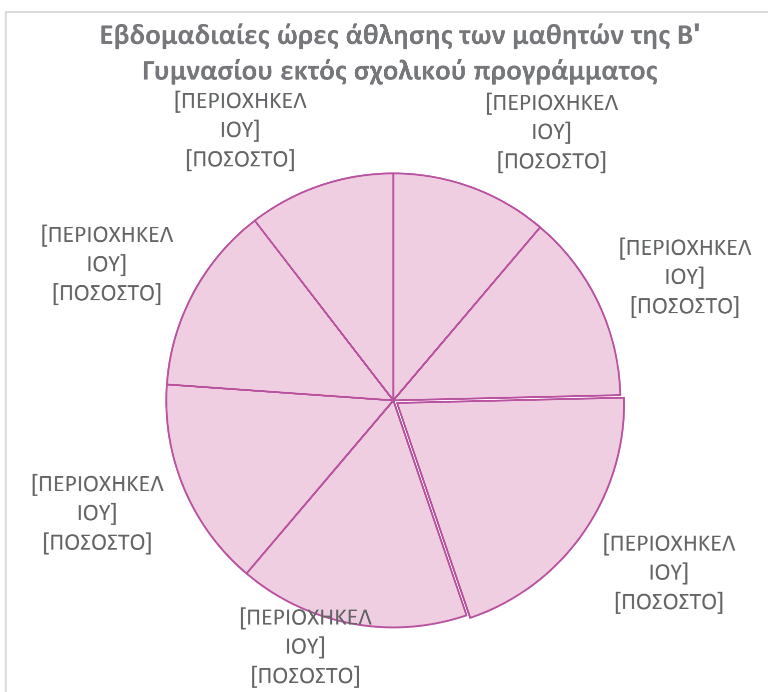
2. Δίνεται το γράφημα.

α) Τι ποσοστό των μαθητών αθλούνται **τουλάχιστον** 3 ώρες την εβδομάδα;

β) Τι ποσοστό μαθητών αθλούνται τις περισσότερες ώρες;

γ) Πόσοι μαθητές δεν αθλούνται;

δ) Τι ποσοστό των μαθητών αθλούνται **το πολύ** 4 ώρες την εβδομάδα;



3. Να λύσετε την άσκηση 4 από την αντίστοιχη ενότητα του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών.

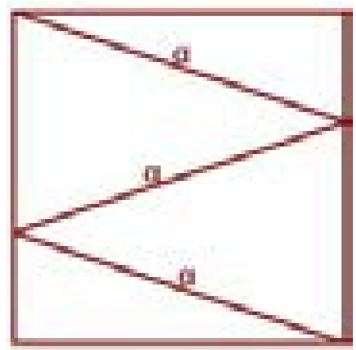
Υπόδειξη: Αφού γράψετε τον πίνακα της άσκησης στο Excel, να απαντήσετε στα ερωτήματα, κάνοντας τους υπολογισμούς και τα γραφήματα μέσω των δυνατοτήτων που μας παρέχει το λογισμικό.

Προχωρημένα θέματα για την Β΄ Τάξη

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Ένας διψήφιος αριθμός έχει την εξής ιδιότητα: Αν αλλάξουμε τη σειρά των ψηφίων του και στον αριθμό που προκύπτει προσθέσουμε τον αρχικό αριθμό τότε προκύπτει ένας τετράγωνος αριθμός, δηλαδή ένας αριθμός που είναι ίσος με το τετράγωνο ενός ακεραίου.
Ποιος είναι αυτός ο διψήφιος;

2) Στο παρακάτω τετράγωνο να εκφράσετε το εμβαδόν του με βάση το μήκος α των τριών ίσων τμημάτων.



3) Σε έναν ρόμβο η μία διαγώνιος είναι διπλάσια από την άλλη. Ας υποθέσουμε ότι το εμβαδόν του ρόμβου αυτού είναι Ε. Να εκφράσετε την πλευρά του ρόμβου με βάση το εμβαδόν Ε.

Να εξετάσετε την γενική περίπτωση κατά την οποία ο λόγος των διαγωνίων (μεγάλη διαγώνιος προς μικρή) είναι ίσος με λ.

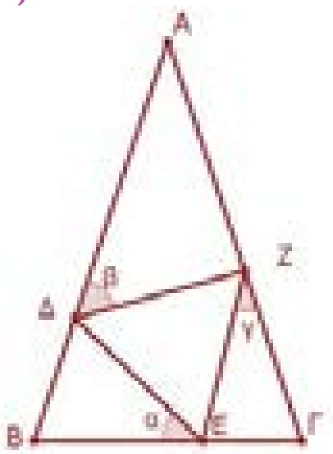
4) Υπάρχει μία σειρά κλασμάτων όπου κάθε κλάσμα προκύπτει αν διαιρέσουμε το γινόμενο των δύο προηγουμένων με το άθροισμά τους. Για παράδειγμα αν $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ είναι δύο διαδοχικά κλάσματα της σειράς τότε το επόμενο κλάσμα είναι ίσο με $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}}$. Αν τα δύο πρώτα κλάσματα της σειράς είναι τα $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ να υπολογίσετε τα τρία επόμενα κλάσματα. Ποιο κλάσμα βρίσκεται στην 10^{η} θέση της σειράς;

5) Όλα τα παιδιά μιας οικογένειας πάνε στο σχολείο και το γινόμενο των ηλικιών τους είναι 60.060. Πόσα παιδιά έχει η οικογένεια;

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 121

1) $\alpha^2=25^{64}\cdot 64^{25}$ δηλαδή $\alpha^2=25^{64}\cdot 64^{25}=5^{128}\cdot 2^{150}=5^{128}\cdot 2^{128}\cdot 2^{22}$ άρα $\alpha^2=(5\cdot 2)^{128}\cdot 2^{22}$ και επομένως $\alpha=10^{64}\cdot 2^{11}$. Εδώ παρατηρούμε ότι την απάντηση στο ερώτημα της άσκησης θα μας τη δώσει το αποτέλεσμα της δύναμης 2^{11} (γιατί;) που είναι ο αριθμός 2048 το άθροισμα των ψηφίων του οποίου είναι 14.

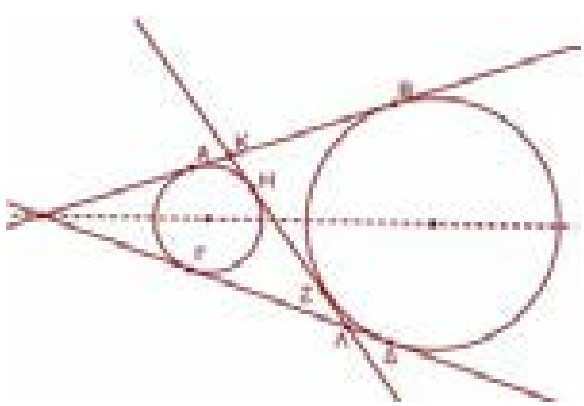
2)



Στο τρίγωνο ΔΒΕ ισχύει $\hat{\beta}+60^0=\hat{\alpha}+\hat{B}$ ενώ στο τρίγωνο ΖΕΓ ισχύει $\hat{\alpha}+60^0=\hat{\gamma}+\hat{\Gamma}$. Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και καθώς $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ προκύπτει $\hat{\beta}-\hat{\alpha}=\hat{\alpha}-\hat{\gamma}$ οπότε τελικά προκύπτει $\hat{\alpha}=\dfrac{\hat{\beta}+\hat{\gamma}}{2}$.

3) Ο αριθμός α679β διαιρείται με 72 άρα διαιρείται με 9 και με 4 αλλά και με 8. Αφού 6+7+9=22 θα πρέπει α+β=5 ή α+β=14 ώστε ο α679β να διαιρείτε με 9. Επιπλέον αφού διαιρείται με 4 θα πρέπει ο διψήφιος των δύο τελευταίων ψηφίων του, δηλαδή ο 9β, να διαιρείται με 4 που σημαίνει ότι β=2 ή β=6.
Αν β=2 τότε α=3 και είναι δεκτές τιμές
Αν β=6 τότε α=8 αλλά σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ο αριθμός 86796 ο οποίος όμως δεν διαιρείται με 8 ως όφειλε.

4) Ας δούμε το σχήμα σε πιο ολοκληρωμένη μορφή. Εδώ προφανώς υπάρχει συμμετρία από την οποία προκύπτει ότι ΑΒ=ΓΔ. Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση που εξασφαλίζει ότι από ένα σημείο εκτός κύκλου οι δύο εφαπτόμενες προς αυτόν είναι ίσες, άρα ΚΑ=ΚΗ και ΚΒ=ΚΖ. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ΑΒ=ΑΚ+ΚΒ = ΑΚ+ΚΖ=ΚΗ+ΚΖ=2ΚΗ+ΗΖ(1).
Αν εργαστούμε όμοια για το ΓΔ θα έχουμε ΓΔ=ΓΛ+ΛΔ=ΛΗ+ΛΖ=2ΛΖ+ΖΗ(2).
Παρατηρήστε ότι σχέσεις (1) και (2) μας οδηγούν στο ότι ΛΖ=ΚΗ.



5) Αν προσθέσουμε τις 6 ημέρες κατά τις οποίες ο ουρανός ήταν καθαρός το απόγευμα με τις 7 ημέρες κατά τις οποίες ο ουρανός ήταν καθαρός το πρωί είναι σαν να έχουμε προσθέσει τις 9 ημέρες κατά τις οποίες έβρεχε (πρωί ή απόγευμα) μαζί με τις ημέρες που ήταν εντελώς καθαρός ο ουρανός όλη ημέρα. Άρα σε πρώτη φάση θα πρέπει να σκεφτούμε την αφαίρεση (6+7)-9=4. Όμως ο αριθμός 4 περιέχει δύο φορές τις ημέρες που δεν έβρεχε καθόλου (γιατί;), άρα οι ημέρες που δεν έβρεχε καθόλου ήταν 2.
Τελικά όλη η περίοδος της παρατήρησης ήταν 9 + 2 =11.

Γ΄ Τάξη Συστήματα

Θανάσης Χριστόπουλος

Συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

I) και οι δύο εξισώσεις είναι 1ου βαθμού

$$(\Sigma)\ \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

Ας δούμε όμως πρώτα τι σημαίνει

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

Παράδειγμα, τι σημαίνει 2x+y=5 ?

Εδώ βλέπουμε μια εξίσωση με δύο αγνώστους, οπότε χρειαζόμαστε δύο αριθμούς που ένας να πάρει τη θέση του x και ο άλλος του y και να αληθεύει η ισότητα. Στο σύνολο των φυσικών αριθμών ($\mathbb{N}$) πιθανόν και να μην υπάρχουν λύσεις ή αν υπάρχουν να είναι λίγες (εδώ για παράδειγμα είναι (0,5), (1,3) και (2,1) μόνο), στο σύνολο όμως των πραγματικών αριθμών είναι άπειρες! Γιατί απλούστατα μπορούμε να βάλουμε στον ένα άγνωστο, για παράδειγμα στον x όποια τιμή θέλουμε, οπότε προκύπτει η αντίστοιχη τιμή για το y. Ας θέσουμε x = 7 τότε $14 + y = 5$ οπότε $y = -9$ άρα το (7,−9) είναι λύση.

Εξ άλλου αν λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς y θα πάρει τη μορφή $y = -2x + 5$ που είναι ήδη γνωστή και ξέρουμε ότι η γραφική της παράσταση είναι ευθεία.

Δύο τέτοιες εξισώσεις για τις οποίες ζητάμε να βρούμε λύση που να επαληθεύει και τις δυο ταυτόχρονα, λέμε ότι αποτελούν σύστημα

Και τις συνδέουμε μπροστά με ένα άγκιστρο, Η τελική μορφή των συστημάτων που θα εξετάσουμε είναι: $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$

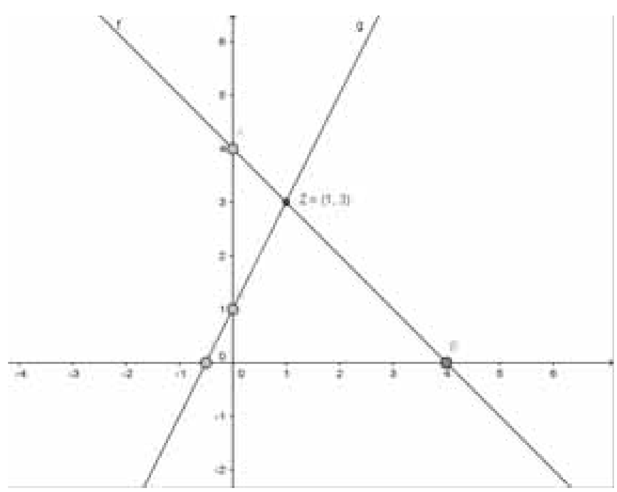
Δεν ξεχνάμε λοιπόν ότι το άγκιστρο μπροστά από τις δύο εξισώσεις μας θυμίζει τη λέξη «ΚΑΙ» δηλαδή θέλουμε να είναι αληθής και η πρώτη **ΚΑΙ** η δεύτερη εξίσωση.

Α) Ένας τρόπος να προσδιορίσουμε «οπτικά» τη λύση είναι, σε ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων, να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση των δύο εξισώσεων που θα είναι δύο ευθείες και η λύση που ζητάμε είναι οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο τέμνονται. Όπως ξέρουμε από τη Γεωμετρία δύο ευθείες ενός επιπέδου ή τέμνονται οπότε έχουν ένα κοινό σημείο και το σύστημα έχει μοναδική λύση, ή είναι παράλληλες οπότε δεν έχουν κοινά σημεία επομένως το σύστημα δεν έχει λύση κα το λέμε “αδύνατο”. Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση να μην είναι δύο ευθείες αλλά να ταυτίζονται, δηλαδή να πρόκειται για μία ευθεία και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Ας δούμε με γραφικές παραστάσεις, τις λύσεις στα παρακάτω συστήματα:

Παράδειγμα 1ο

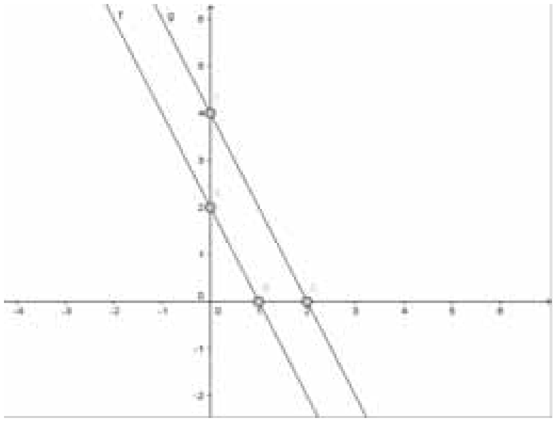
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$



Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου είναι η λύση του συστήματος δηλαδή x=τετμημένη και y=τεταγμένη.

Παράδειγμα 2ο

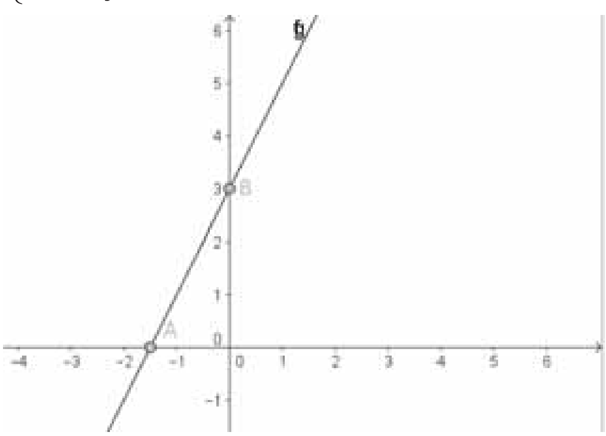
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$



Οι ευθείες εδώ είναι παράλληλες και δεν υπάρχει κοινό σημείο, επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 3ο

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$



Αν πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση με το 2 παρατηρούμε ότι γίνεται ίδια με την 2η εξίσωση, οπότε οι ευθείες ταυτίζονται και όλα τα σημεία τους είναι κοινά, δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Βέβαια εκτός από την προσέγγιση της λύσης με τη γραφική παράσταση υπάρχουν και πολλές Αλγεβρικές μέθοδοι, δύο εκ των οποίων θα μάθουμε στο Γυμνάσιο. Αυτές είναι:

Β) Η μέθοδος της αντικατάστασης

Σε αυτήν, λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Την προτιμούμε όταν ένας άγνωστος σε μια από τις δύο εξισώσεις έχει συντελεστή 1 ή –1, καθώς και αν μία από τις δύο εξισώσεις είναι ήδη λυμένη ως προς έναν άγνωστο.

Παράδειγμα 4ο

$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ σε αυτό το σύστημα θα λύσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y δηλαδή y=5–3x, και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στο y της δεύτερης εξίσωσης η οποία γίνεται: $2x - 3(5 - 3x) = 7$ οπότε $2x - 15 + 9x = 7$

$11x = 22$

$x = 2$, την τιμή αυτή του χ την αντικαθιστούμε στην y=5–3x και θα έχουμε $y = 5 - 3 \cdot 2$ άρα $y = -1$. Η λύση λοιπόν του συστήματος είναι (x,y)=(2,–1)

Γ) Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών ή της απαλοιφής, όπως αλλιώς λέγεται.

Σε αυτήν πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις μ κατάλληλους αριθμούς πετυχαίνουμε να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές του x ή του y και στη συνέχεια αν τις προσθέσουμε κατά μέλη θα απαλειφτούν και έτσι θα προκύψει εξίσωση με έναν άγνωστο τον οποίο και βρίσκουμε και με αντικατάσταση της τιμής αυτής σε μια από τις αρχικές εξισώσεις βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο

Παράδειγμα 5ο

$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ Για να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές του y αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση επί 3, οπότε γίνεται:

$$\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} +$$

$$11x = 22$$

οπότε x=2, στην 1η εξίσωση θέτουμε στο x την τιμή 2 και έχουμε 6+y=5 άρα y=–1

Άσκηση 1η

$$\begin{cases} 4(2x - 3y) - 5(x + y) = 3 - 15y \\ 6x - 2(y - 2x) = 10 - 7y \end{cases}$$

Μετά από πράξεις το σύστημα γίνεται:

$\begin{cases} 8x-12y-5x-5y=3-15y \\ 6x-2y+4x=10-7y \end{cases}$ και τελικά

$\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 10x+5y=10 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

εδώ θα χρειαστεί την $2^η$ εξίσωση να την πολλαπλασιάσουμε επί 2, οπότε θα γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές του y. Πράγματι

$\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 4x+2y=4 \end{cases}$ (+)

$7x=7$ άρα $x=1$ και από την αντικατάσταση αυτής της τιμής σε μια από τις δύο εξισώσεις προκύπτει $y=0$

Άσκηση $2^η$

$\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{5}-\dfrac{3(x-1)}{2}=\dfrac{1}{2} \\ x-\dfrac{2y}{3}=4 \end{cases}$ μετά από την απαλοιφή παρονομαστών και τις πράξεις έχουμε

$\begin{cases} 4x-4y-15x+15=5 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$ και τελικά

$\begin{cases} -11x-4y=-10 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$ εδώ πολλαπλασιάζουμε την $2^η$ εξίσωση επί (-2) οπότε

$\begin{cases} -11x-4y=-10 \\ -6x+4y=-24 \end{cases}$ (+)

$-17x=-34$ **άρα** $x=2$, αντικαθιστούμε στη $2^η$ (πριν πολλαπλασιάσουμε) οπότε προκύπτει 6–2y=12 άρα $-2y=6$ ή **y = −3**

Άσκηση $3^η$

$\begin{cases} \dfrac{2(x-1)-3}{5}-y=\dfrac{x+1}{2} \\ \dfrac{x+5}{6}-\dfrac{3y+2}{3}=x+y \end{cases}$

Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ εξίσωση επί 10 οπότε γίνεται: $2(2x-2-3)-10y=5(x+1)$

Άρα $4x-10-10y=5x+5$ και τελικά $-x-10y=15$

Η $2^η$ εξίσωση γίνεται:

$x+5-6y-4=6x+6y$ οπότε $5x+12y=1$

άρα το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} -x-10y=15 \\ 5x+12y=1 \end{cases}$ Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την $1^η$ εξίσωση επί 5 για να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές του x, οπότε έχουμε:

$\begin{cases} -5x-50y=75 \\ 5x+12y=1 \end{cases}$ +

–38y =76 άρα **y= −2** αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του y στην $2^η$ εξίσωση και προκύπτει $5x-24=1$ επομένως $x=5$

*ΙΙ) Συστήματα με μία εξίσωση πρώτου βαθμού και μία δευτέρου βαθμού.

σε αυτά τα συστήματα μια ασφαλής μέθοδος είναι να λύσουμε την πρωτοβάθμια ως προς έναν άγνωστο και να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση δευτέρου βαθμού, έτσι θα προκύψει εξίσωση ως προς έναν άγνωστο $2^{ου}$ βαθμού της μορφής δηλαδή $\alpha x^2+\beta y+\gamma=0$ την οποία μάθαμε να λύνουμε με την βοήθεια της Διακρίνουσας ή της παραγοντοποίησης

Παράδειγμα

$\begin{cases} 3x-y=6 \\ x^2+y=4 \end{cases}$ εδώ θα λύσουμε την $1^η$ ως προς y δηλαδή $y=3x-6$ και θα αντικαταστήσουμε στη $2^η$ η οποία θα γίνει $x^2+3x-10=0$ την οποία λύνουμε και βρίσκουμε χ=2 και χ= −3

Για χ=2 αντικαθιστούμε στην $1^η$ εξίσωση και προκύπτει y=0

Ενώ για χ= −3 προκύπτει y= −15

Προχωρημένα θέματα για την Γ΄ Τάξη

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Αν β, γ οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και α η υποτείνουσα του να αποδείξετε ότι $\beta+\gamma \leq \sqrt{2}\alpha$. Σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα;

2) Αν x+4y=5 ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\sqrt{x^2+9y^2}$

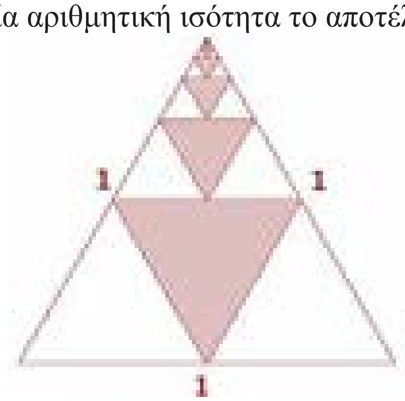
3) Ένα τραίνο έφυγε από τον σταθμό Α μία ώρα πριν από την προγραμματισμένη του αναχώρηση. Ο μηχανοδηγός, για να μην φτάσει νωρίτερα από την προγραμματισμένη ώρα, ελάττωσε την ταχύτητα του τραίνου κατά 4km/h από την συνήθη ταχύτητα με την οποία ταξιδεύει. Στον επόμενο σταθμό Β, που απέχει 120km από τον προηγούμενο, το τραίνο έφτασε την προγραμματισμένη ώρα. Με τι ταχύτητα ταξίδεψε το τραίνο από τον ένα σταθμό μέχρι τον άλλο;

4) Να αποδείξετε ότι για όλες τις θετικές τιμές των α, β, γ, δ η παράσταση

$$\frac{(\alpha^2+\alpha+1)\cdot(\beta^2+\beta+1)\cdot(\gamma^2+\gamma+1)\cdot(\delta^2+\delta+1)}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta}$$

δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη του 81.

5) Παρατηρήστε το παρακάτω σχήμα. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 1 (μονάδα μήκους) έχουν κατασκευαστεί σειρές από ισόπλευρα τρίγωνα.
α) Να υπολογίσετε στις 4 πρώτες σειρές το εμβαδόν κάθε σκιασμένου ισόπλευρου τριγώνου.
β) Αν υποθέσουμε ότι προσθέτουμε τα εμβαδά όλων των σκιασμένων ισόπλευρων τριγώνων (άπειρα) πόσο θα είναι το συνολικό εμβαδόν;
γ) Μπορείτε να εκφράσετε με μία αριθμητική ισότητα το αποτέλεσμα της ερώτησης β);



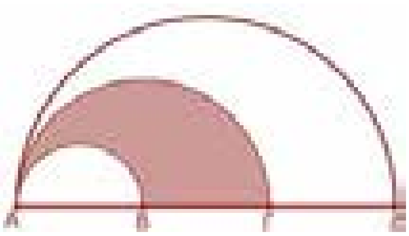
Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 120

1) Ισχύει x·y=1 άρα και $x^2\cdot y^2=1$ άρα $\frac{1}{y^2}=x^2$ και επομένως $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}+x^2$. Ας υπολογίσουμε το $\frac{1}{x}=\frac{1}{9+4\sqrt{5}}=\frac{9-4\sqrt{5}}{(9+4\sqrt{5})\cdot(9-4\sqrt{5})}=9-4\sqrt{5}$. Με βάση αυτούς τους υπολογισμούς

$$\frac{1}{x^2}+x^2=(9-4\sqrt{5})^2+(9+4\sqrt{5})^2=322$$

2) Ας υποθέσουμε ότι ΑΒ=2ρ, οπότε ΒΓ=4ρ και ΑΔ=6ρ.
Τα εμβαδά των ημικυκλίων κατά σειρά μεγέθους είναι

$$E_1=\frac{\pi\rho^2}{2},\ E_2=\frac{4\pi\rho^2}{2},\ E_3=\frac{9\pi\rho^2}{2}$$



Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

$$E_2 - E_1=\frac{3\pi\rho^2}{2}$$

Το συνολικό εμβαδόν των λευκών χωρίων είναι ίσο με:

$$E_1+(E_3- E_2) = \frac{\pi\rho^2}{2}+\left(\frac{9\pi\rho^2}{2}-\frac{4\pi\rho^2}{2}\right)=\frac{6\pi\rho^2}{2}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το εμβαδόν των λευκών χωρίων είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

3) Έστω ότι κάποιος ή κάποια είχε γεννηθεί το έτος 19xy, τότε η ηλικία του θα ήταν 96-10x-y και θα έπρεπε να ήταν ίση με 1+9+x+y=10+x+y.

Με βάση την εκφώνηση θα έπρεπε 96-10x-y=10+x+y επομένως 11x+2y=86 όπου x, y μονοψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ή 0.

Για y=0, 1, 2, 3, …… 9 δεν προκύπτει κανένα κατάλληλο x.

4) Ο κανόνας που φαίνεται να ισχύει είναι ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν το αποτέλεσμα των πράξεων στην παράσταση $\frac{\nu(\nu+1)+(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ είναι τέλειο τετράγωνο και μάλιστα είναι ίσο με $(\nu+1)^2$. Πράγματι αν κάνουμε τις πράξεις στην παράσταση ν(ν+1)+(ν+1)(ν+2) θα προκύψει το πολυώνυμο $2\nu^2+4\nu+2$ για το οποίο ισχύει $\frac{2\nu^2+4\nu+2}{2}=\nu^2+2\nu+1=(\nu+1)^2$

5) Ας αναλύσουμε τις ταυτότητες των 4 πρώτων όρων:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

Οπότε η παράσταση παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}$$

Παρατηρούμε ότι τελικά κάθε τέτοια παράσταση καταλήγει σε γινόμενο δύο κλασμάτων.

Στην περίπτωση της παράστασης $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)$ τα δύο κλάσματα θα είναι τα
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\nu}{\nu}$ και επομένως $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\nu}{\nu}=\frac{21}{40}$ άρα ν=20.

$82^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
5 Νοεμβρίου 2021

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x=\overline{abc}$ και $y=\overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0<c<a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4. (*Σημείωση:* $x=\overline{abc}=100a+10b+c$, $y=\overline{cba}$ =100c+10b+ a).

Λύση: Επειδή οι αριθμοί x,y είναι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι, τα a και c θα είναι ψηφία διαφορετικά από το μηδέν, όπως δίνεται και στην υπόθεση. Για το ψηφίο b δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οπότε ο b μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός μονοψήφιος ακέραιος.

Εφόσον οι αριθμοί x,y διαιρούνται με το 4 θα είναι άρτιοι, οπότε οι μονοψήφιοι ακέραιοι a και c θα είναι άρτιοι και επειδή $c<a$, οι δυνατές τιμές για το ζεύγος (a,c) μπορεί να είναι:

$$(8,6) \text{ ή } (8,4) \text{ ή } (8,2) \text{ ή } (6,4) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (4,2).$$

Πρέπει επίσης οι αριθμοί $\overline{bc}$ και $\overline{ba}$ να διαιρούνται με το 4. Δοκιμάζοντας τώρα τις τιμές $b=0$ ή $b=1$ ή $b=2$ ή $b=3$ ή $b=4$ ή $b=5$ ή $b=6$ ή $b=7$ ή $b=8$ ή $b=9$, (σε συνδυασμό με τα προηγούμενα) καταλήγουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί $x=\overline{abc}$ είναι οι: $884, 864, 844, 824, 804$ και $692, 672, 652, 632, 612$. Οι αριθμοί $y=\overline{cba}$ προκύπτουν από την εναλλαγή των ψηφίων του αριθμού $x=\overline{abc}$.

Πρόβλημα 2

Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής:
Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό N των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20<N<28$.

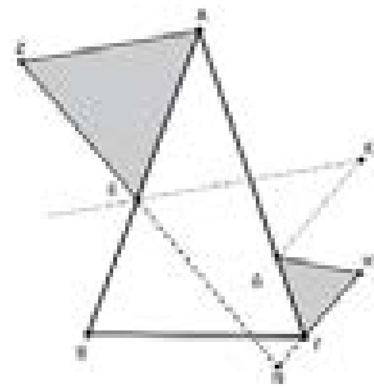
Λύση: Σύμφωνα με την υπόθεση το πλήθος των μαθητών του Τμήματος είναι $N=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ και επειδή το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική, έχουμε:

$$20\alpha+18\beta+16\gamma+14\delta=18\alpha+16\beta+14\gamma+20\delta \Rightarrow 2\alpha+2\beta+2\gamma=6\delta \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=3\delta.$$

Επομένως, έχουμε $N=\alpha+\beta+\gamma+\delta=3\delta+\delta=4\delta$ και αφού $20<N<28$, έπεται ότι $N=24$.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΔΓΗ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{E}Z$ και $A\hat{\Delta}H$ τέμνονται στο σημείο Κ. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΖ και ΓΗ τέμνονται στο σημείο Ν.

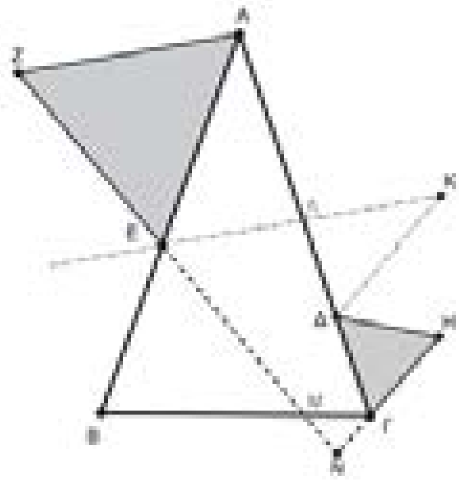


Να αποδείξετε ότι:

(α) $E\hat{K}\Delta = B\hat{A}\Gamma$

(β) $E\hat{N}\Gamma = 120^0 - B\hat{A}\Gamma$

Λύση



Έστω τώρα Μ η τομή της ΕΝ με την ΒΓ και Λ η τομή της ΕΚ με την ΑΓ. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

(α) $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{K}}\Delta = \Lambda\widehat{\mathrm{K}}\Delta = 180^\circ - \mathrm{K}\widehat{\Lambda}\Delta - \mathrm{K}\widehat{\Delta}\Lambda = 180^\circ - \mathrm{K}\widehat{\Lambda}\Delta - 60^\circ = 120^\circ - \mathrm{K}\widehat{\Lambda}\Delta =$
$= 120^\circ - \mathrm{A}\widehat{\Lambda}\mathrm{E} = 120^\circ - \left(180^\circ - \widehat{\mathrm{A}} - \mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Lambda\right) = 120^\circ - \left(180^\circ - \widehat{\mathrm{A}} - 60^\circ\right) = \widehat{\mathrm{A}}.$

(β) $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{N}}\Gamma = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{N}}\Gamma = 180^\circ - \mathrm{N}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma - \mathrm{N}\widehat{\Gamma}\mathrm{M} = 180^\circ - \mathrm{E}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{B} - \mathrm{N}\widehat{\Gamma}\mathrm{M} =$

$$= 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{\mathrm{B}} - \mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{M}\right) - \left(180^\circ - \widehat{\Gamma} - \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{H}\right) = 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{\mathrm{B}} - 60^\circ\right) - \left(180^\circ - \widehat{\Gamma} - 60^\circ\right)$$
$$= \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} - 60^\circ = 180^\circ - \widehat{\mathrm{A}} - 60^\circ = 120^\circ - \widehat{\mathrm{A}}.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\boldsymbol{\Sigma} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$.

Λύση: Ο αριθμός που μπορεί να γράψει ο Γιάννης θα τελειώνει σε 9 ή σε 2, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 5.

Επίσης, το άθροισμα των ψηφίων οποιουδήποτε αριθμού μπορεί να γράψει ο Γιάννης είναι της μορφής $9\kappa + 2 = \pi o\lambda.3 + 2$, οπότε ο αριθμός δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επίσης δεν μπορεί να διαιρείται με το 6 ή το 9 που είναι πολλαπλάσια του 3.

Θα εξετάσουμε τώρα τη δυνατότητα να διαιρείται ο αριθμός με κάποιους από τους αριθμούς 2, 4, 7 και 8. Ο αριθμός που θα γράψει ο Γιάννης θα διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2. Στη περίπτωση που το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2, τότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα είναι σε κάθε περίπτωση το 92 που διαιρείται με το 4, οπότε και ο αριθμός θα διαιρείται με το 4.

Έτσι, απομένει η περίπτωση να διαιρείται ο αριθμός με το 8 και το 7.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 992 διαιρείται με το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι η επισύναψη του ψηφίου 9 στα αριστερά του αριθμού 992 τον αυξάνει κατά $9000 = 9 \cdot 1000 = 9 \cdot 125 \cdot 8$, που είναι πολλαπλάσιο του 8. Ομοίως η επισύναψη του ψηφίου 9 αριστερά του 992 περισσότερες φορές αυξάνει τον αριθμό κατά αριθμό πολλαπλάσιο του 1000, άρα και του 8, οπότε ο αριθμός που προκύπτει σε κάθε περίπτωση διαιρείται με το 8.

Επομένως αρκεί να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό φορών που πρέπει να επισυνάψουμε αριστερά το 9 ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 7.

Παρατηρούμε ότι:

$$992 = 7 \cdot 141 + 5, 9000 = 7 \cdot 1285 + 5 \Rightarrow 9992 = \pi o\lambda.7 + 10 = \pi o\lambda.7 + 3,$$
$$90000 = 10 \cdot 9000 = \pi o\lambda.7 + 50 = \pi o\lambda.7 + 1 \Rightarrow 99992 = \pi o\lambda.7 + 4,$$
$$900000 = 10 \cdot 90000 = \pi o\lambda.7 + 10 = \pi o\lambda.7 + 3 \Rightarrow 999992 = \pi o\lambda.7.$$

Επομένως, ο ελάχιστος δυνατός θετικός ακέραιος που μπορεί να γράψει ο Γιώργος ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ είναι ο αριθμός 999992. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με τους, 2,4,8 και 7.

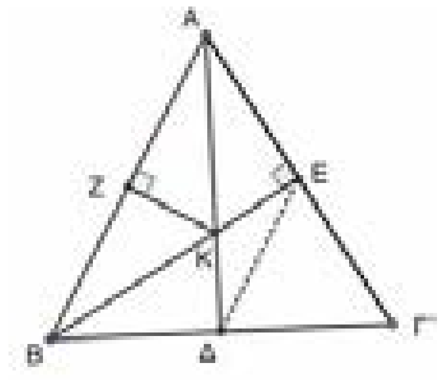
Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\widehat{A}$, το ύψος ΒΕ και η μεσοκάθετη ΖΚ της πλευράς ΑΒ περνούν από το ίδιο σημείο Κ.

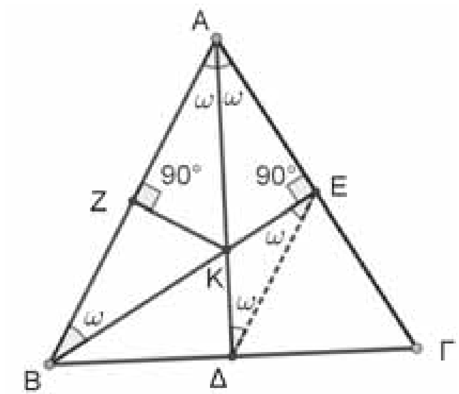
(α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΚΔ = ΚΕ = ΚΖ.

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



Λύση



(α) Αν θέσουμε $\hat{A} = 2\omega$, τότε $\mathrm{B\widehat{A}K} = \mathrm{K\widehat{A}\Gamma} = \omega$.
Επειδή ΖΚ μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ έπεται ότι ΚΑ = ΚΒ, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές και έχει $\mathrm{K\widehat{B}A} = \mathrm{K\widehat{A}B} = \omega$. Επομένως, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$\mathrm{B\widehat{A}E} + \mathrm{A\widehat{B}E} = 180^0 - 90^0 \Rightarrow 2\omega + \omega = 90^0 \Rightarrow 3\omega = 90^0 \Rightarrow \omega = 30^0,$$

οπότε θα είναι $\widehat{\mathrm{A}} = 2\omega = 60^0$.

(β) Αν η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, τότε από τις εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν με τέμνουσες τις ευθείες ΑΔ και ΒΕ, έχουμε: $\mathrm{A\widehat{\Delta}E} = \mathrm{B\widehat{A}\Delta} = \mathrm{A\widehat{B}E} = \mathrm{K\widehat{E}\Delta} = \omega$, οπότε το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές με ΚΔ = ΚΕ. Επιπλέον, επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ έπεται ότι ΚΖ = ΚΕ . Επομένως, ΚΔ = ΚΕ = ΚΖ.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Μία σχολική τάξη έχει συνολικά Α μαθητές. Μία μαθήτρια, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να βάλει γραμματόσημο σε $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{4}}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$ έφτασε εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του Α;

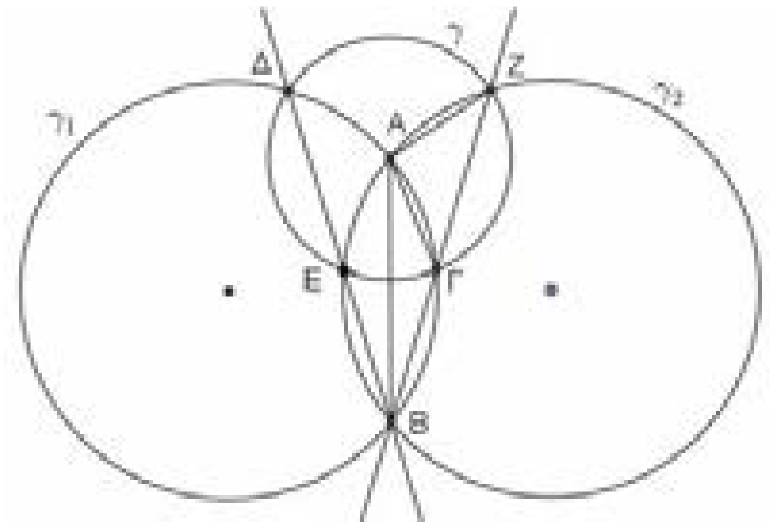
Λύση

Η Μαρία είχε ετοιμάσει συνολικά $\mathrm{A}-1$ κάρτες για να στείλει σε όλους τους συμμαθητές της. Επομένως, έστειλε τελικά $(\mathrm{A}-1)-\frac{\mathrm{A}}{4}=\frac{3\mathrm{A}}{4}-1$ κάρτες. Το $\frac{1}{10}$ αυτών είναι $\frac{1}{10}\left(\frac{3\mathrm{A}}{4}-1\right)=\frac{3\mathrm{A}-4}{40}$ και πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, αφού αντιστοιχεί σε μαθητές που έλαβαν κάρτα εγκαίρως. Επομένως, για να βρούμε την ελάχιστη τιμή του Α, το $3\mathrm{A}-4$ πρέπει να είναι το μικρότερο δυνατό πολλαπλάσιο του 40. Η εξίσωση $3\mathrm{A}-4=40$, δεν δίνει ακέραια τιμή για το Α, οπότε κοιτάζουμε το αμέσως επόμενο πολλαπλάσιο που είναι το 80. Η εξίσωση $3\mathrm{A}-4=80$ έχει λύση $\mathrm{A}=28$, επομένως αυτή είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του Α.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 121

Γ51. Δύο ίσοι κύκλοι γ_1 και γ_2 τέμνονται στα σημεία Α και Β. Ο κύκλος γ με κέντρο Α τέμνει τον κύκλο γ_1 στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής του κύκλου γ με τον κύκλο γ_2 βρίσκονται πάνω στις ευθείες ΒΓ και ΒΔ.

Λύση



Έστω Ε και Ζ τα σημεία τομής του κύκλου γ με τον κύκλο γ_2. Υποθέτουμε ότι τα σημεία Γ και Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ, ενώ τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο άλλο ημιεπίπεδο.

Ισχύει ότι $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AZ}$, ως ακτίνες του κύκλου γ. Επειδή οι κύκλοι γ_1 και γ_2 είναι ίσοι, τότε και οι εγγεγραμμένες γωνίες τους $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{A\hat{B}Z}$ που αντιστοιχούν σε ίσες χορδές $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AZ}$, έπεται ότι είναι ίσες, δηλαδή $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{A\hat{B}Z}$. Επομένως τα σημεία Β, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

Α67. Οι θετικοί παραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\alpha^{2014} + \beta^{2014} = \alpha^{2016} + \beta^{2016}$.

Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 \le 2$.

Λύση

Η δεδομένη σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha^{2014} - \alpha^{2016} = \beta^{2016} - \beta^{2014} \Leftrightarrow \alpha^{2014}\left(1-\alpha^2\right) = \beta^{2014}\left(\beta^2 - 1\right). \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- $\alpha = \beta = 0$. Τότε $\alpha^2 + \beta^2 = 0$.
- $\alpha = 0 \ne \beta$. Τότε $\beta^2 = 1$, οπότε $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
- $\beta = 0 \ne \alpha$. Τότε $\alpha^2 = 1$, οπότε $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0, +1\}$. Τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{\alpha^{2014}}{\beta^{2014}} = \frac{\beta^2 - 1}{1 - \alpha^2}. \qquad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha > \beta$, τότε $\dfrac{\alpha^{2014}}{\beta^{2014}} > 1 \Rightarrow \dfrac{\beta^2 - 1}{1-\alpha^2} > 1$.

Αν $\beta > 1 \Rightarrow \beta^2 - 1 > 0 \Rightarrow 1 - \alpha^2 > 0 \Rightarrow \alpha < 1$.

Τότε θα είναι και $\beta < 1$, οπότε

$\alpha^2 + \beta^2 \le 2$. Ομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση: $\beta > \alpha$.

Α68. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{(x+1)^4}{(x-1)^3}+\dfrac{x-1}{16}\geq\dfrac{(x+1)^2}{2(x-1)}$.

Λύση

Για $x\neq 1$ η ανίσωση γράφεται:

$$(x-1)\left(\frac{(x+1)^4}{(x-1)^4}+\frac{1}{16}-\frac{(x+1)^2}{2(x-1)^2}\right)\geq 0\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0.$$

Επειδή $\left(\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\right)^2\geq 0$ και $\left(\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ ή $\dfrac{x+1}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=-\dfrac{1}{3}$,

η δεδομένη ανίσωση αληθεύει για $x\in(1,+\infty)\cup\left\{-\dfrac{1}{3},\ -3\right\}$.

Ασκήσεις για λύση

Α69. Έχουμε τέσσερις πανομοιότυπες χρυσές αλυσίδες με βάρη $1,\alpha,\ \alpha^2$ και α^3, όπου $\alpha>1$ άγνωστος πραγματικός αριθμός. Διαθέτουμε και μία ζυγαριά με δύο δίσκους η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση βαρών, χωρίς να φαίνονται τα πραγματικά βάρη. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να βρούμε την αλυσίδα με το μεγαλύτερο βάρος με δύο μόνο συγκρίσεις βαρών.

Γ52. Σε ένα οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι μία από τις γωνίες του είναι τετραπλάσια από μία άλλη γωνία του. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν το τρίγωνο να διαιρεθεί σε τρία μη επικαλυπτόμενα ισοσκελή τρίγωνα, με τρία ευθύγραμμα τμήματα που έχουν τα άκρα τους πάνω στις πλευρές του.

Γ53. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ και σημείο Κ στην ευθεία ΑΓ έτσι ώστε το Γ να βρίσκεται μεταξύ ων σημείων Α και Κ και $\mathrm{B\hat{\Gamma}K}=\mathrm{\Delta\hat{\Gamma}A}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}>90^0$.

(β) Μία ευθεία περνάει από το σημείο Δ παράλληλη προς την ευθεία ΒΓ και τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Μ. Αν επιπλέον, δίνεται ότι

$$2\cdot\widehat{\mathrm{A}}+3\cdot\widehat{\mathrm{B}}=180^0,$$

να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΜ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\widehat{B}\Gamma}$.

Γ54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Αν $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{B\widehat{\Delta}\Gamma}<\mathrm{B\widehat{E}\Gamma}$.

Γ55. Έστω Η και Ι το ορθόκεντρο και το έκκεντρο, αντίστοιχα, ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΙ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε σημείο Ρ διαφορετικό του Β. Έστω Κ η ορθή προβολή του Η πάνω στην ευθεία ΑΙ και Μ το συμμετρικό του Ρ ως προς το Κ.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Η και Μ είναι συνευθειακά.

Γ56. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}}=100^0$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$. Στην προέκταση της διχοτόμου ΒΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $\mathrm{BZ}=\mathrm{AB}$.

Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{EZ}\perp\mathrm{A\Gamma}$.

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων της ΕΜΕ, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ και η προσφορά του στην Αξιολόγηση του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος

Σπύρος Φερεντίνος και Αλέξανδρος Βαρούχας

Ο διαγωνισμός **ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ** μπορεί να αποτελέσει σημαντικό βοήθημα στο νέο θεσμικό πλαίσιο, που αφορά στην Αξιολόγηση του εκπαιδευτικού συστήματος μέσω εξετάσεων διαγνωστικού χαρακτήρα για τους μαθητές/ τριες της ΣΤ΄ Τάξης των δημοτικών σχολείων και τους μαθητές/τριες της Γ΄ Τάξης των γυμνασίων στη Γλώσσα και στα Μαθηματικά, με σκοπό την εξαγωγή πορισμάτων σχετικά με την πορεία υλοποίησης των προγραμμάτων σπουδών και τον βαθμό επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων σε εθνικό και περιφερειακό επίπεδο και σε επίπεδο σχολικής μονάδας (άρθρο 104, Νόμος 4823/2021).

Σύμφωνα με τον παραπάνω νόμο οι εξετάσεις αυτές δεν αξιολογούν τους συγκεκριμένους μαθητές, εφόσον είναι ανώνυμες, αλλά μόνο το βαθμό επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Με βάση το χαρακτηριστικό αυτό βαπτίσθηκαν από μερίδα του Τύπου «Ελληνική PISA», διότι και ο διαγωνισμός (σωστότερη έκφραση είναι *έρευνα* και όχι *διαγωνισμός*) αυτός διαθέτει το ίδιο χαρακτηριστικό. Το κατά πόσον όμως και τα θέματα του διαγωνισμού θα είναι παρόμοιας λογικής με τα αντίστοιχα του PISA θα φανεί από τις πρώτες εφαρμογές του.

Με την ευκαιρία αυτή θυμίζουμε τα βασικά χαρακτηριστικά του PISA όπως παρουσιάζονται στην ιστοσελίδα http://www.iep.edu.gr/pisa/ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ):

«*Το Διεθνές Πρόγραμμα PISA για την Αξιολόγηση των Μαθητών (**P**rogramme for **I**nternational **S**tudent **A**ssessment) είναι μία Εκπαιδευτική Έρευνα που διεξάγεται κάθε τρία χρόνια (από το 2000 έως σήμερα) και που υλοποιείται από διεθνή ερευνητικά ιδρύματα (PISA Consortium) υπό την οργάνωση της Διεύθυνσης Εκπαίδευσης του ΟΟΣΑ (**Ο**ργανισμός για την **Ο**ικονομική **Σ**υνεργασία και **Α**νάπτυξη) και τη συνεργασία των συμμετεχουσών στην Έρευνα χωρών. Κύριος στόχος του Προγράμματος PISA είναι η αξιολόγηση του εύρους των γνώσεων και των δεξιοτήτων των μαθητών που βρίσκονται στο τέλος της Υποχρεωτικής τους Εκπαίδευσης, βάσει των οποίων διαμορφώνεται, σε σημαντικό βαθμό, η ουσιαστική και ισότιμη συμμετοχή τους στις σύγχρονες κοινωνίες*».

Με απλούστερα λόγια βασικός στόχος του PISA είναι η αξιολόγηση της ετοιμότητας των 15χρονων μαθητών να χρησιμοποιούν τις γνώσεις και δεξιότητες που απέκτησαν στο σχολείο για να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις της καθημερνής ζωής.

Στον PISA εξετάζεται ο εγγραμματισμός των μαθητών σε τρία γνωστικά πεδία: στην Κατανόηση Κειμένου, τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες. Με τον όρο εγγραμματισμός εννοούμε την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τις γνώσεις και δεξιότητες που απέκτησαν στα τρία βασικά αντικείμενα, ώστε να επιλύουν και ερμηνεύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Από τη θέση αυτή είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί ότι πέρα από τα θετικά του PISA υπάρχουν και αρνητικές πλευρές. Η σημαντικότερη από τις οποίες είναι οι διαφορές στα εκπαιδευτικά συστήματα των χωρών που συμμετέχουν. Για παράδειγμα η επίδοση των Ελλήνων μαθητών στο PISA δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική, γιατί στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα δεν δίνεται έμφαση στη δυνατότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τις γνώσεις τους σε καθημερινά ζητήματα και καταστάσεις. Το Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα δίνει μεγάλο βάρος στην απόκτηση κυρίως θεωρητικών γνώσεων (γνωσιοκεντρικό) και η έμφαση δίνεται στην απομνημόνευση εννοιών και στην επιτυχία των μαθητών στις διάφορες εξετάσεις (η σημαντικότερη των οποίων είναι οι πανελλαδικές) και όχι στο να χρησιμοποιούν τις σχολικές γνώσεις και προς την κατεύθυνση της επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής ή στην ανάπτυξη κριτικών ικανοτήτων που συνδέονται με την πραγματική ζωή. Για παράδειγμα, είναι πολύ πιθανό μαθητής με πολύ καλές γνώσεις στα Μαθηματικά να έχει μεγάλη δυσκολία να κατανοήσει ένα λογαριασμό ρεύματος μιας ηλεκτρικής εταιρείας ή να κρίνει μια πρακτική που συνδέεται με κλιματική αλλαγή.

Τη διαφορά μεταξύ θεωρητικών γνώσεων και γνώσεων που σχετίζονται με τις ανάγκες της καθημερινής ζωής έρχεται να καλύψει ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων της ΕΜΕ, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ (προφανώς υπάρχουν και άλλοι διαγωνισμοί της ΕΜΕ προς την κατεύθυνση αυτή, αλλά αντικείμενο του συγκεκριμένου άρθρου είναι ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ). Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ έχει ως κεντρικό στόχο την ανάπτυξη των βασικών Μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις δυνατότητες να σκέπτεται ο μαθητής με Μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο διαγωνισμός αυτός δεν ελέγχει τις γνώσεις του μαθητή στα Μαθηματικά, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να σκέφτεται με τα εφόδια που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη σκέψη, τα οποία εφόδια σύμφωνα με αρκετούς συγγραφείς αναφέρονται στις εξής 8 μαθηματικές ικανότητες – δεξιότητες: Αριθμητική, Γεωμετρική, Επαγωγική, Μετάφρασης δεδομένων από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο, Αλγεβρική, Αλγοριθμική, Επίλυσης Προβλήματος και Συνδυαστική. Οι ικανότητες αυτές θεωρούμε ότι συνδέονται άμεσα με τον βαθμό επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων όπως αυτά αναφέρονται στο άρθρο 104 “Αξιολόγηση του εκπαιδευτικού συστήματος” του νόμου Ν. 4823/2021. Εδώ θυμίζουμε ότι βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Γυμνάσιο είναι η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων (ΦΕΚ 304/13-3-2003). Στο ίδιο ΦΕΚ τονίζεται ότι μεταξύ των σκοπών της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι η επιτυχής κοινωνική ένταξη του μαθητή μέσω και της σύνδεσης των Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή.

Επίσης στις οδηγίες του ΙΕΠ για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχολικό έτος 2020-21 δίδεται έμφαση στη χρήση των μαθηματικών σε ρεαλιστικά (πραγματικά) προβλήματα που μεταξύ αυτών είναι και προβλήματα που αντιμετωπίζει ο καταναλωτής (τόκος, ΦΠΑ, κλπ).

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά θέματα που τέθηκαν στον διαγωνισμό μαθηματικών ικανοτάτων της ΕΜΕ, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ, καθώς και τη μαθηματική ικανότητα που χρησιμοποιήθηκε σε καθένα. Σε κάθε ένα από τα θέματα η σωστή απάντηση είναι υπογραμμισμένη. Τις αναλυτικές λύσεις μπορείτε να τις βρείτε στα περιοδικά ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 1-2-3 της ΕΜΕ.

Αριθμητική ικανότητα

Ανοίγεις ένα βιβλίο και παρατηρείς ότι οι δύο αριθμοί των σελίδων που έχεις μπροστά σου έχουν άθροισμα 49. Τι αριθμό έχει η επόμενη σελίδα;

Α) 50 **Β)** 48 **Γ)** 24 **Δ)** 25 **Ε)** 26

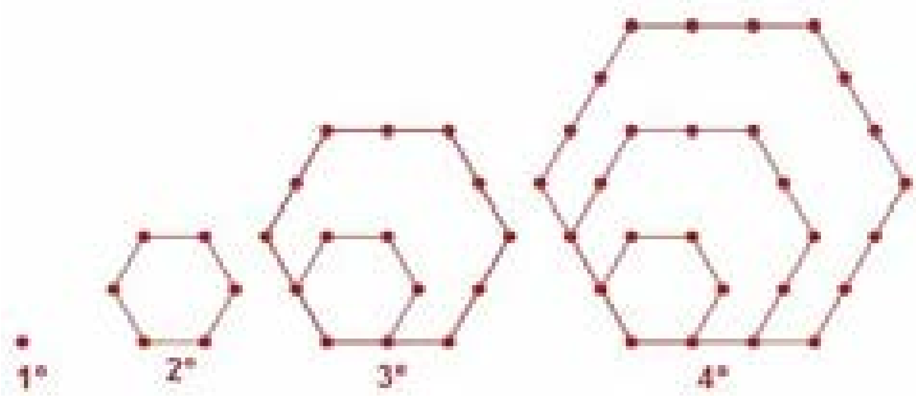
Γεωμετρική ικανότητα

Πάνω σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο είναι τοποθετημένοι 3 πίνακες (αντίγραφα) ενός διάσημου Έλληνα ζωγράφου (Νικηφόρος Λύτρας). Το μήκος του πλαισίου είναι 2,20m. Οι πίνακες είναι τοποθετημένοι σε ίσες αποστάσεις. Δύο πίνακες έχουν μήκος 40cm ο καθένας ενώ ο τρίτος πίνακας έχει μήκος 70cm. Ποια είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο πίνακες;

Α) 40 εκατοστά **Β)** 35 εκατοστά **Γ)** 30 εκατοστά **Δ)** 20 εκατοστά

Επαγωγική ικανότητα

Η σειρά των σχημάτων ακολουθεί ένα συγκεκριμένο μοτίβο, το ίδιο και ο αριθμός των σημείων των σχημάτων. Πόσα συνολικά σημεία θα περιέχει το 5ο σχήμα;



Α) 45 **Β)** 40 **Γ)** 35 **Δ)** 32 **Ε)** 30

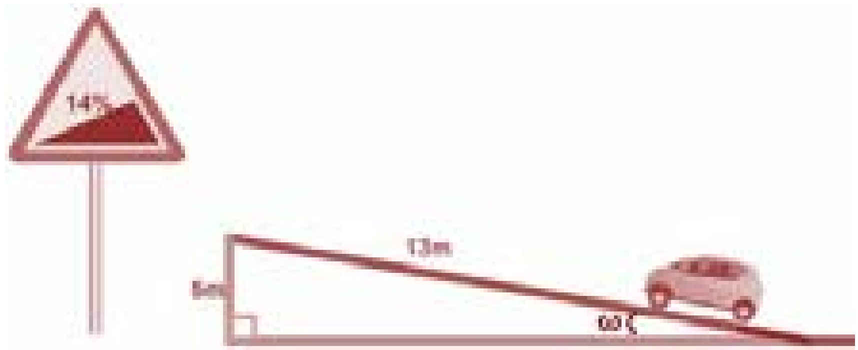
Συνδυαστική ικανότητα

Οι 31 μαθητές ενός σχολείου γευμάτισαν σε ένα εστιατόριο το οποίο διαθέτει τραπέζια των 4 ατόμων και τραπέζια των 5 ατόμων. Οι μαθητές κάθισαν όλοι σε τραπέζια χωρίς να μείνει κάποια καρέκλα κενή σε τραπέζι. Πόσα τραπέζια έχουν καταλάβει μέσα στο εστιατόριο;

Α) 7 **Β)** 8 **Γ)** 9 **Δ)** 10 **Ε)** 11

Ικανότητα μετάφρασης

Με βάση τις μετρήσεις του ανηφορικού δρόμου και την πινακίδα της κλίσης του δρόμου τι από τα παρακάτω ισχύει;



Α) Εχει μπει λάθος πινακίδα

Β) Δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με αυτά τα μήκη κάθετης πλευρά και υποτείνουσας

Γ) Το συνημίτονο της γωνίας ω είναι $\frac{14}{100}$

Δ) Οσο ανέρχεται το αυτοκίνητο τόσο αυξάνεται και η κλίση του δρόμου

Ε) Ολα τα προηγούμενα ισχύουν

Αλγεβρική ικανότητα

Αν στην παράσταση $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+3}\right)$ εκτελέσουμε τις πράξεις ποιο θα είναι το τελικό αποτέλεσμα;

Α) $1+\frac{1}{x+4}$ **Β)** x+4 **Γ)** $\frac{1}{x}$ **Δ)** $\frac{x+4}{x}$ **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

Ικανότητα λύσης προβλήματος

Η μία συσκευασία στραγγιστού γιαουρτιού έχει 10% λιπαρά, όπως αναγράφεται στην ετικέτα του. Σε ένα μεγαλύτερο σκεύος αδειάζουμε 3 συσκευασίες από το συγκεκριμένο γιαούρτι.

Τι ισχύει για το περιεχόμενο του μεγαλύτερου σκεύους;

Α) Θα περιέχει 30% λιπαρά

Β) Θα περιέχει 15% λιπαρά

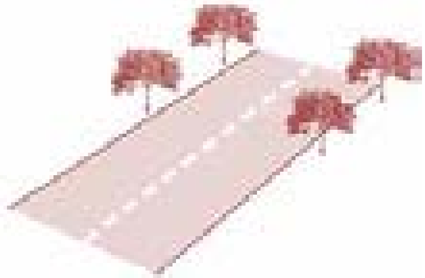
Γ) Θα περιέχει 10% λιπαρά

Δ) Θα περιέχει 20% λιπαρά

Ε) Δεν γνωρίζουμε πόσα λιπαρά θα περιέχει

Ικανότητα λύσης προβλήματος

Οι κάτοικοι δύο κοινοτήτων αποφάσισαν να δενδροφυτεύσουν τον δρόμο που συνδέει τις δύο κοινότητες. Φύτευσαν λεύκες, όπως δείχνει η εικόνα, σε απόσταση 15 μέτρων την μία από την άλλη. Συνολικά χρειάστηκε να φυτεύσουν 402 λεύκες. Πόσο μήκος έχει ο δρόμος;



Α) 3 km

Β) 4,02 km

Γ) 40,2 km

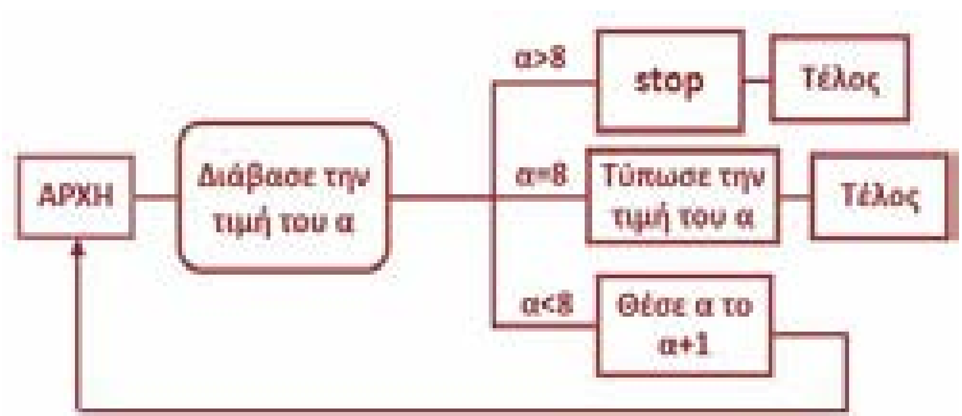
Δ) 402 km

Ε) Κανένα από τα προηγούμενα

Αλγοριθμική ικανότητα

Διαθέτουμε σε ψηφιακή μορφή στον υπολογιστή μας το ζάρι της εικόνας σε 3d, το οποίο έχει 12 έδρες.

Κάθε φορά που κάνουμε κλικ πάνω στην εικόνα το εικονικό ζάρι περιστρέφεται τυχαία και σταματά σε κάποια θέση. Το αποτέλεσμα του ζαριού εισάγεται αυτομάτως στο παρακάτω πρόγραμμα το οποίο ξεκινά από την ΑΡΧΗ:

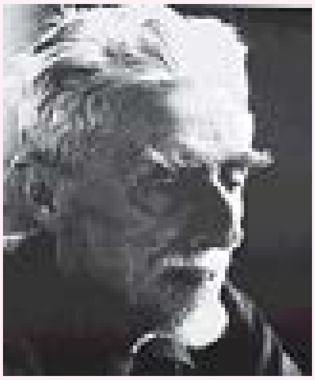


Ρίχνεις το ζάρι (κάνεις κλικ πάνω του) 12 φορές πόσα **διαφορετικά** αποτελέσματα μπορεί να εμφανιστούν στην οθόνη σου;

Α) 12 **Β)** 8 ή 12 **Γ)** 2 ή 8 **Δ)** 1 ή κανένα **Ε)** κανένα

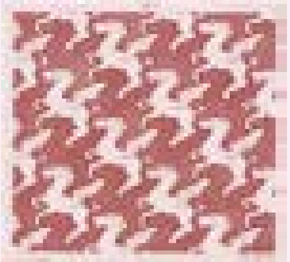
Escher και μοτίβα

Μάριος Καμμένος (Μαθητής - Αγρίνιο)



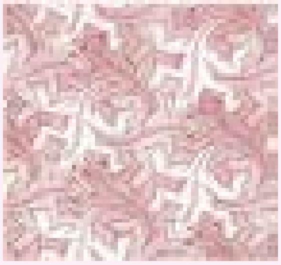
Maurits Cornelis Escher (1898-1972)
Ολλανδός χαράκτης που εμπνεύστηκε από τις αρχές της Προβολικής Γεωμετρίας, τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, την Τοπολογία και τις 17 ομάδες συμμετρίας του επιπέδου για να δημιουργήσει πίνακες επαναλαμβανόμενων σχεδίων που δίνουν την ψευδαίσθηση του απείρου, καθώς και αδύνατες παραδοξολογικές κατασκευές.

Στο άρθρο αυτό θα δούμε πως ο Έσερ σχεδίασε χαρακτικά όπως τα:



Χαρακτικό 1

Χαρακτικό 2



Χαρακτικό 3

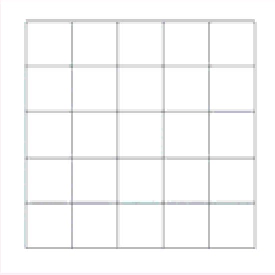
Πώς ο Έσερ σχεδίασε τα χαρακτικά του που γέμιζαν το επίπεδο με το ίδιο μοτίβο;
Στηρίχθηκε στην πλακόστρωση του επιπέδου με ίσα κανονικά πολύγωνα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Με ποια είδη ίσων κανονικών πολυγώνων μπορούμε να πλακοστρώσουμε το επίπεδο;

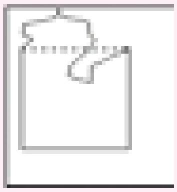
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

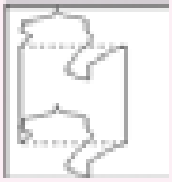
- Το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές άρα κάθε γωνία ενός κανονικού ν-γώνου είναι $\varphi = \frac{2\nu-4}{\nu}$ ορθές.
- Έστω ότι γύρω από ένα σημείο Ο στο επίπεδο τοποθετούνται κ το πλήθος ίσα πολύγωνα, που δεν αφήνουν κενό μεταξύ τους, τότε: κφ = 4 ορθές $\Leftrightarrow \kappa\frac{2\nu-4}{\nu} = 4 \Leftrightarrow \kappa\frac{\nu-2}{\nu} = 2 \Leftrightarrow$ κν-2κ = 2ν$\Leftrightarrow$(κ-2)ν = 2κ $\Leftrightarrow \nu = \frac{2\kappa}{\kappa-2} = \frac{2(\kappa-2)+4}{\kappa-2} = 2+\frac{4}{\kappa-2}$ και επειδή ο ν είναι θετικός ακέραιος με ν≥3 πρέπει και ο $\frac{4}{\kappa-2}$ να είναι θετικός ακέραιος, άρα κ-2 = 1 ή κ-2 = 2 ή κ-2 = 4 $\Leftrightarrow$ κ=3 ή κ=4 ή κ-6 οπότε ν = 6 ή ν = 4 ή ν = 3, δηλαδή το επίπεδο πλακοστρώνεται με ισόπλευρα τρίγωνα ή ίσα τετράγωνα ή ίσα κανονικά εξάγωνα.

Για το **Χαρακτικό 1** ο Έσερ ακολούθησε τα βήματα:
Αρχικά γέμισε το επίπεδο με τετράγωνα

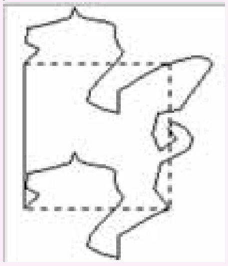


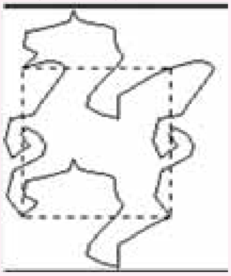
Έπειτα έφτιαξε μία καμπύλη που ενώνει τα σημεία έστω Α και Β ενός τετραγώνου και μετά απλά αντέγραψε την καμπύλη στην παράλληλη πλευρά, χωρίς όμως οι καμπύλες να είναι συμμετρικές.





Ύστερα έκανε το ίδιο και για τις άλλες δύο πλευρές.



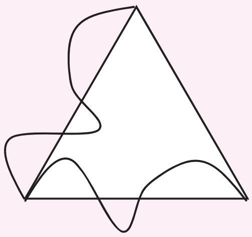


Τελικά έσβησε τις αρχικές πλευρές του τετραγώνου.

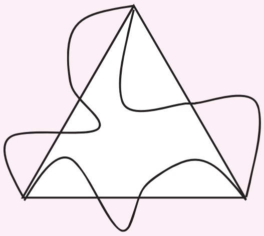
Μέτα συνέχισε τη διαδικασία αυτή για όλα τα τετράγωνα του επιπέδου.

Για το **Χαρακτικό 2** ακολούθησε μία διαφορετική διαδικασία.
Ως βάση χρησιμοποίησε ισόπλευρα τρίγωνα. Ένωσε με μία καμπύλη δύο σημεία του σχήματος και μετά περιέστρεψε την καμπύλη γύρω από ένα σημείο 60 μοίρες έως ούτω φτάσει στο άλλο σημείο. **(1ο βήμα)** Συνέχισε μετά βρίσκοντας το μέσο της τρίτης πλευράς και συνδέοντας το με μία από τις κορυφές της τρίτης πλευράς με μία καμπύλη. Τέλος περιέστρεψε την καμπύλη αυτή 180 μοίρες γύρω από το σημείο έως ότου συνδεθούν το μέσο με την άλλη κορυφή.(**2ο βήμα**)

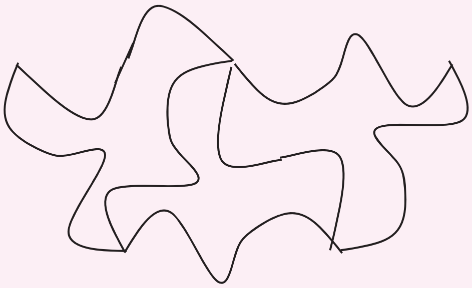
1ο βήμα



2ο βήμα



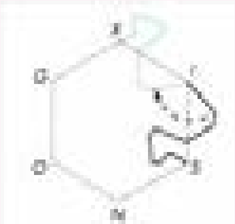
Αποτέλεσμα



Τέλος για το **3ο Χαρακτικό** έκανε σχεδόν το ίδιο.
Γέμισε το επίπεδο με κανονικά εξάγωνα. Έπειτα ένωσε με μία καμπύλη δύο κορυφές ενός εξαγώνου και μετά περιέστρεψε την καμπύλη γύρω από μία από αυτές τις δύο κορυφές 120 μοίρες έως ότου φτάσει την τρίτη κορυφή. Επανέλαβε το ίδιο για τα δύο άλλα ζευγάρια κορυφών και μετά για κάθε εξάγωνο του επιπέδου και έσβησε και τις αρχικές πλευρές των εξαγώνων.

1ο βήμα

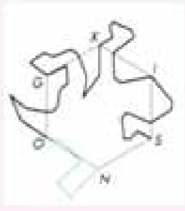
2ο βήμα



3ο βήμα

4ο βήμα

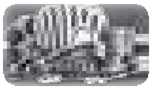
5ο βήμα



6ο βήμα

Βιβλιογραφία

1. E.B. Burger, M. Starbird, The Heart of Mathematics, Key College Publishing, USA 2000.
2. H.R. Jacobs, Mathematics A Human Endeavor, W.H. Freeman and Company, New York 1982.
3. H.R. Jacobs, Geometry, W.H. Freeman and Company, San Francisco 1974.
4. L.C. Kinsey, T.E. Moore, E. Prassidis, Geometry & Symmetry, John Wiley & Sons, Inc., USA 2011
5. M. Serra, Discovering Geometry, Key Curriculum Press, USA 1997



Πάμε σινεμά με ποπ-κορν;

Βαρβάρα Γεωργιάδου-Καμπουρίδη Τάκης Κάββουρας

Συνήθως, όταν πάμε σινεμά, παίρνουμε ποπ-κορν σε ένα χρωματιστό κουτί που μας προκαλεί να το μελετήσουμε γιατί αγαπάμε τα μαθηματικά και τα βλέπουμε παντού (!).

Ας κάνουμε γι' αυτό ένα πείραμα:
Θα χρειαστούμε αρχικά τα εξής υλικά:

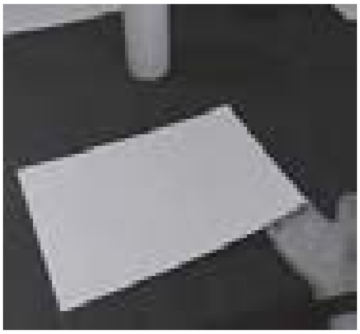
- Τρία φύλλα χαρτί Α4 διαφορετικού χρώματος (το γνωστό χαρτί για φωτοτυπίες). Με το λευκό χαρτί θα κατασκευάσουμε τον κύλινδρο Α, με το κίτρινο χαρτί τον κύλινδρο Β και με το πορτοκαλί χαρτί τους κύκλους των βάσεων.
- Ένα διαβήτη, ένα χάρακα κι ένα μολύβι (για να κατασκευάσουμε τους κύκλους των βάσεων των δύο κυλίνδρων).
- Ψαλίδι και σελοτέιπ.

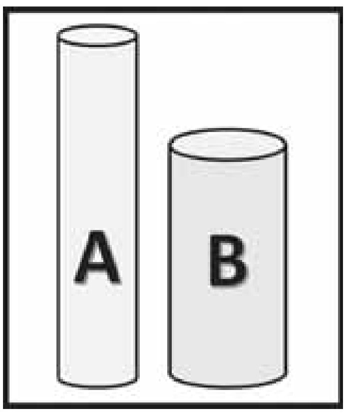
Πάρε το ένα από τα χαρτιά και τύλιξέ το κατά μήκος της μακρύτερης πλευράς για να σχηματίσεις έναν κύλινδρο χωρίς βάσεις.

Ο κύλινδρος είναι ψηλός και στενός.

Χωρίς να επικαλύπτεις τις πλευρές, βάζεις σελοτέιπ εκεί που συναντούνται οι δυο άκρες. Τον ονομάζεις κύλινδρο Α.

Τώρα, παίρνεις το δεύτερο χαρτί και το τυλίγεις κατά μήκος της μικρότερης πλευράς για να σχηματίσεις πάλι έναν κύλινδρο χωρίς βάσεις. Ο κύλινδρος αυτός είναι κοντός και φαρδύς. Τον ονομάζεις κύλινδρο Β.





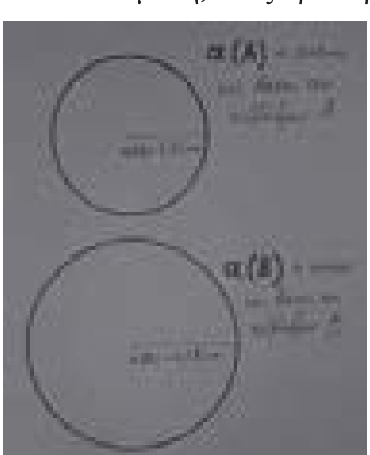
Το ερώτημα που βάζεις στην παρέα των φίλων σου είναι:

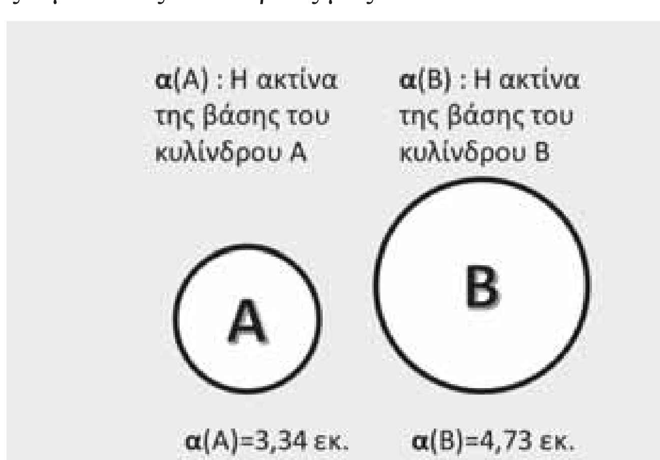
Ποιος από τους δυο κυλίνδρους χωράει περισσότερο ποπ-κορν; Ο Α ή ο Β;

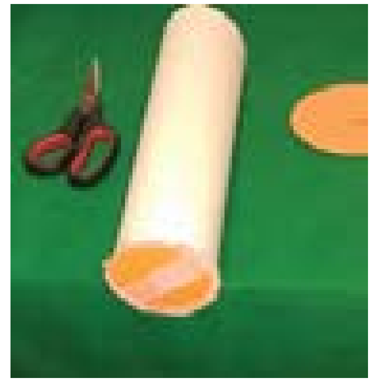
Πριν απαντήσουμε στο ερώτημα, καλό θα ήταν με το τρίτο χαρτί Α4 να κατασκευάσουμε τις βάσεις των δύο κυλίνδρων για να μπορούμε να τους γεμίσουμε με πο - κορν.

Η περιφέρεια του Α κυλίνδρου θα έχει μήκος 21 εκ. Αν συμβολίσουμε με α(Α) την ακτίνα του τότε θα ισχύει $21 = 2\pi\cdot\alpha(A)$ ή $21 = 2\cdot3{,}14\cdot\alpha(A)$ κι έτσι βρίσκουμε ότι $\alpha(A) = 3{,}34$ εκ.

Η περιφέρεια του Β κυλίνδρου θα έχει μήκος 29,7 εκ. Αν συμβολίσουμε με α(Β) την ακτίνα του τότε θα ισχύει $29{,}7 = 2\pi\cdot\alpha(B)$ ή $29{,}7 = 2\cdot3{,}14\cdot\alpha(B)$ κι έτσι βρίσκουμε ότι $\alpha(B) = 4{,}73$ εκ.
Σχεδιάζουμε τους δύο κύκλους, τους κόβουμε με προσοχή με το ψαλίδι μας και τέλος, με λίγο σελοτέιπ και υπομονή, τους προσαρμόζουμε στους κυλίνδρους μας.







(Δες τον υπολογισμό πιο αναλυτικά στη σελίδα 4)

Τώρα είσαι έτοιμος να αντιμετωπίσεις το πρόβλημα. Σε ποιον από τους δύο κυλίνδρους θα χωρέσουν τελικά τα περισσότερα ποπ – κορν;

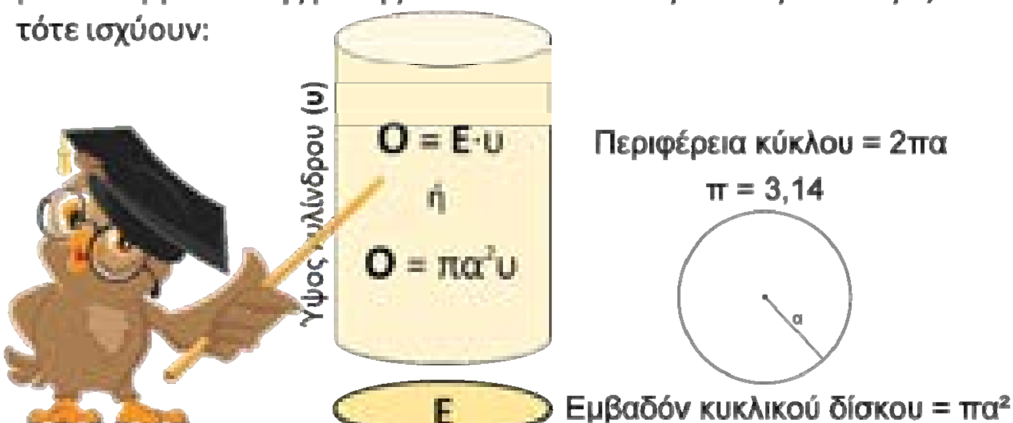
Οι φίλοι σου κάνουν υποθέσεις. Οι περισσότεροι ισχυρίζονται ότι εφόσον οι διαστάσεις του χαρτιού είναι ίδιες, οι κύλινδροι θα χωρούν την ίδια ποσότητα ποπ-κορν. Κάποιοι άλλοι θεωρούν ότι ο Α χωράει μεγαλύτερη ποσότητα και άλλοι υποθέτουν ότι ο Β. Πριν τους δώσεις την κούπα για να μετρήσουν πόσες κούπες ποπ-κορν χωράει ο κάθε κύλινδρος...τους καλείς να εφαρμόσουν τα μαθηματικά που ήδη γνωρίζουν για να επιβεβαιωθούν ή να απορριφθούν ανάλογα οι υποθέσεις τους.

Ας δούμε, λοιπόν, ποια βήματα χρειάζονται για να απαντηθεί το ερώτημα:

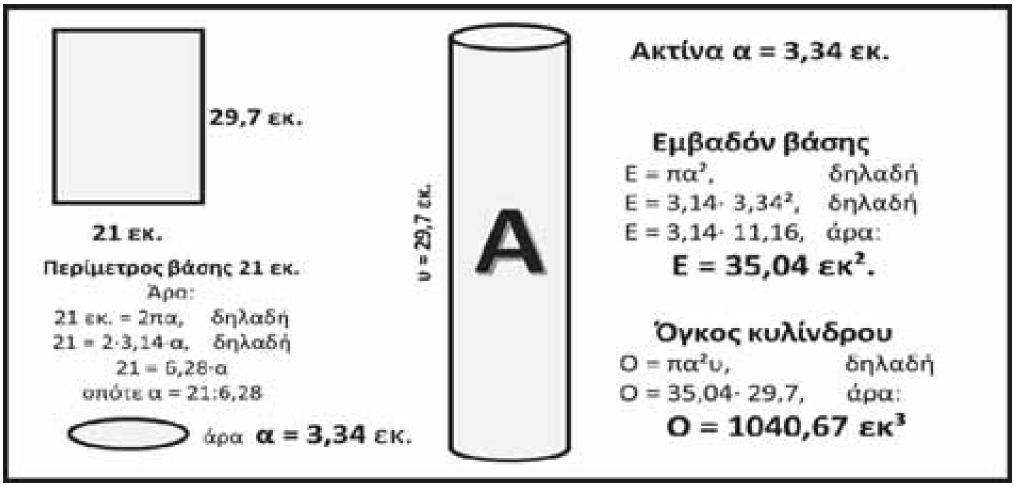
Βήμα 1ο: Όταν το ρήμα "χωράει" αναφέρεται σε ένα στερεό, τότε παραπέμπει στον όγκο του. Επομένως πρέπει να βρεθούν οι όγκοι των δύο κυλίνδρων.

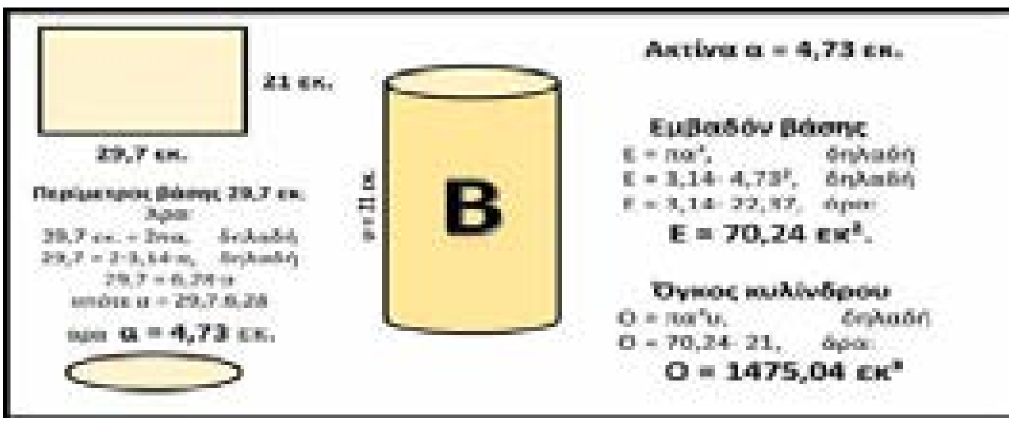
Βήμα 2ο: Πώς βρίσκουμε τον όγκο ενός κυλίνδρου;

Αν συμβολίσουμε με Ο τον όγκο του κυλίνδρου, με υ το ύψος του και με Ε το εμβαδόν της βάσης του που είναι ένας κύκλος ακτίνας α, τότε ισχύουν:



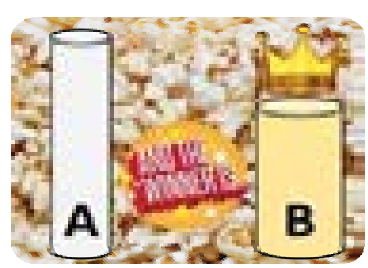
Βήμα 3ο: Προσδιορίζουμε το ύψος (υ) την ακτίνα (α) και τέλος τον όγκο (Ο) για κάθε κύλινδρο όπως φαίνεται στις κάρτες που ακολουθούν.





**Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον χάρακα για να μετρήσεις την ακτίνα στη βάση των κυλίνδρων Α και Β αντί να κάνεις τις πράξεις.*

***Μπορείς να επιβεβαιώσεις τα αποτελέσματα μετρώντας πόσες κούπες ποπ-κορν θα χρειαστείς για να γεμίσεις τον καθένα.*



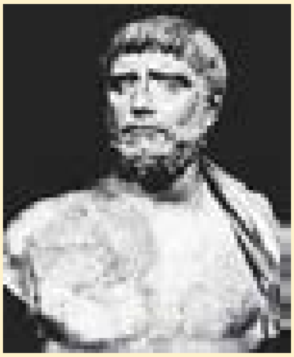
Τώρα, είσαι σε θέση να επιλέξεις για σένα και τους φίλους σου τον κύλινδρο Β που αποδεικνύεται πως έχει μεγαλύτερο όγκο, άρα χωράει περισσότερο ποπ-κορν. Εκτός εάν...προσέχετε τη διατροφή σας ή κάνετε δίαιτα (!)

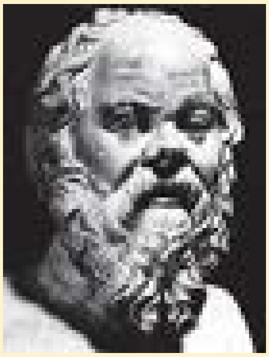
Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Η μαγεία των αριθμών και των γρίφων

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Η παιδεία είναι ο δεύτερος ήλιος των ανθρώπων.
Πλάτωνας


Θαλής

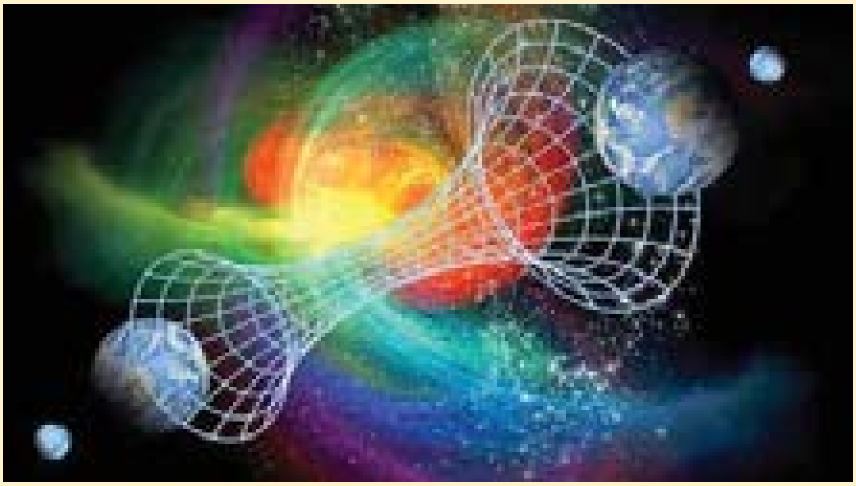

Σωκράτης


Αρχιμήδης

Μια ματιά στο παρελθόν και το μέλλον.

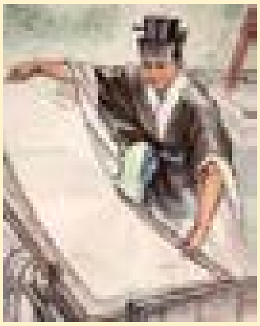
❖ **Το Σύμπαν** είναι φτιαγμένο από... μαθηματικά.

Ένας διάσημος επιστήμων της κοσμολογίας, ο **Μαξ Τέγκμαρκ**, είπε ότι «**κάθε τι που υπάρχει στον κόσμο, από τα άψυχα πράγματα ως τα έμψυχα όντα, αποτελεί μέρος μιας μαθηματικής δομής».**

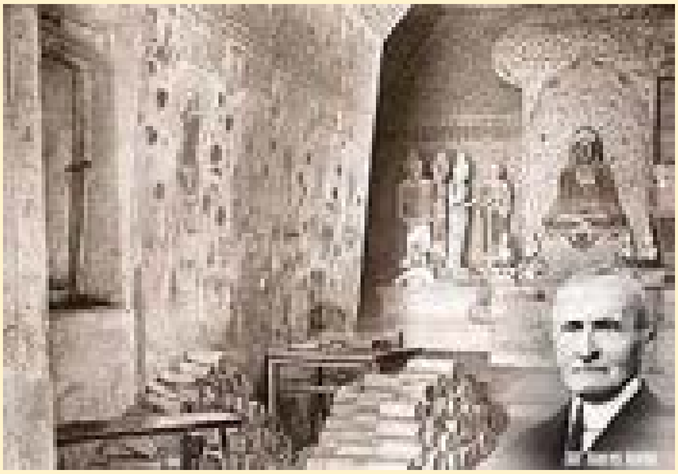


❖ **Στην Κίνα το 105 μ.Χ.** ο **Τσάι Λουν** με υλικά όπως φλοιό δέντρων, ίνες κάνναβης, παλιά κουρέλια και κομμάτια μετάξι **κατασκεύασε χαρτί**.



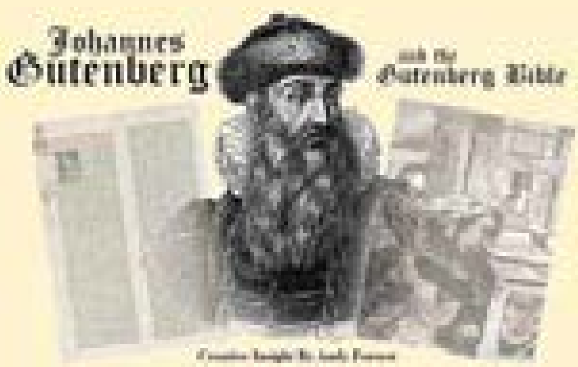


❖ Το 1907 ο αρχαιολόγος **Marc Aurel Stein**, βρήκε σε πύργο του Σινικού Τείχους κιβώτιο που περιείχε εννέα επιστολές γραμμένες σε χαρτί από το έτος 137 μ. Χ..

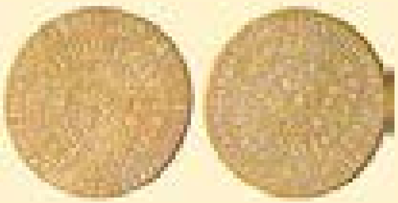


❖ Η τυπογραφία

Το 2^{o} αιώνα μετά την ανακάλυψη του χαρτιού οι Κινέζοι ανακάλυψαν **την τυπογραφία**. Οι Αιγύπτιοι, οι Έλληνες και οι Ρωμαίοι έκαναν αντίγραφα των βιβλίων με το χέρι, με τη χρήση πένας ή πινέλου με μελάνι. Με παρόμοιο τρόπο γινόταν και η αντιγραφή βιβλίων στα μεσαιωνικά μοναστήρια. Μια πρωτόγονη μορφή τυπογραφίας είναι η χρήση σφραγιδόλιθων από τους Βαβυλώνιους και κεραμικές ή ξύλινες σφραγίδες από άλλους λαούς. Τον 13^{o} αιώνα στην Κορέα εμφανίστηκαν και τα πρώτα μεταλλικά στοιχεία. Η τυπογραφία ουσιαστικά ξεκίνησε τον 15^{o} αιώνα στην Ευρώπη, με την εφεύρεση του επίπεδου πιεστηρίου από τον Ιωάννη Γουτεμβέργιο.




Το πρώτο βιβλίο που τύπωσε ο Γουτεμβέργιος το 1455 ήταν η Βίβλος στην λατινική της μετάφραση (Βουλγάτα) σε 180 αντίτυπα από τα οποία σώζονται τα 48. Η



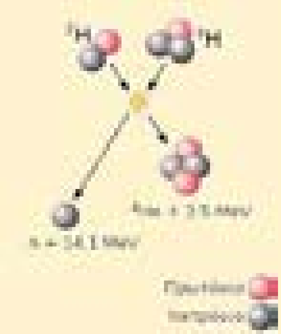
ευκολία με την οποία μπορούσαν να παραχθούν βιβλία επέτρεψε να τυπωθούν συγγράμματα αρχαίων Ελλήνων και Ρωμαίων συγγραφέων, που έως τότε αναπαράγονταν μόνο από αντιγραφείς σε μοναστήρια. Έτσι προχωρήσαμε και σήμερα μπορούμε να τυπώνουμε-κατασκευάζουμε αντικείμενα με τους 3D Printer.

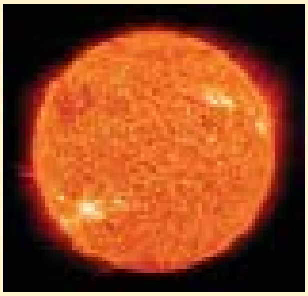
❖ Ο Κβαντικός Υπολογιστής

Η εξέλιξη του Η/Υ είναι ο Κβαντικός Υπολογιστής. Η ιδέα για έναν κβαντο υπολογιστή ήταν από τη 10ετία του 1970-80. O Richard Phillips Feynman (Ρίτσαρντ Φίλιπς Φάινμαν 1918-1988), ήταν Αμερικανός φυσικός, από τους σημαντικότερους θεωρητικούς φυσικούς. Ο Φάινμαν το 1965 τιμήθηκε και με το Βραβείο Νόμπελ Φυσικής για τη δουλειά του στην κβαντική ηλεκτροδυναμική. O Richard Feynman πριν 40 χρόνια υποστήριξε ότι ένα κβαντικό σύστημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμούς. Τι είναι αυτό που ονειρεύτηκε ο Φάινμαν; Η λειτουργία ενός κβαντο υπολογιστή είναι δυσνόητη αλλά μπορούμε να πούμε σε γενικές γραμμές τα εξής: ότι στον κλασικό υπολογιστή το Bit μπορεί να έχει μόνο την τιμή 1 ή 0, ενώ στον κβαντικό υπολογιστή το Qubit μπορεί να έχει 1 ή ο ή οποιαδήποτε υπέρθεση αυτών. Έτσι μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα, ένα πρόγραμμα για τις δύο τιμές του κάθε Qubit, «μαζικός κβαντικός παραλληλισμός», δηλαδή τα 100 Qubits αντιστοιχούν σε 2100 Bits. Αλλά κάτι άλλο παράξενο που συμβαίνει στους κβαντικούς υπολογιστές, είναι ένα φαινόμενο που όταν δύο ηλεκτρόνια δημιουργηθούν μαζί μένουν σε κατάσταση διεμπλοκής μεταξύ τους όσο μακριά και να είναι το ένα από το άλλο μέσα στο σύμπαν. Αν τώρα κάνουμε κάτι στο ένα, ακαριαία αντιδρά και το άλλο. Πολλοί επιστήμονες εργάζονται στην κατασκευή του κβάντο υπολογιστή. Οι υπερδυνάμεις Αμερική, Ρωσία, Κίνα καθημερινά σχεδόν κάνουν ανακοινώσεις για τις προσπάθειες τους. Η Κβαντική Υπεροχή τελικά εξελίσσεται σε έναν αγώνα μεταξύ των υπερδυνάμεων για την απόκτηση ενός υπερόπλου, κάτι σαν τα πυρηνικά τον 20ου αιώνα. Ο ανταγωνισμός σίγουρα θα φέρει αποτελέσματα μέσα σε αυτή τη 10ετία. Ξέρετε όμως πιο είναι το όπλο αυτού του αγώνα; Ποιο άλλο από τα μαθηματικά. Καμία μηχανή δεν έχει ψυχή, την ψυχή την δίνουν τα μαθηματικά. Οι μαθηματικοί τώρα δουλεύουν πυρετωδώς για να βρουν τον κατάλληλο αλγόριθμο που θα δώσει την ικανότητα στον κβαντο υπολογιστή να κάνει θαύματα. Με τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία που θα αναπτυχθούν, αυτοί οι υπολογιστές με τις αστρονομικές ταχύτητες, θα φέρουν υπεράνθρωπα αποτελέσματα και θα μεταβάλλουν τη ζωή μας.

❖ Η Σύντηξη Υδρογόνου

Στα παλιά χρόνια όταν οι άνθρωποι δεν ζούσαν σε πόλεις, φρόντιζαν μόνοι τους για όλες τις ανάγκες της ζωής τους, μέσω της γεωργίας, της κτηνοτροφίας, της χειροτεχνίας για την κατασκευή ενδυμάτων, αντικειμένων και εργαλείων. Στις σημερινές κοινωνίες με τον τρόπο που έχει οργανωθεί η ζωή μας, είναι μεγάλες οι ανάγκες για ενέργεια. Ενέργεια να κινηθούμε, να θερμανθούμε, να τραφούμε, να ντυθούμε, να γίνουν τα αντικείμενα και εργαλεία, κ.ά. Ο λιγνίτης, το πετρέλαιο, η αιολική και ηλιακή ενέργεια δεν αρκούν πλέον και η πυρηνική ενέργεια κρύβει πολλούς κινδύνους. Τι πρέπει να γίνει για την ευημερία των μελλοντικών γενεών; Τι άλλο από ενέργεια όπως παράγεται στην καρδιά του ήλιου με την σύντηξη του υδρογόνου σε Ήλιο.





αντίδραση σύντηξης

❖ Ο Τεχνητός Ήλιος

Ένα μεγάλο διεθνές επιστημονικό πρόγραμμα, το διεθνές πρόγραμμα ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) έχει ξεκινήσει από το 2006 με τη συμμετοχή 35 χωρών, των χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, της Ελβετίας, της Ρωσίας, των Ηνωμένων Πολιτειών, της Κίνας, της Ινδίας, της Ιαπωνίας και της Νότιας Κορέας.

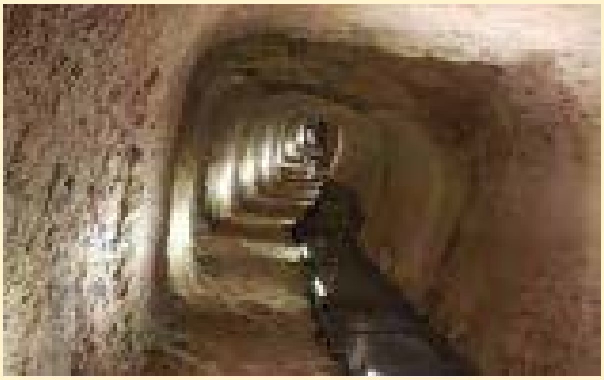
Ένας τεράστιος αντιδραστήρας σύντηξης κατασκευάστηκε στη Νότια Γαλλία. Οι επιστήμονες προσπαθούν να πετύχουν την σύντηξη σε ισότοπα του υδρογόνου(δευτέριο ή τρίτιο). Η αντίδραση της πυρηνικής σύντηξης είναι αντίθετη της πυρηνικής σχάσης και έχει το πλεονέκτημα ότι δεν παράγει ραδιενεργά απόβλητα όπως οι πυρηνικοί αντιδραστήρες. Ο αντιδραστήρας έχει ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο για να κρατάει το καυτό πλάσμα στον αέρα και να μην αγγίζει τα τοιχώματά του γιατί δεν θα άντεχαν σε τέτοιες θερμοκρασίες.

Με την θέρμανση αυτών των αερίων του υδρογόνου σε υψηλές θερμοκρασίες(150 εκατομμύρια βαθμοί κελσίου), προκαλούνται συγκρούσεις των πυρήνων των ατόμων του υδρογόνου που τελικά συνενώνονται δημιουργώντας σταδιακά πυρήνες ενός άλλου στοιχείου(μεταστοιχείωση) του ηλίου, εκλύοντας ταυτόχρονα μεγάλες ποσότητες θερμικής ενέργειας. Οι ενδείξεις είναι ότι οι αντιδράσεις αυτές αφού ξεκινήσουν διατηρούνται όπως μια φωτιά που καίει αδιάκοπα. Οι τελευταίες ανακοινώσεις ομιλούν για επιτυχία των πειραμάτων και οι επιστήμονες είναι αισιόδοξοι. Η πυρηνική σύντηξη είναι η μόνη πηγή ενέργειας που είναι ανεξάντλητη και που μπορεί να διατηρηθεί όσο θα υπάρχει ο πλανήτης μας.

Η σκέψη του ανθρώπου και η επιθυμία για μια πηγή που θα δίνει απεριόριστη και ανεξάντλητη ενέργεια είναι παλιά. Ένας μεγάλος εφευρέτης στην ηλεκτρική ενέργεια, ο Νίκολα Τέσλα ήταν ο πρώτος που έκανε προσπάθειες για να αντλήσει ηλεκτρική ενέργεια από τα άπειρα αποθέματα που έχει η Γη.

❖ Οι σήραγγες

Οι άνθρωποι τα παλιά χρόνια μπορούσαν να κινηθούν πάνω στη Γη δια ξηράς ή δια θαλάσσης. Σήμερα κινούμαστε και με τα αεροπλάνα, αλλά το σημαντικό είναι ότι κινούμαστε εύκολα και εντός των πόλεων με το μετρό. Ποιος όμως είναι εκείνος που πρώτος τρύπησε ένα βουνό; Είναι ο Ευπαλίνος, γιος του Ναυστρόφου από τα Μέγαρα. Σχεδίασε και κατασκεύασε τον 6ο αιώνα π.Χ. το Ευπαλίνειο Όρυγμα της Σάμου που ο Ηρόδοτος βλέποντάς το εντυπωσιάστηκε. Ένα αξεπέραστο θαύμα της μηχανικής και των μαθηματικών, όρυγμα μήκους χιλίων μέτρων για να μεταφέρει δια μέσου αυτού το νερό πηγής στο Πυθαγόρειο της Σάμου. Ο σπουδαίος αυτός μηχανικός, με απλά όργανα μέτρησης, με κασμάδες, με βαριοπούλες και πολύπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς, κατάφερε να διανοίξει σε 10 χρόνια, μια σήραγγα σκάβοντας και από τις δυο πλαγιές του βουνού. Η λειτουργία του υδραγωγείου συνεχίστηκε για περίπου 1.000 χρόνια. Η ανασκαφή έγινε από το Γερμανικό Αρχαιολογικό Ινστιτούτο, τη δεκαετία του 1970, το έργο από το 1992 είναι στον κατάλογο των μνημείων παγκόσμιας πολιτιστικής κληρονομιάς της UNESCO και το 2015 η Διεθνής Ένωση Σηράγγων το ανακήρυξε ως «Παγκόσμιο Σηραγγολογικό Τοπόσημο».



ΓΡΙΦΟΙ

Αίνιγμα

Το όνομά του έχει περισσότερα φωνήεντα από σύμφωνα. Αν του κόψεις το κεφάλι θα βρεις το χρόνο, αν βάλεις το κεφάλι στην ουρά του σε χαρακτηρίζει άσχημα και ανορθόγραφα, όμως είναι πουλί. Ποιο πουλί είναι;

Η ηλικία της Άννας

Η Άννα έχει γενέθλια και τη ρωτούν για την ηλικία της. Εκείνη απαντά: **«Η ηλικία μου καθώς και οι ηλικίες της μικρότερης και μεγαλύτερης αδελφής μου είναι διαδοχικοί πρώτοι αριθμοί. Αν αθροίσουμε τις ηλικίες μας θα πάρουμε επίσης πρώτο αριθμό. Πριν τρία χρόνια το ήμισυ του αθροίσματος των ηλικιών μας ήταν τέλειο τετράγωνο»**. Ποια ηλικία έχει η Άννα και οι αδελφές της;

Μάντεψε

Ζητήστε από το φίλο σας να γράψει ένα 3ψήφιο αριθμό και να επαναλάβει τα ψηφία του ώστε να γίνει 6ψήφιος. Ύστερα να διαιρέσει τον 6ψήφιο δια 13 και να σας πει το πηλίκο. Εσείς τώρα μπορείτε να βρείτε τον 3ψήφιο που σκέφτηκε. Πως;

Το σακί

Ένας αγρότης πουλάει σιτάρι σε σακιά δύο μεγεθών. Το μεγάλο σακί είχε ύψος 80 εκατοστά και περιφέρεια 60, το μικρό έχει το ίδιο ύψος και περιφέρεια 30 εκατοστά. Ένα μεγάλο σακί πωλείται 60€ και ένα μικρό 20€. Αν αγοράσει κάποιος τρία μικρά σακιά σιτάρι και όχι ένα μεγάλο κερδίζει ή χάνει σε ποσότητα.

Η μαγεία των αριθμών

Το 2022

Με τόσους και άλλους τόσους τρόπους μπορείς να γράψεις το 2022.

2022= 2x2x2x2x2x3x3x7+2χ3

$2022=(2^8-2^2)2^3+2^2+2$

$2022=2+2^2+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}$

2022=8x8+8+88+88+888+888-2

2022=6+6+6+6+666+666+666

2022=9+9+999+999+6

2022=2x3+2x3x6x7x8

$2022=8-8^0-8^0+8x8+88+88+888+888$

$2022= 2^1+2^2+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}$

$2022= 2^6 \times 2^5-2^3x3-2^1$

$2022=\frac{8^4}{2}-\frac{8^2}{2}+\frac{8}{2}+2$

Οι δυνάμεις

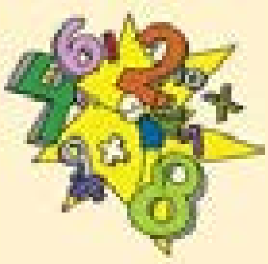
Οι βάσεις των δυνάμεων σχηματίζουν το αποτέλεσμα

$1^3+5^3+3^3=153$ και $135=1^1+3^2+5^3$

$16^3+50^3+33^3=165033$

$166^3+500^3+333^3=166500333$

$1666^3+5000^3+3333^3=166650003333$



Ο Αριθμός $αβγ=α^1+β^2+γ^3$

$043=0^1+4^2+3^3$	**$371=3^3+7^3+1^3$**
$063=0^1+6^2+3^3$	**$407=4^3+0^3+7^3$**
$135=1^1+3^2+5^3$	**$518=5^1+1^2+8^3$**
$175=1^1+7^2+5^3$	**$598=5^1+9^2+8^3$**

και **135=(1+3+5)(1x3x5)**

144=(1+4+4)(1x4x4)

4^{ος} Διαγωνισμός Μαθηματικών ικανοτήτων
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

Σάββατο 12 Μαρτίου 2022

για μαθητές
Β΄, Γ΄-Δ΄, Ε΄-Στ΄ Δημοτικού
Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου

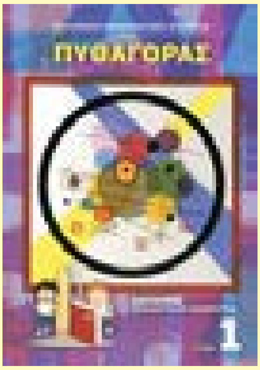
Εγγραφές στα κέντρα του διαγωνισμού από 10 Ιανουαρίου έως 8 Μαρτίου 2022

Ο Διαγωνισμός θα γίνει ηλεκτρονικά

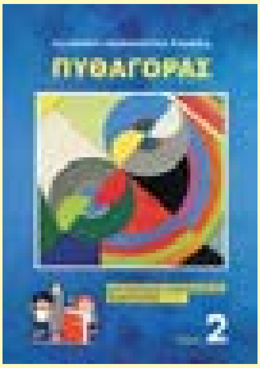
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

Σάββατο 12 Μαρτίου 2022

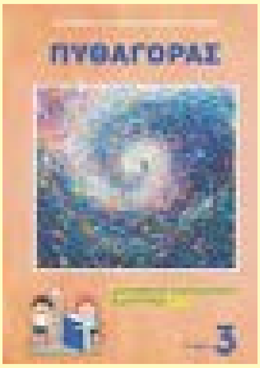
Περιοδικά του Διαγωνισμού Πυθαγόρα



ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ - ΤΕΥΧΟΣ 1
ISSN: 2653-9551
21X29 εκ. - σελ. 96 - Τ: 10€



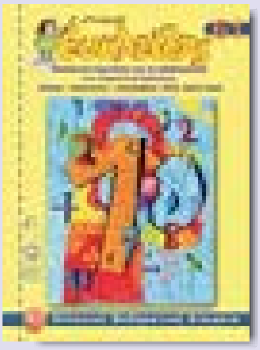
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ - ΤΕΥΧΟΣ 2
ISSN: 2653-9551
21X29 εκ. - σελ. 96 - Τ: 10€



ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ - ΤΕΥΧΟΣ 3
ISSN: 2653-9551
21X29 εκ. - σελ. 96 - Τ: 10€

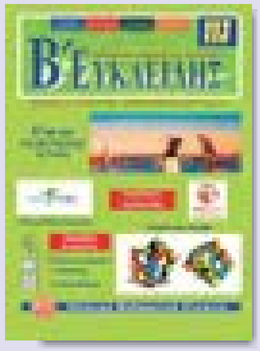
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά

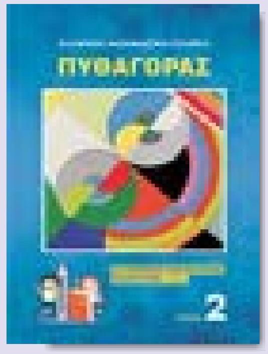


Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€



Τιμή τεύχους: 3,5€



Τιμή τεύχους: 10€

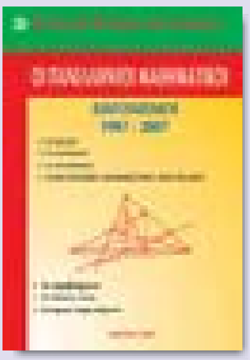
Διαγωνισμοί

Τιμή βιβλίου: 12€

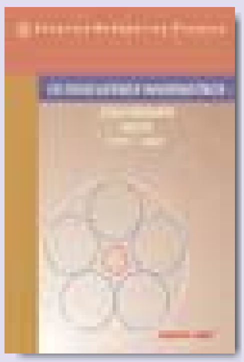
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

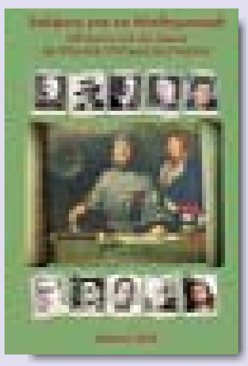


Τιμή βιβλίου: 20€

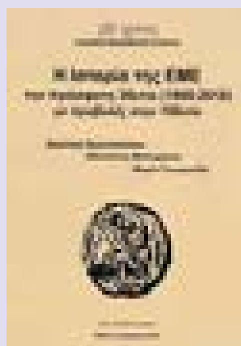
Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€



Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr