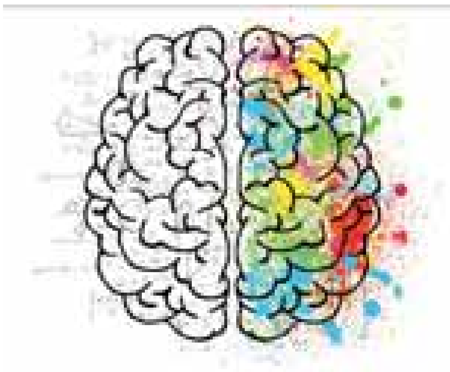
126

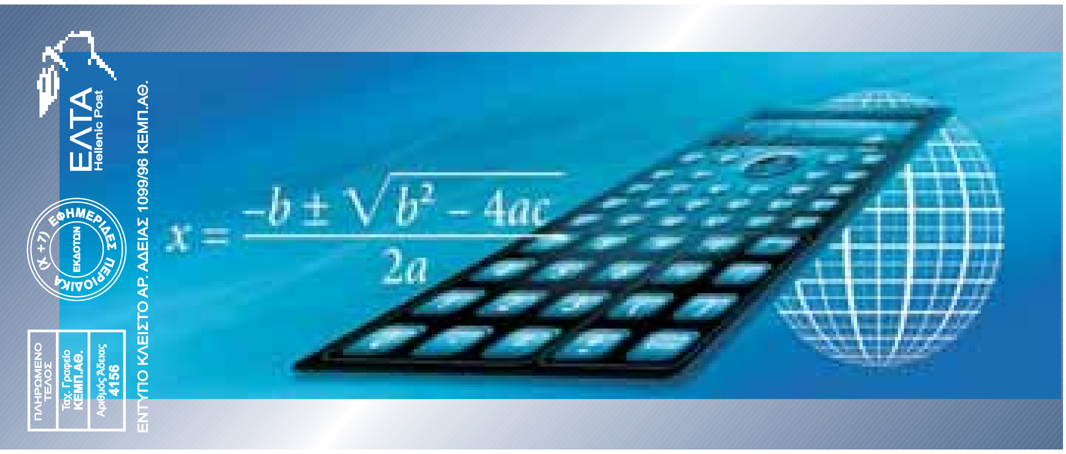
Μαθηματικό περιοδικό για το

Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2022 ευρώ 3,00





Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 126
Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2022
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ιωάννης Εμμανουήλ
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

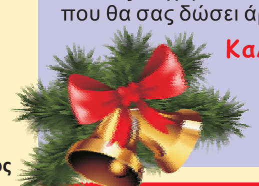
Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

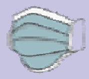
Ήδη έχει περάσει ένα τρίμηνο από τη σχολική χρονιά και το περιοδικό μας κυκλοφορεί με το δεύτερο τεύχος του. Η συντακτική μας επιτροπή ενημερώνετε για τις όποιες αλλαγές κάνει το Υπουργείο ώστε να είναι σύμφωνη και η ύλη του περιοδικού. Σε λίγες μέρες έχουμε τις διακοπές των Χριστουγέννων και της Πρωτοχρονιάς για μια μικρή ξεκούραση.

Σας ευχόμαστε ολόψυχα ΚΑΛΕΣ ΓΙΟΡΤΕΣ, και μια λαμπρή ΝΕΑ ΧΡΟΝΙΑ που θα σας δώσει άριστες επιδόσεις στα μαθήματά σας.



Καλές Γιορτές Χρόνια Πολλά - Καλή Χρονιά.

Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.



Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα** τα **άθρα** υπόκειται **σε κρίση**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Ο Terence Chi-Shen Tao

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

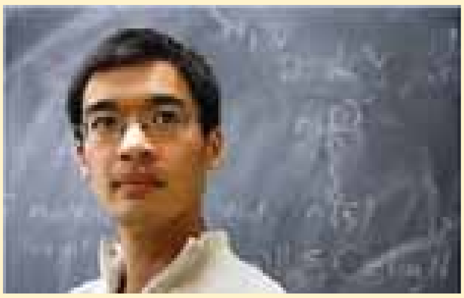
Ο μικρότερος στον κόσμο βραβευμένος με όλα τα μετάλλια στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Ο Τέρενς Τάο γεννήθηκε το 1975 στη Αυστραλία.

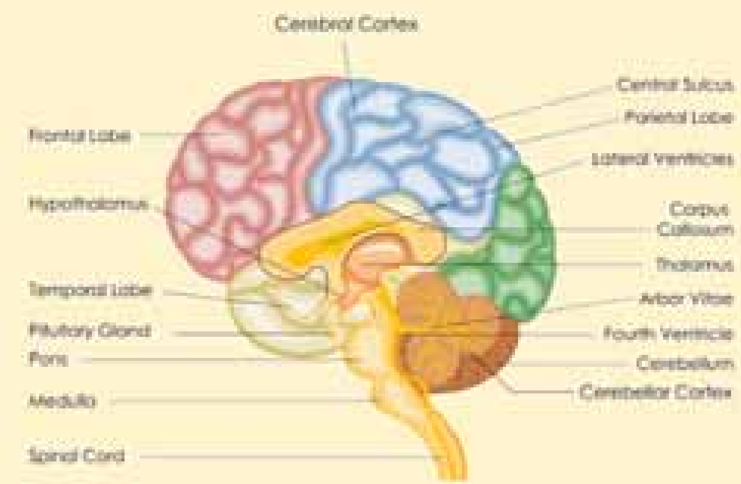
Ο Τάο ήταν «**παιδί θαύμα**», επέδειξε εξαιρετικές μαθηματικές ικανότητες από νεαρή ηλικία, μάθαινε με την μητέρα του βασική αριθμητική από την ηλικία των δύο ετών, και παρακολουθούσε μαθήματα μαθηματικών πανεπιστημιακού επιπέδου σε ηλικία 9 ετών. Σύμφωνα με τη λίστα «***των εγκεφάλων***» που κατάρτισε και έδωσε στη δημοσιότητα η ιστοσελίδα superscolar.org, ο Τέρενς Τάο είναι ο εξυπνότερος άνθρωπος αυτή τη στιγμή στον κόσμο. Βέβαια, υπογραμμίζεται και από τους ίδιους τους συντάκτες της ιστοσελίδας, πως η λίστα δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να εκληφθεί ως «Ευαγγέλιο», αφού η έννοια της εξυπνάδας είναι κάτι υποκειμενικό κι υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί παράγοντες πέρα από το IQ που καθορίζουν πόσο έξυπνος είναι κάποιος. Απλά πρόκειται για έναν ενδεικτικό κατάλογο με δέκα ανθρώπους που ξεχωρίζουν για τα επιτεύγματα τους και ο Τάο σε αυτόν τον κατάλογο είναι πρώτος.

Είναι ένα από τα τρία μόνο παιδιά στην ιστορία του προγράμματος Johns Hopkins Study of Exceptional Talent που έχουν επιτύχει βαθμολογία 700 και άνω, **ο Τάο είχε** 760, στο τμήμα μαθηματικών Δοκιμασία Συλλογισμού SAT, ένα τυποποιημένο τεστ για την εισαγωγή σε κολέγια.

Το 1986 **ο** 11**χρονος Τάο συμμετείχε στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα και κέρδισε χάλκινο μετάλλιο**, **την επόμενη χρονιά αργυρό και το** 1988 **χρυσό**. **Είναι ο μοναδικός νικητής καθενός από τα τρία μετάλλια στην ιστορία της Ολυμπιάδας**, **που πήρε αυτά τα μετάλλια σε ηλικία** 13 **ετών**.



Το 2006 πήρε το **μετάλλιο** Fields και το 2014 το Royal Medal and Breakthrough Prize in Mathematics. Είναι **συγγραφέας** σε πάνω από **τριακόσιες ερευνητικές εργασίες**. Θεωρείται ως ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, ονομάστηκε ο «**Μότσαρτ των μαθηματικών**». Είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια στο Λος Άντζελες (UCLA), όπου κατέχει την έδρα James and Carol Collins. Η έρευνά του περιλαμβάνει θέματα **αρμονικής ανάλυσης**, **μερικών διαφορικών εξισώσεων**, **αλγεβρικής συνδυαστικής**, **αριθμητικής συνδυαστικής**, **γεωμετρικής συνδυαστικής**, **θεωρίας πιθανοτήτων**, **συμπιεσμένης αίσθησης και αναλυτικής θεωρίας αριθμών**. Οι γονείς του Tao είναι από το Χονγκ Κονγκ μετανάστες στην Αυστραλία. Ο πατέρας του παιδίατρος και η μητέρα του μαθηματικός, και με πτυχίο στην αστροφυσική.



Οι μαθηματικές γνώσεις του Τάο έχουν έναν **εξαιρετικό συνδυασμό πλάτους και βάθους**: μπορεί να γράφει με σιγουριά και αξιοπιστία σε θέματα τόσο διαφορετικά όπως οι επιμέρους διαφορικές εξισώσεις, η αναλυτική θεωρία αριθμών, η γεωμετρία των τριών πολλαπλοτήτων, η μη τυπική ανάλυση, η θεωρία ομάδων, η θεωρία μοντέλων, η κβαντική μηχανική, πιθανότητες, εργοδική θεωρία, συνδυαστική, αρμονική ανάλυση, επεξεργασία εικόνας, λειτουργική ανάλυση και πολλά άλλα. Σε κάποιους από αυτούς τους τομείς έχει θέσει τις βάσεις, αλλά και σε άλλους τομείς που επίσημα δεν εργάζεται τους κατανοεί σε βάθος. Γράφει εργασίες και βιβλία με εκπληκτικό ρυθμό, πως τα κάνει όλα αυτά είναι ένα μυστήριο λένε οι συνεργάτες του. Μάλιστα λένε ότι οι μαθηματικοί ερευνητές που έχουν κολλήσει σε ένα πρόβλημα και δεν μπορούν να προχωρήσουν, ελπίζουν σε μια βοήθεια του Τάο.

Δεν υπάρχει βραβείο ή διάκριση που να μην έχει δοθεί στον Τάο και συνεχίζει. Ένα θεώρημα του **Τάο** είναι αυτό που με τον Ben Green απέδειξαν το 2004, έλυσαν ένα πρόβλημα που σχετίζεται με την Εικασία Διδύμων Πρώτων Αριθμών εξετάζοντας προόδους πρώτων αριθμών—σειρές αριθμών σε ίση απόσταση. Για παράδειγμα, το 3, το 7 και το 11 αποτελούν μια πρόοδο πρώτων αριθμών με λόγο 4, ο επόμενος αριθμός στην ακολουθία, το 15, δεν είναι πρώτος, το ίδιο το 17, το 23, το 29, με λόγο 6, αλλά ο 35 σύνθετος. Ο Τάο και ο Γκριν απέδειξαν ότι είναι πάντα δυνατό να βρεθεί, κάπου στο άπειρο των ακεραίων, μια πρόοδος πρώτων αριθμών ίσων αποστάσεων και οποιουδήποτε μήκους.

Ο Τάο έχει επίσης **επιλύσει** μια **σειρά από εικασίες**. Το 2012, ο Tao και Green ανακοίνωσαν αποδείξεις για το εικαζόμενο «πρόβλημα φυτεύσεως οπωρώνα», το οποίο ζητά τον μέγιστο αριθμό γραμμών σε ακριβώς 3 σημεία σε ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο, όχι όλα σε μια γραμμή. Το 2010 έδωσαν μια **πολυγραμμική επέκταση** του περίφημου θεωρήματος του Dirichlet σχετικά με τις αριθμητικές προόδους. Πολλά άλλα αποτελέσματα του Tao έχουν τραβήξει την προσοχή στον επιστημονικό κόσμο.

Να διδάσκουμε Γνώσεις ή Δεξιότητες; Αμφότερα!

Γιάννης Νικολόπουλος, Μαθηματικός-Ειδικός Παιδαγωγός

Στην εκπαίδευση και ειδικότερα στη Μαθηματική Εκπαίδευση μπαίνει το ερώτημα: Είναι αναγκαίο να διδάξουμε δεξιότητες ή οφείλουμε όπως συνηθίζεται να διδάσκουμε γνώσεις.

Η διπλανή φωτογραφία δείχνει έναν εγκέφαλο που τον «φορτώνουμε» με πολλές γνώσεις.

Μήπως δεν είναι αυτή η ενδεδειγμένη μέθοδος διδασκαλίας, η απλή τροφοδοσία από τον εκπαιδευτικό και η πρόσληψη από τον μαθητή; Μήπως χρειάζεται αρχικά προβληματισμός, εν συνεχεία διερεύνηση, κατόπιν βιωματική επιβεβαίωση; Αλλά αυτά προϋποθέτουν δεξιότητες. Άρα μήπως είναι στο καθήκον του Δασκάλου των Μαθηματικών η καλλιέργεια και των δεξιοτήτων; Αρκετοί εκφράζουν την άποψη ότι το παιδί έχει ή δεν έχει μαθηματικές ικανότητες/δεξιότητες.

Πριν τοποθετηθούμε στο ζήτημα είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε αν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην δεξιότητα (skill) και στην ικανότητα (ability). Είναι χαρακτηριστικό ότι τόσο στην Ελληνική, όσο στην Αγγλική και σε πολλές γλώσσες υπάρχουν δύο διαφορετικές λέξεις. Εντούτοις, οι δύο λέξεις «δεξιότητα» και «ικανότητα» χρησιμοποιούνται συχνά εναλλακτικά ως συνώνυμες, αν και υπάρχει διάκριση μεταξύ τους.

Η κύρια διαφορά/διάκριση ικανοτήτων και δεξιοτήτων είναι ότι, οι ικανότητες θεωρούνται κυρίως εγγενείς δηλαδή κληρονομικές, ωστόσο οι δεξιότητες είναι ανθρώπινες κατακτήσεις, που με το χρόνο και την διδασκαλία, την εκγύμναση, την δράση έχουν αναπτυχθεί στο μαθητή, στον αθλητή, και στον τεχνίτη. Ορισμένες από τις ικανότητες μάλιστα όπως, η αντοχή, το άλμα και η ευλυγισία μπορούν να πιστοποιηθούν και πριν να καλλιεργηθούν. Είναι ένα σύνολο από γενετικά καθορισμένα χαρακτηριστικά. Οι ικανότητες υπάρχουν ή λείπουν, εφόσον κάθε άτομο έχει διαφορετικό σύνολο ικανοτήτων λόγω του γενετικού του κώδικα που κληρονομεί από τους γονείς του. Όπως για παράδειγμα η αθλητική ικανότητα του Γιάννη Αντετοκούνμπο δεν προέκυψε τυχαία αλλά είναι συνδυασμός γενετικής και εν συνεχεία εκγύμνασης.

Η δεξιότητα μπορεί να αποκτηθεί εύκολα εάν το άτομο έχει κληρονομική ικανότητα, δηλαδή προϋποθέσεις που απαιτούνται για τη συγκεκριμένη μελέτη, άθληση και εργασία. Όπως για παράδειγμα η δεξιότητα του μουσικού οφείλεται στην γενετική ικανότητα εξαιρετικής ακοής, με επιπλέον καλλιέργεια της μουσικής παιδείας. Άρα υπάρχει μια ισχυρή σύνδεση ορισμένων ικανοτήτων και δεξιοτήτων έτσι δημιουργείται η σύγχυση και ταύτιση των δύο αυτών εννοιών.

Οι Μαθηματικοί διδάσκουν μόνο Γνώσεις;

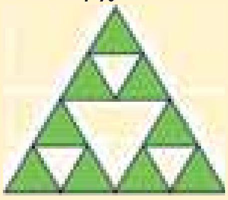
Εάν στους μαθητές δεν διδάξουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, την Ισότητα Τριγώνων, τον Όγκο των Στερεών, την Επίλυση Εξίσωσης, τις Ταυτότητες κ.τ.λ. δεν μπορούν τα παιδιά να τα «ανακαλύψουν» όσες ικανότητες και δεξιότητες αν έχουν. Επειδή στην εποχή μας ακούγονται πολλές «καινοτόμες ιδέες», να σημειώσουμε ότι έχει αξία και διευκολύνει η Διερευνητική ή Ανακαλυπτική Μάθηση, αλλά η γνώση δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί χωρίς διδασκαλία, όπου ο ρόλος του Δάσκαλου των Μαθηματικών παραμένει κεντρικός. Ωστόσο το σημαντικό ζήτημα είναι να εντάξουμε στη Διδασκαλία την ανάπτυξη των κατάλληλων Δεξιοτήτων.

Η δεξιότητα, είναι μια εκμαθημένη ανθρώπινη κατάκτηση αναγκαία για την ολοκλήρωση μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας με προβλέψιμες συνέπειες και καλή εκτέλεση, συνήθως μέσα σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Μια δεξιότητα είναι ενσωμάτωση της κατάλληλης μάθησης/εκγύμνασης και κρίνεται βασικά από την ικανότητα εκτέλεσης μιας δραστηριότητας μαθησιακής, αθλητικής και τεχνικής. Οι δεξιότητες αφορούν στον «βαθμό ευκολίας, ακρίβειας και ταχύτητας» που εκτελούμε μια σειρά από ενέργειες, προκειμένου να αντιμετωπίσουμε μια κατάσταση, να λύσουμε ένα μαθηματικό, ένα προσωπικό ή επαγγελματικό πρόβλημα.

Σχετικά με τις Γνωστικές Δεξιότητες

Θα σταθούμε στα γνωστικά πεδία: Ας ξεκινήσουμε πρώτα από την Προσοχή, που δύναται να συμπεριληφθεί τόσο στις ικανότητες όσο και στις δεξιότητες εφόσον είναι η κατάσταση με την οποία μπορούμε να κατευθύνουμε τη σκέψη μας προς ένα στόχο ή μια συγκεκριμένη δράση (π.χ. η διατήρηση της προσοχής κατά την διδασκαλία μιας υποδειγματικής άσκησης). Έχει αναφερθεί ότι μπορεί κάποιο παιδί να έχει εκ γενετής Ελλειμματική Προσοχή, εν προκειμένω όπως και σε άλλες μειονεξίες υπάρχει διαβάθμιση της σοβαρότητας, εντούτοις υπάρχουν δραστηριότητες που χειροτερεύουν την κατάσταση είτε την βελτιώνουν. Για παράδειγμα αν το παιδί με Ελλειμματική Προσοχή του δώσουμε ένα παιχνίδι στο πάλκο ή στο δωμάτιο και συγχρόνως του ανοίξουμε την T.V. γιατί το βλέπουμε ανήσυχο και δεν προσελκύεται από το παιχνίδι, είναι βέβαιο ότι η διπλή «επιλογή» διασπά την προσοχή και χειροτερεύει το εκ γενετής πρόβλημα, ενισχύει τον αποπροσανατολισμό στην παραμικρή ακεφιά ή δυσκολία.

Υπάρχουν και δραστηριότητες, που βελτιώνουν την Προσοχή, το ονομαζόμενο Focus; Απλές δραστηριότητες που αναπτύσσουν την Προσοχή μέσω της Παρατηρητικότητας. Παρατηρητικότητα είναι μια δεξιότητα με την οποία μπορούμε να κρίνουμε αν μοιάζουν και αν διαφέρουν παρεμφερή αντικείμενα ή να μετρήσουμε αυτά. Παράδειγμα πόσα ισόπλευρα τρίγωνα βρίσκουμε συνολικά στη διπλανή εικόνα;



Να σημειωθεί ότι η βελτίωση της Παρατηρητικότητας περιορίζει την Παρορμητικότητα, μια τάση ή μια νοοτροπία για γρήγορη, χωρίς περίσκεψη απάντηση σε ερώτηση/πρόβλημα που απαιτεί προσοχή και μελέτη. Για παράδειγμα: Ένα παιδί είναι 6 ετών και ο πατέρας 38 ετών, εφόσον διπλασιασθεί η ηλικία του παιδιού θα διπλασιασθεί και η ηλικία του πατέρα; Εδώ ο παρορμητικός μαθητής θα απαντήσει θετικά αλλά λάθος, εφόσον το παιδί είναι 12 χρονών και ο πατέρας 44 γιατί πέρασαν 6 χρόνια και για τους δύο. Η Ελλειμματική Προσοχή περιορίζει, μειώνει την ικανότητα του παιδιού στην συλλογή πληροφοριών, ενώ επιπλέον η παρουσία της Παρορμητικότητας δυσκολεύει την ενδελεχή μελέτη και απάντηση.

Για την επίτευξη κάθε μαθησιακού στόχου χρειάζεται η Αντίληψη, μια σημαντική γνωστική ικανότητα, αφού χάρη σε αυτήν, ο εγκέφαλός οργανώνει και επεξεργάζεται πληροφορίες των αισθήσεών. Ωστόσο, το αποτέλεσμα κάθε επεξεργασίας που είναι θετική στη γνώση, είναι η αποθήκευση στην Μνήμη, εφόσον αυτή η εγκεφαλική δομή, μας επιτρέπει να αποθηκεύσουμε τις πληροφορίες και τα συμπεράσματα μας. Προκειμένου η επεξεργασία της συλλογής των πληροφοριών να μετατεθεί αργότερα ή να γίνει άμεσα, διαφοροποιούμε τη βραχύχρονη από τη μακρόχρονη μνήμη.

Οι Μαθηματικοί Διδάσκουν Δεξιότητες;

Όπως είναι κατανοητό σε τούτο το βήμα δεν είναι δυνατόν να παρουσιάσουμε όλες τις δεξιότητες που σχετίζονται με τα Μαθηματικά. Ας αναφέρουμε κάποιες:

Πρώτο παράδειγμα, η «Σχεδιαστική Σκέψη», μία προσέγγιση που πρόσφατα υιοθετήθηκε και ενέχει σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς την επίλυση αυθεντικών προβλημάτων που αφορούν τους μαθητές και έχουν ουσιαστικό αντίκτυπο στη βελτίωση της καθημερινότητας τους, μέσα από τον σχεδιασμό και την κατασκευή απτών προϊόντων με πραγματική αξία για τον τελικό αποδέκτη. Για την επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιούμε τη στρατηγική: «Κάνω ένα Σχέδιο», δηλαδή μετατρέπω/μεταφράζω το αριθμητικό πρόβλημα σε σχήμα. Μάλιστα με αυτή τη διδασκαλία θα καταλάβουν τα παιδιά περισσότερο για την αξία των Μαθηματικών και την χρησιμότητά τους στη ζωή. Είναι στην κατεύθυνση του: «Solving Problem» που το έθιξε ο George Polya και στοχεύουμε σε βιωματικά προβλήματα που προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Παράδειγμα επίλυση προβλήματος για την εύρεση των διαστάσεων (χ & ψ) της T.V. εφόσον γνωρίζουμε την διαγώνιο (πρόβλημα 3 σελίδες 49-50, Μαθηματικά της Β΄ γυμνασίου).

Η Γλωσσική δεξιότητα είναι σημαντική και έχει άμεση σχέση με τα Μαθηματικά. Εδώ θα αναρωτηθούν αρκετοί, μα αυτό το διδακτικό μέρος είναι δουλειά των φιλολόγων. Χωρίς να υφαρπάζουμε, το διδακτικό μέρος των φιλολόγων, εντούτοις υπάρχει ένα σημαντικό γλωσσικό μέρος στα Μαθηματικά. Στη Γεωμετρία κυρίως όπου έχουμε εκφώνηση κατόπιν χρειάζεται γλωσσική αποκωδικοποίηση για τη δημιουργία του σχήματος και ειδικά στο τέλος όπου πρέπει να διατυπωθεί η λύση-απάντηση. Ωστόσο επιπλέον στην Άλγεβρα για παράδειγμα οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την τεράστια διαφορά ανάμεσα στο: «τετράγωνο του αθροίσματος» $(\alpha+\beta)^2$, δηλαδή έχουμε ένα άθροισμα των α, β, και όλο αυτό το άθροισμα υψώνεται στο τετράγωνο ενώ στο «άθροισμα των τετραγώνων» $\alpha^2+\beta^2$, έχουμε δύο τετράγωνα $α^2$, $β^2$ και τα προσθέτουμε. Αυτή είναι μια γλωσσική διδακτική δεξιότητα που πρέπει οι μαθητές να την αναπτύξουν και να εκφράζονται με ακρίβεια και ορθότητα.

Δεξιότητα αποτελεί, ο έλεγχος του αποτελέσματος στη λύση ενός προβλήματος και η αυτοαξιολόγηση. Η λύση π.χ. στο πρόβλημα πόσα πούλμαν θα χρειασθούν δεν μπορεί να είναι Χ = 11,378 πούλμαν. Αντιθέτως μπορεί να είναι Χ = 11,5 πούλμαν αφού μπορεί να έχουμε 11 πούλμαν πενηντάρια και ένα μικρό των 25 ατόμων.

Προσοχή, δεν είναι δεκτή απάντηση σε πρόβλημα, πόσοι μαθητές και να προκύψει το Χ = 136,5.

Δεξιότητες που συνεισφέρουν γενικά στη Μάθηση

Μια επιπλέον δεξιότητα, που αυτή σχετίζεται με πλήθος σχολικών μαθημάτων, αποτελεί η αυτοαξιολόγηση. Αποκτάται ή βελτιώνεται μέσα από ερωτήματα που θέτουν τα παιδιά στον εαυτό τους σχετικά με την κατανόηση της διδασκόμενης γνώσης. Η εν λόγω δεξιότητα καλλιεργείται στους μαθητές, διότι συμβάλλει στην ενίσχυση της αυτοεκτίμησής τους.

Ακολουθεί, μια βασική παρατήρηση για τη γνώση και το συναίσθημα, εφόσον το συναίσθημα είναι η κυριότερη δύναμη πίσω από τα κίνητρα δράσης. Η βελτίωση της μαθησιακής εξέλιξης/ανάπτυξης σχετίζεται άμεσα με την συναισθηματική νοημοσύνη, μια δεξιότητα γνωστή έστω και χωρίς πλήρη συνείδηση. Η κοινωνική αλληλεπίδραση, οι συνεργατικές δράσεις και η επίλυση προβλημάτων της ζωής, βοηθούν για να αναγνωρίζουμε τις συναισθηματικές καταστάσεις στον εαυτό μας και στον περίγυρό μας που αποτελούν την συναισθηματική νοημοσύνη. Τέλος η δεξιότητα του Αναστοχασμού, όπου προάγει την αξία "να συνειδητοποιήσουμε τις σκέψεις μας ή να σκεφτούμε τι σκεφτόμαστε".

Η στόχευση, της εκπαιδευτικής κατεύθυνσης προς τις σύγχρονες δεξιότητες, δεν βρίσκει πεδίο εφαρμογής αποκλειστικά στο πεδίο της σχολικής τάξης, αλλά έχει συνδεθεί με την δημιουργία ενός κόσμου στον οποίο κάθε μαθητής και μαθήτρια έχει το δικαίωμα να ενεργεί με υπευθυνότητα και ευαισθησία απέναντι στις τοπικές και παγκόσμιες ανάγκες. Στο πλαίσιο αυτό, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να ενσωματώσουν στη διδακτική τους φαρέτρα, καινοτόμες προσεγγίσεις που τους επιτρέπουν να ανταποκριθούν στις μαθησιακές προκλήσεις.

Α΄ Τάξη

Αξιοποιώντας την γεωμετρική αναπαράσταση των κλασμάτων στην επίλυση προβλημάτων

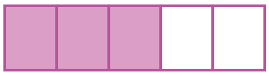
Τάκης Χρονόπουλος

Εισαγωγή

Μια διαπραγμάτευση της γεωμετρικής αναπαράστασης των κλασμάτων που βοηθά στην κατανόηση αλλά και στην επίλυση προβλημάτων από μαθητές Α’ Γυμνασίου ή και Δημοτικού. Στο α΄ μέρος αναλύεται η γεωμετρική αναπαράσταση των κλασμάτων με την μορφή που θα χρησιμοποιηθεί στα προβλήματα που ακολουθούν στα επόμενα μέρη.

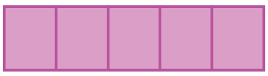
Α’ μέρος / Γεωμετρική αναπαράσταση ενός κλάσματος

- Τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{3}{5}$ γεωμετρικά; [$3 < 5$]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη και επιλέγουμε τα 3 μέρη (από τα 5 συνολικά).

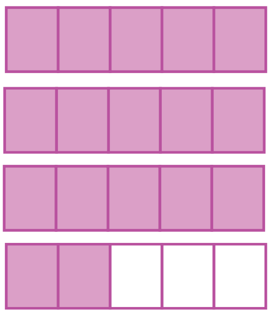
- Τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{5}{5}$ γεωμετρικά; [$5 = 5$]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη και επιλέγουμε τα 5 μέρη (από τα 5 συνολικά), δηλαδή ολόκληρη την ποσότητα.

- Τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{17}{5}$ γεωμετρικά; [$17 > 5$]

[Επειδή 17 >5, χρειαζόμαστε παραπάνω από μια ποσότητα για να πάρουμε τα 17 ίσα μέρη, και αφού κάθε ποσότητα θα χωριστεί σε 5 ίσα μέρη, θέλουμε 3 ποσότητες για τα 15 μέρη συν άλλη μια ποσότητα για τα 2 μέρη, αφού 3 x 5 +2=17]

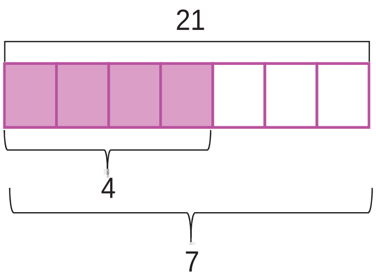


$$+\frac{17}{5} = \frac{3\cdot 5 + 2}{5} = 3\frac{2}{5}$$

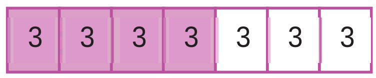
Παίρνουμε 4 **ίσες** ποσότητες, και χωρίζουμε κάθε ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη και επιλέγουμε τα 17 μέρη (από τα 20 = 4 x 5 συνολικά), δηλαδή 3 ολόκληρες από τις αρχικές ποσότητες και 2 μικρά μέρη (από τα 5).

Β’ μέρος / Βασικά προβλήματα

Π1. [ξέρω σύνολο και κλάσμα, ψάχνω μέρος]
Σε μια τάξη 21 ατόμων , τα 4/7 είναι τα αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 7 **ίσα** μέρη,
τα 7 μέρη είναι 21 άτομα
το 1 μέρος είναι 21 : 7 = 3 άτομα
[συμπληρώνουμε το σχήμα]



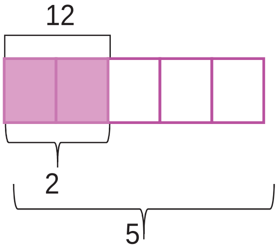
τα 4 μέρη είναι 4 x 3 = 12 άτομα
Άρα τα αγόρια είναι 12 άτομα
και τα κορίτσια 21 - 12 = 9 άτομα.

Αλλιώς τα κορίτσια είναι τα 3 μέρη της τάξης,
δηλαδή 3 x 3 = 9 άτομα.

Σχόλιο: Το πρόβλημα είναι εύκολο, αλλά στοχεύουμε στην εποπτεία και στην κατανόηση της λύσης.

Π2. [ξέρω μέρος και κλάσμα, ψάχνω σύνολο]

Τα 2/5 μιας τάξης, που είναι 12 παιδιά, μαθαίνουν Γαλλικά. Πόσα παιδιά έχει όλη η τάξη;



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη,
τα 2 μέρη είναι 12 παιδιά
το 1 μέρος είναι 12 : 2 = 6 παιδιά
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

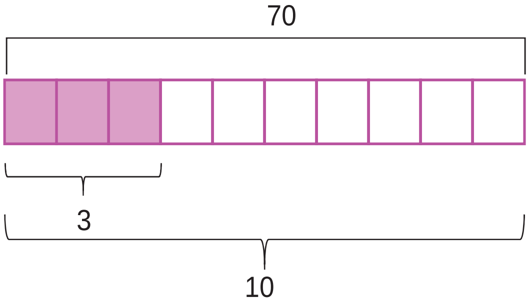
6	6	6	6	6

το σύνολο, τα 5 μέρη είναι 5 x 6 = 30 παιδιά.
Άρα η τάξη έχει 30 παιδιά.

Π3. [μείωση κατά ένα ποσοστό, ξέρω αρχική τιμή]

Ο Βασίλης θέλει να αγοράσει στις εκπτώσεις παπούτσια, που γράφουν στο καρτελάκι τους, αρχική τιμή 70 € και – 30%. Πόσο θα κοστίζουν τελικά τα παπούτσια αυτά, μετά την έκπτωση;

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{3}{10}$$



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 10 **ίσα** μέρη,
τα 10 μέρη είναι 70 €
το 1 μέρος είναι 70 : 10 = 7 €
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

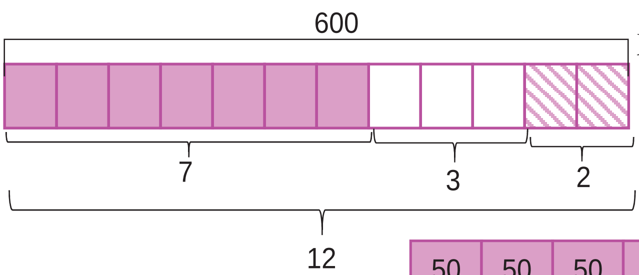
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

τα 3 μέρη είναι 3 x 7 = 21 €
δηλαδή η έκπτωση είναι 21 €
Άρα τα παπούτσια, μετά την έκπτωση, κοστίζουν 70 - 21 = 49 €

Π4. [μερισμός σε μέρη ανάλογα]

Η Ελένη, η Αθανασία και η Ζωή αγόρασαν μερικά λαχεία μαζί. Η Ελένη έδωσε 7 €, η Αθανασία 3 € και η Ζωή 2 €. Ένα από τα λαχεία αυτά, κέρδισε 600 €. Πως είναι δίκαιο να μοιραστούν τα κέρδη;

Κάθε άτομο θα μοιραστεί χρήματα ανάλογα με το ποσό που πλήρωσε.



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 7+3+2=12 **ίσα** μέρη,
τα 12 μέρη είναι 600 €
το 1 μέρος είναι 600 : 12 = 50 €
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

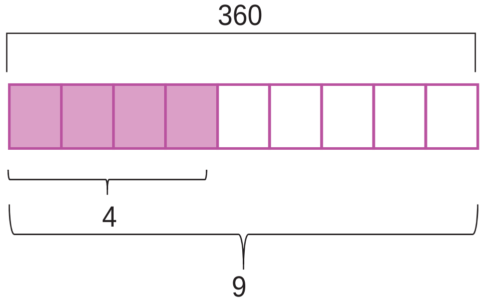
Άρα η Ελένη θα πάρει 7 μέρη, 7 x 50 = 350 €
η Αθανασία θα πάρει 3 μέρη, 3 x 50 = 150 €
και η Ζωή θα πάρει 2 μέρη, 2 x 50 = 100 €.

Σχόλιο: Με όποιον άλλο τρόπο μοιραστούν τα κέρδη, πάντα κάποιο άτομο θα αδικείται.

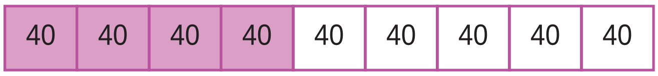
Π5. [μοιρασιά με κλάσματα, ξέρω την αρχική ποσότητα]

Η γιαγιά μοίρασε 360 € σε 3 εγγόνια του, τον Αναστάση, τον Δημήτρη και τον Κώστα. Αρχικά έδωσε στον Αναστάση τα 4/9 του συνολικού ποσού. Μετά έδωσε στον Δημήτρη τα 5/8 των υπόλοιπων χρημάτων. Τέλος έδωσε στον Κώστα όσα χρήματα περίσσεψαν από τον Αναστάση και τον Δημήτρη. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας τους;

Αρχικά ψάχνουμε τα χρήματα του Αναστάση [4/9 της γιαγιάς]

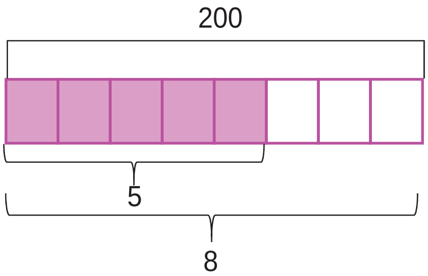


Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 9 **ίσα** μέρη,
τα 9 μέρη είναι 360 €
το 1 μέρος είναι 360 : 9 = 40 €
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

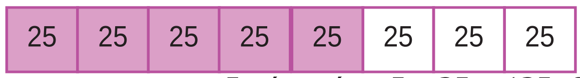


τα 4 μέρη είναι 4 x 40 = 160 €
Άρα ο Αναστάσης πήρε 160 €
Περίσσεψαν 360-160 = 200 € για τα άλλα δυο εγγόνια

Μετά ψάχνουμε τα χρήματα του Δημήτρη [5/8 των υπολοίπων, που έμειναν από τον Αναστάση]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 8 **ίσα** μέρη,
τα 8 μέρη είναι 200 €
το 1 μέρος είναι 200 : 8 = 25 €
[συμπληρώνουμε το σχήμα]



τα 5 μέρη είναι 5 x 25 = 125 €
Άρα ο Δημήτρης πήρε 125 €

Τέλος ψάχνουμε τα χρήματα του Κώστα

Περίσσεψαν για τον Κώστα 200 - 125 = 75 €
Άρα ο Κώστας πήρε 75 €
Αλλιώς ο Κώστας πήρε 360 – 160 – 125 = 200 – 125 =75 €

Γ' μέρος / Σύνθετα προβλήματα

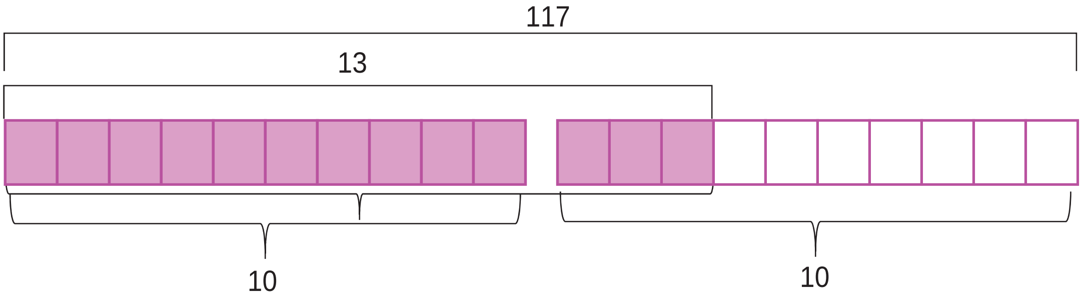
Π6. [αύξηση κατά ποσοστό, ξέρω τελική τιμή]

Η τιμή μιας τηλεόρασης , αφού τελείωσε η μέρα Black Friday, αυξήθηκε κατά 30%. Αν μετά την Black Friday, η τηλεόραση κοστίζει 117 €, πόσο κόστιζε η τηλεόραση την Black Friday;

Η τελική τιμή θα είναι όσο η αρχική τιμή [της Black Friday] συν την αύξηση
δηλαδή 100 % + 30 % =130 % της αρχικής τιμής.

$$\frac{130}{100}=\frac{13\cancel{0}}{10\cancel{0}}=\frac{13}{10},\quad \frac{13}{10}=\frac{1\cdot 10+3}{10}=1\frac{3}{10}$$

[Επειδή 13 >10, χρειαζόμαστε παραπάνω από μια ποσότητα για να πάρουμε τα 13 ίσα μέρη, και αφού κάθε ποσότητα θα χωριστεί σε 10 ίσα μέρη, θέλουμε μια ποσότητα για τα 10 μέρη συν άλλη μια ποσότητα για τα 3 μέρη, αφού 1 x 10 + 3 = 10 + 3 = 13]



Παίρνουμε 2 **ίσες** ποσότητες,
και χωρίζουμε κάθε ποσότητα σε 10 **ίσα** μέρη
και επιλέγουμε τα 13 μέρη (από τα 20 = 2x 10 συνολικά),
δηλαδή ολόκληρη την μια ποσότητα και 3 μέρη από την άλλη ποσότητα
Χωρίζουμε το 117 σε 13 **ίσα** μέρη,
το 1 μέρος είναι 117 : 13 = 9 €
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

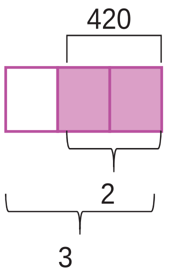
[Η αρχική τιμή είναι τα 10 μέρη, η αύξηση είναι τα 3 μέρη]
τα 10 μέρη είναι 10 x 9 = 90 €
Άρα η τηλεόραση κόστιζε την Black Friday 90 €.

Σχόλιο: Αντίστοιχο πρόβλημα, θα μπορούσε να ζητηθεί με ΦΠΑ, αν τα παιδιά γνωρίζουν για το ΦΠΑ.

Π7. [μοιρασιά με κλάσμα και ποσοστό, ψάχνω τη αρχική ποσότητα]

Ο παππούς μοίρασε χρήματα σε 3 εγγονές του, την Αγάπη, την Ελπίδα και την Χαρά. Αρχικά έδωσε στην Αγάπη το 30 % του συνολικού ποσού. Μετά έδωσε στην Ελπίδα το 1/3 των υπόλοιπων χρημάτων . Τέλος έδωσε στην Χαρά 420 €. Πόσα Χρήματα είχε αρχικά ο παππούς;

Αρχικά ψάχνουμε τα χρήματα της Ελπίδας [1/3 των υπολοίπων, που έμειναν από την Αγάπη]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 3 **ίσα** μέρη,
[η Ελπίδα πήρε το 1 μέρος από τα 3]
[η Χαρά πήρε τα 3-1=2 μέρη από τα 3]
τα 2 μέρη είναι 420 €
το 1 μέρος είναι 420 : 2 = 210 €
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

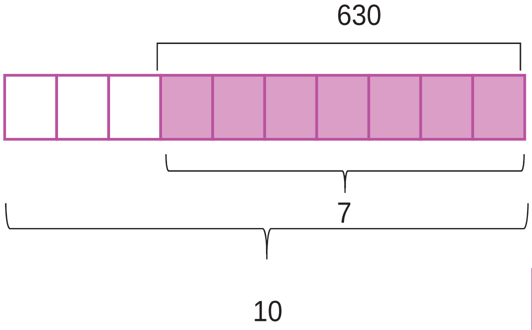
210	210	210

Άρα η Ελπίδα πήρε 210 €
Η Ελπίδα και η Χαρά μαζί μοιράστηκαν 210 + 420 = 630 €.

Μετά ψάχνουμε τα χρήματα της Αγάπης [30% των χρημάτων του παππού]

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{3}{10}$$

Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 10 **ίσα** μέρη,



[η Αγάπη πήρε τα 3 μέρη από τα 10]
[η Ελπίδα και η Χαρά πήραν τα 10-3=7 μέρη από τα 10]
τα 7 μέρη είναι 630 €
το 1 μέρος είναι 630 : 7 = 90 €
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

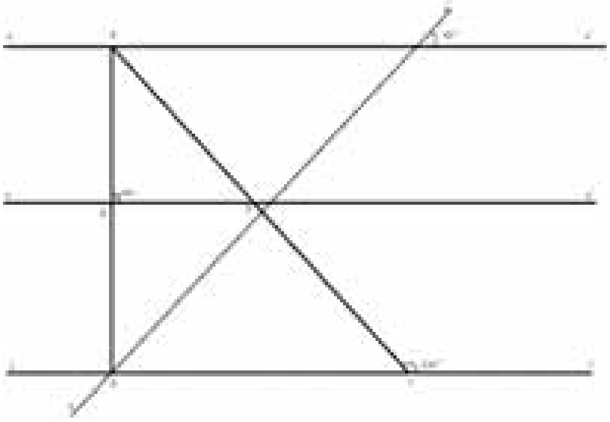
90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Άρα η Αγάπη πήρε 270 €
Ο Παππούς είχε αρχικά 270 + 210 + 420 = 900 €

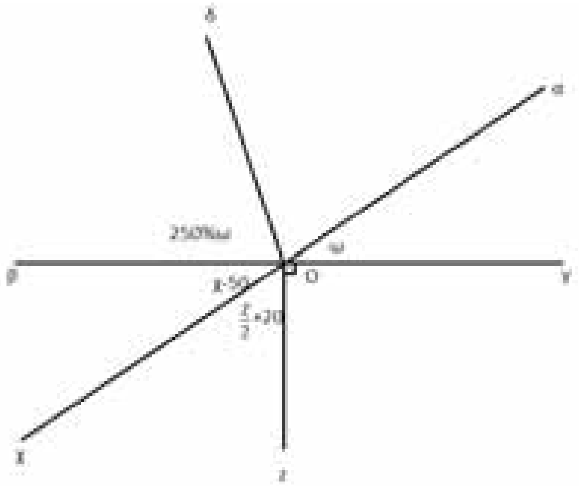
Ασκήσεις Α΄ Γυμνασίου

Λέοντας Κουτσούρης

1) Α. Έστω ευθείες όπου xx΄ // yy΄ // zz΄ και κκ’ διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τρίγωνο ΒΑΓ.



Β. Στον παρακάτω σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\alpha\hat{O}\beta$ να βρεθεί η γωνία ω



2) Δίνεται το παρακάτω τετράγωνο, να υπολογίσετε τους άγνωστους αριθμούς x,y,z αφού σχηματίσετε την κατάλληλη εξίσωση.

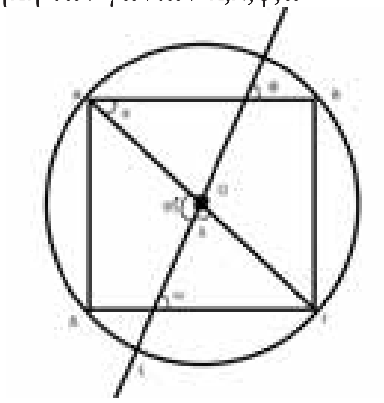
11	12	7	X
9	10	Y	11
11	8	13	8
9	X	Z	11

3) Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) όπου ΑΒΓΔ τετράγωνο και ΑΓ διαγώνιος του τόξο για το οποίο ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\overset{\frown}{\Delta E} = 30\%\overset{\frown}{A\Delta} + \left(15^2 - 10\right)\%$$

α) Να βρείτε το τόξο ΔΕ

β) Τα μήκη των γωνιών κ,λ,φ,ω

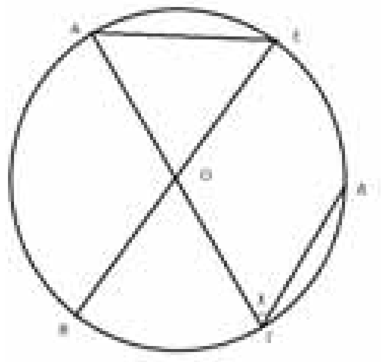


4) Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) με ΒΕ//ΓΔ και τρίγωνο ΑΟΕ ισόπλευρο

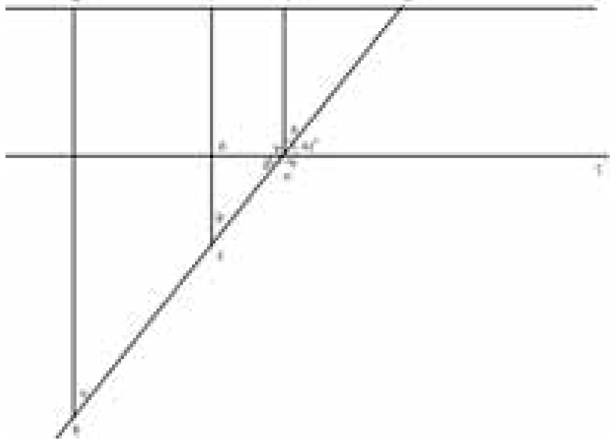
α) Να βρείτε τα μήκη των τόξων ΑΕ,ΕΓ,ΓΒ,ΒΑ

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας x

γ) το τόξο ΓΔ είναι το 25% του τόξου ΕΓ. Να υπολογίσετε την τιμή του



5) Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ε//ζ και ΑΒ//ΓΕ//ΖΗ και ΓΔ=3cm



α) Ποια η σχέση των ευθείων ε,ζ με τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΓΕ,ΖΗ

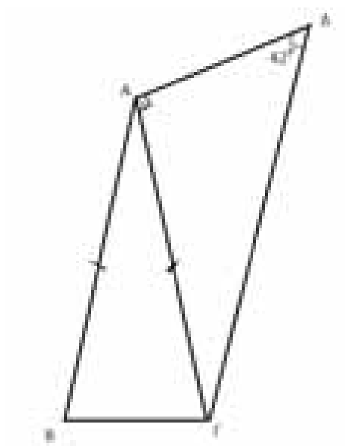
β) Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήμα ΖΗ και ΓΔ.

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες α,β,γ,δ,θ,η

6) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΒ//ΓΔ .

Να υπολογίσετε τις γωνίες

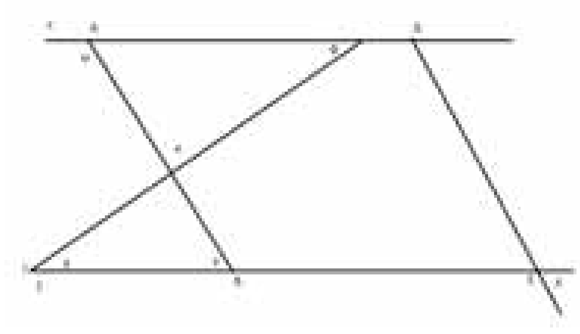
$$A\hat{\Gamma}B\ ,\ B\hat{A}\Gamma\ ,\ A\hat{B}\Gamma\ ,\ A\hat{\Gamma}B$$



7) Δίνονται οι ευθείες ε, ζ που είναι παράλληλες (ε//ζ)

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $(xx-30)\div 2=22$, $x\cdot 50\%=y$

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες κ,ω,φ,λ



8) Α. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $\left[(4-1)^3-4\cdot 5+\dfrac{9}{3}\right]\cdot x=15-15\div 3$

β) $8x+x-9x=\left(1821+2023^2\right)^0$

γ) $(x+2)\div 5-5=0$

δ) $\dfrac{15-x}{2^3x-5x-3x+3^2}-\dfrac{588}{855}\cdot\dfrac{855}{588}=1^{2023}$

ε) $\dfrac{20\%x-25\%\cdot 200}{10\%\cdot 50}=40\%\cdot 12\cdot 10^3$

Β. Να ελέγξετε ποιος από τους αριθμούς 5, 6 ή 7 είναι λύση-ρίζα της εξίσωσης $(x-2)^2+(x+2)^2=4\left(2x+2^3\right)$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

9) Α. Αν $\alpha=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{101}+\dfrac{1}{102}$ και

$$\beta=1+\frac{3}{6}+\frac{6}{9}+\frac{9}{12}+\ldots+\frac{300}{303}+\frac{303}{306}$$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα α+β

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x}{2}-(\alpha+\beta)=10$$

Β. Το μήκος βήμα ενός ζώου είναι το 75% του βήματος του πατέρα του.

Αν το βήμα του πατέρα είναι το 60% του μέτρου να βρείτε:

α) Πόσα μέτρα είναι του ζώου.

β) την διαφορά μήκους των βημάτων τους σε ποσοστό ως προς το μέτρο

10) Δίνεται ο αριθμός

$$\alpha=\frac{30\%\cdot 1200-20\%\cdot 750}{\left(25\%\cdot\dfrac{1}{5^2}\right)\div\left(90\%-\dfrac{4}{5}\right)}$$

α) Να βρεθεί ο αριθμός α

β) Να βρείτε το 35% του 80% του α

γ) i) ποιος αριθμός αν αυξηθεί κατά 25% είναι ίσος με το μισό του α ελαττωμένο κατά 50

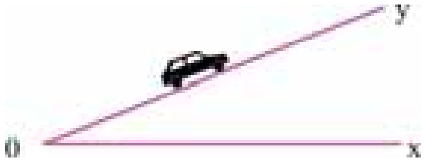
ii) Αν καταθέσουμε στην τράπεζα τον αριθμό του ερωτήματος i) με επιτόκιο 3% με την προϋπόθεση ότι δε θα βγάλουμε τα χρήματα από την τράπεζα και οι τόκοι θα κεφαλαιοποιούνται (προστίθενται δηλαδή στο κεφάλαιο) στο τέλος κάθε χρόνου, να βρείτε το τόκο που θα πάρουμε μετά από 40 μήνες.

Β΄ Τάξη

Τριγωνομετρία

Θανάσης Χριστόπουλος

Πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος (Οy) που βλέπεις στο παρακάτω σχήμα;



Πως θα εκφράσουμε αυτή την πληροφορία; Ουσιαστικά αυτή η πληροφορία θα είναι ταυτόχρονα μια «ταυτότητα» της γωνίας.
Ας επιλέξουμε πάνω στην Οy ένα τυχαίο σημείο Α και από αυτό να φέρουμε ΑΚ κάθετη στην Οx, στη συνέχεια μετράμε την ΟΚ και την ΑΚ (έστω ΟΚ=100cm και ΑΚ=30cm)

Σχ. 1

Ορίζουμε σαν κλίση της Οy την εφαπτομένη της γωνίας ω, οπότε “**κλίση της Οy**”=εφω=$\frac{30cm}{100cm}$=0,3

Επομένως η **κλίση** φανερώνει πόσο ψηλά «ανεβαίνουμε» αν οριζόντια «προχωρήσουμε» μια μονάδα μήκους. (αντίστοιχα, όταν «κατεβαίνουμε» η κλίση είναι αρνητικός αριθμός).
Γενικά για τη γωνία ω ορίζονται τρείς τριγωνομετρικοί αριθμοί: ημω, συνω και εφω , που όταν γνωρίζουμε κάποιον από αυτούς, τότε γνωρίζουμε τη γωνία και αντίστροφα. (Στην τελευταία σελίδα του βιβλίου υπάρχει ο σχετικός πίνακας με τις αντιστοιχήσεις)

Επίλυση ορθογωνίου τριγώνου

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο

α) αν γνωρίζουμε μία πλευρά και μία οξεία γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και τις άλλες δύο πλευρές του

β) αν γνωρίζουμε τις δύο πλευρές του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του και την τρίτη πλευρά.

Να μην ξεχνάμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Όταν γνωρίζουμε ή ζητάμε υποτείνουσα → ημίτονο ή συνημίτονο

Περίπτωση $1^η$ (Γνωστά: μια πλευρά και μια γωνία)

Παράδειγμα $1^ο$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, γνωρίζουμε την πλευρά ΒΓ=20cm και τη γωνία $\hat{B}=27^0$ να υπολογίσετε τις πλευρές i) ΑΓ και ii) ΑΒ

Λύση

i) Γνωρίζουμε την υποτείνουσα ΒΓ και η πλευρά που ζητάμε βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Β που έχουμε, επομένως θα εργαστούμε με το ημΒ.

$\eta\mu B=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ ή $\eta\mu 27^0=\frac{A\Gamma}{20}$ οπότε

$A\Gamma=20\cdot\eta\mu 27^0$ αλλά ημ27^0=0,454 επομένως

$A\Gamma=20\cdot 0{,}454$ τελικά $A\Gamma=9{,}08cm$

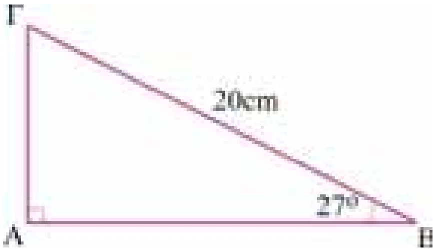
ii) Για την ΑΒ, έχουμε ότι είναι προσκείμενη της γωνία Β οπότε θα εργαστούμε με το συνΒ.

$συνB = \frac{AB}{BΓ}$ ή $συν27^0 = \frac{AB}{20}$ οπότε

$AB = 20 \cdot συν27^0$ αλλά $συν27^0$=0,891

επομένως $AB = 20 \cdot 0{,}891$ οπότε

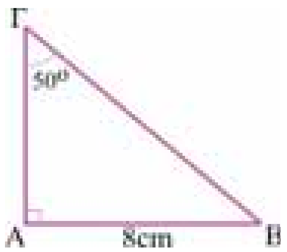
$AB = 17{,}82cm$



Παράδειγμα 2ο

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, γνωρίζουμε την πλευρά ΑΒ=8cm και τη γωνία $\hat{Γ} = 50^0$ να υπολογίσετε τις πλευρές i) ΒΓ και ii) ΑΓ

Λύση



Η κάθετη πλευρά ΑΒ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Γ, άρα και εδώ χρησιμοποιούμε ημΓ.

$ημΓ = \frac{AB}{BΓ}$ ή $ημ50^0 = \frac{8}{BΓ}$, οπότε

$BΓ \cdot ημ50^0 = 8$ άρα $BΓ = \frac{8}{ημ50^0}$, αλλά

$ημ50^0$=0,766 επομένως $BΓ = \frac{8}{0{,}766}$ ή

$BΓ = 10{,}44cm$.

ii) Για την ΑΓ, έχουμε ότι είναι προσκείμενη της γωνία Γ οπότε θα εργαστούμε με το συνΓ.

$συνΓ = \frac{AΓ}{BΓ}$ αλλά επειδή την ΒΓ την έχουμε βρει με προσέγγιση, προτιμάμε να χρησιμοποιήσουμε την πλευρά ΑΒ που μας δίνεται. Οπότε συμμετέχουν μόνο κάθετες πλευρές, άρα εργαζόμαστε με εφΓ.

$εφΓ = \frac{AB}{AΓ}$ ή $εφ50^0 = \frac{8}{AΓ}$ οπότε

$AΓ \cdot εφ50^0 = 8$ άρα $AΓ = \frac{8}{εφ50^0}$, αλλά

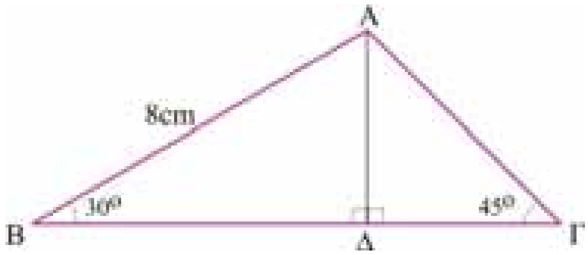
$εφ50^0$=1,192 επομένως $AΓ = \frac{8}{1{,}192}$ ή

$AΓ = 6{,}71cm$

Σχόλιο: Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις εργαζόμαστε ΜΟΝΟ σε ορθογώνια τρίγωνα τα οποία εντοπίζουμε στο σχήμα ή αν δεν υπάρχουν μπορούμε να σχηματίσουμε φέρνοντας μια κατάλληλη βοηθητική ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα.

Άσκηση 1η

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε σε cm τις πλευρές i) ΑΓ και ii) ΒΓ



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$ημ30^0 = \frac{AΔ}{AB} = \frac{AΔ}{8}$ άρα $AΔ = 8 \cdot ημ30^0$

=8·0,5=4cm

επίσης $συν30^0 = \frac{BΔ}{AB} = \frac{BΔ}{8}$ άρα

$BΔ = 8 \cdot συν30^0$ =8·0,866≈7cm

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$εφ45^0 = \frac{AΔ}{ΔΓ} = \frac{7}{ΔΓ}$ ή $1 = \frac{7}{ΔΓ}$ άρα ΔΓ=7cm

επίσης $ημ45^0 = \frac{AΔ}{AΓ} = \frac{7}{AΓ}$ άρα

$AΓ \cdot ημ45 = 7$ οπότε $AΓ = \frac{7}{0{,}707}$≈10cm

Άρα i) ΑΓ=10cm και ii) ΒΓ=ΒΔ+ΔΓ=7cm+7cm=14cm

Άσκηση 2η

Να υπολογίσετε τις πλευρές του ορθογωνίου αν γνωρίζετε ότι η διαγώνιος του ΔΒ=10cm και η γωνία $B\hat{Δ}Γ = 30^0$

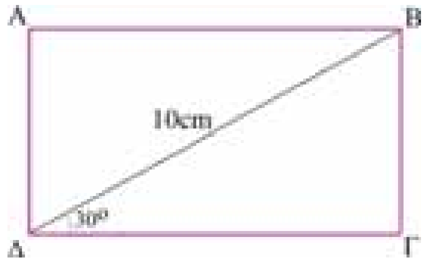
Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε:

$$\eta\mu 30^0 = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{10} \text{ άρα } B\Gamma = 10 \cdot \eta\mu 30^0 = 5\text{cm}$$

Επίσης $\sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\Delta\Gamma}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{10}$ οπότε

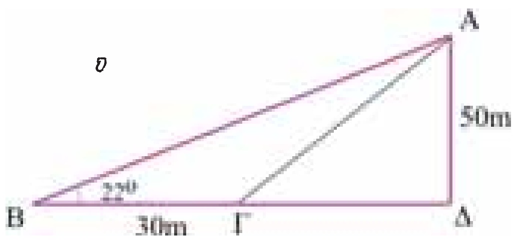
$\Delta\Gamma = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = 8{,}7\text{cm}$



Άσκηση 3η

Στο παρακάτω σχήμα είναι΄ ΒΓ=30m, ΑΔ=50m και $A\hat{B}\Delta = 22^0$ να υπολογίσετε την ΓΔ και την γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi 22^0 = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{50}{B\Delta} \text{ άρα } B\Delta = \frac{50}{0{,}404}$$

⇔ΒΔ=123,76m

Άρα ΓΔ= 123,76–30=93,76m

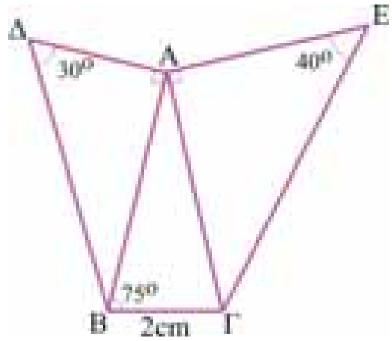
Στο ορθογώνιο ΑΓΔ είναι $\varepsilon\varphi A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{50}{93{,}76} = 0{,}53$ και όπως προκύπτει από το σχετικό πίνακα είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = 28^0$

Άσκηση 4η

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ), ΒΓ=2cm, $\hat{B} = 75^0$ Επίσης $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma = 90^0$ και $\hat{\Delta} = 30^0$, $\hat{E} = 40^0$ να υπολογίσετε τις ΑΔ και ΑΕ.

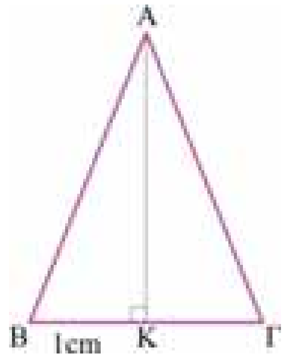
Λύση

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε το ύψος ΑΚ οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε:



$\hat{B} = 75^0$ και ΒΚ=1cm άρα $\sigma\upsilon\nu 75^0 = \frac{BK}{AB} = \frac{1}{AB}$, επομένως

$AB = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 75^0} = \frac{1}{0{,}2588} = 3{,}86cm$ οπότε ΑΒ=ΑΓ=3,86cm



Στο ορθογώνιο ΑΒΔ έχουμε

$$\varepsilon\varphi 30^0 = \frac{AB}{A\Delta} = \frac{3{,}86}{A\Delta} \text{ άρα}$$

$$A\Delta = \frac{3{,}86}{\varepsilon\varphi 30^0} = \frac{3{,}86}{0{,}5774} = 6{,}69cm$$

Στο ορθογώνιο ΑΕΓ έχουμε

$$\varepsilon\varphi 40^0 = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{3{,}86}{AE} \text{ άρα}$$

$$AE = \frac{3{,}86}{\varepsilon\varphi 40^0} = \frac{3{,}86}{0{,}839} = 4{,}6cm$$

Άσκηση 5η

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις ΑΒ, ΚΒ, ΒΓ, ΓΛ

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi 63^0 = \frac{AB}{AK} = \frac{AB}{10}$$

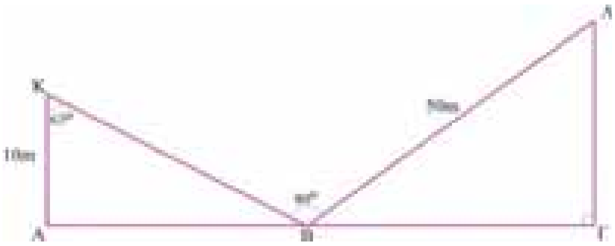
$AB = 10 \cdot εφ63^0 = 10 \cdot 1{,}9626$ AB≈19,63m

και $συν63^0 = \dfrac{AK}{BK} = \dfrac{10}{BK}$

$BK = \dfrac{10}{συν63^0} = \dfrac{10}{0{,}454} \simeq 22m$

$A\hat{B}K = 90^0 - 63^0 = 27^0$.

Οπότε $Λ\hat{B}Γ = 180^0 - 80^0 - 27^0 = 73^0$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΛ ισχύει:

$ημ73^0 = \dfrac{ΓΛ}{ΒΛ} = \dfrac{ΓΛ}{50}$

$ΓΛ = 50 \cdot ημ73^0 = 50 \cdot 0{,}9563$ ⇔ΓΛ≈47,82m

και $συν73^0 = \dfrac{ΒΓ}{ΒΛ} = \dfrac{ΒΓ}{50}$

$ΒΓ = 50 \cdot συν73^0 = 50 \cdot 0{,}2924 \simeq 14{,}62m$

Άσκηση 6η

Ένας παρατηρητής (Π) βλέπει κατακόρυφα πάνω του ένα αεροπλάνο το οποίο πετάει σε σταθερό ύψος μέχρι τη θέση Β , όπου η γωνία $Β\hat{Π}Γ = 45^0$ και μετά αρχίζει να κατεβαίνει και να προσγειώνεται στο αεροδρόμιο που βρίσκεται στη θέση Γ, όπου η απόσταση ΠΓ είναι 30Km και η γωνία $Β\hat{Γ}Π = 20^0$ να βρεθεί το ύψος του αεροπλάνου από το έδαφος όταν περνούσε πάνω από τον παρατηρητή.

Λύση

Το ύψος που ζητάμε είναι στο σχήμα το ΠΑ. Έστω ΠΑ=h τότε οι γωνίες ΒΠΚ=ΑΒΠ=45° ως εντός εναλλάξ (ΑΒ//ΠΓ που τέμνονται από την ΠΒ). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΠΑΒ είναι $εφ45^0 = \dfrac{ΠΑ}{ΑΒ} = \dfrac{h}{AB}$ άρα $1 = \dfrac{h}{AB}$ οπότε ΑΒ=h. Αλλά έχουμε φέρει ΒΚ κάθετη στην ΠΓ, οπότε είναι ΠΚ=ΒΚ=h και ΚΓ=ΠΓ–ΠΚ=30–h

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ είναι $εφ20^0 = \dfrac{BK}{KΓ}$ άρα $0{,}364 = \dfrac{h}{30-h}$ οπότε 0,364(30–h)=h

Η εξίσωση αυτή γίνεται 0,364·30–0,364h=h άρα 10,92=h+0,364h άρα 10.92=1,364h

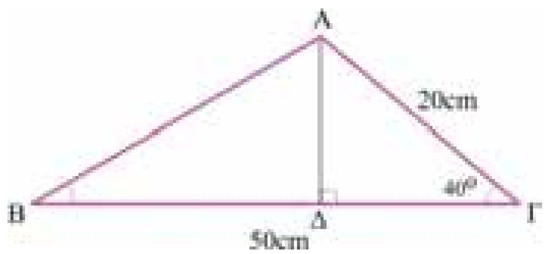
τελικά $h = \dfrac{10{,}92}{1{,}364}$ ή h=8, οπότε το αεροπλάνο πετούσε σε ύψος 8 χιλιομέτρων.

Άσκηση 7η

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι ύψος και η ΒΓ=50cm , ΑΓ= 20cm και $\hat{Γ} = 40^0$.

Να υπολογίσετε τη γωνία Β του τριγώνου.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ γνωρίζουμε μια πλευρά(υποτείνουσα) και μια γωνία άρα μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα κύρια στοιχεία του.

Είναι $ημ40^0 = \dfrac{ΑΔ}{ΑΓ} = \dfrac{ΑΔ}{20}$ άρα

$ΑΔ = 20 \cdot ημ40^0 = 20 \cdot 0{,}643 = 12{,}86$ cm

επίσης $συν40^0 = \dfrac{ΔΓ}{ΑΓ} = \dfrac{ΔΓ}{20}$ άρα

$ΔΓ = 20 \cdot συν40^0 = 20 \cdot 0{,}766 = 15{,}32$ cm.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΑΔ=12,86cm

και ΒΔ=ΒΓ–ΔΓ=50–15,32=34,68cm οπότε

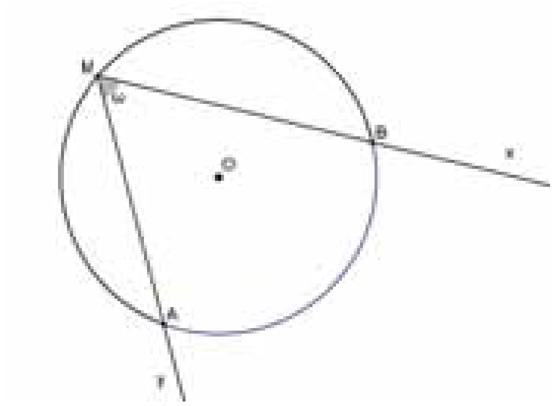
$εφB = \dfrac{ΑΔ}{ΒΔ} = \dfrac{12{,}86}{34{,}68} = 0{,}37$, οπότε Β=20,4°.

Β΄ Τάξη

Βασικά στοιχεία θεωρίας

Χρήστος Κουστέρης

Α. Εγγεγραμμένη Γωνία



Μία γωνία $x\widehat{M}y$ που η κορυφή της Α είναι σημείο κύκλου και οι πλευρές Mx, My της τέμνουν τον κύκλο λέγεται εγγεγραμμένη .

Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται αντίστοιχο τόξο της , επίσης λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $B\widehat{M}A$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Πρέπει να γνωρίζουμε ότι

1) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.

Επομένως κάθε εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή .

2) Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες
3) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της .

Β. Κανονικά Πολύγωνα

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό αν έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες .

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο ο οποίος λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου.

Θεωρώντας ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) τότε χωρίζοντας τον κύκλο σε ν-ίσα τόξα , κάθε επίκεντρη γωνία που βαίνει σε αυτά λέγεται κεντρική γωνία του κανονικού ν-γώνου, συμβολίζεται με ω και υπολογίζεται από τον τύπο

$$\boxed{\omega = \frac{360^\circ}{\nu}}$$

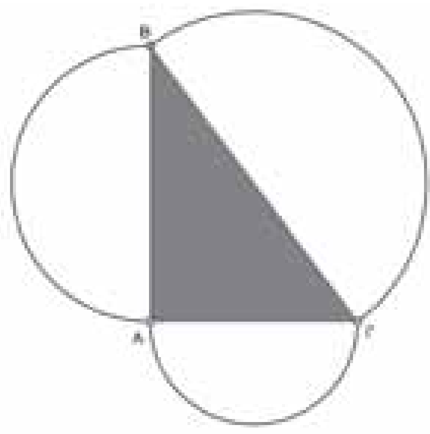
Αν φ η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου τότε $\boxed{\varphi = 180^\circ - \omega}$

Άρα οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές .

Γ. Μήκος κύκλου

Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας ρ υπολογίζεται με βάση τον τύπο $L = 2\pi\rho$, όπου π θα χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική τιμή $3{,}14$.

Άσκηση 1



Στο διπλανό σχήμα με διαμέτρους τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) σχεδιάσαμε τρία ημικύκλια.

Το ημικύκλιο με διάμετρο την ΑΒ έχει μήκος $12{,}56\text{m}$ ενώ το εμβαδόν του τριγώνου είναι 24m^2.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Ένας άνθρωπος ξεκινάει από το σημείο Α με σκοπό να επιστρέψει στο σημείο Α έχοντας μόνο 2 επιλογές

1η Να περπατήσει κατά μήκος της πλευράς ΑΒ ύστερα να περπατήσει το ημικύκλιο ΒΓ και στο τέλος να περπατήσει κατά μήκος της πλευράς ΑΓ.

2η Να περπατήσει το ημικύκλιο ΑΒ ύστερα να περπατήσει κατά μήκος της πλευράς ΒΓ και στο τέλος να περπατήσει το ημικύκλιο ΑΓ.

Δεδομένου ότι σε κάθε βήμα του καλύπτει απόσταση 1m, υπάρχει άραγε διαδρομή που θα κάνει λιγότερο από 29 μέτρα ;

Λύση

(α) Το μήκος του ημικυκλίου ΑΒ είναι $L_{AB} = \pi \cdot \rho$, όπου $\rho = \dfrac{AB}{2}$

Επομένως $12{,}56 = 3{,}14 \cdot \rho$ ή $\rho = \dfrac{12{,}56}{3{,}14}$ ή $\rho = 4$ οπότε $\boxed{AB = 8\text{cm}}$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο $E_{AB\Gamma} = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2}$

και επειδή $E_{AB\Gamma} = 24\text{m}^2$ προκύπτει $24 = \dfrac{8 \cdot A\Gamma}{2}$ άρα $A\Gamma = 6\text{m}$.

Για να βρούμε το μήκος της πλευράς ΒΓ θα εφαρμόσουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ.

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \text{ ή } B\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 \text{ ή } B\Gamma^2 = 100 \text{ άρα } \boxed{B\Gamma = 10\text{m}}$$

(β) Αρχικά θα υπολογίσουμε τα μήκη των ημικυκλίων ΒΓ και ΑΓ.

$L_{ΒΓ} = \pi \cdot \rho$, όπου $\rho = \dfrac{ΒΓ}{2} = 5$ άρα $L_{ΒΓ} = 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7m$

$L_{ΑΓ} = \pi \cdot \rho$, όπου $\rho = \dfrac{ΑΓ}{2} = 3$ άρα $L_{ΑΓ} = 3{,}14 \cdot 3 = 9{,}42m$

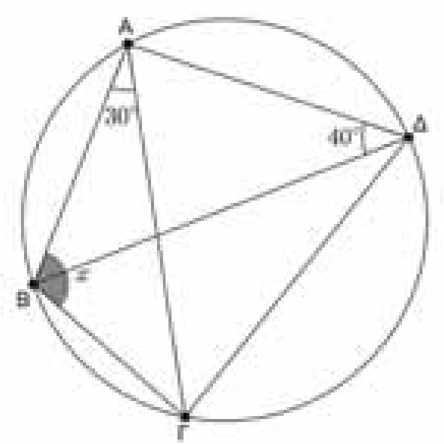
Μήκος διαδρομής $1^{ης}$ επιλογής : $S_1 = ΑΒ + L_{ΒΓ} + ΑΓ = 8 + 15{,}7 + 5 = 28{,}7m$

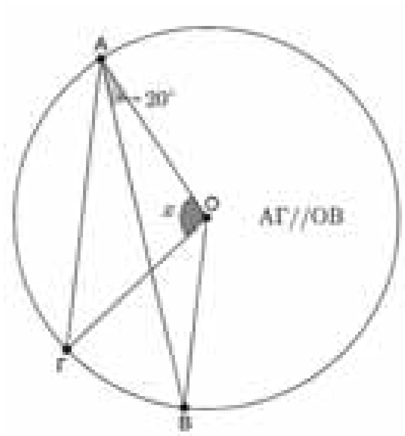
Μήκος διαδρομής $2^{ης}$ επιλογής : $S_2 = L_{ΑΒ} + ΒΓ + L_{ΑΓ} = 12{,}56 + 8 + 9{,}42 = 29{,}98$

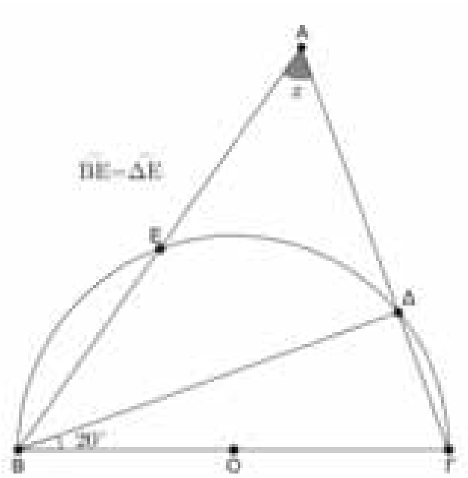
Άρα στην $1^{η}$ διαδρομή θα κάνει λιγότερο από 29 μέτρα.

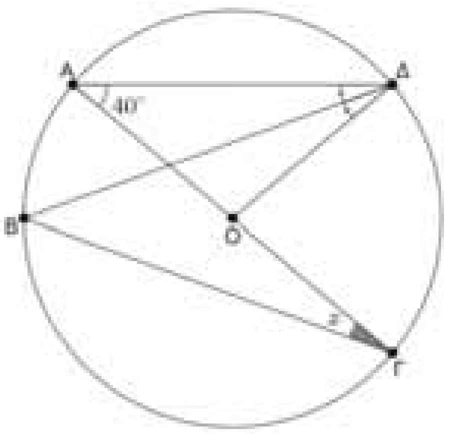
Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των άγνωστων γωνιών στα παρακάτω σχήματα









Σε ένα κανονικό πολύγωνο η κεντρική του γωνία του είναι ίση με το $\dfrac{1}{5}$ της γωνίας του.

Να βρείτε **(α)** την κεντρική του γωνία ω **(β)** τη γωνία του φ
(γ) το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου

2. Ο Χρήστος ισχυρίζεται ότι υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 55°. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής ή ψευδής δικαιολογώντας την απάντησή σας ;

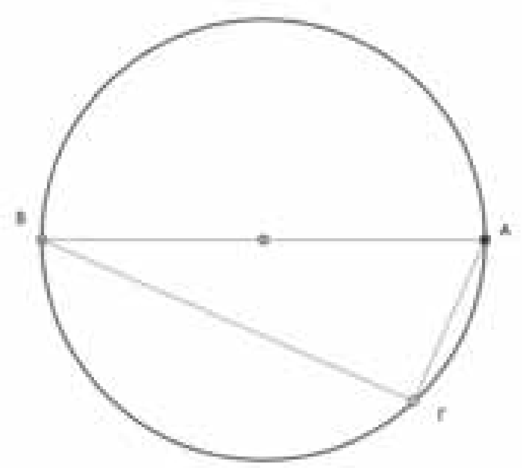
3. Μια κυκλική πλατεία έχει μήκος 628m. Δυο αυτόματα ποτιστήρια είναι τοποθετημένα σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία της πλατείας και εκτοξεύουν νερό σε σχήμα ημικύκλιού (προς την πλατεία) με ακτίνες ρ_1, ρ_2.

Ποια θα πρέπει να είναι η σχέση των δύο ακτινών ώστε το μοναδικό σημείο που να ποτίζουν και οι δύο να είναι το κέντρο της πλατείας

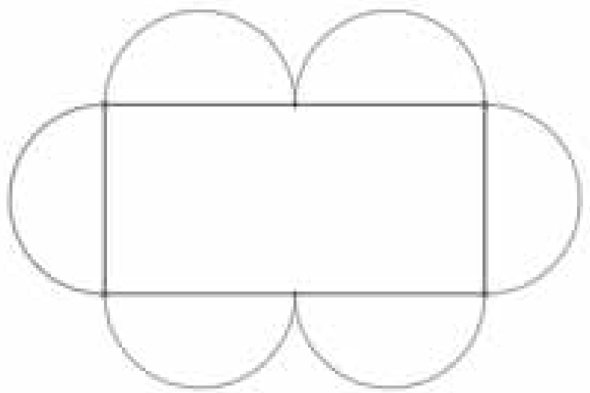
4. Με ένα σκοινί μήκους $30\sqrt{3}\text{m}$ σχηματίζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Να βρεθεί το μήκος του κύκλου που έχει ακτίνα ίση με το μήκος του ύψους του. ισοπλεύρου τριγώνου.

5. Στο σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου η χορδή ΑΓ είναι 4cm και το εμβαδόν του τριγώνου είναι 6cm^2. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου.



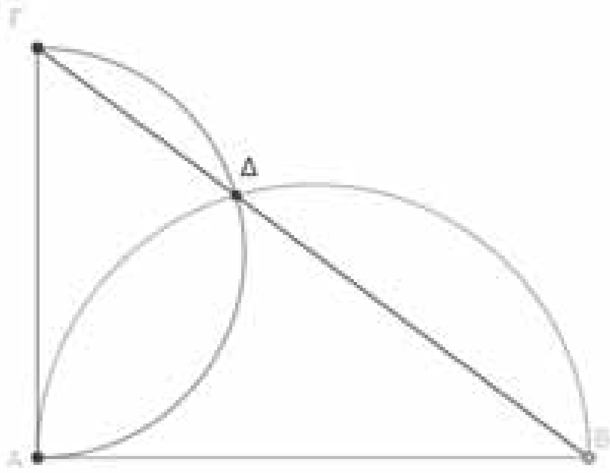
6. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 128m^2 του οποίου η μία διάσταση είναι διπλάσια από την άλλη κατασκευάζουμε 6 ημικύκλια με διαμέτρους ίσες με το μήκος της μικρότερης πλευράς του όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Να βρεθεί η εξωτερική περίμετρος του σχήματος .



7. Σχεδιάζουμε τρεις κύκλους όπου οι ακτίνες τους είναι ανάλογες των αριθμών 2 ,3 και 4. Αν το συνολικό μήκος και των τριών κύκλων είναι 63cm να βρείτε το μήκος του κάθε κύκλου . Είναι οι ακτίνες αυτών των κύκλων ανάλογες των αριθμών 2 ,3 και 4.

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 90^\circ)$ σχεδιάζουμε 2 ημικύκλια με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές του τριγώνου με μήκη $L_1 = 25{,}12\text{cm}$, $L_2 = 18{,}84\text{cm}$

Να υπολογίσετε το μήκος του ημικυκλίου με διάμετρο την υποτείνουσα του τριγώνου.

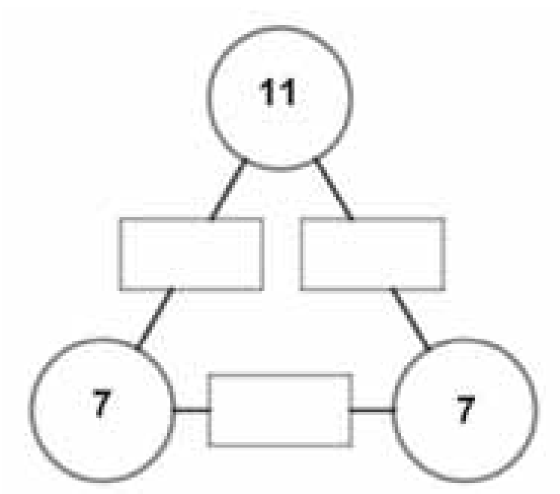


Β΄ Τάξη

Αριθμο… τρίγωνα!

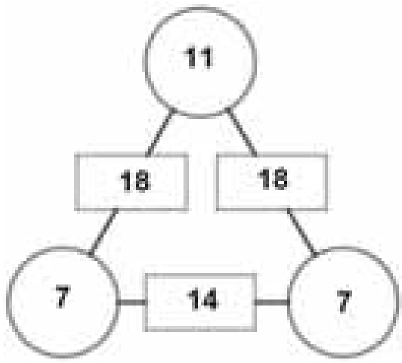
Βαρβάρα Γεωργιάδου–Καμπουρίδη

Καλωσήρθατε στον κόσμο των αριθμοτριγώνων. Στο παρακάτω αριθμοτρίγωνο οι αριθμοί στις τρεις κορυφές συνδέονται με κάποια σχέση που θα μας δώσει τους αριθμούς στα τρία ορθογώνια.



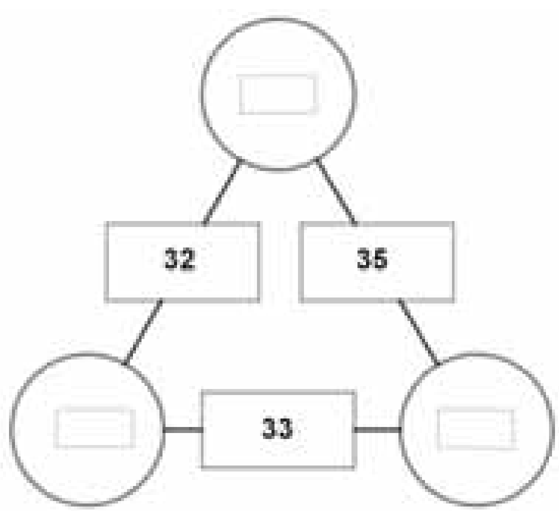
Ορίζουμε αυτή τη σχέση ως εξής:

Προσθέτουμε ανά δύο τους αριθμούς και τοποθετούμε τα αθροίσματα στα ορθογώνια. Θα έχουμε το εξής σχήμα:



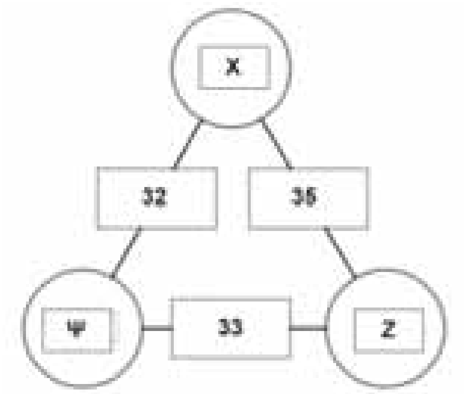
Φαίνεται πως η σχέση που ορίσαμε στο παραπάνω αριθμοτρίγωνο μας έδωσε εύκολα τις λύσεις για τους αριθμούς στα ορθογώνια.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να αντιστρέψουμε την παραπάνω κατάσταση και να έχουμε μια άλλη εκδοχή του αριθμοτριγώνου:



Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τους αριθμούς στις κορυφές του τριγώνου;

Στρατηγική 1η: Ονομάζουμε Χ, Ψ και Ζ τους αριθμούς στις τρεις κορυφές.



X + Ψ = 32 (1)
Ψ + Z = 33 (2)
X + Z = 35 (3)
Με μια σειρά από συνδυασμούς πράξεων θα βρω τις τιμές των X, Ψ, Z.
Οι παρακάτω συνδυασμοί δεν είναι μοναδικοί.

1ος συνδυασμός:
Προσθέτω κατά μέλη τις (1), (2) και (3):
X + Ψ + Ψ + Z + X + Z = 32 + 33 + 35
2 (X + Ψ + Z) = 100 άρα (X + Ψ + Z) = 50 (4)

Από τις (1) και (4) προκύπτει 32 + Z = 50, άρα $\boxed{Z = 18}$

Παρομοίως από τις (2) και (4) προκύπτουν αντίστοιχα: X + 33 = 50, άρα $\boxed{X = 17}$

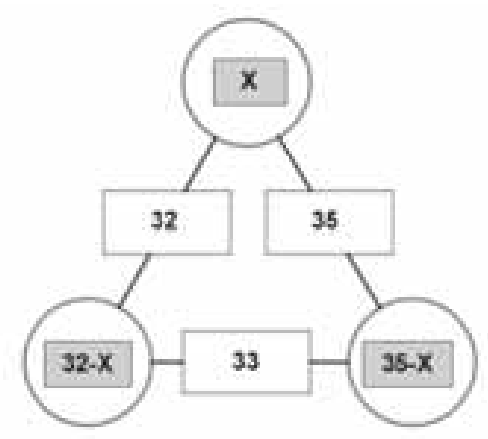
και από (3) και (4) έχουμε Ψ + 35 = 50, άρα $\boxed{\Psi = 15}$

2ος συνδυασμός:
Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και από το άθροισμά τους αφαιρώ την (3):
X + Ψ + Ψ + Z = 32 + 33, άρα 2Ψ + (X + Z) = 65,
2Ψ + (X + Z) – (X + Z) = 65 –35

2Ψ = 30 άρα $\boxed{\Psi = 15}$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκω και τις τιμές των X και Z.

Στρατηγική 2η:



Αν ονομάσουμε X τον αριθμό στην κορυφή του τριγώνου, τότε η κάτω αριστερά κορυφή θα είναι 32–X και η κάτω δεξιά 35–X.

Ισχύει δε 32 – X + 35 – X = 33

–2X = 33 – 32 – 35

2X = 32 + 35 – 33 (5)

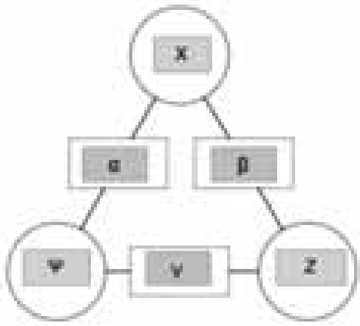
2X = 34, άρα X **= 17**

Η κάτω αριστερά κορυφή: 32 –17 **= 15**

Η κάτω δεξιά κορυφή: 35–17 **= 18**

Ας δούμε τώρα, αν, με βάση την δεύτερη στρατηγική, μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν γενικό κανόνα που θα ισχύει για κάθε αριθμοτρίγωνο και θα μας δίνει τις λύσεις:

Στο διπλανό αριθμοτρίγωνο τα α, β, γ είναι γνωστά. Τα Χ, Ψ, Ζ είναι οι άγνωστοι.
Από την (5) και με την αντίστοιχη αντικατάσταση των γνωστών αριθμών με τους άγνωστους προκύπτει:
$2X = \alpha + \beta - \gamma$, άρα Χ και ανάλογα

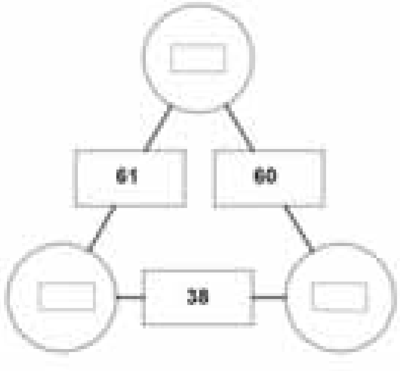


$$X = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \qquad \Psi = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \qquad Z = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \qquad (6)$$

Απορίες– ερωτήματα και απαντήσεις:

1. Απορία– ερώτημα: Έχουμε πάντα λύσεις φυσικούς αριθμούς στις κορυφές του αριθμοτριγώνου όταν έχουμε 3 φυσικούς αριθμούς στις πλευρές του;

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στην ερώτηση μέσω ενός άλλου αριθμοτριγώνου.
Από τη σχέση (6) παραπάνω θα έχουμε:



Η πάνω κορυφή: $\dfrac{61+60-38}{2} = \dfrac{83}{2} = 41,5$

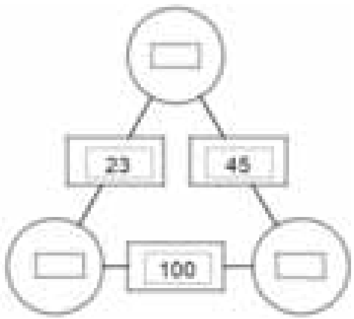
Η κάτω αριστερά κορυφή: $\dfrac{61+38-60}{2} = 19,5$

Η κάτω δεξιά κορυφή: $\dfrac{60+38-61}{2} = 18,5$

Απάντηση:

Παρατηρώντας τα παραπάνω αριθμοτρίγωνα διαπιστώνουμε ότι: αν από τους 3 δοσμένους αριθμούς οι 2 είναι περιττοί (33, 35) και ο ένας άρτιος (32), οι λύσεις είναι φυσικοί αριθμοί ενώ, αν 2 από τους 3 δοσμένους αριθμούς (60, 38) είναι άρτιοι και ένας (61) είναι περιττός, οι λύσεις δεν είναι φυσικοί αριθμοί.

2. Απορία– ερώτημα: Μήπως υπάρχει περίπτωση να έχουμε και αρνητικούς αριθμούς ως λύσεις στις κορυφές του αριθμοτριγώνου;



Από τη σχέση (6) παραπάνω θα έχουμε:

Η πάνω κορυφή: $\dfrac{23+45-100}{2} = \dfrac{-32}{2} = -16$

Η κάτω αριστερά κορυφή: $\dfrac{23+100-45}{2} = 39$

Η κάτω δεξιά κορυφή: $\dfrac{45+100-23}{2} = 61$

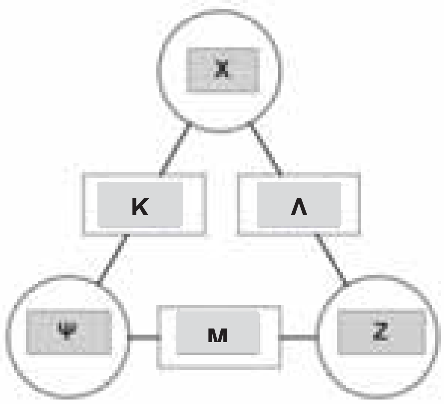
Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δύο αριθμών (23 + 45) είναι μικρότερο από τον τρίτο αριθμό 100 και γι αυτό η διαφορά τους είναι αρνητικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μία αρνητική λύση.

Στον πίνακα συνοψίζουμε τις παρατηρήσεις και τις απαντήσεις μας:

Σχέσεις	Τιμές των α, β, γ	Λύσεις
	α + β > γ, α + γ> β, β +γ > α και α, β, γ άρτιοι ή α, β ή β, γ ή α,γ περιττοί	φυσικοί αριθμοί
$X=\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$	α + β > γ, α + γ> β, β +γ > α και α, β, γ περιττοί ή α ή β ή γ περιττός	ρητοί θετικοί αριθμοί
$\Psi=\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$	α + β < γ, ή α + γ< β, ή β +γ < α και β, γ άρτιοι ή α, β ή β, γ ή α,γ περιττοί	ακέραιοι αριθμοί
$Z=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$	α + β < γ, ή α + γ< β, ή β +γ < α και α, β, γ περιττοί ή α ή β ή γ περιττός	ρητοί αρνητικοί αριθμοί
	α + β = γ ή α + γ = β ή β +γ = α	μία μηδενική λύση 0

Τα αριθμοτρίγωνα δεν τελειώνουν εδώ. Η εξερεύνηση τους θα μπορούσε να συνεχιστεί με άλλους συνδυασμούς αριθμών, με άλλες σχέσεις μεταξύ των αριθμών. Εμείς σταματάμε εδώ με ένα πρόβλημα για τους λάτρεις του αριθμοτριγώνου με ένα αριθμοτρίγωνο διαφορετικό από τα προηγούμενα.



Πρόβλημα

Οι K, Λ, M, X, Ψ, Z είναι φυσικοί αριθμοί διάφοροι του 0 και διαφορετικοί μεταξύ τους.

Γνωρίζουμε ότι:

$X + \Psi + K = 8$

$X + Z + \Lambda = 14$

$\Psi + Z + M = 8$

$K + \Lambda + M + X + \Psi + Z = 21$

Να βρεθούν οι X, Ψ, Z.

Ενδεικτική λύση:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 Άρα οι έξι αριθμοί είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6.

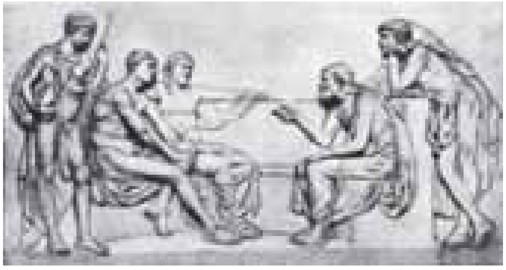
Από τις δοσμένες σχέσεις έχουμε ότι δύο τριάδες αριθμών έχουν άθροισμα 8. Αυτές μπορεί να είναι (1, 2, 5) και (1, 3, 4). Το **1** είναι κοινό άρα θα είναι το **Ψ**. Το 6 ως μεγαλύτερο μπορεί να είναι μόνο το Λ. Οι **X** και **Z** θα έχουν άθροισμα 8 (14 - 6), άρα τα **3** και **5** θα μπουν στις θέσεις των **X** και **Z** αντίστοιχα. Τέλος, ο K θα είναι 4 και ο M θα είναι 2, όπως προκύπτει από τις δοσμένες σχέσεις.

Πηγές: NCTM, Cambridge University

Παρορμητικές απαντήσεις.
Μία κακή συνήθεια που πρέπει να περιορίσουμε

Γράφει ο Στέφανος Κεΐσογλου

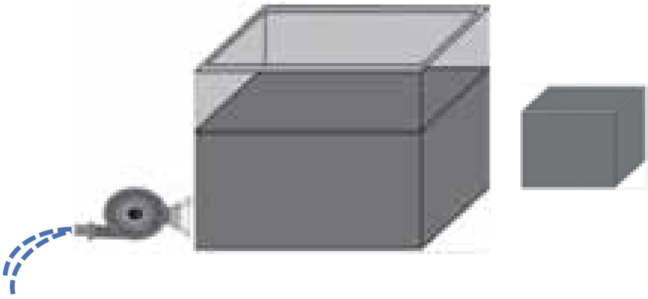
Υπάρχει μία διήγηση κατά οποία ο σοφός Σωκράτης σχεδίασε ένα τετράγωνο με πλευρά 2 πόδες. Ρωτάει έναν παριστάμενο τι εμβαδόν έχει και εκείνος του απαντάει 4. Στην συνέχεια τον ρωτάει πόση θα είναι η πλευρά του τετραγώνου αν διπλασιάσουμε το εμβαδόν και εκείνος βιαστικά του απαντά 4, δηλαδή διπλάσια από την πλευρά του αρχικού τετραγώνου. Τότε ο Σωκράτης τον παροτρύνει να βρει το λάθος του και ο παριστάμενος παραδέχεται ότι πράγματι η απάντηση ήταν βιαστική και του φαινόταν προφανής.



Με αφορμή αυτό το επεισόδιο θα δούμε ορισμένα παραδείγματα στα οποία μπορεί να παρασυρθεί κανείς και να απαντήσει βιαστικά, **παρορμητικά.**

Στα παραδείγματα αυτά καλό θα είναι πρώτα να αναγνωρίσετε ποια είναι η απάντηση που έρχεται πρώτα, σχεδόν αμέσως, στο μυαλό σας και στη συνέχεια να την συγκρίνετε με την σωστή απάντηση που υπάρχει στο τέλος του κειμένου.

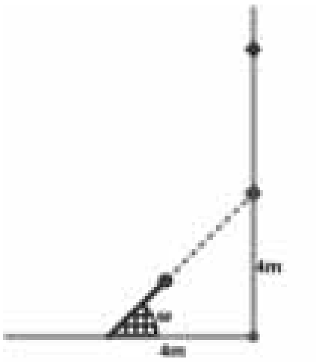
Παράδειγμα 1. Οι δεξαμενές



Μία αντλία αδειάζει μία υδατοδεξαμενή διαστάσεων 8×8×8 σε 8 ημέρες. Πόσες ημέρες χρειάζεται για να αδειάσει μία υδατοδεξαμενή διαστάσεων 4×4×4 μ

- Ποια είναι εδώ η παρορμητική απάντηση;

Παράδειγμα 2. Ο προβολέας



Στο σχήμα ο προβολέας φωτίζει ένα σημείο πάνω σε έναν τοίχο.
Για να φωτίσει το σημείο, το οποίο βρίσκεται σε διπλάσιο ύψος , θα πρέπει :
Α) Να διπλασιαστεί η γωνία.
Β) Να πλησιάσει ο προβολέας προς τον τοίχο.
Γ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 18^0
Δ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 40^0.

- Ποια απάντηση σας έρχεται αυθόρμητα;

Παράδειγμα 3. Τα νούφαρα

Τα νούφαρα στις λίμνες αναπτύσσονται πολύ γρήγορα.

Στην εικόνα φαίνονται κάποια νούφαρα τα οποία κάθε ημέρα διπλασιάζουν την έκταση που καλύπτουν.

Σε 60 ημέρες κάλυψαν ολόκληρη την μικρή λίμνη.

Σε πόσες ημέρες είχαν καλύψει την μισή έκταση της λίμνης;

- Ειλικρινά ποια απάντηση σας έρχεται αμέσως στον νου;

Παράδειγμα 4. Τα ποσοστά.

Τα ποσοστά αποτελούν έναν χώρο της αριθμητικής στον οποίο πολύ συχνά παρασυρόμαστε σε αυθόρμητες απαντήσεις.
Μελετήστε τις παρακάτω χαρακτηριστικές περιπτώσεις. Εντοπίστε την αυθόρμητη απάντηση και προσπαθήστε να βρείτε την σωστή.

α) Ένα ποσόν αυξάνεται 20% και στη συνέχεια ελαττώνεται 20%. Τι συμβαίνει τελικά στο ποσόν αυτό;

β) Αν ένα ποσόν Α είναι κατά 20% μικρότερο του Β κατά τί ποσοστό είναι το Β μεγαλύτερο του Α;

γ) Ένα ποσόν Α είναι 20% μεγαλύτερο του Β και το Β είναι 20% μεγαλύτερο του ποσού Γ. Κατά τι ποσοστό είναι μεγαλύτερο το ποσόν Α από το ποσόν Γ;

Παράδειγμα 5. Άπειρα εννιάρια

Προσέξτε το παρακάτω θέμα στο οποίο δύσκολα κάποιος δέχεται την σωστή απάντηση.
Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος: ο 0,99999999……….. ή ο αριθμός 1;

- Προσέξτε ότι τα εννιάρια είναι άπειρα, δηλαδή δεν σταματούν σε κανένα σημείο!!!!

Παράδειγμα 6. Οι πίθηκοι

Τα 12 πιθηκάκια τρώνε 12 κιλά μπανάνες σε 12 ημέρες

Τα 4 πιθηκάκια τρώνε 4 κιλά μπανάνες σε πόσες ημέρες;

- **Μη βιαστείτε!!!**

Παράδειγμα 7. Τα χτυπήματα του ρολογιού.

Το παράδειγμα που ακολουθεί προέρχεται από τον διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ. Το παραθέτουμε καθώς η παρορμητική απάντηση προτιμήθηκε από το 85% των συμμετεχόντων στον διαγωνισμό.

Ένα ρολόι έχει μία παράξενη ιδιότητα, παράγει ήχους (χτυπάει) με σταθερό ρυθμό, δηλαδή ο ένας ήχος από τον επόμενό του απέχει το ίδιο (σταθερό) χρονικό διάστημα. Παρατηρούμε ότι κάθε 9 λεπτά χτυπάει 4 φορές. Πόσα λεπτά θα χρειαστούν για να ακούσουμε 12 συνολικά χτυπήματα από αυτό το ρολόι;

- Με βάση τα αριθμητικά δεδομένα ποια είναι η **αληθοφανής** απάντηση;

Παράδειγμα 8. Ένα μπουκάλι κρασί.

Ένα μπουκάλι κρασί κοστίζει 10€. Το κρασί είναι κατά 8,8€ ακριβότερο από το μπουκάλι. Πόσο κοστίζει το μπουκάλι;

- Σκεφτείτε την αυθόρμητη απάντηση και στη συνέχεια προσπαθήστε να βρείτε την σωστή.

Παράδειγμα 9. Οι δείκτες του ρολογιού.

Ένα ρολόι τοίχου, όπως αυτό της εικόνας, δείχνει ότι η ώρα είναι 12 και 15΄. Ποια γωνία σχηματίζει ο ωροδείκτης με τον λεπτοδείκτη;

- Μη σε παρασύρει η εικόνα του ρολογιού!

Μην ξεχνάτε:

Το πρώτο στάδιο της μάθησης είναι να αναγνωρίσει κάποιος την άγνοιά του.

Οι απαντήσεις στο τέλος του τεύχους

Θα ήταν ενδιαφέρον να στείλετε και δικά σας θέματα στα οποία πιστεύετε ότι ο αναγνώστης μπορεί να παρασυρθεί και να απαντήσει λάθος κάνοντας μία αυθόρμητη και απερίσκεπτη σκέψη.

Οι απαντήσεις στη σελίδα 36.

Γ΄ Τάξη

Περί Εξισώσεων $2^{ου}$ Βαθμού

Ασκήσεις – Προβλήματα

Γιώργος Λυμπερόπουλος

Πρώτα ας δώσουμε απάντηση στο ερώτημα: Πότε ένα γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το 0, δηλαδή πότε α·β=0, όπου α,β είναι πραγματικοί αριθμοί;

Προφανώς για να είναι α·β=0, πρέπει ένας εκ των 2 αριθμών να είναι 0 ή και οι 2.
Άρα η απάντηση είναι: α=0 ή β=0.
Αν λοιπόν είχαμε το ερώτημα, για ποια τιμή του x έχουμε (x–3)·(x+2)=0, η απάντηση θα ήταν: Για x–3 =0 ή x+2=0 Δηλαδή για x=3 ή x=–2. Τόσο απλά θα είχα λύσει μια εξίσωση αυτής της μορφής.
Αντίστοιχα: Για ποια τιμή του x είναι: (2x+1).(3x–5)=0 η απάντησή μου είναι:
Για 2x+1=0 ή 3x–5=0 δηλαδή για 2x= –1 ή 3x=5, άρα $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{5}{3}$

Αν κάνουμε τις πράξεις στα πρώτα μέλη των παραπάνω εξισώσεων, αντί της:

$$(x–3)\cdot(x+2)=0,$$

παίρνουμε την $x^2-3x+2x-6=0$ ή

$$\mathbf{x^2-x-6=0\quad (1).}$$

και αντί της: (2x+1). (3x–5)=0,
παίρνουμε την: $6x^2-10x+3x-5=0$ ή

$$\mathbf{6x^2-7x-5=0\ (2).}$$

Εξισώσεις αυτής της μορφής, με έναν άγνωστο, που μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων μας οδηγούν στη μορφή το πρώτο μέλος να είναι ένα πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς τον άγνωστο και το δεύτερο μέλος, το **0** **λέγονται εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.**

Αντίστροφα αν είχα για επίλυση μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, σκέφτομαι ότι μπορώ να βρω τις λύσεις της, αρκεί το $1^{ο}$ μέλος να το κάνω γινόμενο. Αυτό όμως, είναι πάντα εύκολο; Είναι πάντα εφικτό; Για να το δούμε με μερικά παραδείγματα.

1. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-7x+12=0$

Η εξίσωση γράφεται:

$$x^2-3x-4x+12=0$$
$$ή\ (x^2-3x)-(4x-12)=0$$
$$ή\ x(x-3)-4(x-3)=0\ ή$$
$$(x-3).(x-4)=0\ δηλ.\ x-3=0\ ή$$
$$x-4=0.\ Άρα\ x=3\ ή\ x=4.$$

Για να κάνω γινόμενο το $1^{ο}$ μέλος, έγραψα αντί 7x, 3x+4x (Δηλαδή βρήκα 2 αριθμούς που να έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 12).

2. Να λυθεί η εξίσωση: $3x^2-5x+2=0$

Η εξίσωση γράφεται:

$$3x^2-3x-2x+2=0\ ή$$
$$(3x^2-3x)-(2x-2)=0\ ή$$
$$3x(x-1)-2(x-1)=0\ ή$$
$$(x-1).(3x-2)=0\ ή$$
$$(x-1)=0\ ή\ (3x-2)=0\ ή\ x=1\ ή\ x=\tfrac{2}{3}.$$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $7x^2-5x-11=0$

Στην εξίσωση αυτή παρατηρώ, όσο και αν προσπαθήσω δεν μπορώ να παραγοντοποιήσω το $1^{ο}$ μέλος με την ευκολία που μπόρεσα στα 2 πρώτα παραδείγματα. Γι' αυτό σκέπτομαι να γενικεύσω το θέμα της παραγοντοποίησης του $1^{ου}$ μέλους, αφού αυτός είναι άλλωστε ο στόχος μου. Η γενική μορφή μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης όμως, όπως μάθαμε έχει τη μορφή: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ **όπου,** $\alpha\neq 0$.
Στόχος μας είναι να κάνουμε το $1^{ο}$ μέλος γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Φέρουμε το γ στο $2^{ο}$ μέλος και έχουμε: $\alpha x^2+\beta x=-\gamma$. Πολλαπλασιάζουμε με 4α και έχουμε: $4\alpha\cdot\alpha x^2+4\alpha\cdot\beta x=-4\alpha\cdot\gamma$
Προσθέτουμε και στα 2 μέλη το β^2, παίρνουμε: $4\alpha^2\cdot x^2+4\alpha\cdot\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$

ή $(2\alpha\cdot x)^2+2\cdot 2\alpha x\cdot\beta+\beta^2=\Delta$ όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, που ονομάζουμε διακρίνουσα της εξίσωσης. Η εξίσωση γίνεται: $(2\alpha\cdot x+\beta)^2=\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.

- Αν Δ>0, τότε: $\Delta=(\sqrt{\Delta})^2$ άρα:
  $(2\alpha x+\beta)^2=(\sqrt{\Delta})^2$ ή $(2\alpha x+\beta)^2-(\sqrt{\Delta})^2=0$
  ή $(2\alpha x+\beta-\sqrt{\Delta})\cdot(2\alpha x+\beta+\sqrt{\Delta})=0$
  Δηλαδή πετύχαμε το στόχο μας. Στη συνέχεια παίρνουμε: $2\alpha x+\beta-\sqrt{\Delta}=0$ ή $2\alpha x+\beta+\sqrt{\Delta}=0$. Οι εξισώσεις αυτές μας δίνουν: $2\alpha x=-\beta+\sqrt{\Delta}$ ή $2\alpha x=-\beta-\sqrt{\Delta}$.
  Έτσι παίρνουμε τις λύσεις:
  $$\boxed{x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}} \text{ ή } \boxed{x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$$
- Αν Δ=0 τότε $x_1=x_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

Αν Δ<0 τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στο παράδειγμα (3), έχουμε: α=7, β=–5 και γ=–11 και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

ή $\Delta=(-7)^2-4.7.(-11)$

ή $\Delta=49+408=457>0$

Άρα η εξίσωσή μου έχει 2 λύσεις πραγματικές και άνισες τις: $x_1=\dfrac{5+\sqrt{457}}{2}$ ή $x_2=\dfrac{5-\sqrt{457}}{2}$.

Παρατηρούμε ότι οι πραγματικές λύσεις μιας εξίσωσης δεν είναι πάντοτε ρητοί αριθμοί. Μπορεί να είναι και άρρητοι. Στη περίπτωση αυτή τις αφήνουμε έτσι, εκτός και αν θέλουμε να δώσουμε σε κάποιες εφαρμογές τις προσεγγιστικές τιμές των λύσεων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει 2 ακέραιες λύσεις τις $x_1,x_2\in Z$, όπου Z το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Τότε η εξίσωση ισοδυναμεί με την:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0 \text{ ή}$$
$$x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2=0 \text{ ή}$$
$$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0.$$

Ονομάζουμε το άθροισμα των ριζών $x_1+x_2=s$ και το γινόμενο των ριζών $x_1\cdot x_2=p$, οπότε παίρνουμε: $x^2-sx+p=0$.

Επομένως μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ακέραιες λύσεις, μετά την εκτέλεση όλων των δυνατών πράξεων θα παίρνει τη μορφή:

$$x^2-sx+p=0.$$

Για την εξίσωση επομένως $x^2-9\chi+20=0$, θα μπορούσαμε να βρούμε πιο εύκολα τις ακέραιες λύσεις της, αν σκεφτούμε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με 9 και το γινόμενό τους ίσο με 20. Βρίσκουμε με δοκιμές, αν υπάρχουν, τους ακέραιους που έχουν άθροισμα **9 και γινόμενο 20. Αυτοί είναι ο 4 και** 5 γιατί 4+5=9 και 4.5=20. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x_1=4$ ή $x_2=5$

Εφαρμογές:

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $21x^2-22x-8=0$ **β.** $10x^2-17x+3=0$

γ. $16x^2-12x+9=0$ **δ.** $x^2+x+1=0$

ε. $x^2+19x+5=0$ **τ.** $\dfrac{1}{2x-3}+\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{6}{5}$

(υπόδειξη: πρέπει 2x–3≠0 και 2x+1≠0. Πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το γινόμενο: (2x–3)·(2x+1) κ.λ.π).

Προβλήματα

1. Ένα ορθογώνιο οικόπεδο, έχει διαστάσεις που διαφέρουν κατά 11 μέτρα. Αν το εμβαδόν του είναι $900m^2$, να βρεθεί πόσα χρήματα χρειάζεται ο ιδιοκτήτης για περίφραξη, αν κάθε τρέχον μέτρο περίφραξης, στοιχίζει 4,20 Ευρώ.

2. Ρώτησαν κάποιον, πόσων ετών είναι και απάντησε: Έχω ηλικία 7 φορές μεγαλύτερη από την ηλικία του γιού μου και 6 χρόνια μεγαλύτερη από το τετράγωνο της ηλικίας του. Πόσων ετών είναι;

3. Από έναν Πύργο ύψους 320 m, αφήνουμε να πέσει ένα αντικείμενο από το ψηλότερο σημείο του. Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο θα πέσει στο έδαφος.

4. Αν από το ίδιο σημείο του Πύργου εκτοξεύσουμε ένα άλλο αντικείμενο με αρχική ταχύτητα $u_0=1m/sec$, μετά πόσο χρόνο θα πέσει στο έδαφος;

Υπόδειξη: Από τη φυσική έχουμε μάθει, ότι: ένα σώμα που αφήνεται να πέσει στο κενό ελεύθερα σε χρόνο t, διανύει, διάστημα S, που δίνεται από το τύπο: $S=\frac{1}{2}g\cdot t^2$, όπου: $g=9.81m/sec^2$, είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα u_0 έχουμε: $S=u_0\cdot t+\frac{1}{2}g\cdot t^2$. Το g, στις ασκήσεις θα το παίρνουμε $g=10m/sec^2$, και τις πτώσεις θα θεωρούμε, ότι γίνονται στο κενό.

Επίλυση και διερεύνηση κλασματικών εξισώσεων

Λευτέρης Τσιλιακός

Στις πιο κάτω κλασματικές εξισώσεις με παράμετρο α, εξετάζουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου α, έχουμε λύσεις που μηδενίζουν τους παρονομαστές και ύστερα βρίσκουμε (αν υπάρχουν) δεκτές λύσεις.

1) Στην εξίσωση $\frac{3x}{x+2}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{\alpha}{x^2-x-6}$ (1) να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου α, για τις τιμές του x που μηδενίζουν τους παρονομαστές και να βρεθούν δεκτές ρίζες της (αν υπάρχουν).

Επίλυση

Επειδή $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$, θα πρέπει $x\neq-2$ και $x\neq 3$.

Η (1) μετά τις πράξεις γίνεται:

$$2x^2-12x-2=\alpha \quad (2).$$

Α. Η (2) για $x=-2$ δίνει $\alpha=30$. Έτσι η (2) για $\alpha=30$ δίνει $x_1=8$, δεκτή ρίζα και $x_2=-2$ που απορρίπτεται.

Β. Η (2) για $x=3$ δίνει $\alpha=-20$, οπότε η (2) για $\alpha=-20$ δίνει $x=3$ (διπλή ρίζα), που απορρίπτεται. Άρα η (1) για $\alpha=-20$ είναι αδύνατη.

Γ. Για κάθε $\alpha\notin\{-20, 30\}$ και τέτοιο, ώστε η διακρίνουσα Δ της (2) να είναι ≥ 0, θα έχουμε δεκτές ρίζες της (1). Συγκεκριμένα:
$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 36-2(-2-\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow \alpha\geq -20$.

Αν π.χ. $\alpha=12 \underset{(2)}{\Rightarrow} x^2-6x-7=0 \Rightarrow x_1=7$, $x_2=-1$ που ικανοποιούν την (1).

Δ. Στην περίπτωση (Β) έχουμε ότι για $x=3\Rightarrow\alpha=-20$. Έτσι, αν στην (1) (ή στην (2)) τεθεί όπου α (εδώ $\alpha=-20$) ένα πολυώνυμο του x με αριθμητική τιμή –20 για $x=3$, τότε η προκύπτουσα εξίσωση θα έχει ρίζα της τον αριθμό 3, που απορρίπτεται, καθώς και μία άλλη δεκτή ρίζα. Έτσι π.χ., αν στην (1) (ή στην (2)) τεθεί όπου α το διώνυμο $-11x+13$ η προκύπτουσα εξίσωση έχει τις ρίζες $x_1=3$, που απορρίπτεται, και $x_2=-\frac{5}{2}$ (δεκτή ρίζα). Ανάλογα μπορούμε να έχουμε και για την περίπτωση (Α).

2) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α η εξίσωση:

$$\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x-3}=\frac{\alpha}{x^2-5x+6} \qquad (1)$$

Α. είναι αδύνατη.

Β. έχει λύσεις.

Επίλυση

Επειδή $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, θα πρέπει $x\neq 2$ και $x\neq 3$.

Η (1) μετά τις πράξεις γίνεται $1-2x=\alpha$ (2).

Α. Η (2) για $x=2$ δίνει $\alpha=-3$, δηλαδή για $\alpha=-3$ η (2), άρα και η (1), έχει τη λύση $x=2$, που απορρίπτεται. Άρα η (1) για $\alpha=-3$ είναι αδύνατη.

Β. Ομοίως για $x=3 \underset{(2)}{\Rightarrow} \alpha=-5$, δηλαδή και για $\alpha=-5\Rightarrow x=3$, που απορρίπτεται. Άρα η (1) για $\alpha=-5$ είναι αδύνατη.

Γ. Αν στην (2) τεθεί όπου α (εδώ $\alpha=-3$ περίπτ. Α) ένα πολυώνυμο με αριθμητική τιμή –3 για $x=2$, π.χ. το διώνυμο $5x-13$, τότε από την (2) παίρνουμε $1-2x=5x-13\Leftrightarrow x=2$ που απορρίπτεται.

Αν όμως τεθεί όπου α ένα πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού με αριθμητική τιμή –3 για $x=2$,
π.χ. το $4x^2-19$, τότε
$(2)\Leftrightarrow 1-2x=4x^2-19\Rightarrow x_1=2$, που απορρίπτεται, ή $x_2=-\frac{5}{2}$, που είναι δεκτή ρίζα.

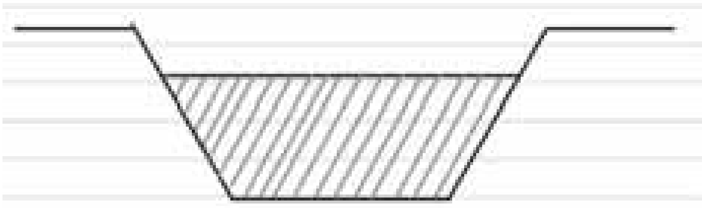
Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε αν στην (2) θέσουμε όπου α ένα πολυώνυμο με αριθμητική τιμή –5 (περίπτ. Β) για $x=3$ και επιλύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση (2).

Το θεώρημα Θαλή και εφαρμογές του

Καλλιόπη Αρδαβάνη - Χρήστος Μάλλιαρης

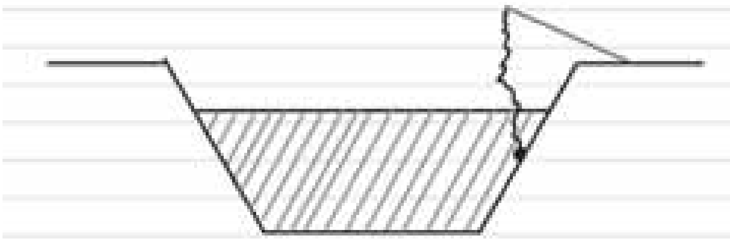
Ένας γρίφος…

Σε ένα τμήμα μαθητών που συμμετείχε σε σχολικό πολιτιστικό πρόγραμμα μαθητών Γ΄ Γυμνασίου, δόθηκε το ερώτημα: ***Να βρείτε το ύψος του νερού που ρέει στο κανάλι του χωριού μας.*** Ένα κανάλι νερού διέτρεχε μία περιοχή πολύ κοντά στο χωριό τους. Η τομή του ήταν σε σχήμα τραπεζίου με μικρή βάση την κάτω (σχήμα 1).



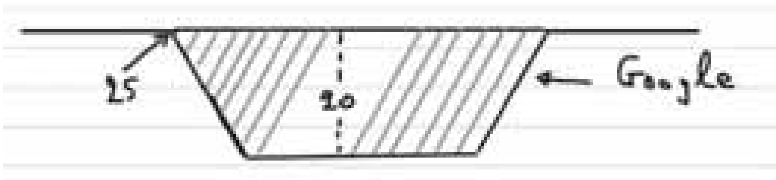
Σχήμα 1

Μία ομάδα μαθητών δραστηριοποιήθηκε για να απαντήσει στο ερώτημα. Πλησιάζοντας στο κανάλι έλεγαν διάφορες ιδέες. Όταν έφτασαν ο μαθητής Ψ, ο οποίος είχε γνώσεις ψαρέματος, έριξε ένα βαρίδι δεμένο σε ένα καλάμι ψαρέματος αρκετές φορές και τους είπε ότι οι ενδείξεις που πήρε για το ύψος του νερού στο κανάλι ήταν 2,8μ, 3,5μ, 3,3μ, 3,4μ. Οι άλλοι μαθητές απάντησαν ότι ήταν μια καλή προσπάθεια αλλά το ακριβές ύψος ίσως ήταν η μεγαλύτερη ένδειξη από αυτές, ίσως και όχι, αν το βαρίδι ποτέ δεν είχε φτάσει στη βάση του καναλιού (σχήμα 2).



Σχήμα 2

Ο παρατηρητικός Π, σε ένα επισκέψιμο σημείο του καναλιού είδε ότι στην πλαϊνή πλευρά του υπήρχε μία αρίθμηση και τον αριθμό 6,20 εκεί που έφτανε το νερό. Ο λογικός Λ, είπε ότι οι αριθμοί αυτοί μπορεί να αντιστοιχούν στο ύψος του νερού ή ότι μπορεί να είναι βαθμολογημένη η πλαγιά του καναλιού. Ο μαθητής Ε που του άρεσε να ελέγχει τα πάντα, πρότεινε να ελέγξουν αυτή τη μέτρηση που έβλεπαν ως εξής: με ένα μέτρο δικό τους θα μετρούσαν μία απόσταση δύο ενδείξεων π.χ. από το 8 έως το 9. Αν αυτή η απόσταση ήταν 1 μέτρο τότε η πλαγιά θα ήταν βαθμονομημένη, αν ήταν κάτι λιγότερο πιθανώς αυτή η ένδειξη θα αντιστοιχούσε στο ύψος του νερού. Πήραν αρκετές μετρήσεις και διαπίστωσαν ότι η κάθε διαφορά ενδείξεων 1 μέτρου της πλαγιάς είχε μήκος 1 μέτρο και συμπέραναν ότι η πλαγιά ήταν βαθμονομημένη. Ο μαθητής Μ, ο πιο μελετηρός στην ομάδα άνοιξε το κινητό του και έψαξε στο Google πληροφορίες που έδινε για το κανάλι ο κατασκευαστής του. Εκεί διάβασε ότι η πλαϊνή πλευρά είχε βαθμονομηθεί ανά 20cm από τη βάση προς τα πάνω μέχρι την ένδειξη 25m, όπου σε αυτήν θα αντιστοιχούσε ύψος νερού 20m στο κανάλι (σχήμα 3).

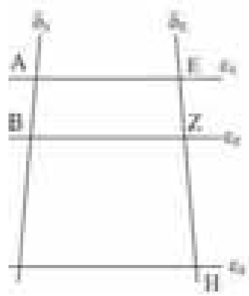


Σχήμα 3

Ο βιαστικός Β, είπε ότι το ύψος του νερού ήταν: $\frac{25 \cdot 6,2}{20} = 7,75\mu$.

Τότε ο σκεπτικός Θαλής είπε: βρήκα το ύψος του νερού και έδωσε την παρακάτω λύση:

$$\frac{25}{20} = \frac{6,20}{x} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 6,20}{25} = 4,96m$$

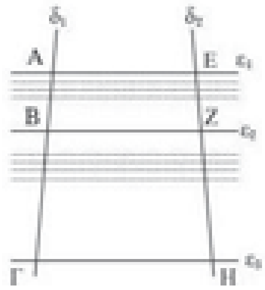


Με ποια από όλες τις λύσεις συμφωνείτε και γιατί;

Θεώρημα του Θαλή

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή: Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$,

τότε: $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$

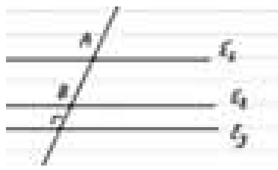


Αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή

Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι τα σημεία των ευθειών δ_1 και δ_2 αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$ τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

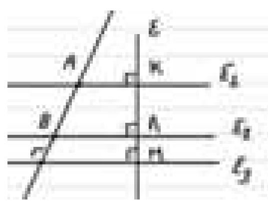
1. Οι ε_1, ε_2, ε_3 (σχήμα 4) είναι γραμμές του τετραδίου σας. Εξηγείστε γιατί ΑΒ=2ΒΓ;



Σχήμα 4

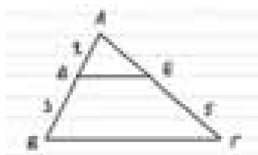
Κατασκευάζουμε ευθεία ε κάθετη στην ε_1 (άρα θα είναι κάθετη και στις ε_2 και ε_3) (σχήμα 5). Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$. Από το θεώρημα του Θαλή έχω:

$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M}$ αλλά ΚΛ=2ΛΜ άρα $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{K\Lambda}{\Lambda M}$ ή $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{2\Lambda M}{\Lambda M}$ ή $\frac{AB}{B\Gamma} = 2$ άρα ΑΒ=2ΒΓ.



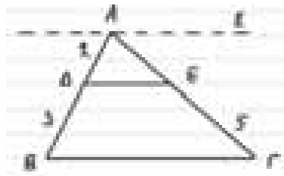
Σχήμα 5

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΔΕ//ΒΓ, αν γνωρίζουμε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ, ΔΒ και ΕΓ (σχήμα 6), να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ.



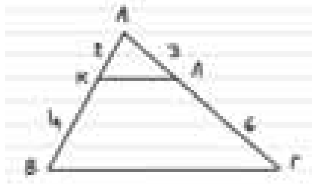
Σχήμα 6

Κατασκευάζουμε ευθεία ε//ΔΕ//ΒΓ. Από το θεώρημα του Θαλή έχω: $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$ ή $\frac{2}{3}=\frac{\text{ΑΕ}}{5}$ ή $3\cdot\text{ΑΕ}=2\cdot 5$ ή $\text{ΑΕ}=\frac{2\cdot 5}{3}$ ή $\text{ΑΕ}=\frac{10}{3}$.



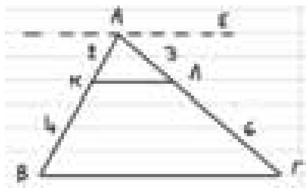
Σχήμα 7

3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα 8) να δείξετε ότι ΚΛΓΒ είναι τραπέζιο.



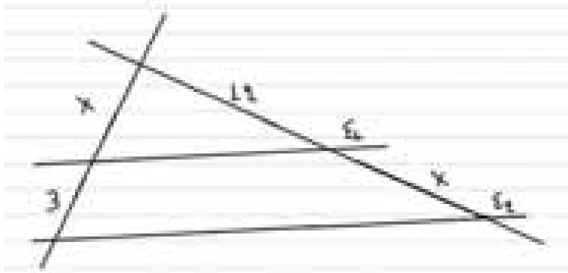
Σχήμα 8

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πλευρές ΒΓ και ΚΛ είναι παράλληλες. Κατασκευάζουμε ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι ε//ΚΛ. Από το σχήμα έχουμε: $\frac{ΑΚ}{ΚΒ}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (1) και $\frac{ΑΛ}{ΛΓ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (2) από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $\frac{ΑΚ}{ΚΒ}=\frac{ΑΛ}{ΛΓ}$ άρα ΚΛ//ΒΓ (αντίστροφο θεωρήματος του Θαλή) δηλαδή το τετράπλευρο ΚΛΓΒ είναι τραπέζιο.



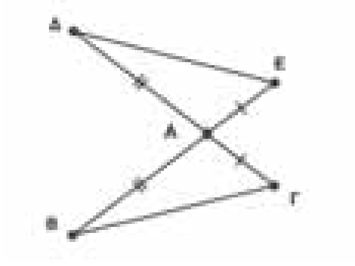
Σχήμα 9

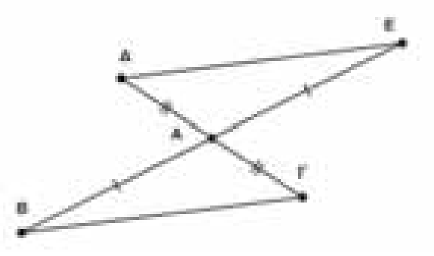
4. Αν γνωρίζουμε ότι $ε_1//ε_2$ να υπολογίσετε το x (σχήμα 10).



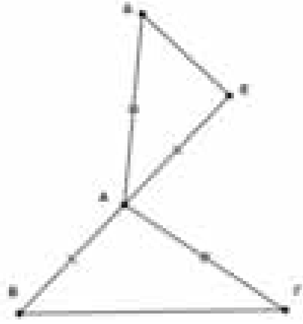
Σχήμα 10

5. Στα διπλανά σχήματα τα σημεία Γ, Α, Δ και Β, Α, Ε είναι συνευθειακά. Ελέγξτε αν ισχύει ΔΕ//ΒΓ.





6. Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Β, Α και Ε είναι συνευθειακά. Ισχύει ΔΕ//ΒΓ;



Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

Επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιώντας τη στρατηγική: «Κάνω ένα Σχέδιο»

Στυλιανός Μαραγκάκης Ανδρέας Τριανταφύλλου

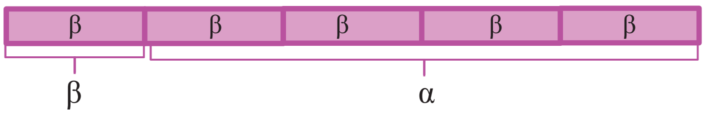
Πρόβλημα 1: Δυο αριθμοί έχουν άθροισμα 40 και ο ένας είναι 4 φορές μεγαλύτερος του άλλου. Να βρεθούν οι 2 αριθμοί.

Λύση:

Εφαρμόζω τη στρατηγική: «Κάνω ένα σχέδιο».

- Πρώτα κάνω ένα σχέδιο που να σχετίζεται με τα γεγονότα που περιγράφει το πρόβλημα
  Αν τον μικρότερο αριθμό β τον παραστήσουμε με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Τότε ο μεγαλύτερος α είναι: 

Και το άθροισμά τους 

Από την αναπαράσταση βλέπουμε ότι α + β = 5β

Οπότε 5β = 40, άρα $β = \frac{40}{5}$ δηλαδή β = 8.

Επομένως α = 4•β = 32. Άρα α = 32 και β = 8

Ελέγχω για να βεβαιωθώ ότι η απάντησή έχει νόημα. α + β =32 + 8 = 40✓

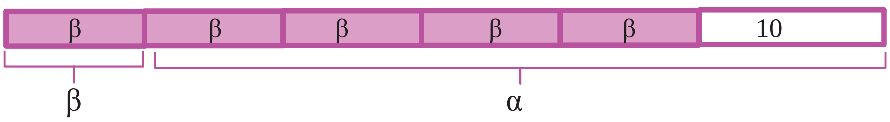
Πρόβλημα 2: Δυο αριθμοί έχουν άθροισμα 40 και ο ένας είναι 4 φορές μεγαλύτερος του άλλου αυξημένος κατά 10. Να βρεθούν οι 2 αριθμοί.

Λύση:

Εφαρμόζω τη στρατηγική: «Κάνω ένα σχέδιο».

- Πρώτα κάνω ένα σχέδιο που να σχετίζεται με τα γεγονότα που περιγράφει το πρόβλημα
  Αν τον μικρότερο αριθμό β τον παραστήσουμε με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Τότε ο μεγαλύτερος α είναι: 

Και το άθροισμά τους 

Από την αναπαράσταση βλέπουμε ότι α + β = 5β + 10

Οπότε 5β + 10 = 40, επομένως 5β = 40 – 10, 5β = 30 άρα $β = \frac{30}{5}$ δηλαδή β = 6.

Επομένως α = 4•β + 10 = 24 + 10 = 34. Άρα α = 34 και β = 6

Ελέγχω για να βεβαιωθώ ότι η απάντησή έχει νόημα. $\alpha + \beta = 32 + 8 = 40$ ✓

Πρόβλημα 3: Ένας πατέρας είναι μεγαλύτερος από το γιό του κατά 30 χρόνια. Αν η ηλικία του πατέρα είναι εξαπλάσια της ηλικίας του γιού, να βρεθούν οι ηλικίες τους.

Λύση:

Εφαρμόζω τη στρατηγική: «Κάνω ένα σχέδιο».

- Πρώτα κάνω ένα σχέδιο που να σχετίζεται με τα γεγονότα που περιγράφει το πρόβλημα
  Αν παραστήσουμε την ηλικία του γιού με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

x

, τότε την ηλικία του πατέρα θα την παραστήσουμε με :

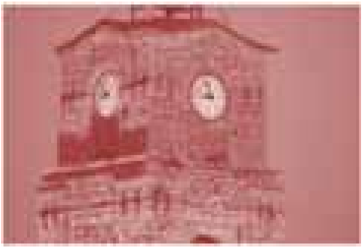
x	x	x	x	x	x

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $6x - x = 30$, δηλαδή $5x = 30$,

οπότε $x = \frac{30}{5}$, άρα $x = 6$. Άρα ο γιός είναι 6 ετών και ο πατέρας $6 \cdot 6 = 36$ ετών.

Ελέγχω για να βεβαιωθώ ότι η απάντησή έχει νόημα. $\frac{36}{6} = 6$ ✓

Πρόβλημα 4: Το ρολόι στο καμπαναριό της εκκλησίας «Εισόδια της Θεοτόκου» στην Αράχωβα, γνωστό για την ακρίβειά του, χτυπάει την καμπάνα του κάθε ώρα, την ώρα σε ίσα διαστήματα.



Αν το ρολόι χτυπά 6 φορές την καμπάνα στις 6 η ώρα σε 6 δευτερόλεπτα, πόσο χρόνο θα χρειαζόταν το ρολόι για να χτυπήσει 12 φορές την καμπάνα στις 12 η ώρα;
(υποθέτουμε ότι ο ήχος της καμπάνας δεν παίρνει χρόνο.)

Υπόδειξη: Η απάντηση δεν είναι 12 δευτερόλεπτα.

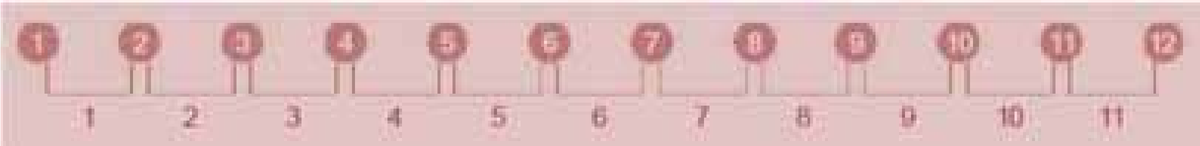
Λύση:

Εφαρμόζω τη στρατηγική: «Κάνω ένα σχέδιο».

- Πρώτα κάνω ένα σχέδιο που να σχετίζεται με τα γεγονότα που περιγράφει το πρόβλημα
  Χρησιμοποιώ κουκκίδες που αντιπροσωπεύουν τα κτυπήματα της καμπάνας που ακούγονται στις 6 η ώρα.

Τα 6 κτυπήματα της καμπάνας πραγματοποιούνται σε 6 δευτερόλεπτα. Υπάρχουν 5 διαστήματα σε όλη τη διάρκεια των 6 κτυπημάτων της καμπάνας, επομένως κάθε διάστημα ανάμεσα σε 2 κτυπήματα της καμπάνας πρέπει να διαρκεί $\frac{6}{5}$ δευτερόλεπτα.

- Κάνω ένα σχέδιο για να αναπαραστήσω τα κτυπήματα της καμπάνας που θα συμβούν στις 12:00.



Μπορώ να δω ότι υπάρχουν 11 διαστήματα όταν υπάρχουν 12 κουδούνια.

Εάν κάθε διάστημα διαρκεί $\frac{6}{5}$ δευτερόλεπτα, τότε πολλαπλασιάζω με 11 για να βρω πόσος χρόνος χρειάζεται για 12 κτυπήματα της καμπάνας.

$11 \bullet \frac{6}{5} = \frac{66}{5} = 13\frac{1}{5}$

Το ρολόι χρειάζεται $13\frac{1}{5}$ δευτερόλεπτα για να χτυπήσει 12 φορές την καμπάνα.

Ελέγχω για να βεβαιωθώ ότι η απάντησή έχει νόημα.

Υπάρχουν διπλάσια κτυπήματα της καμπάνας, επομένως θα έπρεπε να είναι περίπου δύο φορές ο χρόνος που χρειάστηκε για τα 6 κτυπήματα συν το διάστημα ανάμεσα σε 2 κτυπήματα της καμπάνας. Φαίνεται να είναι έτσι, νομίζω.

Πρόβλημα 5: Σε ένα Γυμνάσιο των Τρικάλων πηγαίνουν 240 μαθητές. Από αυτούς τους μαθητές, το $\frac{1}{6}$ πάνε περπατώντας στο σχολείο. Από αυτούς που δεν πάνε περπατώντας, τα . $\frac{3}{4}$ πάνε χρησιμοποιώντας λεωφορείο για το σχολείο. Από αυτούς που δεν περπατούν ή δεν παίρνουν το λεωφορείο, οι μισοί πάνε με τα ποδήλατά τους. Πόσοι μαθητές του σχολείου πάνε οδηγώντας τα ποδήλατά τους στο σχολείο;

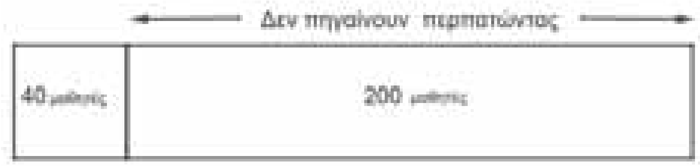
Εφαρμόζω τη στρατηγική: «Κάνω ένα σχέδιο».

- Πρώτα κάνω ένα σχέδιο που να σχετίζεται με τα γεγονότα που περιγράφει το πρόβλημα

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

- υπάρχουν συνολικά 240 μαθητές.
- το $\frac{1}{6}$ πάνε περπατώντας στο σχολείο.
- τα $\frac{3}{4}$ από αυτούς που δεν περπατούν παίρνουν το λεωφορείο.
- το $\frac{1}{2}$ από αυτούς που δεν περπατούν ή δεν παίρνουν λεωφορείο πηγαίνουν με τα ποδήλατά τους στο σχολείο.
- Σχεδιάζω ένα ορθογώνιο για να αναπαραστήσω τους μαθητές ολόκληρου του σχολείου.

Χωρίζω το ορθογώνιο για να δείξω αυτούς που περπατούν και αυτούς που δεν περπατούν για να πάνε στο σχολείο.



Χωρίζω το τμήμα που αντιπροσωπεύει αυτούς που δεν πηγαίνουν περπατώντας στο σχολείο σε τέταρτα.

Το σκιασμένο μέρος αντιπροσωπεύει αυτούς που πηγαίνουν με το λεωφορείο. Το μη σκιασμένο μέρος αντιπροσωπεύει όσους δεν περπατούν ή δεν παίρνουν το λεωφορείο.

Διαιρώ το μη σκιασμένο τμήμα για να αναπαραστήσω αυτούς που πηγαίνουν με τα ποδήλατά τους, στο σχολείο.

Έτσι 25 μαθητές πηγαίνουν με τα ποδήλατά τους στο σχολείο.

Ελέγχω για να βεβαιωθώ ότι η απάντησή έχει νόημα.

Το σύνολο είναι 40 + 50 + 50 + 50 + 25 + 25 = 240 μαθητές. ✓

40 μαθητές περπατούν. Αυτοί είναι το $\frac{1}{6}$ από τους 240 μαθητές. ✓

150 μαθητές μεταφέρονται με το λεωφορείο. Αυτοί είναι τα $\frac{1}{6} \neq 2$ από τους 200 που δεν περπατούν. ✓

25 μαθητές οδηγούν τα ποδήλατά τους. Αυτοί είναι το $\frac{1}{2}$ από τους 50 που δεν περπατούν ή δεν πηγαίνουν με λεωφορείο στο σχολείο. ✓

Απαντήσεις στα θέματα των ¨Αυθόρμητων απαντήσεων¨

Παράδειγμα 1. Οι δεξαμενές

Η μεγάλη δεξαμενή χωράει 8 μικρές δεξαμενές άρα η μικρή δεξαμενή έχει χωρητικότητα το $\frac{1}{8}$ της μεγάλης δεξαμενής και χρειάζεται μόνο μία ημέρα για να αδειάσει.
Εδώ προφανώς η παρορμητική απάντηση είναι ότι θα πρέπει να διπλασιαστεί η γωνία, αλλά τότε ο προβολέας θα είναι κατακόρυφος! Αρκεί να στρίψει λίγο κατά 18^0.

Παράδειγμα 3. Τα νούφαρα

Προφανώς η αυθόρμητη απάντηση είναι ότι θα χρειαστεί 30 ημέρες για να καλυφθεί η μισή λίμνη γιατί έχουμε μάθει να σκεφτόμαστε αναλογικά. Το σωστό είναι ότι θα χρειαστούν 59 ημέρες.

Παράδειγμα 4. Τα ποσοστά.

α) Η παρορμητική απάντηση είναι ότι το ποσόν τελικά μένει ίδιο. Αυτό όμως δεν ισχύει αφού η αύξηση 20% και η ελάττωση 20% δεν εφαρμόζονται στο ίδιο ποσόν για να τα αφαιρέσουμε. Το ποσόν τελικά ελαττώνεται κατά 4%.
β) Εδώ κάποιος μπορεί εύκολα να υποθέσει ότι το Β είναι κατά 20% μεγαλύτερο του Α αλλά αυτό δεν ισχύει. Το ποσόν Β είναι κατά 25% μεγαλύτερο του Α.
γ) Η αυθόρμητη απάντηση εδώ είναι συνήθως 40% αλλά η σωστή είναι 44%.
Για τα τρία αυτά ερωτήματα μπορείτε να βρείτε την σωστή απάντηση αν δώσετε σε ένα από τα ποσά σε κάθε ερώτηση μία κατάλληλη τιμή π.χ 100.

Παράδειγμα 5. Άπειρα εννιάρια

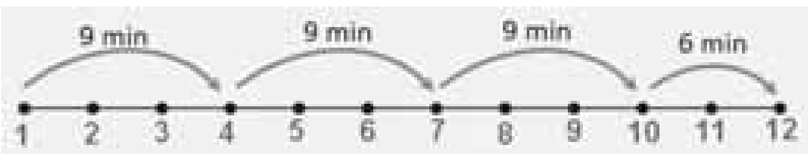
Ο αριθμός 0,9999….. είναι ίσος με 1. Μπορούμε να σκεφτούμε ότι ο δεκαδικός 0,3333333……. είναι ίσος με το $\frac{1}{3}$, άρα ο δεκαδικός 0,99999…… είναι ίσος με $3\times\frac{1}{3}=1$

Παράδειγμα 6. Οι πίθηκοι

Αφού τα 12 πιθηκάκια τρώνε 12 κιλά μπανάνες σε 12 ημέρες άρα το ένα πιθηκάκι σε 12 ημέρες τρώει 1 κιλό μπανάνες. Αυτό σημαίνει ότι τα 4 πιθηκάκια θα φάνε 4 κιλά μπανάνες πάλι σε 12 ημέρες και όχι σε 4 όπως αυθόρμητα μπορεί να σκεφτείς κάποιος.

Παράδειγμα 7. Τα χτυπήματα του ρολογιού.

Θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ότι αφού κάθε 9 λεπτά χτυπάει 4 φορές άρα σε 27 λεπτά θα χτυπήσει 12 φορές. Όμως δεν είναι σωστό αυτό. Παρατηρήστε το παρακάτω σχήμα……….



Παράδειγμα 8. Ένα μπουκάλι κρασί.

Ασφαλώς η παρορμητική απάντηση είναι ότι το μπουκάλι κοστίζει 1,2€. Αυτό όμως δεν είναι σωστό γιατί το κρασί δεν κοστίζει 8,8€. Το μπουκάλι κοστίζει το μισό του 1,2€, δηλαδή 0,6€.

Παράδειγμα 9. Οι δείκτες του ρολογιού.

Η αυθόρμητη απάντηση είναι ότι η γωνία του ωροδείκτη με τον λεπτοδείκτη είναι 90^0. Αυτό όμως δεν ισχύει γιατί ο ωροδείκτης δεν βρίσκεται στο 12 αλλά έχει μετακινηθεί κατά $7{,}5^0$ όσο δηλαδή στρίβει κάθε ένα τέταρτο της ώρας. Τελικά η γωνία στις 12.15΄ είναι ίση με $82{,}5^0$.

83^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”

11 **Νοεμβρίου** 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044\right):\left(\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2\right)$$

Λύση

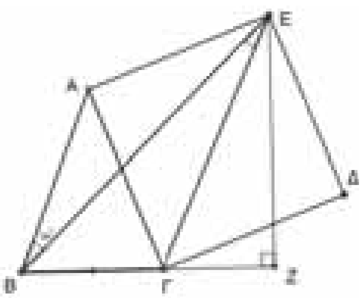
Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044\right):\left(\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2\right)=\left(\left(\frac{-21}{7}\right)^7+\left(\frac{-15}{-5}\right)^7+4044\right):\left(\left(\frac{-14}{7}\right)^3+\left(\frac{-18}{-9}\right)^3+2\right)$$

$$=\left((-3)^7+3^7+4044\right):\left((-2)^3+2^3+2\right)=\left(-3^7+3^7+4044\right):\left(-2^3+2^3+2\right)=4044:2=2022.$$

Πρόβλημα 2

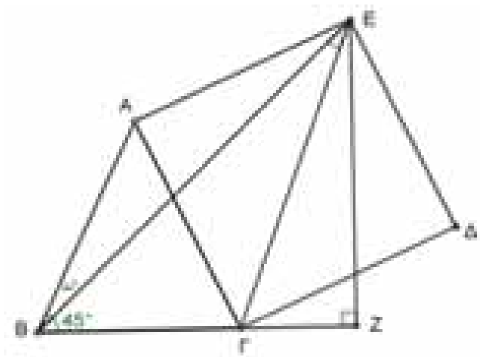
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $\mathrm{A\hat{B}E}=\omega$ και $\mathrm{E\hat{Z}\Gamma}=90^0$, τότε:



(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: ΒΖ = ΕΖ

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή ΑΕ = ΑΓ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A\hat{E}B}=\omega$. Επειδή $\mathrm{B\hat{A}E}=\hat{\mathrm{A}}+90^0$, έπεται ότι: $\hat{\mathrm{A}}+90^0+2\omega=180^0 \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}=90^0-2\omega$.

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^0-\hat{A}}{2}=\dfrac{180^0-\left(90^0-2\omega\right)}{2}=45^0+\omega.$

(β) Έχουμε $E\hat{B}Z=\hat{B}-\omega=\left(45^0+\omega\right)-\omega=45^0$. Επειδή το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο με $E\hat{Z}B=90^0$, έπεται ότι $B\hat{E}Z=90^0-E\hat{B}Z=90^0-45^0=45^0$, οπότε το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με ΒΖ = ΕΖ.

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα ¾ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Λύση

Έστω x οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7x$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και x είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9x$ καραμέλες.

Έστω y οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7y$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και y είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν $9y$ καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν $9x-9y$ καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $9x-9y\geq\frac{3}{4}\cdot(9x)\Leftrightarrow x\geq 4y.$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x+x=2x$

2η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y+y=8y$

Επομένως $2x\geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5}+\frac{(-44)^5}{(-4)^5}\right)\cdot(-2022)^2+10^6\right):\left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}}-(-5)^{10}+10^3\right)$$

Λύση

Έχουμε ότι

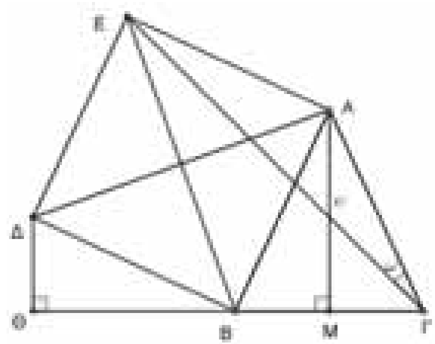
$$A=\left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5}+\frac{(-44)^5}{(-4)^5}\right)\cdot(-2022)^2+10^6\right):\left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}}-(-5)^{10}+10^3\right)$$

$$=\left(\left(\left(\frac{-22}{2}\right)^5+\left(\frac{-44}{-4}\right)^5\right)\cdot(-2022)^2+10^6\right):\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^{10}-(-5)^{10}+10^3\right)$$

$$=\left(\left((-11)^5+(+11)^5\right)\cdot(-2022)^2+10^6\right):\left((-5)^{10}-(-5)^{10}+10^3\right)$$

$$=\left(\left(-11^5+11^5\right)\cdot(-2022)^2+10^6\right):\left(0+10^3\right)=\left(0\cdot(-2022)^2+10^6\right):(+10)=10^6:10^3=10^3.$$

Πρόβλημα 2



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο. Αν είναι $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}=\omega$, $\Delta\hat{\Theta}\text{Β}=90^0=\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Β}$ και $\text{ΒΓ}=\alpha$, $\text{ΑΜ}=\upsilon$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β}$.

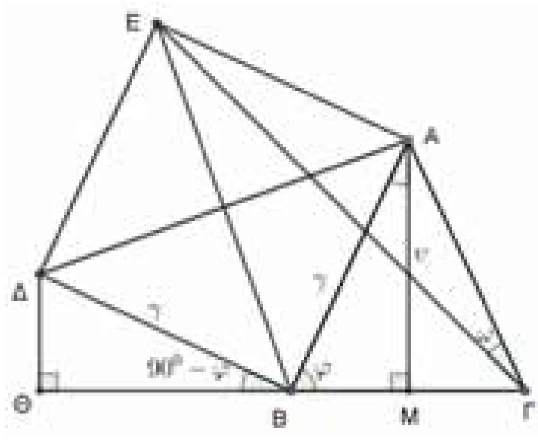
(2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και υ.

Λύση

(α) Επειδή ΑΕ = ΑΒ = ΑΓ, το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma=\omega$. Επειδή $\Gamma\hat{\text{Α}}\text{Ε}=\hat{\text{Α}}+90^0$, έπεται ότι: $\hat{\text{Α}}+90^0+2\omega=180^0\Rightarrow\hat{\text{Α}}=90^0-2\omega$.

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\hat{\text{Β}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^0-\hat{\text{Α}}}{2}=\dfrac{180^0-\left(90^0-2\omega\right)}{2}=45^0+\omega.$

Άρα έχουμε: $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β}=\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}-\omega=\left(45^0+\omega\right)-\omega=45^0.$



Σχήμα 2

(β) (1ος τρόπος)

Επειδή $\text{Α}\hat{\text{Β}}\Delta=90^0$, οι γωνίες $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Μ}$ και $\Delta\hat{\text{Β}}\Theta$ έχουν άθροισμα 90^0 , δηλαδή είναι συμπληρωματικές. Έτσι, αν $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Μ}=\varphi$, τότε $\Delta\hat{\text{Β}}\Theta=90^0-\varphi$.

Έστω $\text{ΑΒ}=\text{Β}\Delta=\gamma$. Τότε, αφού $\text{Β}\hat{\Delta}\Theta=90^0-\Delta\hat{\text{Β}}\Theta=\varphi$, έχουμε:

$$\Delta\Theta=\gamma\cdot\eta\mu\left(90^0-\varphi\right)=\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\,\text{Β}\hat{\Delta}\Theta=\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\text{ΒΜ}=\frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Β}\Theta=\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\varphi\right)=\gamma\cdot\eta\mu\,\text{Β}\hat{\Delta}\Theta=\gamma\cdot\eta\mu\varphi=\text{ΑΜ}=\upsilon.$$

Άρα έχουμε: $(\mathrm{AM\Theta\Delta})=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AM}+\Theta\Delta)\cdot \mathrm{M\Theta}=\frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\upsilon+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon+\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

(β) 2^{ος} τρόπος

Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΒΘΔ είναι ορθογώνια , αφού $\hat{\mathrm{M}}=\hat{\Theta}=90^0$ και επιπλέον έχουν:

1. ΑΒ = ΒΔ, αφού το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο και

2. $\mathrm{M\hat{A}B}=\Theta\hat{\mathrm{B}}\Delta$, αφού

$$\mathrm{M\hat{A}B}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=45^0-\omega,\ \Theta\hat{\mathrm{B}}\Delta=180^0-\mathrm{A\hat{B}}\Delta-\hat{\mathrm{B}}=180^0-90^0-\left(45^0+\omega\right)=45^0-\omega$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΒ και ΒΘΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\mathrm{B\Theta}=\mathrm{AM}=\upsilon \text{ και } \Delta\Theta=\mathrm{BM}=\frac{\alpha}{2}.$$

Άρα έχουμε: $(\mathrm{AM\Theta\Delta})=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AM}+\Theta\Delta)\cdot \mathrm{M\Theta}=\frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\upsilon+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon+\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

Πρόβλημα 3

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή ήταν A κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός A, όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ, τέτοιοι ώστε:

$$\left\{\begin{matrix} A=7\kappa+1 \\ A=9\lambda+1 \\ A=64\mu+3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} A-1=7\kappa \\ A-1=9\lambda \\ A-1=64\mu+2\end{matrix}\right\}\Longrightarrow A-1=7\kappa=9\lambda=64\mu+2$$

$$\Longrightarrow \frac{A-1}{63}=\frac{\kappa}{9}=\frac{\lambda}{7}=\frac{64\mu+2}{63}=\omega\in\mathbb{Z}\Longrightarrow \kappa=9\omega,\ \ \lambda=7\omega \text{ και } \frac{64\mu+2}{63}=\omega\in\mathbb{Z}.$$

Άρα ο αριθμός 63 πρέπει να διαιρεί τον αριθμό $64\mu+2$. Έχουμε:

$$\frac{64\mu+2}{63}=\frac{63\mu+\mu+2}{63}=\mu+\frac{\mu+2}{63}\Longrightarrow \mu+2=63\nu, \nu\in\mathbb{N}\Longrightarrow \mu=63\nu-2.$$

Επομένως, έχουμε: $A=64\mu+3=64\cdot 63\nu-128+3=4032\nu-125$.

Επειδή $35000 < A < 40000$, έχουμε:

$$35000<4032\nu-125<40000\Leftrightarrow 35125<4032\nu<40125$$

$$\Leftrightarrow \frac{35125}{4032}<\nu<\frac{40125}{4032}\Leftrightarrow 8{,}71<\nu<9{,}95\Leftrightarrow \nu=9,$$

αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, ο πληθυσμός της πόλης είναι

$$A=4032\cdot 9-125=36163.$$

2^{ος} τρόπος

Αφού 35000 = 7 · 5000, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 7 είναι ο 35000 = 7· 5000 + 1 = 35001.

Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

35001, 35008, 35015, 35022, 35029, ...

Αφού το άθροισμα των ψηφίων του 35001 είναι 9, ο 35001 είναι πολλαπλάσιο του. Πράγματι, $35001 = 9 \cdot 3889$, οπότε ο πρώτος ακέραιος ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 9 είναι ο $35002 (= 9 \cdot 3889 + 1)$. Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35002, 35011, 35020, 35029, 35038, \ldots$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος κοινός αριθμός από τις παραπάνω λίστες είναι ο 35029, και ότι κάθε επόμενος προκύπτει με πρόσθεση του ΕΚΠ(7, 9) = 63, οπότε έχουμε τους αριθμούς της μορφής $35029 + 63k$, με k μη αρνητικό ακέραιο.

Αφού $35000 = 546 \cdot 64 + 56$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 64 είναι ο $547 \cdot 64 + 3 = 35011$. Κάθε επόμενος τέτοιος αριθμός προκύπτει με πρόσθεση του 64, οπότε έχουμε τους αριθμούς

$$35011 + 64\lambda,$$

με λ μη αρνητικό ακέραιο.

Θέλουμε να καλύψουμε τη διαφορά $35029 - 35011 = 18$ προσθέτοντας τη διαφορά $64 - 63 = 1$, κατάλληλο αριθμό φορών, δηλαδή 18.

Πιο αναλυτικά, θέλουμε $\quad 35029 + 63k = 35011 + 64\lambda,$

δηλαδή
$$64\lambda - 63k = 18 \qquad (1)$$

για κατάλληλους ακέραιους.

Αφού $64 - 63 = 1$, μια προφανής λύση είναι η $k = \lambda = 18$, και άρα

$$A = 35011 + 64 \cdot 18 = 36163.$$

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 125

Γ59. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΒΜ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και τη διάμεσο ΒΜ στο σημείο Ν έτσι ώστε $A\hat{N}M = 90^0$.
Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = 2 \cdot \Delta M$. **ΜΟ Σιγκαπούρης, 2022**

Λύση (1ος τρόπος)

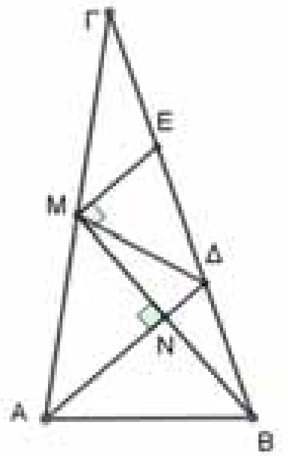
Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την διχοτόμο ΑΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ , έστω στο σημείο Ε. σχήμα 1. Επειδή το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ έπεται ότι το Ε είναι το μέσο του ΔΓ, οπότε

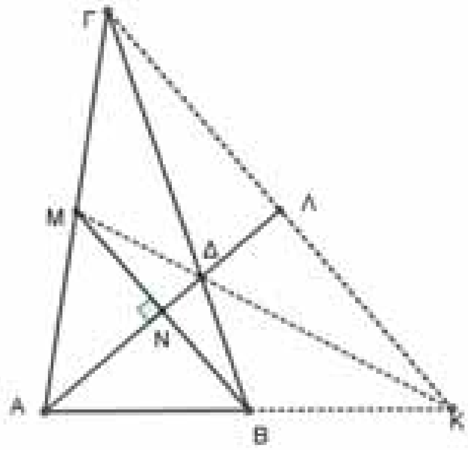
$$\Gamma\Delta = 2 \cdot \Delta E. \qquad (1)$$

Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, έπεται ότι ΑΔ μεσοκάθετη της ΒΜ και αφού $ME \parallel A\Delta$, έπεται ότι $ME \perp MB$ και $B\hat{M}E = 90^0$. Επιπλέον το Δ είναι σημείο της μεσοκάθετης του ΒΜ, οπότε $\Delta B = \Delta M$. Άρα $\Delta\hat{B}M = \Delta\hat{M}B = \omega$, οπότε $\Delta\hat{E}M = E\hat{M}\Delta = 90^0 - \omega$. Επομένως, θα είναι και

$$\Delta M = \Delta E. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι: $\Gamma\Delta = 2 \cdot \Delta M$





2ος τρόπος. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΚ = ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ισοσκελές, αφού ΑΚ = 2·ΑΒ = 2·ΑΜ = ΑΓ, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος του και μεσοκάθετη της πλευράς ΚΓ.. Επειδή και η ΓΒ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΚΓ έπεται ότι το σημείο Δ είναι το βαρύκεντρο του. Άρα και η διάμεσος ΚΜ περνάει από το Δ και ισχύει ότι:

$$\Delta K = 2\cdot \Delta M\,. \qquad (3)$$

Επειδή η ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΚΓ έπεται ότι ΔΚ = ΔΓ, οπότε λόγω της (3) θα είναι και ΓΔ = 2·ΔΜ .

Α74. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha > -1$, $\beta > -1$ και $\alpha + \beta = 1$ ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}\geq\frac{2}{3}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα; **ΜΟ Αυστρίας, 2022**

Λύση

Επειδή $\alpha+1>0$, $\beta+1>0$ και $\alpha+\beta=1$, μετά από πράξεις έχουμε:

$$3(\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)\geq 2(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\overset{\alpha+\beta=1}{\Longleftrightarrow} 3(\alpha^2+\beta^2+1)\geq 2(\alpha\beta+2)$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^2+\beta^2)\geq 2\alpha\beta+1 \Leftrightarrow 3(\alpha^2+\beta^2)\geq 2\alpha\beta+(\alpha+\beta)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0, \text{ ισχύει.}$$

Η ισότητα αληθεύει, όταν $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

Ασκήσεις για λύση

Α75. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδείξετε ότι:

(1) $\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta+\gamma}}\geq\frac{4\alpha}{2\alpha+\beta+\gamma}$,

(2) $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta+\gamma}}+\frac{\gamma}{\beta}\cdot\sqrt{\frac{2\beta}{\gamma+\alpha}}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha+\beta}}\geq 3.$

Ν44. Δίνεται ότι ο αριθμός $\overline{\alpha\alpha\beta\beta}=1000\alpha+100\alpha+10\beta+\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος του οποίου το τετράγωνο ισούται με $\overline{\alpha\alpha\beta\beta}$.

Γ60. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι τέτοια ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ζ και οι ημιευθείες ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι: $A\hat{\Theta}Z = E\hat{\Gamma}\Delta$.

Επίλυση συστημάτων στην Φυσική

Χρήστος Ζαφειρόπουλος

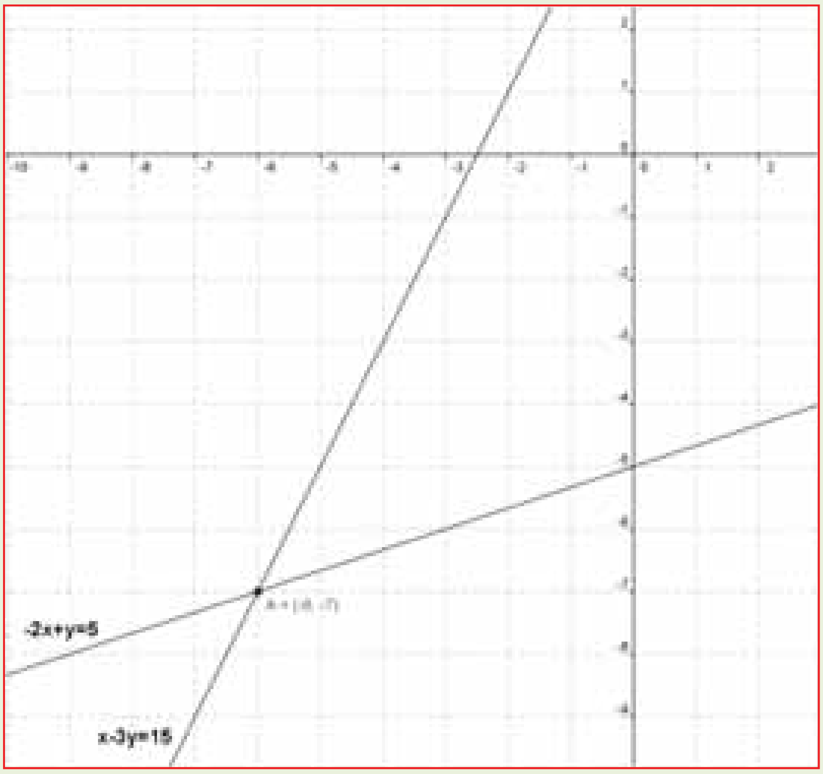
Οι γνωστοί μέθοδοι επίλυσης συστημάτων είναι:

- Η γραφική επίλυση
- Η αλγεβρική με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών και
- Η αλγεβρική με την μέθοδο της αντικατάστασης.

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$-2x + y = 5$$
$$x - 3y = 15$$

- Η γραφική λύση του παραπάνω συστήματος, προκύπτει με τον σχεδιασμό των δύο ευθειών που παριστάνει κάθε μια από τις δύο εξισώσεις. Η λύση προκύπτει από το σημείο τομής των δύο ευθειών.



- Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών όπου πολλαπλασιάζουμε μία από τις δύο εξισώσεις (μερικές φορές και τις δύο) με τον κατάλληλο αριθμό ώστε ο συντελεστής ενός από τους δύο αγνώστους να γίνει αντίθετος στις δύο εξισώσεις. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με τον αριθμό 2, ώστε οι δύο εξισώσεις να έχουν αντίθετο συντελεστή για την μεταβλητή x. Κατόπιν προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη και ο άγνωστος x απαλείφεται.

$$\left.\begin{aligned} -2x + y &= 5 \\ 2\cdot(x - 3y) &= 2\cdot 15 \end{aligned}\right\} \text{ ή } \left.\begin{aligned} -2x + y &= 5 \\ 2x - 6y &= 30 \end{aligned}\right\} +$$

$$-5y = 35 \Leftrightarrow y = \frac{30}{-5} \Leftrightarrow y = -7$$

Και με αντικατάσταση της τιμής του y σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$-2x+(-7)=5 \Leftrightarrow -2x-7=5 \Leftrightarrow -2x=7+5 \Leftrightarrow -2x=12 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2}=\frac{12}{-2} \Leftrightarrow x=-6$$

Επομένως η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(-6,-7)$

- Με την μέθοδο της αντικατάστασης όπου επιλύουμε την μία από τις δύο εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο και το αποτέλεσμα το αντικαθιστούμε στην δεύτερη. Λύνοντας για παράδειγμα την πρώτη εξίσωση ως προς x έχουμε:

$$-2x+y=5 \Leftrightarrow y=2x+5$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση το y με το ίσο του 2x+5 έχουμε:

$$x-3y=15 \Leftrightarrow x-3(2x+5)=15 \Leftrightarrow x-6x-15=15 \Leftrightarrow x-6x=15+15 \Leftrightarrow$$

$$-5x=30 \Leftrightarrow \frac{-5x}{-5}=\frac{30}{-5} \Leftrightarrow x=-6$$

Επομένως, και πάλι, η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(-6,-7)$

Όμως, τόσο στην φυσική, όσο και σε πληθώρα προβλημάτων της καθημερινής μας ζωής, μπορούμε (όπως και συνηθίζεται) να χρησιμοποιούμε μια παραλλαγή της μεθόδου της αντικατάστασης σκεπτόμενοι ως εξής:

Λύνουμε και τις δύο εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο και κατόπιν εφόσον τα πρώτα μέλη των εξισώσεων είναι μεταξύ τους ίσα, θα είναι ίσα και τα δεύτερα.

Για παράδειγμα στο προηγούμενο σύστημα έχουμε:

$$-2x+y=5 \Leftrightarrow -2x=5-y \Leftrightarrow x=\frac{5-y}{-2}$$

$$x-3y=15 \Leftrightarrow x=3y+15 \quad \text{άρα} \quad \frac{5-y}{-2}=3y+15 \Leftrightarrow$$

$$5-y=-2(3y+15) \Leftrightarrow 5-y=-6y-30 \Leftrightarrow$$

$$-y+6y=-5-30 \Leftrightarrow 5y=-35 \Leftrightarrow y=\frac{-35}{5} \Leftrightarrow y=-7$$

Και με αντικατάσταση σε μια από τις δύο αρχικές εξισώσεις βρίσκουμε ξανά $x=-6$

Ας δούμε ένα ενδεικτικό πρόβλημα Φυσικής:

Δύο αυτοκίνητα απέχουν μεταξύ τους 300 Km και ξεκινούν και κινούνται ταυτόχρονα με σταθερές ταχύτητες 10 Km/h και 20 km/h αντίστοιχα, με κατεύθυνση το ένα προς το άλλο. Να βρείτε την απόσταση του σημείου συνάντησης από την αρχική θέση του πρώτου αυτοκινήτου. Ας δούμε την λύση του προβλήματος:

Αν το πρώτο αυτοκίνητο διανύσει απόσταση S το δεύτερο αυτοκίνητο θα διανύσει απόσταση 300 – S. Γνωρίζοντας από την φυσική ότι η ταχύτητα του κάθε αυτοκινήτου ισούται με το πηλίκο της απόστασης που διένυσε δια του χρόνου t που χρειάστηκε, προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$10=\frac{S}{t} \qquad 20=\frac{300-S}{t}$$

Λύνοντας και τις δύο εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο έχουμε:

$$10=\frac{S}{t} \Leftrightarrow t=\frac{S}{10} \qquad 20=\frac{300-S}{t} \Leftrightarrow t=\frac{300-S}{20} \quad \text{άρα}$$

$$\frac{S}{10}=\frac{300-S}{20} \Leftrightarrow 20S=10(300-S) \Leftrightarrow 20S=3000-10S \Leftrightarrow 20S+10S=3000 \Leftrightarrow$$

$$30S=3000 \Leftrightarrow S=\frac{3000}{30} \Leftrightarrow S=100\,Km$$

Επομένως το πρώτο αυτοκίνητο απέχει 100 χιλιόμετρα από την αρχική του θέση.

ΔΙΕΘΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΩΝ (S.I.)

Θανάσης Χριστόπουλος

Το Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) αναπτύχθηκε από τρεις διεθνείς οργανισμούς:

i) Το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και σταθμών (BIPM)

ii) Τη Γενική Διάσκεψη μέτρων και σταθμών (CGPM)

iii) Τη Διεθνή Επιτροπή μέτρων και σταθμών (CIPM)

Το Διεθνές Γραφείο ιδρύεται με την υπογραφή συνθήκης στις 20 Μαΐου του 1875 και με έμβλημα το «ΜΕΤΡΩ ΧΡΩ».

Γενική Διάσκεψη είναι το κεντρικό όργανο των τριών οργανισμών και συγκαλείται στις Sevres κάθε 4 έως 6 χρόνια.

Η 11η Γενική Διάσκεψη το 1960 καθιέρωσε το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (S.I.) όρισε τις μονάδες μέτρησης θεμελιωδών φυσικών μεγεθών και προθέματα για τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις τους εως 10^{12} και 10^{-12} αντίστοιχα, τα οποία το 1975 και το 1991 επεκτάθηκαν μέχρι 10^{24} και 10^{-24}

Η 27η Γενική Διάσκεψη Μέτρων και Σταθμών, που πραγματοποιήθηκε το Νοέμβριο του 2022 στο παλάτι των Βερσαλλιών συμπλήρωσε το S.I. με δύο νέα προθέματα για τα πολλαπλάσια και δύο για τις υποδιαιρέσεις (υποπολλαπλάσια). Έτσι ο τελικός πίνακας έχει ως εξής:

	Για τα πολλαπλάσια	Για τα υποπολλαπλάσια
1960	Kilo (K) 10^{3}	milli (m) 10^{-3}
1960	Mega (M) 10^{6}	μικρο (micro)(μ) 10^{-6}
1960	Giga (G) 10^{9}	nano (n) 10^{-9}
1960	TERA (T) 10^{12}	pico (p) 10^{-12}
1975	Peta (P) 10^{15}	femto (f) 10^{-15}
1975	Exa (E) 10^{18}	atto (a) 10^{-18}
1991	Zetta (Z) 10^{21}	zepto (z) 10^{-21}
1991	Yotta (Y) 10^{24}	yocto (y) 10^{-24}
2022	Ronna (R) 10^{27}	ronto (r) 10^{-27}
2022	Quetta (Q) 10^{30}	quecto (q) 10^{-30}

Σημ. Ξεκινήσαμε το 1960 από το 10^{12} και σήμερα, σε 62 χρόνια, είμαστε στο 10^{30}. Η Ηλεκτρονική εποχή έφερε αυτό το άλμα. Λέτε κάποτε να φτάσουμε στο googol το 10^{100};

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Καιρόν γνώθι.

Να γνωρίζεις τι γίνεται στην εποχή σου.

Γνους πράττε

Να ενεργείς έχοντας γνώση.

Ο Αριθμός επτά

Ο αριθμός επτά ήταν ο ιερός αριθμός του Απόλλωνα. Πολλές θεϊκές ομάδες της αρχαιότητας έχουν 7 μέλη π.χ. οι Πλειάδες είναι 7, οι Εσπερίδες είναι 7 , η Νιόβη με τον Αμφίονα είχαν 7 κόρες και 7 γιούς. Την Θήβα πολιόρκησαν οι Επτά, ο Οδυσσέας βρισκόταν 7 μέρες στη θάλασσα πριν πάει στην Καλυψώ. Ο Ησίοδος έλεγε η έβδομη μέρα κάθε μήνα είναι ιερή και ο Ηρόδοτος ότι αυτή τη μέρα οι Σπαρτιάτες έκαναν θυσία στον Απόλλωνα. Ο Αισχύλος «επτά επί Θήβας», και ο Απόλλωνας είχε 7 χορδές στη λύρα του. Κατά την Κλασική και Ελληνιστική περίοδο έχουμε τα επτά θαύματα του κόσμου, τους **επτά Σοφούς**, και πολλά άλλα 7, και η εβδομάδα έχει 7 μέρες.
Ποιοι να ήταν οι επτά Σοφοί και πότε ορίστηκαν;
Κατά τον Διογένη το Λαέρτιο αυτό έγινε τον 6ο αιώνα όταν άρχων της Αθήνας ήταν ο Δαμασίας και ο κατάλογος του Δημήτριου Φαληρέα είχε πρώτο τον Θαλή.
Οι σοφοί αυτοί είναι γνωστά ιστορικά πρόσωπα και έζησαν από τον 7ο π.Χ. αιώνα και μετά. Ποιοι ήταν; Δεν συμφωνούσαν όλοι για την επτάδα αλλά όλοι συμφωνούσαν για τους τέσσερις: **Θαλή το Μιλήσιο**, **Βίας ο Πριηνεύς**, **Πιττακός ο Μυτιληναίος**, **Σόλων ο Αθηναίος** αλλά για τους άλλους δεν συμφωνούσαν όλοι. Έτσι οι αναπληρωματικοί ήταν: Χίλων ο Λακεδαιμόνιος, Κλεόβουλος ο Ρόδιος και Περίανδρος ο Κορίνθιος, Πυθαγόρας ο Σάμιος, Επιμενίδης της Κρήτης, ο Ορφέας, και αρκετοί ακόμα.

- **Η Ευκλείδεια**
  Η Ευκλείδεια Γεωμετρία διαβάστηκε περισσότερο από όλα τα άλλα έργα σε όλο κόσμο. Ο Ευκλείδης έζησε στην Αλεξάνδρεια 325 π.Χ.-270 π.Χ. Το έργο του είναι τα **Στοιχεία** (έτσι το ονόμασε, ίσως για να πει ότι όλα προκύπτουν από σύνολο **αξιωμάτων**, δημιουργούνται στοιχείο-στοιχείο όπως λέμε για τις λέξεις γράμμα-γράμμα), και αποτελείται από 13 βιβλία.
- «**Κόσμος**» έτσι ονομάστηκε από τον Πυθαγόρα
- «**Πλατωνικά στερεά**» είναι το 4τράεδρο, ο κύβος, το 8τάεδρο, το 12κάεδρο και το 20σάεδρο.
- **Η Νέα βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας**
  Το 2002 η Αιγυπτιακή κυβέρνηση, σε συνεργασία με την UNESCO και την Ελλάδα δημιούργησαν τη **νέα βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας** στην ίδια περιοχή που ήταν η παλαιά.

- Το 1995 ο Wiles Andrew έδωσε την τελική απόδειξη στο θεώρημα του Fermat αφού πέρασαν περισσότερα από 350 χρόνια από τότε που διατυπώθηκε. (Δηλαδή ότι η εξίσωση $x^n+y^n=z^n$ δεν ισχύει για κανένα ακέραιο $n>2$).

Γρίφοι

Προσανατολισμός

1. Αν βαδίζεις από βορά προς το νότο την ανατολή την έχεις δεξιά σου ή αριστερά σου;
2. Αν πηγαίνεις από ανατολικά δυτικά στο αριστερό σου χέρι πιο σημείο του ορίζοντα έχεις;
3. Βαδίζεις στο δάσος και στα δεξιά σου βλέπεις τον Ήλιο που δύει, προς τα πού πηγαίνεις;
4. Πηγαίνεις ΝΑ και είναι απόγευμα που έχεις τον Ήλιο;
5. Βαδίζω ΝΔ το απόγευμα που έχω τον ήλιο;
6. Βαδίζω προς τα βόρειο ανατολικά και ο ήλιος είναι πίσω αριστερά είναι πριν το μεσημέρι ή μετά;

Το δέντρο των Χριστουγέννων

Ο Χρίστος και η Βάσω στόλισαν το δένδρο των Χριστουγέννων. Ο Χρίστος κρέμασε στολίδια που είναι σε αριθμό τέλειος κύβος και η Βάσω 2 λιγότερα από το Χρίστο αλλά σε αριθμό τέλειο τετράγωνο. Πόσα είναι όλα τα στολίδια στο δέντρο;

Ο Κώστας και η Βάσω

Ο Κώστας με την αριθμομηχανή του έκανε τη διαίρεση 1:3 και είδε ότι το αποτέλεσμα ήταν 1:3=0,333333… , άρα σκέφτηκε το 1:6 θα είναι 0,666666… το 1:9 θα είναι 0,999999… , και 1:1 θα γράφεται 0,111111… .
Η Βάσω σκέφτηκε αν προσθέσει: 1/3+1/6=0,333333…+0,666666…= =0,999999…=1/9. Μήπως έκαναν λάθος;

Ο 5ψήφιος

Όλα τα ψηφία ενός 5ψήφιου είναι διαφορετικά μεταξύ τους με άθροισμα 10. Ποιο είναι το γινόμενό τους;

Το τρίγωνο

Σχεδιάστε ένα τρίγωνο και σημειώστε στις πλευρά του τα 9 ψηφία(1,2,3,4,5,6,7,8,9) ώστε σε κάθε πλευρά να βρίσκονται 4 αριθμοί με το ίδιο άθροισμα.

Ποιος χρόνος

Κάποιου χρόνου από τους επόμενους μέχρι το 2099 τα ψηφία του έχουν άθροισμα 17. Ποιο είναι το γινόμενο των ψηφίων του;

Μάντεψε τρείς διαδοχικούς αριθμούς

Ζητάτε από τους φίλους σας να πάρουν τρεις αριθμούς διαδοχικούς μικρότερους από το 100 και στο άθροισμά τους να προσθέσουν το 18. Το άθροισμα αυτό να το πολλαπλασιάσουν επί 67 και να σας πουν τα 2 τελευταία ψηφία(ως διψήφιο). Τώρα εσείς μπορείτε να βρείτε τους 3 διαδοχικούς αριθμούς που σκέφτηκαν;

Μαθηματικό σταυρόλεξο.

1	2	3	4	5	6	
#					#	1
				#		2
			#			3
		Π	**Π**	**Χ**	#	4
				#		5
				#		6

Οριζόντια

1. Μοναδικός αριθμός μέχρι το 10.000 που αντιστρέφονται τα ψηφία του όταν πολλαπλασιαστεί με το 9.
2. α) 4ψήφιος αριθμός με ψηφία διαδοχικούς άρτιους 2ψήφιους το άθροισμα των οποίων είναι 34.
   β) Ψηφίο του δεκαδικού συστήματος που άρχισε να χρησιμοποιείται πριν από 1000 χρόνια περίπου.
3. α) Το πρώτο πολλαπλάσιο του 3 στην 3^{η} εκατοντάδα.
   β) Τόσα εικοσάλεπτα κάνουν 16€.
4. Μόνο τέσσερις μήνες του έτους έχουν τόσες μέρες.
5. α) Έτος που έγινε η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα στην Ελλάδα.
   β) Ο μικρότερος παράγοντας του 105.
6. α) Ο αριθμός $2^{10}-1$.
   β) Ο μικρότερος πρώτος αριθμός.

Κάθετα

1. Το τετράγωνο του αριθμού 111.
2. Το $\frac{1}{25}$ των 4εκατμμυρίων.
3. α) Το 11^{ο} πολλαπλάσιο της δεκάδας (αντίστροφα)
   β) δυο φορές το 0.1
4. α) Αριθμός που διαιρείται με 3^{η} δύναμη του 2 και με 11.
   β) Από τους α και β που α+β=44 και α.β=43 ο μεγαλύτερος.
5. α) Το πλήθος των διαγώνιων του 6γώνου.
   β) Μήκος κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 10 και την άλλη κάθετη 6.
6. α) Ο αριθμός για μια ισοπαλία.
   β) Την 5^{η} Δύναμη του 2.

Απαντήσεις στους Γρίφους του τεύχους 125

Πρώτοι αριθμοί: Κανένας. Γιατί το άθροισμα των ψηφίων τους είναι 0+1+2+3+…+9 = 45 που διαιρείται με το 3 ,το 5 άρα κανένας δεν είναι πρώτος.

Το άθροισμα: Με τρία ψηφία και άθροισμα 6 έχουμε μόνο 1, 2, 3 άθροισμα (1+2+3=6). Δημιουργούνται 1x2x3=6 αριθμοί οι 123+132+213+231+312+321= 1332 δηλαδή 1332= 222x(1+2+3). Άρα αν η Ελένη πήρε τους 2,3,4,5,6 με άθροισμα(2+3+4+5+6=20) δημιούργησε 1x2x3x4x5=120 αριθμούς. Το άθροισμα αυτών είναι, στις μονάδες 24 φορές ο κάθε αριθμός, το ίδιο στις δεκάδες, εκατοντάδες. κλπ. Επομένως 24 x 2+24 x3+24 x4+24 x5+24 x6=480 . Έτσι το άθροισμα είναι:

ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
480	480	480	480	480
53	53	52	48	
533	533	532	528	0

ή 5333280

Το άθροισμα είναι 5333280=2x133332x(2+3+4+5+6). Υπάρχουν ακόμα 5 περιπτώσεις.

Το ελικόπτερο: Λάθος. Το ελικόπτερο ακολουθεί τη Γη στην περιστροφή της γιατί είναι στο πεδίο βαρύτητάς της.

Η παρέα των Πιθήκων: Αν x ο αριθμός των πιθήκων έχουμε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x \Leftrightarrow \frac{x^2}{64}+12=x \Leftrightarrow x^2+768=64x \Leftrightarrow x^2-64x+768=0$$

Άρα χ=16 ή χ=48. Οπότε έχουμε δύο λύσεις στο πρόβλημα μας. Οι πίθηκοι ή θα είναι 48 ή 16.

Α) Αν οι πίθηκοι είναι 48 , το ένα όγδοο είναι 6. Τότε πράγματι ισχύει: $6^2+12=48$

Β) Αν είναι 16 , το ένα όγδοο είναι 2. Και πάλι $2^2+12=16$.

Το Δώρο της γιαγιάς

Το δώρο στον Αλέξανδρο ήταν 20 Ευρώ.

Οι Τουρίστες

Ο 39.999 αναλύεται ως εξής: 39.999 = 40.000 – 1 = 200^2 - 1^2 = (200 +1) (200-1) = 201 x 199 = 67x3x199 = 67x597.

Άρα τα ξενοδοχεία μπορεί να ήταν 67 ή 199. Αν ήταν 199 είχαν από 201τουρίστες αν ήταν 67 είχαν από 597. Η δεύτερη περίπτωση απορρίπτεται γιατί τα 597 άτομα δεν χωράνε σε 4 πούλμαν.

Οι πύργοι και η πηγή

Τα δύο πουλιά όρμησαν με την ίδια σταθερή ταχύτητα κι έφτασαν τη ίδια χρονική στιγμή στη θέση της πηγής (Π). Συμπεραίνουμε ότι οι αποστάσεις θα είναι ίσες. Δηλαδή ΑΠ = ΒΠ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΑ_1Π$ και $ΒΒ_1Π$ με $Α_1$ και $Β_1$ τις βάσεις των πύργων έχουμε: $ΑΠ^2 = ΒΠ^2$ ή $40^2+Β_1Π^2=30^2+(50-Β_1Π)^2$ ή $1600+Β_1Π^2=900+2500+Β_1Π^2-100\,Β_1Π$ ή $100\,Β_1Π=1800$ ή $Β_1Π=18$ μέτρα, άρα $Α_1Π=32$ μέτρα.

Το Γεράκι και ο ποντικός

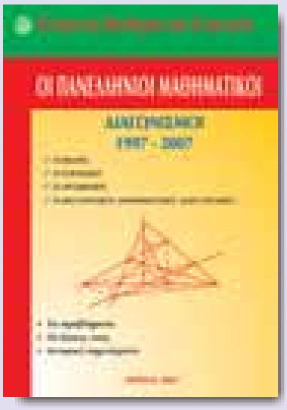
Η κορυφή Κ του κυπαρισσιού, η ρίζα του $Κ_1$ και Σ το σημείο που το Γεράκι πιάνει τον ποντικό. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΚ_1Σ$ έχουμε: $(ΚΚ_1)^2+(Κ_1Σ)^2=(ΚΣ)^2$ ή $(ΚΣ)^2-(Κ_1Σ)^2=225$ ή $(ΚΣ+Κ_1Σ)(ΚΣ-Κ_1Σ)=225$ ή $45x(ΚΣ-Κ_1Σ)=225$. Έχουμε $(ΚΣ-Κ_1Σ)=5$ και αφού ΚΣ=ΣΜ θα είναι $(ΚΣ+Κ_1Σ)=(ΣΜ+Κ_1Σ)=45$. Άρα $Κ_1Σ=20$ μέτρα.

Άρα το Γεράκι θα συναντήσει τον ποντικό στα 20 μέτρα από την βάση του κυπαρισσιού που είναι η φωλιά του.

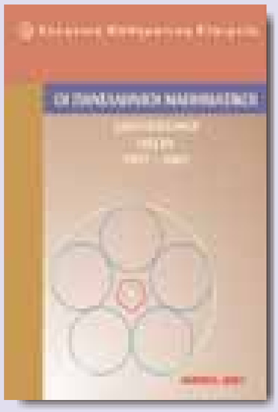
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



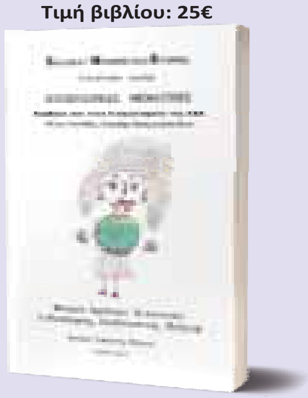
Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

Τιμή βιβλίου: 12€

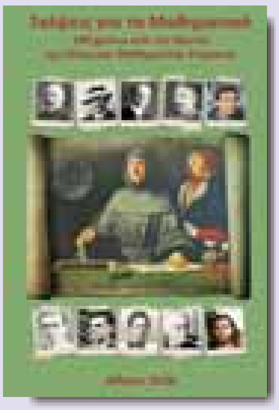
Τιμή βιβλίου: 12€



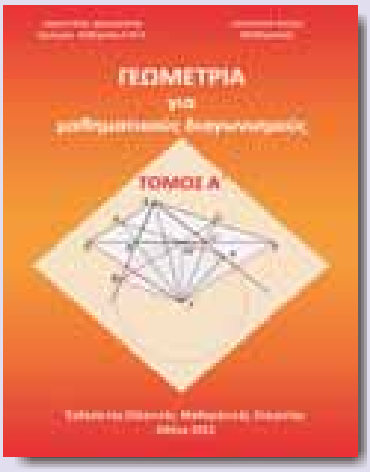
Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο



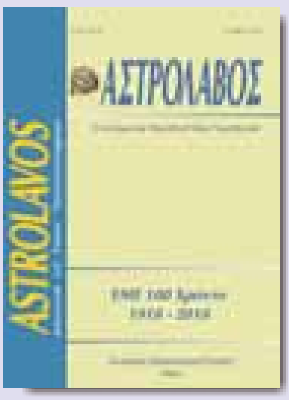
Τιμή βιβλίου: 15€



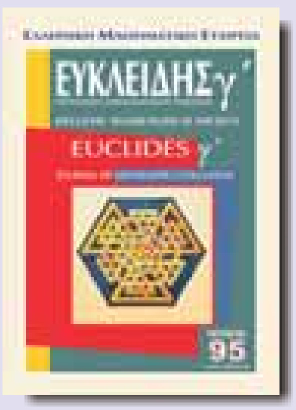
Τιμή βιβλίου: 25€

Τιμή βιβλίου: 20€

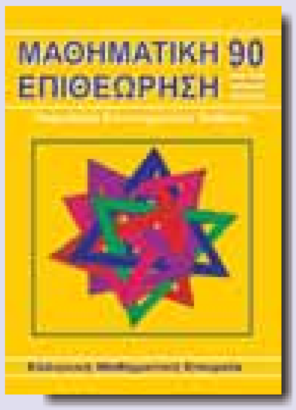
Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr