ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

118

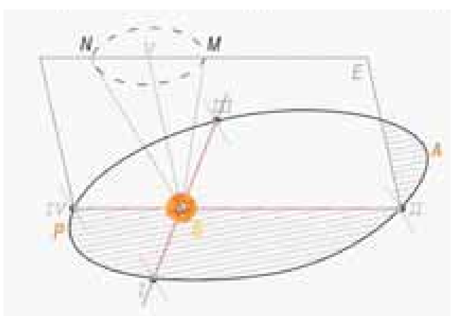
Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2020 ευρώ 3,5

Οι κύκλοι του

Milutin Milankovitch

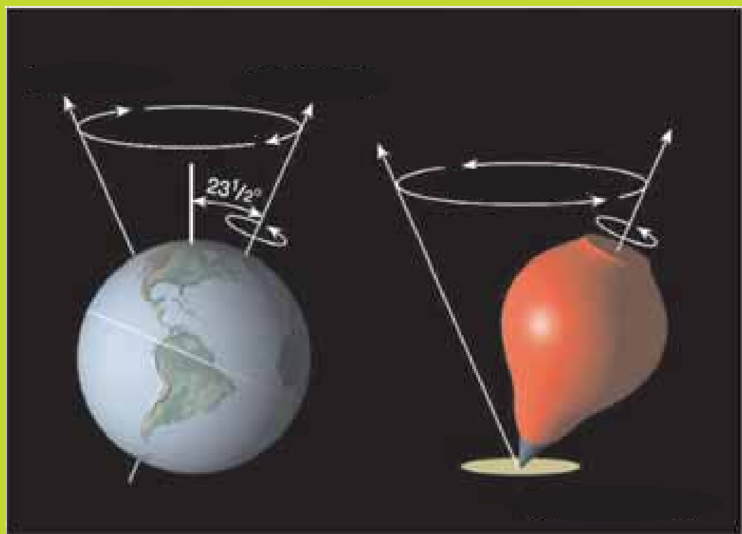


5 μετάλλια

37th BMO

φιλοξενήθηκε
από τη **Ρουμανία**
29 Οκτ. - 3 Νοε. 2020

VIRTUAL



Θαλής 2020

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 118 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2020 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Οι κύκλοι του Milutin Milankovitch, ... 1
Τα παράξενα του διαδικτύου, ... 6
Η σύνοδος των μεγάλων πλανητών, ... 8
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί - Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ... 9
Homo Mathematicus, ... 25

Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Αναλογίες, Ανισότητες, Εξισώσεις και προβλήματα, ... 31
Ευκλείδεια Γεωμετρία: Ασκήσεις, ... 39

Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Θέματα για εμβάθυνση..., ... 41
Ευκλείδεια Γεωμετρία: Κύκλος Κανονικά Πολύγωνα, ... 45
Αναλυτική Γεωμετρία: Κωνικές Τομές, ... 47

Γ΄ Τάξη

ΣυναρτήσειςΌριοΣυνέχεια, ... 51

Γενικά Θέματα

Το Βήμα του Ευκλείδη, ... 55
Ο Ευκλείδης προτείνει..., ... 69
Τα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, ... 74
Ο πρίγκιπας Κύκλος και η πριγκίπισσα Ευθεία, ... 80

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

πολλές ευχές για μια δημιουργική χρονιά,
για μια χρονιά όπου η καθημερινότητα,
θα είναι σε κανονικούς ρυθμούς,
για έναν κόσμο πιό αισιόδοξο, αυθόρμητο,
χαρούμενο, ξέγνοιαστο και επιθυμητό,
με ευκαιρίες και ελπίδα,
όπου η ζωή, θα είναι πάλι στο προσκήνιο...

$$\begin{array}{l} 43 \cdot 41 = 1763 \\ \quad)\ 6 \\ 43 \cdot 47 = 2021 \\ \quad)\ 6 \\ 43 \cdot 53 = 2279 \end{array}$$

Καλή Χρονιά σε όλους

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στην πρόσφατη επικαιρότητα των Μαθηματικών

Το 2021 να έχει χαρά
αισιοδοξία και όραμα για το καλύτερο ...

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	6 Νοεμβρίου	2020
Ευκλείδης:	23 Ιανουαρίου	2021
Αρχιμήδης:	27 Φεβρουαρίου	2021

$$2021 = 20^2 + (2 \cdot 20)^2 + 21$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Οι κύκλοι του Milutin Milankovitch

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ακούμε καθημερινά για την μόλυνση του περιβάλλοντος, για υπερθέρμανση του πλανήτη, για σπατάλη των φυσικών πόρων, κ.ά. Τι ακριβώς συμβαίνει;

Η ανθρωπότητα πριν από τον 19^{o} αιώνα δεν είχε αυτά τα προβλήματα που αρχίσαμε να τα γνωρίζουμε από τον 20^{o} αιώνα. Η βιομηχανική εποχή έφερε μεγάλες ανέσεις στη ζωή του ανθρώπου αλλά παράλληλα και μεγάλα προβλήματα. Το **λίπασμα** και τα **φυτοφάρμακα** έδωσαν στην ανθρωπότητα **άφθονη τροφή** αλλά και **πολλά προβλήματα υγείας**.

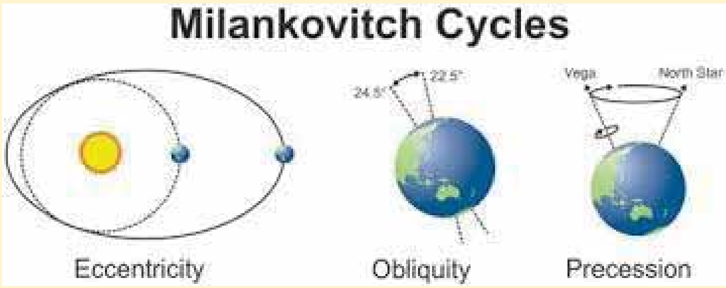
Milutin Milankovitch
[1879 – 1958]

Παλαιότερα οι εργασίες και οι μεταφορές γίνονταν με την βοήθεια των ζώων, αργότερα στις πρώτες μηχανές είχαμε κίνηση με νερό ή ατμό, με αέρα, με κάρβουνο. Τον 20^{o} αιώνα όλα άρχισαν να κινούνται με πετρέλαιο.

Το πετρέλαιο έδωσε τα πλαστικά, τη μεγαλύτερη μάστιγα στη μόλυνση του περιβάλλοντος. Οι θάλασσες, οι λίμνες, τα ποτάμια, ολόκληρη η φύση δεν είχε υποστεί την καταστροφή που υπέστη τα τελευταία **100 χρόνια**. Βέβαια η επιστήμη έκανε άλματα αυτά τα χρόνια και ο άνθρωπος πλέον επισκέπτεται το διάστημα και γνωρίζει τον χώρο που περιβάλει τη Γη.

Με την βοήθεια τον μηχανών δημιούργησε τεράστια κτήρια και τεράστια έργα. Συγκεντρώθηκαν μεγάλοι πληθυσμοί και δημιούργησαν **απάνθρωπες πόλεις**.

Στις πόλεις άρχισαν οι ελλείψεις νερού, ενέργειας και άλλων φυσικών πόρων. Για τις ανάγκες της ενέργειας έγινε εκμετάλλευση και της πυρηνικής ενέργειας με τεράστιους κινδύνους, στις περιπτώσεις ατυχημάτων. Δισεκατομμύρια αυτοκίνητα, εκατομμύρια αεροπλάνα και πλοία κινούνται πάνω στη Γη και δισεκατομμύρια ή τρισεκατομμύρια μηχανές κάθε είδους δουλεύουν με πετρέλαιο. Γενικά η ανθρωπότητα ανέπτυξε ένα πολιτισμό τον **«πολιτισμό της καμινάδας»** όπως ονομάστηκε, αφού στηρίχτηκε στην κάπνα του πετρελαίου. Σήμερα ο άνθρωπος βλέπει αυτά τα προβλήματα που δημιούργησε και αγωνίζεται να τα διορθώσει, με μεγάλο κόστος βέβαια, με την εκμετάλλευση της δύναμης **του νερού** αλλά και της παντοδύναμης **ηλιακής ενέργειας**. Η μόλυνση αυτή του περιβάλλοντος, η κάλυψη μεγάλων εκτάσεων με τσιμέντο, ο περιορισμός των ρεμάτων με διάφορα έργα και οικοδομές, το κόψιμο των δασών έφερε και καταστροφές από διάφορα μετεωρολογικά φαινόμενα. Όμως εκτός από αυτά που προκάλεσε ο άνθρωπος, δημιουργείται το ερώτημα ποια να είναι, τα μετεωρολογικά φαινόμενα που έχει πάντα η Γη και οι πλανήτες ανά τους αιώνες; Αυτό το «μυστικό» μας το αποκάλυψε ο **Milutin Milankovitch**.

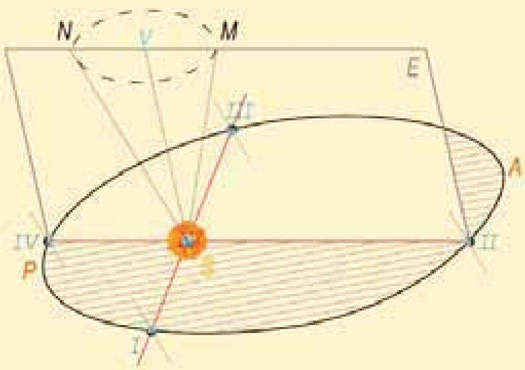


Ο Μιλάνκοβιτς ήταν πολιτικός μηχανικός αλλά και **μαθηματικός**, αστρονόμος και κλιματολόγος. Διατύπωσε ένα ακριβές **αριθμητικό κλιματολογικό μοντέλο** με τη δυνατότητα αναδημιουργίας του παρελθόντος και **πρόβλεψης του μέλλοντος**. Καθιέρωσε την αστρονομική θεωρία του κλίματος ως γενικευμένη μαθηματική θεωρία της ηλιακής ακτινοβολίας. Η πρώτη συνεισφορά του στην επιστήμη είναι ο **«Κανόνας της Ηλιακής Έκθεσης της Γης»**, που χαρακτηρίζει τα κλίματα όλων των πλανητών του Ηλιακού συστήματος. Η δεύτερη είναι η εξήγηση των μακροπρόθεσμων κλιματικών αλλαγών της Γης που προκαλούνται από τις αλλαγές στη θέση της σε σχέση με τον Ήλιο. Οι γνωστοί σήμερα **«κύκλοι του Μιλάνκοβιτς»**.

Έτσι εξηγήθηκαν οι **εποχές των παγετώνων** που εμφανίσθηκαν στο γεωλογικό παρελθόν της Γης, καθώς και οι κλιματικές αλλαγές στη Γη που αναμένονται στο μέλλον. **Εποχή των Παγετώνων** ονομάζεται μια μακροχρόνια γεωλογική περίοδος κατά την οποία παρατηρείται σημαντική πτώση της θερμοκρασίας στη Γη. Η πιο πρόσφατη εποχή παγετώνων ήταν πριν 12.000 χρόνια.

Παγετώνες: μεγάλες μάζες πάγου που ρέουν ως ποταμοί γλιστρώντας από τη συμπίεση και τη βαρύτητα.

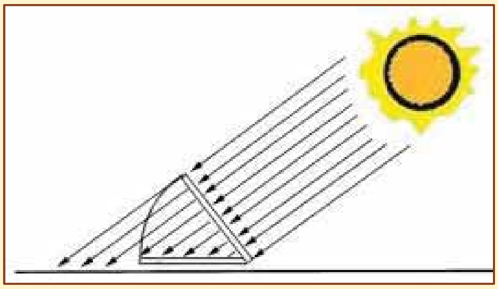
Αλλά και από τα μέσα του 16ου μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα είχαμε μια ψυχρή περίοδο, ένα μίνι παγετώνα με χαμηλές θερμοκρασίες σε σχέση με αυτές της σημερινής εποχής και ακραία καιρικά φαινόμενα. Ο Milutin Milankovitch ίδρυσε την πλανητική κλιματολογία, υπολόγισε τις θερμοκρασίες των ανώτερων στρωμάτων της ατμόσφαιρας της Γης καθώς και τις θερμοκρασίες του Ερμή, της Αφροδίτης, του Άρη και της Σελήνης. Μέτρησε το πάχος της ατμόσφαιρας των εξωτερικών πλανητών. Βρήκε τη σχέση που έχουν οι νόμοι της κίνησης των ουρανίων σωμάτων και των επιστημών της Γης. Έθεσε τις βάσεις για τη μετάβαση από την ουράνια μηχανική στις επιστήμες της Γης και τη μετατροπή των περιγραφικών επιστημών σε ακριβείς μελέτες. Ο Milutin Milankovitch γεννήθηκε το 1879 στις όχθες του Δούναβη στο χωριό Ντάλι που με τη δίδυμη αδερφή του ήταν τα μεγαλύτερα από τα επτά παιδιά της οικογένειας. Ο πατέρας τους ήταν έμπορος και γαιοκτήμονας που πέθανε όταν ο Milutin ήταν οκτώ ετών, αλλά ακόμα πέθαναν και 3 αδέλφια του από φυματίωση. Ο ίδιος έλαβε τη βασική του εκπαίδευση στο σπίτι, από φίλους της οικογένειας, που μερικοί ήταν διάσημοι φιλόσοφοι, εφευρέτες και ποιητές.



Το 1896 πήγε στη Βιέννη και σπούδασε πολιτικός μηχανικός στο Πολυτεχνείο και αποφοίτησε το 1902 με την καλύτερη βαθμολογία. Κατασκεύασε φράγματα, γέφυρες, αερογέφυρες, υδραγωγεία και άλλες κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα για το οποίο είχε και ευρεσιτεχνία. Γενικά στο επάγγελμα αυτό είχε έξι ευρεσιτεχνίες και η φήμη του στις κατασκευές ήταν τεράστια.

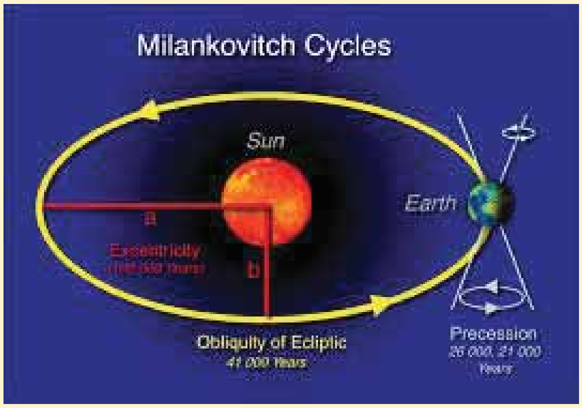
Το 1909 του προσφέρθηκε η έδρα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (κλασική μηχανική, ουράνια μηχανική και θεωρητική φυσική) στο Πανεπιστήμιο του Βελιγραδίου. Εκεί έκανε έρευνες για διάφορα προβλήματα.

Μελετώντας τα έργα του κλιματολόγου **Gut For Han**, ο **Milankovitch** έκανε μια σημαντική παρατήρηση, που έγινε ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα της επιστημονικής του έρευνας, για την εποχή των παγετώνων. Έγιναν αρκετές προσπάθειες **εξήγησης της κλιματικής αλλαγής** από την επίδραση των αστρονομικών δυνάμεων. Οι κλιματολόγοι και οι γεωλόγοι δεν μπορούσαν να ανακαλύψουν τις βασικές αιτίες.



Ο **Milutin** άρχισε να εργάζεται πάνω σε αυτό το 1912, και δημοσίευσε στο Βελιγράδι το πρώτο έργο του που περιγράφει πώς οι ακτίνες του Ήλιου καθορίζουν τη θερμοκρασία πάνω στην επιφάνεια της Γης «Συμβολή στη **μαθηματική θεωρία του κλίματος**». Η επόμενη εργασία του είχε τίτλο «**Κατανομή της ηλιακής ακτινοβολίας στην επιφάνεια της γης**» που δημοσιεύθηκε το 1913. Υπολόγισε σωστά την ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας και ανέπτυξε μια μαθηματική θεωρία που περιγράφει τις κλιματικές ζώνες της Γης. Ο στόχος του ήταν μια ολοκληρωμένη, μαθηματικά ακριβής θεωρία που να συνδέει τη θερμική κατάσταση των πλανητών με την κίνηση τους γύρω από τον Ήλιο. Στη συνέχεια προσπάθησε να βρει ένα μαθηματικό μοντέλο ενός συμπαντικού μηχανισμού αλλά χρειάστηκε τρεις δεκαετίες για να αναπτύξει μια αστρονομική θεωρία. Το 2014 με τον πόλεμο, ο **Milankovitch** πήγε στη Βουδαπέστη και εργάστηκε στη Βιβλιοθήκης της Ακαδημίας Επιστημών. Τέσσερα χρόνια στη Βουδαπέστη, μελέτησε το κλίμα των εσωτερικών πλανητών(Ερμή και Αφροδίτης) του ηλιακού συστήματος. Το 1916 δημοσίευσε μια εργασία με θέμα «Διερεύνηση του κλίματος του πλανήτη Άρη».

Το 1919 συνέχισε την καριέρα του ως καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βελιγραδίου. Από το 1912 έως το 1917 έγραψε και δημοσίευσε επτά άρθρα σχετικά με τις μαθηματικές θεωρίες του κλίματος τόσο στη Γη όσο και στους άλλους πλανήτες.

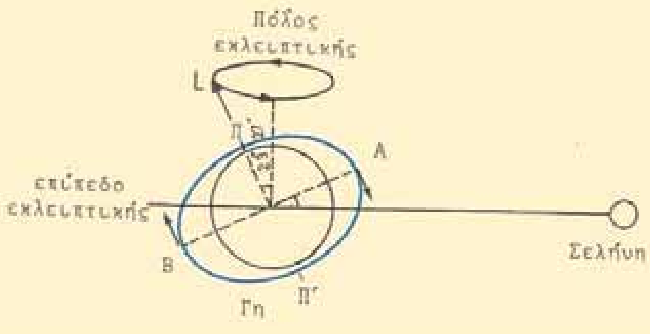


Οι εργασίες του **Milankovitch** σχετικά με την αστρονομική εξήγηση των εποχών των παγετώνων, ειδικά η εργασία «καμπύλη του ηλιακού φωτός που δέχεται η γήινη επιφάνεια» τα τελευταία 130.000 χρόνια, υποστηρίχθηκε από τον κλιματολόγο Βλάντιμιρ Κέππεν ο οποίος με επιστολή του ζήτησε να επεκτείνει τις μελέτες από τα 130.000 στα 600.000 χρόνια. Συμφώνησαν δε ότι η **θερινή ηλιοφάνεια** είναι καθοριστικός παράγοντας για το κλίμα και ορίζει το **υψόμετρο** της γραμμής του **χιονιού**.

Τι ακριβώς όμως έκανε ο Milankovitch και κατάφερε να γνωρίζει το κλίμα της Γης και των πλανητών στο παρελθόν αλλά και στο μέλλον. Στο επίκεντρο της θεωρίας του έβαλε τον ήλιο, ως τη μόνη πηγή θερμότητας και φωτός στο ηλιακό σύστημα. Το φάσμα του Ηλιακού φωτός είναι φάσμα που δίνει ένα μέλαν σώμα. Ο Ήλιος ακτινοβολεί με ένταση η οποία όταν φθάνει στην ατμόσφαιρα της Γης είναι 1,4 kw/m^2. Το 43% ανακλάται ξανά στο διάστημα και το 57% περίπου φθάνει στην επιφάνεια της Γης. Δηλαδή στην **Ελλάδα** φθάνει από **50–350** $\mathbf{kw/m^2}$ ανάλογα με την εποχή, το ανάγλυφο της περιοχής και το γεωγραφικό πλάτος του τόπου.

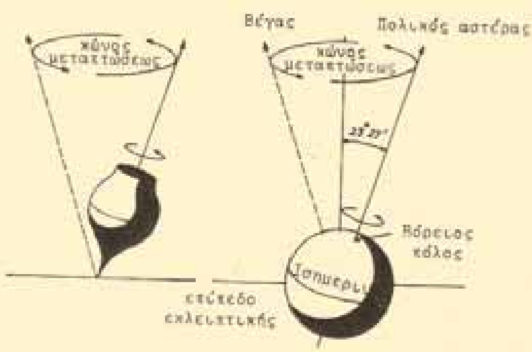
Τροχιακή εκκεντρότητα, λοξότητα και προπόρευση.

Μελέτησε τις τρεις κινήσεις της Γης: την εκκεντρότητα (κύκλος 100.000 χρόνων – **Kepler** 1609), την αξονική κλίση (κύκλος 41.000 ετών – **Ludwig Pilgrim**, 1904) και την προπόρευση (κύκλος 23.000 χρόνων – **Ίππαρχος**, 130 π.Χ.). Αυτές οι κινήσεις επηρεάζονται από τη βαρύτητα της Σελήνης, του Ήλιου, του Δία και του Κρόνου και αποτελούν τη βάση των **κύκλων του Milankovitch.** Κάθε κύκλος λειτουργεί σε διαφορετική χρονική κλίμακα και επηρεάζει την ποσότητα ηλιακής ενέργειας που δέχονται οι πλανήτες σε οποιοδήποτε σημείο της επιφανείας τους.



Το μαθηματικό του κατόρθωμα για να πετύχει τα παραπάνω ήταν, το σύστημα **Milankovitch** διανυσματικών στοιχείων των πλανητικών τροχιών. Μείωσε τα έξι ελλειπτικά στοιχεία των **Lagrange – Laplace** σε δύο διανύσματα που καθορίζουν τη μηχανική των πλανητικών κινήσεων. Το πρώτο προσδιορίζει το τροχιακό επίπεδο του πλανήτη, την περιστροφή του και την παράμετρο τροχιακής έλλειψης. Το δεύτερο προσδιορίζει τον άξονα της τροχιάς στο επίπεδο της και την τροχιακή εκκεντρότητα. Με την εφαρμογή αυτών των διανυσμάτων απλοποίησε σημαντικά τον υπολογισμό και έτσι βρήκε άμεσα όλους τους τύπους της κλασσικής θεωρίας των κοσμικών διαταραχών.

Δηλαδή ο **Milankovitch**, με απλό αλλά πρωτότυπο τρόπο, συνήγαγε το νόμο του Νεύτωνα για τη βαρύτητα από τους νόμους του **Kepler**.



Η ικανότητά του να εκλαϊκεύει την επιστήμη φαίνεται στο βιβλίο του **«Σε Μακρινούς Κόσμους και Καιρούς»** που έγραψε το 1925 με τη μορφή επιστολών προς μία ανώνυμη γυναίκα. Το έργο ασχολείται με την ιστορία της αστρονομίας, της κλιματολογίας και της επιστήμης μέσω μιας σειράς φανταστικών επισκέψεων σε διάφορα σημεία του χώρου και του χρόνου από τον συγγραφέα και την ανώνυμη σύντροφό του.

Περιλαμβάνει το σχηματισμό της γης, παλιούς πολιτισμούς, διάσημους αρχαίους και αναγεννησιακούς στοχαστές και τα επιτεύγματά τους αλλά και το έργο του **Kepen** και **Vegener**. Ακόμα επεκτάθηκε σε μερικές από τις δικές του θεωρίες για την αστρονομία και την κλιματολογία.

Ο Μιλάνκοβιτς έκανε μελέτες και για το εσωτερικό της Γης και για την κίνηση των πόλων, ήταν πεπεισμένος ότι οι ήπειροι **«επιπλέουν»** σε μια κάπως υγρή υπόγεια επιφάνεια και ότι οι θέσεις των ηπείρων σε σχέση με τον άξονα περιστροφής επηρεάζουν τη φυγόκεντρη δύναμη της περιστροφής και μπορούν να μετατοπίσουν τον άξονα από την ισορροπία του και να τον αναγκάσουν να κινηθεί.

Η διάλεξη με θέμα **«Πραγματική Πολική Μετατόπιση»** για τη φαινόμενη **στροφή των πόλων** έγινε στην **Αθήνα το 1934, σε Βαλκανικό συνέδριο από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία [ΕΜΕ].** Οι μελέτες του Milankovitch, με την ανάπτυξη του νέου επιστημονικού κλάδου της γεωφυσικής (**παλαιομαγνητισμός**) μετά το 1960, αναβίωσαν τη θεωρία της ολίσθησης των ηπείρων και την ονόμασαν θεωρία των **τεκτονικών πλακών**.

Το 1930 ο Milankovitch μελέτησε το πρόβλημα των αριθμητικών κοσμικών κινήσεων του άξονα περιστροφής της Γης. Χρησιμοποιώντας διανυσματική ανάλυση κατασκεύασε ένα μαθηματικό μοντέλο της Γης για να δημιουργήσει μια θεωρία της κοσμικής κίνησης των πόλων της. Απέδειξε ότι **η Γη** συμπεριφέρεται ως **ελαστικό σώμα**. Σχεδίασε ένα χάρτη της πορείας των πόλων τα τελευταία 300 εκατομμύρια χρόνια και βρήκε ότι οι αλλαγές συμβαίνουν από 5 έως 30 εκατομμύρια χρόνια. Ακόμα βρήκε ότι η τροχιά του πόλου εξαρτάται από τη **γεωμετρία της γήινης μάζας**. Δηλαδή οι ήπειροι της Γης βυθίζονται στην υγρή βάση τους και διολισθαίνουν για την επίτευξη ισοστατικής ισορροπίας.

Το Γήινο τετράεδρο

Σύμφωνα με τα δεδομένα της Θεωρητικής Μηχανικής ο φλοιός της Γης έπρεπε να πάρει μορφή ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Λόγω όμως της ψύξεως και της συστολής του πυρήνα ο φλοιός υπέστη καταπτώσεις και πτυχώσεις αλλά σύμφωνα με φυσικούς νόμους. Έτσι οι μεγάλες πτυχώσεις του φλοιού ακολούθησαν την τετραεδρική συμμετρία. Από την Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το κανονικό τετράεδρο έχει τον ελάχιστο όγκο με δεδομένη επιφάνεια. Δηλαδή όταν σχηματίστηκε ο φλοιός είχε ορισμένη έκταση πάνω σε διάπυρο πυρήνα, όμως όταν ο πυρήνας ελαττώθηκε σε όγκο ο φλοιός διατήρησε την έκταση που είχε αλλά περιελάβανε μικρότερο όγκο. Οι ήπειροι βρίσκονται στις ακμές του τετραέδρου ενώ οι θάλασσες στις έδρες.

Μετά τον πόλεμο ο **Milankovitch** ήταν αντιπρόεδρος της Σερβικής Ακαδημίας Επιστημών και πέθανε στο Βελιγράδι το 1958 από εγκεφαλικό.

Τα χρόνια αυτά είχε δημοσιεύσει πολλά βιβλία για την ιστορία της επιστήμης, όπως: Οι ιδρυτές της φυσικής επιστήμης **Πυθαγόρας – Δημόκριτος – Αριστοτέλης – Αρχιμήδης**, Τεχνικές στην αρχαιότητα, **Ισαάκ Νεύτων** και οι Αρχές του, Ιστορία της Αστρονομίας – μέχρι το 1727, Αυτοκρατορία της επιστήμης – εικόνες από τη ζωή των μεγάλων επιστημόνων, Είκοσι δύο αιώνες Χημείας.

Τα πρώτα χρόνια μετά το θάνατο του υπήρξε μια αμφισβήτηση στη θεωρία του, όμως σύντομα η θεωρία του αποδείχθηκε ακριβής. Το πρόγραμμα CLIMAP (Climate: Long Range Investigation, Mapping and Production) επέλυσε τελικά τη διένεξη και αποδείχθηκε η θεωρία των κύκλων του Μιλάνκοβιτς. Το 1972 οι επιστήμονες συνέταξαν μια κλίμακα κλιματολογικών γεγονότων τα τελευταία 700.000 χρόνια από πυρήνες από μεγάλα βάθη. Πραγματοποίησαν ανάλυση των πυρήνων και τέσσερα χρόνια αργότερα κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα τελευταία 500.000 χρόνια το κλίμα έχει αλλάξει ανάλογα με την κλίση του άξονα περιστροφής της Γης και τη μετάπτωσή του. Το 1988 ένα νέο μεγάλο πρόγραμμα, το COHMAP (Cooperative Holocene Mapping Project) ξανασυνδέει τα πρότυπα της παγκόσμιας αλλαγής του κλίματος των τελευταίων 18.000 χρόνων, αποδεικνύοντας και πάλι το βασικό ρόλο των αστρονομικών παραγόντων. Το 1989 το πρόγραμμα SPECMAP (Spectral Mapping Project) έδειξε ότι οι κλιματικές αλλαγές είναι αποτέλεσμα στις αλλαγές της ηλιακής ακτινοβολίας που οφείλεται στους τρεις αστρονομικούς κύκλους.

Το 1999 αποδείχθηκε ότι οι παραλλαγές στα ισότοπα του οξυγόνου στα ιζήματα, στους πυθμένες των ωκεανών ακολουθούν τη θεωρία του Milankovitch. Πολλές άλλες πρόσφατες μελέτες αποδεικνύουν την εγκυρότητα της θεωρίας του.

> **"... στον επιστημονικό μου προορισμό έχω βρει ένα ευχάριστο καταφύγιο, γιατί προστατεύομαι με αυτό από πολλές αναταραχές που συγκλόνισαν τον κόσμο. Κάτω από αυτή τη στέγη έχω προετοιμάσει και εξοπλίσει το επιστημονικό μου εργαστήριο, διαχωρισμένο από τον ευρύτερο κόσμο αλλά σε συνεχή πνευματική σύνδεση με διάσημους επιστήμονες, δημιούργησα τον επιστημονικό χώρο μου, την αδιαμφισβήτητη πνευματική ιδιοκτησία μου. Σε αυτό το εργαστήριο έχω περάσει σαράντα χρόνια, συμπεριλαμβανομένων σύντομων διακοπών γράφοντας και δημοσιεύοντας τις εργασίες μου..."**
>
> **Milutin Milankovitch**

Ο Milankovitch και το ημερολόγιο

Ο άνθρωπος από πολύ παλιά προσπάθησε να μετρήσει το έτος(δηλαδή το χρονικό διάστημα μιας περιφοράς της Γης γύρο από τον ήλιο) και να δημιουργήσει ημερολόγιο. Αυτό όμως είχε μεγάλη δυσκολία γιατί ο πραγματικός χρόνος δεν αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό ημερών(είναι 365 ημέρες, 5 ώρες, 49 λεπτά και περίπου 12 δεύτερα **με λάθος** μια **μέρα** ανά **3300 χρόνια**).

Το **46 π.Χ.** εφάρμοσε ένα ημερολόγιο ο Ιούλιος Καίσαρας για να διορθώσει προηγούμενα λάθη αλλά και πάλι το **1582** το ημερολόγιο καθυστερούσε από την εαρινή ισημερία 10 μέρες. Έτσι δημιουργήθηκε το **Γρηγοριανό ημερολόγιο** το οποίο όμως κάποιες χώρες και ιδιαίτερα η **Ορθόδοξη εκκλησία** αρνιόντουσαν να το δεχτούν. Η Ελλάδα το εφάρμοσε τελευταία από όλες τις χώρες της Ευρώπης το **1923** και η Ελληνική εκκλησία ένα χρόνο μετά. Το ημερολογιακό αυτό ζήτημα λύθηκε χάρις στον Milankovitch, ο οποίος δημιούργησε ένα νέο ημερολόγιο **για τις Ορθόδοξες Εκκλησίες**, το «Αναθεωρημένο Ιουλιανό Ημερολόγιο», που είναι σχεδόν ταυτόσημο με το Γρηγοριανό. Αυτό το ημερολόγιο δέχτηκαν να εφαρμόσουν οι Ορθόδοξες Εκκλησίες των Βαλκανίων και η Ελληνική εκκλησία. Έτσι περιορίστηκαν οι εσωτερικές και λαϊκές αντιδράσεις φανατικών που δεν ήθελαν το Γρηγοριανό ημερολόγιο.

Προς τιμήν του, σε έναν κρατήρα, στην αθέατη πλευρά του Φεγγαριού και σε έναν κρατήρα του Άρη δόθηκε το όνομά του. Αστεροειδείς που ανακαλύφθηκαν το 1936 έχουν ονομαστεί Μιλάνκοβιτς. Επίσης η Ευρωπαϊκή Γεωφυσική Εταιρεία έχει θεσπίσει βραβείο, το **μετάλλιο Milutin Milankovitch**.

Η έκδοση της ΝΑΣΑ με τίτλο **«Στους Ώμους Γιγάντων»** τον κατατάσσει στα δεκαπέντε κορυφαία μυαλά όλων των εποχών στον τομέα των επιστημών της Γης.

Τα παράξενα του διαδικτύου

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Η μαθήτρια της φωτογραφίας είναι η **Gracie Cunningham** 16 ετών. Η Gracie με ένα video στο Tik Tok και το Twitter που έγινε **viral**, δημιούργησε σάλο. Απλά ρωτούσε **τι είναι τα Μαθηματικά**, **αν είναι αληθινά**, και ακόμα γιατί ο **Πυθαγόρας** ασχολήθηκε με τα Μαθηματικά εκείνα τα χρόνια αφού ούτε υδραυλικά δεν είχαν; Ποιος είχε μια **τέτοια ανάγκη**; ποιος σκέφτηκε αυτή την ιδέα; Μετά από χιλιάδες σχόλια που δέχτηκε αρνητικά και θετικά ήρθε η στιγμή, με αφορμή το ερώτημα της μαθήτριας, να αρχίσει ένας σοβαρός διάλογος μεταξύ επιστημόνων.

Το ερώτημα δεν είναι καθόλου αστείο είπαν: ο καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Steven Strogatz του Cornell, ο Jordan Ellenberg καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο τουWisconsin, ο καθηγητής φιλοσοφίας Philip Goff του βρετανικού Durham University και η μαθηματικός Eugenia Cheng του Art Institute of Chicago. Είπαν ότι, η μαθήτρια έθεσε αμείλικτα και σοβαρά ερωτήματα για τη φύση των Μαθηματικών και επανάφερε ένα πανάρχαιο, άλυτο και ουσιώδες ερώτημα για τη φιλοσοφία της επιστήμης. Τι είναι δηλαδή τα Μαθηματικά; Τα εφηύραμε ή τα ανακαλύψαμε; Οι μαθηματικές έννοιες, οι αριθμοί, οι εξισώσεις, τα θεωρήματα, τα γεωμετρικά σχήματα, τα αξιώματα, είναι υπαρκτές οντότητες ή ανθρώπινες κατασκευές;

Από τη μία έχουμε τους στοχαστές που βλέπουν τις μαθηματικές σχέσεις ως υπαρκτές. Είναι «*εκεί έξω*» και περιμένουν απλώς να ανακαλυφθούν από τον άνθρωπο. Αυτή η σχολή σκέψης αντλεί **τη ρητορεία** της από τον **πλατωνισμό**.

Ο Πλάτωνας θεώρησε πως τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αφηρημένα όντα που υπάρχουν στην πραγματικότητα. Οι μαθηματικές ιδέες κατοικούν σε έναν δικό τους κόσμο, όχι τον φυσικό δικό μας κόσμο, αλλά σε **μια υπερβατική** σφαίρα αμετάβλητης τελειότητας («*σφαίρα του είναι*») που υφίσταται πέρα από τον χώρο και τον χρόνο.

Υποστηρικτές του πλατωνισμού ήταν ο **B. Russel**, **ο Frage**, ο **K. Gödel** και ο **R. Penrose** ο οποίος έγραψε: «*μοιάζει να υπάρχει κάποια πρόδηλη αλήθεια σε αυτές τις μαθηματικές ιδέες, που προχωρούν πέρα από τις διανοητικές έρευνες ενός συγκεκριμένου μαθηματικού*». Στα Μαθηματικά όσο ανακαλύπτουμε νέα πράγματα μοιάζει σαν αυτά να ήταν πάντα εκεί και να **περίμεναν απλώς να τα δούμε**. Σαν αιώνιες αλήθειες, ανεξάρτητα και πέρα από μας.

Ο διακεκριμένος καθηγητής στη φιλοσοφία της επιστήμης **James Robert Brown** λέει: «*Πιστεύω πως ο μόνος τρόπος να βγάλουν νόημα τα Μαθηματικά είναι να πιστέψεις πως είναι αντικειμενικές μαθηματικές αλήθειες, τις οποίες ανακαλύπτουν οι μαθηματικοί οι οποίοι είναι υπερβολικά πλατωνιστές*».

Ακαδημαϊκοί ή επιστήμονες άλλων κλάδων, αντιμετωπίζουν τον πλατωνισμό με δυσπιστία. Πολλοί επιστήμονες τείνουν να είναι εμπειριστές. Προσλαμβάνουν τον κόσμο ως πράγματα και σχέσεις που μπορούμε να βιώσουμε, να νιώσουμε, πράγματα για τα οποία μπορούμε να μάθουμε περισσότερα μέσω της παρατήρησης και του πειράματος.

Αυτοί που αρνούνται την προαιώνια αλήθεια των Μαθηματικών, τα θεωρούν ότι είναι δημιουργήματα του νου, ένα παιχνίδι συμβόλων. Αν τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν δική τους ζωή σε άλλες σφαίρες, τότε πώς φτάνουμε να γνωρίσουμε κάτι γι' αυτά εδώ, στη δική μας διάσταση;

Οι πλατωνιστές, όμως λέει, ο **Brown**, πως προσλαμβάνουμε τις μαθηματικές αλήθειες με τον ίδιο τρόπο που ο **Γαλιλαίος** ή ο **Αϊνστάιν** συνέλαβαν φυσικές αλήθειες, διαισθητικά μέσω **«*νοητικών πειραμάτων*»**.

Νοητικά πειράματα, που προηγήθηκαν των πραγματικών πειραμάτων που απέδειξαν τις θεωρίες τους. Χωρίς να κάνει κάτι, ο Γαλιλαίος σκέφτηκε πως βαριά και ελαφριά αντικείμενα πρέπει να πέφτουν με τον ίδιο ρυθμό. Με τον ίδιο τρόπο, ένας μαθηματικός μπορεί να αποδείξει πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες, χωρίς να πρέπει να μετρήσει τις γωνίες όλων των τριγώνων. Ούτε καν ενός τριγώνου. Μόνο έναν έξυπνο νου χρειάζεσαι.

Η συζήτηση βάζει στο επίκεντρο και τον ορισμό των αφηρημένων εννοιών. Οι **πλατωνιστές** λένε ότι με τον ίδιο τρόπο που υπάρχουν τα φυσικά αντικείμενα του κόσμου μας, υπάρχουν και οι αφηρημένες έννοιες. Η λογική αρχή που είναι το αξίωμα, είναι μια πρόταση που δεν αποδεικνύεται, αλλά θεωρείται προφανής.

Τα Μαθηματικά σε αυτή την εκδοχή του πλατωνισμού είναι ένα σύνολο κανόνων που προκύπτουν από αρχικές υποθέσεις που έχουμε θεωρήσει αληθείς. Έτσι τα Μαθηματικά μοιάζουν σαν εφεύρεση.

Όμως **αν τα Μαθηματικά είναι σχέσεις** που δημιουργούμε εμείς στο κεφάλι μας, γιατί ανταποκρίνονται τόσο εξαιρετικά στον φυσικό μας κόσμο; Γιατί διάφορα θέματα της φυσικής, της βιολογίας, της μετεωρολογίας και τόσα άλλα περιγράφονται άριστα με τις συναρτήσεις;

Γιατί η **ακολουθία Fibonacci** εμφανίζεται διαρκώς στα μοτίβα των ηλιοτροπίων, των σαλιγκαριών, των τυφώνων, ακόμα και στους σπειροειδείς γαλαξίες; Γιατί, με δυο λόγια, έχουν αποδειχτεί τόσο χρήσιμα τα Μαθηματικά στην περιγραφή του φυσικού κόσμου; Η απάντηση ακόμα και στο παράδοξο του **Eug. Wigner** (Ούγγρος μαθηματικός και φυσικός με βραβείο **Nobel** Φυσικής το 1963) είναι ότι τα μαθηματικά αξιώματα δεν επιλέγονται τυχαία, επιλέγονται ως αληθείς προτάσεις ακριβώς επειδή έχουν να κάνουν με τον τρόπο που δουλεύει ο φυσικός κόσμος. Η απόδειξη είναι οι αλήθειες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που **είναι οικουμενικές** και αναλλοίωτες, όπως και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, της Ελλειπτικής (**Riemann**) Γεωμετρίας και της Υπερβολικής (**Lobachevski**) Γεωμετρίας. Το ίδιο ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς.

Βέβαια μια άλλη ομάδα μαθηματικών αναφέρει ότι όλα αυτά είναι μαθηματικές κατασκευές γιατί αν ζούσαμε σε έναν άλλο φυσικό κόσμο, π.χ. μέσα στο νερό, τότε η θεωρία των ρευστών θα ήταν πολύ **πιο σημαντική** και η αρίθμηση ίσως διαφορετική.

Ο **Pigliucci**, καθηγητής φιλοσοφίας της Ν. Υόρκης επιμένει: Τα Μαθηματικά δουλεύουν επειδή έτσι ακριβώς τα έχουμε φτιάξει, όπως **ένα σφυρί που δουλεύει πολύ καλά στο κάρφωμα καρφιών**, γιατί έτσι το έχουμε φτιάξει. Αυτή η άποψη φτάνει στο σημείο να βλέπει τα Μαθηματικά σαν χρήσιμες μυθιστορηματικές κατασκευές. Δηλαδή οι μαθηματικές αλήθειες της ανθρώπινης επινοητικότητας έχουν «*απλώς*» μια σχέση με τα πράγματα του φυσικού μας κόσμου και είναι ένα εργαλείο για την επιστήμη.

Τελεσίδικες απαντήσεις δεν υπάρχουν. Ούτε θα υπάρξουν πιθανότατα στο προσεχές μέλλον. Οι φιλόσοφοι άλλωστε για πολλούς αιώνες συζητούν αυτά τα θέματα, όμως μέχρι να καταλήξουν κάπου, οι μαθηματικοί θα συνεχίσουν να ανακαλύπτουν νέες θεωρίες και να ερμηνεύουν τον κόσμο μας.

> Τη μαθηματική σκέψη την χρησιμοποιώ για να προσεγγίσω προβλήματα της Φυσικής, γοητεύομαι από τον τελικό σκοπό, που είναι η μαθηματική περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Για τα Μαθηματικά θα προτιμούσα τον παλιό ορισμό του Κοπέρνικου, που περιλαμβάνει όλες τις ακριβείς επιστήμες.
>
> **Δημήτρης Χριστοδούλου**

Ο πολυβραβευμένος Έλληνας μαθηματικός και φυσικός **Δημήτρης Χριστοδούλου** μας είχε εκμυστηρευτεί σε μια συνέντευξη [ΕΥΚΛ Β΄τ. 84], "*…όταν ολοκλήρωσα την εργασία μου για την οποία βραβεύτηκα* **(*SHAW PRIZE, 2011*)**, *θυμάμαι, μπήκε στο μυαλό μου μια αμφιβολία, είχα τρομερό άγχος, με έτρωγε αν στηρίχτηκα σε κάποιο από τα θεμέλια των Μαθηματικών που στο μέλλον θα αμφισβητηθεί. Όμως συζήτησα με άλλους έμπειρους μαθηματικούς και μου είπαν* ***ότι το σύνδρομο*** *αυτό είναι γνωστό. Έχει συμβεί σε αρκετούς μαθηματικούς στο παρελθόν σε παρόμοιες συνθήκες και έτσι ηρέμησα …*".

Η σύνοδος των μεγάλων πλανητών

Όταν κυκλοφορούμε στο δρόμο μπορεί να συναντήσουμε ένα φίλο μας ή μια φίλη μας που έχουμε καιρό να τους δούμε και λέμε σήμερα είχαμε μια ευχάριστη **συνάντηση**. Όταν μια τέτοια συνάντηση συμβεί μεταξύ ουράνιων σωμάτων στον ουρανό μας, λέμε ότι είναι σε **«σύνοδο».** Αιώνες τώρα οι πλανήτες του Ηλιακού συστήματος κινούνται σε συγκεκριμένες τροχιές και τους βλέπουμε σε διάφορα σημεία του ουρανού. Μερικές φορές δύο ή περισσότεροι από αυτούς φαίνονται στο ίδιο σημείο του ουρανού, τότε λέμε οι πλανήτες αυτοί είναι σε **«σύνοδο».**

Στις 21 Δεκεμβρίου φέτος, το 2020, τη μέρα που έχουμε το χειμερινό Ηλιοστάσιο, θα βρεθούν σε σύνοδο οι δύο ποιο μεγάλοι πλανήτες **Δίας και Κρόνος**.

Το πλησίασμα των δύο αυτών πλανητών δεν γίνεται συχνά. Περίπου κάθε 20 χρόνια πλησιάζει ο ένας τον άλλο. Αυτή τη φορά θα «πέσει» ο ένας πάνω στον άλλο, δηλαδή θα φαίνονται σαν ένας διπλός πλανήτης. Σύμφωνα με υπολογισμούς των αστρονόμων αυτό είχε συμβεί πάλι το Μεσαίωνα [4 Μαρτίου 1226]. Επειδή μια τέτοια εικόνα είναι **σπάνια** δεν πρέπει να την χάσουμε.

Ήδη από το καλοκαίρι οι δύο πλανήτες έρχονται κοντά ο ένας με τον άλλο στον ουρανό μας και στις 21 Δεκεμβρίου θα πέσει ο ένας στην αγκαλιά του άλλου και θα φαίνονται σαν ένα αστέρι. Οι αστρονόμοι με τα τηλεσκόπιά τους θα βλέπουν ταυτόχρονα εκείνο το βράδυ τους δύο πλανήτες και αρκετούς από τους δορυφόρους τους. Βέβαια το Μάρτη **2080** θα είναι πάλι σε σύνοδο ο Δίας με τον Κρόνο αλλά δεν θα ξανασυμβεί **έως το 2400**.

Την $21^{η}$ Δεκέμβρη μόλις δύσει ο Ήλιος κοιτάζουμε νοτιοδυτικά, χαμηλά στον ουρανό και θα δούμε το Δια με τον Κρόνο αγκαλιά.

Με μεγάλη επιτυχία έγινε στις 13 Δεκεμβρίου 2020 **e-ημερίδα**, που διοργανώθηκε από την **ΕΜΕ – Παράρτημα Ημαθίας**, σχετική αναφορά ομιλητών γίνεται στη διπλανή αφίσα. Αξιόλογες οι συζητήσεις και οι αναφορές των ομιλητών σε πολύ σημαντικά σημεία της επικαιρότητας. Θετική εντύπωση και μεγάλο ενδιαφέρον, μεταξύ των άλλων, παρουσίασε η εισήγηση, για τη **Γεωμετρία** και τα **δίκτυα**, που διέτρεξε όλη την ιστορική διαδρομή στο χρόνο.

Μέρος Α΄ 10:00-11:30

« Από την Ευκλείδεια γεωμετρία στη Γεωμετρία δικτύων»

Μέρος Β΄ (στρογγυλό τραπέζι) 11:30-13:30

«Το σημερινό Λύκειο (ΓΕΛ, ΕΠΑΛ) αναγκαιότητα αλλαγών - πρόσβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση»

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

IMO 2020

$61^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα
Ρωσία, 18-28 Σεπτεμβρίου 2020

Η **$61^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα** διεξήχθη διαδικτυακά με Κέντρο την **Αγία Πετρούπολη** της **Ρωσία στις 18-28 Σεπτεμβρίου 2020**, όπως αποφάσισε η Διεθνής Επιτροπή (IMO Advisory Board). Με γνώμονα την ασφάλεια των συμμετεχόντων, κάθε ομάδα διαγωνίστηκε στη χώρα της σε ένα εξεταστικό κέντρο. Για τη διενέργεια του διαγωνισμού, πέραν από τα υγειονομικά πρωτόκολλα, εφαρμόσθηκαν ειδικά πρωτόκολλα που είχαν σκοπό να διασφαλίσουν το αδιάβλητο του διαγωνισμού και την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Διαμορφώθηκαν έτσι νέοι κανονισμοί ειδικά για τη διαδικτυακή **«εικονική» (virtual)** διοργάνωση. Σύμφωνα με αυτούς σε κάθε χώρα ήταν παρών, κατά τη διάρκεια του διαγωνισμού, Επίτροπος διορισμένος από τη Διοργανώτρια Αρχή, ο οποίος επιτηρούσε την όλη εξεταστική διαδικασία. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια της εξέτασης η διαδικασία μεταδίδονταν με ζωντανή εικόνα στη Διοργανώτρια Αρχή, ενώ τα θέματα εστάλησαν σε όλες τις χώρες λίγο πριν την έναρξη του διαγωνισμού.

Όλοι οι Έλληνες μαθητές που συμμετείχαν στην $61^{η}$ Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα κατάφεραν να διακριθούν σε έναν ιδιαίτερα δύσκολο και απαιτητικό διαγωνισμό, κατακτώντας **τέσσερα Χάλκινα Μετάλλια και δυο Εύφημες Μνείες**. Συγκεκριμένα:

Μαργαρίτης Μηνάς	**Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου Κρήτης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**$2^{ο}$ Λύκειο Παλαιού Φαλήρου**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Αδαμόπουλος Διονύσιος	**3ο Λύκειο Πύργου Ηλείας**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Εμμανουήλ Δημήτριος	**Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λιγνός Ορέστης	**Εκπαιδευτήρια «Η Ελληνική Παιδεία»**	**Εύφημη μνεία**
Δημουλιός Ιωάννης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Εύφημη μνεία**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ **Ανάργυρος Φελλούρης**, υπαρχηγός διδάκτωρ ο μαθηματικός **Σιλουανός Μπραζιτίκος** και παρατηρητής Α ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος**.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1.

Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο *ABCD*. Το σημείο *P* είναι στο εσωτερικό του *ABCD*, έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες αναλογίες: $\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$.
Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες τρεις ευθείες περνούν από το ίδιο σημείο: οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών $\angle ADP$ και $\angle PCB$ και η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος *AB*.

Λύση: 1ος τρόπος

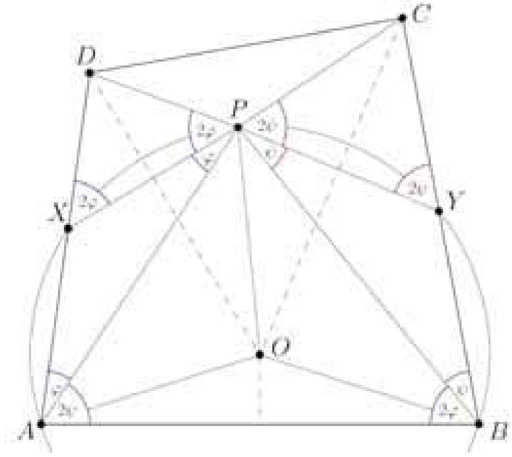
Έστω $\varphi = \angle PAD$ και $\psi = \angle CBP$. Τότε $\angle PBA = 2\varphi$, $\angle DPA = 3\varphi$, $\angle BAP = 2\psi$ και $\angle BPC = 3\psi$.

Έστω X σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AD με $\angle XPA = \varphi$. Τότε

$$\angle PXD = \angle PAX + \angle XPA = 2\varphi = \angle DPA - \angle XPA = \angle DPX$$

Επομένως το τρίγωνο DPX είναι ισοσκελές με $DP = DX$, οπότε η διχοτόμος της γωνίας $\angle ADP$ είναι και μεσοκάθετος της πλευράς XP.

Ομοίως, αν Y είναι σημείο της πλευράς BC τέτοιο ώστε $\angle BPY = \psi$, τότε η διχοτόμος της γωνίας $\angle PCB$ είναι και μεσοκάθετος της πλευράς PY. Επομένως, πρέπει να αποδείξουμε ότι οι μεσοκάθετοι των ευθυγράμμων τμημάτων XP, PY και AB συντρέχουν.



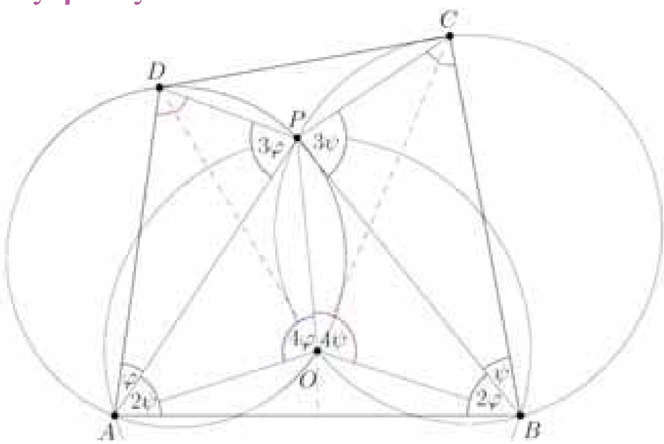
Σχήμα 1

Έχουμε ότι:

$$\angle AXP = 180^o - \angle PXD = 180^o - 2\varphi = 180^o - \angle PBA$$

Επομένως, το τετράπλευρο AXPY είναι εγγράψιμο, οπότε το σημείο X βρίσκεται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου APB. Ομοίως, το σημείο Y βρίσκεται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου APB. Επομένως, οι μεσοκάθετοι των πλευρών XP, PY και AB περνούν από το κέντρο του κύκλου που περνάει από τα σημεία A, B, Y, P, X.

2ος τρόπος



Σχήμα 2

Έστω $\varphi = \angle PAD$ και $\psi = \angle CBP$. Τότε

$$\angle PBA = 2\varphi,\ \angle DPA = 3\varphi,\ \angle BAP = 2\psi$$

και $\angle BPC = 3\psi$. Έστω O το περίκεντρο του τριγώνου APB. Έχουμε ότι:

$$\angle ADP = 180^o - \angle PAD - \angle DPA = 180^o - 4\varphi,$$

οπότε $4\varphi < 180^0$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\angle POA = 2\angle PBA = 4\varphi = 180^o - \angle ADP,$$

οπότε το τετράπλευρο ADPO είναι εγγράψιμο. Επειδή $AO = OP$, έπεται ότι $\angle ADO = \angle ODP$, οπότε η DO είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle ADP$.

Ομοίως, η CO είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle PCB$. Επίσης, το σημείο O ανήκει στη μεσοκάθετη του AB αφού είναι το περίκεντρο του τριγώνου APB.

Πρόβλημα 2.

Οι πραγματικοί αριθμοί α, b, c, d είναι τέτοιοι ώστε $\alpha \geq b \geq c \geq d > 0$ και α+b+c+d=1.

Να αποδείξετε ότι $(\alpha + 2b + 3c + 4d)\alpha^\alpha b^b c^c d^d < 1$

Λύση

1ος τρόπος

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου με βάρη α, b, c, d έχουμε

$$\alpha^\alpha b^b c^c d^d \leq \alpha \cdot \alpha + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = \alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι: $(\alpha + 2b + 3c + 4d)(\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (\alpha + b + c + d)^3$.

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους, όπως

$$(\alpha + b + c + d)^3 > \alpha^2(\alpha + 3b + 3c + 3d) + b^2(3\alpha + b + 3c + 3d) + c^2(3\alpha + 3b + c + 3d) + d^2(3\alpha + 3b + 3c + d)$$

$$\geq (\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot (\alpha + 2b + 3c + 4d)$$

2ος τρόπος

Από $b \geq d$ έχουμε $\alpha + 2b + 3c + 4d \leq \alpha + 3b + 3c + 3d = 3 - 2\alpha$.

Αν $\alpha < \dfrac{1}{2}$, τότε το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί από τη σχέση:

$$(\alpha+2b+3c+4d)\alpha^{\alpha}b^{b}c^{c}d^{d}\le(3-2\alpha)\alpha^{\alpha}b^{b}c^{c}d^{d}=(3-2\alpha)\alpha=1-(1-\alpha)(1-2\alpha)<1.$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\frac{1}{2}\le\alpha<1$ και επειδή $b,c,d<1-\alpha$, έχουμε

$$b^{b}c^{c}d^{d}\le(1-\alpha)^{b}\cdot(1-\alpha)^{c}\cdot(1-\alpha)^{d}=(1-\alpha)^{1-\alpha}.$$

Επομένως, έχουμε: $(\alpha+2b+3c+4d)\alpha^{\alpha}b^{b}c^{c}d^{d}<(3-2\alpha)\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$. **(*)**

Για $0<x<1$, θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=(3-2x)x^{x}(1-x)^{1-x},\quad g(x)=\log f(x)=\log(3-2x)+x\log x+(1-x)\log(1-x),$$

όπου με $\log$ συμβολίζουμε το φυσικό λογάριθμο. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$g''(x)=-\frac{4}{(3-2x)^{2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+8(1-x)^{2}}{x(1-x)(3-2x)^{2}}>0,$$

οπότε η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $(0,1)$. Επειδή

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=2+2\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to1^{-}}g(x)=0$$

θα είναι $g(x)\le0$, οπότε και $f(x)\le1$, για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ και επομένως λόγω της (*) έχουμε:

$$(\alpha+2b+3c+4d)\alpha^{\alpha}b^{b}c^{c}d^{d}<f(\alpha)\le1.$$

Πρόβλημα 3.

Υπάρχουν 4n βότσαλα με βάρη 1,2,3,…,4n. Κάθε βότσαλο χρωματίζεται με ένα από n χρώματα και υπάρχουν τέσσερα βότσαλα από κάθε χρώμα. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε τα βότσαλα σε δύο στοίβες έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

- **Το συνολικό βάρος καθεμιάς από τις δύο στοίβες είναι το ίδιο.**
- **Κάθε στοίβα περιέχει δύο βότσαλα από κάθε χρώμα.**

Λύση

Έστω $S=\{1,2,3,\ldots,4n\}$ το σύνολο των βότσαλων. Σχηματίζουμε ζευγάρια από βότσαλα με βάρη που έχουν άθροισμα $4n+1$, οπότε προκύπτουν τα $2n$ ζεύγη: $\{1,4n\},\{2,4n-1\},\ldots,\{2n,2n+1\}$. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το σύνολο S σε δύο υποσύνολα που καθένα θα έχει n ζεύγη έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να περιέχει δύο βότσαλα από κάθε χρώμα.

Θεωρούμε ένα πολυγράφημα G, δηλαδή ένα γράφημα n κορυφών με βρόγχους και πολλαπλές πλευρές, έτσι ώστε κάθε κορυφή του να αντιστοιχεί σε ένα χρώμα. Σε κάθε ζεύγος από βότσαλα προσθέτουμε μία πλευρά μεταξύ των κορυφών που αντιστοιχούν στα χρώματα αυτών των βότσαλων. Σημειώνουμε ότι κάθε κορυφή έχει βαθμό 4. Επίσης μία κατάλληλη διαμέριση των βότσαλων αντιστοιχεί σε χρωματισμό των πλευρών του G με δυο χρώματα, έστω κόκκινο και μπλε, έτσι ώστε κάθε κορυφή να έχει βαθμό 2 ως προς κάθε χρώμα, δηλαδή κάθε κορυφή να έχει ίσους κόκκινους και μπλε βαθμούς.

Για την συμπλήρωση της απόδειξης, είναι αρκετό να επιτύχουμε ένα τέτοιο χρωματισμό για κάθε υπογράφημα G' του G. Επειδή όλοι οι βαθμοί των κορυφών είναι άρτιοι, στο υπογράφημα G' υπάρχει ένα κύκλωμα Euler C, δηλαδή ένα κύκλωμα που περνάει από κάθε κορυφή του G' ακριβώς μία φορά. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των πλευρών του C είναι άρτιος αφού ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των κορυφών του G'. Επομένως, όλες οι πλευρές μπορούν να χρωματιστούν με κόκκινο και μπλε χρώμα, έτσι ώστε κάθε δύο γειτονικές πλευρές στο C να έχουν διαφορετικά χρώματα (μπορεί κάποιος να κινείται μέσα στο C και να χρωματίζει τις πλευρές εναλλάξ με κόκκινο και μπλε χρώμα). Έτσι μέσα στο G' κάθε κορυφή θα έχει ίσους βαθμούς ως προς το κόκκινο και μπλε χρώμα.

Πρόβλημα 4.

Έστω ακέραιος n > 1. Υπάρχουν n^2 σταθμοί στην πλαγιά ενός βουνού, όλοι σε διαφορετικά ύψη. Καθεμία από δύο εταιρείες τελεφερίκ, A και B, λειτουργεί k τελεφερίκ. Κάθε τελεφερίκ εκτελεί

μεταφορά από έναν σταθμό σε έναν άλλον που βρίσκεται υψηλότερα (χωρίς ενδιάμεσες στάσεις). Τα k τελεφερίκ της εταιρείας A έχουν k διαφορετικά σημεία εκκίνησης και k διαφορετικά σημεία τερματισμού και ένα τελεφερίκ το οποίο ξεκινά υψηλότερα από κάποιο άλλο, επίσης τερματίζει σε σταθμό που βρίσκεται υψηλότερα. Οι ίδιες συνθήκες ισχύουν και για την εταιρεία B. Λέμε ότι δύο σταθμοί συνδέονται από μία εταιρεία, αν κάποιος μπορεί να ξεκινήσει από τον σταθμό που βρίσκεται χαμηλότερα και να φτάσει στο σταθμό που βρίσκεται υψηλότερα χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα τελεφερίκ της εταιρείας αυτής (δεν επιτρέπονται άλλες μετακινήσεις μεταξύ σταθμών). Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο k για τον οποίο μπορεί κάποιος να εγγυηθεί ότι υπάρχουν δύο σταθμοί οι οποίοι συνδέονται και από τις δύο εταιρείες.

Λύση

Αριθμούμε τους σταθμούς από το 1 μέχρι και το n^2 αρχίζοντας από τη βάση και ανεβαίνοντας προς την κορυφή.

Καταρχήν θα αποδείξουμε ότι για $k \le n^2 - n$ δεν θα υπάρχει κανένα ζευγάρι σταθμών που να συνδέονται και από τις δύο εταιρείες. Αρκεί να δώσουμε ένα τέτοιο παράδειγμα για $k = n^2 - n$.

Έστω ότι η εταιρεία A με τα $k = n^2 - n$ τελεφερίκ που διαθέτει συνδέει τα ζεύγη σταθμών της μορφής $(i, i+1)$ με n δεν διαιρεί το *i*. Τότε όλα τα ζεύγη σταθμών (i, j) που συνδέονται από την Α ικανοποιούν τη σχέση: $\left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{j}{n} \right\rceil$.

Έστω ότι η εταιρεία B με τα $k = n^2 - n$ τελεφερίκ που διαθέτει συνδέει τα ζεύγη σταθμών της μορφής $(i, i+n)$, όπου $1 \le i \le n^2 - n$. Τότε τα ζεύγη σταθμών (i, j) που συνδέονται από την B ικανοποιούν τη σχέση $i \equiv j (\bmod n)$. Προφανώς, δεν υπάρχει ζεύγος (i, j) που να ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες $\left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{j}{n} \right\rceil$ και $i \equiv j (\bmod n)$, οπότε δεν υπάρχουν δύο σταθμοί συνδεόμενοι και από τις δύο εταιρείες.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για $k = n^2 - n + 1$ υπάρχουν πάντοτε δύο σταθμοί που συνδέονται και από τις δύο εταιρείες. Ορίζουμε ως $A-$αλυσίδα μία ακολουθία σταθμών $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_t$ τέτοια ώστε η εταιρεία A συνδέει τον σταθμό α_i με τον σταθμό α_{i+1} για κάθε $i : 1 \le i \le t-1$, αλλά δεν υπάρχει τελεφερίκ της A που να συνδέει κάποιον σταθμό με τον α_1 καθώς επίσης και το σταθμό α_t με κάποιον άλλο σταθμό. Ορίζουμε και τη $B-$αλυσίδα ομοίως. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε σταθμός περιέχεται σε μία ακριβώς $A-$αλυσίδα (που πιθανώς να αποτελείται μόνο από αυτόν το σταθμό) καθώς επίσης και σε μία ακριβώς $B-$αλυσίδα. Τώρα θέτουμε κάθε σταθμό σε αντιστοιχία με το ζεύγος που αποτελείται από την $A-$αλυσίδα και τη $B-$αλυσίδα που αυτός ανήκει.

Επειδή όλα τα σημεία τερματισμού των τελεφερίκ της εταιρείας A είναι διαφορετικά, θα υπάρχουν $n^2 - k = n - 1$ σταθμοί οι οποίοι δεν είναι τέτοια σημεία τερματισμού. Καθένα από αυτά είναι σημείο εκκίνησης μιας ακριβώς $A-$αλυσίδας, οπότε ο αριθμός των $A-$αλυσίδων είναι $n-1$. Ομοίως, ο αριθμός των $B-$αλυσίδων είναι $n-1$. Επομένως, υπάρχουν $(n-1)^2$ ζεύγη που αποτελούνται από μία $A-$αλυσίδα και μία $B-$αλυσίδα. Επομένως, δύο από τους n^2 σταθμούς αντιστοιχούν στο ίδιο ζεύγος, οπότε αυτοί ανήκουν στην ίδια $A-$αλυσίδα, αλλά και στην ίδια $B-$αλυσίδα. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο αυτοί σταθμοί συνδέονται και από τις δύο εταιρείες.

Παρατήρηση 1. *Η συνθήκη ότι ένα τελεφερίκ που ξεκινά υψηλότερα επίσης τερματίζει σε σταθμό που βρίσκεται υψηλότερα δεν χρησιμοποιήθηκε παραπάνω.*

Παρατήρηση 2. *Αν ο αριθμός των σταθμών ήταν N, τότε η απάντηση στο πρόβλημα θα ήταν $N - \left\lceil \sqrt{N} \right\rceil + 1$. Η παραπάνω λύση, όπως έχει δοθεί, ισχύει και για αυτή την περίπτωση.*

Προβλημα 5.

Δίνεται μια δεσμίδα με n > 1 κάρτες. Ένας θετικός ακέραιος αναγράφεται πάνω σε κάθε κάρτα. Η δεσμίδα έχει την ιδιότητα ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών σε κάθε ζεύγος καρτών είναι

επίσης ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών κάποιας συλλογής μίας ή περισσοτέρων καρτών. Για ποιες τιμές του n προκύπτει ότι οι αριθμοί πάνω στις κάρτες είναι όλοι ίσοι;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ που γράφτηκαν πάνω στις κάρτες δεν είναι όλοι ίσοι. Έστω $d=\text{ΜΚΔ}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Αν είναι $d>1$, τότε διαιρώντας όλους τους αριθμούς με το d προκύπτουν οι αριθμοί $\frac{\alpha_1}{d},\frac{\alpha_2}{d},...,\frac{\alpha_n}{d}$, ενώ όλοι οι αριθμητικοί και όλοι οι γεωμετρικοί μέσοι θα διαιρούνται με το d, οπότε έχουμε μία καινούρια δέσμη καρτών που ικανοποιεί τη συνθήκη. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d=\text{ΜΚΔ}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$.

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν δύο αριθμοί α_m και α_k των οποίων ο αριθμητικός μέσος $\frac{\alpha_m+\alpha_k}{2}$ είναι διαφορετικός από το γεωμετρικό μέσο οποιασδήποτε (μη κενής) υποακολουθίας της ακολουθίας των αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, φθάνοντας έτσι σε μία αντίφαση.

Επιλέγουμε $\alpha_m=\max(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Επειδή οι αριθμοί δεν είναι όλοι ίσοι, έπεται ότι $\alpha_m\geq 2$ και έστω p ένας πρώτος διαιρέτης του α_m.

Επιλέγουμε δείκτη $k\in\{1,2,...,n\}$ έτσι ώστε $\alpha_k=\max\{\alpha_i : p \text{ δεν διαιρεί } \alpha_i\}$. Επειδή $d=\text{ΜΚΔ}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$, δεν διαιρούνται όλα τα α_i με το p, οπότε τέτοιο α_k υπάρχει. Σημειώνουμε ότι πρέπει $\alpha_m>\alpha_k$, γιατί $\alpha_m\geq\alpha_k$, p διαιρεί α_m και p δεν διαιρεί α_k.

Έστω $b=\frac{\alpha_m+\alpha_k}{2}$. Θα αποδείξουμε ότι ο b δεν μπορεί να ισούται με το γεωμετρικό μέσο οποιασδήποτε υποακολουθίας της ακολουθίας των αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$.

Θεωρούμε το γεωμετρικό μέσο $g=\sqrt[t]{\alpha_{i_1}\cdot\alpha_{i_2}\cdot...\cdot\alpha_{i_t}}$ τυχούσας υποακολουθίας των αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Αν κανένας από τους αριθμούς $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_n}$ δεν διαιρείται με τον p, τότε αυτοί δεν είναι μεγαλύτεροι από τον α_k, οπότε $g=\sqrt[t]{\alpha_{i_1}\cdot\alpha_{i_2}\cdot...\cdot\alpha_{i_t}}\leq\alpha_k<\frac{\alpha_m+\alpha_k}{2}=b$, και επομένως $g\neq b$.

Διαφορετικά, αν ένας τουλάχιστον από τους $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_n}$ διαιρείται με τον p, τότε ο $2g=2\sqrt[t]{\alpha_{i_1}\cdot\alpha_{i_2}\cdot...\cdot\alpha_{i_t}}$ είτε δεν είναι ακέραιος, είτε διαιρείται με το p, ενώ ο $2b=\alpha_m+\alpha_k$ είναι ακέραιος που διαιρείται με το p, οπότε πάλι θα είναι $g\neq b$.

Πρόβλημα 6.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετική σταθερά c, τέτοια ώστε να αληθεύει η ακόλουθη πρόταση: Θεωρούμε έναν ακέραιο n > 1 και ένα σύνολο S που αποτελείται από n σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε η απόσταση μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων του S είναι τουλάχιστον 1. Τότε υπάρχει μια ευθεία ℓ που διαχωρίζει το S, έτσι ώστε η απόσταση οποιουδήποτε σημείου του S από την ευθεία ℓ είναι τουλάχιστον $cn^{-1/3}$.

(Μια ευθεία ℓ διαχωρίζει ένα σύνολο σημείων S, αν κάποιο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του S τέμνει την ευθεία ℓ.)

Σημείωση. *Σε ασθενέστερα αποτελέσματα με αντικατάσταση του* $cn^{-1/3}$ *από* $cn^{-\alpha}$ *μπορεί να δοθούν μονάδες ανάλογα με την τιμή της σταθεράς* $\alpha>1/3$.

Λύση

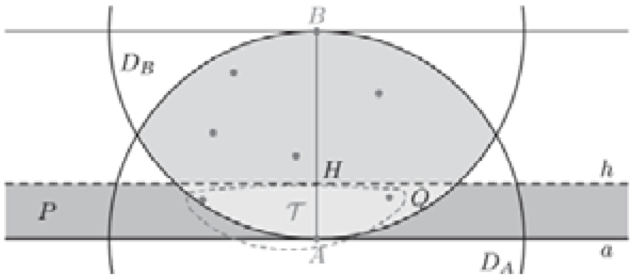
Θα αποδείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει για $c=\frac{1}{8}$. Θέτουμε $\delta=\frac{1}{8}n^{-1/3}$. Για οποιαδήποτε ευθεία ℓ και οποιοδήποτε σημείο X, συμβολίζουμε με X_ℓ την προβολή του σημείου X πάνω στην ℓ. Έναν όμοιο συμβολισμό θα εφαρμόσουμε και για σύνολα σημείων.

Υποθέτουμε ότι για κάποια ευθεία ℓ, το σύνολο S_ℓ περιέχει δύο γειτονικά σημεία X και Y με $XY=2d$. Τότε η ευθεία που είναι κάθετη προς την ευθεία ℓ και περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος XY διαχωρίζει το σύνολο S και όλα τα σημεία του S απέχουν απόσταση τουλάχιστον d από την ευθεία ℓ. Έτσι, αν είναι $d\ge\delta$, τότε έχουμε βρει μία ευθεία που ζητάμε.

Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν τέτοια σημεία X και Y σε οποιαδήποτε προβολή S_ℓ.

Επιλέγουμε δύο σημεία στο A και B του συνόλου S με τη μέγιστη δυνατή απόσταση $M=AB$, δηλαδή AB είναι «*διάμετρος*» του S. Από τη συνθήκη του προβλήματος, θα είναι $M\ge1$. Συμβολίζουμε με ℓ την ευθεία AB. Το σύνολο S περιέχεται στην τομή δύο δίσκων D_A και D_B ακτίνας M και με κέντρα τα σημεία A και B, αντίστοιχα. Επομένως, η προβολή S_ℓ περιέχεται στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Επιπλέον, τα σημεία του S_ℓ διαιρούν το AB, το πολύ σε $n-1$ τμήματα που το καθένα έχει μήκος μικρότερο του 2δ.

Επομένως $\qquad M<n\cdot2\delta. \qquad (1)$



Σχήμα 3

Επιλέγουμε σημείο H του τμήματος AB με $AH=\frac{1}{2}$. Έστω P μία λωρίδα μεταξύ των ευθειών α και h που είναι κάθετες προς την ευθεία AB και περνούν από τα σημεία A και H, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η λωρίδα P περιέχει το σύνορό της, δηλαδή τις δυο ευθείες α και h. Θέτουμε $T=P\cap S$ και έστω $t=|T|$.

Από υπόθεση το τμήμα AH περιέχει τουλάχιστον $\left\lceil\frac{1/2}{2\delta}\right\rceil$ σημεία του συνόλου S_ℓ, οπότε προκύπτει ότι:

$t\ge\frac{1}{4\delta}$ (2). Σημειώνουμε ότι το T περιέχεται στο σύνολο $Q=P\cap D_B$, που είναι ένα κυκλικό τμήμα του οποίου η προβολή Q_a είναι ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\sqrt[2]{M^2-\left(M-\frac{1}{2}\right)^2}<2\sqrt{M}$

Επιπλέον, για οποιαδήποτε δύο σημεία $X,Y\in T$, έχουμε $XY\ge1$ και $X_\ell Y_\ell\le\frac{1}{2}$, οπότε $X_aY_a=\sqrt{(XY)^2-(X_\ell Y_\ell)^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε t σημεία που συνιστούν το σύνολο T_α πάνω σε ένα τμήμα μήκους μικρότερου από το $2\sqrt{M}$, τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση τουλάχιστον $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Από αυτό προκύπτει ότι $2\sqrt{M}>(t-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$, ή $\quad t<1+\frac{4\sqrt{M}}{\sqrt{3}}<4\sqrt{M}, \qquad (3)$

αφού $M\ge1$.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3), βρίσκουμε τελικά ότι $\frac{1}{4\delta}\le t<4\sqrt{M}<4\sqrt{2n\delta}$ ή $512n\delta^3>1$, το οποίο δεν αληθεύει για την τιμή του δ που επιλέξαμε.

37η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Ρουμανία, 29 Οκτωβρίου – 3 Νοεμβρίου 2020

Η **37η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα** διεξήχθη διαδικτυακά από την **Ρουμανία** από **29 Οκτωβρίου μέχρι 3 Νοεμβρίου 2020**, όπως αποφάσισε η **Βαλκανική Συμβουλευτική Επιτροπή (BMO Advisory Board)**, πάντα με γνώμονα την ασφάλεια των συμμετεχόντων, ώστε κάθε ομάδα να διαγωνιστεί στη χώρα της σε ένα εξεταστικό κέντρο. Για τη διενέργεια του διαγωνισμού, πέραν από τα υγειονομικά πρωτόκολλα, εφαρμόσθηκαν **ειδικά πρωτόκολλα** με σκοπό να διασφαλίσουν το **αδιάβλητο του διαγωνισμού** και την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων και των μεταλλίων. Διαμορφώθηκαν έτσι νέοι κανονισμοί ειδικά για τη διαδικτυακή «εικονική» (Virtual) διοργάνωση. Σύμφωνα με αυτούς κατά τη διάρκεια της εξέτασης η διαδικασία μεταδίδονταν με ζωντανή εικόνα στη διοργανώτρια χώρα, ενώ τα θέματα εστάλησαν σε όλες τις χώρες λίγο πριν την έναρξη του διαγωνισμού.

Όλοι οι Έλληνες μαθητές κατάφεραν να διακριθούν σε έναν ιδιαίτερα δύσκολο και απαιτητικό διαγωνισμό, κατακτώντας **5 Χάλκινα Μετάλλια** και μία Εύφημη Μνεία. Συγκεκριμένα:

Γαλανόπουλος Σπυρίδων	**1ο Ενιαίο Λύκειο Ξάνθης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Εμμανουήλ Δημήτριος	**Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Αδαμόπουλος Διονύσιος	**3ο Ενιαίο Λύκειο Πύργου Ηλείας**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Μαργαρίτης Μηνάς	**Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου Κρήτης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**2ο Ενιαίο Λύκειο Παλαιού Φαλήρου**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Δημουλιός Ιωάννης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Εύφημη μνεία**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός κ. **Σιλουανός Μπραζιτίκος, υπαρχηγός** ο μαθηματικός **Ευάγγελος Ζώτος** και **παρατηρητής Α,** ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος.**

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία **προετοιμάζει** και **υποστηρίζει** τις προσπάθειες αυτών των μαθητών πάντα σε εθελοντική βάση στο πλαίσιο των στόχων της που είναι η **αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας και Εκπαίδευσης στη χώρα μας**.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους.

Πρόβλημα 1.

Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $AB = AC$ το μέσο D της πλευράς AC και ο περιγεγραμμένος κύκλος γ του τριγώνου ABD. Η εφαπτομένη του γ στο σημείο A τέμνει την ευθεία BC στο σημείο E. Αν O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABE, να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AO ανήκει στον γ.

Λύση: Θα δείξουμε πρώτα ότι το C είναι μέσον του τμήματος BE.

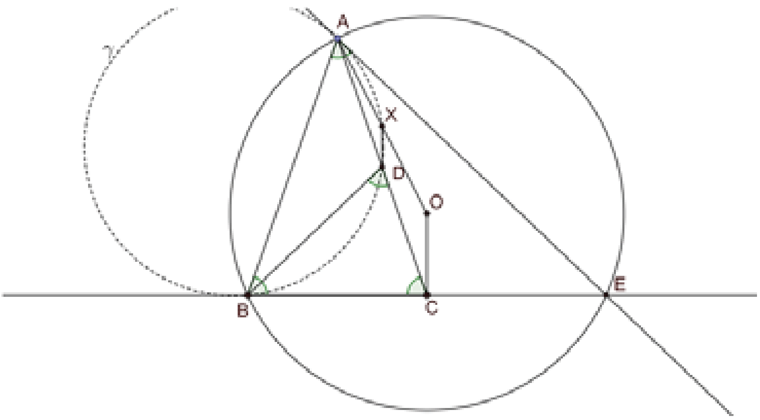
Επειδή $\angle DCB = \angle ABC$ και $\angle CDB = \angle BAE$, έχουμε ότι τα τρίγωνα DCB,ABE, είναι όμοια.

Επομένως $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{DC}{AB} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{1}{2}$, οπότε το σημείο D είναι το μέσο της πλευράς AC.

Τώρα ονομάζουμε X το σημείο τομής της AO με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ADB. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $XD \parallel OC$. Όμως, έχουμε ότι:

$$\angle XDA = \angle OAE = 90 - \angle ABC = 90 - \angle ACB = \angle OCA,$$

που δίνει το ζητούμενο.



Πρόβλημα 2.

Συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}_{>0} = \{1,2,3,\ldots\}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ που είναι τέτοιες ώστε, για κάθε θετικό ακέραιο n, να ισχύουν τα πιο κάτω:

i) Το $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ είναι τέλειο τετράγωνο.

ii) Το $f(n)$ διαιρεί το n^3.

Λύση: Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $f(n) = n^3$. Επειδή $f(1) | 1$, παίρνουμε ότι $f(1) = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο n έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = \sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

Τότε, θέτουμε $\sum_{i=1}^{n} f(n) = \left(\frac{n(n-1)}{2} + k\right)^2$, οπότε $f(n) = \left(\frac{n(n-1)}{2} + k\right)^2 - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = k(n^2 - n + k)$. Αυτό σημαίνει ότι $k(n^2 - n + k) | n^3 \Rightarrow n^2 - n + k | n^3 \Rightarrow n^2 - n + k | n^3 - n(n^2 - n + k) = n^2 - nk.$

Όμως ο $n^2 - n + k > n^2 - nk$, επομένως, για να ισχύει η τελευταία σχέση διαιρετότητας, θα πρέπει $n^2 - nk = 0 \Rightarrow k = n$. Τότε $f(n) = n(n^2 - n + n) = n^3$, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3.

Έστω θετικός ακέραιος k. Να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο $n \geq k+1$, για τον οποίο το πιο κάτω παιγνίδι μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον:

Θεωρούμε n κουτιά, τα $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Για κάθε δείκτη i, το κουτί b_i περιέχει αρχικά ακριβώς i νομίσματα. Σε κάθε βήμα του παιγνιδιού, εκτελούμε με τη σειρά τα πιο κάτω:

(1): Επιλέγουμε $k+1$ κουτιά.

(2): Από αυτά τα $k+1$ κουτιά, επιλέγουμε k και αφαιρούμε τουλάχιστον τα μισά νομίσματα από το καθένα. Δεδομένου ότι περίσσεψε το κουτί b_i, προσθέτουμε σε αυτό i νομίσματα.

(3): Αν κάποιο από τα κουτιά αδειάσει, το παιγνίδι τερματίζεται. Αλλιώς προχωρούμε στο επόμενο βήμα.

Λύση: Θα συμβολίζουμε με x_i το πλήθος των κερμάτων στο κουτί b_i στη δυαδική μορφή της και έστω α_i ο μέγιστος εκθέτης δύναμης του 2, όπου προφανώς $\alpha_i = \lfloor \log_2(x_i) \rfloor$. Θεωρούμε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ και παρατηρούμε πως με κάθε κίνηση αυτό μειώνεται ακριβώς κατά k λόγω της αφαίρεσης των μισών κερμάτων από k κουτιά, ενώ αυξάνεται κατά $\alpha = \left\lfloor \log_2(\frac{i}{x_i}+1) \right\rfloor$. όπου i η θέση του κουτιού στο οποίο βάζουμε κέρματα. Το παραπάνω άθροισμα δεν γίνεται να μειώνεται με κάθε κίνηση, διότι όταν φτάσει στο 0, αναγκαστικά το παιχνίδι τελειώνει. Είναι εύκολο να δούμε τώρα πως η μέγιστη δυνατή τιμή του α είναι $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$, οπότε για να μη μειώνεται το άθροισμα με κάθε κίνηση, πρέπει $k \le \lfloor \log_2(n+1) \rfloor \Rightarrow n \ge 2^k$

Ας υποθέσουμε ότι $n = 2^k + \ell$. Τότε, αν ένα κουτί σε θέση $i < 2^k - 1$, χρησιμοποιείται άπειρο πλήθος φορών, είτε θα καταλήξει να αδειάσει. Αν χρησιμοποιηθεί άπειρο πλήθος φορών πάνω του η κίνηση επανατοποθέτησης κερμάτων, οδηγεί σε μείωση του S κατά

$$k - \left\lfloor \log_2(\frac{i}{x_i}+1) \right\rfloor \ge k - \lfloor \log_2(2^k - 1) \rfloor = k - (k-1) = 1$$

κάθε φορά. Έτσι, αν $\ell < 2^k - 1$, επειδή $\alpha \le \lfloor \log_2(n+1) \rfloor \le \lfloor \log_2(2^{k+1} - 1) \rfloor = k$, το S δεν αυξάνεται σε καμία κίνηση και τελικά θα φτάσει στο 0, οπότε και στις δύο περιπτώσεις έχουμε άτοπο. Άρα, στην περίπτωση που $\ell < 2^k - 1$, , τελικά χρησιμοποιούνται μόνο τα κουτιά στις θέσεις $i \ge 2^k - 1$, οπότε πρέπει

$$\ell + 2 \ge k + 1 \Rightarrow \ell \ge k - 1 \Rightarrow n \ge 2^k + k - 1.$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι και η απάντηση στο πρόβλημα. Πράγματι, για $n = 2^k + k - 1$, εφαρμόζοντας επαναλαμβανόμενα την κίνηση στα $k+1$ κουτιά στις θέσεις $2^k - 1, 2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^k + k - 1$, μετακινώντας κυκλικά τη θέση του κουτιού που επιλέγουμε να βάλουμε κέρματα, βλέπουμε πως δεν υπάρχει κουτί που αδειάζει. Άρα η απάντηση είναι $n = 2^k + k - 1$.

Πρόβλημα 4.

Θέτουμε $\alpha_1 = 2$. Για κάθε θετικό ακέραιο n, ορίζουμε ως α_{n+1} τον μικρότερο ακέραιο ο οποίος είναι μεγαλύτερος του α_n και έχει περισσότερους θετικούς διαιρέτες από τον α_n. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : 2\alpha_{n+1} = 3\alpha_n\}$ είναι πεπερασμένο.

Λύση: Με $\tau(\alpha)$ θα συμβολίζουμε το πλήθος των διαιρετών του α. Οι αριθμοί που βρίσκονται στην ακολουθία ονομάζονται πολύ σύνθετοι αριθμοί (highly composite numbers), και είναι γνωστό ότι για κάθε θετικό ακέραιο k, υπάρχουν πεπερασμένοι όροι της ακολουθίας που δεν διαιρούνται από k. Ειδικότερα, θα χρησιμοποιήσουμε ότι υπάρχει ένας θετικός ακέραιος M, τέτοιος ώστε:

$$\text{αν } \alpha_n > M, \text{ τότε } 3^{10} \mid \alpha_n. \qquad (*)$$

Στο εξής θα δουλεύουμε με όρους τις ακολουθίας από το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : 2\alpha_{n+1} = 3\alpha_n\}$, το οποίο υποθέτουμε ότι είναι άπειρο. Τότε, η σχέση $\tau(\alpha_{n+1}) > \tau(\alpha_n)$ είναι ισοδύναμη με $\tau(3\alpha_n / 2) > \tau(\alpha_n)$, οπότε αν $\alpha_n = 2^x \cdot 3^y \cdot z$, παίρνουμε ότι $x \ge y + 2$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $8 \mid \alpha_n$. Τότε όμως, ο $9\alpha_n / 8$ είναι ένας ακέραιος ανάμεσα στους α_n, α_{n+1}, οπότε αφού ο α_{n+1} είναι ο ελάχιστος που έχει πιο πολλούς διαιρέτες, θα πρέπει $\tau(9\alpha_n / 8) \le \tau(\alpha_n)$, οπότε παίρνουμε

$$2x \le 3y + 7. \qquad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι α_n διαιρείται από 3, αλλιώς, ο εκθέτης του 2, θα ήταν φραγμένος. Επομένως ο $4\alpha_n / 3$ είναι άλλος ένας ακέραιος ανάμεσα στους α_n, α_{n+1}, οπότε $\tau(3\alpha_n / 2) \le \tau(\alpha_n)$, από όπου

$$2y - 1 \le x. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $4y \le 2x + 2 \le 3y + 9$, οπότε $y \le 9$, και από την (1) έχουμε $x \le 17$ που αντιβαίνει στην (*).

$81^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ" 6 Νοεμβρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6): Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος αριθμός $A = 81^{3^n} + 4^{2n+1}$ είναι σύνθετος για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n.

Λύση: $1^{ος}$ τρόπος: Ο αριθμός A γράφεται: $A = (3^4)^{3^n} + \left(2^2\right)^{2n+1} = (3^{3^n})^4 + \left(2^n\right)^4 2^2 = (3^{3^n})^4 + 4\left(2^n\right)^4$.

Θέτουμε $x = 3^{3^n}$ και $y = 2^n$ οπότε: $A = x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + \left(2y^2\right)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 =$

$$= \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - \left(2xy\right)^2 = \left(x^2 + 2y^2 + 2xy\right)\left(x^2 + 2y^2 - 2xy\right) = \left(\left(x+y\right)^2 + y^2\right)\left(\left(x-y\right)^2 + y^2\right).$$

Επειδή οι αριθμοί $\left(x+y\right)^2 + y^2$ και $\left(x-y\right)^2 + y^2$ είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, ο A είναι σύνθετος.

$2^{ος}$ τρόπος: Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού A είναι 5, οπότε ο αριθμός διαιρείται με το 5 και επειδή A>5, έπεται ο A είναι σύνθετος. Πράγματι, γράφοντας $A = (3^4)^{3^n} + \left(4\right)^{2n+1}$, αρκεί να δούμε το τελευταίο ψηφίο του πρώτου προσθετέου και του δεύτερου. Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 3: 3^1 λήγει σε 3, 3^2 λήγει σε 9, 3^3 λήγει σε 7, 3^4 λήγει σε 1, κ.ο.κ

Ο εκθέτης που έχουμε είναι πολλαπλάσιο του 4, άρα ο $(3^4)^{3^n}$ λήγει σε 1. Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 4: 4^1 λήγει σε 4, 4^2 λήγει σε 6, 4^3 λήγει σε 4, 4^4 λήγει σε 6, κ.ο.κ

Ο εκθέτης που έχουμε είναι περιττός, άρα ο $\left(4\right)^{2n+1}$ λήγει σε 4.

Προσθέτοντας έχουμε ότι ο A λήγει σε 5, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7): Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020. Να βρείτε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

Λύση: Ο Ανδρέας θα βρει τον αριθμό $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2019$, ενώ ο Βασίλης θα βρει τον αριθμό $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2019^2$. Η Γεωργία πρέπει να υπολογίσει τον αριθμό:

$$\Gamma = 3A + 3B + 2020 = 3\left(1 + 2 + 3 + \ldots + 2019\right) + 3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2019^2\right) + 2020$$

$$= \left(3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1\right) + \left(3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\right) + \left(3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1\right) + \ldots + \left(3\cdot 2019^2 + 3\cdot 2019 + 1\right) + 1$$

$$= \left(1+1\right)^3 - 1^3 + \left(2+1\right)^3 - 2^3 + \left(3+1\right)^3 - 3^3 + \ldots + \left(2019+1\right)^3 - 2019^3 + 1$$

$$= 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + 2020^3 - 2019^3 + 1 = -1 + 2020^3 + 1 = 2020^3.$$

Σημείωση: Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει για με $n = 2019$ τους τύπους

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7): Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 30°$ και έστω Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΓΜ $\left(C_{ΑΓΜ}\right)$ τέμνει τη πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο Ν προς την πλευρά ΑΒ και η κάθετη από σημείο Γ προς την ΔΝ τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{ΑΓΜ}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΔΝ.

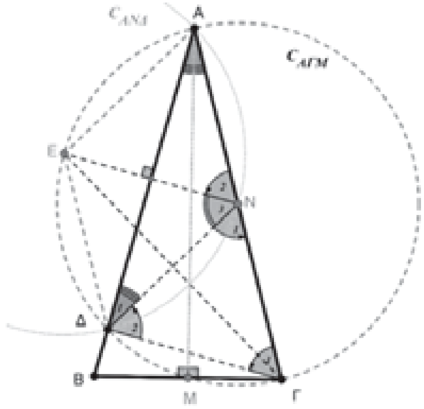
(Σημείωση: Για ένα τρίγωνο XYZ, ο περιγεγραμμένος κύκλος είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του X, Y, Z. Αν O είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε OX = OY = OZ)

Λύση: Το Μ είναι μέσο της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, άρα η γωνία $\angle ΑΜΓ$ είναι ορθή (διότι η ΑΜ είναι διάμεσος, μεσοκάθετος και διχοτόμος), οπότε κέντρο του κύκλου $C_{ΑΓΜ}$ είναι το μέσο Ν της πλευράς ΑΓ. Άρα θα ισχύουν οι ισότητες: $ΝΑ = ΝΓ = ΝΔ = \frac{ΑΓ}{2} = \rho$ (1)

Έστω ότι η κάθετη από το Ν προς την ΑΒ (που είναι μεσοκάθετος της ΑΔ) τέμνει τον κύκλο $C_{ΑΓΜ}$ το σημείο Ε και θα ισχύει ότι $ΝΑ = ΝΕ = ΝΔ = \rho$. (2)

Επειδή $\hat{N}_2 = E\hat{N}A = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - \hat{A} = 30^\circ = 60^\circ$ και $NA = NE = \rho$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΝΕ είναι ισόπλευρο, οπότε: $NA = NE = EA = \rho$ (3).

Επιπλέον, το σημείο E είναι το μέσο του τόξου ΑΔ και θα ισχύει ότι: $EA = E\Delta = \rho$ (4). Επειδή από τις προηγούμενες ισότητες $E\Delta = NE = EA = \rho$, το σημείο Ε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΔΝ. Επίσης, επειδή $NA = NE = EA = \rho$, το τρίγωνο ΔΕΝ είναι ισόπλευρο και επίσης το τρίγωνο ΔΓΝ είναι ισόπλευρο, αφού $N\Delta = N\Gamma = \rho$ και $\Delta\hat{N}\Gamma = 2\hat{A} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.



Σχήμα 1

Επομένως, η ευθεία ΓΕ είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΝΔ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6): Έστω $\Sigma(\nu)$ το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου ν. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ισότητα: $\Sigma(\nu) = 2025 - \nu$.

Λύση 1ος τρόπος: Επειδή $\Sigma(\nu) = 2025 - \nu > 0 \Rightarrow \nu < 2025$, το άθροισμα των ψηφίων του ν μπορεί να πάρει τιμές από το 1, για τους αριθμούς 1,10,100, 1000, μέχρι 28, για τον αριθμό 1999. Επομένως, έχουμε $1 \le \Sigma(\nu) = 2025 - \nu \le 28 \Leftrightarrow -2024 \le -\nu \le -1997 \Leftrightarrow 1997 \le \nu \le 2024$, οπότε πρέπει να βρούμε ποιοι από τους ακέραιους από το 1997 μέχρι και το 2024 ικανοποιούν την ισότητα $\Sigma(\nu) = 2025 - \nu$. Με έλεγχο βρίσκουμε ότι την ισότητα αυτή ικανοποιούν μόνο οι αριθμοί 1998 και 2016.

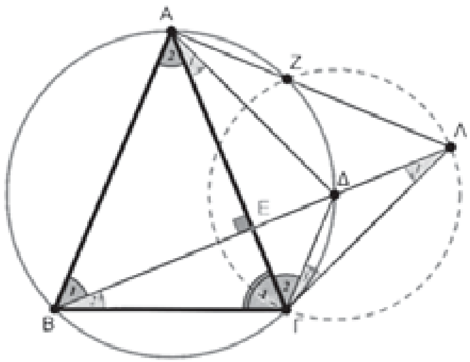
2ος τρόπος: Από το κριτήριο διαιρετότητας με το 9, ξέρουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $9 | \nu - \Sigma(\nu)$. Από τη συνθήκη του προβλήματος έχουμε $9 | 2025 = \nu + \Sigma(\nu)$. Επομένως $9 | (\nu - \Sigma(\nu)) + (\nu - \Sigma(\nu)) = 2\nu$, οπότε $9 | \nu$. Επομένως από τους αριθμούς $1997 \le \nu \le 2024$, μένει να ελέγξουμε μόνο τα πολλαπλάσια του 9, που είναι οι αριθμοί 1998, 2007 και 2016, από τους οποίους μόνο οι 1998, 2016 ικανοποιούν τη συνθήκη.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7): Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 45^\circ$. Θεωρούμε το ύψος ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω $C_{AB\Gamma}$, στο σημείο Δ. Η προέκταση του ύψους ΒΕ τέμνει επίσης στο σημείο Λ την εφαπτόμενη του κύκλου $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο του Γ. Η ΑΛ τέμνει τον κύκλο $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΓΛ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΖΓΛ.

Λύση: Εφόσον $\hat{A} = \hat{A}_2 = 45^\circ$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} = 67{,}5^\circ \quad (1).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ, έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{B}_1 = 45^\circ$ (2), και κατά συνέπεια $\hat{B}_2 = 22{,}5^\circ$ (3). Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_2$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $C_{AB\Gamma}$ και βαίνουν στο τόξο ΓΔ. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 \overset{(3)}{=} 22{,}5^\circ$ (4). Οι γωνίες $\hat{\Gamma}_2$ και $\hat{B}_1$ είναι (επίσης) εγγεγραμμένες στο κύκλο $C_{AB\Gamma}$ και βαίνουν στο τόξο ΑΔ. Άρα $\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 \overset{(2)}{=} 45^\circ$ (5).



Σχήμα 2

Η γωνία $\hat{\Gamma}_3$ σχηματίζεται (στο κύκλο $C_{AB\Gamma}$) από τη χορδή ΓΔ και την εφαπτομένη ΓΛ. Άρα $\hat{\Gamma}_3 = \hat{A}_1 = \hat{B}_2 \overset{(4)}{=} 22{,}5^\circ$ (6). Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες γωνιών, έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} \overset{(1)}{=} 67{,}5^\circ = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 \overset{(5),(6)}{=} 45^\circ + 22{,}5^\circ$. Δηλαδή (στο τρίγωνο ΒΓΛ) η ΓΕ είναι ύψος και διχοτόμος οπότε το τρίγωνο ΒΓΛ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Lambda}_1 \overset{(6)}{=} 22,5^\circ$ (7) και $\Gamma B = \Gamma\Lambda$. Από την ισότητα (7) καθώς και το γεγονός ότι η ΑΓ είναι μεσοκάθετος της ΒΛ. Άρα τα τρίγωνα ΑΓΛ και ΔΓΛ είναι ισοσκελή. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $A\Delta \perp \Gamma\Lambda$, το οποίο σε συνδυασμό με τη καθετότητα $\Lambda E \perp A\Gamma$, μας δίνει ότι το σημείο Δ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΓΛ. Προηγουμένως αποδείξαμε ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΓΛ. Άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\Gamma\hat{A}\Lambda$. Οπότε $\Delta\Gamma = \Delta Z$ και επειδή $\Delta\Gamma = \Delta\Lambda$, το σημείο Δ είναι περίκεντρο του τριγώνου ΖΓΛ.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7): Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + bx + c$, όπου οι α, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $b > 2\alpha$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \dfrac{\alpha + b + c}{b - 2\alpha}$.

Λύση: 1^{ος} τρόπος: Έχουμε ότι $\alpha + b + c = f(1)$ και $f(1) - f(-3) = (\alpha + b + c) - (9\alpha - 3b + c) = 4b - 8\alpha = 4(b - 2\alpha)$

Οπότε $A = \dfrac{\alpha + b + c}{b - 2\alpha} = \dfrac{f(1)}{\frac{f(1) - f(-3)}{4}} = \dfrac{4f(1)}{f(1) - f(-3)}$. Όμως από την εκφώνηση έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, οπότε $f(1) - f(-3) \leq f(1) \Rightarrow 4 \leq \dfrac{4f(1)}{f(1) - f(-3)} \Rightarrow A \geq 4$.

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $f(-3) = 0$, και το τριώνυμο $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ είναι ένα τέτοιο παράδειγμα για το οποίο επιπλέον ισχύει $b > 2\alpha$.

2^{ος} τρόπος: Αφού $f(x) \geq 0$, η διακρίνουσα του τριωνύμου θα είναι μη θετική και $\alpha > 0$, οπότε έπεται ότι $b^2 \leqslant 4\alpha c$, δηλαδή $c \geq \dfrac{b^2}{4\alpha}$. Επομένως, έχουμε: $A = \dfrac{\alpha + b + c}{b - 2\alpha} \geq \dfrac{\alpha + b + \frac{b^2}{4\alpha}}{b - 2\alpha} = \dfrac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{4(\lambda - 2)}$, όπου $\lambda = \dfrac{b}{\alpha} > 2$. Όμως $\dfrac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{4(\lambda - 2)} = \dfrac{(\lambda - 2)^2 + 8(\lambda - 2) + 16}{4(\lambda - 2)} = \dfrac{\lambda - 2}{4} + \dfrac{4}{\lambda - 2} + 2 \geq 2 + 2 = 4$, με ισότητα για $\lambda = 6$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6): Να βρεθούν οι περιττοί πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους ο ακέραιος 3p–8 ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου αριθμού.

Λύση: Έστω *α* θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει: $3p - 8 = \alpha^3$. Τότε θα ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$3p - 8 = \alpha^3 \Leftrightarrow 3p = \alpha^3 + 8 \Leftrightarrow 3p = \alpha^3 + 2^3 \Leftrightarrow 3p = (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) \quad (1).$$

Από την εξίσωση (1) (επειδή ο αριθμός *p* είναι πρώτος) μπορεί να ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha + 2 = 3 \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha + 4 = p \quad (\alpha) \qquad \alpha + 2 = p \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha + 4 = 3 \quad (\beta)$$

$$\alpha + 2 = 1 \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha + 4 = 3p \quad (\gamma) \qquad \alpha + 2 = 3p \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha + 4 = 1 \quad (\delta)$$

Από τη περίπτωση (α) έχουμε: $\alpha = 1$ και $p = 3$

Από τη περίπτωση (β) έχουμε: $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $p = 3$.

Από τη περίπτωση (γ) έχουμε: $\alpha = -1$ και $3p = 7$ (αδύνατο).

Από τη περίπτωση (δ) έχουμε: $\alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0$ με $\Delta = -8 < 0$ (αδύνατο).

Από όλες τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε: $p = 3$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7): Αν οι x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z), που είναι λύσεις του συστήματος: $\begin{cases} x^3 + 8y - 4 = -3 \\ 3x^2 + y^2 - 2z = 1 \\ 3x - 4y + z^2 = 68 \end{cases}$

Λύση: Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = 66 \Leftrightarrow (x+1)^3 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 80.$$

Στην τελευταία εξίσωση ο αριθμός 80 είναι το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων και ενός τέλειου κύβου θετικού ακέραιου. Οι κύβοι θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι του 80 δίνουν επιτρεπτές τιμές για το $x+1$ τις 1, 2, 3 και 4. Για $x+1=1 \Rightarrow x=0$, που απορρίπτεται γιατί πρέπει $x>0$.

Για $x+1=2 \Leftrightarrow x=1$, έπεται ότι $(y+2)^2+(z-3)^2=72$, οπότε η μοναδική περίπτωση που το 72 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι

$$(y+2)^2=(z-3)^2=36 \Leftrightarrow y+2=\pm 6 \text{ και } z-3=\pm 6 \Leftrightarrow y=4 \text{ και } z=9, \text{ αφού } y,z>0,$$

οπότε έχουμε την τριάδα $(x,y,z)=(1,4,9)$, η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι είναι λύση του συστήματος. Για $x+1=3 \Leftrightarrow x=2$, έπεται ότι $(y+2)^2+(z-3)^2=53$, οπότε οι περιπτώσεις που το 53 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι: $(y+2)^2=4, (z-3)^2=49$ ή $(y+2)^2=49, (z-3)^2=4 \Leftrightarrow (y+2=\pm 2$

$$\text{και } z-3=\pm 7) \text{ ή } (y+2=\pm 7 \text{ και } z-3=\pm 2) \Leftrightarrow \{y=0 \text{ και } z=10\} \text{ ή } \{y=5 \text{ και } z=5 \text{ ή } z=1\},$$

$$\text{αφού } y,z>0 \Leftrightarrow (y,z)\in\{(0,10),(5,5),(5,1)\}.$$

Επομένως το σύστημα έχει λύσεις (x,y,z) τα στοιχεία του συνόλου $\{(2,0,10),(2,5,5),(2,5,1)\}$, από τις οποίες καμία δεν είναι λύση του συστήματος.

Για $x+1=4 \Leftrightarrow x=3$, έπεται ότι $(y+2)^2+(z-3)^2=16$, οπότε οι περιπτώσεις που το 16 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι: $\{(y+2)^2=0 \text{ και } (z-3)^2=16\}$ ή $\{(y+2)^2=16 \text{ και } (z-3)^2=0\}$

$$\Leftrightarrow \{y+2=0 \text{ και } z-3=\pm 4\} \text{ ή } \{y+2=\pm 4 \text{ και } z-3=0\} \Leftrightarrow \{y=2 \text{ και } z=3\}, \text{ αφού } y,z>0.$$

Επομένως προκύπτει η τριάδα $(x,y,z)=(3,2,3)$, που δεν είναι λύση του συστήματος.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7): Δίνεται οξυγώνιο μη ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A}=60°$. Δίνονται επίσης τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ καθώς και τα μέσα Μ,Ν των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ακόμη Ζ το σημείο τομής των ΟΑ, ΕΜ και Η το σημείο τομής των ΜΝ, ΔΕ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Ζ, Μ ανήκουν σε κύκλο, έστω c_1.

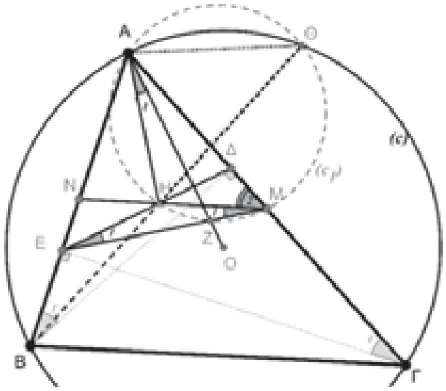
(β) Αν οι κύκλοι c και c_1 τέμνονται στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β,Η,Θ είναι συνευθειακά.

Λύση: (α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ορθογώνια με $\hat{A}=60°$, θα ισχύει: $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1=30°$ και κατά συνέπεια θα έχουμε: $A\Delta=\frac{AB}{2}=AN$ και $AE=\frac{A\Gamma}{2}=AM$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΕΜ είναι ισοσκελή. Άρα $AH \perp EM$ (1).

Από το τρίγωνο ΑΟΓ έχουμε: $A\hat{O}\Gamma=2\hat{B}$ και κατά συνέπεια $\hat{A}_2=90°-\hat{B}$ (α). Το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο, οπότε $A\hat{\Delta}E=\hat{B}$ (β). Από τις ισότητες (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι: $AO \perp E\Delta$ (2) (**).

Από τις καθετότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{E}_1$ είναι ίσες: $\hat{A}_1=\hat{E}_1$ (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες).



Σχήμα 3

Από τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΕΜ, συμπεραίνουμε ότι και το τρίγωνο ΗΕΜ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{E}_1=\hat{M}_1$ και σε συνδυασμό με την προηγούμενη ισότητα γωνιών $(\hat{A}_1=\hat{E}_1)$ καταλήγουμε $\hat{A}_1=\hat{M}_1$, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΗΖΜ είναι εγγράψιμο.

(β) Επειδή τα σημεία Μ,Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ συμπεραίνουμε ότι $MN//B\Gamma$, οπότε $\hat{M}_2=\hat{\Gamma}$. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΗΜΘ συμπεραίνουμε ότι $\hat{M}_2=A\hat{\Theta}H$.

Άρα $A\hat{\Theta}H=\hat{\Gamma}$ (3). Από το εγγεγραμένο τετράπλευρο ΑΒΓΘ έχουμε: $A\hat{\Theta}B=\hat{\Gamma}$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία B,H,Θ είναι συνευθειακά.

Οι Λύσεις των Ασκήσεων του τεύχους 117

Α62. Αν α, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+b+c=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2\alpha+1}\le\sqrt{2-\left(\alpha^2+b^2+c^2\right)}.$$

[Μ. Ο. Σερβίας, 2017]

Λύση. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι θετικά, με ύψωση των δύο μελών στο τετράγωνο βρίσκουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$2\alpha^2b+2b^2c+2c^2\alpha+2\alpha b\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+2bc\sqrt{(2c+1)(2\alpha+1)}+2c\alpha\sqrt{(2\alpha+1)(2b+1)}\le 2-2\left(\alpha^2+b^2+c^2\right).$$

Από την υπόθεση $\alpha+b+c=1$ με ύψωση στο τετράγωνο λαμβάνουμε:

$$1-\left(\alpha^2+b^2+c^2\right)=2\left(\alpha b+bc+c\alpha\right), \qquad (*)$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$L=2\alpha^2b+2b^2c+2c^2\alpha+2\alpha b\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+2bc\sqrt{(2c+1)(2\alpha+1)}+2c\alpha\sqrt{(2\alpha+1)(2b+1)}\le 4\left(\alpha b+bc+c\alpha\right)=R.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου λαμβάνουμε

$$2\alpha b\sqrt{(2b+1)(2c+1)}\le\alpha b\left(2b+2c+2\right)$$
$$2bc\sqrt{(2c+1)(2\alpha+1)}\le bc\left(2c+2\alpha+2\right)$$
$$2c\alpha\sqrt{(2\alpha+1)(2b+1)}\le c\alpha\left(2\alpha+2b+2\right)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$L\le 2\left(\alpha^2b+b^2c+c^2\alpha+\alpha b^2+bc^2+c\alpha^2+3\alpha bc\right)+2\left(\alpha b+bc+c\alpha\right)$$
$$=2\left(\alpha+b+c+1\right)\left(\alpha b+bc+c\alpha\right)=4\left(\alpha b+bc+c\alpha\right)=R.$$

2ος τρόπος. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}, x\in(0,+\infty)$, είναι κυρτή επειδή έχει παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0, x\in(0,+\infty)$. Επομένως, από την ανισότητα του Jensen με βάρη α, b και c έχουμε:

$$\alpha\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2\alpha+1}\le\sqrt{\alpha(2b+1)+b(2c+1)+c(2\alpha+1)}=\sqrt{1+2\left(\alpha b+bc+c\alpha\right)}\overset{(*)}{=}\sqrt{2-\left(\alpha^2+b^2+c^2\right)}.$$

Ν47. Να προσδιορίσετε όλους τους πρώτους αριθμούς p για τους οποίους ο αριθμός $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

[Μ. Ο. Ταϊλάνδης, 2006]

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι για $p>7$ ο αριθμός $f(p)=\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ δεν μπορεί να ισούται με τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πρώτος αριθμός $p>7$ τέτοιος ώστε $2^{p-1}-1=pm^2$, για κάποιον θετικό ακέραιο m. Τότε ο m πρέπει να είναι περιττός, οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $m=4k+1,\ \ k>1$, ακέραιος. Τότε $2^{p-1}-1=pm^2=(4k+1)m^2\equiv 1(\text{mod}\,4)$, που είναι άτοπο, αφού $2^{p-1}-1=2^{4k}-1\equiv 3(\text{mod}\,4)$.
- $m=4k+3,\ \ k>1$, ακέραιος. Τότε έχουμε:

$2^{p-1}-1=2^{4k+2}-1=\left(2^{2k+1}\right)^2-1=\left(2^{2k+1}+1\right)\left(2^{2k+1}-1\right)=pm^2$, όπου m θετικός ακέραιος.

Επειδή $\left(2^{2k+1}+1,\ 2^{2k+1}-1\right)=1$, έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

(α) $2^{2k+1}-1=u^2,\ 2^{2k+1}+1=pv^2$, όπου u,v θετικοί ακέραιοι.

(β) $2^{2k+1}-1=pu^2,\ 2^{2k+1}+1=v^2$, όπου u,v θετικοί ακέραιοι.

Στην περίπτωση (α), επειδή $k>1$ έχουμε $2^{2k+1}+1\equiv 1(\bmod 4)$, ενώ $pv^2\equiv 3\cdot 1=3(\bmod 4)$, που είναι άτοπο. Στην περίπτωση (β) έχουμε $2^{2k+1}+1=v^2\Rightarrow 2^{2k+1}=v^2-1=(v-1)(v+1)$. Τότε πρέπει: $v-1=2^s,\ v+1=2^t,\ s<t$ θετικοί ακέραιοι. Παρατηρούμε ότι:

$$2^{t-s}=\frac{v+1}{v-1}=\frac{v-1+2}{v-1}=1+\frac{2}{v-1}\Rightarrow v-1\in\{1,2\}\Rightarrow v\in\{2,3\}.$$

Για $v=2$, έχουμε $2^{2k+1}+1=v^2=4$, άτοπο, αφού ο 4 είναι άρτιος.

Για $v=3$, έχουμε $2^{2k+1}=v^2-1=8\Rightarrow 2k+1=3\Rightarrow k=1$, άτοπο, αφού $k>1$.

Τελικά απομένει ο έλεγχος των περιπτώσεων $p\in\{2,3,5,7\}$, από τις οποίες διαπιστώνουμε ότι μόνο οι τιμές $p=3$ και $p=7$ αποτελούν λύσεις, αφού $\frac{2^{3-1}-1}{3}=1^2$ και $\frac{2^{7-1}-1}{7}=3^2$.

Ν48. Έστω n ακέραιος. Αν ο αριθμός $2+2\sqrt{1+12n^2}$ είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο.

[Μ. Ο. Ηνωμένου Βασίλειου, 2006]

Λύση. Αν ο αριθμός $2+2\sqrt{1+12n^2}$ είναι ακέραιος, τότε ο αριθμός $1+12n^2$ θα είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακέραιου και έστω $1+12n^2=m^2$, όπου m περιττός ακέραιος, αφού και ο $1+12n^2$ είναι περιττός ακέραιος. Τότε $12n^2=m^2-1=(m+1)(m-1)\Rightarrow 3n^2=\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)$, οπότε, αν θέσουμε $t=\frac{m+1}{2}\in\mathbb{Z}$, θα έχουμε:

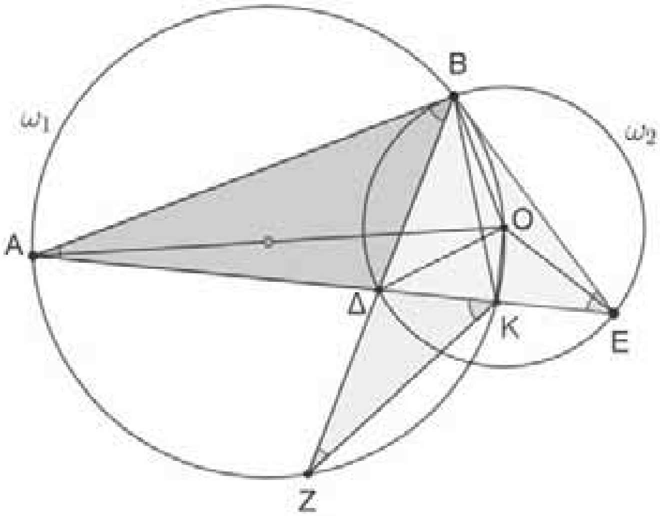
$$t(t-1)=3n^2. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός: $2+2\sqrt{1+12n^2}=2+2m=2(m+1)=4t$ είναι τέλειο τετράγωνο. Πράγματι, από τη σχέση $t(t-1)=3n^2$, αφού $(t-1,t)=1$ έπεται ότι ο 3 διαιρεί μόνο έναν από τους ακέραιους t και $t-1$.

Αν υποθέσουμε ότι ο 3 διαιρεί τον t, τότε $t(t-1)=3n^2\Rightarrow\frac{t}{3}\cdot(t-1)=n^2$, οπότε, αφού $(t-1,t)=1$, και οι δύο ακέραιοι t και $t-1$. θα είναι τέλεια τετράγωνα. Αν $\frac{t}{3}=k^2$, τότε $t-1=3k^2-1\equiv 2(\bmod 3)$, δηλαδή είναι διαφορετικό από το 0^2 ή 1^2 ή $2^2(\bmod 3)$, που είναι άτοπο. Επομένως, ο 3 διαιρεί τον $t-1$, οπότε θα έχουμε $t(t-1)=3n^2\Rightarrow t\cdot\left(\frac{t-1}{3}\right)=n^2$, από την οποία έπεται ότι ο t είναι τέλειο τετράγωνο, αφού $\left(t,\ \frac{t-1}{3}\right)=1$, οπότε και ο αριθμός $2+2\sqrt{1+12n^2}=4t$ θα είναι τέλειο τετράγωνο.

Γ51. Θεωρούμε κύκλο ω_1 και τη χορδή του ΑΒ. Γράφουμε κύκλο ω_2 ο οποίος εφάπτεται της χορδής ΑΒ στο σημείο Β και έχει το κέντρο του Ο πάνω στον κύκλο ω_1. Η ευθεία ε περνάει από το σημείο Α και τέμνει τον κύκλο ω_2 στα σημεία Δ και Ε, με το Δ μεταξύ των σημείων Α και Ε. Η ευθεία ΒΔ τέμνει τον κύκλο ω_1. στο σημείο Ζ, διαφορετικό του Β. Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΖ, αν, και μόνον αν, η ευθεία ΒΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου ω_1.

Λύση.



Από τις ισότητες εγγεγραμμένων γωνιών $\mathrm{A\hat{B}Z = A\hat{K}Z}$ και $\mathrm{B\hat{A}K = B\hat{Z}K}$ έπεται ότι τα τρίγωνα ΔΖΚ και ΔΑΒ είναι όμοια. Ομοίως είναι όμοια τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΒΑΕ, αφού $\mathrm{\Delta\hat{E}B = \Delta\hat{B}A}$ (εγγεγραμμένη – γωνία χορδής εφαπτομένης). Επομένως και τα τρίγωνα ΔΖΚ , ΒΑΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{\Delta K}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} \quad . \qquad (1)$$

Επειδή $\mathrm{AB \perp OB}$ η ΑΟ είναι διάμετρος του κύκλου ω_1, οπότε θα είναι και $\mathrm{OK \perp AK}$. Άρα είναι $\mathrm{\Delta\hat{K}O = A\hat{K}O = 90^0}$, οπότε ΟΚ μεσοκάθετη της ΔΕ και ΔΚ = ΕΚ. (2)

Έτσι έχουμε τις ισοδυναμίες: ΒΕ εφαπτομένη κύκλου $\omega_1 \Leftrightarrow \mathrm{E\hat{B}K = B\hat{A}K = B\hat{A}\Delta} \Leftrightarrow$ τα τρίγωνα ΕΒΚ και ΒΑΔ είναι όμοια $\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} = \dfrac{\mathrm{\Delta B}}{\mathrm{KE}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{\Delta K}} = \dfrac{\mathrm{\Delta B}}{\mathrm{KE}} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathrm{Z\Delta = \Delta B} \Leftrightarrow \Delta$ μέσο ΒΖ.

Ασκήσεις για λύση

N49. Να προσδιορίσετε όλους τους πρώτους αριθμούς p που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $5^p + 4p^4$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

N50. (Επαναδιατύπωση της άσκησης Ν50 του προηγούμενου τεύχους)

Να προσδιορίσετε το μέγιστο δυνατό θετικό ακέραιο κ ο οποίος για όλους τους ακέραιους α, β είναι τέτοιος ώστε, αν ο αριθμός $\alpha\beta + 1$ διαιρείται με το κ, τότε και ο αριθμός $\alpha + \beta$ διαιρείται με το κ.

Γ52. Έστω ΑΒΓΔ εγγράψιμο τετράπλευρο τέτοιο ώστε $\mathrm{B\Gamma > A\Delta}$ και $\mathrm{\Gamma\Delta > AB}$. Τα σημεία Ε, Ζ ανήκουν στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ, αντίστοιχα, και το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ. Αν $\mathrm{BE = A\Delta}$ και $\mathrm{\Delta Z = AB}$, τότε να αποδείξετε ότι $\mathrm{BM \perp \Delta M}$.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Γιώργος Γουμενίδης, μας έστειλε (ηλεκτρονικά) ένα φυλλάδιο με τίτλο: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, «Διαίσθηση και Απόδειξη», Διάλεξη στα πλαίσια της "Λέσχης Μαθηματικών" (18/04/2019), του ομότιμου καθηγητή Γιώργου Λ. Καρακώστα (*). Το δεχτήκαμε με χαρά, αφού γνωρίζουμε τις γνώσεις του Γ.Λ. Καρακώστα. Το θέμα του Γ.Λ.Κ. είναι η σχέση μαθηματικής απόδειξης και διαίσθησης.

Μαθηματικά και Διαίσθηση (Γ.Λ.Καρακώστας, ομότιμος πανεπιστημίου Ιωαννίνων)

«***Διαίσθηση*:** η ικανότητα του πνεύματος προς άμεση και χωρίς λογική γνώση, η ενόραση, η από ένστικτο αντίληψη. [Λεξικό Δημητράκου]

Πλάτων*:* η μαθηματική γνώση αποκτάται μέσω της *διαίσθησης*, που μας επιτρέπει την πρόσβαση στη σφαίρα των αφηρημένων εννοιών.

Η διαίσθηση είναι το στοιχείο που οδήγησε στη δημιουργία των Μαθηματικών.

Διαισθητική απόδειξη

υποκαθιστά την αυστηρή απόδειξη, αλλά είναι ελλιπής. πχ. Αν πάρουμε ένα όριο ολοκληρώματος χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Lebesgue, αναγνωρίζουμε ότι υπάρχει μια επιφύλαξη και ένα κενό, λέγοντας ότι το επιχείρημα είναι διαισθητικό.

Μαθηματικά και Διαίσθηση

Τα Μαθηματικά όσο είχαν τον ρόλο να τακτοποιούν με μια μεγαλύτερη ακρίβεια αυτό που περιμένουμε να ισχύει από *την εμπειρία μας και τη διαίσθησή μας*, δεν ήταν σε θέση να αποκτήσουν την αυτονομία τους, και να αναδείξουν την υπεροχή που τα χαρακτηρίζει σήμερα. Στη μετέπειτα πορεία, όμως, *απέδειξαν ότι υπερέχουν έναντι της διαίσθησης*.

Η υπεροχή των Μαθηματικών αρχίζει να φαίνεται, όχι όταν αυτό χρησιμεύουν για την επαλήθευση της διαίσθησης αλλά, κυρίως, όταν έρχονται σε σύγκρουση με αυτή.

Καρτέσιος: Η διαίσθηση είναι η έκτη αίσθηση και οι αισθητηριακές αντιλήψεις είναι συνήθως ψευδαισθήσεις. Με άλλα λόγια δεν μπορούμε πάντοτε να εμπιστευόμαστε τα μάτια μας. Θα παρουσιάσουμε δέκα παραδείγματα, όπου φαίνεται η υπεροχή των Μαθηματικών έναντι της διαίσθησης, αλλά και της πρόχειρης άποψης»

Τα δύο παραδείγματα:

1ο παράδειγμα «*Θεωρούμε δύο τρίγωνα: το τρίγωνο Χ με μήκη πλευρών* 4.99, 2, 6 *μέτρα και το τρίγωνο Ψ με μήκη πλευρών* 7, 3, 9.87 *μέτρα*. *Κάθε πλευρά του τριγώνου Χ είναι μικρότερη από την αντίστοιχη πλευρά του τριγώνου Ψ.*

Ερώτηση: *Ποιο από τα δύο τρίγωνα έχει μεγαλύτερο εμβαδό;*

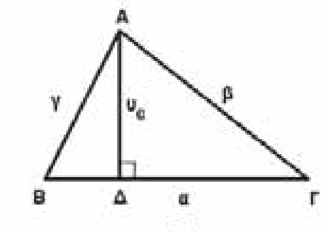
απάντηση *Εδώ η διαίσθηση οδηγεί στην απόφαση ότι το τρίγωνο Ψ, που έχει μεγαλύτερες* πλευρές μία προς μία σε σχέση με εκείνες του τριγώνου Χ, φαίνεται ότι "περιέχει" το τρίγωνο Χ, και έτσι μάλλον το Ψ έχει μεγαλύτερο εμβαδό.

Τύπος του Ήρωνα, για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου.

Ο Ήρων ο Αλεξανδρεὺς (300–230 π.Χ.), Ελληνας μαθηματικὸς και μηχανικός (Ατμοστρόβιλος)

$$υ^2=γ^2-(ΒΔ)^2, \text{ και } β^2=υ^2+(ΔΓ)^2=υ^2+(α-ΒΔ)^2=υ^2+α^2-2α.ΒΔ+(ΒΔ)^2=α^2+γ^2-2α.ΒΔ \quad \text{ή}$$

$$(ΒΔ)^2=(1/4α^2)(α^2+γ^2-β^2)^2$$ (εάν η γωνία Β είναι αμβλεία το πρόσημο (–) είναι (+)) ή



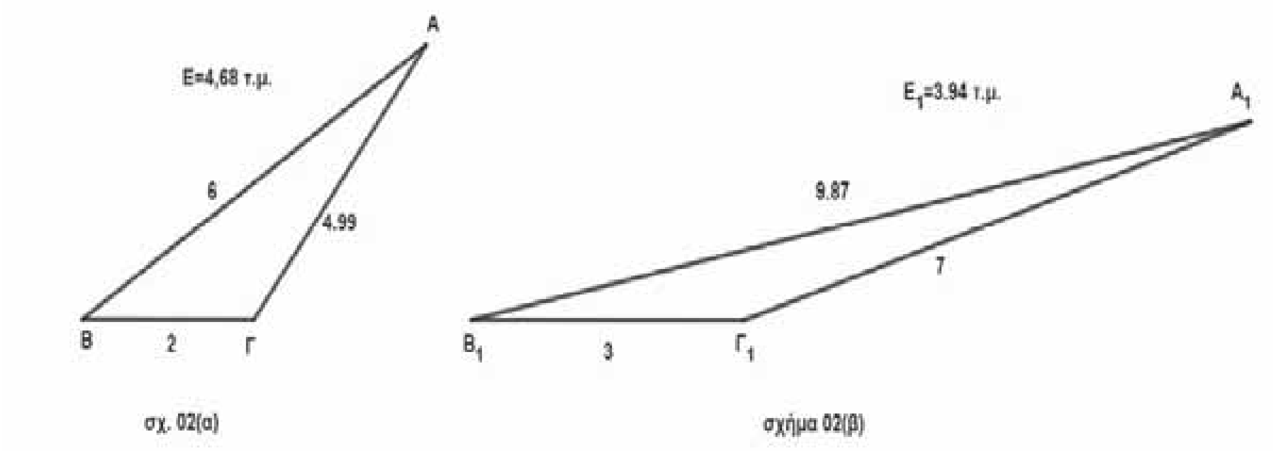
σχ. 01

$υ^2=γ^2–(1/4α^2)(α^2+γ^2–β^2)^2=(1/4α^2)(α+β+γ)(α+γ–β)(β+α–γ)(β–α+γ)=$
$=(4/α^2)τ(τ–α)(τ–β)(τ–γ)$ [όπου: $τ=(1/2)(α+β+γ)$], ή τελικά:

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}.α.υ_α = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$

όπου ο τύπος του Ήρωνα δίνει:

Εμβαδό (Χ)=4.68 τ.μ. και Εμβαδό (Ψ)=3,64 τ.μ..



συμπέρασμα: η διαίσθηση διαψεύδεται»

2ο παράδειγμα. Μεταξύ των τριγώνων με μήκη πλευρών αντίστοιχα, 5, 5, 8 καὶ 5, 5, 6, ποιο έχει μεγαλύτερο εμβαδό;

Και πάλι, χωρίς αμφιβολία, η διαίσθηση οδηγεί στην απόφαση ότι το πρώτο τρίγωνο έχει εμβαδό μεγαλύτερο από εκείνο του δεύτερου. Ωστόσο, τα δύο τρίγωνα έχουν ίσο εμβαδό!

Πράγματι, ισχύει ότι, αν $α < β < γ$ είναι μια Πυθαγόρεια τριάδα, δηλαδή αν $α^2+β^2=γ^2$, τότε τα τρίγωνα με μήκη πλευρών γ, γ, 2α και γ, γ, 2β, έχουν ίσο εμβαδό. στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε α=4 και β=3, ενώ η τριάδα 3, 4, 5 είναι πυθαγόρεια. Ο Πυθαγόρας γνώριζε ότι οι τριάδες k, $\frac{(k^2-1)}{2}$, $\frac{(k^2+1)}{2}$, είναι πυθαγόρειες για κάθε (περιττό) αριθμό k, τα δε δύο τρίγωνα με μήκη πλευρών $\frac{(k^2+1)}{2}$, $\frac{(k^2+1)}{2}$, 2k και $\frac{(k^2+1)}{2}$, $\frac{(k^2+1)}{2}$, $k^2–1$ έχουν ίσα εμβαδά.

συμπέρασμα: η διαίσθηση διαψεύδεται»

παραπομπή (*):

* *το φυλλάδιο είναι έγχρωμο, όμως σας το παρουσιάζουμε ασπρόμαυρο. Ο Γ.Λ. Καρακώστας παραθέτει (απ' τη δική του οπτική) δέκα εύστοχα παραδείγματα. Εμείς όμως θα παραθέσουμε μόλις δύο (αφού η στήλη μας, πάντα έπασχε από έλλειψη χώρου).*

ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου

Το ''επ' άπειρο σημείο'', προσδιορισμός

Δύο μεγάλοι μαθηματικοί, οι **G. Desargues** (1593 – 1662) και **J. Poncelet** (1788 – 1857), ίδρυσαν μια καινούργια Γεωμετρία, την ***Προβολική Γεωμετρία***. Σκοπός αυτής της Γεωμετρίας είναι να μελετήσει τις ιδιότητες των σχημάτων που προκύπτουν απ' τη θέση του ενός ως προς το άλλο.

Μια από τις βασικές παραδοχές τους είναι ότι: «*δύο συνεπίπεδες ευθείες έχουν πάντα κοινό σημείο*». Αυτή η παραδοχή σημαίνει πως όταν οι ευθείες «*τέμνονται*», το σημείο αυτό είναι «*πραγματικό*», ενώ όταν είναι «*παράλληλες*» το σημείο αυτό είναι «*φανταστικό*» ή «*επ' άπειρο*» ή «*κατ' εκδοχή*».

Όλες οι ευθείες που βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο και είναι παράλληλες προς την ίδια διεύθυνση, έχουν ένα και μόνο κοινό «*επ' άπειρο*» σημείο. Σε κάθε διεύθυνση του επιπέδου αντιστοιχείται έτσι από ένα «*επ' άπειρο*» σημείο. Το σύνολο των «*επ' άπειρο*» σημείων αποτελούν

μια ευθεία γνωστή ως «*επ' άπειρο ευθεία*»
Σ' αυτή, λοιπόν, τη Γεωμετρία που είναι γνωστή σαν «*γεωμετρία του επεκταμένου ευκλείδειου χώρου*», κάθε ευθεία περιέχει ένα και μόνο «*επ' άπειρο*» σημείο και κάθε επίπεδο περιέχει μία και μόνο «*επ' άπειρο ευθεία*».

III. Αυτό το ξέρατε;

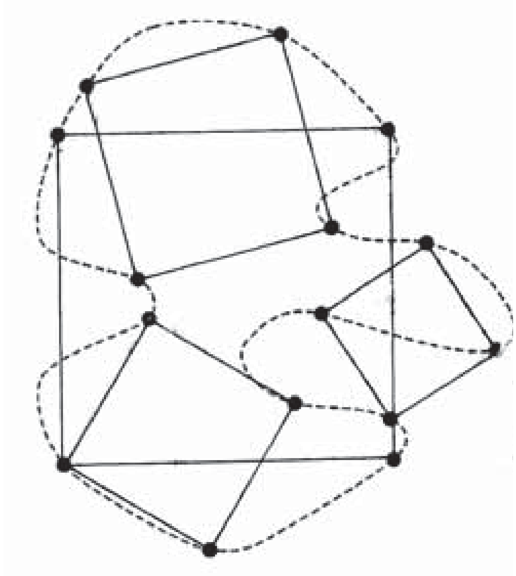
ποια τρίγωνα ονομάζονται *ψευδοόμοια;* ***(η απάντηση στο τέλος της στήλης)***

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν–ερωτούν»

1ο θέμα. της Caroline Delbert, «Δύο μαθηματικοί έλυσαν το, ακριβώς ενός αιώνα, παλιό μαθηματικό πρόβλημα»

προλεγόμενα το σημείωμα αυτό, μας το έστειλε ο φίλος της στήλης Τάσσος Καβούρης. Τον ευχαριστούμε

«Το 1911, ο Γερμανός μαθηματικός **Otto Toeplitz** έθεσε για πρώτη φορά το πρόβλημα: "κάθε κλειστή καμπύλη περιέχει τέσσερα σημεία που μπορούν να συνδεθούν για να σχηματίσουν ένα τετράγωνο". Για περισσότερο από έναν αιώνα, παράμενε άλυτο.
Αλλά τώρα, δύο μαθηματικοί ανέλυσαν ένα σύνολο σχημάτων που ονομάζονται "λείες, συνεχείς καμπύλες" (η διακεκομμένη κλειστή καμπύλη του διπλανού σχήματος) για να αποδείξουν γιατί κάθε ένα από αυτά τα σχήματα περιέχει τέσσερα σημεία που σχηματίζουν ένα **ορθογώνιο**.
Ενώ ήσαν απομονωμένοι (λόγω του COVID–19), δύο ερευνητές, οι Joshua Greene και Andrew Lobb αγωνίζονταν να λύσουν το πρόβλημα. Στα μέσα Μαρτίου, οι δύο μαθηματικοί βρέθηκαν στην ίδια κατάσταση: κλειδωμένοι και αγωνίζονται να προσαρμοστούν, ενώ η πανδημία COVID–19 μεγάλωσε έξω από τις πόρτες τους. Αποφάσισαν να τον αντιμετωπίσουν αφιερώνοντας τον εαυτό τους στην έρευνά τους.
«*Νομίζω ότι η πανδημία ήταν πραγματικά γαλβανιστική*», δήλωσε ο Greene, καθηγητής στο Boston College. «*Ο καθένας αποφασίσαμε ότι θα ήταν καλύτερο να ακολουθήσουμε κάποιες συνεργασίες για να μας στηρίξουν*».
Ένα από τα προβλήματα που εξέτασαν οι δύο φίλοι ήταν μια εκδοχή μιας αιώνιας άλυτης ερώτησης στη γεωμετρία.



Ενώ αυτό μοιάζει με το είδος της ερώτησης που μπορεί να λύσει ένας μαθητής Γεωμετρίας γυμνασίου με έναν χάρακα και πυξίδα, αντιστάθηκε στις καλύτερες προσπάθειες των μαθηματικών για δεκαετίες. Και όταν οι **Greene** και ο **Lobb** ξεκίνησαν να το αντιμετωπίσουν, δεν είχαν κανένα ιδιαίτερο λόγο να περιμένουν ότι θα τα πήγαν καλύτερα.
Από όλα τα διαφορετικά έργα που εργαζόταν, ο Greene είπε, «*Νόμιζα ότι ήταν ίσως το λιγότερο υποσχόμενο*». Και τα κατάφεραν, τελικά, περίφημα».

υπόμνημα στο σχήμα

- *"λεία, συνεχής καμπύλη" (η διακεκομμένη κλειστή καμπύλη)*
- 4 τετράγωνα εγγεγραμμένα σ' αυτή την καμπύλη

2ο θέμα. Σ.Π.Ζερβού, «τι μπορούν να μας πουν τα Μαθηματικά και οι Φυσικές επιστήμες;»

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Τάσσος Ζίγδης, με το σημείωμα τούτο μας μεταφέρει σε παλαιότερες εποχές, κατά τις οποίες γύρω από τη Μαθηματική Εταιρεία, αναπτύχθηκε ένα "κίνημα" που προσπαθούσε να "δει" τα Μαθηματικά απ' τη φιλοσοφική τους οπτική. Το σημείωμα τούτο είναι ένα ελαχιστομόριο από μια σειρά Διαλέξεων του αξέχαστου Σπύρου Ζερβού

«ερώτημα 5. **ποιος είναι ο συγκεκριμένος τρόπος, με τον οποίο περιγράφουμε, με τα Μαθηματικά, φυσικές καταστάσεις;**

απάντηση. ένα κατανοητό απ' όλους παράδειγμα είναι η μετάβαση από την «εικόνα» του χώρου, που μας δίνουν οι αισθήσεις (όραση και αφή), στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, σαν ιδεατή μαθηματική περιγραφή του. Θεμελιώδες επίτευγμα των αρχαίων Ελλήνων υπήρξε, εδώ, η αφαίρεση των διαστάσεων, δηλαδή, πως, από τα τρισδιάστατα *υλικά αντικείμενα*, φτάσανε στα *τρισδιάστατα νοερά*, ύστερα στα *δισδιάστατα* και τα *μονοδιάστατα νοερά*, και, το δυσκολότερο, στο *χωρίς διαστάσεις σημείο ν*. Λέει, σχετικά, ο **Ήρων ο Αλεξανδρεύς**, ότι, στην αρχή, ο άνθρωπος διαχώρισε το γεωμετρικό από το φυσικό στερεό και ύστερα, «*δι' αφαιρέσεως κατάντησε επί το σημείον*» . (μέσα σ' αυτές τις δυο γραμμές βρίσκεται η μια απ' τις δυο θεμελιωδέστερες προϋποθέσεις για την δημιουργία επιστήμης· η άλλη, ήταν η έννοια του αφηρημένου αριθμού, δηλαδή, πώς από το «πέντε μήλα» πήγαμε στον αριθμό «πέντε», μετάβαση, που ασφαλώς δεν έγινε δια μιας «στο σύνολο των φυσικών αριθμών»...)

ερώτημα 6. **ποια Μαθηματικά εισάγουμε στην περιγραφή της Φύσης;**

απάντηση. **α)** από κείνα, που ξέρουμε, κάθε φορά. Έτσι, στην Αναγέννηση, οι σοφοί της Ευρώπης αρχίσανε με την κληρονομημένη απ' τούς Έλληνες χρησιμοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Αστρονομία. Πολύ αργότερα, ο κορυφαίος Γάλλος μαθηματικός **Jules Henri Poincaré** (1854 – 1912) θα χρησιμοποιήσει, σε πρωτοφανή έκταση και βάθος, στην **Ουράνια Μηχανική**, την θεωρία των Αναλυτικών Μιγαδικών Συναρτήσεων, στην οποία είχε θαυματουργήσει, **β)** ακόμα, εκείνα, στη διαμόρφωση των οποίων, μας έδωσαν τις αφορμές, οι ίδιες οι διαπιστώσεις και οι ανάγκες από τις φυσικές καταστάσεις. **Περιληπτικά:** έτσι, ζευγαρωμένα, ο Νεύτων ανέπτυξε τη Μηχανική και τον Απειροστικό Λογισμό. Γι' αυτό και, παρ' ότι είχε την ουσιαστική ακριβολογία του μεγάλου, ο Απειροστικός του ήτανε κυριαρχημένος από την "κινητική θεώρηση" σε βαθμό, που (με τη δομή, που εμπνέουν, και την συγκομιδή ορθών ή όχι αποτελεσμάτων, που χαρίζουν, οι διαισθητικοί τρόποι) ανέστειλε για δύο αιώνες την ανάσταση της απόλυτα αυστηρής «στατικής» θεώρησης εννοιών του Απειροστικού από κορυφαίους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς (**Εύδοξος, Αρχιμήδης**).

ερώτημα 7. **ποια Μαθηματικά έχουν, στην πράξη, φανεί τα πιο χρήσιμα στις φυσικές επιστήμες;**

απάντηση. ιδιαιτέρως από το τέλος του 19ου αιώνα και πέρα, Μαθηματικά, που είχαν γίνει χωρίς την παραμικρή υποψία ότι θα βρίσκανε κάποτε εφαρμογές! Η ερμηνεία του «παράδοξου» αυτού βρίσκεται, ίσως, στο ότι, κατά κανόνα, αξίζουνε περισσότερο τα πράγματα, που γίνονται από εσωτερική παρόρμηση του ερευνητή, από 'κείνα, που γίνονται «κατά παραγγελία» (στο πλαίσιο κάποιου «ερευνητικού προγράμματος», στη σημερινή γλώσσα)" ακριβώς, όπως τα εργόχειρα του παλιού καιρού, που βρίσκονται στα μουσεία, αξίζουνε πολύ περισσότερο από τα σχέδια, που ετοιμάζει κάποιος σημερινός τεχνικός βιοτεχνίας για την τουριστική αγορά· και όπως η δουλειά του παλιού μερακλή μαραγκού, από τα σημερινά «προκάτ»....)»

[από σειρά Διαλέξεων του Σ. Π. Ζερβού (Doctorat d' Etat Μαθηματικών Πανεπιστημίου Παρισίων, καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών)]

3ο θέμα. Τα Μαθηματικά του Σχεδιασμού

προλεγόμενα [είναι ένα σημείωμα που υπογράφεται, έτσι: Written by Inkbot Design. Inkbot Design a Creative Graphic Design Agency in Belfast, Northern Ireland. Experts in Logo Design and Branding. https://inkbotdesign.com/Follow. Μας το υπόδειξε ο φίλος της στήλης Κ. Μεγαοικονόμου].

«Είναι κοινό για τους ανθρώπους να ομαδοποιούνται σε δύο κατηγορίες. αυτοί που είναι καλοί στην τέχνη ή το σχεδιασμό, και εκείνοι που είναι καλοί στα Μαθηματικά ή την επιστήμη

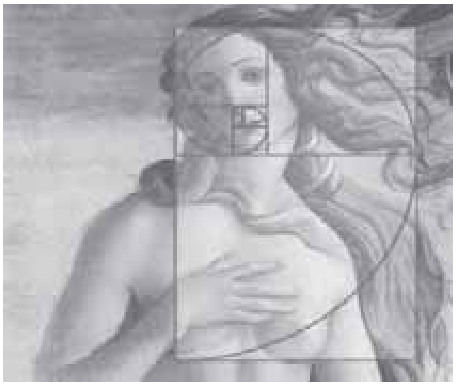
Ο λόγος για αυτό είναι ότι πολλοί άνθρωποι πιστεύουν ότι οι δεξιότητες που χρειάζονται για να είναι επιτυχημένες στις δημιουργικές υπηρεσίες δεν σχετίζονται με τις δεξιότητες που απαιτούνται για να είναι επιτυχημένες στην αναλυτική.

Παρόλο που τα Μαθηματικά βρίσκονται στη λίστα

των πιο απαιτητικών τάξεων στο κολέγιο, στην πραγματικότητα, τίποτα δεν θα μπορούσε να απέχει περισσότερο από την αλήθεια. Πολλές σχεδιαστικές έννοιες, όπως η συμμετρία, έχουν άμεση σχέση με μαθηματικές έννοιες και ανακαλύψεις. Έτσι, αν είστε καλλιτέχνης ή σχεδιαστής, υπάρχει μια καλή πιθανότητα να ενσωματώσετε ήδη τα Μαθηματικά στο έργο σας, απλά δεν μπορείτε να το κάνετε συνειδητά.
Ακολουθούν ορισμένοι πολύ συγκεκριμένοι τρόποι με τους οποίους τα Μαθηματικά όχι μόνο επηρέασαν τη σχεδίαση αλλά λειτούργησαν ως ένα πραγματικό παιχνίδι αλλαγής.

Η ακολουθία Fibonacci

Εξετάστε αυτούς τους αριθμούς ακολουθίας. 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 και 55. Αυτή η ειδική ακολουθία αριθμού είναι αυτή που είναι γνωστή ως η ακολουθία Fibonacci.
Εάν ρίξετε μια πιο προσεκτική ματιά, θα παρατηρήσετε ότι κάθε αριθμός, μετά τους δύο πρώτους αριθμούς (δηλ. 0 και 1), είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενών τους αριθμών. Εάν επρόκειτο να συνεχίσετε αυτό το μοτίβο, θα προσθέσατε 55 και 34 για να κάνετε 89.



Με την πρώτη ματιά, μπορεί να είναι δύσκολο να δούμε πώς οποιοδήποτε από αυτά σχετίζεται με την τέχνη, αλλά στην πραγματικότητα, αυτή η ακολουθία παίζει σημαντικό ρόλο στην τέχνη και το σχεδιασμό.
Φανταστείτε αν κάθε αριθμός έχει σχήμα. Ας υποθέσουμε ότι ο δεύτερος αριθμός 1 αντιπροσωπεύει ένα τετράγωνο που είναι τετράγωνο 1 ιντσών. Τότε, ας πούμε ότι το 55 είναι ένα τετράγωνο 55 ιντσών.
Ο συνδυασμός αυτών των τετραγώνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχηματίσει αυτό που είναι γνωστό ως το χρυσό ορθογώνιο.
Μπορείτε να βρείτε αυτό το ορθογώνιο σε ζωγραφικούς πίνακες όπως η **Mona Lisa** και η κλασική και μοντέρνα αρχιτεκτονική.
Πολλοί σχεδιαστές ιστοσελίδων ενσωματώνουν το χρυσό ορθογώνιο στα σχέδιά τους χρησιμοποιώντας την **αριθμομηχανή PHI**. (**)
Φυσικά, αυτό δεν περιορίζεται μόνο στην εργασία σχεδιασμού ιστοσελίδων. Μπορείτε να το εφαρμόσετε σε οποιοδήποτε σχέδιο σχεδίασης. Τώρα, φανταστείτε τα σχήματα που αντιπροσωπεύουν κύκλους. Όταν είναι διατεταγμένα με ορισμένους τρόπους, αυτά μπορούν να αποτελέσουν τη βάση των αστεριών, των μοτίβων ανθοφορίας, της διακλάδωσης και άλλων.
Μια τέλεια **διαμορφωμένη σπείρα** βασίζεται στην **ακολουθία Fibonacci**. Όχι μόνο αυτά τα πράγματα συμβαίνουν στην τέχνη, αλλά συμβαίνουν και στη φύση. Στην πραγματικότητα, ο χρυσός λόγος, που είναι η μείωση των αριθμών στην ακολουθία Fibonacci που πλησιάζει όσο το δυνατόν μηδέν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία της τέλειας σπείρας.
Άλλα έργα που περιέχουν τη χρυσή αναλογία περιλαμβάνουν τις Μεγάλες Πυραμίδες και τον Παρθενώνα. Ορισμένοι πιστεύουν ακόμη και ότι **το λογότυπο** του υπολογιστή **Apple** χρησιμοποιεί την **ακολουθία Fibonacci**, αλλά οι ειδικοί αμφισβητούν αυτόν τον ισχυρισμό.

παραπομπή (**):
***αυτή η αριθμομηχανή θα σας βοηθήσει να προσδιορίσετε, για παράδειγμα, ότι αν θέλατε να βάλετε το λογότυπο εδώ (χρησιμοποιήστε τη φαντασία σας) πώς πρέπει να τοποθετηθούν και να ταξινομηθούν τα άλλα στοιχεία της σελίδας σας.*

V. ειδήσεις – ειδησούλες

1. *άλλη μια σημαντική απώλεια για την μαθηματική οικογένεια*

Στις 13/10/2020 διαβάσαμε την παρακάτω ανακοίνωση του ΔΣ της ΕΜΕ για τον **Πολύδωρο Γεωργιακάκη**): «Το ΔΣ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, μόλις προχθές, ενημερώθηκε υπεύθυνα για το θάνατο (13–09–2020) του συναδέλφου **Πολύδωρου Γεωργιακάκη**. Ο Πολύδωρος στήριξε το έργο της ΕΜΕ τη δύσκολη δεκαετία του '70, αλλά και μετέπειτα, συνιστώντας στους χιλιάδες μαθητές του, τα περιοδικά του επιστημονικού μας Σωματείου. Ο Πολύδωρος, ήταν κατ' εξοχή φροντιστηριακός δάσκαλος, ήταν από τους ιδρυτές του "ΑΤΤΙΚΟΥ" φροντιστηρίου (Ομόνοια) και από τη θέση αυτή δίδαξε Άλγεβρα και ήθος, σε αρκετές χιλιάδες νέους ανθρώπους, πολλοί από τους οποίους, διέπρεψαν επιστημονικά στην Ελλάδα και στο εξωτερικό. Το ΔΣ εκφράζει την οδύνη του για την απώλεια αυτή και τα θερμά συλλυπητήρια στην οικογένειά του». Η στήλη μας δηλώνει: *Πολύδωρε σ' ευχαριστούμε για το ήθος που μας δίδαξες*

2. *τα βραβεία Nobel 2020*

- **Το Nobel Φυσικής 2020,** για την ανακάλυψη ότι οι μαύρες τρύπες αποτελούν ισχυρή πρόβλεψη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, απονεμήθηκε στους **R. Penrose,** (University of Oxford, UK) **R. Genzel** (Max Planck Institute) **A. Ghez** (ΗΠΑ),
- **Το Nobel Χημείας 2020,** για την ανακάλυψη της γονιδιωματικής επιδιόρθωσης (Grispr/cas9) απονεμήθηκε στους **E. Charpentier**, (Βερολίνο) και στην **J. A. Doudna** (ΗΠΑ).
- **Το Nobel Οικονομικών Επιστημών 2020,** για τις βελτιώσεις στη θεωρία δημοπρασιών απονεμήθηκε στους ακαδημαϊκούς **P. Milgrom**, και **R. Wilson** του Stanford (ΗΠΑ).
- **Το Nobel Ιατρικής 2020,** για την ανακάλυψη του ιού ηπατίτιδος C απονεμήθηκε στους **H. Alter**, C. Rais (ΗΠΑ) και **M. Hawton** (Αγγλία).
- **Το Nobel Λογοτεχνίας 2020,** για την ποίηση, μέσω της οποίας η αυστηρή ομορφιά, καθίσταται οικουμενική εμπειρία, απονεμήθηκε στην **L. Glik** (ΗΠΑ).
- **Το Nobel Ειρήνης 2020,** απονεμήθηκε στο **Παγκόσμιο Επισιτιστικό** Πρόγραμμα του **ΟΗΕ,** που ιδρύθηκε το 1961 και εδρεύει στη Ρώμη όπου και συνέδραμε 97 εκατομμύρια ανθρώπους σε 88 χώρες του κόσμου.

3. *Γυναίκες που κατέκτησαν το βραβείο Nobel*

Μέχρι σήμερα βραβεύτηκαν με το Nobel, συνολικά 6 γυναίκες, οι: ***Marie Curie*** (1903), ***Maria Goeppert–Mayer*** (1963), ***Donna Theo Strickland*** (2018), ***Andrea Ghez*** (2020), ***Emmanuelle Charpentier***, (2020), ***Jennifer A. Doudna*** (2020)

4. *Εκδόσεις*

Πληροφορηθήκαμε ότι κυκλοφόρησε από τις «Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης», το βιβλίο του Timothy Gowers με τίτλο "Μαθηματικά: μια σύντομη εισαγωγή", σε μετάφραση Αλέξανδρου Χορταρά

5. *Διεθνής Ημέρα Γυναικών στα Μαθηματικά*

Από την Κορίνα Διγαλάκη, μάθαμε (εμείς), ότι «Με αφορμή τα γενέθλια της Maryam Mirzakhani, της πρώτης γυναίκας μαθηματικού που διακρίθηκε με το μετάλλιο Fields, η **12ή Μαΐου** έχει διακηρυχτεί ως Διεθνής Ημέρα Γυναικών στα Μαθηματικά».

6. *Βραβείο σε μαθηματικό*

Ο **Martin Hairer** είναι ένας Βρετανο–Αυστριακός ερευνητής, στον οποίο απονεμήθηκε το **Breakthrough prize 2021**, για την εργασία του **στην Στοχαστική Ανάλυση**. Το βραβείο συνοδεύεται με 3 εκατομμύρια δολάρια. Ο **Hairer** μόλις 44 ετών, έχει κερδίσει ανάμεσα σε άλλα βραβεία και το Fields το 2014.(εφημερίδα "The Guardian", 2020–09–10)

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;

Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν: γωνΑ=γωνΑ΄ και γωνΒ+γωνΒ΄=2∟ τότε θα ισχύει η σχέση (ΒΓ)/(Β'Γ')=(ΑΓ)/(Α'Γ'). Δύο τέτοια τρίγωνα ονομάζονται ***ψευδοόμοια***

Τάξη: Α΄

Αναλογίες, Ανισότητες Εξισώσεις και Προβλήματα

Δημήτρης Ντρίζος
3ο Γενικό Λύκειο Τρικάλων

Γιώργος Ρίζος
7ο Γυμνάσιο Κέρκυρας

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Θέμα 1

Αν για τους διαφορετικούς από το μηδέν αριθμούς $\alpha,\beta,\kappa,\lambda$ ισχύει $\alpha\lambda=\beta\kappa$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$

1η Απόδειξη

Από την υπόθεση $\alpha\lambda=\beta\kappa$ και σύμφωνα με ιδιότητες των αναλογιών έχουμε:

$$\alpha\lambda=\beta\kappa\Rightarrow\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha}{\beta}\Rightarrow\frac{\kappa^2}{\lambda^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\qquad(1)$$

Λόγω της (1) το πρώτο μέλος της αποδεικτέας ισότητας διαδοχικά γίνεται:

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$$

2η Απόδειξη

Α΄ μέλος

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\kappa^2\alpha^2+\kappa^2\beta^2+\kappa^2\beta^2+\lambda^2\beta^2}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\underset{\kappa\beta=\alpha\lambda}{=}\frac{(\kappa^2\alpha^2+\alpha^2\lambda^2)+(\kappa^2\beta^2+\lambda^2\beta^2)}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{\alpha^2(\kappa^2+\lambda^2)+\beta^2(\kappa^2+\lambda^2)}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\kappa^2+\lambda^2)}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}=1,\quad \textbf{Β΄ μέλος}$$

3η Απόδειξη

Είναι $\alpha\lambda=\beta\kappa\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{\beta\kappa}{\alpha}$ (αφού είναι $\beta\neq 0$), οπότε:

Α΄ μέλος

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\left(\frac{\beta\kappa}{\alpha}\right)^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\kappa^2}{\frac{\alpha^2\kappa^2+\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$=\frac{\cancel{\kappa^2}\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)\cancel{\kappa^2}}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1,\ \textbf{Β΄ μέλος.}$$

4η Απόδειξη

Διαιρώντας δια κ^2 τους όρους του κλάσματος $\dfrac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}$ βρίσκουμε $\dfrac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2}\qquad(1)$

Επίσης, διαιρώντας δια α^2 τους όρους του κλάσματος $\dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ βρίσκουμε:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\qquad(2)$$

Παίρνοντας υπόψη τις (1) και (2) και ονομάζοντας $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\lambda}{\kappa}=\omega$ έχουμε:

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2}+\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^2}=\frac{1+\omega^2}{1+\omega^2}=1$$

Θέμα 2

Αν για τους αριθμούς β και γ ισχύει $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ και $\beta\gamma(\beta+\gamma)\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$.

1η Απόδειξη

Ονομάζουμε ω καθένα από τα δύο ίσα κλάσματα, $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\omega$, και παίρνουμε $\alpha=\beta\omega$ και $\beta=\gamma\omega$, οπότε, μεταβατικά, $\alpha=\gamma\omega^2$.

Το πρώτο μέλος της αποδεικτέας ισότητας διαδοχικά γίνεται:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\frac{(\gamma\omega^2+\gamma\omega)^2}{(\gamma+\gamma\omega)^2}=\frac{[\omega(\gamma\omega+\gamma)]^2}{(\gamma+\gamma\omega)^2}=\frac{\omega^2(\gamma+\gamma\omega)^2}{(\gamma+\gamma\omega)^2}=\omega^2$$

Επομένως $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\omega^2\quad(1).$

Όμως $\alpha=\gamma\omega^2$, δηλαδή $\omega^2=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ (2)

Οπότε η (1) λόγω της (2) γίνεται $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$

2η Απόδειξη

Είναι $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta^2$, οπότε

Α΄ μέλος

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\gamma^2+2\gamma\beta+\beta^2}\overset{\beta^2=\alpha\gamma}{=}\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\alpha\gamma}{\gamma^2+2\gamma\beta+\alpha\gamma}$$

$$=\frac{\cancel{(\alpha+2\beta+\gamma)}\alpha}{\cancel{(\gamma+2\beta+\alpha)}\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma},$$ **Β΄ μέλος**

3η Απόδειξη

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\frac{\alpha}{\gamma}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\gamma^2+2\gamma\beta+\beta^2}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha^2\gamma+\cancel{2\alpha\beta\gamma}+\beta^2\gamma=\alpha\gamma^2+\cancel{2\alpha\beta\gamma}+\alpha\beta^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha^2\gamma-\alpha\gamma^2=\alpha\beta^2-\beta^2\gamma\Leftrightarrow\alpha\gamma(\alpha-\gamma)=\beta^2(\alpha-\gamma),$$

που ισχύει, αφού $\beta^2=\alpha\gamma$.

Θέμα 3

Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\kappa,\lambda,\mu$, με τους α,β,γ διαφορετικούς ανά δύο, ισχύει $\dfrac{\kappa}{\alpha-\beta}=\dfrac{\lambda}{\beta-\gamma}=\dfrac{\mu}{\alpha-\gamma}$, να αποδείξετε ότι $\mu=\kappa+\lambda$

1η Απόδειξη

Από την υπόθεση $\dfrac{\kappa}{\alpha-\beta}=\dfrac{\lambda}{\beta-\gamma}=\dfrac{\mu}{\alpha-\gamma}$

σύμφωνα με ιδιότητες των αναλογιών έχουμε:

$$\frac{\kappa}{\alpha-\beta}=\frac{\lambda}{\beta-\gamma}=\frac{\mu}{\alpha-\gamma}=\frac{\kappa+\lambda+\mu}{2\alpha-2\gamma}$$

$$\Rightarrow\frac{\mu}{\alpha-\gamma}=\frac{\kappa+\lambda+\mu}{2(\alpha-\gamma)}\Rightarrow 2\mu=\kappa+\lambda+\mu\Rightarrow\mu=\kappa+\lambda$$

2η Απόδειξη

Ονομάζουμε ω καθένα από τα ίσα κλάσματα.

Οπότε $\dfrac{\kappa}{\alpha-\beta}=\dfrac{\lambda}{\beta-\gamma}=\dfrac{\mu}{\alpha-\gamma}=\omega\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=(\alpha-\beta)\omega\\ \lambda=(\beta-\gamma)\omega\\ \mu=(\alpha-\gamma)\omega\end{cases}$

Άρα $\kappa+\lambda=\alpha\omega-\beta\omega+\beta\omega-\gamma\omega=(\alpha-\gamma)\omega=\mu$ (ο.ε.δ.)

Θέμα 4

Αν για τους αριθμούς α,β,γ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=1$$

και $(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)\neq0$

να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$,

1η Απόδειξη

Πολλαπλασιάζουμε επί $\alpha+\beta+\gamma$ τα μέλη της $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}=1$ και διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}+\frac{\beta(\alpha+\beta+\gamma)}{\gamma+\alpha}+$$
$$+\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^2+\alpha(\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2+\beta(\alpha+\gamma)}{\gamma+\alpha}+$$
$$+\frac{\gamma^2+\gamma(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\alpha\right)+\left(\frac{\beta^2}{\alpha+\gamma}+\beta\right)+$$
$$+\left(\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}+\gamma\right)=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$$

2η Απόδειξη

$$\text{Είναι}\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=1-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\\[2mm] \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=1-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\\[2mm] \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}=1-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\alpha-\dfrac{\alpha\beta}{\gamma+\alpha}-\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}\\[2mm] \dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\beta-\dfrac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}-\dfrac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}\\[2mm] \dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\gamma-\dfrac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}-\dfrac{\beta\gamma}{\gamma+\alpha}\end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\gamma-$$
$$-\frac{\cancel{(\alpha+\gamma)}\beta}{\cancel{\gamma+\alpha}}-\frac{\cancel{(\alpha+\beta)}\gamma}{\cancel{\alpha+\beta}}-\frac{\alpha\cancel{(\beta+\gamma)}}{\cancel{\beta+\gamma}}=0$$

Θέμα 5

Αν α+β+γ+αβγ=0, με $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+3=-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$$

1η Απόδειξη

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+3=$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\beta}{\beta}+\frac{\gamma}{\gamma}\right)=$$
$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\beta}\underset{\alpha+\beta+\gamma=-\alpha\beta\gamma}{=}$$
$$=\frac{-\alpha\beta\gamma}{\gamma}+\frac{-\alpha\beta\gamma}{\alpha}+\frac{-\alpha\beta\gamma}{\beta}=-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$$

2η Απόδειξη

$$\text{Είναι }\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0 \underset{:\gamma}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}+1=-\alpha\beta\\ \alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0 \underset{:\alpha}{\Rightarrow} \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+1=-\beta\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0 \underset{:\beta}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}+1=-\alpha\gamma\end{cases}$$

Οπότε, προσθέτοντας προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα 6

Για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+2\left(\alpha+\beta^2+1\right)\geq 2\beta\left(\alpha+2\right)$

Για ποιες τιμές των α και β ισχύει μόνον η ισότητα;

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha^2+2\alpha+2\beta^2+2-2\alpha\beta-4\beta\geq 0$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0$$

Είναι $\alpha^2+2\alpha+2\beta^2+2-2\alpha\beta-4\beta=$

$=\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\right)+\left(\beta^2-2\beta+1\right)+2\alpha-2\beta+1$

$=\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-1\right)^2+2\left(\alpha-\beta\right)+1$

$=\left(\alpha-\beta+1\right)^2+\left(\beta-1\right)^2\geq 0$, ως άθροισμα μη αρνητικών. Η ισότητα ισχύει μόνο για $\left(\alpha,\beta\right)=\left(0,1\right)$

Θέμα 7

Για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β και γ, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\geq\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\gamma\alpha+\gamma^2\alpha\beta$$

Υπόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\alpha^2\beta\gamma-\beta^2\gamma\alpha-\gamma^2\alpha\beta\geq 0 \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε επί 2 τα μέλη της ανισότητας (1) και τακτοποιώντας τους όρους, ανά ζεύγη σε τρεις κατάλληλες ομάδες, καταλήγουμε ισοδύναμα στην $\alpha^2\left(\beta-\gamma\right)^2+\beta^2\left(\gamma-\alpha\right)^2+\gamma^2\left(\alpha-\beta\right)^2\geq 0$, που ισχύει (γινόμενα και άθροισμα μη αρνητικών αριθμών).

Θέμα 8

Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει: $x^2+y^2+10\left(x-y\right)=-50$

Απάντηση

$x^2+y^2+10\left(x-y\right)=-50$

$\Leftrightarrow\left(x^2+10x+25\right)+\left(y^2-10y+25\right)=0,$

άθροισμα μη αρνητικών

$\Leftrightarrow\left(x+5\right)^2=0$ και $\left(y-5\right)^2=0$

$\Leftrightarrow x=-5$ και $y=5$

Θέμα 9

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\dfrac{x^2+36}{8}=\dfrac{3x}{2}$ **ii.** $\dfrac{x\left(x^2+12\right)}{2}=3x^2+4$

iii. $\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2-8x+16\right)=0$

iv. $\left(x+5\right)^2+\left(x-8\right)^2=0$

v. $\left(x-1\right)^2+\left(x+1\right)^2=74$

vi. $\left(x+5\right)^2+x^2=25$ **vii.** $\left(x-3\right)^2+x^3=27$

viii. $\left(x-4\right)^3+32=2x\left(8-x\right)$

ix. $\dfrac{x\left(x^2-144\right)}{x^2+24x+144}=0$ **x.** $\left(x-1\right)^3=x^2-1$

Λύση

i. $\dfrac{x^2+36}{8}=\dfrac{3x}{2}\Leftrightarrow 2x^2+72=24x$

$\Leftrightarrow 2x^2-24x+72=0\Leftrightarrow 2\left(x^2-12x+36\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-6\right)^2=0\Leftrightarrow x=6$, διπλή ρίζα.

ii. $\dfrac{x(x^2+12)}{2}=3x^2+4 \Leftrightarrow x^3+12x=6x^2+8$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=0$

$\Leftrightarrow x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^3=0 \Leftrightarrow x=2$, τριπλή ρίζα.

iii. $(x^2+6x+9)(x^2-8x+16)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2(x-4)^2=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ (διπλή ρίζα) ή $x=4$ (διπλή ρίζα).

iv. $(x+5)^2+(x-8)^2=0 \quad (1)$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία τιμή του x η οποία να μηδενίζει συγχρόνως τους μη αρνητικούς προσθετέους $(x+5)^2$ και $(x-8)^2$ του πρώτου μέλους της εξίσωσης (1).

Επομένως η (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

v. $(x-1)^2+(x+1)^2=74$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2+2x+1-74=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-72=0 \Leftrightarrow 2(x^2-36)=0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x+6)=0 \Leftrightarrow x=6$ ή $x=-6$

vi. $(x+5)^2+x^2=25 \Leftrightarrow x^2+10x+25+x^2-25=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x=0 \Leftrightarrow 2x(x+5)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-5$

vii. $(x-3)^2+x^3=27 \Leftrightarrow (x-3)^2+(x^3-3^3)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(x-3)(x^2+3x+9)=0.$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x-3)+(x^2+3x+9)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x+6)=0$

$x=3$ ή $x^2+4x+6=0$.

Η εξίσωση $x^2+4x+6=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ καθώς δεν υπάρχει καμία τιμή του x που να την επαληθεύει, αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$x^2+4x+6=x^2+2\cdot 2x+2^2+4=(x+2)^2+4>0$

viii. $(x-4)^3+32=2x(8-x)$

$\Leftrightarrow (x-4)^3-2x(8-x)+32=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^3+2x(x-8)+32=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^3+2(x^2-8x+16)=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^3+2(x-4)^2=0 \Leftrightarrow (x-4)^2\left[(x-4)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow x=4$ (διπλή ρίζα) ή $x=2$

ix. $\dfrac{x(x^2-144)}{x^2+24x+144}=0 \quad (1)$

Η εξίσωση (1) γράφεται $\dfrac{x(x-12)(x+12)}{(x+12)^2}=0$

και ορίζεται για κάθε $x\neq -12$.

Με αυτό τον περιορισμό για την (1) έχουμε:

$\dfrac{x(x^2-144)}{x^2+24x+144}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-12)}{x+12}=0$

$\Leftrightarrow x(x-12)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=12$

x. $(x-1)^3=x^2-1 \Leftrightarrow (x-1)^3-(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^3-(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^2-(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+1-x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot x\cdot (x-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=0$ ή $x=3$

Θέμα 10

Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει: $x^2+y^2=2(x+2y-2)-1$

Απάντηση

$x^2+y^2=2(x+2y-2)-1$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$, (άθροισμα μη αρνητικών αριθμών)

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$ και $(y-2)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y=2$

Θέμα 11

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\left(x^2-5x+10\right)^2-100=5x(5x-22)+21$

ii. $\left(x^2-8x+17\right)^2-33=2x(x-8)$

iii. $\left(x^2-2x+1\right)^2-3\left(x^2-2x+1\right)=2(1-x)$

Απάντηση

i. $(x^2-5x+10)^2-100=5x(5x-22)+21$

$\Leftrightarrow (x^2-5x+10)^2-100=25x^2-110x+21=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+10\right)^2-25x^2+110x-121=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+10\right)^2-\left[(5x)^2-2\cdot 5x\cdot 11+11^2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+10\right)^2-(5x-11)^2=0$, (διαφορά τετραγώνων)

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+10+5x-11\right)\left(x^2-5x+10-5x+11\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(x^2-10x+21\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-3)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ ή $x=3$ ή $x=7$

ii. $\left(x^2-8x+17\right)^2-33=2x(x-8)$

$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+17\right)^2-33-2x^2+16x=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+17\right)^2-2x^2+16x-34+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+17\right)^2-2\left(x^2-8x+17\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(x^2-8x+17\right)-1\right]^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-8x+16\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left[(x-4)^2\right]^2=0 \Leftrightarrow (x-4)^4=0$

$\Leftrightarrow x=4$, τετραπλή ρίζα

iii. $\left(x^2-2x+1\right)^2-3\left(x^2-2x+1\right)=2(1-x)$

$\Leftrightarrow \left[(x-1)^2\right]^2-3(x-1)^2-2(1-x)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^4-3(x-1)^2+2(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^3-3(x-1)+2\right]=0 \quad (1)$

Ονομάζουμε $x-1=\omega$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega\left(\omega^3-3\omega+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \omega\left(\omega^3-\omega-2\omega+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \omega\left[\omega\left(\omega^2-1\right)-2(\omega-1)\right]=0$

$\Leftrightarrow \omega\left[\omega(\omega-1)(\omega+1)-2(\omega-1)\right]=0$

$\Leftrightarrow \omega(\omega-1)\left(\omega^2+\omega-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \omega(\omega-1)(\omega-1)(\omega+2)=0$

$\Leftrightarrow \omega=0$ ή $\omega=1$ ή $\omega=1$ ή $\omega=-2$

Όμως $x-1=\omega$, οπότε παίρνουμε:

$x-1=0$ ή $x-1=1$ ή $x-1=1$ ή $x-1=-2$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ (διπλή ρίζα) ή $x=-1$

Θέμα 12

Να λύσετε στους θετικούς αριθμούς την εξίσωση: $x^3-3x^2-3x-1=0$

Απάντηση

Για $x>0$ έχουμε:

$x^3-3x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x^3=3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow x^3+x^3=x^3+3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow 2x^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3}=\sqrt[3]{(x+1)^3}$

$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{2}=x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2}-1\right)x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

Θέμα 13

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει $x^2-4x+y^2+10y+20=0$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $|x-2|\le 3$ και $|y+5|\le 3$

ii. να αποδείξετε ότι $y<x$

iii. να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (i) πάνω στον ίδιον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|y-x|$. Για ποιες τιμές των x και y η παράσταση $|y-x|$ παίρνει την ελάχιστη και για ποιες τη μέγιστη τιμή της;

Απάντηση

i. $x^2-4x+y^2+10y+20=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+10+25\right)-9=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+5)^2=9, \qquad (1)$

Λόγω της (1) είναι φανερό ότι θα ισχύουν

$$(x-2)^2\le 9 \quad \text{και} \quad (y+5)^2\le 9$$

Οπότε $|x-2|\le 3$ και $|y+5|\le 3$

ii. $|x-2|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x-2\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 5, \quad (2)$

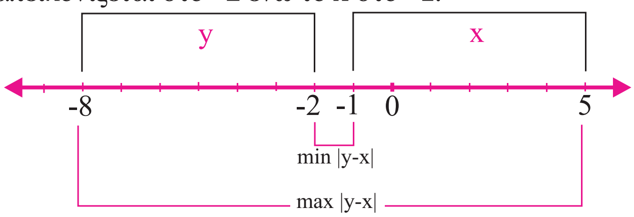
Επίσης, $|y+5|\le 3 \Leftrightarrow -3\le y+5\le 3$

$$\Leftrightarrow -8\le y\le -2, \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προφανώς προκύπτει $y<x$.

iii. Το y διατρέχει το κλειστό διάστημα από το –8 ως το –2, ενώ το x διατρέχει το κλειστό διάστημα από το –1 ως το 5.

Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι η ελάχιστη απόσταση των y και x, δηλαδή του $|y-x|$, ισούται με –1 – (–2) = 1 και αυτό επιτυγχάνεται όταν το y απεικονίζεται στο –2 ενώ το x στο –1.



Δηλαδή είναι $\min|y-x|=1$, όταν $y=-2$ και $x=-1$.

Ανάλογα αντιμετωπίζουμε και το ερώτημα για το $\max|y-x|$ που είναι ίσο με 13.

Θέμα 14

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5},\ x\in\mathbb{R}$$

Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της παράστασης;

Απάντηση

Είναι $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}=\dfrac{3\left(x^2-2x+5\right)+4}{x^2-2x+5}$

$$=3+\frac{4}{x^2-2x+5}=3+\frac{4}{(x-1)^2+4}$$

Δηλαδή $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}=3+\dfrac{4}{(x-1)^2+4}$, (1)

Από την ισότητα (1) γίνεται φανερό ότι η παράσταση $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν το κλάσμα $\dfrac{4}{(x-1)^2+4}$ γίνεται μέγιστο, και αυτό συμβαίνει όταν γίνεται ελάχιστος ο παρονομαστής $(x-1)^2+4$, δηλαδή όταν $x=1$. Τελικά, λόγω της (1), η μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ ισούται με $3+\dfrac{4}{4}=4$ και επιτυγχάνεται για $x=1$.

Θέμα 15

Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2+x-3=0$

Χωρίς να βρείτε τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\dfrac{x_1^{\,2}+2x_1-4}{x_1^{\,2}+4x_1+5}+\dfrac{x_2^{\,2}+2x_2-4}{x_2^{\,2}+4x_2+5}$

Απάντηση

Επειδή τα x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+x-3=0$, θα έχουμε $\begin{cases} x_1^{\,2}+x_1-3=0 \\ x_2^{\,2}+x_2-3=0 \end{cases}$

και από τους τύπους Vieta

$$x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=-1 \quad \text{και} \quad x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=-3$$

Η παράσταση διαδοχικά γίνεται

$$\frac{x_1^{\,2}+2x_1-4}{x_1^{\,2}+4x_1+5}+\frac{x_2^{\,2}+2x_2-4}{x_2^{\,2}+4x_2+5}=$$

$$=\frac{\left(x_1^{\,2}+x_1-3\right)+x_1-1}{\left(x_1^{\,2}+x_1-3\right)+3x_1+8}+\frac{\left(x_2^{\,2}+x_2-3\right)+x_2-1}{\left(x_2^{\,2}+x_2-3\right)+3x_2+8}$$

$$=\frac{x_1-1}{3x_1+8}+\frac{x_2-1}{3x_2+8}$$

$$=\frac{3x_1x_2-3x_2+8x_1-8+3x_1x_2-3x_1+8x_2-8}{\left(3x_1+8\right)\left(3x_2+8\right)}$$

$$=\frac{6x_1x_2+5\left(x_1+x_2\right)-16}{9x_1x_2+24\left(x_1+x_2\right)+64}=\frac{6(-3)+5(-1)-16}{9(-3)+24(-1)+64}=-3$$

Θέμα 16

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+10\beta}{\beta+10\alpha}=2,\ \text{με } \beta\neq 0 \text{ και } \beta\neq -10\alpha.$$

Με τι ισούται το $\dfrac{\alpha}{\beta}$;

Απάντηση

Είναι: $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}+10\frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}}{\frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}+10\frac{\alpha}{\beta}}=2$. Θέτουμε $\dfrac{\alpha}{\beta}=x$.

Σχηματίζεται η εξίσωση:

$$5x^2-9x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \ \text{ ή } \ x=\frac{4}{5}.$$

Αφού, $\alpha\neq\beta$, θα είναι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{5}$.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Θέμα 1

Να βρείτε τον αριθμό που αν τον αφαιρέσουμε από τους όρους του κλάσματος $\dfrac{2}{3}$ και τον προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\dfrac{5}{9}$, τα δύο κλάσματα που προκύπτουν είναι ισοδύναμα.

Απάντηση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε σχηματίζεται η εξίσωση $\dfrac{2-x}{3-x}=\dfrac{5+x}{9+x}$ με τον περιορισμό $x\neq 3$ και $x\neq -9$.

Η εξίσωση έχει ρίζα $x=\dfrac{3}{5}$.

Θέμα 2

Να βρείτε τον αριθμό στον οποίο, αν προσθέσουμε το μισό του, το ένα τρίτο του και το ένα τέταρτό του βρίσκουμε άθροισμα 100.

Απάντηση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε σχηματίζεται η εξίσωση $x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}=100$

Η εξίσωση έχει ρίζα $x = 48$.

Θέμα 3

Το άθροισμα τριών διαδοχικών περιττών αριθμών είναι 57. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Απάντηση

Έστω x ο μεσαίος αριθμός, οπότε ο πρώτος είναι x – 2 και ο τρίτος x + 2. Σχηματίζεται η εξίσωση (x – 2) + x + (x + 2) = 57, που έχει ρίζα x = 19.
Οι αριθμοί είναι οι: 17, 19, 21.

Σχόλια

(1) Δεν χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη να είναι περιττοί στον ορισμό των μεταβλητών, παρά μόνον το ότι διαφέρουν 2 μονάδες μεταξύ τους.

(2) Θα μπορούσαμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο μεσαίος (β) είναι ο αριθμητικός μέσος των δύο άκρων (α και γ), οπότε $\frac{\alpha+\gamma}{2}=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=2\beta$
και η αρχική συνθήκη γίνεται

$$\alpha+\beta+\gamma=57 \Leftrightarrow 3\beta=57 \Leftrightarrow \beta=19$$

(3) Μια «τυπική» αντιμετώπιση θα ήταν η εξής:
Ονομάζουμε α = 2ν+1, β = 2ν + 3, γ = 2ν + 5, ν∈**Z**, οπότε: $\alpha+\beta+\gamma=57 \Leftrightarrow 6\nu+9=57$

$\Leftrightarrow 6\nu=48 \Leftrightarrow \nu=8$ άρα α = 17, β = 19, γ = 21.

Θέμα 4

Να βρείτε δύο θετικούς ακέραιους με άθροισμα 751 που έχουν την ιδιότητα: η διαίρεση του μεγαλύτερου από αυτούς δια του μικρότερου δίνει πηλίκο 3 και υπόλοιπο 7.

Απάντηση

Έστω x ο μικρότερος από τους θετικούς ακέραιους. Οπότε ο μεγαλύτερος είναι ο 751 – x, με τη συνθήκη $751-x>x>0 \Leftrightarrow 751>2x>0$

$$\Leftrightarrow 0<x\leq 350,\quad x\in Z$$

Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης σχηματίζεται η εξίσωση

$$751-x=3x+7 \Leftrightarrow 4x=744 \Leftrightarrow x=186\,,$$

που δίνει δεκτή λύση. Οι αριθμοί είναι οι 565 και 186.

Θέμα 5

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακέραιου α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}$ είναι ακέραιος.

Απάντηση

Είναι: $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}=\frac{(\alpha+1)-6}{\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha+1}-\frac{6}{\alpha+1}=1-\frac{6}{\alpha+1}$.

Δηλαδή $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}=1-\frac{6}{\alpha+1}$ (1)

Λόγω της (1), ο αριθμός $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}$ γίνεται ακέραιος μόνο όταν γίνει ακέραιος ο αριθμός $\frac{6}{\alpha+1}$. Και αυτό συμβαίνει μόνο όταν ο παρονομαστής $\alpha+1$ είναι διαιρέτης του αριθμητή 6.
Δηλαδή όταν το $\alpha+1$ ισούται με: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
Τότε έχουμε:

$\alpha+1=1 \Leftrightarrow \alpha=0$	$\alpha+1=-1 \Leftrightarrow \alpha=-2$
$\alpha+1=2 \Leftrightarrow \alpha=1$	$\alpha+1=-2 \Leftrightarrow \alpha=-3$
$\alpha+1=3 \Leftrightarrow \alpha=2$	$\alpha+1=-3 \Leftrightarrow \alpha=-4$
$\alpha+1=6 \Leftrightarrow \alpha=5$	$\alpha+1=-6 \Leftrightarrow \alpha=-7$

Θέμα 6

Να βρείτε τον θετικό αριθμό, του οποίου το τετράγωνό του είναι μεγαλύτερο κατά 20 από το 8πλάσιό του.

Απάντηση

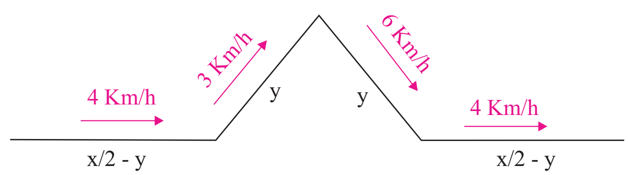
Αν x είναι ο ζητούμενος θετικός αριθμός, το τετράγωνό του είναι x^2 και το 8πλάσιό του είναι $8x$.
Η εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα είναι η $x^2-20=8x$, δηλαδή η $x^2-8x-20=0$.
Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς x, με ρίζες τις $x=10$ και $x=-2$.
Η ρίζα $x=-2$ απορρίπτεται, καθώς το x πρέπει να είναι θετικός αριθμός.

Θέμα 7

Ένας πεζοπόρος περπάτησε για 5 ώρες σε μια μεικτή διαδρομή: ξεκίνησε το περπάτημα σε οριζόντιο δρόμο, συνέχισε σε ανηφορικό και έπειτα επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Αν στον οριζόντιο δρόμο περπατούσε με μέση ταχύτητα 4 χιλιόμετρα την ώρα, στην ανηφόρα με 3 χιλιόμετρα την ώρα και στην κατηφόρα με 6 χιλιόμετρα την ώρα, να βρείτε την απόσταση που περπάτησε συνολικά ο πεζοπόρος.

Απάντηση

Για τη μέση ταχύτητα (u) με την οποία ένα κινητό διανύει μια απόσταση (s) σε χρόνο (t) γνωρίζουμε ότι ισχύει $t=\frac{s}{u}$



Έτσι, αν ονομάσουμε x τη συνολική απόσταση που περπάτησε ο πεζοπόρος (πήγαινε – έλα) και y το μήκος του ανηφορικού δρόμου, ο χρόνος της κίνησης του πεζοπόρου περιγράφεται από την εξίσωση: $\dfrac{\frac{x}{2}-y}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{\frac{x}{2}-y}{4}=5$. Έπειτα από την απαλοιφή των παρονομαστών και τις αναγωγές ομοίων όρων, βρίσκουμε $x=20$ Km .

Θέμα 8

Ένας μαθητής από απροσεξία έκανε λάθος στον πολλαπλασιασμό δύο θετικών ακεραίων οι οποίοι διαφέρουν κατά 7. Στο γινόμενο που βρήκε το ψηφίο των δεκάδων ήταν κατά 2 μικρότερο από το σωστό. Στη συνέχεια ο μαθητής, θέλοντας να ελέγξει αν έκανε σωστά τον πολλαπλασιασμό, διαίρεσε το γινόμενο που βρήκε με τον μικρότερο από τους δύο αριθμούς που είχε πολλαπλασιάσει. Από αυτή τη διαίρεση (την οποία έκανε σωστά) βρήκε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 2. Να βρείτε τους αριθμούς που είχε πολλαπλασιάσει.

Απάντηση

Ονομάζουμε x τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο, οπότε ο μικρότερος είναι $x-7$.

Ο μαθητής αντί του σωστού γινομένου x^2-7x, κατά λάθος βρήκε $x^2-7x-20$.

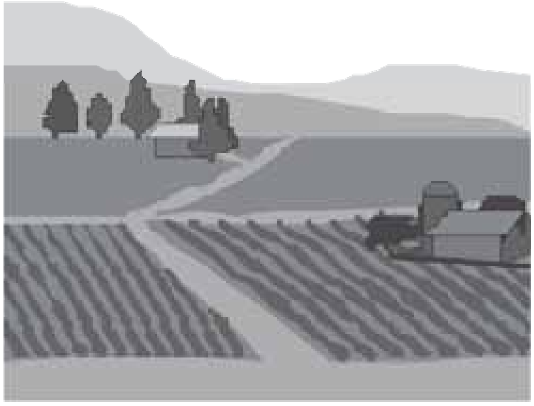
Ο έλεγχος που έκανε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης, περιγράφεται από την εξίσωση $x^2-7x-20=28(x-7)+2$, η οποία μετά τις πράξεις γίνεται $x^2-35x+174=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες, τις $x=29$ και $x=6$. Με $x=29$ βρίσκουμε $x-7=22$, αποδεκτές τιμές. Με $x=6$ βρίσκουμε $x-7=-1$, η περίπτωση αυτή απορρίπτεται, καθώς οι αριθμοί x και $x-7$ πρέπει να είναι θετικοί ακέραιοι.

Θέμα 9

Ένας αγρότης αν μαζέψει και πουλήσει σήμερα τα φρούτα των δέντρων που καλλιεργεί, τότε το κάθε δέντρο αποδίδει κατά μέσο όρο 40 κιλά και η τιμή πώλησης είναι 1,6 € το κιλό.

Αν όμως τα μαζέψει αργότερα, τότε, για κάθε εβδομάδα που περνά, κάθε δέντρο αποδίδει 5 κιλά περισσότερο και η τιμή πώλησης μειώνεται κατά 10 λεπτά το κιλό. Αυτό ασφαλώς δεν μπορεί να συμβαίνει διαρκώς! Τα φρούτα θα ωριμάζουν και θα μεγαλώνουν (με το ρυθμό που υποθέσαμε) για ένα διάστημα το πολύ 8 εβδομάδων. Μετά από πόσες εβδομάδες πρέπει να μαζέψει και να πουλήσει τα φρούτα του, ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος; Ποιο θα είναι αυτό για κάθε δέντρο;



Απάντηση

Αν τα πουλήσει σήμερα θα εισπράξει (από κάθε δέντρο) 40·1,6 €

Αν τα πουλήσει μετά από 1 εβδομάδα θα εισπράξει (40 + 1·5)·(1,6 – 1·0,10) €

Αν τα πουλήσει μετά από 2 εβδομάδες θα εισπράξει (40 + 2·5)·(1,6 – 2·0,10) €

Αν τα πουλήσει μετά από x εβδομάδες θα εισπράξει (40 + x·5)·(1,6 – x·0,10) €

Αναζητάμε την τιμή του x (με τον περιορισμό $0 < x < 8$), ώστε το ποσό που θα εισπράξει να γίνει μέγιστο, δηλαδή αναζητάμε το μέγιστο της συνάρτησης:

$\Pi(x) = (5x + 40)(1,6 - 0,10x) = -0,5x^2 + 4x + 64$.

Η συνάρτηση $\Pi(x) = -0,5x^2 + 4x + 64$ είναι δευτεροβάθμια με αρνητικό συντελεστή του x^2, άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=4$.

Το μέγιστο αυτό είναι ίσο με Π(4) = 72 €.

Επομένως, το μέγιστο κέρδος θα το έχει μετά 4 εβδομάδες και θα είναι 72 € από κάθε δέντρο.

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Περιοδικό Quantum, Εκδόσεις Κάτοπτρο.
[2] Περιοδικό Ευκλείδης Β΄, ΕΜΕ.
[3] Αρχείο θεμάτων διαγωνισμού “Ο Θαλής”, ΕΜΕ.
[4] George Polya, *Η Μαθηματική Ανακάλυψη*, τόμος 1ος, Εκδόσεις Κάτοπτρο.
[5] Ντρίζος Θανάσης, *Θέματα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου* (αδημοσίευτες σημειώσεις).

Τάξη: Α΄

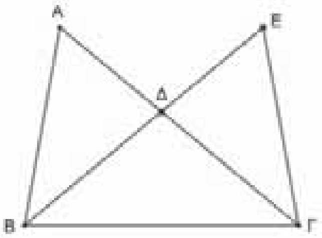
Θέματα Γεωμετρίας

Σπύρος Γιαννακόπουλος, Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

Θέμα 1: **Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ του τριγώνου. Προεκτείνουμε τη ΒΔ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Δείξτε ότι: i. ΓΕ=ΑΒ.**

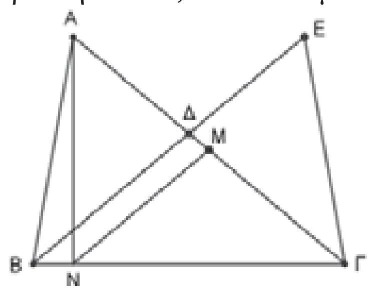
ii. Αν από το μέσο Μ της ΑΓ φέρουμε παράλληλο στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την ΒΓ στο Ν, τότε το τρίγωνο ΑΝΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση: i. $\Delta\hat{B}\Gamma=\dfrac{\hat{B}}{2}=\hat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές με ΔΒ=ΔΓ.



Τα τρίγωνα ΔΑΒ, ΔΕΓ, έχουν: ΔΑ=ΔΕ από την υπόθεση, ΔΒ=ΔΓ και $A\hat{\Delta}B=E\hat{\Delta}\Gamma$ ως κατακορυφήν. Σύμφωνα με το κριτήριο Π–Γ–Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΓΕ=ΑΒ.

ii. $M\hat{N}\Gamma=\Delta\hat{B}\Gamma$ (1) ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΔ, ΝΜ που τέμνονται από ΒΓ.



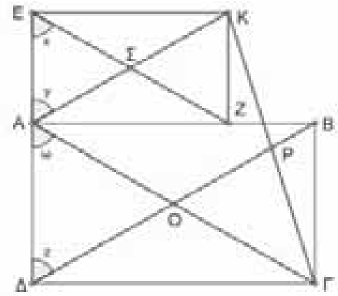
(1) $\Leftrightarrow M\hat{N}\Gamma=\dfrac{\hat{B}}{2}\Leftrightarrow M\hat{N}\Gamma=\hat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές με $NM=M\Gamma \Leftrightarrow$ $NM=\dfrac{B\Gamma}{2}$ (2). Από την (2) προκύπτει ότι το τρίγωνο ΝΑΓ είναι ορθογώνιο με $A\hat{N}\Gamma=90^0$.

Θέμα 2: **Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ του ΒΔ. Στην προέκταση του ΓΡ παίρνουμε σημείο Κ έτσι ώστε ΓΡ=ΡΚ και φέρουμε $KE\perp\Delta A$ (Ε σημείο στην προέκταση του ΔΑ), $KZ\perp AB$ (Ζ σημείο του ΑΒ). Να δείξετε ότι:**

α. **$AK//\Delta B$, $EZ//A\Gamma$.**

β. **Τα σημεία Ε,Ζ,Ρ είναι συνευθειακά.**

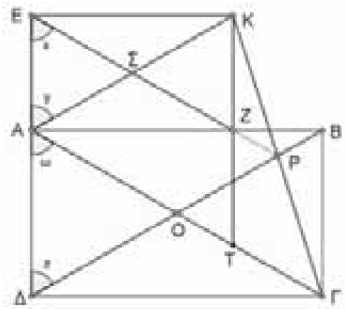
Λύση: α. Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Ο είναι μέσο του ΑΓ και το Ρ είναι μέσο του ΚΓ, οπότε $OP//AK\Rightarrow AK//\Delta B$. Στο ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες, οπότε το τρίγωνο ΣΑΕ είναι ισοσκελές με $\hat{x}=\hat{y}$.



Όμοια το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με $\hat{\omega}=\hat{z}$.

Επειδή $AK//\Delta B\Rightarrow\hat{y}=\hat{z}\Rightarrow\hat{x}=\hat{\omega}$ που σημαίνει ότι $EZ//A\Gamma$.

β. Η προέκταση του ΚΖ τέμνει την ΑΓ στο Τ.
Από το ερώτημα α έχουμε ΕΖ//ΑΤ. Επίσης είναι ΑΕ//ΤΖ αφού ΑΕ//ΖΚ. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΖΤ είναι παραλληλόγραμμο. Έτσι έχουμε $TZ=AE=ZK\Rightarrow TZ=ZK$.



Άρα το Ζ είναι μέσο του ΚΤ. Επίσης το Ρ είναι μέσο του ΚΓ, οπότε στο τρίγωνο ΚΤΓ είναι ΖΡ//ΤΓ$\Rightarrow ZP//A\Gamma$ Αφού ΕΖ//ΑΓ και ΖΡ//ΑΓ από το αίτημα της παραλληλίας τα σημεία Ε,Ζ,Ρ είναι συνευθειακά.

Θέμα 3: **Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{B}>\hat{A}$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.**

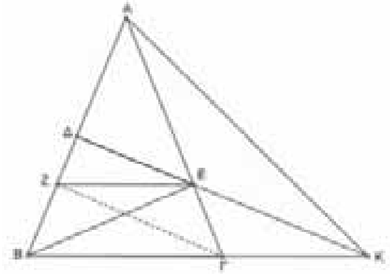
Να αποδείξετε ότι:

α. **$E\hat{B}K=E\hat{A}K$.** **β.** **$\hat{A}=A\hat{K}B$.** **γ.** **ΑΕ=ΖΓ.**

Λύση α. Επειδή η ΕΔ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ είναι ΕΑ=ΕΒ οπότε το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές με κορυφή το Ε. Επίσης το Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με ΚΑ=ΚΒ. Άρα $\mathrm{A\hat{B}E} = \hat{\mathrm{A}}$ και $\mathrm{B\hat{A}K} = \hat{\mathrm{B}}$. Συνεπώς $\mathrm{E\hat{B}K} = \hat{\mathrm{B}} - \mathrm{E\hat{B}A} \Leftrightarrow$

$\mathrm{E\hat{B}K} = \mathrm{B\hat{A}K} - \hat{\mathrm{A}} \Leftrightarrow \mathrm{E\hat{B}K} = \mathrm{E\hat{A}K}$.

(Ένας άλλος τρόπος είναι να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΕΒΚ, ΕΑΚ είναι ίσα)



β. Από το ερώτημα α έχουμε $\mathrm{E\hat{B}K} = \mathrm{E\hat{A}K} \Leftrightarrow$

$\hat{\mathrm{B}} - \mathrm{A\hat{B}E} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{A}} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΓΚ η $\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} + \mathrm{A\hat{K}B} \Leftrightarrow \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = \hat{\Gamma} - \mathrm{A\hat{K}B}$ (2).

$(1),(2) \Rightarrow \hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} - \mathrm{A\hat{K}B} \overset{\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}}{\Leftrightarrow} \hat{\mathrm{A}} = \mathrm{A\hat{K}B}$.

γ. Το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΖΓ=ΕΒ $\Leftrightarrow$ ΖΓ=ΑΕ

Θέμα 4: Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Από το Β φέρουμε παράλληλο προς την ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ε.

α. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

β. Αν Ο το κέντρο του τετραγώνου και Τ το σημείο τομής των ΒΓ,ΕΟ, δείξτε ότι η ΔΤ διέρχεται από το μέσο Ζ του ΒΓ.

γ. Αν Η είναι το μέσο του ΟΕ, δείξτε ότι ΔΖ = 2ΒΗ.

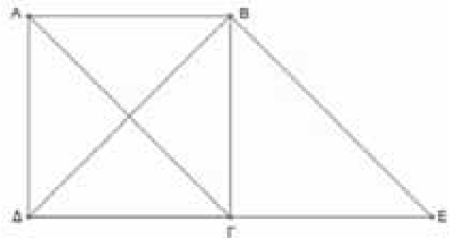
δ. Δείξτε ότι το ΓΖ διέρχεται από το Η

Λύση: α. Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι ίσες. Άρα ΑΓ = ΒΕ $\Leftrightarrow$ ΒΔ = ΒΕ $\Rightarrow$ τρίγωνο ΒΔΕ ισοσκελές.

Για να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο μπορούμε να έχουμε έναν από τους παρακάτω τρόπους.

1ος τρόπος: ΓΔ=ΑΒ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)

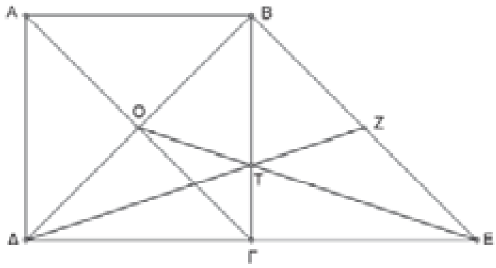
Άρα ΓΕ=ΓΔ=ΒΓ. Έτσι έχουμε $\mathrm{B\Gamma} = \dfrac{\Delta\mathrm{E}}{2} \Rightarrow$ $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^0$.



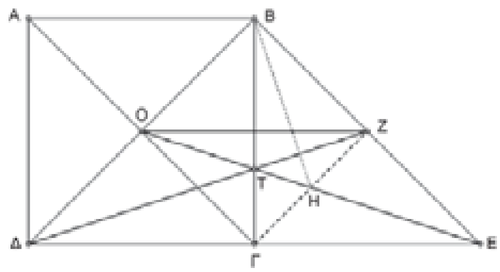
2ος τρόπος: ΑΒΕΓ παραλληλόγραμμο $\Rightarrow$ ΑΒ = ΓΕ $\Rightarrow$ ΒΓ = ΓΕ $\Rightarrow$ τρίγωνο ΓΒΕ ισοσκελές. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 45^0$.

$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 45^0 + 45^0 = 90^0 \Rightarrow$ τρίγωνο ΒΔΕ ορθογώνιο.

β. Τα τμήματα ΒΓ, ΕΟ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΒΔΕ, οπότε το σημείο Τ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΒΔΕ. Άρα το ΔΤ βρίσκεται πάνω στην τρίτη διάμεσο ΔΖ του τριγώνου.



γ. Το τρίγωνο ΒΟΕ είναι ορθογώνιο και η ΒΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $\mathrm{BH} = \dfrac{\mathrm{OE}}{2}$.



Το ΟΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΕ του τριγώνου ΒΔΕ, οπότε ΟΖ // ΔΕ.

Επιπλέον ΟΔ=ΖΕ και μη παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΟΖΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Έτσι έχουμε ΔΖ = ΟΕ. Άρα $\mathrm{BH} = \dfrac{\Delta\mathrm{Z}}{2} \Leftrightarrow \Delta\mathrm{Z} = 2\mathrm{BH}$

δ. Το τετράπλευρο ΟΖΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Οι ΟΕ, ΓΖ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και επειδή το Η είναι μέσο της διαγωνίου ΟΕ και η δεύτερη διαγώνιος ΓΖ οφείλει να διέρχεται από το Η.

Τάξη: Β΄

Θέματα για εμβάθυνση…

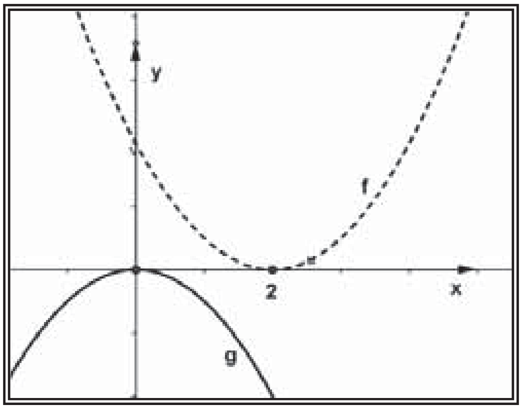
Γεώργιος Μπατέλης

ΘΕΜΑ Α΄

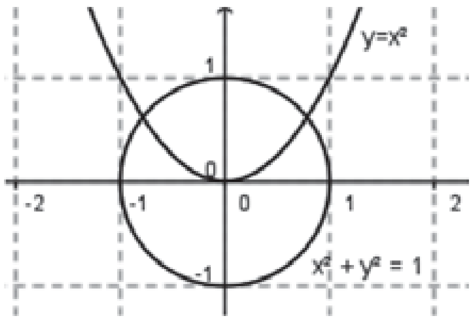
Α1. Να αποδείξετε ότι:

$$|\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega| \le \sqrt{2}$$

Α2. Στο σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Η συνάρτηση f προκύπτει από τη στροφή και μετατόπιση της g. Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των f, g;



Α3. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα μη γραμμικό σύστημα. Ποιο είναι αυτό και ποια η γεωμετρική του ερμηνεία;



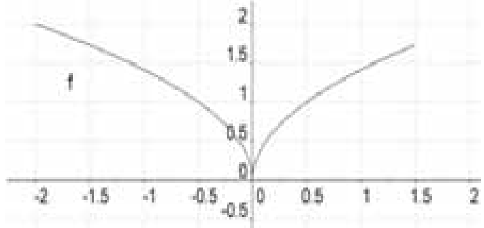
Α4. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον παρακάτω ισχυρισμό: «Αν ισχύει $\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}$ τότε $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x_1\right) > \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x_2\right)$ »

Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν ημx=0, τότε υποχρεωτικά θα είναι συνx=1.
2. Ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.
3. Η συνάρτηση f(x)=ημx, x∈R έχει μοναδική θέση ολικού μεγίστου.

Α6. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Η γραφική παράσταση που ακολουθεί απεικονίζει μια άρτια συνάρτηση»



Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

ΘΕΜΑ Β΄

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2|x^2 - 1| + 1$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 &, \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -2x^2 + 3 &, \quad x \in (-1, 1) \end{cases}$$

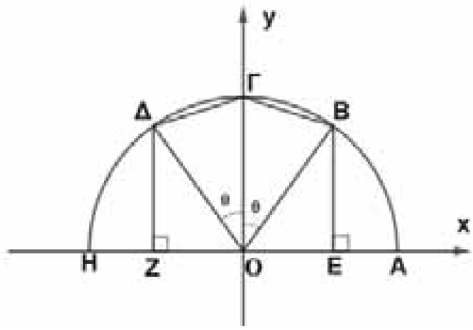
Β3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή και να τη βρείτε.

Β4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της –f.

ΘΕΜΑ Γ΄

Στο παρακάτω ημικύκλιο δίνονται τα εξής:



- $B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \theta$
- $\Delta Z, BE \perp AH$
- $OH = O\Delta = O\Gamma = OB = OA = 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν

(ΖΔΓΒΕ)=(1+συνθ)ημθ

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε δύο συναρτήσεις κ, λ με κ(x)>0 και λ(x)>0, x∈A, όπου A ένα κοινό πεδίο ορισμού, αν οι συναρτήσεις κ, λ είναι γνησίως φθίνουσες στο A, τότε και η συνάρτηση (κ·λ) είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

Γ3. Αν h(θ)=(1+συνθ)ημθ

I. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

II. Να βρείτε τα ακρότατα της h (αν υπάρχουν) καθώς και το σύνολο τιμών της, για $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

III. Να λυθεί η ανίσωση

$\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\leq\frac{1}{\eta\mu\theta}-\eta\mu^2\theta,\ \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ (1).

ΘΕΜΑ Δ΄

Δίνεται η περιττή συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση:

$2f(x)+f(-x)=(\lambda+\kappa)x^5+\mu x^3+\nu x+\rho$ (1) και το σύστημα $(\Sigma_1):\begin{cases}\lambda^2x+2y&=&4\\2x+y&=&\lambda\end{cases}$ το οποίο έχει μοναδική λύση (x_o,y_o) με λ≥0.

Δ1. Αν $\frac{1}{2}x_o^2-2|y_o|+\frac{5}{2}=|x_o|-\frac{1}{2}y_o^2$ (2), να βρεθεί το λ και η μοναδική λύση.

Δ2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και η f(–x) είναι γνησίως αύξουσα στο R, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Δ3. Δίνεται επιπλέον το σύστημα

$(\Sigma_2):\begin{cases}\kappa^2+\mu^2&=&5\\\kappa\mu&=&2\end{cases}$. Να λυθεί, να ερμηνευτεί γεωμετρικά και να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

Δ4. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση

$$|\nu-\rho|+|\nu+\rho+2|=0 \quad (4).$$

Αν λ=0 και κ>μ να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^5-2x^3-x-1$.

Υποδείξεις

Α1. Αρκεί $|\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega|^2\leq\sqrt{2}^2$ αρκεί $\eta\mu^2\omega-2\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\leq 2$ αρκεί $1-2\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega\leq 2$ αρκεί $1+2\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega\geq 0$ αρκεί $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega+2\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega\geq 0$ αρκεί $(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2\geq 0$ που ισχύει.

Α2. f(x) = –g(x–2)⇔f(x)+g(x–2) = 0.

Α3. Σχολικό βιβλίο

Α4. $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}+x_1<\frac{3\pi}{2}+x_2<\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$ $\frac{10\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}+x_1<\frac{3\pi}{2}+x_2<\frac{11\pi}{6}$, δηλαδή οι γωνίες $\frac{3\pi}{2}+x_1,\frac{3\pi}{2}+x_2$ βρίσκονται στο 4^o τεταρτημόριο στο οποίο η συνάρτηση ημx είναι γν. αύξουσα άρα θα είναι: $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x_1\right)<\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x_2\right)$.

Α5. 1: Λ 2: Σ 3: Λ

Α6. το –2 ανήκει στο πεδίο ορισμού ενώ το 2 όχι.

Β1. Η f είναι άρτια.

Β2. Διάκριση περιπτώσεων

Β3. $2|x^2-1|\geq 0\Rightarrow 2|x^2-1|+1\geq 1\Rightarrow f(x)\geq 1=f(1)=f(-1)$

Άρα η f έχει ελάχιστο το 1 για x=1 ή x=–1, δηλαδή τα σημεία A(–1,1), B(1,1).

Β4. Επειδή η συνάρτηση είναι δίκλαδη, θα μελετήσουμε τη μονοτονία σε κάθε κλάδο χωριστά.

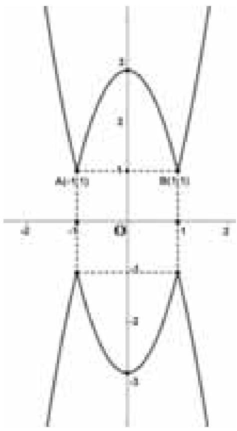
- Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,-1]$ με $x_1<x_2\leq -1\Rightarrow x_1^2>x_2^2\geq 1\Rightarrow 2x_1^2>2x_2^2$ $\Rightarrow 2x_1^2-1>2x_2^2-1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.

- Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $1\leq x_1<x_2\Leftrightarrow 1\leq x_1^2<x_2^2\Rightarrow 2x_1^2<2x_2^2\Rightarrow$ $2x_1^2-1<2x_2^2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

- Έστω $x_1,x_2\in(-1,0]$ με $-1<x_1<x_2\leq 0\Rightarrow 1>x_1^2>x_2^2\geq 0\Rightarrow -2x_1^2<-2x_2^2$ $\Rightarrow -2x_1^2+3<-2x_2^2+3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(-1,0]$.

- Έστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $0<x_1<x_2<1\Rightarrow 0<x_1^2<x_2^2\Rightarrow -2x_1^2>-2x_2^2$ $\Rightarrow -2x_1^2+3>-2x_2^2+3\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.

Β5.



Γ1. Έχω $B\hat{O}E = 90^o - \theta$ άρα από το τρίγωνο ΒΟΕ θα έχω: $ημ(90-θ)=\dfrac{BE}{OB} \overset{OB=1}{\Rightarrow} BE=συνθ$.

$συν(90-θ)=\dfrac{OE}{OB} \overset{OB=1}{\Rightarrow} OE=ημθ$.

Είναι (ΖΔΓΒΕ)=2(ΟΕΒΓ)=

$2\dfrac{(OΓ+BE)OE}{2}=(1+συνθ)ημθ$.

Γ2. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με

$$\left.\begin{cases} x_1 < x_2 \overset{κ\downarrow}{\Rightarrow} κ(x_1) > κ(x_2) > 0 \\ x_1 < x_2 \overset{λ\downarrow}{\Rightarrow} λ(x_1) > λ(x_2) > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$κ(x_1)\cdot λ(x_1) > κ(x_2)\cdot λ(x_2) \Rightarrow (κλ)(x_1) > (κλ)(x_2)$

άρα η συνάρτηση (κλ) είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

Γ3. Ι. Θεωρώ τη συνάρτηση

$κ(θ)=1+συνθ,\ θ \in \left[\dfrac{π}{2}, π\right)$.

Γνωρίζω ότι $-1<συνθ\le 0$ για $θ \in \left[\dfrac{π}{2}, π\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<1+συνθ\le 1 \Rightarrow 0<κ(θ)\le 1$.

Επίσης για $λ(θ)=ημθ$ έχω $0<ημθ\le 1$ για $θ \in \left[\dfrac{π}{2}, π\right)$,

άρα $λ(θ)>0$. Έχω $h(θ)=(κλ)(θ)$ με

$$\left.\begin{cases} κ, λ \downarrow \left[\dfrac{π}{2}, π\right) \text{ και} \\ κ(θ), λ(θ) > 0, θ \in \left[\dfrac{π}{2}, π\right) \end{cases}\right\} \overset{Γ_2}{\Rightarrow}$$

h γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{π}{2}, π\right)$.

ΙΙ. Είναι $\dfrac{π}{2} \le θ < π \overset{h\downarrow}{\Rightarrow} h\left(\dfrac{π}{2}\right) \ge h(θ) \Rightarrow h(θ) \le 1$,

άρα έχω μέγιστο στο $\dfrac{π}{2}$ το 1. Επίσης

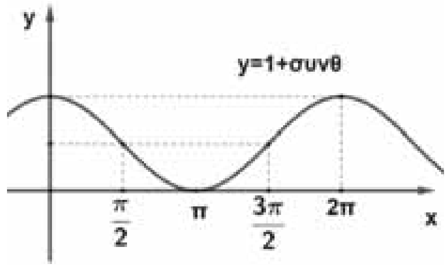
$$\left.\begin{cases} 0 < κ(θ) \le 1 \\ 0 < λ(θ) \le 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow 0 < κ(θ)λ(θ) \le 1 \Rightarrow 0 < h(θ) \le 1,$$

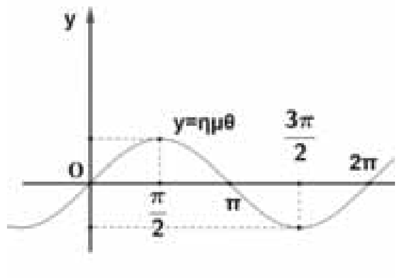
άρα $h(θ)\in(0,1]$ το σύνολο τιμών.

ΙΙΙ. $(1) \Leftrightarrow ημ^2θ+συν^2θ+συνθ \le \dfrac{1}{ημθ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+συνθ \le \dfrac{1}{ημθ} \Leftrightarrow ημθ(1+συνθ)\le 1 \Leftrightarrow h(θ) \le h\left(\dfrac{π}{2}\right)$

$\overset{h\downarrow\left[\frac{π}{2}, π\right)}{\Leftrightarrow} \dfrac{π}{2} \le θ < π$





Δ1. Υπολογίζουμε την λύση του συστήματος.

Είναι $D = \begin{vmatrix} λ^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = λ^2 - 4 = (λ-2)(λ+2)$, με $λ\ge 0$,

οπότε $λ+2>0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Ι. Αν $D=0 \Leftrightarrow (λ-2)(λ+2)=0 \Leftrightarrow λ-2=0 \Leftrightarrow λ=2$. Τότε το σύστημα $(Σ_1)$ έχει άπειρες λύσεις.

ΙΙ. Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow λ\neq 2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$(x_o, y_o) = \left(-\frac{2}{λ+2}, \frac{λ^2+2λ+4)}{λ+2}\right).$$

Για να βρούμε το λ θα πρέπει να υπολογίσουμε τα x_o και y_o, προφανώς από τη σχέση (1). Κάνοντας απαλοιφή η (2) γίνεται: $|x_o^2| - 4|y_o| + 5 = 2|x_o| - |y_o^2|$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (|x_o|-1)^2 + (|y_o|-2)^2 = 0 \Leftrightarrow |x_o| = 1$ και $|y_o| = 2$.

Άρα: $\left|-\dfrac{2}{\lambda+2}\right|=1$ και $\left|\dfrac{\lambda^2+2\lambda+4}{\lambda+2}\right|=2 \Leftrightarrow$

$|\lambda+2|=2$ και $|\lambda^2+2\lambda+4|=2|\lambda+2|$ και επειδή λ+2>0 και λ^2+2λ+4>0 (Δ=–12<0):

λ+2=2 και λ^2+2λ+4=2λ+4⇔λ=0 και λ^2=0⇔λ=0.

Για λ=0 το (Σ_1) γίνεται:

$$(\Sigma_1):\begin{cases}\lambda^2x+2y &= 4\\ 2x+y &= \lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y &= 4\\ 2x+y &= 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y &= 2\\ x &= -1\end{cases}\Leftrightarrow(x_o,y_o)=(-1,2).$$

Δ2. Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2\Rightarrow -x_1> -x_2$ (3).

1η περίπτωση: Η f γν. αύξουσα στο R, τότε

(3)⇒$f(-x_1)>f(-x_2)$, άρα η f(–x) είναι γν. φθίνουσα στο R, που είναι άτοπο.

2η περίπτωση: Η f είναι γν. φθίνουσα στο R, τότε:(3)⇒$f(-x_1)<f(-x_2)$, άρα η f(–x) είναι γν. αύξουσα στο R, που είναι δεκτό, οπότε αναγκαστικά η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Δ3. Επειδή κμ=2, θα είναι κ, μ≠0 και τα κ, μ θα είναι ομόσημοι, οπότε το (Σ_2) γίνεται:

$$(\Sigma_2):\begin{cases}\kappa^2+\dfrac{4}{\kappa^2} &= 5\\ \mu &= \dfrac{2}{\kappa}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa^4-5\kappa^2+4 &= 0\\ \mu &= \dfrac{2}{\kappa}\end{cases}.$$

Λύνουμε τη διτετράγωνη εξίσωση: θέτουμε κ^2=ω>0 (κ≠0) και θα έχουμε: $\omega^2-5\omega+4=0$ με Δ=25–16=9 και ρίζες $\omega_{1,2}=\dfrac{5\pm3}{2}$, άρα ω=4 ή ω=1.

- Αν ω=4 τότε κ^2=4⇔κ=2 ή κ= –2.
- Αν ω=1 τότε κ^2=1⇔κ=1 ή κ= –1.

Άρα θα έχουμε τα εξής ζεύγη: (κ,λ)=(2,1), (κ,λ)=(–2,–1), (κ,λ)=(1,2), (κ,λ)=(–1,–2).

Δ4. Από τα τέσσερα ζεύγη λύσεων (κ, μ) τα μόνα που ικανοποιούν τη συνθήκη κ>μ είναι:

(κ, μ)=(2,1) ή (κ, μ)=(–1,–2).

Στη σχέση (4) έχουμε άθροισμα μη αρνητικών που κάνει μηδέν, άρα θα είναι:

$$\left.\begin{matrix}|\nu-\rho|=0\\ \text{και}\\ |\nu+\rho+2|=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\nu-\rho=0\\ \text{και}\\ \nu+\rho+2=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\nu=\rho\\ \text{και}\\ \nu+\nu=-2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}\nu=\rho=-1\\ \text{και}\\ \nu=-1\end{matrix}\right\}.$$

Θα βρούμε τώρα την f από την (1).

Επειδή η f είναι περιττή θα έχουμε $f(-x)=-f(x)$, οπότε η (1) γίνεται:

$2f(x)-f(x)=(\lambda+\kappa)x^5+\mu x^3+\nu x+\rho\Leftrightarrow$

$f(x)=(\lambda+\kappa)x^5+\mu x^3+\nu x+\rho$ (5).

Για το ζεύγος (κ, μ)=(2,1) και για λ=0, ν=ρ=–1 η (5) γίνεται: $f(x)=2x^5+x^3-x-1$

Για το ζεύγος (κ, μ)=(–1,–2) και λ=0, ν=ρ=–1 η (5) γίνεται: $f(x)=-x^5-2x^3-x-1$.

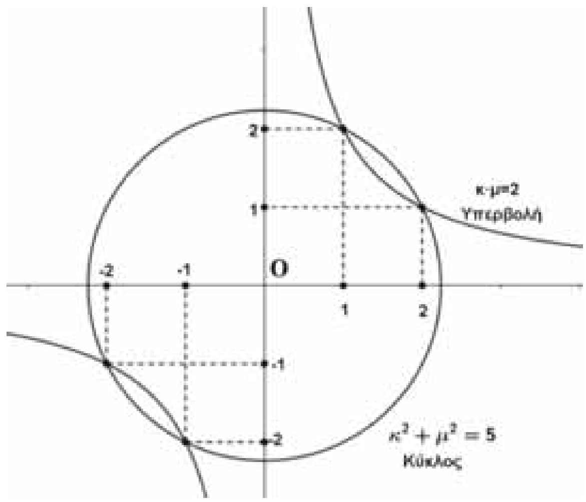
Ξέρουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, άρα πρέπει να δούμε ποιά συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

Για: $f(x)=2x^5+x^3-x-1$, έχω

$f(0)=-1$ και $f(1)=1$, άρα για 0<1 έχω f(0)=–1<f(1)=1, δηλαδή η f είναι αύξουσα (ως γνησίως μονότονη), που είναι άτοπο, άρα η $f(x)=2x^5+x^3-x-1$ απορρίπτεται.

Για: $f(x)=-x^5-2x^3-x-1$ έχω

$f(0)=-1$ και $f(1)=-5$, άρα για 0<1 έχω f(0)=–1>f(1)=–5, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα (ως γνησίως μονότονη), άρα η $f(x)=-x^5-2x^3-x-1$ είναι δεκτή.



Κύκλος - Κανονικά Πολύγωνα.

Γιώργος Α. Κουσινιώρης, Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

1. Να βρεθεί ο λόγος των πλευρών και των εμβαδών του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου στον ίδιο κύκλο ακτίνας R.

Λύση: Τα κανονικά εξάγωνα είναι όμοια μεταξύ τους με λόγο ομοιότητας το λόγο των αποστημάτων τους, των πλευρών τους και των ακτίνων τους.

Αν E_6, λ_6 και α_6 είναι το εμβαδόν, η πλευρά και το απόστημα αντιστοίχως του εγγεγραμμένου εξαγώνου και E_6', λ_6' και α_6' του περιγεγραμμένου εξαγώνου τότε ο λόγος ομοιότητας λ είναι:

$\lambda=\dfrac{\alpha_6}{\alpha_6'}$. Είναι όμως $\alpha_6=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ και $\alpha_6'=R$ οπότε

έχουμε $\lambda=\dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R}\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Συνεπώς είναι $\dfrac{\lambda_6}{\lambda_6'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{E_6}{E_6'}=\lambda^2\Leftrightarrow$

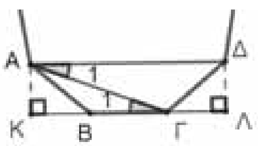
$\dfrac{E_6}{E_6'}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Leftrightarrow\dfrac{E_6}{E_6'}=\dfrac{3}{4}$.

2. Αν Α, Β, Γ και Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου, να δείξετε ότι:

α) ΒΓ//ΑΔ

β) $A\Gamma^2-AB^2=B\Gamma\cdot A\Delta$

Λύση: α) Είναι $AB=\Gamma\Delta=\lambda_\nu$ οπότε τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα.



Επομένως $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$ οπότε ΒΓ//ΑΔ.

β) Έστω Κ, Λ οι προβολές των Α, Δ αντιστοίχως πάνω στην ευθεία ΒΓ.

Είναι ΒΓ//ΑΔ οπότε το ΑΚΛΔ είναι ορθογώνιο και επομένως ΑΔ=ΚΛ και ΑΚ=ΔΛ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΒ και ΛΔΓ είναι ίσα γιατί έχουν $AB=\Gamma\Delta=\lambda_\nu$ και ΑΚ=ΔΛ, οπότε είναι ΚΒ=ΛΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΒ έχουμε:

$AB^2=AK^2+KB^2$ **(1)**

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε:

$A\Gamma^2=AK^2+K\Gamma^2$ **(2)**

Από τις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε: $A\Gamma^2-AB^2=K\Gamma^2-KB^2\Leftrightarrow$

$A\Gamma^2-AB^2=(K\Gamma-KB)(K\Gamma+KB)\Leftrightarrow$

$A\Gamma^2-AB^2=B\Gamma\cdot(K\Gamma+\Lambda\Gamma)=B\Gamma\cdot K\Lambda$ ή

$A\Gamma^2-AB^2=B\Gamma\cdot A\Delta$

3. Σε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ φέρνουμε τις διαγωνίους ΑΓ και ΓΕ και πάνω σε αυτές παίρνουμε τα σημεία Η και Θ αντιστοίχως έτσι ώστε $AH=\Gamma\Theta=\lambda_6$. Να δείξετε ότι τα σημεία Β, Η και Θ είναι συνευθειακά.

Λύση: Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΗ και ΒΓΘ είναι ισοσκελή αφού $AH=\lambda_6=AB$ και $\Gamma\Theta=\lambda_6=B\Gamma$.

Είναι $A\hat{B}\Gamma=\varphi_6=180^\circ-\omega_6=180^\circ-\dfrac{360^\circ}{6}$ ή

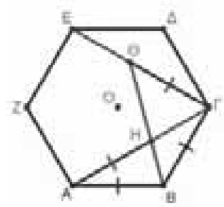
$A\hat{B}\Gamma=120^\circ$.

$B\hat{A}\Gamma=\dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{B\Gamma}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot60^\circ=30^\circ$, οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΗ είναι $A\hat{B}H=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$

και επομένως $\Gamma\hat{B}H=120^\circ-75^\circ=45^\circ$ **(1)**.

Είναι $B\hat{\Gamma}E=\dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BAE}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot60^\circ=90^\circ$,

αφού είναι $\overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{AZ}=\overset{\frown}{ZE}=60^\circ$, επομένως το τρίγωνο ΒΓΘ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές οπότε $\Gamma\hat{B}\Theta=45^\circ$ **(2)**.



Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι είναι $\Gamma\hat{B}H=\Gamma\hat{B}\Theta$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Β, Η και Θ είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τυχαίο σημείο του Α. Στο Α φέρνουμε την εφαπτομένη Αχ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα $AB=2R$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας ΑΟΒ που τέμνει την ΑΒ στο Γ. Να δείξετε ότι $A\Gamma=\lambda_{10}$.

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε: $OB^2=AO^2+AB^2=R^2+(2R)^2=5R^2$ ή $OB=R\sqrt{5}$.

Η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο. Εφαρμόζουμε το θεώρημα της διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΟΒ και έχουμε: $\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{OA}{OB}\Leftrightarrow\dfrac{A\Gamma}{A\Gamma+B\Gamma}=\dfrac{OA}{OA+OB}\Leftrightarrow$

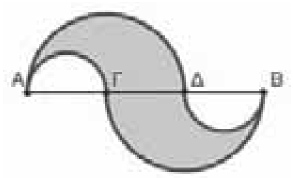
$\dfrac{A\Gamma}{AB}=\dfrac{OA}{OA+OB}\Leftrightarrow A\Gamma=\dfrac{AB\cdot OA}{OA+OB}$.

$A\Gamma=\dfrac{2R\cdot R}{R+R\sqrt{5}}=\dfrac{2R^2}{R\left(1+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{2R}{1+\sqrt{5}}=$

$\dfrac{2R\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\dfrac{2R\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1}=$

$= \dfrac{2R\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}$ ή $ΑΓ = \dfrac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = λ_{10}$

5. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ=6cm, ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ και τα τόξα ΑΓ, ΑΔ, ΓΒ και ΔΒ είναι ημικύκλια. Να βρείτε το εμβαδόν Ε και την περίμετρο L του σκιασμένου χωρίου.



Λύση: Είναι ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ=2cm, οπότε τα ημικύκλια με διαμέτρους τις ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και έχουν μήκος $L_{ΑΔ} = L_{ΒΓ} = \dfrac{π \cdot 4}{2} = 2π$ (cm).

Τα ημικύκλια με διαμέτρους τις ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα και έχουν μήκος $L_{ΑΓ} = L_{ΒΔ} = \dfrac{π \cdot 2}{2} = π$ (cm) και επομένως είναι: $L = L_{ΑΔ} + L_{ΒΔ} + L_{ΒΓ} + L_{ΑΓ} = 6π$ (cm). Τα ημικύκλια με διαμέτρους τις ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και έχουν εμβαδόν

$$E_{ΑΔ} = E_{ΒΓ} = \frac{1}{2} \cdot π \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot π \cdot 2^2 = 2π \text{ (cm}^2\text{)}.$$

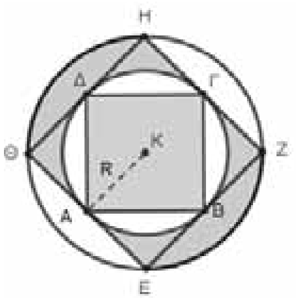
Το ημικύκλια με διαμέτρους τις ΑΓ και ΒΔ είναι σα και έχουν εμβαδόν

$$E_{ΑΓ} = E_{ΒΔ} = \frac{1}{2} \cdot π \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{π}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Επομένως είναι:

$$E = E_{ΑΔ} - E_{ΑΓ} + E_{ΒΓ} - E_{ΒΔ} = 3π \text{ (cm}^2\text{)}.$$

6. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι το εγγεγραμμένο τετράγωνο στον κύκλο (Κ, R), το ΕΖΗΘ είναι το περιγεγραμμένο τετράγωνο στον ίδιο κύκλο και ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



Λύση: Το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $(ΑΒΓΔ) = λ_4^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

Το περιγεγραμμένο τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρά λ΄=2R οπότε το εμβαδόν του είναι: $(ΕΖΗΘ) = (2R)^2 = 4R^2$.

Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραγώνου ΕΖΗΘ έχει ακτίνα $ρ = R\sqrt{2}$. *(γιατί;)*

Το σκιασμένο χωρίο έχει εμβαδόν $E = 2E_1 + 4E_2$. Είναι:

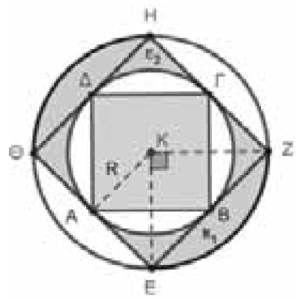
$$E_1 = \left(Κ.\widehat{ΕΖ}\right) - (ΚΕΖ) = \frac{π \cdot ρ^2 \cdot 90}{360} - \frac{1}{2}ρ^2 =$$

$$= \frac{π \cdot ρ^2}{4} - \frac{ρ^2}{2} = \frac{π \cdot ρ^2}{4} - \frac{2ρ^2}{4} = \frac{(π-2)ρ^2}{4} =$$

$$\frac{(π-2)\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} =$$

$$\frac{(π-2) \cdot 2R^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$E_1 = \frac{(π-2) \cdot R^2}{2}.$$



Είναι ακόμα $4E_2 = (ΕΖΗΘ) - E_{(Κ,R)}$

ή $4E_2 = 4R^2 - πR^2 = (4-π)R^2$.

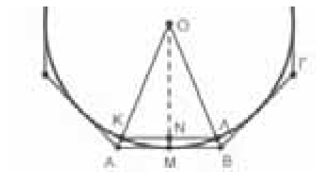
Επομένως είναι $E = 2E_1 + 4E_2 =$

$$= 2 \cdot \frac{(π-2) \cdot R^2}{2} + 4R^2 - πR^2 =$$

$$= (π-2)R^2 + 4R^2 - πR^2 =$$

$$= πR^2 - 2R^2 + 4R^2 - πR^2 = 2R^2.$$

7. Ένα κανονικό δωδεκάγωνο πλευράς λ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο. Να βρεθεί συναρτήσει του λ η πλευρά του δωδεκαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.



Λύση: Τα κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια με λόγο ομοιότητας το λόγο των πλευρών, των αποστημάτων και των ακτίνων τους.

Αν είναι $ΚΛ = λ_{12}$ η πλευρά και $ΟΝ = α_{12}$ το απόστημα του εγγεγραμμένου στον κύκλο ακτίνας R κανονικού δωδεκαγώνου και ΑΒ=λ, ΟΜ=α η πλευρά και το απόστημα του περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο κανονικού δωδεκαγώνου, τότε λόγω της ομοιότητας των δύο πολυγώνων είναι:

$$\frac{λ_{12}}{λ} = \frac{α_{12}}{α} \Leftrightarrow λ_{12} = \frac{λ}{α} \cdot α_{12} \quad \textbf{(1)}$$

Είναι όμως α=R, $α_{12}^2 = \dfrac{R}{2} \cdot \left(R + α_6\right)$ *(δες το σχόλιο στη σελίδα 241 του σχολικού βιβλίου)*, και $α_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ οπότε έχουμε:

$$α_{12}^2 = \frac{R}{2} \cdot \left(R + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) \text{ ή}$$

$$α_{12} = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ οπότε η (1) δίνει:}$$

$$λ_{12} = \frac{λ}{R} \cdot \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ και τελικά } λ_{12} = \frac{λ}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Κωνικές Τομές

Γιώργος Τσαβαρής, Χρήστος Π. Τσιφάκης

Άσκηση 1. Δίνονται τα σημεία $A(-2,2)$ και $B(2,4)$.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$, τέτοια ώστε $\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2=2\lambda$ είναι σημεία κύκλου C_λ αν και μόνο αν $\lambda>5$.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του λ, ο C_λ εφάπτεται εξωτερικά με τον

$$(C):(x-4)^2+y^2=1.$$

Λύση

α. Έχουμε ότι $\overrightarrow{AM}=(x+2,y-2)$ και $\overrightarrow{BM}=(x-2,y-4)$. Άρα για $\lambda\geq 0$ έχουμε

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2=2\lambda\Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2+(x-2)^2+(y-4)^2=2\lambda\Leftrightarrow$$

$$2x^2+2y^2-12y+28=2\lambda\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-6y+14-\lambda=0\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=\lambda-5.$$

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο αν και μόνον άν $\lambda>5$ με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $R=\sqrt{\lambda-5}$.

β. Ο κύκλος C έχει κέντρο το σημείο $P(4,0)$ και ακτίνα $p=1$. Για $\lambda>5$ οι κύκλοι C και C_λ εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο άν

$$\left|\overrightarrow{KP}\right|=R+p\Leftrightarrow 5=\sqrt{\lambda-5}+1\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\lambda-5}=4\Leftrightarrow\lambda=21.$$

Άσκηση 2. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C):(x-3)^2+(y-2)^2=1$ και το σημείο $M(1,1)$.

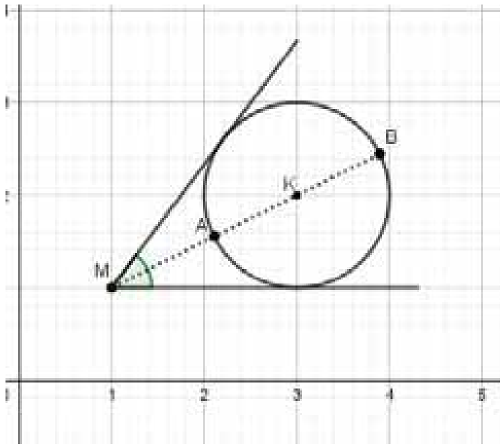
α) Δείξτε ότι το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

β) Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από το Μ και να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζουν

γ) Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση από το σημείο Μ καθώς και τις συντεταγμένες τους.

Λύση

α) Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(3,2)$ και ακτίνα $R=1$. Η απόσταση $\left|\overrightarrow{KM}\right|=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}>1=R$. Άρα το σημείο Μ είναι εξωτερικό του κύκλου.



β) Από το σημείο Μ διέρχονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1):x=1$ απορρίπτεται, (γιατί;) και οι $(\varepsilon_\lambda):y-1=\lambda(x-1)\Leftrightarrow\lambda x-y+1-\lambda=0$. Πρέπει

$$d(K,(\varepsilon_\lambda))=R\Leftrightarrow\frac{|3\lambda-2+1-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{|2\lambda-1|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda+1=\lambda^2+1\Leftrightarrow$$

$$3\lambda^2-4\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0 \text{ ή } \lambda=\frac{4}{3}, \text{ δεκτές.}$$

Άρα οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι $(\varepsilon_1):y=1$ και $(\varepsilon_2):4x-3y-1=0$.

Παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη ευθεία (ε_1) είναι παράλληλη στον $x'x$, άρα η εφαπτομένη της γωνίας που θα σχηματίζουν οι εφαπτόμενες είναι ίση με την κλίση της (ε_2), δηλαδή η

$$\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\left(O\hat{x,(\varepsilon_2)}\right)=\frac{4}{3}$$

γ) Εφαρμόζουμε τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΜΚΛ (Λ το σημείο επαφής εφαπτομένης και κύκλου) αν η ευθεία $(KM):x-2y+1=0$ τέμνει τον κύκλο στα A,B αντίστοιχα, τότε έχουμε

$MK - K\Lambda \le M\Lambda \le MK + K\Lambda \Leftrightarrow$
$MK - KA \le M\Lambda \le MK + KB \Leftrightarrow MA \le M\Lambda \le MB$,
οπότε η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση είναι:
$d_{min} = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MK}\right| - R = \sqrt{5} - 1$ και
$d_{max} = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MK}\right| + R = \sqrt{5} + 1$. Λύνουμε το σύστημα, της ευθείας (KM) και του κύκλου (C)
$\left.\begin{matrix}(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ x - 2y + 1 = 0\end{matrix}\right\}$ και βρίσκουμε τα σημεία
$A\left(3 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ και
$B\left(3 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Άσκηση 3. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\left|\vec{\alpha}\right| \cdot x + 6\left|\vec{\beta}\right| \cdot y + 12\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) είναι εξίσωση κύκλου (C) με κέντρο $K\left(2\left|\vec{\alpha}\right|, -3\left|\vec{\beta}\right|\right)$ και ακτίνα $R = \left|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right|$.

β) Αν το κέντρο του κύκλου (C) ανήκει στην ευθεία $(\delta): 2x + 3y + 2 = 0$ και η εφαπτομένη (ε) του (C) στο $\Lambda\left(\left|\vec{\alpha}\right|, -6\left|\vec{\beta}\right|\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{2}{3}$.

i) Να δείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}\right| = 4$, $\left|\vec{\beta}\right| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$

ii) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 11\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Λύση

α) $x^2 + y^2 - 4\left|\vec{\alpha}\right| \cdot x + 6\left|\vec{\beta}\right| \cdot y + 12\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4\left|\vec{\alpha}\right| \cdot x + 4\left|\vec{\alpha}\right|^2 + y^2 + 6\left|\vec{\beta}\right| \cdot y + 9\left|\vec{\beta}\right|^2 =$

$= 4\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 9\left|\vec{\beta}\right|^2 - 12\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - 2\left|\vec{\alpha}\right|\right)^2 + \left(y + 3\left|\vec{\beta}\right|\right)^2 = \left(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right)^2$.

Αν $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \frac{3}{2}\vec{\beta}$ οπότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, άτοπο.

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(2\left|\vec{\alpha}\right|, -3\left|\vec{\beta}\right|\right)$ και ακτίνα $R = \left|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right|$.

β) i) Αφού το κέντρο του κύκλου (C) ανήκει στην ευθεία $(\delta): 2x + 3y + 2 = 0$ και η εφαπτομένη (ε) του (C) στο $\Lambda\left(\left|\vec{\alpha}\right|, -6\left|\vec{\beta}\right|\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{2}{3}$ έχουμε $4\left|\vec{\alpha}\right| - 9\left|\vec{\beta}\right| + 2 = 0$ και

$\lambda_{\varepsilon\varphi} \cdot \lambda_{\Lambda K} = -1 \Leftrightarrow \frac{3\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\right| = 2\left|\vec{\beta}\right|$.

Λύνουμε το σύστημα και προκύπτει $\left|\vec{\alpha}\right| = 4$ και $\left|\vec{\beta}\right| = 2$.

Από $\left|\overrightarrow{\Lambda K}\right| = R \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

ii) Έχουμε $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(2\vec{\alpha} - 11\vec{\beta}\right) =$

$6\vec{\alpha}^2 - 35\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 11\vec{\beta}^2 = 96 - 140 + 44 = 0$.

Άρα $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Άσκηση 4. Δίνεται ο κύκλος $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ και η ευθεία $(\varepsilon): (2\lambda + 1)x - (\lambda - 1)y + 3 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει κοινά σημεία με τον κύκλο (C) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ευθεία (ε)

i. είναι εφαπτομένη του κύκλου

ii. ορίζει χορδή στον κύκλο (C) με μέγιστο μήκος

iii. ορίζει χορδή στον κύκλο (C) με μήκος $2\sqrt{2}$

[https://mathematica.gr/forum/ viewtopic.php]

Λύση

α. Η εξίσωση της (ε) γίνεται

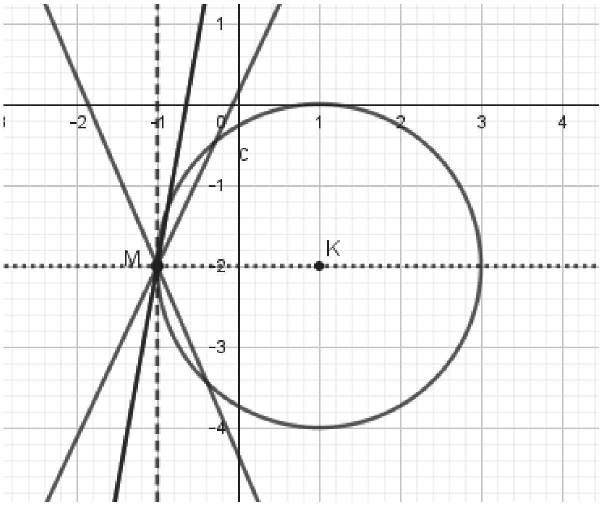
$(2\lambda + 1)x - (\lambda - 1)y + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$(2x - y)\lambda + (x + y + 3) = 0$ και διέρχεται από σταθερό σημείο αν και μόνο αν

$$\left.\begin{matrix}2x - y = 0 \\ x + y + 3 = 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}y = -2 \\ x = -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow M(-1, -2).$$

Άρα η ευθεία (ε) διέρχεται από το σταθερό σημείο $M(-1,-2)$ για κάθε $\lambda \in R$.

β. Ο κύκλος $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4$ έχει κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=2$.



Η (ε) τέμνει τον κύκλο (C) αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon)<\rho$. Ακόμα η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon)=\rho$.

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|(2\lambda+1)\cdot 1+2\cdot(\lambda-1)+3|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}=$$

$$\frac{|4\lambda+2|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}=\frac{2|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}$$

Έχουμε ότι, $d(K,\varepsilon)\le\rho \Leftrightarrow$

$$\frac{|4\lambda+2|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}\le\rho$$

$$|2\lambda+1|\le\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}\le 1$$

Η ισότητα ισχύει αν $\dfrac{|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}=1 \Leftrightarrow$

$$|2\lambda+1|=\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$|2\lambda+1|^2=(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2 \Leftrightarrow \lambda=1.$$

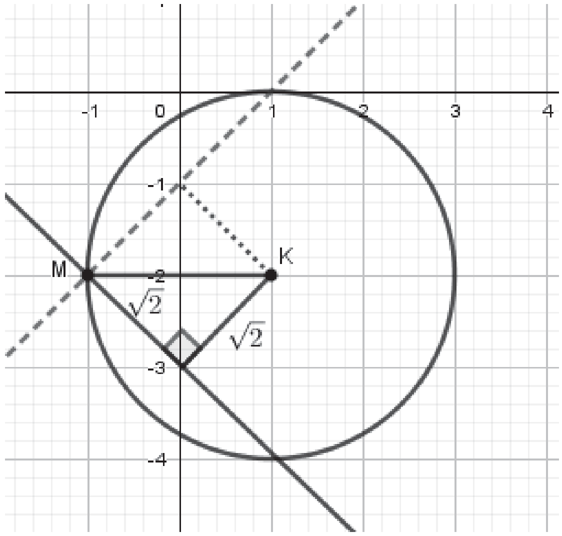
Για $\lambda=1$, η ευθεία είναι η $x=-1$ που είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο $(-1,-2)$ ενώ για $\lambda\neq 1$ η (ε) τέμνει τον κύκλο.

γ. i. Για $\lambda=1$, όπως είδαμε η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο.

ii. Η χορδή με το μέγιστο μήκος είναι η διάμετρος του κύκλου.

Για $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ έχουμε την ευθεία $y=-2$, η οποία είναι διάμετρος του κύκλου.

iii. Επειδή σχηματίζεται χορδή με μήκος $2\sqrt{2}$, φέρνουμε το απόστημα και εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα, οπότε προκύπτει ότι $d(K,\varepsilon)=\sqrt{2}$.



Άρα $d(K,\varepsilon)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|4\lambda+2|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{2}\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}=|4\lambda+2| \Leftrightarrow$$

$$2(2\lambda+1)^2+2(\lambda-1)^2=(4\lambda+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$8\lambda^2+8\lambda+2+2\lambda^2-4\lambda+2=16\lambda^2+16\lambda+4 \Leftrightarrow$$

$$6\lambda^2+12\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-2.$$

Άσκηση 5. Δίνεται η εξίσωση

$$(C_\lambda): x^2+y^2-\rho^2+\lambda\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2}x-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}y-\rho^2\right)=0$$

όπου λ παράμετρος με $\lambda>-2$ και $\rho>0$ σταθερός αριθμός.

i) Να δείξετε ότι η (C_λ) παριστάνει οικογένεια κύκλων για κάθε τιμή του $\lambda>-2$.

ii) Να βρεθεί η γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των κύκλων (C_λ).

iii) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι (C_λ) διέρχονται από σταθερό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη (ε).

iv) Αν B,Γ είναι τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $OB\Gamma$ (O αρχή των αξόνων) ανήκει στην οικογένεια (C_λ)

[Διαγωνισμός Ξανθόπουλος 2013]

Λύση

i) Η εξίσωση $x^2+y^2-\rho^2+\lambda\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2}x-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}y-\rho^2\right)=0$ γίνεται: $x^2+\lambda\frac{\rho\sqrt{2}}{2}x+y^2-\lambda\frac{\rho\sqrt{2}}{2}y-\rho^2(1+\lambda)=0\Leftrightarrow$ $\left(x^2+\lambda\frac{\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(y-\lambda\frac{\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2=\left(\frac{\rho}{2}(\lambda+2)\right)^2>0$ γιατί $\rho>0$ και $\lambda>-2$. Άρα η εξίσωση (C_λ) παριστάνει οικογένεια κύκλων με κέντρα $K\left(-\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4},\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)$ και ακτίνα $R=\frac{\rho(\lambda+2)}{2}$

ii) Τα κέντρα $K\left(-\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4},\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)$ ανήκουν στην ευθεία $y=-x$ και επειδή $\rho>0$ και $\lambda>-2$ έχουμε

$$\lambda\rho>-2\rho\Rightarrow\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}>-\frac{2\rho\sqrt{2}}{4}\Rightarrow$$
$$-\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}<\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x<\frac{\rho\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των κύκλων για τις διάφορες τιμές του $\lambda>-2$, είναι η ημιευθεία Ax με $A\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2},-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right)$, χωρίς το A και στην οποία ανήκει το $O(0,0)$.

iii) Για $\lambda=0$, $(C_0): x^2+y^2=\rho^2$ (1)

Για $\lambda=-1$,

$(C_{-1}): x^2+y^2-\rho^2-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}x+\frac{\rho\sqrt{2}}{2}y+\rho^2=0$ (2)

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) παίρνουμε $\rho^2-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}x+\frac{\rho\sqrt{2}}{2}y=0\Leftrightarrow y=x-\rho\sqrt{2}$ (3).

Από τις (1) και (3) προκύπτει

$$2y^2+2\rho\sqrt{2}y+\rho^2=0$$

Η τελευταία εξίσωση με $\Delta=0$ δίνει διπλή ρίζα $y=-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$ και από την (3) παίρνουμε $x=\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως κοινό σημείο είναι το $A\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2},-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right)$ το οποίο επαληθεύει την (C_λ) Άρα ανήκει σε όλους τους κύκλους της οικογένειας.

Η εφαπτομένη του (C_0) στο A είναι η ευθεία $\frac{\rho\sqrt{2}}{2}x-\frac{\rho\sqrt{2}}{2}y-\rho^2=0\Leftrightarrow x-y-\rho\sqrt{2}=0$

Επίσης $d(K,(\varepsilon))=\frac{\left|-\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}-\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}-\rho\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=$

$\frac{|2\lambda\rho\sqrt{2}+4\rho\sqrt{2}|}{4\sqrt{2}}=\frac{|2\lambda\rho\sqrt{2}+4\rho\sqrt{2}|}{4\sqrt{2}}=$

$=\frac{|\lambda\rho+2\rho|}{2}=\frac{\rho(\lambda+2)}{2}=R$.

Οπότε η (ε) είναι εφαπτομένη όλων των κύκλων (C_λ).

iv) Η $(\varepsilon): x-y-\rho\sqrt{2}=0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ για $y=0$ στο σημείο $B(\rho\sqrt{2},0)$, και τον άξονα $y'y$ για $x=0$ στο σημείο $\Gamma(0,-\rho\sqrt{2})$. Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές ($|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{O\Gamma}|$) και ορθογώνιο. Άρα ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στην (ε), έχει το κέντρο του πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{O}\Gamma$ που είναι η ευθεία $y=-x$. Άρα το κέντρο του είναι $\Theta(x_o,y_o)$, με $x_o>0$ και $x_o<\rho\sqrt{2}$.

Ισχύει $d(\Theta,(\varepsilon))=x_o\Leftrightarrow\frac{|x_o+x_o-\rho\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=x_o\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|2x_o-\rho\sqrt{2}|=x_o\sqrt{2}\Leftrightarrow(x_o\sqrt{2}-\rho)^2=x_o^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_o^2-2\rho\sqrt{2}x_o+\rho^2=0\overset{\Delta=4\rho^2}{\Leftrightarrow}x=\rho(\sqrt{2}\pm1)$.

Από αυτές δεκτή είναι η $x_o=\rho(\sqrt{2}-1)$ γιατί $x_o<\rho\sqrt{2}$.

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει τιμή του $\lambda>-2$ ώστε να ισχύουν: $x_o=-\frac{\rho\sqrt{2}}{4}, y_o=-\frac{\rho\sqrt{2}}{4}$ και $x_o=R=\frac{\rho(\lambda+2)}{2}$, από όπου προκύπτει ότι $\lambda=-2(2-\sqrt{2})>-2$. Οπότε ο εγγεγραμμένος κύκλος $C(\Theta,x_o)\in(C_\lambda)$

Τάξη: Γ΄ — Συναρτήσεις-Όριο-Συνέχεια

Κυριάκος Καμπούκος, Βασίλης Καρκάνης, Αντώνιος Μαγουλάς

Άσκηση 1η

Δίνονται οι συναρτήσεις g,h με τύπους:

$$g(x)=\frac{\sqrt{3x^2+30x+95}}{4}-\frac{\lambda}{4}(3x+5),\ \lambda\in R \text{ και}$$

$$h(x)=\frac{4x-5}{3}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f=g\circ h$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έχει τύπο:

$$f(x)=(goh)(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x$$

β) Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Για την τιμή του πραγματικού αριθμού λ, για την οποία το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, να υπολογίσετε την τιμή των ορίων:

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)+2x}{x^4+x-14} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{f(x)+x}$$

Λύση

α) Είναι $D_g=D_h=\Re$ (γιατί;). Το πεδίο ορισμού A_1 της $g\circ h$ είναι:

$$A_1=\{x\in D_h: h(x)\in D_g\}=\{x\in\Re: \frac{4x-5}{3}\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

οπότε ορίζεται η σύνθεση και έχει τύπο:

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))$$

$$=\ldots=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x=f(x)$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right)$

$$=\ldots=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)\ (1).$$ Όμως

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$$

οπότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $1-\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<1$ τότε λόγω της (1) είναι
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

2. Αν $1-\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>1$ τότε λόγω της (1) είναι
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

3. Αν $1-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=1$ τότε
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)=\ldots=\frac{5}{2}$$

γ) Λόγω β) για $\lambda=1$ είναι $f(x)=\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)$

οπότε: $$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)+2x}{x^4+x-14}=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5x+10}+x}{x^4+x-14}\overset{\frac{0}{0}}{=}\ldots$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{5(x+2)}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-7)\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)}$$

$$=-\frac{5}{124}$$

Επίσης: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{f(x)+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{x^2+5x+10}}=0$$

γιατί:

$$\left|\frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|=\frac{|\eta\mu^3 x|}{\left|\sqrt{x^2+5x+10}\right|}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}$$

άρα

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\le\frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{x^2+5x+10}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right)=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{x^2+5x+10}}=0.$$

Άσκηση 2η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

ε) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$.

Λύση

α) $\frac{1+x}{1-x}>0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x)>0 \Leftrightarrow -1<x<1$ άρα
A= $(-1,1)$.

β) Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ τότε $-1 < x_1 < x_2 < 1$ οπότε $0 < 1 + x_1 < 1 + x_2$ (1) και $0 < \dfrac{1}{1-x_1} < \dfrac{1}{1-x_2}$ (2).

Λόγω των (1),(2) είναι: $\dfrac{1+x_1}{1-x_1} < \dfrac{1+x_2}{1-x_2} \overset{\ln x \nearrow}{\Rightarrow}$

$\ln\dfrac{1+x_1}{1-x_1} < \ln\dfrac{1+x_2}{1-x_2} \Rightarrow \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Σχόλιο:

Η μονοτονία της f μπορεί να προκύψει αν γράψουμε τον τύπο της στη μορφή

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x} - 1\right)$$

γ) Λόγω του β) και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής έχουμε:

$$f(A) = \left(\lim_{x\to -1^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \Re$$

(γιατί;)

δ) Λόγω του β) η f είναι '1–1' άρα αντιστρέφεται και λόγω του γ) η $f^{-1}: \Re \to (-1,1)$. Για τον τύπο της f^{-1} θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = y \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \Re$.

ε) Λόγω του γ) το $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ και $f(x) \neq 0$ για x κοντά στο 1 οπότε αν θέσουμε $u = \dfrac{1}{f(x)}$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} u = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)} = 0$ οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u} = 1$$

Άσκηση 3η

Για τις διάφορες τιμές του $α \in \Re$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ όπου:

$$\mathbf{g(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \frac{αx^2 + 3x + 2}{2x+1}}$$

Λύση

Προφανώς η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(κ, +\infty)$, $κ > 0$ (γιατί;). Είναι

$$g(x) = \sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - \frac{x^2\left(α + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= |x|\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\frac{α + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\overset{|x|=x}{=}}$$

$$x\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{α + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}\right) \quad (1).$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{α + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}\right) = 2 - \frac{α}{2} \text{ οπότε}$$

διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $2 - \dfrac{α}{2} > 0 \Leftrightarrow α < 4$ τότε λόγω της (1) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. Αν $2 - \dfrac{α}{2} < 0 \Leftrightarrow α > 4$ τότε λόγω της (1) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

3. Αν $2 - \dfrac{α}{2} = 0 \Leftrightarrow α = 4$ τότε η g γράφεται:

$$g(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \frac{4x^2 + 3x + 2}{2x+1}$$

Κάνοντας την ευκλείδεια διαίρεση $(4x^2 + 3x + 2):(2x+1)$ βρίσκουμε πηλίκο $2x + \dfrac{1}{2}$ και υπόλοιπο $\dfrac{3}{2}$ οπότε

$$\frac{4x^2 + 3x + 2}{2x+1} = 2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{4x+2}$$

και έτσι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x - \frac{1}{2} - \frac{3}{4x+2}\right) =$$

$\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 0 = -\dfrac{1}{4}$ γιατί:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2 + x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \ldots = \frac{1}{4} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4x+1} = 0. \text{ Άρα: } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}, & α = 4 \\ +\infty, & α < 4 \\ -\infty, & α > 4 \end{cases}.$$

Σχόλιο:
Το όριο της g(x) υπολογίζεται χωρίς την βοήθεια της διαίρεσης αν γράψουμε:

$$g(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-2x+\left(2x-\frac{4x^2+3x+2}{2x+1}\right)$$

Άσκηση 4η

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο 0, τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\Re$.

Λύση

Θεωρούμε τυχόν $x_0\in\mathbb{R}$ και θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ (1). Επίσης αν στην αρχική σχέση θέσουμε $x=y=0$ προκύπτει $f(0)=0$ (γιατί;), άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Για κάθε $h\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x_0+h)=f(x_0)\,\sigma\upsilon\nu h+f(h)\sigma\upsilon\nu x_0$$

επομένως $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x_0$ $\lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(x_0)$ (λόγω (1)) άρα η f είναι συνεχής $\Re$.

Άσκηση 5η

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x-3=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα (2,3).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-3x-3$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [2,3] και επίσης $f(2)\cdot f(3)<0$ (γιατί;), οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=0$. Τότε η συνάρτηση f παραγοντοποιείται ως εξής:

$$f(x)=(x-\rho)\cdot(x^2+\rho x+\rho^2-3)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2+\rho x+\rho^2-3$ είναι $\Delta=\rho^2-4\rho^2+12=-3\rho^2+12=3(4-\rho^2)$ και επειδή $\rho>2$ έπεται $\Delta<0$. Επομένως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της f.

Άσκηση 6η

Έστω η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)\in\mathbb{Z}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή. Τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\neq f(x_2)$. Μεταξύ των αριθμών $f(x_1)$, $f(x_2)$ που είναι ακέραιοι, θα υπάρχει αριθμός α ο οποίος δεν είναι ακέραιος. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[x_1,x_2]$ θα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\alpha$, το οποίο είναι άτοπο, διότι $\alpha\notin\mathbb{Z}$. Άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Άσκηση 7η

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f^5(x)+f^3(x)+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

α) $|f(x)|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η f είναι συνεχής στο 0.

Λύση

α) Η δοσμένη ισότητα που ισχύει για κάθε Για τη $x\in\mathbb{R}$ γράφεται: $f(x)\cdot(f^4(x)+f^2(x)+1)=x$ (1) οπότε $|f(x)|\ (f^4(x)+f^2(x)+1)=|x|$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f^4(x)+f^2(x)+1\ge 1$, έπεται $|f(x)|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Λόγω του α) ισχύει: $-|x|\le f(x)\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$,άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Επιπλέον αν θέσουμε $x=0$ στην (1) παίρνουμε $f(0)=0$. Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 8η

Έστω συνεχής συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x)\neq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\ \text{και}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$$

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι 1–1.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f^2(x)-x}{x-1}+\frac{f(x)-x-2}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής και για κάθε

$x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\neq 0$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $g(0)=1>0$, έχουμε $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε και $f(x)>x^2$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, κατά συνέπεια (λόγω (1)) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$-\frac{2}{f(x)}\leq\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\frac{2}{f(x)}$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$ με $f(-2)>4$ λόγω (1), άρα $f(0)=1<2<f(-2)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_1\in\left(-2,0\right)$ ώστε $f(x_1)=2$. Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$ με $f(2)>4$ (λόγω (1)), άρα $f(0)=1<2<f(2)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_2\in(0,2)$ ώστε $f(x_2)=2$.

Επομένως, υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)=2$ οπότε η συνάρτηση f δεν είναι 1–1.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x|>2$ ισχύει $x^2>4$ άρα λόγω της (1) και $f(x)>4$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-2,2]$ άρα παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $x_0\in[-2,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)\leq f(x)$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

Επίσης $f(x_0)\leq f(0)=1<4$, άρα $f(x_0)\leq f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή η f στο x_0 παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

δ) Η εξίσωση $\frac{f^2(x)-x}{x-1}+\frac{f(x)-x-2}{x-2}=0$ στο διάστημα (1,2) γράφεται ισοδύναμα

$$(x-2)\,(f^2(x)-x)+(x-1)(f(x)-x-1)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=(x-2)\,(f^2(x)-x)+(x-1)(f(x)-x-1),$$

$x\in\left[1,2\right]$. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο [1,2] ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Επίσης $h(1)=-(f^2(1)-1)<0$ (γιατί;) και $h(2)=f(2)-3>0$ (γιατί;). Άρα $h(1)h(2)<0$ και από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Άσκηση 9η

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)+x=0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

Λύση

Έστω $g(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (γιατί;) άρα έχει το πολύ μία ρίζα. Απομένει να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας ρίζας. Αν ισχύει $f(0)=0$ τότε το ζητούμενο ισχύει. Υποθέτουμε $f(0)>0$.

Τότε $g(0)>0$.

Επιλέγουμε α με $\alpha<-f(0)$ (1), τότε $\alpha<0$, οπότε $f(\alpha)<f(0)$ (2) (γιατί;). Από τις (1) και (2) έπεται $\alpha+f(\alpha)<0\Rightarrow g(\alpha)<0$. Άρα $g(\alpha)g(0)<0$ και από Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_1\in(\alpha,0)$ ώστε $g(x_1)=0$.

Υποθέτουμε $f(0)<0$ τότε και $g(0)<0$. Επιλέγουμε β με $\beta>-f(0)$ (3). Τότε $\beta>0$ οπότε $f(\beta)>f(0)$ (4). Από τις (3) και (4) έπεται $\beta+f(\beta)>0\Rightarrow g(\beta)<0$. Άρα $g(0)g(\beta)<0$ και από Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_2\in(0,\beta)$ ώστε $g(x_2)=0$.

Άσκηση 10η

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το [0,1] με τις εξής ιδιότητες:

- **Η f είναι γνησίως φθίνουσα**
- **Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύουν $0\leq f(x)\leq 1$ και $0\leq g(x)\leq 1$**
- **$f\circ g=g\circ f$**

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)=x_0$.

Λύση

Έστω $h(x)=f(x)-x$, $x\in[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο [0,1], $h(0)=f(0)\geq 0$ και $h(1)=f(1)-1\leq 0$. Άρα υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$ (γιατί;), οπότε $f(x_0)=x_0$ (1). Θα αποδείξουμε ότι και $g(x_0)=x_0$.

Έστω $g(x_0)>x_0$.

Τότε, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε:

$$f(g(x_0))<f(x_0)\overset{(1)}{\Rightarrow}g(f(x_0))<x_0\overset{(1)}{\Rightarrow}g(x_0)<x_0$$

που είναι άτοπο.

Έστω $g(x_0)<x_0$.

Τότε, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε

$$f(g(x_0))>f(x_0)\overset{(1)}{\Rightarrow}g(f(x_0))>x_0\overset{(1)}{\Rightarrow}g(x_0)>x_0$$

που είναι άτοπο.

Επομένως $g(x_0)=x_0$.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Σχετικά με ένα σχόλιο από το σχολικό βιβλίο

Διονύσης Γιάνναρος – Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

> ***Σχόλιο:***
> Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 αν και μόνο αν:
> - Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
> - Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Με βάση τα προηγούμενα, η συνάρτηση f θα είναι 1 – 1, όταν για κάθε $c\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=c$ θα έχει το πολύ μία ρίζα.

Για την συνέχεια χρησιμοποιούμε τις προτάσεις:

- Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$, $\alpha<b$ είναι συνεχής και 1 – 1 στο $[\alpha,b]$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,b]$ (1).

  Για την απόδειξη της πρότασης αυτής χρησιμοποιούμε το επόμενο:

- Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$, $\alpha<b$ είναι συνεχής και 1 – 1 στο $[\alpha,b]$ τότε η εικόνα του τυχόντος $x_0\in(\alpha,b)$ θα βρίσκεται αυστηρά μεταξύ των εικόνων των $f(\alpha)$ και $f(b)$.

Απόδειξη: Επειδή η f είναι 1 – 1, θα είναι $f(\alpha)\neq f(b)$ και για το τυχόν $x_0\in(\alpha,b)$ επίσης θα είναι $f(\alpha)\neq f(x_0)$ και $f(x_0)\neq f(b)$. Έστω ότι $f(\alpha)<f(b)$, οπότε θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha)<f(x_0)<f(b)$.

Αν είναι $f(x_0)\le f(\alpha)<f(b)$, τότε σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ θα υπάρχει $x_1\in(x_0,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(\alpha)$, το οποίο είναι άτοπο, επειδή η f είναι 1 – 1. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(b)\le f(x_0)$. Συνεπώς θα έχουμε ότι $f(\alpha)<f(x_0)<f(b)$.

Με όμοια αντιμετώπιση αποδεικνύουμε ότι αν $f(b)<f(\alpha)$ θα είναι $f(b)<f(x_0)<f(\alpha)$.

Για την απόδειξη της (1) υποθέτουμε ότι $f(\alpha)<f(b)$, οπότε θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Αρκεί για τούτο να αποδείξουμε ότι για τυχόντα $x_1,x_2\in(\alpha,b)$ τέτοια ώστε $x_1<x_2$ να ισχύει $f(\alpha)<f(x_1)<f(x_2)<f(b)$. Έστω $x_1,x_2\in(\alpha,b)$ τέτοια ώστε $x_1<x_2$. Από την προηγούμενη απόδειξη έχουμε $x_2\in(\alpha,b)\Rightarrow f(\alpha)<f(x_2)<f(b)$ (2) και $x_1\in(\alpha,x_2)\Rightarrow f(\alpha)<f(x_1)<f(x_2)$ (3). Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε $\alpha<x_1<x_2<b\Rightarrow f(\alpha)<f(x_1)<f(x_2)<f(b)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,b]$. Ομοίως αν υποθέσουμε ότι $f(b)<f(\alpha)$ αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, τότε με οποιαδήποτε ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+b$ έχει το πολύ δύο κοινά σημεία

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ευθεία που ν τέμνει την γραφική παράσταση της f σε τρία (διαφορετικά) σημεία. Έστω ε μία τυχούσα ευθεία. Αν η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, τότε έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f.

Έστω ότι η ευθεία δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, οπότε θα έχει εξίσωση $y=kx+\lambda$ $k,\lambda\in\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=kx+\lambda$, $x\in\Delta$ έχει το πολύ δύο ρίζες. Έστω ότι έχει τρείς ρίζες $p_1,p_2,p_3\in\Delta$ με $p_1<p_2<p_3$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=f(x)-kx-\lambda$, $x\in\Delta$. Είναι $g(p_1)=g(p_2)=g(p_3)=0$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ αφού η f είναι παραγωγίσιμη ως κυρτή (κοίλη) με $g'(x)=f'(x)-k$. Έτσι από το θεώρημα Rolle για την g στα διαστήματα $[p_1,p_2]$, $[p_2,p_3]$, υπάρχουν ξ,μ στο εσωτερικό του Δ, $p_1<\xi<p_2$, $p_2<\mu<p_3$ με $g'(\xi)=g'(\mu)=0$ ή $f'(\xi)=k=f'(\mu)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή η συνάρτηση f, ως κυρτή (κοίλη) θα έχει εξ' ορισμού παράγωγο γνησίως μονότονη στο εσωτερικό του Δ, άρα η f' είναι 1 – 1, ενώ είναι $\xi<\mu$.

Εφαρμογές

1. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

[σχ. βιβλίο 2/(ii), σελ. 285].

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $c\in\mathbb{R}$ θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=c$. Αν αποδείξουμε ότι η $f(x)=c$ έχει το πολύ μία ρίζα ως προς x, σύμφωνα με την πρόταση 1. η συνάρτηση θα είναι γνησίως μονότονη.

Είναι $f(x)=c \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}-x=c \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=c+x \Leftrightarrow 1+x^2=c^2+2cx+x^2 \Leftrightarrow 2cx=1-c^2$.

Παρατηρούμε ότι η τελευταία εξίσωση για τις διάφορες τιμές του c έχει το πολύ μία ρίζα, που σημαίνει ότι η f είναι 1 – 1. Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη και επειδή $f(0)=1>f(1)=\sqrt{2}-1$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

[σχ. βιβλίο 2/(vi), σελ. 156]

Απόδειξη: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $c\in\mathbb{R}$ θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=c$ δηλαδή την $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=c$ ή μετά από πράξεις $(1-c)\cdot e^x=c+1$. Η τελευταία για κάθε c, έχει το πολύ μια ρίζα ως προς x, επομένως η f είναι 1 – 1. Η f είναι συνεχής και 1 – 1 συνεπώς είναι γνησίως μονότονη και επειδή $f(1)=\dfrac{e-1}{e+1}>0=f(0)$, η συνάρτηση f θα είναι γνησίως αύξουσα.

3. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ είναι γνησίως μονότονη

[σχ. βιβλίο 6/σελ.339]

Απόδειξη: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $c\in\mathbb{R}$, θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=c$ δηλαδή την $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=c$ η οποία ισοδύναμα μετασχηματίζεται σε $x+\sqrt{x^2+1}=e^c$ ή $\sqrt{x^2+1}=e^c-x$. Η τελευταία αν $e^c-x<0$ δεν έχει λύση, ενώ αν $e^c-x\geq 0$ με ύψωση στο τετράγωνο γίνεται: $x^2+1=e^{2c}-2x\cdot e^c+x^2$ ή $2e^c\cdot x=e^{2c}-1$ και έχει μοναδική λύση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι 1 – 1 και επειδή είναι και συνεχής θα είναι γνησίως μονότονη. Είναι επίσης $f(0)=0<\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=f(1)$ δηλαδή η f [$\mathbb{R}$.

4. Ποιος από τους δύο αριθμούς $\dfrac{23^{2018}+1}{23^{2019}+1}$, $\dfrac{23^{2019}+1}{23^{2020}+1}$ είναι μεγαλύτερος;

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{23^x+1}{23\cdot 23^x+1}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $c\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=c$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $(1-23c)\cdot 23^x=c-1$, η οποία έχει το πολύ μία ρίζα. Συνεπώς η f είναι 1 – 1 και επομένως είναι γνησίως μονότονη. Είναι $f(0)=\dfrac{1}{12}>\dfrac{12}{265}=f(1)$, άρα η f] $\mathbb{R}$. Τελικά έχουμε ότι $f(2018)>f(2019)$, δηλαδή $\dfrac{23^{2018}+1}{23^{2019}+1}>\dfrac{23^{2019}+1}{23^{2020}+1}$.

5. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Για κάθε $c>0$ θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=c$ ή $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=c$. Θέτουμε $\frac{1}{x}=u$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση $(1+u)^{\frac{1}{u}}=c$ ή $1+u=c^u$, $u\in(0,+\infty)$.
Η συνάρτηση c^u είναι κυρτή και η παραπάνω εξίσωση $1+u=c^u$ αφορά την εύρεση του πλήθους των κοινών σημείων ευθείας και κυρτής συνάρτησης.
Από την πρόταση 2. γνωρίζουμε ότι η εξίσωση αυτή θα έχει το πολύ δύο ρίζες μία των οποίων είναι η $u=0$. Επομένως η εξίσωση $1+u=c^u$ έχει το πολύ μία ρίζα που σημαίνει ότι και η εξίσωση $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=c$ έχει το πολύ μία ρίζα. Τότε όμως η συνάρτηση f θα είναι 1 – 1 και λόγω του ότι είναι και συνεχής θα είναι γνησίως μονότονη με $f(1)=2<\frac{9}{4}=f(2)$, δηλαδή η f $<$ $(0,+\infty)$.

6. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση με θετικές τιμές είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ θα είναι γνησίως αύξουσα και αντίστροφα.

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}}=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Θεωρούμε την εξίσωση $g(x)=c$ με $c>0$. Είναι $\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}=c$ και αν θέσουμε $\frac{1}{x+1}=u$ καταλήγουμε στην εξίσωση $(1-u)^{\frac{1}{u}}=c$ ή στην $1-u=c^u$. Η τελευταία αφορά κοινά σημεία ευθείας και κυρτής συνάρτησης και επομένως έχει το πολύ δύο ρίζες, μία των οποίων είναι η $u=0$. Επομένως η εξίσωση $1-u=c^u$ έχει το πολύ μία ρίζα, που σημαίνει ότι και η εξίσωση $\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}=c$ έχει το πολύ μία ρίζα. Τότε η συνάρτηση g είναι 1 – 1 και άρα είναι γνησίως μονότονη με $g(1)=\frac{1}{4}<\frac{8}{27}=g(2)$, δηλαδή g $<$ $(0,+\infty)$, άρα η $\frac{1}{g}$ δηλαδή η συνάρτηση f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

7. Έστω $\alpha>0$. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha,+\infty)$.

Λύση: Στο διάστημα $(\alpha,+\infty)$ η f είναι συνεχής. Την εξίσωση $f(x)=c$ την γράφουμε $1-\frac{\alpha}{x}=c^{-\frac{1}{x}}$.
Στην συνέχεια θέτουμε $u=-\frac{1}{x}$ οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση $1+\alpha u=c^u$. Η τελευταία εξίσωση έχει το πολύ δύο λύσεις μία των οποίων είναι το μηδέν. Επομένως η $1+\alpha u=c^u$ έχει το πολύ μία λύση, δηλαδή και η εξίσωση $\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{-x}=c$ έχει το πολύ μία ρίζα, άρα η συνάρτηση f είναι 1 – 1.
Με βάση αυτά η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και επειδή $f(2\alpha)>f(3\alpha)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha,+\infty)$.

8. **Έστω $0<x\neq 1$. Να συγκριθούν οι αριθμοί: $\log_x(x+1)$ και $\log_{x+1}(x+2)$**

Λύση:

- Αν $0<x<1$ τότε $\log_x(x+1)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}<0<\dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}=\log_{x+1}(x+2)$. Επομένως αν $0<x<1$, τότε $\log_x(x+1)<\log_{x+1}(x+2)$.
- Αν $x>1$ τότε η εξίσωση $\log_x(x+1)=c$ έχει λύση μόνο για $c>1$ γιατί η $\log_x(x+1)=c$ γράφεται $x+1=c^x$ ή $1+\dfrac{1}{x}=c^{x-1}$. Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι συνάρτηση γνησίως φθίνουσα, ενώ με $c>1$ το δεξιό μέλος είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, άρα η εξίσωση $1+\dfrac{1}{x}=c^{x-1}$ θα έχει το πολύ μία λύση.

  Συνεπώς η συνάρτηση $f(x)=\log_x(x+1)$ θα είναι γνησίως μονότονη με $x>1$ με $f(2)=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}>\dfrac{\ln 4}{\ln 3}=f(3)$ δηλαδή η f σ' αυτή την περίπτωση είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς για $x>1$ είναι $\log_x(x+1)>\log_{x+1}(x+2)$.

9. **Αν $\alpha>b>0$, $p>\nu$, τότε να αποδειχτεί ότι $\dfrac{\alpha^p-b^p}{\alpha^p+b^p}>\dfrac{\alpha^\nu-b^\nu}{\alpha^\nu+b^\nu}$**

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha^x-b^x}{\alpha^x+b^x}$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Η εξίσωση $f(x)=c$ ή $\dfrac{\alpha^x-b^x}{\alpha^x+b^x}=c$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\left(\dfrac{\alpha}{b}\right)^x=\dfrac{1+c}{1-c}$, (1). Επομένως αν: $\left[\begin{array}{l}\bullet\ -1<c<1 \text{ η } (1) \text{ έχει μοναδική λύση}\\ \bullet\ c\leq -1 \text{ ή } c>1 \text{ η } (1) \text{ είναι αδύνατη}\end{array}\right]$

Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=c$ έχει το πολύ μία ρίζα, οπότε η f είναι 1 – 1 και σε συνδυασμό με το ότι είναι συνεχής καταλήγουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0<\dfrac{\alpha-b}{\alpha+b}=f(1)$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $p>\nu$ θα είναι $f(p)>f(\nu)$, δηλαδή $\dfrac{\alpha^p-b^p}{\alpha^p+b^p}>\dfrac{\alpha^\nu-b^\nu}{\alpha^\nu+b^\nu}$.

10. **Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$ είναι γνησίως μονότονη.**

Λύση: Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε καθένα από τα δύο αυτά διαστήματα. Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=c$ ή την $\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=c$ για κάθε $c\in\mathbb{R}$. Η τελευταία εξίσωση γράφεται $2^x-1=c\cdot(3^x-1)$ ή $2^x-1-c\cdot(3^x-1)=0$. Έστω $g(x)=2^x-1-c\cdot(3^x-1)$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=2^x\cdot\ln 2-c\cdot 3^x\cdot\ln 3$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $g(x)=0$ θα έχει το πολύ δύο ρίζες. Είναι επίσης $g(0)=0$ άρα για κάθε c η εξίσωση $\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=c$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$. Από το ότι η εξίσωση $\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=c$ έχει το πολύ μία ρίζα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f είναι 1 – 1 τόσο στο $(-\infty,0)$ όσο και στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής σε καθένα απ' αυτά τα διαστήματα θα είναι γνησίως μονότονη. Τα παραπάνω όρια μας υποδεικνύουν ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα τόσο στο $(-\infty,0)$ όσο και στο $(0,+\infty)$

Ανισότητες στις Σεβιανες

Μανώλης Πετράκης [μαθητής Α΄ Λυκείου] **Γιώργος Τσαπακίδης** - Αγρίνιο

Αν Ρ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ οι τομές των ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ με τις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, τότε τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ ονομάζονται **σεβιανές** του Ρ στο τρίγωνο ΑΒΓ, προς τιμήν του Ιταλού μαθηματικού **Giovanni Ceva** (1648 –1734) που διατύπωσε και απέδειξε το φερώνυμο γνωστό θεώρημα:

Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι σεβιανές του Ρ στο τρίγωνο ΑΒΓ, τότε $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\Gamma E}{EA}=1$.

Ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος.

Στις σελίδες 7 και 569–570 του [3] της βιβλιογραφίας υπάρχουν τέσσερις αποδείξεις του θεωρήματος Ceva και στο [4] εφαρμογές του για τις **συντρέχουσες ευθείες**.

Στο άρθρο αυτό θα ασχοληθούμε με τα ακρότατα (μέγιστο ή ελάχιστο) αθροισμάτων και γινομένων, που αφορούν σεβιανές και τα τμήματα στα οποία διαιρεί το Ρ. Αλλά η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή μίας ποσότητας προσδιορίζεται από μία ανισότητα για την ποσότητα αυτή, έτσι τελικά θα αναζητήσουμε ανισότητες, που αφορούν τις **σεβιανές** ενός σημείου Ρ στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι σεβιανές του Ρ στο τρίγωνο ΑΒΓ, να βρείτε, εφ' όσον υπάρχουν, τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή των:

1. $S_1=\frac{AP}{P\Delta}+\frac{BP}{PE}+\frac{\Gamma P}{PZ}$, $P_1=\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}$

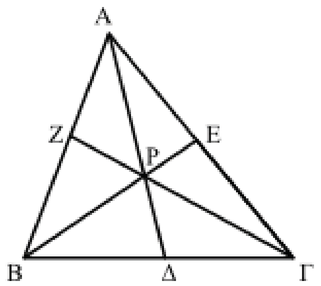
Ανάλυση

Θα ερευνήσουμε αν οι δεδομένες ποσότητες έχουν μέγιστες τιμές. Αν το Ρ είναι οσοδήποτε κοντά στο Δ, έχουμε: $AP\to A\Delta$, $P\Delta\to 0$, $BP\to B\Delta$, $PE\to\Delta\Gamma$, $\Gamma P\to\Gamma\Delta$ και $PZ\to\Delta B$

άρα, $S_1=\frac{AP}{P\Delta}+\frac{BP}{PE}+\frac{\Gamma P}{PZ}\to+\infty+\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}+\frac{\Gamma\Delta}{\Delta B}=+\infty$, $P_1=\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}\to+\infty\cdot\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\Gamma\Delta}{\Delta B}=+\infty$

Επομένως, τα S_1, P_1 δεν έχουν μέγιστο.

Θα ερευνήσουμε τώρα αν οι δύο ποσότητες του προβλήματος έχουν ελάχιστες τιμές. Αλλά αν το γινόμενο $\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}$ έχει ελάχιστη τιμή, έστω την μ_0, θα είναι $\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}\geq\mu_0$, όπου το '=' ισχύει για μία συγκεκριμένη θέση του Ρ και από την ανισότητα του αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου θα έχουμε: $\frac{AP}{P\Delta}+\frac{BP}{PE}+\frac{\Gamma P}{PZ}\geq 3\sqrt[3]{\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}}\geq 3\sqrt[3]{\mu_0}$



και εφ' όσον οι δύο ισότητες ισχύουν για την ίδια θέση του Ρ, το άθροισμα θα έχει ελάχιστη τιμή (την $3\sqrt[3]{\mu_0}$). Έτσι, αρκεί να ερευνήσουμε αν έχει ελάχιστο το γινόμενο. Προς τούτο, παίρνουμε δύο συγκεκριμένες θέσεις του Ρ, το κέντρο βάρους και το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

- Αν το Ρ ταυτιστεί με το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ,

έχουμε: $\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}=\frac{\frac{2}{3}\mu_\alpha}{\frac{1}{3}\mu_\alpha}\cdot\frac{\frac{2}{3}\mu_\beta}{\frac{1}{3}\mu_\beta}\cdot\frac{\frac{2}{3}\mu_\gamma}{\frac{1}{3}\mu_\gamma}=2\cdot2\cdot2=8$

- Αν το Ρ ταυτιστεί με το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, με τη χρήση του θεωρήματος των διχοτόμων, έχουμε:

$\triangle AB\Gamma:\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$ (από τη διχοτόμο ΑΔ), άρα $\frac{B\Delta}{\gamma}=\frac{\Delta\Gamma}{\beta}=\frac{B\Delta+\Delta\Gamma}{\gamma+\beta}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, έτσι $B\Delta=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$.

$\triangle AB\Delta: \dfrac{AP}{P\Delta} = \dfrac{AB}{B\Delta}$ (από τη διχοτόμο ΒΡ) $= \dfrac{\gamma}{\dfrac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}} = \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}$. Όμοια, $\dfrac{BP}{PE} = \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}$ και $\dfrac{\Gamma P}{PZ} = \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$,

έτσι, $\dfrac{AP}{P\Delta}\cdot\dfrac{BP}{PE}\cdot\dfrac{\Gamma P}{PZ} = \dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} \geq \dfrac{2\sqrt{\alpha\beta}\cdot 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot 2\sqrt{\gamma\alpha}}{\alpha\beta\gamma} = 8$

(αφού $\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \geq (2\sqrt{\alpha\beta})^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \geq 4\alpha\beta$

$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει).

Από τις δύο προηγούμενες ειδικές περιπτώσεις φαίνεται ότι πρέπει να ισχύει $\dfrac{AP}{P\Delta}\cdot\dfrac{BP}{PE}\cdot\dfrac{\Gamma P}{PZ} \geq 8$ για τυχαία θέση του Ρ μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ. Για να δείξουμε την ανισότητα αυτή θα υπολογίσουμε τους λόγους $\dfrac{AP}{P\Delta}, \dfrac{BP}{PE}$ και $\dfrac{\Gamma P}{PZ}$. Αλλά πώς υπολογίζουμε **το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων**; Συνήθως με τη βοήθεια:

- του Θεωρήματος του Θαλή,
- του Θεωρήματος των Διχοτόμων,
- των όμοιων τριγώνων,
- των εμβαδών και ειδικότερα των προτάσεων:

  Ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων, που

✳ έχουν ίσες βάσεις, ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών,

✳ ένα ύψος του ενός τριγώνου είναι ίσο με ένα ύψος του άλλου, ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων,

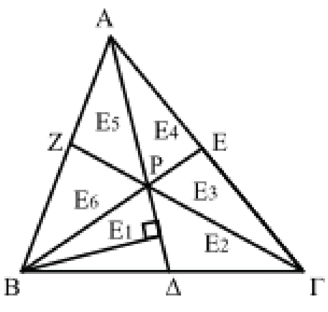
✳ είναι όμοια, ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητάς τους,

✳ μία γωνία του ενός είναι ίση ή παραπληρωματική μίας γωνίας του άλλου, ισούται με το γινόμενο των πλευρών που περιέχουν τις ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες.

Επειδή στο πρόβλημά μας δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες, διχοτόμοι ή όμοια τρίγωνα θα χρησιμοποιήσουμε λόγο εμβαδών.

Λύση

Ονομάζουμε E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 και E_6 τα εμβαδά των τριγώνων ΒΡΔ, ΔΡΓ, ΓΡΕ, ΕΡΑ, ΑΡΖ και ΖΡΒ, αντίστοιχα.



Είναι: $\dfrac{AP}{P\Delta} = \dfrac{(APB)}{(BP\Delta)} = \dfrac{E_5+E_6}{E_1}$ (αφού τα τρίγωνα ΑΡΒ και ΒΡΔ έχουν το ίδιο ύψος, το κάθετο τμήμα από την κορυφή Β στην ΑΔ).

Όμοια, έχουμε: $\dfrac{AP}{P\Delta} = \dfrac{(AP\Gamma)}{(\Gamma P\Delta)} = \dfrac{E_3+E_4}{E_2}$

Άρα, $\dfrac{AP}{P\Delta} = \dfrac{E_3+E_4}{E_2} = \dfrac{E_5+E_6}{E_1} = \dfrac{E_3+E_4+E_5+E_6}{E_1+E_2} = \dfrac{\lambda+\mu}{k}$,

Όπου $k = E_1+E_2, \lambda = E_3+E_4, \mu = E_5+E_6$.

Όμοια, $\dfrac{BP}{PE} = \dfrac{k+\mu}{\lambda}$ και $\dfrac{\Gamma P}{PZ} = \dfrac{k+\lambda}{\mu}$,

έτσι, $\dfrac{AP}{P\Delta}\cdot\dfrac{BP}{PE}\cdot\dfrac{\Gamma P}{PZ} = \dfrac{\lambda+\mu}{k}\cdot\dfrac{k+\mu}{\lambda}\cdot\dfrac{k+\lambda}{\mu} \geq \dfrac{2\sqrt{\lambda\mu}}{k}\cdot\dfrac{2\sqrt{k\mu}}{\lambda}\cdot\dfrac{2\sqrt{k\lambda}}{\mu} = \dfrac{8k\lambda\mu}{k\lambda\mu} = 8$

Άρα, $\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}\ge 8$, όπου το ‘=’ ισχύει όταν το P ταυτιστεί με το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως το ελάχιστο του γινομένου είναι το 8.

Για το άθροισμα των λόγων, έχουμε: $\frac{AP}{P\Delta}+\frac{BP}{PE}+\frac{\Gamma P}{PZ}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AP}{P\Delta}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{\Gamma P}{PZ}}\ge 3\sqrt[3]{8}=6$, όπου όλα τα ‘=’ ισχύουν όταν $P\equiv$ k.β.$\triangle AB\Gamma$, επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι το 6.

παρατήρηση: Το ελάχιστο του αθροίσματος μπορεί να βρεθεί άμεσα:

$$\frac{AP}{P\Delta}+\frac{BP}{PE}+\frac{\Gamma P}{PZ}=\frac{\lambda+\mu}{k}+\frac{k+\mu}{\lambda}+\frac{k+\lambda}{\mu}=\left(\frac{\lambda}{k}+\frac{k}{\lambda}\right)+\left(\frac{\mu}{k}+\frac{k}{\mu}\right)+\left(\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\lambda}{\mu}\right)\ge 2+2+2=6$$

2. $\mathbf{S_2=\frac{P\Delta}{AP}+\frac{PE}{BP}+\frac{PZ}{\Gamma P},\ P_2=\frac{P\Delta}{AP}\cdot\frac{PE}{BP}\cdot\frac{PZ}{\Gamma P}}$

Ανάλυση

$P\to A\Rightarrow P\Delta\to A\Delta,\ AP\to 0,\ PE\to 0,\ BP\to BA,\ PZ\to 0,\ \Gamma P\to \Gamma A$, έτσι:

- $S_2\to +\infty+0+0=+\infty$, άρα το S_2 δεν έχει μέγιστο, αλλά ενδέχεται να έχει ελάχιστο.
- $P_2\to +\infty\cdot 0\cdot 0$, απροσδιόριστο $\Rightarrow$ το P_2 ενδεχομένως να έχει μέγιστο.

Αν το P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

$$S_2=\frac{\frac{1}{3}\mu_\alpha}{\frac{2}{3}\mu_\alpha}+\frac{\frac{1}{3}\mu_\beta}{\frac{2}{3}\mu_\beta}+\frac{\frac{1}{3}\mu_\gamma}{\frac{2}{3}\mu_\gamma}=\frac{3}{2}\quad \text{και}\quad P_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Επομένως: ενδεχόμενο ελάχιστο του S_2 το $\frac{3}{2}$ και ενδεχόμενο μέγιστο του P_2 το $\frac{1}{8}$.

Λύση

Είναι $\frac{AP}{P\Delta}=\frac{\lambda+\mu}{k}(\text{από το}1)\Rightarrow\frac{P\Delta}{AP}=\frac{k}{\lambda+\mu}$, οπότε:

- $S_2=\frac{k}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+k}+\frac{\mu}{k+\lambda}\ge\frac{3}{2}$ (ανισότητα **Nesbitt**), το ‘=’ ισχύει όταν το P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ (σε όλες τις ανισότητες που θα ακολουθήσουν το ‘=’ θα ισχύει όταν το P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, γι’ αυτό δεν θα αναφέρεται), άρα $\min S_2=\frac{3}{2}$.
- $P_2=\frac{k}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\lambda}{\mu+k}\cdot\frac{\mu}{k+\lambda}\le\frac{k}{2\sqrt{\lambda\mu}}\cdot\frac{\lambda}{2\sqrt{\mu k}}\cdot\frac{\mu}{2\sqrt{k\lambda}}$ (αφού για $x,y>0$ ισχύει $x+y\ge 2\sqrt{xy}$) $=\frac{k\lambda\mu}{8\sqrt{(k\lambda\mu)^2}}=\frac{1}{8}$ έτσι, $\max P_2=\frac{1}{8}$.

3. $\mathbf{S_3=\frac{A\Delta}{AP}+\frac{BE}{BP}+\frac{\Gamma Z}{\Gamma P},\ P_3=\frac{A\Delta}{AP}\cdot\frac{BE}{BP}\cdot\frac{\Gamma Z}{\Gamma P}}$

Ανάλυση

- $P\to A$, τότε, όπως προηγούμενα, είναι $S_3\to+\infty$ και $P_3\to+\infty$, άρα το S_3, P_3 δεν έχουν μέγιστο.
- Αν το P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

$$S_3=\frac{\mu_\alpha}{\frac{2}{3}\mu_\alpha}+\frac{\mu_\beta}{\frac{2}{3}\mu_\beta}+\frac{\mu_\gamma}{\frac{2}{3}\mu_\gamma}=\frac{9}{2}\quad\text{και}\quad P_3=\frac{1}{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{27}{8}$$

επομένως, ενδεχομένως είναι $\min S_3=\dfrac{9}{2}$ και $\min P_3=\dfrac{27}{8}$.

Λύση

- Είναι $\dfrac{AP}{P\Delta}=\dfrac{\lambda+\mu}{k}\Rightarrow\dfrac{AP}{AP+P\Delta}=\dfrac{\lambda+\mu}{k+\lambda+\mu}\Rightarrow\dfrac{AP}{A\Delta}=\dfrac{\lambda+\mu}{k+\lambda+\mu}\Rightarrow\dfrac{A\Delta}{AP}=\dfrac{k+\lambda+\mu}{\lambda+\mu}$ επομένως:
- $S_3=\dfrac{k+\lambda+\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{k+\lambda+\mu}{\mu+\kappa}+\dfrac{k+\lambda+\mu}{\kappa+\lambda}=1+\dfrac{k}{\lambda+\mu}+1+\dfrac{\lambda}{\mu+k}+1+\dfrac{\mu}{k+\lambda}\geq 3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$

(από ανισότητα **Nesbitt**), άρα $\min S_3=\dfrac{9}{2}$.

- $P_3=\dfrac{(k+\lambda+\mu)^3}{(\lambda+\mu)(\mu+k)(k+\lambda)}=\dfrac{[(k+\lambda)+(\lambda+\mu)+(\mu+k)]^3}{8(\lambda+\mu)(\mu+k)(k+\lambda)}\geq\dfrac{(3\sqrt[3]{(k+\lambda)(\lambda+\mu)(\mu+k)})^3}{8(\lambda+\mu)(\mu+k)(k+\lambda)}$

(από ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου) $=\dfrac{27}{8}$, επομένως $\min P_3=\dfrac{27}{8}$.

4. $\mathbf{S_4=\dfrac{AP}{A\Delta}+\dfrac{BP}{BE}+\dfrac{\Gamma P}{\Gamma Z},\ P_4=\dfrac{AP}{A\Delta}\cdot\dfrac{BP}{BE}\cdot\dfrac{\Gamma P}{\Gamma Z}}$

Ανάλυση

- $P\to A$, τότε είναι $S_4=0+1+1=2$ και $P_4=0$.
- Αν το P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε: $S_4=\dfrac{\frac{2}{3}\mu_\alpha}{\mu_\alpha}+\dfrac{\frac{2}{3}\mu_\beta}{\mu_\beta}+\dfrac{\frac{2}{3}\mu_\gamma}{\mu_\gamma}=2$,

  επομένως φαίνεται ότι το S_4 είναι σταθερό και $S_4=2$. $P_4=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$ και επειδή είναι

  το αντίστροφο του P_3, θα είναι $\max P_4=\dfrac{8}{27}$.

Λύση

Από το (3.) έχουμε $\dfrac{AP}{A\Delta}=\dfrac{\lambda+\mu}{k+\lambda+\mu}$, άρα

- $S_4=\dfrac{\lambda+\mu}{k+\lambda+\mu}+\dfrac{\mu+\kappa}{k+\lambda+\mu}+\dfrac{\kappa+\lambda}{k+\lambda+\mu}=\dfrac{2(\kappa+\lambda+\mu)}{k+\lambda+\mu}=2$
- $P_4=\dfrac{(\lambda+\mu)(\mu+k)(k+\lambda)}{(k+\lambda+\mu)^3}\leq\dfrac{8}{27}$ (όπως στο (3)) έτσι, $\max P_4=\dfrac{8}{27}$.

5. $\mathbf{S_5=\dfrac{P\Delta}{A\Delta}+\dfrac{PE}{BE}+\dfrac{PZ}{\Gamma Z},\ P_5=\dfrac{P\Delta}{A\Delta}\cdot\dfrac{PE}{BE}\cdot\dfrac{PZ}{\Gamma Z}}$

Ανάλυση

- Αν $P\to A$, τότε είναι $S_5=1+0+0=1$ και $P_4=1\cdot 0\cdot 0=0$.
- Αν το P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε: $S_5=\dfrac{\frac{1}{3}\mu_\alpha}{\mu_\alpha}+\dfrac{\frac{1}{3}\mu_\beta}{\mu_\beta}+\dfrac{\frac{1}{3}\mu_\gamma}{\mu_\gamma}=1$, επομένως

  φαίνεται ότι το S_5 είναι σταθερό και $S_5=1$. $P_5=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$ και το P_5 έχει μέγιστο το $\dfrac{1}{27}$.

Λύση

Είναι $\dfrac{AP}{P\Delta}=\dfrac{\lambda+\mu}{k}\Rightarrow\dfrac{AP+P\Delta}{P\Delta}=\dfrac{k+\lambda+\mu}{k}\Rightarrow\dfrac{A\Delta}{P\Delta}=\dfrac{k+\lambda+\mu}{k}\Rightarrow\dfrac{P\Delta}{A\Delta}=\dfrac{k}{k+\lambda+\mu}$, άρα

$$S_5=\frac{\kappa+\lambda+\mu}{k+\lambda+\mu}=1 \text{ και } P_5=\frac{k\lambda\mu}{(k+\lambda+\mu)^3}\le\frac{k\lambda\mu}{(3\sqrt[3]{k\lambda\mu})^3}=\frac{1}{27} \text{ έτσι, } \max P_5=\frac{1}{27}.$$

6. $\mathbf{S_6=\frac{A\Delta}{P\Delta}+\frac{BE}{PE}+\frac{\Gamma Z}{PZ}}$, $\mathbf{P_6=\frac{A\Delta}{P\Delta}\cdot\frac{BE}{PE}\cdot\frac{\Gamma Z}{PZ}}$

Ανάλυση

- Αν $P\to A$, τότε είναι $S_6=1+\infty+\infty=+\infty$ και $P_4=1\cdot(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$, επομένως τα S_6, P_6 δεν έχουν μέγιστο.
- Αν το Ρ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

$$S_6=\frac{\mu_\alpha}{\frac{1}{3}\mu_\alpha}+\frac{\mu_\beta}{\frac{1}{3}\mu_\beta}+\frac{\mu_\gamma}{\frac{1}{3}\mu_\gamma}=3+3+3=9 \text{ και } P_6=3\cdot3\cdot3=27$$

έτσι, αν τα S_6 και P_6 έχουν ακρότατα αυτά θα είναι ελάχιστα με τιμές 9 και 27, αντίστοιχα.

Λύση

$$S_6=\frac{\kappa+\lambda+\mu}{k}+\frac{\kappa+\lambda+\mu}{\lambda}+\frac{\kappa+\lambda+\mu}{\mu}=1+\frac{\lambda}{k}+\frac{\mu}{k}+\frac{k}{\lambda}+1+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{k}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+1$$

$$=3+\left(\frac{k}{\lambda}+\frac{\lambda}{k}\right)+\left(\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\mu}{\lambda}\right)+\left(\frac{k}{\mu}+\frac{\mu}{k}\right)\ge 3+2+2+2=9 \text{ άρα, } \min S_6=9$$

- $P_6=\frac{(k+\lambda+\mu)^3}{k\lambda\mu}\ge\frac{(3\sqrt[3]{k\lambda\mu})^3}{k\lambda\mu}=27$ άρα, $\min P_6=27$.

Σχόλια:

1ο Θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε τα ακρότατα παραστάσεων με τμήματα που ορίζουν οι σεβιανές πάνω στις πλευρές του τριγώνου, π.χ.

$$S=\frac{AZ}{ZB}+\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}+\frac{\Gamma E}{EZ}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\Gamma E}{EZ}}=3\sqrt[3]{1}=3, \text{ άρα } \min S=3.$$

2ο Τα πιο διάσημα και δυσκολότερα προβλήματα αναφέρονται σε τμήματα σεβιανών σε σχέση με άλλα στοιχεία του τριγώνου. Τέτοιες ανισότητες, γνωστές από τη βιβλιογραφία, είναι οι:

1. Αν Κ, Λ, Μ είναι οι προβολές του Ρ στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα, τότε
   $PA+PB+P\Gamma\ge 2(PK+P\Lambda+PM)$ (Ανισότητα Erdos – Mordell)

Η παραπάνω ανισότητα εξακολουθεί να ισχύει και όταν τα τμήματα ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ είναι διχοτόμοι των τριγώνων ΡΒΓ, ΡΓΑ και ΡΑΒ αντίστοιχα (**ανισότητα Barrow**).

2. $\alpha\cdot PA+\beta\cdot PB+\gamma\cdot P\Gamma\ge 2(\alpha\cdot PK+\beta\cdot P\Lambda+\gamma\cdot PM)$
3. $PA+PB+P\Gamma\ge 2\sqrt{(AB\Gamma)\sqrt{3}}$
4. $PK\cdot PA+P\Lambda\cdot PB+PM\cdot P\Gamma\ge 2(PK\cdot P\Lambda+P\Lambda\cdot PM+PM\cdot PK)$
5. $PA\cdot PB\cdot P\Gamma\ge 8PK\cdot P\Lambda\cdot PM$
6. $PA+PB+P\Gamma\ge 6\rho$ (όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ).

Βιβλιογραφία:

1. O. Bottema κ.α. Geometric Inequalities, Wolters–Noordhoff Publishing, Croningen – Netherlands, 1968.
2. H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, Geometry Revisited, MAA, USA, 1975.
3. F.G–M, Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών), Εκδόσεις Α. Καραβία, Αθήνα, 1952.
4. R. Hosenberg, Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, MAA, USA, 1995.
5. R.A. Johnson, Advanced Euclidean Geometry, Dover Publications, New York, 1960.

Η έννοια του Χάους:

Ένας πρώτος πειραματισμός με τη βοήθεια του EXCEL

Αναστασία Καρακώστα, παράρτημα **ΕΜΕ Ημαθίας**

Περίληψη: Το θέμα αυτό έχει στόχο να αναδείξει στους μαθητές τη **ζωντάνια** και **ομορφιά** των σύγχρονων Μαθηματικών και το ότι η έρευνα δεν σταματά ποτέ αφού πάντα υπάρχει μια καινούργια οπτική των πραγμάτων, την οποία διαμορφώνει η σύγχρονη πραγματικότητα.

Ο στόχος του είναι η ανατροπή της πεποίθησης ότι η μεγαλύτερη ακρίβεια στα αρχικά δεδομένα ενός **μαθηματικού μοντέλου**, που περιγράφει ένα φαινόμενο, διασφαλίζει και μεγαλύτερη ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα, στην **πρόβλεψη της συμπεριφοράς του**.

Οι μαθητές, στηριζόμενοι στη συνάρτηση πληθυσμού (μοντέλο που αναδεικνύει τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη βιολογία) και κάνοντας χρήση του **Excel** (καθοδηγούμενοι με φύλλα εργασίας), αποδεικνύουν ερευνητικά την παρουσία του γεγονότος της απρόβλεπτης συμπεριφοράς ενός συστήματος εξ αιτίας της εξαιρετικά ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες. Έτσι έχουν μια πρώτη επαφή με τη θεωρία του Χάους.

Εισαγωγή: Οι νόμοι της κλασικής φυσικής, την οποία και διδάσκονται οι μαθητές στο Σχολείο, είναι ντετερμινιστικοί διότι υποδηλώνουν ότι για ένα δεδομένο σύστημα, οι ίδιες αρχικές συνθήκες θα παράγουν πάντα το ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι παγιώνεται η άποψη ότι η όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια στις αρχικές συνθήκες ενός συστήματος διασφαλίζει και μεγαλύτερη ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα, στην **πρόβλεψη της συμπεριφοράς του συστήματος**. Το θέμα όμως είναι ότι ο μηχανισμός, δηλαδή η κατάλληλη εξίσωση – νόμος που περιγράφει το υπό μελέτη σύστημα, είναι **ανατροφοδοτικός.** Το αποτέλεσμα (έξοδος) μιας μεταβλητής του μηχανισμού γίνεται η νέα τιμή (είσοδος) της μεταβλητής του συστήματος σε μια συνεχή επαναληπτική διαδικασία, με κύρια μεταβλητή τον χρόνο. Έτσι αναπτύσσεται μια νέα πολύπλοκη δυναμική και έρχονται **στο φως νέες συμπεριφορές**. Υπάρχουν φορές που αυτές οι νέες συμπεριφορές είναι αναρίθμητες και συνεπώς **δεν μπορούν να προβλεφθούν** διότι είναι φοβερά **ευαίσθητες στις αρχικές συνθήκες** (δηλαδή, ενώ βάζουμε στο σύστημα μια αρχική τιμή ακριβέστερη της προηγούμενης, το τελικό αποτέλεσμα μετά από ένα χρονικό βάθος επαναλήψεων είναι τελείως διαφορετικό). Τότε λέμε ότι έχουμε **πλήρη αταξία**, Χάος, με την έννοια ότι η τελική έκβαση είναι απρόβλεπτη. Αυτού του είδους όμως η συμπεριφορά τελικά δίνει τη δυνατότητα, το περιθώριο, της αυτοοργάνωσης της ύλης, η οποία τελικά εμφανίζει ένα δυναμικό χαρακτήρα. Είναι ένα ενδιαφέρον θέμα το οποίο συνδέει άμεσα τη φιλοσοφία με τα Μαθηματικά, το έχει αναδείξει ο **Ilya Prigogine** (βραβείο Νόμπελ Χημείας το 1977) και, στα δικά μας, ο κ. **Ιωάννης Αντωνίου**, στενός συνεργάτης του Prigogine.

Όλες οι συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικά. Ο Η/Υ είναι αυτός που δίνει τη δυνατότητα ανατροφοδότησης για πάρα πολλές επαναλήψεις και υπολογισμούς. Είναι, από διδακτική σκοπιά, ενδιαφέρον ότι με λίγα μέσα και γνώσεις αυτή η εμφάνιση του Χάους μπορεί πολύ εύκολα να διερευνηθεί από τους μαθητές μας με κατάλληλη καθοδήγηση. Αρκεί γι' αυτό μια δευτεροβάθμια εξίσωση, γνωστή ως συνάρτηση πληθυσμού και στοιχειώδεις γνώσεις του Excel. Επίσης είναι σημαντικό ότι οι μαθητές εξασκούνται σε σωστή λεκτική διατύπωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, με την έννοια του κατανοητού λόγου.

Για την ιστορία: Για την ιστορία αξίζει να αναφερθεί ότι ο Αμερικανός μετεωρολόγος **Edward Lorenz** ήταν αυτός που πρώτα παρατήρησε ότι μια **επαναληπτική διαδικασία** μπορεί να γεννήσει το Χάος. Ο Lorenz, στα μέσα του χειμώνα 1961, εργαζόταν στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης (MIT). Προσπαθούσε να προσεγγίσει λύσεις με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή σε μερικές **μη γραμμικές εξισώσεις**, που περιέγραφαν το μοντέλο της **γήινης ατμόσφαιρας**. Κάποια ημέρα, για να ελέγξει μια πρόγνωση καιρού που είχε πάρει από τον υπολογιστή, ξαναέδωσε τα δεδομένα του για τη θερμοκρασία, την ατμοσφαιρική πίεση και τη διεύθυνση του ανέμου αλλά αυτή τη φορά με στρογγυλοποιημένους αριθμούς, περιμένοντας να του βγάλει ο υπολογιστής την ίδια πρόγνωση. Το αποτέλεσμα όμως τον εξέπληξε. Τα νέα αποτελέσματα **ήταν τελείως διαφορετικά**. Αμέσως κατάλαβε πως η μεγέθυνση των διαφορών οφειλόταν στο συνδυασμό της **μη γραμμικότητας** και **της επανάληψης**. Για την ιστορία, αναφέρουμε πως αντί να βάλει τον αριθμό 0.506127 με έξι δεκαδικά ψηφία, έβαλε 0.506.

Λίγη θεωρία για να γίνει αντιληπτή η έννοια της τροχιάς και της κατάληξής της.

Α) Δυναμικό σύστημα είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο αλληλεπιδρώντων μεταβλητών, π.χ. φυσικών, χημικών, βιολογικών, οικονομικών κ.λ.π. που εξελίσσονται στο χρόνο σύμφωνα με συγκεκριμένους νόμους ή κανόνες. Η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος, ο οποίος μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός. Εμείς ασχολούμαστε με τη δεύτερη περίπτωση, του διακριτού χρόνου, όπου οι τιμές του χρόνου δεν έχουν συνεχή ροή αλλά είναι απομονωμένες μεταξύ τους, δηλ. οι παρατηρήσεις γίνονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα. Το εργαλείο μας
είναι οι επαναληπτικές συναρτήσεις. Κάθε συνάρτηση μπορούμε να τη χειριστούμε επαναληπτικά, αν έχουμε κάθε τόσο ανατροφοδότηση της τιμής της από το αμέσως προηγούμενο αποτέλεσμα.

Β) **Η έννοια της τροχιάς**: Αν πάρουμε μια τυχαία συνάρτηση, την Φ, μια αρχική τιμή X_0 και βρούμε τις τιμές της: $X_1=\Phi(X_0)$, $X_2=\Phi(X_1)=\Phi(\Phi(x_0))$, $X_3=\Phi(X_2)=\Phi(\Phi(\Phi(x_0)))$, …, προκύπτει η ακολουθία των διαδοχικών τιμών $\mathbf{X_0}$, $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, ..., **που ονομάζεται τροχιά του $\mathbf{X_0}$.**

Για να αποφύγουμε τις πολλές παρενθέσεις θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\Phi^\nu(X)$ για τη νιοστή εφαρμογή[1] της συνάρτησης Φ στο Χ. Δηλ : $\Phi^1(X) = \Phi(X)$, $\Phi^2(X) = \Phi(\Phi(X))$, $\Phi^3(X) = \Phi(\Phi(\Phi(X)))$ κ.ο.κ.

Β1) **Είδη τροχιών** Η τροχιά ενός σημείου εξαρτάται α) από τον τύπο της συνάρτησης που εφαρμόζουμε (επαναληπτικά) δηλ. το «κλειδί» ή «μηχανισμό» της διαδικασίας και β) από το αρχικό σημείο X_0

[1] Εδώ το $\Phi^2(X)$ δεν σημαίνει $\Phi(X).\Phi(X)$ αλλά είναι το αποτέλεσμα της δεύτερης επανάληψης της Φ στο Χ

Η τροχιά μπορεί:
1) να είναι σταθερή ή να γίνεται σταθερή
2) να απειρίζεται
3) να είναι ή να γίνεται περιοδική
4) τίποτε από τα παραπάνω, οπότε **χαρακτηρίζεται ως χαοτική**. Για μια συγκεκριμένη συνάρτηση, το σύνολο των X_0 που μας δίνει χαοτική τροχιά ονομάζεται σύνολο JULIA αυτής της συνάρτησης. Η ονομασία αυτή οφείλεται στο Γάλλο μαθηματικό Gaston Julia, που ήταν από τους πρώτους που διατύπωσε πολλές ιδιότητες αυτών των συνόλων το 1920.

Παραδείγματα

Σταθερής τροχιάς: Για την $Φ(x) = x^2$ η τροχιά του $X_0 =1$ **είναι σταθερή** αφού $Φ(1) = 1^2 = 1$. Γι' αυτό και το 1 ονομάζεται σταθερό σημείο. Τα σταθερά σημεία δεν μετακινούνται με την εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας αφού τα χαρακτηρίζει η ισότητα $Φ(X_0) = X_0$ και κατά συνέπεια $Φ^ν(X_0) = X_0$. Για την ίδια συνάρτηση η τροχιά του $X_0 = -1$ **γίνεται σταθερή** αφού $Φ(-1) = (-1)^2 = 1$

Τροχιάς που απειρίζεται: Για την $Φ(x) = x^2$ η τροχιά του $X_0 =2$ απειρίζεται, αφού είναι η: 2, 4, 16, 256, … Δηλ. $Φ^ν(2) \rightarrow +\infty$

Περιοδικής τροχιάς: Για την $Φ(X) = \frac{1}{X}$ με $X \neq 0$, οποιοδήποτε σημείο εκτός των σταθερών σημείων –1 και 1 γεννάει τροχιά με περίοδο 2 αφού $Φ^2(X) = Φ\left(\frac{1}{X}\right) = X$. Π.χ. η τροχιά του 3 είναι η 3, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{3}$, … Η τροχιά ενός σημείου X_0 είναι περιοδική αν υπάρχει φυσικός αριθμός κ έτσι ώστε $Φ^κ(X_0) = X_0$. Ο μικρότερος αριθμός από τους κ **καλείται πρωταρχική περίοδος**.

Αν υποθέσουμε ότι το X_0 βρίσκεται σε κυκλική (περιοδική) τροχιά πλάτους (περιόδου) 4, τότε κάθε σημείο περιοδικής τροχιάς πλάτους 4 θα εμφανιστεί κατά την εφαρμογή της $Φ^4$, $Φ^8$, $Φ^{12}$, …, $Φ^{4κ}$. Η σπουδαιότητα των περιοδικών τροχιών πηγάζει από το γεγονός ότι μοντελοποιούν επαναλαμβανόμενα φυσικά φαινόμενα. Όπως υπάρχουν σημεία που η τροχιά τους τελικά σταθεροποιείται, έτσι υπάρχουν και σημεία που μετά από μερικές επαναλήψεις καταλήγουν σε σημείο που δίνει περιοδική τροχιά. Π.χ. για την $Φ(X) = X^4 – 1$ η τροχιά του 1 γίνεται περιοδική πλάτους 2: 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1,0, …

Η λογιστική εξίσωση: Η συνάρτηση πληθυσμού (logistic map) είναι μια συνάρτηση 2ου βαθμού η οποία περιγράφει ικανοποιητικά την αλληλεπίδραση του ρυθμού των γεννήσεων και θανάτων ενός πληθυσμού. Τη χρησιμοποιούν **βιολόγοι ή οικολόγοι** που μελετούν την αύξηση ή μείωση του πληθυσμού ενός ζωϊκού είδους που ζει, **αναπαράγεται και πεθαίνει σε ελεγχόμενο περιβάλλον**, όπως π.χ. αυτό ενός εργαστηρίου. Έγινε γνωστή από πειράματα σε Η/Υ του Robert May και Mitchell Feigenbaum και είναι το απλούστερο μοντέλο το οποίο αναδεικνύει την έννοια του Χάους.

Σε κάθε περιβάλλον υπάρχει ένας μέγιστος αριθμός ατόμων του είδους που επιβιώνει σε κάθε γενιά, έστω L. Αν με P_n συμβολίσουμε το ποσοστό του πληθυσμού L που έχει επιβιώσει στη γενιά n και X_n τον αντίστοιχο πληθυσμό, θα έχουμε:

$\mathbf{X_n = P_n \cdot L}$, με $0 \le P_n \le 1$. Η λογιστική εξίσωση δίνει τη δυνατότητα στους βιολόγους να υπολογίσουν τον πληθυσμό μιας γενιάς X_{n+1}, γνωρίζοντας αυτόν της προηγούμενης γενιάς X_n. Η σχέση ανάμεσά τους (καθορίζεται από το ποσοστό επιβίωσης) δίνεται από τον τύπο: $P_{n+1} =f(P_n) = κ*P_n*(1-P_n)$, ή αν αλλάξουμε τον συμβολισμό της μεταβλητής κατά το σύνηθες, θα έχουμε $X_{n+1} = f(X_n) = κ*X_n*(1-X_n)$, με $0 \le X_n \le 1$. Η επαναληπτική μας συνάρτηση είναι η $f(X) = κ*X*(1-X)$. Η παράμετρος κ είναι μια σταθερά που χαρακτηρίζει τις συνθήκες, τον αποτελεσματικό ρυθμό ανάπτυξης του είδους που μελετάται και εξαρτάται π.χ. από την ποσότητα της διαθέσιμης τροφής, τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, κ.λ.π. Μεταβάλλεται από 0 έως 4 ώστε το μοντέλο να είναι ρεαλιστικό. Για τιμές μεγαλύτερες του 4 η εξίσωση δίνει τροχιές που τείνουν στο 0 ή στο άπειρο (εξαφάνιση ή συνεχής αύξηση πληθυσμού, μη ρεαλιστικά μοντέλα).

Ο παράγοντας $κ*X_n$ αναδεικνύει το γεγονός ότι ο πληθυσμός της επόμενης γενιάς καθορίζεται από τον πληθυσμό της τρέχουσας X_n και του ρυθμού ανάπτυξής της κ (θετική ανατροφοδότηση). Καθ' όμοιο τρόπο, ο παράγοντας $1-X_n$ παίζει το ρόλο της αρνητικής ανατροφοδότησης (παράγοντας μείωσης λόγω υπερπληθυσμού και μειωμένων πόρων, απομένουσα δυνατότητα του περιβάλλοντος).

Για μικρές τιμές του X_n, το ποσοστό ανάπτυξης είναι περίπου κ (λίγος πληθυσμός, μπορεί να αυξηθεί όσο το επιτρέπουν οι συνθήκες, δηλ. το κ), ενώ για μεγάλες τιμές του X_n είναι περίπου 0 (προφανώς, διότι οι απομένοντες πόροι για την επόμενη γενιά είναι σχεδόν ανύπαρκτοι)

Μελέτη της επαναληπτικής συνάρτησης $f(x) = κ(x – x^2)$ για κ από 0 έως και 4

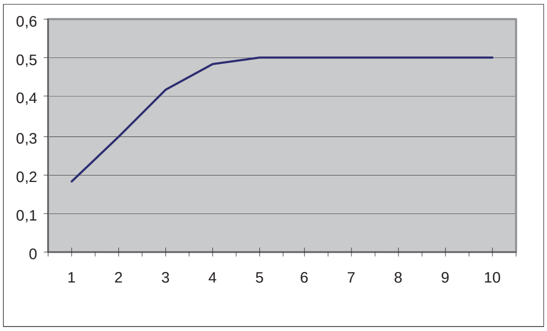
Διαπιστώνουμε ότι για κ από 0 έως 3 όλα τα $χ_0$ δίνουν τροχιές που τείνουν σε ένα ορισμένο σημείο.

- Όταν το **κ είναι από 0 έως 1**, όλες οι αρχικές τιμές δίνουν τροχιές που τείνουν στο 0 (βγαίνει εύκολα και αλγεβρικά διότι όλοι οι παράγοντες της εξίσωσης είναι μικρότεροι από τη μονάδα). Για κ=1 πάλι όλες οι τροχιές τείνουν στο 0, αλλά με πολύ αργό ρυθμό. Το είδος που μελετάται τείνει να εξαφανιστεί.
- Όταν το κ είναι ανάμεσα στο 1 και 3 , όλες οι αρχικές τιμές δίνουν τροχιές που τείνουν σε σταθερό σημείο διάφορο του 0. Το διαπιστώνουμε κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις για τις παρακάτω περιπτώσεις:

K=1,25		**……**	**K=2**		**……**	**K=2,75**	
$\mathbf{X_0}$	**0,1**		$\mathbf{X_0}$	**0,1**		$\mathbf{X_0}$	**0,1**
$\mathbf{X_0}$	**0,35**		$\mathbf{X_0}$	**0,35**		$\mathbf{X_0}$	**0,35**
$\mathbf{X_0}$	**0,5**		$\mathbf{X_0}$	**0,5**		$\mathbf{X_0}$	**0,5**

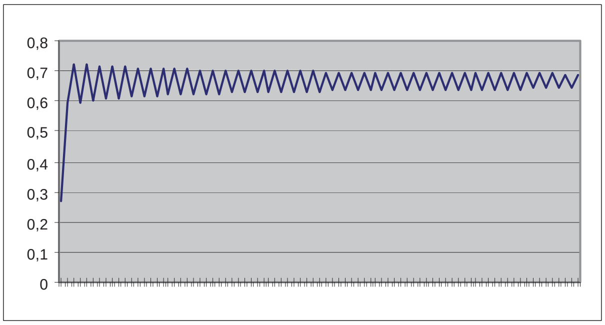
Η **$f(x) = κ\ (x - x^2)$** για κ=2, και για x_0 = 0,1 καταλήγει στο σταθερό σημείο 0,5 (Δηλαδή αν σε μια γενιά έχει επιβιώσει το ένα δέκατο του μέγιστου πληθυσμού και το κ=2, τότε ο πληθυσμός θα φτάσει μέχρι το μισό του μέγιστου)

$f(x) = κ\ (x - x^2)$ για κ=2



Όταν το **κ πάρει ακριβώς την τιμή 3**, το σταθερό σημείο είναι το 2/3 (εύκολα το βρίσκουμε λύνοντας την εξίσωση f(x)=x) αλλά όλες οι τροχιές συγκλίνουν προς αυτό εξαιρετικά αργά, όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση:

f(x) = 3x(1-x) με xo = 0,1

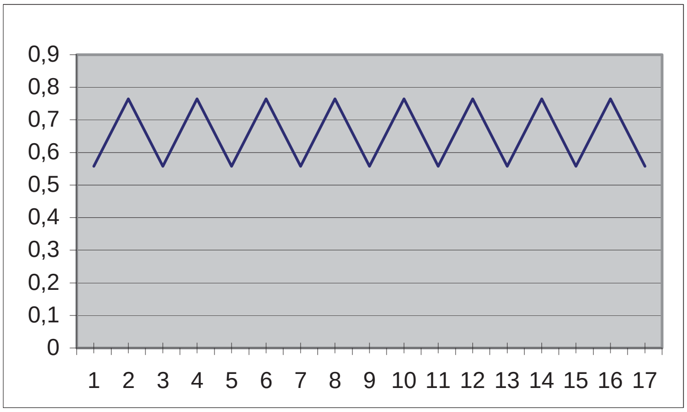


σταθερό σημείο (σύγκλιση αργή)

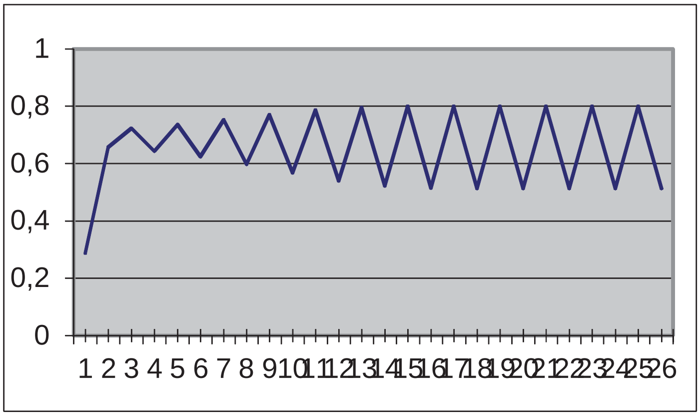
Αυτή ήταν η ένδειξη ότι βρισκόμαστε στα πρόθυρα μιας δραματικής αλλαγής.
Πράγματι, **όταν το κ γίνει μεγαλύτερο του 3**, διαπιστώνουμε ότι οι τροχιές χάνουν τη σταθερότητά τους και γίνονται περιοδικές.
Στις παρακάτω περιπτώσεις παίρναμε τροχιές με περίοδο 2:

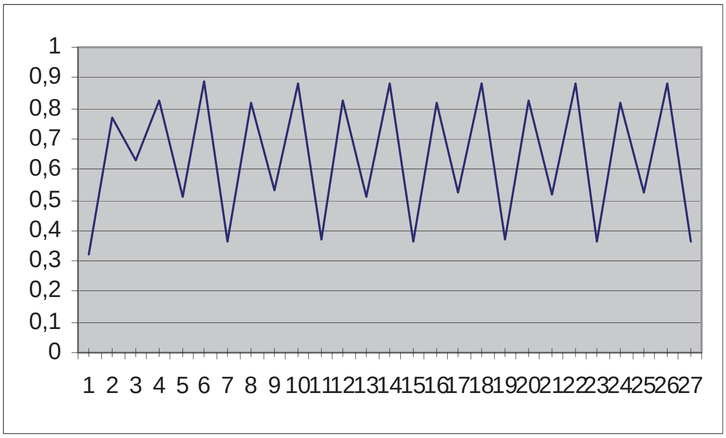
K=3,1		……	K=3,2		……	K=3,3	
X_0	0,764571		X_0	0,764571		X_0	0,764571

$f(x) = κ(x - x^2)$ με κ= 3,1 και x_0 = 0,764571



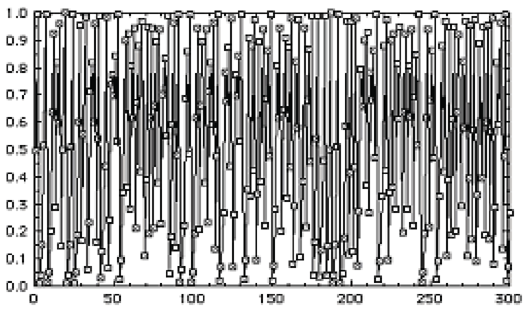
Η **$f(x) = κ(x - x^2)$** με κ= 3,2 και x_0 = 0,1, με περίοδο 2





Αυξάνοντας τώρα το κ στην τιμή 3,54 κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις για τις τιμές x_0 = 0,1, x_0 = 0,35, x_0 =,5 x_0 =0,8 και παρατηρήσαμε ότι η προηγούμενη κατάσταση χάνει την ευστάθειά της, **οι τροχιές ταλαντεύονται** περισσότερο και η περίοδός τους διπλασιάζεται, γίνεται 4.

$f(x) = κ(x - x^2)$ με κ= 3,54 και x_0 = 0,1, με περίοδο 4



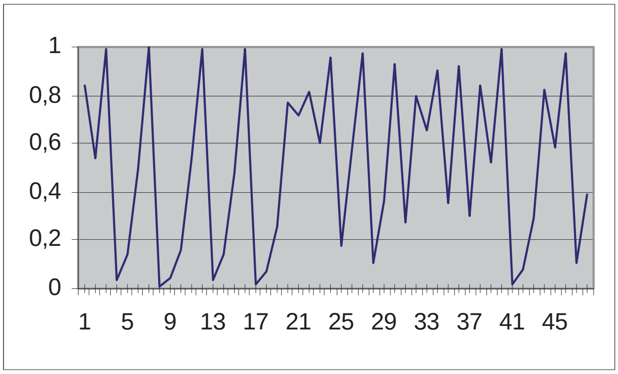
Χαοτική συμπεριφορά της λογιστικής απεικόνισης για κ= 3.99.

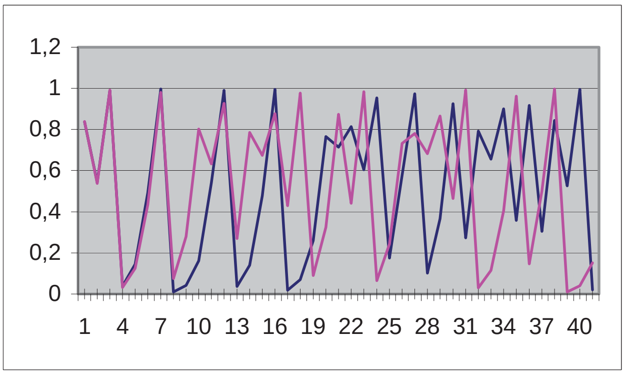
Από δω και πέρα, **καθώς το κ αυξάνει**, παραμένοντας μικρότερο του 4, **οι τροχιές καταλήγουν ακανόνιστες** (το χαοτικό «καθεστώς» αρχίζει για περίπου κ=3,56994). Ο μηχανισμός με τον οποίο αναπτύσσεται το Χάος είναι ο ολοένα επιταχυνόμενος διπλασιασμό της περιόδου. Για τιμές μεγαλύτερες του 4 η εξίσωση δίνει τροχιές που τείνουν στο 0 ή στο άπειρο (εξαφάνιση ή συνεχής αύξηση πληθυσμού, μη ρεαλιστικά μοντέλα).

Τελικά, για τις διάφορες τιμές του k παίρνουμε τον κάτωθι πίνακα:

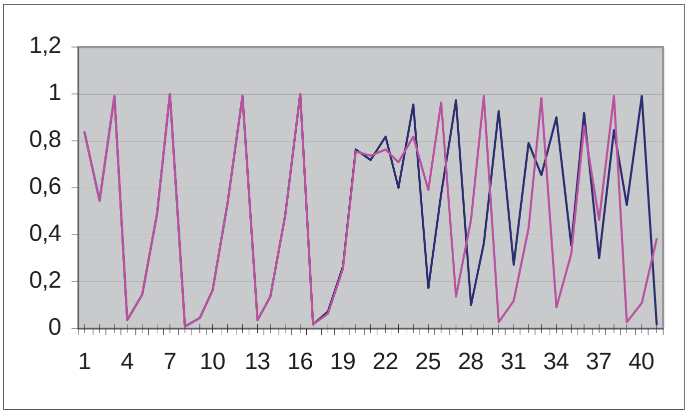
k	Περίοδος
3,1	2
3,3	2
3,5	4
3,56	8
3,567	16
3,6	Χάος
3,8	Χάος
3,9	Χάος
4	Χάος

Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνουν έντονα στους εμπλεκόμενους την **απρόβλεπτη συμπεριφορά** της τροχιάς όταν το αρχικό σημείο μεταβληθεί ελάχιστα και αποδεικνύουν την **ευαισθησία στην αρχική τιμή χ_0**, κύριο χαρακτηριστικό του Χάους.Για k = 3.99 και x_0= 0,3 παίρνουμε μετά 48 επαναλήψεις την παρακάτω γραφική παράσταση:





Μεταβάλλουμε κατόπιν το αρχικό σημείο ελάχιστα, από 0,3 σε 0,301. Στο επόμενο γράφημα συγκρίνονται οι τροχιές αυτών των δύο χρονικών ακολουθιών :



Είναι ίδιες για 8 περίπου επαναλήψεις, αλλά μετά διαφοροποιούνται τελείως. Μετά παίρνουμε αρχικές τιμές πάρα πολύ κοντινές, συγκρίνοντας τις τροχιές των 0,3 και 0,3000001

Αυτή τη φορά παρατηρούμε ότι είναι ίδιες για περισσότερο χρόνο αλλά και αυτές αποκλίνουν μετά την $24^{η}$ επανάληψη, δίνοντας δύο τελείως διαφορετικά αποτελέσματα αφού η συσχέτιση μετά από τις 24 επαναλήψεις είναι μηδενική. Το **απρόσμενο** έχει αντικαταστήσει το **προβλέψιμο**.

Χαοτικό λοιπόν είναι τελικά ένα σύστημα στο οποίο η απόσταση μεταξύ των τροχιών δύο κοντινών σημείων του αποκλίνει με την πάροδο του χρόνου, με το μέγεθος της απόκλισης να αυξάνεται εκθετικά. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι ένα χαοτικό σύστημα, ακόμα και ένα που ορίζεται από έναν απλό κανόνα, είναι απρόβλεπτο. Για να προβλέψουμε τη συμπεριφορά του στο μέλλον πρέπει να γνωρίζουμε την τρέχουσα τιμή του με ακρίβεια. Παραπάνω είδαμε ότι μια πολύ μικρή διαφορά στο έκτο δεκαδικό ψηφίο έχει ως αποτέλεσμα την αποτυχία πρόβλεψης μετά από 24 επαναλήψεις. Και η τυπική ακρίβεια των μετρήσεών μας **σε κανένα φυσικό βιολογικό** σύστημα **δεν μπορεί** να φτάσει τέτοιο **υψηλό επίπεδο**.

Σχολιασμός: Η ευαισθησία και η εξάρτηση της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος από τις αρχικές συνθήκες θυμίζει έντονα τους λαϊκούς στίχους που πολύ γραφικά τονίζουν ότι και η πιο ασήμαντη λεπτομέρεια (ένα καρφί) έχει τεράστια σημασία για το όλο (μια αυτοκρατορία): **"Για ένα καρφί, χάθηκε το πέταλο. Για ένα πέταλο, χάθηκε το άλογο. Για ένα άλογο, χάθηκε ο καβαλάρης. Για ένα καβαλάρη, χάθηκε η μάχη. Για μια μάχη, χάθηκε η αυτοκρατορία".**

Επίσης για την επιτυχία ή μη ενός ατόμου, παραλληλίζω την επαναληπτική διαδικασία με τον χαρακτήρα του, τον παράγοντα των συνθηκών του περιβάλλοντος **κ** να παίζει βέβαια τον ρόλο του και τις αρχικές συνθήκες $\mathbf{x_0}$ με τον παράγοντα τύχη, όπου καμιά φορά και η παραμικρότερη λεπτομέρεια επηρεάζει δραματικά το αποτέλεσμα.

Βιβλιογραφία

1) Αραχωβίτης, Ι. (2001) *Εισαγωγή στη χαοτική δυναμική & στα κλασμοειδή*, Αθήνα, Παπασωτηρίου
2) Μακρίδης, Γ. (1993) *Fractals σαν εργαλείο δημιουργίας αλλά και εκτίμησης της δύναμης των μαθηματικών από τους μαθητές*, Πρακτικά $10^{ου}$ Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ.
3) Μπούντης, Τ. (2004) *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals*, Αθήνα, Leaders Books.
4) Χρηστίδης Θ. (1997) *Χάος και πιθανολογική αιτιότητα: Μεταξύ προκαθορισμού και τύχης. Μια σπουδή των φυσικών εννοιών και αρχών*, Θεσσαλονίκη, Βάνιας.
5) Devaney, R. (1990) *Chaos, Fractals and Dynamics*, Addison-Wesley
6) Eves, H. (1989) Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, Αθήνα, Τροχαλία
7) Stewart, I. (1988) *Παίζει ο θεός ζάρια; Η επιστήμη του Χάους* ($10^{η}$ έκδ.), Αθήνα, Τραυλός.
8) Vilenkin, N. Ya. (1997) *Αναζητώντας το άπειρο*, Αθήνα, Κάτοπτρο.

Διαδίκτυο:

1) Βασικές Αρχές του Θετικισμού. Διαθέσιμο στο http://hyperion.math.upatras.gr/courses/sts/lect/2_1.html (Πρόσβαση Φεβρουάριος 2005)
2) Ένας οδηγός του Χάους για αρχάριους. Διαθέσιμο στο http://www.physics4u.gr/chaos/chaos1.html (Πρόσβαση Φεβρουάριος 2005)
3) Η διαμάχη για την ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής. Διαθέσιμο στο http://www.physics4u.gr/articles/2002/disputequantum.html (Πρόσβαση Μάρτιος 2005)
4) Ποιά κριτική κάνει στην κλασσική θεωρία ο Prigogine; Διαθέσιμο http://www.physics4u.gr/chaos/prig2.html (Πρόσβαση Μάρτιος 2005)
5) Bohm David. (1917-1992). Ένας από τους βαθύτερους στοχαστές του αιώνα. Διαθέσιμο στο http://www.physics4u.gr/articles/2002/bohm.html (Πρόσβαση Μάρτιος 2005)
6) Bohr Niels (1885 - 1962). 40 χρόνια από το θάνατο του ανθρώπου με την βαθύτερη σκέψη. Διαθέσιμο στο http://www.physics4u.gr/articles/2002/bohr.html (Πρόσβαση Μάρτιος 2005)
7) Chae, S.D. & Tall, T. Aspects of the construction of conceptual knowledge: the case of computer-aided exploration of period doubling. *From Informal Proceedings 19-2 (BSRLM)*. Διαθέσιμο στο http://bsrlm.org.uk (Πρόσβαση Μάρτιος 2004)
8) Devaney, Robert L. Chaos, Fractals, and Arcadia. Διαθέσιμο στο http://math.bu.edu/DYSYS/arcadia/sect1.html (Πρόσβαση Φεβρουάριος 2005)
9) Matthew A. Trump. What is Chaos? An Interactive Online Course for Everyone ..by Dr Ilya Prigogine Center for Studies in Statistical Mechanics and Complex Systems Univ. of Texas at Austin. Διαθέσιμο στο http://www.utexas.edu/ (Πρόσβαση Απρίλιος 2005)
10) Contemporary Mathematics and Technology as a Driving Force for School Reform: Chaos and Fractal Teaching. Διαθέσιμο στο http://www.bu.edu/smec/project.html (Πρόσβαση Μάρτιος 2005).

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 343 (ΤΕΥΧΟΣ 114)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και δύο σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι

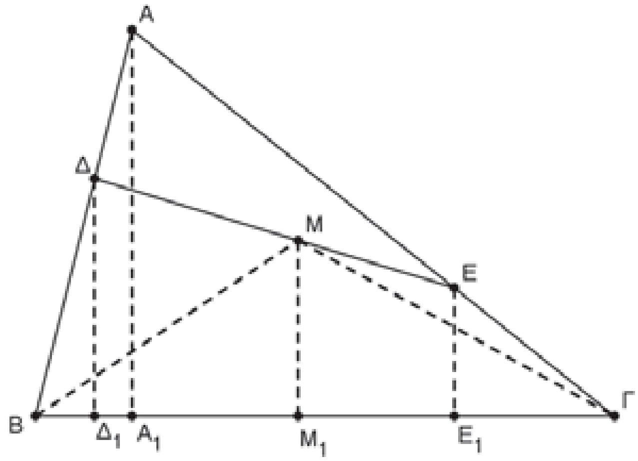
$$\frac{Α Δ}{Δ Β}=\frac{Γ Ε}{Ε Α}=\frac{μ}{ν}$$

όπου μ, ν θετικοί ακέραιοι. Αν Μ είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ για το οποίο ισχύει

$\frac{Δ Μ}{Μ Ε}=\frac{ν}{μ}$, τότε αποδείξετε ότι $(ΜΒΓ)=2(ΑΔΕ)$

(Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη)

ΛΥΣΗ (Γιώργος Αποστολόπουλος - Μεσολόγγι)



Από την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{Α Δ}{Α Β}=\frac{μ}{μ+ν}, \frac{Ε Α}{Α Γ}=\frac{ν}{μ+ν}$$

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}\Rightarrow\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{μ}{μ+ν}\frac{ν}{μ+ν}=\frac{μν}{(μ+ν)^2}, (1)$$

Έστω $Δ_1, Α_1, Μ_1, Ε_1$ οι προβολές των Δ, Α, Μ, Ε στην ΒΓ. Τότε έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{μ}{ν}\Rightarrow\frac{ΑΔ+ΔΒ}{ΔΒ}=\frac{μ+ν}{ν}\Rightarrow\frac{ΑΒ}{ΔΒ}=\frac{μ+ν}{ν}$$

και επειδή $ΔΔ_1 // ΑΑ_1$ είναι

$$\frac{ΑΒ}{ΔΒ}=\frac{ΑΑ_1}{ΔΔ_1}=\frac{μ+ν}{ν}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\frac{ΓΕ}{ΑΓ}=\frac{ΕΕ_1}{ΑΑ_1}=\frac{μ}{μ+ν}\Rightarrow\frac{ΑΑ_1}{ΕΕ_1}=\frac{μ+ν}{μ}$$

Επιπλέον, $\frac{ΔΜ}{ΜΕ}=\frac{ν}{μ}$ οπότε από το γνωστό τύπο του τραπεζίου, στο τραπέζιο $ΔΔ_1Ε_1Ε$ έχουμε

$$ΜΜ_1=\frac{νΕΕ_1+μΔΔ_1}{μ+ν}$$

Άρα $ΜΜ_1=\dfrac{\frac{μν}{μ+ν}ΑΑ_1+\frac{μν}{μ+ν}ΑΑ_1}{μ+ν}=\dfrac{2μν}{(μ+ν)^2}ΑΑ_1$

Τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΒΓ, οπότε

$$\frac{(ΜΒΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΜΜ_1}{ΑΑ_1}=\frac{2μν}{(μ+ν)^2}, (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $(ΜΒΓ)=2(ΑΔΕ)$ που είναι το ζητούμενο.

Ο ίδιος συνάδελφος έχει στείλει και μια δεύτερη λύση χρησιμοποιώντας **βαρυκεντρικές συντεταγμένες.**

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Καράβοτας Δημήτριος – Κάτω Αχαΐα και Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος.

ΑΣΚΗΣΗ 344 (ΤΕΥΧΟΣ 114)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{α}{β+γ}+\frac{β}{γ+α}+\frac{γ}{α+β}\leq\frac{1}{2}+\left(\frac{R}{2ρ}\right)^2$$

όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου, ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου του τριγώνου.

(Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι)

ΛΥΣΗ (Γιώργος Χασάπης – Ρόδος)

Αν θέσουμε

$$A=\frac{α}{β+γ}+\frac{β}{γ+α}+\frac{γ}{α+β}$$

τότε, μετά από πράξεις έχουμε

$$A=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3-2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma}$$

Είναι όμως γνωστό ότι για τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha+\beta+\gamma=2\tau$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\tau^2+\rho^2+4R\rho \text{ και } \alpha\beta\gamma=4R\rho$$

οπότε έχουμε:

$$A=\frac{(2\tau)^3-4\tau(\tau^2+\rho^2+4R\rho)+3(4\tau R\rho)}{2\tau(\tau^2+\rho^2+4R\rho)-4\tau R\rho}$$

$$=\frac{4\tau(\tau^2-\rho^2-R\rho)}{2\tau(\tau^2+\rho^2+2R\rho)}=\frac{2(\tau^2-\rho^2-R\rho)}{\tau^2+\rho^2+2R\rho}$$

Έτσι, η αποδεικτέα, γράφεται

$$\frac{2(\tau^2-\rho^2-R\rho)}{\tau^2+\rho^2+2R\rho}\le\frac{1}{2}+\frac{R^2}{4\rho^2}$$

η οποία, μετά την εκτέλεση των πράξεων, γράφεται

$$(6\rho^2-R^2)\tau^2\le\rho(10\rho^3+2R^3+\rho R^2+12R\rho^2)$$

και είναι προφανής αν $6\rho-R^2\le0$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι $6\rho-R^2>0$, τότε, δεδομένου ότι

$\tau^2\le4R^2+4R\rho+3\rho^2$ (ανισότητα **Gerretsen**)

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(6\rho^2-R^2)(4R^2+4R\rho+3\rho^2)\le\rho(10\rho^3+2R^3+\rho R^2+12R\rho^2)$$

για την απόδειξη της οποίας αρκεί

$$18\rho^4-4R^4-4\rho R^3+21\rho^2R^2+24R\rho^3$$
$$\le10\rho^4+2\rho R^3+\rho^2R^2+12R\rho^3$$

ή, αρκεί

$$2(-4\rho^4+2R^4+3\rho R^3-10\rho^2R^2-6R\rho^3)\ge0$$

ή, αρκεί

$$2R^4+3\rho R^3-10\rho^2R^2-6\rho^3R-4\rho^4\ge0$$

που ισχύει λόγω της ανισότητας του Euler, $(R\ge2\rho)$ αφού γράφεται

$$(R-2\rho)(2R^3+7\rho R^2+4\rho^2R+2\rho^3)\ge0$$

Σημείωμα σύνταξης:

- Τα σχετικά με τις ανισότητες **Gerretsen** τα έχουμε εκθέσει στο τεύχος 115.
- Αποδεικνύεται ότι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^3-2\tau x^2+(\tau^2+\rho^2+4R\rho)x-4\tau R\rho=0$$

οπότε από τις σχέσεις Vieta, προκύπτουν άμεσα

$$\alpha+\beta+\gamma=2\tau$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\tau^2+\rho^2+4R\rho \text{ και}$$

$$\alpha\beta\gamma=4R\rho$$

(Δ. Κοντογιάννη: ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ, σ. 31)

- Αλγεβρικά τεχνάσματα που διευκολύνουν το σχηματισμό της συμμετρικής παράστασης

$$A=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3-2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma}$$

είναι τόσο η γραφή του Α ως

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)-3$$

όσο και η κλασσική αλγεβρική ισότητα

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

- Επισημαίνουμε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει επίσης η γνωστή ανισότητα Nesbitt

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\ge\frac{3}{2}$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτριος Αγρίνιο και Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΑΣΚΗΣΗ 345 (ΤΕΥΧΟΣ 114)

Έστω α, β, γ, δ ακέραιοι αριθμοί με $\alpha\delta>0$. Αν οι εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha x^2+\beta x+(\gamma+\delta)=0$ και $\alpha x^2+\beta x+(\gamma+2\delta)=0$ έχουν ρητές ρίζες, να αποδείξετε ότι υπάρχει πυθαγόρειο τρίγωνο (ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές ακέραιους αριθμούς) για το εμβαδόν Ε του οποίου ισχύει $E=\alpha\delta$.

(Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον)

ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γιώργος–Κάτω Πατήσια)

Αν $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ οι διακρίνουσες των εξισώσεων, τότε έχουμε:

$$\Delta_1=\beta^2-4\alpha\gamma=\kappa^2,\ \Delta_2=\beta^2-4\alpha\gamma-4\alpha\delta=\lambda^2$$

και

$$\Delta_3=\beta^2-4\alpha\gamma-4\alpha\delta-4\alpha\delta=\mu^2$$

όπου κ, λ, μ θετικοί ακέραιοι, αφού οι διακρίνουσες των εξισώσεων, που προφανώς είναι ακέραιοι αριθμοί, πρέπει να είναι τετράγωνα ακεραίων.

Έχουμε λοιπόν,

$$\beta^2-4\alpha\gamma=\kappa^2,\ \kappa^2-4\alpha\delta=\lambda^2,\ \lambda^2-4\alpha\delta=\mu^2$$

και επειδή ο αριθμός 4 διαιρεί τους $4\alpha\gamma$, $4\alpha\delta$ συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί κ, λ, μ είναι όλοι άρτιοι, αν ο β είναι άρτιος, ή όλοι περιττοί, αν ο β είναι περιττός.

Δεδομένου ότι $\alpha\delta>0$ ισχύει επιπλέον $\kappa>\lambda>\mu$, οπότε αν θεωρήσουμε τους ακέραιους

$$\rho_1=\frac{\kappa-\mu}{2},\ \rho_2=\frac{\kappa+\mu}{2}$$

έχουμε:

$$\frac{\rho_1\rho_2}{2}=\frac{(\kappa-\mu)(\kappa+\mu)}{8}=\frac{\kappa^2-\mu^2}{8}=\frac{\lambda^2+4\alpha\delta-\lambda^2+4\alpha\delta}{8}=\frac{8\alpha\delta}{8}=\alpha\delta$$

$$\rho_1^2+\rho_2^2=\frac{(\kappa-\mu)^2+(\kappa+\mu)^2}{4}=\frac{\kappa^2+\mu^2}{2}=\frac{\lambda^2+4\alpha\delta+\lambda^2-4\alpha\delta}{2}=\lambda^2$$

Άρα, το τρίγωνο με πλευρές ρ_1, ρ_2, λ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές ίσες με ρ_1, ρ_2 υποτείνουσα μήκους λ και εμβαδόν $E=\frac{\rho_1\rho_2}{2}=\alpha\delta$

Λύση έστειλε επίσης ο Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι

ΑΣΚΗΣΗ 346 (ΤΕΥΧΟΣ 115)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}},\ x>-1$

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$x-\frac{x^2}{2}<f(x)<x$$

β. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$\frac{\nu+1}{2\nu}-\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{12\nu^3}<S_\nu<\frac{\nu+1}{2\nu}$$

όπου $S_\nu=f\left(\frac{1}{\nu^2}\right)+f\left(\frac{2}{\nu^2}\right)+...+f\left(\frac{\nu}{\nu^2}\right)$

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$

(**Γιώργος Τσιώλης** - Τρίπολη)

ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλειος –Αγ. Παρασκευή)

α. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$x+1>1\Rightarrow\sqrt{x+1}>1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x+1}}<1\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x+1}}<x$$

οπότε το δεξί σκέλος της ανισότητας ισχύει.

Σε ότι αφορά στο αριστερό σκέλος προφανώς ισχύει και αυτό όταν $x\ge 2$, ενώ με $0<x<2$, έχουμε:

$$x-\frac{x^2}{2}<f(x)\Leftrightarrow x-\frac{x^2}{2}<\frac{x}{\sqrt{x+1}}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{2-x}{2}<\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\overset{0<x<2}{\Leftrightarrow}(2-x)^2(x+1)<4\Leftrightarrow x^3+x^2-4x^2-4x+4x+4<4$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-3)<0$$

που αληθεύει αφού $0<x<2$

Άρα, για κάθε $x>0$ ισχύει $x-\frac{x^2}{2}<f(x)<x$.

β. Αν θέσουμε διαδοχικά

$$x=\frac{1}{\nu^2},\ x=\frac{2}{\nu^2},...,x=\frac{\nu}{\nu^2}$$

στην ανισότητα του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{2\nu^4}<f\left(\frac{1}{\nu^2}\right)<\frac{1}{\nu^2}$$

$$\frac{2}{\nu^2}-\frac{4}{2\nu^4}<f\left(\frac{2}{\nu^2}\right)<\frac{2}{\nu^2}$$

....

$$\frac{\nu}{\nu^2}-\frac{\nu}{2\nu^4}<f\left(\frac{\nu}{\nu^2}\right)<\frac{\nu}{\nu^2}$$

απ' όπου με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\frac{1+2+...+\nu}{\nu^2}-\frac{1^2+2^2+...+\nu^2}{2\nu^4}<f\left(\frac{1}{\nu^2}\right)+f\left(\frac{2}{\nu^2}\right)+...+f\left(\frac{\nu}{\nu^2}\right)$$

$$<\frac{1+2+...+\nu}{\nu^2}\quad(1)$$

Η (1) με τη βοήθεια των τύπων των βασικών αθροισμάτων

$$\Sigma_1=1+2+...+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\ \text{και}$$

$$\Sigma_2=1^2+2^2+...+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

γράφεται: $\frac{\nu+1}{2\nu}-\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{12\nu^3}<S_\nu<\frac{\nu+1}{2\nu},\quad(2)$

γ. Ισχύουν:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{\nu+1}{2\nu}-\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{12\nu^3}\right)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$\text{και}\ \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu+1}{2\nu}=\frac{1}{2}$$

οπότε, από το κριτήριο ισοσύγκλισης, έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}S_\nu=\frac{1}{2}$$

Λύση έστειλαν επίσης οι Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο και Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΑΣΚΗΣΗ 347 (ΤΕΥΧΟΣ 115)

Θεωρούμε δυο ομόκεντρους κύκλους με κέντρο O και ακτίνες R και R_1 ($R_1>R$) και ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R). Οι προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τέμνουν τον κύκλο (O, R_1) στα σημεία $\Gamma_1, \Delta_1, A_1, B_1$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

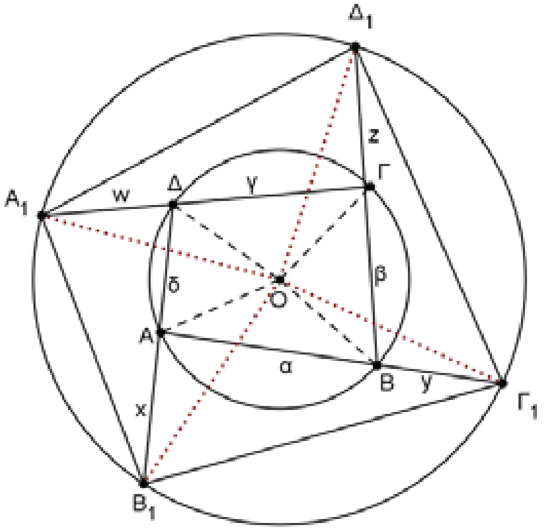
α. Αν L_1, L είναι οι περίμετροι των τετράπλευρων $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ και ΑΒΓΔ αντίστοιχα, τότε $\frac{L_1}{L}\ge\frac{R_1}{R}$

β. $\frac{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}{(AB\Gamma\Delta)}\ge\left(\frac{R_1}{R}\right)^2$

(**Καρτσακλής Δημήτρης** - Αγρίνιο)

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

α. Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Πτολεμαίου σε καθένα από τα τετράπλευρα $ΟΑΒ_1Γ_1$, $ΟΒΓ_1Δ_1$, $ΟΓΔ_1Α_1$ και $ΟΔΑ_1Β_1$ έχουμε:



$$ΑΓ_1\cdot R_1 \le Β_1Γ_1\cdot R + ΑΒ_1\cdot R_1$$
$$ΒΔ_1\cdot R_1 \le Γ_1Δ_1\cdot R + ΒΓ_1\cdot R_1$$
$$ΓΑ_1\cdot R_1 \le Δ_1Α_1\cdot R + ΓΔ_1\cdot R_1$$
$$ΔΒ_1\cdot R_1 \le Α_1Β_1\cdot R + ΔΑ_1\cdot R_1$$

Με πρόσθεση των παραπάνω ανισοτήτων, έχουμε:

$$R_1(ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ)+R_1(ΒΓ_1+ΓΔ_1+ΔΑ_1+ΑΒ_1)$$
$$\le R(Α_1Β_1+Β_1Γ_1+Γ_1Δ_1+Δ_1Α_1)+R_1(ΑΒ_1+ΒΓ_1+ΓΔ_1+ΔΑ_1)$$
$$\Rightarrow R_1L \le RL_1 \Rightarrow \frac{L_1}{L}\ge\frac{R_1}{R}$$

β. Για το εμβαδόν $(ΑΒΓΔ)$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισχύει:

$$(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{2}(αδημΑ+βγημΓ)=\frac{1}{2}(αδ+βγ)ημΑ$$

$$\text{ή } (ΑΒΓΔ)=\frac{1}{2}(αβ+γδ)ημΒ$$

Επιπλέον,

$$(ΑΒ_1Γ_1)=\frac{x(α+y)ημ(180^{\circ}-Α)}{2}=\frac{x(α+y)ημΑ}{2}$$

οπότε:

$$\frac{(ΑΒ_1Γ_1)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{x(α+y)}{αδ+βγ}$$

Ομοίως,

$$\frac{(ΒΓ_1Δ_1)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{y(β+z)}{αβ+γδ},\ \frac{(ΓΔ_1Α_1)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{z(γ+w)}{αδ+βγ} \text{ και}$$
$$\frac{(ΔΑ_1Β_1)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{w(δ+x)}{αβ+γδ}$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}{(ΑΒΓΔ)}=1+\frac{x(α+y)+z(γ+w)}{αδ+βγ}+\frac{y(β+z)+w(δ+x)}{αβ+γβ}$$

Η δύναμη καθενός εκ των σημείων $Α_1, Β_1, Γ_1, Δ_1$ ως προς τον μικρότερο κύκλο είναι ίση με $R_1^2-R^2$ και είναι ίση με καθένα από τα γινόμενα

$$w(w+γ),\ x(x+δ),\ y(y+α),\ z(z+β)$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\frac{x(α+y)}{αδ+βγ}=y(α+y)\frac{x}{y(αδ+βγ)}$$

οπότε από αυτή και τις κυκλικές της έχουμε:

$$\frac{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}{(ΑΒΓΔ)}=1+\left(R_1^2-R^2\right)\left[\frac{x}{y(αδ+βγ)}+\frac{z}{w(αδ+βγ)}+\frac{y}{z(αβ+γδ)}+\frac{w}{x(αβ+γδ)}\right]$$

απ' όπου με τη βοήθεια της ανισότητας ΑΜ-ΓΜ έχουμε:

$$\frac{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}{(ΑΒΓΔ)}\ge 1+\frac{4(R_1^2-R^2)}{\sqrt{(αδ+βγ)(αβ+γδ)}}$$

Αλλά,

$$2\sqrt{(αδ+βγ)(αβ+γδ)}\le αδ+βγ+αβ+γδ=(α+γ)(β+δ)$$

$$\le\frac{1}{4}(α+β+γ+δ)^2\le\frac{\left(4\sqrt{2}R\right)^2}{4}=8R^2$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τη γνωστή πρόταση ότι από όλα τα τετράπλευρα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο, αυτό που έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο είναι το τετράγωνο.

Επομένως,

$$\frac{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}{(ΑΒΓΔ)}\ge 1+\frac{4(R_1^2-R^2)}{4R^2}\Rightarrow\frac{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}{(ΑΒΓΔ)}\ge\left(\frac{R_1}{R}\right)^2$$

που είναι το ζητούμενο.

Σημείωμα σύνταξης : Στο κλασσικό βιβλίο: **Geometric Problems** on Maxima and Minima των **Andreescu – Mushkarov– Stoyanov** βρίσκουμε την παραλλαγή του προηγούμενου θέματος, όπου αν αντί για τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου (O, R) στα Α, Β, Γ, Δ και συμβολίσουμε με $τ, τ'$ τις περιμέτρους του αρχικού τετραπλεύρου και του ΕΖΗΘ που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες, τότε ισχύει

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΕΖΗΘ)}\ge\left(\frac{τ}{τ'}\right)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 348 (ΤΕΥΧΟΣ 115)

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος ΓΔ του τριγώνου και τα συμμετρικά $Δ_1$, $Δ_2$ του Δ ως προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ. Αν η ευθεία $Δ_1Δ_2$ τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ είναι τα άλλα δυο ύψη του τριγώνου.

(**Δεληβέρης Βασίλης** - Αθήνα)

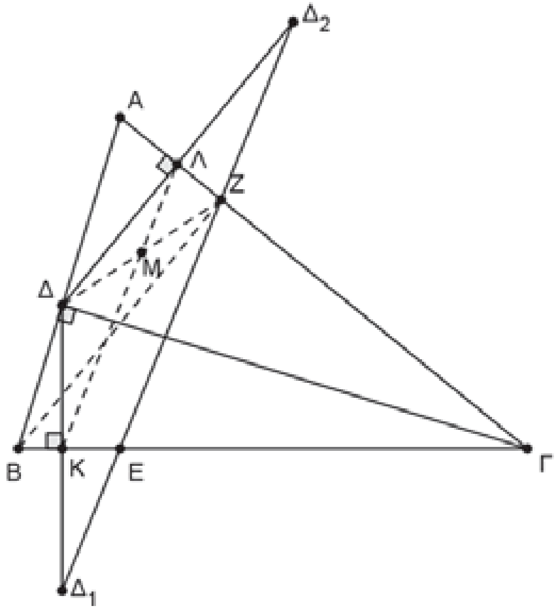
ΛΥΣΗ

(Ανδρής Ιωάννης **– Αθήνα)**

Έστω Κ, Λ τα σημεία τομής των $ΔΔ_1$, $ΔΔ_2$ με τις ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα. Από το ορθογώνιο τρίγωνο

ΔΒΓ προκύπτει ότι $K\hat{\Delta}\Gamma=\hat{B}$. Επιπλέον, από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΔΚΓΛ παίρνουμε

$$K\hat{\Delta}\Gamma=K\hat{\Lambda}\Gamma \text{ οπότε } \hat{B}=K\hat{\Lambda}\Gamma, \ (1).$$



Αν Μ είναι το σημείο τομής των ΔΖ, ΚΛ, τότε το Μ είναι το μέσο της ΔΖ, αφού Κ, Λ είναι τα μέσα των $\Delta\Delta_1, \Delta\Delta_2$. Άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΛΔΖ έχουμε: $M\hat{Z}\Lambda=M\hat{\Lambda}Z=K\hat{\Lambda}\Gamma$, (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΔ είναι εγγράψιμο, οπότε $B\hat{Z}\Gamma=B\hat{\Delta}\Gamma=90^{o}$

Επομένως, το ΒΖ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Ομοίως δείχνουμε ότι και το τμήμα ΑΕ είναι επίσης ύψος του αρχικού τριγώνου.

Λύση έστειλαν επίσης οι Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή και Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο, **Γιώργος Τσιώλης** - Τρίπολη.

Προτεινόμενα Θέματα

362. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Οι προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ, ΓΔ και ΒΓ, ΑΔ τέμνονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$(OK\Lambda)=\frac{1}{2}R^2\cdot \varepsilon\varphi K\hat{O}\Lambda$$

Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι

363 Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις διχοτόμους του $BB_1, \Gamma\Gamma_1$ που τέμνονται στο Ι. Να αποδείξετε ότι

$$B_1I\cdot\Gamma_1I<\frac{BB_1\cdot\Gamma\Gamma_1}{4}<BI\cdot\Gamma I$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

364. Έστω α, β, γ, δ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\gamma+\beta\delta\geq\sqrt{3}$$

Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία

365. Θεωρούμε κύκλο και τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάνω σ' αυτόν, ώστε

$$\overset{\frown}{B\Gamma}=\overset{\frown}{\Delta E}=\overset{\frown}{ZA}=60^{o}$$

Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των χορδών ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Λουριδάς Γιάννης - Αθήνα

366. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2^{x+1}-7}{x-1}-\frac{10}{3-2x}<0$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

Έφυγαν από κοντά μας

† Γιάννης Δράκος

Έφυγε πρόσφατα, από κοντά μας, ο εξαίρετος μαθηματικός και παιδαγωγός και για πολλά χρόναι, ενεργό μέλος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, την οποία **αγαπούσε** και **στήριζε** μέχρι το τέλος. Αίσθηση έκανε η επιθυμία του και επιθυμία της οικογένειάς του, αντί στεφάνου τα χρήματα να κατατεθούν για τη στήριξη των μαθηματικών διαγωνισμών που διοργανώνει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Πάντα δίπλα στη νεολαία, που πάντα πίστευε, αγαπούσε και βοηθούσε. Δάσκαλος χαμηλών τόνων, με μεγάλη προσφορά στην εκπαίδευση της Δυτικής Αττικής.

† Πολύδωρος Γεωργιακάκης

Το τελευταίο διάστημα, (13-9-20), ένας ακόμη από την παλιά γενιά των φροντιστηριακών δασκάλων, έφυγε από κοντά μας. Πρόκειται για τον Πολύδωρο Γεωργιακάκη. Ο Πολύδωρος, όπως ήταν γνωστός σε όλους μας, υπήρξε ένας από τους ιδρυτές του φροντιστηρίου «ΑΤΤΙΚΟ» από το οποίο πέρασαν δεκάδες χιλιάδες μαθητές. Από τη θέση αυτή, δίδαξε Άλγεβρα **και ήθος**, σε χιλιάδες νέους ανθρώπους, πολλοί από τους οποίους διέπρεψαν επιστημονικά τόσο στην Ελλάδα όσο στο εξωτερικό. Η σειρά βιβλίων, που έγραψε μαζί με τον Θανάση Κουκλάδα, υπήρξαν πρωτοποριακά για την εποχή τους και παραμένουν αξιοποιήσιμα ακόμα μέχρι και σήμερα.

† Μιλτιάδης Καλαμπόκας

Έφυγε πρόσφατα από κοντά μας, ο εκλεκτός συνάδελφος και μέλος της Ε.Μ.Ε Μιλτιάδης Καλαμπόκας, μάχιμος εκπαιδευτικός στην ιδιωτική Εκπαίδευση. Εξαίρετος δάσκαλος με μεγάλη προσφορά στην εκπαίδευση και στα Μαθηματικά.

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Τα ταξί του διαστήματος

Ταξί, ταξί … φωνάζαμε και να ένας ιδιώτης ταξιτζής ερχόταν για να μας μεταφέρει στην δουλειά μας, στην αγορά για ψώνια, στη Καλαμάτα, στη Λάρισα ή όπου αλλού...

Ναι μέχρι σήμερα, γιατί από το Μάη του 2020 άρχισαν οι δοκιμές του **«διαστημικού ταξί»**. Στις 15 Νοεμβρίου έγινε η 2η δοκιμή, μια ιδιωτική εταιρεία η «**Space X**» σε συνεργασία με τη **NASA** έστειλαν στο διεθνή διαστημικό σταθμό (ΔΔΣ) τέσσερα άτομα για βόλτα αναψυχής θα λέγαμε. Το ταξίδι ευχάριστο με όλες τις ανέσεις, δεν διαρκεί πολύ, όσο να πας με το αεροπλάνο Ευρώπη-Αμερική έχεις φτάσει στο ΔΔΣ. Αμερική, Ρωσία, Ευρώπη, Κίνα, Ιαπωνία ετοιμάζουν τα δικά τους διαστημικά ταξί.

- **Ταξί, ταξί** μέχρι τον Άρη παρακαλώ,
- Εσείς κύριε που πηγαίνετε στην Αφροδίτη, όχι δε βολεύει είναι αντίθετα.

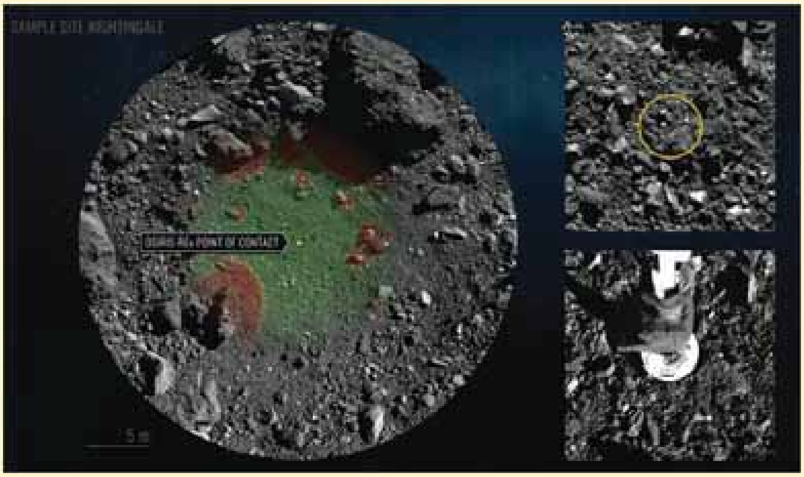
Α καλά … ξέχασα δεν πήρα ομπρέλα, άκουσα «τον καιρό» τη Δευτέρα 16 Νοέμβρη θα έχει **«βροχή» από τους διάττοντες αστέρες των Λεοντιδών.** Είπαν η φετινή φθινοπωρινή «βροχή» των Λεοντιδών, «πεφταστέρια» θα κορυφωθεί το βράδυ της Δευτέρας 16 Νοεμβρίου έως τα χαράματα της Τρίτης στο βόρειο ημισφαίριο της Γης και στην Ελλάδα βέβαια. Ωραία θα δούμε τη «βροχή» αφού έχουμε Νέα Σελήνη και ο ουρανός θα είναι σκοτεινός, κατάλληλος για παρατήρηση, αν δεν έχουμε καμιά συννεφιά. Είπαν οι «μετεωρολόγοι» οι **Λεοντίδες** δίνουν μια μέσης έντασης «βροχή», η οποία όμως κατά καιρούς εξελίσσεται σε εντυπωσιακή. Συνήθως δημιουργεί έως 15 «**πεφταστέρια**» ανά ώρα, αλλά ανά 33 χρόνια περίπου εμφανίζει μια καταιγίδα με εκατοντάδες ή και δεκάδες χιλιάδες μετέωρα την ώρα. Αυτό έγινε το 2001. Η βροχή των διαττόντων φαίνεται να προέρχεται από τον αστερισμό του Λέοντα, απ' όπου πήρε και το όνομα. Στην πραγματικότητα, πρόκειται για τα σωματίδια που έχει αφήσει πίσω της η ουρά του κομήτη 55P/Τέμπλ-Τατλ, ο οποίος ανακαλύφθηκε το 1865 και κάθε Νοέμβριο τα απομεινάρια του διασταυρώνονται με την τροχιά της Γης. Ο κομήτης θα πλησιάσει ξανά τη Γη το 2031.

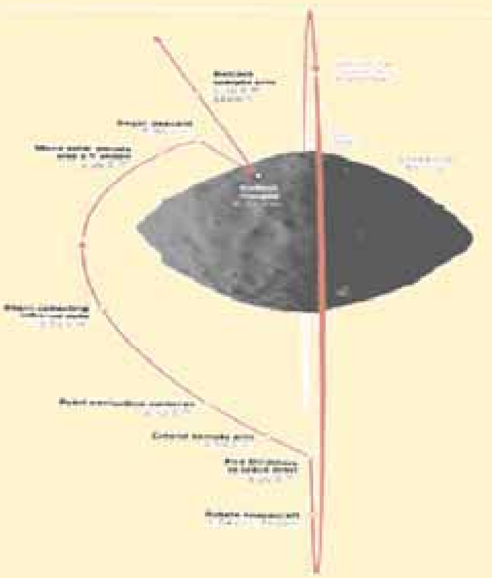
Τι ωραίο ταξίδι! Η θέα από το παράθυρο καταπληκτική. Αν δεν έχουμε κανένα ηλιακό «άνεμο» στον Άρη θα πάμε μια εκδρομή στη λίμνη «Ελλάς».

Η λεκάνη «Ελλάς» στον Άρη

❖ Βλέπω κάτι στο βάθος τι είναι αυτό; **Το διαστημικό σκάφος OSIRIS-REx**

Α! ναι οι επιστήμονες ερευνούν ακόμα το διάστημα, το διαστημικό σκάφος **OSIRIS-REx** πλησίασε στις 20 Οκτωβρίου 2020 τον αστεροειδή Bennu, που εδώ και καιρό ακολουθούσε κατά πόδας. Τον άγγιξε για λίγα δευτερόλεπτα μέσα σε ένα μικρό κρατήρα στο βόρειο ημισφαίριό του και άπλωσε ένα «χέρι», ρομποτικό απορροφητικό βραχίονα, πήρε σκόνη και χαλίκια από την επιφάνειά του για να τα φέρει στη Γη. Βέβαια το ταξίδι είναι μακρινό και θα επιστρέψει το 2023. Εδώ και καιρό η Ιαπωνική Διαστημική Υπηρεσία (JAXA) έχει καταφέρει κάτι ανάλογο σε άλλο αστεροειδή τον Ryugu.





Αυτός ο καλοδιατηρημένος, αρχαίος **αστεροειδής Bennu**, απέχει σήμερα περισσότερα από 320 εκατομμύρια χιλιόμετρα από τη Γη και διαπερνά το διάστημα με ταχύτητα 100.000 χιλιόμετρα την ώρα. Ο **Bennu** προσφέρει στους επιστήμονες ένα παράθυρο στο πρώιμο ηλιακό σύστημα, καθώς διαμορφώθηκε για πρώτη φορά δισεκατομμύρια χρόνια πριν και αφήνει στο διάστημα συστατικά που θα μπορούσαν να είναι αυτά που έδωσαν κάποτε ζωή στη Γη.

❖ Με την κουβέντα πέρασε η ώρα, ούτε που το καταλάβαμε πότε φθάσαμε.

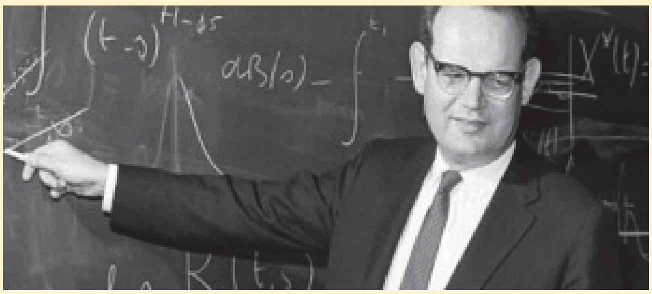
❖ Μα τι βλέπω μια διαφήμιση:

NASA *πωλούνται άδειες ταξί για κάθε πλανήτη*

Κάπως έτσι θα είναι η ζωή μας μάλλον πολύ σύντομα, και να σκεφτεί κανείς ότι στα σχολεία οι μαθητές δεν διδάσκονται καθόλου Αστρονομία…

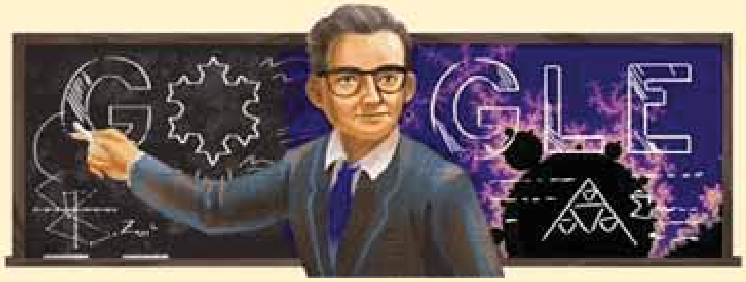
Η ακτογραμμή, τα Fractals και το χάος

Πριν 53 χρόνια **Benoit Mandelbrot** ρώτησε απλά: «***πόσο μεγάλη είναι η ακτογραμμή της Βρετανίας;***». Οι μαθηματικοί τότε αντιμετώπισαν με απαξίωση αυτή την ερώτηση. Ναι αλλά με τις ευθείες, τα τρίγωνα, τους κύκλους, τα τετράγωνα, τους κύβους, τους κυλίνδρους και τις σφαίρες πως θα μετρήσεις την ακτογραμμή; Στη φύση γύρω μας βλέπουμε άλλα σχήματα διαφορετικά πως θα τα μετρήσουμε; Πως θα μετρήσουμε τα σφουγγάρια, τα φύλλα φτέρης, τους παγοκρυστάλλους, τα σύννεφα και τόσα άλλα παράξενα για την κλασική Γεωμετρία; Ο **Benoit Mandelbrot (1924-2010)** εισήγαγε την θεωρία αλλά και τον όρο των Fractals. Έτσι ξεκίνησαν και άλλοι μαθηματικοί να προσπαθούν να περιγράψουν Μαθηματικά, το σχήμα και τις ιδιότητες μιας άλλης κατηγορίας γεωμετρικών αντικειμένων που παρουσιάζουν *αυτο-ομοιότητα*. Στα σχήματα αυτού του είδους, όταν παίρνουμε ένα κομμάτι τους και το μεγεθύνουμε παρουσιάζουν την ίδια εικόνα με το αρχικό. Χρησιμοποίησε Η/Υ ώστε να απεικονίσει τα Fractals και να δείξει πως η οπτική πολυπλοκότητα είναι δυνατόν να δημιουργηθεί από απλούς κανόνες.



Επίσης ο **Mandelbrot** είχε παρατηρήσει ακόμα ότι στις τηλεφωνικές συνδέσεις για την μεταφορά δεδομένων μεταξύ των υπολογιστών υπήρχε θόρυβος.

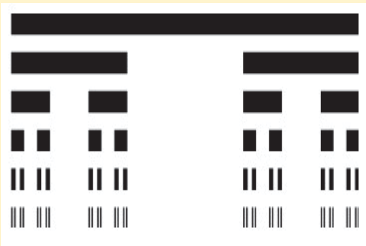
Τότε κατέστρωσε ένα μαθηματικό μοντέλο για να μελετήσει τη δομή των εκρήξεων του θορύβου και μεγεθύνοντας τις εκρήξεις διαπίστωσε την **αυτοομοιότητά τους**. Αυτό του θύμισε το σύνολο που είχε ανακαλύψει ο **Cantor** ο οποίος από ένα ευθύγραμμο τμήμα είχε αφαιρέσει το μεσαίο ένα τρίτο τμήμα του, κατόπιν από κάθε.



Τιμητικό λογότυπο Google- Doodle

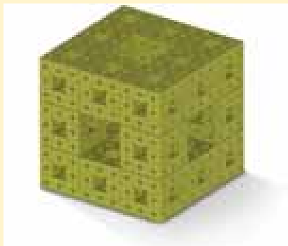
τμήμα που είχε απομείνει είχε αφαιρέσει πάλι το κεντρικό ένα τρίτο και συνέχισε για άπειρα βήματα Το σύνολο των σημείων που απέμειναν διαπίστωσε ότι είχαν μηδενικό μήκος (**γνωστό ως σύνολο Cantor**). [μηδενικό μήκος γιατί αν το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είχε μήκος **έστω α=1,** όλα τα μέρη που αφαιρέσαμε έχουν μήκος $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\ldots=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=1$ Άρα 1-1=0]

Αν αυτό το εφαρμόσουμε σε ένα επίπεδο θα απομείνουν σημεία με μηδενικό εμβαδό (**τάπητας Serpinski**). Εφαρμόζοντάς το σε κύβο θα έχουμε ένα αντικείμενο με μηδενικό όγκο (**σπόγγος του Menger**). [ΕΥΚΛ Β΄τ.81]



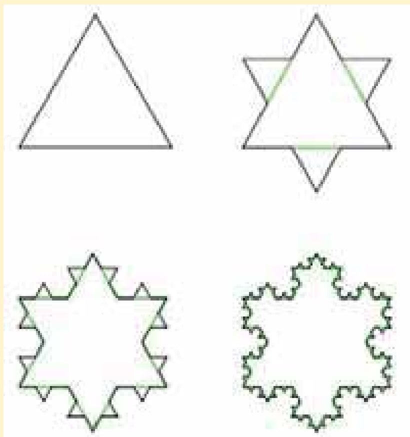
Σύνολο **Cantor**

Τάπητας **Serpinski**



Σπόγγος **Menger**

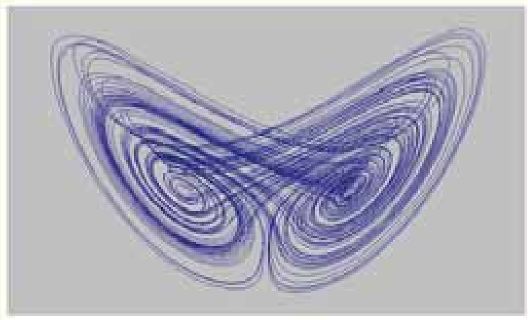
Ο **Mandelbrot** σύντομα διαπίστωσε ότι το φαινόμενο αυτό εμφανιζόταν και σε άλλα πεδία, έτσι το 1975 το αποκάλεσε (Fractal = σπασμένο). Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι και ο Σουηδός Koch το 1904 είχε αφαιρέσει από ένα ισόπλευρο τρίγωνο το μεσαίο ένα τρίτο της κάθε πλευράς και το είχε αντικαταστήσει με ένα όμοιο με το αρχικό αλλά μικρότερο, έκανε το ίδιο ξανά και ξανά μέχρι που η περίμετρος του να γίνει οριακά άπειρη. Αυτό το αντικείμενο πεπερασμένου εμβαδού με άπειρη περίμετρο ονομάστηκε **νιφάδα χιονιού του Koch**. Αυτό που εντυπωσιάζει στο σύνολο **Mandelbrot**, πέρα από την πολυπλοκότητά του είναι ο εξαιρετικά απλός μαθηματικός τύπος που υπεισέρχεται στην κατασκευή του (είναι της μορφής $f(z)=z^2+c$). Γύρω από αυτά τα θέματα έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο «**Η μορφοκλασματική Γεωμετρία της Φύσης**». Δηλαδή κατάλαβε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν επαρκεί για να περιγράψει τις φυσικές δομές οι οποίες είναι πολύ πιο περίπλοκες.



Εκ πρώτης όψεως η ακτογραμμή ή η γραμμή της νιφάδας του **Koch** μοιάζουν μονοδιάστατες αλλά είναι γραμμές «**διαταραγμένες**» και καταλαμβάνουν επιφάνεια αλλά με **διάσταση μεταξύ 1 και 2 δηλαδή κλασματική**. Η κλασματική διάσταση είναι το νέο μαθηματικό εύρημα προκειμένου να χαρακτηρίσει σύνολα σημείων τα οποία δε μπορούν να γεμίσουν μια επιφάνεια ενώ περισσεύουν όταν τα στοιβάζουμε σε μια ευθεία ή το αντίστοιχο μεταξύ επιφάνειας και τρισδιάστατου χώρου. Έτσι βρέθηκαν οι εξής διαστάσεις: η νιφάδα του Koch έχει διάσταση 1,2618, ο Τάπητας Serpinski έχει διάσταση 1,8928, ο σπόγγος Menger έχει διάσταση 2,727.

Ο **Mandelbrot** θεωρείται ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς των τελευταίων ετών. Το αγαπημένο παράδειγμα αυτοομοιότητας του **Mandelbrot** ήταν το μπρόκολο, κάθε κομματάκι του οποίου, αν μεγεθυνθεί, έχει την ίδια μορφή. Η συνεισφορά του **Mandelbrot** στην επιστήμη δεν περιορίζεται στη μελέτη και γραφική απεικόνιση του ομώνυμου συνόλου μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή αλλά οδήγησε τα Μαθηματικά σε νέες θεωρίες έξω από τα παραδοσιακά Μαθηματικά, που μελετούν τη **διακύμανση των τιμών, τη μορφή των φυτών, τη μορφή των ακτογραμμών, τις μεταβολές του καιρού, την κατανομή των αστεριών ή των γαλαξιών στο σύμπαν κ.ά.**

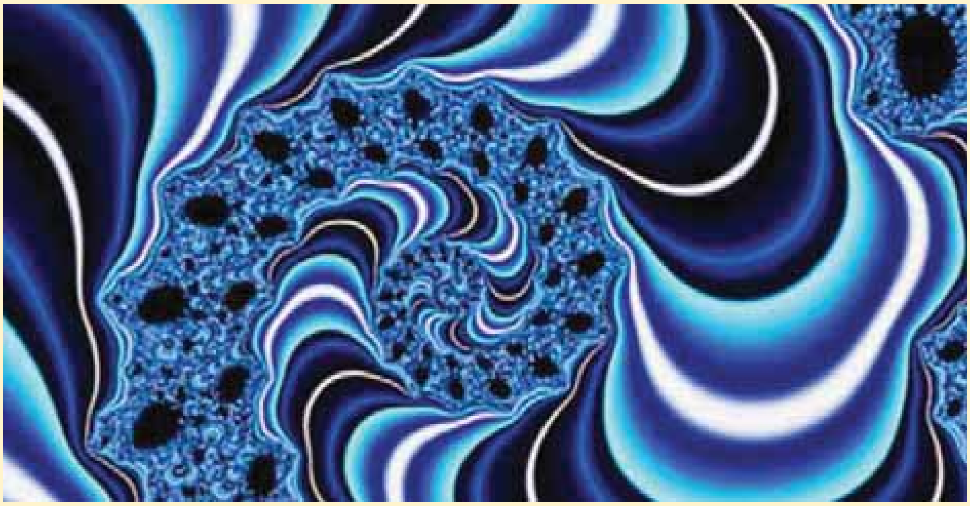
Λίγα χρόνια πριν το ερώτημα του **Mandelbrot** ο μετεωρολόγος **Edward Lorenz** το 1963, σε μια εκτύπωση των αποτελεσμάτων για τον καιρό έκοψε τον αριθμό στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο και πήρε εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα. Πίστευε ότι η διαφορά του ενός χιλιοστού δε θα είχε συνέπειες. Έτσι ανακάλυψε την αδυναμία για μακροπρόθεσμη πρόβλεψη του καιρού στα ντετερμινιστικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Το συμπέρασμα ήταν ότι, στο συγκεκριμένο μοντέλο και η ελάχιστη ακόμη έλλειψη ακρίβειας είναι καθοριστική.



Ο Ελκυστής του Lorenz.

Ανακάλυψε κάτι που αργότερα αποκαλύφθηκε ότι είναι γενικό χαρακτηριστικό μιας ολόκληρης κλάσης συστημάτων, των λεγόμενων **χαοτικών**. Στη συνέχεια ο Lorenz απλοποίησε το μοντέλο του, το κλασικό μοντέλο που συνήθως αποκαλείται σύστημα των εξισώσεων του Lorenz και οδηγήθηκε σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις: $dx/dt=10(y-x)$, $dy/dt=xz+28x-y$, $dz/dt=xy-(8/3)z$

Δηλαδή έχουμε τρεις διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν δύο μη γραμμικούς όρους **xz** και **xy** και **μοντελοποιούσαν** ρεύματα μεταφοράς θερμότητας μέσα σε ένα ρευστό. Ένα μέρος της λύσης είναι το παρακάτω σχήμα που μοιάζει με πεταλούδα και έκτοτε έμελλε να αποτελέσει το σύμβολο για τη **θεωρία του χάους**.



Ο **Poincaré (**με το Ηλιακό σύστημα**)**, ο **Lorenz** και ο **Mandelbrot**, είναι μυθικά πρόσωπα για τις θετικές επιστήμες, γιατί άνοιξαν το δρόμο που οδήγησε στη νέα επιστήμη της **πολυπλο-κότητας**. Πολλοί επιστήμονες τα τελευταία χρόνια αναπαριστούν τα ανεξέλεγκτα αυτά φαινόμενα με μη-γραμμικές εξισώσεις σε Η/Υ για να ανακαλύψουν παράξενους ελκυστές και την κρυφή τάξη που τα ορίζει.

Με ένα τέτοιο πρόβλημα διαταραχών στην υδροδυναμική (μηχανική των συμπιεστών ρευστών), ασχολήθηκε και απέδειξε ο πολυβραβευμένος καθηγητής **Δημήτρης Χριστοδούλου.**

Πήρε το 2011 το βραβείο Shaw, γατί στον τομέα των μη γραμμικών υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων απέδειξε ότι, όταν έχουμε μια αρκετά ισχυρή εισερχόμενη ροή βαρυτικών κυμάτων τότε δημιουργούνται οι παγιδευμένες επιφάνειες. Αυτό το απέδειξε επινοώντας μια νέα αναλυτική μέθοδο που ονόμασε **μέθοδο του βραχέως παλμού.**

Μίλα μου για Μαθηματικά,
και θα τα ξεχάσω,
δείξε μου Μαθηματικά
και ίσως τα θυμάμαι,
άσε με να κάνω πράξεις αυτά που λες
και τότε θα τα καταλάβω.

Κινέζικο ρητό

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πριν από χρόνια είχαμε δημοσιεύσει ένα γρίφο που μας έστειλε από την Κέρκυρα ο Τάσος Ιωσήφ μηχανολόγος ας τον ξαναθυμηθούμε. Έγραφε: «Συγχαρητήρια για τη στήλη «Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν» στο περιοδικό Ευκλείδη Β΄. Για να αγαπήσουμε ακόμα πιο πολύ τα Μαθηματικά είναι καλό να τα βλέπουμε και από αυτή την πλευρά που μας διασκεδάζουν. Για το λόγο αυτό σας στέλνω και εγώ ένα πρόβλημα από την προσωπική μου συλλογή.

Το κωνικό ποτήρι

- Έχω ένα κωνικό ποτήρι και θέλω να το γεμίσω πορτοκαλάδα. Παρατηρώ ότι με το χυμό ενός πορτοκαλιού το ποτήρι έχει φτάσει στο μισό του ύψος. Πόσα ακόμα πορτοκάλια πρέπει να στείψω για να γεμίσει το ποτήρι;

Πριν από χρόνια είχαμε και το γρίφο για τα 100 κελιά από τον συνάδελφο Σωτήρη Γκουντουβά.

- Έχουμε 100 κελιά αριθμημένα από το 1 μέχρι το 100. Εκατό δεσμοφύλακες εργάζονται φέροντες έναν αριθμό ο καθένας από 1 μέχρι 100 επίσης. Ο πρώτος δεσμοφύλακας περνάει από όλα τα κελιά. Ο δεύτερος από τα κελιά 1,2,4,6, … Ο τρίτος από τα 1,3,6,9,12, … δηλαδή ο κάθε δεσμοφύλακας περνάει από το πρώτο κελί και τα κελιά που έχουν τα πολλαπλάσια του αριθμού του. Στην αρχή όλα τα κελιά είναι κλειστά. Ο κάθε δεσμοφύλακας από το κάθε κελί που περνάει, αν το βρει κλειστό το ανοίγει, αν το βρει ανοιχτό το κλείνει. Ποια κελιά θα παραμείνουν ανοικτά αφού περάσουν όλοι οι φύλακες;

ΗΛΙΚΙΕΣ

Ποιος είναι μεγαλύτερος

Ο Πέτρος πριν 54 χρόνια είχε τι $\frac{1}{7}$ της ηλικίας του. Ο φίλος του ο Παύλος πριν 56 χρόνια είχε το $\frac{1}{9}$ της ηλικίας του. Ποιος είναι μεγαλύτερος;

Η τούρτα

Η Εύα στα γενέθλιά της το 2020, κοιτάζοντας ένα παλιό άλμπουμ βρήκε μια φωτογραφία που είχε με συμμαθητές της όταν έσβηνε τα κεράκια στην τούρτα των γενεθλίων της. Μέτρησε τα κεράκια και είναι σε αριθμό το $\frac{1}{8}$ αυτών που είχε στη φετινή της τούρτα. Πότε γεννήθηκε η Εύα;

Ο Περικλής

Ο Περικλής πριν 42 χρόνια είχε το $\frac{1}{7}$ της ηλικίας του. Πόσο χρόνων είναι;

Ποιο χρόνο γεννήθηκε

Η Αγγελική το 2020 είχε τα $\frac{3}{4}$ της ηλικίας του αδελφού της που είναι εφτά χρόνια μεγαλύτερος. Πότε γεννήθηκε η Αγγελική;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 117

***Πόσοι είναι ενδιάμεσα**: Οι αριθμοί ενδιάμεσα είναι 2, 4, 6, 8, … δηλαδή 1x2, 2x2, 3x2, 4x2, … Άρα από 300^2 μέχρι 301^2 είναι 300x2, από 301^2 μέχρι 302^2 είναι 301x2, κοκ.*

Άρα 300x2+301x2+302x2+303x2+304 x2+4=600+602+604+606+608+4=3024

Οι Γυναίκες: Ήταν 2%.

Η παρέα: Το γινόμενο της διαφοράς στην μπύρα επί την διαφορά των παιδιών είναι 1, άρα 1€ παραπάνω η μπύρα και 1 αγόρι παραπάνω.

Ο μαθηματικός: Είναι 45 ετών και η κόρη του 25. Η λύση: αν η κόρη του σήμερα είναι χ ετών ο καθηγητής είναι x+α που είναι ίσο με 9(x-α). Όταν η κόρη θα είναι x+α ετών ο καθηγητής θα είναι x+2·α. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων: x+α=9(x-α) και x+2.α +x+α=110

Οι συνταξιδιώτες: Ο 2450 έχει πρώτους παράγοντες τους $2,5^2,7^2$ άρα οι ηλικίες τους είναι 35, 10, 7.

Το ω: ω=96

Οι σελίδες: Έχει 62, δύο φορές προστέθηκε η σελίδα 45. (άθροισμα διαδοχικών αριθμών)

Η εκδρομή: Αφού Α+Β+Γ+Δ+Ε=100 αφαιρούμε πρώτη και τρίτη ισότητα και τα χρήματα της Ε(λισάβετ) είναι 14€. Συνεπώς η Δ=16€, ο Γ=18€, ο Β=25€ και ο Α=27€.

Όλα ίσα: Πρώτη κίνηση αδειάζουμε 7 εκατοστά από το Α στο Β. Δεύτερη κίνηση αδειάζουμε 6 εκατοστά από το Β στο Γ κα Τρίτη κίνηση αδειάζουμε 4 εκατοστά από το Γ στο Α. Έτσι όλα θα έχουν 8 εκατοστά.

Ο δήμαρχος: Θα ενώσετε τα κέντρα των οικισμών και θα πάρετε τα μέσα των πλευρών αυτού του τριγώνου και τα ενώνετε ανά δύο. Έτσι έχετε τρείς δρόμους που ισαπέχουν από τα κέντρα των οικισμών. Ας διαλέξει ο Δήμαρχος ποιον θα φτιάξει.

Ο αγρότης: Θα φέρουμε μια γραμμή από την Α μέχρι τη Β δεξαμενή και τη μεσοκάθετη της ΑΒ. Ύστερα θα φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΒΓ, εκεί που τέμνονται θα γίνει η γεώτρηση.

Εφτά αδελφές : Οι εφτά αδελφές έχουν μαζί τους τον αδελφό τους. Άρα οχτώ εισιτήρια.

Από τον Διόφαντο: 1. Ο αριθμός είναι ο $\frac{121}{16}$ που είναι και τετράγωνος $\left(\frac{11}{4}\right)^2$ έχουμε

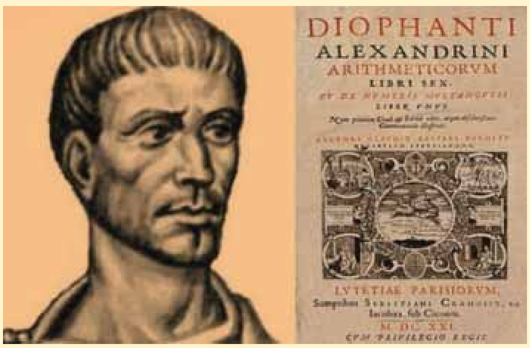
$$\frac{121}{16}-6=\frac{121-96}{16}=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2 \text{ και } \frac{121}{16}-7=\frac{121-112}{16}=\frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

2. Έστω ο 20 που θα διαιρεθεί σε δύο αριθμούς. Παίρνω δυο που έχουν τετράγωνα μικρότερα του 20, τον 2 και 3 αν χ είναι ο ζητούμενος τετράγωνος τότε $(x+2)^2=x^2+4x+4$ και $(x+3)^2=x^2+6x+9$ αν από τον καθένα αφαιρέσουμε τον άγνωστο x^2 τότε θα έχουμε τους ζητούμενους αριθμούς που θα διαιρεθεί ο 20. Δηλαδή 4x+4+6x+9=10x+13=20. Έτσι έχουμε $x=\frac{7}{10}$ και $20=\frac{68}{10}+\frac{132}{10}$.

   Οι απαιτήσεις ικανοποιούνται:

$$\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{68}{10}=\frac{49}{100}+\frac{680}{100}=\left(\frac{27}{10}\right)^2$$

και $$\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{132}{10}=\frac{49}{100}+\frac{1320}{100}=\left(\frac{37}{10}\right)^2$$



3. Είναι οι αριθμοί $\frac{3}{13}$ και $\frac{19}{13}$ και η λύση ανάλογη με την προηγούμενη.
4. Είναι οι αριθμοί $\frac{5}{2}$ και $\frac{7}{2}$
5. Το μουλάρι είχε7 και το Γαϊδούρι 5

Ο πρίγκιπας Κύκλος και η πριγκίπισσα Ευθεία

Ηλίας Κωνσταντόπουλος

Ο κύκλος ήταν ένας πολύ όμορφος πρίγκιπας. Το προφίλ του κυκλοφορούσε παντού στον κόσμο των ιδεών και όλοι τον λάτρευαν. Η αναγνωρισιμότητα που είχε τον είχε κάνει λίγο υπερφίαλο. Η ευθεία ήταν πριγκίπισσα αληθινή, αλλά λίγο μυστηριώδης. Οι άλλοι δεν μπορούσαν εύκολα να την προσεγγίσουν, πάντα κάτι τους ξέφευγε. Αλλά αυτή είχε μάτια μόνο για τον κύκλο.

Αχ, πρίγκιπά μου, τι τέλειος που είσαι! Όλα επάνω σου είναι τέλεια ταιριασμένα. Το όνομά σου είναι σαν να ρέει, καθώς το προφέρω.

-Φυσικά είμαι τέλειος, αφού είμαι κύκλος! Αλλά και εσύ έχεις ένα ωραίο όνομα: Ευθεία.

-Ωραίο; Δε νομίζω. Αυτός ο ήχος «*φθ*», δε μου αρέσει καθόλου. Αλλά και αν ακόμα υποθέσουμε ότι είναι καλό, δεν έχω τίποτα άλλο. Ούτε καν ένα επώνυμο.

-Γιατί εγώ έχω επώνυμο; Πώς σου ήρθε αυτό;

-Έχεις! Να σου το πω; Είσαι «*όλα τα σημεία που απέχουν το ίδιο, από ένα άλλο σημείο*».

-Και τι σημαίνει αυτό; Ότι πρέπει να είμαι ευχαριστημένος; Εγκλωβισμένος αισθάνομαι. Ενώ, εσύ μπορείς να επεκτείνεσαι όσο θέλεις.

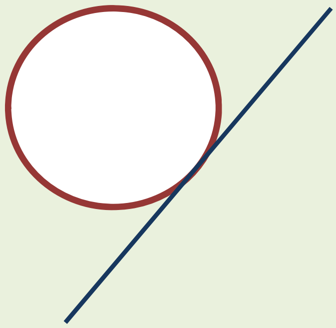
-Δε μου αρκεί αυτό. Δημιουργεί πρόβλημα στην κατανόηση του χαρακτήρα μου. Οι άλλοι δε με καταλαβαίνουν. Θα μπορούσες να με βοηθήσεις; Να μου δώσεις ένα επώνυμο;

-Νομίζω σου έχουν δώσει ένα. Είσαι «*το σχήμα το οποίο αν περιστραφεί γύρω από δύο σημεία του, δεν αλλάζει*». Σιγά το επώνυμο. Δε μου αρέσει, δε δείχνει την προσωπικότητα μου. Περισσότερα προβλήματα μου δημιουργεί.

-Εντάξει τότε. Μείνε μόνο με το μικρό σου όνομα και μην γκρινιάζεις.

-Δεν είναι μόνο ότι δεν έχω επώνυμο. Δεν έχω απολύτως τίποτα.

-Τι εννοείς; Εσύ, ας πούμε έχεις κέντρο, ακτίνα, μήκος, εμβαδόν. Εγώ τι έχω; Μπορείς να μου πεις;



-Έχεις άπειρα σημεία. Μην παραπονιέσαι. Τι να πει τότε και το σημείο. Επίσης έχεις, άπειρο μήκος. Εμβαδόν δεν μπορείς να έχεις, γιατί κινείσαι μόνο σε μία διάσταση. Γι' αυτό είσαι τόσο μονοδιάστατη και στις απόψεις σου.

-Τώρα μου τη λες και από πάνω! Θα βάλω τα κλάματα!

-Συγκρατήσου, είσαι πριγκίπισσα. Έλα κοντά μου να σε παρηγορήσω.

-Να έρθω κοντά σου; Μου επιτρέπεις να έρθω κοντά σου; Αχ, αγαπημένε μου πρίγκιπα!

-Ναι, σου επιτρέπω. Μέχρι και να με ακουμπήσεις.

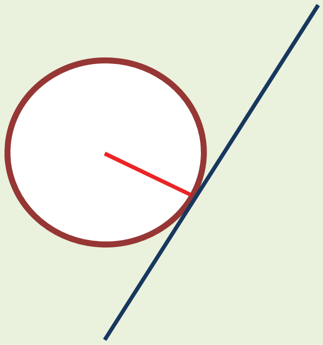
-Εγώ θέλω πιο κοντά σου, θέλω να έρθω στο κέντρο σου, να ακούσω την καρδιά σου.

-Σου επιτρέπω να με ακουμπήσεις μόνο και από εκεί να ακούσεις τους χτύπους της καρδιάς μου. Αν πλησιάσεις πιο κοντά θα με κόψεις σε δυο κομμάτια, δε θα είμαι πια κύκλος. Αυτό θέλεις; Αν φτάσεις στο κέντρο μου θα με κόψεις σε δυο ημικύκλια.

-Όχι, όχι δε θέλω να σου κάνω κακό. Θα μείνω μόνο στην επαφή.

Η ευθεία πλησίασε τον κύκλο, μέχρι να έρθουν σε επαφή και με την ευκαιρία χόρεψε μαζί του και ένα ταγκό. Σχεδόν λιγοθύμησε.

-Αχ, ωραίε μου κύκλε, τι καλά που χορεύουμε μαζί! Θα μείνω για πάντα η εφαπτομένη ντάμα σου. Δώσε μου μια ακτίνα σου να μείνουμε για πάντα ενωμένοι.



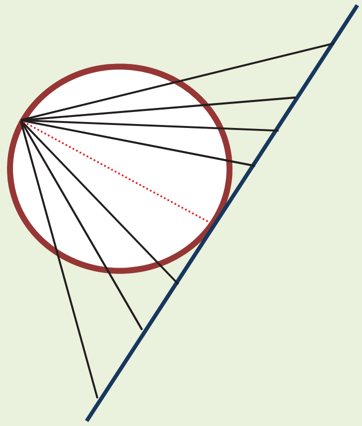
Ο κύκλος παραχώρησε μια ακτίνα του στο σημείο επαφής τους. Δεν τον πείραξε ιδιαίτερα, γιατί είχε άπειρες.

-Τώρα είμαστε ζευγάρι, είπε η ευθεία. Αγαπημένε μου, πόσο μήκος έχεις;

-Λένε ότι με μέτρησαν και βρήκαν ότι έχω μήκος 2πR, αλλά αυτό το π δεν είναι ακριβώς γνωστός αριθμός, αλλά μια προσέγγιση. Άρα, λένε ψέματα ότι με έχουν μετρήσει. Κανένας δεν μπορεί να το κάνει αυτό.

-Καλά, καλά, εμένα μου φτάνει η προσέγγιση. Δυο φορές την ακτίνα σου επί 3,14. Σωστά;

-Πολύ σωστά. Έχω μήκος **(R+R)x3,14**. Για δε το εμβαδόν μου ισχύει κάτι ανάλογο. Ισούται με **(RxR)x3,14.** Απλά το συν γίνεται επί.



-Ωραία, ωραία, έμαθα τόσα πολλά για εσένα. Θα μπορούσαμε να έχουμε πιο στενή επαφή;

-Τι εννοείς;

-Να, να έχουμε περισσότερα κοινά σημεία.

-Είπα ότι αν έρθεις πιο κοντά μου, θα έχουμε δύο κοινά σημεία, αλλά θα με κόψεις στα δυο.

-Όχι, δε θέλω να σε σκοτώσω. Πρέπει να σκεφτούμε άλλον τρόπο. Κάτι θα υπάρχει, αφού και εγώ και εσύ έχουμε άπειρα σημεία.

-Να γίνεις καμπύλη και να με τυλίξεις. Έτσι, θα πάψεις να κρυώνεις τις νύχτες. Ξέρω ότι τα άκρα σου, που εκτείνονται μέχρι το άπειρο, τις νύχτες είναι παγωμένα.

-Αχ, πως με καταλαβαίνεις! Θα το ήθελα πολύ να μην κρυώνω πλέον, αλλά αν κάνω αυτό που λες, θα πάψω να είμαι ευθεία. Αυτό θες;

-Όχι, αν δεν το θέλεις και εσύ. Ποτέ δε θα σου επιβάλω τις απόψεις μου. Αν μείνεις ευθεία και εγώ κύκλος, ο μόνος τρόπος να συνδεθούμε στενότερα είναι έμμεσος.

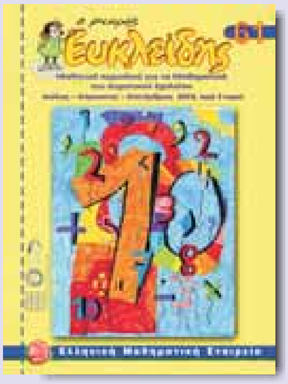
-Έστω, θα τον δεχτώ. Είναι προτιμότερο από να σε ακουμπώ σ' ένα σημείο μόνο.

-Ωραία, ας το κάνουμε τότε. Βλέπεις το αντιδιαμετρικό μου σημείο, του σημείου επαφής μας; Ένωσέ το με κάθε σημείο σου. Έτσι, κάθε σημείο σου θα αντιστοιχεί σ' ένα δικό μου σημείο. Έτσι όλα τα σημεία μας αντιστοιχίζονται ένα προς ένα, συνεπώς έχουμε το ίδιο πλήθος σημείων.

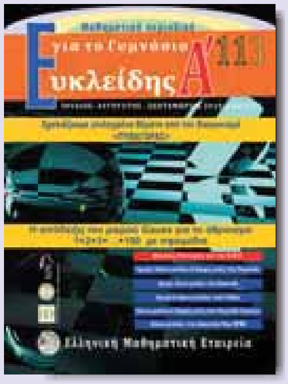
Η ευθεία δεν απάντησε. Είχε λιγοθυμήσει από ευτυχία.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 3€



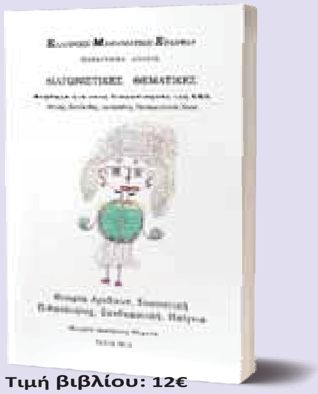
Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3,5€

Διαγωνισμοί

Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€



Τιμή βιβλίου: 12€

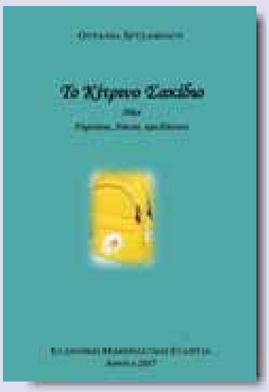
Ολυμπιάδες

Τιμή βιβλίου: 30€

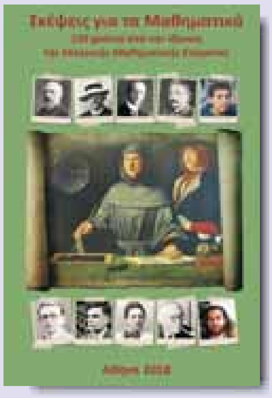
Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία



Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr