ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 2010
ISBN: 978-960-337-096-3

Copyright © 2010 Ίδρυμα Ευγενίδου
Απαγορεύεται η ολική ή μερική ανατύπωση του βιβλίου και των εικόνων με κάθε μέσο καθώς και η διασκευή, η προσαρμογή, η μετατροπή και η κυκλοφορία του (Άρθρο 3 του ν. 2121/1993).

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», προείδε ενωρίτατα και σχημάτισε τη βαθιά πεποίθηση ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο του έθνους αποτελεί η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας σε συνδυασμό προς την ηθική τους αγωγή.

Την πεποίθησή του αυτή την μετέτρεψε σε γενναία πράξη ευεργεσίας, όταν κληροδότησε σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, τον Φεβρουάριο του 1956 συνεστήθη το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου την διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Από τη στιγμή εκείνη άρχισαν πραγματοποιούμενοι οι σκοποί που οραματίσθηκε ο Ευγένιος Ευγενίδης και συγχρόνως η εκπλήρωση μιας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου. Το έργο του Ιδρύματος συνέχισε από το 1981 μέχρι το 2000 ο Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης· έκτοτε συνεχίζει αυτό ο κ. Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Κατά την κλιμάκωση των σκοπών του, το Ίδρυμα προέταξε την έκδοση τεχνικών βιβλίων τόσο για λόγους θεωρητικούς όσο και πρακτικούς. Διεπιστώθη πράγματι ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητών με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν ορθά θεμέλια στην παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό.

Ειδικότερα, όσον αφορά στα εκπαιδευτικά βιβλία των σπουδαστών των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα ανέλαβε τότε την έκδοσή τους σε πλήρη και στενή συνεργασία με τη Διεύθυνση Ναυτικής Εκπαιδεύσεως του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, υπό την εποπτεία του οποίου υπάγονται οι Σχολές αυτές. Η ανάθεση στο Ίδρυμα έγινε με την υπ' αριθ. 61228/5031, της 9ης Αυγούστου 1966, απόφαση του ΥΕΝ, οπότε και συνεκροτήθη και η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων.

Αποτέλεσμα της συνεργασίας αυτής ήταν η έκδοση της Σειράς Βιβλιοθήκη του Ναυτικού, όπου εξεδόθησαν: α) Για τους μαθητές των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού 30 τόμοι βιβλίων (1967 – 1979). β) Για τις ΑΔΣΕΝ (Ανώτερες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού) 54 τόμοι (1979 – 2001).

Κύριος σκοπός των εκδόσεων αυτών, των οποίων το περιεχόμενο είναι σύμφωνο με τα εκάστοτε ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα του ΥΕΝ, ήταν η παροχή προς τους σπουδαστές των Ναυτικών Σχολών ΑΔΣΕΝ και Ναυτικών Λυκείων των αναγκαίων τότε εκπαιδευτικών κειμένων, τα οποία αντιστοιχούν προς τα μαθήματα που διδάσκονται στις Σχολές αυτές.

Επίσης ελήφθη ιδιαίτερη πρόνοια, ώστε τα βιβλία αυτά να είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία του κλάδου τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι επέρχεται μεταβολή στη στάθμη του περιεχομένου τους.

Με την υπ. αρ. Μ 2111. 1/2/99/28-05-1999 (ΦΕΚ 1168Β/14-6-99) υπουργική απόφαση, όπως τροποποιήθηκε με την Κ.Υ.Α. των υπουργών Οικονομίας και Οικονομικών και Εμπορικής Ναυτιλίας αρ. Μ 3611.2/05/05/16-12-2005 (ΦΕΚ 1942 Β/30-12-2005 και ΦΕΚ 169 Β/13-02-2006), το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή και έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων των Ναυτικών Ακαδημιών· ήδη το ΥΠ.ΟΙ.Α.Ν.

προεκήρυξε την συγγραφή 27 βιβλίων προς κάλυψη των αναγκών των σπουδαστών βάσει των ισχυόντων αναλυτικών προγραμμάτων.

Οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος καταβάλλουν κάθε προσπάθεια, ώστε τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και τις δυνατότητες των σπουδαστών. Γι' αυτό έχουν προσεγμένη γλωσσική διατύπωση των κειμένων τους και η διαπραγμάτευση των θεμάτων είναι ανάλογη προς τη στάθμη της εκπαιδεύσεως, για την οποία προορίζονται.

Με την προσφορά στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού των εκδόσεών του, το Ίδρυμα συμβάλλει στην πραγματοποίηση του σκοπού του ιδρυτή του Ευγενίου Ευγενίδου.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Εμμανουήλ Δρης, ομ. καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.
Ιωάννης Τεγόπουλος, ομ. καθηγητής ΕΜΠ.
Ιωάννης Τζαβάρας, αντιναύαρχος Λ.Σ. (Ε.Α.).
Ιάκωβος Σέργης, αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., δ/ντής ναυτ. εκπαιδ. Υ.Θ.Υ.Ν.ΑΛ.
Σύμβουλος επί των εκδόσεων του Ιδρύματος **Κων. Αγγ. Μανάφης,** ομότιμος καθηγ. Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών.

Ειδικός Επιστημονικός Σύμβουλος για το βιβλίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» Γεώργιος Παντελίδης, ομ. καθηγητής ΕΜΠ.

Διατελέσαντα μέλη της Επιτροπής

Γ. Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Καλογεράς* (1957-1970) Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Παππάς* (1955-1983) καθηγητής ΕΜΠ, *Χ. Καβουνίδης* (1955-1984) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, *Μ. Αγγελόπουλος* (1970-2003) ομ. καθηγητής ΕΜΠ, *Σπ. Γουλιέλμος (1958)* Αντ/ρχος, *Ξ. Αντωνιάδης* (1959-1966) Αντ/ρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Γ. Τσακίρης* (1967-1969) Πλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ελλ. Σίδερης* (1967-1969) Υποναύαρχος, *Π. Φουστέρης* (1969-1971) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αλ. Μοσχονάς* (1971-1972) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Χρυσανθακόπουλος* (1972-1974) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αθαν. Σωτηρόπουλος* (1974-1977) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Σπαρτιώτης* (1977) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., προσωρινός Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Πουλάκης* (1977-1979) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Λυκούδης* (1979-1981) Πλοίαρχος Λ. Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αναστ. Δημαράκης* (1981-1982) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Τσαντήλας* (1982-1984) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Σταυρόπουλος* ομ. καθηγητής Πειραιώς (-2008) Ε. Τζαβέλας (1984-1986) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Γρηγοράκος* (1986-1988) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Μπαρκατσάς* (1988-1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Παπαναστασίου* (1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Λάμπρου* (1989-1992) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Κοκορέτσας* (1992-1993) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρκάκης* (1993-1994) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Ζουμπούλης* (1994-1995) Πλοίαρχος Λ.Σ., *Φ. Ψαρράς* (1995-1996) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Καλαρώνης* (1996-1998) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Ρεντζεπέρης* (1998-2000) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Στεφανάκης* (2000-2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρίνος* (2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Εξαρχόπουλος* (2001-2003) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μπριλάκης* (2003-2004) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ν. Θεμέλαρος* (2003-2004) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Κουβέλης* (2004-2005) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Δ. Βασιλάκης* (2005-2008) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Πετρόπουλος* (2008-2009) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Ματσάγγος* (2009-2011) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ..

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΚΟΥ Β. ΚΟΥΤΡΑ
Μαθηματικού - Καθηγητού Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΑΘΗΝΑ
2010

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί διδακτικό εγχειρίδιο για τους σπουδαστές των Ακαδημιών του Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.). Σκοπός του είναι να προσφέρει μια άρτια και παιδαγωγικά αποτελεσματική εισαγωγή στις βασικές μαθηματικές έννοιες επάνω στις οποίες θα στηριχθούν πολλές από τις επόμενες γνώσεις και εμπειρίες, που θα αποκτήσουν στη διάρκεια της σταδιοδρομίας τους, ως φοιτητές των Α.Ε.Ν. και αξιωματικοί του Εμπορικού Ναυτικού.

Για την κατανόηση της ύλης που καλύπτεται θεωρείται αρκετό το μαθηματικό υπόβαθρο που αποκτά κάποιος με την ολοκλήρωση των λυκειακών του σπουδών. Ιδιαίτερη προσπάθεια έχει καταβληθεί, ώστε να δοθούν τα αποτελέσματα στην πιο απλή μορφή τους να γίνουν εύκολα κατανοητά από τον αναγνώστη, χωρίς όμως να χάνουν τη μαθηματική τους ορθότητα και τη λογική συνέπειά τους. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε προκειμένου τα θέματα που αναπτύσσονται στο βιβλίο, να υποστηρίζονται με επαρκή αριθμό εποπτικών σχημάτων, διαγραμμάτων και πινάκων, ώστε να είναι ευκολότερη η αφομοίωση και εμπέδωση της ύλης.

Σχετικά με τη διάρθρωση της ύλης αξίζει να αναφερθούν τα εξής: Κάθε κεφάλαιο χωρίστηκε σε μικρότερες παραγράφους, στις οποίες γίνεται εισαγωγή νέων εννοιών ή αποτελεσμάτων. Για τη διευκόλυνση των σπουδαστών στη μελέτη του εγχειριδίου, τα μαθηματικά στοιχεία ιδιαίτερης σπουδαιότητας (ορισμοί, προτάσεις, θεωρήματα και κατάλογοι ιδιοτήτων) έχουν σημειωθεί με ***γαλάζια σκίαση****, ώστε να μπορούν να εντοπισθούν εύκολα και να προσελκύσουν την προσοχή του σπουδαστή. Σε κάθε παράγραφο, δίνονται σειρά προσεκτικά επιλεγμένων παραδειγμάτων, που σημειώνονται με* ***ροζ σκίαση****, παρέχοντας έτσι τη δυνατότητα ο σπουδαστή να γνωρίσει τον τρόπο χρήσης της θεωρίας στην αντιμετώπιση προβλημάτων και να μπορέσει στη συνέχεια να προχωρήσει στη λύση των ανάλογων ασκήσεων που προτείνονται σε κάθε παράγραφο. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου κρίθηκε σκόπιμο να δοθούν οι βασικές έννοιες και τύποι του κεφαλαίου (συνοπτικά στοιχεία θεωρίας), ερωτήσεις κατανοήσεως (σωστού/λάθους και πολλαπλής επιλογής), αλλά και μια συλλογή από γενικές ασκήσεις.*

Η διάρθρωση και η μορφοποίηση της ύλης έγινε, όχι μόνο με βάση τις απαιτήσεις και απόψεις του συγγραφέως για το περιεχόμενο ενός τέτοιου εγχειριδίου, αλλά και με βάση το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας των Α.Ε.Ν. Η επιθυμία να μην αποτελέσει το βιβλίο αυτό μόνο ένα διδακτικό εγχειρίδιο, αλλά και ένα σύμβουλο σε περίπτωση που κάποιος σπουδαστής θελήσει να εμβαθύνει περισσότερο στα θέματα που αυτό πραγματεύεται, οδήγησε στην παρουσίαση και κάποιων πιο προχωρημένων θεμάτων, που εξαρτάται στην κρίση του διδάσκοντος κατά πόσο θα διδαχθούν (λαμβάνοντας υπόψη το διαθέσιμο χρόνο διδασκαλίας και την ταχύτητα αφομοίωσης των βασικών θεμάτων από τους εκάστοτε σπουδαστές). Τα θέματα αυτά έχουν σημειωθεί με ***γκρίζα σκίαση****, ώστε να είναι εύκολα ανιχνεύσιμα από τους διδάσκοντες, αλλά και τους σπουδαστές.*

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ομότιμο καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ.

Γεώργιο Παντελίδη, ο οποίος, ως κριτής και ειδικός επιστημονικός σύμβουλος αφιέρωσε πολύ χρόνο στη μελέτη των αρχικών κειμένων και με τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις του βοήθησε σημαντικά στη βελτίωση του παρόντος εγχειριδίου.

Επίσης ευχαριστώ το συνάδελφό μου κ. Βασίλη Σεβρόγλου, ο οποίος συνέβαλε ουσιαστικά στη διαμόρφωση των κεφαλαίων 7 και 8 και είχε την υπομονή να διορθώσει προσεκτικά τα τυπογραφικά δοκίμια του εγχειριδίου κατά τις διάφορες φάσεις που προηγήθηκαν της εκτυπώσεως του βιβλίου.

Ο συγγραφέας θεωρεί τιμή του την ανάθεση της συγγραφής του παρόντος εγχειριδίου από το ΥΠ.ΟΙ.Α.Ν. και το Ίδρυμα Ευγενίδου και επιθυμεί να ευχαριστήσει όλους τους συνεργάτες του Τμήματος Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου που με την άρτια, άριστη και κοπιαστική συνεργασία συνέβαλαν στην ολοκλήρωση του παρόντος συγγράμματος.

Θεωρώντας ότι ο καλύτερος τρόπος για τη βελτίωση κάθε ανθρώπινου (άρα και μη τέλειου) έργου είναι η δημιουργική και καλόπιστη κριτική, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ των προτέρων τους αναγνώστες που θα μου απευθύνουν παρατηρήσεις, υποδείξεις ή σχόλια, τα οποία θα βοηθήσουν στη βελτίωσή του σε επόμενη έκδοση.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2010
Μ. Β. Κούτρας

1

ΠΙΝΑΚΕΣ

Οι πίνακες είναι ένα από τα χρησιμότερα «εργαλεία» των μαθηματικών, αφού μας δίνουν τη δυνατότητα να παρουσιάσομε με συνοπτικό τρόπο ένα σύνολο στοιχείων έτσι, ώστε να μπορούμε να λαμβάνομε από αυτόν εύκολα και γρήγορα τις πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν. Παράλληλα, με τον ορισμό καταλλήλων πράξεων μεταξύ πινάκων, μπορούμε να παίρνομε ως αποτέλεσμα νέους πίνακες, που μας δίνουν πρόσθετες πληροφορίες για το πρόβλημα που μελετάμε.

1.1 Η έννοια του πίνακα. Ισότητα πινάκων. Ειδικές μορφές πινάκων.

Στο Υπουργείο Ναυτιλίας έχουν συγκεντρωθεί, μεταξύ άλλων, στατιστικά στοιχεία που αφορούν στον αριθμό επιβατών που μετακινήθηκαν προς τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ, μέσω τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά το μήνα Ιούνιο ενός συγκεκριμένου έτους. Σύμφωνα με τα στοιχεία αυτά, ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν κατά το μήνα Ιούνιο ήταν:

1η Εταιρεία: 8000 επιβάτες προς το νησί α, 5000 επιβάτες προς το νησί β και 6000 επιβάτες προς το νησί γ.
2η Εταιρεία: 6000 επιβάτες προς το νησί α, 4000 επιβάτες προς το νησί β και 2000 επιβάτες προς το νησί γ.
3η Εταιρεία: 3000 επιβάτες προς το νησί α, 2000 επιβάτες προς το νησί β και 3000 επιβάτες προς το νησί γ.
4η Εταιρεία: 2000 επιβάτες προς το νησί α, 1000 επιβάτες προς το νησί β και 1000 επιβάτες προς το νησί γ.

Προκειμένου να παρουσιάσομε συνοπτικά τα παραπάνω δεδομένα, αλλά και να έχομε τη δυνατότητα συγκρίσεως με αντίστοιχα δεδομένα που αφορούν σε άλλους μήνες, θα μπορούσαμε να τα οργανώσομε όπως παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

	Επιβάτες		
Εταιρεία	***Νησί α***	***Νησί β***	***Νησί γ***
1	8000	5000	6000
2	6000	4000	2000
3	3000	2000	3000
4	2000	1000	1000

ή ακόμη καλύτερα, καταγράφοντας την επιβατική κίνηση σε χιλιάδες επιβάτες:

	Επιβάτες		
Εταιρεία	***Νησί α***	***Νησί β***	***Νησί γ***
1	8	5	6
2	6	4	2
3	3	2	3
4	2	1	1

Από τον πίνακα αυτό καταλαβαίνομε αμέσως ότι μέσω της 1ης Εταιρείας μετακινήθηκαν κατά το μήνα Ιούνιο $8 \times 1000 = 8000$ επιβάτες προς το νησί α, $5 \times 1000 = 5000$ επιβάτες προς το νησί β και $6 \times 1000 = 6000$ επιβάτες προς το νησί γ, μέσω της 4ης Εταιρείας μετακινήθηκαν κατά το μήνα Ιούνιο $1 \times 1000 = 1000$ επιβάτες, τόσο προς το νησί β όσο και προς το νησί γ κ.λπ.. Επί πλέον εύκολα μπορούμε να διαπιστώσομε ότι η 4η εταιρεία διακίνησε σε κάθε νησί τους λιγότερους επιβάτες (σε σχέση με τις υπόλοιπες τρεις εταιρίες), ενώ η 1η εταιρεία τους περισσότερους κ.λπ..

Αν διατηρήσομε τα αριθμητικά μόνο δεδομένα της προηγούμενης διατάξεως και τα τοποθετήσομε μέσα σε αγκύλες, δηλαδή γράψομε

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

θα λέμε ότι σχηματίζεται ένας ***πίνακας*** 4×3 ή ένας ***πίνακας τύπου*** 4×3. Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

> Μια ορθογώνια τοποθέτηση $\mu \times \nu$ πλήθους αριθμών, σε μ γραμμές και ν στήλες, ονομάζεται ***πίνακας*** $\mu \times \nu$ ή ***πίνακας τύπου*** $\mu \times \nu$.

Το πλήθος μ των γραμμών και ν των στηλών ονομάζονται ***διαστάσεις*** του πίνακα, ενώ οι αριθμοί που εμπεριέχονται σ' αυτόν καλούνται ***στοιχεία*** του πίνακα. Συνήθως οι πίνακες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ κ.λπ., ενώ τα στοιχεία τους με πεζά. Το στοιχείο ενός πίνακα A τύπου $\mu \times \nu$, που βρίσκεται στην ***i-γραμμή*** και στην *j-* ***στήλη***, συμβολίζεται με α_{ij} και ο πίνακας Α θα γράφεται

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} j\ \textit{στήλη} \\ \downarrow \end{array} \\ \mathrm{A} = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu j} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} \leftarrow i\ \textit{γραμμή} \end{array}$$

Το σύνολο όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ θα συμβολίζεται με $\Pi_{\mu \times \nu}$. Αν $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ θα γράφομε

$$A = [\alpha_{ij}],\ i = 1, 2, ..., \mu \quad \text{και} \quad j = 1, 2, ..., \nu$$

ή πιο απλά $A = [\alpha_{ij}]_{\mu \times \nu}$ ή, αν είναι προφανές ποιες είναι οι διαστάσεις του πίνακα, $A = [\alpha_{ij}]$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας που περιγράφει τη διακίνηση επιβατών από τις τέσσερεις εταιρείες προς τα τρία νησιά έχει διαστάσεις $\mu = 4$ και $\nu = 3$ και αν χρησιμοποιήσομε γι' αυτόν το γράμμα A, μπορούμε να γράψουμε $A \in \Pi_{4 \times 3}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο α_{22} του πίνακα αυτού είναι ίσο με 4, το α_{41} είναι ίσο με 2 κ.λπ..

Ας υποθέσομε ότι ο αριθμός επιβατών που διακινήθηκαν από τις τέσσερεις εταιρείες προς καθένα από τα τρία νησιά κατά τον μήνα Ιούλιο παρέμεινε αμετάβλητος. Είναι τότε φανερό ότι ο αντίστοιχος πίνακας, έστω B, για το μήνα Ιούλιο έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του A. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο πίνακας B είναι ***ίσος*** με τον A. Γενικά, η ισότητα δύο πινάκων ορίζεται ως εξής:

> Δύο πίνακες A, B, λέμε ότι είναι ***ίσοι*** δηλαδή $A = B$, όταν είναι του ίδιου τύπου (έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Από τον ορισμό της ισότητας πινάκων που δόθηκε παραπάνω προκύπτει ότι δύο πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορεί να είναι ίσοι.

Έτσι, οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 1/w \\ y^3 & z \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

θα είναι ίσοι αν και μόνο αν $x^2 = 9,\ 1/w = -5$, $y^3 = 8,\ z = 6$ δηλαδή όταν $x = \pm 3,\ w = -1/5,\ y = 2$ και $z = 6$.

Αναφέρομε στη συνέχεια ορισμένα είδη πινάκων, που έχουν ιδιαίτερη σημασία, εφόσον εμφανίζονται αρκετά συχνά στις εφαρμογές που κάνουν χρήση της έννοιας του πίνακα:

α) Μηδενικός πίνακας τύπου $\mu \times \nu$ ονομάζεται ένας πίνακας $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν. Για έναν τέτοιο πίνακα θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathbf{O}_{\mu \times \nu}$ ή απλώς **O**, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως. Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενικοί πίνακες τύπου 2×2 και 3×2 αντίστοιχα.

β) Αντίθετος πίνακας ενός πίνακα $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ ονομάζεται ο πίνακας ίδιου τύπου, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των αντιστοίχων στοιχείων του A. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $-A$. Για παράδειγμα, ο αντίθετος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ είναι ο $B = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ και αντίστροφα, ο αντίθετος του πίνακα B είναι ο A. Συνήθως θα λέμε απλά ότι οι πίνακες A και B είναι αντίθετοι.

γ) Πίνακας γραμμή ονομάζεται ένας πίνακας τύπου $1 \times \nu$, όπως ο [4 2 5 4 1].

δ) Πίνακας στήλη ονομάζεται ένας πίνακας τύπου $\mu \times 1$, όπως ο $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

ε) Πίνακας στοιχείο ονομάζεται ένας πίνακας τύπου 1×1, π.χ. ο πίνακας [10].

στ) Τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν ονομάζεται ένας πίνακας με ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ν (δηλ. τύπου $\nu \times \nu$). Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξεως ν θα συμβολίζεται με Π_ν. Για παράδειγμα, οι πίνακες, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ είναι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως 2 και 3 αντίστοιχα, δηλαδή $A \in \Pi_2$ και $B \in \Pi_3$.

Σ' έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως ν,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ λέμε ότι σχηματίζουν την ***κύρια διαγώνιό*** του και αναφέρονται συνήθως με την ονομασία ***διαγώνια στοιχεία***.

ζ) Διαγώνιος πίνακας ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας A, του οποίου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλαδή έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα οι πίνακες $\begin{bmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιοι πίνακες τάξεως 2, 3 και 4 αντίστοιχα.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση διαγώνιου πίνακα είναι ο πίνακας για τον οποίο ισχύει $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = ... = \alpha_{\nu\nu} = 1$, δηλαδή ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας ονομάζεται ***μοναδιαίος πίνακας*** ή ***ταυτοτικός πίνακας*** τάξεως ν και συμβολίζεται με I_ν. Στην περίπτωση που η τάξη του πίνακα είναι προφανής και δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως θα γράφομε απλώς I (αντί για I_ν).

η) Τριγωνικός πίνακας ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά (***άνω τριγωνικός***) ή όλα τα στοιχεία που βρίσκονται επάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά (***κάτω τριγωνικός***). Π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Πίνακες τριγωνικοί άνω.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2 & 0 \\ 5 & y & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ -7 & 1 & x^3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Πίνακες τριγωνικοί κάτω.

θ) Ανάστροφος ενός πίνακα A ονομάζεται ο πίνακας, ο οποίος έχει ως γραμμές τις στήλες του A και ως στήλες τις γραμμές του A. Ο ανάστροφος του πίνακα A θα συμβολίζεται με A^T. Έτσι, αν A είναι ο $\mu \times \nu$ πίνακας τότε ο ανάστροφός του A^T θα είναι ο πίνακας τύπου $\nu \times \mu$.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1j} & ... & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2j} & ... & \alpha_{2\nu} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & ... & \alpha_{ij} & ... & \alpha_{i\nu} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & ... & \alpha_{\mu j} & ... & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Πίνακας A.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{i1} & ... & a_{\mu 1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{i2} & ... & a_{\mu 2} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1j} & a_{2j} & ... & a_{ij} & ... & a_{\mu j} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & ... & a_{i\nu} & ... & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος του πίνακα A.

Συνήθως θα γράφομε σε συντομία $A^T = [\alpha_{ji}]_{\nu\times\mu}$.

Για παράδειγμα, ανάστροφος του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 6\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -5 & 4\\ 6 & -2\end{bmatrix}$.

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι ισχύει πάντοτε η ισότητα $(A^T)^T = A$.

ι) Συμμετρικός πίνακας τάξεως ν ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}]_{\nu\times\nu}$ για τον οποίο ισχύει $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα $i = 1,2,..., \nu$ και $j = 1,2,..., \nu$. Έτσι, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix}1 & x^2 & 5\\ x^2 & 2 & y\\ 5 & y & 3\end{bmatrix}$$

είναι ένα συμμετρικός πίνακας τάξεως 3. Από τον ορισμό που δόθηκε προηγουμένως για τον ανάστροφο πίνακα είναι φανερό ότι ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ισούται με τον ανάστροφό του, δηλαδή αν ισχύει $A^T = A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1.

Ένα πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς-Σύρος-Τήνος-Μύκονος. Οι αποστάσεις (σε ν.μ.) μεταξύ Πειραιά-Σύρου, Σύρου-Τήνου, και Τήνου-Μυκόνου είναι 80, 20 και 10 ν.μ. αντίστοιχα. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα, ο οποίος να δίνει όλες τις δυνατές αποστάσεις μεταξύ των τεσσάρων λιμένων ανά δύο. Να σχολιάσετε τη μορφή του πίνακα σε σχέση με τα είδη πινάκων που αναφέρθηκαν στη θεωρία.

Λύση.

Αν γράψομε τους τέσσερεις λιμένες στις γραμμές και στις στήλες ενός πίνακα και συμπληρώσομε τις αποστάσεις που δόθηκαν, θα έχομε:

ΠΡΟΣ / ΑΠΟ	***Πειραιά***	***Σύρο***	***Τήνο***	***Μύκονο***
Πειραιά	0	80	...	...
Σύρο	80	0	20	...
Τήνο	...	20	0	10
Μύκονο	...	...	10	0

Συμπληρώνοντας τώρα και τις μιλιομετρικές αποστάσεις που λείπουν (με πρόσθεση των αντιστοίχων αποστάσεων) οδηγούμαστε στον επόμενο πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 80 & 100 & 110\\ 80 & 0 & 20 & 30\\ 100 & 20 & 0 & 10\\ 110 & 30 & 10 & 0\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που προέκυψε είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 4, στον οποίο η κύρια διαγώνιος έχει όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα $i = 1, 2, 3, 4$ και $j = 1, 2, 3, 4$ ή ισοδύναμα $A^T = A$ οπότε ο πίνακας είναι συμμετρικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.2.

Δίνεται ο πίνακας $A = [\alpha_{ij}]_{2\times3}$, όπου $\alpha_{ij} = |i-j|$, για $i = 1, 2$, και $j = 1, 2, 3$

α) Να γράψετε αναλυτικά τον πίνακα A.

β) Να γράψετε αναλυτικά τον ανάστροφο πίνακα A^{T}. Είναι ο πίνακας A συμμετρικός;

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$A=\begin{bmatrix} x-2 & 1 & x^2-2 \\ x-1 & 0 & x^3-7 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

α) Ο ζητούμενος πίνακας A έχει στοιχεία

$$a_{11} = |1-1| = 0,\quad a_{12} = |1-2| = 1,\quad a_{13} = |1-3| = 2,$$

$$a_{21} = |2-1| = 1,\quad a_{22} = |2-2| = 0,\quad a_{13} = |2-3| = 1$$

οπότε

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

β) Ο ανάστροφος του πίνακα A είναι ο

$$A^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δεν έχει νόημα να εξετασθεί κατά πόσον ο πίνακας είναι συμμετρικός, αφού ο A δεν είναι τετραγωνικός.

γ) Η ισότητα

$$\begin{bmatrix} x-2 & 1 & x^2-2 \\ x-1 & 0 & x^3-7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ισχύει αν και μόνο

$$x-2=0,\qquad x^2-2=2,\qquad x-1=1,\qquad x^3-7=1$$

Είναι προφανές ότι για την τιμή $x = 2$ ισχύουν όλες οι προηγούμενες ισότητες.

Ασκήσεις.

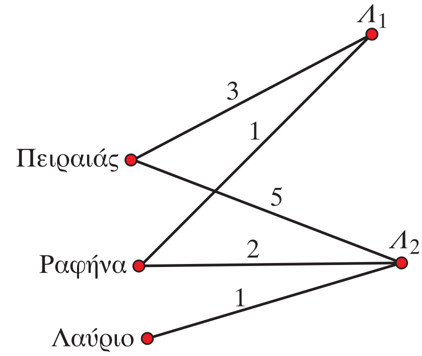
1.1.1. Να αναφέρετε σε ποια ή ποιες από τις κατηγορίες (είδη) πινάκων (α)–(ι) εμπίπτει καθένας από τους επόμενους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3^x & 5^y \\ 3^x & 2 & z^2 \\ 5^y & z^2 & 3 \end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix} y & x^2+1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\qquad [10]$$

$$[0\ 0\ 0\ 0\ 0]\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

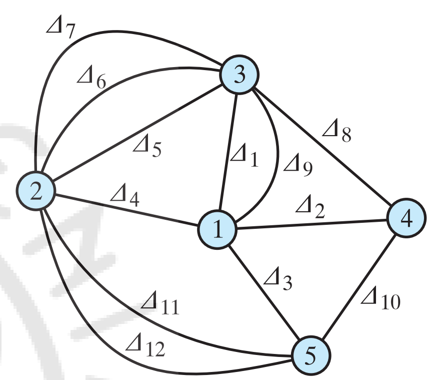
1.1.2. Δίνεται ο 4×4 πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$, όπου $\alpha_{ij} = |2i - 3j|$ για $i = 1, 2, 3, 4$ και $j = 1, 2, 3, 4$. Να γράψετε αναλυτικά τον πίνακα αυτόν, αφού βρείτε τα στοιχεία του.

1.1.3. Το δίκτυο του σχήματος 1.1α παρουσιάζει τις συνδέσεις μεταξύ των τριών λιμένων της Αττικής και δύο άλλων λιμένων Λ_1, Λ_2, ενός Ελληνικού νησιού. Ο αριθμός πάνω από κάθε γραμμή είναι ο αριθμός των διαφορετικών ημερήσιων δρομολογίων που συνδέουν από το κάθε λιμένα της Αττικής προς τους λιμένες του νησιού π.χ. από το λιμένα του Πειραιά προς το λιμένα Λ_1 εκτελούνται κάθε ημέρα 3 δρομολόγια. Να παραθέσετε σε μορφή πίνακα τις πληροφορίες που αφορούν στον αριθμό των διαθεσίμων διαφορετικών ημερήσιων δρομολογίων του δικτύου που περιγράφει το σχήμα 1.1α.



Σχ. 1.1α.

1.1.4. Πέντε πόλεις 1, 2, 3, 4, 5 επικοινωνούν μεταξύ τους με 12 δρόμους $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{12}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1β. Να κατασκευάσετε πίνακα $A = [\alpha_{ij}]_{4\times 4}$ τέτοιο ώστε, κάθε στοιχείο του α_{ij} να δίνει το πλήθος των απευθείας συνδέσεων μεταξύ των πόλεων i και j (π.χ. το στοιχείο α_{13} είναι το 2, γιατί υπάρχουν δύο απευθείας συνδέσεις μεταξύ των πόλεων 1 και 3).



Σχ. 1.1β.

1.1.5. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των x, y, για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x-1 & 8x-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(4x+1) & (3y-1)(7x-3) \\ 0 & 4x^2 \end{bmatrix}.$$

1.1.6. Να βρείτε την τιμή του αριθμού x ώστε ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & x^2-4 \\ x^2-5x+6 & 2 \end{bmatrix}$ να είναι διαγώνιος.

1.1.7. Να βρείτε τις τιμές των x, y, για τις οποίες ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x^2-1 & x-1 \\ 1-x^2 & x & 0 \\ 0 & y^2 & (x+1)^2-3 \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ίσος με το μοναδιαίο πίνακα τάξεως $\nu = 3$.

1.1.8. Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας τάξεως 3

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a & x & y \\ x' & \beta & z \\ y' & z' & \gamma \end{bmatrix}.$$

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα $B = [\beta_{ij}]$ με

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \ i = 1, 2, 3 \text{ και } j = 1, 2, 3,$$

και να διαπιστώσετε ότι ο B είναι πάντοτε ένας συμμετρικός πίνακας. Τι θα συνέβαινε αν ο αρχικός πίνακας A ήταν συμμετρικός;

1.2 Πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό.

Συνεχίζοντας το παράδειγμα που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ας υποθέσομε ότι ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά τους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο ενός συγκεκριμένου έτους δίνεται από τους επόμενους πίνακες A, B αντίστοιχα:

$$A=\begin{bmatrix}8 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}10 & 5 & 5\\ 9 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 1\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι ο συνολικός αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά τους δύο μήνες που εξετάζομε (Ιούνιο και Ιούλιο) θα δίνεται από έναν τρίτο πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο θα είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων των δύο αυτών πινάκων, δηλαδή από τον

$$\begin{bmatrix}8+10 & 5+5 & 6+5\\ 6+9 & 4+2 & 2+3\\ 3+7 & 2+8 & 3+1\\ 2+1 & 1+5 & 1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 10 & 11\\ 15 & 6 & 5\\ 10 & 10 & 4\\ 3 & 6 & 3\end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται ***άθροισμα*** των πινάκων A και B. Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

> ***Άθροισμα*** δύο πινάκων, $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ τύπου $\mu\times\nu$, ονομάζεται ο πίνακας $\mu\times\nu$, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων των πινάκων A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A + B$, δηλαδή $A + B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]_{\mu\times\nu}$.

Η πράξη, με την οποία υπολογίζομε το άθροισμα δύο πινάκων ονομάζεται ***πρόσθεση πινάκων***.

Η διαφορά του αριθμού επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, ανάμεσα στους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο θα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο αποτελεί διαφορά των αντιστοίχων στοιχείων των πινάκων A και B.

$$\begin{bmatrix}8-10 & 5-5 & 6-5\\ 6-9 & 4-2 & 2-3\\ 3-7 & 2-8 & 3-1\\ 2-1 & 1-5 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ -4 & -6 & 2\\ 1 & -4 & -1\end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται ***διαφορά*** των δύο πινάκων A και B (το αρνητικό αποτέλεσμα στον τελευταίο πίνακα σημαίνει μείωση του αριθμού επιβατών κατά το μήνα Ιούλιο). Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

Αν $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ είναι δύο πίνακες τύπου $\mu \times \nu$, τότε ονομάζομε ***διαφορά*** του πίνακα B από τον πίνακα A τον πίνακα $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο αποτελεί διαφορά των αντιστοίχων στοιχείων των πινάκων A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A - B$, δηλαδή $A - B = [\alpha_{ij} - \beta_{ij}]_{\mu \times \nu}$.

Ο υπολογισμός της διαφοράς μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του αντίθετου πίνακα, αφού ισχύει ότι

$$A - B = A + (-B).$$

Από τον τρόπο ορισμού των δύο προηγουμένων πράξεων καταλαβαίνομε ότι, για να ορίζεται το άθροισμα ή η διαφορά δύο πινάκων θα πρέπει οι πίνακες να είναι του ***ίδιου τύπου***.

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix},$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A + \Gamma^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma - A^T = \Gamma + (-A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

ενώ οι πίνακες A, Γ καθώς και οι πίνακες B, Γ, που δεν είναι του ίδιου τύπου δεν μπορούν ούτε να προστεθούν ούτε να αφαιρεθούν.

Οι ιδιότητες της *προσθέσεως* των πινάκων είναι ανάλογες με τις ιδιότητες της προσθέσεως των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, αν A, B, Γ είναι τρεις πίνακες τύπου $\mu \times \nu$ και $\mathbf{O}$ ο αντίστοιχος μηδενικός (τύπου $\mu \times \nu$), τότε θα ισχύουν τα εξής:

***Π*₁.** $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

***Π*₂.** $A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$ (ουδέτερο στοιχείο της πράξεως)

***Π*₃.** $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

***Π*₄.** $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{O}$ (αντίθετο στοιχείο της πράξεως)

Το άθροισμα $A + (B + \Gamma)$ ή λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, το άθροισμα $(A + B) + \Gamma$, θα συμβολίζεται με $A + B + \Gamma$. Ομοίως, αν A, B, Γ, Δ είναι τέσσερεις πίνακες ίδιου τύπου, το άθροισμα $(A + (B + \Gamma)) + \Delta$, το οποίο με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα είναι ίσο με καθένα από τα αθροίσματα

$$((A + B) + \Gamma) + \Delta, \quad (A+B)+(\Gamma+\Delta), \quad A+((B+\Gamma)+\Delta), \quad A+(B+(\Gamma+\Delta)),$$

θα λέγεται άθροισμα των πινάκων A, B, Γ, Δ και θα συμβολίζεται ως $A + B + \Gamma + \Delta$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται το άθροισμα k πινάκων $(A_1, A_2, ..., A_k,\ k \geq 3$ θετικός ακέραιος), το οποίο συμβολίζεται ως $A_1 + A_2 + ... + A_k$.

Από τους ορισμούς της προσθέσεως και της αφαιρέσεως και τις ιδιότητές τους προκύπτει ότι

$$X + B = A \Leftrightarrow X = A - B$$

Πράγματι αν ισχύει $X + B = A$, τότε θα έχομε $X + B - B = A - B$, οπότε $X = A - B$. Όμοια αν $X = A - B$, τότε θα ισχύει $X + B = A - B + B$, οπότε $X + B = A$.

Τέλος, για τον ανάστροφο του αθροίσματος και της διαφοράς δύο πινάκων $A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}$ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύουν οι ισότητες:

Π₅. $(A+B)^T = A^T + B^T$ (ανάστροφος του αθροίσματος πινάκων)

Π₆. $(A-B)^T = A^T - B^T$ (ανάστροφος της διαφοράς πινάκων)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.1.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει για τρεις ομάδες ποδοσφαίρου τις νίκες, τις ήττες και τις ισοπαλίες που πέτυχαν στη διάρκεια του πρωταθλήματος (15 αγώνες) εντός και εκτός έδρας.

	Νίκες		*Ισοπαλίες*		*Ήττες*	
Ομάδες	*εντός*	*εκτός*	*εντός*	*εκτός*	*εντός*	*εκτός*
1η	13	11	2	1	0	3
2η	10	9	2	2	3	4
3η	8	6	4	4	3	5

α) Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή τριών πινάκων Α, Β, Γ, που να περιέχουν ο Α τις νίκες, ο Β τις ισοπαλίες και ο Γ τις ήττες κάθε ομάδας.

β) Αν για κάθε νίκη η ομάδα παίρνει 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία 2 βαθμούς και για κάθε ήττα 1 βαθμό, να δημιουργήσετε τον πίνακα ο οποίος δίνει:
- Τους βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα στο πρωτάθλημα εντός και εκτός έδρας.
- Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εντός έδρας και
- Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εκτός έδρας.

γ) Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή δύο πινάκων Δ, Ε που να περιέχουν ο Δ τις εντός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας και ο Ε τις εκτός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα που δίνει τις συνολικές (εντός και εκτός έδρας) νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας.

Λύση.

α) Οι πίνακες A, B, Γ, που δίνουν αντίστοιχα τις νίκες, τις ισοπαλίες και τις ήττες κάθε ομάδας είναι οι εξής:

$$A=\begin{bmatrix}13 & 11\\ 10 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας X που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός και εκτός έδρας, θα έχει τη μορφή $X=3A+2B+\Gamma$, οπότε

$$X=3\begin{bmatrix}13 & 11\\ 10 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39 & 33\\ 30 & 27\\ 24 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\\ 8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43 & 38\\ 37 & 35\\ 35 & 31\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας X_1 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της πρώτης στήλης του X, ενώ ο πίνακας X_2 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εκτός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του X. Επομένως

$$X_1=\begin{bmatrix}43\\ 37\\ 35\end{bmatrix},\qquad X_2=\begin{bmatrix}38\\ 35\\ 31\end{bmatrix}.$$

γ) Έχομε

$$\Delta=\begin{bmatrix}13 & 2 & 0\\ 10 & 2 & 3\\ 8 & 4 & 3\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}11 & 1 & 3\\ 9 & 2 & 4\\ 6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

και ο πίνακας που δίνει τις συνολικές (εντός και εκτός έδρας) έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας θα είναι ο

$$\Delta+E=\begin{bmatrix}13 & 2 & 0\\ 10 & 2 & 3\\ 8 & 4 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & 1 & 3\\ 9 & 2 & 4\\ 6 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13+11 & 2+1 & 0+3\\ 10+9 & 2+2 & 3+4\\ 8+6 & 4+4 & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 3 & 3\\ 19 & 4 & 7\\ 14 & 8 & 8\end{bmatrix}.$$

Ας υποθέσομε τώρα ότι ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά το μήνα Αύγουστο ήταν διπλάσιος του αριθμού που μετακινήθηκαν το μήνα Ιούνιο. Για να βρούμε το πλήθος των επιβατών που μετακινήθηκαν κατά το μήνα Αύγουστο, αρκεί να πολλαπλασιάσομε κάθε στοιχείο του πίνακα A που αφορά στο μήνα Ιούνιο με τον αριθμό 2. Έτσι, ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά το μήνα Αύγουστο θα δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix}2\cdot 8 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6\\ 2\cdot 6 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 10 & 12\\ 12 & 8 & 4\\ 6 & 4 & 6\\ 4 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται ***γινόμενο*** του αριθμού 2 με τον πίνακα A. Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ ονομάζεται ο $\mu \times \nu$ πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε με λ κάθε στοιχείο του πίνακα A. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με λA, δηλαδή, αν $A = [\alpha_{ij}]$ θα έχομε $\lambda A = [\lambda \alpha_{ij}]_{\mu \times \nu}$.

Αν $A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$ και λ, λ' είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες, που προκύπτουν άμεσα από τον προηγούμενο ορισμό:

***Γ*₁.** $(\lambda + \lambda')A = \lambda A + \lambda' A$
***Γ*₂.** $\lambda(\lambda' A) = (\lambda\lambda')A$
***Γ*₃.** $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
***Γ*₄.** $1A = A1 = A$
***Γ*₅.** $\lambda A = \mathbf{O}$ αν και μόνο αν $\lambda = 0$ ή $A = \mathbf{O}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.2.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα X, για τον οποίο ισχύει $5X - I_3 = 2X - 3A$.

(Μια ισότητα μεταξύ πινάκων που περιέχει έναν άγνωστο πίνακα, όπως η παραπάνω, ονομάζεται ***εξίσωση με πίνακες***. Η διαδικασία που ακολουθείται με στόχο να βρεθεί ο πίνακας X ονομάζεται επίλυση της εξισώσεως).

Λύση.

Αφού οι πράξεις των πινάκων που γνωρίσαμε (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός με αριθμό) έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με τις πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών, μπορούμε να λύσομε την εξίσωση με τον ίδιο τρόπο που λύνομε τις συνήθεις εξισώσεις με έναν άγνωστο. Έτσι παίρνομε διαδοχικά

$$5X - I_3 = 2X - 3A \Leftrightarrow 5X - 2X = I_3 - 3A \Leftrightarrow 3X = I_3 - 3A \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}(I_3 - 3A)$$

και αντικαθιστώντας τον πίνακα A βρίσκομε:

$$X = \frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -9 & 12 \\ -6 & 6 & -15 \\ -12 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1/3 & -9 & 12 \\ -6 & 19/3 & -15 \\ -12 & -3 & 10/3 \end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις.

1.2.1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Για καθένα από τα επόμενα ζεύγη πινάκων να υπολογίσετε το άθροισμα και τη διαφορά των πινάκων, εφόσον ορίζονται.

α) A, B β) A, Γ γ) A, Δ δ) A, B^T ε) Γ, Δ^T στ) Γ^T, Δ.

1.2.2. Αν

$$A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & -1\end{bmatrix},$$

να βρείτε τους πίνακες $(-A)+(-B)$, $-(A+B)$, $A+(B+\Gamma)$, $(A+B)+\Gamma$, $A-(B-\Gamma)$ και τέλος $A-B+\Gamma$. Τι παρατηρείτε;

1.2.3. Αν

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τους πίνακες $-3B,\ \frac{1}{5}A,\ A+2\Gamma,\ 2B-\Gamma,\ \frac{1}{4}(2\Gamma-3A)$.

1.2.4. Μία αλυσίδα ηλεκτρονικών ειδών έχει υποκαταστήματα σε Αθήνα, Πειραιά και Θεσσαλονίκη. Οι πωλήσεις, σε εκατοντάδες τεμάχια, της αλυσίδας σε τηλεοράσεις, DVD, φωτογραφικές μηχανές και κινητά τηλέφωνα από κάθε υποκατάστημα σε κάθε πόλη κατά τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο ήταν οι εξής:

	Σεπτέμβριος			***Οκτώβριος***		
	Αθήνα	***Πειραιάς***	***Θεσσαλονίκη***	***Αθήνα***	***Πειραιάς***	***Θεσσαλονίκη***
Τηλεοράσεις	20	30	33	25	18	75
DVD	55	40	39	15	23	29
Φωτ. μηχανές	29	15	48	15	50	18
Κινητά	90	80	65	30	66	85

α) Να συντάξετε δύο πίνακες που να δίνουν, ο πρώτος τον αριθμό των πωλήσεων για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Σεπτέμβριο και ο δεύτερος τον αριθμό των πωλήσεων για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Οκτώβριο.

β) Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει το συνολικό αριθμό των πωλήσεων του διμήνου Σεπτέμβριος-Οκτώβριος για κάθε είδος σε κάθε πόλη.

γ) Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τη διαφορά πωλήσεων μεταξύ Σεπτεμβρίου και Οκτωβρίου για κάθε είδος σε κάθε πόλη.

δ) Αν κατά το μήνα Οκτώβριο η αλυσίδα αποφασίζει να κάνει προσφορά μαζί με κάθε είδος που αγοράστηκε και ένα δεύτερο τεμάχιο (του ίδιου είδους) δωρεάν, να συντάξετε τον πίνακα που περιγράφει το συνολικό αριθμό τεμαχίων που διατέθηκαν στο δίμηνο Σεπτέμβριος-Οκτώβριος για κάθε είδος σε κάθε πόλη.

1.2.5. Κατά το μήνα Σεπτέμβριο, οι τιμές πωλήσεως (σε €) ενός συγκεκριμένου μοντέλου από κάθε προϊόν στα υποκαταστήματα της αλυσίδας ηλεκτρονικών ειδών της ασκήσεως 1.2.4, ήταν οι ακόλουθες:

	Αθήνα	***Πειραιάς***	***Θεσσαλονίκη***
Τηλεοράσεις	400	380	390
DVD	80	100	90
Φωτ. μηχανές	290	250	310
Κινητά	90	120	100

α) Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τις τιμές πωλήσεως για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Σεπτέμβριο.

β) Αν κατά το μήνα Οκτώβριο προσφερθούν όλα τα προϊόντα με έκπτωση 10%, να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τις τιμές πωλήσεως για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Οκτώβριο.

1.2.6. Μια βιομηχανία κατασκευάζει τρία προϊόντα π_1, π_2, π_3, σε δύο εργοστάσια παραγωγής E_1 και E_2. Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή σε ευρώ για τα υλικά που χρησιμοποιούνται και την αντίστοιχη εργασία δίνεται στους παρακάτω πίνακες

$$E_1 = \begin{array}{c} \pi_1, \pi_2, \pi_3 \\ \begin{bmatrix} 30 & 40 & 50 \\ 20 & 10 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array} \qquad E_2 = \begin{array}{c} \pi_1, \pi_2, \pi_3 \\ \begin{bmatrix} 36 & 48 & 60 \\ 30 & 10 & 32 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array}.$$

α) Να υπολογίσετε τον πίνακα $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

β) Αν τόσο το κόστος παραγωγής όσο και το κόστος των υλικών αυξηθεί κατά 20%, να υπολογίσετε τους νέους πίνακες κόστους παραγωγής για τα δύο εργοστάσια. Επίσης να υπολογίσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους τον πίνακα που εκφράζει το νέο μέσο κόστος κατασκευής ανά συσκευή και είδος (υλικά και εργασία) για τη βιομηχανία.

1.2.7. Να συντάξετε τον πίνακα X, για τον οποίο ισχύει $5X - 2A = 6B + 3X$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.2.8. Να υπολογίσετε τους πίνακες X, Y για τους οποίους ισχύει

$$2X + 3Y = A - 4I_4 \quad \text{και} \quad 3X + 2Y = 3I_4 + A$$

όπου $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_4$ με $a_{ij} = |i - j|$, $i = 1, 2, 3, 4$ και $j = 1, 2, 3, 4$.

1.2.9. Αν $4 = 2\begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = 8\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, να λύσετε την εξίσωση $6(X - \frac{1}{2}B) = 12\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{4}A\right) - 2B$.

1.3 Γινόμενο πινάκων.

Ας επανέλθομε στο αρχικό παράδειγμα της παραγράφου 1.1 (σελ. 10). Σύμφωνα με αυτό, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δίνει τον αριθμό επιβατών (σε χιλιάδες) που μετακινήθηκαν προς τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ, μέσω τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά το μήνα Ιούνιο ενός συγκεκριμένου έτους. Ας υποθέσομε επί πλέον ότι ο ΕΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τουρισμού), για διαφημιστικούς λόγους έκανε διανομή ενός δώρου και ενός φυλλαδίου σε κάθε επιβάτη που ταξίδεψε στα τρία νησιά με τις τέσσερεις εταιρείες το μήνα Ιούνιο. Τα δώρα και τα φυλλάδια που διανεμήθηκαν είχαν διαφορετικά κόστη για κάθε νησί και πιο συγκεκριμένα:

α) Κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί α κόστισε 5 €, κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί β κόστισε 6 € και κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί γ κόστισε 8 €.

β) Κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί α κόστισε 2 €, κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί β κόστισε 1 € και κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί γ κόστισε 3 €.

Μπορούμε επομένως να συντάξομε τον επόμενο πίνακα, ο οποίος μας δίνει το κόστος του δώρου και του φυλλαδίου ανά νησί (στην πρώτη στήλη έχει καταχωρηθεί το κόστος των δώρων, ενώ στη δεύτερη το κόστος των φυλλαδίων)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσομε τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των ***δώρων*** στα άτομα που ταξίδεψαν με την ***$1^η$ εταιρεία***, θα πρέπει να εκτελέσομε τις πράξεις:

$\boxed{\text{αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί α μέσω της } 1^{ης} \text{ εταιρείας}} \cdot \boxed{\text{κόστος δώρου που δόθηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί α μέσω της } 1^{ης} \text{ εταιρείας}} + \boxed{\text{αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί β μέσω της } 1^{ης} \text{ εταιρείας}} \cdot \boxed{\text{κόστος δώρου που δόθηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί β μέσω της } 1^{ης} \text{ εταιρείας}} +$

$+ \boxed{\text{αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί γ μέσω της } 1^{ης} \text{ εταιρείας}} \cdot \boxed{\text{κόστος δώρου που δόθηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί γ μέσω της } 1^{ης} \text{ εταιρείας}}$

Έτσι τα έξοδα αυτής της κατηγορίας (σε χιλιάδες €) θα δίνονται από την έκφραση

$$8 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 118$$

η οποία προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B και προσθέσομε τα γινόμενα.

Αντίστοιχα, αν πολλαπλασιάσομε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2ης στήλης του πίνακα B και προσθέσομε τα γινόμενα θα λάβομε

$$8 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 39$$

το οποίο μας δίνει τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των ***φυλλαδίων*** στα άτομα που ταξίδεψαν με την ***$1^η$ εταιρεία.***

Παρόμοιες πράξεις οι οποίες χρησιμοποιούν τη δεύτερη την τρίτη ή την τέταρτη γραμμή του πίνακα A αντί της πρώτης θα μας δώσουν τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των ***δώρων*** (όταν χρησιμοποιηθεί η πρώτη γραμμή του πίνακα B) και των ***φυλλαδίων*** (όταν χρησιμοποιηθεί η δεύτερη γραμμή του πίνακα B) στα άτομα που ταξίδεψαν με την ***$2^η$***, ***$3^η$*** ή την ***$4^η$ εταιρεία*** αντίστοιχα. Έτσι βρίσκουμε ότι τα έξοδα του ΕΟΤ ήταν, σε χιλιάδες ευρώ:

α) Για τους επιβάτες της $1^{ης}$ εταιρείας: ***118*** (για τα δώρα), ***39*** (για τα φυλλάδια).

β) Για τους επιβάτες της $2^{ης}$ εταιρείας: ***70*** (για τα δώρα), ***39*** (για τα φυλλάδια).

γ) Για τους επιβάτες της $3^{ης}$ εταιρείας: ***51*** (για τα δώρα), ***17*** (για τα φυλλάδια).

δ) Για τους επιβάτες της 4[ης] εταιρείας: ***24*** (για τα δώρα), ***8*** (για τα φυλλάδια).
Όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

Κόστος / ***Εταιρεία***	***Δώρων***	***Φυλλαδίων***
1η	118	39
2η	70	22
3η	51	17
4η	24	8

και έτσι φτάνομε στον επόμενο πίνακα, ο οποίος μας δίνει το διαφημιστικό κόστος για κάθε εταιρεία ανά δώρο και φυλλάδιο

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 118 & 39 \\ 70 & 22 \\ 51 & 17 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας Γ ονομάζεται ***γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β*** και συμβολίζεται $A \cdot B$ ή απλώς AB. Είναι φανερό ότι το στοιχείο γ_{11} του πίνακα Γ προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B και προσθέσομε τα γινόμενα, το γ_{12} αν πολλαπλασιάσομε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2ης στήλης του B και προσθέσομε τα γινόμενα κ.ο.κ..

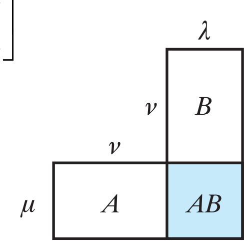
Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

Αν $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_{\mu\times\nu}$ και $B = [\beta_{ij}] \in \Pi_{\nu\times\lambda}$, τότε ορίζομε ως ***γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β***, και το συμβολίζομε με AB, τον πίνακα τύπου $\mu\times\lambda$ του οποίου το στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της i γραμμής του A με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της j στήλης του B. Επομένως, $\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \ldots + \alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}$.

Η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\begin{array}{c} \\ \\ i\ \text{γραμμή} \longrightarrow \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \dots & \alpha_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}
\begin{array}{c} j\ \text{στήλη} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} \dots & \beta_{1j} & \dots \\ \dots & \beta_{2j} & \dots \\ \dots & \beta_{3j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \beta_{\nu j} & \dots \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \gamma_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι για να μπορούν να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα $\Gamma = AB$ με τον τύπο που αναφέραμε προηγουμένως, θα πρέπει ο αριθμός των στηλών του πίνακα Α να είναι ίδιος με τον αριθμό των γραμμών του Β (σχ. 1.3).



Σχ. 1.3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως 2.

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}, \qquad E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τα γινόμενα AE, EA και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τον πίνακα Α.

Λύση.

Έχομε

$$AE=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & \gamma\end{bmatrix}, \qquad EA=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι όταν ο πίνακας E πολλαπλασιάζει από τα δεξιά τον A, του αντιμεταθέτει τις στήλες, ενώ όταν πολλαπλασιάζει από τα αριστερά τον A, του αντιμεταθέτει τις γραμμές. Αξίζει να σημειωθεί ότι *ο πίνακας* E προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα I_2 με εναλλαγή των δύο γραμμών του (ή των δύο στηλών του).

Αν λ, μ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και A, B, Γ τρεις πίνακες (για τους οποίους ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω), τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$\boldsymbol{\Pi_1}$. $(kA)\,(k'B) = (kk')\,(AB)$	
$\boldsymbol{\Pi_2}$. $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$	(προσεταιριστική ιδιότητα)
$\boldsymbol{\Pi_3}$. $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$, $\quad (B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$	(επιμεριστική ιδιότητα)
$\boldsymbol{\Pi_4}$. $AI_\nu = I_\mu A = A$	$(A \in \Pi_{\mu\times\nu})$

Το γινόμενο $A(B\Gamma)$ ή, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας το $(AB)\Gamma$, θα συμβολίζεται με $AB\Gamma$. Αν A, B, Γ, Δ είναι τέσσερεις πίνακες, το γινόμενο $(A(B\Gamma))\Delta$, το οποίο με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα θα είναι ίσο με καθένα από τα γινόμενα $((AB)\Gamma)\Delta$, $(AB)(\Gamma\Delta)$, $A(B(\Gamma\Delta))$, $A((B\Gamma)\Delta)$, ονομάζεται γινόμενο των πινάκων A, B, Γ, Δ και συμβολίζεται με $AB\Gamma\Delta$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσομε το γινόμενο k πινάκων $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ για κάθε θετικό ακέραιο k, το οποίο θα συμβολίσομε με $A_1 A_2 A_3 \ldots A_k$. Ειδικά αν $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_k = A$, το γινόμενο $A_1 A_2 A_3 \ldots A_k = AAA \ldots A$ θα συμβολίζεται με τη μορφή δύναμης ως A^k. Σε αντιστοιχία με την πρώτη και τη μηδενική δύναμη ενός πραγματικού αριθμού ορίζομε

$$A^1 = A, \quad A^0 = I.$$

Είναι προφανές ότι

$$I^k = I \text{ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο } k.$$

Αν k, r είναι δύο μη αρνητικοί ακέραιοι, εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$\boldsymbol{\Pi_5}$. $A^k A^r = A^{k+r}$

$\boldsymbol{\Pi_6}$. $(A^k)^r = A^{kr}$

$\boldsymbol{\Pi_7}$. $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k, \quad \lambda \in \mathrm{R}$.

Για τον ανάστροφο του γινομένου δύο πινάκων A, B ισχύει το εξής:

***Π*₈**. $(AB)^T = B^T A^T$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών όπου ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα $\alpha\beta = \beta\alpha$ για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β, δεν συμβαίνει το ίδιο για οποιουσδήποτε πίνακες A, B. Μάλιστα, αν A, B είναι δύο πίνακες για τους οποίους ορίζεται το γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B, τότε για το γινόμενο του πίνακα B με τον πίνακα A μπορεί να εμφανιστεί οποιαδήποτε από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) Το AB μπορεί να μην ορίζεται. Για παράδειγμα αν:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

τότε μπορεί να υπολογιστεί το γινόμενο AB (θα είναι ένας πίνακας 3×4), ενώ το γινόμενο BA δεν ορίζεται (δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσομε έναν πίνακα τύπου 3×4 με έναν πίνακα τύπου 3×3).

β) Το AB μπορεί να ορίζεται, αλλά να έχει διαφορετικές διαστάσεις από το BA. Για παράδειγμα, αν:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

τότε μπορεί να υπολογιστεί το γινόμενο AB και το γινόμενο BA. Ωστόσο το πρώτο οδηγεί σε έναν πίνακα τύπου 2×2, ενώ το δεύτερο σε έναν πίνακα τύπου 3×3 και προφανώς δεν έχει νόημα να εξετάσομε κατά πόσο ισχύει $AB=BA$.

γ) Το AB μπορεί να ορίζεται και να έχει τις ίδιες διαστάσεις με το BA, αλλά να μην είναι ίσο με αυτό. Έτσι αν θεωρήσομε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε ισχύει $AB \neq BA$, αφού

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

δ) Το AB μπορεί να ορίζεται, να έχει τις ίδιες διαστάσεις με το BA και να είναι ίσο με αυτό. Για παράδειγμα, αν θεωρήσομε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$$

οπότε $AB = BA$.

Γενικά λοιπόν δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο γινόμενο δύο πινάκων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ***μην ισχύουν όλες*** οι ταυτότητες που γνωρίζομε για τους πραγματικούς αριθμούς. Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή αναφέρομε ότι:

α) Αν A είναι ένας πίνακας $\mu\cdot\nu$ και $\mathbf{O}$ ο μηδενικός πίνακας $\nu\cdot\lambda$, τότε το γινόμενο $A\mathbf{O}$ δίνει το μηδενικό πίνακα $\mu\cdot\lambda$.

β) Η γνωστή ιδιότητα του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών «αν $\alpha\cdot\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$» ***δεν ισχύει*** για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού π.χ. για τους πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ και } B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ισχύει

$$AB=BA=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

χωρίς ωστόσο να είναι $A=\mathbf{O}$ ή $B=\mathbf{O}$. Επομένως, αν το γινόμενο AB δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας (δηλ. αν $AB = \mathbf{O}$), δεν είναι απαραίτητο κάποιος από τους πίνακες A,B να είναι μηδενικός ή αλλιώς μπορεί ένα γινόμενο πινάκων να ισούται με το μηδενικό πίνακα, χωρίς κανένας από αυτούς να είναι μηδενικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.2.

Αν A,B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες τάξεως ν και I ο μοναδιαίος πίνακας της ίδιας τάξεως, να υπολογίσετε τις δυνάμεις $(A+B)^2$, $(A+B)^3$. Στη συνέχεια να βρείτε τη μορφή που θα λάβουν οι τύποι που βρέθηκαν, στην περίπτωση που ισχύει $AB=BA$. Ως εφαρμογή των προηγουμένων τύπων να υπολογίσετε τις δυνάμεις $(A+I)^2$, $(A+I)^3$.

Λύση.

Κάνοντας χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων έχομε διαδοχικά:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B=A^2+BA+AB+B^2$$

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+BA+AB+B^2)(A+B)=$$

$$=A^3+A^2B+BA^2+BAB+ABA+AB^2+B^2A+B^3.$$

Δεδομένου ότι για τους πίνακες δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα (δηλ. δεν γνωρίζομε αν αληθεύει ότι $AB=BA$), οι τύποι που βρέθηκαν δεν επιδέχονται άλλες απλοποιήσεις.

Στην περίπτωση που ισχύει $AB=BA$, ο πρώτος από τους δύο τύπους παίρνει τη μορφή

$$(A+B)^2=A^2+BA+AB+B^2=A^2+AB+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$$

δηλαδή προκύπτει μια έκφραση αντίστοιχη με το γνωστό τύπο του τετραγώνου του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών.

Όσον αφορά στο δεύτερο τύπο, αφού τώρα ισχύουν οι σχέσεις

$$BA^2=(BA)A=(AB)A=A(BA)=A(AB)=(AA)B=A^2B,$$

$$BAB=(BA)B=(AB)B=A(BB)=AB^2$$

$$ABA=A(BA)=A(AB)=(AA)B=A^2B$$

$$B^2A=(BA)A=(AB)A=A(BA)=A(AB)=(AA)B=A^2B$$

παίρνομε
$$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + BA^2 + BAB + ABA + AB^2 + B^2A + B^3 =$$
$$= A^3 + A^2B + A^2B + AB^2 + A^2B + AB^2 + AB^2 + B^3 =$$
$$= A^3 + 3AB^2 + 3AB^2 + B^3$$

δηλαδή προκύπτει μια έκφραση αντίστοιχη με το γνωστό τύπο του κύβου του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών.

Για τις ποσότητες $(A+I)^2, (A+I)^3$ μπορούμε να εφαρμόσομε τους τελευταίους δύο τύπους που βρήκαμε αφού $AI = IA = A$. Έτσι παίρνομε

$$(A+I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A^2 + 2A + I.$$
$$(A+I)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I = A^3 + 3A^2 + 3A + I.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.3.

Να αποδείξετε ότι η n-οστή δύναμη (n θετικός ακέραιος) ενός διαγώνιου πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

είναι επίσης διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις n-οστές δυνάμεις των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα, δηλαδή

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}^n \end{bmatrix}.$$

Λύση.

Θα χρησιμοποιήσομε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Για $n=1$ ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει. Ας υποθέσομε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n=k$, δηλαδή ότι έχομε

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}^k \end{bmatrix}.$$

Θα αποδείξομε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n=k+1$, δηλαδή ότι η δύναμη A^{k+1} δίνεται από τον τύπο

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}^{k+1} \end{bmatrix}$$

΄Εχομε

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}^k & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων προκύπτει:

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{k+1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}^{k+1} & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η σχέση που δόθηκε θα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.4.

Δίνεται ο πίνακας $A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $A^n=\frac{1}{2^{n+1}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύση.

Θα προχωρήσομε στην απόδειξη χρησιμοποιώντας και πάλι τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Για $n=1$ ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει. Ας υποθέσομε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n=k$, δηλαδή ότι έχομε

$$A^k=\frac{1}{2^{k+1}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα αποδείξομε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n=k+1$, δηλαδή ότι η δύναμη A^{k+1} δίνεται από τον τύπο

$$\frac{1}{2^{k+2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

΄Εχομε

$$A^{k+1}=A^kA=\frac{1}{2^{k+1}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων προκύπτει:

$$A^{k+1}=\frac{1}{2^{k+3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2^{k+3}}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2^{k+2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η σχέση που δόθηκε θα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

Ασκήσεις.

1.3.1. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε τα επόμενα γινόμενα πινάκων, εφόσον ορίζονται AB, BA, $A\Gamma$, ΓA, $\Gamma\Delta$, ΔA, $A\Gamma^T$, $\Gamma^T A$, $\Gamma^T A^T$.

1.3.2. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -5 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1 & -7\\ -2 & 1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}3 & 6 & 0 & -6\\ -1 & 2 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

α) Να εξετάσετε ποια από τα γινόμενα πινάκων AB, $A\Gamma$, BA, ΓA μπορούν να οριστούν.
β) Να εξετάσετε αν οι πίνακες AB, $A\Gamma$ είναι ίσοι.
γ) Τι παρατηρείτε για το γινόμενο $A(B-\Gamma)$;

1.3.3. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε τους επόμενους πίνακες: $AB+2B\Gamma+3\Gamma A$, $3A^2-2B\Gamma$, $AB\Gamma$, $2B\Gamma-3A$:

1.3.4. Μια βιοτεχνία έχει δύο εργοστάσια ε_1 και ε_2, στα οποία κατασκευάζονται τρία διαφορετικά προϊόντα π_1, π_2 και π_3. Οι παρακάτω δύο πίνακες A και B δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για κάθε φάση φ_1, φ_2, φ_3 της κατασκευής κάθε προϊόντος και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού κάθε εργοστασίου σε ευρώ αντίστοιχα.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 1{,}5 & 2{,}5\\ 1 & 2 & 3\\ 1{,}5 & 2 & 4\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{array} \\ \begin{bmatrix}10 & 16\\ 15 & 17\\ 13 & 14\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{array}$$

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο AB και να εξηγήσετε τι εκφράζει.
β) Πώς θα μπορούσατε να εκφράσετε με πράξεις μεταξύ πινάκων το συνολικό κόστος εργασίας για την κατασκευή 2 μονάδων του προϊόντος π_1, 3 μονάδων του προϊόντος π_2 και 5 μονάδων του προϊόντος π_3 σε κάθε ένα από τα δύο εργοστάσια;

1.3.5. Οι εργαζόμενοι σε τρεις εταιρείες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: σε ειδικευμένους και σε ανειδίκευτους. Ο αριθμός των εργατών κατά κατηγορία σε κάθε εταιρεία και οι αντίστοιχες εβδομαδιαίες αποδοχές τους για δύο διαδοχικά έτη α και β δίνονται στους επόμενους δύο πίνακες.

Αριθμός εργατών		
	Ειδικευμένοι	***Ανειδίκευτοι***
1η εταιρεία	60	75
2η εταιρεία	30	60
3η εταιρεία	10	70

Εβδομαδιαίες αποδοχές		
	α	***β***
Ειδικευμένοι	20	50
Ανειδίκευτοι	15	40

Να συντάξετε έναν πίνακα, ο οποίος περιγράφει τις εβδομαδιαίες δαπάνες κάθε εταιρείας για καθένα από τα δύο έτη.

1.3.6. Να βρείτε τα στοιχεία που λείπουν στο παρακάτω γινόμενο πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.3.7. Αν $A = [x \;\; y \;\; z]$, Β = $[\alpha \;\; \beta \;\; \gamma]^{\mathrm{T}}$ να δείξετε ότι $AB = BA$. Πώς θα μπορούσατε να εκφράσετε με πράξεις μεταξύ πινάκων το άθροισμα τετραγώνων $x^2+y^2+z^2$;

1.3.8. Αν $A=\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta,x,y \in \mathbf{R}$ και $y \neq 0$, να δείξετε ότι η μόνη περίπτωση για την οποία ισχύει $AB = BA$ είναι όταν $a=1$.

1.3.9. Αν $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ να δείξετε ότι $A^2-(x+w)A+(xw-yz)I_2=\mathbf{O}$.

1.3.10. Αν $A=\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, να δείξετε ότι ο πίνακας A^2+5A εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα τάξεως 2.

1.3.11. Αν $A=\begin{bmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ -\beta & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, να δείξετε ότι $A^3=-A$.

1.3.12. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $(A+B)^2=A^2+B^2$ να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB είναι BA είναι αντίθετοι.

1.3.13. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $(A+3B)(2A+B)=(2A+B)(A+3B)$ να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB είναι BA είναι ίσοι.

1.3.14. Αν A, B είναι τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξεως και ο B είναι συμμετρικός να αποδείξετε ότι οι πίνακες $\Gamma=A^T BA$ και $\Delta=ABA^T$ είναι συμμετρικοί.

1.3.15. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. Να δείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες $A^2=B^2=I_3$, $AB+BA=2I_3$, $(A-B)^2=\mathbf{O}$. Είναι σωστός ο ισχυρισμός: «Αν για δύο πίνακες ισχύει $A^2=B^2$, τότε θα ισχύει $A=B$ ή $A=-B$»;

1.4 Αντιστρέψιμοι πίνακες.

Γνωρίζομε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a με $a \neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφός του, που συμβολίζεται με $\dfrac{1}{a}$ ή a^{-1}, για τον οποίο ισχύει $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. Είναι λογικό λοιπόν να θέσομε το επόμενο ερώτημα: *«Αν δοθεί ένας πίνακας A μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα B, τέτοιον ώστε να ισχύει* $AB=BA=I$*;».*

Για να μπορούν να υπολογιστούν τα γινόμενα AB και BA και επί πλέον να είναι ίσα μεταξύ τους θα πρέπει ο πίνακας A να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Οδηγούμαστε έτσι στον επόμενο ορισμό:

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν. Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B τάξεως ν τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I$, τότε ο A ονομάζεται ***αντιστρέψιμος πίνακας*** και ο B ***αντίστροφος*** του A.

Αν ένας πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αποδεικνύεται ότι αυτός είναι μοναδικός. Τον αντίστροφο του πίνακα A, όταν υπάρχει, θα τον συμβολίζομε με A^{-1}. Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό έχομε:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I .$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

τότε έχομε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

Άρα, ο B είναι αντίστροφος του A.

Από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα είναι φανερό ότι αν ο B είναι αντίστροφος του A, τότε και ο A θα είναι αντίστροφος του B. Για το λόγο αυτό πολλές φορές θα λέμε ότι οι πίνακες A και B είναι αντίστροφοι.

Όταν θέλομε να ελέγξομε αν ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A, δεν είναι απαραίτητο να ελέγξομε και τις δύο σχέσεις $AB = I$ και $BA = I$, αφού αν για δυο τετραγωνικούς πίνακες A, B αληθεύει μία από τις δύο ισότητες, τότε θα αληθεύει και η άλλη.

Όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, ισχύει η επόμενη πρόταση, η οποία θα μας φανεί πολύ χρήσιμη σε επόμενη παράγραφο:

Αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και B, X είναι δύο άλλοι πίνακες για τους οποίους έχουν νόημα οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \quad \text{και} \quad XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} . \tag{1.4.1}$$

Πράγματι:

α) Αν $AX = B$, τότε, $A^{-1}B = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X$ και αντίστροφα.

β) Αν $X = A^{-1}B$, τότε, $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$.

Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις.

Στην προηγούμενη παράγραφο διαπιστώσαμε ότι, αν το γινόμενο AB δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας (δηλ. αν $AB = \mathbf{O}$), δεν είναι απαραίτητο κάποιος από τους πίνακες A, B να είναι μηδενικός.

Στην περίπτωση όμως που ισχύει $AB = \mathrm{O}$ και ο ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός. Πράγματι, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε θα έχομε:

$$AB = \mathbf{O} \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{O} \Rightarrow IB = \mathbf{O} \Rightarrow B = \mathbf{O} .$$

Στη συνέχεια, θα εξετάσομε πότε αντιστρέφεται ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 2 και θα δώσομε έναν απλό τύπο για τον υπολογισμό του αντιστρόφου του. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξομε ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

α) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν, και μόνο αν, $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

β) Ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, όταν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}. \tag{1.4.2}$$

Απόδειξη.

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 2. Για να αντιστρέφεται ο A, πρέπει και αρκεί να υπάρχει ένας πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $AX = I$ ή ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta\omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

απ’ όπου προκύπτει ότι οι αριθμοί x, y, z, ω ικανοποιούν τα συστήματα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma_1) \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \alpha y + \beta\omega = 0 \\ \gamma y + \delta\omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_2).$$

Αρκεί επομένως, τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) να έχουν λύση. Έστω $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ και ας διακρίνομε τις εξής δύο περιπτώσεις:

α) Αν $D \neq 0$, τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το ζεύγος (x, z) με $x = \dfrac{\delta}{D}$ και $z = \dfrac{-\gamma}{D}$, είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ_1), ενώ το ζεύγος (y, ω) με $y = \dfrac{-\beta}{D}$ και $\omega = \dfrac{\alpha}{D}$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ_2). Άρα

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{D} & \dfrac{-\beta}{D} \\ \dfrac{-\gamma}{D} & \dfrac{\alpha}{D} \end{bmatrix}$$

και ο αντίστροφος του A θα είναι ο $A^{-1} = \dfrac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Σημειώνομε ότι το τελευταίο θα μπορούσαμε και να το συμπεράνομε απ’ ευθείας επαληθεύοντας ότι για τον πίνακα $X = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{D} & \dfrac{-\beta}{D} \\ \dfrac{-\gamma}{D} & \dfrac{\alpha}{D} \end{bmatrix}$ (ο οποίος προφανώς μπορεί να ορισθεί αφού υποθέσαμε ότι $D \neq 0$) ισχύει $AX = XA = I$.

β) Αν $D = 0$, τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο, οπότε ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται. Πράγματι:

– Αν $\alpha \neq 0$ ή $\beta = 0$ ή $\gamma \neq 0$ ή $\delta \neq 0$, τότε διαπιστώνεται ότι ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο.
– Αν $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, τότε και τα δύο συστήματα θα είναι αδύνατα.

Με βάση το αποτέλεσμα που διατυπώθηκε προηγουμένως, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσομε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται, γιατί $D = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = 5 - 6 = -1 \neq 0$ και ο αντίστροφός του είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Αντίθετα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται, αφού $D = 1\cdot 6 - 2\cdot 3 = 6 - 6 = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1.

Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως ν, να αποδείξετε ότι το γινόμενο AB είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας και ότι ισχύει

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Λύση.

Αρκεί να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν οι ισότητες $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_\nu$ και $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_\nu$. Όμως, κάνοντας επανειλημμένη χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας της πράξεως του πολλαπλασιασμού έχομε

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_\nu)A^{-1} = AA^{-1} = I_\nu,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I_\nu.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2.

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις A^2, B^2.
β) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα Α και τον αντίστροφο του πίνακα Β.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $AX = B$ και η εξίσωση $BY = A$.

Λύση.

α) Έχομε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

και

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

β) Αφού ισχύει $A^2 = B^2 = I_3$ μπορούμε να γράψομε $AA = AA = I_3$ και $BB = BB = I_3$ οπότε τόσο ο A όσο και ο B είναι αντιστρέψιμοι με $A^{-1} = A$ και $B^{-1} = B$.

γ) Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A$, έχομε:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ομοίως, επειδή ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος με $B^{-1} = A$, θα έχομε:

$$BY = A \Leftrightarrow X = B^{-1} \cdot A \Leftrightarrow X = BA = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.3.

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας και P ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αν $B = PAP^{-1}$ να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $B^n = PA^nP^{-1}$.

Λύση.

Θα χρησιμοποιήσομε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει. Ας υποθέσομε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n = k$, δηλαδή ότι έχομε $B^k = PA^kP^{-1}$. Θα αποδείξομε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n = k + 1$, δηλαδή ότι η δύναμη B^{k+1} δίνεται από τον τύπο $B^{k+1} = PA^{k+1}P^{-1}$. Όμως

$$B^{k+1} = B^kB = (PA^kP^{-1})(PAP^{-1}) = PA^k(P^{-1}P)AP^{-1} = PA^kIAP^{-1} = P(A^kA)P^{-1} = PA^{k+1}P^{-1}$$

Επομένως, πράγματι ισχύει $B^{k+1} = PA^{k+1}P^{-1}$, και σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η σχέση που δόθηκε θα ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο.

Ενώ ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα είναι σχετικά εύκολος όταν μας ενδιαφέρουν τετραγωνικοί πίνακες τάξεως 2, οι υπολογισμοί γίνονται αρκετά δύσκολοι όταν η τάξη των πινάκων αυξηθεί. Παρότι, όπως θα δούμε στην παράγραφο 2.4, μπορούμε να αναπτύξομε γενικούς τύπους με τους οποίους να υπολογίζομε τον αντίστροφο ενός οποιουδήποτε τετραγωνικού $\nu \times \nu$ πίνακα, όταν το ν γίνει μεγαλύτερο του 3, η υπολογιστική δυσκολία αυξάνει υπερβολικά, με αποτέλεσμα ο όγκος των πράξεων να κάνει τις διαδικασίες πρακτικά ανεφάρμοστες.

Θα εξετάσομε τώρα μια περίπτωση, όπου οι υπολογισμοί απλοποιούνται σημαντικά αν διαχωρίσομε το «μεγάλο» πίνακα που μας ενδιαφέρει σε κατάλληλα μικρότερα τμήματα-υποπίνακες.

Ένας πίνακας A (όχι απαραίτητα τετραγωνικός) ονομάζεται ***σύνθετος πίνακας***, αν τα στοιχεία του αποτελούν πίνακες μικρότερου μεγέθους από αυτό του A, η δε διαμέριση (διαχωρισμός σε υποπίνακες) γίνεται με τέτοιον τρόπο, ώστε τα στοιχεία-υποπίνακες, που βρίσκονται στην ίδια γραμμή να έχουν όλα τον ίδιο αριθμό γραμμών και τα στοιχεία-υποπίνακες που βρίσκονται στην ίδια στήλη, να έχουν όλα τον ίδιο αριθμό στηλών. Το σύνθετο πίνακα θα τον συμβολίζομε με $A = [A_{ij}]$, όπου A_{ij} είναι το στοιχείο-υποπίνακας που βρίσκεται στην i γραμμή j στήλη του πίνακα A. Συνήθως, η διαμέριση του αρχικού πίνακα γίνεται με τη χάραξη κατακορύφων και οριζοντίων γραμμών, που διαχωρίζουν τις γραμμές και τις στήλες του αρχικού πίνακα.

Ως ένα παράδειγμα δημιουργίας σύνθετου πίνακα, αν ξεκινήσομε με τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0&6\\2&1&0&0&0&7\\3&3&0&0&0&8\\4&4&1&2&4&9\\5&5&1&2&5&0\end{bmatrix}$$

θα μπορούσαμε να θεωρήσομε τη διαμέριση $A=\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1&2&0&0&0&6\\2&1&0&0&0&7\\3&3&0&0&0&8\\\hline 4&4&1&2&4&9\\5&5&1&2&5&0\end{array}\right]$

και να γράψομε τον πίνακα A στη μορφή $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{bmatrix}$
όπου:

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\3&3\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ A_{13}=\begin{bmatrix}6\\7\\8\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}4&4\\5&5\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}1&2&4\\1&2&5\end{bmatrix},\ A_{23}=\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix}.$$

Όταν οι πίνακες που χρησιμοποιούμε έχουν διαμεριστεί ***κατάλληλα***, τότε οι πράξεις γίνονται με τον ίδιο τρόπο που γίνονται όταν χρησιμοποιούμε απλά στοιχεία. Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα οι επί μέρους πράξεις δεν αφορούν σε πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό) ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς, αλλά ανάμεσα σε πίνακες. Για παράδειγμα, αν θεωρήσομε τους σύνθετους πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&5&6\\4&3&8&7\\\hline 0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right],\quad B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}4&3&-5&-6\\1&2&-8&-7\\\hline 1&1&-1&0\\1&1&0&-1\end{array}\right]$$

τότε για το άθροισμά τους $A+B$ θα έχομε:

$$A+B=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}\\A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}5&5&0&0\\5&5&0&0\\\hline 1&2&0&0\\2&1&0&0\end{array}\right]$$

και για το γινόμενό τους AB θα έχομε:

$$AB=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}17&18&-26&-26\\34&33&-52&-52\\\hline 2&3&-9&-7\\5&4&-5&-7\end{array}\right].$$

Αντίθετα, αν ο πίνακας B είχε διαμεριστεί ως εξής:

$$B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}4&3&-5&-6\\1&2&-8&-7\\\hline 1&1&-1&0\\1&1&0&-1\end{array}\right]$$

καμμία από τις προαναφερθείσες πράξεις (με χρήση συνθέτων πινάκων) δεν είναι επιτρεπτή.

Αν τώρα ένας σύνθετος πίνακας μπορεί να γραφεί στη μορφή $M = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & \Gamma \end{bmatrix}$ έτσι, ώστε οι πίνακες A και Γ να είναι αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί τάξεως μ και ν αντίστοιχα (οπότε ο πίνακας B θα πρέπει να είναι τύπου $\mu \times \nu$ και ο μηδενικός πίνακας να είναι τύπου $\nu \times \mu$) είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσομε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα M και δίνεται από τον τύπο:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & \Gamma \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B\Gamma^{-1} \\ \mathbf{O} & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.4.3}$$

Πράγματι αφού

$$M\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B\Gamma^{-1} \\ \mathbf{O} & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & \Gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B\Gamma^{-1} \\ \mathbf{O} & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} + B\,\mathbf{O} & A(-A^{-1}B\Gamma^{-1}) + B\Gamma^{-1} \\ \mathbf{O}A^{-1} + \Gamma\,\mathbf{O} & \mathbf{O}(-A^{-1}B\Gamma^{-1}) + \Gamma\Gamma^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_\mu + \mathbf{O} & -I_\mu B\Gamma^{-1} + B\Gamma^{-1} \\ \mathbf{O} + \mathbf{O} & \mathbf{O} + I_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\mu & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_\nu \end{bmatrix} = I_{\mu+\nu}$$

ο αντίστροφος του πίνακα M υπάρχει και είναι αυτός που δίνεται στο δεξί μέλος της (1.4.1).

Ο τύπος (1.4.1) είναι αρκετά χρήσιμος στην περίπτωση που γνωρίζομε τους αντίστροφους των πινάκων A και Γ. Για παράδειγμα, αν θέλομε να υπολογίσομε τον αντίστροφο του πίνακα $M = \begin{bmatrix} I_\mu & B \\ \mathbf{O} & I_\nu \end{bmatrix}$ αφού γνωρίζομε ότι $I_\mu^{-1} = I_\mu$, $I_\nu^{-1} = I_\nu$, θα έχομε, με εφαρμογή του τύπου (1.4.3)

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_\mu & B \\ \mathbf{O} & I_\nu \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_\mu^{-1} & -I_\mu^{-1}BI_\nu^{-1} \\ \mathbf{O} & I_\nu^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\mu & -I_\mu BI_\nu \\ \mathbf{O} & I_\nu^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\mu & -B \\ \mathbf{O} & I_\nu \end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.4.

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ και $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των Α και Γ.

β) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

α) Για τον πίνακα A ισχύει $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 13 \neq 0$ οπότε θα είναι αντιστρέψιμος και σύμφωνα με τον τύπο (1.4.2) θα έχομε:

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

ομοίως έχομε:

$$|\Gamma| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-5) \cdot (-1) = 1 \neq 0, \qquad \Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

β) Γράφοντας τον πίνακα M ως σύνθετο πίνακα στη μορφή $M = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & \Gamma \end{bmatrix}$ όπου $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

θα έχομε, σύμφωνα με τον τύπο (1.4.3) και τους αντίστροφους πίνακες που βρήκαμε στο ερώτημα (α)

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B\Gamma^{-1} \\ \mathbf{O} & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -A^{-1}B\Gamma^{-1} \\ \hline 0 \quad 0 & & 6 \quad 1 \\ 0 \quad 0 & & 5 \quad 1 \end{array}\right].$$

Αφού

$$A^{-1}B\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & -\frac{4}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{44}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{55}{13} & \frac{10}{13} \end{bmatrix}$$

τελικά βρίσκομε:

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{44}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{55}{13} & -\frac{10}{13} \\ \hline 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Ασκήσεις.

1.4.1. Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα, αν υπάρχει, για καθέναν από τους παρακάτω τετραγωνικούς πίνακες τάξεως 2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.4.2. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των A και B.

β) Να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει $AXA^{-1} = B$.

γ) Να βρείτε τον πίνακα Y για τον οποίο ισχύει $BYB^{-1} = A$.

1.4.3. Σε καθένα από τα παρακάτω ζεύγη πινάκων A, B να αποδείξετε ότι ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A.

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 11 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ β) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

γ) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&3\\1&2&1&3\\1&3&3&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}15/8&-1/4&-1/4&-3/8\\-1/4&-1/2&1/2&1/4\\-1/4&1/2&-1/2&1/4\\-3/8&1/4&1/4&-1/8\end{bmatrix}$

1.4.4. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&3x&9x^2\\0&1&6x\\0&0&1\end{bmatrix}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα είναι ο πίνακας $B=\begin{bmatrix}1&-3x&9x^2\\0&1&-6x\\0&0&1\end{bmatrix}$.

β) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $\begin{bmatrix}1&6&36\\0&1&12\\0&0&1\end{bmatrix}$.

1.4.5. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των A και B.

β) Να βρείτε τον πίνακα $(AB)^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο AB.

1.4.6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z έτσι, ώστε οι παρακάτω τετραγωνικοί πίνακες A,B τάξεως 3 να είναι αντίστροφοι.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}x&0&-1\\y&x&-3\\-3&-1&z\end{bmatrix}.$$

1.4.7. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν και I_ν ο αντίστοιχος μοναδιαίος πίνακας.

α) Να αποδείξετε ότι: $(A-I_\nu)(A^2+A+I_\nu)=A^3-I_\nu$

β) Αν για τον πίνακα A ισχύει $A^2+A+I_\nu=\mathbf{O}$ να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα A είναι ο A^2 και ότι ο αντίστροφος του πίνακα $A+I$ είναι ο $-A$.

γ) Να δείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες $A^{3n}=I_\nu$, $A^{3n+1}=A$, $A^{3n+2}=A^2$ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n.

1.4.8. Δίνεται ο 2×2 πίνακας $A(x)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ όπου x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι $(A(x))^{2n}=I$ και $(A(x))^{2n-1}=A$ για κάθε θετικό ακέραιο n και στη συνέχεια να βρείτε τον αντίστροφο των $A(x)$ και $(A(x))^2$.

β) Να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει $(A(1))^{99}X=\begin{bmatrix}-1&0\\2&1\end{bmatrix}$.

1.4.9. Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας

$$B=\begin{bmatrix}3&0&3&0\\-6&7&1&3\\6&-4&11&-3\\-12&2&5&9\end{bmatrix}$$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $B = PAP^{-1}$ όπου $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

β) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων 1.4.3 και 1.4.4, να συντάξετε τον πίνακα B^n, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος.

1.4.10. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας και P ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αν $B = P^{-1}AP$ να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $B^n = P^{-1}A^nP$.

1.4.11. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας και P ένας πίνακας για τον οποίο ισχύει $P^2 = I$. Αν $B = PAP$ να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $B^n = PA^nP$.

1.4.12. Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι πίνακες, να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B), \qquad (A+B)B^{-1}(A-B) = (A-B)B^{-1}(A+B) \ .$$

1.4.13. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A+B$ και το γινόμενο AB, αφού πρώτα γράψετε και τους δύο πίνακες σε κατάλληλη μορφή συνθέτων πινάκων.

1.4.14. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των A και B.

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.4.3), να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $\Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.4.15. Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και ο σύνθετος πίνακας $M = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & I_\mu \end{bmatrix}$ όπου B είναι ένας πίνακας τύπου $2 \times \mu$ του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 1.

α) Να αποδείξετε ότι $A^2 = A$.

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.4.3), να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα M.

1.5 Εφαρμογές.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσομε ορισμένα παραδείγματα, στα οποία γίνεται χρήση των πινάκων σε κάποιες χρήσιμες εφαρμογές. Τα παραδείγματα αυτά αφορούν στην ανάλυση μοντέλων για:

α) Μετακίνηση πληθυσμών.

β) Περιγραφή της κινήσεως ενός κινητού στο επίπεδο.

γ) Παρακολούθηση συντεταγμένων ενός κινητού στον (τρισδιάστατο) χώρο.

δ) Μελέτη δικτύων.

Για κάθε μοντέλο παρουσιάζεται αναλυτικά το φυσικό πρόβλημα, το μαθηματικό μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του και η λύση του προβλήματος με χρήση των πινάκων.

1.5.1 Μετακίνηση πληθυσμών.

Σε μία ακτοπλοϊκή γραμμή δραστηριοποιούνται τρεις ανταγωνιστικές εταιρείες *I*, *II*, *III*. Οι εταιρείες, προσφέροντας ικανοποιητικές υπηρεσίες στους πελάτες τους, καταφέρνουν να διατηρούν ένα μεγάλο μέρος της επιβατικής τους κινήσεως από χρονιά σε χρονιά. Ας υποθέσομε ότι:

α) Η εταιρεία *I* καταφέρνει να διατηρήσει το 90% της επιβατικής της κινήσεως και την επόμενη χρονιά, ενώ ένα ποσοστό 5% μετακινείται στην εταιρεία *II* και το υπόλοιπο 5% μετακινείται στην εταιρεία *III*.

β) Η εταιρεία *II* διατηρεί μόνο το 70% της επιβατικής της κινήσεως την επόμενη χρονιά, ενώ ένα ποσοστό 20% μετακινείται προς την εταιρεία *I* και το υπόλοιπο 10% μετακινείται στην εταιρεία *III*.

γ) Η εταιρεία *III* διατηρεί το 80% της επιβατικής της κινήσεως και την επόμενη χρονιά, ενώ ένα ποσοστό 10% μετακινείται στην εταιρεία *I* και το υπόλοιπο 10% μετακινείται στην εταιρεία *II*.

Θα μπορούσαμε να συγκεντρώσομε τα παραπάνω στοιχεία σε έναν πίνακα, του οποίου οι γραμμές να περιέχουν τα ποσοστά των επιβατών που εκφράζουν τις μετακινήσεις (ή μη) επιβατών από την κάθε εταιρεία προς τις άλλες. Έτσι παίρνομε τον επόμενο πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,05 & 0,05 \\ 0,20 & 0,70 & 0,10 \\ 0,10 & 0,10 & 0,80 \end{bmatrix}$$

(ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται ***πίνακας μεταπηδήσεως*** ή ***πίνακας μεταβάσεως*** και έχει το χαρακτηριστικό ότι τα στοιχεία του είναι αριθμοί μεταξύ του 0 και του 1 και τα στοιχεία κάθε γραμμής του αθροίζουν στη μονάδα).

Ας συμβολίσομε με $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ τις επιβατικές κινήσεις των τριών εταιρειών κάποια χρονιά και με x_n, y_n, z_n τις αντίστοιχες επιβατικές κινήσεις την επόμενη χρονιά. Τα x_0, y_0, z_0 αντιστοιχούν στην τρέχουσα χρονιά, τα x_1, y_1, z_1 στην πρώτη (επόμενη της τρέχουσας), τα x_2, y_2, z_2 στη δεύτερη κ.ο.κ.. Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} x_n &= 0,90x_{n-1} + 0,20y_{n-1} + 0,10z_{n-1} \\ y_n &= 0,05x_{n-1} + 0,70y_{n-1} + 0,10z_{n-1} \\ z_n &= 0,05x_{n-1} + 0,10y_{n-1} + 0,80z_{n-1} \end{aligned}$$

Οι τρεις αυτές σχέσεις γράφονται με χρήση πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,90x_{n-1} + 0,20y_{n-1} + 0,10z_{n-1} \\ 0,05x_{n-1} + 0,70y_{n-1} + 0,10z_{n-1} \\ 0,05x_{n-1} + 0,10y_{n-1} + 0,80z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,70 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$

ή ακόμη

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.5.1}$$

όπου

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,70 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,80 \end{bmatrix}$$

είναι ο ανάστροφος του πίνακα A.

Γνωρίζοντας την επιβατική κίνηση για κάθε εταιρεία μια συγκεκριμένη χρονιά και υποθέτοντας ότι το μοντέλο που περιγράφεται παραπάνω συνεχίζει να ισχύει για όλες τις χρονιές, μπορούμε να απαντήσομε εύκολα στα επόμενα ερωτήματα:

α) Πόσους επιβάτες θα εξυπηρετήσει κάθε εταιρεία την επόμενη χρονιά;

β) Πόσους επιβάτες θα εξυπηρετήσει κάθε εταιρεία σε 2, 3, 4,..., χρόνια από σήμερα;

γ) Πόσα χρόνια χρειάζονται, ώστε για παράδειγμα η εταιρεία I να διπλασιάσει την ετήσια επιβατική της κίνηση;

δ) Πόσα χρόνια χρειάζονται, ώστε για παράδειγμα η εταιρεία III να ξεπεράσει σε ετήσια κίνηση τους επιβάτες που διακινεί η εταιρεία II;

Έστω, για παράδειγμα ότι την τρέχουσα χρονιά $(n=0)$ η επιβατική κίνηση για τις τρεις εταιρείες ήταν (σε χιλιάδες επιβάτες) 4, 10, 6 αντίστοιχα. Επομένως,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

και σύμφωνα με τον τύπο (1.5.1), για τις επιβατικές κινήσεις σ' ένα χρόνο από σήμερα θα έχομε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,70 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,2 \\ 7,8 \\ 6,0 \end{bmatrix}$$

δίνοντας έτσι την απάντηση στο ερώτημα (α). Για τις επιβατικές κινήσεις σε δύο χρόνια από σήμερα προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = B \left(B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right) = B^2 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,70 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,80 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

και εκτελώντας τις πράξεις παίρνομε

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,74 \\ 6,37 \\ 5,89 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, για τις επιβατικές κινήσεις σε n χρόνια από σήμερα θα έχομε

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = B \left(B \left(\cdots B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right) \right) = B^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{1.5.2}$$

Για να απαντήσομε στο ερώτημα (γ) χρειάζεται να εξετάσομε πότε για πρώτη φορά το στοιχείο x_n (που αντιστοιχεί στην εταιρεία I) του πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$ θα γίνει μεγαλύτερο του $2 \cdot 4 = 8$. Αυτό προφανώς δεν συνέβη στις δύο πρώτες χρονιές, για τις οποίες έχουν ήδη γίνει οι υπολογισμοί. Όμως

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = B^3 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,829 \\ 5,435 \\ 5,736 \end{bmatrix}$$

οπότε η απάντηση στο ερώτημα (β) είναι ότι η εταιρεία I θα υπερδιπλασιάσει την ετήσια επιβατική της κίνηση μετά από τρία χρόνια.

Για το ερώτημα (γ) χρειάζεται να εξετάσομε πότε για πρώτη φορά ισχύει $z_n < y_n$. Από τους υπολογισμούς που έχουν πραγματοποιηθεί προκύπτει άμεσα ότι $z_1 < y_1$, $z_2 < y_2$ ενώ $z_3 < y_3$, οπότε η απάντηση στο ερώτημα είναι ότι η εταιρεία *ΙΙΙ* για πρώτη φορά θα ξεπεράσει σε ετήσια κίνηση τους επιβάτες που διακινεί η εταιρεία *ΙΙ*, τον τρίτο χρόνο από σήμερα.

Κλείνοντας το παράδειγμα αυτό σημειώνομε ότι μετά από πάροδο πολλών χρόνων, η επιβατική κίνηση των εταιρειών σταθεροποιείται σε κάποιες (οριακές) τιμές. Πιο συγκεκριμένα η επιβατική κίνηση της πρώτης εταιρείας θα σταθεροποιηθεί γύρω στους 11800 επιβάτες, της δεύτερης γύρω στους 3500 επιβάτες και της τρίτης στους 4700 επιβάτες. Αυτό γίνεται άμεσα φανερό αν παρατηρήσομε, για παράδειγμα, τα παρακάτω αποτελέσματα

$$\begin{bmatrix} x_{30} \\ y_{30} \\ z_{30} \end{bmatrix} = B^{30} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = B^{30} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,763 \\ 3,530 \\ 4,7073 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{40} \\ y_{40} \\ z_{40} \end{bmatrix} = B^{40} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = B^{40} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,765 \\ 3,5295 \\ 4,7059 \end{bmatrix}.$$

Τα τελευταία έχουν βρεθεί εφαρμόζοντας τον τύπο (1.5.2) και τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων 1.4.3 και 1.3.4, με χρήση της αναλύσεως του πίνακα *B* στη μορφή $B = PAP^{-1}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0,62929 & 0 & 0 \\ 0 & 0,77071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1,7071 & -0,29289 & 0,3 \\ 0,70711 & -0,70711 & 0,4 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0039504 & -0,46050 & 0,24661 \\ 0,37226 & -0,12774 & -0,83485 \\ 0,58824 & 0,58824 & 0,58524 \end{bmatrix}.$$

1.5.2 Περιγραφή της κινήσεως ενός κινητού στο επίπεδο.

Ας υποθέσομε ότι ένα πλοίο ξεκινάει από τη θέση M_1 και ακολουθεί την πορεία $M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,M_5\,M_6$ που φαίνεται στο σχήμα 1.5α.

Εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι να περιγράψομε την κίνηση του πλοίου και πιο συγκεκριμένα να αναπτύξομε μια συστηματική μέθοδο υπολογισμού των συντεταγμένων σε κάθε νέα θέση του πλοίου, με χρήση των συντεταγμένων της προηγούμενης θέσεως.

Οι κινήσεις του πλοίου προφανώς μπορούν να αναλυθούν σε επί μέρους απλές κινήσεις ως εξής:

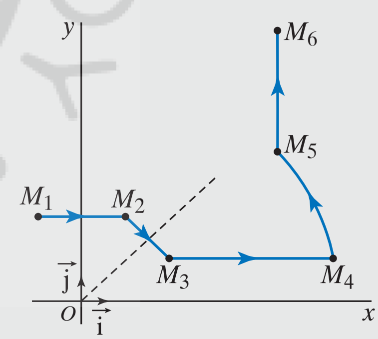
M_1M_2: Κίνηση από ένα σημείο προς το συμμετρικό του ως προς τον κατακόρυφο άξονα *Oy*.

M_2M_3: Κίνηση από ένα σημείο προς το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της γωνίας *xOy*.

M_3M_4: Μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα *Ox*.

M_4M_5: Κίνηση επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων (στροφή κατά μια συγκεκριμένη γωνία).

M_5M_6: Μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα παράλληλο προς τον κατακόρυφο άξονα *Oy*.



Σχ. 1.5α.

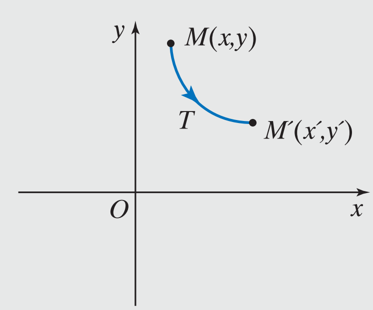
Θα δούμε στη συνέχεια με ποιον τρόπο μπορούμε να περιγράψομε τις παραπάνω κινήσεις με χρήση πινάκων. Τέτοιες κινήσεις είναι γνωστές με την ονομασία ***γεωμετρικοί μετασχηματισμοί***, αφού μέσω αυτών κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζεται σε ένα άλλο σημείο του.

Ας θεωρήσομε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και έστω $M(x,y)$ η αρχική θέση ενός κινητού και $M'(x',y')$ η τελική του (σχ. 1.5β). Θα διαπιστώσομε ότι, για όλες τις κινήσεις που περιγράφηκαν παραπάνω, οι συντεταγμένες των δύο σημείων συνδέονται με απλές σχέσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B \qquad (1.5.3)$$

όπου *A* είναι ένας 2×2 πίνακας και *B* ένας 2×1 πίνακας (στήλη).

Για το μετασχηματισμό που αφορά στη ***συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα***, όπως παρατηρούμε από το σχήμα 1.5γ ισχύει:



Σχ. 1.5β.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1x + 0y \\ y' = 0x + 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

οπότε, για τη συγκεκριμένη κίνηση, οι πίνακες A και B της ισότητας (1.5.3) είναι οι:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ομοίως για το μετασχηματισμό που αφορά στη ***συμμετρία ως προς την κύρια διχοτόμο των αξόνων*** (σχ. 1.5δ), θα ισχύει:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0x + 1y \\ y' = 1x + 0y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

οπότε

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Για τη ***μετατόπιση κατά ένα δεδομένο διάνυσμα***, έστω $\vec{u} = (x_0, y_0)$ (σχ. 1.5ε) θα έχομε:

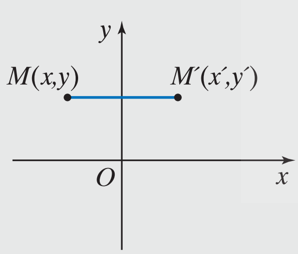
$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1x + 0y + x_0 \\ y' = 0x + 1y + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

και επομένως

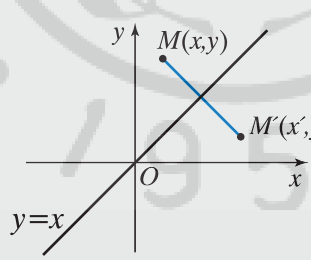
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ο παραπάνω γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται ***παράλληλη μετατόπιση*** κατά το διάνυσμα $\vec{u} = (x_0, y_0)$.

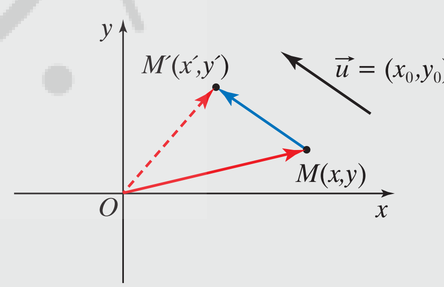
Τέλος, προκειμένου να βρούμε τους πίνακες A και B που αντιστοιχούν στη ***στροφή κατά γωνία θ με κέντρο την αρχή των αξόνων***, ας θέσομε $(OM) = (OM') = \varrho$ και ας ονομάσομε με θ_0 τη γωνία μεταξύ του ημιάξονα Ox και του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$. Τότε θα έχομε (σχ. 1.5στ):



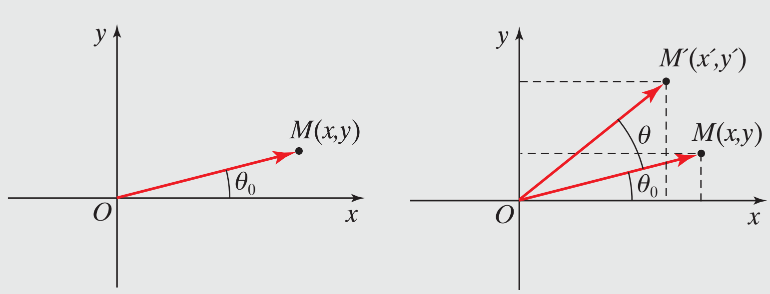
Σχ. 1.5γ.



Σχ. 1.5δ.



Σχ. 1.5ε.



Σχ. 1.5στ.

$$\begin{cases} x = \varrho\,\text{συν}\theta_0 \\ y = \varrho\,\text{ημ}\theta_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \varrho\,\text{συν}(\theta_0 + \theta) \\ y' = \varrho\,\text{ημ}(\theta_0 + \theta) \end{cases}$$

απ' όπου παίρνομε διαδοχικά

$$\begin{cases} x' = \varrho(\text{συν}\theta_0\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta_0\text{ημ}\theta) \\ y' = \varrho(\text{ημ}\theta_0\text{συν}\theta + \text{συν}\theta_0\text{ημ}\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (\varrho\,\text{συν}\theta_0)\text{συν}\theta - (\varrho\,\text{ημ}\theta_0)\text{ημ}\theta \\ y' = (\varrho\,\text{ημ}\theta_0)\text{συν}\theta + (\varrho\,\text{συν}\theta_0)\text{ημ}\theta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\,\text{συν}\theta - y\,\text{ημ}\theta \\ y' = x\,\text{ημ}\theta + y\,\text{συν}\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι επόμενες ειδικές περιπτώσεις:

α) Στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, όπου $A = \begin{bmatrix} \text{συν}\dfrac{\pi}{2} & -\text{ημ}\dfrac{\pi}{2} \\ \text{ημ}\dfrac{\pi}{2} & \text{συν}\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

β) Στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \pi$, όπου $A = \begin{bmatrix} \text{συν}\pi & -\text{ημ}\pi \\ \text{ημ}\pi & \text{συν}\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$ (είναι στην πραγματικότητα η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων).

γ) Στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, όπου $A = \begin{bmatrix} \text{συν}\dfrac{3\pi}{2} & -\text{ημ}\dfrac{3\pi}{2} \\ \text{ημ}\dfrac{3\pi}{2} & \text{συν}\dfrac{3\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

δ) Στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = 2\pi$, όπου $A = \begin{bmatrix} \text{συν}2\pi & -\text{ημ}2\pi \\ \text{ημ}2\pi & \text{συν}2\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ (προφανώς δεν μεταβάλλει τις συντεταγμένες).

Αν τώρα $M(x, y)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου, $M'(x', y')$ είναι η εικόνα του M μέσω ενός μετασχηματισμού με πίνακες A, B και $M''(x'', y'')$ είναι η εικόνα του M' μέσω ενός δεύτερου μετασχηματισμού με πίνακες $\varGamma$, $\varDelta$, τότε θα ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B, \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \varGamma \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \varDelta.$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \varGamma \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \varDelta = \varGamma\left(A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B \right) + \varDelta = (\varGamma A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (\varGamma B + \varDelta),$$

οπότε έχομε και πάλι ένα μετασχηματισμό ίδιου τύπου με τον (1.5.3) και αντίστοιχους πίνακες τους $\varGamma A$ και $\varGamma B + \varDelta$. Σημειωτέον ότι, στην περίπτωση που έχομε $B = \varDelta = 0$, ο μετασχηματισμός που αντιστοιχίζει το σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου, στο σημείο $M''(x'', y'')$ έχει ως πίνακα A το γινόμενο των πινάκων των επί μέρους μετασχηματισμών και πίνακα B ίσο με μηδέν.

Ως εφαρμογή των παραπάνω ας υπολογίσομε τις τελικές συντεταγμένες του πλοίου του παραδείγματος με το οποίο ξεκινήσαμε, θεωρώντας ότι οι αρχικές συντεταγμένες του (στο σημείο M_1) ήταν (–2,4), ότι το μήκος του τμήματος M_3M_4 είναι 8, η γωνία M_4OM_3 είναι 45° και ότι το μήκος του τμήματος M_5M_6 είναι 6. Τότε θα έχομε διαδοχικά:

M_1M_2: Συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα, οπότε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

M_2M_3: Συμμετρία ως προς την κύρια διχοτόμο των αξόνων, οπότε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

M_3M_4: Μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\vec{u} = (x_0, y_0) = (7{,}5,\ 0)$, οπότε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

M_4M_5: Στροφή κατά γωνία $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων, οπότε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 7\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

M_5M_6: Μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\vec{u} = (x_0, y_0) =$ (0,6), οπότε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 7\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 7\sqrt{2}+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,\ 07 \\ 15,\ 9 \end{bmatrix}.$$

Επομένως οι τελικές συντεταγμένες του πλοίου είναι οι $(5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}+6)$.

1.5.3 Παρακολούθηση συντεταγμένων στο χώρο.

Από ένα πλοίο που βρίσκεται σε κίνδυνο ρίχνεται μία τροχιοδεικτική βολή. Ας υποθέσομε ότι, ξεκινώντας από το χρονικό σημείο που η βολίδα φτάνει στο μέγιστο ύψος της με συντεταγμένες x_0, y_0, z_0, οι συντεταγμένες της μπορούν να περιγραφούν ως εξής: αν x_n, y_n, z_n είναι οι συντεταγμένες μετά από n λεπτά πτήσεως και $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ οι συντεταγμένες μετά από n–1 λεπτά πτήσεως, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + y_{n-1} + 2z_{n-1}, \quad y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + 3z_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{2}z_{n-1}.$$

Εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε με ποιον τρόπο μεταβάλλονται οι συντεταγμένες της βολίδας με την πάροδο του χρόνου.

Γράφοντας τις προηγούμενες σχέσεις με χρήση πράξεων μεταξύ πινάκων βρίσκομε:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_{n-1} + y_{n-1} + 2z_{n-1} \\ \frac{1}{2}y_{n-1} + 3z_{n-1} \\ \frac{1}{2}z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Σε αντιστοιχία με τον τύπο (1.5.2) που βρέθηκε προηγουμένως, θα έχομε:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = A\left(A\left(\cdots A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right)\right) = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

(ο πίνακας που προέκυψε εδώ έχει και στοιχεία μεγαλύτερα του 1 –θα μπορούσε να έχει και αρνητικά στοιχεία– δεν είναι δηλαδή πίνακας μεταπηδήσεως).

Θα αποδείξομε στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, ότι για τον πίνακα A ισχύει:

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{3n^2-n}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{3n}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{bmatrix},$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

Για $n = 1$ ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει. Ας υποθέσομε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n = k$, δηλαδή ότι έχομε:

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{k}{2^{k-1}} & \frac{3k^2-k}{2^{k-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^k} & \frac{3k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n = k+1$ δηλαδή ότι η δύναμη A^{k+1} δίνεται από τον τύπο:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{k+1}{2^k} & \frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{3(k+1)}{2^k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{k+1}} \end{bmatrix}$$

Όμως

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{k}{2^{k-1}} & \frac{3k^2-k}{2^{k-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^k} & \frac{3k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων βρίσκομε:

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^k} & \frac{k}{2^{k-1}} & \frac{3k^2-k}{2^{k-1}}\\ 0 & \frac{1}{2^k} & \frac{3k}{2^{k-1}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2^k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 2\\ 0 & \frac{1}{2} & 3\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^{k+1}} & \frac{k+1}{2^k} & \frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2^k}\\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{3(k+1)}{2^k}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{k+1}}\end{bmatrix}.$$

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η σχέση που δόθηκε θα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

Αν τώρα μας ενδιαφέρει να βρούμε τις συντεταγμένες x_n, y_n, z_n της βολίδας μετά από n λεπτά πτήσεως, θα έχομε

$$\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\\ z_n\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{3n^2-n}{2^{n-1}}\\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{3n}{2^{n-1}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^n}x_0+\frac{n}{2^{n-1}}y_0+\frac{3n^2-n}{2^{n-1}}z_0\\ \frac{1}{2^n}y_0+\frac{3n}{2^{n-1}}z_0\\ \frac{1}{2^n}z_0\end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$x_n=\frac{1}{2^n}x_0+\frac{n}{2^{n-1}}y_0+\frac{3n^2-n}{2^{n-1}}z_0,\quad y_n=\frac{1}{2^n}y_0+\frac{3n}{2^{n-1}}z_0,\quad z_n=\frac{1}{2^n}z_0.$$

1.5.4 Μελέτη δικτύων.

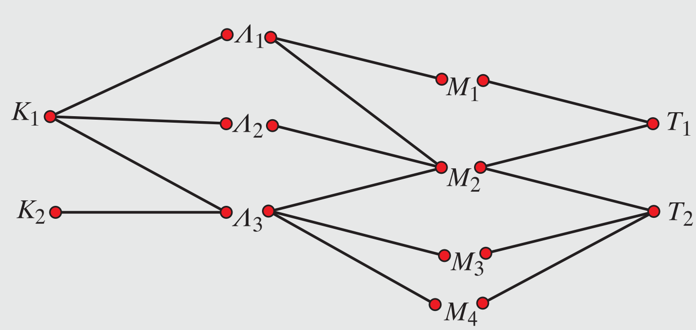
Κατά τη μελέτη μεγάλων δικτύων (π.χ. δικτύων υδρεύσεως, ηλεκτρικών δικτύων, οδικών δικτύων, δικτύων διανομής προϊόντων κ.λπ.) ένα σημαντικό βήμα είναι η αναπαράσταση του δικτύου με τέτοιον τρόπο, ώστε να μπορούν οι πληροφορίες να εισαχθούν σε Η/Υ και στη συνέχεια να μελετηθούν με τη βοήθειά τους. Για την περιγραφή των συνδέσεων ανάμεσα στους διάφορους κόμβους του δικτύου χρησιμοποιούμε συνήθως έναν πίνακα, στον οποίο τα στοιχεία είναι 1 ή 0, αναλόγως αν υπάρχει ή όχι απευθείας σύνδεση μεταξύ των κόμβων που αντιστοιχούν στις γραμμές και τις στήλες του πίνακα (ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται incidence matrix, ωστόσο εμείς θα χρησιμοποιήσομε τον όρο ***πίνακας συνδέσεων***). Θα εξετάσομε στη συνέχεια ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να εξηγήσομε τόσο τον τρόπο κατασκευής του πίνακα συνδέσεων, όσο και τη χρησιμότητά του).

Ας θεωρήσομε ένα απλό δίκτυο στο οποίο υπάρχουν κόμβοι τεσσάρων διαφορετικών ειδών K, Λ, M, T, οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους όπως δείχνει το σχήμα 1.5ζ.

Οι πίνακας συνδέσεων για τους κόμβους του πρώτου είδους (κόμβοι K_1, K_2) με τους κόμβους του δευτέρου είδους (κόμβοι $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$) θα έχουν γραμμές που αντιστοιχούν στους κόμβους K_1, K_2 και στήλες που αντιστοιχούν στους κόμβους $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, δηλαδή θα είναι της μορφής

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}.$$

Τα στοιχεία του πίνακα θα είναι 1 ή 0, αναλόγως αν υπάρχει ή όχι απευθείας σύνδεσμος μεταξύ των αντιστοίχων κόμβων, οπότε $a_{11}=1$ (αφού ο κόμβος K_1 συνδέεται με τον κόμβο Λ_1), $a_{12}=1$ (αφού ο κόμβος K_1 συνδέεται με τον κόμβο Λ_2), $a_{21}=0$ (αφού ο κόμβος K_2 δεν συνδέεται με τον κόμβο Λ_1) κ.ο.κ.. Έτσι θα έχομε τον επόμενο πίνακα:



Σχ. 1.5ζ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο μπορούμε εύκολα να κατασκευάσομε τους επόμενους πίνακες συνδέσεων που αφορούν στα ζεύγη κόμβων (K, Λ) και (Λ, M) αντίστοιχα:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες συνδέσεων, πέραν της πληροφορίας της υπάρξεως ή μη άμεσης συνδέσεως μεταξύ των κόμβων δύο διαδοχικών κατηγοριών, μπορούν να μας βοηθήσουν να βρούμε και το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών μεταξύ κόμβων, οι οποίοι δεν συνδέονται άμεσα. Πράγματι αν πολλαπλασιάσομε τους πίνακες A και B παίρνομε

$$E = [\varepsilon_{ij}] = AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι:

α) Το στοιχείο ε_{11} πήρε την τιμή 1 γιατί υπάρχει μόνο μία διαδρομή από τον κόμβο K_1 προς τον κόμβο M_1 (η διαδρομή (K_1, Λ_1, M_1)).

β) Το στοιχείο ε_{12} πήρε την τιμή 3 γιατί υπάρχουν 3 διαφορετικές διαδρομές από τον κόμβο K_1 προς τον κόμβο M_2 (οι διαδρομές (K_1, Λ_1, M_2), (K_1, Λ_2, M_2) και (K_1, Λ_3, M_2)).

γ) Το στοιχείο ε_{21} πήρε την τιμή 0 γιατί δεν υπάρχουν διαδρομές από τον κόμβο K_2 προς τον κόμβο M_1.

Επομένως, τα στοιχεία που περιέχονται στο γινόμενο AB, μας δίνουν το πλήθος των διαδρομών από καθένα από τους κόμβους K_1, K_2 προς τους κόμβους T_1, T_2.

Επεκτείνοντας τον προηγούμενο συλλογισμό καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι το γινόμενο

$$B\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

μας δίνει το πλήθος των διαδρομών από καθένα από τους κόμβους $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ προς τους κόμβους T_1, T_2, ενώ τέλος το γινόμενο

$$AB\Gamma = (AB)\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

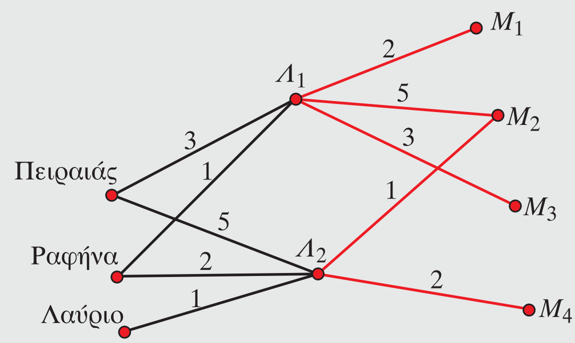
μας δίνει το πλήθος των διαδρομών από καθένα από τους κόμβους K_1, K_2 προς τους κόμβους T_1, T_2.

Στην ανάλυση που προηγήθηκε ο πίνακας συνδέσεων περιείχε ουσιαστικά πληροφορίες για τον αριθμό των συνδέσεων ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κόμβων του δικτύου που μελετάμε (0 ή 1 σύνδεση). Σε περίπτωση που υπάρχουν και περισσότερες από μία συνδέσεις, η αναπαράσταση των πληροφοριών και η εύρεση διαδρομών μεταξύ κόμβων, οι οποίοι δεν επικοινωνούν άμεσα μεταξύ τους γίνεται με παρόμοιο τρόπο.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσομε το δίκτυο ακτοπλοϊκών συνδέσεων της Ασκήσεως 1, όπου πάνω από κάθε γραμμή έχει σημειωθεί ο αριθμός των διαφορετικών ημερησίων δρομολογίων από κάθε λιμάνι της Αττικής προς τα λιμάνια $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ ενός Ελληνικού νησιού και ας υποθέσομε επιπρόσθετα ότι τα λιμάνια συνδέονται απ' ευθείας με τα λιμάνια M_1, M_2, M_3 όπως δείχνει το σχήμα 1.5η.

Τότε οι πληροφορίες που αφορούν στον αριθμό ημερησίων δρομολογίων από τα λιμάνια της Αττικής προς τα λιμάνια του πρώτου νησιού μπορούν να συνοψισθούν στον επόμενο πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$



Σχ. 1.5η.

Αντίστοιχα, ο αριθμός ημερησίων δρομολογίων από τα λιμάνια του πρώτου νησιού προς τα λιμάνια του δεύτερου δίνονται στον πίνακα

$$B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Τέλος το γινόμενο

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 15 & 19\\ 4 & 5 & 9\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

θα μας δίνει τον αριθμό ημερησίων δρομολογίων από τα λιμάνια της Αττικής προς τα λιμάνια του δεύτερου νησιού.

Ασκήσεις.

1.5.1. Σε μια μικρή επαρχία υπάρχουν τρεις πόλεις με συνολικό πληθυσμό 30.000 κατοίκους. Στο τέλος κάθε χρονιάς τα 2/10 των κατοίκων της κάθε πόλεως μετακινείται στις άλλες δύο πόλεις (από 1/10 προς την καθεμία), ενώ τα 8/10 των κατοίκων παραμένουν στην ίδια. Υποθέτομε ότι δεν φεύγουν άτομα τελείως από την επαρχία, ούτε επιτρέπεται να έρθουν νέα άτομα σ' αυτήν.

α) Αν $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ είναι οι πληθυσμοί των τριών πόλεων μια συγκεκριμένη χρονιά και x_n, y_n, z_n οι αντίστοιχοι πληθυσμοί των πόλεων την επόμενη χρονιά, να συντάξετε τον πίνακα B, ώστε να ισχύει

$$\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\\ z_n\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\\ z_{n-1}\end{bmatrix}$$

β) Αν ο σημερινός πληθυσμός των τριών πόλεων είναι από 10.000, να υπολογίσετε πόσοι θα είναι οι κάτοικοι των τριών πόλεων την επόμενη χρονιά και πόσοι μετά τρία χρόνια.

1.5.2. Σε μια χώρα υπάρχουν τρεις μεγάλες πολιτικές παρατάξεις $α, β, γ$ και διάφορες μικρότερες. Από τη μελέτη προηγουμένων πολιτικών αναμετρήσεων διαπιστώθηκε ότι ισχύει το εξής μοντέλο:

α) Από αυτούς που ψήφισαν την παράταξη $α$ στις τελευταίες εκλογές, 80% θα ψηφίσουν πάλι την $α$, 10% θα ψηφίσουν την παράταξη $β$, 5% θα ψηφίσουν την παράταξη $β$, ενώ το υπόλοιπο 5% θα ψηφίσει κάποια από τις μικρότερες παρατάξεις.

β) Από αυτούς που ψήφισαν την παράταξη $β$ στις τελευταίες εκλογές, 89% θα ψηφίσουν πάλι την $β$, 1% θα ψηφίσουν την παράταξη $α$, 5% θα ψηφίσουν την παράταξη $γ$ και το υπόλοιπο 5% θα ψηφίσει κάποια από τις μικρότερες παρατάξεις.

γ) Από αυτούς που ψήφισαν την παράταξη $γ$ στις τελευταίες εκλογές, 75% θα ψηφίσουν πάλι την $γ$, 10% θα ψηφίσουν την παράταξη $α$, 5% θα ψηφίσουν την παράταξη $β$ και το υπόλοιπο 10% θα ψηφίσει κάποια από τις μικρότερες παρατάξεις.

δ) Από αυτούς που ψήφισαν τις μικρότερες παρατάξεις στις τελευταίες εκλογές, 5% θα ψηφίσουν την παράταξη $α$, 5% θα ψηφίσουν την παράταξη $β$ και 5% θα ψηφίσουν την παράταξη $γ$.

Αν υποθέσομε ότι το μοντέλο που περιγράφεται παραπάνω συνεχίζει να ισχύει για όλες τις επόμενες εκλογικές αναμετρήσεις και από το σύνολο του πληθυσμού της χώρας που ψηφίζει, το οποίο είναι 10 εκατομμύρια, στην τελευταία εκλογική αναμέτρηση οι τρεις παρατάξεις $α, β, γ$ πήραν αντίστοιχα 5.500.000, 3.500.000, 500.000 ψήφους, να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα:

α) Πόσους ψήφους θα πάρει κάθε παράταξη στις επόμενες εκλογές;

β) Σε πόσες εκλογικές αναμετρήσεις η εκλογική δύναμη του β θα ξεπεράσει την εκλογική δύναμη του α;

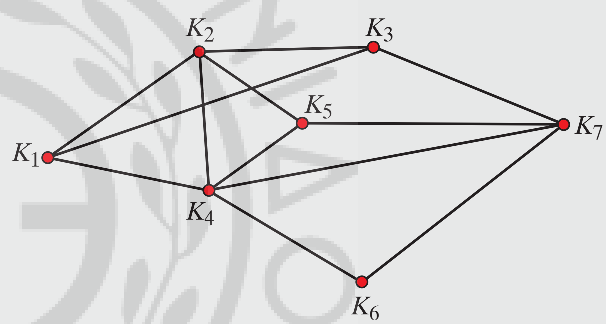
1.5.3. Ένα αεροσκάφος, το οποίο έχει ήδη φτάσει σε ένα συγκεκριμένο ύψος (π.χ. 10.000 πόδια), αρχίζει να πετά στο σταθερό αυτό ύψος. Με έναρξη το σημείο με συντεταγμένες $(10,10,10)$ το αεροπλάνο κινείται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι συντεταγμένες του μετά από n λεπτά πτήσεως να συνδέονται με τις συντεταγμένες του μετά από $n-1$ λεπτά με τις σχέσεις $x_n = x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1}$, $y_n = y_{n-1} + 6z_{n-1}$, $z_n = z_{n-1}$ (η τρίτη ισότητα εκφράζει το σταθερό ύψος πτήσεως του αεροσκάφους).

α) Να βρείτε τον πίνακα A, ώστε να ισχύει $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$.

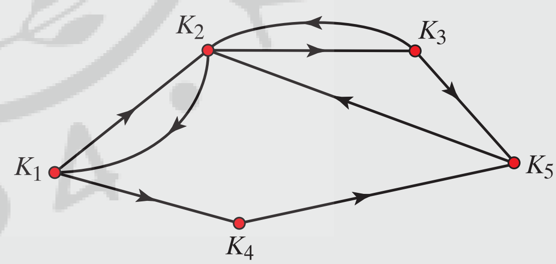
β) Να αποδείξετε ότι $A^n = \begin{bmatrix} 1 & -3n & 12n-9n^2 \\ 0 & 1 & 6n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

γ) Να βρείτε τη θέση του αεροσκάφους μετά από 5 λεπτά πτήσεως.

1.5.4. Να κατασκευάσετε τον πίνακα $A=[a_{ij}]_{7\times 7}$ συνδέσεων για το δίκτυο που παρουσιάζεται στο σχήμα 1.5θ και να διαπιστώσετε ότι ο πίνακας αυτός είναι συμμετρικός. Ισχύει το ίδιο για τον πίνακα συνδέσεων $A=[a_{ij}]_{5\times 5}$ του παρακάτω κατευθυνόμενου δικτύου (σχ. 1.5ι), στο οποίο υποθέτομε ότι κάθε διαδρομή που σημειώνεται έχει και μια κατεύθυνση προς την οποία μπορεί να μετακινηθεί κάποιος;

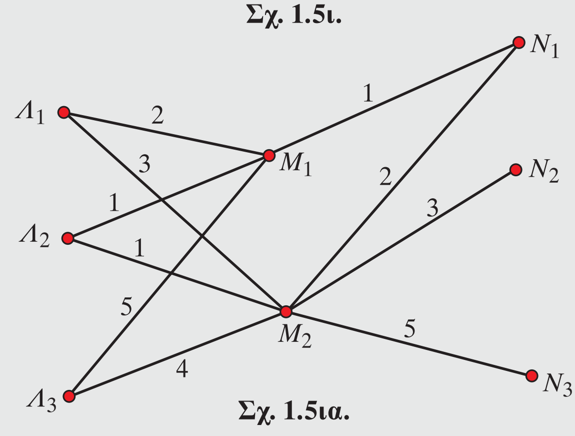


Σχ. 1.5θ.



Σχ. 1.5ι.

1.5.5. Το δίκτυο του σχήματος 1.5ια παρουσιάζει τις συνδέσεις μεταξύ των λιμανιών $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, ενός Ελληνικού νησιού, των λιμανιών M_1, M_2 ενός δεύτερου νησιού και των λιμανιών N_1, N_2, N_3 ενός τρίτου. Ο αριθμός πάνω από κάθε γραμμή είναι ο αριθμός των διαφορετικών ημερησίων δρομολογίων που συνδέουν τα αντίστοιχα λιμάνια π.χ. από το λιμάνι Λ_1 προς το λιμάνι M_2 εκτελούνται κάθε ημέρα 3 δρομολόγια. Να συντάξετε δύο πίνακες A και B που να περιέχουν όλες τις πληροφορίες που αφορούν στον αριθμό των διαθεσίμων διαφορετικών ημερησίων δρομολογίων του δικτύου που περιγράφει το σχήμα. Ο A θα δίνει πληροφορίες για τον αριθμό των δρομολογίων από τα $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ προς τα M_1, M_2 ενώ ο B θα δίνει πληροφορίες για τον αριθμό των δρομολογίων από τα M_1, M_2 προς τα N_1, N_2, N_3. Στη συνέχεια να υπολογισθεί ο πίνακας που δίνει τον αριθμό των διαθεσίμων δρομολογίων από τα $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ προς τα N_1, N_2, N_3.



Σχ. 1.5ια.

1.5.6. Δίνεται ένας μετασχηματισμός του τύπου (1.5.3) με πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε τις εικόνες των σημείων $M(1,2)$, $N(2,3)$, $\Gamma(5,3)$.

1.5.7. Δίνεται ένας μετασχηματισμός του τύπου (1.5.3) με πίνακες $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 10 & 5\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$.

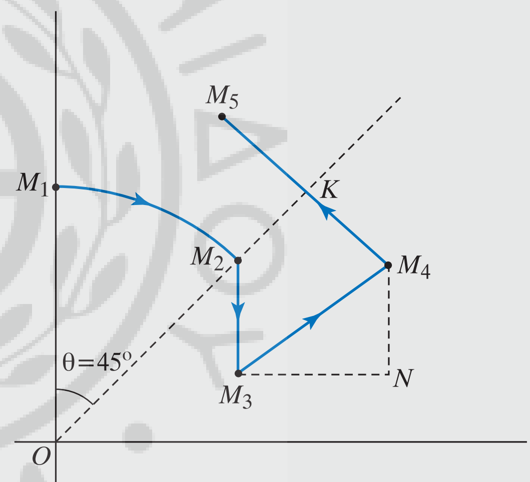
α) Να βρείτε τα σημεία, των οποίων η εικόνα είναι το σημείο $(3,4)$.
β) Να διαπιστώσετε ότι το σημείο $(1,1)$ δεν μπορεί να είναι εικόνα κανενός σημείου του επιπέδου μέσω του μετασχηματισμού που δόθηκε.

1.5.8. Να εξηγήσετε τι παριστάνουν γεωμετρικά οι μετασχηματισμοί που έχουν ως πίνακα A αυτόν που δίνεται παρακάτω και $B=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$.

α) $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ β) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ γ) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

δ) $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ε) $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ στ) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

1.5.9. Ένα πλοίο ξεκινάει από τη θέση M_1 και ακολουθεί την πορεία $M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,M_5$ που φαίνεται στο σχήμα 1.5ιβ.
α) Να αναλύσετε την κίνηση του πλοίου σε επί μέρους απλές κινήσεις που να μπορούν να μελετηθούν με χρήση των μετασχηματισμών του τύπου (1.5.3).
β) Να υπολογίσετε τις τελικές συντεταγμένες του πλοίου αν οι αρχικές συντεταγμένες του (στο σημείο M_1) ήταν (0, 7), η γωνία M_1OM_2 είναι 45°, το μήκος του τμήματος M_2M_3 είναι 3, το μήκος των τμημάτων M_3N και NM_4 είναι 4 και 3 αντίστοιχα και ισχύει $M_4K = KM_5$.



Σχ. 1.5ιβ.

1.6 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Ισότητα δύο πινάκων $A=[a_{ij}]\in\Pi_{\mu\times\nu}$, $B=[\beta_{ij}]\in\Pi_{\mu\times\nu}$.	$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=\beta_{ij}\,(i=1,2,\ldots,\mu \text{ και } j=1,2,\ldots,\nu)$
Μηδενικός πίνακας.	Ένας πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν.
Διαγώνιος πίνακας τάξεως ν.	$\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}\end{bmatrix}$

Μοναδιαίος πίνακας ή ταυτοτικός πίνακας τάξεως ν.	$I_\nu = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$
Ανάστροφος ενός πίνακα A.	Ο πίνακας A^T, ο οποίος έχει ως γραμμές τις στήλες του A και ως στήλες τις γραμμές του A.
Συμμετρικός πίνακας A.	Πίνακας για τον οποίο ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, \nu$ και $j = 1, 2, \dots, \nu$ ή ισοδύναμα $A^T = A$.
Αν $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu\times\nu}$ και $B = [\beta_{ij}] \in \Pi_{\mu\times\nu}$, τότε μπορεί να ορισθεί: – το άθροισμα, – η διαφορά, – το γινόμενο λA όπου $\lambda \in \mathbf{R}$.	$A + B = [a_{ij} + \beta_{ij}]$ $A - B = [a_{ij} - \beta_{ij}]$ $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$
Γινόμενο του πίνακα $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu\times\nu}$ με τον πίνακα $B = [\beta_{ij}] \in \Pi_{\nu\times\lambda}$.	$AB = [\gamma_{ij}]_{\mu\times\lambda}$, όπου $\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \dots + a_{i\nu}\beta_{\nu j}$
Αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξεως ν.	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα τάξεως 2 $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ με $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$	$A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

1.7 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το πλήθος των στοιχείων ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu\times\nu}$ είναι $\mu + \nu$.	**Σ Λ**
2.	Αν $(\alpha^2 + \beta^2)A = \mathbf{O}$, τότε $A = \mathbf{O}$.	**Σ Λ**
3.	Αν $3(A - B) = \mathbf{O}$, τότε $A = B$.	**Σ Λ**
4.	Αν $A, B \in \Pi_{3\times 4}$, τότε δεν ορίζεται το γινόμενό τους.	**Σ Λ**
5.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος.	**Σ Λ**

6.	Αν για τον πίνακα A ισχύει $A^2 = I$, τότε θα είναι $A = I$ ή $A = -I$.	**Σ Λ**
7.	Αν ισχύει $AX = BX$ για κάποιο πίνακα X του οποίου τα στοιχεία δεν είναι όλα ίσα με το μηδέν, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $A = B$.	**Σ Λ**
8.	Αν ισχύει $AB = 5I$, όπου A, B τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξεως, τότε οι A, B θα είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.	**Σ Λ**
9.	Αν $(A - I)^2 = \mathbf{O}$, τότε ο πίνακας A θα ισούται με το μοναδιαίο πίνακα, δηλαδή $A = I$.	**Σ Λ**
10.	Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες, θα ισχύει πάντοτε η ισότητα $(AB)^2 = A^2B^2$.	**Σ Λ**
11.	Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.	**Σ Λ**
12.	Αν ισχύει $AB = \mathrm{O}$ και ο ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι ο ταυτοτικός.	**Σ Λ**
13.	Αν ισχύει $AB = I$, τότε ο A θα είναι ο αντίστροφος του B.	**Σ Λ**
14.	Αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και B, X είναι δύο άλλοι πίνακες για τους οποίους ισχύει $BX = A$, τότε συμπεραίνομε ότι $X = A^{-1}B$	**Σ Λ**
15.	Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως ν, τότε και το γινόμενο AB θα είναι αντιστρέψιμος πίνακας.	**Σ Λ**
16.	Αν ένας σύνθετος πίνακας μπορεί να γραφεί στη μορφή $M = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & \Gamma \end{bmatrix}$ έτσι ώστε οι πίνακες A και Γ να είναι αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες, τότε $M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -B^{-1} \\ \mathbf{O} & \Gamma^{-1} \end{bmatrix}$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Οι τύποι που πρέπει να αντιστοιχούν σε δύο πίνακες A, B αντίστοιχα, ώστε να ορίζεται το γινόμενό τους και να είναι πίνακας στοιχείο, είναι αντίστοιχα: α) $\mu \times \nu,\ \nu \times 1$ β) $1 \times \nu,\ \nu \times 1$ γ) $1 \times \nu,\ \nu \times \lambda$ δ) Ίδιοι
2.	Το γινόμενο του πίνακα $\begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ με τον πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ίσο με: α) $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$
3.	Αν A, B είναι δύο πίνακες τύπου 4×10, τότε δεν ορίζεται: α) Το γινόμενό τους. β) Το άθροισμά τους. γ) Η διαφορά τους. δ) Ο $A^T B$.

4.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} a^2-3a+3 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 \end{bmatrix}$ γίνεται μοναδιαίος: α) Αν $\alpha = 1$. β) Αν $\alpha = 2$. γ) Αν $\alpha = 0$. δ) Ποτέ.
5.	Αν για τον πίνακα $A \in \Pi_{\mu\times\nu}$ και το μοναδιαίο πίνακα τάξεως ν ισχύει $AI_\nu = I_\nu A = A$, τότε: α) $\mu = \nu$ β) $\mu = \nu$ γ) $\mu = \nu$ δ) $\mu = \nu$
6.	Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $x \neq 0$ ένας σταθερός αριθμός. Σ’ αυτήν την περίπτωση ο αντίστροφος του πίνακα xA είναι ο πίνακας: α) xA^{-1} β) $\frac{1}{x}A$ γ) $\frac{1}{x}A^{-1}$ δ) xA
7.	Αν A,B,Γ είναι τρεις πίνακες για τους οποίους ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω, τότε: α) Ισχύει $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$. β) Ισχύει $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$. γ) Ισχύει $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$. δ) Ισχύουν όλες οι σχέσεις που δίνονται παραπάνω.
8.	Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$: α) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. β) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. γ) Δεν υπάρχει. δ) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
9.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.
10.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.
11.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.

12.	Αν $A, B, \Gamma \in \Pi_{\mu\times\nu}$, τότε: α) Ισχύει $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$. β) Ισχύει $A + B = B + A$. γ) Ισχύει $A - (B - \Gamma) = (A - B) + \Gamma$. δ) Ισχύουν όλες οι σχέσεις που δίνονται παραπάνω.
13.	Αν $A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}$, τότε: α) $5(A+B)=5A+B$ β) $\varrho A=\mathbf{O}$ αν και μόνο αν $\varrho=0$ ή $A=\mathbf{O}$ γ) $AB=BA$ δ) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

1.8 Γενικές ασκήσεις.

1.8.1. Να γράψετε το άθροισμα τετραγώνων $x_1^2+x_2^2+...+x_\nu^2$ με πράξεις μεταξύ πινάκων χρησιμοποιώντας τον πίνακα γραμμή $X=[x_1,x_2,...,x_\nu]$.

1.8.2. Να αποδείξετε ότι:

α) Το γινόμενο δύο διαγωνίων πινάκων διαστάσεως ν είναι επίσης διαγώνιος πίνακας της ίδιας διαστάσεως.

β) Το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων διαστάσεως ν είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας της ίδιας διαστάσεως.

γ) Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων διαστάσεως ν είναι επίσης κάτω τριγωνικός πίνακας της ίδιας διαστάσεως.

1.8.3. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας Α. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός.

β) Ο πίνακας AA^T είναι συμμετρικός.

1.8.4. Έστω δύο τετραγωνικοί συμμετρικοί πίνακες A, B. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο πίνακας $-A$ είναι συμμετρικός.

β) Ο πίνακας $A+B$ είναι συμμετρικός.

1.8.5. Ένας πίνακας A ονομάζεται αντισυμμετρικός αν ισχύει $A^T=-A$. Έστω δύο τετραγωνικοί αντισυμμετρικοί πίνακες A, B. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο πίνακας $-A$ είναι αντισυμμετρικός.

β) Ο πίνακας $A+B$ είναι αντισυμμετρικός.

1.8.6. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $AB=BA$, να αποδείξετε ότι θα ισχύει $(AB)^n=A^nB^n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

1.8.7. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $(A+3B)(2A+B)=(2A+B)(A+3B)$ να αποδείξετε ότι ισχύει $(AB)^n=A^nB^n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

1.8.8. Για τον πίνακα $A=\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ με $a\neq 0$ να δείξετε ότι $A^k=(2a)^{k-1}A$ για κάθε θετικό ακέραιο k.

1.8.9. Δίνεται ένας πίνακας M για τον οποίο ισχύει $M^3=\mathbf{O}$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $M^n=\mathbf{O}$ για κάθε $n\geq 3$.

β) Αν $A = M(M+I)+I$ και $B = -M+I$, να υπολογίσετε το γινόμενο AB και να αποδείξετε ότι $B^{-1} = A$.

γ) Αν $\Gamma = 2M(M+I)+I$ και $\Delta = 2M^2 - M + I$, να υπολογίσετε το γινόμενο $\Gamma\Delta$ και να αποδείξετε ότι $\Delta^{-1} = \Gamma$.

1.8.10. Έστω οι αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες A, B. Να αποδείξετε ότι:

α) $A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

β) Αν υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $A+B$, τότε $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$.

1.8.11. Έστω δύο τετραγωνικοί πίνακες A, B. Να αποδείξετε ότι:

α) $A(I+BA) = (I+AB)A$.

β) Αν υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $I+AB$, τότε $(I+AB)^{-1} = I - B(I+AB)^{-1}A$.

1.8.12. Δίνεται ο 3×3 πίνακας $A(x) = I_3 + 2x\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει η ισότητα $A(x)\,A(y) = A(x+y)$.

β) Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί x, y, ώστε ο πίνακας $A(y)$ να είναι αντίστροφος του $A(x)$.

γ) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα των πινάκων $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 36 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

δ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.4.3) να βρείτε τον αντίστροφο των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 36 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.8.13. α) Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος ενός διαγώνιου πίνακα A, του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά, είναι ίσος με τον πίνακα που έχει στη διαγώνιο τα αντίστροφα στοιχεία των αντιστοίχων διαγωνίων στοιχείων του A.

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.4.3) να βρείτε τον αντίστροφο του σύνθετου πίνακα $M = \begin{bmatrix} A & I_\nu \\ \mathbf{O} & \Gamma \end{bmatrix}$,

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

με $a_{11}a_{22}\cdots a_{\nu\nu} \neq 0$ και $\gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{\nu\nu} \neq 0$.

2

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Κατά τη μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων Μηχανικής, Οικονομίας, Ηλεκτρονικής κ.λπ.. οδηγούμαστε αρκετά συχνά σε προβλήματα λύσεως ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Όμως συνήθως σε τέτοια προβλήματα το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων είναι αρκετά μεγάλο, πράγμα που καθιστά δύσκολη τη λύση τους. Στις περιπτώσεις αυτές η γραφή του συστήματος σε μορφή μιας εξισώσεως πινάκων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού δίνει τη δυνατότητα να λυθεί, με κατάλληλα προγράμματα, από τους υπολογιστές. Ο Cramer ανέπτυξε ένα συστηματικό τρόπο λύσεως γραμμικών συστημάτων με τη χρήση της έννοιας της ορίζουσας, την οποία θα επεξηγήσομε στο παρόν κεφάλαιο.

2.1 *Η έννοια της ορίζουσας.*

2.2 *Ανάπτυγμα ορίζουσας ν τάξεως.*

2.3 *Ιδιότητες οριζουσών.*

2.4 *Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα με χρήση οριζουσών.*

2.5 *Γραμμικά συστήματα εξισώσεων.*

2.6 *Η μέθοδος απαλοιφής.*

2.7 *Επίλυση γραμμικών συστημάτων με ν εξισώσεις και ν αγνώστους.*

2.8 *Μελέτη ομογενών γραμμικών συστημάτων.*

2.9 *Επαυξημένος πίνακας – Μέθοδος απαλοιφής του Gauss.*

2.10 *Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.*

2.11 *Ερωτήσεις κατανοήσεως.*

2.12 *Γενικές ασκήσεις.*

2.1 Η έννοια της ορίζουσας.

Ας θεωρήσομε τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x_1, x_2

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= \beta_2. \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Όμως, το πρώτο μέλος της ισότητας αυτής είναι το γινόμενο του 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ (πίνακας των συντελεστών των αγνώστων) με τον 2×1 πίνακα $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (πίνακας των αγνώστων του συστήματος). Επομένως το αρχικό σύστημα γράφεται με τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B \qquad (2.1.1)$$

όπου με $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ συμβολίσαμε τον πίνακα των σταθερών όρων.

Για την εύρεση της λύσεως του γραμμικού συστήματος, θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσομε την πρώτη εξίσωση επί α_{22} και τη δεύτερη επί α_{12}, ώστε να πάρομε:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_{22}x_1 + \alpha_{12}\alpha_{22}x_2 &= \alpha_{22}\beta_1 \\ \alpha_{21}\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}\alpha_{12}x_2 &= \alpha_{12}\beta_2 \end{aligned}$$

και να τις αφαιρέσομε κατά μέλη, οπότε θα έχομε

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})x_1 = \alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2 . \qquad (2.1.2)$$

Σύμφωνα με τον τελευταίο τύπο, όταν

$$D = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$$

τότε ο άγνωστος x_1 δίνεται από την έκφραση

$$x_1 = \frac{\alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2}{D}. \qquad (2.1.3)$$

Με ανάλογη διαδικασία μπορούμε να διαπιστώσομε ότι για τον άγνωστο x_2 ισχύει

$$(\alpha_{11}a_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})x_2 = \alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1 \qquad (2.1.4)$$

και επομένως, για $D \neq 0$, θα έχομε

$$x_2 = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{D}. \qquad (2.1.5)$$

Ο αριθμός $D = \alpha_{11}\,\alpha_{21} - \alpha_{21}\,\alpha_{22}$ που εμφανίζεται στους παρονομαστές των παραπάνω εκφράσεων, ονομάζεται ***ορίζουσα του πίνακα*** $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$ ***ή ορίζουσα 2ης τάξεως*** (επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν 2×2 πίνακα) και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}$.

Επομένως έχομε τον επόμενο ορισμό:

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 2

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}.$$

Τότε, η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \tag{2.1.6}$$

Για παράδειγμα:

Η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ είναι ίση με $|A|=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=4(-2)-5(-3)=7$,

η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ είναι $|I|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$ και

η ορίζουσα του μηδενικού πίνακα $\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ είναι $|\mathbf{O}|=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0-0=0$.

Οι εκφράσεις που εμφανίζονται στους αριθμητές των τύπων (2.1.3), (2.1.5) μπορούν επίσης να γραφούν ως ορίζουσες πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψομε

$$D_{x_1}=\beta_1\alpha_{22}-\beta_2\alpha_{12}=\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12}\\ \beta_2 & \alpha_{22}\end{vmatrix},\qquad D_{x_2}=\alpha_{11}\beta_2-\alpha_{21}\beta_1=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \beta_2\end{vmatrix}.$$

οπότε, αν $D\neq 0$ το σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους, θα έχει ως μοναδική λύση την

$$x_1=\frac{D_{x_1}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12}\\ \beta_2 & \alpha_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{D_{x_2}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \beta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}} \tag{2.1.7}$$

(οι τύποι αυτοί είναι γνωστοί με την ονομασία ***τύποι του Cramer***).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ορίζουσες D_{x1}, D_{x2} προκύπτουν από την D = $|A|$ αν αντικαταστήσομε τις στήλες που αντιστοιχούν στους αγνώστους x_1, x_2 με τις στήλες των σταθερών όρων.

Δεδομένου ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τις σχέσεις (2.1.2), (2.1.4), οι οποίες προφανώς γράφονται στη μορφή

$$D\cdot x_1=D_{x1},\quad D\cdot x_2=D_{x2}$$

εύκολα καταλήγομε στα εξής συμπεράσματα που αφορούν στη λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

΄Εστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \beta_2 \end{cases}$ και ας συμβολίσομε με $D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων.

– Αν $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}. \tag{2.1.8}$$

– Αν $D = 0$ και ισχύει επί πλέον είτε $D_{x_1} \neq 0$ είτε $D_{x_2} \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

– Αν $D = D_{x_1} = D_{x_2} = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, εκτός αν ισχύει

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0 \text{ και } \beta_1 \neq 0 \text{ ή } \beta_2 \neq 0,$$

οπότε θα είναι αδύνατο.

Με τη βοήθεια της ορίζουσας 2ης τάξεως θα ορίσομε την ***ορίζουσα 3ης τάξεως***, δηλαδή την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα. ΄Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ο αριθμός $\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$

ονομάζεται ***ορίζουσα του πίνακα*** A και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$.

Επομένως έχομε τον παρακάτω ορισμό:

΄Εστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Τότε, η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση, με την οποία υπολογίζεται η $|A|$ και η οποία ονομάζεται ***ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής***, είναι (αλγεβρικό) άθροισμα τριών γινομένων με εναλλασσόμενα πρόσημα. Ο κάθε όρος του (αλγεβρικού) αθροίσματος είναι το γινόμενο του στοιχείου α_{ij} με την ορίζουσα 2ης τάξεως που προκύπτει από την $|A|$, αν παραλείψομε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}. Το πρόσημο κάθε τέτοιου όρου είναι ίσο με $(-1)^{i+j}$.

Αν αντικαταστήσομε τις ορίζουσες 2ης τάξεως στο προηγούμενο ανάπτυγμα, θα πάρομε την έκφραση

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \\ &= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος τρόπος γραφής ονομάζεται ***ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.***

Ομοίως, διαπιστώνομε ότι η $|A|$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως εξής

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται ***ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης.***

Γενικά, αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του πίνακα A προκύπτει αν θεωρήσομε τα (αλγεβρικά) αθροίσματα των γινομένων που περιγράψαμε παραπάνω, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης. Τα πρόσημα των όρων του αθροίσματος είναι εναλλασσόμενα και ένας μνημονικός κανόνας περιγράφεται παρακάτω

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

για τον υπολογισμό της ορίζουσας $|A|$, θα μπορούσαμε να αναπτύξομε την ορίζουσα του πίνακα A ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής που περιέχει δύο μηδενικά, οπότε θα παίρναμε:

$$|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-10+2) - 0\cdot(5-3) + 0\cdot(-2+6) = -16.$$

Γενικά, αν υπάρχουν γραμμές ή στήλες που περιέχουν μηδενικά, ο υπολογισμός της ορίζουσας διευκολύνεται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς αυτές τις γραμμές ή στήλες.

Γράφοντας την έκφραση που βρήκαμε προηγουμένως για την ορίζουσα 3×3 πίνακα A στη μορφή

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{23})-\alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{23})+\alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{31}\alpha_{22})=$$

$$=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}++\alpha_{12}\alpha_{31}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31}\alpha_{22}$$

καταλήγομε στον επόμενο πρακτικό κανόνα υπολογισμού, ο οποίος είναι γνωστός με την ονομασία ***κανόνας του Sarrus.*** Επαναλαμβάνομε τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα στη δέξια μεριά του και σχηματίζομε τρία γινόμενα με «συν» (+) λαμβάνοντας τα γινόμενα που προκύπτουν κινούμενοι από άνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά και τρία γινόμενα με «πλην» (–) λαμβάνοντας τα γινόμενα που προκύπτουν κινούμενοι από κάτω αριστερά προς τα άνω δεξιά (σχ. 2.1α).

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{array}$$

Σχ. 2.1α.
Κανόνας του Sarrus.

Είναι φανερό ότι αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε η ορίζουσα του A είναι ίση με μηδέν (αυτό προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του κανόνα του Sarrus ή αν αναπτύξομε την $|A|$ ως προς τα στοιχεία της γραμμής ή στήλης που έχει τα μηδενικά).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.1.

Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}2-\lambda & 2 & 3\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{bmatrix}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι για λ=2 η ορίζουσα του πίνακα Α είναι ίση με μηδέν.
β) Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα Α συναρτήσει του λ.

Λύση.

α) Για $\lambda=2$ ο πίνακας γίνεται $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$ και αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης έχομε

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-[2\cdot(-1)-3\cdot(-2)]+2[2\cdot 1-0\cdot 3]=-4+4=0.$$

β) Θεωρώντας το ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχομε

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 3\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)[(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)-(-2)\cdot 1]-2[1\cdot(1-\lambda)-1\cdot 2]+3[(1\cdot(-2)-2\cdot(1-\lambda)]=$$

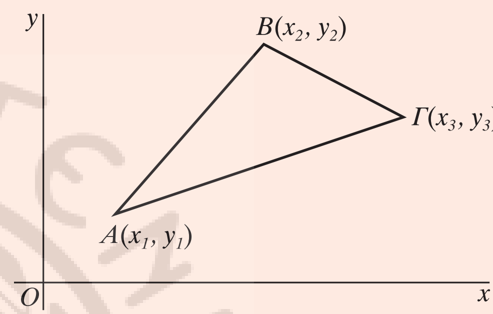
$$=-\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-8.$$

Είναι φανερό ότι για $\lambda=2$, η τελευταία ποσότητα μηδενίζεται, όπως αναμένεται και από το αποτέλεσμα που πήραμε στο πρώτο ερώτημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.2.

Αν A, B, Γ είναι τρία σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) αντίστοιχα, τότε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 2.1β) δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_3\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}.$$



Σχ. 2.1β.

Λύση.

Αν φέρομε από τα σημεία A, B, Γ τις κάθετες $A\Delta$, BE, ΓZ προς τον άξονα Ox, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1γ, το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ μπορεί να εκφραστεί μέσω των εμβαδών των τραπεζίων $ABE\Delta$, $B\Gamma ZE$ και $A\Gamma Z\Delta$ ως εξής

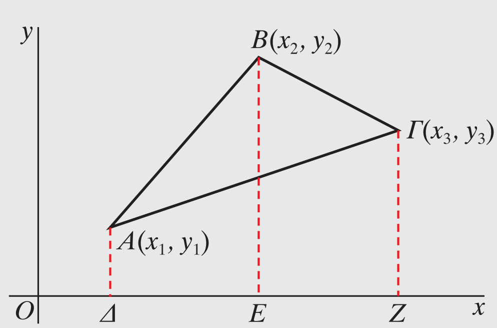
$$(AB\Gamma) = (ABE\Delta) + (B\Gamma ZE) - (A\Gamma Z\Delta).$$

Όμως, το εμβαδόν του τραπεζίου $ABE\Delta$ (σχ. 2.1δ) υπολογίζεται από τον τύπο $(ABE\Delta)=\dfrac{A\Delta+BE}{2}\cdot\Delta E$ και αντικαθιστώντας τα $A\Delta=y_1, BE=y_2, \Delta E=x_2-x_1$ βρίσκομε:

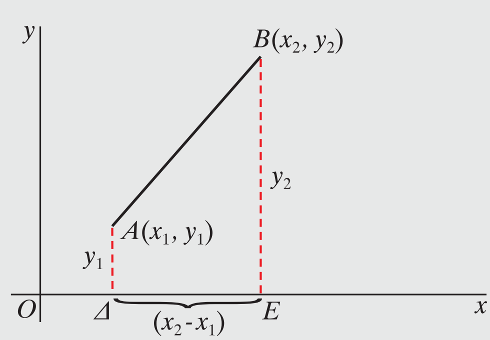
$$(ABE\Delta)=\frac{1}{2}\cdot(y_1+y_2)\cdot(x_2-x_1).$$

Όμοια προκύπτουν οι επόμενοι δύο τύποι

$$(B\Gamma ZE)=\frac{BE+\Gamma Z}{2}\cdot ZE=\frac{1}{2}\cdot(y_2+y_3)\cdot(x_3-x_2),\quad (A\Gamma Z\Delta)=\frac{A\Delta+\Gamma Z}{2}\cdot Z\Delta=\frac{1}{2}\cdot(y_1+y_3)\cdot(x_3-x_1).$$



Σχ. 2.1γ.



Σχ. 2.1δ.

Επομένως,

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot(y_1+y_2)\cdot(x_2-x_1)+\frac{1}{2}\cdot(y_2+y_3)\cdot(x_3-x_2)-\frac{1}{2}\cdot(y_1+y_3)\cdot(x_3-x_1)$$

το οποίο μετά την εκτέλεση των πολλαπλασιασμών και τις απλοποιήσεις δίνει

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot(y_1x_2-y_1x_3+y_2x_3-y_2x_1-y_3x_2+y_3x_1)=\frac{1}{2}\cdot\left[y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\right].$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_3\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}$ ως προς τα στοιχεία της $3^{ης}$ στήλης έχομε

$$\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_3\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}=y_3\cdot\begin{vmatrix}1 & x_2\\ 1 & x_1\end{vmatrix}-y_2\cdot\begin{vmatrix}1 & x_3\\ 1 & x_1\end{vmatrix}+y_1\cdot\begin{vmatrix}1 & x_3\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=y_3(x_1-x_2)-y_2(x_1-x_3)+y_1(x_2-x_3)$$

και επομένως μπορούμε να γράψομε

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_3 & y_3\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}.$$

Σημειώνεται ότι, αν τα σημεία A, B, Γ βρίσκονται σε διαφορετική σειρά απ' ό,τι στο σχήμα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του προηγούμενου τύπου (π.χ. κοιτάζοντάς τα από αριστερά προς τα δεξιά να είναι πρώτα το B, μετά το A και τελευταίο το Γ κ.λ.π.), τότε, για να βρούμε το εμβαδόν θα πρέπει να τοποθετήσομε τις συντεταγμένες τους έτσι, ώστε στην πρώτη γραμμή να βρίσκεται το σημείο που είναι πιο δεξιά και στην τρίτη το σημείο που βρίσκεται πιο αριστερά. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να γράψομε τα σημεία με οποιαδήποτε σειρά και να χρησιμοποιήσομε την ***απόλυτη τιμή*** της ορίζουσας. Για παράδειγμα το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ που ορίζεται από τα σημεία $A(4,5)$, $B(5,2)$ και $\Gamma(1,2)$ βρίσκεται αν αρχικά υπολογίσομε την τιμή της ορίζουσας και χρησιμοποιήσομε στη συνέχεια τον τύπο

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|-12|=6\,.$$

Ασκήσεις.

2.1.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων (2.1.8).

α) $\begin{matrix}2x+3y=5\\ 3x+2y=5\end{matrix}$ β) $\begin{matrix}2x+3y=5\\ 3x+6y=3\end{matrix}$ γ) $\begin{matrix}2x-5y=1\\ -4x+10y=-2\end{matrix}$

2.1.2. Να υπολογίσετε τις επόμενες ορίζουσες αναπτύσσοντας ως προς κατάλληλη γραμμή ή στήλη έτσι, ώστε να χρειαστεί να υπολογίσετε μόνο μία ορίζουσα $2^{ης}$ τάξεως.

α) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix}9 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

δ) $\begin{vmatrix} \text{ημ}\theta & 0 & -\text{συν}\theta \\ -\text{συν}\theta & 1 & \text{ημ}\theta \\ \text{συν}\theta & 0 & \text{ημ}\theta \end{vmatrix}$ ε) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \beta \end{vmatrix}$ στ) $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \beta & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.1.3. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & x \\ x-1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$ β) $\begin{vmatrix} x-2 & x+1 & 1 \\ x-1 & x+1 & 2 \\ x-3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

γ) $\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 5x & 2x+3 \end{vmatrix} = 0$ δ) $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 \\ -1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

2.1.4. Μία πετρελαιοκηλίδα που εμφανίστηκε στην επιφάνεια της θάλασσας μετά από κάποιο ναυάγιο, περιορίστηκε τελικώς μεταξύ τριών σημείων A, B, Γ με συντεταγμένες (1, 5), (2, 3), (–2, 1) αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.1.2, να υπολογίσετε το εμβαδόν της πετρελαιοκηλίδας.

2.1.5. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ a^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a).$$

2.1.6. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει η ισότητα

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

2.1.7. Λαμβάνοντας αναπτύγματα ως προς την πρώτη γραμμή, να διαπιστώσετε ότι οι παρακάτω ορίζουσες είναι ίσες με 0.

$$\begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ a+x & \beta+y & \gamma+z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ a+x & \beta+y & \gamma+z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

2.1.8. Λαμβάνοντας αναπτύγματα ως προς την πρώτη γραμμή, να διαπιστώσετε ότι οι παρακάτω ορίζουσες είναι αντίθετες.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ k & m & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ k & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

2.1.9. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για $\lambda=-2$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με μηδέν.
β) Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα A συναρτήσει του λ.
γ) Να βρεθούν όλα τα λ για τα οποία ισχύει

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-1.$$

2.2 Ανάπτυγμα ορίζουσας ν τάξεως.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, αν

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 3, η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, για παράδειγμα

$$|A|=-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},$$

$$|A|= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},$$

$$|A|= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

Παρατηρήσαμε επίσης ότι, σε καθένα από τα αναπτύγματα της $|A|$, κάθε στοιχείο α_{ij} της αντίστοιχης γραμμής ή στήλης πολλαπλασιάζεται με την ορίζουσα 2ης τάξεως του πίνακα M_{ij} που προκύπτει από τον A, αν παραλείψομε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}. Η ορίζουσα αυτή ονομάζεται ***ελλάσων ορίζουσα*** του στοιχείου α_{ij} και θα συμβολίζεται με $m_{ij}=|M_{ij}|$.

Τέλος, κάθε όρος ενός αναπτύγματος της $|A|$ έχει πρόσημο + ή –, πιο συγκεκριμένα το πρόσημο του $(-1)^{i+j}$. Το γινόμενο $(-1)^{i+j}m_{ij}$ ονομάζεται ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** του στοιχείου α_{ij} και θα συμβολίζεται με c_{ij}, δηλαδή

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς, τα παραπάνω αναπτύγματα γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned}|A|&=a_{21}c_{21}+a_{22}c_{22}+a_{23}c_{23},\\ |A|&=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{13}c_{13},\\ |A|&=a_{11}c_{11}+a_{21}c_{21}+a_{31}c_{31}.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος, με εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων και σύγκριση των τελικών εκφράσεων ότι η $|A|$ μπορεί να γραφεί στις ισοδύναμες μορφές

$$|A| = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33}\,,$$

$$|A| = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32}\,, \tag{2.2.2}$$

$$|A| = a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33}\,.$$

Οι παραπάνω έξι εκφράσεις μας δίνουν έναν τρόπο για να υπολογίζομε μία ορίζουσα $3^{ης}$ τάξεως (ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα) με τη βοήθεια της ορίζουσας $2^{ης}$ τάξεως.

Την ίδια τεχνική θα ακολουθήσομε στη συνέχεια, προκειμένου να φτάσομε στην ορίζουσα ν τάξεως, δηλαδή την ορίζουσα ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_\nu$. Πιο συγκεκριμένα θα ορίσομε την ορίζουσα ν τάξεως $\nu \geq 3$ με τη βοήθεια της ορίζουσας τάξεως $\nu - 1$ (μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται ***επαγωγική διαδιακασία***).

Έστω λοιπόν ο τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_\nu$. Ονομάζομε ορίζουσα του πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $|A|$ ή

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

τον αριθμό $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1\nu}c_{1\nu}$ όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ και M_{ij} είναι ο τετραγωνικός πίνακας τάξεως $\nu - 1$ που προκύπτει από τον A, αν παραλείψομε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}.

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξεως, η ορίζουσα $m_{ij} = |M_{ij}|$ θα ονομάζεται ***ελάσσων ορίζουσα*** του στοιχείου α_{ij} και το γινόμενο $c_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$ θα ονομάζεται ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** του στοιχείου α_{ij}. Η παράσταση $\alpha_{11}c_{11} + \alpha_{12}c_{12} + \cdots + \alpha_{1\nu}c_{1\nu}$, μέσω της οποίας ορίσαμε την $|A|$, ονομάζεται ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής.

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξεως, για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $\nu \times \nu$ πίνακα δεν έχει σημασία ποια γραμμή ή ποια στήλη θα χρησιμοποιηθεί για το ανάπτυγμά της μέσω οριζουσών τάξεως $\nu - 1$. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του A δίνεται από τους τύπους

$$|A| = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{i\nu}c_{i\nu}\,, \quad |A| = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{\nu j}c_{\nu j}$$

όπου i και j είναι οποιοσδήποτε ακέραιος από τους $1,2,\ldots,\nu$. Η πρώτη παράσταση ονομάζεται ***ανάπτυγμα της ορίζουσας*** $|A|$ ως ***προς τα στοιχεία της i γραμμής***, ενώ η δεύτερη, ***ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της j στήλης***.

Υπενθυμίζομε ότι, για λόγους ταχύτητας στις πράξεις, καλό θα είναι το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας να βασίζεται στη γραμμή ή τη στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

Επίσης είναι φανερό από το γενικό ορισμό που δόθηκε παραπάνω ότι, αν τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή μιας οποιασδήποτε στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδενικά, τότε $|A| = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.1.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ x-a & 0 & a-x & 0 \\ a & 0 & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

όπου α είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του αριστερού μέλους κατά τα στοιχεία της 2ης γραμμής (η οποία έχει δυο μηδενικά στοιχεία) θα έχομε

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ x-a & 0 & a-x & 0 \\ a & 0 & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(x-a)M_{21} + (-1)^{2+3}(a-x)M_{23} = (x-a)(-M_{21} + M_{23})$$

όπου
$$M_{21} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & x \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την M_{21} κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης και την M_{23} κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης, παίρνομε αντίστοιχα

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a \begin{vmatrix} a & a \\ x & a \end{vmatrix} = a(x^2 - a^2) + a(a^2 - ax) = ax(x-a),$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a \begin{vmatrix} a & a \\ a & x \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a(ax - a^2) = -a^2(x-a).$$

Αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο βρίσκομε

$$\begin{vmatrix} a & a & x & a \\ x-a & 0 & a-x & 0 \\ a & x & 0 & a \\ a & a & 0 & x \end{vmatrix} = (x-a)[-ax(x-a) - a^2(x-a)] = -a(x-a)^2(x+a)$$

οπότε η εξίσωση πού δόθηκε, γίνεται τελικά $-a(x-a)^2(x+a) \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.2.

Αν Α είναι ο κάτω τριγωνικός $\nu\times\nu$ πίνακας, $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}$ ή άνω τριγωνικός $\nu\times\nu$ πίνακας, $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}$ τότε η ορίζουσά του θα δίνεται από τον τύπο $|A|=\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{\nu\nu}$.

Επομένως, η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

Λύση.

Θα παραθέσομε την απόδειξη για την περίπτωση ενός 3×3 κάτω τριγωνικού πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0\end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής (βλ. 2.2.1) παίρνομε:

$$|A|=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & 0\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}\alpha_{21} & 0\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$$

οπότε

$$|A|=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & 0\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-0\cdot\alpha_{32})=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{32}.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η διαδικασία αυτή γενικεύεται για οποιονδήποτε $\nu\times\nu$ κάτω τριγωνικό πίνακα, καθώς επίσης και για άνω τριγωνικούς πίνακες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.3.

Αν ένας τετραγωνικός $\nu\times\nu$ πίνακας έχει τη μορφή:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21}+\alpha'_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{\nu1}+\alpha'_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}$$

τότε η ορίζουσά του μπορεί να γραφεί ως άθροισμα οριζουσών ως εξής:

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha'_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha'_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{vmatrix}.$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη.

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης θα έχομε

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}+\alpha'_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1}+\alpha'_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}=(a_{11}+a'_{11})\cdot c_{11}+(a_{21}+a'_{21})\cdot c_{21}+\cdots+(a_{\nu1}+a'_{\nu1})\cdot c_{\nu1} \text{ όπου}$$

$c_{i1}=(-1)^{i+1}m_{i1}=(-1)^{i+1}|M_{i1}|$ είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{i1}, $i = 1, 2, \ldots \nu$.

Επομένως

$$|A|=(a_{11}\cdot c_{11}+a_{21}\cdot c_{21}+\cdots+a_{\nu1}\cdot c_{\nu1})+(a'_{11}\cdot c_{11}+a'_{21}\cdot c_{21}+\cdots+a'_{\nu1}\cdot c_{\nu1})$$

και η απόδειξη συμπληρώνεται παρατηρώντας ότι ο πρώτος όρος είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης, ενώ ο δεύτερος είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης και πάλι.

Ασκήσεις.

2.2.1. Να υπολογισθούν οι τιμές των οριζουσών

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \beta & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 10 \\ 0 & \beta & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & a & 4 \\ 8 & 0 & \gamma & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 6 & \beta & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

2.2.2. Να υπολογισθούν οι τιμές των οριζουσών

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 0 \\ 111 & 22 & 3 & 0 \\ 1111 & 222 & 33 & 4 \end{vmatrix}.$$

2.2.3. Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+1 & x-2 & 0 & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x-3 & 0 & 0 \\ x^2-1 & x & x^2+1 & x-4 & 0 \\ x^2-4 & x^2-1 & x & x^2+1 & x-5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+1 & x+2 & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x+3 & 0 \\ x^2-1 & x & x^2+1 & x+4 \end{vmatrix} = 0 .$$

2.2.4. Να υπολογισθούν οι τιμές των οριζουσών

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 111 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 111 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 111 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2.5. Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

με χρήση του αποτελέσματος του παραδείγματος 2.2.3, χωρίς να υπολογιστεί η ορίζουσα των πινάκων που εμφανίζονται.

2.2.6. Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

με χρήση του αποτελέσματος του παραδείγματος 2.2.3, χωρίς να υπολογιστεί η ορίζουσα των πινάκων που εμφανίζονται.

2.2.7. Χρησιμοποιώντας τεχνική παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε στην απόδειξη του παραδείγματος 2.2.2 να υπολογίσετε την ορίζουσα πινάκων της μορφής.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}.$$

2.3 Ιδιότητες οριζουσών.

Από όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός πίνακα τάξεως ν πραγματοποιείται με διαδοχικό υποβιβασμό σε ορίζουσες υποπινάκων, οι οποίες, κάθε φορά, είναι κατά ένα μέγεθος μικρότερες από την ορίζουσα του προηγούμενου πίνακα. Έτσι καταλήγομε να έχομε ορίζουσες υποπινάκων τάξεως 2, οπότε χρησιμοποιούμε για κάθε μία από αυτές το γνωστό μας τύπο υπολογισμού (2.1.6). Η προηγούμενη διαδικασία είναι ιδιαίτερα κοπιαστική, γι' αυτό στην πράξη εφαρμόζομε συνήθως κατάλληλες ιδιότητες της ορίζουσας πινάκων, καθώς και έτοιμους τύπους της ορίζουσας για συγκεκριμένες κατηγορίες πινάκων, ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί.

Όλα τα αποτελέσματα που ακολουθούν αναφέρονται σε τετραγωνικούς πίνακες, έστω και αν δεν γίνεται ρητή αναφορά σε αυτό.

Στο παράδειγμα 2.2.2 διαπιστώσαμε ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

D$_1$ Αν ένας πίνακας A είναι τριγωνικός άνω ή κάτω, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Για παράδειγμα,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 2 & e^x & \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ 0 & 0 & 3 & x^2-1 & \dfrac{1}{x^4+2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & xe^{-x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$$

Δύο άμεσες συνέπειες της ιδιότητας D_1 είναι οι επόμενες:

D$_2$ Αν ένας πίνακας A είναι διαγώνιος, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{\nu\nu}.$$

D$_3$ Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα τάξεως ν είναι ίση με 1, δηλαδή $|I_\nu| = 1$.

Μία ιδιότητα, η οποία προκύπτει εύκολα από τον τρόπο υπολογισμού οριζουσών μέσω αναπτύγματος κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή οποιασδήποτε στήλης είναι η εξής:

D$_4$ Αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

Δίνομε στη συνέχεια, χωρίς απόδειξη, δύο ακόμη χρήσιμες ιδιότητες των οριζουσών.

D$_5$ Αν δύο γραμμές (ή δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

D$_6$ Αν δύο γραμμές (ή δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ανάλογες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

Στις επόμενες τρεις ιδιότητες περιγράφεται το αποτέλεσμα που έχει στην τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα η εκτέλεση ορισμένων πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών του πίνακα (η απόδειξη παραλείπεται).

D$_7$ Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με εναλλαγή της θέσεως δύο γραμμών (ή δύο στηλών) του πίνακα A, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B|=-|A|$.

D$_8$ Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με πολλαπλασιασμό των στοιχείων μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A επί ένα (μη μηδενικό) αριθμό λ, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B|=\lambda|A|$.

D$_9$ Αν B είναι ο πίνακας που παίρνομε με αντικατάσταση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A με εκείνη που προκύπτει με πρόσθεση σ' αυτήν μιας άλλης γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A πολλαπλασιασμένης επί ένα (μη μηδενικό) αριθμό, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B|=|A|$.

Δίνομε στη συνέχεια, ορισμένους τύπους που αφορούν στην ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα, την ορίζουσα του γινομένου ενός πίνακα μ' έναν πραγματικό αριθμό και του γινομένου δύο πινάκων.

D$_{10}$ Η ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του A, δηλαδή $|A^T|=|A|$.

D$_{11}$ Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων ίδιου τύπου είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων, δηλαδή $|AB|=|A|\cdot|B|$.
Ειδικά για $B=A$ παίρνομε $|A^2|=|A|^2$ τύπος, ο οποίος ισχύει και στη γενικότερη μορφή

$$|A^k|=|A|^k, \quad k=2,3,\ldots$$

D$_{12}$ Για την ορίζουσα του γινομένου ενός τετραγωνικού πίνακα τάξεως ν με έναν πραγματικό αριθμό, ισχύει ο τύπος $|\lambda A|=\lambda^\nu|A|$.

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων **D**$_{10}$, **D**$_{11}$, **D**$_{12}$ γίνονται εύκολα στην περίπτωση τετραγωνικών πινάκων τάξεως $\nu=2$. Για παράδειγμα, αν

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & \omega\end{bmatrix} \text{ θα έχομε } |A|=\alpha\delta-\beta\gamma, |B|=x\omega-yz \text{ και}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}, \qquad \lambda A=\begin{bmatrix}\lambda\alpha & \lambda\beta\\ \lambda\gamma & \lambda\delta\end{bmatrix} \quad AB=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x+\beta z & \alpha y+\beta\omega\\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta\omega\end{bmatrix}.$$

Επομένως

α) $|A^T|=\alpha\delta-\gamma\beta=\alpha\delta-\beta\gamma=|A|$,

β) $|\lambda A|=(\lambda\alpha)(\lambda\delta)-(\lambda\beta)(\lambda\gamma)=\lambda^2(\alpha\delta-\beta\gamma)=\lambda^2|A|$,

γ) $|AB|=(\alpha x+\beta z)(\gamma y+\delta\omega)-(\alpha y+\beta\omega)(\gamma x+\delta z)=\alpha x\gamma y+\alpha x\delta\omega+\beta z\gamma y+\beta z\delta\omega-$

$-\alpha y\gamma x-\alpha y\delta z-\beta\omega\gamma x-\beta\omega\delta z=(\alpha x\delta\omega-\beta\gamma\omega x)-(\alpha\delta yz-\beta z\gamma y)$

$=(\alpha\delta-\beta\gamma)\omega x-(\alpha\delta-\beta\gamma)yz=(\alpha\delta-\beta\gamma)(x\omega-yz)=|A||B|$.

Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, δεν θα ασχοληθούμε με τις αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών στη γενική περίπτωση. Τέλος δίνομε χωρίς απόδειξη τους επόμενους τύπους που αφορούν σε δύο ειδικές μορφές σύνθετων πινάκων D_{13}.

D_{13} Έστω ένας σύνθετος πίνακας M, ο οποίος είναι γραμμένος στη μορφή

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{bmatrix}$$

όπου A είναι ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας τάξεως μ και Δ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν. Τότε $|M| = |A| \cdot |\Delta - \Gamma A^{-1} B|$.

Στην ειδική περίπτωση $\Gamma = \mathbf{O}_{\nu\times\mu}$ προκύπτει ότι, αν ένας σύνθετος πίνακας M μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & \Delta \end{bmatrix}$$

τότε $|M| = |A| \cdot |\Delta|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.1.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών, ώστε να φτάσετε στην ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα.

Λύση.

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί (–2) και προσθέτοντας στη δεύτερη παίρνομε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 9 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

η οποία σύμφωνα με την ιδιότητα D_9 θα είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα A, δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 9 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή της τελευταίας ορίζουσας επί (–9) και προσθέτοντας στην τρίτη παίρνομε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -20 & -35 \end{vmatrix}.$$

Αν τέλος πολλαπλασιάσομε τη δεύτερη γραμμή της τελευταίας επί (–10) και την προσθέσομε στην τρίτη θα πάρομε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας που βρήκαμε είναι άνω τριγωνικός, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα D_1 η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 5 = -10\,.$$

Επομένως τελικά $|A| = -10$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.2.

Να αποδειχτεί ότι οι αριθμοί 0,1,2 και 3 είναι ρίζες της εξισώσεως $A(x)=0$ όπου

$$A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 2 \\ x^2-1 & 1 & 3 & 8 \\ x^3-1 & 1 & 7 & 26 \\ x^4-1 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix}.$$

Λύση.

Για $x=0$, $x=1$, $x=2$ και $x=3$, η ορίζουσα λαμβάνει τη μορφή

$$A(0) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 7 & 26 \\ -1 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix},\quad A(1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 26 \\ 0 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix},\quad A(2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 26 \\ 0 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix},\quad A(3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 26 \\ 0 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix}$$

αντίστοιχα. Στην $A(0)$ η πρώτη και η δεύτερη στήλη έχουν στοιχεία ανάλογα [τα στοιχεία της 2ης στήλης προκύπτουν από τα στοιχεία της 1ης στήλης πολλαπλασιάζοντας επί (–1)], οπότε θα ισχύει, με βάση την ιδιότητα D_6 των οριζουσών $A(0)=0$. Επομένως, το 0 είναι ρίζα της εξισώσεως $A(x)=0$.

Τα στοιχεία της πρώτης στήλης της $A(1)$ είναι όλα μηδέν, οπότε θα ισχύει (με βάση την ιδιότητα D_4 των οριζουσών) $A(1)=0$. Επομένως, το 1 είναι ρίζα της εξισώσεως $A(x)=0$. Τέλος, οι ορίζουσες $A(2), A(3)$ έχουν δύο στήλες με ίσα στοιχεία, συνεπώς θα ισχύει (με βάση την ιδιότητα D_5 των οριζουσών) $A(2)=0$ και $A(3)=0$. Επομένως τόσο το 2 όσο και το 3 είναι ρίζες της εξισώσεως $A(x)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.3.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & x \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να καταφύγετε σε ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες).

Λύση.

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη, τρίτη, τέταρτη και πέμπτη στήλη επί 1 και προσθέτοντάς τες στην πρώτη στήλη παίρνομε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{bmatrix}$$

η οποίος σύμφωνα με την ιδιότητα D_9 θα έχει ορίζουσα ίση με την ορίζουσα του πίνακα A, δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα D_8, μπορούμε να γράψομε

$$|A| = \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = (x+20)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & x & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & x & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & x & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την πρώτη γραμμή επί (–1) και προσθέτοντάς την στη δεύτερη, τρίτη, τέταρτη και πέμπτη γραμμή παίρνομε

$$|A| = (x+20)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & x & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & x & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & x & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = (x+20)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας που βρήκαμε είναι άνω τριγωνικός, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα D_1 η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = 1\cdot(x-5)^4 = (x-5)^4.$$

Επομένως τελικά $|A| = (x-5)^4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.4.

Αν A,B είναι δύο σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), αντίστοιχα, τότε η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A, B μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3.1)$$

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής παίρνομε

$$1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

η οποία γράφεται στη μορφή $\alpha x + \beta y = \gamma$ όπου $\alpha = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}$ $\beta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$ $\gamma = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Επομένως, η εξίσωση (2.3.1) αποτελεί πράγματι εξίσωση ευθείας. Επί πλέον, η (2.3.1) ικανοποιείται για $x=x_1$, $y=y_1$ και για $x=x_2$, $y=y_2$, αφού

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

(λόγω της ιδιότητας $\mathbf{D}_5$). Επομένως, η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A, B μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (1, 2) και (2, 1) είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y = 3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.5.

Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & x & p & 1 \\ 1+\beta & y & q & 1 \\ 1+\gamma & w & r & 1 \\ 1+\delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

χωρίς να υπολογιστεί η ορίζουσα των πινάκων που εμφανίζονται.

Λύση.

Με βάση το αποτέλεσμα που αποδείχτηκε στο παράδειγμα 2.2.3, μπορούμε να γράψομε

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & x & p & 1 \\ 1+\beta & y & q & 1 \\ 1+\gamma & w & r & 1 \\ 1+\delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & p & 1 \\ 1 & y & q & 1 \\ 1 & w & r & 1 \\ 1 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

και αφού η πρώτη ορίζουσα είναι ίση με μηδέν (έχει δύο ίσες στήλες), θα έχομε τελικά

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & x & p & 1 \\ 1+\beta & y & q & 1 \\ 1+\gamma & w & r & 1 \\ 1+\delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}.$$

Ασκήσεις.

2.3.1. Ένα πλοίο Π_1 κινείται σε ευθεία γραμμή από το λιμάνι A με συντεταγμένες (0, 0) προς το λιμάνι B με συντεταγμένες (5, 4). Ένα δεύτερο πλοίο Π_2 κινείται επίσης σε ευθεία γραμμή από το λιμάνι Γ με συντεταγμένες (3, 1) προς το λιμάνι Δ με συντεταγμένες (4, 5).

α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.3.4, να γράψετε τις εξισώσεις των τροχιών των δύο πλοίων στη μορφή

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1,\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2$$

β) Χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.1.8), να εξετάσετε αν οι τροχιές των δύο πλοίων τέμνονται σε κάποιο σημείο και αν ναι να το βρείτε.

2.3.2. Να διαπιστώσετε ότι οι ορίζουσες που δόθηκαν στην άσκηση 2.2.2 μπορούν να προκύψουν η μία από την άλλη με κατάλληλη εφαρμογή της ιδιότητας D_7 (περισσότερες από μία φορές).

2.3.3. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες D_{12} και D_5 των οριζουσών (ή εναλλακτικά, την ιδιότητα D_6) να αποδείξετε ότι οι ορίζουσες των επομένων πινάκων είναι ίσες με μηδέν.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.3.4. Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\begin{vmatrix} x-\alpha-\beta & 2x & 2x \\ 2\alpha & \alpha-\beta-x & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta & \beta-x-\alpha \end{vmatrix}=0$ έχει ως ρίζα την $x = -(\alpha + \beta)$.

2.3.5. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να υπολογίσετε τις τιμές τους με ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες) να διαπιστώσετε ότι οι επόμενες τέσσερεις ορίζουσες μηδενίζονται για $\lambda = \pm 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.3.6. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1, 2 και 3 είναι ρίζες της εξισώσεως $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ (x-1)^2 & 1 & 4 \\ (x-1)^3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$.

2.3.7. Αν A, B, Γ είναι τρεις τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξεως να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.

$$A^4 B^3 \Gamma^T,\ (A^T)^3 (B^4)^T \Gamma^T,\ A^3 \Gamma B^4, (3A) B^2 (2\Gamma^T), 6B^2 \Gamma B^T, \Gamma^T B^3 A^4, B^3 \Gamma A^4, B^2 (6\Gamma) A^T$$

2.3.8. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B, Γ ίδιας τάξεως γνωρίζομε ότι $|A| = 1$, $|B| = 2$, $|\Gamma| = 3$, να υπολογίσετε την ορίζουσα των επομένων πινάκων

$$AB\Gamma,\ A^T B\Gamma, A^3 B^2 \Gamma,\ 3AB^2\Gamma^T,\ 3B^2 \Gamma A.$$

2.3.9. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A αν γνωρίζομε ότι ισχύει:

α) $A^T A = I_\nu$ β) $A^T A^2 = I_\nu$ γ) $A^3 = I_\nu$

2.3.10. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να καταφύγετε σε ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες).

2.3.11. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να βρείτε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & 16 & 1 \end{vmatrix}$.

2.3.12. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a^3 & 8a^3 & 27a^3 & 64a^3 \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 & 16a^2 \\ a & 2a & 3a & 4a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12a^6.$$

2.3.13. Να υπολογίσετε την ορίζουσα από τους επόμενους πίνακες, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών, ώστε να φτάσετε στην ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.14. Έστω τρία σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 2.3.4, να αποδείξετε ότι τα σημεία είναι συνευθειακά αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3.15. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & 1+\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & 1+\gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 1+\delta \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $1+\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 4, γνωρίζομε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A.

2.3.16. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz.$$

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 4, γνωρίζομε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τητ τιμή της ορίζουσας του πίνακα A.

2.3.17. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα D_{13} των οριζουσών, να υπολογίσετε την ορίζουσα των επομένων πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2.4 Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα με χρήση οριζουσών.

Ας θεωρήσομε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξεως 3 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ και ας συμβολίσομε με

$m_{ij} = |M_{ij}|$ την ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου a_{ij} και με $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} για $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Έστω ακόμη C ο πίνακας,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Προφανώς ο ανάστροφος πίνακας C^T θα έχει στη θέση (i, j) το στοιχείο $c_{ji} = (-1)^{i+j} m_{ji} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, δηλαδή

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.4.1}$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται ***προσαρτημένος πίνακας*** του A και όπως θα δούμε στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα του A (όταν υπάρχει).

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 3 ισχύει $A \cdot C^T = |A| \cdot I_3$.

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες A και C^T θα πάρομε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξεως 3, έστω $\Gamma = [\gamma_{ij}]$, οπότε θα έχομε:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} = A\,C^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του γινομένου δύο πινάκων, τα στοιχεία $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$ θα δίνονται από τους τύπους (2.2.1), (2.2.2)

$$\gamma_{11} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = |A|, \;\; \gamma_{22} = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} = |A|,$$
$$\gamma_{33} = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} = |A|.$$

Το στοιχείο γ_{12} είναι ίσο με $\gamma_{12} = a_{11}c_{21} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23}$ και αντικαθιστώντας τα

$$c_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|=-\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix},\ c_{22}=(-1)^{2+2}|M_{22}|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix},\ c_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=-\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix} \quad (2.4.2)$$

παίρνομε $\gamma_{12}=-\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$,

Η τελευταία έκφραση όμως αποτελεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα $\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ ως προς τα στοιχεία της $2^{ης}$ γραμμής, οπότε $\gamma_{12}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$

και δεδομένου ότι στην τελευταία ορίζουσα οι δύο πρώτες γραμμές είναι ίσες, η ορίζουσα του πίνακα θα είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $\gamma_{12} = 0$.

Με παρόμοια διαδικασία διαπιστώνομε ότι και όλα τα άλλα στοιχεία του πίνακα Γ που βρίσκονται εκτός της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με μηδέν και τελικά ο πίνακας Γ λαμβάνει τη μορφή

$$\Gamma=\begin{bmatrix}|A| & 0 & 0\\ 0 & |A| & 0\\ 0 & 0 & |A|\end{bmatrix}=|A|\cdot I_3\cdot$$

Επομένως για κάθε τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 3 ισχύει $A \cdot C^T = |A| \cdot I_3$.

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για οποιοδήποτε τετραγωνικό πίνακα A τάξεως ν και μας οδηγεί στην επόμενη πολύ χρήσιμη πρόταση.

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξεως ν, $C = [c_{ij}]_{\nu\times\nu}$, όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} για $i = 1, 2,..., \nu$ και $j = 1, 2,..., \nu$ και C^T ο ανάστροφος του πίνακα C, ο οποίος ονομάζεται ***προσαρτημένος πίνακας*** του A. Τότε:

α) Ισχύει ότι $A \cdot C^T = |A| \cdot I_\nu$.

β) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot C^T \quad (2.4.3)$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού (β) αρκεί να παρατηρήσομε ότι:

α) Αν ισχύει $|A| \neq 0$, η σχέση $A \cdot C^T = |A| \cdot I_\nu$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $A\cdot(\frac{1}{|A|}C^T)=I_\nu$, η οποία δείχνει ότι ο πίνακας $\frac{1}{|A|}C^T$ είναι ο αντίστροφος του A.

β) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, θα υπάρχει ένας πίνακας B για τον οποίο ισχύει $AB = I_\nu$, οπότε θα έχομε $|AB| = |I_\nu|$ ή ακόμη, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες D_{11} και D_3 των οριζουσών,

$$|A|\cdot|B| = 1.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι $|A| \neq 0$ και μπορούμε να ξαναχρησιμοποιήσομε τον τύπο $A \cdot C^T = |A| \cdot I_\nu$ για να διαπιστώσομε ότι ο αντίστροφος του A δίνεται από την έκφραση (2.4.3).

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες D_{11} και D_3 μπορούμε να γράψομε ότι: $|A|\cdot|A^{-1}| = |A A^{-1}| = |I_\nu| = 1$. Επομένως ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε η ορίζουσα του αντιστρόφου του θα δίνεται από τον τύπο

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \tag{2.4.4}$$

Ας εφαρμόσομε στη συνέχεια τους τύπους που βρήκαμε για τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα, στην περίπτωση που έχομε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξεως $\nu=2$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το (β), ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Στην περίπτωση αυτή, ο αντίστροφος του A θα δίνεται από τον τύπο (2.4.3) και είναι εύκολο να διαπιστώσομε ότι

$$C = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Επομένως θα έχομε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Έτσι καταλήγουμε και πάλι στον τύπο (1.4.2), ο οποίος αποδείχτηκε στο κεφάλαιο 1 με εντελώς διαφορετικό τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.1.

Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση.

Υπολογίζομε αρχικά την ορίζουσα του A, η οποία είναι ίση με

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(12-1) - 1(6-0) = 27 \neq 0.$$

Για τις ελάσσονες ορίζουσες $m_{ij} = |M_{ij}|$ των στοιχείων a_{ij} και τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

όπου $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$ βρίσκομε

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11, \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(6-0) = -6, \quad c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-(3-0)=-3,\ c_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=9-0=9,\ c_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(3-0)=-3,$$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1-0=1,\ c_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-0)=-3,\ c_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12-2=10,$$

Επομένως

$$C=\begin{bmatrix}11 & -6 & 2\\ -3 & 9 & -3\\ 1 & -3 & 10\end{bmatrix},\qquad C^T=\begin{bmatrix}11 & -6 & 2\\ -3 & 9 & -3\\ 1 & -3 & 10\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}11 & -3 & 1\\ -6 & 9 & -3\\ 2 & -3 & 10\end{bmatrix}.$$

Τέλος ο αντίστροφος του A, σύμφωνα με τον τύπο (2.4.3) θα είναι ο

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}C^T=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}11 & -3 & 1\\ -6 & 9 & -3\\ 2 & -3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11/27 & -3/27 & 1/27\\ -6/27 & 9/27 & -3/27\\ 2/27 & -3/27 & 10/27\end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.2.

Να βρεθεί ο αντίστροφος ενός διαγώνιου πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix},$$

τάξεως 3, (όταν αυτός υπάρχει).

Λύση.

Σύμφωνα με την ιδιότητα D_2 των οριζουσών, η ορίζουσα του πίνακα A θα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή $|A| = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33}$.

Αν κάποιος από τους αριθμούς α_{11}, α_{22}, α_{33} είναι ίσος με μηδέν, θα έχομε $|A| = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33} = 0$, οπότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Αν $\alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33} \neq 0$, (δηλ. αν και οι τρεις αριθμοί α_{11}, α_{22}, α_{33} είναι διαφορετικοί από το μηδέν) τότε $|A| = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33} \neq 0$ και μπορούμε να υπολογίσομε τον αντίστροφο του πίνακα A με χρήση του τύπου (2.4.3).

Οι ελάσσονες ορίζουσες που αντιστοιχούν στα διαγώνια στοιχεία α_{11}, α_{22}, α_{33} είναι αντίστοιχα

$$m_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & 0\\ 0 & a_{33}\end{vmatrix},\qquad m_{22}=\begin{vmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{33}\end{vmatrix},\qquad m_{33}=\begin{vmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{vmatrix}$$

και χρησιμοποιώντας και πάλι την ιδιότητα D_2 των οριζουσών βρίσκομε

$$m_{11}=a_{22}a_{33},\qquad m_{22}=a_{11}a_{33},\qquad m_{33}=a_{11}a_{22}.$$

Οι ελάσσονες ορίζουσες που αντιστοιχούν στα εκτός διαγωνίου στοιχεία είναι όλες ίσες με μηδέν (έχουν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ίσα με μηδέν), οπότε ο πίνακας $C=[c_{ij}]$ είναι ο

$$C=\begin{bmatrix}a_{22}a_{33} & 0 & 0\\ 0 & a_{11}a_{33} & 0\\ 0 & 0 & a_{11}a_{22}\end{bmatrix}.$$

Επομένως, ο αντίστροφος του A, σύμφωνα με τον τύπο (2.4.3) θα είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{|A|} \cdot C = \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{bmatrix}.$$

Σημειώνεται ότι το αποτέλεσμα που προέκυψε μπορεί εύκολα να γενικευτεί για διαγώνιους πίνακες οποιασδήποτε τάξεως. Έτσι, αν $\alpha_{11}\, \alpha_{22} \cdots \alpha_{\nu\nu} \neq 0$, ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{\nu\nu} \end{bmatrix}. \tag{2.4.5}$$

Στην ειδική περίπτωση $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \dots = a_{\nu\nu} = 1$ λαμβάνομε τον αντίστροφο του μοναδιαίου πίνακα

$$I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο προφανώς ισχύει $I_\nu^{-1} = I_\nu$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.3.

Αν για τους αντιστρέψιμους τετραγωνικούς πίνακες A, B ίδιου τύπου γνωρίζομε ότι $|A| = 2$, $|B| = 4$, να υπολογιστεί η ορίζουσα των επομένων πινάκων.

$$A^{-1}B,\ AB^{-1}, (A^T B)^{-1} A^{-1}, (A^3)^{-1} B^T A^2 B^{-1}, (A^T B^T)^{-1} AB^2.$$

Λύση.

Εφαρμόζοντας την (2.4.5) και τις ιδιότητες $D_{10,}\, D_{11}$ των οριζουσών (βλ. παράγρ. 2.3), παίρνομε

$$\left|A^{-1}B\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2,$$

$$\left|AB^{-1}\right| = |A| \cdot \left|B^{-1}\right| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\left|(A^T B)^{-1} A^{-1}\right| = \left|(A^T B)^{-1}\right| \cdot \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{\left|A^T B\right|} \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\left|A^T\right| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{16}$$

$$\left|(A^3)^{-1} B^T A^2 B^{-1}\right| = \left|(A^3)^{-1}\right| \cdot \left|B^T\right| \cdot \left|A^2\right| \cdot \left|B^{-1}\right| = \frac{1}{\left|A^3\right|} \cdot |B| \cdot |A|^2 \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|B| \cdot |A|^2}{\left|A^3\right| \cdot |B|} = \frac{1}{2}$$

$$\left|(A^T B^T)^{-1} AB^2\right| = \left|(A^T B')^{-1}\right| \cdot \left|AB^2\right| = \frac{1}{\left|A^T B^T\right|} \cdot |A| \cdot \left|B^2\right| = \frac{|A| \cdot |B|^2}{\left|A^T\right| \cdot \left|B^T\right|} = \frac{|A| \cdot |B|^2}{|A| \cdot |B|} = |B| = 4.$$

Ασκήσεις.

2.4.1. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Στην περίπτωση που είναι, να υπολογίσετε την ορίζουσα του αντίστροφου πίνακα, χωρίς να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.4.2. Να βρείτε τον αντίστροφο των επομένων πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4.3. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B, Γ ίδιας τάξεως γνωρίζομε ότι $|A| = |B| = |\Gamma| = 2$, να υπολογιστεί η ορίζουσα των επομένων πινάκων.

$$A^{-1}B\Gamma^T,\ (A^T B^{-1}\Gamma)^{-1}, A^3 B^T \Gamma^{-1},\ A^{-1}B^{-1}\Gamma^{-1}, B^2\Gamma^{-1}A^{-1}.$$

2.4.4. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως ν, αν γνωρίζομε ότι ισχύει $A^{-1} A^T = A^2$.

2.4.5. Αν A είναι ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας, να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $A^T A^{-1}$.

2.4.6. Να βρεθεί η τιμή του x έτσι, ώστε κανένας από τους επόμενους τρεις πίνακες να μην είναι αντιστρέψιμος.

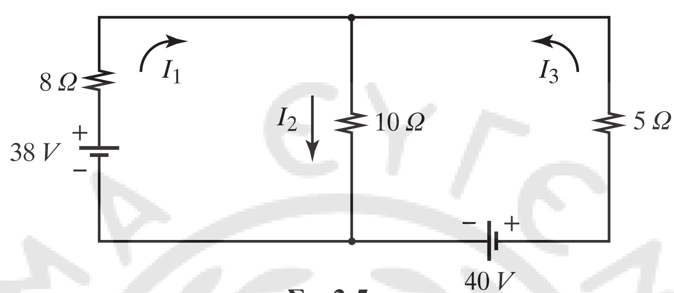
$$\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

2.5 Γραμμικά συστήματα εξισώσεων.

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου 2, πολλά προβλήματα Μηχανικής, Οικονομίας, Ηλεκτρονικής κ.λπ. μπορούν να μετασχηματιστούν σε προβλήματα λύσεως ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Θα αναφέρομε αμέσως τώρα δύο τέτοια προβλήματα και στη συνέχεια θα δούμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε στη λύση τους.

Πρόβλημα I.

Θεωρούμε το ηλεκτρικό δίκτυο του σχήματος 2.5α όπου οι αντιστάσεις εκφράζονται σε Ohm (Ω), η ένταση I ρεύματος σε Amper (A) και η ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής σε volt (V).



Σχ. 2.5α.

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Kirchhoff μπορεί να διαπιστώσει κάποιος εύκολα ότι οι εντάσεις I_1, I_2, I_3, ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 8I_1 + 10I_2 &= 38 \\ 10I_2 + 5I_3 &= 40 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Πρόβλημα II.

Ένα ναυπηγείο χρησιμοποιεί 4 διαφορετικά εξαρτήματα πλοίων A, B, $Γ$, $Δ$. Τα εξαρτήματα αυτά μπορεί να τα προμηθεύεται το ναυπηγείο μέσω τριών συσκευασιών M_1, M_2, M_3, καθεμιά από τις οποίες περιέχει και τα τέσσερα είδη εξαρτημάτων, σε διαφορετικές ποσότητες την καθεμία. Η συσκευασία M_1 περιέχει 20 εξαρτήματα τύπου A, 40 εξαρτήματα τύπου B, 120 εξαρτήματα τύπου $Γ$, και 20 εξαρτήματα τύπου $Δ$. Η συσκευασία M_2 περιέχει 40 εξαρτήματα τύπου A, 60 εξαρτήματα τύπου B, 40 εξαρτήματα τύπου $Γ$ και 60 εξαρτήματα τύπου $Δ$. Τέλος, η συσκευασία M_3 περιέχει 60 εξαρτήματα τύπου A, 60 εξαρτήματα τύπου B, 40 εξαρτήματα τύπου $Γ$, και 40 εξαρτήματα τύπου $Δ$. Αν οι μηνιαίες ανάγκες του ναυπηγείου είναι 400 μονάδες του εξαρτήματος A, 500 μονάδες του εξαρτήματος B, 520 μονάδες του εξαρτήματος $Γ$ και 380 μονάδες του εξαρτήματος $Δ$, εκείνο που θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι να βρεθεί ποια ποσότητα πρέπει να προμηθευτεί από καθεμία από τις συσκευασίες M_1, M_2, M_3, ώστε να ικανοποιήσει τις μηνιαίες ανάγκες του και συγχρόνως να μην χρειαστεί να γίνει αποθήκευση εξαρτημάτων ή συσκευασιών που περίσσεψαν.

Για να δημιουργήσομε ένα μαθηματικό μοντέλο για το Πρόβλημα ΙΙ, ας συμβολίσομε με x_1, x_2, x_3 το πλήθος των συσκευασιών από τα τρία είδη M_1, M_2, M_3 αντίστοιχα που πρέπει να προμηθευτεί το ναυπηγείο, ώστε να καλύψει τις ανάγκες ενός μήνα.

Στις x_1 συσκευασίες είδους M_1 θα υπάρχουν $20x_1$ εξαρτήματα τύπου A, στις x_2 συσκευασίες είδους M_2 θα υπάρχουν $40x_2$ εξαρτήματα τύπου A και στις x_3 συσκευασίες είδους M_3 θα υπάρχουν $60x_3$ εξαρτήματα τύπου A. Επομένως, το συνολικό πλήθος εξαρτημάτων τύπου A θα είναι:

$$20x_1 + 40x_2 + 60x_3$$

και αφού ο στόχος μας ήταν η προμήθεια 400 μονάδων του εξαρτήματος A, θα πρέπει να ισχύει (δεδομένου ότι θέλομε να μην περισσέψουν αχρησιμοποίητα εξαρτήματα)

$$20x_1 + 40x_2 + 60x_3 = 400. \tag{2.5.2}$$

Όμοια, αφού ο στόχος μας να συγκεντρώσομε 500, 520, 380 μονάδες των εξαρτημάτων B, Γ, Δ αντίστοιχα, θα πρέπει να ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned} 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 &= 500 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 &= 520 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 &= 380. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Η εξίσωση (2.5.2), καθώς και καθεμιά από τις εξισώσεις (2.5.3) ονομάζεται γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους.

Γενικά, κάθε εξίσωση της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_\nu x_\nu = \beta$, όπου $a_1, a_2, a_3, ..., a_\nu, \beta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu$, άγνωστοι, ονομάζεται ***γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους.*** Κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_\nu)$, οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση ονομάζεται ***λύση της εξισώσεως.***

Εναλλακτικά θα χρησιμοποιούμε επίσης και την έκφραση:

«η λύση της εξισώσεως είναι η $x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ x_3 = \lambda_3, ..., x_\nu = \lambda_\nu$».

Για παράδειγμα, η διατεταγμένη τριάδα (2, 3, 4) επαληθεύει τη γραμμική εξίσωση $20x_1 + 40x_2 + 60x_3 = 400$, αφού $20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 60 \cdot 4 = 400$.

Επανερχόμενοι στο Πρόβλημα ΙΙ, οι άγνωστοι x_1, x_2, x_3, πέραν της εξισώσεως (2.5.2) θα πρέπει να ικανοποιούν και τις εξισώσεις (2.5.3). Μας ενδιαφέρει λοιπόν τα x_1, x_2, x_3 να ικανοποιούν τις 4 εξισώσεις

$$\begin{aligned} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 &= 400 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 &= 500 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 &= 520 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 &= 380. \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχομε ένα γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή συντομότερα ένα γραμμικό σύστημα 4×3. Ομοίως, οι τρεις εξισώσεις που δίνονται στην (2.5.1) αποτελούν γραμμικό σύστημα 3×3 με αγνώστους τα I_1, I_2, I_3.

Γενικά ένα πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους, των οποίων ζητούμε τις κοινές λύσεις, ονομάζεται ***γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους*** ή απλούστερα ***γραμμικό σύστημα*** $\mu \times \nu$ και έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + ... + \alpha_{\mu\nu}x_\nu &= \beta_\mu. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Οι αριθμοί $\alpha_{ij}, i=1,2,3,...\mu$, και j = 1, 2, 3,...ν ονομάζονται ***συντελεστές των αγνώστων*** ή απλά ***συντελεστές του συστήματος,*** ενώ οι αριθμοί $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\mu$ ονομάζονται σταθεροί όροι. Οι συντελεστές a_{ii} (δηλ. οι $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ κ.τ.λ.) ονομάζονται ***διαγώνιοι συντελεστές*** του συστήματος. Κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις ενός $\mu \times \nu$ συστήματος ονομάζεται ***λύση*** του συστήματος.

Στην περίπτωση που σε μια εξίσωση του συστήματος λείπει ένας ή περισσότεροι από τους αγνώστους, τότε θεωρούμε ότι ο άγνωστος ή οι άγνωστοι έχουν συντελεστή το μηδέν. Έτσι το σύστημα (2.5.1) γράφεται

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$8I_1 + 10I_2 + 0I_3 = 38$$

$$0I_1 + 10I_2 + 5I_3 = 40$$

του οποίου λύση είναι η τριάδα (1,3,2).

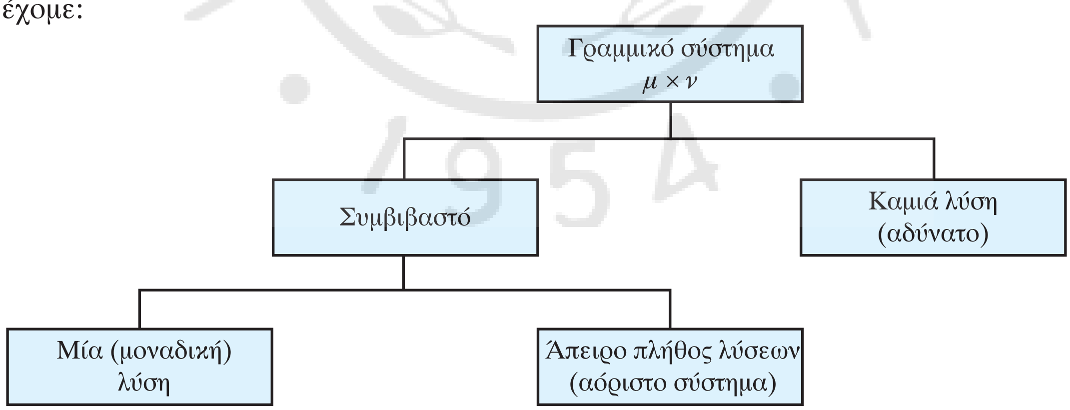
Η διαδικασία, με την οποία βρίσκομε τις λύσεις ενός συστήματος ονομάζεται ***επίλυση*** του συστήματος. Ένα γραμμικό σύστημα που έχει μία τουλάχιστον λύση ονομάζεται ***συμβιβαστό***, ενώ όταν δεν έχει λύσεις ονομάζεται ***αδύνατο.***

Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις ονομάζονται ***ισοδύναμα.*** Για παράδειγμα, τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad (\Sigma) \qquad \qquad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad (\Sigma')$$

είναι ισοδύναμα, αφού και τα δύο έχουν μοναδική λύση τη δυάδα (1,2). Συμβολικά τότε θα γράφομε $(\Sigma) \sim (\Sigma')$.

Αποδεικνύεται ότι ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα έχει είτε μια μοναδική λύση, είτε άπειρες λύσεις. Δεν μπορεί δηλαδή να έχει δύο, τρεις ή οποιοδήποτε άλλο πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Συνοπτικά έχομε:



Αν στο γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$ οι σταθεροί όροι $\beta_1, \beta_2, ...\beta_\mu$ είναι όλοι μηδέν, δηλαδή

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1\nu}x_\nu = 0$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2\nu}x_\nu = 0$$

$$.........................$$

$$\alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + ... + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0$$

τότε το σύστημα ονομάζεται ***ομογενές.***

Η ν-άδα (0,0,0,...,0) επαληθεύει πάντοτε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$, επομένως ένα τέτοιο σύστημα δεν μπορεί να είναι αδύνατο. Άρα, το ομογενές σύστημα είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει μοναδική λύση (τη μηδενική), είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες.

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί σύντομα ως μία ισότητα με τη βοήθεια της πράξεως του πολλαπλασιασμού πινάκων. Πράγματι, επιστρέφοντας στο Παράδειγμα ΙΙ, μπορούμε να παρουσιάσομε τις τέσσερις εξισώσεις του συστήματος (2.5.4) ως ισότητα δύο πινάκων στηλών με τον εξής τρόπο

$$\begin{bmatrix} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}. \tag{2.5.6}$$

Ορίζοντας τους πίνακες,

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας 4×1 του πρώτου μέλους της (2.5.6) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο,

$$AX = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 \end{bmatrix}$$

και η (2.5.6) παίρνει τη μορφή $\begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}$

ή ακόμη $AX = B$. Ομοίως, το σύστημα (2.5.1) γράφεται στην ίδια μορφή $AX = B$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 38 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, το γραμμικό σύστημα (2.5.1) των μ εξισώσεων με ν αγνώστους γράφεται

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}. \tag{2.5.7}$$

ή ισοδύναμα $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

ο ***πίνακας των συντελεστών των αγνώστων*** και

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ο ***πίνακας*** (στήλη) ***των αγνώστων*** και ο ***πίνακας*** (στήλη) ***των σταθερών όρων*** αντίστοιχα.

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η εύρεση γενικών μεθόδων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, δηλαδή τον προσδιορισμό του άγνωστου πίνακα X, δεδομένου του πίνακα A και του πίνακα B.

Για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έχουν προταθεί αρκετές διαφορετικές μέθοδοι. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψομε μία απλή μέθοδο, τη μέθοδο της αντικαταστάσεως, ενώ στην επόμενη παράγραφο θα αναλύσομε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss, η οποία προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων αλγεβρικών συστημάτων και χρησιμοποιείται από πολλά υπολογιστικά προγράμματα που παρέχουν τη δυνατότητα επιλύσεως γραμμικών συστημάτων.

Τέλος στην παράγραφο 2.7 θα περιγράψομε τρεις ακόμη μεθόδους, τη μέθοδο του Cramer, τη μέθοδο της αντιστροφής πίνακα και τη μέθοδο της τριγωνικής παραγοντοποιήσεως, οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε συστήματα, όπου ο A είναι τετραγωνικός πίνακας (δηλ. σε συστήματα με ίσο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων).

Σημειώνομε ότι, η επιλογή της μεθόδου που είναι προσφορότερη κάθε φορά εξαρτάται από το μέγεθος και τη μορφή του κάθε συστήματος.

Η ***μέθοδος της απλής αντικαταστάσεως*** είναι η απλούστερη διαθέσιμη μέθοδος και μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά μόνο για συστήματα που έχουν μικρό αριθμό εξισώσεων. Πρώτο βήμα είναι η επίλυση κάποιας από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και η αντικατάσταση του αγνώστου αυτού στις άλλες εξισώσεις. Προκύπτει έτσι ένα νέο σύστημα, μικρότερο από το αρχικό κατά μία εξίσωση και έναν άγνωστο. Στο νέο σύστημα επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία (επίλυση κάποιας από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και αντικατάσταση του αγνώστου αυτού στις άλλες εξισώσεις) μέχρις ότου να φτάσουμε σε:

α) ***Μία εξίσωση με έναν άγνωστο.*** Στην περίπτωση αυτή υπολογίζομε αρχικά τον άγνωστο λύνοντας την εξίσωση αυτή και ακολουθούμε αντίστροφα βήματα, αντικαθιστώντας κάθε φορά το αποτέλεσμα στις ενδιάμεσες εξισώσεις, ώστε να υπολογίσομε και τους υπόλοιπους αγνώστους.

β) ***Πολλές εξισώσεις με έναν άγνωστο.*** Στην περίπτωση αυτή λύνομε τη μία από αυτές και αντικαθιστούμε τη λύση στις υπόλοιπες. Αν όλες επαληθεύονται, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση (που βρίσκεται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση). Αν κάποια από τις υπόλοιπες δεν επαληθεύεται, το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) ***Μία ή περισσότερες εξισώσεις με πλήθος αγνώστων που υπερβαίνουν το πλήθος των εξισώσεων.*** Τότε ορισμένοι από τους αγνώστους μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα και να εκφραστούν οι υπόλοιποι άγνωστοι μέσω αυτών. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο σύστημα).

Σημειώνομε επίσης ότι, σε περίπτωση που κατά τη διαδικασία των αντικαταστάσεων προκύψει προφανής ισότητα (ταυτότητα), τότε την αγνοούμε και συνεχίζομε με τις υπόλοιπες, ενώ αν προκύψει μία ισότητα που δεν ισχύει, τότε το αρχικό σύστημα θα είναι αδύνατο.

Στο σύστημα (2.5.1), η μέθοδος της αντικαταστάσεως είναι αρκετά αποτελεσματική, αφού θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να λύσομε ως προς I_1 και I_3 τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνοντας

$$I_1 = \frac{38-10I_2}{8}, \qquad I_3 = \frac{40-10I_2}{5}$$

και αντικαθιστώντας τις τελευταίες στην πρώτη να πάρομε την επόμενη εξίσωση μ' έναν άγνωστο

$$\frac{38-10I_2}{8} - I_2 + \frac{40-10I_2}{5} = 0.$$

Λύνοντας προκύπτει ότι $I_2 = 3$ και αντικαθιστώντας στις προηγούμενες παίρνομε

$$I_1 = \frac{38-10\cdot 3}{8} = 1, \qquad I_3 = \frac{40-10\cdot 3}{5} = 2.$$

Άρα η λύση του συστήματος θα είναι η $I_1 = 1,\ \ I_2 = 3,\ \ I_3 = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.1.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικαταστάσεως

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Λύση.

Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς x_1 (γενικά προτιμάμε να λύνομε ως προς αγνώστους που δεν δημιουργούν κλάσματα κατά τη λύση, ώστε να διευκολυνόμαστε στις πράξεις), βρίσκομε

$$x_1 = -1 + x_2 + x_3$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τρίτη παίρνομε το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} 2(-1+x_2+x_3) - x_2 + x_3 &= 3 \\ (-1+x_2+x_3) - 3x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -2x_2 + 3x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος αυτού ως προς x_2 παίρνομε $x_2 = 5 - 3x_3$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει

$$-2(5-3x_3) + 3x_3 = 8.$$

Επομένως θα έχομε $9x_3 = 18 \Leftrightarrow x_3 = 2$, οπότε

$$x_2 = 5 - 3x_3 = 5 - 3 \cdot 2 = -1,$$
$$x_1 = -1 + x_2 + x_3 = -1 + (-1) + 2 = 0.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.2.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικαταστάσεως

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Λύση.

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x_1, βρίσκομε $x_1 = x_2 - x_4 + 3$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση (η τρίτη δεν περιέχει τον άγνωστο x_1) παίρνομε το επόμενο σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους

$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_4 + 3) + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{aligned} 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Ομοίως, λύνοντας την πρώτη εξίσωση του νέου συστήματος ως προς x_3, βρίσκομε $x_3 = 3x_2 - 2x_4 + 4$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχομε $3x_2 + (3x_2 - 2x_4 + 4) - x_4 = 3 \Leftrightarrow 6x_2 - 3x_4 = -1$.

Αφού έχομε μία μόνο εξίσωση με δύο αγνώστους, μπορούμε να επιλέξομε έναν από τους αγνώστους αυθαίρετα και να εκφράσομε τους υπόλοιπους μέσω αυτού. Πράγματι, θέτοντας $x_4 = \lambda$ όπου $\lambda \in \mathbf{R}$ βρίσκομε

$$x_2 = \frac{3x_4 - 1}{6} = \frac{3\lambda - 1}{6},$$
$$x_3 = 3 \cdot \frac{3\lambda - 1}{6} - 2\lambda + 4 = \frac{21 - 3\lambda}{6} = \frac{7 - \lambda}{2},$$
$$x_1 = x_2 - x_4 + 3 = \frac{3\lambda - 1}{6} - \lambda + 3 = \frac{17 - 3\lambda}{6}.$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{17 - 3\lambda}{6}, \frac{3\lambda - 1}{6}, \frac{7 - \lambda}{2}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.3.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικαταστάσεως

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Λύση.

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x_1, βρίσκομε $x_1 = -x_2 - x_3 + 6$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση παίρνομε το επόμενο σύστημα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{array}{rcl} (-x_2 - x_3 + 6) - \ x_2 + 2x_3 = \ 5 & & -2x_2 + \ x_3 = -1 \\ (-x_2 - x_3 + 6) + 5x_2 - 2x_3 = \ 1 & \text{ή ισοδύναμα} & 4x_2 - 3x_3 = -5 \\ (-x_2 - x_3 + 6) + 2x_2 - \ x_3 = 10 & & x_2 - \ 2x_3 = \ 4. \end{array}$$

Ομοίως, λύνοντας την πρώτη εξίσωση του νέου συστήματος ως προς x_3, βρίσκομε $x_3 = 2x_2 - 1$ και αντικαθιστώντας στις δύο τελευταίες θα πάρομε

$$\begin{array}{rcl} 4x_2 - 3\cdot(2x_2 - 1) = -5 & \text{ή ισοδύναμα} & -2x_2 = -8 \\ x_2 - \ 2\cdot(2x_2 - 1) = \ 4 & & -3x_2 = \ \ 2. \end{array}$$

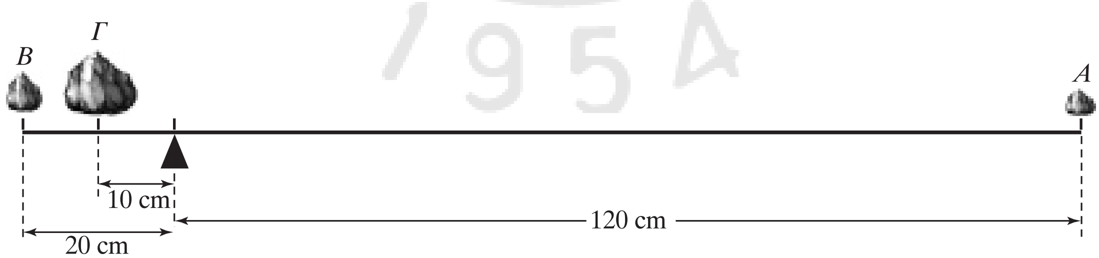
Από την πρώτη εξίσωση βρίσκομε τη λύση $x_2 = 4$, η οποία προφανώς δεν επαληθεύει τη δεύτερη. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Ασκήσεις.

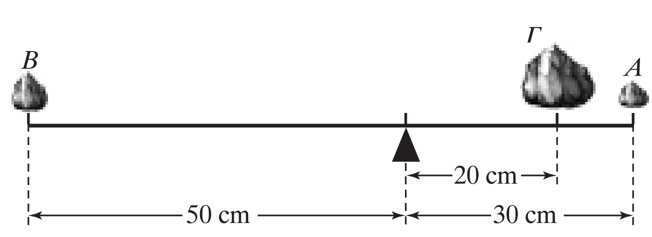
2.5.1. Κατά τη μεταφορά ενός ογκόλιθου 1000 kg, από αδέξιο χειρισμό του φορτωτή, ο ογκόλιθος έπεσε και έσπασε σε τρία κομμάτια *Α*, *Β*, *Γ*. Μετά τη θραύση χρειάστηκε να προσδιοριστεί το βάρος των τριών τεμαχίων. Λόγω ελλείψεως ζυγαριάς ο χειριστής σκέφτηκε το εξής τέχνασμα. Τοποθέτησε τα τρία τεμάχια επάνω σε μια σιδηροδοκό με δύο διαφορετικούς τρόπους, ώστε να ισορροπήσουν και μέτρησε τις αποστάσεις από το σημείο στηρίξεως, οι οποίες ήταν όπως δείχνουν τα σχήματα 2.5β και 2.5γ.

α) Αν συμβολίσομε με x, y, z τα βάρη των τριών κομματιών, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z.

β) Να βρείτε τα βάρη των τριών κομματιών, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως.

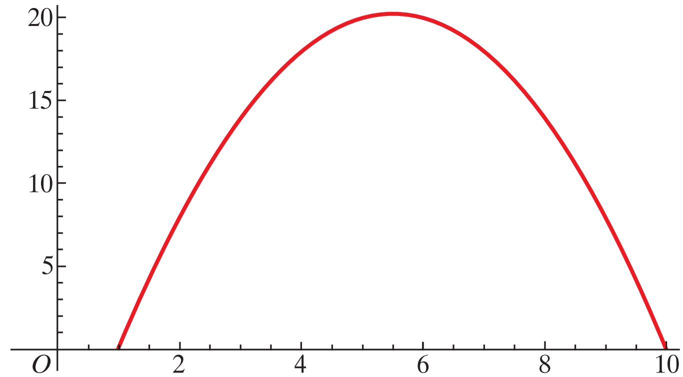


Σχ. 2.5β.



Σχ. 2.5γ.

2.5.2. Η τροχιά μιας τροχιοδεικτικής βολίδας (σχ. 2.5δ) που εκτοξεύεται από το σημείο με συντεταγμένες (1,0) είναι παραβολή με εξίσωση της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς της βολίδας αν είναι γνωστό ότι αυτή περνάει από τα σημεία με συντεταγμένες $(x, y) = (2,8), (5,20)$.



Σχ. 2.5δ.

2.5.3. Να γράψετε στη μορφή (2.5.5) τα γραμμικά συστήματα που περιγράφουν οι επόμενες ισότητες.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.5.4. Να γράψετε τα επόμενα συστήματα στη μορφή $AX = B$, όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας των αγνώστων και B ο πίνακας των σταθερών όρων.

α) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= -3 \end{aligned}$

β) $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x + y + 3z &= 12 \end{aligned}$

γ) $\begin{aligned} x - 3\omega &= 0 \\ x + \omega &= 0 \\ 3x - 2\omega &= 0 \\ x - y + \omega - z &= 6 \end{aligned}$

δ) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ x + 4y + 9z &= 3 \\ x - 4y + 3z &= 0 \\ x + 7y + 3z &= 4 \end{aligned}$

ε) $\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

στ) $\begin{aligned} 2x + 3y + 4\omega + 5z &= 6 \\ x + y &= 1 \\ y + \omega &= 2 \\ y + z &= 3 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$

2.5.5. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως.

α) $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x + y + 3z &= 12 \end{aligned}$

β) $\begin{aligned} x + y + \omega + z &= 10 \\ x + y &= 3 \\ y + \omega &= 5 \\ y + z &= 6 \end{aligned}$

γ) $\begin{aligned} x + 2y + z &= 7 \\ x + 3y + 9z &= 13 \\ x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$

δ) $\begin{aligned} x + y + 3z &= 6 \\ x + 2y + z &= 4 \\ 2x + y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$

2.5.6. Μια τριγωνική πλατεία έχει περίμετρο 120 m. Η μεγαλύτερη πλευρά της είναι κατά 40 m μεγαλύτερη από τη μικρότερη, ενώ η τρίτη πλευρά διαφέρει από τη μεγαλύτερη όσο και από τη μικρότερη.

α) Αν συμβολίσομε με x, y, z τα μήκη των τριών πλευρών της πλατείας, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z.

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως.

2.5.7. Μια εταιρεία που πουλάει καλάθια ποτών σε συσκευασία δώρου, διαθέτει τρεις συσκευασίες *α, β, γ* με διάφορα ποτά. Το κάθε καλάθι περιέχει μπουκάλια από κρασιά, ουίσκι και βότκα. Στη συσκευασία *α* τοποθετούνται 2 μπουκάλια κρασί, 1 μπουκάλι ουίσκι και 3 μπουκάλια βότκα. Στη συσκευασία *β* τοποθετούνται 3 μπουκάλια κρασί και 2 μπουκάλια ουίσκι, ενώ τέλος, στη συσκευασία *γ* τοποθετούνται 4 μπουκάλια κρασί και 4 μπουκάλια βότκα. Η εταιρεία, έχει στην αποθήκη της 90 μπουκάλια κρασί, 30 μπουκάλια ουίσκι και 70 μπουκάλια βότκα και θέλει να κατασκευάσει τόσες συσκευασίες, ώστε να χρησιμοποιηθούν όλα τα ποτά της αποθήκης.

α) Αν συμβολίσομε με x, y, z τον αριθμό συσκευασιών α, β, γ που θα κατασκευάσει η εταιρεία, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z.

β) Να βρείτε τον αριθμό συσκευασιών α, β, γ, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως.

2.5.8. Μία μεταλλευτική εταιρεία έχει δύο μεταλλεία Ι και ΙΙ που παράγουν μετάλλευμα υψηλής, χαμηλής και μεσαίας ποιότητας. Το μεταλλείο Ι παράγει κάθε ημέρα 1 τόνο υψηλής, 4 τόνους μεσαίας και 3 τόνους χαμηλής ποιότητας μεταλλεύματος, ενώ το μεταλλείο ΙΙ παράγει κάθε ημέρα 2 τόνους υψηλής, 3 τόνους μεσαίας και 1 τόνο χαμηλής ποιότητας μεταλλεύματος. Αν η εταιρεία είναι υποχρεωμένη να παραδώσει 15 τόνους υψηλής, 35 τόνους μεσαίας και 20 τόνους χαμηλής ποιότητας μεταλλεύματος,

α) Να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι αριθμοί ημερών x, y που θα πρέπει να εργαστούν τα δύο μεταλλεία Ι και ΙΙ αντίστοιχα, ώστε να ικανοποιηθεί ολόκληρη η ζήτηση, χωρίς να υπάρξει περίσσευμα στην παραγωγή κανενός είδους μεταλλεύματος.

β) Λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως να διαπιστώσετε ότι δεν μπορούν να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές των x, y ώστε να επιτευχθεί το ζητούμενο.

2.6 Η μέθοδος απαλοιφής.

Η διαδικασία της επιλύσεως συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής συνίσταται στην πρόσθεση σε κάθε εξίσωση καταλλήλων πολλαπλασίων μιας άλλης, ώστε το σύστημα να οδηγηθεί σε απλούστερο ισοδύναμο σύστημα. Συνήθως ξεκινάμε από την πρώτη εξίσωση, την οποία πολλαπλασιάζομε κατάλληλα και την προσθέτομε στις επόμενες, ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου σ' αυτές. Συνεχίζομε την ίδια διαδικασία με τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, την οποία επίσης πολλαπλασιάζομε κατάλληλα και την προσθέτομε στις επόμενες κ.ο.κ..

Ο στόχος είναι να καταλήξομε σ' ένα τριγωνικό σύστημα, το οποίο μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως, ξεκινώντας από την εξίσωση με τους λιγότερους αγνώστους και πηγαίνοντας προς τα πίσω μέχρι να υπολογιστούν όλοι οι άγνωστοι.

Όπως ήδη αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, η μέθοδος της απαλοιφής προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων αλγεβρικών συστημάτων και χρησιμοποιείται από πολλά υπολογιστικά προγράμματα επιλύσεως γραμμικών συστημάτων.

Προκειμένου να παρουσιάσομε συστηματικότερα την παραπάνω μέθοδο, θα ταξινομήσομε αρχικά τις ενέργειες που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν σε τρεις διαδικασίες ως εξής:

	Διαδικασία	*Συμβολισμός*
1.	Εναλλαγή της θέσεως των εξισώσεων που βρίσκονται στη θέση *i* και *j* (εξισώσεις ε_i και ε_j)	$\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$
2.	Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση *i* (εξίσωση ε_i) με εκείνη που προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε και τα δύο μέλη της με ένα μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$)	$\varepsilon_i \to \lambda\varepsilon_i$
3.	Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση *i* (εξίσωση ε_i) με εκείνη που προκύπτει αν και στα δύο μέλη της προσθέσομε τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης που βρίσκεται στη θέση *j* πολλαπλασιασμένα μ' ένα μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$).	$\varepsilon_i \to \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j$

Αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσομε οποιαδήποτε από τις παραπάνω τρεις διαδικασίες, τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό (η απόδειξη παραλείπεται).

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τις προηγούμενες διαδικασίες για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, προσπαθώντας μέσω αυτών να το μετασχηματίσομε σε ένα ισοδύναμο σύστημα, του οποίου η λύση να προκύπτει εύκολα. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι, με εφαρμογή ενός πεπερασμένου πλήθους διαδικασιών της παραπάνω μορφής μπορούμε να πάρομε ένα ισοδύναμο σύστημα, στο οποίο οι συντελεστές που βρίσκονται κάτω από τους διαγώνιους συντελεστές να είναι μηδενικοί. Η λύση του τελευταίου συστήματος γίνεται πολύ απλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Για παράδειγμα ας προσπαθήσομε να επιλύσομε το σύστημα (2.5.4) που προέκυψε από την ανάλυση του Προβλήματος ΙΙ της παραγράφου 2.5.

Κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \to \lambda\varepsilon_i$, διαιρούμε αρχικά όλα τα μέλη όλων των εξισώσεων του συστήματος με τον αριθμό 20, ώστε ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου στην πρώτη εξίσωση να γίνει μονάδα (αυτό δεν είναι υποχρεωτικό, αλλά γίνεται για διευκόλυνση των πράξεων). ΄Ετσι, με εφαρμογή των διαδικασιών

$$\varepsilon_i \to \frac{1}{20}\varepsilon_i, \qquad i = 1,2,3,4$$

παίρνομε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 25 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases} \qquad (\Sigma_1)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζομε τα μέλη της 1ης εξισώσεως του (Σ_1) με –2 και τα προσθέτομε στα αντίστοιχα μέλη της 2ης εξισώσεως του (Σ_1). ΄Ετσι απαλείφεται από την $2^η$ εξίσωση ο άγνωστος x_1 . Πιο συγκεκριμένα, με εφαρμογή της διαδικασίας

$$\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 + (-2)\varepsilon_1$$

παίρνομε το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \ \ 20 \\ \qquad -x_2 - 3x_3 = -15 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \ \ 26 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \ \ 19. \end{cases} \qquad (\Sigma_2)$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζομε τα μέλη της 1ης εξισώσεως του (Σ_2) με –6 και τα προσθέτομε στα μέλη της $3^{ης}$ (εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-6)\varepsilon_1$]. Έτσι απαλείφεται και από την $3^η$ εξίσωση ο άγνωστος x_1 αφού παίρνομε:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ -10x_2 - 16x_3 &= -94 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 19. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_3)$$

Πολλαπλασιάζομε επίσης τα μέλη της 1ης εξισώσεως του (Σ_3) με –1 και τα προσθέτομε στα μέλη της $4^{ης}$ εξισώσεως (εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + (-1)\varepsilon_1$). Έτσι απαλείφεται ο άγνωστος x_1 και από την $4^η$ εξίσωση, αφού παίρνομε:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ -10x_2 - 16x_3 &= -94 \\ x_2 - x_3 &= -1. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_4)$$

Στο σύστημα (Σ_4) έχομε επιτύχει οι συντελεστές του αγνώστου x_1 να μηδενιστούν σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη. Ο επόμενος στόχος είναι να μηδενιστούν οι συντελεστές του αγνώστου x_2 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από τη δεύτερη.

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-10)\cdot\varepsilon_2$ προκύπτει το:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ 14x_3 &= 56 \\ x_2 - x_3 &= -1. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_5)$$

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + 1\cdot\varepsilon_2$ παίρνομε:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ 14x_3 &= 56 \\ -4x_3 &= -16 \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_6)$$

και φτάσαμε πλέον σ' ένα σύστημα, στο οποίο έχουν μηδενιστεί οι συντελεστές του αγνώστου x_1 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη εξίσωση και όλοι οι συντελεστές του αγνώστου x_2 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από τη δεύτερη.

Τέλος μπορούμε να εφαρμόσομε τη διαδικασία $\varepsilon_5 \to \varepsilon_4 + (\frac{4}{14})\varepsilon_3$, οπότε παίρνομε το σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ 14x_3 &= 56 \\ 0x_3 &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_7)$$

Προφανώς, η τελευταία εξίσωση αποτελεί ταυτότητα (ισχύει πάντοτε), οπότε μπορεί να παραληφθεί (γενικά, αν κατά την επίλυση ενός συστήματος παρουσιαστεί μια εξίσωση της μορφής: $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_\nu = 0$, τότε η εξίσωση αυτή παραλείπεται).

Επομένως, το σύστημα (Σ_7) είναι ισοδύναμο με το σύστημα των τριών πρώτων εξισώσεων, δηλαδή το

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \ \ 20 \\ \quad -x_2 - 3x_3 = -15 \\ \qquad\quad 14x_3 = \ \ 56. \end{cases} \qquad (\Sigma_8)$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκομε $x_3 = 4$ και αν αντικαταστήσομε την τιμή $x_3 = 4$ στη δεύτερη εξίσωση του (Σ_8), μπορούμε να υπολογίσομε το $x_2 = 3$. Ομοίως θέτοντας $x_2 = 3$ και $x_3 = 4$ στην πρώτη εξίσωση του (Σ_8), βρίσκομε $x_1 = 2$.

Επειδή το σύστημα (Σ_8) είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα (2.5.3), συμπεραίνομε ότι το σύστημα (2.5.3) έχει μοναδική λύση την τριάδα (2,3,4), δηλαδή

$$x_1 = 2\,,\ x_2 = 3\ \ \text{και}\ \ x_3 = 4\,.$$

Η διαδικασία επιλύσεως ενός γραμμικού συστήματος με την προηγούμενη μέθοδο, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία ***μέθοδος απαλοιφής***, περιγράφεται αλγοριθμικά με τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1: Φροντίζομε, κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$, αν υπάρχει ανάγκη, ο συντελεστής του αγνώστου x_1 στην πρώτη εξίσωση να γίνει μη μηδενικός. Αυτός ο συντελεστής ονομάζεται *στοιχείο-οδηγός* ή απλώς ***οδηγός***.

Βήμα 2: Απαλείφομε τον άγνωστο x_1 από τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_i \to \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j$.

Βήμα 3: Αγνοώντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος και τον πρώτο άγνωστο, επαναλαμβάνομε τα Βήματα 1 και 2 στις υπόλοιπες $\mu - 1$ εξισώσεις και $\nu - 1$ αγνώστους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται ανάλογα και στις $\mu - 2$, $\mu - 3$, $\mu - 4$, ..., 2 εξισώσεις, δηλαδή ώσπου να μηδενιστούν όλοι οι συντελεστές των αγνώστων που είναι κάτω από τους διαγώνιους συντελεστές.

Για λόγους ευκολίας στις πράξεις, είναι καλό, κατά την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής:

α) Να φροντίζομε, ώστε οι εξισώσεις να έχουν ακέραιους ή κλασματικούς συντελεστές (αν οι συντελεστές είναι δεκαδικοί αριθμοί, αυτό μπορεί συνήθως να επιτευχθεί με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_i \to \lambda\varepsilon_i$),

β) Να φροντίζομε η εξίσωση που χρησιμοποιούμε για να μηδενίσομε επόμενους συντελεστές αγνώστων να έχει συντελεστή του πρώτου αγνώστου το 1 (αυτό μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$ και της διαδικασίας $\varepsilon_i \to \lambda\varepsilon_i$).

Χρησιμοποιώντας αυτές τις υποδείξεις, τα τελευταία βήματα της πορείας επιλύσεως του συστήματος (2.5.3) (από το (Σ4) και μετά) τροποποιούνται ως εξής:

Εφαρμόζομε τη διαδικασία $\varepsilon_2 \to (-1)\varepsilon_2$ στο (Σ_4), ώστε να κάνομε το συντελεστή του x_2 ίσο με 1, οπότε παίρνομε:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \ \ 20 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = \ \ 15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ \qquad x_2 \ \ - x_3 = \ -1. \end{cases} \qquad (\Sigma_5)$$

Με εφαρμογή σ' αυτό της διαδικασίας $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + 10 \cdot \varepsilon_2$ προκύπτει:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 14x_3 &= 56 \\ x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_6)$$

και, χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη διαδικασία $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + (-1)\,\varepsilon_2$, παίρνομε:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 14x_3 &= 56 \\ -4x_3 &= -16. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_7)$$

Κάνομε το συντελεστή του x_3 ίσο με 1 εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to (\frac{1}{14})\,\varepsilon_3$, οπότε βρίσκομε:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_2 + 3x_3 &= 15 \\ x_3 &= 4 \\ -4x_3 &= -16. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_8)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + 4\varepsilon_3$ καταλήγομε στο σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_2 + 3x_3 &= 15 \\ x_3 &= 4 \\ 0x_3 &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_9)$$

και τα βήματα από το σημείο αυτό και κάτω είναι όμοια με αυτά που έγιναν πριν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6.1.

Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}\right.$ με τη μέθοδο της απαλοιφής (το ίδιο σύστημα, λύθηκε στο παράδειγμα 2.5.1 με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως).

Λύση.

Με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 + (-2)\,\varepsilon_1$, παίρνομε το σύστημα $\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}\right.$

Κάνομε το συντελεστή του x_2 στη δεύτερη εξίσωση ίσον με 1, εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_2 \to \frac{1}{3}\varepsilon_2$, οπότε βρίσκομε

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{4}{3} \\ 3x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 = 3. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 - 3\varepsilon_2$ παίρνομε $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{4}{3}. \\ 2x_3 + \ \ x_4 = 7 \end{cases}$

Θέτοντας $x_4 = \lambda, \lambda \in \mathrm{R}$ η τρίτη εξίσωση δίνει $2x_3 = 7 - \lambda \iff x_3 = \frac{7-\lambda}{2}$.

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{7-\lambda}{2}\right) + \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{3} = \frac{7 - \lambda + 4\lambda - 8}{6} = \frac{3\lambda - 1}{6}$.

Τέλος, αντικαθιστώντας τα x_2, x_3 στην πρώτη εξίσωση έχομε

$$x_1 = 3 + x_2 - x_4 = 3 + \frac{3\lambda - 1}{6} - \lambda = \frac{18 + 3\lambda - 1 - 6\lambda}{6} = \frac{17 - 3\lambda}{6}.$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{17 - 3\lambda}{6}, \frac{3\lambda - 1}{6}, \frac{7 - \lambda}{2}, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6.2.

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + \ x_4 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

με τη μέθοδο της απαλοιφής.

Λύση.

Με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1$ παίρνομε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + \ x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-6)\varepsilon_1$ παίρνομε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 13x_2 - 10x_3 - 10x_4 = -10 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Ο συντελεστής του x_2 στη δεύτερη εξίσωση είναι ίσος με 1, οπότε συνεχίζομε εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-13)\varepsilon_2$ και οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 42x_3 - 36x_4 = -114 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Με εφαρμογή στο τελευταίο σύστημα της διαδικασίας $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + (-1)\varepsilon_2$ βρίσκομε

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 42x_3 - 36x_4 = -114 \\ 0x_3 + 0x_4 = -3 \end{cases}$$

και αφού η τελευταία εξίσωση δεν επαληθεύεται για καμμία τιμή των x_3, x_4, το σύστημα είναι ***αδύνατο***.

Γενικά, αν κατά την επίλυση ενός συστήματος παρουσιαστεί μια εξίσωση της μορφής

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_\nu = \beta \text{ με } \beta \neq 0,$$

τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο να συνεχίσομε τη διαδικασία μέχρι το τέλος.

Ασκήσεις.

2.6.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της απαλοιφής.

α) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = -3 \\ 4x - 5y + 7z = -3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

2.6.2. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο απαλοιφής.

α) $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ x + z = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x_3 - x_4 = -1 \\ -6x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_3 - 8x_4 = -17 \end{cases}$

2.7 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με ν εξισώσεις και ν αγνώστους.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσομε μεθόδους επιλύσεως συστημάτων, στα οποία το πλήθος των αγνώστων είναι ίσο με το πλήθος των εξισώσεων. Θα ξεκινήσομε με τη ***μέθοδο της αντιστροφής,*** η οποία βασίζεται στην παρακάτω ισοδυναμία (βλ. 1.4.1)

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B . \tag{2.7.1}$$

Έστω λοιπόν το επόμενο γραμμικό σύστημα ***ν εξισώσεων με ν αγνώστους*** (γραμμικό σύστημα $\nu \times \nu$).

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu &= \beta_\nu . \end{aligned} \tag{Σ}$$

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 2.5, το γραμμικό σύστημα (Σ) γράφεται στη μορφή (βλ. 2.5.5 για $\mu = \nu$)

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix} .$$

ή ισοδύναμα $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

είναι αντίστοιχα ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, ο πίνακας (στήλη) των αγνώστων και ο πίνακας (στήλη) των σταθερών όρων.

Προφανώς ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και οι πίνακες (στήλες) X και B έχουν τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις. Στην περίπτωση που ο πίνακας A αντιστρέφεται, μπορούμε να χρησιμοποιήσομε την

(2.7.1), ώστε να λάβομε τη λύση του συστήματος στη μορφή

$$X = A^{-1}B\,.$$

Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστροφος πίνακας υπολογίζεται από τον τύπο (2.4.3).

Λόγω της εμπλοκής πολλών πράξεων στη διαδικασία ευρέσεως του αντιστρόφου, η μέθοδος της αντιστροφής δεν προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων συστημάτων. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι διευκολύνει την επίλυση πολλών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα A, αλλά διαφορετικό δεξί μέλος B. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις και ιδιαίτερα όταν έχομε να εργαστούμε με μεγάλα συστήματα, η χρήση της μεθόδου αυτής καλόν θα είναι να αποφεύγεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7.1.

Να λύσετε τα συστήματα

$$\alpha)\ \begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 \quad\ &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \beta)\ \begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 \quad\ &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \gamma)\ \begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 \quad\ &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Λύση.

α) Έχομε το σύστημα $AX=B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Όμως, σύμφωνα με τους υπολογισμούς που έγιναν στο παράδειγμα 2.4.1, ο αντίστροφος πίνακας του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot C^T = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix}$$

οπότε η λύση του συστήματος θα δίνεται ως εξής

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $x_1 = 1/3, x_2 = 0, x_3 = 1/3$.

β) Το σύστημα γράφεται στη μορφή $AX = B_1$, όπου A είναι ο πίνακας που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως και

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$X = A^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/27 \\ -3/37 \\ 10/27 \end{bmatrix}.$$

γ) Και αυτό το σύστημα γράφεται στη μορφή $AX = B_2$, όπου A είναι ο πίνακας που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως και

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$X = A^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/27 \\ -6/27 \\ 2/27 \end{bmatrix}$$

Ας θεωρήσομε στη συνέχεια τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x_1, x_2, x_3

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2$$
$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3$$

και ας εξετάσομε τη μορφή που παίρνει η λύση του $X = A^{-1}B$, στην περίπτωση που ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.4.3), ο οποίος δίνει τον αντίστροφο πίνακα του A, θα έχομε

$$X = A^{-1}B = \left(\frac{1}{|A|}C^T\right)B = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

ή ακόμη

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11}\beta_1 + c_{21}\beta_2 + c_{31}\beta_3 \\ c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + c_{32}\beta_3 \\ c_{13}\beta_1 + c_{23}\beta_2 + c_{33}\beta_3 \end{bmatrix},$$

όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ είναι τα αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} για $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Επομένως, η λύση του συστήματος θα είναι η

$$x_1 = \frac{c_{11}\beta_1 + c_{21}\beta_2 + c_{31}\beta_3}{|A|}, \quad x_2 = \frac{c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + c_{32}\beta_3}{|A|}, \quad x_3 = \frac{c_{13}\beta_1 + c_{23}\beta_2 + c_{33}\beta_3}{|A|}.$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση που βρήκαμε για το x_1 τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$c_{11}=(-1)^{1+1}|M_{22}|=\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix},\quad c_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|=-\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix},\quad c_{31}=(-1)^{3+1}|M_{31}|=\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix}$$

παίρνομε

$$x_1=\frac{\beta_1\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\beta_2\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\beta_3\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix}}{|A|}\;.$$

Όμως η έκφραση που υπάρχει στον αριθμητή αποτελεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix}\beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής, και συνεπώς μπορούμε να γράψομε

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}}=\frac{D_{x_1}}{D}.$$

όπου με D συμβολίσαμε την ορίζουσα του πίνακα A και με

$$D_{x_1}=\begin{vmatrix}\beta_1 & a_{12} & a_{13}\\ \beta_2 & a_{22} & a_{23}\\ \beta_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

την ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσομε τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_1 με τη στήλη των σταθερών όρων. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι αντίστοιχοι τύποι προκύπτουν για τους αγνώστους x_2, x_3, δηλαδή

$$x_2=\frac{D_{x_2}}{D},\quad x_3=\frac{D_{x_3}}{D}$$

όπου $$D_{x_2}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33}\end{vmatrix},\qquad D_{x_3}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3\end{vmatrix},$$

είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν αντικαταστήσομε τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_2 με τη στήλη των σταθερών όρων και τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_3 με τη στήλη των σταθερών όρων αντίστοιχα.

Οι τύποι που προέκυψαν προηγουμένως για το σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους μπορούν να γενικευθούν για οποιοδήποτε τετραγωνικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους (γραμμικό σύστημα $\nu\times\nu$). Πιο συγκεκριμένα έχομε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα, στο οποίο η λύση ενός γραμμικού συστήματος δίνεται με τη μορφή λόγων από ορίζουσες. Οι τύποι που αναφέρονται σ' αυτό είναι γνωστοί με την ονομασία τύποι του ***Cramer***[1].

Τύποι του Cramer.

Έστω ένα $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$.
α) Αν $|A|\neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ με

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D},\quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, ...,\ x_\nu = \frac{D_{x_\nu}}{D}, \tag{2.7.2}$$

όπου D είναι η ορίζουσα $|A|$ των συντελεστών των αγνώστων και D_{x_i}, $i = 1, 2, 3, ..., \nu$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσομε την i στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.
β) Αν $|A| = 0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Στην περίπτωση που ισχύει $|A| = 0$, για την εύρεση των λύσεων του $\nu\times\nu$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ εργαζόμαστε συνήθως με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Σημειώνομε ότι, στην παράγραφο 2.1, είχαμε επίσης αποδείξει τους τύπους του Cramer στην ειδική περίπτωση που εξετάζομε πίνακες τύπου 2×2 (βλ. 2.1.8).

Οι τύποι του Cramer, αν και μας δίνουν μια πιο αποδοτική μέθοδο από τη μέθοδο της αντιστροφής, δεν είναι κατάλληλοι για να χρησιμοποιηθούν στη λύση συστημάτων μ' ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων, αφού απαιτούν τον υπολογισμό πολλών οριζουσών μεγάλης τάξεως. Σε γενικές γραμμές, για αριθμητικούς υπολογισμούς, η μέθοδος επιλύσεως συστήματος με τον αλγόριθμο του Gauss υπερτερεί έναντι των τύπων του Cramer. Ωστόσο ο κανόνας του Cramer είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τη θεωρητική μελέτη γραμμικών συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7.2.

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

α) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x-y-z\quad =0 \\ 4x+5y+6z=11 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-y-z\quad =0 \\ 4x+5y+6z=0 \end{cases}$

Λύση.

α) Έχομε $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=6\neq 0$

1. Η χρησιμοποίηση των οριζουσών για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έγινε πρώτη φορά από τον C. MacLaurin το 1729. Ωστόσο, η μέθοδος έμεινε γνωστή με το όνομα του Cramer, ο οποίος, θέλοντας να προσδιορίσει μια καμπύλη που διέρχεται από 5 γνωστά σημεία, κατέληξε σ' ένα γραμμικό σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους. Τη λύση του συστήματος με τη μέθοδο αυτή την παρουσίασε στο βιβλίο του *«Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών»* (1750).

και $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -6, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 12$.

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους του Cramer, θα έχομε

$$(x,y,z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right) = (2,\ 3,\ -2).$$

δηλαδή το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(2,\ 3,\ -2)$.

β) Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίδια με πριν, οπότε $D = 6 \neq 0$. Ωστόσο όλες οι άλλες ορίζουσες έχουν αλλάξει κατά μία στήλη, οπότε θα πρέπει να ξαναϋπολογισθούν. Τώρα έχομε

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -10, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

και σύμφωνα με τους τύπους του Cramer, θα είναι

$$(x,y,z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right) = (-\frac{1}{6},\ -\frac{10}{6},\ \frac{9}{6}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7.3.

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda^2 x & +y & -z & = & 2 \\ x & +\lambda^2 y & -z & = & 2 \\ -x & +y & +\lambda^2 z & = & 2. \end{cases}$$

Λύση.

Έχομε

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda^2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^4+1) - 1(\lambda^2-1) - 1(1+\lambda^2) = \lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

απ' όπου προκύπτει ότι $D = 0 \Leftrightarrow = \lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.

Επίσης βρίσκομε

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda^2 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 2(\lambda^4+1) - 2(\lambda^2+1) - 2(1-\lambda^2) = 2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2(\lambda^2+1) - 2(\lambda^2-1) - 2(1+1) = 2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda^2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2(\lambda^2-1) - 2(1+1) + 2(1+\lambda^2) = 2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1).$$

Αφού οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την ορίζουσα D είναι οι 0,–1,1, διακρίνομε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$ θα έχομε $D \neq 0$ και επομένως

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)}{\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)} = \frac{2}{\lambda^2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)}{\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)}{\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Άρα το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^2}\right)$.

β) Για $\lambda = 0$, το σύστημα γίνεται $\left\{\begin{array}{rrrcl} & y & -z & = & 2 \\ x & & -z & = & 2 \\ -x & +y & & = & 2 \end{array}\right.$.

Αν προσθέσομε κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{rrcl} y & -z & = & 2 \\ x & -z & = & 2 \\ y & -z & = & 4, \end{array}\right.$$

το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

γ) Για $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 2 \\ -x & +y & +z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 2 \\ -x & +y & +z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 2. \end{array}\right.$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(k, 2, k)$, $k \in \mathbf{R}$.

δ) Για $\lambda = -1$, το σύστημα λαμβάνει την ίδια μορφή με την περίπτωση (β) οπότε θα έχει και πάλι άπειρες λύσεις της μορφής $(k, 2, k)$ $k \in \mathbf{R}$.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσομε μια μέθοδο που προσφέρεται για την υπολογιστική επίλυση γραμμικών συστημάτων (χρησιμοποιείται ιδιαίτερα σε προγράμματα σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία ***μέθοδος της τριγωνικής παραγοντοποιήσεως*** ο πίνακας A του συστήματος γράφεται ως γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U ως εξής

$$A = LU\ .$$

Το γραμμικό σύστημα $AX = B$ λαμβάνει τότε τη μορφή

$$(LU)X = B \Leftrightarrow L(UX) = B \Leftrightarrow LY = B$$

όπου θέσαμε $UX = Y$. ΄Ετσι, η επίλυση του αρχικού συστήματος, ανάγεται στην επίλυση των δύο συστημάτων

$$UX = Y, \quad LY = B$$

η οποία μπορεί να γίνει εύκολα με αντικατάσταση, αφού πρόκειται για συστήματα που αντιστοιχούν σε τριγωνικούς πίνακες (προφανώς θα πρέπει να λυθεί πρώτα το σύστημα $LY = B$ για να υπολογίσομε το Y και στη συνέχεια το $UX = Y$ για να βρεθεί το X).

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου της τριγωνικής παραγοντοποιήσεως είναι ότι, για τη διάσπαση του πίνακα A στη μορφή $A = LU$, εκτός κάποιων περιπτώσεων που ο A έχει απλή μορφή, χρειάζονται επί πλέον υπολογισμοί. Τη μέθοδο αυτή θα τη χρησιμοποιούμε συνήθως όταν ο πίνακας έχει ήδη τη μορφή $A = LU$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7.4.

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας Α των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος γράφεται στη μορφή $A = LU$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

β) Να λύσετε το σύστημα.

Λύση.

α) Ό πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

διαπιστώνομε ότι πράγματι ισχύει $A = LU$

β) Θα πρέπει αρχικά να λυθεί το σύστημα $LY = B$ για να υπολογίσομε το Y και στη συνέχεια το $UX = Y$ για να βρεθεί το $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$. Αν θέσομε $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$, το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ y_1 + 3y_2 \qquad\qquad &= 3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \quad &= 2 \\ y_1 + \ y_2 + \ y_3 + y_4 &= 2. \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει $y_1 = 0$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη παίρνομε $y_2 = 1$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έχομε τη λύση

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, y_4 = 2.$$

Θα πρέπει τώρα να λυθεί το σύστημα $UX = Y$, το οποίο παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + \ x_4 &= 1 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Από την τέταρτη εξίσωση έχει ήδη βρεθεί το οπότε αντικαθιστώντας στην τρίτη θα πάρομε $x_3 = 2$ και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο καταλήγομε στη λύση

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 2 .$$

Ασκήσεις.

2.7.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντιστροφής.

α) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + \ x_2 = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + \ x_2 = 1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + \ x_2 = 1 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \qquad = 5 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + \ x_3 = 3 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \qquad = 1 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + \ x_3 = 1 \end{cases}$

2.7.2. Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

και στη συνέχεια να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντιστροφής.

α) $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3=1 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=2 \\ -2x_1-\ \ x_2+\ x_3=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3=1 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=3 \\ -2x_1-\ \ x_2+\ x_3=2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3=2 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=1 \\ -2x_1-\ \ x_2+\ x_3=3 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3=2 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=3 \\ -2x_1-\ \ x_2+\ x_3=1 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3=3 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=2 \\ -2x_1-\ \ x_2+\ x_3=1 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3=3 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=1 \\ -2x_1-\ \ x_2+\ x_3=2 \end{cases}$

2.7.3. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων του Cramer.

α) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=1 \\ 4x+3y+4z=5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+\frac{1}{6}y+\frac{1}{6}z=1 \\ \frac{1}{6}x+2y+\frac{1}{6}z=1 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{6}y+3z=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+4z=7 \\ x+3y+9z=13 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y=-1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} x+\ \ 2y+3z=-6 \\ x-\ \ 2y-\ 4z=1 \\ 7x-10y-21z=0 \end{cases}$

2.7.4. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων του Cramer για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

α) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2\lambda x+2\lambda y+z=2\lambda+1 \\ \lambda x+y+z=1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+\lambda^2 y+\lambda^2 z=1 \\ \lambda^2 x+2y-z=0 \\ \lambda^2 x+y+z=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+2y-z=\lambda \\ 3x-y+2z=0 \\ 7x+7y-2z=\lambda \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x+y+\lambda z=1 \\ x+y+z=1 \\ \lambda x+y+z=1 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} \lambda x+2y+2z+2\omega=1 \\ 2x+\lambda y+2z+2\omega=1 \\ 2x+2y+\lambda z+2\omega=1 \\ 2x+2y+2z+\lambda\omega=1 \end{cases}$

2.7.5. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+2x_4&=3 \\ 4x_1+5x_2-\ \ x_3+5x_4&=9 \\ 6x_1+6x_2-\ \ x_3+4x_4&=12 \\ -2x_1+8x_2-12x_3\qquad&=6. \end{aligned}$$

Προκειμένου να γράψομε τον πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος στη μορφή $A = LU$ θεωρούμε τους πίνακες

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \alpha&1&0&0\\ \beta&\gamma&1&0\\ \delta&\varepsilon&\zeta&1\end{bmatrix},\qquad U=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\ 0&3&-3&1\\ 0&0&-1&-3\\ 0&0&0&5\end{bmatrix}$$

α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$.
β) Να λύσετε το αρχικό σύστημα με τη μέθοδο της τριγωνικής παραγοντοποιήσεως.

2.7.6. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5&=5\\ 2x_1+6x_2-6x_3+6x_4-2x_5&=6\\ -x_1-6x_2+8x_3-8x_4+8x_5&=1\\ 2x_1+6x_2-8x_3+4x_4-4x_5&=0\\ x_1-2x_2+8x_3-4x_4+17x_5&=20.\end{aligned}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος γράφεται στη μορφή $A = LDU$ όπου

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\ 2&-1&0&0&0\\ -1&2&1&0&0\\ 2&-1&2&-1&0\\ 1&2&-1&2&1\end{bmatrix},\qquad U=L^T,\quad D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

β) Να λύσετε το σύστημα.

2.7.7. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3+4x_4&=11\\ x_1+5x_2+10x_3+8x_4+2x_5&=24\\ x_1+5x_2+x_3-2x_4&=3\\ x_1+5x_2+4x_3&=8\\ -x_1-x_2&=0.\end{aligned}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος γράφεται στη μορφή $A=LM$ όπου

$$L=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\ 1&2&2&2&0\\ 1&2&-1&0&0\\ 1&2&0&0&0\\ -1&0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad M=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\ 0&2&2&0&0\\ 0&0&3&2&0\\ 0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

β) Να λύσετε το σύστημα.

2.8 Μελέτη ομογενών γραμμικών συστημάτων.

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.5, στο ομογενές γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$ όλοι οι σταθεροί όροι είναι μηδέν, οπότε έχει τη μορφή $AX=\mathbf{O}$ ή αναλυτικά

$$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1\nu}x_\nu=0$$
$$\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2\nu}x_\nu=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{\mu1}x_1+\alpha_{\mu2}x_2+\ldots+\alpha_{\mu\nu}x_\nu=0.$$

Η ν-άδα (0,0,0,...,0) επαληθεύει πάντοτε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$, οπότε ένα τέτοιο σύστημα δεν μπορεί να είναι αδύνατο. Επομένως

Ένα ***ομογενές γραμμικό σύστημα*** είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική, είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες στο πλήθος.

Στην περίπτωση που το ομογενές σύστημα είναι τετραγωνικό ($\mu=\nu$), μπορούμε να μελετήσομε το σύστημα των τύπων του Cramer (2.7.2). Πράγματι, αν ισχύει D = $|A|\neq 0$, δεδομένου ότι $D_{x_1}=D_{x_2}=\ldots=D_{x_\nu}=0$ (αφού όλες οι ορίζουσες έχουν μια στήλη που όλα τα στοιχεία της είναι μηδενικά), το ομογενές σύστημα θα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Αν D = $|A|=0$, τότε το ομογενές σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις (αφού δεν μπορεί να είναι αδύνατο).

Το ομογενές σύστημα $AX=\mathbf{O}$,
α) Έχει μόνο τη μηδενική λύση αν και μόνο αν $|A|\neq 0$ και
β) Έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρο πλήθος) αν και μόνο αν $|A|=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8.1.

Να λύσετε το επόμενο σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbf{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\begin{cases} x+y+2\lambda z=0\\ x+2\lambda y+z=0\\ 2\lambda x+y+z=0.\end{cases}$$

Λύση.

Για την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων έχομε

$$D=\begin{vmatrix}1&1&2\lambda\\1&2\lambda&1\\2\lambda&1&1\end{vmatrix}=(2\lambda-1)-(1-2\lambda)+2\lambda(1-(2\lambda)^2)=-8\lambda^3+6\lambda-2$$

οπότε $D=0\Leftrightarrow -8\lambda^3+6\lambda-2=0\Leftrightarrow 2(2\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1}{2}$ ή $\lambda=-1$. Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και $\lambda \neq -1$ και μη μηδενικές λύσεις άπειρες (επί πλέον της μηδενικής) όταν $\lambda = \frac{1}{2}$ ή $\lambda = -1$.

Για $\lambda = \frac{1}{2}$ το σύστημα γίνεται $x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$ και επομένως θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(-k - m, k, m)$ όπου $k, m \in \mathbf{R}$ παράμετροι.

Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z, \end{cases}$$

οπότε θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (k,k,k), $k \in \mathbf{R}$.

Ασκήσεις.

2.8.1. Να εξετάσετε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, τα επόμενα ομογενή συστήματα έχουν και άλλες πέραν της μηδενικής.

α) $\begin{cases} (\lambda^2 - 3)x + y + z = 0 \\ x + (\lambda^2 - 3)y + z = 0 \\ x + y + (\lambda^2 - 3)z = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda x + y + 2z = 0 \\ \lambda^2 x + y + 4z = 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda(\lambda+1)x + \lambda(\lambda+1)y + z = 0 \\ \lambda(\lambda+1)x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (1/\lambda)x + 3y + 2z = 0 \\ (1/\lambda^2)x + 9y + 4z = 0 \end{cases}$

2.8.2. Να εξετάσετε για ποια τιμή της παραμέτρου λ και τα τρία ομογενή συστήματα που δίνονται παρακάτω έχουν και άλλες λύσεις πέραν της μηδενικής.

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda\omega = 0 \\ \lambda x + 2y - \omega = 0 \\ \lambda x + y + \omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x + y + \omega = 0 \\ x + \lambda y + \omega = 0 \\ x + y + \lambda\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x + y - \omega = 1 \\ \lambda x + y + \lambda\omega = \lambda - 1 \\ 3x + 3y + \lambda\omega = 1 \end{cases}$$

2.8.3. Να λύσετε τα επόμενα ομογενή συστήματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbf{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

α) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda^2 x + 4y + z = 0 \\ \lambda^4 x + 16y + z = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + \lambda y = 0 \\ 4x + \lambda^2 y = 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} (\lambda+1)x + y + \omega = 0 \\ (\lambda-1)y - \omega = 0 \\ y + (\lambda-1)\omega = 0 \end{cases}$

2.8.4. Να λύσετε το επόμενο ομογενές σύστημα για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\begin{cases} x & +y & +\ z & = & 0 \\ \lambda x & +\mu y & +3z & = & 0 \\ \lambda^2 x & +\mu^2 y & +9z & = & 0. \end{cases}$$

2.9 Επαυξημένος πίνακας – Μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η προηγούμενη μέθοδος επιλύσεως ενός γραμμικού συστήματος που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.6 μπορεί να περιγραφεί συνοπτικότερα, με χρήση πινάκων. Προς τούτο ας ανακαλέσομε τον τρόπο γραφής ενός γενικού γραμμικού συστήματος μ εξισώσεων με ν αγνώστους μέσω πινάκων

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

και ας ορίσομε τον πίνακα

$$\Gamma = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 1} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{array}\right] \tag{2.9.1}$$

που αποτελείται από τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων συμπληρωμένο με τον πίνακα στήλη των σταθερών όρων.

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται ***επαυξημένος πίνακας*** του συστήματος και θα συμβολίζεται $\Gamma = [A|B]$.

Είναι φανερό ότι κάθε γραμμή του επαυξημένου πίνακα παριστάνει την αντίστοιχη εξίσωση του γραμμικού συστήματος, από την οποία αφαιρέσαμε εντελώς τα σύμβολα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ των αγνώστων.

Οι διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν στη μέθοδο της απαλοιφής μεταφράζονται τώρα σε πράξεις επάνω στις γραμμές $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_\mu$ του επαυξημένου πίνακα, οι οποίες ονομάζονται ***γραμμοπράξεις*** και περιγράφονται ως εξής:

Γραμμοπράξη	***Συμβολισμός***
Εναλλαγή της θέσεως των γραμμών *i* και *j*	$\gamma_i \leftrightarrow \gamma_j$
Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$)	$\gamma_i \to \lambda\gamma_i$
Αντικατάσταση της *i* γραμμής με εκείνη που προκύπτει αν στα στοιχεία της προσθέσομε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (γραμμή *j*) πολλαπλασιασμένα με ένα μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$).	$\gamma_i \to \gamma_i + \lambda\gamma_j$

Όταν έχομε δύο πίνακες A, B και ο ένας προκύπτει από τον άλλο με γραμμοπράξεις, τότε οι πίνακες αυτοί ονομάζονται ***γραμμοϊσοδύναμοι*** ή απλώς ***ισοδύναμοι*** και γράφομε $A\sim B$. Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό ότι, αν οι επαυξημένοι πίνακες δύο συστημάτων είναι ισοδύναμοι, τότε και τα συστήματα είναι ισοδύναμα, αφού καθεμιά γραμμοπράξη ξεχωριστά οδηγεί σε σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό (λόγω της αντιστοιχίας που υπάρχει με τις διαδικασίες που χρησιμοποιήσαμε στη μέθοδο απαλοιφής).

Για παράδειγμα η λύση του συστήματος (Σ_1) με χρήση γραμμοπράξεων μπορεί να γίνει ως εξής (με τη δεύτερη από τις δύο διαδικασίες που περιγράψαμε):

Επαυξημένος πίνακας	*Γραμμοπράξη*	*Αποτέλεσμα γραμμοπράξεως*
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 2 & 3 & 3 & 25 \\ 6 & 3 & 2 & 26 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right]$	$\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 6 & 2 & 2 & 26 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 6 & 2 & 2 & 26 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right]$	$\gamma_3 \to \gamma_3 + (-6)\gamma_1$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right]$	$\gamma_4 \to \gamma_4 + (-1)\gamma_1$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$	$\gamma_2 \to (-1)\gamma_2$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$	$\gamma_3 \to \gamma_3 + 10 \cdot \gamma_2$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$	$\gamma_4 \to \gamma_4 + (-1)\gamma_2$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{array}\right]$	$\gamma_3 \to \frac{1}{14}\gamma_3$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{array}\right]$	$\gamma_4 \to \gamma_4 + 4\gamma_3$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Η πορεία που περιγράφεται στον προηγούμενο πίνακα θα σημειώνεται πιο συνοπτικά ως εξής, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ισοδυναμίας πινάκων:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 2 & 3 & 3 & 25 \\ 6 & 3 & 2 & 26 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right] \underset{\sim}{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 6 & 2 & 2 & 26 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right] \underset{\sim}{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-6)\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 1 & 3 & 2 & 19 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\gamma_4 \to \gamma_4 + (-1)\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\gamma_2 \to (-1)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -10 & -16 & -94 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\gamma_3 \to \gamma_3 + 10 \cdot \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\gamma_4 \to \gamma_4 + (-1)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\gamma_3 \to \frac{1}{14} \cdot \gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{array}\right] \underset{\sim}{\gamma_4 \to \gamma_4 + 4\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Όπως διαπιστώσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, με τη μέθοδο της απαλοιφής καταλήγομε σε ένα σύστημα του οποίου ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός και ως εκ τούτου μπορεί να μελετηθεί εύκολα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως, ξεκινώντας δηλαδή από την εξίσωση με τους λιγότερους αγνώστους και πηγαίνοντας προς τα πίσω μέχρι να υπολογιστούν όλοι οι άγνωστοι (ή να διαπιστώσομε ότι το σύστημα είναι είτε αδύνατο είτε αόριστο).

Η μορφή που πήρε ο επαυξημένος πίνακας είναι γνωστή με την ονομασία ***κλιμακωτή μορφή πίνακα*** (ο πίνακας ονομάζεται τότε «κλιμακωτός»). Γενικά, ένας πίνακας ονομάζεται ***κλιμακωτός***, αν:

α) Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής (το οποίο ονομάζεται στοιχείο-οδηγός ή απλώς οδηγός της γραμμής) βρίσκεται σε θέση δεξιότερα από το αντίστοιχο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής, και

β) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές.

Αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμικό σύστημα με μ εξισώσεις και ν αγνώστους είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός, δηλαδή έχει τη μορφή

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \cdots & \alpha'_{1r} & \cdots & \alpha'_{1\nu} & \beta'_1 \\ 0 & \alpha'_{22} & \cdots & \alpha'_{2r} & \cdots & \alpha'_{1\nu} & \beta'_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha'_{rr} & \cdots & \alpha'_{r\nu} & \beta'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \beta'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta'_\nu \end{array}\right]$$

όπου r είναι ένας θετικός ακέραιος ($1 \le r \le \mu,\nu$), $\alpha_{ii} \ne 0$ για $i = 1, 2,...r$. Το αντίστοιχο σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1\nu}x_\nu &= \beta'_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2\nu}x_\nu &= \beta'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{r\nu}x_\nu &= \beta'_r \\ 0 &= \beta'_{r+1} \\ \ldots\ldots \\ 0 &= \beta'_\mu \\ \ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.9.2}$$

και από τη μορφή του τελευταίου προκύπτουν άμεσα τα εξής:

α) Αν $r < \mu$ και κάποιο από τα $\beta'_{r+1}, \beta'_{r+2},...,\beta'_\mu$ είναι διαφορετικό από το μηδέν (δηλ. κάποιο από τα δεύτερα μέλη των τελευταίων $\mu - r$ εξισώσεων είναι διαφορετικό από το μηδέν), το σύστημα θα είναι ***αδύνατο***. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας θα έχει κάποια γραμμή της μορφής $(0,0,...,0|\,\beta)$ με $\beta \ne 0$.

β) Αν $r \le \mu$ και όλα τα $\beta'_{r+1}, \beta'_{r+2},...,\beta'_\mu$ είναι ίσα με μηδέν (δηλ. όλα τα δεύτερα μέλη των τελευταίων $\mu - r$ εξισώσεων είναι ίσα με μηδέν), το σύστημα θα είναι συμβιβαστό.

Ειδικότερα, αν $r = \mu$ μπορεί να εμφανιστεί μία από τις επόμενες δύο περιπτώσεις:

α) Να ισχύει $r = \mu = \nu$, οπότε το σύστημα θα έχει μία και ***μοναδική λύση***.

β) Να ισχύει $r = \mu < \nu$, οπότε το σύστημα θα έχει ***άπειρες λύσεις***. Αυτές βρίσκονται αν ορίσομε αυθαίρετα τους τελευταίους $\nu - r$ αγνώστους $x_{r+1}, x_{r+2},...,x_\nu$ και προσδιορίσομε τους άλλους από τη λύση του υπόλοιπου συστήματος, ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση που απομένει (την $a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{r\nu}x_\nu = \beta'_r$) και προχωρώντας προς την πρώτη με τη μέθοδο αντικαταστάσεως. Στην περίπτωση αυτή, οι άγνωστοι, που ορίζονται αυθαίρετα, ονομάζονται παράμετροι ή ελεύθερες μεταβλητές και το σύστημα λέμε ότι έχει $\nu - r$ πλήθος παραμέτρων ή $\nu - r$ παραμετρική απειρία λύσεων.

Ο αριθμός r, ονομάζεται ***βαθμός*** του αρχικού επαυξημένου πίνακα (και όλων των ισοδυνάμων προς αυτόν πινάκων). Ουσιαστικά ο βαθμός είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πίνακα που προέκυψε από τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για τη λύση του συστήματος.

Ο βαθμός ενός πίνακα συμβολίζεται με το γράμμα r. Πιο συγκεκριμένα, για τον επαυξημένο πίνακα $\Gamma = [A|B]$ του συστήματος (Σ_1) μπορούμε να γράψομε

$$r(\Gamma) = r(A|B) = 3$$

αφού ο πίνακας Γ είναι ισοδύναμος με τον

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και ο τελευταίος έχει 3 μη μηδενικές γραμμές.

Αποδεικνύεται ότι ο βαθμός ενός πίνακα είναι ίσος με την τάξη της μεγαλύτερης μη μηδενικής ορίζουσας που αντιστοιχεί σε υποπίνακες του πίνακα που εξετάζομε. Με τον όρο υποπίνακας εννοούμε τετραγωνικούς πίνακες που σχηματίζονται διαγράφοντας κάποιες γραμμές και κάποιες στήλες του πίνακα.

Έτσι, αν μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του βαθμού ενός πίνακα, μπορούμε να εργαστούμε με οποιαδήποτε από τις επόμενες δύο μεθόδους:

α) Εφαρμόζονται γραμμοπράξεις, ώστε να φτάσομε σε έναν ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα και στη συνέχεια μετρώντας τις μη μηδενικές γραμμές του τελευταίου.

β) Εφαρμόζονται την ορίζουσα του μεγαλύτερου τετραγωνικού υποπίνακα που μπορούμε να σχηματίσομε και:

– αν είναι διαφορετική από το μηδέν, συμπεραίνομε ότι ο βαθμός του είναι ίσος με την τάξη της ορίζουσας αυτής, ενώ
– αν είναι ίση με μηδέν, προχωρούμε στην εξέταση των αμέσως μικροτέρων τετραγωνικών υποπινάκων κ.ο.κ μέχρι να βρούμε κάποιο τετραγωνικό υποπίνακα με μη μηδενική ορίζουσα. Ο βαθμός του πίνακα θα είναι ίσος με την τάξη της τελευταίας αυτής ορίζουσας.

Ο βαθμός ενός πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξομε κατά πόσο ένα σύστημα είναι συμβιβαστό ή όχι αφού ισχύει η επόμενη πρόταση.

Ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους $AX=B$ είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ισχύει

$$r(A|B)=r(A).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.9.1.

Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα $\Gamma=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\-3&-4&-1\\2&-3&12\\-5&3&-21\end{bmatrix}$.

Στη συνέχεια να εξετασθεί αν είναι συμβιβαστό το σύστημα
$$\begin{aligned}-x-\ y&=1\\-3x-4y&=-1\\2x-3y&=12\\-5x+3y&=-21.\end{aligned}$$

Λύση.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο. Υπάρχουν 4 τετραγωνικοί υποπίνακες τάξεως 3:

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\-3&-4&-1\\2&-3&12\end{bmatrix},\quad \Gamma_2=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\-3&-4&-1\\-5&3&-21\end{bmatrix},\quad \Gamma_3=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&-3&12\\-5&3&-21\end{bmatrix},\quad \Gamma_4=\begin{bmatrix}-3&-4&-1\\2&-3&12\\-5&3&-21\end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τις ορίζουσες των πινάκων αυτών βρίσκομε $|\Gamma_1|=|\Gamma_2|=|\Gamma_3|=|\Gamma_4|$, οπότε θα πρέπει να εξετάσομε ορίζουσες μικρότερης τάξεως. Αφού

$$\begin{vmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

ο βαθμός του πίνακα Γ είναι ίσος με 2.

Για να εξετάσομε αν είναι συμβιβαστό το σύστημα, αρκεί να παρατηρήσομε ότι αυτό γράφεται στη μορφή $AX=B$ όπου

$$A=\begin{bmatrix}-1&-2\\-3&-4\\2&-3\\-5&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\-1\\12\\-21\end{bmatrix}$$

και ότι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος $[A|B]$ είναι ίσος με τον Γ. Ο βαθμός του πίνακα A είναι ίσος με 2, αφού

$$\begin{vmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Επομένως ισχύει $r(A)=r(A|B)=r(\Gamma)$, απ' όπου συμπεραίνομε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.9.2.

Να βρεθεί για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ είναι αδύνατο το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 = k. \end{cases}$$

Λύση.

Με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-2)\varepsilon_1$ παίρνομε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad x_2 - 4x_3 + x_4 = k - 6 \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-1)\varepsilon_2$ παίρνομε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad 0x_4 = k - 7 \end{cases}$$

στο οποίο οι συντελεστές των αγνώστων που είναι κάτω από τους διαγώνιους συντελεστές έχουν μηδενιστεί.

Ο επαυξημένος πίνακας έχει μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα με $\mu = 3$, $\nu = 4$, $r = 2$.

Αφού ισχύει $r < \mu$ και το δεύτερο μέλος της τελευταίας $\mu - r = 1$ εξισώσεως είναι ίσο με $k - 7$, το σύστημα θα είναι αδύνατο μόνο αν ισχύει $k \neq 7$ (οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται αδύνατη).

Επομένως, το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο για όλες τις τιμές του k εκτός από την τιμή $k = 7$.

Ο Gauss πρότεινε μια ελαφρώς διαφορετική διαδικασία από τη μέθοδο της απαλοιφής που περιγράψαμε στην παράγραφο 2.6, η οποία μας οδηγεί σ' έναν πίνακα που δίνει απευθείας τη λύση του συστήματος, χωρίς να χρειαστεί να καταφύγομε στη μέθοδο της αντικαταστάσεως. Η διαδικασία επιλύσεως ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο αυτή, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία ***μέθοδος απαλοιφής του Gauss***, περιγράφεται αλγοριθμικά στα επόμενα βήματα.

Βήμα 1: Βρίσκομε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει ένα τουλάχιστον μη μηδενικό στοιχείο.

Βήμα 2: Χρησιμοποιώντας τη γραμμοπράξη $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$ μεταφέρομε στην πρώτη γραμμή του πίνακα τη γραμμή που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο (ή ένα από τα μη μηδενικά, αν υπάρχουν πολλά τέτοια) της στήλης που βρέθηκε στο προηγούμενο βήμα.

Βήμα 3: Χρησιμοποιώντας τη γραμμοπράξη $\gamma_i \to \lambda\gamma_i$ μετατρέπομε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης σε μονάδα (αν δεν είναι ήδη).

Βήμα 4: Εφαρμόζοντας επανειλημμένα τη γραμμοπράξη $\varepsilon_i \to \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j$ κάνομε μηδενικά όλα τα στοιχεία της στήλης, τα οποία βρίσκονται κάτω από τη μονάδα.

Βήμα 5: Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνομε τα Βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνομε στο Βήμα 6.

Βήμα 6: Από γραμμή σε γραμμή, χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής εφαρμόζομε τη γραμμοπράξη $\varepsilon_i \to \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j$, ώστε να κάνομε μηδέν όλα τα στοιχεία της στήλης, στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή.

Ο αλγόριθμος του Gauss, ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή του πίνακα, το πρώτο από αριστερά 1 είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει. Ένα από τα πιο βασικά πλεονεκτήματα του αλγορίθμου είναι ότι μπορεί να προγραμματιστεί εύκολα σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα να βρίσκομε γρήγορα τη λύση πολύ μεγάλων συστημάτων.

Ο ισοδύναμος πίνακας (με τον αρχικό επαυξημένο πίνακα του συστήματος) που προκύπτει μετά την ολοκλήρωση του αλγορίθμου του Gauss ονομάζεται ***ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας*** και έχει τις επόμενες ιδιότητες:

α) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.

β) Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής.

γ) Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Από τη μορφή που λαμβάνει ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας ενός γραμμικού συστήματος μπορούμε να διαπιστώσομε άμεσα κατά πόσο το σύστημα έχει μία μοναδική λύση (και να την πάρομε κατευθείαν, χωρίς άλλους υπολογισμούς) ή έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο. Η τελευταία περίπτωση γίνεται αντιληπτή από το γεγονός ότι κατά την επίλυση του συστήματος με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα παρουσιάζεται μια γραμμή, η οποία έχει όλα τα στοιχεία της ίσα με μηδέν, με εξαίρεση το τελευταίο της στοιχείο που είναι μη μηδενικό (δηλ. έχει τη μορφή $0\ 0 \ldots 0|\alpha$, με $\alpha \neq 0$).

Τα παραδείγματα που ακολουθούν βοηθούν στην περαιτέρω κατανόηση του τρόπου εφαρμογής του αλγορίθμου της μεθόδου απαλοιφής του Gauss.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.9.3.

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 25 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19 \end{cases} \qquad (\Sigma_1)$$

που προέκυψε από την ανάλυση του Προβλήματος ΙΙ της παραγράφου 2.5, με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Λύση.

Το πρώτο στοιχείο της πρώτης στήλης του επαυξημένου πίνακα είναι μη μηδενικό, οπότε δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσομε τη γραμμοπράξη $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$ για να μεταφέρομε στην πρώτη γραμμή του πίνακα άλλη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.

Με εφαρμογή των διαδικασιών $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 + (-2)\varepsilon_1$, $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + (-6)\varepsilon_1$ και $\varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + (-1)\varepsilon_1$, λαμβάνομε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Αγνοούμε την πρώτη γραμμή, δηλαδή εργαζόμαστε με το επόμενο τμήμα του συστήματος

$$\begin{cases} -x_2 - 3x_3 = -15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Εφαρμόζομε τη διαδικασία $\varepsilon_1 \rightarrow (-1)\varepsilon_1$ για να πάρομε το $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ και χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 + 10 \cdot \varepsilon_1$ και $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + (-1) \cdot \varepsilon_1$ προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 15 \\ 14x_3 = 56 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Αγνοούμε και πάλι την πρώτη γραμμή του νέου συστήματος, δηλαδή εργαζόμαστε με το

$$\begin{cases} 14x_3 = 56 \\ -4x_3 = -16 \end{cases}$$

και εφαρμόζομε τη διαδικασία $\varepsilon_1 \to (\frac{1}{14})\varepsilon_1$ για να κάνομε το συντελεστή του x_3 στην πρώτη εξίσωση ίσο με 1, οπότε παίρνομε

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ -4x_3 = -16. \end{cases}$$

Το τελευταίο, με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 + (\frac{4}{14})\varepsilon_1$, δίνει το σύστημα

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζομε στο ισοδύναμο σύστημα που προέκυψε

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_3 = 4 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$$

επανειλημμένα τη διαδικασία $\varepsilon_i \to \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j$ ώστε, από γραμμή σε γραμμή, χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 καθεμιάς, να κάνομε ίσα με μηδέν όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή (Βήμα 6 της μεθόδου απαλοιφής του Gauss). Εφαρμόζομε λοιπόν τη διαδικασία $\varepsilon_1 \to \varepsilon_1 + (-2)\varepsilon_2$, προκειμένου να μηδενίσομε τους συντελεστές του x_2 στην πρώτη εξίσωση

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -10 \\ x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_3 = 4 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$$

και στη συνέχεια εφαρμόζομε τις διαδικασίες $\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 + (-3)\varepsilon_3$, $\varepsilon_1 \to \varepsilon_1 + 3\varepsilon_j$, προκειμένου να μηδενίσομε τους συντελεστές του x_3 στις δύο πρώτες εξισώσεις, οπότε φτάνομε στο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Η λύση του τελευταίου (άρα και του αρχικού, το οποίο είναι ισοδύναμο μ' αυτό) είναι προφανώς η $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ και $x_3 = 4$.

Οι γραμμοπράξεις και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ενός τετραγωνικού πίνακα μπορούν να μας βοηθήσουν στον έλεγχο της υπάρξεως ή όχι, καθώς και στην εύρεση του αντίστροφου ενός πίνακα.

Μια συστηματική μέθοδος υπολογισμού του αντίστροφου ενός τετραγωνικού $\nu\times\nu$ πίνακα, δίνεται στον αλγόριθμο που ακολουθεί.

Βήμα 1: Θεωρούμε τον πίνακα $[A|I_\nu]$, ο οποίος προκύπτει τοποθετώντας δεξιά από τον πίνακα A τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_ν.

Βήμα 2: Εφαρμόζομε στον πίνακα $[A|I_\nu]$ γραμμοπράξεις της μορφής $\gamma_i \leftrightarrow \gamma_j$, $\gamma_i \to \gamma_i + \lambda\gamma_j$ ή $\gamma_i \to \lambda\gamma_i$, με σκοπό να μετατραπεί ο A σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα B. Τότε, ο $[A|I_\nu]$ θα έχει μετατραπεί σ' έναν πίνακα της μορφής $[B|M]$.

Βήμα 3: Αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας B μπορεί να φτάσει στη μορφή ενός μοναδιαίου πίνακα ($B = I_\nu$), τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $M = A^{-1}$.
Αν όχι ($B \neq I_\nu$), τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Στο επόμενο παράδειγμα διασαφηνίζεται καλύτερα ο τρόπος εφαρμογής του προηγούμενου αλγόριθμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.9.4.

Να βρεθεί ο αντίστροφος των επομένων πινάκων (αν υπάρχει) χρησιμοποιώντας γραμμοπράξεις.

α) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ β) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Λύση.

α) Θεωρούμε τον πίνακα

$$[A|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Με εναλλαγή της θέσεως των δύο πρώτων γραμμών (γραμμοπράξη $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$) του πίνακα $[A|I_4]$ καταλήγομε στον επόμενο πίνακα, του οποίου το πρώτο στοιχείο της πρώτης γραμμής είναι ίσο με 1

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Εφαρμόζομε στη συνέχεια γραμμοπράξεις της μορφής $\gamma_i \to \gamma_i + \lambda\gamma_j$, ώστε να μηδενίσομε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που βρίσκονται κάτω από τη μονάδα της πρώτης γραμμής. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζοντας τις γραμμοπράξεις $\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1$, $\gamma_3 \to \gamma_3 + (-3)\gamma_1$, $\gamma_4 \to \gamma_4 + (-4)\gamma_1$ παίρνομε διαδοχικά τους επόμενους ισοδύναμους πίνακες

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Με χρήση της γραμμοπράξεως $\gamma_2 \to (\frac{1}{3})\gamma_2$ μετατρέπομε το διαγώνιο στοιχείο της δεύτερης γραμμής σε μονάδα, οπότε παίρνομε

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τη γραμμοπράξη $\gamma_4 \to \gamma_4 + (-2)\gamma_2$, ώστε να μηδενίσομε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης, που βρίσκονται κάτω από τη μονάδα που μόλις δημιουργήσαμε, παίρνομε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Εφαρμόζομε γραμμοπράξεις της μορφής $\gamma_i \to \gamma_i + \lambda\gamma_j$ ώστε να μηδενίσομε τα στοιχεία της τρίτης στήλης που βρίσκονται κάτω από τη μονάδα που βρίσκεται στη θέση (3, 3). Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζοντας τη γραμμοπράξη $\gamma_4 \to \gamma_4 + 5\gamma_3$ παίρνομε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{53}{3} & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Με χρήση της γραμμοπράξεως $\gamma_4 \to (\frac{1}{2})\gamma_4$ μετατρέπομε το διαγώνιο στοιχείο της τέταρτης γραμμής σε μονάδα, οπότε παίρνομε

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{53}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Τέλος, εφαρμόζομε γραμμοπράξεις της μορφής $\gamma_i \to \gamma_i + \lambda\gamma_j$, ώστε να μηδενίσομε τα στοιχεία της τρίτης και της τέταρτης στήλης που βρίσκονται επάνω από τη μονάδα, η οποία είχε δημιουργηθεί προηγουμένως επάνω στη διαγώνιο του πίνακα. Έτσι, χρησιμοποιώντας τις γραμμοπράξεις $\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_3$, $\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_3$, παίρνομε τους επόμενους ισοδύναμους πίνακες

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{53}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{53}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

και εφαρμόζοντας στη συνέχεια τις γραμμοπράξεις

$$\gamma_3 \to \gamma_3 + (-2)\gamma_4,\ \gamma_2 \to \gamma_2 + \gamma_4,\ \gamma_1 \to \gamma_1 + 2\gamma_4$$

προκύπτουν οι

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{44}{3} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{53}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{44}{3} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{53}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{41}{3} & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{44}{3} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{53}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Ο πίνακας αυτός έχει τη μορφή $[B|M]$, όπου ο B είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας και

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{41}{3} & 4 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{44}{3} & -4 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{53}{6} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Αφού ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ίσος με το μοναδιαίο πίνακα I_4, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του A είναι ο M που δίνεται παραπάνω ($A^{-1} = M$).

β) Εφαρμόζοντας στο νέο πίνακα

$$[A|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

τις ίδιες γραμμοπράξεις, που εφαρμόσαμε στο ερώτημα (α) θα προκύψουν κατά σειρά οι επόμενοι ισοδύναμοι πίνακες

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1, \\ \gamma_3 \to \gamma_3 + (-3)\gamma_1, \\ \gamma_4 \to \gamma_4 + (-4)\gamma_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \gamma_2 \to (\tfrac{1}{3})\gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \gamma_4 \to \gamma_4 + (-2)\gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{53}{3} & 5 & 1 \end{array}\right] \qquad \gamma_4 \to \gamma_4 + 5\gamma_3$$

Ο πίνακας αυτός έχει τη μορφή $[B|M]$, όπου ο B είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας. Εδώ, ο πίνακας B , ενώ είναι ανηγμένος κλιμακωτός, δεν είναι ο μοναδιαίος πίνακας, οπότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Αν το ομογενές γραμμικό σύστημα δεν είναι τετραγωνικό ($\mu \neq \nu$), μπορούμε να το μελετήσομε μετασχηματίζοντάς το σε ένα ισοδύναμο σύστημα, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας να είναι κλιμακωτός, [θα πάρει τη μορφή (βλ. 2.9.2) στον οποίο όλα τα β'_j, $j = 1, 2, ..., \mu$ έχουν μηδενιστεί]

$$\begin{array}{r} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1\nu}x_\nu = 0 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2\nu}x_\nu = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{r\nu}x_\nu = 0 \\ 0 = 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 = 0 \end{array}$$

όπου $1 \le r \le \mu, \nu$. Από το τελευταίο προκύπτουν άμεσα τα εξής:
α) Αν ισχύει $r = \mu = \nu$ το σύστημα θα έχει μία και μοναδική λύση, τη μηδενική.
β) Αν ισχύει $\mu < \nu$ το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.9.5.

Να λύσετε το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απαλοιφής.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Λύση.

Εκτελώντας τις διαδικασίες $\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1, \varepsilon_3 \to \varepsilon_3 - 6\varepsilon_1$ παίρνομε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 13x_2 - 10x_3 - 10x_4 = 0. \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας στο τελευταίο τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 - 13\varepsilon_2$, έχομε το

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 42x_3 - 36x_4 = 0 \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \frac{1}{42}\varepsilon_3$ καταλήγομε στο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{6}{7}x_4 = 0. \end{cases}$$

Στο τελευταίο σύστημα, οι συντελεστές των αγνώστων που είναι κάτω από τους διαγώνιους συντελεστές έχουν μηδενιστεί. Η μορφή που έλαβε ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτή με $\mu = 3, \nu = 4, r = 3$. Αφού ισχύει $r = \mu < \nu$, το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις που βρίσκονται αν ορίσομε αυθαίρετα τους τελευταίους $\nu - r = 1$ αγνώστους, δηλαδή τον x_4 και προσδιορίσομε τους άλλους από τη λύση του συστήματος, ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση και προχωρώντας προς την πρώτη με τη μέθοδο αντικαταστάσεως.

Για $x_4 = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$, η τρίτη εξίσωση δίνει $x_3 = \dfrac{6}{7}x_4 = \dfrac{6}{7}\lambda$ και από τη δεύτερη εξίσωση παίρνομε $x_2 = 4 \cdot \dfrac{6}{7}\lambda - 2 \cdot \lambda = \dfrac{10}{7}\lambda$. Τέλος η πρώτη εξίσωση δίνει $x_1 = 3 \cdot \dfrac{10}{7}\lambda - 2 \cdot \dfrac{6}{7}\lambda - \lambda = \dfrac{21}{7}\lambda$.

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\dfrac{21}{7}\lambda, \dfrac{10}{7}\lambda, \dfrac{6}{7}\lambda, \lambda)$.

Ασκήσεις.

2.9.1. Να βρείτε το βαθμό των επομένων πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας μόνο τη γραμμοπράξη $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$ (όσες φορές χρειάζεται) για να πάρετε έναν ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα.

2.9.2. Για καθένα από τους επόμενους πίνακες να βρείτε έναν ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα χρησιμοποιώντας γραμμοπράξεις και στη συνέχεια να βρείτε το βαθμό τους όσες φορές χρειάζεται) για να πάρετε έναν ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.9.3. Να βρείτε το βαθμό των επομένων πινάκων χρησιμοποιώντας μόνο ορίζουσες υποπινάκων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

2.9.4. Δίνονται τα συστήματα $AX=B$ όπου

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$ β) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Να βρείτε το βαθμό των πινάκων A, $\Gamma = [A|B]$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν το αντίστοιχο σύστημα έχει λύση, χωρίς να υπολογισθεί.

2.9.5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbf{R}$ είναι αδύνατο το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad\quad x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + kx_4 = 8. \end{cases}$$

2.9.6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbf{R}$ είναι συμβιβαστό το σύστημα

$$\begin{aligned} &x + y + z = 3 \\ &2x - y + z = 2 \\ &4x + y + 3z = 3k + 1 \\ &3x + y - z = k. \end{aligned}$$

Για την τιμή αυτή του k να βρείτε τη λύση του συστήματος.

2.9.7. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω ζεύγη πινάκων είναι ισοδύναμα.

α) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & \mathbf{O} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_3|\mathbf{O}]$

γ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [I_4|\mathbf{O}]$ δ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$

2.9.8. Χρησιμοποιώντας γραμμοπράξεις, να διαπιστώσετε ότι οι παρακάτω πίνακες δεν αντιστρέφονται.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.9.9. Χρησιμοποιώντας γραμμοπράξεις, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω πίνακες αντιστρέφονται και να βρείτε τον αντίστροφό τους.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.9.10. Να λύσετε τα επόμενα ομογενή συστήματα με τη μέθοδο της απαλοιφής.

α) $\begin{cases} 2x & +3y & +4z & = & 0 \\ -x & +y & -z & = & 0 \\ 7x & +y & +z & = & 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x & +4y & +4z & = & 0 \\ 2x & -2y & +3z & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x+3y+4z=0 \\ 3x+2y-4z=0 \\ 7x+8y+4z=0 \\ x-y-8z=0. \end{cases}$

2.10 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
Ορίζουσα τριγωνικού πίνακα.	Ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.
Ορίζουσα ενός πίνακα A που έχει δύο γραμμές ίσες (ή ανάλογες) ή δύο στήλες ίσες (ή ανάλογες).	$\lvert A\rvert = 0$

Ορίζουσες και πράξεις τετραγωνικών πινάκων.	$\lvert A^T\rvert = \lvert A\rvert$, $\lvert AB\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$, $\lvert \lambda A\rvert = \lambda^\nu \lvert A\rvert$ $\lvert A^k\rvert = \lvert A\rvert^k, k = 2, 3, \ldots$ $\left\lvert A^{-1}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert A\rvert}$ (όταν $\lvert A\rvert \neq 0$)
Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\lvert A\rvert \neq 0$.	$A^{-1} = \dfrac{1}{\lvert A\rvert} C^T$ όπου $C = [c_{ij}]_{\nu\times\nu}$, με $c_{ij} = (-1)^{i+j}\,\lvert M_{ij}\rvert$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij}.
Γραμμικό σύστημα με μ εξισώσεις και ν αγνώστους ή απλά γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$.	$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1$ $\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2$ .... $\alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu$ ή με χρήση πινάκων, $AX = B$ όπου $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$
Ένα γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$ μπορεί να είναι:	Αδύνατο ή συμβιβαστό (μία λύση ή άπειρες λύσεις).
Τύποι του Cramer (μόνο για $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα).	$x_1 = \dfrac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \dfrac{D_{x_2}}{D}, \ldots, x_\nu = \dfrac{D_{x_\nu}}{D}$
Ομογενές γραμμικό σύστημα $AX = \mathbf{O}$.	Είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική, είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες.

2.11 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, τότε η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο $\lvert A\rvert = \alpha_{11}\alpha_{12} - \alpha_{21}\alpha_{22}$.	**Σ Λ**
2.	Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι ίση με μηδέν.	**Σ Λ**
3.	Αν η ορίζουσα ενός πίνακα A είναι ίση με 1, τότε ο A θα είναι ίσος με τον ταυτοτικό πίνακα.	**Σ Λ**

4.	Η ορίζουσα ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του.	**Σ Λ**
5.	Αν τα στοιχεία ενός πίνακα A είναι όλα ίσα με 1, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.	**Σ Λ**
6.	Αν δύο γραμμές ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.	**Σ Λ**
7.	Αν $A^3 = \mathbf{O}$, τότε $\|A\| = 1$.	**Σ Λ**
8.	Σ' ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόζομε την εξής διαδικασία: Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση i με εκείνη που προκύπτει αν διαιρέσομε και τα δύο μέλη της με ένα μη μηδενικό αριθμό λ. Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.	**Σ Λ**
9.	Σ' ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόζομε την εξής διαδικασία: Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση i με εκείνη που προκύπτει αν και στα δύο μέλη της προσθέσομε τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης που βρίσκεται στη θέση j. Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.	**Σ Λ**
10.	Η μέθοδος της αντιστροφής προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων συστημάτων. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι διευκολύνει στην επίλυση πολλών συστημάτων της μορφής $AX=B$ με τον ίδιο πίνακα B, αλλά διαφορετικό δεξί μέλος A.	**Σ Λ**
11.	Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}$ δεν έχει άλλες λύσεις εκτός από τη μηδενική λύση.	**Σ Λ**
12.	Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες λύσεις.	**Σ Λ**
13.	Η ν-άδα (0,0,...,0) είναι λύση κάθε ομογενούς γραμμικού συστήματος με ν αγνώστους.	**Σ Λ**
14.	Ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν

1.	Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ είναι ίση με: α) $\|A\| = 0$ β) $\|A\| = 1$ γ) $\|A\| = 6$ δ) $\|A\| = 1/2$
2.	Αν A είναι ένας 2×2 πίνακας, τότε: α) $\|2A\| = 4\|A\|$ β) $\|2A\| = 2\|A\|$ γ) $\|2A\| = \frac{1}{2}\|A\|$ δ) $\|2A\| = \|A\|$
3.	Αν A, B είναι δύο πίνακες με $\|A\| = 3$, $\|B\| = 4$ τότε α) $\|AB\| = 12$ β) $\|AB\| = 3^4$ γ) $\|AB\| = 4^3$ δ) $\|AB\| = 7$

4.	Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με εναλλαγή της θέσεως δύο γραμμών (ή δύο στηλών) του πίνακα A, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει: α) $\|B\|+\|A\|=0$ β) $\|B\|=\|A\|$ γ) $\|B\|=\|-A\|$ δ) $\|B\|=\frac{1}{\|A\|}$
5.	Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με αντικατάσταση μιας στήλης του πίνακα A με εκείνη που προκύπτει με πρόσθεση σε αυτήν μιας άλλης στήλης) του πίνακα A πολλαπλασιασμένης επί ένα (μη μηδενικό) αριθμό, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει: α) $\|B\|+\|A\|=0$ β) $\|B\|=\|A\|$ γ) $\|B\|=\|-A\|$ δ) $\|B\|=\frac{1}{\|A\|}$
6.	Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις είναι γραμμική εξίσωση με αγνώστους τα x, y, z ; α) $x-3\sqrt{y}+2z=1$ β) $x-y\sqrt{3}+2z=1$ γ) $x-3\sqrt{y}+2z=0$ δ) Καμμία
7.	Ποιος από τους επόμενους τύπους ισχύει πάντοτε (εφόσον έχουν νόημα οι πράξεις που σημειώνονται); α) $\|AA^T\|=\|A\|^2$ β) $\|AB\|=\|A\|\cdot\|B\|$ γ) $\|A^T\|=\|A\|$ δ) Και οι τρεις.
8.	Το σύστημα $\begin{cases}\lambda x+y=1\\ x+\lambda y=-1\end{cases}$ είναι αδύνατο, αν α) $\lambda=0$ β) $\lambda=1$ γ) $\lambda=-1$ δ) $\lambda\neq 0,-1,1$
9.	Ποια από τις παρακάτω διαδικασίες οδηγεί σε ισοδύναμο σύστημα; α) $\varepsilon_1\to\varepsilon_2+5\varepsilon_3$ β) $\varepsilon_1\to\varepsilon_1+5\varepsilon_2$ γ) $\varepsilon_1\to 5\varepsilon_2$ δ) $\varepsilon_1\to(1/5)\,\varepsilon_2$
10.	Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξεως ν με $\lambda=\|A\|\neq 0$ και C^T είναι ο προσαρτημένος πίνακας του A, τότε: α) Ισχύει η ισότητα $A\,C^T=\|A\|\cdot I_\nu$. β) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο $A^{-1}=\frac{1}{\|A\|}C^T$. γ) Ισχύει η ισότητα $\|A^{-1}\|=\frac{1}{\|A\|}$. δ) Ισχύουν όλα τα προηγούμενα.
11.	Το γραμμικό σύστημα $AX=B$ ονομάζεται ομογενές, όταν: α) $B=\mathbf{O}$ β) $A=\mathbf{O}$ γ) $A=I$ δ) $B=I$
12.	Έστω ένα $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα $AX=B$. Αν $\|A\|=0$, τότε το σύστημα: α) Είναι αδύνατο. β) Ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. γ) Έχει άπειρες λύσεις. δ) Είναι συμβιβαστό.

13.	΄Ενα ομογενές γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους: α) Μπορεί να έχει ακριβώς 4 λύσεις. β) Μπορεί να έχει μοναδική λύση. γ) Μπορεί να είναι αδύνατο. δ) ΄Εχει πάντοτε μία λύση.

2.12 Γενικές ασκήσεις.

2.12.1. Δίνονται τρεις ευθείες με εξισώσεις $4\lambda x - 3y + 2\lambda - 3 = 0,\ 3x - 2y + 5 = 0,\ 4x - 2\lambda y + 1 = 0$, όπου $\lambda \in \mathrm{R}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ, για τους οποίους οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β) Για καθέναν από τους αριθμούς αυτούς να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

2.12.2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως ν αν γνωρίζετε ότι $|A| \neq 0$ και ότι ισχύει $A^4 = A$.

2.12.3. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως ν αν γνωρίζετε ότι ισχύει $A^T = -A$ και ότι το ν είναι άρτιος θετικός ακέραιος.

2.12.4. Να υπολογίσετε η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως ν αν γνωρίζετε ότι $|A| \neq 0$ και ότι ισχύει $A^T A^3 A^T = AA^T$.

2.12.5. ΄Εστω λ ένας πραγματικός αριθμός, P ένας αντιστρέψιμος πίνακας και B ο πίνακας που δίνεται από τον τύπο $B = P^{-1}AP$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα $\lambda I - B = P^{-1}(\lambda I - A)P$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ορίζουσες των πινάκων $\lambda I - B$ και $\lambda I - A$ είναι ίσες.

2.12.6. ΄Εστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν και λ ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $|A - \lambda I_\nu| = 0$. Τότε ο αριθμός λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του πίνακα A.

α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης ασκήσεως να αποδείξετε ότι οι πίνακες A και $B = P^{-1}AP$ έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές.

β) Να βρείτε τις ιδιοτιμές των επομένων πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 3 & 0 \\ \gamma & \varepsilon & \theta & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.12.7. Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

α) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ β) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y & a \\ 0 & 0 & z & \beta & k \\ 0 & w & \gamma & m & b \\ u & \delta & n & c & s \end{bmatrix}$

Στη συνέχεια να γενικεύσετε το αποτέλεσμα για πίνακες τάξεως ν, οι οποίοι έχουν τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,\nu-1} & a_{2\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,\nu-1} & a_{3\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\nu-1,2} & a_{\nu-1,3} & \cdots & a_{\nu-1,\nu-1} & a_{\nu-1,\nu} \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \cdots & a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

2.12.8. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα (τάξεως ν)

$$\begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+a_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+a_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+a_{\nu-1} & a \\ a & a & a & \cdots & a & a+a_\nu \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $\alpha(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu)$.

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 5, γνωρίζομε ότι ισχύει

$$A \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A.
(***Υπόδειξη:*** Να αφαιρέσετε την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες. Παρατηρήστε στη συνέχεια ότι ο πίνακας που δημιουργείται είναι άνω τριγωνικός).

2.12.9. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο να αποδείξετε ότι η ορίζουσα του $\nu \times \nu$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $|A| = (x+(\nu-1)a)(x-a)^{\nu-1}$.

2.12.10. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} (x+a)^2 & x^2+a^2 & ax & p \\ (y+\beta)^2 & y^2+\beta^2 & \beta y & q \\ (z+\gamma)^2 & z^2+\gamma^2 & \gamma z & r \\ (w+\delta)^2 & w^2+\delta^2 & \delta w & s \end{vmatrix} = 0 .$$

(***Υπόδειξη***: Προσθέστε στη δεύτερη γραμμή την τρίτη στήλη πολλαπλασιασμένη επί 2 και στη συνέχεια διαπιστώστε ότι η ορίζουσα που προκύπτει έχει δύο ίδιες στήλες).

2.12.11. Έστω *Α, Β, Γ* τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου *xOy* με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Άσκηση 2.3.14, για τις συντεταγμένες των σημείων θα ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

είναι εξίσωση κύκλου.

α) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος περνάει από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία (1, 1), (3, 4) και (4, 2).

3

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η ιδέα του μιγαδικού αριθμού πρωτοεμφανίστηκε το 16ο αιώνα στην προσπάθεια των μαθηματικών της εποχής εκείνης να λύσουν εξισώσεις 2ου βαθμού. Η επίλυση ορισμένων τέτοιων εξισώσεων δημιουργούσε ιδιαίτερες δυσκολίες, αφού η χρησιμοποίηση των μέχρι τότε γνωστών τύπων και μεθόδων οδηγούσε στο «παράδοξο» της εμφανίσεως τετραγωνικών ριζών αρνητικών αριθμών. Για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιούσαν ένα ειδικό σύμβολο για την τετραγωνική ρίζα του αριθμού –1 (την οποία θεωρούσαν ως μη υπαρκτή, φανταστική ποσότητα) και εκτελούσαν πράξεις ανάλογες με τους πραγματικούς αριθμούς.

Οι μιγαδικοί αριθμοί μελετήθηκαν αρχικά από το γνωστό μαθηματικό του 16ου αιώνα Gerolamo Cardano, οι κανόνες όμως στους οποίους υπακούουν δόθηκαν πολύ αργότερα από τον Euler στο περίφημο σύγγραμμά του «Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση».

Όπως και σε αρκετές άλλες περιπτώσεις, οι μιγαδικοί αριθμοί, δημιούργημα αρχικά της «μαθηματικής περιέργειας και φαντασίας», απέκτησε ραγδαία ιδιαίτερη πρακτική αξία και σήμερα αποτελούν πλέον βασικό εργαλείο της μηχανολογίας, της ηλεκτροτεχνίας, της φυσικής κ.λπ..

3.1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού – Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών.

Είναι γνωστό ότι, αν η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ της δευτεροβάθμιας εξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, είναι αρνητική, τότε η εξίσωση αυτή δεν έχει ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x^2 - 6x + 10 = 0,$$

της οποίας η διακρίνουσα είναι ίση με $\Delta = -4$, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(x^2 - 6x + 9) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -1$$

και για να μπορέσομε να επιλύσομε την τελευταία, χρειαζόμαστε έναν αριθμό $y = x - 3$, για τον οποίο να ισχύει $y^2 = -1$. Γνωρίζομε όμως ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός y με τέτοια ιδιότητα. Επομένως, η εξίσωση δεν έχει λύση στο ***σύνολο των πραγματικών αριθμών.***

Η ανάγκη ευρέσεως ενός αριθμού ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση $y^2 = -1$, οδήγησε στην εισαγωγή της έννοιας του μιγαδικού αριθμού. Το νέο σύνολο, εφοδιασμένο με κατάλληλες πράξεις, αποτελεί μια διεύρυνση του συνόλου των πραγματικών αριθμών ονομάζεται ***σύνολο των μιγαδικών αριθμών*** και συμβολίζεται με **C**.

Ας υποθέσομε ότι θέλομε «να επεκτείνομε» το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών σ’ ένα νέο σύνολο, που να έχει παρόμοιες πράξεις με το **R**. Τότε οι νέες πράξεις θα πρέπει να υπακούουν στις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με τις γνωστές πράξεις στο **R** και στο νέο σύνολο η εξίσωση $x^2 = -1$ να έχει λύση. Οι λύσεις της εξισώσεως αυτής θα συμβολίζονται με i ***(φανταστική μονάδα)*** και $-\mathrm{i}$, δηλαδή θα έχομε

$$\mathrm{i}^2 = -1 \ \text{ και } \ (-\mathrm{i})^2 = -1.$$

Το νέο σύνολο, το οποίο όπως ήδη αναφέρθηκε ονομάζεται σύνολο των μιγαδικών αριθμών και συμβολίζεται με **C**, περιέχει ως στοιχεία:

α) Αθροίσματα της μορφής $a + \beta\ \mathrm{i}$ με $a,\ \beta \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ (τα οποία ονομάζονται ***καθαροί μιγαδικοί*** αριθμοί).

β) Αθροίσματα της μορφής $a + 0\ \mathrm{i}$ με $a \in \mathbf{R}$ τα οποία «ταυτίζονται» με τους αντίστοιχους πραγματικούς αριθμούς $a \in \mathbf{R}$ και

γ) στοιχεία της μορφής $\beta\ \mathrm{i}$, $\beta \in \mathbf{R}^*$ (τα οποία ονομάζονται ***φανταστικοί αριθμοί***).

Γενικά με τον όρο ***μιγαδικός αριθμός*** (ή απλώς μιγαδικός) εννοούμε μια έκφραση της μορφής $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Ο πραγματικός αριθμός α ονομάζεται ***πραγματικό μέρος*** και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(z)$, ενώ ο πραγματικός αριθμός β ονομάζεται ***φανταστικό μέρος*** και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(z)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο σύνολο **C**, ένας πραγματικός αριθμός $a \in \mathbf{R}$ γράφεται στη μορφή

$$z = \alpha + 0\mathrm{i} \qquad (\text{οπότε ισχύει } \mathrm{Im}(z) = 0),$$

ενώ ένας φανταστικός αριθμός $\beta\mathrm{i}$, $\beta \in \mathbf{R}^*$ γράφεται στη μορφή

$$z = 0 + \beta\mathrm{i} \qquad (\text{οπότε ισχύει } \mathrm{Re}(z) = 0).$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta\mathrm{i}$ και $z_2 = \gamma + \delta\mathrm{i}$ είναι ίσοι αν και μόνο αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$, δηλαδή

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \text{ και } \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2).$$

Ειδικότερα, ένας μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ είναι ίσος με το μηδέν αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, δηλαδή

$$a + \beta\ \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \beta = 0$$

Έτσι:

α) Αν $z_1 = 3+4\mathrm{i}, z_2 = 3-4\mathrm{i}, z_3 = -3+4\mathrm{i}$ και $z_4 = -3-4\mathrm{i}$, κανένας από τους αριθμούς αυτούς δεν είναι ίσος με έναν από τους άλλους, παρόλο που όταν τους εξετάζομε ανά ζεύγη μπορεί να έχουν ίδιο το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος (όχι όμως και τα δύο συγχρόνως).

β) Ο μιγαδικός αριθμός $z = (\alpha - 2) + (3\beta - 5)\mathrm{i}$ είναι ίσος με το μηδέν αν και μόνο αν $\alpha = 2$ και $\beta = 5/3$.

Οι πράξεις της προσθέσεως και της αφαιρέσεως μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι πράξεις με διώνυμα της μορφής $a + \beta x$ με $a, \beta \in \mathbf{R}$. Έτσι, αν $a + \beta\mathrm{i}$ και $\gamma + \delta\mathrm{i}$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε το άθροισμά τους και η διαφορά τους ορίζονται ως εξής:

$$\text{Άθροισμα: } (a+\beta\ \mathrm{i})+(\gamma+\delta\ \mathrm{i}) = (a+\gamma)+(\beta+\delta)\ \mathrm{i}$$

$$\text{Διαφορά: } (a+\beta\ \mathrm{i})-(\gamma+\delta\ \mathrm{i}) = (a-\gamma)+(\beta-\delta)\ \mathrm{i}$$

Επομένως, για να προσθέσομε ή να αφαιρέσομε δύο μιγαδικούς αριθμούς, προσθέτομε ή αφαιρούμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών χωριστά. Για παράδειγμα,

$$(7-3\mathrm{i})+(2+8\mathrm{i})=(7+2)+(-3+8)\mathrm{i}=9+5\mathrm{i}, \quad 5\mathrm{i}+(6-2\mathrm{i})=(0+6)+(5-2)\ \mathrm{i}=6+3\mathrm{i}.$$

Αφού

$$(a+\beta\ \mathrm{i})+(0+0\ \mathrm{i})=(0+0\ \mathrm{i})+(a+\beta\ \mathrm{i})=a+\beta\ \mathrm{i},$$

το ***ουδέτερο στοιχείο*** της προσθέσεως στο σύνολο των μιγαδικών είναι ο μηδενικός μιγαδικός αριθμός $0+0\mathrm{i}=0$. Επί πλέον, από την ισότητα

$$(a+\beta\ \mathrm{i})+((-a)+(-\beta)\ \mathrm{i})=(a-a)+(\beta-\beta)\ \mathrm{i}=0+0\ \mathrm{i}=0,$$

είναι φανερό ότι, ο ***αντίθετος*** του μιγαδικού $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $(-\alpha) + (-\beta)\mathrm{i} = -\alpha - \beta\mathrm{i}$, τον οποίο θα συμβολίζομε με $-z$.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή αξίζει να αναφερθεί ότι, σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς, δύο μιγαδικοί αριθμοί δεν διατάσσονται σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά μεγέθους. Έτσι αν $z_1 = \alpha + \beta\mathrm{i}$ και $z_2 = \gamma + \delta\mathrm{i}$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε είτε θα ισχύει $z_1 = z_2$, είτε $z_1 \neq z_2$. Στη δεύτερη περίπτωση όμως, δεν υπάρχει κάποιος κανόνας, με βάση τον οποίο να αποφασίζομε κατά πόσο ο αριθμός z_1 είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τον αριθμό z_2 (εκτός αν $\beta = \delta = 0$, οπότε η σύγκριση γίνεται ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.1.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = (\alpha + \beta - 5) + 4\mathrm{i}$ και $z_2 = (2\alpha - 3) + (\alpha + \beta)\mathrm{i}$ να είναι ίσοι.

Λύση.

Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι ίσοι, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\beta-5=2a-3 \\ a+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+\beta=2 \\ a+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta=6 \\ a+\beta=4. \end{cases}$$

Άρα $\beta = 3$ και $\alpha = 1$. Για τις τιμές αυτές έχομε $z_1 = z_2 = -1+4\mathrm{i}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ με $\gamma \neq 0$ ισχύει $\frac{a}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{2}{\gamma}$, να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2(a+\beta)+(\beta-a)\gamma\,\mathrm{i}$ και $z_2 = 5a + 2\mathrm{i}$ είναι ίσοι.

Λύση.

Αν θέσομε $\frac{a}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{2}{\gamma}=k$, θα έχομε

$$\frac{a}{2}=k \Leftrightarrow a=2k, \qquad \frac{\beta}{3}=k \Leftrightarrow \beta=3k \qquad \text{και} \qquad \frac{2}{\gamma}=k \Leftrightarrow \gamma=\frac{2}{k}.$$

Επομένως $z_1 = 2(a+\beta)+(\beta-a)\gamma\,\mathrm{i} = 2(2k+3k)+(3k-2k)\frac{2}{k}\mathrm{i} = 10k + k\frac{2}{k}\mathrm{i} = 10k+2\mathrm{i}$,

$$z_2 = 5a + 2\mathrm{i} = 5\cdot 2k + 2\mathrm{i} = 10k + 2\mathrm{i}$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Ασκήσεις.

3.1.1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, έτσι ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = (a+\beta-4)+(a-\beta+1)\mathrm{i}$ και $z_2 = (2a-4)+(a+\beta-3)\,\mathrm{i}$ να είναι:

α) Και οι δύο φανταστικοί αριθμοί, β) Ίσοι,

γ) Και οι δύο πραγματικοί αριθμοί.

3.1.2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες ισότητες.

α) $(a-3)+3\mathrm{i} = 1+(\beta-1)\,\mathrm{i}$ β) $(10\alpha+3\beta-5)+(20-4\beta)\mathrm{i} = 0$

γ) $(\alpha-\beta)+(a+\beta)\,\mathrm{i} = 7-5\mathrm{i}$ δ) $(a^2-\beta^2)+(a+\beta)\,\mathrm{i} = 9+3\mathrm{i}$

3.1.3. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς.

α) $(9+4\mathrm{i})+(5-7\mathrm{i})$ β) $(10a\,\mathrm{i}+3\beta-5\mathrm{i})+(20a\,\mathrm{i}-4\beta+3\mathrm{i})=0$

γ) $(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\mathrm{i})+(-3\sqrt{7}-2\sqrt{3}\mathrm{i})$ δ) $(4+3\mathrm{i})-(6-4\mathrm{i})+(2-7\mathrm{i})$

3.1.4. Αν $x, y, z \in \mathbf{R}$ και ισχύει $(x+y)-(x-y)\,\mathrm{i} = 5z + z\,\mathrm{i}$, να αποδείξετε ότι $2x - y = z$.

3.1.5. Έστω ο μιγαδικός $z = (k-5)+(\lambda-4)\,\mathrm{i}$, όπου k, λ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα k, λ ώστε:

α) $z = -\,\mathrm{i}$ β) $z = 3$

γ) $z \in \mathbf{R}$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 2$ δ) $\mathrm{Re}(z) = 2$ και $\mathrm{Im}(z) = 4$

3.1.6. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \in \mathbf{R}$ ισχύει $\frac{a}{3}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{5}$, να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3(\gamma-\beta)+4(\beta-a)\mathrm{i}$, $z_2 = a+\beta\,\mathrm{i}$, $z_3 = a+2(\gamma-a)\,\mathrm{i}$ είναι ίσοι.

3.1.7. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1+2\,\mathrm{i}$, $z_2 = 2+3\,\mathrm{i}$, $z_3 = 3+4\,\mathrm{i}$. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει:

α) $z + z_3 = z_1 + z_2$ β) $z + \mathrm{Re}(z_3) = z_1 + z_2$ γ) $z + z_3 = \mathrm{Re}(z_1+z_2) - \mathrm{Im}(z_1+z_2)$

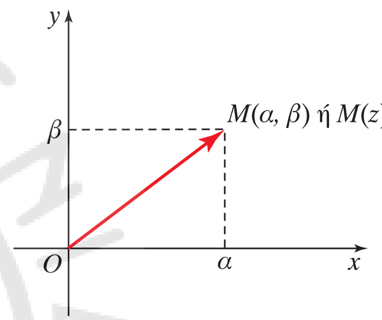
3.2 Γεωμετρική παράσταση και μέτρο μιγαδικού.

Είναι γνωστό ότι, τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να τους αντιστοιχίσομε σε σημεία ενός άξονα, ο οποίος ονομάζεται ***άξονας των πραγματικών αριθμών***. Οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ μπορούν να απεικονισθούν σε σημεία $M(\alpha, \beta)$ του Καρτεσιανού επιπέδου και αντίστροφα[1] (σχ. 3.2α). Το σημείο M ονομάζεται ***εικόνα*** του μιγαδικού αριθμού z και θα συμβολίζεται με $M(\alpha, \beta)$ ή $M(z)$ ή απλώς $\alpha + \beta\mathrm{i}$. Το επίπεδο, επάνω στο οποίο σημειώνονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών ονομάζεται ***μιγαδικό επίπεδο*** ή ***επίπεδο Gauss***. Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται ***πραγματικός άξονας*** και ο κατακόρυφος ***φανταστικός άξονας.***

Στο σχήμα 3.2β δίνεται η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του αριθμού $z = -3 + 2\,\mathrm{i}$.

Η απόσταση της αρχής των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ από το σημείο $M(\alpha, \beta)$, που είναι η εικόνα του $z = a + \beta\mathrm{i}$, (σχ. 3.2γ) ονομάζεται ***μέτρο*** (ή απόλυτη τιμή) του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $|z|$, δηλαδή

$$|z| = |a + \beta\ \mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + \beta^2}.$$



Σχ. 3.2α.

Έτσι, για τον αριθμό $z = -3 + 2\,\mathrm{i}$ θα έχομε

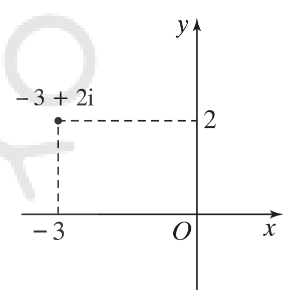
$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Η έννοια του μέτρου έχει μια ενδιαφέρουσα πρακτική ερμηνεία στην ηλεκτροτεχνία. Η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος RLC, ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός

$$z = R + \mathrm{i}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right),$$

όπου ω ο παλμός, $\mathrm{Re}(z) = R$ η ωμική αντίσταση και $\mathrm{Im}(z) = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ η αντίσταση που οφείλεται στην αυτεπαγωγή L και στη χωρητικότητα C. Το μέτρο αυτού του μιγαδικού δίνεται από τον τύπο:

$$|z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$



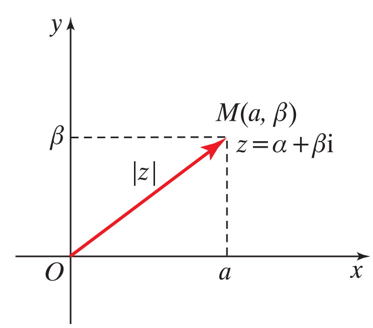
Σχ. 3.2β.

και εκφράζει τη λεγόμενη ***εμπέδηση*** του κυκλώματος.

Η απεικόνιση μιγαδικών αριθμών σε σημεία του Καρτεσιανού επιπέδου, μας επιτρέπει να αντιστοιχίσομε τους μιγαδικούς στις διανυσματικές ακτίνες των σημείων αυτών. Έτσι στο μιγαδικό $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ αντιστοιχίζομε τη ***διανυσματική ακτίνα*** $\overrightarrow{OM}$. Είναι φανερό ότι

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + \beta^2} = |z|,$$

δηλαδή το μήκος της διανυσματικής ακτίνας $\overrightarrow{OM}$ ισούται με το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z.

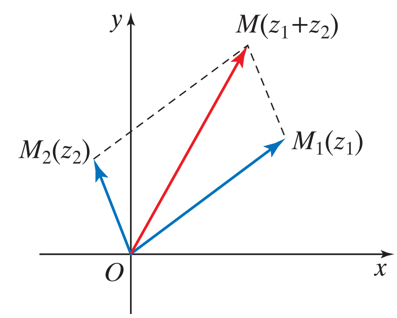


Σχ. 3.2γ.

Με τη βοήθεια των διανυσματικών ακτίνων των μιγαδικών μπορούμε να ερμηνεύσομε γεωμετρικά το άθροισμα και τη διαφορά των

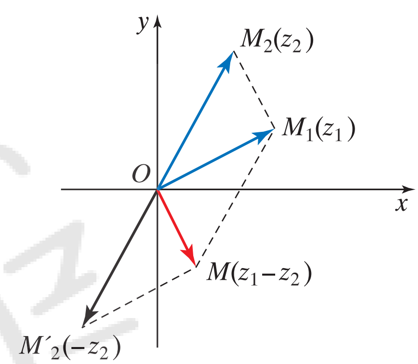
1. Η βασική ιδέα της αναπαραστάσεως των μιγαδικών αριθμών με χρησιμοποίηση σημείων του επιπέδου, οφείλεται στον Jean Robert Argand (1806).

μιγαδικών. Έστω $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ αντίστοιχα. Τότε το άθροισμα $z_1 + z_2$ έχει ως διανυσματική ακτίνα τη διαγώνιο $\overrightarrow{OM}$ του παραλληλογράμμου που δημιουργείται αν χρησιμοποιήσομε ως διαδοχικές πλευρές τις διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ (σχ. 3.2δ).



Σχ. 3.2δ.

Επίσης, η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του σημείου $M(z_1 - z_2)$ βρίσκεται αν προσθέσομε τη διανυσματική ακτίνα $-\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2'}$ του σημείου $M_2'(-z_2)$ στη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM_1}$ του $M_1(z_1)$. Από το σχήμα 3.2ε είναι φανερό ότι, η διανυσματική ακτίνα που αντιστοιχεί στη διαφορά $z_1 - z_2$ προκύπτει αν φέρομε από την αρχή των αξόνων ένα διάνυσμα παράλληλο προς το $\overrightarrow{M_2M_1}$.



Σχ. 3.2ε.

Στην περίπτωση που τα σημεία O, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι συνευθειακά, οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $z_1 + z_2, z_1 - z_2$ προκύπτουν με απλή πρόσθεση ή αφαίρεση των ευθυγράμμων τμημάτων OM_1, OM_2, όπως φαίνεται στα σχήματα 3.2στ και 3.2ζ.

Ας θεωρήσομε τώρα δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 έτσι, ώστε τα σημεία O, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ να μην είναι συνευθειακά. Από το τρίγωνο OMM_2 του σχήματος 3.2η παίρνομε με βάση τη γνωστή τριγωνική ανισότητα της Γεωμετρίας, ότι:

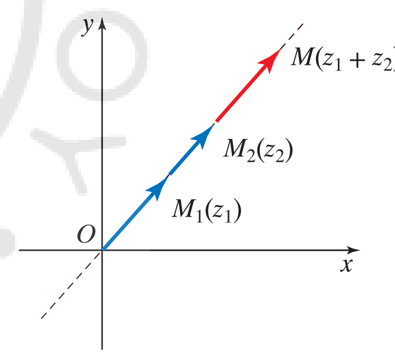
$$|(M_2M) - (OM_2)| < (OM) < (M_2M) + (OM_2)$$

και επειδή ισχύει $\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{OM_1}$, μπορούμε να γράψομε

$$\big||z_1| - |z_2|\big| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

Στην περίπτωση που τα σημεία O, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι συνευθειακά και οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ είναι ομόρροπες, θα ισχύει (σχ. 3.2στ)

$$\big||z_1| - |z_2|\big| < |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|,$$



Σχ. 3.2στ.

ενώ αν τα σημεία O, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι συνευθειακά και οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ είναι αντίρροπες (σχ. 3.2ζ), θα έχομε

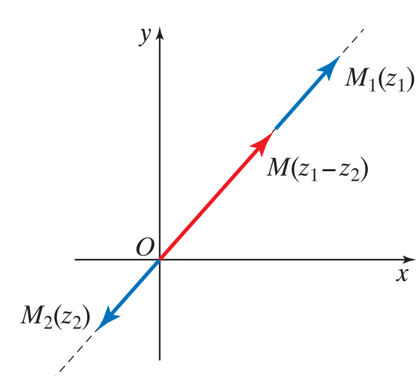
$$\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

Τέλος, αν ένας τουλάχιστον από τους δύο μιγαδικούς z_1 και z_2 είναι ίσος με μηδέν, τότε

$$\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$



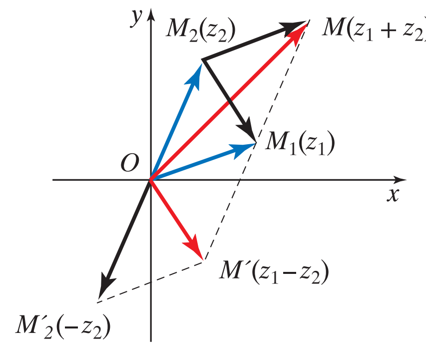
Σχ. 3.2ζ.

Η τελευταία ανισότητα είναι γνωστή με την ονομασία ***τριγωνική***

ανισότητα για μιγαδικούς αριθμούς.

Από το σχήμα 3.2θ είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM'}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως μπορούμε να διατυπώσομε τον επόμενο ισχυρισμό:

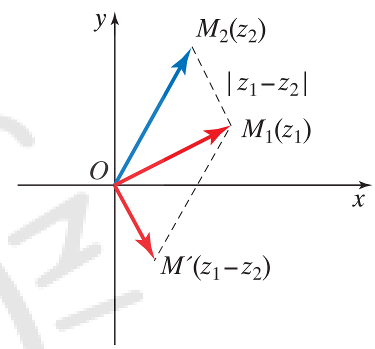
> Η απόσταση των σημείων M_1 και M_2, που είναι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα, είναι ίση με το μέτρο της διαφοράς $z_1 - z_2$.



Σχ. 3.2η

Η παραπάνω διαπίστωση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, αν δοθεί ένας μιγαδικός αριθμός $z_0 = x_0 + y_0 i$, του οποίου η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ένας θετικός αριθμός r, τότε:

> Η εξίσωση $|z - z_0| = r$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r.



Σχ. 3.2θ.

Έτσι, για να βρούμε την αναλυτική εξίσωση (της περιφέρειας) ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r (σχ. 3.2ι), μπορούμε να γράψομε διαδοχικά

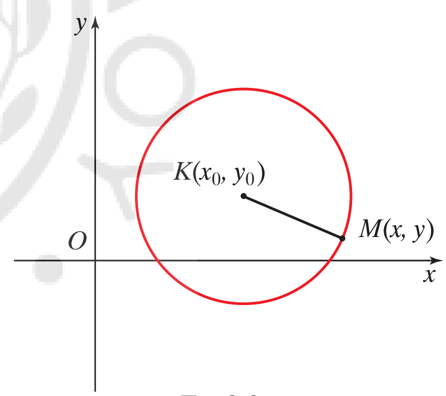
$$|z - z_0| = r \Leftrightarrow |x + y\mathrm{i} - x_0 - y_0\mathrm{i}| = r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(x - x_0) + (y - y_0)\,\mathrm{i}| = r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Στην περίπτωση που το κέντρο K του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων O(0,0), θα έχομε $x_0 = y_0 = 0$, οπότε η εξίσωση του κύκλου γίνεται

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |z| = r\,.$$



Σχ. 3.2ι.

Είναι φανερό ότι

> οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z| > r$ είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου $|z| = r$,

ενώ

> οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z| < r$ είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου $|z| = r$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.1.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = (x-1) + (y-1)\mathrm{i}$ με $|z| = 5$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,1)$ και ακτίνα $r = 5$.

Λύση.

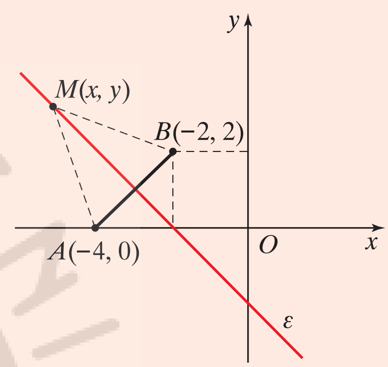
Έχομε $|z|=5 \Leftrightarrow |(x-1)+(y-1)\mathrm{i}|=5 \Leftrightarrow |(x+y\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})|=5 \Leftrightarrow |w-(1+\mathrm{i})|=5$,

όπου θέσαμε $w=x+y\,\mathrm{i}$. Επομένως, τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,1)$ (το οποίο είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_0=1+\mathrm{i}$) και ακτίνα $r=5$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου αυτού βρίσκεται άμεσα ως εξής

$$|(x-1)+(y-1)\mathrm{i}|=5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=5 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=5^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2.

Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|z+4|=|z+2-2\mathrm{i}|$.



Σχ. 3.2ια.

Λύση.

Έχομε $|z+4|=|z+2-2\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z-(-4)|=|z-(-2+2\mathrm{i})|$.

Έστω $A(-4,0)$, $B(-2,2)$ οι εικόνες των μιγαδικών $-4+0\mathrm{i}$, $-2+2\mathrm{i}$, αντίστοιχα και $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+y\,\mathrm{i}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2ια.

Το μέτρο της διαφοράς $|z-(-4+0\mathrm{i})|$ παριστάνει την απόσταση (AM), ενώ το μέτρο της διαφοράς $|z-(-2+2\mathrm{i})|$ παριστάνει την απόσταση (BM). Επειδή θέλομε

$$|z-(-4+0\mathrm{i})|=|z-(-2+2\mathrm{i})|,$$

θα πρέπει $(AM)=(MB)$. Άρα, τα σημεία M ισαπέχουν από τα άκρα $A(-4,0)$, $B(-2,2)$ του τμήματος AB, οπότε βρίσκονται στη μεσοκάθετο ε του AB.

Αντίστροφα, για κάθε σημείο $M(x,y)$ της μεσοκαθέτου ε ισχύει (AM) = (MB), οπότε

$$|z-(-4+0\mathrm{i})|=|z-(-2+2\mathrm{i})|.$$

Σημειώνεται ότι ισχύει γενικότερα το επόμενο αποτέλεσμα.

Αν z_1, z_2 είναι δύο δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 \neq z_2$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z-z_1|=|z-z_2|,$$

βρίσκονται επάνω στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους αριθμούς z_1 και z_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.3.

Τα σημεία τα οποία φωτίζονται από ένα φάρο Α περιγράφονται από τις εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z-4+2\mathrm{i}|<3$. Τα σημεία, τα οποία φωτίζονται από ένα δεύτερο φάρο Β περιγράφονται από τις εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z-8-2\mathrm{i}|<4$. Να βρείτε σημεία:

α) Τα οποία φωτίζονται από το φάρο Α και από το φάρο Β και β) τα οποία φωτίζονται μόνο από το φάρο Α και όχι από το φάρο Β.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε, μας ενδιαφέρουν οι εικόνες $M(z)$ των σημείων, τα οποία ικανοποιούν τις επόμενες δύο συνθήκες

$$|z-(4-2\mathrm{i})|<3, \qquad |z-(8+2\mathrm{i})|<4.$$

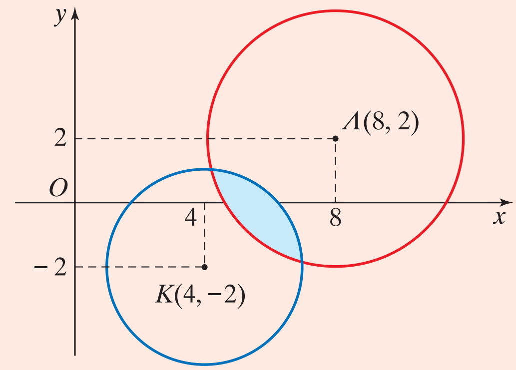
Έστω $K(4,-2)$, $\Lambda(8,2)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $4-2\mathrm{i}, 8+2\mathrm{i}$ αντίστοιχα. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z-(4-2\mathrm{i})|<3$$

θα βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(4,-2)$ και ακτίνα $r=3$, ενώ οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει

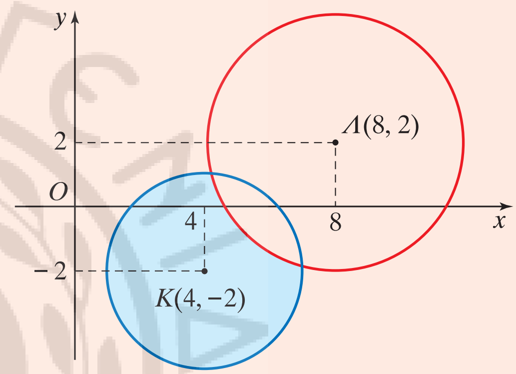
$$|z-(8+2\mathrm{i})|<4$$

βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $\Lambda(8,2)$ και ακτίνα $r=4$. Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z-(4-2\mathrm{i})|<3$ και $|z-(8+2\mathrm{i})|<4$ θα βρίσκονται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος 3.2ιβ.



Σχ. 3.2ιβ.

β) Εδώ, μας ενδιαφέρουν οι εικόνες $M(z)$ των σημείων, τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες



Σχ. 3.2ιγ.

$$|z-(4-2\mathrm{i})|<3, \qquad |z-(8+2\mathrm{i})|\geq 4.$$

Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει η πρώτη συνθήκη θα βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(4-2)$ και ακτίνα $r=3$, ενώ οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει $|z-(8+2\mathrm{i})|\geq 4$ θα βρίσκονται στο εξωτερικό (ή επάνω στην περιφέρεια) του κύκλου κέντρου $\Lambda(8,2)$ και ακτίνας $r=4$. Συνεπώς, οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύουν και οι δύο συνθήκες είναι αυτές που βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο μηνίσκο του σχήματος 3.2ιγ.

Ασκήσεις.

3.2.1. Να υπολογίσετε το μέτρο των επομένων μιγαδικών αριθμών.

α) $3+4\mathrm{i}$ β) $3-4\mathrm{i}$ γ) $-3+4\mathrm{i}$

δ) $-3-4\mathrm{i}$ ε) $2\sqrt{3}-\sqrt{13}\,\mathrm{i}$ στ) $-2\sqrt{3}+\sqrt{13}\,\mathrm{i}$

ζ) $-\sqrt{13}+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ η) $\sqrt{13}+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ θ) $(-4+3\mathrm{i})-(-5+4\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$

3.2.2. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$, $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των επομένων μιγαδικών.

α) $2(z_1+z_2)$ β) $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ γ) $\frac{1}{3}(2z_1+z_2)$

3.2.3. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

α) $|z|=16$ β) $|z+3|=1/2$ γ) $|z-2+\mathrm{i}|=1$ δ) $|z-\mathrm{i}|=|z-1|$

3.2.4. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=4+3\mathrm{i}$, $z_2=-5+2\mathrm{i}$ και $z=x+y\mathrm{i}$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z-2z_1|=|z-3z_2|$. Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y.

3.2.5. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=3-2\mathrm{i}$, $z_2=-1+\mathrm{i}$ και $z=x+y\mathrm{i}$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z-z_2|=|z_1+z_2|$. Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y.

3.2.6. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+y\mathrm{i}$ (όπου x, y πραγματικοί αριθμοί) με $|z|=3$ και ο μιγαδικός w, για τον οποίο ισχύει $w=z+5$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

3.2.7. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

α) $|z-1+3\mathrm{i}|\geq 5$

β) $|z|\leq|z-1+3\mathrm{i}|$

γ) $|z-1+3\mathrm{i}|\geq 5$ και $|z|\leq|z-1+3\mathrm{i}|$ συγχρόνως.

δ) $|z-1+3\mathrm{i}|<5$ και $|z-1+3\mathrm{i}|\geq 3$ συγχρόνως.

ε) $|z|\geq|z-1+3\mathrm{i}|$ και $|z-1+3\mathrm{i}|\leq|z+1+3\mathrm{i}|$ συγχρόνως.

στ) $|z-1+3\mathrm{i}|\leq 3$ και $|z|\geq|z-1+3\mathrm{i}|$ συγχρόνως.

3.2.8. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=1+\mathrm{i}, z_2=1+5\mathrm{i}, z_3=5+5\mathrm{i}$. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό $z=x+y\mathrm{i}$, ο οποίος ισαπέχει και από τους τρεις αριθμούς z_1, z_2, z_3, δηλαδή το μιγαδικό για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|.$$

Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y.

3.2.9. Έστω $z_1=5+3\mathrm{i}$ και z_2 ένας μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο γνωρίζομε ότι ισχύει $|z_2|=8$. Κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας, να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παραστάσεως $|z_1+z_2|$.

3.2.10. Δύο πλοία A και B κινούνται προς τον ίδιο προορισμό, η θέση του οποίου περιγράφεται (επάνω σε ένα χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_0=7+9\mathrm{i}$. Κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, το πλοίο A βρίσκεται σε μια θέση που αντιστοιχεί στην εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_1=-2+3\mathrm{i}$, ενώ το πλοίο B σε μια θέση που αντιστοιχεί στην εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_2=3-2\mathrm{i}$.

α) Να βρείτε την απόσταση των δύο πλοίων (επί του χάρτη).

β) Ποιο από τα δύο πλοία βρίσκεται πλησιέστερα στον προορισμό του τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή;

3.2.11. Η θέση τεσσάρων κινητών τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από τους μιγαδικούς:

$$z_1=\text{συν}t+\mathrm{i}\,\text{ημ}t,\ z_2=\text{συν}t-\mathrm{i}\,\text{ημ}t,\ z_3=-\text{συν}t+\mathrm{i}\,\text{ημ}t \text{ και } z_4=-\text{συν}t-\mathrm{i}\,\text{ημ}t.$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t, τα 4 κινητά ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων και πιο συγκεκριμένα ότι κινούνται επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας 1.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των κινητών 1 και 3 είναι ίδια με την απόσταση των κινητών 2 και 4.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των κινητών 1 και 2 είναι ίδια με την απόσταση των κινητών 3 και 4.

δ) Να βρείτε μία τιμή του t, για την οποία οι αποστάσεις των κινητών 1 και 2, 2 και 4, 4 και 3, 3 και 1 είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

3.2.12. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = 1$ και $z = x + y\,\mathrm{i}$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα x, y, έτσι ώστε να ισχύει $|z - z_1| = 3$ και $|z - z_2| = |z - z_3|$.

3.3 Συζυγείς μιγαδικοί – Πολλαπλασιασμός και διαίρεση μιγαδικών.

Ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών γίνεται και πάλι όπως ο πολλαπλασιασμός διωνύμων της μορφής $\alpha + \beta x$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, όπου φυσικά για το x ισχύει $x^2 = -1$. Έτσι, αν $z_1 = \alpha + \beta\mathrm{i}$, $z_2 = \gamma + \delta\mathrm{i}$, θα έχομε

$$(\alpha + \beta\,\mathrm{i})(\gamma + \delta\,\mathrm{i}) = \alpha \cdot (\gamma + \delta\,\mathrm{i}) + \beta\,\mathrm{i} \cdot (\gamma + \delta\,\mathrm{i}) = \alpha\gamma + \alpha\delta\,\mathrm{i} + \beta\gamma\,\mathrm{i} + (\beta\mathrm{i}) \cdot (\delta\,\mathrm{i}) =$$

$$= \alpha\gamma + \alpha\delta\,\mathrm{i} + \beta\gamma\,\mathrm{i} + \beta\delta\,\mathrm{i}^2 = \alpha\gamma + \alpha\delta\,\mathrm{i} + \beta\gamma\,\mathrm{i} - \beta\delta = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\mathrm{i},$$

δηλαδή

$$(\alpha + \beta\,\mathrm{i})\,(\gamma + \delta\,\mathrm{i}) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\mathrm{i}\,.$$

Για παράδειγμα,

$$(5 - \mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i}) = 5(3 + 4\mathrm{i}) - \mathrm{i}(3 + 4\mathrm{i}) = 15 + 20\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2 = (15 + 4) + (20 - 3)\mathrm{i} = 19 + 17\mathrm{i}.$$

Ας θεωρήσομε τώρα τους μιγαδικούς $3 + 4\,\mathrm{i}$ και $3 - 4\mathrm{i}$, οι οποίοι έχουν ***ίσα πραγματικά μέρη** και **αντίθετα φανταστικά μέρη***. Για το γινόμενό τους έχομε:

$$(3 + 4\mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i}) = 3(3 - 4\mathrm{i}) + 4\mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i}) = 9 - 12\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 16\mathrm{i}^2 = 25\,.$$

Παρατηρούμε ότι, το γινόμενο δύο μιγαδικών μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου παραδείγματος είναι της μορφής $\alpha + \beta\mathrm{i}$ και $\alpha - \beta\mathrm{i}$ και ονομάζονται ***συζυγείς μιγαδικοί***. Έτσι, αν $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$, τότε ο συζυγής του, που συμβολίζεται με $\overline{z}$, είναι ο $z = \alpha - \beta\mathrm{i}$. Για παράδειγμα, ο συζυγής του $7 + 5\mathrm{i}$ είναι ο $7 - 5\mathrm{i}$, ο συζυγής του $8\mathrm{i}$ είναι ο $-8\mathrm{i}$, ενώ ο συζυγής του 3 είναι ο 3.

Έστω $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ ένας μιγαδικός αριθμός. Τότε θα έχομε

$$\overline{(\overline{z})} = \overline{a - \beta\, i} = a + \beta\, i = z$$

$$z + \overline{z} = (a + \beta\,\mathrm{i}) + (a - \beta\,\mathrm{i}) = 2a = 2\mathrm{Re}\,(z)\,,$$

$$z - \overline{z} = (a + \beta\,\mathrm{i}) - (a - \beta\,\mathrm{i}) = 2\beta\,\mathrm{i} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$$

και

$$z\,\overline{z} = (a + \beta\,\mathrm{i})(a - \beta\,\mathrm{i}) = (a \cdot a - \beta \cdot (-\beta)\cdot) + (a \cdot (-\beta) + \beta \cdot a)\,\mathrm{i} = a^2 + \beta^2 = |z|^2.$$

Επομένως, για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες[1].

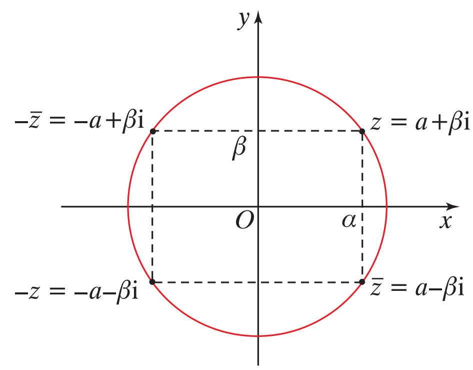
1. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τις τρεις τελευταίες ισότητες, για κάθε μιγαδικό αριθμό z, οι ποσότητες $z\,\overline{z}$, $z + \overline{z}$, $(z - \overline{z})/\mathrm{i}$, είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$\overline{(\overline{z})} = z, \qquad \text{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$$

$$\text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\,\text{i}}, \qquad |z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = z\overline{z}\,.$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη ιδιότητα είναι φανερό ότι:

> Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $z = \overline{z}$.
> Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $z = -\overline{z}$.



Σχ. 3.3α.

Από το σχήμα 3.3α μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|\,.$$

Οι προηγούμενες ισότητες μπορούν εύκολα να επαληθευτούν και με βάση τον ορισμό του μέτρου. Πράγματι, αν $z = \alpha + \beta\text{i}$, θα έχομε $-z = (-\alpha) + (-\beta)\text{i}$ οπότε

$$|-z| = \sqrt{(-\alpha)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z|.$$

Ομοίως διαπιστώνονται οι άλλες δύο ισότητες.

Για τους συζυγείς του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών z_1 και z_2 μπορούν να αποδειχτούν οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$$

Πράγματι, αν $z_1 = \alpha + \beta\text{i}$, $z_2 = \gamma + \delta\text{i}$, θα έχομε:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)\text{i}, \ \ z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)\text{i}$$

οπότε μπορούμε να γράψομε:

$$\overline{z_1 + z_2} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)\text{i} = (\alpha - \beta\text{i}) + (\gamma - \delta\text{i}) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta)\,\text{i} = (\alpha - \beta\,\text{i}) - (\gamma - \delta\,\text{i}) = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$$

Σημειώνεται ότι, η πρώτη ιδιότητα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχομε περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς.

Οι συζυγείς μιγαδικοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην εκτέλεση της πράξεως της διαιρέσεως μιγαδικών. Έστω ότι θέλομε να βρούμε το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = \alpha + \beta\text{i}$ και $z_2 = \gamma + \delta\text{i}$ με $z_2 \neq 0$, δηλαδή το μιγαδικό αριθμό $z = x + y\text{i}$, για τον οποίο ισχύει $z \cdot z_2 = z_1$. Ο αριθμός αυτός θα συμβολίζεται με $\frac{z_1}{z_2}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας $z \cdot z_2 = z_1$ με το $\overline{z}_2$, έχομε:

$$zz_2\overline{z}_2 = z_1\overline{z}_2 \Leftrightarrow z \cdot |z_2|^2 = z_1 \cdot \overline{z}_2 \Leftrightarrow (x + y\,\text{i})(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha + \beta\,\text{i})(\gamma - \delta\text{i}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\gamma^2 + \delta^2) + \text{i}y(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta)\,\text{i}\,,$$

οπότε

$$x(\gamma^2 + \delta^2) = \alpha\gamma + \beta\delta \text{ και } y(\gamma^2 + \delta^2) = \beta\gamma - \alpha\delta$$

ή ισοδύναμα

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} \quad \text{και} \quad y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}.$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha+\beta\,\mathrm{i}}{\gamma+\delta\,\mathrm{i}}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\,\mathrm{i}.$$

Το δεξί μέλος της ισότητας αυτής μπορεί να προκύψει και με διαφορετικό τρόπο αν πολλαπλασιάσομε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος $\frac{z_1}{z_2}$ με το συζυγή του παρονομαστή. Πράγματι,

$$\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(\alpha+\beta\,\mathrm{i})(\gamma-\delta\,\mathrm{i})}{(\gamma+\delta\,\mathrm{i})(\gamma-\delta\,\mathrm{i})}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\,\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)\,\mathrm{i}}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\,\mathrm{i}.$$

Για παράδειγμα,

$$\frac{2+3\,\mathrm{i}}{5-2\,\mathrm{i}}=\frac{(2+3\,\mathrm{i})(5+2\,\mathrm{i})}{(5-2\,\mathrm{i})(5+2\,\mathrm{i})}=\frac{10+4\,\mathrm{i}+15\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}^2}{5^2+2^2}=\frac{4+19\,\mathrm{i}}{29}=\frac{4}{29}+\frac{19}{29}\,\mathrm{i}.$$

Οι δυνάμεις μιγαδικών αριθμών ορίζονται όπως και οι αντίστοιχες των πραγματικών αριθμών. ΄Ετσι, $z^1=z, z^2=zz, z^3=z^2z$ και, γενικά, για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 2$ ορίζομε

$$z^\nu=z^{\nu-1}z.$$

Για $z\neq 0$ θέτομε

$$z^0=1 \text{ και } z^{-\nu}=\frac{1}{z^\nu}.$$

Στο λογισμό με μιγαδικούς αριθμούς είναι χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίζομε τις διάφορες δυνάμεις του i. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{i}^1=\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^2=-1, \qquad \mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\mathrm{i}=-\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^4=\mathrm{i}^3\mathrm{i}=-\mathrm{i}^2=1,$$

$$\mathrm{i}^5=\mathrm{i}^4\mathrm{i}=\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^6=\mathrm{i}^5\mathrm{i}=\mathrm{i}\,\mathrm{i}=-1, \qquad \mathrm{i}^7=\mathrm{i}^6\mathrm{i}=-\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^8=\mathrm{i}^7\mathrm{i}=(-\mathrm{i})\mathrm{i}=1 \text{ κ.λπ.}$$

δηλαδή μετά το i^4 οι τιμές 1, –1, i, –i επαναλαμβάνονται κυκλικά. ΄Ετσι, για τον υπολογισμό της δυνάμεως i^ν, όπου ν θετικός ακέραιος, αρκεί να γράψομε τον εκθέτη ν στη μορφή $4\varkappa+\upsilon$, $0\leq\upsilon<4$ (με τη βοήθεια της Ευκλείδειας διαιρέσεως διά του 4), οπότε θα έχομε:

$$\mathrm{i}^\nu=\mathrm{i}^{4\varkappa+\upsilon}=\mathrm{i}^{4\varkappa}\,\mathrm{i}^\upsilon=(\mathrm{i}^4)^\varkappa\cdot\mathrm{i}^\upsilon=\mathrm{i}^\upsilon,\quad 0\leq\upsilon<4.$$

Επομένως, αν ν είναι ένας θετικός ακέραιος, για τη δύναμη i^ν μπορούμε να γράψομε

$$\mathrm{i}^\nu=\begin{cases}1 & \alpha\nu \quad \nu=4\varkappa\\ \mathrm{i} & \alpha\nu \quad \nu=4\varkappa+1\\ -1 & \alpha\nu \quad \nu=4\varkappa+2\\ -\mathrm{i} & \alpha\nu \quad \nu=4\varkappa+3\end{cases} \qquad \text{όπου } \varkappa=0, 1, 2,\ldots.$$

Για παράδειγμα,

$$\mathrm{i}^{38}=\mathrm{i}^{4\cdot 9+2}=\mathrm{i}^{4\cdot 9}\cdot\mathrm{i}^2=(\mathrm{i}^4)^9\cdot\mathrm{i}^2=1(-1)=-1.$$

Τέλος, για τους συζυγείς του γινομένου, του πηλίκου και της δυνάμεως δύο μιγαδικών z_1 και z_2 μπορούν να αποδειχτούν οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \ (\text{για } z_2 \neq 0) \qquad \overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu, \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ας αποδείξομε, αρχικά, την ιδιότητα $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$. Αν $z_1 = \alpha + \beta$i και $z_2 = \gamma + \delta$i, τότε θα έχομε

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a+\beta i)(\gamma+\delta \mathrm{i})} = \overline{(a\gamma-\beta\delta)+(a\delta+\beta\gamma)i} = (a\gamma-\beta\delta)-(a\delta+\beta\gamma)\mathrm{i}$$

και

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (a-\beta\,\mathrm{i})(\gamma-\delta\,\mathrm{i}) = (a\gamma-\beta\delta)-(a\delta+\beta\gamma)\mathrm{i}\ .$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 .$$

Έστω τώρα $z = z_1 / z_2$. Από την ισότητα $zz_2 = z_1$ συμπεραίνομε, λόγω της ιδιότητας που υποδείξαμε προηγουμένως, ότι $\overline{z_1} = \overline{zz_2} = \overline{z} \cdot \overline{z_2}$, οπότε θα έχομε $\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \overline{z} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

Η τρίτη ιδιότητα προκύπτει εύκολα με επαγωγή ως προς το φυσικό αριθμό ν.

Σημειώνεται ότι, η πρώτη ιδιότητα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχομε περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς, δηλαδή για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, ισχύει

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \ldots z_\nu} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 \cdots \overline{z}_\nu \ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.1.

Αν για τη σύνθετη αντίσταση z ενός κυκλώματος RLC ισχύει $|z-2| = |z|$, να αποδείξετε ότι η ωμική αντίσταση $R = \mathrm{Re}(z)$ του κυκλώματος είναι ίση με 1 Ohm.

Λύση.

Έχομε τη σχέση $|z-2| = |z|$, από την οποία παίρνομε διαδοχικά

$$|z-2|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow (z-2)\overline{(z-2)} = z\overline{z} \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}-2) = z\overline{z} \Leftrightarrow -2z-2\overline{z}+4=0\,.$$

Άρα,

$$z+\overline{z} = 2 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2.

Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, για τους οποίους ισχύει $z^2 = 3+4\mathrm{i}$.

Λύση.

Αν θέσομε $z = x + y\,\mathrm{i}$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, θα έχομε

$$(x+y\mathrm{i})^2 = 3+4\mathrm{i} \Leftrightarrow x^2 + 2xy\mathrm{i} + y^2\mathrm{i}^2 = 3+4\mathrm{i} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = 3+4\mathrm{i}\ .$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}.$$

Με αντικατάσταση του $y = 2/x$ στην πρώτη εξίσωση παίρνομε την $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, η οποία για $x^2 = \omega$ δίνει $\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$. Από την τελευταία βρίσκομε $\omega = 4$ και $\omega = -1$. Όμως, η δεύτερη λύση απορρίπτεται, γιατί $\omega = x^2 \geq 0$. Επομένως, $x^2 = 4$, απ' όπου συμπεραίνομε ότι $x = 2$ ή $x = -2$.

Για $x = 2$ έχομε $y = \dfrac{2}{x} = 1$, ενώ για $x = -2$ έχομε $y = \dfrac{2}{x} = -1$. Άρα, $z = z_1 = 2 + \mathrm{i}$ ή $z = z_2 = -2 - \mathrm{i}$.

Οι μιγαδικοί $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ και $z_2 = -2 - \mathrm{i}$ ονομάζονται τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού $3 + 4\mathrm{i}$. Γενικά, ***τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού*** $\alpha + \beta\mathrm{i}$ ονομάζεται κάθε μιγαδικός $z = x + y\,\mathrm{i}$, για τον οποίο ισχύει $z^2 = \alpha + \beta\,\mathrm{i}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.3.

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $P(z) = 0$, όπου $P(\cdot)$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, να αποδείξετε ότι θα ισχύει επίσης $P(\overline{z}) = 0$.

Λύση.

Έστω

$$P(z) = a_\nu z^\nu + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,$$

με $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{R}$. Αφού $\mathrm{P}(z) = 0$ θα έχομε

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

απ' όπου παίρνομε διαδοχικά

$$\overline{P(z)} = 0 \Leftrightarrow \overline{a_\nu z^\nu} + \overline{a_{\nu-1} z^{\nu-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0 \Leftrightarrow a_\nu\ (\overline{z})^\nu + a_{\nu-1} (\overline{z})^{\nu\text{-}1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0.$$

Επομένως ισχύει ότι

$$P\ (\overline{z})\ = 0.$$

Το αποτέλεσμα του παραδείγματος αυτού μπορεί να διατυπωθεί με λόγια ως εξής:

> Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα ενός πολυώνυμου με πραγματικούς συντελεστές, τότε ο συζυγής του είναι επίσης ρίζα του ίδιου πολυωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.4.

Έστω ένας μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $z\,\overline{z} = 4i\,(\overline{z} - z)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Λύση.

Αν θέσομε $z = x + y\,\mathrm{i}$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, θα είναι $\overline{z} = x - y\,\mathrm{i}$, οπότε

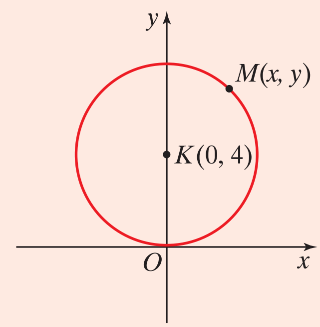
$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \text{ και } \overline{z} - z = -2y\,\mathrm{i}.$$

Επομένως,

$$z\overline{z}=4\mathrm{i}(\overline{z}-z)\Leftrightarrow x^2+y^2=4\mathrm{i}(-2y\,\mathrm{i})\Leftrightarrow x^2+y^2=-8y\,\mathrm{i}^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-8y=0\Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=4^2.$$

Άρα, τα σημεία $M(x,y)=M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,4)$ και ακτίνα $r=4$ (σχ. 3.3β).



Σχ. 3.3β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.5.

Αν $\nu=4\kappa+\upsilon$ όπου κ είναι ένας θετικός ακέραιος με $\upsilon=0,1,3$, να δείξετε ότι η παράσταση $(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\ldots+\mathrm{i}^\nu)^2$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0, –1 ή 1.

Λύση.

Ας θέσομε $S=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\ldots+\mathrm{i}^\nu$. Τότε οι προσθετέοι του αθροίσματος είναι ν διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο i και λόγο επίσης i.

Επομένως,

$$S=\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}^\nu-1}{\mathrm{i}-1},$$

και λόγω της ισότητας $\nu=4\kappa+\upsilon$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) $\upsilon=0$. Τότε $\nu=4\kappa$, οπότε $S=\mathrm{i}\frac{1-1}{\mathrm{i}-1}=0$

β) $\upsilon=1$. Τότε $\nu=4\kappa+1$, οπότε $S=\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=\mathrm{i}$

γ) $\upsilon=3$. Τότε $\nu=4\kappa+3$, οπότε $S=\mathrm{i}\frac{-\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=-1$.

Συνεπώς, το $S^2=(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\ldots+\mathrm{i}^\nu)^2$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0, $\mathrm{i}^2=-1$ ή $(-1)^2=1$.

Ασκήσεις.

3.3.1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς $(-3+5\mathrm{i})(-5-2\mathrm{i})$, $(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})$ και $(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$.

3.3.2. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς $(1-\mathrm{i})^2-(1+\mathrm{i})^2$, $-3\mathrm{i}(\mathrm{i}-3)^2$, $(1-\mathrm{i})^4 7\mathrm{i}$.

3.3.3. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\frac{2+3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}}$, $z_2=\frac{2+5\mathrm{i}}{-3\mathrm{i}}$, $z_3=\frac{3\mathrm{i}}{\mathrm{i}-7}$.

3.3.4. Αν $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=1-2\mathrm{i}$, να βρείτε τους μιγαδικούς $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1^2}{z_2^2}, \frac{z_1^2}{z_2}, \frac{z_1}{z_2^2}$.

3.3.5. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z, για τον οποίο ισχύει $2\mathrm{i}z-z\overline{z}=-7+4\mathrm{i}$.

3.3.6. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=k+15\,\mathrm{i}$, $z_2=5+\lambda\,\mathrm{i}$ όπου $k,\lambda\in\mathbf{R}$. Να βρείτε τις τιμές των k και λ, ώστε να ισχύει $z_1=5\overline{z}_2$.

3.3.7. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, ώστε να ισχύει $z\cdot\bar{z}+(z-\bar{z})=5+2\,\mathrm{i}$.

3.3.8. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών $z_1=5\mathrm{i}, z_2=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$.

3.3.9. Να βρείτε τα αθροίσματα $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4$, $\frac{1}{\mathrm{i}}+\frac{1}{\mathrm{i}^2}+\frac{1}{\mathrm{i}^3}+\frac{1}{\mathrm{i}^4}$ και $\mathrm{i}^5+\mathrm{i}^{10}+\mathrm{i}^{15}+\mathrm{i}^{20}$.

3.3.10. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς $z_1=\dfrac{2-3\mathrm{i}}{(2+3\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}$, $z_2=\dfrac{(7\mathrm{i}-5)(4-2\mathrm{i})}{(8+5\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}$.

3.3.11. Αν $z=x+y\mathrm{i}$ και ο αριθμός $u=(z-1)(\bar{z}-\mathrm{i})$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $x=y+1$.

3.3.12. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z^2, z^3, z^4 και $1-z+z^2$.
β) Να αποδείξετε ότι $1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6=1$.

3.3.13. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό $z=x+y\,\mathrm{i}\;\; x,y\in\mathbf{R}$, σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) $z(2+3\mathrm{i})=4+\mathrm{i}$, β) $(z+1)(2-\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}$.

3.3.14. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+16|=4|z+1|$, να αποδείξετε ότι $|z|=4$.

3.3.15. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|2z-\mathrm{i}|=|\mathrm{i}z+2|$, να αποδείξετε ότι $|z|=1$.

3.3.16. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, έτσι ώστε να ισχύει $\dfrac{x}{2-\mathrm{i}}+\dfrac{\mathrm{i}y}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{4}{1-2\mathrm{i}}$.

3.3.17. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\sqrt{a^2+1}+a\,\mathrm{i}$, $a\in\mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w=z^2$ βρίσκονται, για τις διάφορες τιμές του α, πάνω σε μία ευθεία.

3.3.18. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+y\,\mathrm{i}$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και w ο μιγαδικός αριθμός που ορίζεται από τον τύπο $w=\dfrac{i\,(i+z)}{i-z}$ με $z\neq\mathrm{i}$. Να αποδείξετε ότι:

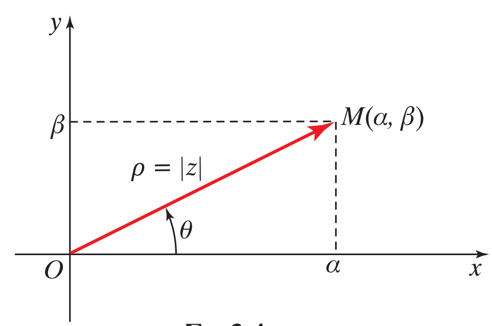
α) $w=\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}+\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{i}$.

β) Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα 1.

γ) Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα 1.

3.4 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Ας θεωρήσομε το μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$ και έστω $M(\alpha,\beta)$ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Αν θ είναι ***μία*** από τις γωνίες με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox, τελική πλευρά την OM και φορά θετική, δηλαδή αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, μπορούμε να γράψομε (σχ. 3.4α)



Σχ. 3.4α.

$$\alpha=\varrho\,\text{συν}\theta,\ \beta=\varrho\,\text{ημ}\theta,\ \ \varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Επομένως,

$$\alpha+\beta\,\mathrm{i}=\varrho\,\text{συν}\theta+\varrho\,\text{ημ}\theta\,\mathrm{i}=\varrho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)\,.$$

Το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας ονομάζεται ***τριγωνομετρική μορφή*** του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$. Πιο συγκεκριμένα, έχομε τον επόμενο ορισμό:

Αν $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός, τότε, ***τριγωνομετρική μορφή*** του z ονομάζεται η έκφραση

$$z=\varrho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)\,,$$

όπου

$$\varrho=|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,,\quad \alpha=\varrho\,\text{συν}\theta\quad \text{και}\quad \beta=\varrho\,\text{ημ}\theta\,.$$

Κάθε γωνία θ για την οποία ισχύει $\alpha = \varrho\,\text{ημ}\theta$ και $\beta = \varrho\,\text{συν}\theta$ ονομάζεται ***όρισμα*** του z. Από όλες τις τιμές της γωνίας θ, μία βρίσκεται στο διάστημα $[0,2\pi)$. Αυτή ονομάζεται ***πρωτεύον όρισμα*** του μιγαδικού και συμβολίζεται με $\text{Arg}\,z$. Κάθε άλλο όρισμα διαφέρει από το πρωτεύον κατά $2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathrm{Z}$[1]. Αξίζει να σημειωθεί ότι, το ζεύγος (ϱ, θ) ορίζει τις λεγόμενες ***πολικές συντεταγμένες*** του μιγαδικού αριθμού z.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσομε το μιγαδικό $z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ (σχ. 3.4β), ο οποίος έχει μέτρο ίσο με

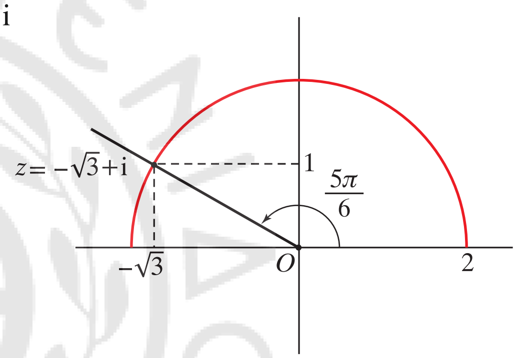
$$|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2\,.$$

Για τη γωνία θ έχομε

$$-\sqrt{3}=2\text{συν}\theta\qquad\text{και}\qquad 1=2\text{ημ}\theta\,,$$

οπότε

$$\text{συν}\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\text{και}\qquad \text{ημ}\theta=\frac{1}{2}\,.$$



Σχ. 3.4β.

Επομένως $\text{Arg}\,z=5\pi/6$, ενώ όλες οι γωνίες της μορφής $\theta=2\kappa\pi+5\pi/6$ είναι ορίσματα του z. Έτσι, ο μιγαδικός αριθμός $z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ μπορεί να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής

$$z=2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right).$$

Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού ***δεν είναι μοναδική***, αφού για κάθε μιγαδικό μπορούμε να χρησιμοποιήσομε διάφορα ορίσματα (εκ των οποίων μόνο ένα είναι το πρωτεύον). Τέλος, σημειώνομε ότι δεν ορίζεται όρισμα για το μιγαδικό αριθμό $z=0$.

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχομε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών: Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, δηλαδή:

Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta_2)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\mathrm{z}_1=\mathrm{z}_2 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2\quad\text{και}\quad \theta_1-\theta_2=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z}$$

Η γραφή ενός μιγαδικού αριθμού σε τριγωνομετρική μορφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν πρέπει να

1. Με **Z** συμβολίζομε το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

εργαστούμε με γινόμενα, πηλίκα και δυνάμεις μιγαδικών, αλλά και για να βρίσκομε εύκολα τις λύσεις εξισώσεων της μορφής $z^{\nu} = z_{\mathrm{w}}$, όπου $z_{\mathrm{w}} \in \mathbf{C}$. Θα αναλύσομε τις τεχνικές αυτές στην παράγραφο 3.7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.1

Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών, για τους οποίους ισχύει:

α) $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{6}$

β) $\dfrac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{3}$

γ) $|z| < 4$ και $\dfrac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{3}$

δ) $|z| < 4$ και $0 < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{2}$

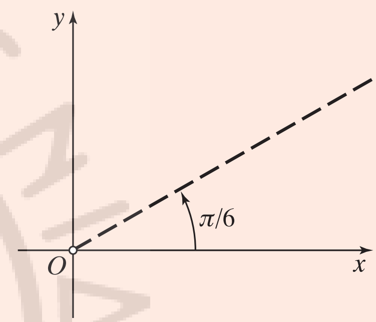
ε) $|z| < 3$ και $0 < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{2}$

στ) $|z| < 3$ και $\dfrac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{3}$ ή $|z| > 3$ και $0 < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{6}$

ζ) $\operatorname{Arg}(z - 1 - 2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6}$

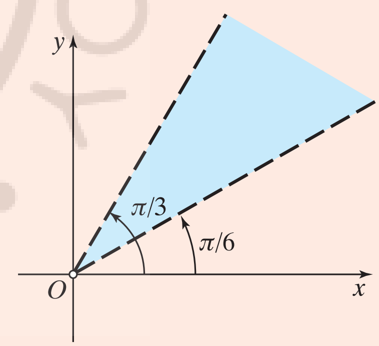
Λύση.

α) Οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται στη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 3.4γ η οποία σχηματίζει γωνία $\pi/6 = 30^{\mathrm{o}}$ με τον οριζόντιο άξονα, με εξαίρεση το σημείο Ο.



Σχ. 3.4γ.

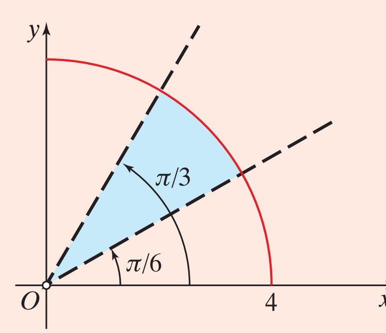
β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 3.4δ που περικλείεται από τις διακεκομμένες ημιευθείες, οι οποίες σχηματίζουν γωνίες $\pi/6 = 30^{\mathrm{o}}$ και $\pi/3 = 60^{\mathrm{o}}$ με τον οριζόντιο άξονα, με εξαίρεση το σημείο Ο.



Σχ. 3.4δ.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z| < 4$, είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $r=4$. Οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\dfrac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{3}$ είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τις διακεκομμένες ημιευθείες, του σχήματος 3.4ε οι οποίες σχηματίζουν γωνίες $\pi/6 = 30^{\mathrm{o}}$ και $\pi/3 = 60^{\mathrm{o}}$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύουν και οι δύο συνθήκες κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 3.4ε.

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z| < 4$ είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου κέντρου $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνας $r = 4$. Οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $0 < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{2}$ είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον οριζόντιο άξονα και τη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 3.4στ που σχηματίζει γωνία $\pi/6 = 30^{\mathrm{o}}$ με αυτόν, καθώς επίσης και τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα και τη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 3.4στ που σχηματίζει γωνία $\pi/3 = 60^{\mathrm{o}}$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών, για τους οποίους ισχύ-



Σχ. 3.4ε.

ουν οι δοθείσες συνθήκες κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 3.4στ.

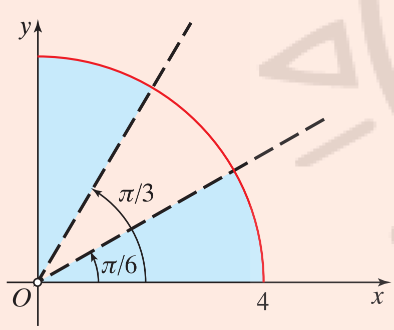
ε) Οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z|>4$ είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $r=4$. Οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $0<\mathrm{Arg}\,z<\dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{\pi}{3}<\mathrm{Arg}\,z<\dfrac{\pi}{2}$ είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον οριζόντιο άξονα και της διακεκομμένης ημιευθείας του σχήματος 3.4ζ που σχηματίζει γωνία $\pi/6 = 30^{\mathrm{o}}$ μ' αυτόν και τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα και τη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 3.4ζ που σχηματίζει γωνία $\pi/3 = 60^{\mathrm{o}}$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύουν οι δοθείσες συνθήκες κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 3.4ζ.

στ) Εργαζόμενοι όμοια με τα προηγούμενα ερωτήματα συμπεραίνομε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύουν οι δοθείσες συνθήκες κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 3.4η.

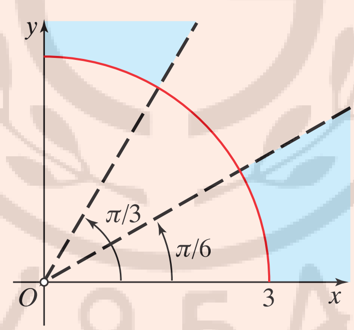
ζ) Έστω $M(z)$, $A(z_0)$ οι εικόνες δυο διαφορετικών μιγαδικών z, z_0 αντίστοιχα (σχ. 3.4θ). Τότε θα έχομε:

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}$$

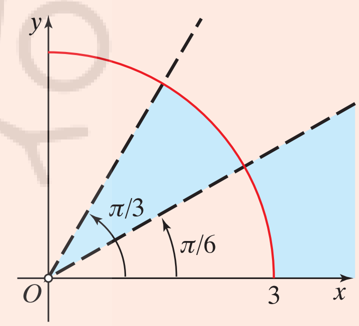
ή ακόμη $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z-z_0$ κινούνται στη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 3.4θ που ξεκινάει από το σημείο A (χωρίς όμως να το περιλαμβάνει). Επομένως, αν $z_0=1+2\mathrm{i}$, οι εικόνες των μιγαδικών $z-1-2\,\mathrm{i}=z-z_0$ με όρισμα $\pi/3$ θα κινούνται στη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 3.4ι, η οποία σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\pi/3$, με εξαίρεση το σημείο A.



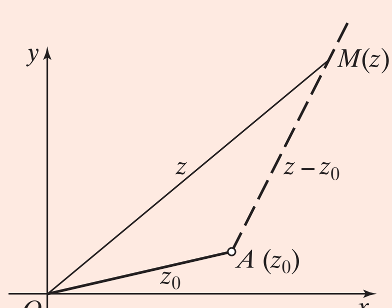
Σχ. 3.4στ.



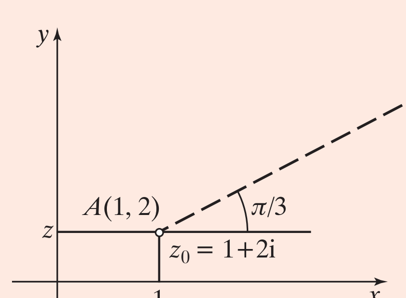
Σχ. 3.4ζ.



Σχ. 3.4η.



Σχ. 3.4θ.



Σχ. 3.4ι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.2.

α) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ και $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$.
β) Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ το μιγαδικό αριθμό z, για τον οποίο γνωρίζομε ότι

$$|z|=\sqrt{2} \text{ και } \operatorname{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4}$$

Λύση.

α) Ο μιγαδικός $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ έχει μέτρο $|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$. Θέλοντας να γράψομε το μιγαδικό αριθμό $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή $\rho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$, για τη γωνία θ θα έχομε $\text{συν}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{ημ}\theta=\dfrac{1}{2}$, οπότε $\theta=\pi/6$. Άρα,

$$z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right).$$

Ομοίως, αν $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=\rho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$, θα έχομε i$|z_2|=2$ ενώ επί πλέον, για τη γωνία θ πρέπει να ισχύει

$$\text{συν}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } \text{ημ}\theta=-\frac{1}{2},$$

οπότε $\theta=\dfrac{11\pi}{6}$. Άρα, $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\text{συν}\dfrac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

β) Αντικαθιστώντας στο γενικό τύπο της τριγωνομετρικής μορφής ενός μιγαδικού $z=\rho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$ παίρνομε διαδοχικά

$$z=\rho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+\mathrm{i}.$$

Ασκήσεις.

3.4.1. Έστω ο μιγαδικός $z=\dfrac{7-\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα των x.

3.4.2. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους επόμενους μιγαδικούς αριθμούς.
α) $z_1=8\mathrm{i}$ β) $z_2=-5$ γ) $z_3=1+\mathrm{i}$ δ) $z_4=-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

3.4.3. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς.

α) $z_1=3(\text{συν}2\pi+\mathrm{i}\,\text{ημ}2\pi)$ β) $z_3=5\left(\text{συν}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)\right)$

3.4.4. Ποια από τις επόμενες εκφράσεις αποτελεί τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z=-2-2\mathrm{i}$;

α) $z=2\left[\text{συν}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ β) $z=2\sqrt{2}\left[\text{συν}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

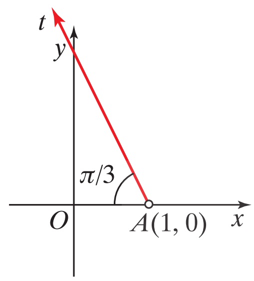
γ) $z=2\sqrt{2}\left(\text{συν}\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\dfrac{3\pi}{4}\right)$ δ) $z=2\left[\text{συν}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$

3.4.5. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς, για τους οποίους ισχύει:

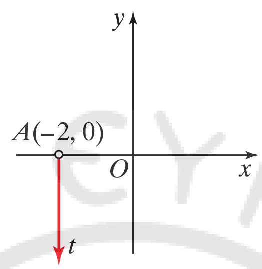
α) $|z|=3$ και $\mathrm{Arg}\,z=\dfrac{\pi}{4}$ β) $\dfrac{\pi}{3}<\mathrm{Arg}\,z<\dfrac{2\pi}{3}$

γ) $\mathrm{Arg}\,z=\dfrac{3\pi}{2}$ δ) $\mathrm{Arg}(z-5)=\dfrac{3\pi}{4}$

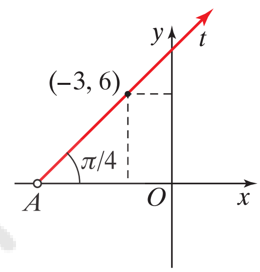
3.4.6. Να γράψετε τις σχέσεις που ικανοποιούν τα ορίσματα των μιγαδικών αριθμών z, των οποίων οι εικόνες κινούνται στις ημιευθείες At των σχημάτων 3.4ια, 3.4ιβ και 3.4ιγ.



Σχ. 3.4ια.



Σχ. 3.4ιβ.



Σχ. 3.4ιγ.

3.4.7. Ένα πλοίο A κινείται ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται (επάνω σε ένα χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_1(z_1)$, όπου $z_1=3+3\mathrm{i}$. Ένα δεύτερο πλοίο B κινείται επίσης ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_2(z_2)$, όπου $z_2=2\left[\text{συν}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι πορείες των δύο πλοίων.

3.4.8. Ένα πλοίο A κινείται ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται (επάνω σ' ένα χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_\pi(z_\pi)$, όπου $z_\pi=-1+3\mathrm{i}$. Λόγω του κύματος που επικρατεί, το πλοίο παρασύρεται συνεχώς κατά τη διεύθυνση που περιγράφεται από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_\varkappa(z_\varkappa)$, όπου $z_\varkappa=-4+2\,\mathrm{i}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η πραγματική (συνισταμένη) κίνηση του πλοίου με τον οριζόντιο άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

3.4.9. Σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με δύο αντιστάσεις z_1, z_2 που είναι παράλληλα συνδεδεμένες, για την ολική αντίσταση z ισχύει $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$. Αν $z_1=3+4\mathrm{i}$ και $z_2=1+\mathrm{i}$, να βρείτε την ολική αντίσταση του κυκλώματος σε τριγωνομετρική μορφή.

3.4.10. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2}{11+i}$.

α) Να γράψετε το μιγαδικό αριθμό z στη μορφή $z=x+y\mathrm{i}$, όπου $x, y\in\mathbf{R}$.
β) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή το μιγαδικό αριθμό z.
γ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $r=\sqrt{2}$.

3.4.11. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, για τους οποίους ισχύει $w=\dfrac{z-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

α) Αν $w=2-2\mathrm{i}$, να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού z.

β) Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

γ) Αν $z = x + y$i με $x, y \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x + y - 3}{2}, \quad \operatorname{Im}(w) = \frac{-x + y - 3}{2}$$

δ) Να βρείτε πού κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z όταν ισχύει $\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$.

3.5 Μέτρο και πράξεις – Όρισμα γινομένου και πηλίκου μιγαδικών.

Οι ιδιότητες που συνδέουν τις πράξεις των μιγαδικών αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, γινόμενο και πηλίκο) με τα μέτρα τους, είναι ίδιες ακριβώς με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απολύτων τιμών πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, στην παράγραφο 3.2 διαπιστώσαμε την ισχύ της ***τριγωνικής ανισότητας για μιγαδικούς αριθμούς***

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

η οποία, ως γνωστό, ισχύει και για την απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών. Όσον αφορά στο μέτρο του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{για } z_2 \neq 0).$$

Για την απόδειξη της πρώτης σχέσεως, αρκεί να παρατηρήσομε ότι αληθεύουν οι επόμενες ισοδυναμίες

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$

και ότι η τελευταία ισότητα προφανώς ισχύει.

Η δεύτερη ιδιότητα μπορεί να αποδειχτεί παρατηρώντας ότι

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2|.$$

Γενικά, ισχύει ότι $|z_1 z_2 \cdots z_\nu| = |z_1|\,|z_2| \cdots |z_\nu|$ ενώ για $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z$ προκύπτει $|z^\nu| = |z|^\nu$.

Σημειώνομε ότι, αφού για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\overline{z}| = |z|$, θα έχομε

$$\left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μιγαδικών μπορούν να διευκολυνθούν πολύ με τη χρήση της τριγωνομετρικής μορφής που εξηγήσαμε στην παράγραφο 3.4. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

Αν $z_1 = \rho_1$ (συνθ_1 + i ημθ_1), $z_2 = \rho_2$ (συνθ_2 + i ημθ_2) είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) + \text{i}\,\text{ημ}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1 - \theta_2) + \text{i}\,\text{ημ}(\theta_1 - \theta_2), \quad \rho_2 \neq 0.$$

Πράγματι, για το γινόμενο $z_1 \cdot z_2$ έχομε:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\text{συν}\theta_1 + \text{i}\,\text{ημ}\theta_1)(\text{συν}\theta_2 + \text{i}\,\text{ημ}\theta_2) = \rho_1\rho_2[(\text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2 - \text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2) + \text{i}(\text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2 + \text{συν}\theta_2\text{ημ}\theta_1)$$

και κάνοντας χρήση των τύπων της τριγωνομετρίας

$$\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) = \text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2 - \text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2, \quad \text{ημ}(\theta_1 + \theta_2) = \text{ημ}\theta_1\text{συν}\theta_2 + \text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2$$

παίρνομε:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\,[\text{συν}\,(\theta_1 + \theta_2) + \text{i}\,\text{ημ}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Αν εργαστούμε ανάλογα, χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους

$$\text{συν}(\theta_1 - \theta_2) = \text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2 + \text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2, \quad \text{ημ}(\theta_1 - \theta_2) = \text{ημ}\theta_1\text{συν}\theta_2 - \text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2$$

προκύπτει:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\text{συν}\theta_1 + \text{i}\ \text{ημ}\theta_1)}{\rho_2(\text{συν}\theta_2 + \text{i}\ \text{ημ}\theta_2)]} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\text{συν}\theta_1 + \text{i}\ \text{ημ}\theta_1)(\text{συν}\theta_2 - \text{i}\ \text{ημ}\theta_2)}{(\text{συν}\theta_2 + \text{i}\ \text{ημ}\theta_2)(\text{συν}\theta_2 - \text{i}\ \text{ημ}\theta_2)]}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\text{συν}\theta_1 + \text{i}\ \text{ημ}\theta_1)[\text{συν}(-\theta_2) + \text{i}\ \text{ημ}(-\theta_2)]}{\text{συν}^2\theta_2 + \text{ημ}^2\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1 - \theta_2) + \text{i}\ \text{ημ}(\theta_1 - \theta_2)].$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής του προηγούμενου αποτελέσματος ας θεωρήσομε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right) \text{ και } \ z_2 = 4\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right).$$

Τότε

$$z_1 z_2 = 8\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \text{i}\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 8\left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right) = 8\text{i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4}\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \text{i}\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \text{i}\frac{1}{4}.$$

Από τους γενικούς τύπους που βρέθηκαν παραπάνω για την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών προκύπτει ότι:

α) Το μέτρο του γινομένου δύο μιγαδικών ισούται με το γινόμενο των μέτρων τους, ενώ το μέτρο του πηλίκου δύο μιγαδικών ισούται με το πηλίκο των μέτρων τους (η ιδιότητα αυτή αποδείχτηκε επίσης στην αρχή της παρούσας ενότητας με διαφορετικό τρόπο).

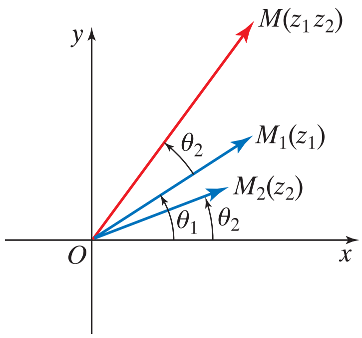
β) Ένα όρισμα του γινομένου (πηλίκου) δύο μιγαδικών αριθμών προκύπτει αν προσθέσομε (αφαιρέσομε) τα ορίσματα των δύο αριθμών, δηλαδή:

$$\text{Arg}\,(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}\,z_1 + \text{Arg}\,z_2,\ \text{Arg}\,(z_1 / z_2) = \text{Arg}\,z_1 - \text{Arg}\,z_2.$$

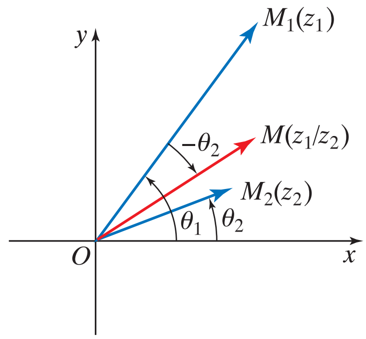
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού αριθμού $z_1 = \rho_1\,(\text{συν}\theta_1 + \text{i}\,\text{ημ}\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2\,(\text{συν}\theta_2 + \text{i}\,\text{ημ}\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία θ_2 (σχ. 3.5α).

Ομοίως, η διαίρεση του z_1 με τον z_2 σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ (σχ. 3.5β).

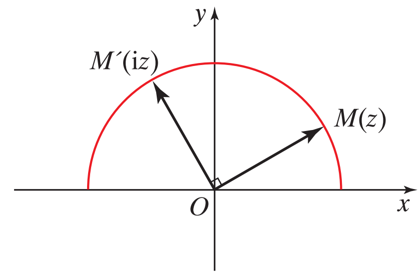
Εφόσον ο μιγαδικός αριθμός $\text{i} = \text{συν}(\pi/2) + \text{i}\,\text{ημ}(\pi/2)$ έχει μέτρο 1 και πρωτεύον όρισμα $\pi/2$, ο μιγαδικός iz έχει το ίδιο μέτρο με το μέτρο του z και όρισμα μεγαλύτερο κατά $\pi/2$ από το όρισμα του z,



Σχ. 3.5α.
Πολλαπλασιασμός μιγαδικών.



Σχ. 3.5β.
Διαίρεση μιγαδικών.



Σχ. 3.5γ.

δηλαδή ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία[1] $\pi/2$ (σχ. 3.5γ).

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή άλλες δύο φορές καταλήγομε στο εξής συμπέρασμα:

> Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $\pi/2$, με τον αριθμό $\mathrm{i}^2 = -1$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία π, ενώ με τον αριθμό $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $3\pi/2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.1.

Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z = \dfrac{1+\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta}{1+\text{συν}\theta-\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta}$ όπου $\theta \neq (2\kappa+1)\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Στη συνέχεια να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z^{100}.

Λύση.

Αν θέσομε $w=1+\text{συν}\theta+\mathrm{i}\text{ημ}\theta$ θα έχομε $z = \dfrac{w}{\overline{w}}$ και επομένως $|z| = 1$. Για την εύρεση ενός ορίσματος του z παρατηρούμε ότι $z = \dfrac{w}{\overline{w}} = \dfrac{w^2}{w\overline{w}}$ και επομένως:

$$z = \frac{(1+\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)^2}{(1+\text{συν}\theta-\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)(1+\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)} = \frac{(1+\text{συν}\theta)^2-\text{ημ}^2\theta+2\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta(1+\text{συν}\theta)}{(1+\text{συν}\theta)^2+\text{ημ}^2\theta} =$$

$$= \frac{1+\text{συν}^2\theta+2\text{συν}\theta-\text{ημ}^2\theta+2\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta(1+\text{συν}\theta)}{1+\text{συν}^2\theta+2\text{συν}\theta+\text{ημ}^2\theta} = \frac{2\text{συν}^2\theta+2\text{συν}\theta+2\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta(1+\text{συν}\theta)}{2+2\text{συν}\theta} =$$

$$= \frac{(1+\text{συν}\theta)(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)}{(1+\text{συν}\theta)} = \text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta.$$

Η τελευταία ισότητα δείχνει ότι ένα όρισμα του z είναι το θ. Για το μέτρο του μιγαδικού z^{100} έχομε

$$|z^{100}| = |z|^{100} = 1^{100} = 1.$$

---

1. Όταν αναφερόμαστε σε στροφή κατά μία θετική γωνία, εννοούμε ότι η φορά της στροφής είναι αντίθετη με τη φορά κινήσεως των δεικτών του ρολογιού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.2.

Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$ ισχύει

$$\left|\frac{z_1 - \mathrm{i}}{z_1 + \mathrm{i}}\right| + \left|\frac{z_2 - \mathrm{i}}{z_2 + \mathrm{i}}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\nu - \mathrm{i}}{z_\nu + \mathrm{i}}\right| < 1,$$

να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση.

Αν ένας από τους $z_1, z_2, ..., z_\nu$, για παράδειγμα ο z_κ, ήταν πραγματικός, τότε οι μιγαδικοί $z_\kappa - \mathrm{i}$ και $z_\kappa + \mathrm{i}$ θα ήταν συζυγείς και επομένως

$$\left|\frac{z_\kappa - \mathrm{i}}{z_\kappa + \mathrm{i}}\right| = \frac{|z_\kappa - \mathrm{i}|}{|z_\kappa + \mathrm{i}|} = 1.$$

Τότε όμως θα είχαμε

$$\left|\frac{z_1 - \mathrm{i}}{z_1 + \mathrm{i}}\right| + \left|\frac{z_2 - \mathrm{i}}{z_2 + \mathrm{i}}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\kappa - \mathrm{i}}{z_\kappa + \mathrm{i}}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\nu - \mathrm{i}}{z_\nu + \mathrm{i}}\right| \geq 1$$

που είναι άτοπο.

Ασκήσεις.

3.5.1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$(1+\mathrm{i})^2,\ (1-\mathrm{i})^2,\ \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2,\ \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$$

καθώς επίσης και του μιγαδικού $\left(\dfrac{\alpha+\beta\,\mathrm{i}}{\alpha-\beta\,\mathrm{i}}\right)^2$ όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

3.5.2. Αφού γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς $z_1 = 1+\mathrm{i}$ και $z_2 = 1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, να βρείτε τους αριθμούς

$$z_1 z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_1^2}{z_2},\ \frac{z_1}{z_2^2}.$$

3.5.3. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $|z| = 1$ και πρωτεύον όρισμα $\pi/3$. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z_1 = \frac{1-z}{1+z}.$$

3.5.4. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z = συνθ + i ημθ. Να βρείτε τον αριθμό $\dfrac{1}{z}$ και να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z+\dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $z-\dfrac{1}{z}$ είναι φανταστικός.

3.5.5. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z = 1 + \mathrm{i}\frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} \quad \text{όπου} \quad \theta \in [0, \pi] \quad \text{με} \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}.$$

3.5.6. Να βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + y\,\mathrm{i}$, για τους οποίους ισχύει

$$\left|\frac{z}{z-3}\right| = \frac{1}{2}.$$

3.5.7. Αν $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ και $z_2 = 1 + \mathrm{i}$, να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή το μιγαδικό z_1 / z_2 και, με βάση τη μορφή αυτή, να υπολογισετε το $\text{συν}\dfrac{\pi}{12}$ και το $\text{ημ}\dfrac{\pi}{12}$.

3.5.8. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $\left|\dfrac{z_1 - \mathrm{i}}{z_1 + \mathrm{i}}\right| + \left|\dfrac{z_2 - \mathrm{i}}{z_2 + \mathrm{i}}\right| + \left|\dfrac{z_3 - \mathrm{i}}{z_3 + \mathrm{i}}\right| < 1$ να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + z_3 - \mathrm{i}}{z_1 + z_2 + z_3 + \mathrm{i}}\right| < 1$.

3.6 Ο τύπος De Moivre.

Ας θεωρήσομε ένα μιγαδικό αριθμό z με τριγωνομετρική μορφή $z = \rho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.5 θα έχομε:

$$z^2 = \rho\,\rho[\text{συν}(\theta + \theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\theta + \theta)] = \rho^2(\text{συν}2\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}2\theta).$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = [\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)] \cdot [\rho^2(\text{συν}2\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}2\theta)] =$$

$$= \rho^3[\text{συν}(\theta + 2\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\theta + 2\theta)] = \rho^3(\text{συν}3\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}3\theta)$$

κ.ο.κ. Γενικά έχομε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι γνωστό ως ***Θεώρημα (ή τύπος) De Moivre***.

Θεώρημα De Moivre

Για κάθε ακέραιο ν ισχύει:

$$[\rho\ (\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)]^\nu = \rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\nu\theta)].$$

Για την απόδειξη της ισότητας για θετικό ακέραιο μπορούμε να εφαρμόσομε την μέθοδο της επαγωγής. Η ισότητα είναι προφανής για $\nu = 1$, ενώ αν υποθέσομε ότι ισχύει για τον $\nu = \varkappa$, δηλαδή:

$$[\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)]^\varkappa = \rho^\varkappa[\text{συν}(\varkappa\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\varkappa\theta)],$$

θα πρέπει να αποδείξομε ότι ισχύει επίσης και για $\nu = \varkappa + 1$. Πράγματι έχομε

$$[\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\theta)]^{\varkappa+1} = [\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\theta)]^\varkappa \cdot [\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)] =$$

$$= \rho^\nu[\text{συν}(\varkappa\theta) + \mathrm{i}\ \text{ημ}(\varkappa\theta)] \cdot \rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\theta) = \rho^{\varkappa+1}[\text{συν}(\varkappa+1)\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}(\varkappa+1)\theta].$$

Επομένως, η σχέση που μας ενδιαφέρει θα ισχύει, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

Όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος ο τύπος ισχύει επίσης, αφού, για κάθε θετικό ακέραιο ν, μπορούμε να γράψομε

$$[\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\theta)]^{-\nu} = \frac{1}{\rho^\nu(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\theta)^\nu}$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή του αριθμού $1 = 1 \cdot (\text{συν}0 + \mathrm{i}\,\text{ημ}0)$, παίρνομε

$$[\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\theta)]^{-\nu} = \frac{1 \cdot (\text{συν}0 + \mathrm{i}\,\text{ημ}0)}{\rho^\nu \cdot (\text{συν}(\nu\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\nu\theta))} = \rho^{-\nu}[\text{συν}(0 - \nu\theta) + \mathrm{i}\ \text{ημ}(0 - \nu\theta)]$$

δηλαδή

$$[\rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\theta)]^{-\nu} = \rho^{-\nu}[\text{συν}(-\nu\theta) + \mathrm{i}\ \text{ημ}(-\nu\theta)].$$

Σημειώνεται ότι ο τύπος De Moivre ισχύει ακόμη και όταν το ν είναι ρητός αριθμός (δηλ. πηλίκο δύο ακεραίων). Ως παράδειγμα εφαρμογής του τύπου De Moivre, ας υπολογίσομε τη δύναμη $(1+\mathrm{i})^{40}$. Μπορούμε να γράψομε πρώτα το μιγαδικό αριθμό $1+\mathrm{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)$$

οπότε, θα έχομε

$$(1+\mathrm{i})^{40}=\left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)\right]^{40}=(\sqrt{2})^{40}\left(\text{συν}\frac{40\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{40\pi}{4}\right)$$

$$=2^{20}[\text{συν}(10\pi)+\mathrm{i}\,\text{ημ}(10\pi)]=2^{20}(1+\mathrm{i}\cdot 0)=2^{20}=2048.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.1.

Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}$.

Λύση.

Ο μιγαδικός $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, σύμφωνα με το παράδειγμα 3.4.2 γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$$

και επομένως

$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5=z_1^3=2^5\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right).$$

Ομοίως, για τον $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ είδαμε, στο ίδιο παράδειγμα ότι

$$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right)$$

οπότε

$$z_2^3=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3=2^3\left(\text{συν}\frac{33\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{33\pi}{6}\right).$$

Συνεπώς, το κλάσμα που δόθηκε γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}=\frac{2^3\left(\text{συν}\frac{33\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{33\pi}{6}\right)}{2^5\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right)}=2^2\left[\text{συν}\left(\frac{28\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(\frac{28\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=4\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)=4\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.2.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=1+\mathrm{i}$.

α) Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z^{10}.
β) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των δυνάμεων $z^2, z^3, \ldots, z^{11}$.

Λύση.

α) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z=1+\mathrm{i}$ είναι $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Θέλοντας να γράψομε το μιγαδικό αριθμό $z=1+\mathrm{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή ρ(συνθ +i ημθ), για τη γωνία θ θα έχομε

$$\text{συν}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \text{ημ}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

οπότε $\theta=\pi/4$. Επομένως, $z=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)$ και σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre έχομε

$$z^{10}=\left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}=\sqrt{2^{10}}\left(\text{συν}\frac{10\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{10\pi}{4}\right)=32\mathrm{i}.$$

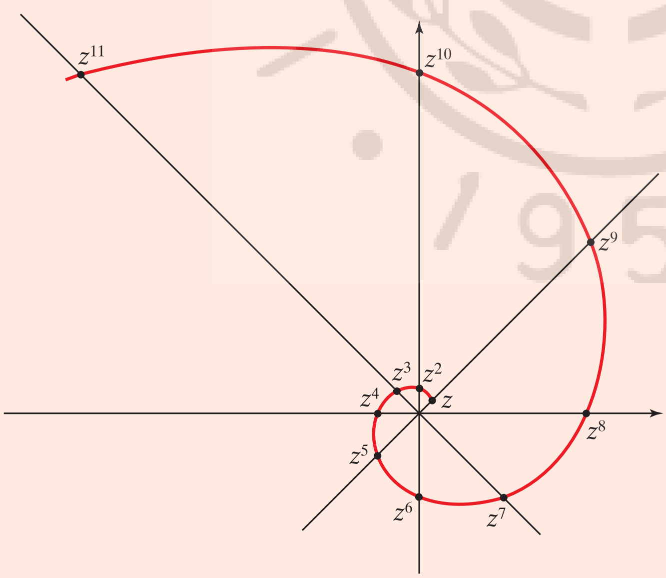
β) Για τις δυνάμεις του z έχομε:

$$z^2=\sqrt{2^2}\left(\text{συν}\frac{2\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{4}\right)=2\mathrm{i},\ z^3=\sqrt{2^3}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right)=-2+2\mathrm{i}$$

$$z^4=\sqrt{2^4}\left(\text{συν}\frac{4\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{4\pi}{4}\right)=-4,\ldots,z^{11}=32\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{11\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{11\pi}{4}\right)=-32-32\mathrm{i}.$$

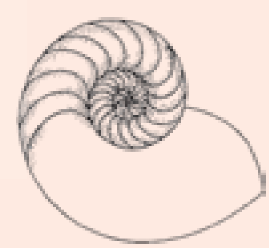
Οι εικόνες των δυνάμεων $z^2, z^3, \ldots, z^{11}$ του αριθμού z φαίνονται στο σχήμα 3.6α. Αν ενώσομε τις εικόνες των δυνάμεων αυτών, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μία ελικοειδής γραμμή, η οποία ονομάζεται ***ισογωνιακή σπείρα*** (σχ. 3.6α).

Τέτοιες γραμμές τις συναντάμε αρκετά συχνά στη φύση. Για παράδειγμα, τα κέρατα ορισμένων ζώων, ο σπόρος του ηλιοτροπίου [σχ. 3.6β(α)] κ.λπ. έχουν παρόμοια μορφή. Εντυπωσιακή ομοιότητα με τη σπείρα αυτή έχει και το όστρακο του ναυτίλου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.6β(β).



Σχ. 3.6α.
Ισογωνιακή σπείρα.

σπόρος ηλιοτροπίου
(α)



όστρακο ναυτίλου
(β)

Σχ. 3.6β.

Ασκήσεις.

3.6.1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1=\frac{1}{(1+\mathrm{i})^5},\quad z_2=\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16},\quad z_3=\frac{\left[\text{συν}\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right]^5}{\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{9}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right]^3},$$

$$z_4=\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{100},\quad z_5=\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{100},\quad z_6=\left(\frac{2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{100},\quad z_7=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2008}.$$

3.6.2. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$[2(\text{συν}10^0+\mathrm{i}\,\text{ημ}10^0)]^{-6},\quad \left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-5},\quad \left[3\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{-6}.$$

3.6.3. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $z=\dfrac{(\text{ημ}\theta-\mathrm{i}\,\text{συν}\theta)^{10}}{(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)^5}$.

3.6.4. Αν $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ και $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $z_1^{600}+z_2^{600}$ και $z_1^{600}-z_2^{600}$.

3.6.5. Αν $z=1-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z^3 και $(1-z)^8$.

3.6.6. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο ν ισχύει $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{-3\nu}=1$.

3.6.7. Αφού γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ και $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{\nu}+z_2^{\nu}$, $\nu\in\mathbf{N}$ είναι πραγματικός. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $z_1^{12}+z_2^{12}$.

3.6.8. Γράψετε την ποσότητα $(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)^3$ στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$:

α) Με χρήση του τύπου De Moivre.

β) Με εκτέλεση πολλαπλασιασμών ή αναλυτικό υπολογισμό της τρίτης δυνάμεως.

Στη συνέχεια να αποδείξετε τις ταυτότητες $\text{συν}3\theta=4\text{συν}^2\theta-3\text{συν}\theta$, $\text{ημ}3\theta=3\text{ημ}\theta-4\text{ημ}^3\theta$.

3.6.9. Αν ν είναι ένας θετικός ακέραιος και ισχύει $(1+\mathrm{i})^{\nu}=(1-\mathrm{i})^{\nu}$, να αποδείξετε ότι το ν είναι πολλαπλάσιο του 4.

3.6.10. Αν ν, μ είναι θετικοί ακέραιοι με $\mu-\nu=8$ να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{\nu}+\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{\nu}=\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{\mu}+\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{\mu}$.

3.6.11. Αν $z=\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta$, να αποδείξετε ότι $z^{\nu}+\dfrac{1}{z^{\nu}}=2\text{συν}(\nu\theta)$, $\nu\in\mathbf{Z}$. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτά, διαπιστώστε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\text{συν}^4\theta=\frac{1}{8}(\text{συν}4\theta+4\text{συν}2\theta+3).$$

3.6.12. Θεωρώντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της ταυτότητας $1+z+z^2+\ldots+z^{\nu}=\dfrac{1-z^{\nu+1}}{1-z}$ (ν ένας θετικός ακέραιος και $z\neq1$) για $z=\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta$, να αποδειχτεί ότι

$$1+\text{συν}\theta+\ldots+\text{συν}(\nu\theta)=\frac{1}{2}+\frac{\text{ημ}[(\nu+\frac{1}{2})\theta]}{2\text{ημ}(\theta/2)},\quad 1+\text{ημ}\theta+\ldots+\text{ημ}(\nu\theta)=\frac{\text{ημ}\frac{\nu\theta}{2}\,\text{ημ}\frac{\nu+1}{2}\theta}{\text{ημ}(\theta/2)}.$$

3.7 Νιοστές ρίζες μιγαδικού αριθμού – Λύση εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Στο παράδειγμα 3.3.2 διαπιστώσαμε ότι οι μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την εξίσωση $z^2 = 3+4\,\mathrm{i}$ είναι οι $z_1 = 2+\mathrm{i}$ και $z_2 = -2-\mathrm{i}$. Σημειώσαμε μάλιστα ότι, κάθε μιγαδικός $z = x + y\,\mathrm{i}$, για τον οποίο ισχύει $z^2 = \alpha + \beta\mathrm{i}$ ονομάζεται ***τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού*** $\alpha + \beta\,\mathrm{i}$. Ανάλογα μπορούμε να ορίσομε τη νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού ως εξής:

Ένας μιγαδικός αριθμός z ονομάζεται ***νιοστή ρίζα*** του μιγαδικού αριθμού w, όταν για τον ακέραιο αριθμό $\nu > 1$, ισχύει $z^\nu = w$.

Όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα, η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών, μας δίνει ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για τον υπολογισμό των νιοστών ριζών οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο είναι διαθέσιμη η τριγωνομετρική του μορφή.

Ένας μη μηδενικός αριθμός $w = \rho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$ έχει ν ακριβώς νιοστές ρίζες, οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$z_\varkappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\frac{\theta+2\varkappa\pi}{\nu} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\theta+2\varkappa\pi}{\nu}\right],\quad \varkappa = 0,\ 1,\ 2,\dots,\nu-1. \qquad (3.7.1)$$

Πράγματι, έστω ότι $w = \rho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$ και ας υποθέσομε ότι ο αριθμός z που ψάχνομε γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή ως $z = r\,(\text{συν}\omega + \mathrm{i}\,\text{ημ}\omega)$. Για να είναι ο τελευταίος ρίζα της εξισώσεως $z^\nu = w$, πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$r^\nu(\text{συν}\omega + \mathrm{i}\,\text{ημ}\omega)^\nu = \rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta),$$

δηλαδή

$$r^\nu(\text{συν}(\nu\omega) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\nu\omega)) = \rho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta).$$

Επομένως $r^\nu = \rho$ και $\nu\omega - \theta = 2\varkappa\pi$, $\varkappa \in \mathbf{Z}$, απ' όπου προκύπτει

$$r = \sqrt[\nu]{\rho} \qquad \text{και} \qquad \omega = \frac{\theta+2\varkappa\pi}{\nu},\ \varkappa\in\mathbf{Z}$$

Άρα οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta+2\varkappa\pi}{\nu} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\theta+2\varkappa\pi}{\nu}\right),\quad \varkappa\in\mathbf{Z}$$

είναι οι μόνοι αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση $z^\nu = w$.

Θ' αποδείξουμε στη συνέχεια ότι ακριβώς ν από τους παραπάνω αριθμούς είναι διαφορετικοί. Πραγματικά, αν λ και υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαιρέσεως του ακέραιου αριθμού $\varkappa$ με τον ακέραιο $\nu > 1$, τότε μπορούμε να γράψομε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαιρέσεως $\varkappa = \nu\lambda + \upsilon$ όπου $\upsilon \in \mathbf{Z}$ και $\upsilon = 0, 1, \dots, \nu-1$. Συνεπώς θα έχομε:

$$z = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta+2(\nu\lambda+\upsilon)\pi}{\nu} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\theta+2(\nu\lambda+\upsilon)\pi}{\nu}\right) = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right).$$

Συμβολίζοντας τους τελευταίους αριθμούς (οι οποίοι είναι ν το πλήθος) με z_υ, θα αποδείξομε ότι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Πράγματι, αν για δύο διαφορετικές τιμές m, n του $\upsilon = 0, 1, \dots, \nu-1$, έστω $m > n$, είχαμε $z_m = z_n$, θα έπρεπε να ισχύει:

$$\frac{\theta+2m\pi}{\nu}-\frac{\theta+2n\pi}{\nu}=2s\pi,$$

απ' όπου προκύπτει $m-n=s\nu$. Όμως, $0\le m-n<\nu$ οπότε θα έχομε $0\le s\nu<\nu$ και επομένως $0\le s<1$. Δοθέντος ότι το s είναι ακέραιος αριθμός προκύπτει $s=0$ που είναι άτοπο, αφού τότε θα είχαμε $m=n$. Άρα ο τύπος

$$z_\upsilon=\sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right),\quad \upsilon=0,1,\dots,\nu-1$$

ή ισοδύναμα ο

$$z_\varkappa=\sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta+2\varkappa\pi}{\nu}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\theta+2\varkappa\pi}{\nu}\right),\ \varkappa=0,1,\dots,\nu-1$$

δίνει ν διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς που ικανοποιούν την εξίσωση $z^\nu=\mathrm{w}$.

Αν απεικονίσομε τις ρίζες $z_\varkappa$, $\varkappa=0,1,\dots,\nu-1$ στο μιγαδικό επίπεδο, αυτές θα βρίσκονται επάνω στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα $r=\sqrt[\nu]{\rho}$ (αφού ισχύει $|z_\varkappa|=\sqrt[\nu]{\rho}$ για κάθε $\varkappa=0,1,\dots,\nu-1$). Επίσης από τη μορφή που έχουν τα ορίσματα, είναι φανερό ότι, σημειώνοντας τις ρίζες $z_0,z_1,z_2,\dots,z_{\nu-1}$ επάνω σ' αυτόν τον κύκλο, θα πάρομε τις κορυφές ενός κανονικού ν–γώνου με μία από τις κορυφές να είναι το σημείο, στο οποίο απεικονίζεται ο μιγαδικός z_0 με όρισμα θ/ν.

Ας θεωρήσομε το μιγαδικό $w=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ ως παράδειγμα εφαρμογής του προηγουμένου θεωρήματος. Για να βρούμε τις κυβικές ρίζες (ν=3) του μιγαδικού αυτού, γράφομε πρώτα τον αριθμό σε τριγωνομετρική μορφή. Έχομε

$$|w|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2\ \text{ και }\ \text{συν}\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \text{ημ}\theta=-\frac{1}{2},$$

οπότε ένα όρισμά του είναι το $\frac{7\pi}{6}$. Άρα,

$$w=2\left(\text{συν}\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{7\pi}{6}\right)$$

και σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού $w=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ θα δίνονται από τον τύπο

$$z_\varkappa=\sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{\frac{7\pi}{6}+2\varkappa\pi}{3}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\frac{7\pi}{6}+2\varkappa\pi}{3}\right],\quad \varkappa=0,\ 1,\ 2$$

ή αναλυτικά

$$z_0=\sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{7\pi}{18}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{7\pi}{18}\right],\ z_1=\sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{19\pi}{18}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{19\pi}{18}\right],\ z_2=\sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{31\pi}{18}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{31\pi}{18}\right].$$

Γεωμετρικά, οι κυβικές ρίζες είναι οι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[3]{|w|}=\sqrt[3]{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.1.

Δίνεται η εξίσωση $z^\nu=1$. Αφού βρείτε τη γενική λύση της εξισώσεως σε τριγωνομετρική μορφή, να διαπιστώσετε ότι οι ρίζες της είναι οι $1,z_1,z_1^2,z_1^3,\dots,z_1^{\nu-1}$ όπου

$$z_1=\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}.$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το άθροισμα όλων των ριζών της εξισώσεως είναι ίσο με 0, ενώ το γινόμενό τους είναι ίσο με $(-1)^{\nu-1}$.

Λύση.

Οι ρίζες της εξισώσεως $z^{\nu}=1$, σύμφωνα με το γενικό τύπο (3.7.1), για w = 1(συν0 + iημ0), θα δίνονται από τις εκφράσεις

$$z_{\varkappa}=\sqrt[\nu]{1}\left[\text{συν}\frac{0+2\varkappa\pi}{\nu}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{0+2\varkappa\pi}{\nu}\right],\quad \varkappa=0,1,2,...,\nu-1,$$

δηλαδή

$$z_{\varkappa}=\text{συν}\frac{2\varkappa\pi}{\nu}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{2\varkappa\pi}{\nu},\quad \varkappa=0,1,2,...,\nu-1.$$

Για $\varkappa=1$ είναι

$$z_1=\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$$

και επειδή

$$\text{συν}\frac{2\varkappa\pi}{\nu}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{2\varkappa\pi}{\nu}=\left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\varkappa},$$

θα έχομε

$$z_{\varkappa}=z_1^{\varkappa},\quad \varkappa=0,1,2,...,\nu-1.$$

Άρα οι ρίζες της εξισώσεως είναι της μορφής

$$z_0=1,\quad z_1=z_1,\quad z_2=z_1^2,\ ...\ ,\ z_{\nu-1}=z_1^{\nu-1}.$$

Για το άθροισμα όλων των ριζών παρατηρούμε ότι

$$z_0+z_1+z_2+...+z_{\nu-1}=1+z_1+z_1^2+\cdots+z_1^{\nu-1}$$

και αφού οι αριθμοί $1,z_1,z_1^2,...,z_1^{\nu-1}$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=1$ και λόγο $\lambda=z_1\neq 1$, παίρνομε

$$z_0+z_1+z_2+\cdots+z_{\nu-1}=1+z_1+z_1^2+\cdots+z_1^{\nu-1}=1\frac{(z_1)^{\nu}-1}{z_1-1}=\frac{1-1}{z_1-1}=0.$$

Επίσης, έχομε

$$z_0z_1z_2\cdots z_{\nu-1}=1\cdot z_1\,z_1^2\,z_1^3\cdots z_1^{\nu-1}=z_1^{1+2+3+\cdots+(\nu-1)}=z_1^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}=$$

$$=\left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}=\text{συν}\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu},$$

οπότε

$$z_0z_1z_2\cdots z_{\nu-1}=\text{συν}[\pi(\nu-1)]+\text{i}\,\text{ημ}(\pi(\nu-1)]=(\text{συν}\pi+\text{i}\,\text{ημ}\pi)^{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}.$$

Οι λύσεις της εξισώσεως $z^{\nu}=1$ είναι οι ***νιοστές ρίζες της μονάδας***. Οι εικόνες των ριζών αυτών στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας r = 1. Η κεντρική γωνία του πολυγώνου είναι ίση με $\varphi=\frac{2\pi}{\nu}$.

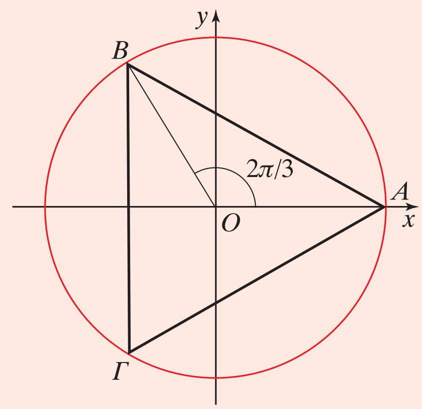
Για παράδειγμα, οι ***κυβικές ρίζες της μονάδας*** είναι οι λύσεις της εξισώσεως z^3 = 1 και δίνονται από τον τύπο:

$$z_\varkappa = \text{συν}\frac{2\varkappa\pi}{3} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{2\varkappa\pi}{3}, \ \varkappa = 0,1,2, .$$

Οι λύσεις αυτές παριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο με τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $r=1$. Η κεντρική γωνία του τριγώνου αυτού είναι $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.7. Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση $z^3=1$ θα μπορούσε να λυθεί και ως εξής

$$z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z-1=0 \text{ ή}$$

$$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=1 \text{ ή } \ z^2+z+1=0$$



Σχ. 3.7

Έτσι, αν ω είναι μία καθαρή μιγαδική ρίζα της εξισώσεως $z^3=1$ (δηλ. $\omega \neq 1$), τότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\omega^3=1, \qquad \omega^2+\omega+1=0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.2.

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $z^3+3z^2+3z+2=0$ και $z^{14}+z^{16}=-1$.

Λύση.

Το πολυώνυμο $P(z)=z^3+3z^2+3z+2$ γράφεται διαδοχικά ως εξής

$$P(z)=z^3+3z^2+3z+2=z(z^2+z+1)+2(z^2+z+1)=(z+2)(z^2+z+1),$$

οπότε για την εξίσωση $z^3+3z^2+3z+2=0$ θα έχομε $z^3+3z^2+3z+2=0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z=-2$ ή $z^2+z+1=0$.

Η λύση $z=-2$ δεν επαληθεύει τη δεύτερη εξίσωση, αφού $(-2)^{14}+(-2)^{16} \neq -1$. Όπως είδαμε στην προηγούμενη εφαρμογή, οι λύσεις της εξισώσεως $z^2+z+1=0$ είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας. Έτσι, αν ω είναι μία από τις δύο μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\omega^3=1 \text{ και } \omega^2+\omega+1=0.$$

Αφού

$$z^{14}+z^{16}=-1 \Leftrightarrow z^{14}+z^{16}+1=0$$

και

$$z^{14}+z^{16}+1=z^{3\cdot4+2}+z^{3\cdot5+1}=(z^3)^4z^2+(z^3)^5z^1$$

η εξίσωση $z^{14}+z^{16}=-1$ γράφεται στη μορφή

$$(z^3)^4z^2+(z^3)^5z=0.$$

Η τελευταία επαληθεύεται για $z=\omega$, αφού

$$(\omega^3)^4\omega^2+(\omega^3)^5\omega+1=1^4\omega^2+1^5\omega+1=\omega^2+\omega+1=0.$$

Άρα, οι κοινές λύσεις των εξισώσεων είναι οι (καθαρές) μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας, δηλαδή οι

$$z_1=\frac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad z_2=\frac{-1-\text{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Σύμφωνα με όσα είδαμε μέχρι στιγμής στην παρούσα ενότητα, οι πολυωνυμικές εξισώσεις τρίτου βαθμού $z^3=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ και $z^3+3z^2+3z+2=0$ έχουν ακριβώς τρεις ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ενώ η πολυωνυμική εξίσωση $z^\nu=1$ όπου ν οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος, έχει ν ακριβώς διαφορετικές ρίζες στο ίδιο σύνολο. Γενικότερα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Κάθε πολυωνυμική εξίσωσης $P(z) = 0$, νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+...+\alpha_1 z+\alpha_0=0$ με $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_\nu\in\mathbf{C}$, $\alpha_\nu\neq 0$ έχει ***ακριβώς*** ν ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Η αναζήτηση των νιοστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού w ισοδυναμεί με τη λύση της πολυωνυμικής εξισώσεως $P(z)=0$, όπου $P(z)=z^\nu-\mathrm{w}$.

Αν $z_1,z_2,...,z_\nu$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ (οι οποίες δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικές), αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής

$$P(z) = \alpha_\nu\,(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_\nu).$$

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολυωνυμικές εξισώσεις με ***πραγματικούς συντελεστές*** και θα δούμε πώς μπορούν να λυθούν στο σύνολο **C**. Η επίλυση τέτοιων εξισώσεων στο σύνολο **C** γίνεται με τη βοήθεια των ίδιων μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση εξισώσεων στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ας ξεκινήσομε με τη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ και $\alpha\neq 0$. Η τελευταία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}=0,$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha z^2+\beta z+\gamma$. Επομένως,

α) Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $z_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $z_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

β) Αν $\Delta=0$, τότε έχει διπλή πραγματική λύση, την $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$.

γ) Αν $\Delta<0$, τότε η εξίσωση στη οποία καταλήξαμε προηγουμένως γράφεται διαδοχικά (αφού $-\Delta>0$).

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)=0.$$

Άρα, οι ρίζες της είναι οι ***συζυγείς*** μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1=\frac{-\beta-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha},\qquad z_2=\frac{-\beta+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}.$$

Θα συνεχίσομε με τη λύση μιας πολυωνυμικής εξισώσεως $5^{ου}$ βαθμού, πιο συγκεκριμένα της $P(z) = 0$, όπου

$$P(z)=z^5+2z^4-z-2.$$

Θεωρούμε αρχικά τους διαιρέτες του σταθερού όρου -2, που πιθανόν να είναι ρίζες της. Αυτοί είναι οι αριθμοί $\pm1,\pm2$. Για $z=1$ βρίσκομε $P(1)=0$, οπότε το 1 είναι ρίζα της εξισώσεως. Εφαρμόζοντας το σχήμα του Horner στο $z=1$, βρίσκομε

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

οπότε μπορούμε να γράψομε

$$P(z)=z^5+2z^4-z-2=(z-1)(z^4+3z^3+3z^2+3z+2)\,.$$

Σημειώνομε ότι στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να καταλήξομε, θεωρώντας την ανάλυση του $P(z)$ στη μορφή (αφού το 1 είναι ρίζα)

$$P(z)=z^5+2z^4-z-2=(z-1)(z^4+az^3+\beta z^2+\gamma z+\delta)$$

όπου τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ μπορούν να προσδιοριστούν αν εκτελέσομε αρχικά τις πράξεις στο δεξί μέλος και εξισώσομε τους συντελεστές των δυνάμεων του z.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία στο πηλίκο $z^4+3z^3+3z^2+3z+2$ της προηγούμενης διαιρέσεως, βρίσκομε ότι το $z=-1$ είναι ρίζα και το σχήμα του Horner δίνει

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ & -1 & -2 & -1 & -2 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Επομένως

$$z^4+3z^3+3z^2+3z+2=(z+1)(z^3+2z^2+z+2)\,.$$

Το πολυώνυμο έχει ρίζα το $z=-2$ και εφαρμόζοντας για άλλη μία φορά το σχήμα του Horner προκύπτει

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ & -2 & 0 & -2 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

οπότε

$$z^3+2z^2+z+2=(z+2)(z^2+1)\,.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, συμπεραίνομε ότι το πολυώνυμο $P(z)=z^5+2z^4-z-2$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(z)=(z-1)(z+1)(z+2)(z^2+1)=(z-1)(z+1)(z+2)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$$

και έχει ως ρίζες τους αριθμούς $1,-1,-2,\mathrm{i},-\mathrm{i}$.

Από την επίλυση της παραπάνω πολυωνυμικής εξισώσεως, καθώς και από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξισώσεως $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R},\ \alpha\neq 0)$ με $\Delta<0$ παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες που προκύπτουν είναι ανά δύο συζυγείς.

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα (βλ. παράδ. 3.3.3):

Αν ο μιγαδικός αριθμός $\alpha+\beta\,\mathrm{i}\,(\beta\neq 0)$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξισώσεως με ***πραγματικούς*** συντελεστές, τότε ο συζυγής του $\alpha-\beta\,\mathrm{i}$ είναι επίσης ρίζα της εξισώσεως αυτής.

Σύμφωνα μ' αυτό:

> Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Παραπάνω είδαμε ότι το πολυώνυμο $P(z)=z^5+2z^4-z-2$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $1,-1,-2,\mathrm{i},-\mathrm{i}$ γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων και ενός δευτεροβάθμιου παράγοντα που έχει $\Delta<0$, πιο συγκεκριμένα $P(z)=(z-1)(z+1)(z+2)(z^2+1)$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

> Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες έχουν αρνητική διακρίνουσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.3.

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο, ώστε $P(1)=-2$ και η εξίσωση $P(x)=0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και $1+\mathrm{i}$.

Λύση.

Επειδή το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό $1+\mathrm{i}$, θα έχει ρίζα και το συζυγή του αριθμό $1-\mathrm{i}$. Επομένως, οι 3 ρίζες του είναι οι αριθμοί 2, $1-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ και ως εκ τούτου μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(x)=a(x-2)(x-(1-\mathrm{i}))(x-(1+\mathrm{i})), \quad a\in\mathbf{R}^*.$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκομε

$$P(x)=a(x-2)(x^2-x(1+\mathrm{i})-x(1-\mathrm{i})+(1^2-\mathrm{i}^2))=a(x-2)(x^2-2x+2)=a(x^3-4x^2+6x-4).$$

Αφού $P(1)=-2$, θα έχομε

$$\alpha(1^3-4\cdot1^2+6\cdot1-4)=-2\Leftrightarrow-\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=2$$

οπότε

$$P(x)=2(x^3-4x^2+6x-4)=2x^3-8x^2+12x-8.$$

Ασκήσεις.

3.7.1. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α) $z^4=-16$ β) $z^9-z^5+z^4-1=0$ γ) $z^4=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

3.7.2. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α) $z^4=-\mathrm{i}$ β) $z^4=16\left(\text{συν}\dfrac{8\pi}{5}+i\text{ημ}\dfrac{8\pi}{5}\right)$ γ) $z^6=64$

δ) $z^3=\dfrac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ ε) $z^4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ στ) $z^4=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

3.7.3. Έστω $z = \rho\,(\text{συν}\theta + \text{i ημ}\theta)$ η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z

α) Να γράψετε την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $\overline{z}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $z^9 \cdot (\overline{z})^5 = 1$.

3.7.4. Αφού βρείτε τις λύσεις της εξισώσεως $z^7 = -1$, να αποδείξετε ότι $\text{συν}\frac{\pi}{7} + \text{συν}\frac{3\pi}{7} + \text{συν}\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

3.7.5. Αν ω είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $\omega \neq 1$, να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $(1 - \omega + \omega^2)\,(1 + \omega - \omega^2)$.

3.7.6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των επομένων δύο εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

$$(z^2+1)^2 + z^3 + z = 0\,,\ z^{23} + z^{16} + 1 = 0\,.$$

3.7.7. Να βρείτε τις κυβικές ρίζες του αριθμού –1. Αν w είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $w \neq -1$:

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $w^2 - w + 1 = 0$.

β) Να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $(-1 + w + w^2)(1 + w - w^2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι τρεις κυβικές ρίζες της μονάδας είναι οι $w, \overline{w}, w\overline{w}$.

3.7.8. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

α) $z^2 - 2|z| = 0$ β) $z^3 - 4z = 0$.

Τι παρατηρείτε;

3.7.9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(1-\text{i})z + 2\text{i}\overline{z} = 5 + 3\text{i}$ β) $z^3 - 7z^2 + 16z - 10 = 0$

γ) $z^3 - 3z^2 + 3z - 28 = 0$ δ) $z^4 = 4(z^2 + z + 1) + z$

ε) $|z+4+8\text{i}| = 2|z+1+2\text{i}|$ στ) $\left|z^2\right| = -z^2$

ζ) $z^2 - 2z + 2 = 0$ η) $(z-1)^3 - (1-\text{i})(z+1)^3 = 0$

3.7.10. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση

$$z^4(z+1)^2 + z^2 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0\,.$$

3.7.11. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

3.7.12. Αν ο μιγαδικός αριθμός $1+\text{i}$ είναι ρίζα της εξισώσεως $z^3 - z^2 + 2a = 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ να αποδείξετε ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι ίσος με 1 και στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ρίζες της εξισώσεως.

3.7.13. Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z = 3 + 2\text{i}$ είναι ρίζα της εξισώσεως $z^3 - 5\alpha z^2 + 7\beta z + 13 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τις άλλες ρίζες της εξισώσεως.

3.7.14. Να εκφράσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^6 - x^3 + 1$ ως γινόμενο τριών δευτεροβαθμίων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές.

3.7.15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(z) = (z+1)^{6k+1} - z^{6k+1} - 1$ όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος.

α) Να αποδείξετε ότι οι καθαρές μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδος είναι ρίζες του $P(z)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(z)$ έχει ως παράγοντα το πολυώνυμο $z^2 + z + 1$.

3.7.16. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^2 + 6z + 18 = 0$. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεως αυτής, να γράψετε το μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{z_1^2 + z_2^2 - 2\text{i}}{z_1 z_2 + 3\text{i}}$ στη μορφή $\alpha + \beta\text{i}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

3.7.17. Δίνεται ότι ο αριθμός $3 + \mathrm{i}$ είναι ρίζα της εξισώσεως $z^3 - 8z^2 + az + \beta = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 22$, $\beta = -20$.

β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $z^3 - 8z^2 + 22z - 20$ έχει ως παράγοντα το $z^2 - 6z + 10$.

γ) Να βρείτε και τις τρεις ρίζες της αρχικής εξισώσεως.

3.8 Εκθετική μορφή – Νεπέριος λογάριθμος μιγαδικών αριθμών.

Προκειμένου να επεκτείνομε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, εισάγομε αρχικά το συμβολισμό $e^{\mathrm{i}\theta} = \text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta$ ο οποίος είναι γνωστός με την ονομασία ***τύπος του Euler***. Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$, θέτομε

$$e^z = e^{a+\beta\mathrm{i}} = e^a e^{\beta\mathrm{i}} = e^a(\text{συν}\beta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\beta).$$

Η συνάρτηση $e^z, z \in \mathbf{C}$ ικανοποιεί τις γνωστές ιδιότητες που ικανοποιεί η εκθετική συνάρτηση, πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \qquad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \qquad (e^{z_1})^{z_2}\, e^{z_1 z_2}.$$

Αν $z = \rho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z, μπορούμε προφανώς να γράψομε $z = |z|\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$ και επομένως $z = |z|\,e^{\mathrm{i}\theta}$.

Από την τελευταία έκφραση προκύπτουν άμεσα ορισμένοι τύποι που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Για παράδειγμα, ο τύπος De Moivre σχετίζεται άμεσα με την ταυτότητα

$$z^\nu = \left(|z|\cdot e^{\mathrm{i}\theta}\right)^\nu = |z|^\nu \cdot (e^{\mathrm{i}\theta})^\nu = |z|^\nu e^{\mathrm{i}\nu\theta}$$

ενώ οι κανόνες πολλαπλασιασμού και διαιρέσεως των μιγαδικών αριθμών

$$z_1 = |z_1|e^{\mathrm{i}\theta_1}, \quad z_2 = |z_2|e^{\mathrm{i}\theta_2},$$

συνδέονται με τους τύπους:

α) $z_1 z_2 = \left(|z_1|\, e^{\mathrm{i}\theta_1}\right)\cdot\left(|z_2|\, e^{\mathrm{i}\theta_2}\right) = (|z_1|\cdot|z_2|)\,(e^{\mathrm{i}\theta_1}e^{\mathrm{i}\theta_2}) = (|z_1|\cdot|z_2|)\,e^{\mathrm{i}\,(\theta_1+\theta_2)}$,

β) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|\, e^{\mathrm{i}\theta_1}}{|z_2|\, e^{\mathrm{i}\theta_2}} = \left(\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\right) e^{\mathrm{i}\theta_1 - \theta_2} = \left(\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\right) e^{(\theta_1-\theta_2)}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.1.

Αν θ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι ισχύουν οι τύποι

$$\text{συν}\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \qquad \text{ημ}\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Λύση.

Θέτοντας στην ταυτότητα $e^{\mathrm{i}\theta} = \text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta$ όπου θ το $-\theta$ παίρνομε

$$e^{-\mathrm{i}\theta} = \text{συν}(-\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(-\theta) = \text{συν}\theta - \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta$$

Επομένως

$$e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} = (\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta) + (\text{συν}\theta - \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta) = 2\,\text{συν}\theta$$

$$e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} = (\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta) - (\text{συν}\theta - \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta) = 2\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta$$

και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.2.

Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $e^z = 1$.

Λύση.

Αν θέσομε $z = x + y\mathrm{i}$ θα έχομε:

$$e^z = 1 \Leftrightarrow e^{x+y\mathrm{i}} = 1 \Leftrightarrow e^x e^{y\mathrm{i}} = 1$$

και λαμβάνοντας τα μέτρα στα δύο μέλη βρίσκομε

$$\left|e^x\right|\left|e^{y\mathrm{i}}\right| = 1 \Leftrightarrow e^x\left|\text{συν}y + \mathrm{i}\,\text{ημ}y\right| = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

Επομένως προκύπτει ότι $e^{y\mathrm{i}} = 1$, απ' όπου παίρνομε

$$\text{συν}y + \mathrm{i}\,\text{ημ}y = 1 = 1 + \mathrm{i}\cdot 0 \;\Leftrightarrow\; \text{συν}y = 1 \;\text{ και }\; \text{ημ}y = 0\,.$$

Οι τελευταίες σχέσεις ισχύουν μόνο όταν $y = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathrm{Z}$. Επομένως οι λύσεις της εξισώσεως $e^z = 1$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δίνονται από τον τύπο

$$z = 0 + 2\kappa\pi\mathrm{i} = 2\kappa\mathrm{i}\pi, \quad \kappa \in \mathrm{Z}\,.$$

Όπως γνωρίζομε, ο λογάριθμος ενός θετικού πραγματικού αριθμού x ορίζεται μέσω της ισοδυναμίας $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

Ανάλογα, αν z είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, ο (Νεπέριος) λογάριθμος του z ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός w, για τον οποίο ισχύει $e^z = w$, δηλαδή $\ln z = w \Leftrightarrow e^w = z$.

Αν θέσομε $w = x + \mathrm{i}\,y$ και $z = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ όπου x, y, α, β πραγματικοί αριθμοί, θα έχομε

$$e^{x+\mathrm{i}y} = z \Leftrightarrow e^x(\text{συν}y + \mathrm{i}\,\text{ημ}y) = \alpha + \mathrm{i}\beta \Leftrightarrow e^x\text{συν}y + \mathrm{i}e^x\text{ημ}y = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

απ' όπου προκύπτουν οι σχέσεις $e^x\text{συν}y = \alpha$, $e^x\text{ημ}y = \beta$.

Οι τελευταίες οδηγούν στην ισότητα

$$|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = e^{2x}(\text{συν}^2 y + \text{ημ}^2 y) = e^{2x} \Rightarrow |z| = e^x$$

οπότε $x = \ln|z|$. Αν τώρα συμβολίσομε με θ_0 το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$, θα ισχύει

$$z = |z|(\text{συν}\theta_0 + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta_0), \qquad e^w = e^x(\text{συν}y + \mathrm{i}\,\text{ημ}y)$$

οπότε

$$z = e^w \Leftrightarrow |z|(\text{συν}\theta_0 + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta_0) = e^x(\text{συν}y + \mathrm{i}\,\text{ημ}y) \Leftrightarrow \text{συν}\theta_0 + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta_0 = \text{συν}y + \mathrm{i}\,\text{ημ}y$$

και επομένως $y - \theta_0 = 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z$, δηλαδή $y = \theta_0 + 2\kappa\pi$.

Άμεση συνέπεια της τελευταίας διαπιστώσεως είναι ότι ο λογάριθμος ενός μιγαδικού αριθμού z δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Πιο συγκεκριμένα έχομε

$$\ln z = x + \mathrm{i}y = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta_0 + 2\kappa\pi)$$

όπου $\theta_0 = \mathrm{Arg}z$ είναι το πρωτεύον όρισμα του z και $\kappa \in \mathbf{Z}$. Η τιμή του $\ln z$ που αντιστοιχεί στο $\kappa = 0$ ονομάζεται συνήθως ***πρωτεύουσα τιμή*** (ή πρωτεύων κλάδος) του λογάριθμου και συμβολίζεται με $\mathrm{Ln}\,z$, δηλαδή $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + \mathrm{i}\theta_0$.

Με βάση τα παραπάνω, είμαστε πλέον σε θέση να ορίσομε τόσο το λογάριθμο ενός αρνητικού αριθμού, όσο και το λογάριθμο φανταστικών αριθμών. Έτσι αν $z = -\alpha$, με α θετικό πραγματικό αριθμό, θα έχομε $\theta_0 = \mathrm{Arg}z = \pi$ και $|z| = \alpha$, οπότε

$$\mathrm{Ln}(-\alpha) = \ln\alpha + \mathrm{i}\pi\,, \quad \ln(-\alpha) = \ln\alpha + \mathrm{i}(\pi + 2\kappa\pi)$$

Ομοίως, αν $z = \beta\mathrm{i}$, με β θετικό πραγματικό αριθμό, θα έχομε $\theta_0 = \pi/2$ και $|z| = \beta$, οπότε

$$\mathrm{Ln}(\beta\mathrm{i}) = \ln\beta + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\,, \quad \ln(\beta\mathrm{i}) = \ln\beta + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$$

ενώ για $z=-\beta$i, με $\beta>0$, προκύπτει

$$\mathrm{Ln}(-\beta\,\mathrm{i})=\ln\beta+\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{2},\quad \ln(-\beta\mathrm{i})=\ln\beta+\mathrm{i}(\frac{3\pi}{2}+2\varkappa\pi)\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.3.

Να επιλύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $e^{w}=1+\mathrm{i}$.

Λύση.

Για το μιγαδικό αριθμό $z=1+\mathrm{i}$ έχομε $|z|=\sqrt{2}$, ενώ για το πρωτεύον όρισμα του θ_0 θα πρέπει να ισχύει

$$\text{συν}\theta_0=\text{ημ}\theta_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 0\le\theta_0<2\pi\,.$$

Επομένως $\theta_0=\pi/4$ και η λύση της εξισώσεως $e^{w}=z$ θα δίνεται από τον τύπο

$$w=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\theta_0+2\varkappa\pi)=\ln(\sqrt{2})+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2\varkappa\pi\right)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{4\varkappa+1}{4}\cdot\mathrm{i}\,\pi,\quad \varkappa\in\mathrm{Z}\,.$$

Ασκήσεις.

3.8.1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\, i$ τους μιγαδικούς αριθμούς e^{z} όπου:

α) $z=1+\mathrm{i}$ β) $z=\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5}$ γ) $z=-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$ δ) $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3}$.

3.8.2. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.8.1. να αποδείξετε ότι:

$$\text{συν}^2\theta=\frac{1}{2}(\text{συν}2\theta+1),\quad \text{ημ}^2\theta=\frac{1}{2}(\text{συν}2\theta+1),\quad \text{συν}^4\theta=\frac{1}{8}(\text{συν}4\theta+4\text{συν}2\theta+3)\,.$$

3.8.3. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους των μιγαδικών αριθμών:

$$z_1=\mathrm{i}\,,\quad z_2=-\mathrm{i}\,,\quad z_3=-5\,,\quad z_4=1+\sqrt{3}\mathrm{i}\,,\quad z_5=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{10},\quad z_6=\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3},\quad z_7=(1+\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})^2\,.$$

3.8.4. Να επιλύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

α) $e^{w}=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ β) $e^{w}=1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ γ) $e^{2w}-2e^{w}+4=0$.

3.8.5. Αφού βρείτε αρχικά το λογάριθμο του μιγαδικού αριθμού $z=\text{συν}\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\dfrac{5\pi}{6}$, στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$w^5=1024\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right).$$

3.9 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Φανταστική μονάδα i.	$\mathrm{i}^2=(-\mathrm{i})^2=-1$
Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού $z=\alpha+\beta$i.	$\mathrm{Re}(z)=\alpha,\ \mathrm{Im}(z)=\beta$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta$i.	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+\beta^2}$
Ισότητα δύο μιγαδικών $z_1 = \alpha + \beta$i, $z_2 = \gamma + \delta$i	$\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$
Πράξεις μεταξύ μιγαδικών.	$(\alpha+\beta\,\mathrm{i})+(\gamma+\delta\,\mathrm{i})=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)\mathrm{i}$ $(\alpha+\beta\,\mathrm{i})-(\gamma+\delta\,\mathrm{i})=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\mathrm{i}$ $(\alpha+\beta\,\mathrm{i})\cdot(\gamma+\delta\,\mathrm{i})=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)\mathrm{i}$ $\dfrac{\alpha+\beta\,\mathrm{i}}{\gamma+\delta\,\mathrm{i}}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\mathrm{i}$
Συζυγής μιγαδικού.	$\overline{z}=\overline{a+\beta\,\mathrm{i}}=a-\beta\,\mathrm{i}$
Ιδιότητες συζυγούς.	$\overline{(\overline{z})}=z$, $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$, $z-\overline{z}=2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im(z)}$ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$ $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, $\overline{(z^\nu)}=(\overline{z})^\nu$, $\nu\in\mathrm{N}$
Δυνάμεις του i.	$\mathrm{i}^{4\kappa+\upsilon}=\mathrm{i}^{\upsilon}=\begin{cases}1 & \text{αν } \upsilon=0\\ \mathrm{i} & \text{αν } \upsilon=1\\ -1 & \text{αν } \upsilon=2\\ \mathrm{i} & \text{αν } \upsilon=3\end{cases}$ όπου κ, υ ακέραιοι και $\kappa\geq 0$, $0\leq\upsilon<4$.
Ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού.	$\lvert z\rvert=\lvert -z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert=\lvert-\overline{z}\rvert$, $z\overline{z}=\lvert z\rvert^2$, $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\,\lvert z_2\rvert$, $\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$, $z_2\neq 0$ $\big\lvert\lvert z_1\rvert-\lvert z_2\rvert\big\rvert\leq\lvert z_1+z_2\rvert\leq\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$
Εξίσωση $\lvert z-z_0\rvert=r$ όπου $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$.	Παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r.
Εξίσωση $\lvert z-z_1\rvert=\lvert z-z_2\rvert$.	Περιγράφει τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους αριθμούς z_1 και z_2.
Τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $z = \alpha + \beta$i.	$z=\rho(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$ όπου $\rho=\lvert z\rvert$, $\text{συν}\theta=\dfrac{a}{\rho}$, $\text{ημ}\,\theta=\dfrac{\beta}{\rho}$

Πράξεις με χρήση τριγωνομετρικής μορφής.	Αν $z_1 = \rho_1(συνθ_1 + i\,ημθ_1)$, $z_2 = \rho_2(συνθ_2 + i\,ημθ_2)$ τότε $$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\,[συν(θ_1 + θ_2) + i\,ημ(θ_1+θ_2)$$ $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[συν(θ_1 - θ_2) + i\,ημ(θ_1 - θ_2)],\ \rho_2 \neq 0$$
Πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i.	Στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία π/2 (με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού).
Πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $i^3 = -i$.	Στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία 3π/2 (με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού).
Τύπος De Moivre.	Αν $z = \rho(συνθ + i\,ημθ)$, τότε $z^\nu = \rho^\nu[συν(\nu θ) + i\,ημ(\nu θ)]$
Νιοστές ρίζες μιγαδικού $w = \rho(συνθ + i\,ημθ)$.	$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(συν\frac{θ + 2\kappa\pi}{\nu} + i\,ημ\frac{θ + 2\kappa\pi}{\nu}\right),\ \ \kappa = 0,1,2,...,\nu - 1$$
Συζυγείς ρίζες πολυωνυμικής εξισώσεως με πραγματικούς συντελεστές.	Για κάθε μιγαδική ρίζα $\alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$), ο συζυγής $\alpha - \beta i$ είναι επίσης ρίζα.
Πλήθος ριζών πολυωνυμικής εξισώσεως $P(z) = 0$, νιοστού βαθμού.	Κάθε πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού της μορφής $$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$ με $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\nu \in \mathbf{C}$, $\alpha_\nu \neq 0$, έχει ακριβώς ν ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

3.10 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Ο αριθμός z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z + \overline{z} = 0$.	**Σ Λ**
2.	Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $z_1 = z_2 = 0$.	**Σ Λ**
3.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\left\|z^2\right\| = \left\|z\right\|^2$.	**Σ Λ**
4.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\left\|z^2\right\| = z^2$.	**Σ Λ**
5.	Ο αριθμός $z = (2+3i)^{20} + (2-3i)^{20}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.	**Σ Λ**
6.	Αν $z + \overline{z} = 0$, τότε $\mathrm{Re}(z) = 2$.	**Σ Λ**
7.	Αν $z = συν\frac{\pi}{4} + i\,ημ\frac{\pi}{4}$, τότε η δύναμη z^{200} είναι ίση με 1.	**Σ Λ**
8.	Η εξίσωση $\alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.	**Σ Λ**

9.	Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $z+\bar{z}=0$ είναι όσα βρίσκονται επάνω στο φανταστικό άξονα.	**Σ Λ**
10.	Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $z-\bar{z}=2\mathrm{i}$ είναι όσα βρίσκονται επάνω στο πραγματικό άξονα.	**Σ Λ**
11.	Αν ο μιγαδικός αριθμός z έχει όρισμα τη γωνία θ, τότε ο μιγαδικός αριθμός z/i έχει όρισμα τη γωνία $\theta-\dfrac{\pi}{2}$.	**Σ Λ**
12.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\|z\|=-\|-z\|=\|\bar{z}\|=-\|-\bar{z}\|$.	**Σ Λ**
13.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\overline{(z^{\nu})}=(\bar{z})^{\nu}$, $\nu\in\mathrm{N}$.	**Σ Λ**
14.	Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με μιγαδικούς συντελεστές, τότε ο συζυγής του είναι επίσης ρίζα του ίδιου πολυωνύμου.	**Σ Λ**
15.	Αν μία πολυωνυμική εξίσωση $P(z)=0$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον αριθμό $1-\mathrm{i}$, τότε το πολυώνυμο $P(z)$ έχει παράγοντα τον z^2-2z+2.	**Σ Λ**
16.	Αν $\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta_1)=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta_2)$, τότε $\rho_1=\rho_2$ και $\theta_1=\theta_2$.	**Σ Λ**
17.	Ο τύπος De Moivre $[\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta)]^{\nu}=\rho^{\nu}[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+\mathrm{i}\,\eta\mu(\nu\theta)]$ δεν ισχύει όταν ο εκθέτης ν είναι αρνητικός ακέραιος.	**Σ Λ**
18.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $\pi/2$.	**Σ Λ**
19.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $3\pi/2$.	**Σ Λ**
20.	Κάθε πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού, της μορφής $\alpha_{\nu}z^{\nu}+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\ldots$ $\ldots+\alpha_1z+\alpha_0=0$ με $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu}\in\mathbf{C}$, $\alpha_{\nu}\neq0$ έχει ακριβώς ν ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.	**Σ Λ**
21.	Οι εικόνες των ριζών της εξισώσεως $z^{40}=1024$ στο μιγαδικό επίπεδο, σχματίζουν ένα κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία $\dfrac{\pi}{40}$.	**Σ Λ**
22.	Οι εικόνες των ριζών της εξισώσεως $z^{10}=3^{10}$ στο μιγαδικό επίπεδο, βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r=3$.	**Σ Λ**
23.	Οι εικόνες των ριζών της εξισώσεως $z^3=\sqrt{7}+\mathrm{i}\sqrt{25}$ στο μιγαδικό επίπεδο, βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r=\sqrt{2}$.	**Σ Λ**
24.	Δεν υπάρχει εξίσωση 3ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές που έχει ως ρίζες τους αριθμούς $1+\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$ και i.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$ είναι μηδενικός, όταν: α) $\alpha=0$ και $\beta=0$ β) $\alpha=0$ γ) $\alpha=0$ ή $\beta=0$ δ) $\alpha-\beta=0$

2.	Αν $z = \mathrm{i}$, τότε: α) $z^2 = 1$ β) $\frac{1}{z} = -z$ γ) $z^2 = \mathrm{i}$ δ) $z^2 = z$
3.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $\mathrm{i}^2 = -1$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία: α) $\pi/2$ β) π γ) $3\pi/2$ δ) $3\pi/4$
4.	Έστω z μια μιγαδική κυβική ρίζα της μονάδας ($z \neq 1$). Τότε η παράσταση $1 + z + z^2$ είναι ίση με: α) 0 β) 1 γ) 3 δ) –1
5.	Μία τετραγωνική ρίζα του αριθμού –4 είναι ο αριθμός: α) $z = -2\mathrm{i}$ β) $z = -2$ γ) $z = -2 + \mathrm{i}$ δ) $z = 2$
6.	Ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = 3 + \sqrt{2}$ είναι ο: α) $\overline{z} = 2 - \sqrt{3}$ β) $\overline{z} = 3 + \sqrt{2}$ γ) $\overline{z} = 3 - \sqrt{2}$ δ) $\overline{z} = 3\sqrt{2}$
7.	Ο μιγαδικός αριθμός z είναι πραγματικός, όταν: α) $z\overline{z} = 1$ β) $z + \overline{z} = 0$ γ) $\overline{\overline{z} - z} = 0$ δ) $z\overline{z} = 0$
8.	Η εξίσωση $z^2 + 3z + 4 = 0$ έχει: α) Μία πραγματική ρίζα και μία μιγαδική ρίζα. β) Δύο ρίζες που είναι καθαροί μιγαδικοί. γ) Δύο πραγματικές ρίζες. δ) Δύο ρίζες που είναι φανταστικοί αριθμοί.
9.	Δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν ορίσματα θ_1, θ_2 αντιστοίχως. Ένα όρισμα του πηλίκου $\frac{z_1}{z_2}$ είναι το: α) $\theta_1 + \theta_2$ β) $\theta_1 - \theta_2$ γ) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ δ) $\theta_2 \cdot \theta_1$
10.	Δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν ορίσματα θ_1, θ_2 αντιστοίχως. Ένα όρισμα του γινομένου $z_1 \cdot z_2$ είναι το: α) $\theta_1 + \theta_2$ β) $\theta_1 - \theta_2$ γ) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ δ) $\theta_2 \cdot \theta_1$
11.	Αν μία πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον αριθμό –i, τότε το πολυώνυμο $P(z)$ έχει παράγοντα το: α) $z^2 - 2z + 2$ β) $z^2 + 2$ γ) $z^2 + \mathrm{i}$ δ) $z^2 + 2$
12.	Στο μιγαδικό επίπεδο, έστω $\overrightarrow{OA}$ η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z, $\overrightarrow{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του $\mathrm{i}z$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ η διανυσματική ακτίνα του $\mathrm{i}^2 z$ και $\overrightarrow{O\Delta}$ η διανυσματική ακτίνα του $-\mathrm{i}z$. Τότε: α) Η $\overrightarrow{O\Gamma}$ είναι διανυσματική ακτίνα του $\overline{z}$. β) Τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι συνευθειακά. γ) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. δ) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$ παριστάνει έναν πραγματικό αριθμό.

13.	Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1=1,\ z_2=\mathrm{i},\ z_3=-1,\ z_4=-\mathrm{i}$ βρίσκονται: α) Στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα 1. β) Στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα 2. γ) Στον άξονα $y'y$. δ) Στον άξονα $x'x$.
14.	Ένας μιγαδικός αριθμός z ονομάζεται νιοστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού w, όταν για τον ακέραιο αριθμό $\nu>1$, ισχύει: α) $w^\nu = z$ β) $z^\nu = w$ γ) $z^\nu = w\mathrm{i}$ δ) $z^\nu = -w$
15.	Ένας μη μηδενικός αριθμός $\alpha = \rho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\ \text{ημ}\,\theta)$ έχει: α) ν το πολύ νιοστές ρίζες. β) Ακριβώς ν νιοστές ρίζες. γ) Τουλάχιστον ν νιοστές ρίζες. δ) Ακριβώς ν^2 νιοστές ρίζες.

3.11 Γενικές ασκήσεις.

3.11.1. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z\neq 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $-2\leq \dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\leq 2$.

3.11.2. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, για τους οποίους ισχύει $w=\dfrac{2+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$
Να αποδείξετε ότι, αν $w\in\mathbf{R}$, τότε ο z είναι φανταστικός.

3.11.3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και z' με $|z|=|z'|=1$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u=\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ είναι πραγματικός.

3.11.4. Να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $(1+\mathrm{i})^{4\nu}-(1-\mathrm{i})^{4\nu}$, όπου ν ένας θετικός ακέραιος.

3.11.5. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta\mathrm{i})^{2008}=(\beta-\alpha\mathrm{i})^{2008}$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β.

3.11.6. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1=7+8i και z_2= 4–5i.
Αν $z=z_1-\overline{z}_2$ να γράψετε το μιγαδικό αριθμό z σε τριγωνομετρική μορφή και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον αριθμό z^4.

3.11.7. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z. Αν ο αριθμός $u=\dfrac{z-4\mathrm{i}}{z-2}$, με $z\neq 2$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή και να βρείτε την εξίσωση της γραμμής αυτής.

3.11.8. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z=x+y\mathrm{i}$, για τον οποίο ισχύει η σχέση $z\overline{z}-2(z+\overline{z})=0$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

3.11.9. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+y\mathrm{i}$. Αν για τον αριθμό $u=2\mathrm{i}z+1+\mathrm{i}$ ισχύει $|u|=4$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

3.11.10. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.
Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $|\mathrm{i}+z|^2+|\mathrm{i}-z|^2$ αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=3$.

3.11.11. Στην ηλεκτρονική χρησιμοποιείται η συνάρτηση T του παλμού ω με τύπο

$$T(\omega)=\frac{z}{R+\mathrm{i}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)},\ \omega>0$$

όπου z είναι ένας σταθερός μιγαδικός και R, L, C είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο παλμός ω εκφράζεται σε rad/sec.

α) Αν $h(\omega)=\dfrac{1}{R}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right),\quad \omega>0$, να αποδείξετε ότι $T(\omega)=\dfrac{z}{R}\cdot\dfrac{1}{1+\mathrm{i}\,h(\omega)}$.

β) Να βρείτε την τιμή του ω που μηδενίζει το h.

γ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $1+\mathrm{i}h(\omega)$

3.11.12. Οι σύνθετες αντιστάσεις ενός κυκλώματος RLC δίνονται από τους τύπους

$$z_1=R+\mathrm{i}\,L\omega \ \text{ και } \ z_2=R-\frac{\mathrm{i}}{\omega\,C},$$

όπου R, ω, L, C είναι πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε την αντίσταση z του κυκλώματος, αν οι αντιστάσεις z_1 και z_2 είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Στην παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων είναι γνωστό ότι $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$.

β) Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, να προσδιορίσετε τον αριθμό ω.

3.11.13. Αν $\alpha, x\in\mathbf{R}$ να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha x+\mathrm{i}}{1-\alpha x\mathrm{i}}\right)^{4\nu}+\left(\frac{\mathrm{i}-\alpha x}{1+\alpha x\mathrm{i}}\right)^{4\nu}=2.$$

3.11.14. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, για τους οποίους ισχύει $z_1z_2=w^2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z_1+z_2}{2}+w\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}-w\right|=|z_1|+|z_2|.$$

3.11.15. Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\varkappa$ ισχύει $|z_1|=|z_2|=...=|z_\varkappa|=1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1+z_2+...+z_\varkappa|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+...+\frac{1}{z_\varkappa}\right|.$$

3.11.16. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Υποθέτομε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z κινούνται σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα r. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w=z+\dfrac{1}{z}=x+y\,\mathrm{i}$ βρίσκονται επάνω σε μια καμπύλη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1,\ \text{όπου}\ c=r+\frac{1}{r},\ d=r-\frac{1}{r}.$$

3.11.17. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(z)=z^{8k+1}+z^{8k+2}+z^{8k+1}+z^{8k}\ (k \text{ ένας θετικός ακέραιος}) \text{ και } Q(z)=z^3+z^2+z+1.$$

α) Να βρείτε και τις τρεις ρίζες του πολυωνύμου $Q(z)$.

β) Να διαπιστώσετε ότι και οι τρεις ρίζες που βρήκατε στο ερώτημα (α) είναι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(z)$ έχει ως παράγοντα το πολυώνυμο $Q(z)$.

3.11.18. Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} z+2 & \omega & \omega^2 \\ \omega^4 & z+\omega^2 & 2\omega^3 \\ \omega^5 & 2\omega^6 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$$

όπου ω είναι μια καθαρή μιγαδική κυβική ρίζα της μονάδας.

3.11.19. Χρησιμοποιώντας τον τύπο De Moivre να δειχθεί ότι:

α) Αν α είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε η εξίσωση $z^\nu = \alpha$ έχει ρίζες τις

$$z_0 = \sqrt[\nu]{\alpha}, \quad z_k = \sqrt[\nu]{\alpha} \quad \left[\text{συν}\frac{2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}\right], \;\; k = 1, 2 \ldots, \nu-1.$$

β) Αν α είναι ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε η εξίσωση $z^\nu = \alpha$ έχει ρίζες τις

$$z_k = \sqrt[\nu]{|\alpha|}, \left[\text{συν}\frac{(2k-1)\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\frac{(2k-1)\pi}{\nu}\right], \;\; k = 1, 2 \ldots, \nu.$$

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την έννοια της συναρτήσεως. Η βασική ιδέα για την ανάπτυξή της ήταν η σχέση μεταξύ αιτίου και αποτελέσματος και η μελέτη της εξαρτήσεως των τιμών δύο μεταβλητών ποσοτήτων.

Ο όρος ***συνάρτηση****, από το λατινικό ρήμα fungor, που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ, εμφανίστηκε για πρώτη φορά σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz το 1673. Το 1755, ο Euler διατύπωσε ένα λιτό, αλλά και αυστηρό συγχρόνως ορισμό της έννοιας της συναρτήσεως, ο οποίος είχε ως εξής: «Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιον τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάζουν συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων». Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο, με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το x υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιοδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του x.*

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθεί η έννοια της πραγματικής συναρτήσεως μίας μεταβλητής, καθώς και οι βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα δοθούν οι ιδιότητες των ορίων και της συνέχειας, καθώς και εφαρμογές του Θεωρήματος Bolzano και ενδιαμέσων τιμών.

4.1 Η έννοια της συναρτήσεως. Γραφική παράσταση συναρτήσεως.

Η έννοια της συναρτήσεως είναι μία από τις πλέον βασικές έννοιες των Μαθηματικών. Όπως συμβαίνει και με πολλές άλλες μαθηματικές έννοιες, τη χρησιμοποιούμε αρκετά συχνά στις καθημερινές μας δραστηριότητες, χωρίς να το συνειδητοποιούμε. Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της συναρτήσεως προκύπτει με τελείως φυσιολογικό τρόπο σε όλες τις περιπτώσεις, όπου η τιμή μιας ποσότητας εξαρτάται με συγκεκριμένο τρόπο απ' τις τιμές κάποιας άλλης. Για παράδειγμα:

α) Το ποσό του φόρου (Φ.Π.Α.) που πληρώνομε κατά την αγορά ενός προϊόντος εξαρτάται από την τιμή πωλήσεώς του. Έτσι, αν το προϊόν που αγοράζομε έχει τιμή x και υπόκειται σε Φ.Π.Α. 19%, γνωρίζομε ότι η επιβάρυνση του προϊόντος λόγω του Φ.Π.Α. θα είναι ίση με $y = 0{,}19x$.

β) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου εξαρτάται από το μήκος της πλευράς του. Πιο συγκεκριμένα, αν το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι ίσο με x, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι ίσο με $y = x^2$.

Στα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι οι τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας, που ονομάζομε y, εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής ποσότητας, που ονομάζομε x. Επί πλέον, είναι φανερό ότι, αν γνωρίζομε την τιμή της μεταβλητής x, τότε καθορίζεται με μοναδικό τρόπο η τιμή της μεταβλητής y. Στις περιπτώσεις αυτές θα λέμε ότι έχομε μια συνάρτηση της μεταβλητής x.

Πιο συγκεκριμένα, έχομε τον επόμενο γενικό ορισμό:

Ονομάζομε πραγματική ***συνάρτηση*** ορισμένη σ' ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών ($A \subseteq \mathbf{R}$), μια διαδικασία f, με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός y τον οποίο συμβολίζομε $y = f(x)$.

Το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους ορίζεται η f ονομάζεται ***πεδίο ορισμού*** (domain) της f και συνήθως συμβολίζεται με $D(f)$. Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της f, ονομάζεται ***σύνολο τιμών*** (range) της f και συμβολίζεται με $R(f)$, δηλαδή $R(f) = \{f(x) | x \in D(f)\}$.

Ο ορισμός αυτός αφορά στις λεγόμενες πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, αφού τόσο τα στοιχεία x, όσο και τα στοιχεία y, στα οποία αντιστοιχίζονται αυτά προέρχονται από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δεδομένου ότι στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιες περιπτώσεις, θα χρησιμοποιούμε τον όρο συνάρτηση και θα εννοούμε τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, χωρίς να αναφέρομε ρητά κάθε φορά. Επίσης, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα θεωρούμε ότι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων τις οποίες μελετάμε είναι ***ένα διάστημα*** ή ***μια ένωση διαστημάτων*** (εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό).

Υπενθυμίζομε ότι, αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζομε διαστήματα με άκρα τα α, β καθένα από τα σύνολα $(\alpha, \beta) = \{x \in R | \alpha < x < \beta\}$, $[\alpha, \beta] = \{x \in R | \alpha \le x \le \beta\}$, $[\alpha, \beta) = \{x \in R | \alpha \le x < \beta\}$ και $(\alpha, \beta] = \{x \in R | \alpha < x \le \beta\}$. Το πρώτο από τα προαναφερθέντα διαστήματα ονομάζεται ***ανοικτό*** διάστημα, το δεύτερο ***κλειστό***, ενώ τα δύο τελευταία ***ημιανοιχτά*** διαστήματα.

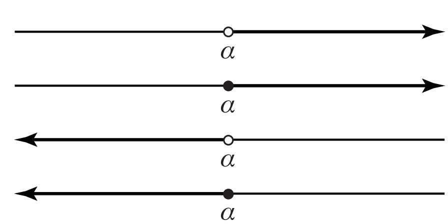
Επίσης, αν $\alpha \in \mathbf{R}$, τότε ονομάζομε ***μη φραγμένα*** διαστήματα με άκρο το α καθένα από τα παρακάτω σύνολα (σχ. 4.1α):

$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid x > \alpha\}$

$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid x \ge \alpha\}$

$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathrm{R} \mid x < \alpha\}$

$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathrm{R} \mid x \le \alpha\}$



Σχ. 4.1α.
Μη φραγμένα διαστήματα.

Το σύνολο **R** ορισμένες φορές συμβολίζεται υπό μορφή διαστήματος ως $(-\infty,+\infty)$. Αν $\xi \in \mathbf{R}$, με τον όρο ***περιοχή του σημείου*** ξ εννοούμε ένα ανοιχτό διάστημα της μορφής $(\xi-\delta,\xi+\delta)$, όπου δ είναι ένας θετικός αριθμός. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, ονομάζονται ***εσωτερικά σημεία***[1] του Δ.

Κατά την περιγραφή μιας συναρτήσεως f, η μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή του πεδίου ορισμού $A = D(f)$ ονομάζεται ***ανεξάρτητη*** μεταβλητή και συμβολίζεται συνήθως με x. Κάθε τιμή του x δημιουργεί μοναδική τιμή για τη δεύτερη μεταβλητή ποσότητα, την ***εξαρτημένη*** μεταβλητή. Ο μοναδικός αριθμός y, στον οποίο αντιστοιχίζεται το στοιχείο x του $A = D(f)$, ονομάζεται ***τιμή της f στο x*** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Μια συνάρτηση f μπορεί να παρασταθεί με τους παρακάτω δύο τρόπους:

$$\begin{aligned} f : A &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto y \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad y = f(x),\ \ x \in A,$$

Η φράση *«η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο B»* σημαίνει ότι $B \subseteq D(f)$. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται το σύνολο

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \ \text{ για } \ x \in B\} = \{f(x) \mid x \in B\}.$$

Προφανώς το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το σύνολο $f(A)$.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, για να οριστεί μια συνάρτηση f, αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

α) Το πεδίο ορισμού της και

β) Η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της (ο κανόνας με τον οποίο κάθε x αντιστοιχίζεται στο $f(x)$).

Στα δύο παραδείγματα που δόθηκαν στην αρχή της παρούσας παραγράφου έχομε:

α) $A = [0, +\infty)$, αφού η τιμή x του προϊόντος δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές και $f(x) = 0{,}19x$.
Θα μπορούσαμε επίσης να γράψομε:

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto 0{,}19x \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad y = 0{,}19x,\ \ x \in [0,+\infty).$$

β) $A = [0,+\infty)$, αφού το μήκος x της πλευράς του τετραγώνου δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές και $f(x) = x^2$.

Αρκετά συχνά, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών x (δηλ. το μεγαλύτερο υποσύνολο του **R**), για το οποίο το $f(x)$ έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε:

«δίνεται η συνάρτηση $f : [3,+\infty) \to \mathrm{R}$ με $f(x) = \sqrt{x-3}$ »

θα λέμε:

«δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x-3}$ »

ή ακόμη πιο σύντομα:

«δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3}$ » ή «δίνεται η συνάρτηση $y = \sqrt{x-3}$ ».

Γνωρίζοντας ότι η τετραγωνική ρίζα ορίζεται μόνο όταν το υπόριζο είναι μη αρνητικό, συμπεραίνομε ότι θα πρέπει να ισχύει $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ και επομένως το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως που δόθηκε είναι το $A = [3, +\infty)$.

---

1. Γενικότερα, εσωτερικά σημεία ενός συνόλου Δ (όχι απαραίτητα διαστήματος) ονομάζονται τα σημεία $\xi \in \mathrm{R}$, για τα οποία μπορεί να βρεθεί ένας θετικός αριθμός ε τέτοιος, ώστε να ισχύει $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subseteq \Delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.1.

Η πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα στη θάλασσα εξαρτάται από το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Για να βρούμε την πίεση κάθε φορά, διαιρούμε το βάθος (σε μέτρα) με 33, προσθέτομε 1 στο πηλίκο και πολλαπλασιάζομε το αποτέλεσμα με 15.

α) Να γράψετε τον τύπο της συναρτήσεως *f*, ο οποίος εκφράζει την πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα που βρίσκεται σε βάθος x m.

β) Ποια θα είναι η πίεση σε βάθος 198 m;

Λύση.

α) Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε, αν x m είναι το βάθος, τότε η αντίστοιχη πίεση θα είναι ίση με $\left(\frac{x}{33}+1\right)\cdot 15$.

Έτσι ο τύπος της συναρτήσεως *f* που αντιστοιχίζει στο βάθος x την πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα θα είναι ο επόμενος

$$y=15\left(\frac{x}{33}+1\right)=\frac{15}{33}x+15 \quad \text{ή} \quad f(x)=15\left(\frac{x}{33}+1\right)=\frac{15}{33}x+15.$$

β) Σε βάθος $x = 198$ m η πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα θα είναι ίση με:

$$y=f(198)=15\left(\frac{198}{33}+1\right)=15\cdot(6+1)=105 \text{ (μονάδες πιέσεως).}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.2.

Ένας εργάτης τοποθετεί βίδες σε συσκευασίες (κουτιά). Το πλήθος των βιδών, σε εκατοντάδες, που τοποθετεί σε x ώρες δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+30x$.

α) Πόσες βίδες θα τοποθετήσει σε συσκευασίες ο εργάτης ως τη 1 μ.μ., αν ξεκίνησε την εργασία του στις 7 π.μ.;

β) Πόσες βίδες θα έχει τοποθετήσει σε συσκευασίες μεταξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ.;

Λύση.

α) Στις 7 το πρωί είναι $x = 0$ και το πλήθος των βιδών που θα έχει τοποθετήσει ο εργάτης είναι ίσος με $f(0) = 0$ (το οποίο συμφωνεί με ό,τι θα αναμέναμε, αφού τότε ξεκινά να τοποθετεί βίδες).

Μέχρι τη 1 μ.μ θα έχει εργασθεί $13-7=6$ ώρες, οπότε θα έχει τοποθετήσει

$$f(6)=\frac{1}{9}6^3-6^2+30\cdot 6=168$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 16.800 βίδες).

β) Μεταξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ. θα έχει τοποθετήσει $f(6)-f(3)$ βίδες αφού έως τις 10:00 έχει εργαστεί 3 ώρες και έως τη 1 έχει εργαστεί 6 ώρες.

Άρα

$$f(6)-f(3)=[\frac{1}{9}6^3-6^2+30\cdot 6]-[\frac{1}{9}3^3-3^2+30\cdot 3]=168-90=78$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 7.800 βίδες).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$ β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-1}$

Λύση.

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους έχει νόημα η παράσταση $\sqrt{9x^2-16}$, δηλαδή για όλα τα $x\in\mathbf{R}$ για τα οποία ισχύει $9x^2-16\geq 0$. Όμως:

$$9x^2-16\geq 0 \Leftrightarrow 9x^2\geq 16 \Leftrightarrow x^2\geq\frac{16}{9}\Leftrightarrow |x|\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3} \text{ ή } x\leq-\frac{4}{3}$$

οπότε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως θα είναι το

$$A=(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[\frac{4}{3},+\infty).$$

β) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν, και μόνο όταν, $x^2-5x+6\geq 0$ και $x-1\neq 0$.

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3, οπότε η ανίσωση $x^2-5x+6\geq 0$ θα αληθεύει, όταν, και μόνο όταν, $x\leq 2$ ή $x\geq 3$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A=(-\infty,1)\cup(1,2]\cup[3,+\infty).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.4.

Το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, σε €, δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=x^4-3x^2+100x+80.$$

α) Να υπολογιστεί το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος.

β) Να βρεθεί και να ερμηνευθεί το $f(0)$.

Λύση.

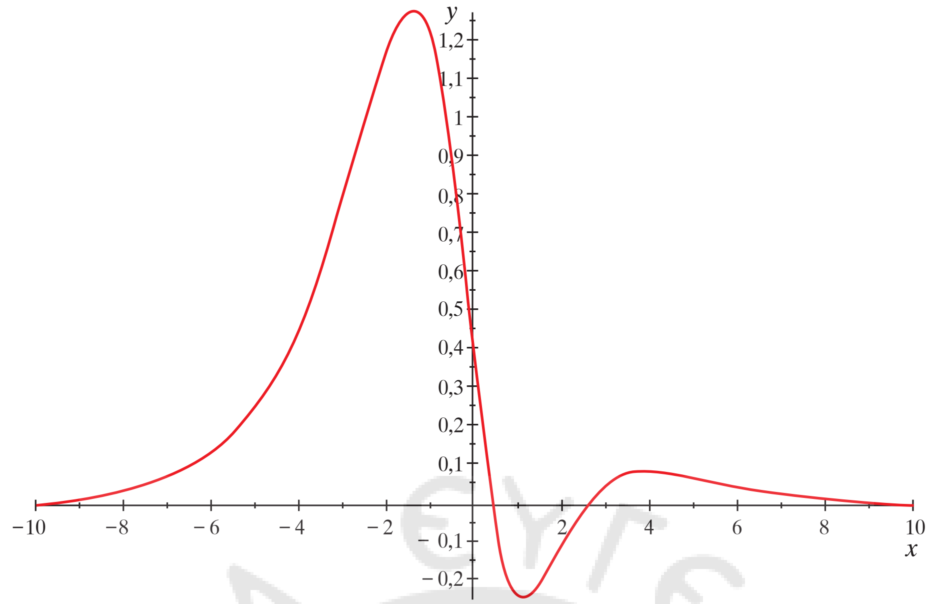
α) Το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος θα είναι η τιμή της συναρτήσεως f για $x = 3$, δηλαδή $f(x)=3^4-3\cdot3^2+100\cdot3+80=434$ €.

β) Αν θέσομε στον τύπο της συναρτήσεως $x = 0$ παίρνομε

$$f(0)=0^4-3\cdot0^2+100\cdot0+80=80.$$

δηλαδή έχομε $f(0)=80$. Το ποσό αυτό μπορούμε να πούμε ότι θα αντιστοιχεί στα «πάγια» έξοδα της επιχειρήσεως, τα οποία γίνονται είτε παράγει μονάδες είτε όχι. Τέτοια έξοδα μπορεί να είναι για παράδειγμα το ενοίκιο, οι λογαριασμοί νερού, ρεύματος κ.λπ..

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε πολλές οικονομικές εφαρμογές, όπως η παρούσα, η ανεξάρτητη μεταβλητή x λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές. Είναι όμως αρκετά συνηθισμένο, σ' αυτές τις περιπτώσεις, να θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της συναρτήσεως που χρησιμοποιούμε, ένα διάστημα ή μία ένωση διαστημάτων A (στην οποία φυσικά να περιέχονται οι ακέραιες τιμές που μας ενδιαφέρουν) και να τη μελετούμε σε ολόκληρο το A. Έτσι, ενώ στο συγκεκριμένο παράδειγμα το x μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0, 1, 2,... (αφού παριστάνει αριθμό μονάδων ενός προϊόντος) ως πεδίο ορισμού της f χρησιμοποιούμε το $A=[0,+\infty)$.



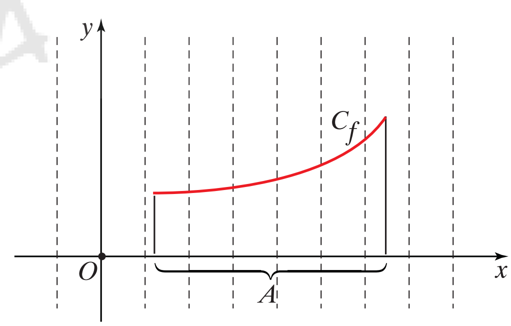
Σχ. 4.1β.
Γραφική παράσταση.

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, ονομάζεται ***γραφική παράσταση*** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f (σχ. 4.1β)[1]. Η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα ότι η (εξίσωση) $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην C_f. Επομένως, μπορούμε να πουμε ότι η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστάσεως της f.

Εξετάζοντας τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως μπορούμε να πάρομε αρκετές πληροφορίες γι' αυτήν, όπως για παράδειγμα, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών της, πού τέμνει τους άξονες, αν σε κάποιο σημείο $x = a$ παίρνει τιμή μεγαλύτερη από ό,τι σε όλα τα άλλα σημεία $x \neq a$ κ.λπ..

Επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό μιας συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού το σύνολο A, κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y = f(x) \in \mathbf{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παραστάσεως της f με την ίδια τετμημένη x. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει, με τη γραφική παράσταση της f, το πολύ ένα κοινό σημείο όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1γ.

Έτσι, από τις 4 γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1δ μόνο η (α) και η (δ) είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αφού για τις υπόλοιπες μπορούμε να βρούμε κατακόρυφες ευθείες που έχουν περισσότερα από ένα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση.



Σχ. 4.1γ.

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συναρτήσεως f, τότε μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της αφού αυτό μπορεί να προκύψει εύκολα ως το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f. Επομένως, ένα σημείο x_0 θα

1. Συνήθως το σύμβολο C_f χρησιμοποιείται για να παραστήσει το υποσύνολο του $\mathbf{R}^2 = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$, το οποίο ονομάζεται ***γράφημα*** της f. Στην περίπτωση που το γράφημα παρίσταται στο καρτεσιανό επίπεδο, τότε έχομε τη ***γραφική παράσταση*** της f. Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα χρησιμοποιούμε (καταχρηστικά) την έκφραση «γραφική παράσταση C_f της f».

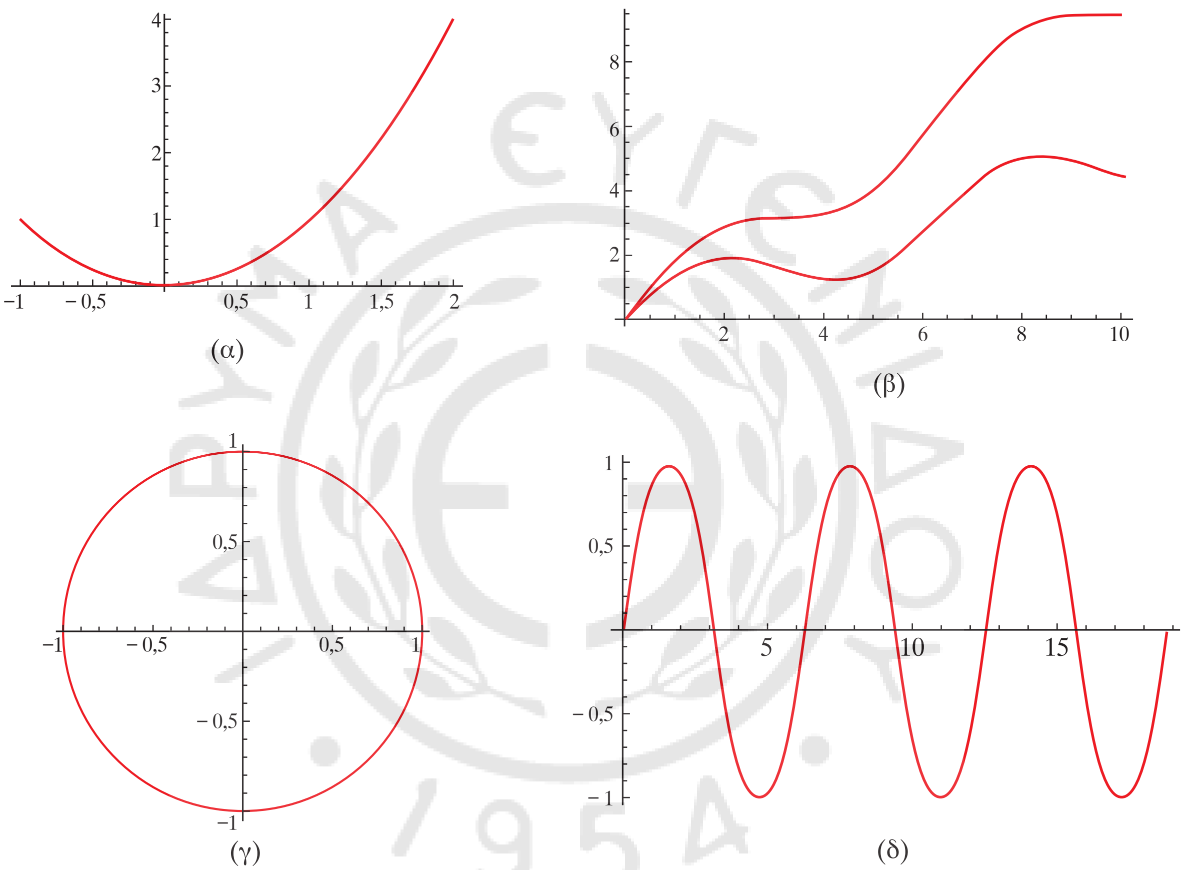
ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f, αν και μόνο αν η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ έχει ένα κοινό σημείο με την C_f (σχ. 4.1ε).

Ομοίως, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f. Έτσι ένας πραγματικός αριθμός β θα ανήκει στο σύνολο τιμών της συναρτήσεως f, αν η ευθεία με εξίσωση $y = \beta$ τέμνει την C_f σε ***ένα*** ή ***περισσότερα*** σημεία C_f (σχ. 4.1στ).

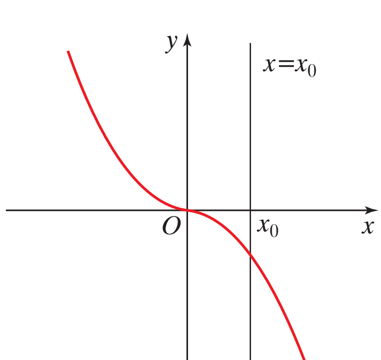
Πρακτικά, από τις παραπάνω διαπιστώσεις προκύπτουν τα εξής:

α) Η προβολή της C_f στον άξονα των x (δηλ. το σύνολο των τετμημένων όλων των σημείων της C_f) δίνει το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως (σχ. 4.1ζ).

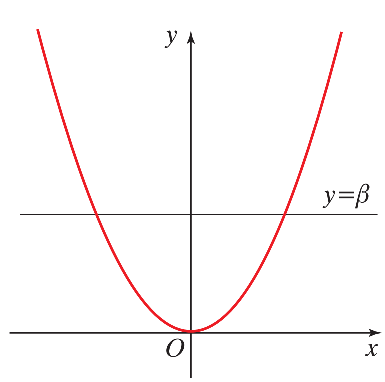
β) Η προβολή της C_f στον άξονα των y (δηλ. το σύνολο των τεταγμένων όλων των σημείων της C_f)



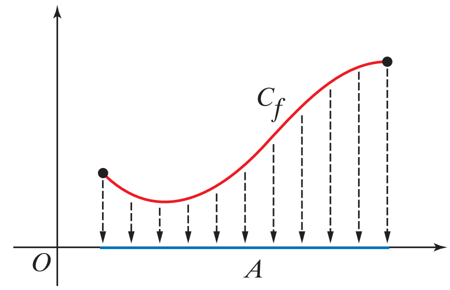
Σχ. 4.1δ.



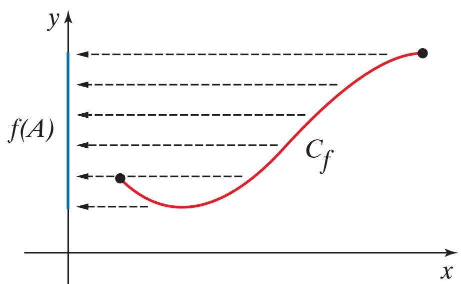
Σχ. 4.1ε.



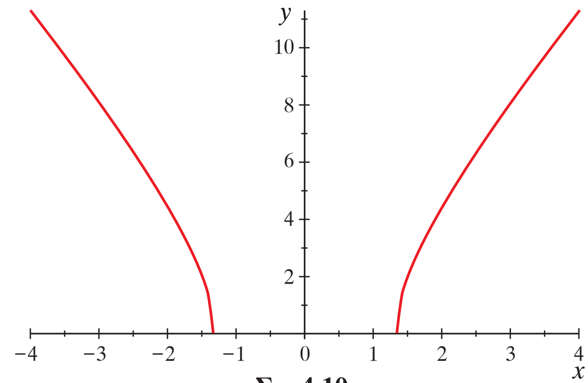
Σχ. 4.1στ.



Σχ. 4.1ζ.



Σχ. 4.1η.



Σχ. 4.1θ.

δίνει το σύνολο τιμών της (σχ. 4.1η).

Για παράδειγμα, παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως με τύπο $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$ που δίνεται στο σχήμα 4.1θ, συμπεραίνομε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο

$$A=(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[\frac{4}{3},+\infty).$$

(όπως ακριβώς το βρήκαμε στο παράδειγμα 4.1.3), ενώ το σύνολο τιμών της είναι το $B=[0,+\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}-3x-1 & \text{αν } x<1\\ 6x-7 & \text{αν } x\geq 1.\end{cases}$

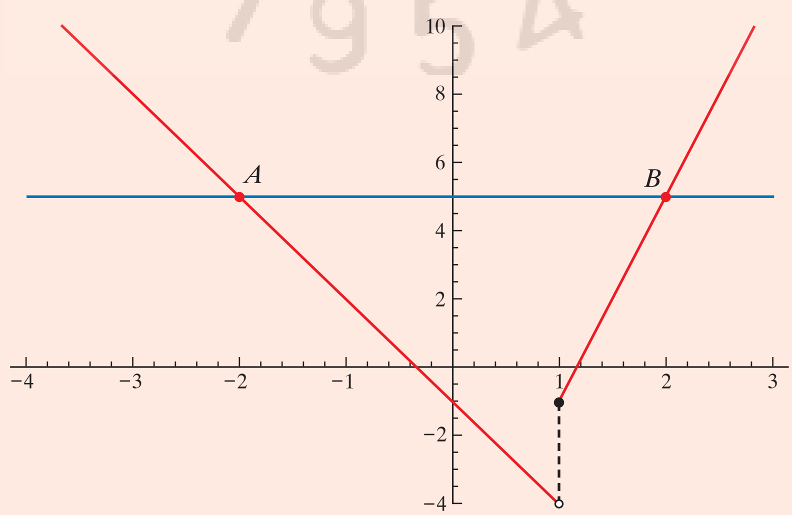
α) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

β) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)>5$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το **R**, αφού τα $y=f(x)$ ορίζονται για κάθε τιμή του x. Για $x<1$ η C_f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y=-3x-1$ που έχει κλίση -3 και φτάνει μέχρι το σημείο $(1,-4)$ χωρίς το τελευταίο να συμπεριλαμβάνεται στην C_f. Για $x\geq 1$ η C_f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y=6x-7$ που έχει κλίση 6 και ξεκινάει από το σημείο $(1,-1)$, το οποίο όμως τώρα συμπεριλαμβάνεται στην C_f.

Έτσι παίρνομε τη γραφική παράσταση του σχήματος 4.1ι, η οποία αποτελείται από δύο ημιευθείες.



Σχ. 4.1ι.

β) Η ευθεία με εξίσωση $y = 5$ τέμνει τις δύο ημιευθείες της C_f σε δυο σημεία $A(x_1, 5)$και $B(x_1, 5)$. Άρα θα έχομε: $-3x_1 - 1 = 5$ και $6x_2 - 7 = 5$, οπότε $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$. Έτσι οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες από το 5 θα είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται επάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = 5$. Δηλαδή, $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

α) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ έτσι ώστε το σημείο (1, 2) να ανήκει στην C_f;

β) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ έτσι ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, 3);

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συναρτήσεως f αν ισχύουν και οι δύο συνθήκες που ζητήθηκαν στα ερωτήματα (α) και (β).

Λύση.

α) Για να ανήκει το σημείο (1, 2) στη γραφική παράσταση της f, με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, θα πρέπει να ισχύει $f(1) = 2$, οπότε θα έχομε $1 + \beta + \gamma = 2 \Leftrightarrow \beta + \gamma = 1$.

β) Για να τέμνει η C_f τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, 3) θα πρέπει να ισχύει $f(0) = 3$, οπότε θα έχομε $\gamma = 3$.

γ) Τώρα ζητάμε να ισχύουν και οι δύο σχέσεις που βρήκαμε προηγουμένως, οπότε παίρνομε

$$\left.\begin{array}{l} \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{array}\right\}$$

και η f γίνεται $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Ασκήσεις.

4.1.1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(0), f(1)$ της συναρτήσεως f.

β) Να βρείτε τις τιμές $g(-1), g(0), g(1), g(-1/2), g(1/2)$ της συναρτήσεως g. Τι παρατηρείτε;

4.1.2. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = 5x - 4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(0), f(1), f(-1/2), f(1/2)$ της συναρτήσεως f και τις τιμές $g(0), g(4/5), g(-4)$ της συναρτήσεως g.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) = g(x)$.

4.1.3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3$ β) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 7}{(x-1)(x+7)}$

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$ δ) $f(x) = \left|\dfrac{x-4}{x^2+9}\right|$

4.1.4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \sqrt{\sqrt{3} - |x|}$ β) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16}$

γ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x-2}}$ δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$

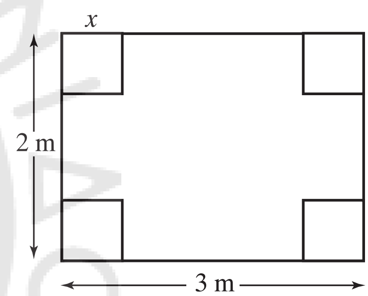
4.1.5. Ένα σώμα ρίπτεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από την ταράτσα ενός ουρανοξύστη. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε m), ύστερα από t sec, δίνεται από τη συνάρτηση f, με τύπο

$$f(t)=\frac{1}{4}(-9t^2+144).$$

α) Σε ποιο ύψος θα βρίσκεται το σώμα ύστερα από 3 sec;
β) Ποιο είναι το ύψος του ουρανοξύστη;
γ) Πότε θα φτάσει το σώμα στο έδαφος;
δ) Σε πόσο χρόνο θα βρίσκεται το σώμα σε ύψος 27 m;

4.1.6. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου (^oC) μπορεί να βρεθεί, αν γνωρίζομε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF) ως εξής: Από τους βαθμούς Φαρενάιτ αφαιρούμε 32 και πολλαπλασιάζομε τη διαφορά με 5/9.
α) Να βρείτε τη συνάρτηση f που να αντιστοιχίζει τους βαθμούς ^oF σε ^oC.
β) Να βρεθούν οι θερμοκρασίες σε ^oC που αντιστοιχούν σε –10, 0, 10 και 40 βαθμούς ^oF.

4.1.7. Προκειμένου να κατασκευάσομε ένα μεταλλικό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, χρησιμοποιούμε ένα ορθογώνιο φύλλο λαμαρίνας διαστάσεων 2 m και 3 m όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1ια. Από κάθε κορυφή του ορθογωνίου, κόβουμε ένα τετράγωνο πλευράς x m και μετά, τσακίζοντας τις πλευρές, σχηματίζομε ένα ανοικτό δοχείο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.
α) Να εκφράσετε τον όγκο $V(x)$ του δοχείου ως συνάρτηση του x.
β) Να βρείτε τα $V(1)$, $V(2/10)$, $V(3/10)$.
γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως;



Σχ. 4.1ια.

4.1.8. Να εξεταστεί ποια από τα σχήματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1ιβ αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

4.1.9. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

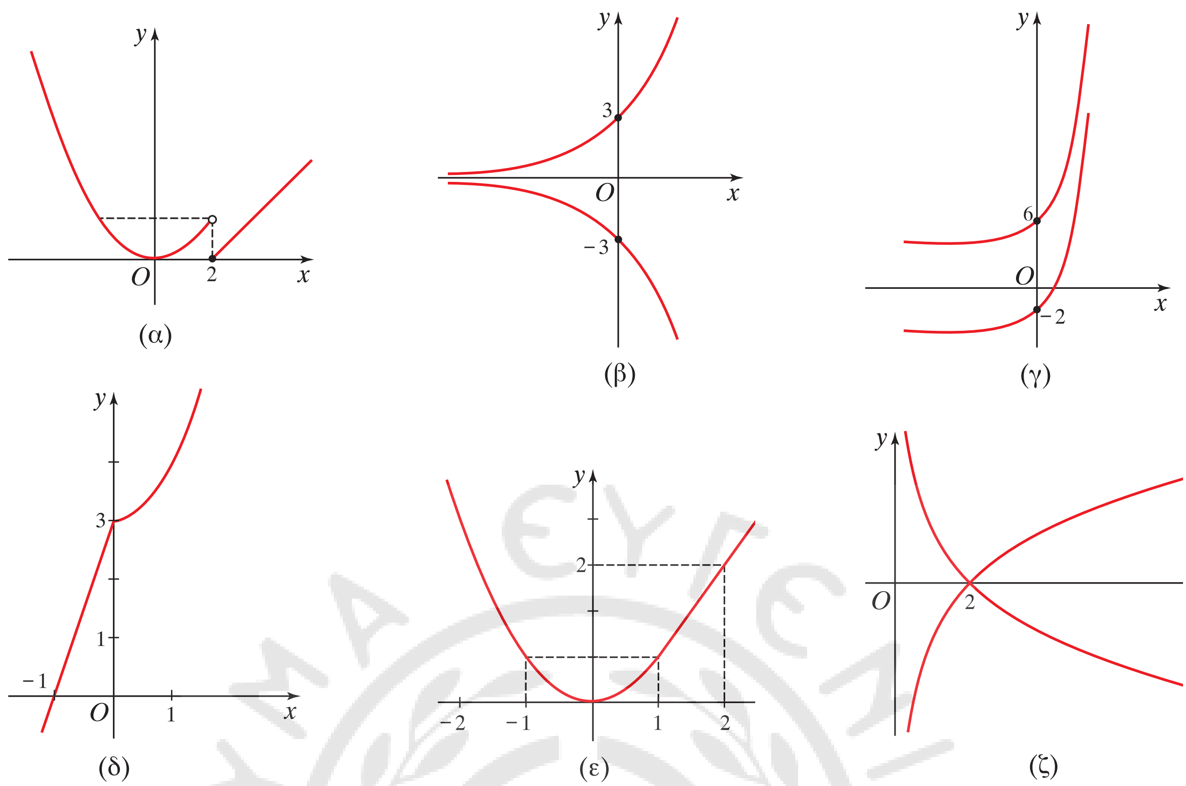
α) $f(x)=x^2-9x+20$ β) $f(x)=(3x-1)^5$ γ) $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x^2+1}\right|$

4.1.10. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=e^{2x}+1$ και $g(x)=3e^x-1$. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

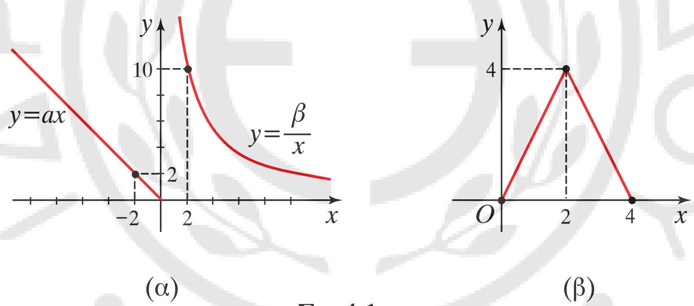
4.1.11. Να δώσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x)=|2x-3|$ β) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & 0<x\le 2\\ x, & x>2\end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ 5x, & 0<x\le 1\\ 2x+3, & x>1\end{cases}$ δ) $f(x)=\begin{cases}|x-2|, & x<3\\ 4x-1, & x\ge 3\end{cases}$



Σχ. 4.1ιβ.



Σχ. 4.1ιγ.

4.1.12. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων, των οποίων η γραφική παράσταση δίνεται παραπάνω (σχ. 4.1ιγ).

4.2 Ισότητα, πράξεις και είδη συναρτήσεων.

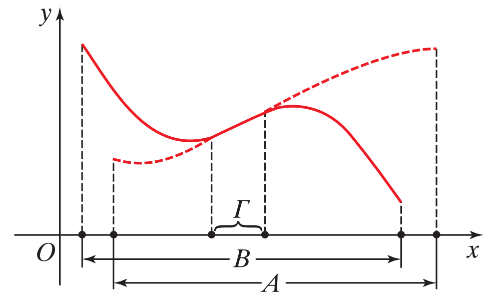
Ας θεωρήσομε τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=\dfrac{4x^5+8x}{x^4+2}$ και $g(x)=4x$, οι οποίες έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Είναι προφανές ότι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, ισχύει:

$$f(x)=\frac{4x^5+8x}{x^4+2}=\frac{4x(x^4+2)}{x^2+2}=4x=g(x).$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ***ίσες***. Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

> Δύο συναρτήσεις f και g είναι ***ίσες*** αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$. Τότε θα γράφομε $f=g$.

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να συμβεί για δύο συναρτήσεις έστω f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, να ισχύει η ισότητα $f(x)=g(x)$ μόνο σε ένα υποσύνολο Γ των A και B (σχ. 4.2α). Τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ***ίσες στο σύνολο Γ***.



Σχ. 4.2α.

Αρκετά συχνά στην πράξη χρειάζεται να συνδυαστούν δύο ή περισσότερες συναρτήσεις μέσω των συνηθισμένων αλγεβρικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Για παράδειγμα, ας υποθέσομε ότι μια ναυτιλιακή εταιρεία κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο προϊόν το οποίο, για να ολοκληρωθεί η διαδικασία κατασκευής του, χρειάζεται να περάσει από δύο διαφορετικά στάδια επεξεργασίας. Το κόστος επεξεργασίας x μονάδων του προϊόντος στο πρώτο στάδιο δίνεται από τη συνάρτηση f με $f(x)=5x^2+4x+1$, ενώ το κόστος επεξεργασίας x μονάδων του προϊόντος στο δεύτερο στάδιο δίνεται από την g με $g(x)=5x+7$. Προφανώς, το συνολικό κόστος κατασκευής x μονάδων του προϊόντος θα βρίσκεται από το άθροισμα:

$$f(x)+g(x)=(5x^2+4x+1)+(5x+7)=5x^2+9x+8\,.$$

Ορίζεται έτσι μια νέα συνάρτηση h με το ίδιο πεδίο ορισμού A, για την οποία ισχύει $h(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x\in A$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ***άθροισμα των συναρτήσεων f και g*** και συμβολίζεται με $f + g$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να εισάγομε και τις υπόλοιπες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Γενικά, αν f και g είναι συναρτήσεις με ***κοινό πεδίο ορισμού A***, τότε μπορούμε να ορίσομε:

α) ***Το άθροισμα*** $f+g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \ x\in A$.

β) ***Τη διαφορά*** $f-g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ \ x\in A$.

γ) ***Το γινόμενο*** cf αριθμού c με τη συνάρτηση f με τύπο: $(cf)(x)=cf(x),\ \ x\in A$.

δ) ***Το γινόμενο*** $f\cdot g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ \ x\in A$.

ε) ***Το πηλίκο*** $\dfrac{f}{g}$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, x\in A$ και $g(x)\neq 0$.

Το άθροισμα και γινόμενο συναρτήσεων ορίζεται ανάλογα και για περισσότερες των δύο συναρτήσεις. Στην περίπτωση που έχομε γινόμενο μίας συναρτήσεως f με τον εαυτό της $\varkappa$ φορές θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $f^{\varkappa}$ (όπως ακριβώς κάνομε και για το γινόμενο ενός αριθμού με τον εαυτό του $\varkappa$ φορές), δηλαδή θα έχομε $f^{\varkappa}(x)=(f(x))^{\varkappa}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f/g είναι το κοινό πεδίο ορισμού των f και g με τον επί πλέον περιορισμό ότι ο παρονομαστής $g(x)$ δεν πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή το σύνολο:

$$\{x|x\in A\ \text{ με }\ g(x)\neq 0\}\,.$$

Στην περίπτωση που, κατά την εκτέλεση πράξεων μεταξύ συναρτήσεων, τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε είναι διαφορετικά, οι πράξεις θα θεωρούμε ότι ορίζονται μόνο ***στην τομή των πεδίων ορισμού τους***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1.

Το κόστος παραγωγής και διαθέσεως x μονάδων ενός προϊόντος (σε χιλιάδες) που κατασκευάζει μια εταιρεία είναι ίσο με $10x+100$ χρηματικές μονάδες, ενώ τα αντίστοιχα έσοδα από τις πωλήσεις x

μονάδων προϊόντος είναι ίσα με 15x χρηματικές μονάδες.

α) Να δώσετε τη συνάρτηση f που εκφράζει το κόστος παραγωγής και διαθέσεως x μονάδων του προϊόντος.

β) Να δώσετε τη συνάρτηση g που εκφράζει τα έσοδα από τις πωλήσεις x μονάδων του προϊόντος.

γ) Να δώσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g σε κοινό σύστημα συντεταγμένων.

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση που δίνει το κέρδος από την πώληση x μονάδων προϊόντος, να δώσετε γραφική της παράσταση και να βρείτε για ποιες τιμές του x η εταιρεία έχει κέρδος από την πώληση του προϊόντος.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση, το κόστος παραγωγής και διαθέσεως x μονάδων ενός προϊόντος (σε χιλιάδες) που κατασκευάζει μια εταιρεία θα δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=10x+100$.

β) Τα έσοδα από τις πωλήσεις x μονάδων προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $g(x)=15x$.

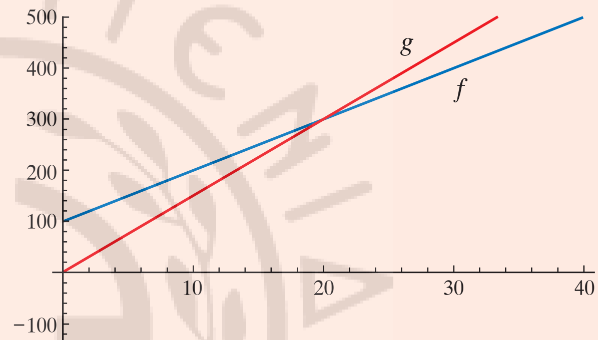
γ) Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g σε κοινό σύστημα συντεταγμένων δίνεται στο σχήμα 4.2β.

δ) Το κέρδος από την πώληση x μονάδων του προϊόντος θα είναι η διαφορά των εσόδων από την πώληση x μονάδων του προϊόντος και του αντίστοιχου κόστους παραγωγής τους. Θα είναι δηλαδή η τιμή της συναρτήσεως $h=g-f$ στο x. Έχομε:

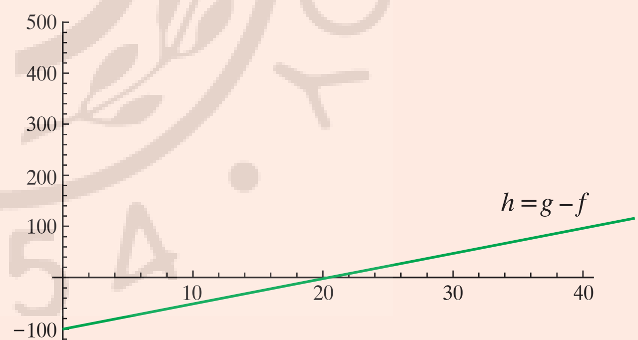
$$h(x)=g(x)-f(x)=15x-(10x+100)=5x-100$$

και η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα 4.2γ. Παρατηρούμε ότι η C_h τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $A(20, 0)$, που σημαίνει ότι για να έχομε κέρδος, πρέπει να κατασκευαστούν πάνω από 20 μονάδες προϊόντος.

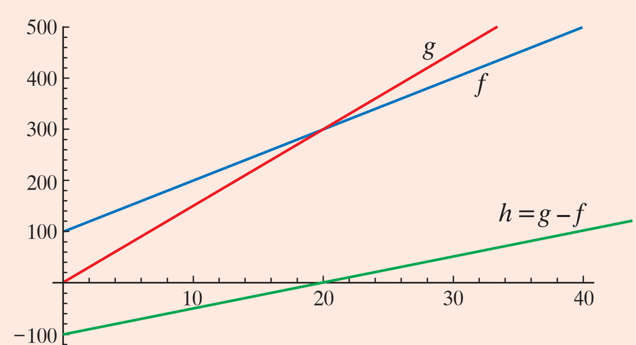
Το σημείο $A(20, 0)$ αντιστοιχεί προφανώς στο σημείο τομής των δύο ευθειών του σχήματος 4.2β. Στο σχήμα 4.2δ έχει γίνει γραφική παράσταση και των τριών ευθειών που μας ενδιαφέρουν.



Σχ. 4.2β.



Σχ. 4.2γ.



Σχ. 4.2δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2.

Έστω ότι γνωρίζομε τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f, δηλαδή την C_f. Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσαμε να κατασκευάσομε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $g=-f$, η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x)=-f(x)$.

β) $g=|f|$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x)\geq 0 \\ -f(x), & \text{αν } f(x)<0 \end{cases}$$

γ) $g=f+c$ (όπου c είναι μια θετική σταθερά), η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x)=f(x)+c$.

δ) $g=f-c$ (όπου c είναι μια θετική σταθερά), η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x)=f(x)-c$.

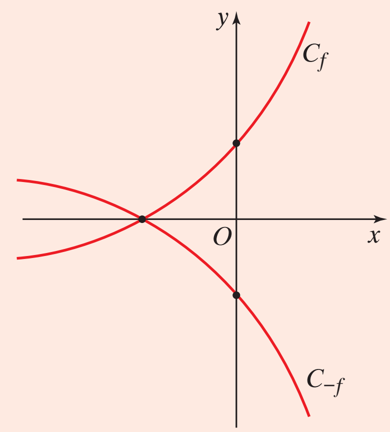
Λύση.

α) Η C_{-f} θα είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$ (σχ. 4.2ε).

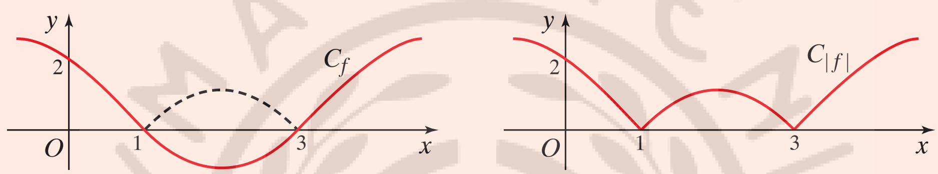
β) Η $C_{|f|}$ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_f, όπου είναι $f(x)\geq 0$, ενώ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_{-f} όπου είναι $f(x)<0$ (σχ. 4.2στ).

γ) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως g με $g(x)=f(x)+c$, $c>0$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα πάνω (σχ. 4.2ζ).

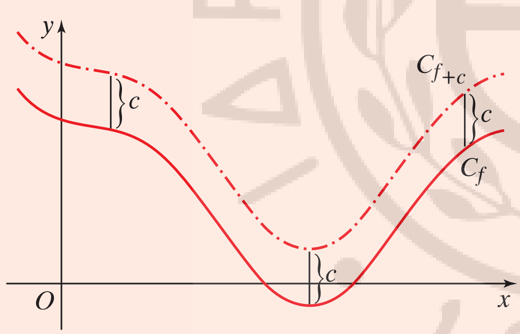
δ) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως g με $g(x)=f(x)-c$, $c>0$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα κάτω (σχ. 4.2η).



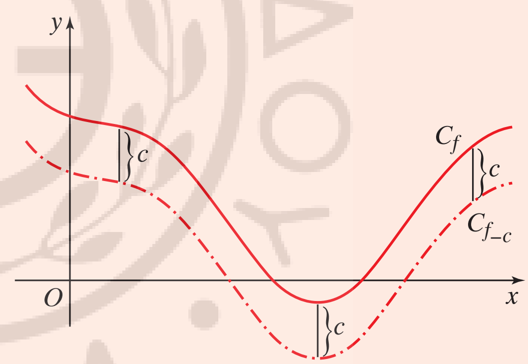
Σχ. 4.2ε.



Σχ. 4.2στ.

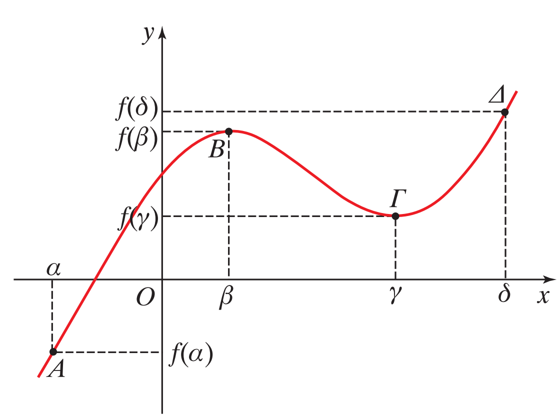


Σχ. 4.2ζ.



Σχ. 4.2η.

Για να κάνομε τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζομε πού αυτή «ανεβαίνει» και πού «κατεβαίνει». Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f που φαίνεται στο σχήμα 4.2θ, ανεβαίνει από το σημείο A μέχρι το σημείο στο B (δηλ. οι τιμές της f αυξάνονται, καθώς το x κινείται από το α προς το β), κατεβαίνει από το σημείο B μέχρι το σημείο Γ (δηλ. οι τιμές της μειώνονται, καθώς το x κινείται από το β προς το γ) και πάλι ανεβαίνει από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Δ. Λέμε τότε ότι η συνάρτηση f είναι ***γνησίως αύξουσα*** στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\gamma,\delta]$ ενώ είναι ***γνησίως φθίνουσα*** στο διάστημα $[\beta,\gamma]$.



Σχ. 4.2θ.

Γενικά, έστω ότι έχομε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$ και Δ ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της ($\Delta \subseteq A$). Σ' αυτήν την περίπτωση έχομε τους επόμενους ορισμούς:

α) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***γνησίως αύξουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (σχ. 4.2ι).

β) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***αύξουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$ (σχ. 4.2ια).

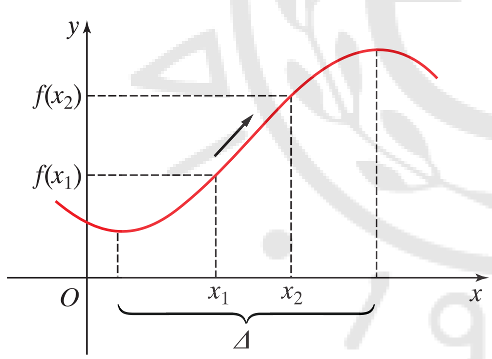
γ) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***γνησίως φθίνουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (σχ. 4.2ιβ).

δ) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***φθίνουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$ (σχ. 4.2ιγ).

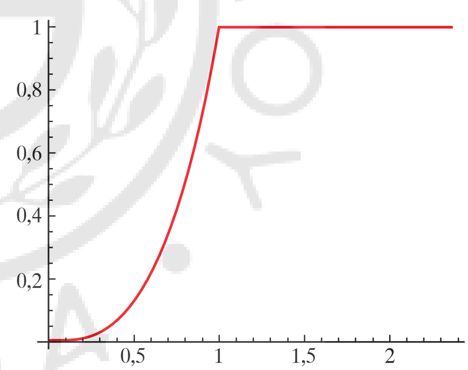
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, αφού για $0 \leq x_1 < x_2$ έχομε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

Η ίδια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού για $x_1 < x_2 \leq 0$ έχομε $0 \leq -x_2 < -x_1$, οπότε $0 \leq x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$.

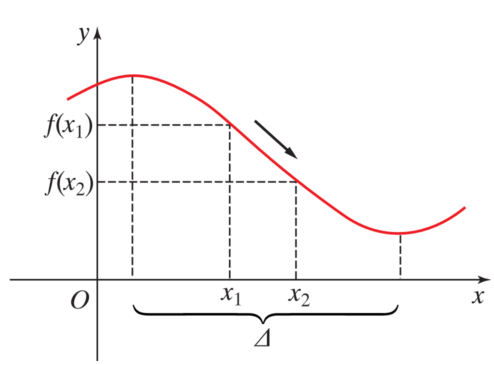
Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε ονομάζεται ***γνησίως μονότονη*** στο Δ. Αντίστοιχα, αν μια συνάρτηση f είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ονομάζεται ***μονότονη*** στο Δ.



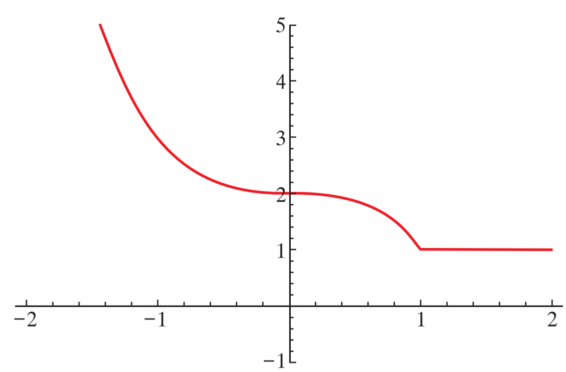
Σχ. 4.2ι.



Σχ. 4.2ια.



Σχ. 4.2ιβ.

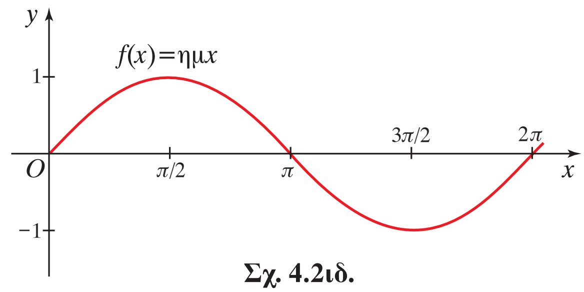


Σχ. 4.2ιγ.

Από τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως εύκολα αναγνωρίζομε αν αυτή είναι μονότονη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \text{ημ}x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

της οποίας η γραφική παράσταση εικονίζεται στο σχήμα 4.2ιδ, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.



Σχ. 4.2ιδ.

Αν συγκρίνομε τις δύο γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 4.2ιε παρατηρούμε ότι:

α) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση (α) το πολύ σε ένα σημείο ή ισοδύναμα δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παραστάσεως της συναρτήσεως f με την ίδια τεταγμένη.

β) Υπάρχουν οριζόντιες ευθείες που τέμνουν τη γραφική παράσταση (β) σε περισσότερα από ένα σημεία ή ισοδύναμα υπάρχουν σημεία της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως g με την ίδια τεταγμένη.

Μια συνάρτηση f που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x λέγεται αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα:

> Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$ ονομάζεται ***αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση***[1], όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ισοδύναμα, η f θα είναι αμφιμονοσήμαντη όταν για $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:
>
> $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Για παράδειγμα:

α) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση αφού, αν υποθέσομε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχομε διαδοχικά (σχ. 4.2ιστ)

$$\alpha x_1 + \beta = \alpha x_2 + \beta \Leftrightarrow \alpha x_1 = \alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = 5x^2$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, αφού ισχύει $f(-x) = f(x) = 5x^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό x (π.χ. $f(-2) = f(2) = 20$ αν και είναι $-2 \neq 2$) (σχ. 4.2ιζ).

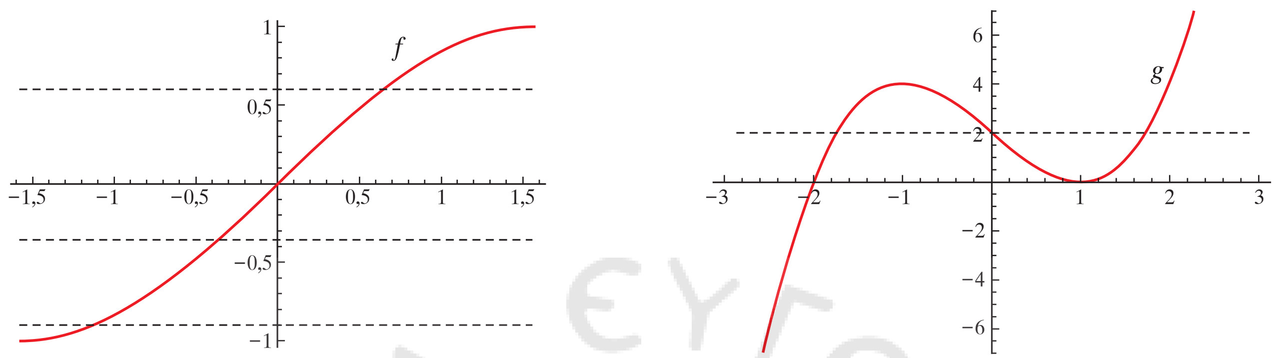
Μια συνάρτηση $f: A \to \boldsymbol{R}$ θα λέμε ότι είναι αμφιμονοσήμαντη σε ένα υποσύνολο Δ του πεδίου ορισμού της όταν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Στη συνέχεια, όταν αναφέρουμε ότι μια συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη θα εννοούμε ότι αυτό ισχύει για ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σε αντίθετη περίπτωση θα αναφέρομε ρητά σε ποιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα).

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Πράγματι ας θεωρήσομε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$ και οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε θα ισχύει είτε $x_1 < x_2$, είτε $x_1 > x_2$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχομε, αφού η f είναι αύξουσα, $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ομοίως, αν $x_1 > x_2$ θα έχομε $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε και πάλι θα ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ και σύμφωνα με τον ορισμό η f είναι αμφι-

1. Για τις αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις χρησιμοποιείται συχνά και ο όρος συνάρτηση 1–1.

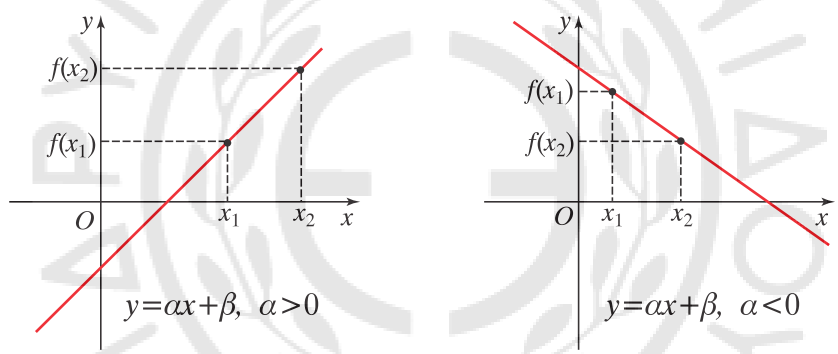
μονοσήμαντη συνάρτηση. Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται ότι κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Το αντίστροφο της παραπάνω διαπιστώσεως δεν αληθεύει, δηλαδή, υπάρχουν συναρτήσεις που είναι αμφιμονοσήμαντες, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. Μία τέτοια συνάρτηση φαίνεται στο σχήμα 4.2ιη.

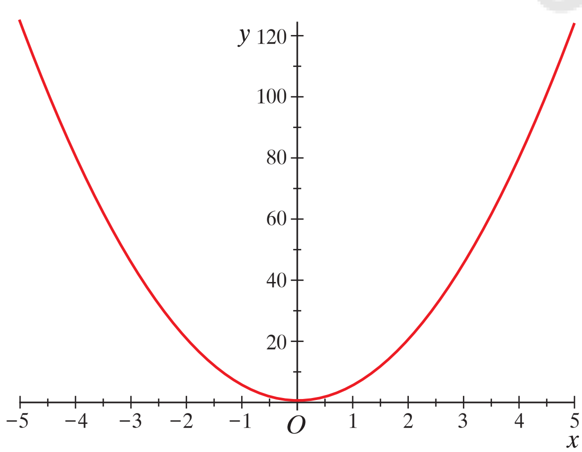


(α) (β)

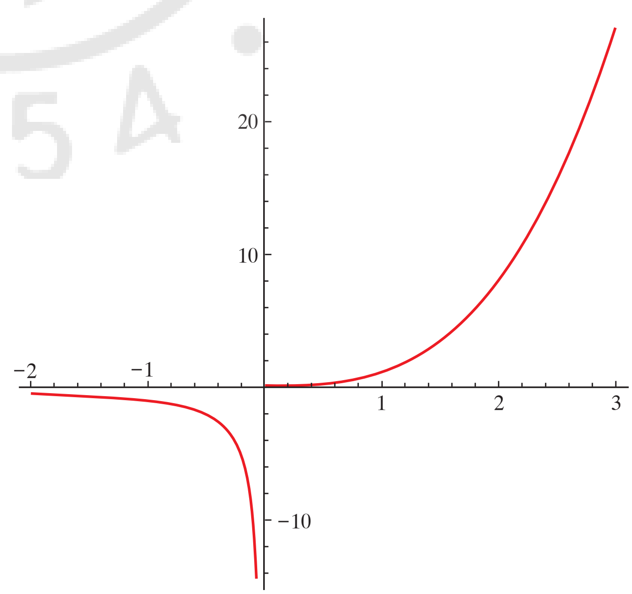
Σχ. 4.2ιε.



Σχ. 4.2ιστ.



Σχ. 4.2ιζ.



Σχ. 4.2ιη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες.

α) $f(x)=(x-1)(x-3)$ β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ γ) $f(x)$ = ημx.

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(3)=0$, ενώ $1\neq 3$. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbf{R}-\{-1\}$. Αν $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$, θα έχομε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1+1}=\frac{x_2+2}{x_2+1}\Leftrightarrow (x_1+2)(x_2+1)=(x_2+2)(x_1+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2+x_1+2x_2+2=x_2x_1+x_2+2x_1+2\Leftrightarrow x_2=x_1.$$

γ) Γνωρίζομε ότι ημ$(x+2\pi)$ = ημx για κάθε x. Αφού λοιπόν, για παράδειγμα $f(0)=f(2\pi)=0$, ενώ $0\neq 2\pi$, η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.4.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι μονότονες.

α) $f(x)=5x^2-7$ β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+1}, & x\neq -1\\ 0, & x=-1\end{cases}$

Λύση.

Ένας συστηματικός τρόπος για να εξετάζομε τη μονοτονία συναρτήσεων είναι μέσω της διερευνήσεως του προσήμου του λεγόμενου ***λόγου μεταβολής***

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad x_1\neq x_2.$$

Αν διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

για κάθε $x_1\neq x_2$ τα οποία ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα στο Δ. Αντίστοιχα, αν διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$$

για κάθε $x_1\neq x_2$, τα οποία ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f θα είναι φθίνουσα στο Δ.

α) Αν $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ με $x_1\neq x_2$ θα έχομε:

$$f(x_2)-f(x_1)=(5x_2^2-7)-(5x_1^2-7)=5x_2^2-5x_1^2$$

οπότε

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{5x_2^2-5x_1^2}{x_2-x_1}=\frac{5(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=5(x_2+x_1).$$

Είναι τώρα φανερό ότι:

– Αν $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ (με $x_1 \neq x_2$), θα ισχύει $\lambda = 5(x_2 + x_1) > 0$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [0, +\infty)$.

– Αν $x_1 \leq 0$ και $x_2 \leq 0$ (με $x_1 \neq x_2$), θα ισχύει $\lambda = 5(x_2 + x_1) < 0$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, 0]$.

β) Αν $x_1, x_2, \in \Delta = \mathbf{R} - \{-1\}$ με $x_1 \neq x_2$ θα έχομε:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 + 2}{x_2 + 1} - \frac{x_1 + 2}{x_1 + 1} = \frac{(x_2 + 2)(x_1 + 1) - (x_1 + 2)(x_2 + 1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)}$$

οπότε

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Είναι τώρα φανερό ότι:

– Αν $x_1 > -1$ και $x_2 > -1$, θα ισχύει $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, οπότε $\lambda < 0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-1, \infty)$.

– Αν $x_1 < -1$ και $x_2 < -1$ ισχύει και πάλι $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, οπότε $\lambda < 0$. Άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, -1)$.

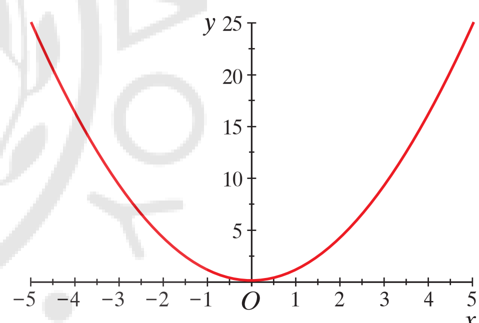
– Αν θεωρήσομε έναν αριθμό $x_1 > -1$ και ένα δεύτερο $x_2 < -1$ (ή αντίστροφα), θα ισχύει $(x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0$, οπότε $\lambda > 0$. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της $A = \mathbf{R}$.

Θα ολοκληρώσομε την παρούσα παράγραφο αναφέροντας ορισμένες επί πλέον γενικές κατηγορίες συναρτήσεων. Αν θεωρήσομε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = ημx$ (με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbf{R}$), είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύουν τα εξής:

α) $f(-x) = (-x)^2 = -x^2 = f(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

γ) $h(x + 2\pi) = ημ(x + 2\pi) = ημ(x) = h(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.



Σχ. 4.2ιθ.
Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = x^2$.

Συναρτήσεις που έχουν τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται αντίστοιχα άρτιες, περιττές και περιοδικές. Πιο συγκεκριμένα έχομε τους παρακάτω γενικούς ορισμούς:

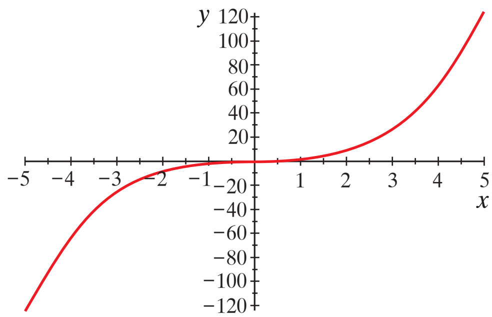
α) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται ***άρτια***, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$.

β) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται ***περιττή***, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

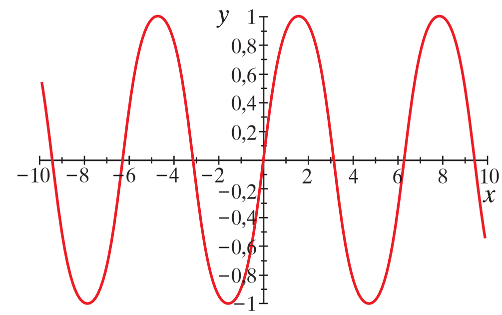
γ) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται ***περιοδική*** με περίοδο το θετικό αριθμό T, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $x + T \in A$ και ισχύει $f(x + T) = f(x)$.

Από τους ορισμούς αυτούς προκύπτει άμεσα ότι:

α) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα (άξονα $y'y$) (σχ. 4.2ιθ).



Σχ. 4.2κ.
Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = x^3$.



Σχ. 4.2κα.
Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) =$ ημx.

β) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων (σχ. 4.2κ).

γ) Η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συναρτήσεως αποτελείται από επαναλαμβανόμενα τμήματα (σε πλάτος μιας περιόδου) (σχ. 4.2κα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.5.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

α) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ β) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3x$ γ) $f(x) = x^2 + 2x$

Λύση.

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 + 2 = x^4 + 3x^2 + 2 = f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} + 3(-x) = -\left(\frac{1}{x} + 3x\right) = -f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$. Όμως:

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x\,, \quad -f(x) = -(x^2 + 2x) = -x^2 - 2x$$

και δεν μπορεί να ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε x (π.χ. έχομε $f(-1) = -1 \neq 3 = f(1)$), ούτε να ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x (π.χ. έχομε $f(-1) = -1 \neq -3 = -f(1)$).

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Ασκήσεις.

4.2.1. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι

$f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του **R**, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

α) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$ β) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$

γ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + 3, & x < 0 \\ \sqrt{x} + 3, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \sqrt{|x|} + 3$ δ) $f(x) = \dfrac{x}{|x|} + 3$, $g(x) = \dfrac{|x|}{x} + 3$

4.2.2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = |x-2|$, $g(x) = |x+2|$. Να βρείτε τον τύπο της συναρτήσεως $h = f + g$ χωρίς τη χρήση του συμβόλου της απόλυτης τιμής και στη συνέχεια να δώσετε τη γραφική της παράσταση.

4.2.3. Αν οι συναρτήσεις *f*, *g* ορίζονται από τους τύπους

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x < 0 \\ 3x - x^2 - 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

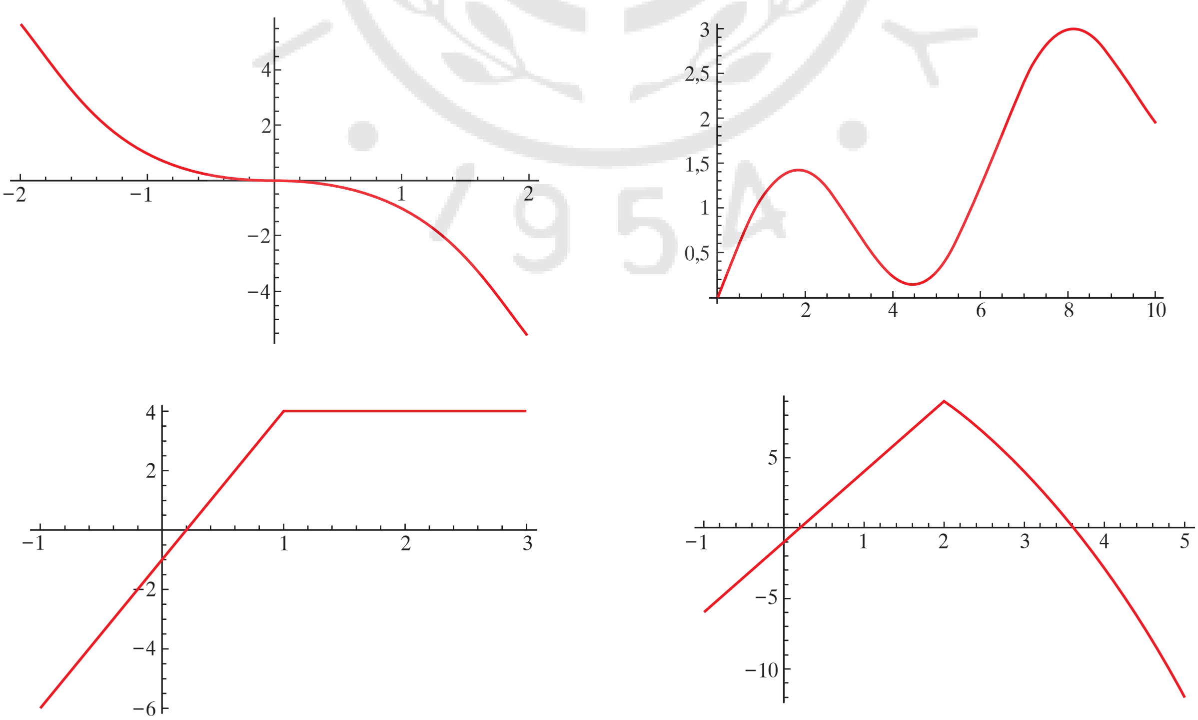
να βρείτε τον τύπο της συναρτήσεως $h = f + g$.

4.2.4. Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$, $f - g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $3f + 2g$.

α) $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ β) $f(x) = \sqrt{x} - 3$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$

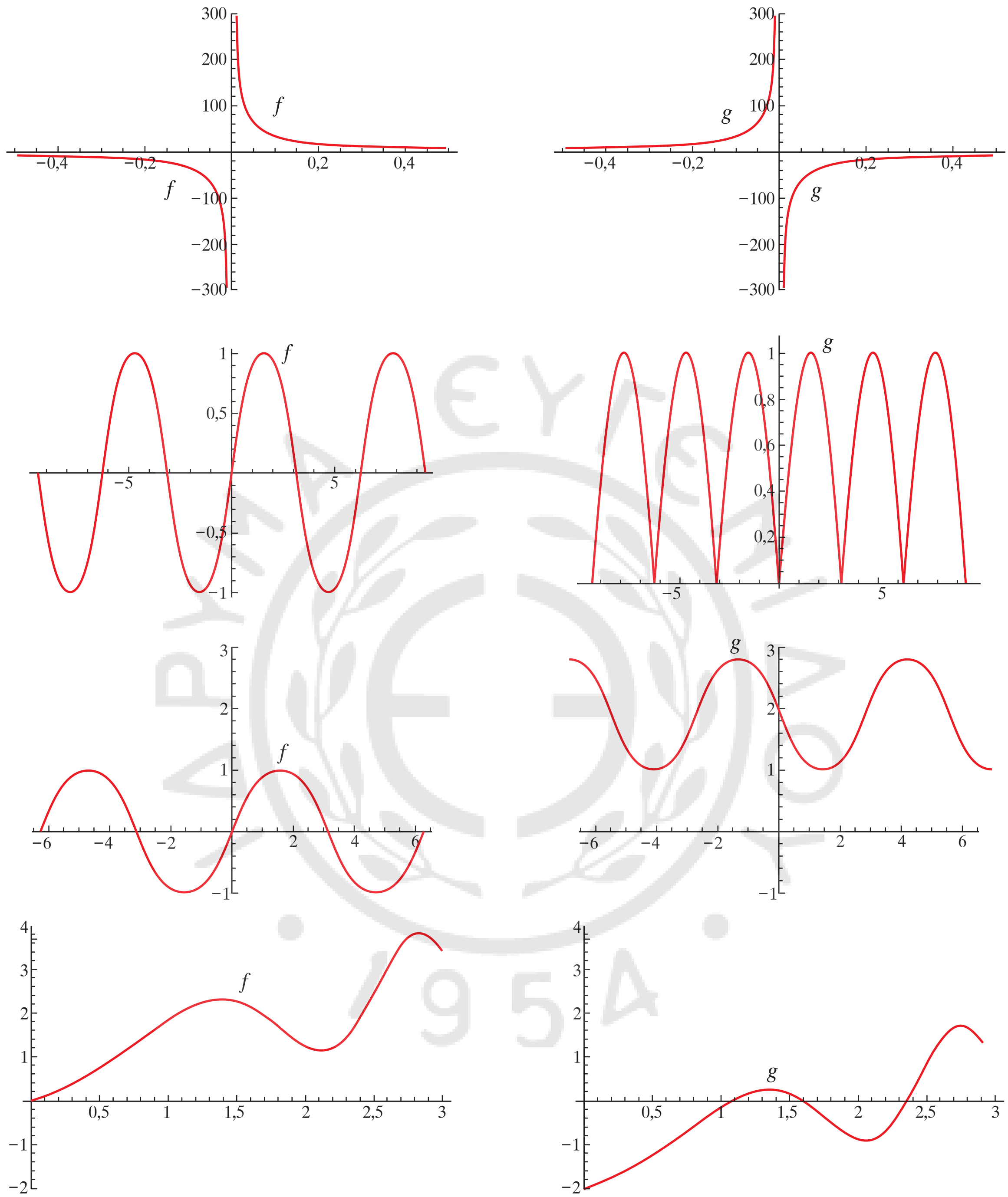
γ) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x - 2$ δ) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

4.2.5. Για καθεμιά από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις (σχ. 4.2κβ) της συναρτήσεως *f* να δοθεί η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $g = -f$ και της συναρτήσεως $g = |f|$.



Σχ. 4.2κβ.

4.2.6. Να βρείτε τη σχέση που ισχύει μεταξύ των ζευγαριών συναρτήσεων *f* και *g* των σχημάτων του 4.2κγ.



Σχ. 4.2κγ.

4.2.7. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες.

α) $f(x)=(x-5)(x-7)+1$ β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}-2$ γ) $f(x)=\text{συν}x$ δ) $f(x)=|x-5|+|x-2|+15$

4.2.8. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι μονότονες στο πεδίο ορισμού τους ή σε κάποιο υποσύνολο αυτού.

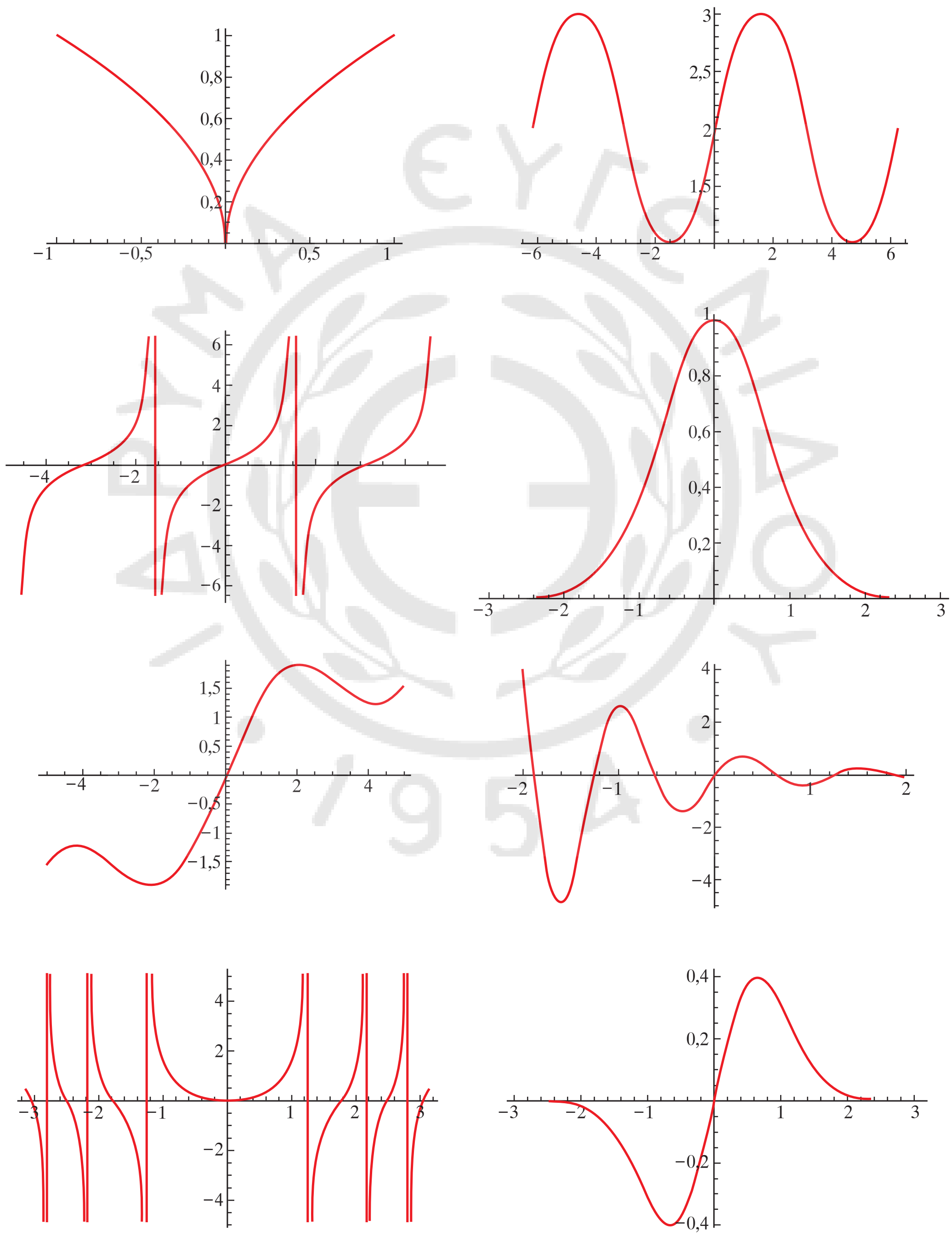
α) $f(x)=8x^3+x+1$ β) $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x+5}$ γ) $f(x)=|3x-5|$ δ) $f(x)=(x-2)^2+4x$

4.2.9. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

α) $f(x)=x^6+3x^4|x|+2|x|$ β) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}+3x^2$ γ) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ ημx

δ) $f(x) = 2x^3 + 2x$συνx ε) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}+1$ στ) $f(x)=|x-3|$.

4.2.10. Ποιες από τις γραφικές παραστάσεις (σχ. 4.2κδ) αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που είναι άρτιες, περιττές και ποιες σε τίποτε από τα δύο; Ποιες από τις συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές;



Σχ. 4.κδ.

4.2.11. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και c, d είναι δύο πραγματικές σταθερές με $c > 0$, τότε η συνάρτηση $cf + d$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ και α, β είναι δύο πραγματικές σταθερές με $c < 0$, τότε η συνάρτηση $cf + d$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

4.2.12. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσες) σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο Δ.

β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

δ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

4.2.13. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν δύο συναρτήσεις $f\colon A \to \mathbf{R}$ και $g\colon A \to \mathbf{R}$ είναι άρτιες, τότε η συνάρτηση $f + g$ και η συνάρτηση fg είναι επίσης άρτιες.

β) Αν δύο συναρτήσεις $f\colon A \to \mathbf{R}$ και $g\colon A \to \mathbf{R}$ είναι περιττές, τότε η συνάρτηση fg είναι επίσης άρτια.

γ) Αν η συνάρτηση $f\colon A \to \mathbf{R}$ είναι άρτια και η συνάρτηση $g\colon A \to \mathbf{R}$ είναι περιττή, τότε η συνάρτηση fg είναι περιττή.

4.3 Στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις.

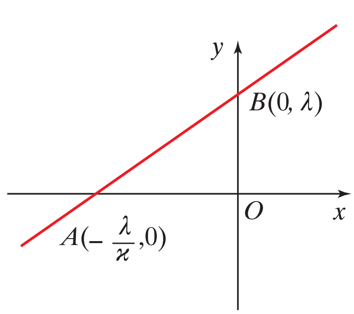
Στην παράγραφο αυτή θα επεξηγήσομε τις γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων που συναντάμε συχνά και θα αναφέρομε ορισμένες ιδιότητές τους.

α) ***Πολυωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού με τύπο*** $f(x) = \varkappa x + \lambda$, $\varkappa \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $A = \mathbf{R}$ και το σύνολο τιμών της το $f(A) = \mathbf{R}$. Η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία που τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία $A(-\frac{\lambda}{\varkappa}, 0)$ και $B(0, \lambda)$ αντίστοιχα. Για $\varkappa > 0$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (σχ. 4.3α), για $\varkappa < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα (σχ. 4.3β).

β) ***Πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού με τύπο*** $f(x) = \varkappa x^2$, $\varkappa \neq 0$. Είναι άρτια συνάρτηση (οπότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$) με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$.

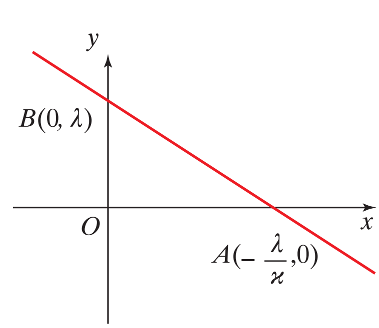
Αν $\varkappa > 0$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [0, +\infty)$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varkappa x^2$ για $\varkappa > 0$ φαίνεται στο σχήμα 4.3γ.

Αν $\varkappa < 0$, η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα



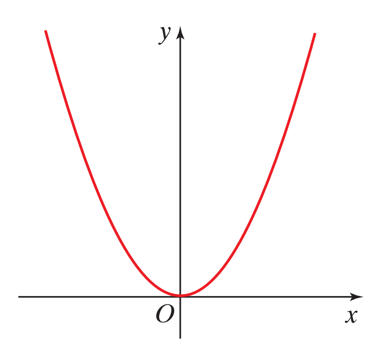
$\varkappa > 0$

Σχ. 4.3α.



$\varkappa < 0$

Σχ. 4.3β.



$\varkappa > 0$

Σχ. 4.3γ.

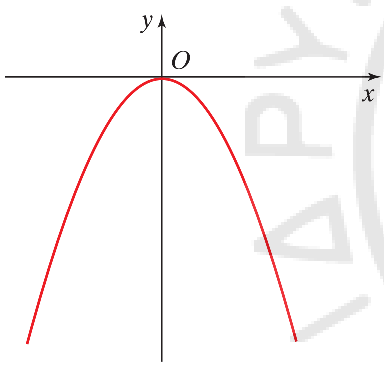
$[0,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=(-\infty,0]$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varkappa x^2$ για $\varkappa<0$ φαίνεται στο σχήμα 4.3δ.

γ) ***Πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με τύπο*** $f(x) = \varkappa x^3$, $\varkappa \neq 0$. Είναι περιττή συνάρτηση (οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων) με πεδίο ορισμού το $A=\mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A)=\mathbf{R}$.

Αν $\varkappa>0$, η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σχ. 4.3ε), ενώ για $\varkappa<0$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σχ. 4.3στ).

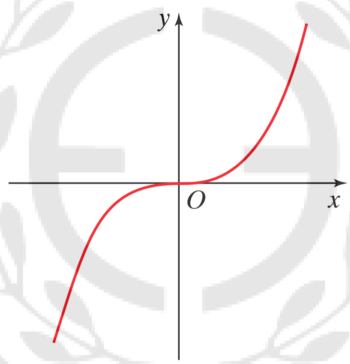
δ) ***Ρητή συνάρτηση με τύπο*** $f(x)=\dfrac{\varkappa}{x}$, $\varkappa \neq 0$. Είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}^* = \mathbf{R}-\{0\}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbf{R}^* = \mathbf{R}-\{0\}$. Η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς την αρχή των αξόνων. Για $\varkappa>0$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ (χωρίς όμως να είναι φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της), ενώ για $\varkappa<0$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ (χωρίς όμως να είναι αύξουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της). Στο σχήμα 4.3ζ δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \varkappa/x$ με $\varkappa>0$, ενώ στο σχήμα 4.3η για $\varkappa<0$

ε) ***Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης.*** Η συνάρτηση $f(x) =$ ημx είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $f(A)=[-1,1]$. Είναι



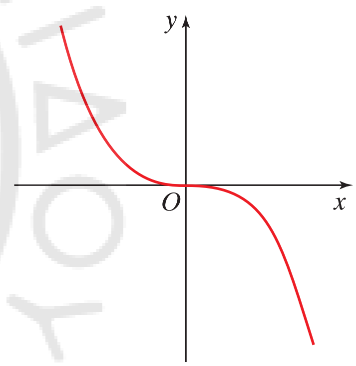
$\varkappa<0$

Σχ. 4.3δ.



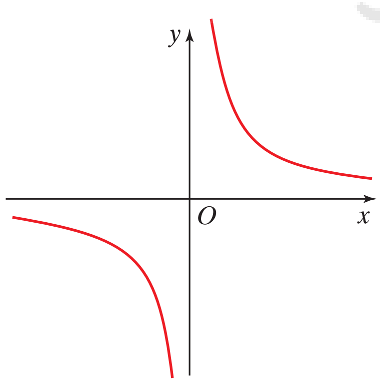
$\varkappa>0$

Σχ. 4.3ε.



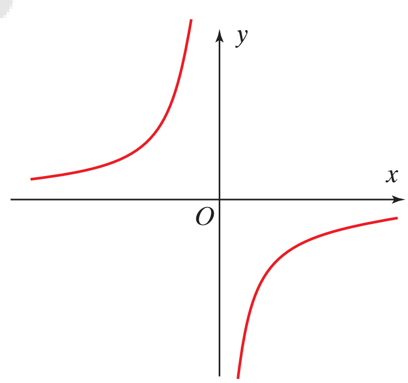
$\varkappa<0$

Σχ. 4.3στ.



$\varkappa>0$

Σχ. 4.3ζ.

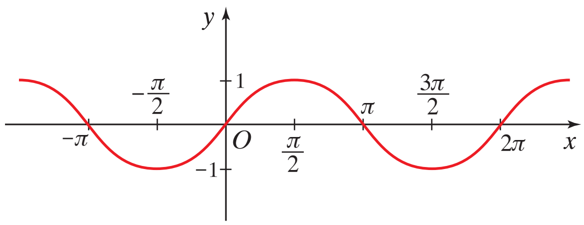


$\varkappa<0$

Σχ. 4.3η.

περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ είναι εναλλάξ αύξουσα και φθίνουσα σε διαστήματα πλάτους π (σχ. 4.3θ).

Δίνεται στη συνέχεια ένας πίνακας χαρακτηριστικών τιμών για τη συνάρτηση $f(x) = ημx$.

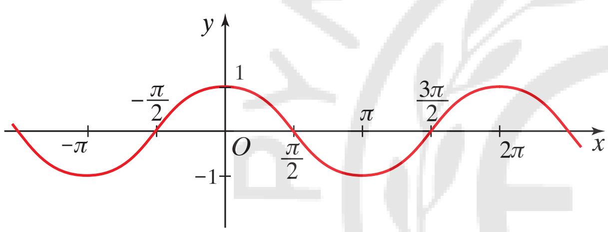


Σχ. 4.3θ.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ημx	0	1	0	–1	0

Η συνάρτηση $f(x) = συνx$ είναι άρτια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $f(A) = [-1, 1]$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ είναι εναλλάξ αύξουσα και φθίνουσα σε διαστήματα πλάτους π (σχ. 4.3ι).

Δίνεται στη συνέχεια ένας πίνακας χαρακτηριστικών τιμών για τη συνάρτηση $f(x) = συνx$.



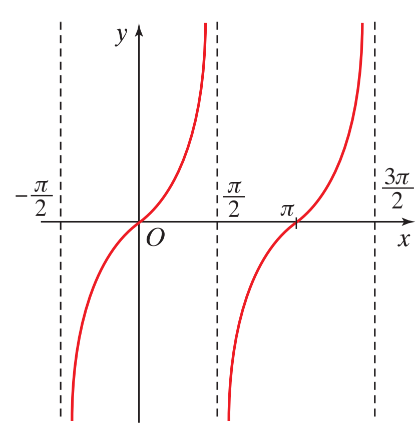
Σχ. 4.3ι.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
συνx	1	0	–1	0	1

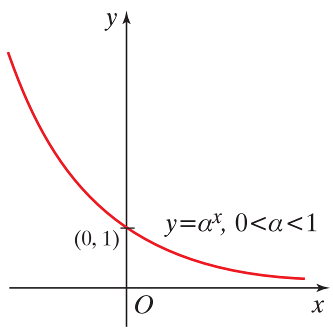
Η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού A το $\mathbf{R}$, με εξαίρεση τα σημεία της μορφής $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathrm{Z}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbf{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$, ενώ είναι αύξουσα σε διαστήματα πλάτους π της μορφής $(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2})$, $\kappa \in \mathbf{Z}$ (σχ. 4.3ια).

x	$-\pi/4$	0	$\pi/4$
εφx	–1	0	1

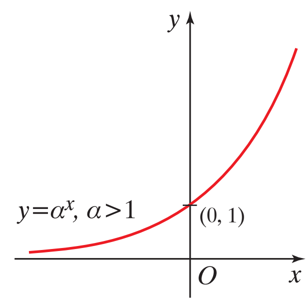
στ) ***Εκθετική συνάρτηση*** με βάση a: $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$. Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = (0, +\infty)$. Αν $0 < a < 1$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 4.3ιβ), επομένως είναι αμφιμονοσήμαντη. Για $a > 1$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 4.3ιγ) οπότε και πάλι είναι αμφιμονοσήμαντη. Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται ***βάση*** της εκθετικής συναρτήσεως. Η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό του Euler e λέγεται απλά εκθετική συνάρτηση.



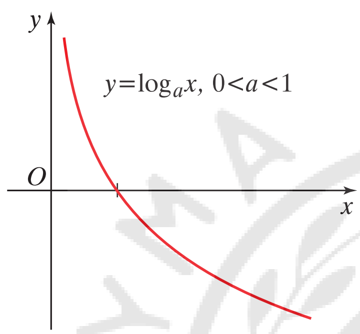
Σχ. 4.3ια.



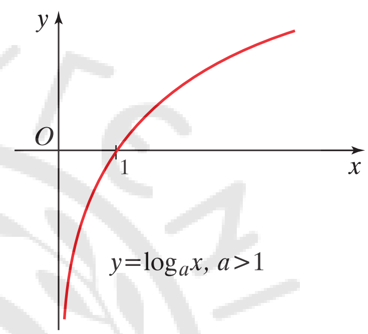
Σχ. 4.3ιβ.



Σχ. 4.3ιγ.



Σχ. 4.3ιδ.



Σχ. 4.3ιε.

ζ) ***Λογαριθμική συνάρτηση*** με βάση α: $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$. Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbf{R}$. Αν $0 < \alpha < 1$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 4.3ιδ), ενώ για $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 4.3ιε). Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον αριθμό Euler e συμβολίζεται με $\ln x$ και ονομάζεται απλά ***λογαριθμική συνάρτηση***.

Υπενθυμίζομε ότι, για τη λογαριθμική συνάρτηση, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

β) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

γ) $\log_\alpha \alpha^x = x$, $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

δ) $\log_\alpha \left(\dfrac{x_1}{x_2} \right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

ε) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

στ) $\log_\alpha x^\varkappa = \varkappa \log_\alpha x$

ζ) Αν $\alpha > 1$, τότε $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ενώ αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.1.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}2x+e-2, & x<1\\ e^x, & x\geq 1.\end{cases}$$

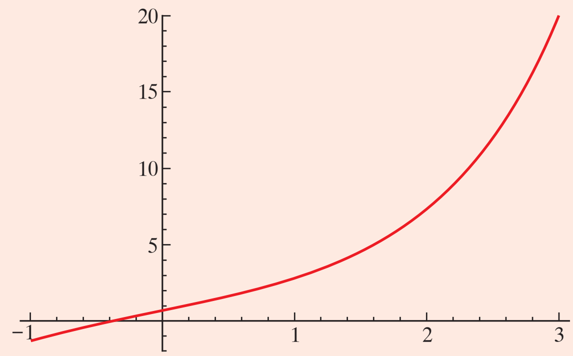
α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x και y.

Λύση.

α) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση

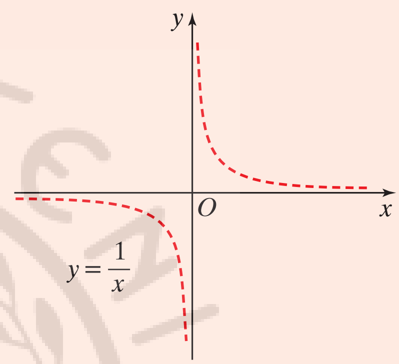
$$y=2x+(e-2)$$

στο διάστημα $(-\infty,1)$ και το τμήμα της γραφικής παραστάσεως της εκθετικής συναρτήσεως $y=e^x$ στο διάστημα $[1,+\infty)$. Έτσι έχομε το σχήμα 4.3ιστ.

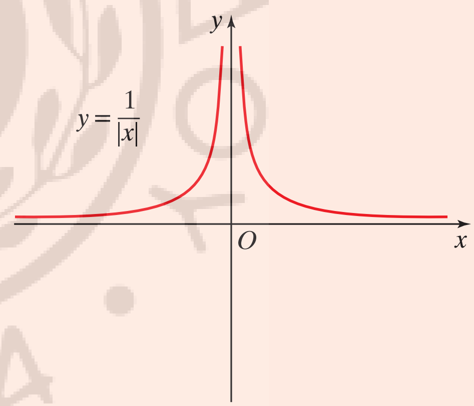


Σχ. 4.3ιστ.

β) Για να βρούμε σε ποιο σημείο η C_f τέμνει τον άξονα των x θέτομε $y=0$ και προσδιορίζομε το αντίστοιχο x. Αφού για $x\geq 1$ έχομε $y=e^x>0$, οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $y=0$ θα πρέπει να αναζητηθούν στον άλλο κλάδο της συναρτήσεως, δηλαδή για $x<1$. Έτσι παίρνομε $2x+e-2=0$, οπότε $x=\dfrac{2-e}{2}$, η οποία αποτελεί αποδεκτή τιμή, αφού $\dfrac{2-e}{2}<1$. Για να βρούμε σε ποιο σημείο η C_f τέμνει τον άξονα των y θέτομε $x=0$, δηλαδή έχομε $f(0)=y$ ή $y=e-2$. Άρα η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\dfrac{2-e}{2},0)$ και $(0,e-2)$.



Σχ. 4.3ιζ.



Σχ. 4.3ιη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.2.

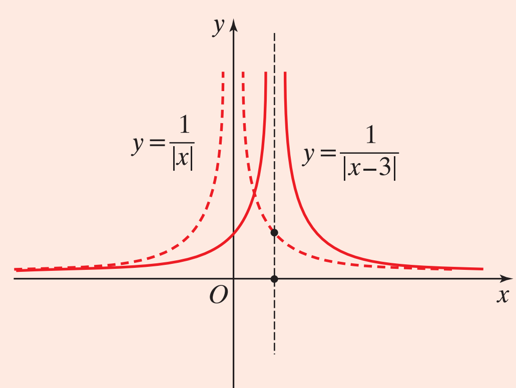
Να γίνει η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{|x-3|}$.

Λύση.

Αρχικά παριστάνομε γραφικά (σχ. 4.3ιζ) τη συνάρτηση $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$ και στη συνέχεια την

$$f_2(x)=\frac{1}{|x|}=|f_1(x)|.$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.2.2, η $C_{|f|}$ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_f όπου είναι $f(x)\geq 0$ (δηλ. στον



Σχ. 4.3ιθ.

άνω δεξί κλάδο), ενώ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_{-f}, όπου είναι $f(x)<0$ (δηλ. στον κάτω δεξί κλάδο). Όμως, και πάλι σύμφωνα με το παράδειγμα 4.2.2, η C_{-f} θα είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$ (μας ενδιαφέρει μόνο το κομμάτι που αντιστοιχεί σε $x<0$). Έτσι προκύπτει η γραφική παράσταση (σχ. 4.3ιη) για τη συνάρτηση $f_2(x)=\dfrac{1}{|x|}$.

Τέλος, επειδή

$$f(x)=\frac{1}{|x-3|}=f_2(x-3),$$

η γραφική παράσταση της *h* προκύπτει, αν μετατοπίσομε τη γραφική παράσταση της f_2 (διακεκομμένη γραμμή στο σχ. 4.3ιθ) κατά μία μονάδα προς τα δεξιά (συνεχόμενη γραμμή στο σχ. 4.3ιθ).

Ασκήσεις.

4.3.1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x^2-4}$ β) $f(x)=e^{x-3}$ γ) $f(x)=\ln(x-3)+2$ δ) $f(x)=|\ln x|$

Ποιο είναι το σύνολο τιμών για κάθε μια από τις συναρτήσεις αυτές;

4.3.2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x<1\\ x^3+1, & x\geq 1\end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leq e\\ (x/e)^2, & x>e\end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x\leq 0\\ 3x+2, & 0<x\leq 1\\ 5, & x>1\end{cases}$ δ) $f(x)=\begin{cases}\text{ημ}x+1, & x\leq 0\\ \text{συν}x, & 0<x\leq \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$

4.3.3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων *f, g* στο ίδιο σύστημα αξόνων.

α) $f(x)=2e^x-3$ και $g(x)=3e^x+2$ β) $f(x)=e^x$ και $g(x)=-e^x$

γ) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln\dfrac{1}{x^2}$ δ) $f(x)=2^x$ και $g(x)=x^2$

4.3.4. Αν οι συναρτήσεις *f, g* ορίζονται από τους παρακάτω τύπους, να βρείτε τη συνάρτηση *f+g* και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

$$f(x)=\begin{cases}5x, & x<0\\ x^3, & 0\leq x<2\\ -x^3, & x\geq 2\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}x+3, & x<1\\ x^3-3, & x\geq 1\end{cases}$$

4.4 Σύνθεση συναρτήσεων. Η αντίστροφη συνάρτηση.

Ας υποθέσομε ότι για τη μελέτη του αριθμού των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν σε μία πόλη χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός τύπος $15\sqrt{y+1}$, όπου y είναι ο πληθυσμός της πόλεως σε εκατοντάδες χιλιάδες άτομα (ο προηγούμενος τύπος δίνει τον αριθμό αυτοκινήτων σε χιλιάδες αυτοκίνητα). Στην πραγματικότητα, για τον καθορισμό του αριθμού των αυτοκινήτων μέσω του πληθυσμού της πόλεως χρησιμοποιείται μία συνάρτηση με τύπο:

$$g(y)=15\sqrt{y+1},\quad y>0. \tag{4.4.1}$$

Ας υποθέσομε επιπλέον ότι ο πληθυσμός της πόλεως μεταβάλλεται ετησίως σύμφωνα με τον τύπο $f(x)=20e^{0,01x},\ x\geq 0$, δηλαδή ο πληθυσμός σε x έτη από σήμερα θα είναι $20e^{0,01x}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα [παρατηρήστε ότι ο σημερινός πληθυσμός θεωρείται ίσος με $f(0)=20$ χιλιάδες άτομα].

Αν θέλαμε να εκφράσομε τον αριθμό των αυτοκινήτων της πόλεως ως συνάρτηση του χρόνου t, θα σκεφτόμαστε ως εξής: σε x έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλεως θα είναι ίσος με $y=20e^{0,01x}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα και σύμφωνα με τον τύπο (4.4.1), ο αριθμός των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στην πόλη θα είναι:

$$z=15\sqrt{y+1}=15\sqrt{20e^{0,01x}+1},$$

Ο τελευταίος τύπος ορίζει μια συνάρτηση του x, πιο συγκεκριμένα έχομε την

$$h(x)=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $y=20e^{0,01x}=f(x)$, ο τύπος αυτός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$h(x)=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}=15\sqrt{y+1}$$

και χρησιμοποιώντας την (4.4.1) θα έχομε

$$h(x)=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}=15\sqrt{y+1}=g(y)=g(f(x)).$$

Τα βήματα του σχηματισμού της νέας συναρτήσεως φαίνονται γραφικά στο σχήμα 4.4α.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "z\,=\,g(y)\,=\,g(f(x))"] & y=20e^{0,01x}=f(x) \arrow[r] & z=h(x)=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}=g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Η συνάρτηση που σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x αντιστοιχίζει την τιμή $g(f(x))$ ονομάζεται ***σύνθεση της f με την g*** και συμβολίζεται με $g\circ f$. Είναι φανερό ότι, για να οριστεί η τιμή $g(f(x))$ της συναρτήσεως $g\circ f$, θα πρέπει το $f(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως g. Γενικά έχομε τον επόμενο ορισμό (σχ. 4.4α):

> Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A,B αντίστοιχα. Τότε για όλα τα $x\in A$ για τα οποία $f(x)\in B$, ορίζεται η συνάρτηση $g\circ f$ με τύπο $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ και ονομάζεται ***σύνθεση της f με την g.***

Θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο γεγονός ότι, το πεδίο ορισμού της συνθέσεως $g\circ f$ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A, της f, αλλά περιορίζεται στα $x\in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της g, δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A \,|\, f(x)\in B\}$$

(σχ. 4.4β). Στην περίπτωση που ισχύει $f(A)\cap B=\varnothing$ δεν ορίζεται η σύνθεση της f με την g, ενώ αν συμβεί να ισχύει $f(A) \subseteq B$, το πεδίο ορισμού της συνθέσεως είναι ολόκληρο το σύνολο A.

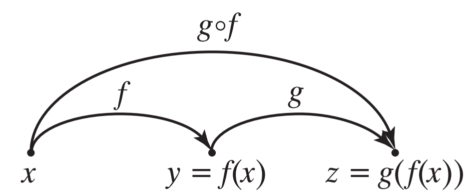
Η σύνθεση συναρτήσεων μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχομε περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

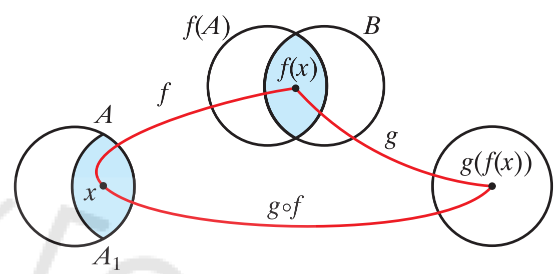
Τη συνάρτηση αυτή την ονομάζομε ***σύνθεση*** των f, g και h και τη συμβολίζομε με $h \circ g \circ f$ και θα έχομε:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) .$$

Ομοίως ορίζεται η σύνθεση συναρτήσεων και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.



Σχ. 4.4α.



Σχ. 4.4β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.1.

Από ένα δεξαμενόπλοιο διαρρέει συνεχώς πετρέλαιο, το οποίο διαχέεται στην επιφάνεια της θάλασσας σχηματίζοντας μία κυκλική κηλίδα. Η ακτίνα της πετρελαιοκηλίδας δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 5 + 3t$, όπου t είναι ο χρόνος από τη στιγμή που άρχισε η διαρροή. Να εκφράσετε την επιφάνεια της πετρελαιοκηλίδας ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση.

Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας του r, ως συνάρτηση της ακτίνας του δίνεται από τον τύπο

$$E = g(r) = \pi\, r^2.$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα που εξετάζομε, η ακτίνα της κυκλικής κηλίδας είναι συνάρτηση του χρόνου t που διαρκεί η διαρροή και εκφράζεται από τη σχέση

$$r = f(t) = 5 + 3t .$$

Επομένως, η επιφάνεια της κηλίδας σε χρόνο t από τη στιγμή που άρχισε η διαρροή θα δίνεται από τη σύνθεση των συναρτήσεων f και g, δηλαδή

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(5+3t) = \pi(5+3t)^2 = 25\pi + 30\pi t + 9\pi t^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = x + 1$ *και* $g(x) = x^2 + 1$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και η $f \circ g$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι το **R**, οπότε τόσο η $f \circ g$ όσο και η $g \circ f$ θα έχουν πεδίο ορισμού το **R**. Ο τύπος της $f \circ g$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2 ,$$

ενώ τύπος της $g \circ f$ είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2\,.$$

Είναι φανερό ότι, παρότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού (το **R**), δεν ισχύει $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ για κάθε x, οπότε

$$g \circ f \neq f \circ g\,,$$

δηλαδή στη σύνθεση συναρτήσεων έχει σημασία η σειρά με την οποία εργαζόμαστε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.3.

Δίνονται οι συναρτήσεις *f* και *g* με $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = x^2 + 2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και η $f \circ g$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού της *f* είναι το σύνολο $A = [2, +\infty)$. Η συνάρτηση *g* με $g(x) = x^2 + 2$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, οπότε $B=\mathbf{R}$. Επομένως η $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A_1 = \{x \in A : f(x) \in B\} = [2, +\infty) = A$ και για κάθε $x \in A_1$ θα είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = (x-2) + 2 = x\,.$$

Η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το

$$A_2 = \{x \in B : g(x) \in A\} = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2 \geq 0\} = \mathbf{R}$$

ενώ ο τύπος της είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2) = \sqrt{(x^2+2)-2} = \sqrt{x^2} = |x|\,.$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $g \circ f$ και $f \circ g$ είναι διαφορετικά, οπότε και πάλι έχομε $g \circ f \neq f \circ g$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

για όλα τα *x* που ανήκουν και στα δύο πεδία ορισμού, κάτι όμως που δεν συμβαίνει σε κάθε περίπτωση που υπολογίζομε σύνθεση συναρτήσεων με αλλαγμένη τη σειρά των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε.

Ας υποθέσομε ότι κατά τη μελέτη της απλής ευθύγραμμης κινήσεως η απόσταση του κινητού (σε cm) από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή *x* (σε sec) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = 3x + 5.$$

Ας υποθέσομε ότι το κινητό κινείται συνολικά επί 6 min. Μπορούμε τότε εύκολα να προσδιορίσομε τη θέση του σε διάφορες χρονικές στιγμές *x* ($0 \leq x \leq 600$), αφού από τον αριθμό των sec που πέρασαν από την αρχή των χρόνων μπορούμε να βρίσκομε την απόσταση σε cm που απέχει το κινητό από την αρχή των αξόνων. Στον πίνακα 4.4.1 δίνονται οι αποστάσεις του κινητού για κάποιες επιλεγμένες χρονικές στιγμές. Έτσι, παρατηρούμε ότι στην αρχή των χρόνων ($x = 0$) το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 5 cm από την αρχή των αξόνων, σε χρόνο $x = 5\,\text{sec}$ σε απόσταση 20 cm, ενώ στο τέλος της κινήσεως έχει βρεθεί σε απόσταση 1805 cm από την αρχή των αξόνων.

Ας δούμε τώρα το ίδιο θέμα από μια διαφορετική οπτική γωνία. Αν αναρωτηθούμε σε ποια χρονι-

Πίνακας 4.4.1
Αποστάσεις από την αρχή
για δεδομένο χρόνο.

χρόνος x (σε sec)	***απόσταση f(x) (σε cm)***
0	5
1	8
2	11
5	20
10	35
20	65
30	95
100	305
500	1505
600	1805

Πίνακας 4.4.2
Χρόνοι που απαιτούνται για να διανυθούν
δεδομένες αποστάσεις.

απόσταση y (σε sec)	***χρόνος $f^{-1}(y)$ (σε sec)***
5	0
8	1
11	2
20	5
35	10
65	20
95	30
305	100
1505	500
1805	600

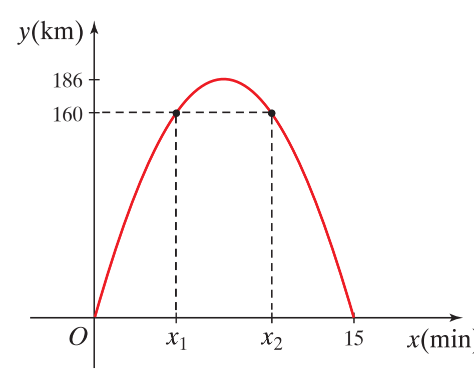
κή στιγμή το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 305 cm από την αρχή των αξόνων, η απάντηση προφανώς είναι 100 sec. Συνεχίζοντας να εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο (αντίστροφα από ό,τι κάναμε αρχικά), δηλαδή να βρίσκομε τα sec που απαιτούνται για να βρεθεί το κινητό σε συγκεκριμένη απόσταση από την αρχή των αξόνων, θα δημιουργήσομε μια νέα συνάρτηση, η οποία καλείται ***αντίστροφη συνάρτηση*** της *f*, και θα συμβολίζεται με f^{-1}. Έτσι $f^{-1}(y)$ θα είναι ο χρόνος (σε sec) που χρειάζεται το κινητό ώστε να βρεθεί σε συγκεκριμένη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Για να βρούμε κάποιες τιμές της συναρτήσεως f^{-1} μπορούμε να γράψομε τον πίνακα 4.4.1 αντίστροφα, με αμοιβαία εναλλαγή των δύο στηλών του, οπότε θα πάρομε τον πίνακα 4.4.2.

Οι δύο συναρτήσεις *f* και f^{-1} μάς μεταφέρουν, στην πραγματικότητα, την ίδια πληροφορία, αλλά εκφράζονται διαφορετικά. Για παράδειγμα το γεγονός ότι το κινητό σε χρόνο $x = 20\,\text{sec}$ βρίσκεται σε απόσταση $y = 65\,\text{cm}$ από την αρχή των αξόνων μπορεί να αποδοθεί και με τις δύο συναρτήσεις ως εξής:

$$f(20) = 65 \quad \text{ή} \quad f^{-1}(65) = 20\,.$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή για την *f* γίνεται εξαρτημένη μεταβλητή για την f^{-1} και αντίστροφα. Επίσης το πεδίο ορισμού της μιας γίνεται σύνολο τιμών της άλλης. Πιο συγκεκριμένα το πεδίο ορισμού της *f* είναι όλοι οι χρόνοι *t* για τους οποίους το κινητό πραγματοποιεί την κίνησή του, δηλαδή $0 \le x \le 600$ και συμπίπτει με το σύνολο τιμών της f^{-1}. Το σύνολο τιμών της *f* είναι όλες οι αποστάσεις *y* από την αρχή των αξόνων, στις οποίες βρέθηκε το κινητό κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του, δηλαδή $5 \le x \le 1805$ και συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Αν δοθεί μια συνάρτηση *f*, δεν είναι πάντοτε δυνατό να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} όπως την περιγράψαμε παραπάνω. Για να καταλάβομε ποιες συναρτήσεις έχουν αντίστροφη θα εξετάσομε το επόμενο παράδειγμα. Στην πρώτη προσπάθεια πτήσεως αστροναύτη (Alan Shepard, 1961), το διαστημόπλοιο έφθασε σε ύψος 186 km και μετά άρχισε να επιστρέφει προς τη γη, μέχρι που έπεσε στη θάλασσα. Όλο το ταξίδι διήρκεσε μόλις 15 min. Στο σχήμα 4.4γ δίνεται γραφικά το ύψος *y* (σε km), στο οποίο βρισκόταν το διαστημόπλοιο



Σχ. 4.4γ.

x λεπτά μετά την απογείωση. Η συνάρτηση $f(x)$ τώρα δεν έχει αντίστροφη. Πράγματι, ας υποθέσομε ότι η f έχει αντίστροφη και ας προσπαθήσομε να προσδιορίσομε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το διαστημόπλοιο βρισκόταν σε ύψος 160 km. Είναι προφανές ότι υπάρχουν δύο τέτοιοι χρόνοι: ένας θα μας δίνει το χρόνο που χρειάστηκε το διαστημόπλοιο για να φθάσει σε ύψος 160 km ανεβαίνοντας και ο άλλος για να φθάσει στο ίδιο ύψος κατεβαίνοντας. Αφού στο ύψος y αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές του χρόνου x, δεν μπορεί να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Γενικά, μια συνάρτηση έχει αντίστροφη, αν και μόνο αν, οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο. Αυτό, σύμφωνα με όσα είδαμε στην παράγραφο 4.2, σημαίνει ότι η συνάρτηση θα πρέπει να είναι αμφιμονοσήμαντη. Δίνομε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Αν $f: A \to f(A)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, τότε μπορούμε να ορίσομε τη συνάρτηση:

$$f^{-1}: f(A) \to A,$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f ($y \in f(A)$) το μοναδικό x, για το οποίο ισχύει $y = f(x)$. Η f^{-1} θα καλείται ***αντίστροφη*** συνάρτηση της f.

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν η συνάρτηση f αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό x στον αριθμό y, τότε η συνάρτηση f^{-1}, αν υπάρχει, θα αντιστοιχίζει τον αριθμό y στον αριθμό x, δηλαδή έχομε την ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Άμεση συνέπεια της τελευταίας ισοδυναμίας είναι και οι επόμενες δύο ισότητες, οι οποίες ισχύουν για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A).$$

Σημειώνεται ότι αν για δύο συναρτήσεις ισχύουν οι σχέσεις

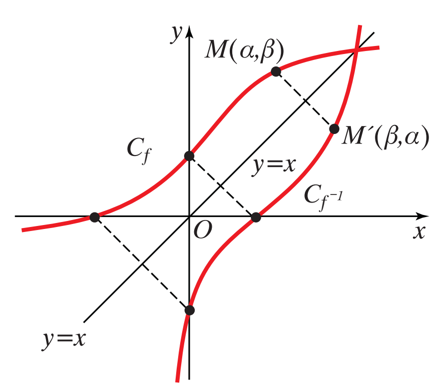
$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y$$

τότε οι f, g αποτελούν αντίστροφες συναρτήσεις, δηλαδή ισχύει $f^{-1} = g$ και $g^{-1} = f$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε σημείο (x, y) της γραφικής παραστάσεως της f θα έχομε ένα σημείο (y, x) της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f^{-1}. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να σχεδιάσομε τη $C_{f^{-1}}$ βρίσκοντας τα σημεία (α, β), για τα οποία ισχύει $\beta = f(\alpha)$ και να τα απεικονίζομε ως (β, α). Το αποτέλεσμα που θα έχομε αν εργαστούμε με αυτόν τον τρόπο είναι το ίδιο που θα είχαμε αν σχεδιάζαμε τη συμμετρική της C_f ως προς τη διχοτόμο $y = x$ (σχ. 4.4δ).

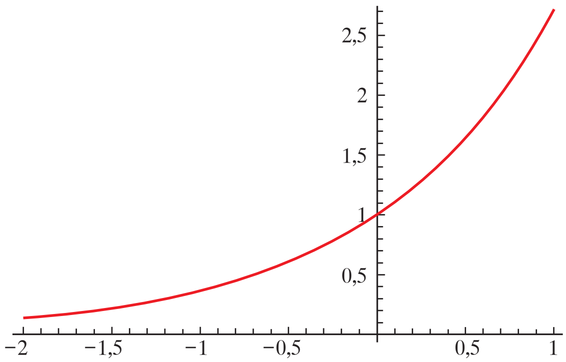
Επομένως:

Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων (δηλ. ως προς την ευθεία $y = x$).

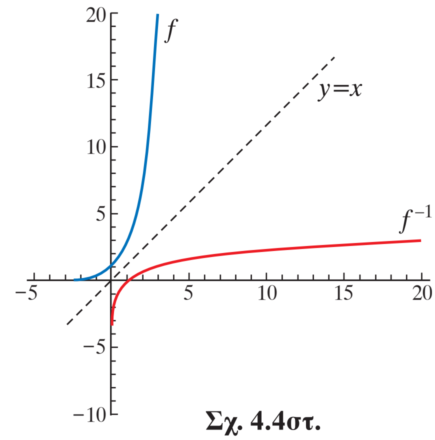


Σχ. 4.4δ.

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$. Όπως είναι γνωστό (βλ. παράγρ. 4.3 εδάφιο στ για $a = e$) η συνάρτηση



Σχ. 4.4ε.



Σχ. 4.4στ.

αυτή είναι 1−1 με πεδίο ορισμού ολόκληρο το **R** και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της *f*. Η συνάρτηση αυτή (σχ. 4.4ε), σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω θα έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$, σύνολο τιμών το **R** και θα αντιστοιχίζει κάθε $y\in(0,+\infty)$ στο μοναδικό *x* για το οποίο ισχύει $e^x=y$. Επειδή όμως $e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$ θα έχομε:

$$f^{-1}(y)=x=\ln y.$$

Επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με *x* και η εξαρτημένη μεταβλητή με *y*, για την αντίστροφη συνάρτηση της $f:A\to f(A)$ θα χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $f^{-1}(x)$, $x\in f(A)$ (αντί του $f^{-1}(y)$, $y\in f(A)$ που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως). Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συναρτήσεως $f(x)=e^x$ είναι η λογαριθμική συνάρτηση

$$f^{-1}(x)=\ln x.$$

(Στο σχήμα 4.4στ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων).

Σημειώνεται ότι, εφαρμόζοντας στην περίπτωση αυτή τους τύπους:

$$f(f^{-1}(y))=y,\quad y\in f(A),\quad f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in A$$

παίρνομε τους γνωστούς τύπους:

$$\ln e^x=x,\quad x\in\mathbf{R}\qquad \text{και}\qquad e^{\ln x}=x,\quad x\in(0,+\infty).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.4.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2x-1}$ είναι αμφιμονοσήμαντη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Λύση.

Για να ορίζεται η συνάρτηση *f*, θα πρέπει να ισχύει $2x-1\geq 0$, δηλαδή $x\geq\frac{1}{2}$. Άρα το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{2x-1}$ είναι το σύνολο $A=[\frac{1}{2},+\infty)$. Η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχομε

$$\sqrt{2x_1-1}=\sqrt{2x_2-1}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x_1 = x_2$. Επίσης, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [0, +\infty)$ (σχ. 4.4ζ).

Επομένως, για τη συνάρτηση f μπορεί να οριστεί η αντίστροφή της $f^{-1} : f(A) \to A$ η οποία θα αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A) = [0, +\infty)$ στο $f^{-1}(y) = x \in A$, για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Για $x \geq \dfrac{1}{2}$ έχομε

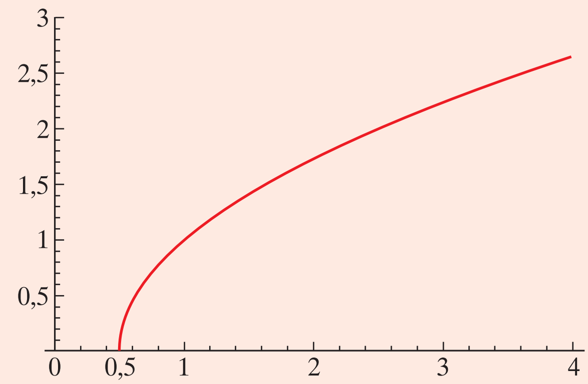
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y^2+1)$$

οπότε ο τύπος της αντίστροφης συναρτήσεως θα είναι ο $f^{-1}(y) = x = \dfrac{1}{2}(y^2+1)$, δηλαδή μπορούμε να γράψομε

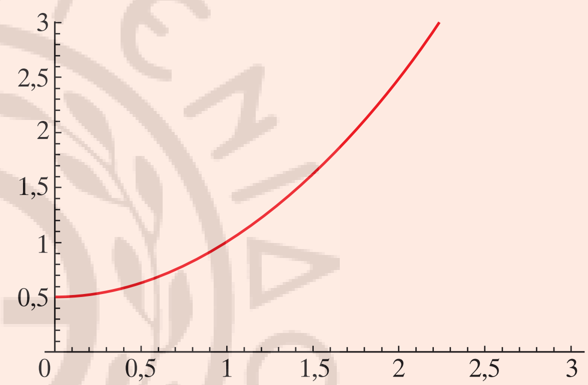
$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y^2+1),\ y \in [0, +\infty).$$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση της f θα είναι η $f^{-1} : [0, +\infty) \to A$ με $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$.

Στο σχήμα 4.4η δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συναρτήσεως f^{-1}, ενώ στο σχήμα 4.4θ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Παρατηρούμε ότι, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f^{-1} ως προς την ευθεία $y = x$.



Σχ. 4.4ζ.
Γραφική παράταση της συναρτήσεως
$f(x) = \sqrt{2x-1}$.



Σχ. 4.4η.
Γραφική παράσταση της συναρτήσεως
$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.5.

α) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι αμφιμονοσήμαντες, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f$ θα είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = 5e^{2x-3} + 2$ είναι αμφιμονοσήμαντη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

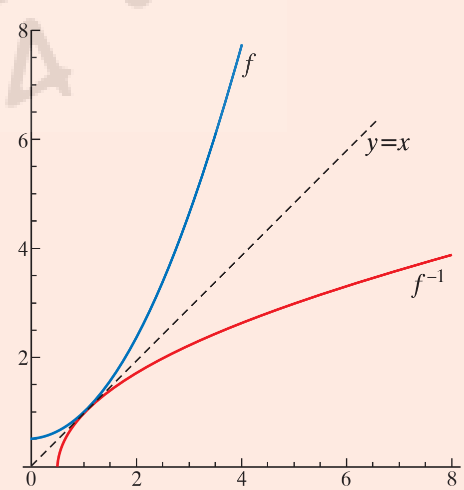
Λύση.

α) Έστω x_1, x_2 δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού της συνθέσεως $g \circ f$ με:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

Τότε θα έχομε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ και εφόσον η g είναι αμφιμονοσήμαντη συμπεραίνομε ότι θα ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Από την τελευταία, επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη, προκύπτει ότι $x_1 = x_2$.



Σχ. 4.4θ.
Γραφική παράταση των συναρτήσεων f, f^{-1}.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

και επομένως η συνάρτηση $g\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Η συνάρτηση $h(x)=5e^{2x-3}+2$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων

$$f_1(x)=2x-3,\ f_2(x)=e^x \text{ και } f_3(x)=5x+2$$

οι οποίες είναι αμφιμονοσήμαντες (αφού σύμφωνα με την παράγρ. 4.3 είναι γνήσια μονότονες σε ολόκληρο το **R**). Επομένως με εφαρμογή (δύο φορές) του αποτελέσματος που αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), συμπεραίνομε ότι η h είναι αμφιμονοσήμαντη.

Για να βρούμε την αντίστροφη της h θέτομε $y=h(x)$ και λύνομε ως προς x. Παίρνομε διαδοχικά

$$h(x)=y \Leftrightarrow 5e^{2x-3}+2=y \Leftrightarrow e^{2x-3}=\frac{y-2}{5} \Leftrightarrow 2x-3=\ln\left(\frac{y-2}{5}\right),\ y>2 \ \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{y-2}{4}+\frac{3}{2},\ y>2\,.$$

Επομένως, $f^{-1}(y)=x=\frac{1}{2}\ln\frac{y-2}{4}+\frac{3}{2},\ y>2$ και η αντίστροφη της συναρτήσεως f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{4}+\frac{3}{2},\qquad x>2\,.$$

Ασκήσεις.

4.4.1. Ένα «πράσινο»[1] αυτοκίνητο καταναλώνει 4 lt βενζίνης ανά 100 km. Η τιμή της βενζίνης ανά lt είναι 1,1 €.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση f που εκφράζει την κατανάλωση του αυτοκινήτου μέσω των χιλιομέτρων που διανύει.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση g που εκφράζει το κόστος αγοράς βενζίνης συναρτήσει των λίτρων που καταναλώνει το αυτοκίνητο.

γ) Να γράψετε συνάρτηση που εκφράζει το κόστος μέσω των χιλιομέτρων που διανύει και να εκφραστεί ως σύνθεση συναρτήσεων.

4.4.2. Από διάφορες στατιστικές μελέτες βρέθηκε ότι ο αριθμός των πωλήσεων, σε εκατοντάδες τεμάχια, ενός προϊόντος σε μια πόλη δίνεται από τον τύπο $3\sqrt{x}+2$ όπου x είναι ο πληθυσμός της πόλεως σε εκατοντάδες χιλιάδες άτομα. Ο πληθυσμός της πόλεως μεταβάλλεται (μειώνεται) σύμφωνα με το μοντέλο $f(t)=ae^{-0{,}05t}$, $t\geq 0$, όπου $f(t)$ είναι ο πληθυσμός σε t έτη από σήμερα. Ο σημερινός πληθυσμός της πόλεως είναι 10.000 άτομα.

α) Να βρείτε η τιμή της σταθεράς a.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση g που εκφράζει τον αριθμό των πωλήσεων του προϊόντος μέσω του πληθυσμού της πόλεως.

γ) Να γράψετε τη συνάρτηση h που εκφράζει τον αριθμό των πωλήσεων του προϊόντος μέσω του χρόνου και να την εκφράσετε ως σύνθεση συναρτήσεων.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση h είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

1. Με τον όρο «πράσινο» αυτοκίνητο εννοούμε το αυτοκίνητο που έχει μηδενικές ή πολύ μικρές εκπομπές ρύπων.

4.4.3. Να εκφράσετε τις επόμενες συναρτήσεις ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\ln(e^{3x}+2)$ β) $f(x)=\ln(x^2+1)$ γ) $f(x)=3\eta\mu^2(5x)-2$

δ) $f(x)=\ln|\eta\mu(3x)|$ ε) $f(x)=\sqrt{\eta\mu(x^3+1)+2}$ στ) $f(x)=\eta\mu(x^3+1)$

ζ) $f(x)=\sqrt{\ln(x^2+2)}$ η) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+2}$

4.4.4. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ f$ και $f\circ f\circ f$ στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=x$ β) $f(x)=2x$ γ) $f(x)=x/2$

δ) $f(x)=x+2$ ε) $f(x)=x^2$ στ) $f(x)=x-2\sqrt{x}+1, 0\le x\le 1$

4.4.5. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ στις εξής περιπτώσεις.

α) $f(x)=2x^2+3,\ \ g(x)=x+2$ β) $f(x)=x^2,\ \ g(x)=x^3$ γ) $f(x)=x^2,\ \ g(x)=\sqrt{x^2}$

4.4.6. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=e^x,\ \ g(x)=\ln x$ β) $f(x)=x^2,\ \ g(x)=\sqrt{x}$ γ) $f(x)=e^{-x},\ \ g(x)=\ln(1/x)$

4.4.7. Να βρείτε συνάρτηση *f* τέτοια, ώστε να ισχύει $(f\circ g)(x)=x^2-2x+3$, όπου *g* είναι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=x-1$.

4.4.8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1+\dfrac{3}{x-1}$, $\ g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $f(f(x))=x$ για κάθε $x\neq 1$ β) $g(g(x))=x$ για κάθε $x\neq 2$.

4.4.9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ax+1$ και $g(x)=\beta x+3$ για τις οποίες γνωρίζομε ότι ισχύει $f\circ g=g\circ f$ και $f(f(1))=1$. Να υπολογισθούν οι τιμές των α και β.

4.4.10. Το κόστος *C* (σε €) για την παραγωγή *x* μονάδων (σε εκατοντάδες τεμάχια) ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση *f* με τύπο $f(x)=3+5x$. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να περιγράψετε την πληροφορία που δίνει ο αριθμός $f^{-1}(y)$.

4.4.11. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της.

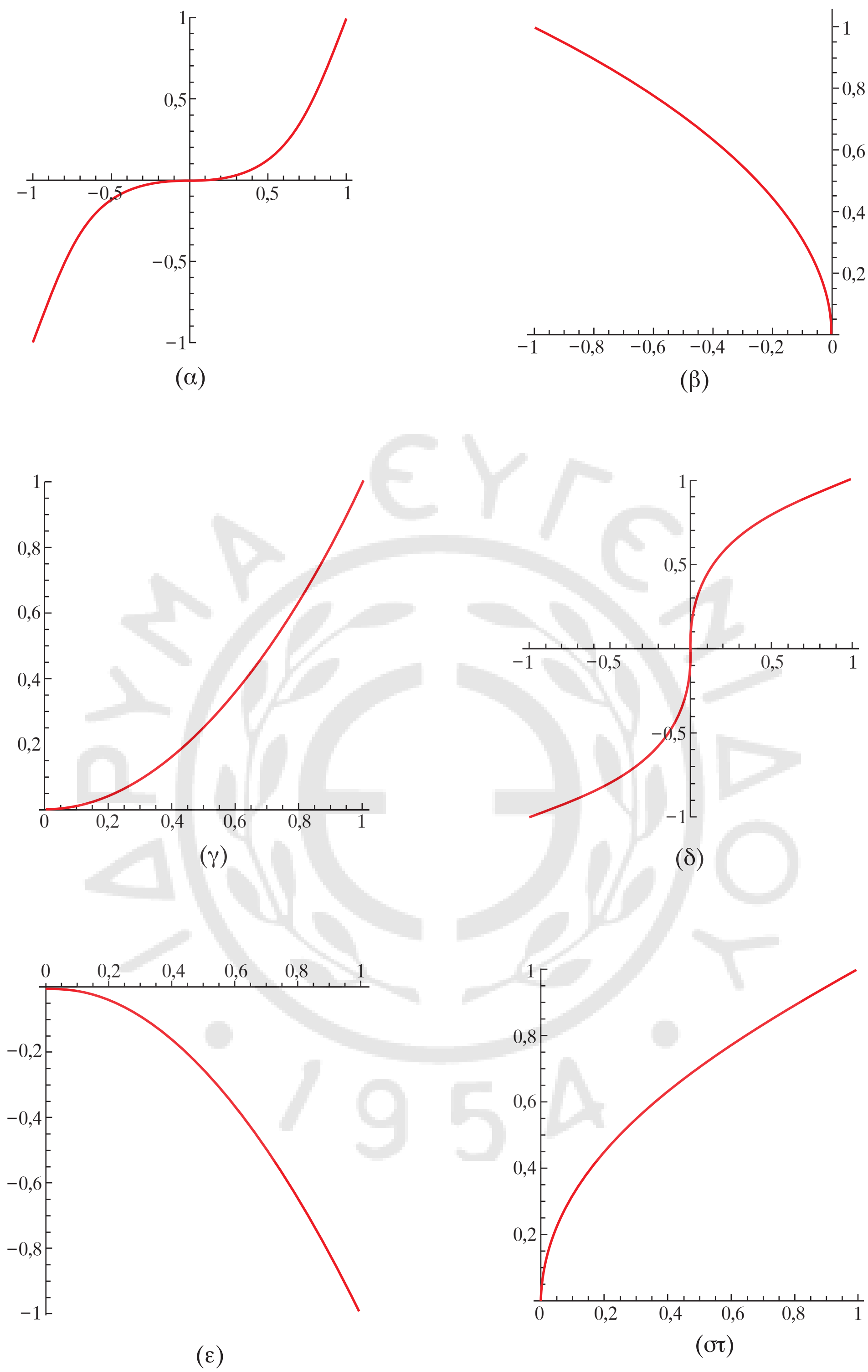
α) $f(x)=-5x+2$ β) $f(x)=\ln(1-x^2)$ γ) $f(x)=\dfrac{2e^x+2}{3e^x+1}$

δ) $f(x)=|x^2-1|$ ε) $f(x)=5\ln(3e^{2x}+1)$ στ) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+4}$

4.4.12. Δίνονται οι συναρτήσεις *f, g* με τύπους $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$, $g(x)=\ln(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις *f, g*.
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.
γ) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις *f, g, h* αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.
δ) Να διαπιστώσετε ότι ισχύει $h^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

4.4.13. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις (σχ. 4.4ι) κάποιων συναρτήσεων. Να βρείτε ποιες

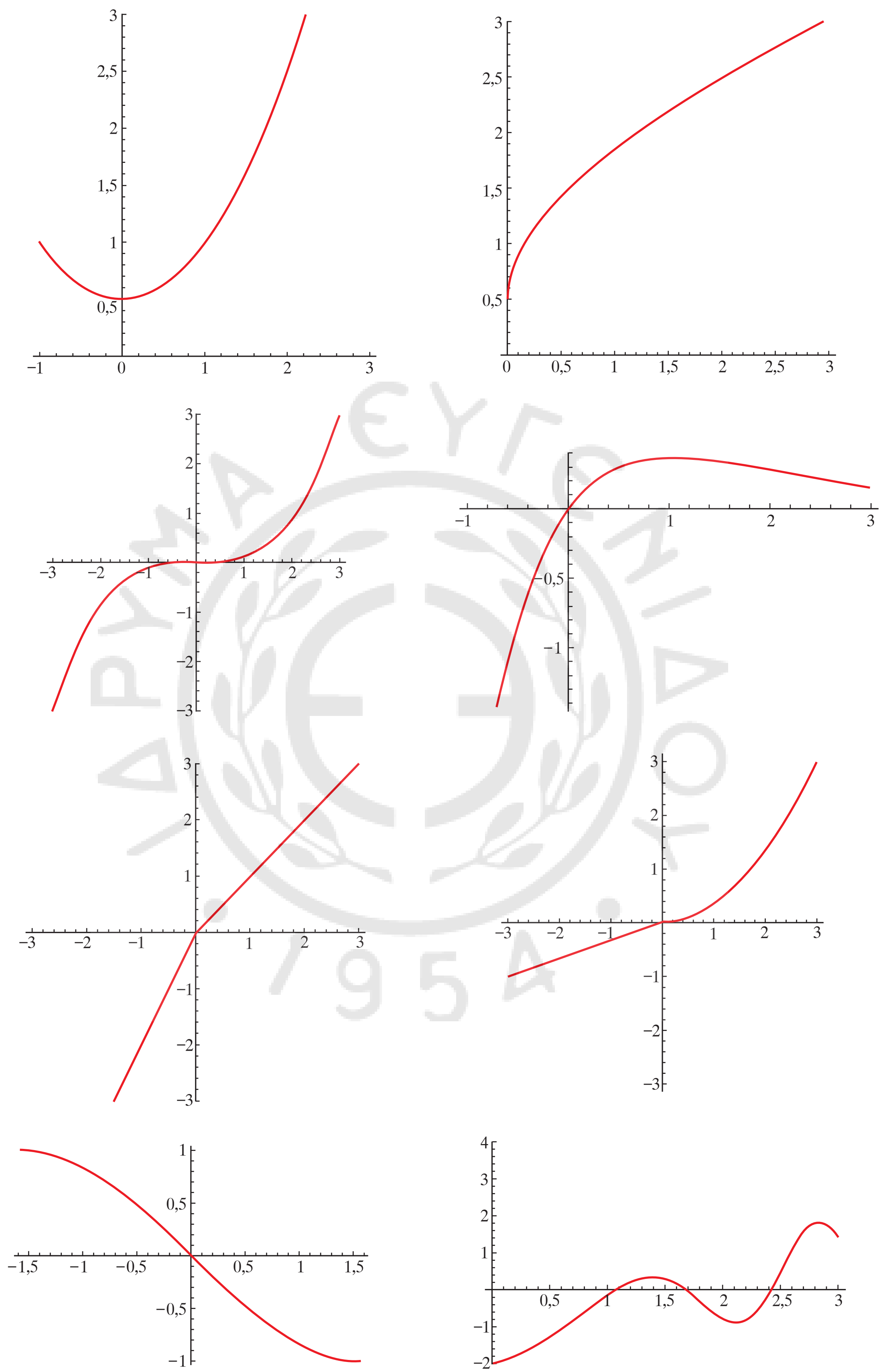


Σχ. 4.4ι.

από τις γραφικές αυτές παραστάσεις αντιστοιχούν σε ζεύγη από αντίστροφες συναρτήσεις.

4.4.14. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις (σχ. 4.4ια) κάποιων συναρτήσεων. Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



3
2,5
2
1,5
1
0,5
−1 0 1 2 3
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3
3
2
1
−3 −2 −1 1 2 3
−1
−2
−3
−1 1 2 3
−0,5
−1
3
2
1
−3 −2 −1 1 2 3
−1
−2
−3
3
2
1
−3 −2 −1 1 2 3
−1
−2
−3
1
0,5
−1,5 −1 −0,5 0,5 1 1,5
−0,5
−1
4
3
2
1
0,5 1 1,5 2 2,5 3
−1
−2

Σχ. 4.4ια.

4.5 Πεπερασμένα όρια συναρτήσεων σ' ένα σημείο $x_0 \in R$. Βασικές ιδιότητες ορίων.

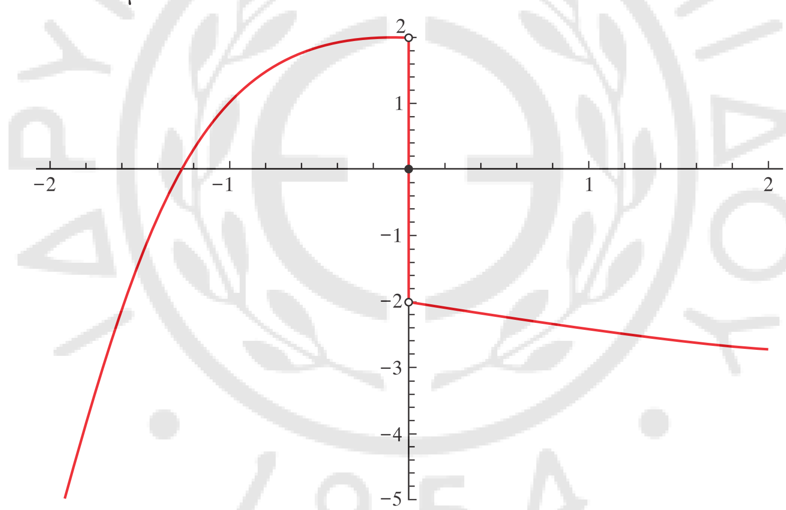
Στην παρούσα παράγραφο θα ορίσομε την έννοια του ορίου συναρτήσεως και θα παρουσιάσομε ορισμένες από τις ιδιότητές της. Η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης, αφού πολλές από τις βασικές έννοιες των Μαθηματικών, της Φυσικής αλλά και άλλων επιστημών μπορούν να οριστούν και να κατανοηθούν μόνο με τη βοήθειά της. Στην παράγραφο αυτή, θα επιχειρήσομε μια διεξοδική προσέγγιση της σημαντικής αυτής έννοιας με απλά αλλά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας, και θα αναφέρομε με συντομία τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό της.

Ας θεωρήσομε τη συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} 2+x^3, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}, & x>0, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

της οποίας γραφική παράσταση εικονίζεται στο σχήμα 4.5α.

Προκειμένου να μελετήσομε τη «συμπεριφορά» της συναρτήσεως f όταν το x πλησιάζει την τιμή 0, συμπληρώνομε τον πίνακα τιμών 4.5.1.



Σχ. 4.5α.
Γραφική παράσταση της συναρτήσεως (4.5.1).

Πίνακας 4.5.1
Πίνακας τιμών της f.

Το x πλησιάζει το 0 από αριστερά

$x \longrightarrow 0$

x	–0,3	–0,2	–0,15	–0,1	–0,01	0
$f(x)$	1,973000	1,992000	1,996630	1,999000	1,999999	?

Το x πλησιάζει το 0 από δεξιά

$0 \longleftarrow x$

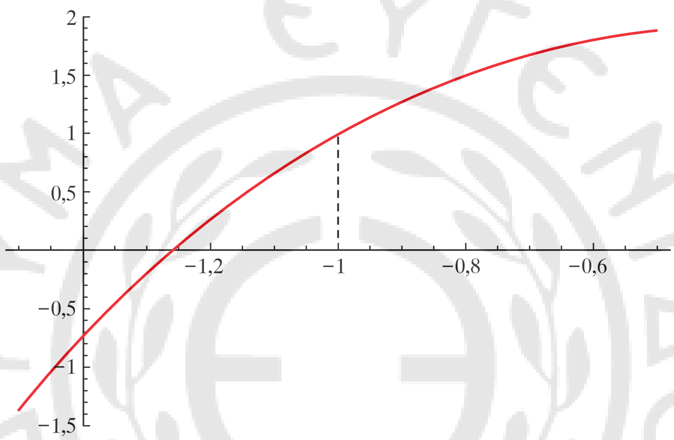
x	0	0,0001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	?	–2,0004998	–2,0004999	–2,0049876	–2,0488088

Τόσο από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως όσο και από τον πίνακα τιμών 4.5.1 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

α) Καθώς το x, κινούμενο επάνω στον άξονα $x'x$, πλησιάζει τον αριθμό 0 από αριστερά ($x<0$), οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλομε τον αριθμό 2.

β) Καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν τον αριθμό 0 από δεξιά ($x>0$), οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλομε τον αριθμό –2.

Ας εξετάσομε επί πλέον τη συμπεριφορά της ίδιας συναρτήσεως, όταν το x πλησιάζει την τιμή -1. Στην περίπτωση αυτή, παρατηρώντας την επόμενη γραφική παράσταση (σχ. 4.5β) (αποτελεί απλά μεγέθυνση της γραφικής παραστάσεως του σχήματος 4.5α στην περιοχή που μας ενδιαφέρει) και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών 4.5.2, διαπιστώνομε ότι καθώς το x, κινούμενο επάνω στον άξονα $x'x$, πλησιάζει τον αριθμό –1 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, χωρίς να γίνεται ίσο με –1, οι τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f πλησιάζουν στον αριθμό 1. Μάλιστα υπάρχει η δυνατότητα, με κατάλληλη επιλογή της περιοχής (γύρω από το –1) που κινείται το x, να «φέρομε» τις τιμές της $f(x)$ όσο κοντά θέλομε στον αριθμό 1.



Σχ. 4.5β.

Πίνακας 4.5.2
Πίνακας τιμών της f.

το x πλησιάζει το –1 από αριστερά $\longrightarrow -1 \longleftarrow$ ***το x πλησιάζει το –1 από δεξιά***

x	–1,1	–1,01	–1,001	–1,0001	$\to -1 \leftarrow$	–0,9999	–0,999	–0,99	–0,9
$f(x)$	0,6690	0,9697	0,9970	0,9997		1,0003	1,0030	1,0297	1,2710

Σε περιπτώσεις όπως αυτές που προαναφέρθηκαν θα λέμε ότι ο αριθμός προς τον οποίον πλησιάζουν οι τιμές της f είναι το ***όριο της συναρτήσεως***, δηλώνοντας παράλληλα σε ποιον αριθμό πλησιάζουν οι αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x. Πιο συγκεκριμένα, σε αντιστοιχία με ό,τι είδαμε παραπάνω, δίνομε τους ακόλουθους ορισμούς:

α) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (α, x_0). Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλομε έναν αριθμό ℓ_1, καθώς το x πλησιάζει το x_0 από αριστερά ($x<x_0$), λέμε ότι το ***αριστερό πλευρικό όριο της f στο*** x_0 είναι το ℓ_1 και γράφομε[1] (σχ. 4.5γ)

1. Το σύμβολο lim είναι αρχικό της Λατινικής λέξης limes που σημαίνει όριο.

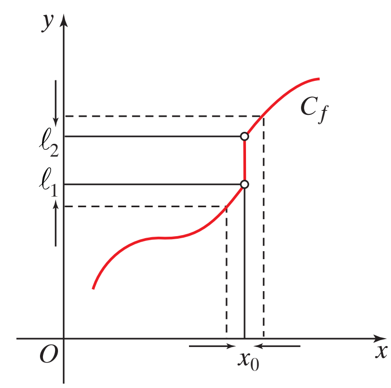
$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell_1$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: *«το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1»*).

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β). Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλομε έναν αριθμό ℓ_2, καθώς το x πλησιάζει το x_0 από δεξιά $(x > x_0)$, λέμε ότι το ***δεξιό πλευρικό όριο της f στο*** x_0 είναι το ℓ_2 και γράφομε (σχ. 4.5γ)

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell_2$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: *«το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2»*).

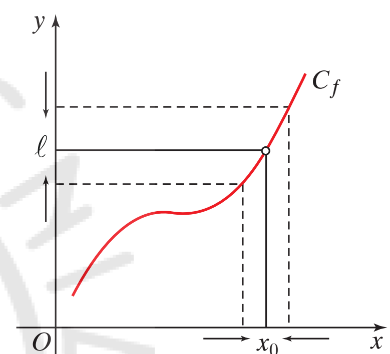


Σχ. 4.5γ.

γ) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλομε έναν αριθμό ℓ, καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 (χωρίς να είναι απαραίτητο να γίνουν ίσες με το x_0), τότε λέμε ότι ***το όριο της f όταν το x τείνει στο*** x_0 ***είναι το*** ℓ και γράφομε (σχ. 4.5δ)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: *«το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ»* ή *«το όριο της f(x) στο x_0 είναι ℓ»*).



Σχ. 4.5δ.

Έτσι, για τη συνάρτηση f που ορίστηκε στην (4.5.1), μπορούμε να γράψομε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -2, \quad \lim_{x \to -1} f(x) = 1.$$

Από τους προηγούμενους ορισμούς είναι φανερό ότι για να αναζητήσομε το αριστερό πλευρικό όριο μιας συναρτήσεως f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται τουλάχιστον σ' ένα διάστημα της μορφής (a, x_0), ενώ για να αναζητήσομε το δεξί πλευρικό όριο της f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται τουλάχιστον σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β). Τέλος, για να αναζητήσομε το όριο μιας συναρτήσεως στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται *«κοντά στο x_0»*, δηλαδή τουλάχιστον σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Προφανώς, στην τελευταία περίπτωση, θα μπορούμε να αναζητούμε τόσο το αριστερό πλευρικό όριο της f στο x_0, όσο και το δεξί πλευρικό της όριο.

Από τον τρόπο που εισήχθησαν τα όρια προκύπτει άμεσα το εξής χρήσιμο αποτέλεσμα:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Τότε το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν, υπάρχουν τα δύο πλευρικά της όρια και είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \text{ αν, και μόνο αν, } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

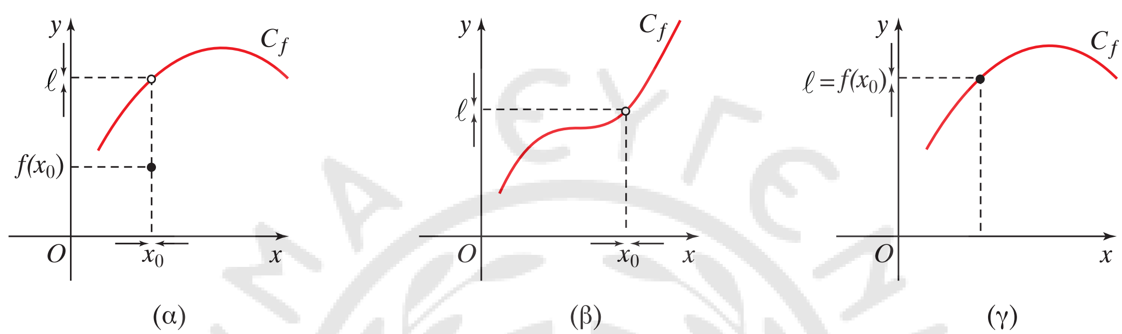
Στην περίπτωση που μια συνάρτηση f είναι ορισμένη μόνο σε ένα διάστημα της μορφής (a, x_0), ενώ δεν ορίζεται σε διαστήματα της μορφής (x_0, β), το x θα μπορεί να προσεγγίσει το x_0 μόνο από αριστερά (για $x < x_0$). Τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ αντί του $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Ομοίως, αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη μόνο σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ενώ δεν ορίζεται σε διαστήματα της μορφής (a, x_0), το x θα μπορεί να προσεγγίσει το x_0 μόνο από δεξιά (για $x > x_0$). Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αντί του $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Όπως γίνεται φανερό από τις επόμενες τρεις γραφικές παραστάσεις, όταν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, μπορεί να εμφανιστούν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως [σχ. 4.5ε(α) και (γ)].

β) Το x_0 να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως [σχ. 4.5ε(β)].

γ) Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_0, η τιμή $f(x_0)$ μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0, αν υπάρχει [σχ. 4.5ε(γ)] ή μπορεί να είναι διαφορετική από αυτό [σχ. 4.5ε(α)].



Σχ. 4.5ε.

Αποδεικνύεται ότι, αν υπάρχει το όριο μιας συναρτήσεως f στο x_0, τότε αυτό είναι ορισμένο μονοσήμαντα (είναι μοναδικό). Επίσης, το όριο είναι ανεξάρτητο από τα άκρα a, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β), στα οποία ορίζεται η f και επηρεάζεται μόνο από τις τιμές της συναρτήσεως *«γύρω από το x_0»* (για το λόγο αυτό λέμε ότι το όριο είναι τοπική έννοια)[1].

Η τελευταία διαπίστωση μας δίνει τη δυνατότητα να περιοριζόμαστε σε διαστήματα (γύρω από το x_0) όσο μικρά θέλομε, γεγονός που πολλές φορές οδηγεί σε απλοποίηση του τύπου της συναρτήσεως και διευκολύνει την εύρεση του ορίου της.

Για παράδειγμα, αν θέλομε να βρούμε το όριο της συναρτήσεως

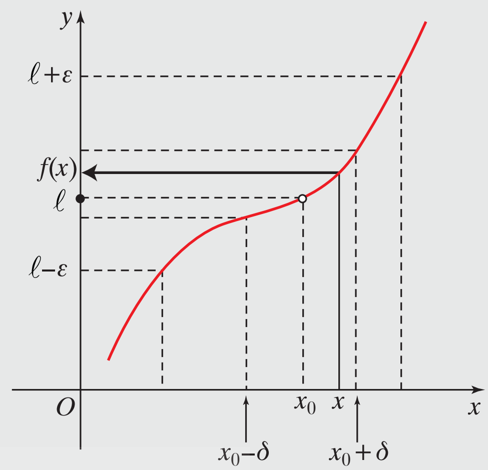
$$f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3}$$

στο $x_0 = 1$, μπορούμε να περιοριστούμε στο υποσύνολο $(0,1)\cup(1,2)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή λαμβάνει τη μορφή (αφού για $x<3$ ισχύει $2x-6<0$)

$$f(x) = \frac{-(2x-6)}{x-3} = -2\cdot$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$ (όταν το x βρίσκεται κοντά στο 1, οι τιμές της συναρτήσεως είναι ίσες με –2).

1. Στη συνέχεια, για να απλοποιήσομε τις εκφράσεις μας, όταν λέμε ότι η f έχει «κοντά στο x_0» μία ιδιότητα θα εννοούμε ότι υπάρχει σύνολο της μορφής $(a, x_0)\cup(x_0, \beta)$, στο οποίο ορίζεται η f και έχει την ιδιότητα αυτή για κάθε $x \in (a, x_0)\cup(x_0, \beta)$.



Σχ. 4.5στ.

Είναι προφανές ότι ο ορισμός που δόθηκε για την έννοια του ορίου είναι διαισθητικός. Για να φτάσομε σε έναν πιο μαθηματικό ορισμό θα πρέπει να εξετάσομε πώς θα μπορούσαμε να αποτυπώσομε με αυστηρό τρόπο τις εκφράσεις

α) Οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλομε έναν αριθμό ℓ, και

β) Οι τιμές του x πλησιάζουν με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 (χωρίς να είναι απαραίτητο να γίνουν ίσες με το x_0).

Χρησιμοποιώντας:

α) Για την πρώτη απαίτηση, την έκφραση: ισχύει η ανισότητα $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, όπου ε ένας οποιοσδήποτε (δοσμένος) θετικός αριθμός και

β) Για τη δεύτερη απαίτηση, την έκφραση: ισχύει $0<|x-x_0|<\delta$, όπου δ είναι ένας κατάλληλα επιλεγμένος μικρός θετικός αριθμός (η ανισότητα $0<|x-x_0|$ εξασφαλίζει ότι $x\neq x_0$), ο ορισμός που δώσαμε θα μπορούσε να περιγραφεί με αυστηρό τρόπο απαιτώντας για οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε να υπάρχει η δυνατότητα να βρούμε ένα θετικό αριθμό δ τέτοιον ώστε, αν το x ικανοποιεί την ανισότητα $0<|x-x_0|<\delta$, τότε το $f(x)$ να ικανοποιεί την $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. Έτσι φτάνομε στον ακόλουθο ορισμό (σχ. 4.5στ):

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $A=(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell\in\mathbf{R}$, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$, να ισχύει:

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Στον παραπάνω ορισμό, ο θετικός αριθμός δ εξαρτάται από το δοθέντα θετικό αριθμό ε, δηλαδή $\delta=\delta(\varepsilon)$, ωστόσο για λόγους απλότητας δεν χρησιμοποιήθηκε ο τελευταίος συμβολισμός. Επίσης η τιμή του ε καθορίζει την επιθυμητή προσέγγιση που μπορούμε να επιτύχομε μεταξύ της τιμής της συναρτήσεως $f(x)$ και του ορίου ℓ, περιορίζοντας τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x σε μία μικρή περιοχή γύρω από το x_0.

Επίσης για να μπορεί να εφαρμοσθεί ο γενικός ορισμός του ορίου, θα πρέπει γύρω από το σημείο x_0 να μπορούμε να βρίσκομε στοιχεία του $D(f)$. Στην περίπτωση αυτή το x_0 ονομάζεται ***σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού*** $A=D(f)$ της f. Πιο συγκεκριμένα, ένα σημείο x_0 ονομάζεται ***συσσωρεύσεως του συνόλου A***, όταν σε κάθε περιοχή του x_0 [δηλαδή διάστημα της μορφής $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ με $\varepsilon>0$], υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A.

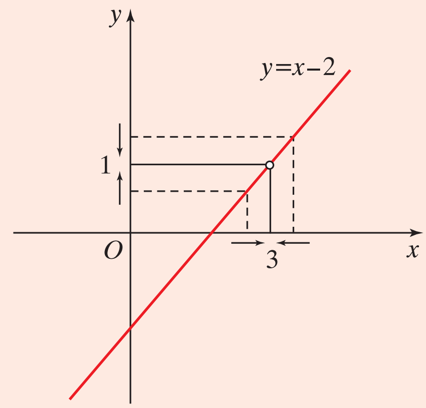
Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0,β) και αντικαταστήσομε την ανισότητα $0<|x-x_0|<\delta$ με την $x_0<x<x_0+\delta$, τότε θα έχομε τον αυστηρό ορισμό του $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, ενώ αν η f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (a,x_0) και αντικαταστήσομε την ανισότητα $0<|x-x_0|<\delta$ με την $x_0-\delta<x<x_0$, τότε έχομε τον αυστηρό ορισμό του $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Για παράδειγμα, ας δούμε πώς θα μπορούσαμε να αποδείξομε αυστηρά ότι για τη συνάρτηση $f(x)=x^2$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Έστω $\varepsilon>0$ ένας δεδομένος πραγματικός αριθμός. Θέλοντας να ικανοποιείται η ανισότητα $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ έχομε διαδοχικά:

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-0|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|^2<\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\sqrt{\varepsilon}.$$

Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ο αριθμός $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x\in A=(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, με $0<|x-0|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-0|<\varepsilon$, γεγονός που αποδεικνύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.1.



Σχ. 4.5ζ.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}.$$

Να παραστήσετε γραφικά την f και να βρείτε (αν υπάρχει) το όριό της στο $x_0 = 3$.

Λύση.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $A = (-\infty, 3)\cup(3,+\infty)$ και για $x \neq 3$ παίρνει τη μορφή

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=x-2\,.$$

Προκειμένου να μελετήσομε τις τιμές της συναρτήσεως f, καθώς οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x πλησιάζουν στο 3 σχεδιάζομε τη γραφική παράσταση του σχήματος 4.5ζ και τον ακόλουθο πίνακα τιμών. Από αυτά παρατηρούμε ότι καθώς το x κινείται στον άξονα $x'x$ και πλησιάζει (από μικρότερες ή μεγαλύτερες τιμές) τον αριθμό 3, οι τιμές της συναρτήσεως πλησιάζουν τον αριθμό 1.

Το x πλησιάζει το 3 από αριστερά→3←το x πλησιάζει το 3 από δεξιά

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	→3←	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	0,9	0,99	0,999	0,9999		1,0001	1,001	1,01	1,1

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο παράδειγμα αυτό υπολογίσαμε το όριο της συναρτήσεως f στο σημείο $x_0 = 3$, ενώ η συνάρτηση δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

Με τη βοήθεια του μαθηματικού ορισμού του *ορίου* μπορούν να αποδειχθούν οι επόμενες ιδιότητες (οι ιδιότητες L_1, L_2 και L_3 προκύπτουν άμεσα, ενώ οι υπόλοιπες χρειάζονται την ανάπτυξη κάποιας πιο σύνθετης διαδικασίας αποδείξεως. Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου δεν θα επεκταθούμε σε αυστηρές αποδείξεις με χρήση του μαθηματικού ορισμού).

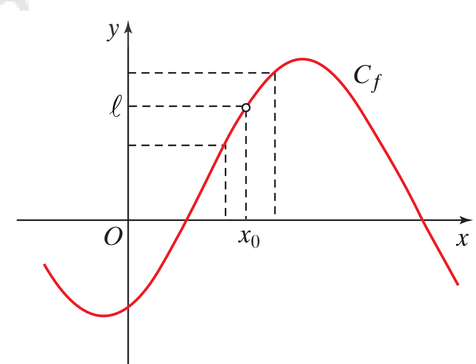
L₁. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

L₂. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

L₃. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

L₄. α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε θα ισχύει $f(x)>0$ κοντά[1] στο x_0 (σχ. 4.5η).

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.



Σχ. 4.5η.

1. Όταν λέμε κοντά στο x_0 εννοούμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει σε μία περιοχή του x_0 δηλαδή ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in D(f)$ με $|x-x_0|$ δ να ισχύει $f(x)>0$.

Οι δύο αυτές ιδιότητες μας δείχνουν ότι, όταν το όριο μιας συναρτήσεως στο x_0 είναι μη μηδενικό, τότε, κοντά στο x_0 η συνάρτηση λαμβάνει τιμές ομόσημες με το όριό της.

L$_5$. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια αυτών στο x_0, τότε ισχύει η ανισότητα $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

L$_6$. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ με $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$ τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως $f+g$ στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

(η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις).

L$_7$. Αν υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο x_0 και c είναι μια πραγματική σταθερά, τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως cf στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim_{x\to x_0} f(x).$$

L$_8$. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, και $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ με $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$ τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως fg στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις).

L$_9$. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, με $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ και επί πλέον ισχύει $l_2 \neq 0$, τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως f/g στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

L$_{10}$. Αν υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο x_0, τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως $|f|$ στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|.$$

L$_{11}$. Αν υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο x_0 και επί πλέον ισχύει $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως f^ν στο x_0 (ν είναι ένας θετικός ακέραιος) και θα ισχύει:

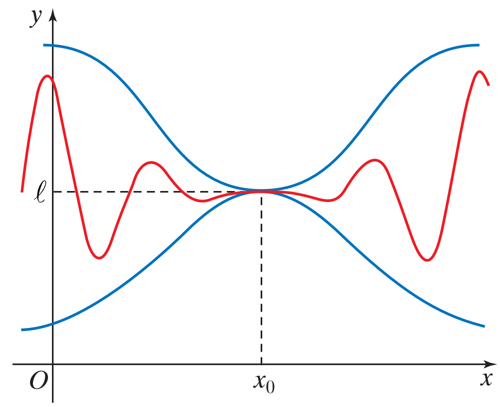
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = \left[\lim_{x\to x} f(x)\right]^\nu.$$

L$_{12}$. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και επί πλέον έχουμε $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

τότε: $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

(Η τελευταία ιδιότητα είναι γνωστή με την ονομασία ***κριτήριο της παρεμβολής***, αφού ουσιαστικά μας δείχνει ότι αν μια συνάρτηση f «εγκλωβίζεται», κοντά στο x_0, ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g που έχουν κοινό όριο, καθώς το x τείνει στο x_0, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.5θ, η f θα έχει το ίδιο όριο.

Σημειώνεται ότι όλες οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για τα πλευρικά όρια συναρτήσεων.



Σχ. 4.5θ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.2.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -7$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)+5g(x)]$ β) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]^3$ γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3f(x)+5g(x)}{[f(x)+(g(x))^2]^3}$

Λύση.

α) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες L_6 και L_7 συμπεραίνομε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και ότι μπορούμε να γράψομε:

$$\lim_{x\to x_0}[3f(x)+5g(x)] = 3\lim_{x\to x_0} f(x) + 5\lim_{x\to x_0} g(x) = 3\cdot(-1)+5(-7) = -38.$$

β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες L_6, L_7 και L_{11} συμπεραίνομε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και ότι μπορούμε να γράψομε:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]^3 = [\lim_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]]^3 = [\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0}(g(x))^2]^3 =$$

$$= [\lim_{x\to x_0} f(x) + (\lim_{x\to x_0} g(x))^2]^3 = [-1+(-7)^2]^3 = 48^3.$$

γ) Αφού

$$\lim_{x\to x_0}[3f(x)+g(x)] = -10, \qquad \lim_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]^3 = 8 \neq 0$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα L_9 συμπεραίνομε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και είναι ίσο με:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{3f(x)+5g(x)}{[f(x)+(g(x))^2]^3} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}(3f(x)+5g(x))}{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]^3} = \frac{-38}{48^3}.$$

Οι ιδιότητες L_1–L_{13}, σε συνδυασμό με τα όρια κάποιων βασικών συναρτήσεων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό διαφόρων πιο πολυπλόκων συναρτήσεων. Για το λόγο αυτό παραθέτομε στη συνέχεια τα όρια ορισμένων *βασικών συναρτήσεων* που συναντήσαμε στην παράγραφο 4.3.

B₁. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ (όριο της ταυτοτικής συναρτήσεως $f(x) = x$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της),

$\lim\limits_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

B₂. Αν $f(x) = c$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (το όριο σταθερής συναρτήσεως είναι ίσο με τη σταθερά, για κάθε x_0).

B₃. $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

B₄. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ (σχ. 4.5ι)

B₅. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ (σχ. 4.5ια)

Έστω τώρα η ***πολυωνυμική συνάρτηση***

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 .$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχομε:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0) = \lim_{x\to x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x\to x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0} \alpha_0$$

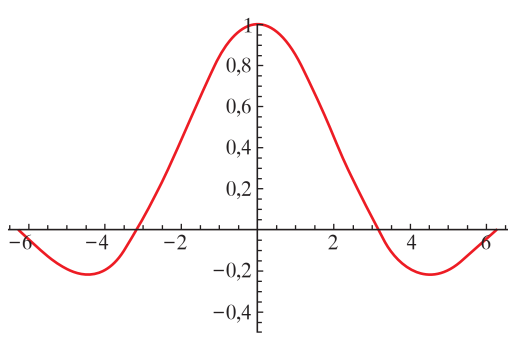
$$= \alpha_n \lim_{x\to x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x\to x_0} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} \lim_{x\to x_0} \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Επομένως:

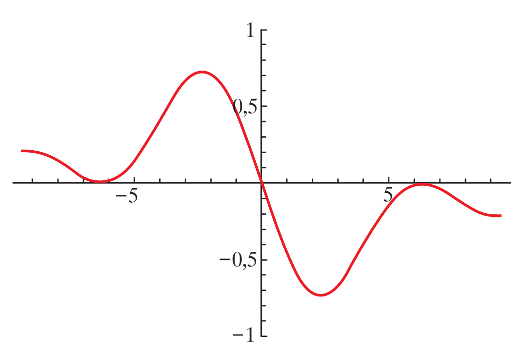
Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to -1} (5x^3 - 2x^2 + 3x + 10) = 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) + 10 = 0 .$$



Σχ. 4.5ι.
Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$.



Σχ. 4.5.ια.
Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$.

Ας εξετάσομε στη συνέχεια το όριο μιας συναρτήσεως της μορφής

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x (μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται ρητή συνάρτηση του x). Έστω $x_0 \in \mathbf{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0} R(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως:

> Για κάθε ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ισχύει
>
> $$\lim_{x\to x_0} R(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},\ \text{εφόσον } Q(x_0)\neq 0.$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to -1}\frac{5x^3-2x^2+3x+13}{x^2+2}=\frac{5(-1)^3-2(-1)^2+3(-1)+13}{(-1)^2+2}=\frac{3}{3}=1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.3.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-5}{x^2+1}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}[(x+1)^2\cdot|x^2-1|]$ ε) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$ στ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+12}}{x-2}$

Λύση.

α) Για $x\neq 0$ έχομε $\left|\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right|\leq 1$, οπότε $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right|=\left|x^2\right|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right|\leq\left|x^2\right|=x^2$. Επομένως,

$$-x^2\leq x^2\eta\mu\frac{1}{x^3}\leq x^2,$$

και αφού $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, εφαρμόζοντας το κριτήριο της παρεμβολής, συμπεραίνομε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x^3}\right)=0.$$

β) Αφού έχομε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+1$ μπορούμε να γράψομε

$$\lim_{x\to 1}(x^3+1)=\lim_{x\to 1}P(x)=P(1)=1^3+1=2.$$

γ) Αφού έχομε τη ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{x^5-5}{x^2+1}=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με $Q(1)=1^2+1=2\neq 0$ παίρνομε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-5}{x^2+1}=\lim_{x\to 1}R(x)=R(1)=\frac{1^5-5}{1^2+1}=-2.$$

δ) Έχομε διαδοχικά

$$\lim_{x\to 2}\left[(x+1)^2\left|x^2-3\right|\right]=\lim_{x\to 2}(x+1)^2\cdot\lim_{x\to 2}\left|x^2-3\right|=\left[\lim_{x\to 2}(x+1)\right]^2\cdot\left|\lim_{x\to 2}(x^2-3)\right|=3^2\cdot\left|2^2-3\right|=9$$

ε) Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-4)=0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσομε την ιδιότητα L9. Παρατηρούμε όμως ότι για $x=4$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, οπότε ο τύπος της συναρτήσεως

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4},\ \text{με}\ x\neq 4$$

θα μπορεί να απλοποιηθεί. Πράγματι, για $x\neq 4$, έχομε:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}=\frac{(x-4)(x-1)}{x-4}=x-1.$$

Επομένως, $\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}(x-1)=3$

στ) Για $x=2$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής: πολλαπλασιάζομε και τους δύο όρους του κλάσματος με $2x+\sqrt{x^2+12}$ και έτσι έχομε:

$$f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+12}}{x-2}=\frac{(2x-\sqrt{x^2+12})(2x+\sqrt{x^2+12})}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{(2x)^2-(\sqrt{x^2+12})^2}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}$$

$$=\frac{4x^2-(x^2+12)}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{3x^2-12}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}$$

$$=\frac{3(x+2)}{2x+\sqrt{x^2+12}}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+2)}{2x+\sqrt{x^2+12}}=\frac{3\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2}(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{3\cdot 4}{4+\sqrt{16}}=\frac{3}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.4.

Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0=2$ της συναρτήσεως f με τύπο $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & x<2\\ \dfrac{8}{x^3}+1, & x\geq 2.\end{cases}$

Λύση

Για $x<2$ έχομε $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-2)=2^2-2=2$, ενώ

για $x>2$ έχομε $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(\frac{8}{x^3}+1)=\frac{8}{2^3}+1=2$.

Αφού $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=2$, θα είναι $\lim_{x\to 2}f(x)=2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.5.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^3-25, & x<3 \\ x-3a\ , & x\geq 3. \end{cases}$

α) Να βρείτε το αριστερό πλευρικό όριο της f στο $x_0 = 3$ είτε
β) να βρείτε το δεξί πλευρικό όριο της f στο $x_0 = 3$ είτε
γ) να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = 3$.

Λύση.

α) Για $x<3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^3-25)=3^3-25=2.$

β) Για $x>3$ έχομε $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3a)=3-3a.$

γ) Αφού ζητάμε να υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο $x_0 = 3$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

δηλαδή, $3-3\alpha=2$ οπότε $\alpha=\frac{1}{3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.6.

Δίνεται ότι για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to 4}(f(x)+\frac{1}{16}x^3-2\sqrt{x})=3$. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

Λύση.

Αν θέσομε $g(x)=f(x)+\frac{1}{16}x^3-2\sqrt{x}$, θα έχομε $f(x)=g(x)-(\frac{1}{16}x^3-2\sqrt{x})$.

Όμως γνωρίζομε ότι $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=3$ και $\lim\limits_{x\to 4}(\frac{1}{16}x^3-2\sqrt{x})=\frac{1}{16}\cdot 4^3-2\sqrt{4}=4-4=0$.

Άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4} g(x)-\lim\limits_{x\to 4}(\frac{1}{16}x^3-2\sqrt{x})=3-0=3.$

Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του ορίου της σύνθετης συναρτήσεως $f\circ g$ στο σημείο x_0, υπάρχει μια σχετικά εύκολη διαδικασία για να γίνει αυτός, με την προϋπόθεση ότι μπορούμε να υπολογίσομε με κάποιον τρόπο το όριο $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και στη συνέχεια το όριο $\ell=\lim\limits_{x\to u_0} f(x)$.

Η διαδικασία υπολογισμού περιγράφεται αναλυτικά από τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1. Θέτομε $u=g(x)$ [1].

Βήμα 2. Υπολογίζομε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Βήμα 3. Υπολογίζομε (αν υπάρχει) το $\ell=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

Βήμα 4. Αν ισχύει $g(x)\neq u_0$ σε μια περιοχή του x_0, τότε αποδεικνύεται ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\ell$.

1. Ας σημειωθεί ότι το u είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση του x αλλά για λόγους απλότητας το x έχει παραληφθεί στο συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε.

Τα όρια της μορφής $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 και γι' αυτό η τελευταία δεν θα ελέγχεται καθόλου.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλομε να υπολογίσομε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \text{συν}\left(x^3 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Αν θέσομε $u = x^3 + \frac{\pi}{2}$, θα έχομε $\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = u_0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0} \text{συν}\left(x^3 + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{u\to \frac{\pi}{2}} \text{συν}u = \text{συν}\frac{\pi}{2} = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.7.

Αν $a \neq 0$ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x} = a$.

Λύση.

Μπορούμε να γράψομε $\frac{\text{ημ}ax}{x} = a\frac{\text{ημ}ax}{ax} = a\, g(f(x))$, όπου $f(x) = ax$, $g(x) = \frac{\text{ημ}x}{x}$.

Έτσι, αν θέσομε $u = ax$, θα ισχύει $\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0} ax = 0$ και (βλ. όριο βασικών συναρτήσεων B_4)

$$\lim_{u\to 0} \frac{\text{ημ}u}{u} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}x}{x} = 1,$$

οπότε $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}ax}{x} = a\lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}ax}{ax} = a\lim_{u\to 0} \frac{\text{ημ}u}{u} = a\cdot 1 = a.$$

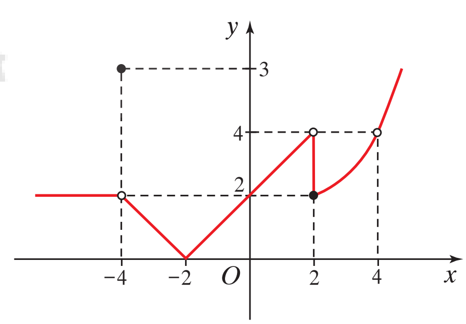
Ασκήσεις.

4.5.1. Στο σχήμα 4.5ιβ παρατίθεται η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως *f*. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to -4^+} f(x)$ β) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$

γ) $\lim_{x\to 0} f(x)$ δ) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$

ε) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$



Σχ. 4.5ιβ.

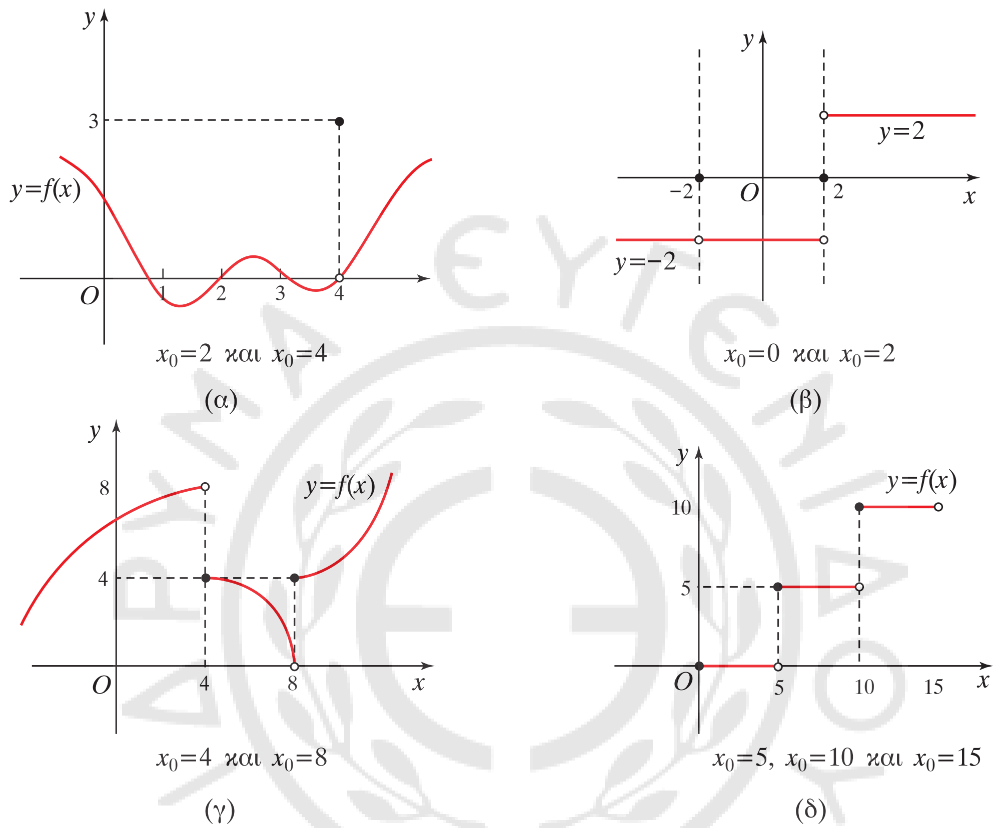
4.5.2. Έστω η συνάρτηση *f* με τύπο $f(x) = \frac{|3x-3|}{2x-2}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0,9	0,99	0,999	$\to 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,1
$f(x)$				$\to ; \leftarrow$			

και στη συνέχεια να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{x\to 1^-} f(x), \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x).$$

4.5.3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, με βάση τις επόμενες γραφικές παραστάσεις (σχ. 4.5ιγ).



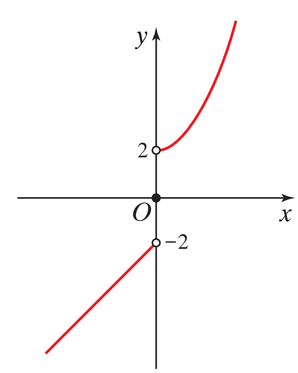
Σχ. 4.5ιγ.

4.5.4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–5,1	–5,01	–5,001	→–5←	–4,999	–4,99	–4,9
$f(x)$				→;←			

και στη συνέχεια να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο $f(x)$ στο $x_0=-5$.

4.5.5. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2+2, & x>0. \end{cases}$



Σχ. 4.5ιδ.

α) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του σχήματος 4.5ιδ να βρείτε τα πλευρικά όρια της $f(x)$ στο $x_0=0$.

β) Να βρείτε τα ίδια όρια, χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα τιμών.

4.5.6. Για τις επόμενες συναρτήσεις f, να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για το x_0 που δίνεται.

α) $f(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-4}$, $x_0=2$ β) $f(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-4}$, $x_0=-2$

γ) $f(x)=5x+\dfrac{(\sqrt{x})^2}{|x|}$, $x_0=0$ δ) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0 \\ -2x+3, & x>0 \end{cases}$, $x_0=0$

ε) $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x-3}, & x>3 \\ 8-2x, & x<3 \end{cases}$, $x_0=3$ στ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x\le 2 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}, & x>2 \end{cases}$, $x_0=2$

4.5.7. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=4$. Να βρείτε τα όρια στο x_0 των επομένων συναρτήσεων.

α) $g(x)=\dfrac{1}{(f(x))^2+1}$ β) $g(x)=5(f(x))^2-4$ γ) $g(x)=\dfrac{|3f(x)-1|}{(f(x))^2+1}$

δ) $g(x)=\dfrac{\left|3\sqrt{|f(x)|}-1\right|}{(f(x))^3-61}$ ε) $g(x)=(f(x)-3)(f(x)-10)^{100}$ στ) $g(x)=\dfrac{|f(x)-1|}{f(x)-1}$

4.5.8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-2$ να βρείτε τα όρια στο x_0 των επομένων συναρτήσεων.

α) $h(x)=\sqrt{|f(x)+g(x)|}$ β) $h(x)=\sqrt{|f(x)|+|g(x)|}$

γ) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}}$ δ) $h(x)=(2f(x)+g(x))^{10}$

4.5.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{αν} \quad x<0 \\ x^2+1, & \text{αν} \quad 0\le x\le 3 \\ 7+x, & \text{αν} \quad x>3. \end{cases}$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ στ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ζ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ η) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

4.5.10. Να υπολογίσετε για ποια τιμή της σταθεράς a υπάρχει το όριο στο $x_0=-1$ της συναρτήσεως

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-a, & x<-1 \\ -\dfrac{1}{x^3}, & x\ge -1. \end{cases}$$

4.5.11. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 4}(2x^2 - 3x + 1)$ β) $\lim\limits_{x \to 1}(3x^5 - 4x^2 + 2x + 1)$ γ) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{3x^5 - 4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{3x^5 - 4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ ε) $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{3x^2 + 2|x| + 1}{|x| + 1}$ στ) $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{(h-1)^2 - 1}{h^2 + 1}$

4.5.12. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x(1 + \sigma\upsilon\nu x)}$ β) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x}$ γ) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{x^2}$

δ) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ ε) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x - \eta\mu x}{x}\right)$ στ) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^3 + 2x}\right)$

4.5.13. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{4 - \sqrt{x}}{4 - x}$ β) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1 - \sqrt{1 + x^3}}{3x^3}$ γ) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 5x + 4}$ δ) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x}{1 - \sqrt{1 + x}}$

4.5.14. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x + x^2}{x}$ β) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ γ) $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{1 - x^2}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ ε) $\lim\limits_{x \to 3^-}\dfrac{x|x - 1|}{|x - 3| - 2}$ στ) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(x + 2)^2 - 4}{x}$

4.5.15. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x) - 2}{x} = 3$, να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 + 2x + 3)f(x)$.

4.5.16. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 2}(xf(x) - 3x^2 + 1) = 2$, να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{xf(x) - 2}{x}$ και $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

4.5.17. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq -1 \\ 2\alpha + \beta\, x, & x > -1. \end{cases}$

Να βρείτε τα α, β, ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$.

4.5.18. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $0 \leq f(x) \leq x^2 - 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

4.5.19. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $(f(x))^2 - 6xf(x) + 9x\eta\mu x = 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και είναι γνωστό ότι υπάρχει το: $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x} = a$,

α) Να αποδείξετε ότι το α ικανοποιεί την εξίσωση $a^2 - 6a + 9 = 0$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

4.5.20. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{3x}$ β) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 5x}{\eta\mu 3x}$ γ) $\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{\eta\mu(x - 4)}{8x - 2}$

δ) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu 5x}$ ε) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\eta\mu 7x}{\eta\mu 3x}$

4.5.21. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu\left(3x^2+\dfrac{\pi}{2}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to -1} \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to -1} \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}x^4\right)$ ε) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(5x^2+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu\left(3x^5+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ στ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\eta\mu\left(5(x-\frac{\pi}{2})\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

4.6 Όριο συναρτήσεως στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Μη πεπερασμένα όρια.

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να μελετήσομε τις τιμές που λαμβάνει μια συνάρτηση *f*, καθώς οι τιμές της μεταβλητής *x* μεγαλώνουν απεριόριστα, δηλαδή παίρνουν πολύ μεγάλες θετικές τιμές ή πολύ μεγάλες (κατ' απόλυτη τιμή) αρνητικές τιμές. Στην περίπτωση αυτή θα μιλάμε για όριο συναρτήσεων στο άπειρο ($+\infty$ ή $-\infty$). Για να αντιληφθούμε την πρακτική σημασία της έννοιας αυτής ας εξετάσομε το ακόλουθο παράδειγμα.

Η αντοχή ενός υλικού είναι γνωστό ότι επηρεάζεται έντονα από τη θερμοκρασία. Μια κατασκευάστρια βιομηχανία ενός εξαρτήματος που χρησιμοποιείται ως ανταλλακτικό σε γεννήτριες πλοίων περιγράφει την αντοχή του εξαρτήματος μ' ένα δείκτη που λαμβάνει τιμές μεταξύ των αριθμών 1 και 2. Ο δείκτης αντοχής λαμβάνει την ελάχιστη τιμή 1 όταν η αντοχή είναι η μεγαλύτερη δυνατή και αυτό συμβαίνει στους 0 ^{o}C ενώ, όσο αυξάνει η τιμή του δείκτη έχομε μικρότερες αντοχές. Στη βιομηχανία, για να περιγραφεί η σχέση του δείκτη αντοχής του εξαρτήματος και της θερμοκρασίας *x* χρησιμοποιείται, για μη αρνητικές θερμοκρασίες, η συνάρτηση *f* με τύπο

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+1}, \tag{4.6.1}$$

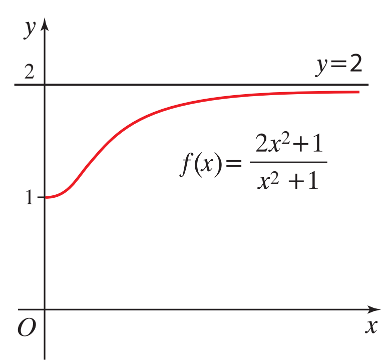
όπου $x \geq 0$. Προκειμένου να διερευνήσομε τι συμβαίνει με την αντοχή του εξαρτήματος για μεγάλες τιμές της θερμοκρασίας, θα πρέπει να εξετάσομε τι συμβαίνει με τις τιμές του δείκτη αντοχής, καθώς η θερμοκρασία (*x*) αυξάνεται συνεχώς χωρίς κανέναν περιορισμό. Ένας πρακτικός τρόπος για να μελετηθεί αυτό είναι, όπως έχομε δει και στα προηγούμενα κεφάλαια να κατασκευάσομε έναν πίνακα τιμών. Από τον πίνακα που ακολουθεί είναι φανερό ότι, καθώς οι τιμές του *x* αυξάνονται απεριόριστα, οι τιμές $y=f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλομε κοντά στον αριθμό 2.

το x αυξάνει απεριόριστα →

x	0	5	10	20	50	100	...
f(*x*)	1	1,96	1,99	1,9999	1,9996	1,9999	

Αυτό είναι επίσης εμφανές από το διάγραμμα του σχήματος 4.6α, στο οποίο η γραφική παράσταση της *f*, όταν οι τιμές του *x* αυξάνονται, «κολλάει» στην οριζόντια ευθεία που άγεται από το σημείο $y=2$ του κατακόρυφου άξονα. Για το λόγο αυτό, η ευθεία με εξίσωση $y=2$ ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συναρτήσεως *f* στο $+\infty$.

Για να περιγράψομε τα παραπάνω θα λέμε ότι: «*η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο τον αριθμό 2*» ή ότι: «*το όριο της f στο $+\infty$ είναι το 2*» και θα γράφομε: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$.



Σχ. 4.6α.

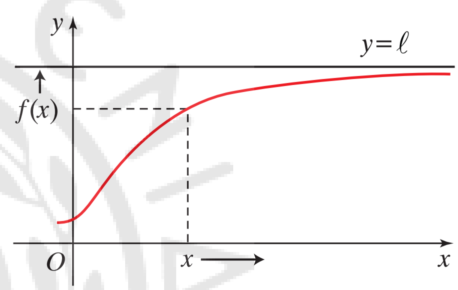
Γενικότερα έχομε τον επόμενο ορισμό (σχ. 4.6β):

> Όταν οι τιμές μιας συναρτήσεως *f* πλησιάζουν όσο θέλομε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς οι τιμές του *x* αυξάνονται απεριόριστα, τότε λέμε ότι ***το όριο της f στο*** $+\infty$ ***είναι το*** ℓ και γράφομε:
>
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell.$$
>
> Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$ ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συναρτήσεως *f* στο $+\infty$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσομε το όριο μιας συναρτήσεως στο $+\infty$, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

Η συνάρτηση (4.6.1) θα μπορούσε να μελετηθεί για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αφού ο τύπος της μπορεί να εφαρμοσθεί για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσομε ότι η *f* είναι άρτια, αφού για κάθε *x*, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της $A=\mathbf{R}$ ισχύει $-x\in\mathbf{R}$ και επί πλέον

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2+1}{(-x)^2+1}=\frac{2x^2+1}{x^2+1}=f(x).$$



Σχ. 4.6β.

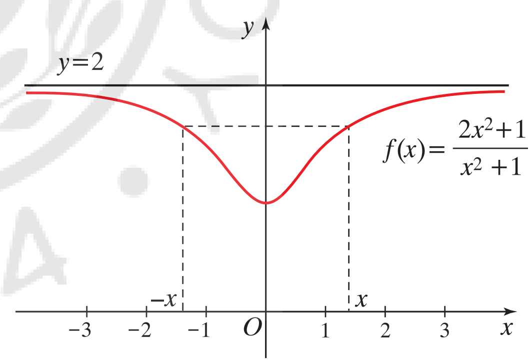
Επομένως, όταν το *x* παίρνει τις τιμές

$$-10, -20, -50, -100, \ldots,$$

οι τιμές της συναρτήσεως θα πλησιάζουν και πάλι προς τον πραγματικό αριθμό 2 (σχ. 4.6γ).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι *«η συνάρτηση f έχει στο* $-\infty$ *όριο τον αριθμό 2»* ή *«το όριο της f στο* $-\infty$ *είναι το 2» και γράφομε:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2.$$



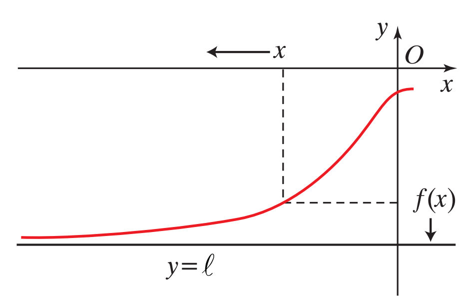
Σχ. 4.6γ.

Η ευθεία με εξίσωση $y=2$ στην περίπτωση αυτή ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συναρτήσεως *f* στο $-\infty$.

Γενικότερα έχομε τον επόμενο ορισμό (σχ. 4.6δ):

> Όταν οι τιμές μιας συναρτήσεως *f* πλησιάζουν όσο θέλομε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς οι τιμές του *x* μειώνονται απεριόριστα (λαμβάνουν αρνητικές τιμές με απεριόριστα μεγάλη απόλυτη τιμή), τότε λέμε ότι ***το όριο της f στο*** $-\infty$ ***είναι το*** ℓ και γράφομε:
>
> $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell.$$
>
> Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$ ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συναρτήσεως *f* στο $-\infty$.

Για να αναζητήσομε το όριο μιας συναρτήσεως στο $-\infty$, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

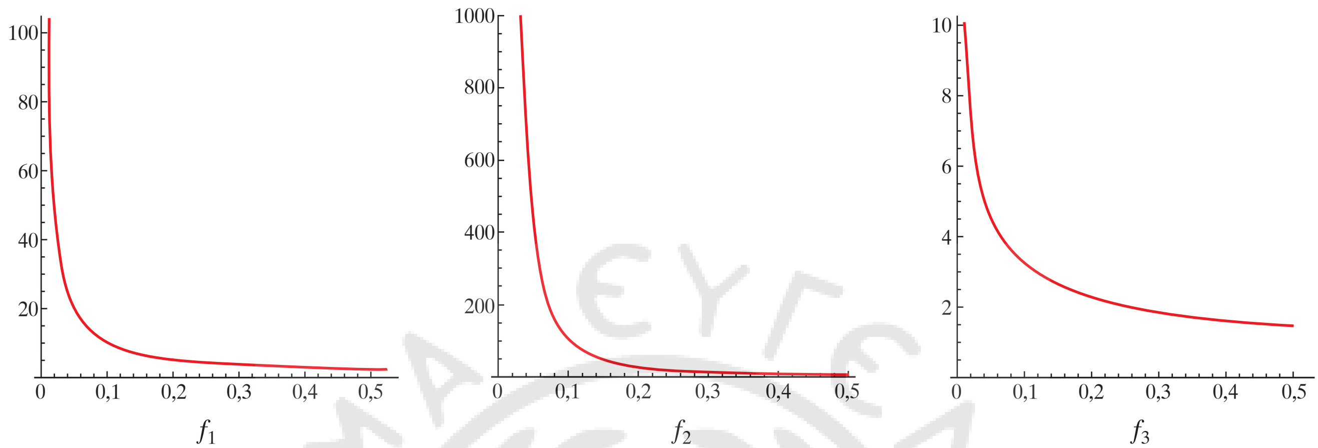


Σχ. 4.6δ.

Ας θεωρήσομε τώρα τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 με τύπους:

$$f_1(x)=\frac{1}{x}, \quad f_2(x)=\frac{1}{x^2}, \quad f_3(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα 4.6ε.



Σχ. 4.6ε.

Από τις γραφικές παραστάσεις καθώς επίσης και τον πίνακα τιμών 4.6.1 παρατηρούμε ότι όταν το x αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές των συναρτήσεων πλησιάζουν το μηδέν. Στην περίπτωση αυτή γράφομε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

Ανάλογα έχομε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Γενικά ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

> Αν r είναι ένας θετικός αριθμός, τότε:
>
> α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^r}=0$
>
> β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^r}=0$, εφόσον το x^r ορίζεται για αρνητικές τιμές.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2/3}}=0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1/2}}=0.$$

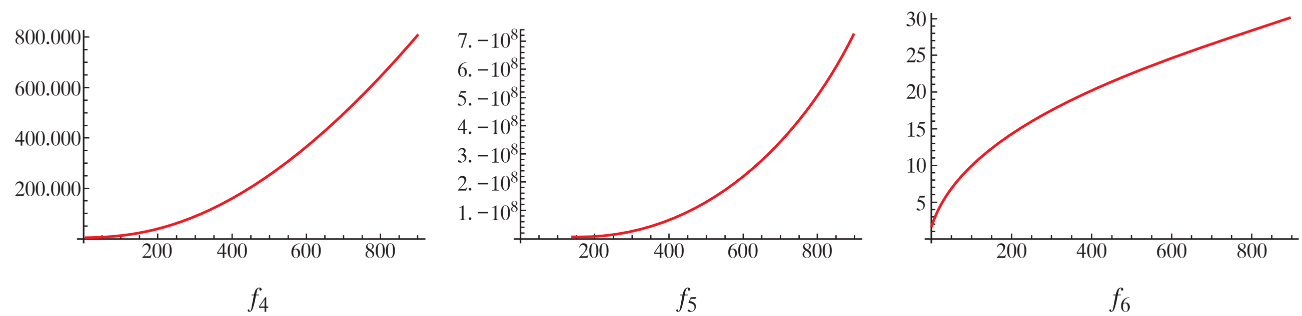
Ας θεωρήσομε στη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

$$f_4(x)=x^2, \qquad f_5(x)=x^3, \qquad f_6(x)=\sqrt{x}$$

και τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις που φαί-

Πίνακας 4.6.1

	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_1	$\frac{1}{x}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}
f_2	$\frac{1}{x^2}$	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-12}
f_3	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	10	$10^{-3/2}$	10^{-2}	10^{-3}



Σχ. 4.6στ.

νονται στο σχήμα 4.6στ.

Τέλος, ας εξετάσομε τις συναρτήσεις με τύπους

$$f_7(x) = -x^2, \qquad f_8(x) = -x^3, \qquad f_9(x) = -\sqrt{x}\,,$$

και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους που δίνονται στο σχήμα 4.6ζ.

Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 4.6ζ και τους αντίστοιχους πίνακες τιμών 4.6.2, 4.6.3, παρατηρούμε ότι, όταν το x αυξάνει απεριόριστα ($x \to +\infty$):

α) Οι τιμές των συναρτήσεων f_4, f_5, f_6 αυξάνουν απεριόριστα, ενώ

β) οι τιμές των συναρτήσεων f_7, f_8, f_9 μειώνονται απεριόριστα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f_4, f_5, f_6 έχουν στο $+\infty$ όριο το $+\infty$, ενώ οι συναρτήσεις f_7, f_8, f_9 έχουν στο $+\infty$ όριο το $-\infty$, και γράφομε:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty.$$

Ανάλογα, από τους πίνακες τιμών 4.6.4, 4.6.5 και το σχήμα 4.6η, παρατηρούμε ότι, όταν το x μικραίνει απεριόριστα ($x \to -\infty$):

α) Οι τιμές των συναρτήσεων f_4, f_8 αυξάνονται απεριόριστα, ενώ

β) οι τιμές των συναρτήσεων f_5, f_7 μειώνονται απεριόριστα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f_4, f_8 έχουν στο $-\infty$ όριο το $+\infty$, ενώ οι συναρτήσεις f_5, f_7 έχουν στο $-\infty$ όριο το $-\infty$, και γράφομε:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

και

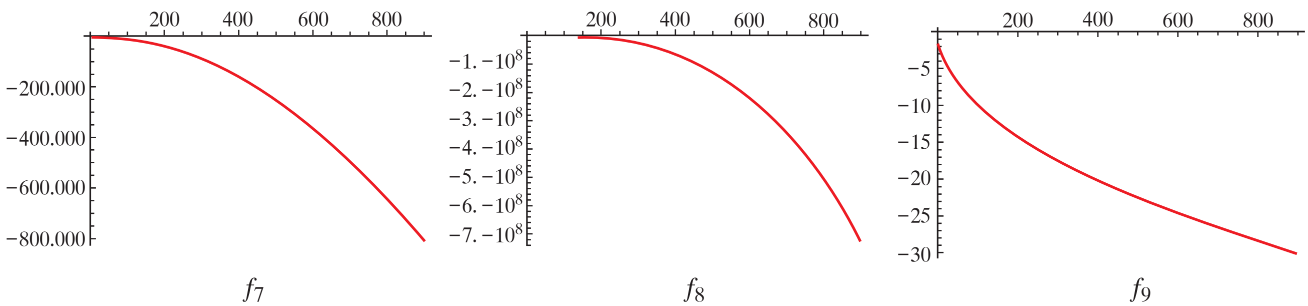
$$\lim_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty,$$

αντίστοιχα.

Οι ιδιότητες των ορίων που εξετάσαμε στην παράγραφο 4.5 ισχύουν και για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$.

Για το όριο στο $-\infty$ των ακεραίων θετικών δυνάμεων του x ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

> Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε:
>
> $$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$



Σχ. 4.6ζ.

Πίνακας 4.6.2

	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_4	x^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}
f_5	x^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{18}
f_6	$\sqrt{x}$	10	$\sqrt{10^3}$	10^2	10^3

Πίνακας 4.6.3

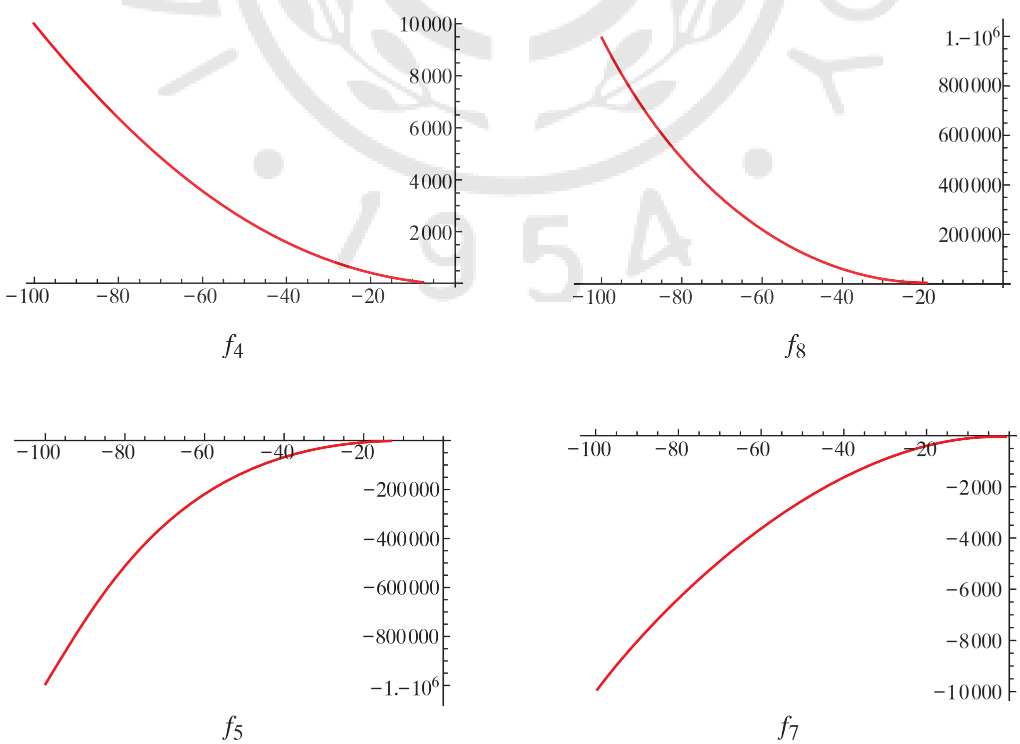
	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_7	$-x^2$	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{12}
f_8	$-x^3$	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{18}
f_9	$-\sqrt{x}$	-10	$-\sqrt{10^3}$	-10^2	-10^3

Πίνακας 4.6.4

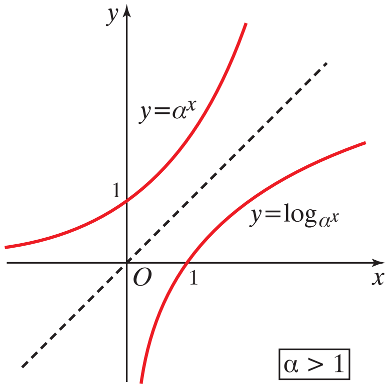
	x	-10^2	-10^3	-10^4	-10^6
f_4	x^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}
f_5	x^3	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{18}

Πίνακας 4.6.5

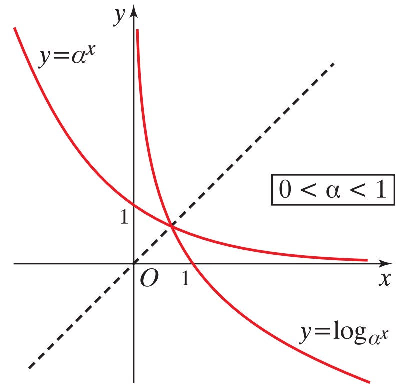
	x	-10^2	-10^3	-10^4	-10^6
f_7	$-x^2$	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{12}
f_8	$-x^3$	10^6	10^9	10^{12}	10^{18}



Σχ. 4.6η.



Σχ. 4.6θ.



Σχ. 4.6ι.

Με χρήση πινάκων τιμών μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε ότι για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$ της εκθετικής και της λογαριθμικής συναρτήσεως που γνωρίσαμε στην παράγραφο 4.3 ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Αν $\alpha > 1$, (σχ. 4.6θ) τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$

Αν $0 < \alpha < 1$, (σχ. 4.6ι) τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$

Για παράδειγμα, όταν $\alpha = e > 1$ λαμβάνομε:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$$

ενώ για $a = 1/e < 1$ έχομε:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

Ο ορισμός που δόθηκε για την έννοια του μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 είναι διαισθητικός. Για να φτάσομε σε έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό θα μπορούσαμε να αντικαταστήσομε τις εκφράσεις «οι τιμές της f να αυξάνονται απεριόριστα» και «οι τιμές της f να μειώνονται απεριόριστα» με τις μαθηματικές συνθήκες:

α) Για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M$.

β) Για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) < -M$.

αντίστοιχα, όπου M είναι ένας θετικός αριθμός.

Σε αναλογία με όσα αναφέρθηκαν για τα πεπερασμένα όρια στο x_0 έχομε λοιπόν τον επόμενο αυστηρό ορισμό.

> Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Ορίζομε:
>
> α) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in (a, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει: $f(x) > M$
>
> β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in (a, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει: $f(x) > -M$

Όπως και στον ορισμό των ορίων $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, το x_0 θα πρέπει να είναι σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $D(f)$ της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.1.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x\to+\infty}(5x^3+7x-3)$ β) $\lim_{x\to-\infty}(5x^3+7x-3)$ γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-4}{x^3-4}$

δ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-4}{x^3-4}$ ε) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-6x+9}{6x^3+5x-1}$ στ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+9}{6x^3+5x-1}$

ζ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}$ η) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}$

Λύση.

α) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=5x^3+7x-3$ μπορεί να λάβει στη μορφή:

$$f(x)=5x^3\left(1-\frac{7}{5x^2}-\frac{3}{5x^3}\right),$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{7}{5x^2}-\frac{3}{5x^3}\right)=1-0-0=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(5x^3)=+\infty$$

έχομε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(5x^3)=+\infty$.

β) Αφού τώρα έχομε $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{7}{5x^2}-\frac{3}{5x^3}\right)=1-0-0=1$, $\lim_{x\to-\infty}(5x^3)=-\infty$ παίρνομε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(5x^3)=-\infty.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για πολυωνυμικές συναρτήσεις ισχύει το εξής γενικότερο αποτέλεσμα.

Αν $P(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής

$$P(x)=\alpha\, x^n+\beta\, x^{n-1}+\cdots+\delta,$$

με $\alpha\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\alpha\cdot\lim_{x\to+\infty}(x^n) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\alpha\cdot\lim_{x\to-\infty}(x^n)\ .$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει άμεσα αν παρατηρήσομε ότι:

$$P(x)=x^n(\alpha+\beta\frac{1}{x}+\ldots+\delta\cdot\frac{1}{x^n}) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(\alpha+\beta\frac{1}{x}+\ldots+\delta\cdot\frac{1}{x^n})=\alpha, \qquad \lim_{x\to-\infty}(\alpha+\beta\frac{1}{x}+\ldots+\delta\cdot\frac{1}{x^n})=\alpha.$$

γ) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=\frac{6x^2-4}{x^3-4}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{6x^2-4}{x^3-4}=\frac{6x^2\left(1-\frac{4}{6x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{4}{x^3}\right)}=\frac{6x^2}{x^3}\cdot\frac{1-\frac{4}{6x^2}}{1-\frac{4}{x^3}},$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{4}{6x^2}}{1-\dfrac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{6x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)}=\frac{1-0}{1-0}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0$$

παίρνομε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2}{x^3}$.

δ) Αφού τώρα έχομε πάλι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{4}{6x^2}}{1-\dfrac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{6x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)}=\frac{1-0}{1-0}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=0$$

παίρνομε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^2}{x^3}$.

ε) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+9}{6x^3+5x-2}$ μπορεί με παρόμοιο τρόπο να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+9}{6x^3+5x-1}=\frac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{5}{6x^2}-\dfrac{1}{6x^3}}\cdot\frac{3x^2}{6x^3},$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{5}{6x^2}-\dfrac{1}{6x^3}}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{6x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

παίρνομε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{6x^3}\cdot$

στ) Τώρα έχομε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{5}{6x^2}-\dfrac{1}{6x^3}}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{6x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$$

οπότε παίρνομε και πάλι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{6x^3}=0\cdot$

ζ) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}=\frac{6x^3\left(1+\dfrac{1}{6x^3}-\dfrac{7}{6x^3}\right)}{3x^3\left(1-\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{1}{3x^3}\right)}=\frac{6x^3}{3x^3}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{6x^3}-\dfrac{7}{6x^3}}{1-\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{1}{3x^3}},$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{6x^3}-\dfrac{7}{6x^3}}{1-\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{1}{3x^3}}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3}{3x^3}=\lim_{x\to+\infty}2=2$$

παίρνομε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3}{3x^3}$.

η) Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (στ) βρίσκομε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3}{3x^3}$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για ρητές συναρτήσεις προκύπτει το επόμενο γενικότερο αποτέλεσμα.

Για κάθε ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha\,x^n+\beta\,x^{n-1}+\cdots+\delta}{\alpha\,x^m+\beta'\,x^{m-1}+\cdots+\delta'},\quad \alpha\neq 0,\quad \alpha'\neq 0$$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}R(x)=\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}\right)\quad \text{και}\quad \lim_{x\to-\infty}R(x)=\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}x^{n-m}\right).$$

Αν $n<m$ έχομε $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}R(x)=0$, ενώ για $n=m$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}R(x)=\lim_{x\to-\infty}R(x)=\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Τέλος, για $n>m$ το όριο θα είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.2.

Η ταχύτητα, με την οποία ένας εργάτης μπορεί να κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο εξάρτημα είναι συνάρτηση της εμπειρίας του (συνολικού χρόνου υπηρεσίας). Ας υποθέσομε ότι μετά από t μήνες εργασίας, ο μέσος υπάλληλος μπορεί να κατασκευάζει

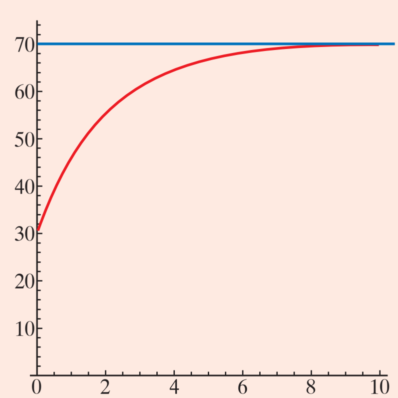
$$f(t)=70-40e^{-0,5t}$$

εξαρτήματα ανά ημέρα (σχ. 4.6ια). Να βρείτε πόσα εξαρτήματα ανά ώρα μπορεί να κατασκευάζει:

α) Ένας νέος εργάτης,

β) Ένας μέσος εργάτης με έξι μήνες εμπειρία και

γ) Ένας μέσος εργάτης με «άπειρες» ώρες εργασίας.



Σχ. 4.6ια.

Λύση.

α) Ο αριθμός των εξαρτημάτων που μπορεί να κατασκευάζει ο νέος εργάτης θα είναι (για $t=0$)

$$f(0)=70-40e^{-0,5\cdot 0}=70-40=30.$$

β) Μετά από 6 μήνες εργασίας ο μέσος εργάτης θα κατασκευάζει

$$f(6)=70-40e^{-0,5\cdot 6}=70-40\cdot e^{-3}\cong 68 \text{ εξαρτήματα.}$$

γ) Εδώ μας ενδιαφέρει να βρούμε τι συμβαίνει καθώς το t αυξάνει ($t \to \infty$). Έχομε

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} (70 - 40e^{-0,5t}) = 70 - 40 \cdot 0 = 70,$$

δηλαδή για εργάτη με «άπειρες» ώρες εργασίας (εμπειρίας) το $f(t)$ προσεγγίζει τον αριθμό 70. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 70$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συναρτήσεως f (σχ. 4.6ια) και έτσι η απόδοση του μέσου εργάτη μετά από εργασία «άπειρων» ωρών θα «σταθεροποιηθεί» στα 70 εξαρτήματα την ώρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.3.

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως C_f της συναρτήσεως f στο $+\infty$ αν ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

ενώ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f *στο* $-\infty$ αν ισχύει,

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$ [1].

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{20} + \frac{4e^x - 3}{2e^x + 3}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Λύση.

α) Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε, για να αποδείξομε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να αποδείξομε ότι ισχύει:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (\frac{x}{20} - 1) \right] = 0.$$

Πράγματι, έχομε

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (\frac{x}{20} - 1) \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{6e^x}{2e^x + 3} = \frac{6 \cdot 0}{2 \cdot 0 + 3} = 0.$$

β) Ομοίως, για να αποδείξομε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αρκεί να δείξομε ότι ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (\frac{x}{20} + 2) \right] = 0.$$

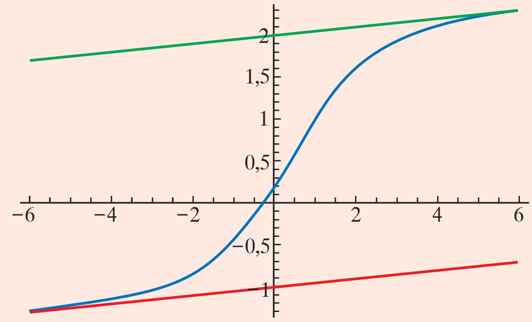
Πράγματι, έχομε

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (\frac{x}{20} + 2) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{-6}{2e^x + 3} \right] = 0.$$

---

1. Ο ορισμός αυτός, για $\lambda = 0$ ανάγεται στον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης. Όταν $\lambda \neq 0$, η $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ***πλάγια ασύμπτωτη***.

Όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 4.6ιβ, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία $y=\frac{x}{20}+2$, ενώ όταν το x τείνει στο $-\infty$, η γραφική παράσταση της f, προσεγγίζει την ευθεία $y=\frac{x}{20}-1$.



Σχ. 4.6ιβ.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι τιμές μιας συναρτήσεως f μπορεί να αυξάνονται απεριόριστα, καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνονται απεριόριστα, δηλαδή λαμβάνουν πολύ μεγάλες θετικές τιμές ή πολύ μεγάλες (κατ' απόλυτη τιμή) αρνητικές τιμές. Υπάρχει όμως περίπτωση οι τιμές της f να αυξάνονται απεριόριστα ή να μειώνονται απεριόριστα, καθώς η μεταβλητή x πλησιάζει σ' έναν πραγματικό αριθμό x_0.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσομε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, η οποία ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Ο πίνακας 4.6.6 δίνει τις τιμές της συναρτήσεως, καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν στον αριθμό 1.

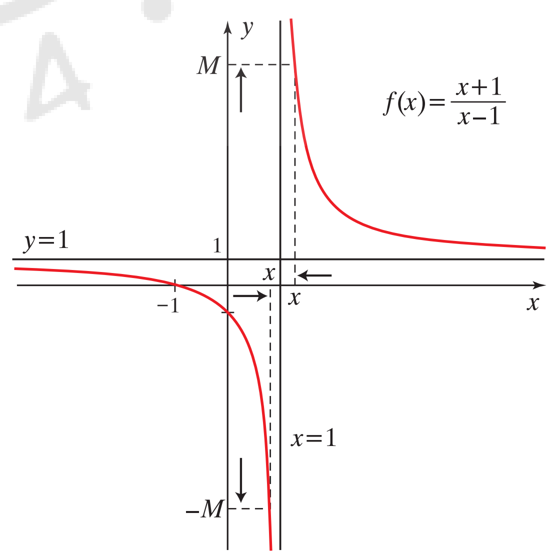
Πίνακας 4.6.6
Πίνακας τιμών της f.

το x πλησιάζει τον αριθμό 1 από αριστερά					$\to 1 \leftarrow$	***το x πλησιάζει τον αριθμό 1 από δεξιά***			
x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	–19	–199	–1999	–19999	?	20001	2001	201	21

Από τον πίνακα 4.6.6, καθώς και από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως που φαίνεται στο σχήμα 4.6ιγ παρατηρούμε ότι: καθώς το x πλησιάζει από δεξιά τον πραγματικό αριθμό 1, οι τιμές της συναρτήσεως f αυξάνονται απεριόριστα. Μάλιστα υπάρχει η δυνατότητα, με κατάλληλη επιλογή των τιμών που θα λάβει το x, να «υποχρεώσομε» τις τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f να γίνουν μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M μας δοθεί. Για παράδειγμα, από τον πίνακα τιμών 4.6.6 είναι φανερό ότι:

α) Επιλέγοντας το x δεξιά του 1 και σε απόσταση από αυτό μικρότερη του 0,001 (δηλ. $1<x<1{,}001$), εξασφαλίζεται ότι οι τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f θα γίνουν μεγαλύτερες από τον αριθμό 2001 [δηλ. θα ισχύει $f(x)>2001$].

β) Επιλέγοντας το x δεξιά του 1 και σε απόσταση από αυτό μικρότερη του 0,0001 (δηλ. $1 < x < 1{,}0001$), εξασφαλίζεται ότι τις τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f θα



Σχ. 4.6ιγ.

γίνουν μεγαλύτερες από τον αριθμό 20001 (δηλ. θα ισχύει $f(x) > 20001$) κ.ο.κ. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο 1 από δεξιά, όριο το $+\infty$ και θα γράφομε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty .$$

Από τον πίνακα 4.6.5 είναι επίσης φανερό ότι, καθώς το x πλησιάζει από αριστερά τον πραγματικό αριθμό 1, οι τιμές της συναρτήσεως f ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ ($M>0$). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο 1 από αριστερά, όριο το $-\infty$ και γράφομε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty .$$

Από το σχήμα 4.6ιγ φαίνεται ότι καθώς το x πλησιάζει τον αριθμό 1, η γραφική παράσταση της συναρτήσεως πλησιάζει την ευθεία με εξίσωση $x=1$, η οποία είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

Η ευθεία $x = 1$ ονομάζεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτη*** της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f ή απλούστερα κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Γενικά για $x_0 \in \mathbf{R}$ μπορούν να οριστούν τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to x_0^-} (x) = +\infty$ β) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ ε) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ στ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

των οποίων το νόημα γίνεται ευκολότερα κατανοητό μέσα από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 4.6ιδ (σε όλες έχομε $x_0 = 1$).

Αν για μία συνάρτηση f υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα όρια (α)–(στ), τότε η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ θα ονομάζεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτη*** της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f ή απλώς κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Εφόσον τα όρια (α)–(στ) αφορούν στα όρια όταν το x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό x_0,

α) για να αναζητήσομε το (μη πεπερασμένο) αριστερό πλευρικό όριο μιας συναρτήσεως f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής (α, x_0),

β) για να αναζητήσομε το (μη πεπερασμένο) δεξί πλευρικό όριο της f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β),

γ) για να αναζητήσομε το (μη πεπερασμένο) όριο μιας συναρτήσεως στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται «*κοντά στο* x_0», δηλαδή να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Αποδεικνύεται (η απόδειξη ξεφεύγει των στόχων του παρόντος εγχειριδίου) ότι, όπως και για τα πεπερασμένα όρια, το (μη πεπερασμένο) όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά της όρια και είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει:

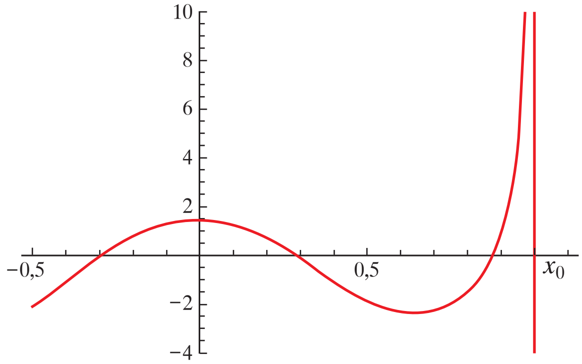
α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

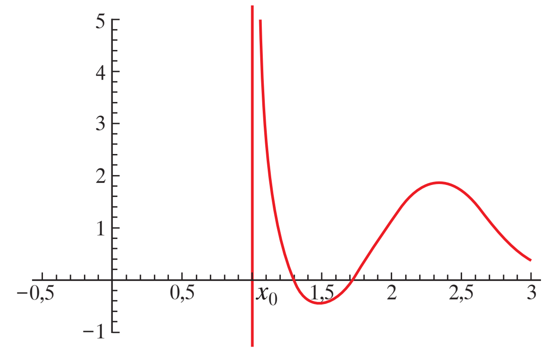
Ισχύουν επίσης τα παρακάτω αποτελέσματα για *μη πεπερασμένα* όρια:

$\mathbf{M_1}$ α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε η $f(x)$ θα λαμβάνει θετικές τιμές ($f(x)>0$) κοντά στο x_0.

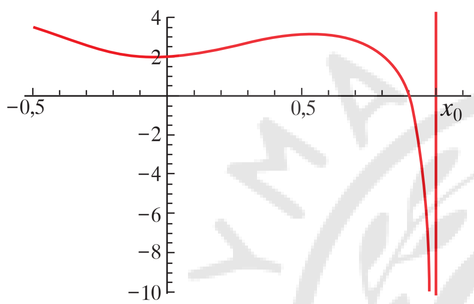
β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε η $f(x)$ θα λαμβάνει αρνητικές τιμές ($f(x)<0$) κοντά στο x_0.



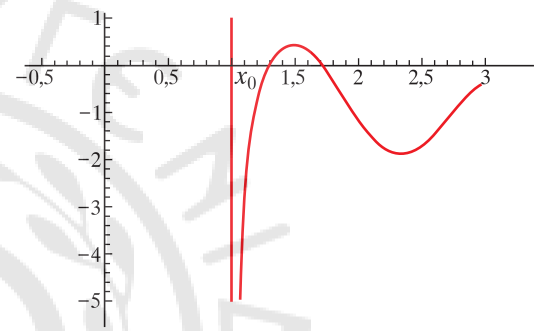
α) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$



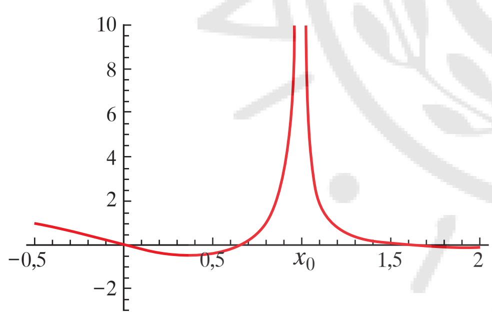
β) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$



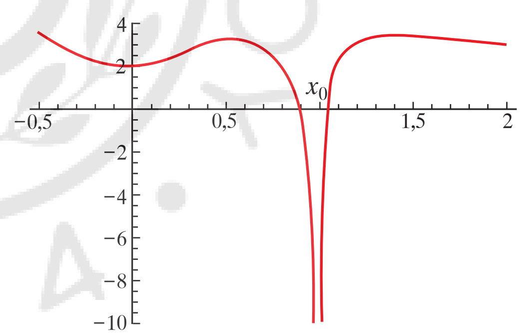
γ) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$



δ) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$



ε) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



στ) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Σχ. 4.6ιδ.

M$_2$ α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = -\infty$.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

M$_3$ Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

M_4 α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

M_5 Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

M_6 Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$ (για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό κ).

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε ότι:

Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{2n}} = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{(x - x_0)^{2n-1}} = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{(x - x_0)^{2n-1}} = -\infty$$

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$, το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει στο 0 το όριο της συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Στους επόμενους τρεις πίνακες δίνεται το όριο του αθροίσματος του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων, όταν γνωρίζομε τα όρια της καθεμίας από αυτές. Τα αποτελέσματα που δίνονται στους πίνακες ισχύουν:

α) Για πλευρικά και για μη πλευρικά όρια και

β) όταν τα όρια αναφέρονται στο $x_0 \in \mathbf{R}$ ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Όριο της f	*Όριο της g*		*Όριο της f+g*
ℓ_1	ℓ_2		$\ell_1 + \ell_2$
ℓ_1	$+\infty$		$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\Rightarrow$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		απροσδιόριστο
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$
0	$+\infty$		$+\infty$
0	$-\infty$		$-\infty$

Όριο της f	*Όριο της g*		*Όριο της $f \cdot g$*
ℓ_1	ℓ_2		$\ell_1 \ell_2$
ℓ_1	$+\infty$	$\Rightarrow$	$+\infty$, αν $\ell_1 > 0$ $-\infty$, αν $\ell_1 < 0$
$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$
0	$+\infty$		απροσδιόριστο
0	$-\infty$		απροσδιόριστο

Όριο της f	*Όριο της g*		*Όριο της* $\frac{f}{g}$
ℓ_1	$\ell_2 \neq 0$		ℓ_1 / ℓ_2
ℓ_1	$+\infty$ ή $-\infty$		0
$+\infty$	$\ell_2 > 0$	$\Rightarrow$	$+\infty$
$-\infty$	$\ell_2 > 0$		$-\infty$
$\ell_1 > 0$	$0, (g(x) > 0)$		$+\infty$
$\ell_1 > 0$	$0, (g(x) < 0)$		$-\infty$
$+\infty$ ή $-\infty$	$+\infty$ ή $-\infty$		απροσδιόριστο
0	0		απροσδιόριστο

Όπου έχει σημειωθεί η έκφραση «απροσδιόριστο» στους παραπάνω πίνακες σημαίνει ότι το όριο, αν υπάρχει, εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη μορφή των συναρτήσεων *f* και *g*. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχομε ***απροσδιόριστες μορφές***.

Πιο συγκεκριμένα, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{και} \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

αντίστοιχα. Επειδή $f - g = f + (-g)$, απροσδιόριστες μορφές για το όριο της διαφοράς συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty) \cdot$$

Τέλος, επειδή $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για το όριο του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την έννοια της απροσδιόριστης μορφής, ας θεωρήσομε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + a$ (όπου a οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός) και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, για τις οποίες τότε έχομε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2} + a\right) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Αφού $f(x) + g(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + a\right) + \frac{1}{x^2} = a$ είναι φανερό ότι $\lim_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0} a = a$ οπότε το όριο του αθροίσματος δεν μπορεί να καθορισθεί (προσδιορισθεί) από το όριο των δύο προσθετέων. Για παράδειγμα:

α) Αν πάρομε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, θα έχομε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = 1$$

β) Αν πάρομε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, θα έχομε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = 2$$

γ) Αν πάρομε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, θα έχομε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0} g(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=0 \text{ κ.ο.κ}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.4.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-2x+1}{x^4-10x^3+25x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}$ δ) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}$

Λύση.

α) Η συνάρτηση
$$f(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^4-10x^3+25x^2}$$
μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^4-10x^3+25x^2}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2(x^2-10x+25)}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2}\frac{1}{(x-5)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-2x+1}{x^2}=\frac{2\cdot 5^2-2\cdot 5+1}{5^2}=\frac{41}{25}>0,\quad \lim_{x\to 5}(x-5)^2=0,\ (x-5)^2>0,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=+\infty$.

β) Αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)\sqrt{x+3}=-2$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)^3}=+\infty$ (για $x>1$ είναι $(x-1)^3>0$),

θα έχομε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x-1}=-\infty$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ και ισχύει $x-2>0$ για $x>2$, θα έχομε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}=+\infty.$

Ισχύει επί πλέον ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x^2-3x+1)=\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+1)=3$, οπότε το ζητούμενοι όριο προκύπτει

ως εξής $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)^3}(2x^2-3x+1)\right]=+\infty\cdot$

δ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ και ισχύει $x-2<0$ για $x<2$, θα έχομε

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^3}=-\infty.$$

Ισχύει επί πλέον ότι

$$\lim_{x\to 2^-}(2x^2-3x+1)=\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+1)=3,$$

οπότε το ζητούμενο όριο προκύπτει ως εξής:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{(x-2)^3}(2x^2-3x+1)\right]=-\infty\ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.5.

Μια εταιρεία κατασκευής ενός ναυτιλιακού προϊόντος έχει πάγια μηνιαία έξοδα 5000 €, ενώ το κόστος κατασκευής μιας μονάδας του προϊόντος είναι 20 €.

α) Να υπολογίσετε το μηνιαίο κόστος $K(x)$ για την κατασκευή x μονάδων του προϊόντος.

β) Το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος δίνεται από τον τύπο:

$$K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}\cdot$$

Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}K_\mu(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}K_\mu(x)$. Ποια είναι η φυσική σημασία των ορίων αυτών;

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $K_\mu(x)$.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση το μηνιαίο κόστος $K(x)$ για την κατασκευή x μονάδων του προϊόντος θα δίνεται από τον τύπο $K(x)=20x+5000,\quad x\geq 0$.

β) Έχομε

$$K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{20x+5000}{x}=20+\frac{5000}{x}$$

και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{500}{x}=0$, προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}K_\mu(x)=\lim_{x\to+\infty}(20+\frac{5000}{x})=\lim_{x\to+\infty}20+\lim_{x\to+\infty}\frac{5000}{x}=20.$$

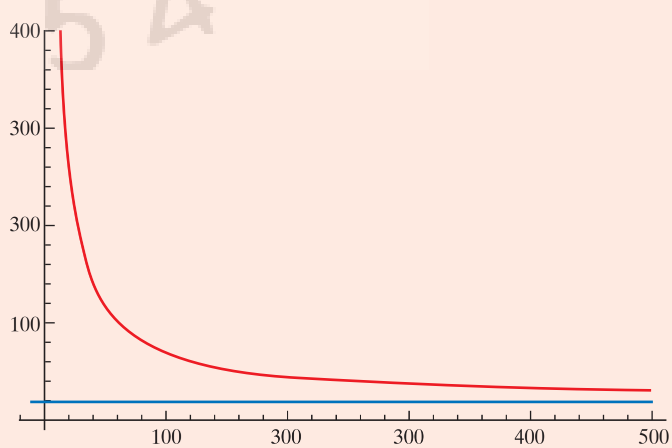
Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία με εξίσωση $y=20$ είναι ασύμπτωτη της συναρτήσεως $K_\mu(x)$ στο $+\infty$. Επομένως, όταν η εταιρεία κατασκευάζει απεριόριστα πολλές μονάδες, το μέσο κόστος ταυτίζεται με το κόστος ανά μονάδα, αφού τα πάγια έξοδα είναι τότε αμελητέα.

Για το όριο στο 0 έχομε:

$$\lim_{x\to 0^+}K_\mu(x)=\lim_{x\to 0^+}(20+\frac{5000}{x})=+\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συναρτήσεως $K_\mu(x)$. Επομένως, όταν η εταιρεία κατασκευάζει πολύ λίγες μονάδες, το μέσο κόστος είναι εξαιρετικά υψηλό.

γ) Γνωρίζοντας ότι οι ευθείες με εξισώσεις $y=20$ και $x=0$ είναι ασύμπτωτες της συναρτήσεως και με τη βοήθεια του πίνακα τιμών μπορούμε εύκολα να κατασκευάσομε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 4.6ιε.



Σχ. 4.6ιε.

Ασκήσεις.

4.6.1. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^5}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)^2$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+2x-7)$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+2x-7)$ ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{-x^2+5}$ στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3}{x^4+3}$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x^3+x-4}{x^3-3x+4}$ η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{3x^3-2x^2+2}$ θ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-27}{x^3+27}$

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+9}-x)$

4.6.2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$ των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^2+3}$ γ) $f(x)=\dfrac{1-2x}{3+5x}$

4.6.3. Η τιμή των ηλεκτρονικών εξαρτημάτων πλοίων συνήθως μειώνεται πολύ γρήγορα με την πάροδο του χρόνου. Ας υποθέσομε ότι ένα νέο εξάρτημα έχει αρχική τιμή 1000 € και ότι η τιμή του σε x μήνες, δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $P(x)=600+\dfrac{1200}{x+3}$.

α) Να βρείτε την τιμή του εξαρτήματος σε 6 μήνες από τη μέρα της κυκλοφορίας του.
β) Να βρείτε πότε η τιμή του εξαρτήματος θα γίνει 800 €.
γ) Τι θα συμβεί με την τιμή του μετά από πολλά χρόνια;

4.6.4. Δύο ακτοπλοϊκές εταιρείες εκτίμησαν ότι ξοδεύοντας x χιλιάδες € για διαφήμιση πετυχαίνουν ετήσιες επιβατικές κινήσεις, οι οποίες δίνονται (σε χιλιάδες) κατά προσέγγιση από τους τύπους:

$$S_1(x)=\frac{2000x^2}{2x^2+400} \quad \text{και} \quad S_2(x)=\frac{1000x^4}{2x^4+200}$$

αντίστοιχα.

α) Ποια από τις δύο εταιρείες πετυχαίνει καλύτερες ετήσιες επιβατικές κινήσεις ξοδεύοντας 5000 €;
β) Αν οι εταιρείες είχαν τη δυνατότητα να ξοδεύουν απεριόριστα χρήματα για διαφήμιση, ποια θα μπορούσε να πετύχει καλύτερη ετήσια επιβατική κίνηση και ποια θα ήταν αυτή;

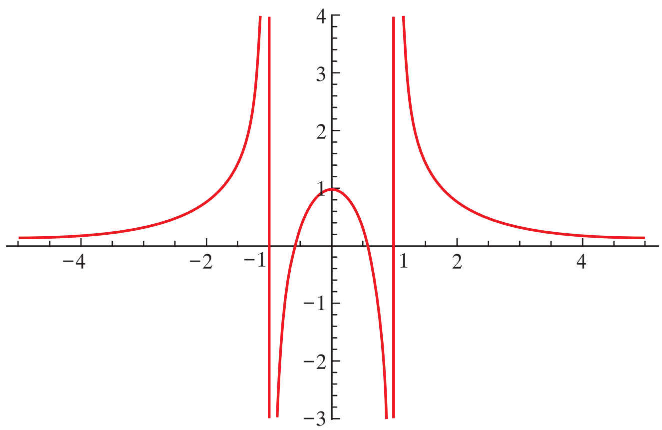
4.6.5. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+3}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x^2}{x+1}}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+2)$

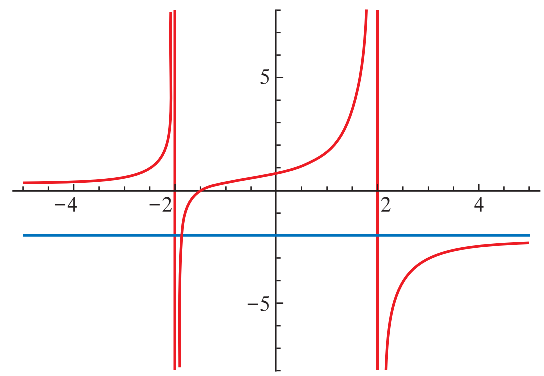
δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x^3+3x}$ ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

4.6.6. Έστω η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 4.6ιστ.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.



Σχ. 4.6ιστ.



Σχ. 4.6ιζ.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, καθώς και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f.

4.6.7. Έστω η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 4.6ιζ.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, καθώς και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f.

4.6.8. Μια εταιρεία κατασκευής εξαρτημάτων πλοίων έχει ετήσια πάγια έξοδα 10.000 €, ενώ το κόστος κατασκευής μιας μονάδας του προϊόντος είναι 200 €.

α) Να βρεθείτε το μέσο κόστος $K_\varepsilon(x)$ ανά γεννήτρια όταν σ' ένα έτος κατασκευάζονται x μονάδες του προϊόντος.

β) Τι θα συμβεί όταν η εταιρεία κατασκευάζει πολύ λίγες μονάδες και τι όταν η εταιρεία κατασκευάζει απεριόριστα πολλές μονάδες σε ένα έτος;

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $K_\varepsilon(x)$.

4.6.9. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{6}{2x-4}$ β) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3}{\sqrt{1-x}}$ γ) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{(x+3)^{40}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{x^2-4}$ ε) $\lim\limits_{x\to -6^-} \dfrac{1}{(x+6)^{11}}$ στ) $\lim\limits_{x\to -6^+} \dfrac{1}{(x+6)^{11}}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2)$ η) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x}$

4.6.10. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ως κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = x_0$.

α) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, $x_0 = -2$ β) $f(x) = \dfrac{1-3x^2}{1-x^4}$, $x_0 = -1$, και $x_0 = 1$ γ) $f(x) = \dfrac{1-3x}{3+6x}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$

4.6.11. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 που δίνεται.

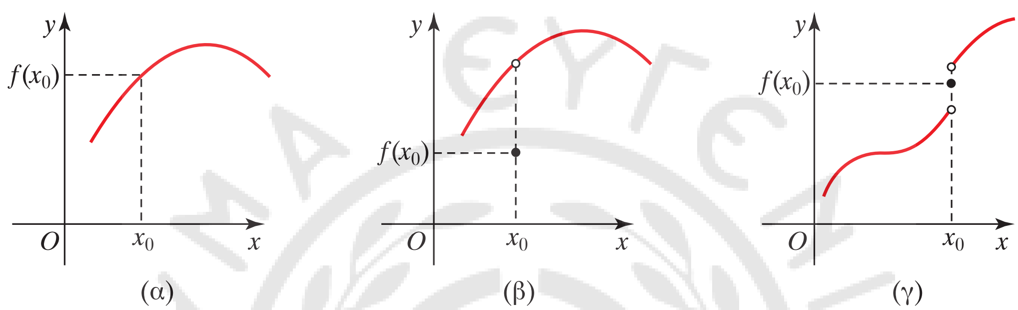
α) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^3+3x^2}$, $x_0 = 0$ β) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$ γ) $f(x) = \dfrac{x-|x|}{|x|x}$, $x_0 = 0$

4.7 Συνέχεια συναρτήσεων.

Στις προηγούμενες παραγράφους αναλύσαμε την έννοια της συναρτήσεως f και του ορίου της. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων, που μας παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά τους, είναι η συνέχεια. Στην καθημερινή ομιλία, όταν λέμε ότι μια διαδικασία είναι ***συνεχής***, εκείνο που αντιλαμβανόμαστε είναι ότι αυτή δεν παρουσιάζει διακοπές. Στα Μαθηματικά η έννοια της συνέχειας δεν διαφέρει και πολύ από την απλοϊκή περιγραφή αυτή.

Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, αρχικά θα παραθέσομε με κάποια παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσομε την έννοια της συνέχειας και κατόπιν θα δώσομε το μαθηματικό της ορισμό.

Ας θεωρήσομε τρεις συναρτήσεις με γραφικές παραστάσεις, που δίνονται στο σχήμα 4.7α.



Σχ. 4.7α.

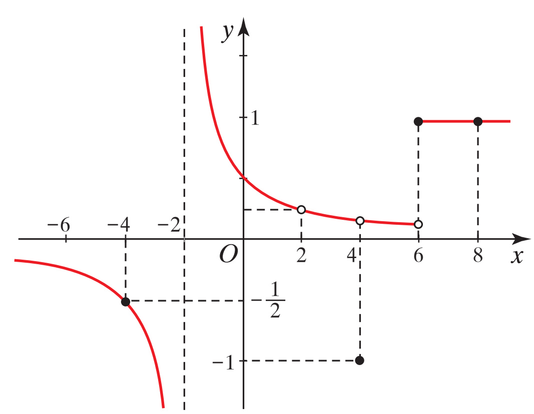
Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις (β) και (γ) «διακόπτονται» στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, ενώ η γραφική παράσταση (α) δεν «διακόπτεται» στο σημείο αυτό. Με την έννοια αυτή, η συνάρτηση του σχήματος (α) θα λέμε ότι είναι συνεχής στο x_0, ενώ οι συναρτήσεις των σχημάτων (β) και (γ) ότι δεν είναι συνεχείς στο x_0.

Γενικά, όταν λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εννοούμε ότι η γραφική της παράσταση ***δεν διακόπτεται*** στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Αν διακόπτεται, λέμε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Προκειμένου να κατανοήσομε καλύτερα την έννοια της συνέχειας και τη σχέση της με την έννοια του ορίου που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο και να καταλήξομε σ' έναν πιο μαθηματικό ορισμό για την έννοια της συνέχειας, ας θεωρήσομε τη συνάρτηση f, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,4)\cup(4,6) \\ -1, & x=4 \\ 1, & x\in[6,+\infty) \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζεται στο σχήμα 4.7β απ' όπου συμπεραίνομε (γραφικά) ότι, σημεία στα οποία παρουσιάζεται διακοπή της συναρτήσεως είναι τα –2, 2, 4, 6. Εξετάζοντας τα όρια και τις τιμές της συναρτήσεως f σε διάφορα σημεία, παίρνομε τον επόμενο πίνακα:



Σχ. 4.7β.

x_0	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$f(x_0)$	*Γραφική παράσταση*
–4	–1/2	–1/2	δεν διακόπτεται
–2	δεν υπάρχει	δεν ορίζεται	διακόπτεται
0	1/2	1/2	δεν διακόπτεται
2	1/4	δεν ορίζεται	διακόπτεται
4	1/6	–1	διακόπτεται
6	δεν υπάρχει	1	διακόπτεται
8	1	1	δεν διακόπτεται

Παρατηρούμε ότι:

α) Στα σημεία –2, 2 παρουσιάζεται διακοπή της C_f, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι εκεί η f δεν ορίζεται.

β) Στο σημείο $x_0 = 4$, όπου η C_f διακόπτεται, υπάρχει το όριο της f αλλά ισχύει $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$.

γ) Στο σημείο $x_0 = 6$, όπου επίσης η C_f διακόπτεται, δεν υπάρχει το όριο της f.

Τέλος, στα τρία σημεία στα οποία δεν εμφανίζεται διακοπή της γραφικής παραστάσεως, δηλαδή στα –4, 0, 8, ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται, για να διατυπωθεί μαθηματικά ο ορισμός της συνέχειας μιας συναρτήσεως σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πιο συγκεκριμένα έχομε τον επόμενο ορισμό:

Μία συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)[1].$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 2$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αφού

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^3 - 2) = 1^3 - 2 = -1 = f(1).$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι, μια συνάρτηση f ***δεν είναι συνεχής*** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω[2]:

α) Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

β) Υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και δεν ισχύει η ισότητα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις με τύπους:

---

1. Ο ορισμός της συνέχειας μιας συναρτήσεως f στο σημείο $x_0 \in \Delta$ (όπου Δ είναι ένα διάστημα) μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in \Delta$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
2. Οι περιπτώσεις που περιγράφονται στη συνέχεια αναφέρονται σε σημεία συσσωρεύσεως x_0 του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως (ώστε να ορίζονται τα αντίστοιχα όρια). Στην περίπτωση που το x_0 είναι ***μεμονωμένο σημείο*** του πεδίου ορισμού, δηλαδή υπάρχει διάστημα της μορφής $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, τέτοιο, ώστε να ισχύει $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D(f) = \{x_0\}$, τότε η συνάρτηση f θεωρείται συνεχής στο x_0. Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 3-2x, & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}, \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1 \\ 0, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχείς στο σημείο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(3-2x)=1$$

(οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 1) και

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2, \quad g(1)=0$$

[υπάρχει το όριο της g στο 1, αλλά δεν ισχύει η ισότητα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$].

Το επόμενο Θεώρημα, του οποίου η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες των ορίων, μας βοηθάει στη διαπίστωση της συνέχειας συναρτήσεων που παράγονται από συνεχείς συναρτήσεις μέσω απλών αλγεβρικών πράξεων.

> Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις
>
> $f+g$, αf (με $\alpha\in\mathbf{R}$), $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ (όπου $g(x_0)\ne 0$) $|f|$, $\sqrt[\nu]{f}$ (όπου $f(x_0)\ge 0$)
>
> είναι συνεχείς στο x_0.

Για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 θα έχομε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

Όμως, σύμφωνα με την ιδιότητα L_6 των ορίων (βλ. παράγρ. 4.5), αφού υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως $f + g$ στο x_0 και θα ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0)=(f+g)(x_0),$$

σχέση η οποία αποδεικνύει ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες των μαθηματικών πράξεων.

Τέλος, μπορεί να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα της συνέχειας διατηρείται και όταν χρησιμοποιούμε την πράξη της συνθέσεως, πιο συγκεκριμένα έχομε το επόμενο αποτέλεσμα:

> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Εκτός από τη συνέχεια μιας συναρτήσεως σ' ένα σημείο, μας ενδιαφέρει και η συνέχεια σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Διαισθητικά η συνέχεια σε διάστημα αναφέρεται στην ιδιότητα να μην διακόπτεται η γραφική παράσταση συναρτήσεως σε κανένα σημείο του διαστήματος που εξετάζομε (εσωτερικό ή άκρο του). Πιο συγκεκριμένα έχομε τον επόμενο ορισμό:

> Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής:
>
> α) Σε ένα ***ανοικτό διάστημα*** $\Delta=(a,\beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0\in\Delta$.

β) Σε ένα ***κλειστό διάστημα*** $\Delta=[a,\beta]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$ και ισχύει

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \ \text{ και } \ \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

Αν η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της ονομάζεται απλά ***συνεχής***.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3-2$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, αφού για κάθε $x_0\in\mathbf{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}(x^3-2)=x_0^3-2=f(x_0).$$

Αντίθετα, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της $[0,1]$, αφού διακόπτεται στο άνω άκρο (ισχύει $\lim_{x\to1^-} f(x)=1\ne0=f(1)$).

Από τον τρόπο που ορίστηκε η συνέχεια συναρτήσεων σε διάστημα, γίνεται φανερό ότι οι ιδιότητες που αναφέρονται στη συνέχεια σε σημείο, μπορούν να μεταφερθούν άμεσα σε αντίστοιχες ιδιότητες σε διαστήματα. ΄Ετσι προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους, τότε και οι συναρτήσεις

$f+g$, cf (με $c\in\mathbf{R}$), $f\cdot g$,

$|f|$, $\dfrac{f}{g}$ (όπου ισχύει $g(x)\ne0$), $\sqrt[\nu]{f}$ (όταν $f(x)\ge0$),

είναι συνεχείς στο Δ.

Επίσης για τη σύνθεση συναρτήσεων ισχύει το εξής:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και η g είναι συνεχής στο $f(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο Δ.

Πολλές από τις συναρτήσεις που γνωρίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους είναι συνεχείς σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους. ΄Ετσι:

α) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_o\in\mathbf{R}$ ισχύει (βλ. παραγρ. 4.5)

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0).$$

β) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_o\in\mathbf{R}$ με $Q(x_0)\ne0$ έχομε (βλ. παραγρ. 4.5)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}P(x)}{\lim_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

γ) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημx και συνx είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ ισχύει (βλ. Ιδιότητα $\boldsymbol{B_3}$ στην παραγρ. 4.5)

$$\lim_{x\to x_0} \text{ημ}x = \text{ημ}x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} \text{συν}x = \text{συν}x_0.$$

Οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$ $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς. Ειδικότερα είναι συνεχείς οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = e^x$, $f(x) = 10^x$, $g(x) = \ln x$, $g(x) = \log x$.

Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \text{εφ}x = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$ και $g(x) = \text{σφ}x = \dfrac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους (το οποίο δεν είναι ολόκληρο το $\mathbf{R}$) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να διαπιστώσομε ότι η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \text{εφ}(x^3 + 2x + 1)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $g(x) = \text{εφ}x$ και $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

Αναφέρομε τέλος το θεώρημα, το οποίο διευκολύνει την εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης μιας συναρτήσεως (αν υπάρχει), η οποία έχει τη μορφή πηλίκου συνεχών συναρτήσεων.

Αν οι συναρτήσεις g, h είναι συνεχείς στο $x = x_0$, $g(x_0) \neq 0$ και $h(x_0) = 0$, τότε για τη συνάρτηση $f = \dfrac{g}{h}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$

οπότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = x_0$.

Το θεώρημα αυτό ισχύει και για πλευρικά όρια, όταν οι δύο συναρτήσεις g, h είναι ***ορισμένες στα διαστήματα*** $(\alpha, x_0]$ ή $[x_0, \beta)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.1.

Να βρείτε τον αριθμό α, έτσι ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\alpha x^3, & x \leq 2 \\ 2\alpha^2 x - 3, & x > 2. \end{cases}$$

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής για $x > 2$, καθώς και για $x < 2$ ως πολυωνυμική. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = -4a.$$

Όμως έχομε ότι

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-\frac{1}{2}ax^3) = -4a,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2a^2 x - 3) = 4a^2 - 3.$$

Επομένως θα πρέπει

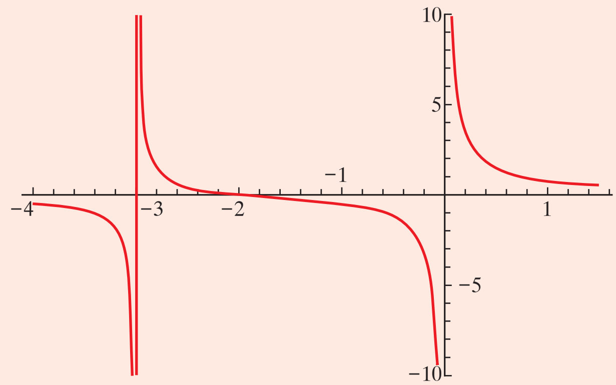
$$4a^2 - 3 = -4a \Leftrightarrow 4a^2 + 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ ή } \alpha = -\frac{3}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.2.

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συναρτήσεως f με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x(x+3)}$.

Λύση.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $g(x)=x+2$ και $h(x)=x(x+3)$ (είναι συνεχείς στο $\mathbf{R}$, ως πολυωνυμικές).



Σχ. 4.7γ.

Επί πλέον ισχύει,

$$h(0)=0\cdot(0+1)=0\,,\;\; g(0)=0+2=2\neq 0\,,$$

οπότε η f θα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 0$. Επίσης ισχύει

$$h(-3)=-3\cdot(-3+3)=0\,,\;\; g(-3)=-3+2=-1\neq 0$$

οπότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και την ευθεία με εξίσωση $x = -3$. Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως δίνεται στο σχήμα 4.7γ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.3.

Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο 0 και για την οποία ισχύει

$$x^2 f(x)=\eta\mu^2(2x)+x^3-2x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\{0\}.$$

Να βρείτε το $f(0)$.

Λύση.

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Για $x\neq 0$ έχομε

$$\frac{x^2 f(x)}{x^2}=\frac{\eta\mu^2 2x+x^3-2x^2}{x^2}=\frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}+x-2=4\cdot\left(\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)^2+x-2$$

οπότε παίρνομε

$$f(x)=4\cdot\left(\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)^2+x-2\,.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}=1\,,\;\; \lim_{x\to 0}(x-2)=-2$$

προκύπτει ότι

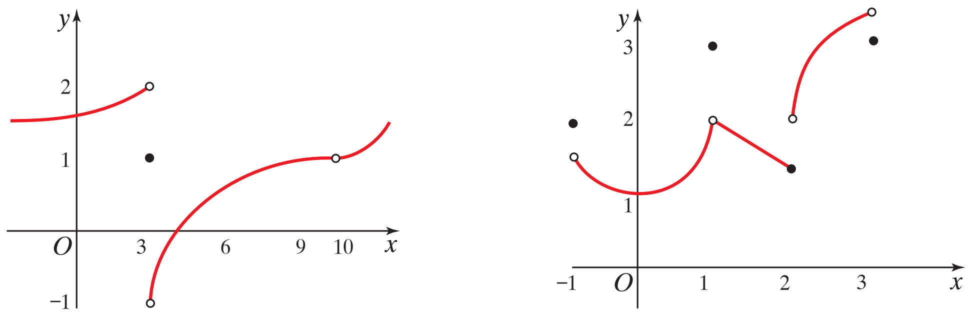
$$\lim_{x\to 0} f(x)=4\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)^2+\lim_{x\to 0}(x-2)=4\cdot 1-2=2\,.$$

Άρα

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=2\,.$$

Ασκήσεις.

4.7.1. Στο σχήμα 4.7δ(α)(β) δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία, στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.



(α) (β)

Σχ. 4.7δ.

4.7.2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις επόμενες συναρτήσεις.

α) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+3}, & x\neq -3 \\ 0 & x=-3 \end{cases}$, $x_0=-3$

β) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ x^2-2x+1, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}, & x\neq 4 \\ 6 & x=4 \end{cases}$, $x_0=4$

δ) $f(x)=\begin{cases} x^2-6, & x<3 \\ \sqrt{6+x}, & x\geq 3 \end{cases}$, $x_0=3$

4.7.3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις επόμενες συναρτήσεις.

α) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<3 \\ 8-x, & x\geq 3 \end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & 0\leq x\leq 1 \\ x^3, & x>1 \end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x\geq e \\ -2x+2, & x<e \end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ \ln x, & x\geq 1 \end{cases}$

ε) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+1, & x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \end{cases}$

στ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\,\eta\mu x}{x}, & x<0 \\ 1+\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0 \end{cases}$

4.7.4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η συνάρτηση f που δίνεται παρακάτω να είναι συνεχής στο **R**.

α) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\leq 3 \\ \alpha x^2-2, & x>3 \end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases} \alpha x^{10}-1, & x\geq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}, & x<1 \end{cases}$

4.7.5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x)=\eta\mu(\varepsilon\varphi x)$

β) $f(x)=e^{\eta\mu x}$

γ) $f(x)=\ln(x^2+4)$

δ) $f(x)=\ln(x^2+x+1)+e^x$

ε) $f(x)=\eta\mu\left(\dfrac{1}{e^{x^2+1}}\right)$

στ) $f(x)=\ln(\ln(e^x+x))$

4.7.6. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x-1)(x+4)}$ β) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{(x-3)(x^2-4)}$

4.7.7. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x\in\mathbf{R}^*$ ισχύει

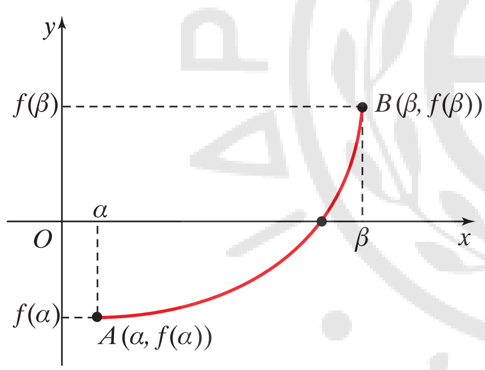
$$x^2 f(x)=\text{συν}^2 x-2\text{συν}x+1\,.$$

4.8 Θεώρημα Bolzano και Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

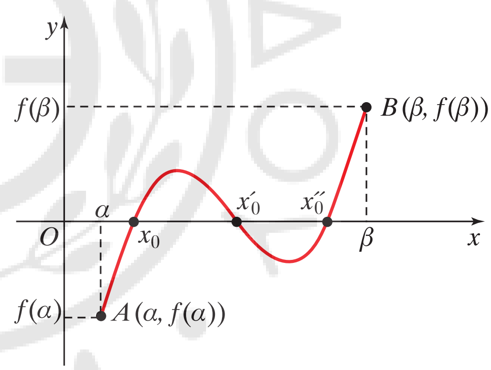
Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρομε δύο πολύ βασικά αποτελέσματα που αφορούν σε συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κλειστά διαστήματα.

Ας θεωρήσομε το σχήμα 4.8α, όπου έχομε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συναρτήσεως f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)>0$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα και η γραφική παράσταση της f δεν διακόπτεται (λόγω της συνέχειας της f), αντιλαμβανόμαστε ότι αυτή θα πρέπει οπωσδήποτε να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0. Προφανώς στο σημείο αυτό θα ισχύει $f(x_0)=0$, δηλαδή το $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι ρίζα της εξισώσεως $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 4.8β, το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδικό. Μπορεί να έχομε περισσότερα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.



Σχ. 4.8α.



Σχ. 4.8β.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις, οι οποίες προφανώς ισχύουν και όταν έχομε $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)<0$, είναι γνωστές με την ονομασία ***Θεώρημα του Bolzano***. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται:

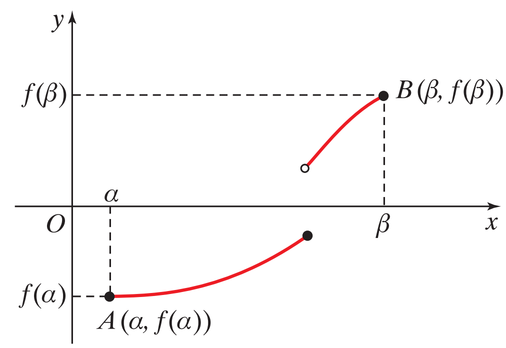
Θεώρημα Bolzano.

Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x)=0,$$

δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην ιδιότητα της συνέχειας της συναρτήσεως f που περιγράφεται στο θεώρημα Bolzano, διότι αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής, τότε η γραφική της παράσταση θα μπορούσε να είναι μια διακοπτόμενη γραμμή και επομένως δεν είναι απαραίτητο να τέμνει τον οριζόντιο άξονα, έστω και αν ισχύει $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$ (σχ. 4.8γ).



Σχ. 4.8γ.

Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν για μια (συνεχή ή μη συνεχή) συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)\ f(\beta) > 0$ δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η f δεν έχει ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Για παράδειγμα:

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2-2$ μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[1,2]$ αφού είναι συνεχής, ως πολυωνυμική και ισχύει ότι $f(1)\,f(2)=(-1)\cdot 2=-2<0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1,2]$ (η οποία προφανώς είναι η $x_0=\sqrt{2}$). Για την ίδια συνάρτηση, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2,2]$, αφού είναι μεν συνεχής, ως πολυωνυμική, αλλά ισχύει $f(-2)\,f(2)=2\cdot 2=4>0$. Ωστόσο, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα $[-2,2]$, τις $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2}$.

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3-x$ μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2,2]$ αφού είναι συνεχής, ως πολυωνυμική και ισχύει ότι $f(-2)\,f(2)=(-10)\cdot 6=-60<0$. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξισώσεως $f(x) = 0$ στο διάστημα $[-2,2]$. Στην πραγματότητα, υπάρχουν τρεις ρίζες στο διάστημα $[-2,2]$, οι $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, και $x_3 = 1$.

Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη ρίζας μιας συναρτήσεως f [ή ισοδύναμα ρίζας της εξισώσεως $f(x)=0$] σ' ένα διάστημα. Ο προσδιορισμός μιας τέτοιας ρίζας μπορεί να γίνει με όση προσέγγιση θέλομε με τη βοήθεια της μεθόδου που θα περιγραφεί στη συνέχεια, η οποία είναι γνωστή ως ***μέθοδος της διχοτομήσεως***.

Έστω ότι για μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ διαπιστώσαμε ότι ισχύει $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$. Θεωρούμε το μέσον $\rho=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ του διαστήματος Δ και εξετάζομε την τιμή της συναρτήσεως στο ρ.

α) Αν ισχύει $f(\rho) = 0$ θα έχομε βρει μία ρίζα της εξισώσεως $f(x) = 0$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, οπότε η αναζήτησή μας τελειώνει.

β) Αν όχι, τότε το $f(\rho) \neq 0$:

– είτε θα έχει το πρόσημο του $f(\alpha)$, οπότε θα ισχύει $f(\alpha)\,f(\rho) > 0$ και $f(\beta)\,f(\rho) < 0$,

– είτε θα έχει το πρόσημο του $f(\beta)$, οπότε θα ισχύει $f(\alpha)\,f(\rho) < 0$ και $f(\beta)\,f(\rho) > 0$.

Στην πρώτη περίπτωση, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της συναρτήσεως f στο διάστημα $[\rho, \beta] = [\alpha_1, \beta_1] = \Delta_1$. Στη δεύτερη, θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της συναρτήσεως f στο διάστημα $[\alpha, \rho] = [\alpha_1, \beta_1] = \Delta_1$.

Στη συνέχεια (και εφόσον η αναζήτησή μας δεν έχει τελειώσει), εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο στο διάστημα Δ_1 που προέκυψε και το οποίο έχει πλάτος ίσο με

$$\rho-\alpha=\beta-\rho=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

δηλαδή το μισό του πλάτους του αρχικού διαστήματος. Αν επαναλάβομε τα παραπάνω βήματα ν φορές, το τελικό διάστημα θα έχει πλάτος ίσο με

$$\frac{1}{2^\nu}(\beta-\alpha).$$

Από τον τύπο αυτό μπορούμε να υπολογίζομε πόσα βήματα (το πολύ) θα χρειαστούν για να φτάσομε με τη μέθοδο της διχοτομήσεως σ' ένα διάστημα με επιθυμητό πλάτος.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσομε τη συνάρτηση $f(x)=x^2-2$ η οποία, όπως είδαμε προηγουμένως, ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,2]$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της διχοτομήσεως παίρνομε τα επόμενα αποτελέσματα.

Βήμα	*α*	*β*	*ϱ*	*f(ϱ)*
1	1,00000	2,00000	1,50000	0,25000
2	1,00000	1,50000	1,25000	–0,43750
3	1,25000	1,50000	1,37500	–0,10938
4	1,37500	1,50000	1,43750	0,06641
5	1,37500	1,43750	1,40625	–0,02246
6	1,40625	1,43750	1,42187	0,02171

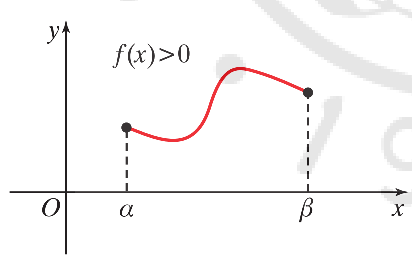
Οι τιμές που δίνονται στην τέταρτη στήλη του πίνακα, αποτελούν προσεγγίσεις της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού 2 (αφού η λύση της εξισώσεως $x^2 - 2 = 0$ στο διάστημα [1,2] είναι προφανώς ο αριθμός $\sqrt{2}$). Τέτοιες τεχνικές χρησιμοποιούνται στους Η/Υ για τον προσεγγιστικό υπολογισμό (άρρητων) αριθμών, όπως η $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ κ.λπ.

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει άμεσα ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε οι τιμές της συναρτήσεως είτε θα είναι θετικές για κάθε $x \in \Delta$, είτε θα είναι αρνητικές για κάθε $x \in \Delta$. Επομένως:

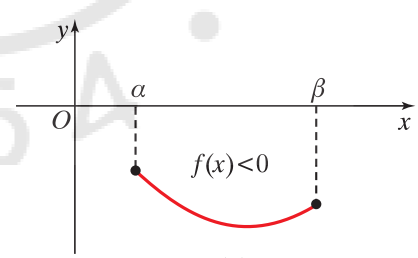
Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Δ, διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ.

Έτσι για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ είτε θα έχομε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ [σχ. 4.8δ(α)] είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (σχ. 4.8δ(β)).

Μια άμεση συνέπεια των προηγουμένων είναι ότι οι συνεχείς συναρτήσεις f διατηρούν το πρόσημό τους σε καθένα από το διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού τους (σχ. 4.8ε).

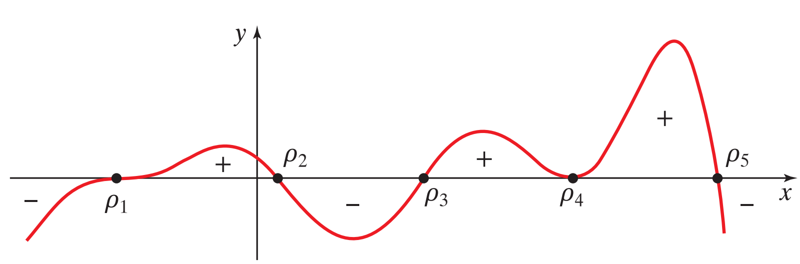


(α)



(β)

Σχ. 4.8δ.



Σχ. 4.8ε.

Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Πιο συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1. Βρίσκομε όλες τις ρίζες της συναρτήσεως f.

Βήμα 2. Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγομε ένα σημείο ξ και βρίσκομε το πρόσημο του $f(\xi)$.

Βήμα 3. Αν $f(\xi) > 0$, η f θα έχει θετικό πρόσημο σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα. Αν $f(\xi) < 0$, η f θα έχει αρνητικό πρόσημο σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.8.1.

Να μελετήσετε το πρόσημο της συναρτήσεως $f(x)$ = ημx – συνx στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Λύση.

Υπολογίζομε αρχικά όλες τις ρίζες της εξισώσεως $f(x)=0$ στο διάστημα $[0,2\pi]$. Έχομε

$$\text{ημ}x-\text{συν}x=0 \Leftrightarrow \text{ημ}x=\text{συν}x \Leftrightarrow \text{εφ}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \ \text{ ή } \ x=\frac{5\pi}{4}.$$

Επομένως, οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right) \ \text{ και } \ \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right],$$

στα οποία η f θα διατηρεί σταθερό το πρόσημό της. Για να προσδιορίσομε το είδος του προσήμου σε κάθε υποδιάστημα επιλέγομε έναν αριθμό ξ και βρίσκομε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός ξ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f(\xi)$	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$	1	$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$
Πρόσημο	−	+	−

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ είναι αρνητικό ($f(x)<0$), ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ είναι θετικό ($f(x)>0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.8.2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{e^x}{x-2}+\dfrac{x^3}{x-1}=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (–1,2).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)e^x+(x-2)x^3$ και διαπιστώνομε ότι ισχύει:

$$f(-1) = -\frac{2}{e} + 3 > 0,\ f(0) = -1 < 0 \ \text{ και } \ f(2) = e^2 > 0.$$

Επίσης η f είναι συνεχής ως άθροισμα γινομένων συνεχών συναρτήσεων. Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και ισχύει $f(-1)\,f(0) < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Όμως, αφού $x_0 \neq -1, 0$ μπορούμε να γράψομε

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} + (x_0 - 2)x_0^3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x_0 - 1)e^{x_0} + (x_0 - 2)x_0^3}{(x_0 - 1)(x_0 - 2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{x_0 - 2} + \frac{x_0^3}{x_0 - 2} = 0,$$

πράγμα το οποίο δείχνει ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, αφού η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει $f(0)\,f(2) < 0$, συμπεραίνομε ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.8.3

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύει

$$5x^2 + 4f^2(x) = 5$$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση.

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, για να δείξομε ότι διατηρεί το πρόσημό της αρκεί να αποδείξομε ότι δεν μηδενίζεται στο διάστημα (α, β). Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσομε την εις άτοπο απαγωγή: υποθέτοντας ότι υπάρχει κάποιο τέτοιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$ και καταλήγοντας σε κάτι που δεν αληθεύει.

Πράγματι γράφοντας την ισότητα $5x^2 + 4f^2(x) = 5$ για $x = x_0$ λαμβάνομε:

$$5x_0^2 + 4f^2(x_0) = 5 \Rightarrow 5x_0^2 = 5 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = -1 \ \text{ ή } \ x_0 = 1,$$

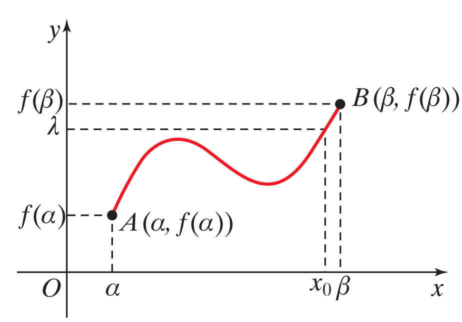
το οποίο είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Επομένως, η συνάρτηση f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα (α, β).

Ας υποθέσομε ότι για μια συνεχή συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$. Ας θεωρήσομε επίσης έναν αριθμό λ που βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, δηλαδή ισχύει $f(\alpha) < \lambda < f(\beta)$ (σχ. 4.8στ). Τότε μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε ότι η συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = f(x) - \lambda, \quad x \in [\alpha,\beta],$$

ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος του Bolzano. Πράγματι η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, επίσης ισχύει $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \lambda < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \lambda > 0$.

Επομένως, με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano συμπεραίνομε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \lambda = 0$ δηλαδή $f(x_0) = \lambda$.



Σχ. 4.8στ.

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Bolzano και είναι γνωστό ως ***Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών***. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

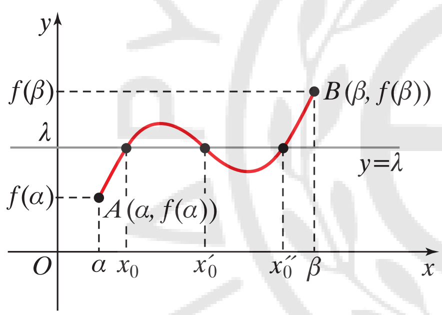
Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

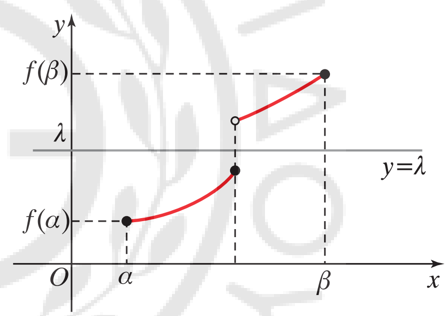
$$f(x_0) = \lambda.$$

Ο όρος ***Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών*** έχει προκύψει από το γεγονός ότι, σύμφωνα μ' αυτό, μία συνεχής συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές οι οποίες βρίσκονται ανάμεσα (ενδιάμεσα) στις τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ που λαμβάνει στα δύο άκρα του διαστήματος. Αυτό σημαίνει, ισοδύναμα, ότι για κάθε τιμή λ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda$ συναντάει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.8ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda$ συναντάει τη γραφική παράσταση της f δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδικό. Επίσης, αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.8η, δεν λαμβάνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Σχ. 4.8ζ.



Σχ. 4.8η.

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών αποδεικνύεται η επόμενη πολύ σημαντική ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων (σχ. 4.8θ):

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συναρτήσεως f είναι διάστημα.

Στην ειδική περίπτωση που μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, μπορούμε πολύ εύκολα να καθορίσομε τα άκρα του διαστήματος $f(\Delta)$ υπολογίζοντας τις τιμές της στα άκρα του Δ (αν τα άκρα ανήκουν στο πεδίο ορισμού της) ή τα πλευρικά όριά της σε αυτά (αν τα άκρα δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα:

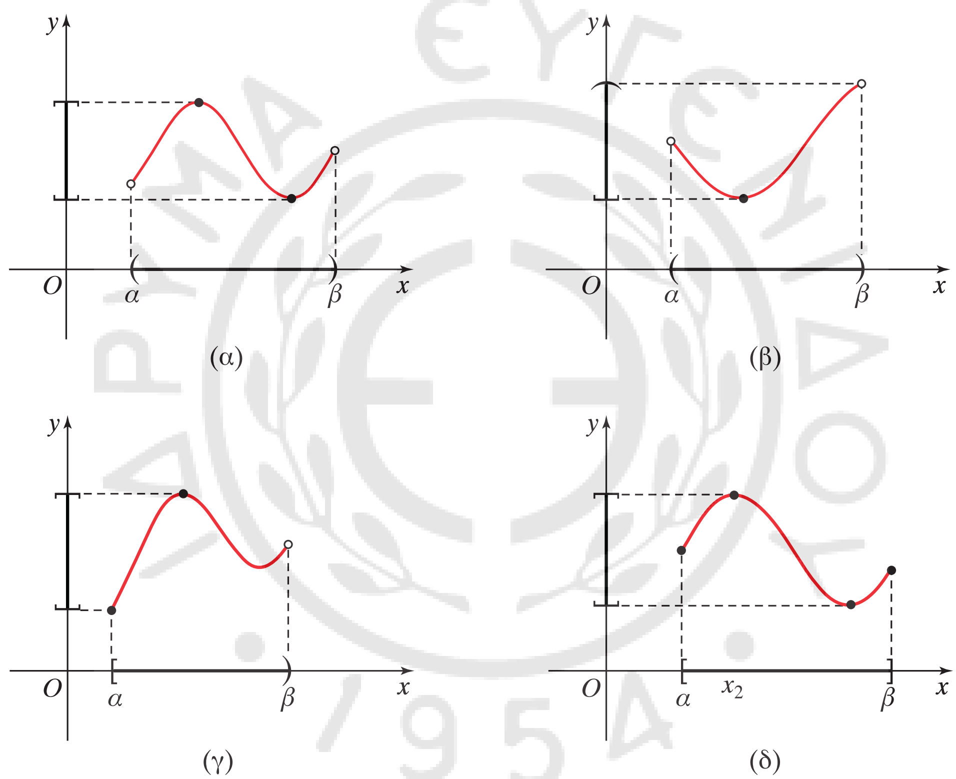
Αν μια συνάρτηση f είναι ***γνησίως αύξουσα*** και ***συνεχής*** σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) [σχ. 4.8ι(α)], όπου

$$A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \to \beta^-} f(x).$$

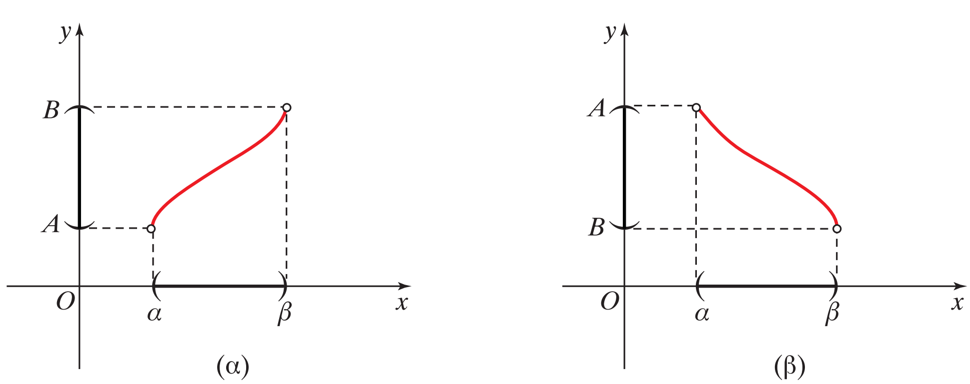
Αν, όμως, η f είναι ***γνησίως φθίνουσα*** και ***συνεχής*** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) [σχ. 4.8ι(β)].

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ και $(\alpha, \beta]$ προκύπτουν αντίστοιχα συμπεράσματα (το άκρο του συνόλου τιμών που αντιστοιχεί σε κλειστό άκρο του πεδίου ορισμού θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών, ενώ το άκρο του συνόλου τιμών που αντιστοιχεί σε ανοικτό άκρο του πεδίου ορισμού δεν θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών).

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στις παραπάνω περιπτώσεις, η αντίστροφη συνάρτηση της f (η οποία ορίζεται αφού η f, ως γνησίως μονότονη, θα αντιστρέφεται), είναι επίσης συνεχής με πεδίο ορισμού το διάστημα με άκρα A και B και σύνολο τιμών το διάστημα με άκρα α και β.



Σχ. 4.8θ.

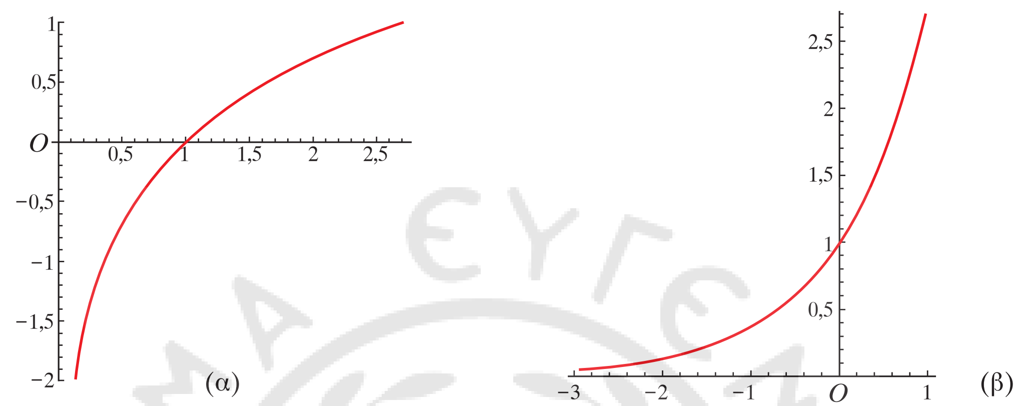


Σχ. 4.8ι.

Για παράδειγμα, το σύνολο τιμών της συναρτήσεως $f(x) = \ln x, x \in (0, e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, είναι το διάστημα $(-\infty, 1)$ [σχ. 4.8ια(α)], αφού

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to e^-} f(x) = \ln e = 1.$$

Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x) = e^x$ της f, είναι επίσης συνεχής με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, 1)$ και σύνολο τιμών το $(0, e)$ [σχ. 4.8ια(β)].



$f(x) = \ln x,\ x \in (0,e)$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = e^x,\ x \in (-\infty,1)$

Σχ. 4.8ια.

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, αν μια συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως μονότονη, τότε το σύνολο τιμών της $\{f(x) | x \in [\alpha, \beta]\}$ είναι ένα κλειστό διάστημα με άκρα τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ (δηλ. το $[f(\alpha), f(\beta)]$ αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή το $[f(\beta), f(\alpha)]$ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα).

Στην περίπτωση που η συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε και πάλι το σύνολο τιμών της $\{f(x) | x \in [\alpha, \beta]\}$ είναι ένα κλειστό διάστημα χωρίς όμως τα άκρα του να είναι απαραίτητα τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα (η απόδειξη παραλείπεται).

> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει:
>
> $$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η τιμή που λαμβάνει η f στη θέση x_1 είναι η μικρότερη δυνατή (αφού ισχύει $f(x_1) \le f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$), ενώ η τιμή που λαμβάνει στη θέση x_2 είναι η μεγαλύτερη δυνατή (αφού $f(x) \le f(x_2)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$). Για το λόγο αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό με την ονομασία ***θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής***. Συνδυάζοντας το θεώρημα αυτό με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι το ***σύνολο τιμών*** μιας συνεχούς συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.8.4.

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

$$f(x) = \ln x + e^x,\ x \in [1, 3] \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x \in (0, 2].$$

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων (βλ. άσκηση 4.2.11).

Αφού

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\ln x + e^x) = \lim_{x\to 1}(\ln x + e^x) = \ln 1 + e^1 = 0 + e = e$$

και

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(\ln x + e^x) = \lim_{x\to 3}(\ln x + e^x) = \ln 3 + e^3$$

το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $[e, \ln 3 + e^3]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως φθίνουσα ως άθροισμα φθινουσών συναρτήσεων.

Αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

θα έχομε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = +\infty.$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $[\frac{3}{4}, +\infty]$.

Ασκήσεις.

4.8.1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\varDelta$.

α) $f(x) = x +$ συν$2x - 3$ $\varDelta = [0, \pi]$ β) $f(x) = x +$ ημ$x - x + 1$ $\varDelta = [0, \pi]$

γ) $f(x) = x^3 - 3^x + 2$, $\varDelta = [-2, 0]$ δ) $f(x) = 4^x - 3^x + 2^x - 2$, $\varDelta = [0, 1]$

ε) $f(x) = x^5 - 2x^2 + 2$, $\varDelta = [-1, 0]$ στ) $f(x) = x^3 - 3^x + 2$, $\varDelta = [-2, 0]$

4.8.2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0], [0, 2]$ και $[2, 3]$.

4.8.3. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^3+1}{x+2} + \dfrac{x^2+1}{x-2} = 0$ β) $\dfrac{e^{-2x}}{x+2} + \dfrac{\ln(|x|/2)+1}{x-2} = 0$ γ) $\dfrac{\sqrt{|x|+2}}{x+2} + \dfrac{x^3+1}{x-2} = 0$

έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 2)$.

4.8.4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων f για όλες τις τιμές του x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x) = x^3 - 16x$ β) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ γ) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(x^4 - 16)$

δ) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ ε) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ στ) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

4.8.5. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων f για όλες τις τιμές του x που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

α) $f(x) = ημx + συνx$ β) $f(x) = ημ2x + συν2x$ γ) $f(x) = -ημx + συνx$

δ) $f(x) = 2ημ2x - 1$ ε) $f(x) = 2συν2x - 1$ στ) $f(x) = 2συν\dfrac{x}{2} + 1$

4.8.6. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα που δίνεται.

α) $f(x) = e^x$, $(-1, 1]$ β) $f(x) = -3x + 2$, $(-2, 2)$ γ) $f(x) = 2\ln x + 1$, $[1, e^2]$

δ) $f(x) = \sqrt{x}$, $(1, 4]$ ε) $f(x) = e^x + 1$, $(-\infty, 0]$ στ) $f(x) = 2ημx + 1$ $x \in [0, \pi/3)$

ζ) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $(1, 10]$ η) $f(x) = 2e^x - 3$, $(-1, +\infty)$ θ) $f(x) = 2συνx + 1$ $x \in [\pi/2, \pi)$

4.8.7. Αν για συναρτήσεις f, g, οι οποίες είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[-1,1]$ ισχύει $[f(1) - g(1)][g(-1) - g(-1)] > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

4.8.8. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύει $x^2 + 3f^3(x) = 4x - 5$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα (α, β).

4.8.9. Με τη βοήθεια της μεθόδου της διχοτομήσεως να προσδιορίσετε ένα διάστημα που να περιέχει τη ρίζα των επομένων εξισώσεων και το πλάτος του να είναι το πολύ ίσο με το 1/10 του πλάτους του διαστήματος που δίνεται.

α) $x^3 - 3 = 0$, $\Delta = [1, 2]$ β) $x^4 - 2x^3 = 2$, $\Delta = [-1, 0]$ γ) $x^4 - 2x^3 = 2$, $\Delta = [1, 2]$

δ) $x^4 - 2 = 0$, $\Delta = [1, 2]$ ε) $2x - 3\sqrt{x} = 1$, $\Delta = [0, 8]$ στ) $4^x - 2^x = 1$, $\Delta = [0, 32]$

4.8.10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.

4.9 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Ίσες συναρτήσεις $f = g$.	Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
Βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο A.	$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in A$ $(f-g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in A$ $(cf)(x) = cf(x),\ x \in A$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in A$ $(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ x \in A$ και $g(x) \neq 0$.
Συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο Δ. Συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο Δ.	$f(x_1) < f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

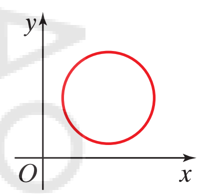
Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$. (ή συνάρτηση 1–1).	Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.
Άρτια συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$.	Για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$ και επί πλέον ισχύει $f(-x) = f(x)$
Περιττή συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$.	Για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$ και επί πλέον ισχύει $f(-x) = -f(x)$
Περιοδική συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$ με περίοδο το θετικό αριθμό T.	Για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $x + T \in A$ και επί πλέον ισχύει $f(x+T) = f(x)$
Σύνθεση της $f : A \to \mathbf{R}$ με την $g : B \to \mathbf{R}$.	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για όλα τα $x \in A$, για τα οποία $f(x) \in B$
Αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \to A$ μιας αμφιμονοσήμαντης συναρτήσεως f.	Αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f ($y \in f(A)$) στο μοναδικό x για το οποίο ισχύει $y = f(x)$. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$
Βασικές ιδιότητες του πεπερασμένου ορίου στο $x_0 \in \mathbf{R}$.	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (όταν $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$) $\lim\limits_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert = \left\lvert \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right\rvert$ $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^\nu = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right]^\nu$
Κριτήριο παρεμβολής.	Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$
Όριο πολυωνυμικής συναρτήσεως $P(x)$ στο x_0.	$\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
Όριο ρητής συναρτήσεως $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ στο x_0 (όταν $Q(x_0) \neq 0$):	$\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

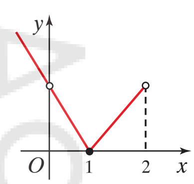
Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο x_0.	$\lim\limits_{x\to x_0} ημx = ημx_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} συνx = συνx_0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1, \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{ημαx}{x}=α$
Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.	Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$, όπου $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$. Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$, όπου $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.
Όριο πολυωνυμικής συναρτήσεως $P(x)=αx^n+βx^{n-1}+\cdots+δ$, $α\neq 0$, στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=α\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^n)$
Όριο ρητής συναρτήσεως $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{αx^n+βx^{n-1}+\cdots+δ}{α'x^m+β'x^{m-1}+\cdots+δ'}$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ ($α\neq 0$, $α'\neq 0$).	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=α\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^n)$
Κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.	Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$, όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, είναι $+\infty$ ή $-\infty$
Συνέχεια συναρτήσεως στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
Συνεχής συνάρτηση σε ανοικτό διάστημα $(α,β)$.	Όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(α,β)$.
Συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα $[α,β]$.	Όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του $(α,β)$ και επί πλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to α^+} f(x)=f(α)$, $\lim\limits_{x\to β^-} f(x)=f(β)$
Συνέχεια και πράξεις.	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις $f+g$, cf (με $c\in\mathbf{R}$), $f\cdot g$, $\|f\|$ $\frac{f}{g}$ (όπου $g(x_0)\neq 0$), $\sqrt[ν]{f}$ (όπου $f(x_0)\geq 0$).
Συνέχεια συνθέσεως συναρτήσεων.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $Δ = (α, β)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και η g είναι συνεχής στο $f(Δ)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο $Δ$.

Συνεχείς βασικές συναρτήσεις.	– Πολυωνυμικές συναρτήσεις. – Ρητές συναρτήσεις. – Τριγωνομετρικές συναρτήσεις. – $f(x)=a^x$. – $g(x)=\log_a x, \quad 0<\alpha\neq 1$.
Θεώρημα Bolzano.	Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.	Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\lambda$.

4.10 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το διάγραμμα του σχήματος 4.10α δεν αποτελεί γραφική παράσταση συναρτήσεως  **Σχ. 4.10α.**	**Σ Λ**
2.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3$. Η σύνθεση $h = f\circ f$ έχει τύπο $h(x) = x^6$.	**Σ Λ**
3.	Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το **R** αντιστρέφεται όταν η ευθεία $y = a$ έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τη C_f.	**Σ Λ**
4.	Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{-x^2+5}{x^2+2}$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5/2$.	**Σ Λ**
5.	Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια αυτών στο x_0, τότε ισχύει η ανισότητα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.	**Σ Λ**
6.	Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$. Τότε η f δεν έχει όριο στο 0.	**Σ Λ**
7.	Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε $(f\circ g)(x) = -x$.	**Σ Λ**
8.	Αν $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^3}$, τότε $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$, ενώ δεν υπάρχει όριο της f στο 4.	**Σ Λ**

9.	$\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^3+2x}\right)\right]=(\lim\limits_{x\to 0}x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3+2x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3+2x}=0$.	**Σ Λ**
10.	Αν $\dfrac{2}{x^4}\le f(x)\le\dfrac{2}{x^2}$, $x\in(1,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.	**Σ Λ**
11.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, τότε η f θα είναι συνεχής στο x_0.	**Σ Λ**
12.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.	**Σ Λ**
13.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=m$, όπου $l,m\in\mathbf{R}$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x)<g(x)$, τότε κατ' ανάγκη θα έχομε $l\le m$.	**Σ Λ**
14.	Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-3x)^5}{x^3+1}$ είναι ίσο με $-\infty$.	**Σ Λ**
15.	Αν $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=0$.	**Σ Λ**
16.	Έστω η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 4.10β. Σ' αυτήν την περίπτωση η f είναι συνεχής στο $x_1=0$ και στο $x_2=1$.  **Σχ. 4.10β**	**Σ Λ**
17.	Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $\varDelta=[\alpha,\beta]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$.	**Σ Λ**
18.	Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.	**Σ Λ**
19.	Κάθε συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $\varDelta$, η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $\varDelta$, διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα $\varDelta$.	**Σ Λ**
20.	Οι συνεχείς συναρτήσεις f διατηρούν το πρόσημό τους σε καθένα από τα διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού τους.	**Σ Λ**
21.	Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=2$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=e$.	**Σ Λ**
22.	Αν μία συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η εξίσωση $f(x^3)=f(-x)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.	**Σ Λ**
23.	Το θεώρημα Bolzano αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών.	**Σ Λ**

24.	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι επίσης ένα ανοικτό διάστημα.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν

1.	Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x)=\left\|\dfrac{x^2-2}{x^2+1}\right\|$ είναι το: α) **R** β) **R** – {–1,1}} γ) **R** – {1} δ) **R** – {2}
2.	Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με τύπους αντίστοιχα $f(x)=3x$, $g(x)=x^3-3$, $h(x)=3(x^3-1)$ Τότε: α) $h=f\circ g$ β) $h=g\circ f$ γ) $f=h\circ g$ δ) $g=h\circ f$
3.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2$. Η σύνθεση $h=f\circ f\circ f$ έχει τύπο: α) $h(x)=x^6$ β) $h(x)=x^8$ γ) $h(x)=x$ δ) $h(x)=x^2$
4.	Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^\rho}\right)$, όπου ϱ ένας θετικός ακέραιος, είναι ίσο με: α) $+\infty$ β) $-\infty$ γ) 0 δ) 1
5.	Έστω $f(x)=-x^{10}+x^9-1000$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$
6.	Αν $f(x)=e^{-x}$, τότε: α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$
7.	Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{-x^2+5}{x^2+2}$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5/2$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=5/2$ γ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=5/2$ δ) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=5/2$
8.	Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu(x/2)}{x}$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ β) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$ γ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{2}$ δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$
9.	Το όριο της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{\|2x-4\|}{5(x-2)}$ στο $x_0=0$ είναι ίσο με: α) –2 β) $\dfrac{5}{2}$ γ) $-\dfrac{5}{2}$ δ) 2

10.	Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 0$, τότε, κοντά στο x_0, θα ισχύει: α) $f(x) > 0$ β) $f(x) < 0$ γ) $f(x) = 0$ δ) $f(x) = x_0$
11.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-1$, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)-2g(x)]$ είναι ίσο με: α) 5 β) 1 γ) 2 δ) –5
12.	Αν $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = 1$ είναι: α) Κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. β) Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. γ) Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$. δ) Τίποτε από τα προηγούμενα.
13.	Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-10,\quad x>0$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-10$. β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. δ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.
14.	Αν $P(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu\neq 0$, τότε: α) $\lim\limits_{x\to +\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$ β) $\lim\limits_{x\to -\infty} P(x)=\alpha_0$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} P(x)=\alpha_\nu$ δ) $\lim\limits_{x\to 0} P(x)=\alpha_\nu$
15.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε: α) Η $f(x)$ θα παίρνει θετικές τιμές ($f(x) > 0$) κοντά στο x_0. β) Η $f(x)$ θα παίρνει αρνητικές τιμές ($f(x) < 0$) κοντά στο x_0. γ) $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$. δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.
16.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε: α) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ β) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$ δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $-\infty$
17.	Μια συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: α) $f(x_1) < f(x_2)$, β) $f(x_1) > f(x_2)$, γ) $f(x_1) = f(x_2)$, δ) $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$.

18.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε: α) Η συνάρτηση $g\,f$ είναι συνεχής στο x_0. β) Η συνάρτηση $g+f$ είναι συνεχής στο x_0. γ) Η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0. δ) Η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.
19.	Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το **R**, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη. Τότε η εξίσωση $f(x^2) = f(x)$: α) Έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0. β) Είναι αδύνατη στο **R**. γ) Έχει ως ρίζες τους αριθμούς 0 και 1. δ) Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

4.11 Γενικές ασκήσεις.

4.11.1. Έστω μία συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 + ax^2 - 2x + \beta$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι, ώστε τα σημεία (2, 25) και (1,0) να ανήκουν στη C_f .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

γ) Να μετασχηματίσετε τον τύπο της συναρτήσεως σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

δ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει $f(x) > 0$.

ε) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της συναρτήσεως f;

4.11.2. Ο λόγος των όγκων αντιψυκτικού και νερού που περιέχονται στο ψυγείο, της μηχανής ενός αυτοκινήτου είναι 5/3.

α) Να βρείτε τη σχέση που δίνει τα y λίτρα του αντιψυκτικού που περιέχονται στο ψυγείο, ως συνάρτηση της χωρητικότητας του x.

β) Πόσα lt αντιψυκτικού θα περιέχονται σε ψυγείο χωρητικότητας 10 lt;

γ) Η θερμοκρασία της μηχανής δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 100 - 5x$, όπου x είναι τα lt του διαλύματος αντιψυκτικού και νερού που είναι στο ψυγείο. Να βρείτε τη θερμοκρασία της μηχανής, αν στο ψυγείο υπάρχουν 3 lt αντιψυκτικού.

4.11.3. Σε δύο συνεχόμενα δωμάτια ενός κρουαζιερόπλοιου το ένα έχει θέρμανση, ενώ το άλλο δεν έχει. Όταν η πόρτα που τα συνδέει μείνει ανοικτή, για χρόνο t, (σε min) οι θερμοκρασίες των δωματίων σε ^{o}C, δίνονται από τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους $f_1(t) = 30 - \dfrac{t^2}{50}$ και $f_2(t) = 15 + \dfrac{t}{10}$.

α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων.

β) Ποια από τις δύο συναρτήσεις θα δίνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας στο δωμάτιο χωρίς θέρμανση;

γ) Τι πληροφορίες λαμβάνετε από την παρατήρηση των δύο γραφικών παραστάσεων;

δ) Σε πόση ώρα τα δωμάτια θα έχουν την ίδια θερμοκρασία και ποια είναι αυτή;

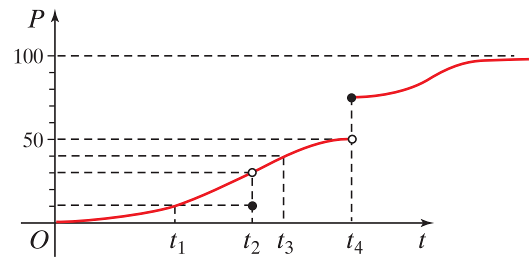
ε) Να βρείτε σε πόση ώρα η θερμοκρασία του δωματίου με θέρμανση θα φθάσει τους 10^{o}C.

4.11.4. Το σχήμα 4.11 παριστάνει το ποσοστό γνώσεως $f(t)$, που έχει αποκτήσει κάποιος σπουδαστής της ΑΕΝ τη χρονική στιγμή t διαβάζοντας το αντίστοιχο διδακτικό εγχειρίδιο. Ποσοστό γνώσεως 100% σημαίνει ότι ο σπουδαστής έχει κατανοήσει πλήρως το βιβλίο. Τη χρονική στιγμή t_2 ο φοιτητής διέκοψε το διάβασμα, για να λύσει μία άσκηση από την προηγούμενη ύλη. Τη χρονική στιγμή t_4 ο καθηγητής εξηγεί αναλυτικά στο σπουδαστής το περιεχόμενο του βιβλίου και ο φοιτητής αρχίζει να κατανοεί καλύτερα αυτό που διαβάζει.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim\limits_{t \to t_1} f(t)$, $\lim\limits_{t \to t_2} f(t)$, $\lim\limits_{t \to t_4} f(t)$.

β) Ποιες χρονικές στιγμές η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής;

γ) Με τι είναι ίσο το όριο $\lim\limits_{t \to t_1} f(t)$ και ποια η φυσική του σημασία;



Σχ. 4.11

4.11.5. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda^2$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 6\lambda + 5$.

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

4.11.6. Όταν ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια, συλλέγει $f(x)$ μονάδες παραγόμενου προϊόντος, οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$f(x) = \alpha + \beta(1 - e^{-\lambda x}),\ x \geq 0\ (\alpha, \beta, \lambda \text{ θετικές σταθερές}).$$

α) Ποια είναι η φυσική σημασία της σταθεράς α;

β) Πόσες μονάδες προϊόντος θα συλλέξει ο γεωργός ρίχνοντας «άπειρη» ποσότητα λιπάσματος στην καλλιέργεια;

4.11.7. Η εταιρεία A πουλά κάποιο προϊόν με το κιλό. Θέλοντας να παρακινήσει τους πελάτες της σε μεγάλες αγορές χρεώνει το ένα κιλό του προϊόντος, 40 €, αν η ποσότητα που αγοράζεται είναι κάτω από 8 kg και 30 €, αν η ποσότητα είναι 8 ή περισσότερα κιλά.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή αγοράς x kg σε € και να εξετάσετε αν είναι συνεχής.

β) Τι παρατηρείτε για αγορές λίγο μικρότερες ή μεγαλύτερες των 8 kg;

4.11.8. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ γ) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}$

4.11.9. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει

$$-4x^2 - 3x + 2 \leq f(x) \leq -x^2 - 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

και

$$2 + x^3 \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\text{συν}^2 2x} \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$$

να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

4.11.10. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x-2)(x^2 - 5x^2 + 1)$ και η συνάρτηση με τύπο

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1}, & x\neq 1\\ \alpha x+5, & x=1.\end{cases}$$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παραστάσεως της f με τους άξονες $x'x,\quad y'y$.

β) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η συνάρτηση h να είναι συνεχής.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και της g.

4.11.11. Για να μελετήσουν τη δράση ενός νέου φάρμακου, κάποιοι επιστήμονες χορηγούν σε διάφορα άτομα συγκεκριμένη ποσότητα απ' αυτό και καταγράφουν τη συγκέντρωσή του y στο αίμα μετά από x ώρες. Προσπαθούν να βρουν ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει τη συγκέντρωση με τη μορφή μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ χρησιμοποιώντας τα εξής δεδομένα που προκύπτουν από τη μέχρι σήμερα εμπειρία τους:

α) Στην αρχή του πειράματος δεν υπάρχει καθόλου φάρμακο στον οργανισμό, δηλαδή $f(0) = 0$.

β) Η ζητούμενη συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής για $x \geq 0$, επειδή η μεταβολή της συγκεντρώσεως στο αίμα γίνεται βαθμιαία .

γ) Ύστερα από πολύ χρόνο η συγκέντρωση του φάρμακου στον οργανισμό, μηδενίζεται, δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

δ) Μισή ώρα μετά τη λήψη του φαρμάκου η συγκέντρωση y είναι περίπου 83, ύστερα από 1 ώρα γίνεται περίπου 57%, ενώ μετά από 4 h είναι μόλις 18%.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{12x}{15x^2+5x+1},\ x\geq 0$$

έχει όλες τις ιδιότητες που περιγράψαμε.

4.11.12. Έστω η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=x^2+x-\frac{1}{x-2}$$

α) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f.

β) Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x(x+1)) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-x(x+1)).$$

γ) Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2)(f(x)-x(x+1)) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}(x-2)(f(x)-x(x+1)).$$

4.11.13. Η θέση τροχιά δύο πλοίων περιγράφεται επάνω σε ένα ναυτικό χάρτη από τα σημεία $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ αντίστοιχα, όπου f και g είναι συναρτήσεις με τύπους

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x^2+2},\quad g(x)=\frac{x^4+1}{x+2},\quad x\geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι οι τροχιές των πλοίων τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο, του οποίου η τετμημένη βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 1 και 2 $(1\leq x\leq 2)$.

4.11.14. Ένας νέος εργαζόμενος παρουσιάζει απόδοση μετά από x ημέρες απασχολήσεως σε μία συγκεκριμένη θέση, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f(x)=10+\frac{50x^2}{5x^2+50},\quad x\geq 0.$$

Θεωρήστε ότι ο δείκτης αποδόσεως $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση του x.

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων κυμαίνεται ο δείκτης αποδόσεως του εργάτη.

β) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} f(x)$$

και να δώσετε την φυσική τους ερμηνεία.

γ) Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά ο τύπος

$$f(x) = 10 + \frac{50x^3}{5x^2 + 50}, \quad x \geq 0$$

προκειμένου να περιγράψει την απόδοση του εργαζομένου μετά από x ημέρες απασχολήσεως; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Σε πολλά πρακτικά προβλήματα που σχετίζονται με τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανολογία, την οικονομία, την οικολογία κ.λπ. εμφανίζεται συχνά η ανάγκη να μελετήσομε συστηματικά τον τρόπο που μεταβάλλονται διάφορα μεγέθη, για παράδειγμα πώς αλλάζει η ταχύτητα ενός κινητού με το πέρασμα του χρόνου, πώς κυμαίνεται η τάση σε μία γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικού ρεύματος, πώς μεταβάλλεται διαχρονικά το μέγεθος ενός πληθυσμού κ.ά.. Τον 17ο αιώνα, διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με την κίνηση ενός σώματος, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642–1727) και Leibniz (1646–1716), οι οποίοι εισήγαγαν την έννοια της «παραγώγου» και τη χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής και της Γεωμετρίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσομε με την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου (που αποτελεί την «καρδιά» του Διαφορικού Λογισμού) και στη συνέχεια θα παρουσιάσομε τις βασικές ιδέες και τεχνικές της περιοχής αυτής.

5.1 Η έννοια της παραγώγου.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε κυρίως τις μεταβολές που υφίστανται οι τιμές μιας συναρτήσεως, όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή. Στα πλαίσια αυτά διερευνήσαμε δύο συγκεκριμένους «νόμους μεταβολών»: τη ***μονοτονία*** και τη ***συνέχεια*** μιας συναρτήσεως. Στο κεφάλαιο θα στραφούμε σε μια τελείως νέα κατεύθυνση που αφορά στη σύγκριση της μεταβολής μιας συναρτήσεως f πλησίον ενός σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της, δηλαδή της διαφοράς $f(x)-f(x_0)$, με την αντίστοιχη μεταβολή $x-x_0$ της ανεξάρτητης μεταβλητής. Προς τούτο ας θεωρήσομε τη γραφική παράσταση C_f μιας συνεχούς συναρτήσεως (σχ. 5.1α), ένα σημείο της $A\ (x_0, f(x_0))$ και ένα δεύτερο σημείο $B(x, f(x))$, με $x \neq x_0$. Αν συμβολίσομε με $h = x - x_0 \neq 0$ την απόσταση των τετμημένων των σημείων A και B (οπότε θα έχομε $x = x_0 + h$), ο λόγος

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τη μορφή και τις ιδιότητες της συναρτήσεως f και ονομάζεται ***λόγος μεταβολής της*** f (ή εναλλακτικά, ***πηλίκο διαφορών της*** f). Το όριο του λόγου μεταβολής όταν το x τείνει στο x_0 (ισοδύναμα, όταν $h \to 0$ ονομάζεται ***παράγωγος της συναρτήσεως*** f στο σημείο x_0. Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

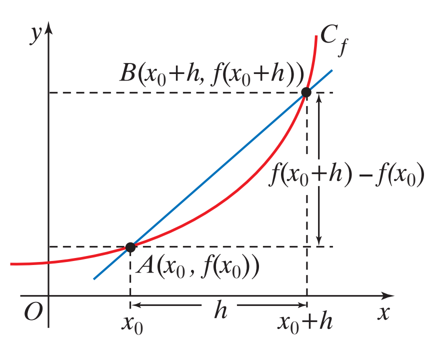
Έστω f μια συνάρτηση και $A\ (x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε θα λέμε ότι η f είναι ***παραγωγίσιμη*** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Τοόριο αυτό ονομάζεται ***παράγωγος*** της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

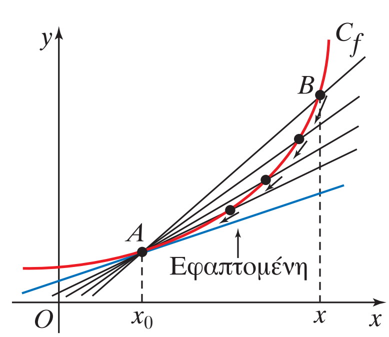
Από τη μοναδικότητα του ορίου (την οποία συναντήσαμε στο κεφάλαιο 4), προκύπτει άμεσα ότι η παράγωγος μιας συναρτήσεως, όταν υπάρχει, είναι μοναδική.

Αν θέσομε $x - x_0 = \Delta x$ και $f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, ο τύπος ορισμού της παραγώγου μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$



Σχ. 5.1α.



Σχ. 5.1β.

Ο συμβολισμός της παραγώγου στο x_0 με $f'(x_0)$ οφείλεται στον Lagrange, ενώ ο Leibniz, λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία ισότητα, συμβόλισε την παράγωγο στο x_0 με:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \text{ ή } \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Σήμερα χρησιμοποιούνται και οι δύο προηγούμενοι συμβολισμοί, σχεδόν εξίσου, απ' όσους ασχολούνται με αντικείμενα που κάνουν χρήση της έννοιας της παραγώγου.

Έχοντας υπόψη μας το γεωμετρικό ορισμό της εφαπτομένης ενός κύκλου θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη μιας καμπύλης του επιπέδου, όταν έχει με αυτήν ένα μόνο κοινό σημείο και αφήνει την καμπύλη προς το αυτό μέρος του επιπέδου. Κατ' αναλογία θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως μια συναρτήσεως f σ' ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η οριακή θέση (εφ' όσον υπάρχει) των ευθειών που ορίζουν οι χορδές AB της γραφικής παραστάσεως, όταν το σημείο $B(x, f(x))$, κινούμενο πάνω στην γραφική παράσταση της f, προσεγγίζει το A (σχ. 5.1β).

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία, η οποία περνάει από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως $f'(x_0)$. Επομένως:

> Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση
>
> $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται συνήθως ***κλίση της γραφικής παραστάσεως C_f*** της f στο x_0 ή απλά ***κλίση*** της f στο x_0. Αν ω $(\omega \neq \frac{\pi}{2})$ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα, θα ισχύει εφ$\omega = f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \frac{x^2}{2}$ και $x_0 = 1$ θα έχομε:

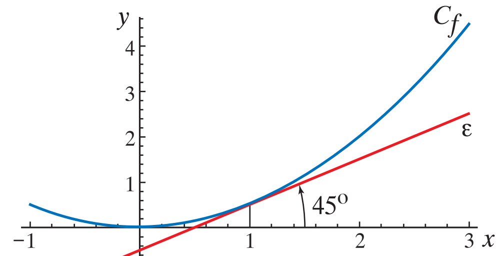
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{(1+h)^2}{2} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2h + h^2}{2h} = 1 + \frac{h}{2}$$

και επομένως

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}(1 + \frac{h}{2}) = 1.$$

Άρα η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$ και η παράγωγός της είναι ίση με $f'(1) = 1$. Επίσης, αφού η κλίση της f στο $x_0 = 1$ είναι ίση με $1 =$ εφ$\frac{\pi}{4}$, η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα θα είναι ίση με $\omega = \frac{\pi}{4} = 45^{o}$ (σχ. 5.1γ). Η εφαπτομένη ε της γραφικής παραστάσεως C_f στο σημείο $A(1, f(1))$, έχει την εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = 1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}.$$



Σχ. 5.1γ.

Ας εξετάσομε στο $x_0 = 1$ συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x \geq 1 \\ 3x, & x < 1. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Για $x > 1$, δηλαδή $x = 1 + h$, $h > 0$ θα έχομε:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{[(1+h)^2+2]-3}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h,$$

και επομένως

$$\lim_{h\to 1^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 1^+}(2+h)=2.$$

Για $x < 1$, δηλαδή $x = 1 + h$, $h < 0$ έχομε:

$$\lim_{h\to 1^-}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 1^-}\frac{3(1+h)-3}{h}=3.$$

Αφού ισχύει

$$\lim_{h\to 1^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3\neq 2=\lim_{h\to 1^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$.

Από τα παραπάνω και από όσα αναλύσαμε στο κεφάλαιο 4 για τα πλευρικά όρια, καθίσταται φανερό ότι αν x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μίας συναρτήσεως f, τότε θα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Η f είναι ***παραγωγίσιμη*** στο x_0, αν και μόνον αν υπάρχουν τα όρια

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

και είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί.

Οι ποσότητες $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ ονομάζονται ***πλευρικές παράγωγοι*** της f στο $\boldsymbol{x_0}$ από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που το x_0 είναι άκρο διαστήματος (πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f), τότε ονομάζομε εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία που προκύπτει χρησιμοποιώντας στον τύπο της εφαπτομένης την κατάλληλη πλευρική παράγωγο.

Έστω τώρα μια συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0. Για $x \neq x_0$ μπορούμε να γράψομε:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

και αφού

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0,$$

συμπεραίνομε ότι

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}[(f(x)-f(x_0))+f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))+\lim_{x\to x_0} f(x_0)=0+f(x_0)=f(x_0)$$

το οποίο δείχνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0. Καταλήγομε λοιπόν στο επόμενο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

> Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής σ' αυτό.

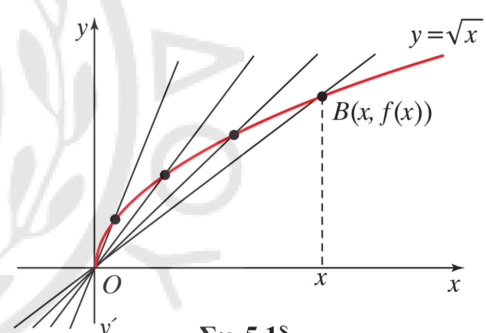
Προφανώς, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα είναι φανερό ότι αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής στο $x_0=0$ χωρίς να είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο. Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να ελέγξομε ότι η συνάρτηση (5.1.1), για την οποία αποδείξαμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Έστω τέλος η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$. Η f είναι συνεχής στο 0, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, αφού για $h>0$ έχομε:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty.$$

Θέλοντας να εξετάσομε τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή με την εφαπτομένη της C_f, στο σημείο της $O(0, 0)$, ας θεωρήσομε ένα δεύτερο σημείο $\mathrm{B}(x, f(x))$, $x>0$ της C_f. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1δ, καθώς το B προσεγγίζει το σημείο O κινούμενο επάνω στη γραφική παράσταση της f, η τετμημένη του x προσεγγίζει το μηδέν. Έτσι, η ευθεία OB τείνει να πάρει ως οριακή θέση στο σημείο $O(0, 0)$ την κατακόρυφη που περνά από το O, δηλαδή τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή, ως εφαπτομένη της C_f, στο σημείο της $O(0, 0)$ ορίζομε την κατακόρυφη ευθεία με την εξίσωση $x=0$.



Σχ. 5.1δ.

Γενικά:

> Αν μια συνάρτηση f είναι ***συνεχής*** στο x_0 και ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:
>
> α) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$ (ή $-\infty$),
>
> β) $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$ και $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$,
>
> γ) $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$ και $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$,
>
> τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η (κατακόρυφη) ευθεία με εξίσωση $x=x_0$.

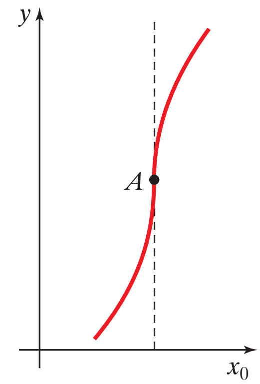
Στην περίπτωση που ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty,$$

τότε λέμε ότι η ***συνάρτηση f έχει παράγωγο*** $+\infty$ (σχ. 5.1ε). Αντίστοιχα αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

θα λέμε ότι η ***συνάρτηση f έχει παράγωγο*** $-\infty$.



Σχ. 5.1ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 5, & x \leq 0 \\ x^2 + 5, & x > 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β) Για ποια τιμή του α είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$;

Λύση.

α) Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$, πρέπει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Όμως έχομε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\alpha x + 5) = \lim_{x \to 0} (\alpha x + 5) = \alpha \lim_{x \to 0} x + 5 = 5$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 5) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 5) = 5,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 5$$

και αφού $f(0) = \alpha \cdot 0 + 5 = 5$ για κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$, θα ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η συνάρτηση θα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$.

β) Για $h \neq 0$ έχομε:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[\alpha \cdot (0+h) + 5] - 5}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\alpha h}{h} = \alpha,$$

ενώ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(h^2 + 5) - 5}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} h = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, μόνο όταν $\alpha = 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ενώ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$, μόνο για $\alpha = 0$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Ασκήσεις.

5.1.1. Να βρείτε την παράγωγο στο σημείο x_0 των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x+2, \quad x_0=1$ β) $f(x)=x^2+2, \quad x_0=4$ γ) $f(x)=2, \quad x_0=1$

δ) $f(x)=3x^2+2, \quad x_0=0$ ε) $f(x)=\dfrac{3}{x}, \quad x_0=1$ στ) $f(x)=\eta\mu x, \quad x_0=0$

5.1.2. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις με τους παρακάτω τύπους ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_0 και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό το σημείο.

α) $f(x)=\begin{cases} 4x-2 & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 2x^2 & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}, \quad x_0=1$ β) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 2x^2 & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}, \quad x_0=1$

γ) $f(x)=|x-1|, \quad x_0=1$ δ) $f(x)=\sqrt{x}\,, \quad x_0=1$

ε) $f(x)=|x-1|+|x+1|, \quad x_0=1$ στ) $f(x)=|x-1|+|x+1|, \quad x_0=0$.

Στην περίπτωση που η παράγωγος υπάρχει, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

5.1.3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=3x+2x^2$.
α) Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 \in$ R.
β) Να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=1$ και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,5)$.

5.1.4. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2 & \text{αν} \quad x\le 1 \\ x+\beta & \text{αν} \quad x>1. \end{cases}$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

5.1.5. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο x_0 και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=a\in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ότι $f'(x_0)=a$.

5.1.6. Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x^2+2x+1\le f(x)\le 5x^2+2x+1$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και ότι ισχύει $x(x+2)\le f(x)-f(0)\le x(5x^2+2)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.
γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0=0$.

5.1.7. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot g(x)$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο και ότι $f'(0)=g(0)$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω συμπέρασμα να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 + x^3$ συνx είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ότι $f'(0)=1$.

5.2 Παράγωγος συνάρτηση. Κανόνες παραγωγίσεως.

Ας θεωρήσομε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2$ (η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$) και έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x_0. Προκειμένου να υπολογίσομε την παράγωγο $f'(x_0)$ στο συγκεκριμένο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, παρατηρούμε ότι για $h\ne 0$ έχομε:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=\frac{(x_0^2+2x_0h+h^2)-x_0^2}{h}=\frac{2x_0h+h^2}{h}=2x_0+h$$

οπότε,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0.$$

Άρα $f'(x_0)=2x_0$.

Δεδομένου ότι ισχύει $f'(x_0)=2x_0$ για κάθε x_0, θα μπορούσαμε να ορίσομε μια νέα συνάρτηση, η οποία σε κάθε x_0 να απεικονίζει τον αριθμό $f'(x_0)=2x_0$ ή, ισοδύναμα, σε κάθε x να απεικονίζει τον αριθμό $2x$. Τη νέα αυτή συνάρτηση θα τη λέμε συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f και θα τη συμβολίζομε με f'. ΄Ετσι, μπορούμε να γράψομε ότι $f'(0)=2\cdot 0$ και για τα διάφορα x' να βρίσκομε τις αντίστοιχες τιμές της νέας συναρτήσεως, π.χ. $f'(1)=2\cdot 1=2$, $f'(0)=2\cdot 0=0$, $f'(-2)=2\cdot(-2)=-4$ κ.λπ.

Γενικά, έστω μία συνάρτηση f, η οποία παραγωγίζεται σε κάθε $x_0\in \varDelta$, όπου $\varDelta$ είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Τότε η συνάρτηση $f': x\to f'(x)$ με πεδίο ορισμού το $\varDelta$ ονομάζεται ***συνάρτηση πρώτης παραγώγου*** της f ή απλώς ***παράγωγος*** της f και συμβολίζεται με:

$$f' \text{ ή } \frac{df}{dx} \text{ ή } y' \text{ ή } \frac{dy}{dx}.$$

Μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε και τους όρους «η παράγωγος $f'(x)$» ή «η παράγωγος $\frac{df(x)}{dx}$».

Για τις συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσομε στη συνέχεια, το $\varDelta$ είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αν υποθέσομε ότι σε κάποιο υποσύνολο του $\varDelta$ η f είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγος της f', θα ονομάζεται ***δεύτερη παράγωγος συναρτήσεως της*** f και συμβολίζεται με:

$$f'' \text{ ή } \frac{d^2f}{dx^2} \text{ ή } y'' \text{ ή } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ή } f''(x).$$

Επαγωγικά μπορεί να οριστεί η ***νιοστή παράγωγος*** $f^{(\nu)}$ της f ή ***παράγωγος της*** f ***νιοστής τάξεως***, από τον τύπο

$$f^{(\nu)}=\left(f^{(\nu-1)}\right)',\ \ \nu\geq 3.$$

Η νιοστή παράγωγος θα συμβολίζεται με

$$f^{(\nu)}(x) \text{ ή } \frac{d^\nu f}{dx^\nu} \text{ ή } y^{(\nu)} \text{ ή } \frac{d^\nu y}{dx^\nu}.$$

Η διαδικασία ευρέσεως της παραγώγου μιας συναρτήσεως ονομάζεται ***παραγώγιση***. Η εύρεση της παραγώγου συναρτήσεως δεν είναι πάντα εύκολο να γίνει με χρήση του ορισμού, για το λόγο αυτό θα μας διευκόλυνε αν είχαμε κάποιους τύπους που θα μας έδιναν την παράγωγο των βασικών συναρτήσεων που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 4 και επί πλέον κάποιους κανόνες παραγωγίσεως για πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. ΄Ετσι δεν θα χρειάζεται να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά που θέλομε να παραγωγίσομε. Ο πίνακας 5.2.1, δίνει την πρώτη παράγωγο ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

Πίνακας 5.2.1
Η πρώτη παράγωγος των βασικών συναρτήσεων.

f	c (σταθερά)	x^ν	$\frac{1}{x},\ x\neq 0$	$\sqrt{x},\ x\geq 0$	ημx	συνx	e^x	$\ln x,\ x>0$
f'	0	$\nu x^{\nu-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$	συνx	$-$ημx	e^x	$\frac{1}{x}$

Ας δούμε την απόδειξη τριών από αυτούς τους τύπους.

Έστω αρχικά η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, όπου ν είναι ένας θετικός ακέραιος με $\nu \neq 0,\ 1$. Αν x_0 είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}.$$

Επομένως, για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή του **R**, ισχύει $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. Ο τελευταίος τύπος αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το ν είναι αρνητικός ακέραιος.

Στη συνέχεια θα αποδείξομε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ έχει παράγωγο συνάρτηση $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Πράγματι, αν x_0 είναι ένας θετικός αριθμός, τότε για $h\neq 0$ έχομε:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\frac{x_0+h-x_0}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}.$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Υπενθυμίζομε ότι, όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 5.1, η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 0, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Έστω τέλος η συνάρτηση με τύπο $f(x)$ = ημx. Για κάθε $x_0\in$ **R** και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\text{ημ}(x_0+h)-\text{ημ}x_0}{h}=\frac{\text{ημ}x_0\cdot\text{συν}h+\text{συν}x_0\cdot\text{ημ}h-\text{ημ}x_0}{h}=\text{ημ}x_0\cdot\frac{(\text{συν}h-1)}{h}+\text{συν}x_0\cdot\frac{\text{ημ}h}{h}$$

και αφού (βλ. ιδιότητες $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{B_4}$, $\mathbf{B_5}$ της παραγρ. 4.5)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{ημ}h}{h}=1,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\text{συν}h-1}{h}=0,$$

συμπεραίνομε ότι έχομε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\text{ημ}x_0\cdot 0+\text{συν}x_0\cdot 1=\text{συν}x_0.$$

Επομένως (ημx)' = συνx για κάθε $x\in$ **R**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.1.

Να βρείτε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=\ln x$, για το οποίο:

α) Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα είναι ίση $45^{\text{ο}}$.

β) Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διευθύνσεως ίσο με 1/4.
γ) Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να δώσετε την εξίσωση της εφαπτομένης σε κάθε περίπτωση.

Λύση.

Αφού
$$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x},$$
η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ακόλουθη $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

α) Γνωρίζομε ότι, αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα, θα ισχύει εφ$\omega= f'(x_0)$. Αφού $\omega=\pi/4$, θα έχομε:
$$f'(x_0)=\text{εφ}\frac{\pi}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=1 \Leftrightarrow x_0=1$$
οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1, f(1))=A(1,0)$ και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης η
$$y-\ln 1=\frac{1}{1}(x-1) \Leftrightarrow y=x-1.$$

β) Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με $f'(x_0)$. Επομένως έχομε:
$$f'(x_0)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=4$$
και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η
$$y-\ln 4=\frac{1}{4}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{x}{4}+(\ln 4-1).$$

γ) Η ευθεία ε θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, αν και μόνο αν
$$0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(0-x_0) \Leftrightarrow \ln x_0=1 \Leftrightarrow x_0=e.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το $A(e,1)$ και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης η
$$y-\ln e=\frac{1}{e}(x-e) \Leftrightarrow y=\frac{x}{e}.$$

Όπως αναφέρθηκε ήδη προηγουμένως, για να διευκολυνθούμε στη διαδικασία της παραγωγίσεως μιας συναρτήσεως, πέραν των τύπων που βρήκαμε για την παράγωγο των βασικών συναρτήσεων, θα μας ήταν χρήσιμοι κάποιοι κανόνες παραγωγίσεως που να αφορούν σε πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει τύπους, με τους οποίους μπορούμε να προχωρήσομε στην εύρεση της παραγώγου συναρτήσεων που προκύπτουν από απλές συναρτήσεις με τις πράξεις της προσθέσεως του πολλαπλασιασμού και της διαιρέσεως.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε υπάρχει η παράγωγος των συναρτήσεων $f+g$, cf με $c\in\mathbf{R}$, $f\cdot g$, f/g στο x_0 και ισχύουν οι επόμενοι τύποι:

Π$_1$. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Π$_2$. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Π$_3$. $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x)g'(x_0)$

Π$_4$. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, (για $g(x_0) \neq 0$).

Αρκετά συχνά θα χρησιμοποιούμε τους παραπάνω τύπους και στη μορφή

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων Π$_1$–Π$_4$ μπορούν να γίνουν με χρήση του ορισμού της παραγώγου. Για παράδειγμα, η απόδειξη της Π$_1$ γίνεται εύκολα αν παρατηρήσομε ότι για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

και ότι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχομε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0).$$

Επομένως, για κάθε x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f+g$, ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0).$$

Ως παραδείγματα εφαρμογής των τύπων Π$_1$–Π$_4$, αναφέρομε τα εξής:

α) Αν $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$, $x > 0$, τότε:

$$f'(x) = (x^2)' + (2\sqrt{x})' = 2x + 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

β) Αν $f(x) = xe^x - x^3$, $x \in \mathbf{R}$, τότε:

$$f'(x) = (xe^x - x^3)' = (xe^x)' - (x^3)' = x'\cdot e^x + x\cdot(e^x)' - 3x^2 = e^x + xe^x - 3x^2.$$

Ας εξετάσομε στη συνέχεια τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$f(x) = \text{εφ}x, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \text{σφ}x, \quad x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in Z.$$

Έχομε

$$f'(x) = (\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x\ \text{συν}x - \text{ημ}x(-\text{ημ}x)}{\text{συν}^2 x} =$$

$$= \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = 1 + \text{εφ}^2 x$$

και

$$g'(x)=(\sigma\varphi x)'=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)'=\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}=\frac{(-\eta\mu x)\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}=\frac{-(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{\eta\mu^2 x}=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}=$$

$$=\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}=-(1+\sigma\upsilon\nu^2 x).$$

΄Ετσι ο πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων συμπληρώνεται με τον πίνακα 5.2.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι, για να χρησιμοποιηθούν οι τύποι της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, θα πρέπει οι γωνίες x να έχουν εκφραστεί σε ***ακτίνια (rad)*** και όχι σε μοίρες ή βαθμούς.

Πίνακας 5.2.2
Η πρώτη παράγωγος των βασικών συναρτήσεων.

f	$\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$
$f\,'$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1+\varepsilon\varphi^2 x$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}=-(1+\sigma\varphi^2 x)$

Η ιδιότητα Π_1 ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν $f_1, f_2, ..., f_k$, είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες, τότε:

$$(f_1+f_2+\cdots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_k'(x).$$

Επίσης, η ιδιότητα Π_3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του γινομένου περισσοτέρων από δύο συναρτήσεων. ΄Ετσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα έχομε:

$$(f(x)g(x)h(x))'=[\big(f(x)g(x)\big)\cdot h(x)]'=\big(f(x)g(x)\big)'\cdot h(x)+\big(f(x)g(x)\big)\cdot h'(x)$$

$$=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

$$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$

Για παράδειγμα:

α) $(\eta\mu x+x^2+e^x+2x)'=(\eta\mu x)'+(x^2)'+(e^x)'+(2x)'=\sigma\upsilon\nu x+2x+e^x+2$

β) $(x^4\cdot e^x\cdot \ln x)'=(x^4)'e^x\cdot\ln x+x^4\cdot(e^x)'\cdot\ln x+x^4e^x\cdot(\ln x)'=$

$$=3x^3e^x\cdot\ln x+x^4\cdot e^x\cdot\ln x+x^4e^x\cdot\frac{1}{x},\ x>0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.2.

Να βρείτε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+3}, x\neq -3$ β) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ γ) $g(x)=\sqrt{x}\ \eta\mu x+\dfrac{\ln x}{x-1},\ x\neq 1$

Λύση.

α) ΄Εχομε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)'(x+3)-(x^2-4)(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{2x(x+3)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}.$$

β) Έχομε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(1+\sqrt{x})-e^x(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{e^x(1+\sqrt{x})-e^x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=e^x\,\frac{2\sqrt{x}+2x-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

γ) Έχομε διαδοχικά:

$$g'(x)=(\sqrt{x}\ \text{ημ}x)'+\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=(\sqrt{x})'\text{ημ}x+\sqrt{x}(\text{ημ}x)'+\frac{(\ln x)'(x-1)-(x-1)'\ln x}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{ημ}x+\sqrt{x}\ \text{συν}x+\frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{\text{ημ}x+2x\text{συν}x}{2\sqrt{x}}+\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.3.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4-2x^3-12x^2+1$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

α) $f''(x)=0$ β) $f''(x)>0$ γ) $f''(x)<0$

Λύση.

Έχομε $f'(x)=(x^4)'-(2x^3)'-(-12x^2)'+(1)'=4x^3-6x^2-24x$ και

$$f''(x)=(4x^3-6x^2-24x)'=(4x^3)'-(6x^2)'-(24x)'=12x^2-12x-24=12(x^2-x-2).$$

Επομένως:

α) $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$.

β) $f''(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

γ) $f''(x)<0\Leftrightarrow x\in(-1,2)$.

Ας προσπαθήσομε στη συνέχεια να υπολογίσομε την παράγωγο της συναρτήσεως $h(x)$ = ημ^2x. Επειδή $\text{ημ}^2x=\text{ημ}x\cdot\text{ημ}x$, εφαρμόζοντας την ιδιότητα Π_3 παίρνομε:

$$h'(x)=(\text{ημ}^2x)'=(\text{ημ}x\cdot\text{ημ}x)'=(\text{ημ}x)'\text{ημ}x+\text{ημ}x(\text{ημ}x)'=\text{συν}x\cdot\text{ημ}x+\text{συν}x\cdot\text{ημ}x,$$

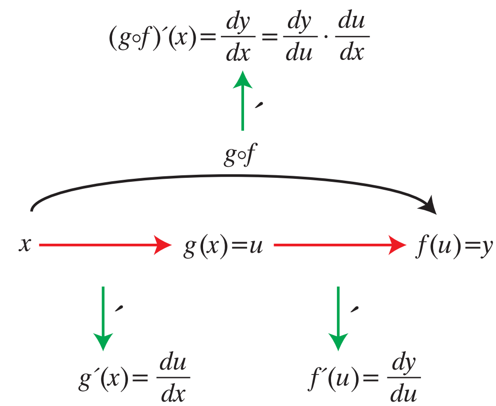
δηλαδή $h'(x)=(\text{ημ}^2x)'=2\text{ημ}x\cdot\text{συν}x$. Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $h(x)$ = ημ^2x δεν είναι η συνάρτηση 2ημx, όπως ίσως θα περίμενε κάποιος γνωρίζοντας ότι ισχύει ο τύπος $(x^2)'=2x$. Αν λάβομε υπόψη ότι η συνάρτηση $h(x)$ = ημ^2x = (ημx)^2 είναι σύνθεση της $f(x)=x^2$ και της $g(x)$ = ημx (δηλ. $h=f\circ g$), για τις οποίες γνωρίζομε ότι $f'(x)=2x$, $g'(x)=\text{συν}x$, η παράγωγος h' της h που υπολογίσαμε προηγουμένως μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$h'(x)=2\text{ημ}x\cdot\text{συν}x=[2g(x)]g'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

Αποδεικνύεται (η απόδειξη παραλείπεται) ότι γενικότερα για την παράγωγο σύνθετης συναρτήσεως, ισχύει το επόμενο Θεώρημα:

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$



Σχ. 5.2α.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν θέσομε $u = g(x)$ και $y = f(u)$, ο παραπάνω τύπος γράφεται στη μορφή $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ και είναι γνωστός ως ***κανόνας της αλυσίδας*** (σχ. 5.2α). Παρατηρούμε ότι ενώ ο συμβολισμός $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ δεν δηλώνει διαίρεση, στον κανόνα της αλυσίδας συμπεριφέρεται ως συνηθισμένο πηλίκο (πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα).

Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος και των πινάκων 5.2.1 και 5.2.2 των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων μπορούμε εύκολα να σχηματίσομε τον πίνακα 5.2.3, ο οποίος μας δίνει παραγώγους συνθέτων συναρτήσεων (g είναι οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση).

Πίνακας 5.2.3
Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων.

f		f'	
$(g(x))^{\nu}$	εφ $(g(x))$	$\nu(g(x))^{\nu-1} \cdot g'(x)$	$\dfrac{g'(x)}{\text{συν}^2(g(x))}$
$\sqrt{g(x)}$, με $g(x) > 0$	$\text{σφ}(g(x))$	$\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$-\dfrac{g'(x)}{\text{ημ}^2(g(x))}$
$\text{ημ}(g(x))$	$e^{g(x)}$	$\text{συν}(g(x))g'(x)$	$e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$\text{συν}(g(x))$	$\ln(g(x))$, με $g(x) > 0$	$-\text{ημ}(g(x))g'(x)$	$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.2.4.

Να βρείτε τις παραγώγους των εξής συναρτήσεων:

α) $h(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^4$ β) $h(x) = e^{-x^3+2x}$ γ) $h(x) = \ln(x^4 + 2x^2 + 2)$

Λύση.

α) Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x) = x^4 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι έχομε, $h(x) = [g(x)]^4 = f(g(x))$ και χρησιμοποιώντας τον πρώτο τύπο του πίνακα 5.2.3 παίρνομε $h'(x) = 4(g(x))^3 \cdot g'(x)$.

Όμως

$$g'(x)=\frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2},$$

οπότε

$$h'(x)=4\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3\cdot\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{12(2x-1)^3}{(x+1)^5}.$$

β) Ομοίως παρατηρούμε ότι $h(x)=e^{-x^3+2x}=e^{g(x)}$ όπου $g(x)=-x^3+2x$.

Επομένως $\left(e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}\cdot g'(x)=e^{-x^3+2x}(-x^3+2x)'=(-3x^2+2)\,e^{-x^3+2x}$.

γ) Θέτοντας $u=x^4+2x^2+2$ θα έχομε $y=h(x)=\ln(x^4+2x^2+2)=\ln u$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

βρίσκομε

$$h'(x)=y'=(\ln u)'\cdot u'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{x^4+2x^2+2}\cdot(x^4+2x^2+2)'=\frac{1}{x^4+2x^2+2}\cdot(4x^3+4x)=\frac{4x(x^2+1)}{x^4+2x^2+2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.5.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^a$, $x>0$ και $a\in\mathbf{R}^*$ β) $f(x)=a^x$, $x\in\mathbf{R}$, $0<a\neq1$ γ) $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbf{R}^*$

Λύση.

α) Επειδή, για $x>0$, ισχύει $x^a=e^{a\ln x}$, θα έχομε $f(x)=e^{a\cdot\ln x}=e^{g(x)}$, όπου $g(x)=a\ln x$. Επομένως,

$$f'(x)=e^{g(x)}g'(x)=e^{a\ln x}\cdot(a\ln x)'=e^{a\ln x}\cdot a\frac{1}{x}=x^a\cdot a\frac{1}{x}=ax^{a-1}$$

δηλαδή ισχύει ο τύπος $(x^a)'=ax^{a-1}$ για κάθε $a\in\mathbf{R}^*(x>0)$, ο οποίος γενικεύει το δεύτερο τύπο του πίνακα 5.2.1.

β) Αφού $f(x)=a^x=e^{x\ln a}=e^{g(x)}$ όπου $g(x)=x\ln a$ θα έχομε:

$$f'(x)=e^{g(x)}g'(x)=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a,$$

δηλαδή

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R},\ 0<a\neq1$$

γ) Αν $x>0$, τότε

$$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}=\frac{1}{|x|}.$$

Για $x<0$ θα έχομε

$$\ln|x|=\ln(-x)=\ln(g(x)) \text{ με } g(x)=-x$$

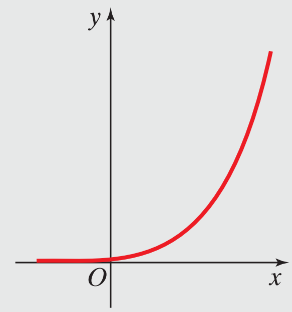
απ' όπου προκύπτει

$$\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln(g(x))\right)'=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbf{R}^*$, ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή με ορισμένα σχόλια που αφορούν στην εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως μιας συναρτήσεως *f*.

α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, όπως αυτή ορίστηκε στην αρχή της παραγράφου 5.1 (η ευθεία *ε* που διέρχεται από το *A* και έχει συντελεστή διευθύνσεως $f'(x_0)$) μπορεί να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της *f*. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

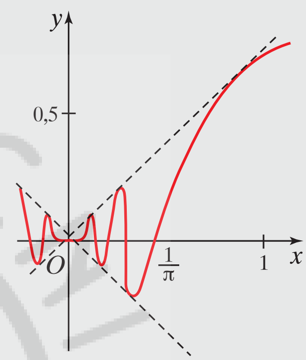


Σχ. 5.2β.

(σχ. 5.2β) είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το **R** και η ευθεία *y* = 0 εφάπτεται σ' αυτήν σε όλα τα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \le 0$.

Επίσης η συνάρτηση

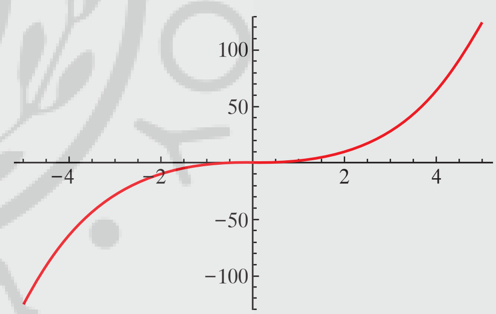
$$f(x)=\begin{cases} x\,\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



Σχ. 5.2γ.

(σχ. 5.2γ) έχει τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$ εφαπτόμενες σε κάθε σημείο της μορφής $\dfrac{2}{(4k+1)\pi}$ και $\dfrac{2}{(4\varkappa-1)\pi}$ αντίστοιχα (k = 0, 1,...).

β) Η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ μπορεί να διαπερνάει τη γραφική παράσταση της *f*. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2δ όπου δίνεται η γραφική παράσταση συναρτήσεως $f(x)=x^3$, η οποία έχει την ευθεία $y=0$ εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$.



Σχ. 5.2δ.

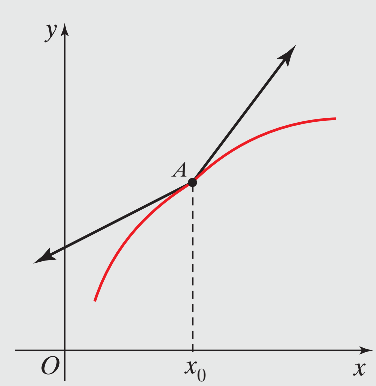
γ) Υπάρχει περίπτωση μια συνάρτηση να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 και να υπάρχουν τα όρια:

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(πεπερασμένα ή άπειρα) και να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε, η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, οπότε δεν υπάρχει εφαπτομένη στο x_0. Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται ***γωνιακό σημείο*** της γραφικής παραστάσεως της *f* (σχ. 5.2.ε).

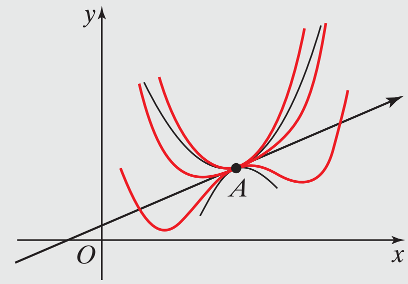
δ) Έστω δύο συναρτήσεις *f*, *g* ορισμένες στο διάστημα *Δ* και $x_0 \in \varDelta$. Θα λέμε ότι οι ***συναρτήσεις εφάπτονται*** στο σημείο x_0, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=0$ (σχ. 5.2στ). Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$, δηλαδή οι διαφορές $f(x)-g(x)$ των τιμών των συναρτήσεων πλησιάζουν «ταχύτερα» στο 0 από ό,τι οι διαφορές $x-x_0$ όταν $x\to x_0$. Μια τέτοια περίπτωση προκύπτει αν ως συνάρτηση *g* χρησιμοποιήσομε την $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (εξίσωση της εφαπτομένης *f* στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ οπότε θα έχομε:



Σχ. 5.2ε.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0.$$



Σχ. 5.2στ.

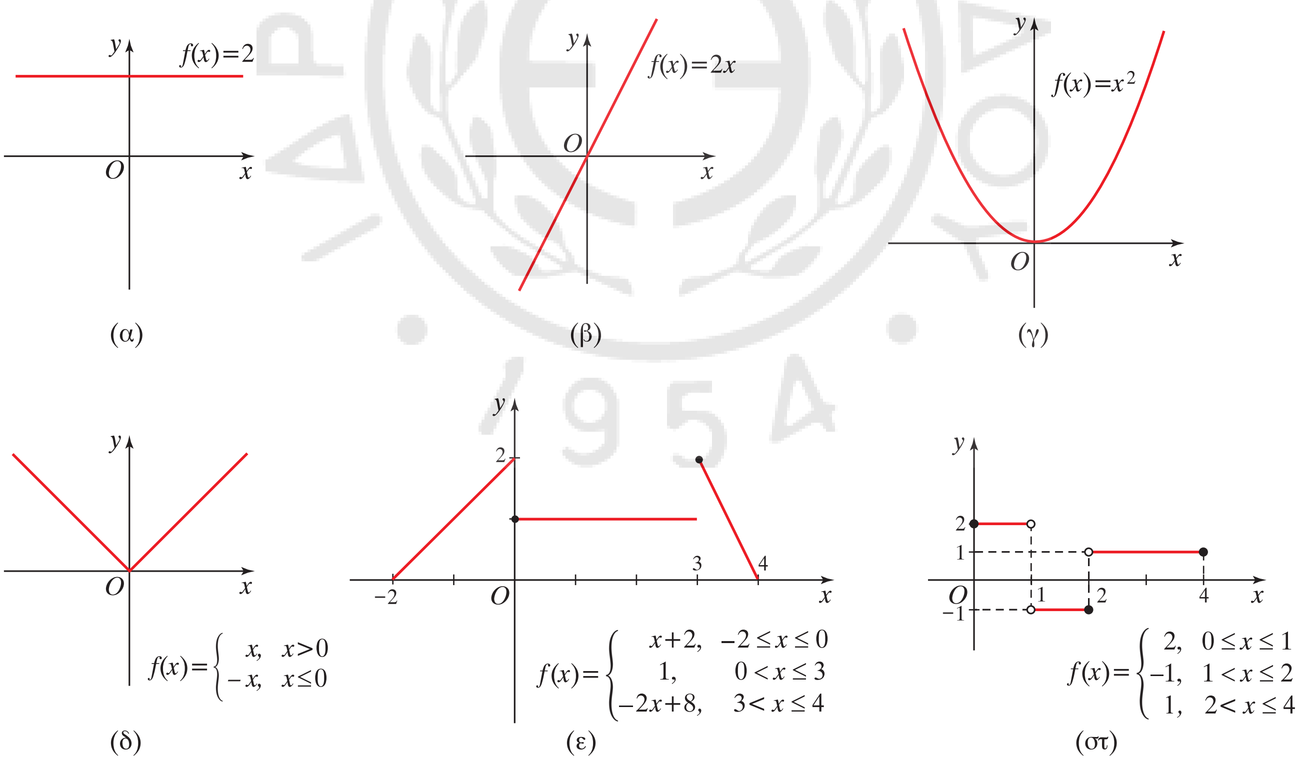
Ασκήσεις.

5.2.1. Να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως *f* στο σημείο x_0.

α) $f(x)=x^5,\quad x_0=-1$ β) $f(x)=\ln x,\quad x_0=\dfrac{1}{2}$ γ) $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x_0=3$

δ) $f(x)=e^x,\quad x_0=0$ ε) $f(x)=\sqrt{x},\quad x_0=4$ στ) $f(x)=\eta\mu^3 x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$

5.2.2. Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων (σχ. 5.2ζ). Να αποδώσετε τη γραφική παράσταση της παράγωγου συναρτήσεως για κάθε μία από αυτές (για τα σημεία στα οποία αυτή υπάρχει).



Σχ. 5.2ζ.

5.2.3. Έστω η συνάρτηση *f* με $f(x)=x^4$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η κλίση της *f* είναι:

α) Θετική. β) Αρνητική. γ) Ίση με 24.

5.2.4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f, οι οποίες είναι παράλληλες με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,\ 1)$ και $B(-1,1)$.

5.2.5. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^{10}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{10}-1}{h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^{10}-1}{h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^{10}-2^{10}}{h}.$$

5.2.6. Να υπολογίσετε, όπου υπάρχει, την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<1 \\ \sqrt{x}, & x\geq 1\end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases} \text{ημ}x, & x<0 \\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$ γ) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 1 \\ \ln x, & x>1\end{cases}$ ε) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ \text{συν}x, & x>0\end{cases}$ στ) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ 1, & x>0\end{cases}$

5.2.7. Να υπολογίσετε την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{6}x^6+\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^2+1$ β) $f(x)=(x^{10}-1)(x^9-2)$

γ) $f(x)=\dfrac{x^5}{4}-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x^3}{2}-x^2$ δ) $f(t)=(t^2+1)(t^2+3)$

5.2.8. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}$ β) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

γ) $f(r)=r^3+\dfrac{1}{r^3}$ δ) $f(t)=2t^2+t\text{συν}\theta-2$ (θ σταθερά)

5.2.9. Να υπολογίσετε την παράγωγο των ακολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x^5+5\ln x-\sqrt{3}x$ β) $f(x)=2\text{συν}x-3\text{ημ}x+\ln 3$

γ) $x\sqrt{x}+6x^2$ δ) $x^2\text{ημ}x+(x^2+1)\,\text{συν}x$

5.2.10. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=x^3\ \text{ημ}x\ \text{συν}x$ β) $f(x)=\dfrac{x\,e^x}{\ln x}$

γ) $f(x)=\dfrac{x\ \text{ημ}x}{e^x}$ δ) $f(x)=\dfrac{x\ \text{ημ}x+\text{συν}x}{1+x\ \text{συν}x}$

5.2.11. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f με τύπο $f(x)=-2x+x^3$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\pi/4$.

5.2.12. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=(x-\alpha)\,(x-\beta)(x-\gamma)$ όπου α,β,γ είναι τρεις σταθεροί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι για $x\neq\alpha,\ \beta,\gamma$, ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}.$$

5.2.13. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=5x^2$ και $g(x)=\dfrac{24x+1}{5x}$ στο κοινό σημείο τους $A(1,1)$, είναι κάθετες.

5.2.14. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=x^3-9x+3$, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=10x-5$.

5.2.15. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού, ώστε $P=1$ και $P^{(\nu)}(0)=2^{\nu}$ για $\nu=1,2,3$.

5.2.16. Έστω η συνάρτηση με τύπο $h(x)=g(x)\,e^{2g(x)}$. Αν $g(1)=1$ και $g'(1)=-1$, να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της συναρτήσεως h στη θέση 1.

5.2.17. Αν $f(x)=\alpha\,\text{συν}\omega x+\beta\,\text{ημ}\omega x$, όπου α, β και ω είναι τρεις γνωστές σταθερές, να αποδείξετε ότι ισχύει $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

5.2.18. Αν $f(x)=e^{ax}$, να βρείτε την τιμή της σταθεράς $a\in\mathbf{R}$, ώστε να ισχύει $f''(x)-7f'(x)-10f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

5.2.19. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,f(0))$ της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f με $f(x)=\text{συν}(\frac{\pi}{3}+x^3)$.

5.2.20. Να υπολογίσετε την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=(x^3+2x^2+x)^8$ β) $f(x)=(x^6-3x^2+1)^{15}$ γ) $f(x)=x^5\text{ημ}5x$

δ) $f(x)=\text{ημ}^3\sqrt{x}$ ε) $f(x)=\text{ημ}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ στ) $f(x)=\text{ημ}(x^3+2x+1)$

5.2.21. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\ln(2x+3)+e^{2x-1}$ β) $f(x)=\text{ημ}x\cdot e^{\text{συν}x}$

γ) $f(x)=x^2\text{ημ}(2x)+\text{ημ}^2x$ δ) $f(x)=\text{ημ}(\ln x)+x\sqrt{x^2+4}$

5.2.22. Να υπολογίσετε την παράγωγο των ακολούθων συναρτήσεων.

α) $f(x)=(3x)^{1/4}+(5x)^{1/3}$ β) $f(x)=5^{x+2x}$

γ) $f(x)=(3x^4+4x^3)^{-2}$ δ) $f(x)=2^{5x-3}$

5.2.23. Να υπολογίσετε την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=(3x)^{1/4}+(5x)^{1/3}$ β) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}-x\right)$ γ) $f(x)=\dfrac{1}{1+\text{ημ}\,x^2}$

δ) $f(x)=(\ln x)^x$, $x>1$ ε) $f(x)=\ln\left(e^{5x}+\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ στ) $f(x)=\ln(x^4+2^{3x+1})$

5.3 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και εφαρμογές.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σ' ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού που είναι γνωστό ως ***Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού*** (Θ.Μ.Τ.). Με βάση το θεώρημα αυτό θα μπορέσομε στη συνέχεια να αναπτύξομε πολλά άλλα αποτελέσματα χρήσιμα για τη συστηματική μελέτη των παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 5.2, όταν μια συνάρτηση f είναι σταθερή, τότε η παράγωγός της ισούται με μηδέν. Θα μπορούσε λοιπόν να αναρωτηθεί κάποιος: μήπως ισχύει και το αντίστροφο αυτού του ισχυρισμού, δηλαδή αν για τα σημεία ενός διαστήματος ισχύει $f'(x)=0$, είναι τότε αναγκαστικά η f μια σταθερή συνάρτηση (σ' αυτό το διάστημα); Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι καταφατική, και θα προκύψει άμεσα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ..

Ας διατυπώσομε λοιπόν αρχικά το πολύ σημαντικό αυτό θεώρημα (η απόδειξή του παραλείπεται).

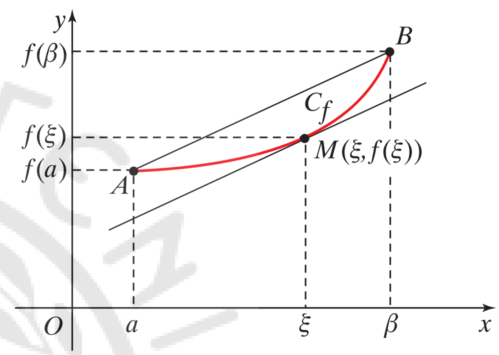
Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.3α, γεωμετρικά το θεώρημα αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f, όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία, η οποία περνάει από τα σημεία $A\ (\alpha, f(\alpha))$ και $B\ (\beta, f(\beta))$ (και επομένως έχει κλίση).

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

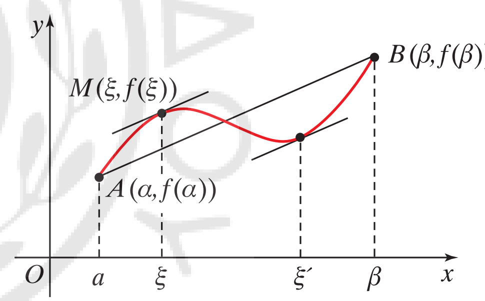


Σχ. 5.3α.

Το σημείο ξ για το οποίο ισχύει η ισότητα:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

δεν είναι απαραίτητα μοναδικό όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.3β.



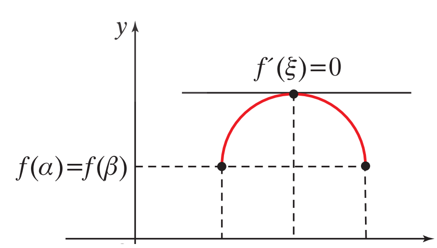
Σχ. 5.3β.

Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha) = f(\beta)$, για τον πραγματικό αριθμό ξ θα ισχύει $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f γίνεται παράλληλη με τον άξονα των x. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως ***Θεώρημα του Rolle*** και η γεωμετρική ερμηνεία του εικονίζεται στα σχήματα 5.3γ και 5.3δ.

Θεώρημα του Rolle.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β). Αν επί πλέον ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

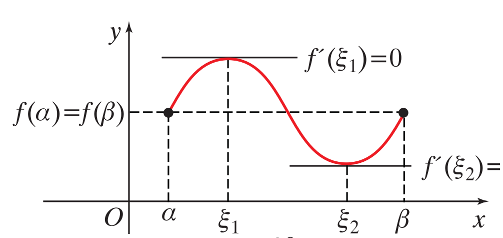
$$f'(\xi) = 0.$$



Σχ. 5.3γ.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 8x + 1,\ x \in [0,8].$$



Σχ. 5.3δ.

Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή, η f είναι συνεχής στο $[0, 8]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 8)$ με $f'(x) = 3x^2 - 18x + 8$ και $f(0) = f(8) = 1$, θα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (0,8)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή $3\xi^2 - 18\xi + 8 = 0$. Για την εύρεση του αριθμού ξ, αρκεί να λύσομε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $3x^2 - 18x + 8 = 0$, οπότε βρίσκομε

$$\xi_1 = \frac{18 - 2\sqrt{57}}{6} = 0{,}48 \text{ και } \xi_2 = \frac{18 + 2\sqrt{57}}{6} = 5{,}52$$

(στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία του διαστήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη $f'(\xi) = 0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.1.

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \text{ημ}x, \quad x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\text{ημ}\beta - \text{ημ}\alpha| \leq |\beta - \alpha|$.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\text{ημ}x| \leq |x|$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση.

α) Η $f(x) = \text{ημ}x$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $f'(x) = \text{συν}x$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ..

β) Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ δηλαδή } \text{συν}\xi = \frac{\text{ημ}\beta - \text{ημ}\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Όμως γνωρίζομε ότι $|\text{συν}\xi| \leq 1$ για κάθε $\xi \in (\alpha, \beta)$ οπότε θα έχομε:

$$\left|\frac{\text{ημ}\beta - \text{ημ}\alpha}{\beta - \alpha}\right| \leq 1 \iff \frac{|\text{ημ}\beta - \text{ημ}\alpha|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \iff |\text{ημ}\beta - \text{ημ}\alpha| \leq |\alpha - \beta|.$$

γ) Αν $x = 0$, η ανισότητα ισχύει (με τη μορφή ισότητας). Αν $x > 0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα που αποδείχθηκε στο ερώτημα (β) για $\alpha = 0, \beta = x$ παίρνομε:

$$|\text{ημ}x - \text{ημ}0| \leq |x - 0| \iff |\text{ημ}x| \leq |x|.$$

Τέλος, αν $x < 0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα που αποδείχθηκε στο ερώτημα (β) για $\alpha = x, \beta = 0$ θα έχομε:

$$|\text{ημ}0 - \text{ημ}x| \leq |0 - x| \iff |-\text{ημ}x| \leq |-x| \iff |\text{ημ}x| \leq |x|.$$

Άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Ας θεωρήσομε μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$. Παίρνοντας δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 < x_2$ και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. (οι υποθέσεις του ισχύουν αφού η f παραγωγίζεται στα εσωτερικά σημεία του Δ, άρα θα είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), και επί πλέον είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$) προκύπτει ότι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Αφού όμως υποθέσαμε ότι ισχύει $f'(x)=0$, για όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ, θα έχομε $f'(\xi) = 0$ δηλαδή:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0 \Leftrightarrow f(x_2)=f(x_1).$$

Άρα, η f έχει την ίδια τιμή για οποιουσδήποτε διαφορετικούς αριθμούς x_1, x_2 του Δ. Επομένως, η f είναι σταθερή στο Δ. Σε αντίστοιχο αποτέλεσμα οδηγούμαστε αν θεωρήσομε δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 > x_2$.

Καταλήγομε λοιπόν στο επόμενο θεώρημα, το οποίο δίνει την απάντηση στο ερώτημα που διατυπώθηκε στο ξεκίνημα της παρούσας ενότητας:

> Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Ας θεωρήσομε δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g σε ένα διάστημα Δ, τέτοιες ώστε για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ να ισχύει $f'(x)=g'(x)$. Τότε για τη συνάρτηση $f-g$, η οποία είναι επίσης συνεχής στο Δ θα ισχύει, για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$,

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

και επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$.

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα:

> Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε θα υπάρχει μία σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:
>
> $$f(x)=g(x)+c.$$

Τέλος, ας υποθέσομε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε κανένα $x \in \Delta$. Τότε, σύμφωνα μ' αυτά που γνωρίσαμε στην παράγραφο 4.8, η f θα διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ. Ας θεωρήσομε λοιπόν την περίπτωση που ισχύει $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ και ας διαλέξομε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε, αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

οπότε θα έχομε

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$$

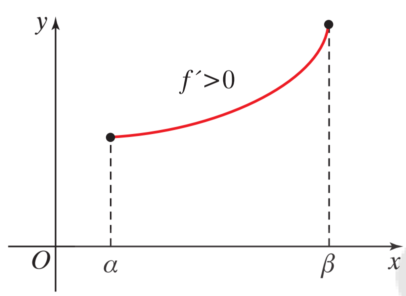
(διότι $f'(\xi) > 0$ και $x_2-x_1>0$). Άρα $f(x_2)-f(x_1)>0$ ή ισοδύναμα $f(x_1)<f(x_2)$ που αποδεικνύει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Στην περίπτωση που σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)<0$ εργαζόμενοι αναλόγως, διαπιστώνομε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Έχομε λοιπόν αποδείξει το επόμενο θεώρημα, το οποίο μας προσφέρει ένα σχετικά εύκολο τρόπο για να διαπιστώνομε ότι μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη σ' ένα διάστημα.

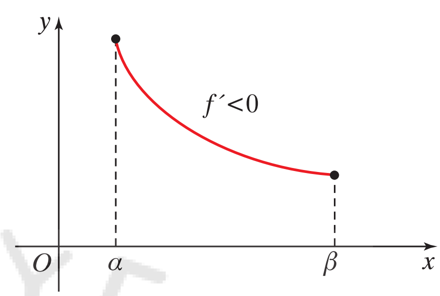
΄Εστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ (σχ. 5.3ε).

Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ (σχ. 5.3στ).



Σχ. 5.3ε.



Σχ. 5.3στ.

Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και όταν η παράγωγος f' μηδενίζεται σ' ένα ή περισσότερα (πεπερασμένα το πλήθος) σημεία του πεδίου ορισμού της.

Στην περίπτωση που ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ τότε η f θα είναι αύξουσα (όχι απαραίτητα γνήσια αύξουσα) στο Δ. Αντίστοιχα, αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f θα είναι φθίνουσα (όχι απαραίτητα γνήσια φθίνουσα) στο Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.2.

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν δίνεται επί πλέον ότι $f(0) = 3$.

Λύση.

α) Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ έχομε:

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)' = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{(f'(x) - 2f(x))}{e^{2x}}$$

και αφού υποθέσαμε ότι για την f ισχύει $f'(x) = 2f(x)$, θα έχομε $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Επομένως, η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

β) Επειδή η g είναι σταθερή, υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{f(x)}{e^{2x}} = c \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Επομένως $f(x) = ce^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Επειδή $f(0) = 3$, έχομε $ce^{2\cdot 0} = 3$, οπότε $c = 3$ και τελικά βρίσκομε ότι η συνάρτηση θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = 3e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.3.

Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 1$ είναι γνησίως μονότονη και το είδος της μονοτονίας (αύξουσα, φθίνουσα) σε καθένα από αυτά.

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x^2-6x+8)=3(x-2)(x-4).$$

Το πρόσημο της f' δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, η συνάρτηση f:

α) Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(-\infty,2)$.

β) Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,4]$, αφού είναι συνεχής στο $[2,4]$ και ισχύει $f'(x)<0$ στο $(2,4)$.

γ) Είναι γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[4,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(4,+\infty)$.

Το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f στα διαστήματα $(-\infty,2]$, $[2,4]$ και $[4,+\infty)$ δίνονται συνοπτικά στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(2)=1$	$\searrow$	$f(4)=125$	$\nearrow$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\ln x+2x-10$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\ln x+2x-10=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0,\ +\infty)$ **R**.

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0,+\infty)$ και έχει παράγωγο ίση με $f'(x)=\dfrac{3}{x}+2$. Επειδή

$$f'(x)=\frac{3}{x}+2>0 \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3\ln x+2x-10)=+\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(3\ln x+2x-10)=-\infty,$$

μπορούμε να συνοψίσομε τα παραπάνω στον επόμενο πίνακα

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

γ) Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (βλ. παραγρ. 4.8), η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γενικά, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι χρήσιμο για τη μελέτη των ριζών της εξισώσεως $f(x)=c, \quad c\in\mathbf{R}$.

Αν f είναι μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α,β) και οι τιμές της f' είναι όλες θετικές ή όλες αρνητικές στο (α,β), τότε η εξίσωση $f(x)=c$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, έχει μοναδική λύση στο (α,β).

Ασκήσεις.

5.3.1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=3x^4-x^3+2x^2-3x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $12x^3-3x^2+4x-3=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

5.3.2. Να εξετάσετε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που δίνεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

α) $f(x)=x-x^2, \quad [-1,1]$ β) $f(x)=\dfrac{2}{x}, \quad [1,3]$ γ) $f(x)=|x|, [-2,2]$

δ) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3x^2-x, & x>1 \end{cases}, \ [-1,1]$ ε) $f(x)=\sqrt{x}, \quad [1,9]$

5.3.3. Έστω μια συνάρτηση f, που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει $f(\alpha) = 0$ και $m\le f'(x)\le M$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$ (m, M είναι δύο πραγματικοί αριθμοί). Να αποδείξετε ότι $(\beta-\alpha)m\le f(\beta)\le(\beta-\alpha)M$.

5.3.4. Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<\beta$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ ισχύει η ανισότητα:

$$e^{\alpha}<\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}.$$

5.3.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^4-9x^2+4x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(1,2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $8x^3-18x+4=0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

5.3.6. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=3f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{3x}}$ είναι σταθερή για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν δίνεται επί πλέον ότι $f(0)=1$.

5.3.7. Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Αν οι f, g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και ισχύει $f'(x)=2g(x)$, $g'(x)=-2f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f''(x)+4f(x)=0$ και $g''(x)+4g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h με $h(x)=(f(x))^2+(g(x))^2$ είναι σταθερή σ' ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

γ) Να διαπιστώσετε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τύπους $f(x)$ = ημ$2x$, $g(x)$ = συν$2x$, αντίστοιχα ικανοποιούν τις υποθέσεις που κάναμε. Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε απ' αυτήν τη διαπίστωση;

5.3.8. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=3+\dfrac{2}{x}$ και $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x<0\\[2mm] 1+\dfrac{2}{x}, & x>0.\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\neq 0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή.

5.3.9. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

5.3.10. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι επόμενες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες και το είδος της μονοτονίας (αύξουσα, φθίνουσα) σε καθένα από αυτά.

α) $f(x)=x^5+3x^3+12x-1$ β) $f(x)=x^3-3x+5$ γ) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

δ) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ ε) $f(x)=\begin{cases}1-x^3, & x\le 1\\ 2x^2+1, & x>1\end{cases}$ στ) $f(x)=|x^2-9|$

5.3.11. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x)=2e^x-3+\ln(x+2)$ β) $f(x)=\ln x^3+e^x$ γ) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{-x}}$

δ) $f(x)=\text{ημ}^3x+\text{συν}^5x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ε) $f(x)=3^x+5^x+7^x$ στ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

5.3.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+6x+3$ και $g(x)=e^x+2x^5-2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $x^3=3x^2-6x-3$ και $e^x+2x^5=2$ έχουν ακριβώς μία ρίζα.

5.4 Μελέτη συναρτήσεων με τη βοήθεια της παραγώγου.

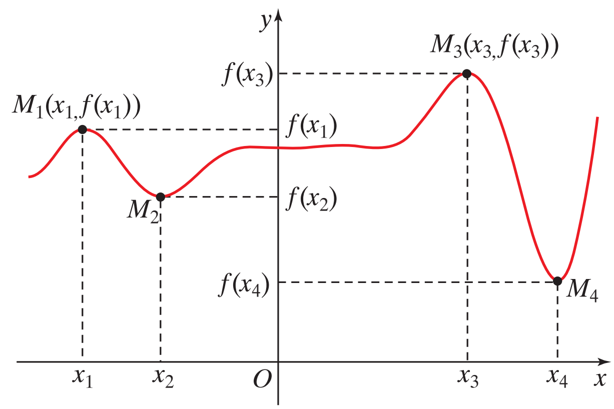
Η επίλυση ενός μεγάλου πλήθους πρακτικών προβλημάτων, απαιτεί τον προσδιορισμό της μικρότερης ή της μεγαλύτερης τιμής μιας συναρτήσεως. Για παράδειγμα:

α) Μία επιχείρηση ενδιαφέρεται συνήθως για το μέγιστο κέρδος ή το ελάχιστο κόστος.

β) Ένας γιατρός, ο οποίος πρόκειται να χορηγήσει σε κάποιον ασθενή ένα συγκεκριμένο φάρμακο είναι λογικό να ενδιαφέρεται να προσδιορίσει τη χρονική στιγμή, κατά την οποία η επίδραση του φαρμάκου στον ασθενή γίνεται η μεγαλύτερη δυνατή.

γ) Οι τεχνικοί ενός εργοστασίου θέλουν να ξέρουν πώς θα κατασκευάσουν έναν κινητήρα, που θα έχει τη μεγαλύτερη απόδοση, για δεδομένη κατανάλωση καυσίμου.

Προβλήματα όπως τα παραπάνω ανάγονται στον προσδιορισμό της μεγαλύτερης ή της μικρότερης τιμής μιας συναρτήσεως (η οποία εκφράζει το μέγεθος που μας ενδιαφέρει κάθε φορά).



Σχ. 5.4α.

Ας θεωρήσομε τη συνεχή συνάρτηση f, που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.4α. Στο σημείο $x = x_1$ η τιμή της συναρτήσεως είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_1 (με άλλα λόγια, το σημείο $M_1\,(x_1, f(x_1))$ είναι το «ψηλότερο» σημείο της γραφικής παραστάσεως, όταν το x παίρνει τιμές «γειτονικές» στο σημείο x_1). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει ***τοπικό μέγιστο*** στο $x = x_1$.

Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό μέγιστο*** στο $\xi \in A$ όταν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(x) \le f(\xi) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta.$$

Το ξ ονομάζεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού μεγίστου,*** ενώ το $f(\xi)$ ***τοπικό μέγιστο της f.***

Στο σχήμα 5.4α βλέπομε επίσης ότι και για το σημείο $M_3(x_3, f(x_3))$ ικανοποιείται η συνθήκη του προηγούμενου ορισμού. Όμως το σημείο αυτό, δεν είναι απλώς το ψηλότερο σημείο της γραφικής παραστάσεως για τα x που ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ γύρω από το x_3, αλλά είναι και το «ψηλότερο» σημείο ολόκληρης της γραφικής παραστάσεως. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_3 ***ολικό μέγιστο*** (ή απλώς μέγιστο), ενώ το $f(x_3)$ θα ονομάζεται μέγιστο της f.

Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ακόμη ότι, στο σημείο $x = x_2$ η τιμή της συναρτήσεως είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_2 (με άλλα λόγια, το σημείο $M_2\,(x_2, f(x_2))$ είναι το «χαμηλότερο» σημείο της γραφικής παραστάσεως, όταν το x παίρνει τιμές «γειτονικές» στο σημείο x_2). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει ***τοπικό ελάχιστο*** στο σημείο $M_2\,(x_2, f(x_2))$.

Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό ελάχιστο*** στο $\xi \in A$, όταν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο, ώστε να ισχύει:

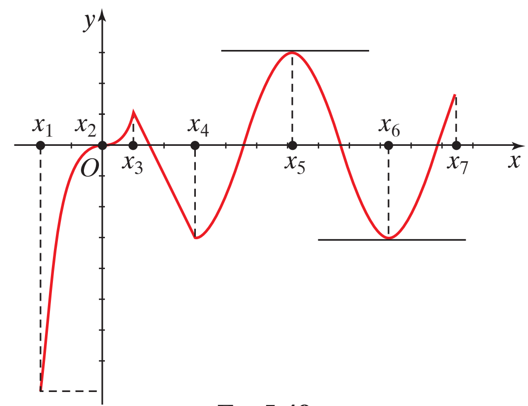
$$f(x) \ge f(\xi) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta.$$

Το ξ ονομάζεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού ελαχίστου***, ενώ το $f(\xi)$ ονομάζεται ***τοπικό ελάχιστο της f.***

Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(\xi)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η f ***παρουσιάζει*** στο $\xi \in A$ ***ολικό***

ελάχιστο ή απλώς ***ελάχιστο***, ενώ το $f(\xi_0)$ θα ονομάζεται ελάχιστο της f. Η συνάρτηση f του σχήματος 5.4α, παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο σημείο $M_4(x_4, f(x_4))$.

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f ονομάζονται ***τοπικά ακρότατα***, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα ονομάζονται ***θέσεις τοπικών ακροτάτων***. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f ονομάζονται ***ολικά ακρότατα*** ή απλώς ***ακρότατα.*** Σημειώνομε ότι, ένα ολικό ακρότατο, μπορεί να θεωρηθεί και ως τοπικό ακρότατο, αφού προφανώς ικανοποιεί τη συνθήκη ορισμού του τελευταίου.



Σχ. 5.4β.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εύρεση ακροτάτων τιμών ***συνεχών*** συναρτήσεων. Ας θεωρήσομε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.4β. Είναι φανερό ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_1 και ολικό μέγιστο στη θέση x_5. Επίσης τα σημεία x_4, x_6 (αλλά και το x_1) είναι σημεία τοπικού ελαχίστου, ενώ τα σημεία x_3, x_7 (αλλά και το x_5) είναι σημεία τοπικού μεγίστου.

Παρατηρούμε ότι, στα σημεία x_5, x_6, όπου η συνάρτηση παραγωγίζεται, η εφαπτομένη παίρνει θέση παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, οπότε θα ισχύει:

$$f'(x_5) = 0 \ \text{ και } \ f'(x_6) = 0.$$

Υπάρχει όμως και ένα τρίτο σημείο, το x_2 το οποίο δεν αποτελεί θέση τοπικού ακροτάτου, παρότι ισχύει $f'(x_2) = 0$. Τέλος στις θέσεις x_3, x_4 έχομε τοπικά ακρότατα, ενώ η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνομε ότι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού A μπορεί να είναι:

α) Τα ***άκρα*** του A (αν ανήκουν σ' αυτό) και

β) ***Εσωτερικά*** σημεία του A, στα οποία η f είτε δεν παραγωγίζεται (ενώ όμως είναι συνεχής), είτε παραγωγίζεται και η παράγωγός της μηδενίζεται.

Τα σημεία της περιπτώσεως (β) τα ονομάζομε ***κρίσιμα σημεία*** της συναρτήσεως f. Αποδεικνύεται μάλιστα (η απόδειξη παραλείπεται) ότι ισχύει το επόμενο θεώρημα, που είναι γνωστό ως ***Θεώρημα Fermat***.

Θεώρημα του Fermat.

> Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$, τότε θα ισχύει: $f'(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Ωστόσο ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου σε ένα σημείο δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το σημείο αυτό είναι τοπικό ακρότατο. Για παράδειγμα, στο σημείο $x_2 = 0$ του σχήματος 5.4β ισχύει $f'(x_2) = 0$, ενώ το x_2 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Έτσι, τα κρίσιμα σημεία είναι απλώς ***υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων***. Χρειαζόμαστε επομένως ένα κριτήριο, το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Αν εξετάσομε τη συμπεριφορά της συναρτήσεως f του σχήματος 5.4β στο x_3 παρατηρούμε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_3]$, δηλαδή, $f(x) \leq f(x_3)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_3]$, ενώ

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα της μορφής $[x_3, \beta)$, δηλαδή, $f(x) \leq f(x_3)$ για κάθε $x \in [x_3, \beta)$.

Μ' αυτόν τον τρόπο έχει εξασφαλισθεί ότι ισχύει $f(x) \leq f(x_3)$ για κάθε $x \in \Delta = (\alpha, \beta)$ (οπότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_3). Ανάλογες διαπιστώσεις ισχύουν και για το σημείο x_5.

Ομοίως, εξετάζοντας τη συμπεριφορά της συναρτήσεως f στο x_4 παρατηρούμε ότι:

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_4]$, δηλαδή $f(x) \geq f(x_4)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_4]$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα της μορφής $[x_4, \beta)$, δηλαδή $f(x) \geq f(x_4)$ για κάθε $x \in [x_4, \beta)$.

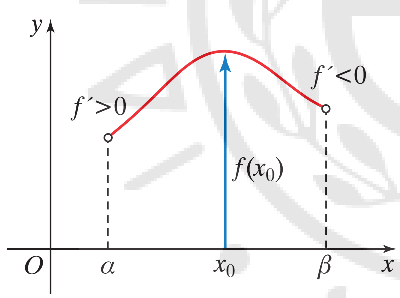
Έτσι, για κάθε $x \in \Delta = (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) \geq f(x_4)$, οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_4. Ανάλογες διαπιστώσεις ισχύουν και για το σημείο x_6.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά το επόμενο Θεώρημα (η απόδειξη παραλείπεται):

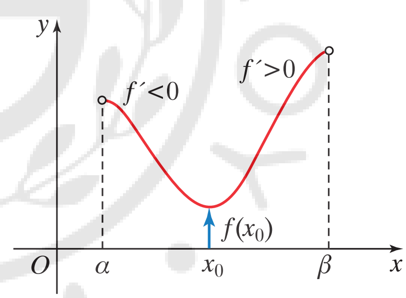
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο A, συνεχής στο διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq A$ και $x_0 \in [\alpha, \beta)$ ένα κρίσιμο σημείο της f.

α) Αν $f'(x) > 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 (σχ. 5.4γ).

β) Αν $f'(x) < 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 (σχ. 5.4δ).



Σχ. 5.4γ.



Σχ. 5.4δ.

Για να βρούμε λοιπόν τα τοπικά ακρότατα μιας συναρτήσεως μπορούμε να χρησιμοποιούμε την πρώτη παράγωγο, ώστε να εντοπίσομε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, καθώς και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τα σημεία στα οποία η f' αλλάζει πρόσημο μας δίνουν τα τοπικά της ακρότατα.

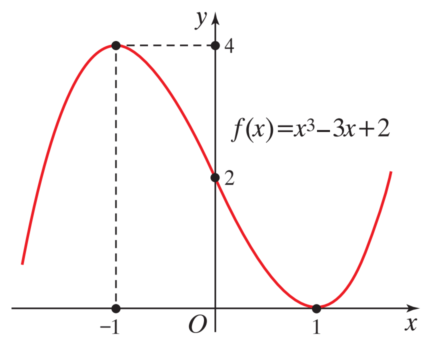
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (σχ. 5.4ε), που είναι ορισμένη στο **R**. Η f είναι προφανώς παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$. Για τις ρίζες της πρώτης παραγώγου έχομε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1,$$

ενώ για το πρόσημο της f' ισχύουν τα εξής:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$



Σχ. 5.4ε.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$, το $f(-1)=4$ είναι τοπικό μέγιστο. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty]$, το $f(1)=0$ είναι τοπικό ελάχιστο (σχ. 5.4ε).

Τα παραπάνω αποτελέσματα δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 5.4.1.

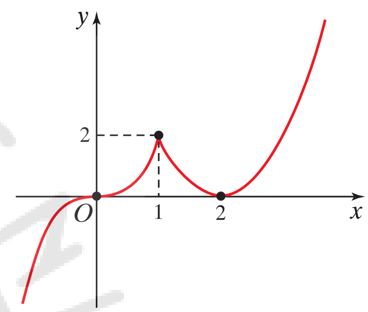
Πίνακας 5.4.1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Τοπικό μέγιστο στο $x_0=-1$ *Τοπικό ελάχιστο στο* $x_0=1$

Σημειώνομε ότι κατά τη χρησιμοποίηση της διαδικασίας αυτής δεν είναι απαραίτητο να εξασφαλίζεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 (θα πρέπει όμως η f να είναι ***συνεχής*** στο σημείο αυτό).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση (σχ. 5.4στ):



Σχ. 5.4στ.

$$f(x)=\begin{cases}2x^3, & x<1\\ 2(x-2)^2, & x\geq 1\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}-\{1\}$ με: $f'(x)=\begin{cases}6x^2, & x<1\\ 4(x-2), & x>1\end{cases}$

Στο σημείο $x_0=1$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Ωστόσο, αφού ισχύει $f'(x)>0$ για $x<1$ και $f'(x)<0$ για $1<x<2$, η f θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0=1$.

Το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο ελέγχου σχετικά με το κατά πόσο ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως, στο οποίο (υπάρχει και) μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, αποτελεί τοπικό ακρότατο της συναρτήσεως. Σύμφωνα μ' αυτό, αντί να ελέγχομε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0 αρκεί να εξετάσομε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο σημείο x_0 μόνο. Για το λόγο αυτό είναι γνωστό ως ***κριτήριο της δεύτερης παραγώγου***.

Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ, για το οποίο ισχύει $f'(x_0)=0$.

α) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και ισχύει $f''(x_0)<0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0.

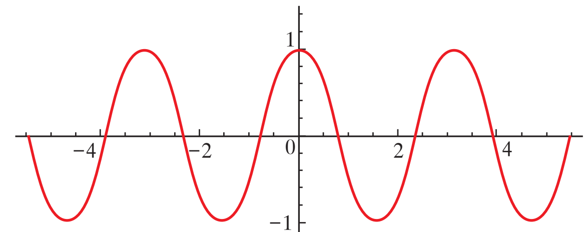
β) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και ισχύει $f''(x_0)>0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.

Σημειώνεται ότι αν κατά την εφαρμογή της προηγούμενης προτάσεως προκύψει ότι $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)=0$, τότε χρειάζεται να καταφύγομε σε παραγώγους μεγαλύτερης τάξεως για να διευκρινισθεί η φύση του σημείου x_0 (τέτοιες περιπτώσεις δεν θα εξετασθούν στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου).

Ως εφαρμογή του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου, ας θεωρήσομε τη συνάρτηση $f(x) = συν2x$ (σχ. 5.4ζ) που είναι ορισμένη στο **R.** Η f παραγωγίζεται στο **R** και ισχύει:

$$f'(x) = -2ημ2x, \qquad f''(x) = -4συν2x.$$

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = κπ,\ x = κπ + \dfrac{π}{2}$, $κ \in Z$.



Σχ. 5.4ζ.

Επειδή $f''(κπ) = -4συν2κπ = -4 < 0$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου, συμπεραίνομε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στα σημεία $0,\ \pm π,\ \pm 2π, ...$ τοπικά μέγιστα.

Ομοίως, αφού

$$f''\left(κπ + \frac{π}{2}\right) = -4συν\left(2\left(κπ + \frac{π}{2}\right)\right) = -4συνπ = 4 > 0,$$

η συνάρτηση f θα παρουσιάζει στα σημεία $\pm\dfrac{π}{2},\ \pm\dfrac{3π}{2}, ...$ τοπικά ελάχιστα.

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο αυτή, υπενθυμίζομε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής που εξηγήσαμε στην παράγραφο 4.8, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [α, β]$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \text{ για κάθε } x \in [α, β].$$

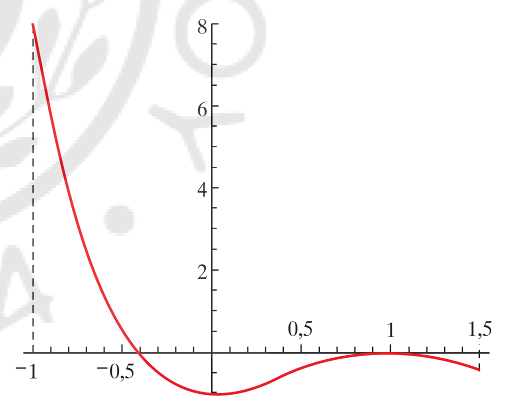
Επομένως, σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν προηγουμένως, η f θα έχει (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο στο διάστημα $[α, β]$. Για την εύρεση αυτών, στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(α, β)$, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

α) Βρίσκομε τα κρίσιμα σημεία της f.

β) Υπολογίζομε τις τιμές της f στα σημεία αυτά, καθώς επίσης και στα άκρα των διαστημάτων.

γ) Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο της f και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

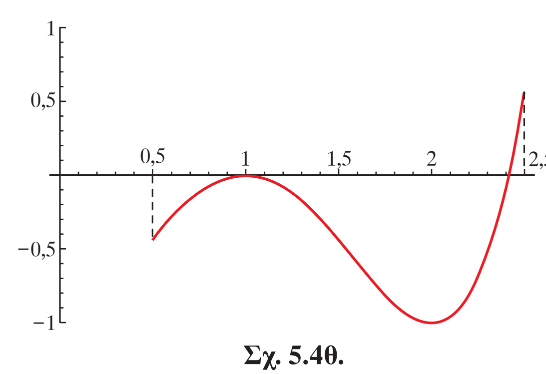
Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$, που είναι ορισμένη στο **R** και έχει παράγωγο $f'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$ οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι οι $x = 0, x = 1$, και $x = 2$. Επομένως:



Σχ. 5.4η.

α) Αν εξετάσομε τη συνάρτηση στο διάστημα $[-1, \frac{3}{2}]$, (σχ. 5.4η) το μέγιστο της f θα είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές $f(-1) = 8, f(0) = -1, f(1) = 0,\ f(\frac{3}{2}) = -\frac{7}{16}$, δηλαδή το $f(-1) = 8$, ενώ το ελάχιστο, η μικρότερη από τις τιμές $f(-1) = 8, f(0) = -1, f(1) = 0, f(\frac{3}{2}) = -\frac{7}{16}$, δηλαδή το $f(0) = -1$.

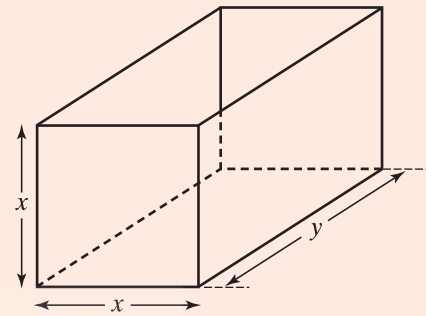
β) Αν εξετάσομε τη συνάρτηση στο διάστημα $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, (σχ. 5.4θ) το μέγιστο της f θα είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές $f(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{16}, f(1) = 0, f(2) = -1,\ f(\frac{5}{2}) = \frac{9}{16}$, δηλαδή



Σχ. 5.4θ.

το $f(\frac{5}{2})=\frac{9}{16}$, ενώ το ελάχιστο, η μικρότερη από τις τιμές $f(\frac{1}{2})=-\frac{7}{16}, f(1)=0, f(2)=-1, f(4)=63$, δηλαδή το $f(2)=-1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.1.



Μία δεξαμενή πλοίου έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με τις δύο έδρες του τετράγωνα πλευράς x. Αν η δεξαμενή πρόκειται να κατασκευασθεί από λαμαρίνα συνολικού εμβαδού 24 m^2 να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής, έτσι ώστε αυτή να χωράει τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού.

Λύση.

Αν y είναι η τρίτη διάσταση της δεξαμενής, τότε το εμβαδόν της επιφάνειάς της θα δίνεται από τον τύπο:

$$E = 2x\,y + 2xy + 2x^2 = 4xy + 2x^2.$$

Επειδή η συνολική διαθέσιμη λαμαρίνα είναι 24 m^2, θα έχομε $E=24$, οπότε

$$4xy + 2x^2 = 24 \Leftrightarrow 4xy = 24 - 2x^2 \Leftrightarrow y = \frac{24-2x^2}{4x}.$$

Ο όγκος της δεξαμενής είναι ίσος με:

$$V = (x\cdot y)\cdot x = x^2 \cdot \frac{24-2x^2}{4x} = \frac{1}{2}(12x - x^3).$$

Επομένως αναζητάμε τη μεγίστη τιμή της συναρτήσεως:

$$f(x) = \frac{1}{2}(12x - x^3), \qquad x > 0$$

της οποίας η παράγωγος είναι ίση με $f'(x)=\frac{1}{2}(12-3x^2)$. Η μοναδική θετική ρίζα της $f'(x)=0$ είναι η $x=2$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα 5.4.2.

Επειδή $f'(2)=0$ και η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2, η συνάρτηση f θα παρουσιάζει για $x=2$ τη μέγιστη τιμή της, η οποία είναι ίση με:

$$f(2) = \frac{1}{2}(12\cdot 2 - 2^3) = 8.$$

Επομένως, οι διαστάσεις της δεξαμενής που εξασφαλίζουν τη μεγαλύτερη χωρητικότητα νερού (8 m^3) είναι:

$$x = 2\text{m} \quad \text{και} \quad y = \frac{24 - 2\cdot 2^2}{4\cdot 2} = 2\text{ m}$$

(η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί στην περίπτωση που η δεξαμενή έχει όλες τις διαστάσεις της ίσες, δηλαδή κυβικό σχήμα).

Πίνακας 5.4.2

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Μέγιστο

Ας θεωρήσομε τις συναρτήσεις $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0,+\infty)$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα 5.4ι.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=3x^2>0$ και $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x>0$. Επομένως και οι δύο είναι γνησίως αύξουσες στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζουν ελάχιστο στο σημείο 0. Ωστόσο οι δύο γραφικές παραστάσεις που δίνονται στο σχήμα 5.4ι φαίνονται να διαφέρουν. Πιο συγκεκριμένα, ο τρόπος με τον οποίο «ανέρχεται» η f είναι τέτοιος, ώστε η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται συνεχώς επάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της, ενώ ο τρόπος με τον οποίο «ανέρχεται» η g είναι τέτοιος, ώστε η γραφική παράσταση της g να βρίσκεται συνεχώς κάτω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της. Παρατηρούμε επίσης ότι, καθώς το x αυξάνει, η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνει, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, ενώ η κλίση $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για μια συνάρτηση όπως η f θα λέμε ότι ***στρέφει τα κοίλα προς τα άνω*** ή είναι ***κυρτή*** στο $[0,+\infty)$ ενώ για μια συνάρτηση όπως η g θα λέμε ότι ***στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω*** ή είναι ***κοίλη*** στο $[0,+\infty)$.

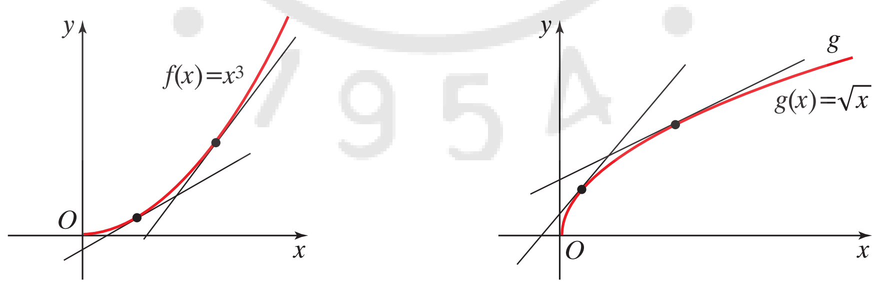
Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

> Έστω f μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ. Θα λέμε ότι η f είναι:
>
> α) ***Κυρτή*** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
>
> β) ***Κοίλη*** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

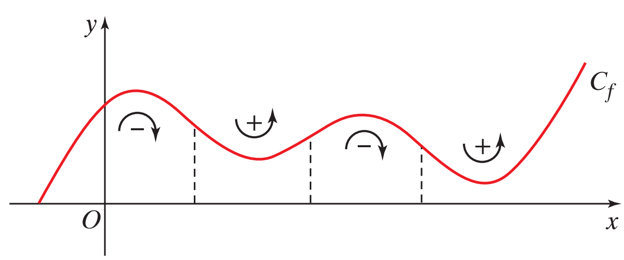
Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f από τα αριστερά προς τα δεξιά, πρέπει να στραφεί κατά τη θετική φορά (αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού) για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ.

Αντίστοιχα μία συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f από τα αριστερά προς τα δεξιά, πρέπει να στραφεί κατά την αρνητική φορά (φορά των δεικτών του ρολογιού) για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ.

Η διαπίστωση αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.4ια.



Σχ. 5.4ι.



Σχ. 5.4ια.

Για να δηλώσομε στον πίνακα μεταβολών μιας συναρτήσεως ότι αυτή είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\smile$ ή $\frown$ αντίστοιχα[1].

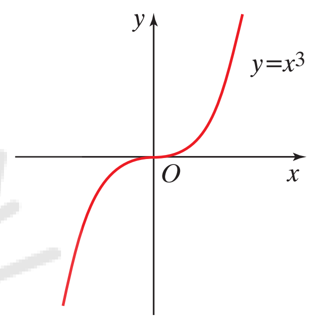
Δεδομένου ότι η μονοτονία της πρώτης παραγώγου σ' ένα διάστημα μπορεί να καθορισθεί από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο διάστημα αυτό, μπορούμε να διατυπώσομε τα επόμενα κριτήρια, τα οποία μας διευκολύνουν να βρίσκομε τα διαστήματα, στα οποία μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Τότε η f είναι:

α) ***Κυρτή*** στο Δ, αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

β) ***Κοίλη*** στο Δ, αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσομε και πάλι τη συνάρτηση $f(x)=x^3$, αυτή τη φορά σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.4ιβ. Αφού $f'(x)=3x^2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}^*$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$. Έχομε επίσης $f''(x)=6x>0$ για $x>0$ και $f''(x)=6x<0$ για $x<0$. Επομένως, η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0]$, ενώ είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.



Σχ. 5.4ιβ.

Παρατηρούμε επίσης ότι η f εκατέρωθεν του σημείου $x_0=0$ αλλάζει από κοίλη σε κυρτή και ότι η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$ την ευθεία με εξίσωση $y=0$, η οποία μάλιστα «διαπερνά» την καμπύλη. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σημείο O είναι ***σημείο καμπής*** της C_f ή ***η συνάρτηση παρουσιάζει καμπή στο*** x_0.

Γενικά έχομε τον ακόλουθο ορισμό:

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως κάποιο σημείο του x_0. Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται ***σημείο καμπής*** της γραφικής παραστάσεως της f αν:

α) Η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντιστρόφως και

β) η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι στο σημείο $O(0,0)$ που είναι σημείο καμπής της γραφικής παραστάσεως της f, ισχύει $f''(0)=0$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται):

Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συναρτήσεως f, τότε είτε θα ισχύει $f''(x_0)=0$ είτε δεν θα υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0.

---

1. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε ορισμένα συγγράμματα, μια συνάρτηση με γνησίως αύξουσα πρώτη παράγωγο ονομάζεται ***γνησίως κυρτή***, ενώ ο όρος κυρτή χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η παράγωγός της είναι απλώς αύξουσα. Αντίστοιχα, μια συνάρτηση με γνησίως φθίνουσα πρώτη παράγωγο ονομάζεται ***γνησίως κοίλη***, ενώ ο όρος κοίλη χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η παράγωγός της είναι απλώς φθίνουσα. Με τη θεώρηση αυτή η συνάρτηση $f(x)=\kappa x+\lambda$ (της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή) θεωρείται και κυρτή και κοίλη ταυτόχρονα. Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου ο όρος κυρτή/κοίλη συνάρτηση θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια συνάρτηση με γνησίως αύξουσα/γνησίως φθίνουσα πρώτη παράγωγο αντίστοιχα (οπότε συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\kappa x+\lambda$ δεν είναι ούτε κυρτές ούτε κοίλες).

Έτσι τα σημεία που αποτελούν ***υποψήφιες θέσεις*** σημείων καμπής θα πρέπει να τα αναζητούμε εξετάζοντας:

α) Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος *Δ*, στα οποία η f'' μηδενίζεται και

β) Τα εσωτερικά σημεία του *Δ*, στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}x^3, & x\le 2\\ (x-2)^2-2, & x>2,\end{cases}$

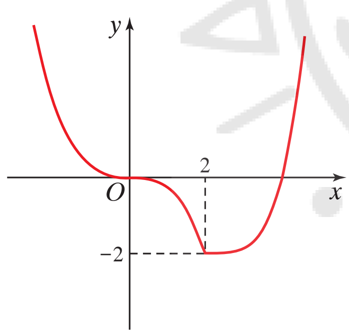
της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.4ιγ. Έχομε

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^2, & x<2\\ 2(x-2), & x>2\end{cases} \quad \text{και} \quad f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x, & x<2\\ 2, & x>2.\end{cases}$$

Η μοναδική ρίζα της $f''(x)=0$ είναι το 0, ενώ στο σημείο 2 δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της *f*. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον πίνακα 5.4.3.

Επομένως, οι υποψήφιες θέσεις σημείων καμπής είναι τα σημεία 0 και 2. Παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν των σημείων 0 και 2 η f'' αλλάζει πρόσημο. Όμως στο σημείο $(2,-2)$ η C_f δεν έχει εφαπτομένη. Επομένως το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της *f*, ενώ το σημείο $A(2,-2)$ δεν είναι σημείο καμπής.

Από τα παραπάνω συμπεραίνομε ότι, όταν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και επί πλέον ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ (δηλ. η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0), τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της συναρτήσεως *f*.



Σχ. 5.4ιγ.

Πίνακας 5.4.3

x	$-\infty \quad\quad 0$	$0 \quad\quad 2$	$2 \quad\quad +\infty$
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	∪	∩	∪

σημείο καμπής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.2.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2-48x+100$.

Λύση.

Η συνάρτηση *f* είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το **R** με:

$$f'(x)=3x^2-18x-48 \quad \text{και} \quad f''(x)=6x-18.$$

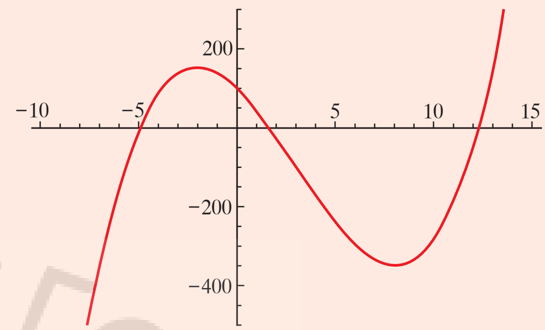
Επίσης έχομε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x-48=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=8$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Leftrightarrow x=3$.

Το πρόσημο της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου, η μονοτονία της συναρτήσεως και το είδος της (κυρτή/κοίλη) παρουσιάζονται στον πίνακα 5.4.4 μεταβολών της *f*.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ την τιμή $f(-2)=152$ και τοπικό ελάχιστο για $x=8$ την τιμή $f(8)=-348$. Τέλος η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $\Gamma(3,f(3))$, δηλαδή το $\Gamma(3,-98)$. Στο σχήμα 5.4ιδ δίνεται η γραφική παράσταση της συναρτήσεως *f*.

Πίνακας 5.4.4

x	$-\infty$		-2		3		8	$+\infty$
f'		$+$	0		$-$		0 $\quad +$	
f''			$-$		0		$+$	
f								
			τοπικό μέγιστο		*σημείο καμπής*		*τοπικό ελάχιστο*	



Σχ. 5.4ιδ.

Η πορεία την οποία ακολουθήσαμε στην εφαρμογή αυτή ονομάζεται ***μελέτη συναρτήσεως.*** Γενικά, για τη μελέτη μιας συναρτήσεως ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

α) Βρίσκομε το πεδίο ορισμού της *f*.
β) Εξετάζομε τη συνέχεια της *f* στο πεδίο ορισμού της.
γ) Βρίσκομε τις δύο πρώτες παραγώγους f' και f'' (όπου αυτές υπάρχουν) και κατασκευάζομε τους πίνακες των προσήμων τους.
δ) Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζομε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της *f*.
ε) Με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζομε τα διαστήματα, στα οποία η *f* στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και τα σημεία καμπής.
στ) Μελετούμε τη «συμπεριφορά» της συναρτήσεως στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες κ.λπ.).
ζ) Κατασκευάζομε τον ***πίνακα μεταβολών της f*** και με τη βοήθειά του χαράσσομε τη γραφική παράσταση της *f*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.3.

Δίνεται η συνάρτηση *f* με $f(x)=e^x$.
α) Να αποδείξετε ότι η *f* είναι κυρτή στο $x\in\mathbf{R}$.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.
γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $e^{x_0}\geq x_0+1$, για κάθε $x_0\in\mathrm{R}$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση *f* με $f(x)=e^x$ έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το **R**. Επίσης, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, με $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x$. Αφού ισχύει $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, η *f* θα είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή σε ολόκληρο το **R**.

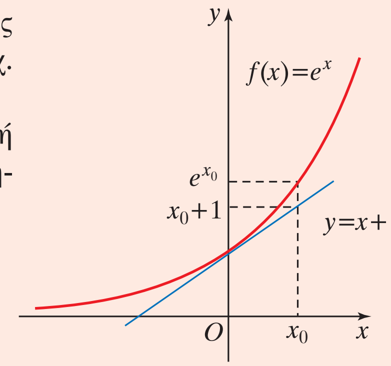
β) ´Εχομε $f'(0)=e^0=1$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι η $y-1=1\cdot(x-0)$, δηλαδή η $y=x+1$ (σχ. 5.4ιε).

γ) Επειδή η f είναι κυρτή σε ολόκληρο το **R**, η γραφική παράστασή της θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της, σε οποιοδήποτε σημείο της $(x_0, f(x_0))$. Επομένως, για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ θα ισχύει:

$$f(x_0) \geq y_0 = x_0 + 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$e^{x_0} \geq x_0 + 1.$$



Σχ. 5.4ιε.

Ασκήσεις.

5.4.1. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα (εφόσον υπάρχουν) των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=2x^4-3x^3-12x^2+5$ β) $f(x)=x^2-3x+5$ γ) $f(x)=2(x^2-4)^5$

δ) $f(x)=2x^3-4x^2+2x+3$ ε) $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}$ στ) $f(x)=x-e^{2x}$

5.4.2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα.

α) $f(x)=2x^3+4x+1$ β) $f(x)=e^x+\ln x-1$ γ) $f(x)=\sqrt{x}(1+\sqrt{x})$

δ) $f(x)=2^x+3^x+4^x$ ε) $f(x)=x^2e^x+3e^x$ στ) $f(x)=x+3^x$

5.4.3. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα μιας συναρτήσεως f, της οποίας η παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f'(x)=3(x^2-4)(x-2)^2(x-4)^2$.

5.4.4. Αφού μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=2x^3+3x^2-12x+6$ να βρείτε στη συνέχεια το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξισώσεως $x^2(2x+3)=12x-6$.

5.4.5. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με περίμετρο 40 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

5.4.6. ´Ενας τυπογράφος θέλει να τυπώσει ένα βιβλίο, σε κάθε σελίδα του οποίου:

α) Να αφεθεί επάνω και κάτω περιθώριο 3 cm και στα δύο πλάγια (αριστερά και δεξιά) περιθώριο 2 cm.

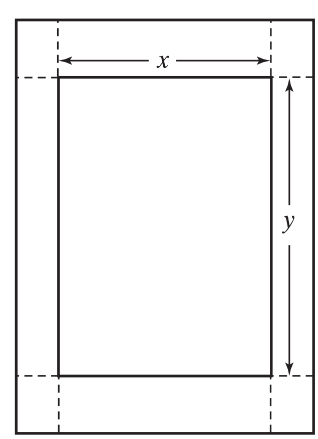
β) Το τυπωμένο μέρος της σελίδας να έχει εμβαδόν 294 cm^2.

Συμβολίζομε με x το πλάτος του τυπωμένου μέρους της σελίδας και με y το μήκος του (σχ. 5.4ιστ).

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της σελίδας δίνεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο

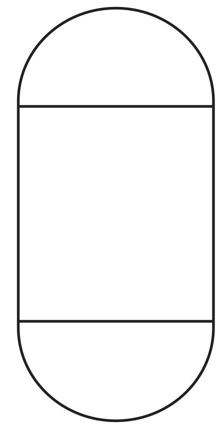
$$E(x)=6x+\frac{1176}{x}+318.$$

β) Να βρείτε τις διαστάσεις x, y του τυπωμένου μέρους, ώστε να έχομε την ελάχιστη κατανάλωση χαρτιού.



Σχ. 5.4ιστ.

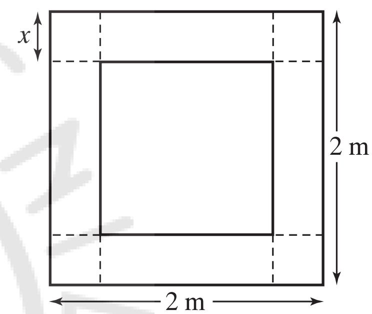
5.4.7. Ένα φινιστρίνι πλοίου αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από δύο ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4ιζ. Αν η περίμετρός του είναι 1 m, πώς πρέπει να κατασκευάσουμε το παράθυρο για να έχομε το μεγαλύτερο δυνατό φωτισμό;



Σχ. 5.4ιζ.

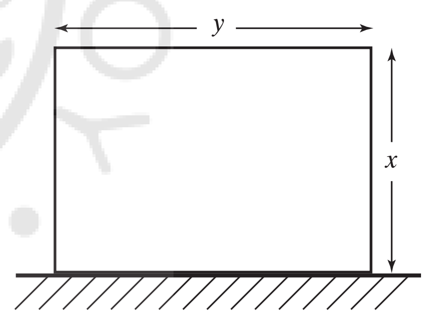
5.4.8. Ένα πλοίο ακολουθεί πορεία, της οποίας οι συντεταγμένες (σ' ένα σύστημα συντεταγμένων) ικανοποιούν την εξίσωση $y = 3x^2$. Να εντοπίσετε σε ποιο σημείο της πορείας του θα βρεθεί πιο κοντά σ' ένα φάρο που είναι τοποθετημένος στη θέση $A(2,3)$.

5.4.9. Από φύλλο λαμαρίνας που έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 2 m θέλομε να κατασκευάσομε ανοιχτό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, κόβοντας από τις 4 γωνίες του ίσα τετράγωνα, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4ιη. Να βρείτε την πλευρά x του τετραγώνου, ώστε το δοχείο που θα κατασκευάσομε, να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα.



Σχ. 5.4ιη.

5.4.10. Σ' ένα πλοίο αποφασίστηκε να αντικατασταθεί η παλιά περίφραξη ενός καταστρώματος με νέα. Για την περίφραξη των τριών πλευρών του καταστρώματος, το οποίο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4ιθ, πρόκειται να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό κάγκελο, με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται και το αντίστοιχο κόστος ανά μέτρο. Πιο συγκεκριμένα η πλευρά μήκους y πρόκειται να κατασκευαστεί από κάγκελο που κοστίζει 20 € το μέτρο, ενώ οι πλευρές μήκους x από κάγκελο που κοστίζει 30 € το μέτρο. Αν το συνολικό ποσό που θα διατεθεί είναι 1000 €, να βρείτε τις διαστάσεις x και y του ορθογωνίου που μπορεί να περιφραχτεί, ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.



Σχ. 5.4ιθ.

5.4.11. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι η δεύτερη παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f''(x) = (x-2)(x-1)^2(x+1)$. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα, στα οποία η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παραστάσεως.

5.4.12. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παραστάσεως.

α) $f(x) = -1 + 9x + x^2$ β) $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ γ) $f(x) = x^2 e^{-x/2}$

δ) $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 1$ ε) $f(x) = \eta\mu 2x$ στ) $f(x) = e^{-x^2/2}$

ζ) $f(x) = xe^{-x}$ η) $f(x) = x^3\,|x|$ θ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

5.4.13. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι η πρώτη παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f'(x) = x(x-1)$. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

5.4.14. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

5.5 Κανόνες του L' Hospital.

Ας θεωρήσομε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους:

$$f_1(x)=\frac{e^x-1}{x} \quad \text{και} \quad f_2(x)=\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}},$$

οι οποίες είναι ορισμένες στα σύνολα $A_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $A_2=(0,+\infty)$ αντίστοιχα. Αν θα θέλαμε να υπολογίσομε τα όρια των συναρτήσεων αυτών όταν το x τείνει στο 0, δηλαδή τα

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}},$$

δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσομε τον κανόνα του ορίου του πηλίκου δύο συναρτήσεων, αφού για την f_1 έχομε

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)=e^0-1=1-1=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} x=0$$

ενώ για την f_2,

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty .$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχομε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και $\frac{-\infty}{+\infty}$ αντίστοιχα.

Σε τέτοιες απροσδιόριστες μορφές μπορεί να εφαρμοστεί το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως ***κανόνας του L' Hospital*** και σε αρκετές περιπτώσεις μας προσφέρει έναν πολύ εύκολο τρόπο υπολογισμού ορίων, στα οποία εμπλέκονται απροσδιόριστες μορφές.

Κανόνας του L' Hospital.

Έστω Δ ένα διάστημα, $x_0\in\Delta$ και f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες τουλάχιστον στο $\Delta-\{x_0\}$. Υποθέτομε επίσης ότι $g'(x)\neq 0$ τουλάχιστον στο $\Delta-\{x_0\}$, ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή μη) και ότι ισχύει ***μία*** απ' τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

ή

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

Τότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ και μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για πλευρικά όρια $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, καθώς και όταν $x\to+\infty$ ή $x\to-\infty$, (αρκεί όμως να πληρούνται οι προϋποθέσεις του).

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ που θεωρήσαμε προηγουμένως είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και έχομε:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \frac{e^x}{1} = e^x.$$

Αφού υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1,$$

μπορούμε να εφαρμόσομε τον κανόνα του L' Hospital και να γράψομε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Ομοίως, για το δεύτερο όριο θα έχομε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(1+\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Σημειώνεται ότι, ο κανόνας του L' Hospital μπορεί να εφαρμοστεί και περισσότερες από μία φορές αν χρειαστεί, δηλαδή αν μετά την εφαρμογή του εξακολουθούμε να έχομε απροσδιόριστη μορφή. Για παράδειγμα, θέλοντας να υπολογίσομε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ όπου } f(x) = e^{5x},\ g(x) = x^3$$

παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f'(x) = \lim_{x\to +\infty} g'(x) = +\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f''(x) = \lim_{x\to +\infty} g''(x) = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5e^{5x}}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{25e^{5x}}{6x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{125e^{5x}}{6} = +\infty.$$

Ο κανόνας του L' Hospital μπορεί να βρει εφαρμογή και στον υπολογισμό ορίων που αφορούν σε απροσδιόριστες μορφές του τύπου $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, αφού πρώτα μετατρέψομε κατάλληλα τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει, ώστε να προκύψει μία από τις απροσδιόριστες μορφές που καλύπτει το προηγούμενο θεώρημα.

Για παράδειγμα το όριο $\lim_{x\to +\infty} (x - \ln x^2)$, που είναι της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$ (αφού $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} \ln x^2 = +\infty$) μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: γράφομε αρχικά τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει στη μορφή (αφού αναζητήσομε το όριο στο $+\infty$ μπορούμε να περιοριστούμε σε μεγάλες θετικές τιμές του x)

$$x - \ln x^2 = x - 2\ln x = x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)$$

και αφού

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

θα έχομε

$$\lim_{x\to+\infty}(1-2\frac{\ln x}{x})=1$$

και επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x^2)=\lim_{x\to+\infty}x(1-2\frac{\ln x}{x})=+\infty.$$

Τέλος αναφέρομε ότι, όταν αναζητούμε όρια συναρτήσεων της μορφής $(f(x))^{g(x)}$ μπορεί να οδηγηθούμε επίσης σε απροσδιόριστες μορφές 0^0, ∞^0, 1^∞. Σε πολλές περιπτώσεις, οι παραπάνω απροσδιόριστες μορφές υπολογίζονται με τον κανόνα του L' Hospital γράφοντας τη συνάρτηση στη μορφή $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$.

Για παράδειγμα το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$ που είναι της μορφής 0^0 μπορεί να υπολογισθεί αν λάβομε υπόψη ότι $x^x=e^{x\ln x}$ και καταφέρομε να υπολογίσομε το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$. Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ έχομε οδηγηθεί σε απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(-\infty)$ και για να προχωρήσομε στον υπολογισμό γράφομε την τελευταία συνάρτηση στη μορφή

$$x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\cdot$$

Αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ θα έχομε:

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

οπότε

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)}=e^0=1\,.$$

Ως συνέπεια των ορίων που παραθέσαμε παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσομε το σύνολο $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ και να ορίσομε σ' αυτό τις ακόλουθες πράξεις:

α) $+\infty+(+\infty)=+\infty$, $\quad -\infty+(-\infty)=-\infty$,

β) $+\infty+\alpha=+\infty$, $\quad -\infty+\alpha=-\infty$, $\alpha\in\mathbf{R}$

γ) $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=+\infty$, $\quad (+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

δ) $\alpha\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \alpha>0\\ -\infty, & \alpha<0\end{cases}$, $\qquad \alpha\cdot(-\infty)=-\alpha\cdot(+\infty)$

ε) $\dfrac{\alpha}{\pm\infty}=0$ για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$

Το $\overline{\mathbf{R}}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις αυτές ονομάζεται ***επεκτεταμένο σύστημα πραγματικών αριθμών***.

Οι επόμενες αλγεβρικές πράξεις του **R** ***δεν μπορούν*** να επεκταθούν στο $\overline{\mathbf{R}}$, γιατί εκεί δεν έχουν μονοσήμαντα ορισμένη τιμή και γι' αυτό οι μορφές των πράξεων αυτών ονομάζονται ***απροσδιόριστες μορφές***:

$$+\infty+(-\infty),\ \ 0\cdot(\pm\infty),\ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\frac{0}{0}$$

$$1^{+\infty},\ 1^{-\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$$

Στους παραπάνω συμβολισμούς οι αριθμοί 1 και 0 είναι όρια συναρτήσεων, διαφορετικά οι συμβολισμοί αυτοί εκφράζουν τελείως καθορισμένους αριθμούς. Ειδικότερα:

$$\infty^0=1,\ \ 0^0=1\ \text{ή}\ 0\ \text{και}\ 1^\infty=1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5.1.

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συναρτήσεως f με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$.

Λύση.

Η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο $A=(1,2)\cup(2,+\infty)$. Θα εξετάσομε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f στα 1, 2 και στο $+\infty$.

α) Για $x=1$ έχομε:

$$\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+}(x-2)=-1$$

οπότε θα είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{x-2}=+\infty.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

β) Για $x=2$ έχομε:

$$\lim_{x\to 2}\ln(x-1)=\ln 1=0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 2}(x-2)=0$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital θα έχομε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}(x-1)'}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=1.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

γ) Τέλος εξετάζομε αν η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-1}}{1}=0.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-2}=0.$$

και η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f.

Ασκήσεις.

5.5.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{\ln(2x+1)}$ ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x-\eta\mu x}$ στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}$ θ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$

5.5.2. Να υπολογίσετε τα εξής όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4\ln x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln(1+\frac{2}{x}))$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3\ln x)$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3+2x)^{1/x}$ ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$ στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x-2\ln(1+x)}{x^2}$ η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^3}{x^5}$ θ) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\eta\mu^2 x})$

ι) $\lim\limits_{x\to0}x^4\ln x^2$ ια) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^5e^{-x}$ ιβ) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{100}e^{-x}$

5.5.3. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$ β) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-5x+6}$ γ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(x-2)}{x-4x+3}$

δ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{e^x-1}$ ε) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x^2-3x}$ στ) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x^2-2x+1}$

5.5.4. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\frac{x^2}{3^x}$ β) $f(x)=\frac{\ln x^2}{x^2}$ γ) $f(x)=\frac{\ln x}{(x-1)(x-2)}$

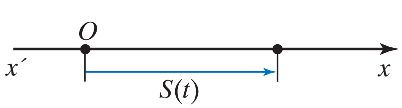
5.6 Εφαρμογές των παραγώγων.

Ας θεωρήσομε ένα κινητό (σώμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή O ενός άξονα $x'x$ (σχ. 5.6α). Έστω ότι το σώμα κινείται μόνο κατά μήκος του άξονα (εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση) και ας συμβολίσομε με $S(t)$ την απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t από το O (δηλ. την τετμημένη που αντιστοιχεί στη θέση του κινητού).

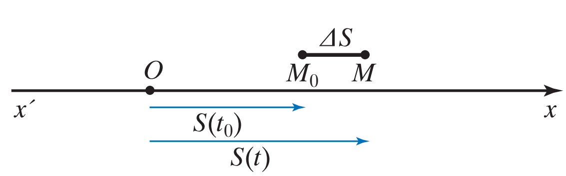
Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή t και ονομάζεται ***συνάρτηση θέσεως*** του κινητού.

Έστω ότι, ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση O, κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t=t_0+h$, έχει μετακινηθεί στη θέση M (σχ. 5.6β). Τότε η μετατόπιση του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0,t]$ θα είναι ίση με τη διαφορά $\Delta S=S(t)-S(t_0)$ και επομένως η μέση ταχύτητά του θα δίνεται από το λόγο της συνολικής μετατοπίσεως $\Delta S=S(t)-S(t_0)$ προς το χρόνο $\Delta t=t-t_0=h$ που πέρασε, δηλαδή από τον τύπο:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}.$$



Σχ. 5.6α.



Σχ. 5.6β.

Όταν το t πλησιάζει το t_0 ($t\to t_0$ ή ισοδύναμα $h\to0$), το παραπάνω πηλίκο μάς δίνει μια ιδέα του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η θέση του κινητού «κοντά στο t_0». Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}=S'(t_0),$$

ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα ή απλά ***ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή*** t_0 και συνήθως συμβολίζεται με $\upsilon(t_0)$.

Η ταχύτητα ενός κινητού ονομάζεται πολλές φορές και ***ρυθμός μεταβολής*** της θέσεως του κινητού. Έτσι, ο λόγος, $\Delta S\,/\,\Delta t$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσεως του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t]$, ενώ το όριο $S'(t_0)=\lim\limits_{h\to 0}(S(t_0+h)-S(t_0))/h$, είναι ο ***στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής*** της θέσεως του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 (ο ρυθμός μεταβολής όταν το κινητό βρίσκεται πάρα πολύ κοντά στο t_0). Στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιούμε τον όρο ρυθμός μεταβολής θα εννοούμε το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής.

Για παράδειγμα, αν $S(t)=-2t^2+10t$ είναι η συνάρτηση θέσεως ενός κινητού, τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές $t_1=1$, $t_2=2$ και $t_3=3$ θα είναι αντίστοιχα (αφού $S'(t)=-4t+10$)

$$S'(1)=-4\cdot 1+10=6,\;\; S'(2)=-4\cdot 2+10=2\;\; S'(3)=-4\cdot 3+10=-2.$$

(σημειώνομε ότι, όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$, οπότε θα είναι $\upsilon(t_0)\geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά, κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0$, οπότε θα έχομε $\upsilon(t_0)\leq 0$).

Ας θεωρήσομε τώρα τη συνάρτηση $\upsilon: t\to \upsilon(t)=S'(t)$. Σε αναλογία με όσα προαναφέρθηκαν, αντιλαμβανόμαστε ότι το όριο του πηλίκου

$$\frac{\upsilon(t)-\upsilon(t_0)}{t-t_0}=\frac{\upsilon(t_0+h)-\upsilon(t_0)}{h}$$

καθώς το t πλησιάζει το t_0 ($t\to t_0$ ή ισοδύναμα $h\to 0$) μας δίνει μια ιδέα του ρυθμού, με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα του κινητού κοντά στο t_0. Το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{\upsilon(t_0+h)-\upsilon(t_0)}{h}=\upsilon'(t_0)=S''(t_0)$$

ονομάζεται στιγμιαία επιτάχυνση ή απλά ***επιτάχυνση του κινητού*** τη χρονική στιγμή t_0. Με άλλα λόγια, η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι ο ρυθμός μεταβολής της συναρτήσεως $\upsilon(t)$ (ταχύτητας) τη χρονική στιγμή t_0.

Επομένως μπορούμε να διατυπώσομε το εξής συμπέρασμα:

> Αν $S(t)$ η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t είναι ίσες με $\upsilon(t)=S'(t)$ και $a(t)=\upsilon'(t)=S''(t)$ αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν η θέση του κινητού δίνεται από τη συνάρτηση

$$S(t)=s_0+\upsilon_0 t+\frac{1}{2}a\,t^2,$$

όπου s_0, υ_0, a είναι δεδομένες σταθερές, τότε

$$\upsilon(t)=S'(t)=(s_0+\upsilon_0 t+\frac{1}{2}a\,t^2)'=\upsilon_0+a\,t \quad\text{και}\quad a(t)=\upsilon'(t)=(\upsilon_0+a\,t)'=a,$$

δηλαδή το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση (εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση).

Η χρήση του όρου «ρυθμός μεταβολής» μπορεί να γίνει σε όλες τις περιπτώσεις που κάποιο μέγεθος y μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο άλλο μέγεθος x.

Γενικά προκύπτει ο επόμενος ορισμός:

> Αν δύο μεγέθη x, y συνδέονται με τον τύπο $y = f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ, τότε η παράγωγος $f'(x_0) = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ εκφράζει το ***ρυθμό μεταβολής του y ως προς x*** για τη συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$.

Για παράδειγμα:

α) Αν ο όγκος y ενός θερμαινόμενου κύβου πλευράς x αυξάνεται σύμφωνα με τον τύπο $y = f(x) = x^3$, ο ρυθμός μεταβολής του όγκου για $x = x_0$ είναι ίσος με $f'(x_0) = 3x_0^2$. Έτσι η ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται ο όγκος ενός κύβου πλευράς 1 (μονάδας μήκους) είναι $3 \cdot 1^2 = 3$, ενώ όταν ο κύβος έχει πλευρά 2, η ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται ο όγκος του τετραπλασιάζεται (γίνεται $3 \cdot 2^2 = 12$).

β) Αν $Q(t)$ είναι η συνάρτηση που εκφράζει το φορτίο που διέρχεται από μια κάθετη τομή ενός αγωγού τη χρονική στιγμή t, τότε η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό τη χρονική στιγμή t_0 (που σύμφωνα με τη φυσική, είναι ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου τη χρονική στιγμή t_0), θα δίνεται από την παράγωγο $Q'(t_0)$.

γ) Αν θεωρήσομε ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και συμβολίσομε με $J(t)$ το μέτρο της ορμής του τη χρονική στιγμή t, τότε το μέτρο της δυνάμεως που κινεί το σώμα είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της ορμής τη χρονική στιγμή t_0, και θα δίνεται από την παράγωγο $J'(t_0)$.

Ας δούμε στη συνέχεια πώς χρησιμοποιείται η έννοια του ρυθμού μεταβολής σε προβλήματα που έχουν σχέση με οικονομικές εφαρμογές. Στην Οικονομία, το κόστος παραγωγής και το κέρδος εκφράζονται συνήθως ως συνάρτηση της ποσότητας x που παράγεται. Ας υποθέσομε ότι το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x)$ και η συνολική είσπραξη από την πώλησή x μονάδων του προϊόντος είναι $E(x)$.

Τότε:

α) Το συνολικό κέρδος από την πώληση x μονάδων του προϊόντος θα είναι ίσο με

$$P(x) = E(x) - K(x).$$

β) Το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων του προϊόντος είναι ίσο με

$$K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Όταν ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγομε μεταβάλλεται από x_0 σε x (θεωρούμε ότι το x μεταβάλλεται σε διάστημα), τότε το πηλίκο

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}, \text{ όπου } h = x - x_0$$

δίνει το ***μέσο κέρδος*** όταν εμπορευόμαστε από x_0 μέχρι x μονάδες του προϊόντος.

Καθώς το x πλησιάζει το x_0 (ισοδύναμα $h \to 0$), το μέσο κέρδος μάς δίνει μία ιδέα του ρυθμού μεταβολής του κέρδους όταν παράγομε (και πουλάμε) έναν αριθμό μονάδων που βρίσκεται πολύ κοντά στο x_0. Για το λόγο αυτό το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} = P'(x_0),$$

ονομάζεται ***οριακό κέρδος*** στο x_0. Ανάλογα ορίζεται και η έννοια του ***οριακού κόστους*** και της ***οριακής εισπράξεως*** στο x_0 ως οι παράγωγοι $K'(x_0), E'(x_0)$ αντίστοιχα.

Από τους τύπους:

$$P'(x) = E'(x) - K'(x) \quad \text{και} \quad K'_\mu(x) = \left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{K'(x)\cdot x - K(x)}{x^2}$$

είναι φανερό ότι:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$$

και

$$K'_\mu(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x)\cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \Leftrightarrow K'(x) = K_\mu(x).$$

Επομένως, ισχύουν τα εξής, τα οποία αποτελούν δύο γνωστές αρχές της οικονομικής θεωρίας:

α) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της εισπράξεως είναι ίσοι.

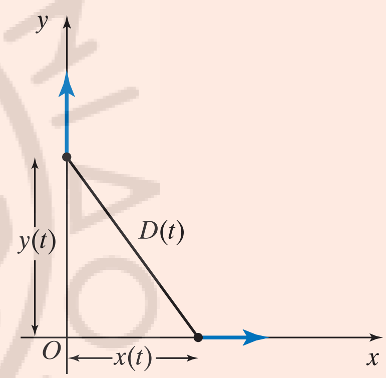
β) Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.1.

Δύο πλοία ξεκινούν από ένα λιμάνι O και έχουν κάθετες διευθύνσεις (σχ. 5.6γ). Το πρώτο κινείται βόρεια με σταθερή ταχύτητα 40 ν.μ/h, ενώ το δεύτερο κινείται ανατολικά με σταθερή ταχύτητα 50 ν.μ/h.

α) Να γράψετε τις σχέσεις που περιγράφουν τις συναρτήσεις θέσεως των δύο πλοίων.

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της αποστάσεως $D(t)$ των πλοίων μετά από 3 ώρες.



Σχ. 5.6γ.

Λύση.

α) Αφού τα πλοία κινούνται με σταθερές ταχύτητες 40 και 50 ν.μ/h, οι συναρτήσεις θέσεως θα βρίσκονται με εφαρμογή του τύπου

$$S(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

για $s_0 = 0, a = 0$ και $v_0 = 40$, 50 αντίστοιχα. Επομένως θα έχομε: $x(t) = 40t, \quad y(t) = 50t$.

β) Η απόσταση των πλοίων τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο:

$$D(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}$$

οπότε ο ρυθμός μεταβολής της αποστάσεως $D(t)$ των πλοίων τη χρονική στιγμή t θα είναι ίσος με:

$$D'(t) = \left(\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}}\left([x(t)]^2 + [y(t)]^2\right)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}}\left(2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)\right) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_0=3$ έχομε $x'(t_0)=40$, $x(t_0)=40t_0=40\cdot 3=120$, $y'(t_0)=50$, $y(t_0)=50t_0=$ $=50\cdot 3=150$, οπότε:

$$D'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{[x(t_0)]^2+[y(t_0)]^2}}=\frac{120\cdot 40+150\cdot 50}{\sqrt{120^2+150^2}}=\frac{12300}{\sqrt{36900}}=64,03.$$

Άρα τα πλοία απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ταχύτητα περίπου 64 ν.μ/h.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.2.

Η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από τον ανθρώπινο οργανισμό μετά την παρέλευση χρόνου t από τη στιγμή που χορηγήθηκε, δίνεται από τον τύπο

$$f(t)=2\cdot e^{-\frac{t}{100}} \quad t\geq 0.$$

Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t, κατά την οποία ο ρυθμός απορροφήσεως του αντιβιοτικού από τον ανθρώπινο οργανισμό είναι ίσος με το 1/10 του ρυθμού απορροφήσεως κατά τη χρονική στιγμή $t_0=0$.

Λύση.

Έχομε

$$f'(t)=(2\cdot e^{-\frac{t}{100}})'=2\cdot e^{-\frac{t}{100}}\cdot(-\frac{t}{100})'=2\cdot e^{-\frac{t}{100}}\cdot(-\frac{1}{100})=-\frac{1}{50}\cdot e^{-\frac{t}{100}}.$$

Ο ρυθμός απορροφήσεως του αντιβιοτικού από τον ανθρώπινο οργανισμό τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι:

$$f'(0)=-\frac{1}{50}\cdot e^{-\frac{0}{100}}=-\frac{1}{50}.$$

Ζητάμε τώρα να βρούμε την τιμή του t για την οποία ισχύει, $f'(t)=\frac{1}{10}\cdot f'(0)$ δηλαδή,

$$-\frac{1}{50}\cdot e^{-\frac{t}{100}}=\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{50}\right)\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{100}}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow -\frac{t}{100}=\ln\frac{1}{10}=-\ln 10\Leftrightarrow t=100\cdot\ln 10=230,26.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.3.

Η απόδοση μιας συγκεκριμένης μηχανής «εισόδου-εξόδου» τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$E(t)=2-\frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)}$$

όπου $T_{in}=T_{in}(t)$ είναι η θερμοκρασία «εισόδου» και $T_{out}=T_{out}(t)$ η θερμοκρασία «εξόδου» σε βαθμούς Κελσίου (^0C). Αν η θερμοκρασία T_{in} αυξάνεται με ρυθμό $6\,^0C/\min$, ενώ η απόδοση $E(t)$ δεν μεταβάλλεται [δηλ. $E(t)=E$ για κάθε t], να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας T_{out} ως συνάρτηση του E.

Λύση.

Λύνοντας τη σχέση $E(t)=2-\dfrac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)}$ ως προς $T_{out}(t)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $E(t)=E$ για κάθε t, παίρνομε:

$$E(t)=2-\frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)} \Leftrightarrow \frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)}=2-E \Leftrightarrow T_{out}(t)=\frac{4(2-E)}{3}T_{in}(t).$$

Επομένως,

$$T'_{out}(t)=\frac{4(2-E)}{3}T'_{in}(t)$$

και επειδή $T'_{in}(t)=\dfrac{dT_{in}(t)}{dt}=6^{o}C/\min$ προκύπτει ότι

$$T'_{out}(t)=\frac{dT_{out}(t)}{dt}=\frac{4(2-E)}{3}\cdot 6=8(2-E)\ {}^{o}C/\min.$$

Ασκήσεις.

5.6.1. Ένα σώμα κινείται σ' έναν άξονα, έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο t να δίνεται από τον τύπο $S(t)=3t^3-\dfrac{9}{2}t^2+2t+1$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και να προσδιορίσετε πότε το σώμα είναι ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος στις χρονικές αυτές στιγμές;

5.6.2. Ένα έμβολο κινείται πάνω-κάτω στον κύλινδρο μιας ντηζελομηχανής και η απομάκρυνσή του από την κορυφή του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $S(t)=3-2\eta\mu\, t$.
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του εμβόλου για κάθε χρονική στιγμή t.
β) Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές, κατά τις οποίες η ταχύτητα του εμβόλου γίνεται μηδέν. Τι συμβαίνει κατά τις χρονικές αυτές στιγμές;

5.6.3. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σ' έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $S(t)=s_0\eta\mu\omega\, t$, όπου t ο χρόνος και τα s_0, ω είναι σταθερές.
α) Να βρείτε την ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t.
β) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη του y.
γ) Να αποδείξετε ότι, όταν η επιτάχυνση γίνει 0, τότε το μέτρο της ταχύτητας παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

5.6.4. Δύο συναρτήσεις f και g συνδέονται με τη σχέση $f(t)=2e^{3g(t)}+1$. Αν $g(1)=0$ και $g'(1)=1$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f όταν $t=1$.

5.6.5. Μία σφαιρική μπάλα πάγου που βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας αρχίζει να λιώνει και η επιφάνειά της μειώνεται με ρυθμό $3\,\text{cm}^2$/min. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της διαμέτρου της μπάλας τη χρονική στιγμή που η διάμετρος ισούται με $5\,\text{cm}$ (η συνολική επιφάνεια σφαίρας διαμέτρου d δίνεται από τον τύπο $E=\pi d^2$).

5.6.6. Η ακτίνα $R(t)$ ενός κυκλικού στεφανιού μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $R(t)=3t^2+5t+1$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του κυκλικού στεφανιού, καθώς και της επιφάνειας που περικλείεται απ' αυτό κατά τη χρονική στιγμή $t=10\,\text{sec}$.

5.6.7. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει είναι $10\,\text{cm}^3$/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας $R(t)$ του μπαλονιού, όταν η διάμετρός του γίνεται ίση με 5 cm (ο όγκος σφαίρας ακτίνας r δίνεται από τον τύπο $E=\dfrac{4}{3}\pi r^3$).

5.6.8. Από μια δεξαμενή βυθισμένου πλοίου διαρρέει πετρέλαιο. Ο όγκος του πετρελαίου, σε λίτρα, που απομένει στη δεξαμενή, t ώρες μετά την έναρξη της διαρροής, δίνεται από τον τύπο $V(t)=10\cdot(20-t)^3$.
α) Να βρείτε το ρυθμό μειώσεως του όγκου του καυσίμου στη δεξαμενή μετά από 3 ώρες και

μετά από 5 ώρες.

β) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει η δεξαμενή.

γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μειώσεως του όγκου του καυσίμου στη δεξαμενή 1 ώρα πριν αυτή αδειάσει.

5.6.9. Το κόστος παραγωγής, $K(x)$, και η είσπραξη, $E(x)$, από την κατασκευή x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις:

$$K(x) = x^3 - 80x^2 + 2400x + 1 \text{ και } E(x) = 300x,$$

αντίστοιχα. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους της βιομηχανίας, είναι θετικός.

5.6.10. Μία μικρή βιομηχανία παράγει κλειδαριές για καμπίνες επιβατικών πλοίων. Το κόστος $K(x)$, σε €, για την παραγωγή x κλειδαριών σε μια ημέρα δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο:

$$K(x) = 200 + 80x - \frac{x^2}{3}, \quad x \in [0, 200],$$

ενώ οι εισπράξεις της βιομηχανίας σε € από την πώληση των x κλειδαριών δίνονται από τη σχέση

$$E(x) = 70x + \frac{x^2}{2}.$$

α) Να βρείτε τον αριθμό $K'(10)$ και να δώσετε την οικονομική ερμηνεία του.

β) Να βρείτε το κόστος παραγωγής της 5ης κλειδαριάς (σε κάποια ημέρα).

γ) Να βρείτε τον αριθμό $E'(10)$ και να δώσετε την οικονομική ερμηνεία του.

δ) Να βρείτε τον αριθμό $P'(10)$, όπου $P(x)$ είναι το καθαρό κέρδος από την πώληση x κλειδαριών.

ε) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο πλήθος κλειδαριών που μπορούν να κατασκευάζονται ημερήσια, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της εισπράξεως να είναι ίσοι.

5.6.11. Πληθυσμός μικροβίων ψεκάζεται με κάποιο χημικό μικροβιοκτόνο. Έστω ότι ο αριθμός $N(t)$ των μικροβίων που επιζούν t λεπτά (min) μετά τον ψεκασμό είναι ίσος με $N(t) = 10^4(100 - t)^2$.

α) Να βρείτε το μέσο αριθμό των μικροβίων που επιζούν στο χρονικό διάστημα [0, 1] min και στο χρονικό διάστημα [0, 10] min.

β) Να βρείτε το ρυθμό μειώσεως των μικροβίων στο τέλος των 10 λεπτών.

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που ο πληθυσμός των μικροβίων εξαφανίζεται.

5.6.12. Η βάση μιας δεξαμενής καυσίμου σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου έχει μήκος 10 m και πλάτος 5 m. Η παροχή καυσίμου στη δεξαμενή είναι τέτοια, ώστε το ύψος z του νερού τη χρονική στιγμή t να δίνεται (σε cm) από τον τύπο $z(t) = 0{,}2t^2$. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του όγκου V του νερού τη χρονική στιγμή $t_0 = 5$ sec.

5.7 Μερική παράγωγος.

Σε πολλές εφαρμογές, η τιμή που χρησιμοποιούμε για τις συναρτήσεις εξαρτάται από την τιμή περισσοτέρων της μιας μεταβλητής. Για παράδειγμα ο όγκος ενός κυκλικού κυλίνδρου εκφράζεται συναρτήσει της ακτίνας του r και του ύψους του h μέσω του τύπου

$$V = \pi h r^2.$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται μία συνάρτηση, η οποία απεικονίζει τα στοιχεία του συνόλου

$A=\{(r,h): r\in\mathbf{R}$ και $h\in\mathbf{R}\}$ σε πραγματικούς αριθμούς μέσω του τύπου $V(r,h)=\pi h r^2$, ο οποίος για κάθε τιμή της ακτίνας του r και του ύψους του h μάς δίνει τον όγκο του κυκλικού κυλίνδρου. Έτσι, αν υποθέσομε ότι η ακτίνα είναι $r=1\ m$ και το ύψος του $h=2\ m$, τότε ο όγκος του κυκλικού κυλίνδρου θα είναι:

$$V(1,2)=\pi\cdot 2\cdot 1^2 \Rightarrow V(1,2)=2\cdot\pi\ m^3.$$

Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται ***συναρτήσεις δύο μεταβλητών***. Όπως και για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έτσι και για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών θα θεωρούμε ότι έχουν ως πεδίο ορισμού τους το σύνολο όλων εκείνων των δυάδων για τις οποίες έχει νόημα η συνάρτηση. Γενικά έχομε τον επόμενο ορισμό:

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, δηλαδή

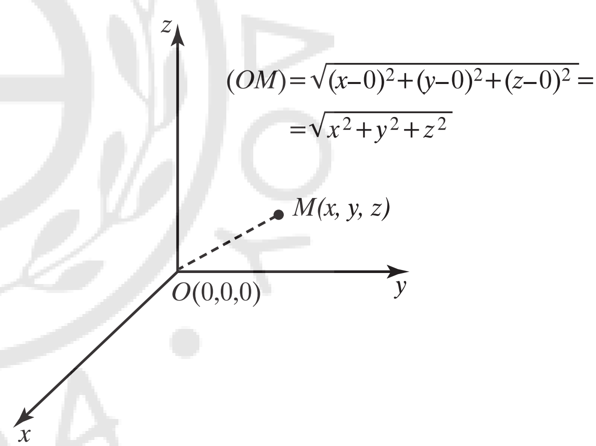
$$A\subseteq\{(x,y): x\in\mathbf{R} \text{ και } y\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}^2.$$

Μια διαδικασία μέσω της οποίας, σε κάθε δυάδα (x,y) αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός z καλείται ***συνάρτηση f δύο μεταβλητών*** με πεδίο ορισμού το A. Ο αριθμός z θα συμβολίζεται με $f(x,y)$ ($z=f(x,y)$) και θα καλείται ***εξαρτημένη μεταβλητή***, ενώ οι μεταβλητές x,y ***ανεξάρτητες***. Ως σύνολο τιμών της συναρτήσεως ορίζομε το σύνολο όλων των δυνατών τιμών $z=f(x,y)\in\mathbf{R}$ για $(x,y)\in A$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα όπου $V(r,h)=\pi h r^2$, η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το V, ενώ οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι r, h.

Τα παραπάνω γενικεύονται για συναρτήσεις τριών μεταβλητών, τεσσάρων μεταβλητών κ.ο.κ.. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να θεωρήσομε τη συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να εκφράζει την απόσταση OM του σημείου $M(x,y,z)$ από την αρχή $O(0,0,0)$ ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων συντεταγμένων $Oxyz$ (σχ. 5.7α). Αφού $OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει θα δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$



Σχ. 5.7α.

Η τιμή της f στο σημείο $(1,2,3)$ είναι προφανώς η απόσταση του σημείου $M(1,2,3)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$ και βρίσκεται ίση με:

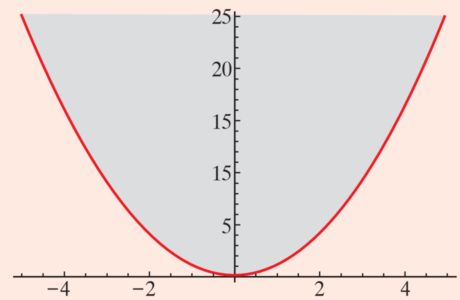
$$f(1,2,3)=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}, \text{ δηλαδή } (OM)=\sqrt{14}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.1.

Να βρείτε και να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως δύο μεταβλητών

$$f(x,y)=\sqrt{-x^2+y}.$$

Ποιο είναι το σύνολο τιμών της παραπάνω συναρτήσεως;



Σχ. 5.7β.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλες τις δυάδες εκείνες (x, y) για τις οποίες ο τύπος της συναρτήσεως f μπορεί να εφαρμοσθεί και να δώσει ως αποτέλεσμα έναν πραγματικό αριθμό. Επομένως θα πρέπει

$$-x^2 + y \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2. \qquad (5.7.1)$$

Αν σχεδιάσομε τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ τότε είναι φανερό από την (5.7.1) ότι ως πεδίο ορισμού της συναρτήσεως παίρνομε όλα τα σημεία εκείνα που βρίσκονται επάνω ή στο εσωτερικό της παραβολής $y = x^2$ (σχ. 5.7β).

Επί πλέον είναι προφανές ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών, αφού:

$$z = f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y} \geq 0$$

για κάθε ζεύγος (x, y) με $y \geq x^2$ και επί πλέον, για κάθε $z \geq 0$ μπορούμε να βρούμε (τουλάχιστον ένα) ζεύγος (x, y) με $y \geq x^2$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$z = \sqrt{-x^2 + y} \Leftrightarrow -x^2 + y = z^2$$

(θα μπορούσαμε, π.χ. να πάρομε $x = 0, y = z^2$).

Ας θεωρήσομε στη συνέχεια τη συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$z = f(x, y) = 50 - x^2 - y^2 - xy. \qquad (5.7.2)$$

Αν στην παραπάνω συνάρτηση κρατήσομε σταθερή την ανεξάρτητη μεταβλητή y και παραγωγίσομε ως προς x τότε θα έχομε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{d}{dx}(50 - x^2 - y^2 - xy) = 0 - 2x - y = -2x - y.$$

Ο συμβολισμός $\frac{d}{dx} f(x, y)$ στον παραπάνω τύπο παριστάνει την παράγωγο της $z = f(x, y)$ ως προς x όταν κρατήσομε το y σταθερό και ονομάζεται ***μερική παράγωγος της f ως προς x.*** Συνήθως, για τη μερική παράγωγο της f ως προς x, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{ή} \quad f_x(x, y)$$

ή απλούστερα

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ή} \quad f_x \quad \text{ή} \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Επομένως, για τη συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο (5.7.2) μπορούμε να γράψομε:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x - y. \qquad (5.7.3)$$

Για την τελευταία συνάρτηση, η οποία προφανώς αποτελεί μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, θα μπορούσαμε να υπολογίσομε την τιμή της x σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο (x_0, y_0). Για παράδειγμα η τιμή της $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=-2x-y$ στο σημείο $(x_0,y_0)=(1,2)$ είναι ίση με $-2\cdot 1-2=-4$. Ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει θα γράφεται ως:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{x=1,\, y=2}=-4 \quad \text{ή απλούστερα} \quad \left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{(1,2)}=-4.$$

Γενικά, η ***μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο*** (x_0,y_0) θα συμβολίζεται με

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0) \quad \text{ή} \quad f_x(x_0,y_0) \quad \text{ή} \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \quad \text{ή απλά} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Από τον τρόπο που υπολογίζεται η μερική παράγωγος, μπορεί κάποιος εύκολα να αντιληφθεί ότι θα μπορούσε να εκφρασθεί ως όριο μέσω του επόμενου τύπου (ο οποίος μοιάζει με τον τύπο ορισμού της παραγώγου μιας μεταβλητής, που αναφέρεται στην παράγραφο 5.1)

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_{0,},y_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσομε τη μερική παράγωγο της *f* ως προς *y*, η οποία θα συμβολίζεται με:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \text{ή} \quad f_y(x,y)$$

ή απλούστερα

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ή} \quad f_y \quad \text{ή} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Έτσι για τη συνάρτηση (5.7.2) θα έχομε:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(50-x^2-y^2-xy)=0-0-2y-x=-2y-x,$$

ενώ αν θέλαμε να υπολογίσομε τη μερική παράγωγο της *f* ως προς *y* στο σημείο $(x_0,y_0)=(2,3)$, θα είχαμε:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right|_{(2,3)}=\left.\frac{\partial}{\partial y}(50-x^2-y^2-xy)\right|_{(2,3)}=-2y-x\big|_{(2,3)}=-2\cdot 3-2=-8.$$

Τα παραπάνω γενικεύονται για συναρτήσεις τριών ή τεσσάρων μεταβλητών ή και γενικότερα, όταν έχομε $n-$μεταβλητές. Οι μερικές παράγωγοι είναι αυτές που παίρνουμε όταν σε μια συνάρτηση κρατήσομε σταθερές όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές, εκτός από μία και παραγωγίσομε μόνο ως προς αυτή. Στους υπολογισμούς των μερικών παραγώγων μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους ήδη γνωστούς κανόνες παραγωγίσεως για συναρτήσεις μιας μεταβλητής (βλ. παράγρ. 5.2).

Σημειώνομε τέλος ότι, αφού η μερική παράγωγος μιας συναρτήσεως αποτελεί μια νέα συνάρτηση (δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών), θα μπορούσε να ξαναπαραγωγισθεί ως προς τις μεταβλητές που περιλαμβάνει, λαμβάνοντας παραγώγους ανώτερης τάξεως. Για παράδειγμα, παραγωγίζοντας την (5.7.3) ως προς *x* και *y* παίρνομε:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-2x-y)=-1,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-2x-y)=-2.$$

Οι παραπάνω μερικές παράγωγοι συμβολίζονται

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \text{ αντίστοιχα.}$$

Ομοίως θα έχομε:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2y-x) = -1, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2y-x) = -2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.2.

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους της παρακάτω συναρτήσεως ως προς κάθε μεταβλητή

$$f(x,y) = e^x \,\text{ημ}\, y.$$

Λύση.

Βρίσκομε πρώτα την $\frac{\partial f}{\partial x}$ θεωρώντας ότι το $\text{ημ}\, y$ είναι σταθερό. Έχομε:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \text{ημ}\, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x) \cdot \text{ημ}\, y = e^x \,\text{ημ}\, y.$$

Στη συνέχεια βρίσκομε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ κρατώντας τη μεταβλητή x σταθερά, έτσι παίρνομε

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \text{ημ}\, y) = e^x \frac{\partial}{\partial y}(\text{ημ}\, y) = e^x \,\text{συν}\, y.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.3.

Να βρείτε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ της συναρτήσεως: $f(x,y) = e^x \ln(x^2+y^2+1)$.

Λύση

Βρίσκομε τη ζητούμενη παράγωγο θεωρώντας ως σταθερά τη μεταβλητή x και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Έτσι παίρνομε:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \ln(x^2+y^2+1)) = e^x \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x^2+y^2+1)) = e^x \frac{1}{x^2+y^2+1)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+1)$$

$$= e^x \frac{1}{x^2+y^2+1)} \cdot (0+2y+0) = \frac{e^x}{x^2+y^2+1} \cdot 2y = \frac{2ye^x}{1+x^2+y^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.4.

Ας υποθέσομε ότι τρεις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3, βρίσκονται σε παράλληλη σύνδεση, οπότε η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

α) Να υπολογίσετε τη μερική παράγωγο $\dfrac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$.

β) Ποια είναι η φυσική ερμηνεία της μερικής παραγώγου $\dfrac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$;

Λύση.

α) Με τη βοήθεια της σχέσεως $\dfrac{1}{R_{ολ}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$, βρίσκομε την επόμενη έκφραση για την ολική αντίσταση $R_{ολ}$

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}.$$

Θεωρούμε τις μεταβλητές R_2, R_3 σταθερές και παραγωγίζοντας ως προς R_1 παίρνομε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} &= R_2 R_3 \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}\right)\\ &= R_2 R_3 \cdot \frac{\dfrac{\partial}{\partial R_1}(R_1)\cdot(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3) - R_1 \cdot \dfrac{\partial}{\partial R_1}(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)^2}\\ &= R_2 R_3 \cdot \frac{1\cdot(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3) - R_1\cdot(R_2 + 0 + R_3)}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)^2}\\ &= R_2 R_3 \cdot \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 - R_1R_2 - R_1R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)^2} = R_2R_3 \cdot \frac{R_2R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)^2}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} = \frac{R_2{}^2 R_3{}^2}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)^2}. \tag{5.7.4}$$

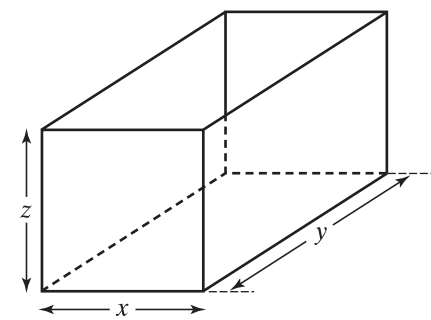
β) Όπως και στην περίπτωση της συνήθους παραγώγου, που είδαμε στην παράγραφο 5.6, η μερική παράγωγος θα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συναρτήσεως. Ωστόσο, επειδή τώρα η συνάρτηση περιέχει περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, ο ρυθμός μεταβολής αφορά στον τρόπο που μεταβάλλεται η συνάρτηση όταν μεταβληθεί η τιμή της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει (αυτή ως προς την οποία παραγωγίζομε), ενώ όλες οι άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν αμετάβλητες.

Έτσι, η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$ στο παρόν παράδειγμα, μας δίνει το ρυθμό μεταβολής της ολικής αντιστάσεως $R_{ολ}$ ως προς την R_1, όταν κρατήσομε τις αντιστάσεις R_2 και R_3 σταθερές. Έτσι θέλοντας να βρούμε το ρυθμό μεταβολής της ολικής αντιστάσεως $R_{ολ}$ ως προς την R_1 όταν R_1 = 1 Ohm και R_2 = 2 Ohm, από τη σχέση (5.7.4) εύκολα προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} = \frac{1^2 \cdot 2^2}{(R_1 + 2 + 2R_1)^2} \Rightarrow \frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} = \frac{4}{(3R_1 + 2)^2}.$$

Αν λοιπόν η R_1 έχει τιμή 1 Ohm και αυξηθεί, τότε ο ρυθμός αυξήσεως της ολικής αντιστάσεως $R_{ολ}$ θα είναι ίσος με $4/(3\cdot 1 + 2)^2 = 4/25$ (εφόσον φυσικά οι αντιστάσεις R_2 και R_3 διατηρήσουν τις τιμές τους $R_2 = 1$ Ohm και $R_2 = 2$ Ohm).

Ασκήσεις.



Σχ. 5.7γ.

5.7.1. Σε ένα επίπεδο, θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων xOy και ένα σταθερό σημείο $M_0(x_0, y_0)$. Να γράψετε τη συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση MM_0 ενός σημείου $M(x, y)$ από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως και ποιο το σύνολο τιμών της;

5.7.2. Μία δεξαμενή πλοίου έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με ακμές μήκους x, y, z (σχ. 5.7γ). Το επάνω μέρος της δεξαμενής είναι ανοικτό.

α) Να δώσετε μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τον όγκο της δεξαμενής.

β) Να δώσετε μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τη συνολική επιφάνεια της δεξαμενής.

γ) Αν ο όγκος της δεξαμενής είναι 5 m^3 να δώσετε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τη συνολική επιφάνεια της δεξαμενής.

δ) Αν η συνολική επιφάνεια της δεξαμενής είναι 10 m^2 να δώσετε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τον όγκο της δεξαμενής με χρήση μόνο των x και y.

5.7.3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x, y) = xy$ β) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ γ) $f(x, y, z) = e^x \sin(yz)$

δ) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$ ε) $f(x, y) = \sqrt{e^x - 1}$ στ) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

5.7.4. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων ως προς κάθε μεταβλητή.

α) $f(x, y) = x^2 + y^2$ β) $f(x, y) = ye^x$ γ) $f(x, y) = 4$

δ) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ ε) $f(x, y) = e^x \sin y$ στ) $f(x, y) = (xy)^5$

5.7.5. Στις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

α) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$ β) $f(x, y, z) = yze^x$ γ) $f(x, y, z) = e^x \sin(yz)$

δ) $f(x, y, z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ ε) $f(x, y) = (xy)^z$ στ) $f(x, y, z) = (xyz)^5$

5.7.6. Να βρείτε τη μερική παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ για τη συνάρτηση τριών μεταβλητών με τύπο

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$$

5.7.7. Ας υποθέσομε ότι, σε κάποιο τόπο, η θερμοκρασία του νερού x μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας κατά την t μέρα του χρόνου, δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση δύο μεταβλητών $w(x, t) = \cos(5t - 2x)\, e^{0,2x}$.

Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial x}$ και να δώσετε τη φυσική τους ερμηνεία.

5.7.8. Η ένταση E ενός ηλεκτρικού πεδίου δίνεται με τη βοήθεια συναρτήσεως δυναμικού V από τον τύπο

$$E = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

όπου $V(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial z}$.

β) Να υπολογίσετε την ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο (1, 1, 1).

5.7.9. Κατά τη λειτουργία μιας αντλίας της καρδιάς ενός ανθρώπινου οργανισμού, το μηχανικό έργο W που παράγεται δίνεται από τη σχέση

$$W(P, V, \delta, \upsilon, g) = PV + \frac{V\delta}{2g}\upsilon^2,$$

όπου P είναι η μέση πίεση του αίματος, V ο όγκος του αίματος που αντλείται σε μία χρονική μονάδα, δ το ειδικό βάρος του αίματος, υ η μέση ταχύτητα του αίματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial W}{\partial P}, \frac{\partial W}{\partial V}, \frac{\partial W}{\partial \delta}$.

β) Αν μέλη της ιατρικής ομάδας της Πολεμικής Αεροπορίας θέλουν να εκτιμήσουν την ευαισθησία του έργου W (δηλ. πόσο εύκολα μεταβάλλεται η τιμή του) ως προς την επιτάχυνση g της βαρύτητας εξαιτίας των ελιγμών πτήσεων, ποια μερική παράγωγο θα έπρεπε να υπολογίσουν; Να υπολογίσετε την παράγωγο αυτή (θεωρώντας σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές που δεν σας ενδιαφέρουν). Τι παρατηρείτε; Εκφράσετε την προσωπική σας άποψη.

5.7.10. Δίνεται ότι οι μεταβλητές x, y και r, θ συνδέονται μεταξύ τους με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta.$$

Να αποδείξετε ότι $\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} = r$.

5.7.11. Για τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y) = \frac{1}{2} - x^2 - y^2$ να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y^2 x\frac{\partial f}{\partial y} = -2x(x + y^3).$$

5.7.12. Δίνεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών με τύπο $f(x, y) = 3x^3y^2 + 2xy^3 + x^2 + y^4$.

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

β) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξεως

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

γ) Να διαπιστώσετε ότι για κάθε x και y ισχύει η ισότητα $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$

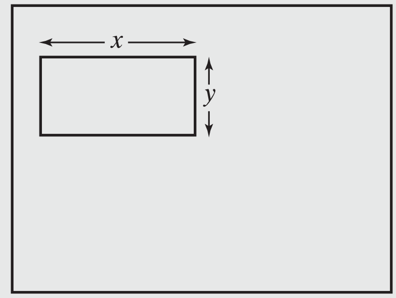
(δηλ. δεν έχει καμιά σημασία η σειρά με την οποία γίνεται η παραγώγιση για τις μεταβλητές x και y), ενώ δεν ισχύει αντίστοιχη ισότητα ανάμεσα στις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \text{ και } \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}.$$

5.8 Παραγώγιση συνθέτων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Διαφορικό συναρτήσεως.

Ας υποθέσομε ότι στην οθόνη ενός υπολογιστή ανοίγομε ένα παράθυρο μετακινώντας το ποντίκι. Προφανώς η επιφάνεια που καταλαμβάνει το παράθυρο επάνω στην οθόνη θα δίνεται από τη συνάρτηση δύο μεταβλητών (σχ. 5.8α)

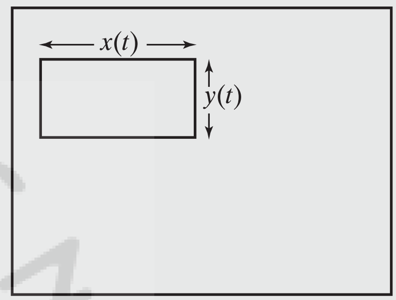
$$f(x, y) = xy.$$



Σχ. 5.8α.

Έστω ότι το πλάτος και το ύψος του παραθύρου τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα. Τότε η επιφάνεια (εμβαδό) που θα καταλαμβάνει το παράθυρο στην οθόνη τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = x(t)y(t).$$



Σχ. 5.8β.

Αν θέλαμε να υπολογίσομε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του παραθύρου τη χρονική στιγμή t, θα έπρεπε, αρχικά να αντικαταστήσομε τις εκφράσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ στον τύπο της συναρτήσεως f και έπειτα να παραγωγίσομε την έκφραση που θα προκύψει ως προς t (σχ. 5.8β).

Για παράδειγμα, αν $x(t) = 2t^2$, $y(t) = 3t + 1$, παίρνομε

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = x(t)y(t) = 2t^2(3t+1) = 6t^3 + 2t^2$$

οπότε $h'(t) = (6t^3 + 2t^2)' = 18t^2 + 4t$.

Σε αρκετές περιπτώσεις οι εκφράσεις που λαμβάνομε μετά την αντικατάσταση είναι αρκετά περίπλοκες και συνεπώς η αντικατάσταση αυτή δεν είναι πάντα προς το συμφέρον μας. Για το λόγο αυτό θα μας εξυπηρετούσε αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσομε κάποιους κανόνες αλυσιδωτής παραγωγίσεως οι οποίοι να εκφράζουν τις παραγώγους που μας ενδιαφέρουν μέσω απλουστέρων παραγωγίσεων, χωρίς να υπάρχει ανάγκη αντικαταστάσεως των εκφράσεων των $x = x(t)$, $y = y(t)$ και εκτελέσεως επιπόνων πράξεων ή παραγωγίσεων πολυπλόκων εκφράσεων.

Ας παρατηρήσομε αρχικά ότι η συνάρτηση $h(t) = f(x(t), y(t))$ έχει τη μορφή μιας σύνθετης συναρτήσεως, με την έννοια ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές x, y είναι συναρτήσεις κάποιας άλλης μεταβλητής. Στην παράγραφο 5.2 είχαμε δει ότι για σύνθετες συναρτήσεις (μιας μεταβλητής) ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας. Πιο συγκεκριμένα για τη σύνθετη συνάρτηση μιας μεταβλητής $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Leibniz, και θέσομε $u = g(x)$ και $y = t(u)$, είδαμε ότι ισχύει ο τύπος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Ανάλογος τύπος μπορεί να αποδειχθεί για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = f(x, y)$ όπου $x = x(t)$, $y = y(t)$. Πιο συγκεκριμένα προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται), το οποίο είναι γνωστό ως ***κανόνας της αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών***.

> Αν η συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ και οι $x = x(t)$, $y = y(t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς t, τότε η σύνθεση $z = f(x(t), y(t))$ είναι επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση του t και η παραγωγός της δίνεται από τον τύπο
>
> $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{5.8.1}$$

Προκειμένου να εφαρμόσομε τον κανόνα της αλυσίδας για το παράδειγμα που εξετάσαμε προηγουμένως παρατηρούμε ότι για $z = f(x, y) = xy$ έχομε:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial(xy)}{\partial x}=y\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial(xy)}{\partial y}=x$$

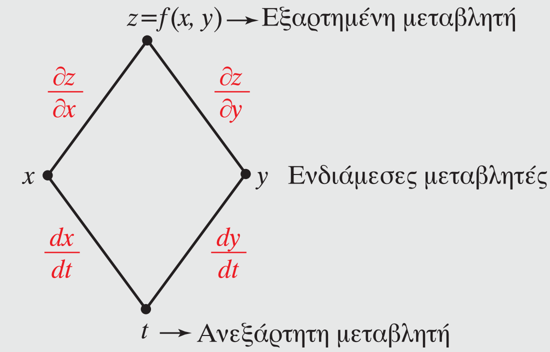
ενώ για τις συναρτήσεις $x(t)=2t^2,\ y(t)=3t+1$ προκύπτει

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d(2t^2)}{dt}=(2t^2)'=4t\,,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d(3t+1)}{dt}=(3t+1)'=3\,.$$

Επομένως

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y\cdot(4t)+x\cdot 3=$$
$$=(3t+1)\cdot(4t)+(2t^2)\cdot 3=18t^2+4t$$

και έτσι ξαναβρίσκομε το αποτέλεσμα που είχε βρεθεί με αντικατάσταση των εκφράσεων των $x=x(t),\ y=y(t)$ στον τύπο της f.



$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Σχ. 5.8γ.

Στο διάγραμμα του σχήματος 5.8γ δίνεται ένας μνημονικός κανόνας για την αλυσιδωτή παραγώγιση, σύμφωνα με τη σχέση (5.8.1). Σύμφωνα με το διακλαδισμένο διάγραμμα που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.8γ, για να υπολογίσομε την $\frac{dz}{dt}$ όπου $z=f(x(t),y(t))$, ξεκινάμε από την $z=f(x,y)$ και προχωράμε προς όλους τους δρόμους μέχρι να φτάσομε στη μεταβλητή t. Αν πολλαπλασιάσομε όλες τις παραγώγους που έχομε συναντήσει για κάθε κλάδο ξεχωριστά και αθροίσομε τα γινόμενα που προκύπτουν, τότε παίρνομε την παράγωγο που μας ενδιαφέρει [σύμφωνα με τη σχέση (5.8.1)].

Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν και για συναρτήσεις τριών ή και περισσοτέρων μεταβλητών (το αντίστοιχο διακλαδισμένο διάγραμμα θα έχει τότε τόσες διακλαδώσεις, όσες οι μεταβλητές της συναρτήσεως f).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.8.1.

Ας υποθέσομε ότι η θερμοκρασία που επικρατεί στη θέση (x,y) μίας οριζόντιας πλάκας δίνεται από τη συνάρτηση $z=f(x,y)=x^2+y^2$. Μια μεταλλική σφαίρα κινείται επάνω στην πλάκα και η θέση της τη χρονική στιγμή $t\ge 0$ δίνεται από τους τύπους $x=x(t),\ y=y(t)$ (τέτοιες εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των συντεταγμένων ενός σημείου μέσω μιας παραμέτρου – εδώ του χρόνου t – ονομάζονται παραμετρικές εξισώσεις). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας της σφαίρας τη στιγμή t:

α) Αν $x(t)=\text{συν}\,t,\ y(t)=\text{ημ}\,t$.

β) Αν $x(t)=\text{συν}\,t,\ y(t)=2\,\text{ημ}\,t$.

Λύση.

Προφανώς για κάθε τιμή t η θερμοκρασία στο σημείο $(x(t),y(t))$ είναι η τιμή που προκύπτει από τη σύνθεση $f(x,y)=f(x(t),y(t))$.

Για τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ έχομε $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}=2x\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}=2y$, οπότε από τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών προκύπτει

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}\,.$$

α) Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση τις εκφράσεις $x(t)=\text{συν}\,t,\ y(t)=\text{ημ}\,t$ και τις παραγώγους

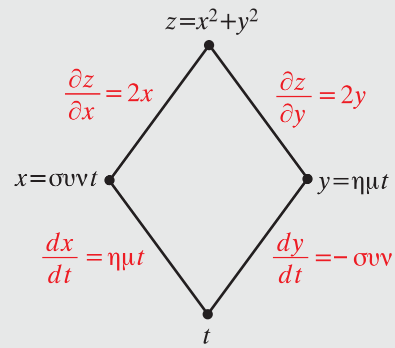
$$\frac{dx}{dt}=\frac{d(\text{συν}t)}{dt}=-\text{ημ}t,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d(\text{ημ}t)}{dt}=\text{συν}t$$

παίρνομε
$$\frac{dz}{dt}=2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}=$$
$$2\text{συν}\,t\cdot(-\text{ημ}\,t)+2\text{ημ}\,t\cdot\text{συν}\,t=0.$$

Το μνημονικό διάγραμμα για τον παραπάνω υπολογισμό φαίνεται στο σχήμα 5.8δ.

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας της σφαίρας σε κάθε χρονική στιγμή t είναι μηδέν (η θερμοκρασία της σφαίρας δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου).

β) Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση τις εκφράσεις $x(t)$ = συν t, $y(t)$ = 2ημ t και τις παραγώγους



$$\frac{dz}{dt}=2x\cdot\text{ημ}t+2y\cdot(\text{συν}t)$$

Σχ. 5.8δ.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d(\text{συν}t)}{dt}=-\text{ημ}t,\ \ \frac{dy}{dt}=\frac{d(2\text{ημ}t)}{dt}=2\text{συν}t\,,$$

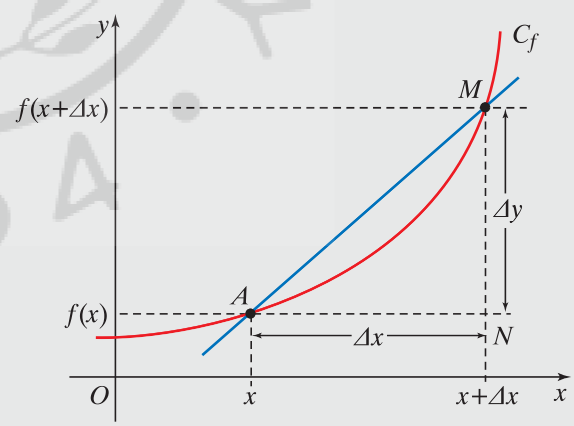
παίρνομε
$$\frac{dz}{dt}=2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}=2\text{συν}\,t\cdot(-\text{ημ}\,t)+2(2\text{ημ}\,t)\cdot(2\text{συν}\,t)=6\text{ημ}\,t\cdot\text{συν}\,t=3\text{ημ}2t$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας της σφαίρας σε κάθε χρονική στιγμή t αλλάζει με την πάροδο του χρόνου παίρνοντας τιμές από –3 μέχρι +3.

Για παράδειγμα, τη χρονική στιγμή $t=0$ ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας της σφαίρας είναι ίσος με 0, ενώ τις χρονικές στιγμές
$$t_1=\frac{\pi}{4}=0{,}8,\ \ t_2=\frac{3\pi}{4}=2{,}4,\ \ t_3=\frac{\pi}{12}=0{,}26$$
θα είναι ίσος με
$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=3\text{ημ}\frac{\pi}{2}=3,\quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{3\pi}{4}}=3\text{ημ}\frac{3\pi}{2}=-3,\quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{12}}=3\text{ημ}\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}=1{,}5$$
αντίστοιχα.

Η έννοια του διαφορικού μιας συναρτήσεως μίας μεταβλητής, που θα εισαγάγομε αμέσως παρακάτω, σχετίζεται άμεσα με την έννοια της παραγώγου και θεωρείται εξίσου σημαντική μ' αυτήν.

Έστω μία συνάρτηση $y=f(x)$ παραγωγίσιμη στο σημείο x του πεδίου ορισμού της. Ας συμβολίσομε με $\varDelta x$ μια μεταβολή του x και με $\varDelta y=f(x+\varDelta x)-f(x)$ την αντίστοιχη μεταβολή των τιμών της f. Τότε ο λόγος
$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$$
θα είναι ίσος με το συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(x, f(x))$, $B(x+\varDelta x, f(x+\varDelta x))$ (σχ. 5.8ε).



Σχ. 5.8ε.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου της συναρτήσεως στο σημείο x, μπορούμε να γράψομε:
$$f'(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}.$$

Αν λοιπόν θεωρήσομε ότι το $\varDelta x$ παίρνει «πολύ μικρές τιμές», έτσι ώστε ο λόγος $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ να έχει φτάσει στην οριακή του τιμή $f'(x)$, παίρνομε την προσεγγιστική σχέση

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong f'(x)$$

οπότε θα έχομε

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x)\Delta x. \tag{5.8.2}$$

Η ποσότητα $f'(x)\Delta x$ ονομάζεται ***διαφορικό*** της f στο x και συμβολίζεται με $df(x)$ ή με dy δηλαδή

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad df(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{5.8.3}$$

Ας θεωρήσομε στη συνέχεια την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ και ας εξετάσομε το διαφορικό της στο σημείο x. Έχομε $f'(x) = x' = 1$, οπότε $dy = f'(x) \cdot \Delta x \Leftrightarrow dy = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dy = \Delta x$ και αφού θεωρήσαμε τη συνάρτηση $y = f(x) = x$, η τελευταία σχέση δίνει

$$dx = \Delta x. \tag{5.8.4}$$

Με άλλα λόγια, το διαφορικό της ταυτοτικής συναρτήσεως είναι πάλι η ταυτοτική συνάρτηση και το διαφορικό dx της ανεξάρτητης μεταβλητής x συμπίπτει με τη μεταβολή Δx αυτής.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα (5.8.4), μπορούμε να γράψομε τον τύπο ορισμού του διαφορικού (5.8.3) μιας οποιασδήποτε συναρτήσεως $y = f(x)$ στη μορφή

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad df(x) = f'(x)\,dx\,. \tag{5.8.5}$$

Για παράδειγμα, αν $y = f(x) = x^2$, θα έχομε, $df(x) = 2x \cdot dx$, δηλαδή $dx^2 = 2x \cdot dx$.

Η έκφραση (5.8.5) μας λέει ότι το διαφορικό μιας συναρτήσεως στο σημείο x, είναι το γινόμενο της παραγώγου $f'(x)$ στο x επί το διαφορικό της ταυτοτικής συναρτήσεως. Ως άμεση συνέπεια αυτού προκύπτει ότι, το διαφορικό μιας συναρτήσεως σ' ένα σημείο υπάρχει όταν υπάρχει και η παράγωγός της στο ίδιο σημείο.

Η έκφραση (5.8.5) δικαιολογεί και το συμβολισμό της παραγώγου κατά Leibniz $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ που αναφέραμε στην παράγραφο 5.2.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν εξετάσουμε το διαφορικό μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ σε μια συγκεκριμένη θέση x_0, αυτό θα ορίζεται από τη σχέση $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$, η οποία προφανώς θα μας δίνει διαφορετική τιμή για κάθε διαφορετική τιμή της «μικρής» μεταβολής Δx. Επομένως, το διαφορικό $df(x_0)$ ορίζει στην πραγματικότητα μια απεικόνιση h, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε αριθμό Δx τον αριθμό $g(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$. Μ' αυτήν την έννοια η σχέση (5.8.5) είναι ισότητα συναρτήσεων και όχι ισότητα πραγματικών αριθμών.

Για παράδειγμα, αν $y = f(x) = x^2$ και $x_0 = 3$ θα έχομε $df(x_0) = 2x_0 \cdot dx = 6dx$, δηλαδή η απεικόνιση $h = df(x_0)$ αντιστοιχίζει σε κάθε αριθμό Δx τον αριθμό $g(\Delta x) = 6 \cdot \Delta x$.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 5.2.1 και το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.2.4, μπορούμε άμεσα να λάβομε τον παρακάτω πίνακα διαφορικών των βασικών συναρτήσεων.

y=f(x)	$x^a,\ a \in \mathbf{R}$	e^x	ημx	συνx	$a^x,\ a > 0$	$\ln x$
df(x)	$a\,x^{a-1}\,dx$	$e^x\,dx$	συν$x\,dx$	$-$ημ$x\,dx$	$a^x \log a\,dx$	$\dfrac{1}{x}dx$

Για το *διαφορικό* ισχύουν επίσης οι επόμενες ιδιότητες, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες της παραγώγου που αναλύσαμε στην παράγραφο 5.2.

Δ$_1$. $d(f+g) = df + dg$

Δ$_2$. $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$

Δ$_3$. $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2},\ g \neq 0$

Δ$_4$. Αν $y = g(u)$ και $u = f(x)$, τότε $dy = g'(u)du = g'(u)f'(x)dx$ όπου το σύμβολο $g'(u)$ παριστάνει την παράγωγο της συναρτήσεως $g(u)$ ως προς u.

Για παράδειγμα

$$d(x^2+e^x)=dx^2+de^x=2xdx+e^xdx\,,\quad d(\frac{x^2}{e^x})=\frac{e^x\cdot dx^2-x^2\cdot de^x}{(e^x)^2}=\frac{2xe^xdx-x^2e^xdx}{e^{2x}}$$

$$d(x^2e^x)=e^x\cdot dx^2+x^2\cdot de^x=e^x(2x)dx+x^2e^xdx=2xe^xdx+x^2e^xdx\,.$$

Επίσης, προκειμένου να υπολογίσομε το διαφορικό dy της συναρτήσεως με τύπο $y=h(x)=\text{ημ}\sqrt{x}$ θα μπορούσαμε να θέσομε $y=\text{ημ}\,u=g(u)$ με $u=\sqrt{x}=f(x)$ και να λάβομε το διαφορικό με χρήση του τύπου Δ_4 (διαφορικό συνθέσεως συναρτήσεων). Αφού $du=d\sqrt{x}=(\sqrt{x})'dx=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ και $g'(u)=(\text{ημ}\,u)'=\text{συν}\,u$ θα έχομε

$$dy=g'(u)du=(\text{συν}\,u)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=(\text{συν}\,\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{\text{συν}\,\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε και αν χρησιμοποιήσομε τους τύπους

$$dh(x)=h'(x)dx \quad \text{και} \quad h'(x)=\left(\text{ημ}\sqrt{x}\right)'=(\text{συν}\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=(\text{συν}\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\text{συν}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Θα εξετάσομε στη συνέχεια τη γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού στη θέση x. Ας θεωρήσομε τη συνάρτηση $y=f(x)$, το σημείο $A(x,y)$ της γραφικής παραστάσεως της f και ένα δεύτερο σημείο $M(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ της γραφικής παραστάσεως με τετμημένη ίση με $x+\Delta x$. Όπως γνωρίζομε, ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης AT της C_f στο σημείο $A(x,f(x))$ της γραφικής παραστάσεως της f είναι ίσος με (σχ. 5.8στ)

$$f'(x)=\text{εφ}\theta=\frac{NT}{AN}=\frac{NT}{\Delta x}$$

οπότε θα έχομε $NT=f'(x)\Delta x=dy$. Αυτό σημαίνει ότι το διαφορικό $dy=f'(x)\Delta x$ της $y=f(x)$, το οποίο αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο x και Δx, ισούται με τη μεταβολή NT της τεταγμένης της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης $y=f(x)$ όταν κινηθούμε από το σημείο με τετμημένη x στο σημείο με τετμημένη $x+\Delta x$.

Επίσης, σύμφωνα με το σχήμα 5.8στ, μπορούμε να γράψομε $NM=\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ενώ, όταν το Δx γίνει πολύ μικρό ($\Delta x\to 0$) θα έχομε:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y-f'(x)\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=0 \tag{5.8.6}$$

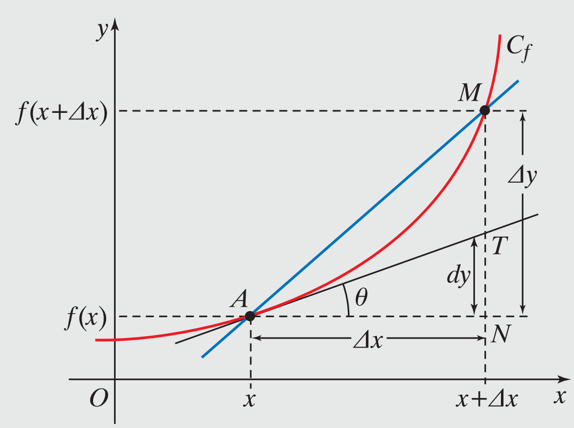
αφού $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$ και

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=f'(x)-f'(x)=0.$$

Ο τύπος (5.8.6) μας λέει ότι, για μικρές μεταβολές του x ($\Delta x\to 0$) το διαφορικό $dy=f'(x)\Delta x$ της $y=f(x)$ στο σημείο x, προσεγγίζει ικανοποιητικά τη διαφορά $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ των τιμών της συναρτήσεως f στις θέσεις x και $x+\Delta x$. Έτσι, μπορούμε να γράψομε τον προσεγγιστικό τύπο:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\cong f'(x)\Delta x. \tag{5.8.7}$$

Για παράδειγμα, αν $f(x)=\frac{1}{x^3}$ θα έχομε $f'(x)=-\frac{3}{x^4}$ και για τη μεταβολή της τιμής της συναρτήσεως f όταν η τετμημένη μεταβληθεί από την τιμή $x=1$ στην τιμή $x+\Delta x=1+\Delta x$, θα ισχύει ο τύπος



Σχ. 5.8στ.

$$f(1+\Delta x)-f(1)\cong f'(1)\Delta x=-3\Delta x.$$

Επομένως $f(1+\Delta x)\cong f(1)-3\Delta x=1-3\Delta x$ και μπορούμε να γράψομε

$$f(1+0,2)\cong 1-3\cdot 0,2=0,4,\ \ f(1+0,1)\cong 1-3\cdot 0,1=0,7,\ \ f(1+0,01)\cong 1-3\cdot 0,01=0,997.$$

Οι αντίστοιχες ακριβείς τιμές της συναρτήσεως στα παραπάνω σημεία είναι:

$$f(1,01)=\frac{1}{1,2^3}=0,58,\ \ f(1,1)=\frac{1}{1,1^3}=0,75,\ \ f(1,01)=\frac{1}{1,01^3}=0,97,$$

όπου παρατηρείται σαφής βελτίωση της προσεγγίσεως όταν το Δx γίνεται μικρότερο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.8.2.

Να υπολογίσετε μια προσεγγιστική τιμή του αριθμού $\sqrt{5}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.8.7).

Λύση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$, για την οποία γνωρίζομε ότι:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $f(x+\Delta x)-f(x)\cong f'(x)\Delta x$ βρίσκομε την προσεγγιστική έκφραση

$$\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\cong\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

ή ισοδύναμα $\sqrt{x+\Delta x}\cong\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$.

Εφαρμόζοντας την τελευταία για $x=4, \Delta x=1$ παίρνομε:

$$\sqrt{4+1}\cong\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 1=2+\frac{1}{4}=2,25$$

(η τιμή του $\sqrt{5}$ με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων είναι 2,2361).

Ασκήσεις.

5.8.1. Ένα σώμα κινείται επάνω σ' ένα επίπεδο και οι συντεταγμένες της θέσεως του τη χρονική στιγμή $t\geq 0$ δίνονται από τους τύπους $x(t)=\text{συν}\,t^2$, $y(t)=\text{ημ}\,t^2$.

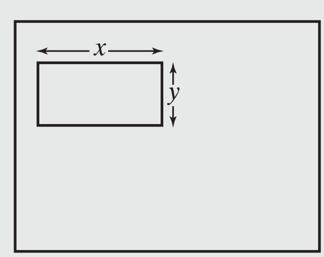
α) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της αποστάσεως του σώματος από την αρχή των αξόνων $O(0,\ 0)$ τη στιγμή t.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της αποστάσεως του σώματος από το σημείο (1, 2) τη στιγμή t.

5.8.2. Στην οθόνη ενός υπολογιστή ανοίγομε ένα παράθυρο μετακινώντας το ποντίκι. Το πλάτος και το ύψος του παραθύρου τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από τις συναρτήσεις $x(t)=t^3+3t+1$ και $y(t)=2e^t+2$ αντίστοιχα (σχ. 5.8ζ).

α) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του παραθύρου τη χρονική στιγμή t.

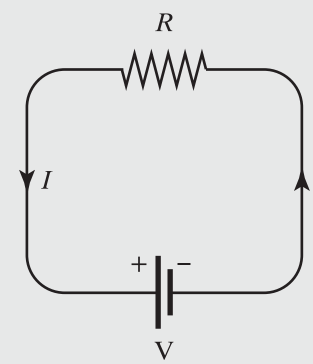
β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου του παραθύρου τη χρονική στιγμή t.



Σχ. 5.8ζ

5.8.3. α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συναρτήσεως $z = f(x,y) = x^2 + 2xy$ συναρτήσει του t, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσεως, όπου $z = xy$ και $x = x(t)$ = συν $3t$, $y = y(t)$ = ημ $2t$ (να γίνει το μνημονικό διάγραμμα διακλαδώσεως).

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου $\dfrac{dz}{dt}$ για $t = \dfrac{\pi}{2}$·



Ηλεκτρική πηγή

Σχ. 5.8η.

5.8.4. Δίνεται ότι $z = f(x,y) = x^2 + e^y$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t^2$, όπου $x = x(t)$ = ημ $2t$ και $y = y(t)$ = συν t^2. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συναρτήσεως $f(x,y)$ συναρτήσει του t.

5.8.5. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συναρτήσεως $w = f(x,y,z) = xy + z$ συναρτήσει του t όταν $x =$ συν$2t$, $y = 2$ημt, $z = 3t^3 + 2$. Ποια είναι η τιμή της παραγώγου για $t = 0$;

5.8.6. Έστω το ηλεκτρικό κύκλωμα, στο οποίο η τάση V δίνεται από τον τύπο $V = I \cdot R$ (σχ. 5.8η). Αν η τάση $V = V(t)$ μειώνεται σταδιακά, καθώς τελειώνει η μπαταρία, και η αντίσταση $R = R(t)$ του κυκλώματος αυξάνεται λόγω θερμάνσεως, τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt},$$

να βρείτε πώς μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος $I = I(t)$ τη στιγμή κατά την οποία έχομε τις επόμενες τιμές στα χαρακτηριστικά του κυκλώματος:

$$R = 500\,\text{Ohm},\ I = 0{,}04\,\text{Amp},\ dR/dt = 0{,}5\,\text{Ohm/sec} \text{ και } dV/dt = -0{,}01\,\text{Volt/sec}.$$

5.8.7. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες $\Delta_1 - \Delta_4$ των διαφορικών και τα διαφορικά των βασικών συναρτήσεων, να υπολογίσετε τα διαφορικά των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2\sqrt{x+1} + \ln x, \quad x > 0$

β) $g(x) = \dfrac{\text{ημ}(x+1)}{x^3}, \quad x \neq 0$

γ) $h(x) = \text{ημ}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{4}}\right) - \ln(e^x + 1)$

δ) $k(x) = \text{ημ}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{4}}\right) \cdot \ln(e^x + 1)$

5.8.8. Να υπολογίσετε το διαφορικό της συναρτήσεως $f(x)$ = συν$^2 2x$. Στη συνέχεια να βρείτε τις θέσεις στις οποίες αυτό μηδενίζεται.

5.8.9. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = \text{συν}(1 + \sqrt{x})$. Να υπολογίσετε το διαφορικό dy χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Δ_4 των διαφορικών.

5.8.10. Αν $f(x) = a^{\sqrt{\text{ημ}x}}$, $a > 0$ να υπολογίσετε το διαφορικό $df(x)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.

5.8.11. Να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή των αριθμών $\sqrt{102}$ και $\sqrt{95}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.8.7). Να συγκρίνετε τις τιμές που βρήκατε με τις τιμές $\sqrt{102} = 10{,}0995$, $\sqrt{95} = 9{,}7468$ που είναι οι αντίστοιχες προσεγγίσεις με 4 δεκαδικά ψηφία. Τι παρατηρείτε;

5.8.12. Να υπολογίσετε μια προσεγγιστική τιμή των αριθμών ημ$(\dfrac{\pi}{10})$ και ημ$(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{10})$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.8.7).

5.8.13. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.8.7) να υπολογίσετε προσεγγιστικά ποια θα είναι η μεταβολή της τιμής της συναρτήσεως $f(x) = \ln x$ όταν το x:

α) Αυξηθεί από 1 σε 2.

β) Ελαττωθεί από 1 σε 4/5.

5.9 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Παράγωγος της συναρτήσεως f στο σημείο x_0.	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Πλευρικές παράγωγοι της f στο σημείο x_0.	$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ (x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f).	$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
Παράγωγος και συνέχεια.	Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, είναι και συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
Παράγωγος και πράξεις (οι συναρτήσεις f και g των διπλανών τύπων θεωρούνται παραγωγίσιμες).	$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$ $(cf)'(x)=cf'(x)$ $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ ($g(x)\neq 0$)
Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως.	$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$
Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Θ.Μ.Τ.) και Θεώρημα Rolle.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (Θ.Μ.Τ.) Αν επί πλέον ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $f'(\xi)=0$ (Θεώρημα του Rolle)
Συνεχής συνάρτηση f με μηδενική παράγωγο στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ.	Η f θα είναι σταθερή σε όλο το Δ.
Συνεχείς συναρτήσεις f, g με ίσες παραγώγους στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ.	Οι f και g θα διαφέρουν κατά μια σταθερά $c\in\mathbf{R}$, δηλαδή: $f(x)=g(x)+c,\ x\in\Delta$
Παράγωγος και μονοτονία.	α) Αν $f'(x)>0$ ($f'(x)\geq 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα) στο Δ. β) Αν $f'(x)<0$ ($f'(x)\leq 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα (φθίνουσα) στο Δ.

Η f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο.	$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap \Delta$ (για κάποιο ανοικτό διάστημα Δ).
Η f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο.	$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap \Delta$ (για κάποιο ανοικτό διάστημα Δ).
Θεώρημα του Fermat.	Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0)=0$.
Υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού A.	α) Τα άκρα του A (αν ανήκουν σ' αυτό). β) Τα εσωτερικά σημεία του Α, στα οποία η f είτε δεν παραγωγίζεται (ενώ όμως είναι συνεχής), είτε παραγωγίζεται και η παράγωγός της μηδενίζεται (κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως f).
Εύρεση ακροτάτων μιας συναρτήσεως f ορισμένης στο διάστημα (α, β).	α) Αν $f'(x) > 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0. β) Αν $f'(x) < 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.
Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου.	α) Αν $f'(x_0) = 0$ και ισχύει $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0. β) Αν $f'(x_0) = 0$ και ισχύει $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.
Κυρτή συνάρτηση f στο Δ.	Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ ($f''(x_0) > 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ).
Κοίλη συνάρτηση f στο Δ.	Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ ($f''(x_0) < 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ).
Σημείο καμπής $A(x_0, f(x_0))$ μιας συναρτήσεως f.	Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
Κανόνας του L' Hospital.	Αν $$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0$$ ή $$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
Μερική παράγωγος της $z = f(x,y)$ ως προς x.	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ ή $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ή $f_x(x,y)$
Μερική παράγωγος της $z = f(x,y)$ ως προς y.	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ ή $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ή $f_y(x,y)$

5.10 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(0)=0, f'(0)=1$, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,0)$ είναι η $y=0$.	**Σ Λ**
2.	Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0.	**Σ Λ**
3.	Έστω x_0 ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως f παραγωγίσιμης στο x_0. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε θα ισχύει απαραίτητα $f'(x_0)=0$.	**Σ Λ**
4.	Τα κρίσιμα σημεία μιας συναρτήσεως f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.	**Σ Λ**
5.	Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.	**Σ Λ**
6.	Αν $f'(x)=(x-3)^2(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, τότε το $f'(-1)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.	**Σ Λ**
7.	Αν $f(x)=2^{3x}$, τότε $f'(x)=3\cdot 2^{3x}$.	**Σ Λ**
8.	Αν $f'(x)=(x^3-1)^3$, τότε η δέκατη παράγωγος της f στο 0 ισούται με μηδέν.	**Σ Λ**
9.	Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\beta)>f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)>0$.	**Σ Λ**
10.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi)=0$.	**Σ Λ**
11.	Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ισχύει $f'(x)>0$ για $\alpha<x<x_0$ και $f'(x)<0$ για $x_0<x<\beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.	**Σ Λ**
12.	Αν για μια συνάρτηση ισχύει $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0.	**Σ Λ**
13.	Αν $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ τότε, για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $$[(f(x))^2+(g(x))^2)]'=0.$$	**Σ Λ**
14.	Αν $f(x)=x^3$, τότε $x(f(2x))'=f(2x)$.	**Σ Λ**
15.	Αν $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ τότε $f'=-f$ και $g''=-g$.	**Σ Λ**
16.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell-1$ και $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell+1$, τότε $f'(x_0)=\ell$.	**Σ Λ**
17.	Η συνάρτηση $f(x)=x^{11}+x^9+x^7+1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.	**Σ Λ**
18.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)=f(\beta)$.	**Σ Λ**

19.	Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.	**Σ Λ**
20.	Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.	**Σ Λ**
21.	Ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου μιας συναρτήσεως f σ' ένα σημείο σημαίνει ότι το σημείο αυτό είναι απαραίτητα τοπικό ακρότατο της f.	**Σ Λ**
22.	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε υπάρχει η παράγωγος της f/g στο x_0 και ισχύει: $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},\quad (\text{για } g(x_0)\neq 0).$$	**Σ Λ**
23.	Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $$(f\circ g)'(x)=f'(x)\cdot g'(x).$$	**Σ Λ**
24.	Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 5f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Τότε για τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{5x}}$ ισχύει $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.	**Σ Λ**
25.	Αν η θέση ενός κινητού δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = 5 + t - t^3$, τότε η επιτάχυνσή του διατηρείται σταθερή.	**Σ Λ**
26.	Η μερική παράγωγος της συναρτήσεως $f(x, y) = 2x + 3y$ ως προς x είναι ίση με τη μερική παράγωγο της f ως προς y, για κάθε x, y.	**Σ Λ**
27.	Αν $f(x,y)=xy$ τότε $f(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.	**Σ Λ**
28.	Αν $f(x,y)=x^2y^3+2$, τότε $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:			
	α) $y=x+f'(0)$	β) $y=x\,f'(0)$	γ) $y=f'(0)$	δ) $y=x$
2.	Η παράγωγος της συναρτήσεως $f(x) = x^\nu$ είναι ίση με:			
	α) $x^{\nu-1}$	β) $\nu\, x^{\nu-1}$	γ) $\nu\, x^\nu$	δ) $(\nu-1)\,x^\nu$
3.	Η παράγωγος της συναρτήσεως $f(x) = \ln x$ είναι ίση με:			
	α) $\ln x$	β) $-\dfrac{1}{x^2}$	γ) e^x	δ) $\dfrac{1}{x}$
4.	Η παράγωγος της συναρτήσεως $f(x) = ημ^2 x$ είναι ίση με:			
	α) $f'(x) = 2συνx$	β) $f'(x) = 2ημx$	γ) $f'(x) = 2ημx\cdot συνx$	δ) $f'(x) = 2συνx$

5.	Ποιος από τους επόμενους τύπους είναι σωστός; α) $(e^x)' = e^{x-1}$ β) $(\ln\|x\|)' = \frac{1}{\|x\|}$ γ) $(x^a)' = \text{a}x^{\text{a}-1}$ δ) $(a^x)' = a^x$
6.	Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε: α) $f'(x_0)=1$ β) $f'(x_0)<0$ γ) $f'(x_0)>0$ δ) $f'(x_0)=0$
7.	Ποια από τις επόμενες συναρτήσεις **δεν** είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της; α) $f(x)=e^x$ β) $f(x)=x^3$ γ) $f(x)=x^4$ δ) $f(x)=3^x$
8.	Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \|x\|$: α) Είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ δεν είναι και συνεχής σ' αυτό: β) Είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. γ) Είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. δ) Είναι παραγωγίσιμη σε όλο το **R**.
9.	Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α, β) και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Αν $f(\alpha) = 0$ και $f(\beta) = 10$, τότε η εξίσωση $f(x)=5$: α) Έχει μοναδική λύση στο (α, β). β) Έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β). γ) Έχει το πολύ μία λύση στο (α, β). δ) Δεν έχει λύση στο (α, β).
10.	Τα κρίσιμα σημεία μιας συναρτήσεως f είναι: α) Θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. β) Θέσεις τοπικών μεγίστων της f. γ) Υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. δ) Θέσεις τοπικών ελαχίστων της f.
11.	Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$ και ισχύει $f(0) = 1$. Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-1,1)$, τότε: α) Θα ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. β) Θα ισχύει $f(x)=1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. γ) Θα ισχύει $f(x)>1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. δ) Θα ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.
12.	Ο ρυθμός μεταβολής της συναρτήσεως θέσεως ενός κινητού είναι ίσος με: α) Τη μέση επιτάχυνση του κινητού. β) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού. γ) Τη μέση ταχύτητα του κινητού. δ) Τη στιγμιαία επιτάχυνση του κινητού.

13.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x-1)(x+1)$, τότε: α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$. β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+1]$. γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+1]$. δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.
14.	Αν $S(t)$ η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t είναι ίσες με: α) $\upsilon(t)=S'(t)$ και $a(t)=\upsilon'(t)$ αντίστοιχα. β) $\upsilon(t)=S''(t)$ και $a(t)=S'(t)$ αντίστοιχα. γ) $\upsilon(t)=S'(t)$ και $a(t)=\upsilon''(t)$ αντίστοιχα. δ) $\upsilon(t)=S''(t)$ και $a(t)=\upsilon'(t)$ αντίστοιχα.
15.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x-1)^3 + (x-2)^5$, τότε: α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R**. β) Η f είναι κυρτή. γ) Η f είναι κοίλη. δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο **R**.

5.11 Γενικές ασκήσεις.

5.11.1. Η τιμή $P(t)$ (σε €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 10 + 6\frac{e^{-(t-3)}}{1+2e^{-(t-3)}}.$$

α) Ποια είναι η φυσική σημασία του αριθμού $P(0)$;
β) Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται.
γ) Ποια θα είναι η τιμή του προϊόντος μετά από πάρα πολύ χρόνο;

5.11.2. Ένα κινητό κινείται επάνω σ' έναν οριζόντιο άξονα και η ταχύτητά του κατά τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$\upsilon(t) = (t-2)^2(t-3), \quad 0 \le t \le 4.$$

α) Να βρείτε την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t.
β) Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν.
γ) Να βρείτε πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά.
δ) Να βρείτε πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

5.11.3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln|x| = \frac{1}{2}x$ έχει μία μοναδική λύση.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln|x|=-x$ έχει μία μοναδική λύση.

5.11.4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=3-2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση *f* ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της *f*, αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της *f*.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a>3$ είναι αδύνατη.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ακριβώς 2 λύσεις. Στη συνέχεια να βρείτε τις λύσεις αυτές.

5.11.5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3(2-x)^3$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση *f* ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να εξετάσετε σε ποια διαστήματα η *f* είναι κυρτή και σε ποια κοίλη. Να διαπιστώσετε επίσης ότι οι ρίζες της f είναι σημεία καμπής.

β) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της *f*, αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a>1$, είναι αδύνατη.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a<1$, έχει ακριβώς δύο λύσεις.

5.11.6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+1$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση *f* ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της *f*, αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της *f*.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x-x+2=\ln 2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

5.11.7. Δίνεται η συνάρτηση *f* με τύπο $f(x)=a^x+2^x$, $x\in\mathbf{R}$ όπου $0<a\neq 1$.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$.

β) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι, αν η *f* παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0=0$, τότε η τιμή του *a* είναι ίση με 1/2.

5.11.8. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1=0, x_2=1$ και $x_3=2$. Στη συνέχεια να μελετηθεί η *f* ως προς τη μονοτονία και να εξετασθεί σε ποια διαστήματα είναι κυρτή και σε ποια κοίλη.

5.11.9. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=xe^x$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2e^x$.

α) Να διαπιστώσετε ότι ισχύουν οι τύποι $f'(x)=f(x)+e^x$, $g'(x)=f(x)+g(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος ν-οστής τάξεως της συναρτήσεως *f* δίνεται από τον τύπο $f^{(\nu)}(x)=(x+\nu)e^x$.

γ) Να βρείτε την παράγωγο ν-οστής τάξεως της συναρτήσεως *g*.

5.11.10. Ο ρυθμός της φωτοσυνθέσεως P ενός φυτού δίνεται από τον τύπο $P(I)=\frac{I}{\alpha+\beta I}$, $I\geq 0$, όπου I η ένταση του φωτός και α,β θετικές σταθερές. Η παράγωγος του ρυθμού φωτοσυνθέσεως λέγεται *φωτοχημική ικανότητα* του φυτού.

α) Να βρείτε τη φωτοχημική ικανότητα του φυτού για μηδενική ένταση του φωτός.

β) Να βρείτε τον τύπο που δίνει τη φωτοχημική ικανότητα ενός φυτού.

γ) Να αποδείξετε ότι η φωτοχημική ικανότητα ενός φυτού είναι φθίνουσα συνάρτηση της εντάσεως I του φωτός.

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $P'(I)/[1-\beta P(I)]^2$ δεν εξαρτάται από το I.

5.11.11. Σε ένα πείραμα τύχης με δύο δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία (ε) ή αποτυχία (α), η πιθανότητα να εμφανισθεί το αποτέλεσμα ε είναι ίση με p ($0<p<1$), ενώ η πιθανότητα να εμφανισθεί το αποτέλεσμα α είναι ίση με $1-p$. Από τη θεωρία πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι, σ' ένα τέτοιο πείραμα, η πιθανότητα να εμφανισθούν $\varkappa$ επιτυχίες σε ν επαναλήψεις του δίνεται από τον τύπο

$$f(p)=\binom{\nu}{\varkappa}p^{\varkappa}(1-p)^{\nu-\varkappa}.$$

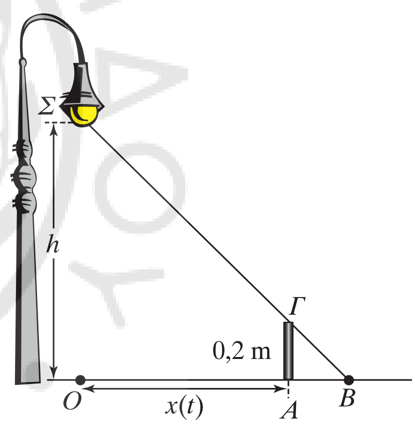
α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω πιθανότητα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $p=\varkappa/\nu$.

β) Αν ρίχνεται ένα αμερόληπτο νόμισμα ($p=1/2$) 10 φορές, ποιος είναι ο πιο πιθανός αριθμός εμφανίσεων της ενδείξεως «κεφαλή»;

5.11.12. Ένα άτομο βρίσκεται στη θέση A του σχήματος (σχ. 5.11α) και κινεί με σταθερή ταχύτητα 10 m το λεπτό μία κατακόρυφη ράβδο μήκους 0,2 m. Παρατηρώντας τη σκιά ΑΒ της ράβδου που σχηματίζεται λόγω μιας λάμπας που είναι τοποθετημένη σε ύψος h από το έδαφος, βρίσκει ότι η ταχύτητα, με την οποία αυξάνεται η σκιά είναι 1 m/min.

α) Να αποδείξετε ότι $x(t)=\dfrac{h-0,2}{0,2}s(t)$.

β) Να βρείτε το ύψος h, στο οποίο είναι τοποθετημένη η λάμπα.



Σχ. 5.11α.

5.11.13. Η κατανάλωση ενός αυτοκινήτου όταν αυτό κινείται με ταχύτητα x km/h δίνεται από τον τύπο:

$$f(x)=a(50x^2-\frac{x^3}{3}),\quad 0\le x\le 150,$$

όπου a είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f όλες τις τιμές του $x\in\mathbf{R}$.

β) Να βρείτε σε ποια ταχύτητα x ($0\le x\le 150$) το αυτοκίνητο παρουσιάζει τη μεγαλύτερη κατανάλωση.

5.11.14. Μία σκάλα μήκους 2 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,2 m/sec (σχ. 5.11β).

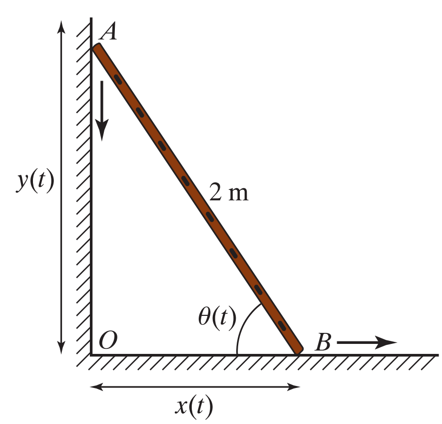
α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $x'(t)=-2\theta'(t)\cdot\eta\mu\theta(t)$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $y'(t)=-\dfrac{x(t)}{y(t)}x'(t)$.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή που η κορυφή Α της σκάλας απέχει από το δάπεδο 1m.

δ) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας τη χρονική στιγμή που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 1 m.

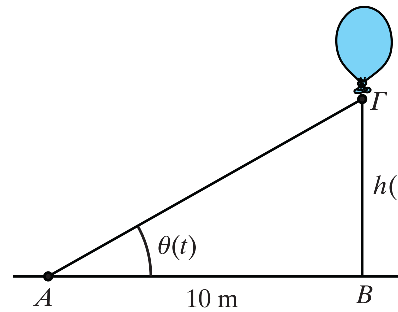
ε) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή



Σχ. 5.11β.

A της σκάλας τη χρονική στιγμή που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 0,5 m.

5.11.15. Ένα μπαλόνι αφήνει το έδαφος σε απόσταση $AB = 10$ m από έναν παρατηρητή A και κινείται προς τα επάνω με σταθερή ταχύτητα 20 m/min. Έστω Γ η θέση του μπαλονιού τη χρονική στιγμή t, συμβολίζομε με $\theta(t)$ τη γωνία που σχηματίζει η $A\Gamma$ με το έδαφος (σχ. 5.11γ).



Σχ. 5.11γ.

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $h(t)$ και $\theta(t)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\theta'(t) = 2\text{συν}^2\theta(t)$.

γ) Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία $\theta(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 10 m από το έδαφος.

δ) Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία $\theta(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση του μπαλονιού από τον παρατηρητή γίνεται 20 m.

5.11.16. Έστω μια κυρτή συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $x_1 < x_2$ δύο σημεία του Δ.

α) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left(x_1, \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ_1 τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = 2 \cdot \frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

β) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ_2 τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_2) = 2 \cdot \frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

6

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο 5 ασχοληθήκαμε με την ενότητα των Μαθηματικών που είναι γνωστή ως Διαφορικός Λογισμός. Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός επίπεδου σχήματος, ώθησε τους μαθηματικούς στην ανακάλυψη ενός νέου κλάδου των Μαθηματικών, του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Το πρόβλημα του εμβαδού μελετήθηκε αρχικά από τον Αρχιμήδη. Οι μέθοδοι που ανέπτυξε, διαπνέονταν από εκπληκτική πρωτοτυπία σκέψεως, συνδυασμένη με αυστηρότητα και μεγάλη ικανότητα στην τεχνική των υπολογισμών. Ο Αρχιμήδης εφάρμοσε με επιτυχία τις μεθόδους του για τον κυκλικό δίσκο και για παραβολικά «χωρία». Στο διάστημα που μεσολάβησε από την Αρχαιότητα ως τις αρχές του 17^ου^ αιώνα υπολογίστηκαν με επιτυχία τα εμβαδά και άλλων πιο πολυπλόκων επιφανειών. Όμως, οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν δεν ήταν γενικές και αντιμετώπιζαν μόνο το συγκεκριμένο πρόβλημα κάθε φορά.

Η ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού βοήθησε στην αντικατάσταση όλων αυτών των ειδικών διαδικασιών υπολογισμού εμβαδού σχημάτων και όγκων στερεών από μία γενική μέθοδο. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθεί η έννοια του ολοκληρώματος (αόριστου και ορισμένου) μιας πραγματικής συναρτήσεως μιας μεταβλητής, οι ιδιότητές του και η χρήση του στον υπολογισμό εμβαδών. Στην πορεία της παρουσιάσεως της σχετικής θεωρίας θα αναλυθούν διάφορες εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στη Φυσική, στην Οικονομία κ.λπ..

6.1 Η έννοια και οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

Σε διάφορα πρακτικά προβλήματα εμφανίζεται η ανάγκη εφαρμογής μιας διαδικασίας που είναι αντίστροφη της παραγωγίσεως. Πιο συγκεκριμένα, αρκετές φορές μάς δίνεται μία συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μία παραγωγίσιμη συνάρτηση F, έτσι ώστε να ισχύει $F'(x) = f(x)$ σε ένα διάστημα Δ. Τέτοια προβλήματα είναι για παράδειγμα τα εξής:

α) Η εύρεση της θέσεως $S(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστή η ταχύτητά του $\upsilon(t)$ οι οποίες, όπως γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 5, συνδέονται με τη σχέση $S(t) = \upsilon'(t)$.

β) Η εύρεση της τιμής $P(t)$ ενός αγαθού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστός ο ρυθμός αυξήσεως της τιμής, ο οποίος όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 5, είναι η παράγωγος $f(t) = P'(t)$ της συναρτήσεως $P(t)$.

γ) Η εύρεση του μεγέθους $N(t)$ ενός πληθυσμού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστός ο ρυθμός αυξήσεως $f(t) = N'(t)$ του πληθυσμού.

Το κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι δίνεται μία συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση F, για την οποία να ισχύει $F'(x) = f(x)$ σε ένα διάστημα Δ. Η συνάρτηση F ονομάζεται ***παράγουσα*** ή ***αντιπαράγωγος*** ή ***αρχική συνάρτηση*** της f.

Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό:

> Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. ***Αρχική συνάρτηση*** ή ***αντιπαράγωγος*** ή ***παράγουσα της f στο Δ*** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για την οποία ισχύει:
>
> $$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F, που να ικανοποιεί τη συνθήκη του παραπάνω ορισμού.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ είναι μια παράγουσα της $f(x) = x^3$ στο $\mathbf{R}$, αφού $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$. Προφανώς, για κάθε σταθερά $c \in \mathbf{R}$ ισχύει επίσης $(\frac{1}{4}x^4 + c)' = x^3$, οπότε και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = \frac{1}{4}x^4 + c = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbf{R}$, είναι παράγουσες της f στο $\mathbf{R}$.

Γενικά ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

> Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:
>
> α) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
>
> β) κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ γράφεται στη μορφή $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbf{R}$.

Πράγματι, αν F είναι μία παράγουσα της f, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) + c$, όπου $c \in \mathbf{R}$, είναι επίσης παράγουσα της f, αφού θα ισχύει $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$.

Επίσης, αν G είναι μια άλλη παράγουσα της f, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε θα έχομε:

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με όσα αναλύσαμε στην παράγραφο 5.3, θα υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συναρτήσεως f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται ***αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ*** και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$ (το παραπάνω σύμβολο διαβάζεται «ολοκλήρωμα εφ του x ντε x»). Επομένως, αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ θα έχομε:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \; c \in \mathbf{R}.$$

Για παράδειγμα, αφού $(e^x)' = e^x$ και $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, μπορούμε να γράψομε ότι:

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \text{και} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \; \text{ αντίστοιχα.}$$

Η διαδικασία ευρέσεως του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται ***ολοκλήρωση***, ενώ η σταθερά c που εμφανίζεται στον τύπο του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται ***σταθερά ολοκληρώσεως***.

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες 5.2.1, 5.2.2 των παραγώγων βασικών συναρτήσεων και τα αποτελέσματα του παραδείγματος 5.2.5 μπορούμε να δημιουργήσομε άμεσα τον πίνακα αορίστων ολοκληρωμάτων 6.1.1.

Πίνακας 6.1.1
Αόριστα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων.

$\int a dx = ax + c$ (για $a \in \mathrm{R}$)	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \varepsilon\varphi x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\varphi x + c$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ (για $a \neq -1$)	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Οι τύποι του πίνακα 6.1.1 ισχύουν σε κάθε διάστημα, στο οποίο έχουν νόημα οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται στον πίνακα. Για να διαπιστώσομε την ισχύ των τύπων που δόθηκαν παραπάνω αρκεί να παραγωγίσομε το δεξί μέλος και να επαληθεύσομε ότι προκύπτει ως αποτέλεσμα το αριστερό. Για παράδειγμα, ο τύπος:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \; \text{ έχει προκύψει από το γεγονός ότι}$$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right)' = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{\alpha+1} + 0 = x^\alpha.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.1.

Να βρείτε μία συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$ και η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ να ισούται με x για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Λύση.

Γνωρίζομε ότι η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x)$ ισούται με την τιμή της παραγώγου $f'(x)$. Επομένως, ζητάμε να ισχύει $f'(x) = x$, οπότε:

$$f(x)=\int x dx=\frac{x^2}{2}+c.$$

Για να διέρχεται η f από το σημείο $A(2,4)$ πρέπει να ισχύει $f(2)=4$, δηλαδή $\frac{2^2}{2}+c=4 \Leftrightarrow c=2$,

επομένως
$$f(x)=\frac{x^2}{2}+2.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε για το αόριστο ολοκλήρωμα, αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$, θα έχομε:

$$\int f(x)dx=F(x)+c,\quad c\in\mathbf{R}.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στον τελευταίο τύπο το $f(x)=F'(x)$, προκύπτει ότι

$$\int F'(x)dx=F(x)+c.$$

Προέκυψε λοιπόν το επόμενο χρήσιμο αποτέλεσμα:

> Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύει:
>
> $$\int f'(x)dx=f(x)+c,\ c\in\mathbf{R}.$$

Αν τώρα F, G είναι παράγουσες των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα σ' ένα διάστημα Δ και $\lambda\in\mathbf{R}$, τότε θα ισχύει:
$$(F+G)'(x)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$
και
$$(\lambda F)'(x)=\lambda F'(x)=\lambda f(x)$$

για κάθε $x\in\Delta$. Επομένως η συνάρτηση $F+G$ είναι μία παράγουσα της $f+g$ και η λF, $\lambda\in\mathbf{R}$, είναι μία παράγουσα της λf στο Δ. Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύει ότι για το αόριστο ολοκλήρωμα ισχύουν οι επόμενες δύο ιδιότητες:

> Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε θα έχουν παράγουσα (στο ίδιο διάστημα) και οι συναρτήσεις λf, $\lambda\in\mathbf{R}$ και $f+g$. Τότε θα ισχύουν οι τύποι:
>
> α) $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx,\ \lambda\in\mathbf{R}.$
>
> β) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν για παράδειγμα τα εξής:

$$\int 5x^9dx=5\int x^9dx=5\frac{x^{10}}{10}+c=\frac{x^{10}}{2}+c,$$

$$\int(4e^x-5\sigma\upsilon\nu x)dx=4\int e^xdx-5\int\sigma\upsilon\nu dx=4e^x-5\eta\mu x+c.$$

Οι τύποι που δόθηκαν στον πίνακα 5.2.3 για την παράγωγο σύνθετης συναρτήσεως μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να πάρομε κάποιους αντίστοιχους τύπους για την ολοκλήρωση συνθέτων συναρτήσεων. Έτσι, γράφοντας τον τύπο:

$$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \text{ στη μορφή } \left(2\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$$

συμπεραίνομε ότι:

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx = \int \left(2\sqrt{g(x)}\right)' = 2\sqrt{g(x)} + c\,, \quad c \in \mathbf{R}\,.$$

Εργαζόμενοι με όμοιο τρόπο μπορούμε, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 5.2.4, να δημιουργήσομε άμεσα τον πίνακα αορίστων ολοκληρωμάτων συνθέτων συναρτήσεων 6.1.2.

Πίνακας 6.1.2
Αόριστα ολοκληρώματα συνθέτων συναρτήσεων.

$\int \frac{g'(x)}{[g(x)]^2}dx = -\frac{1}{g(x)} + c$	$\int e^{g(x)} \cdot g'(x)dx = e^{g(x)} + c$
$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$	$\int \text{συν}(g(x)) \cdot g'(x)dx = \text{ημ}(g(x)) + c$
$\int (g(x))^a g'(x)dx = \frac{(g(x))^{a+1}}{\alpha+1} + c$ (για $a \neq -1$)	$\int \text{ημ}(g(x)) \cdot g'(x)dx = -\text{συν}(g(x)) + c$

Για παράδειγμα, αν θέλομε να υπολογίσομε το ολοκλήρωμα $\int 3x^2(x^3+1)^4 dx$ μπορούμε να θέσομε $g(x) = x^3 + 1$, οπότε θα έχομε $g'(x) = 3x^2$ και επομένως

$$\int 3x^2(x^3+1)^4 d\,x = \int g'(x)(g(x))^4 dx = \frac{(g(x))^{4+1}}{4+1} = \frac{(g(x))^5}{5} = \frac{(x^3+1)^5}{5}\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.2.

Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η ταχύτητά του σε m/min τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t) = t^2(2t+3)+5$. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 3 m από την αρχή των αξόνων, να βρείτε τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 2$ min.

Λύση.

Όπως γνωρίζομε από το κεφάλαιο 5, ισχύει $u(t) = s'(t)$ όπου με $S(t)$ έχομε συμβολίσει τη συνάρτηση θέσεως του κινητού. Σύμφωνα την εκφώνηση θα έχομε:

$$S'(t) = t^2(2t+3)+5 = 2t^3 + 3t^2 + 5$$

και επομένως

$$\int S'(t)dt = \int (2t^3+3t^2+5)dt = \int 2t^3 dt + \int 3t^2 dt + \int 5dt = 2\int t^3 dt + 3\int t^2 dt + \int 5dt = 2\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^3}{3} + 5t + c.$$

Άρα:

$$S(t) = \frac{1}{2}t^4 + t^3 + 5t + c$$

και αφού $S(0)=3$, θα πρέπει $0+c=3$, δηλαδή $c=3$, οπότε τελικά

$$S(t)=\frac{1}{2}t^4+t^3+5t+3.$$

Η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min θα βρίσκεται με εφαρμογή του τελευταίου τύπου για $t=2$. Έτσι προκύπτει:

$$S(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^4+2^3+5\cdot 2+3=29\text{ m}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.3.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx$, β) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+1}{x^2-4x+3}\,dx$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}-\{1,3\}$ γράφεται $f(x)=\dfrac{3x-5}{(x-1)(x-3)}$ και μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα από απλά κλάσματα (με παρονομαστές τους όρους $x-1$ και $x-3$) ως εξής:

$$\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-3}.$$

Για να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, προχωράμε σε απαλοιφή παρονομαστών, οπότε θα έχομε

$$3x-5=\alpha(x-3)+\beta(x-1) \Leftrightarrow 3x-5=(\alpha+\beta)x+(-3\alpha-\beta).$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε $x\in\mathbf{R}-\{1,3\}$ θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ -3\alpha-\beta=-5 \end{cases}$$

και λύνοντας το σύστημα βρίσκομε $\alpha=1, \beta=2$. Επομένως έχομε:

$$\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}$$

και το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει γράφεται ως εξής:

$$\int\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}\right)dx=\int\frac{1}{x-1}dx+2\int\frac{1}{x-3}dx.$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα με εφαρμογή του τύπου

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+c$$

του πίνακα 6.1.2 για $g(x)=x-1$ και $g(x)=x-3$ αντίστοιχα, οπότε παίρνομε τελικά

$$\int\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}dx=\ln|x-1|+2\ln|x-3|+c=\ln(|x-1|(x-3)^2)+c.$$

β) Εκτελώντας τη διαίρεση του πολυωνύμου $2x^2-5x+1$ με το πολυώνυμο x^2-4x+3, βρίσκομε

$$2x^2-5x+1=2(x^2-4x+3)+(3x-5)$$

οπότε θα έχομε:

$$\frac{2x^2-5x+1}{x^2-4x+3}=2+\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$$

Επομένως:

$$\int\frac{2x^2-5x+1}{x^2-4x+3}\,dx=\int 2dx+\int\frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx=2x+\ln(|x-1|(x-3)^2)+c.$$

Ο τρόπος που εργαστήκαμε στο παράδειγμα αυτό μας επιτρέπει τον υπολογισμό οποιωνδήποτε ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων, των οποίων ο παρονομαστής μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβαθμίων όρων (π.χ. αν είναι τριώνυμο με δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, όπως ήταν στο παράδειγμα).

Ασκήσεις.

6.1.1. Ο αριθμός $N(t)$, σε εκατομμύρια των παθογόνων μικροοργανισμών που βρίσκονται σε μια μολυσμένη λίμνη, αυξάνεται με ρυθμό $N'(t)=e^t$ ανά ώρα. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού των μικροοργανισμών στις πρώτες δύο ώρες.

6.1.2. Η ταχύτητα $\upsilon(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t)=\eta\mu\, t$. Να βρείτε τη συνάρτηση θέσεως $S(t)$ του κινητού και να διαπιστώσετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει $S(t)=-a(t)$, όπου $a(t)$ είναι η επιτάχυνση του κινητού.

6.1.3. Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι παράγουσες της ίδιας συναρτήσεως.

α) $F(x)=x^2-3x+2$ β) $F(x)=e^x-2$ γ) $F(x)=e^{2x+1}$

δ) $F(x)=e^x+2$ ε) $F(x)=x(x-3)$ στ) $F(x)=e^{2x}$

ζ) $F(x)=e^{2x}-2e$ η) $F(x)=e^{2x}(e+e^{-2x})$ θ) $F(x)=-x^2+3x-2$

6.1.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα.

α) $\int(4x^3+2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)dx$ β) $\int(x^{99}-4x^{39}+3x^{29})dx$ γ) $\int x^3\sqrt{x}dx$

δ) $\int\left(5e^x-\frac{2+x^2}{x^3}\right)dx$ ε) $\int\left(\frac{3}{\eta\mu^2 x}-\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx$ στ) $\int\frac{x-3}{x^2-9}dx$

ζ) $\int(3^{x+2}-4^{x-1})\,dx$ η) $\int\frac{x^2-3x+2}{x^2}dx$ θ) $\int\frac{x^2-x}{x^3}dx$

6.1.5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x},\qquad g(x)=\frac{\eta\mu x}{e^x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}dx$.

6.1.6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x+8}$.

α) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, ώστε να ισχύει $f(x)=\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\beta}{x-4}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx=\int \dfrac{x-3}{x^2-6x+8}dx$

6.1.7. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 6.1.2.

α) $\int 2x(x^2+3)^6 dx$ β) $\int \dfrac{4x^3+3}{x^4+3x+2}dx$ γ) $\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx$

δ) $\int \text{συν}x\, e^{\text{ημ}x}dx$ ε) $\int e^x \text{συν}e^x dx$ στ) $\int (2e^x+1)(2e^x+x)^{10}dx$

ζ) $\int \dfrac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}dx$ η) $\int \dfrac{e^x}{(2+e^x)^3}dx$ θ) $\int \dfrac{1}{x\ln x}dx$

6.1.8. Να βρείτε μια συνάρτηση f, της οποίας η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ είναι σταθερή για κάθε $x\in\mathbf{R}$, και επί πλέον ικανοποιεί τις συνθήκες $f(0)=f'(0)=1$ και $f(1)=4$.

6.1.9. Να βρείτε μία συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ να ισούται με $3x^2+2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

6.1.10. Η είσπραξη $E(x)$, $0\le x\le 1000$ από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x)=500-\dfrac{x}{2}$, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι σταθερός και ισούται με 10. Να βρείτε το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 200 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα. Να βρείτε επίσης για ποιον αριθμό προϊόντων η βιομηχανία έχει το μέγιστο κέρδος.

6.1.11. Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η επιτάχυνσή του σε m/min^2 τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $a(t)=e^t+2t-1$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 3 m από την αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα 1 m/min.

α) Να βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t.

β) Να βρείτε τον τύπο που δίνει τη συνάρτηση θέσεως του κινητού τη χρονική στιγμή t.

γ) Να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min.

6.1.12. Μια αντλία νερού που χρησιμοποιείται σ' ένα πλοίο για την απομάκρυνση υδάτων σε ένα χώρο, έχει ρυθμό αντλήσεως που δίνεται από τον τύπο:

$$f'(t)=0{,}1+0{,}3t-\frac{t^2}{60},$$

όπου $f(t)$ είναι τα κυβικά μέτρα νερού που αντλούνται μετά από τις t ώρες λειτουργίας της. Να βρείτε πόσα κυβικά μέτρα νερού αντλούνται με την αντλία ανάμεσα στην 2η και 3η ώρα λειτουργίας της (για τη συνάρτηση f προφανώς θεωρούμε ότι ισχύει $f(0)=0$).

6.1.13. Η θερμοκρασία ενός σώματος, ελαττώνεται με ρυθμό $-6te^{-3t^2}$, όπου t ο χρόνος που πέρασε από την αρχή του πειράματος. Αν η αρχική θερμοκρασία του σώματος είναι $T_0=37^\circ C$, να βρείτε τον τύπο ο οποίος δίνει τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

6.1.14. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x}dx$ β) $\int \frac{9x^2+3x-1}{9x^2+3x-2}dx$ γ) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}dx$

δ) $\int \left(5e^x-\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)dx$ ε) $\int \frac{x^2-3x+1}{x^2-9}dx$ στ) $\int \frac{2x}{x^2+9}dx$

6.2 Μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος.

Αν θεωρήσομε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g σ' ένα διάστημα Δ, σύμφωνα με τον κανόνα παραγωγίσεως του γινομένου συναρτήσεων (Ιδιότητα **Π₃** της παραγρ. 4.2) θα έχομε:

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\ \text{για κάθε}\ x\in\Delta.$$

Επομένως

$$\int f(x)g'(x)dx=\int(f(x)g(x))'dx-\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c,$$

αφού

$$\int(f(x)g(x))'dx=\int f(x)g(x)dx+c.$$

Παραλείποντας τη σταθερά c (αφού το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους περιέχει ήδη μια σταθερά ολοκληρώσεως) καταλήγομε στον επόμενο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός ως ***τύπος της παραγοντικής ολοκληρώσεως*** ή της ***ολοκληρώσεως κατά παράγοντες***.

Παραγοντική ολοκλήρωση.

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται όταν το ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπολογίζεται ευκολότερα από το πρώτο, για παράδειγμα όταν η $f(x)$ είναι μια δύναμη του x, οπότε με την παραγώγισή της θα προκύπτει μικρότερη δύναμη.

Έτσι, αν θέλαμε να υπολογίσομε το ολοκλήρωμα $\int xe^{2x}dx$, θα μπορούσαμε να γράψουμε τον όρο e^{2x} στη μορφή $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$, και χρησιμοποιώντας τον τύπο της παραγοντικής ολοκληρώσεως να πάρομε:

$$\int xe^{2x}dx=\int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)-\int(x)'\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

οπότε

$$\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c.$$

Ο τύπος της παραγοντικής ολοκληρώσεως μπορεί να απλοποιήσει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int P(x)e^{\lambda x}dx,\quad \int P(x)\text{ημ}(\lambda x)dx,\quad \int P(x)\text{συν}(\lambda x)dx,\quad \int P(x)\ln(\lambda x)dx,$$

όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x και λ ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός, καθώς επίσης και ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \text{ημ}(ax)e^{\lambda x}dx,\quad \int \text{συν}(ax)e^{\lambda x}dx.$$

Στα επόμενα δύο παραδείγματα εξηγείται αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθούμε για τέτοιους υπολογισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 6.2.1.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int (x^2+x)e^x dx$ β) $\int (x^2+2x+1)\ln x dx$ γ) $\int x\eta\mu 3x dx$

Λύση.

α) Αφού $(e^x)'=e^x$, θα έχομε:

$$\int (x^2+x)e^x dx = \int (x^2+x)(e^x)'dx = (x^2+x)e^x - \int (x^2+x)'e^x dx = (x^2+x)e^x - \int (2x+1)e^x dx\ .$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για το τελευταίο ολοκλήρωμα παίρνομε:

$$\int (2x+1)e^x dx = \int (2x+1)(e^x)'dx = (2x+1)e^x - \int (2x+1)'e^x dx =$$

$$= (2x+1)e^x - \int (2x+1)'e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + c$$

οπότε τελικά βρίσκομε:

$$\int (x^2+x)e^x dx = (x^2+x)e^x - ((2x+1)e^x - 2e^x + c) = (x^2-x+1)e^x + c_1.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πολλαπλασιασμός ή η πρόσθεση σταθερών οδηγούν επίσης σε σταθερές ποσότητες. Για το λόγο αυτό, κατά τον επί μέρους υπολογισμό ολοκληρωμάτων θα μπορούσαμε να παραλείπομε τις σταθερές και απλά να προσθέτομε μια σταθερά c στην τελική έκφραση που βρίσκομε.

β) Γράφοντας τον όρο x^2+2x+1 στη μορφή $(\frac{1}{3}x^3+x^2+x)'$ παίρνομε:

$$\int (x^2+2x+1)\ln x dx = \int (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)'\ln x dx = (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)\ln x - \int (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)(\ln x)'dx$$

και αφού

$$\int (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)(\ln x)'dx = \int \frac{\frac{1}{3}x^3+x^2+x}{x}dx = \int (\tfrac{1}{3}x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+x+c$$

έχομε τελικά:

$$\int (x^2+2x+1)\ln x dx = (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)\ln x - (\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+x+c)$$

γ) Γράφοντας τον όρο $\eta\mu 3x$ στη μορφή $(-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x)'$ παίρνομε:

$$\int x\eta\mu 3x dx = \frac{1}{3}\int x(-\sigma\upsilon\nu 3x)'dx = -\frac{1}{3}x\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{1}{3}\int \sigma\upsilon\nu 3x dx = -\frac{1}{3}x\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{1}{9}\eta\mu 3x + c\ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.2.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^{2x}\eta\mu(4x)dx$.

Λύση.

Θέτοντας $I=\int e^{2x}\eta\mu(4x)dx$ μπορούμε να πάρομε διαδοχικά

$$I = \int (\tfrac{1}{2}e^{2x})'\eta\mu(4x)dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\eta\mu(4x) - 4\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu(4x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu(4x) - 2\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu(4x)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu(4x) - \int (e^{2x})'\sigma\upsilon\nu(4x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - \left[e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) - \int e^{2x} \; (\sigma\upsilon\nu(4x))' dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) - 4 \int e^{2x} \, \eta\mu(4x) dx .$$

Επομένως έχομε:

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) - 4I$$

και λύνοντας την τελευταία ισότητα ως προς I βρίσκομε

$$I = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) \right).$$

Αν θέλομε να δώσομε τύπο για όλες τις παράγουσες της συναρτήσεως που πρέπει να ολοκληρώσομε, θα πρέπει να γράψομε:

$$\int e^{2x} \eta\mu(4x) dx = \frac{1}{10} e^{2x} \eta\mu(4x) - \frac{1}{5} e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) + c, \quad c \in \mathbf{R} .$$

Θα αναλύσομε στη συνέχεια μια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων που έχουν ή μπορούν να λάβουν τη μορφή $\int f(g(x)) g'(x) dx$ όταν για τη συνάρτηση f γνωρίζομε μια παράγουσα της F. Αφού για τις f, F ισχύει η σχέση $F' = f$, για την παράγωγο της σύνθετης συναρτήσεως $F(g(x)) = (F \circ g)(x)$ θα έχομε

$$(F(g(x))') = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x) ,$$

οπότε το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει παίρνει τη μορφή

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int F'(g(x)) g'(x) dx = \int (F(g(x)))' dx = F(g(x)) + c$$

και θέτοντας $u = g(x)$ έχομε

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(u) + c = \int f(u) du .$$

Έτσι φτάνουμε στον επόμενο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός ως ***τύπος της ολοκληρώσεως με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως*** ή απλά ***ολοκλήρωση με αντικατάσταση***.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du , \text{ όπου } u = g(x) \text{ και } du = g'(x) dx .$$

Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα $\int (3x^2 + 2) \, \eta\mu(x^3 + 2x + 1) \, dx$ μπορεί να υπολογισθεί εύκολα θέτοντας $u = x^3 + 2x + 1$, οπότε $du = (x^3 + 2x + 1)' dx = (3x^2 + 2) dx$ και επομένως θα έχομε διαδοχικά

$$\int (3x^2 + 2) \, \eta\mu(x^3 + 2x + 1) \, dx = \int \eta\mu(u) du = -\sigma\upsilon\nu u + c = -\sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x + 1) + c .$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα φτάναμε αν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο $\int \eta\mu(g(x)) \cdot g'(x) dx = -\sigma\upsilon\nu(g(x)) + c$ του πίνακα 6.1.2 για $g(x) = x^3 + 2x + 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.3.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int x\eta\mu(x^2+\frac{\pi}{3})dx$ β) $\int x(x-2)(x^3-3x^2+1)^{19}dx$ γ) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(1/x)}{x^2}dx$

Λύση.

α) Θέτομε $u=x^2+\frac{\pi}{3}$, οπότε $du=(x^2+\frac{\pi}{3})'dx=2xdx$ και έτσι παίρνομε:

$$\int x\eta\mu(x^2+\frac{\pi}{3})dx=\frac{1}{2}\int \eta\mu u du=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu u+c=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(x^2+\frac{\pi}{3})+c.$$

β) Θέτομε $u=x^3-3x^2+1$, οπότε $du=(x^3-3x^2+1)'dx=3x(x-2)dx$, και το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει παίρνει τη μορφή:

$$\int x(x-2)(x^3-3x^2+1)^{19}dx=\frac{1}{3}\int u^{19}du=\frac{1}{3}\frac{u^{20}}{20}+c=\frac{1}{60}(x^3-3x^2+1)^{20}+c.$$

γ) Θέτομε $u=\frac{1}{x}$, οπότε $du=(\frac{1}{x})'dx=-\frac{1}{x^2}dx$, και θα έχομε:

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu(1/x)}{x^2}dx=-\int \sigma\upsilon\nu u du+c=-\eta\mu u+c=-\eta\mu(1/x)+c.$$

Ασκήσεις.

6.2.1. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με χρήση του τύπου της παραγοντικής ολοκληρώσεως.

α) $\int x^2e^{-2x}dx$ β) $\int (x^2+x+1)e^{-3x}dx$ γ) $\int x^{11}\ln x dx$ δ) $\int e^{-3x}\eta\mu 2x dx$

6.2.2. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με χρήση του τύπου της παραγοντικής ολοκληρώσεως.

α) $\int \theta^2\eta\mu 3\theta d\theta$ β) $\int u\sigma\upsilon\nu 5u du$ γ) $\int (2t^2+3t)\ln t dt$

6.2.3. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως.

α) $\int x\eta\mu 5x^2dx$ β) $\int (x^2-2x+3)^9(x-1)dx$ γ) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx.$ δ) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

ε) $\int \sigma\upsilon\nu\theta\cdot e^{-\eta\mu\theta}d\theta$ στ) $\int \frac{x+2}{(x^2+4x)^5}dx$ ζ) $\int x\sqrt{9-x^2}dx$ η) $\int te^{-t^2}dt$

6.2.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα.

α) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ β) $\int \frac{e^x}{(e^x+2)\ln(e^x+2)}dx$ γ) $\int \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$

δ) $\int x^2e^{-x^3}dx$ ε) $\int e^{2x+1}\eta\mu(3x)dx$ στ) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

ζ) $\int x^5 e^{-x}\,dx$ η) $\int e^{-2x}\eta\mu(5x)dx$ θ) $\int \frac{x}{x^2+1}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

6.2.5. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών τύπων:

$$\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\,,\qquad \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta,$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta.$$

α) $\int \eta\mu(20x)\sigma\upsilon\nu(10x)dx$ β) $\int \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu(3x)dx$ γ) $\int \eta\mu(3x)\eta\mu(5x)dx$

6.3 Η έννοια και οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Έστω f μια ***συνεχής*** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία λαμβάνει μη αρνητικές τιμές, δηλαδή ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Προκειμένου να προσεγγίσομε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ θα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής:

α) Χωρίζομε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν υποδιαστήματα, ίσου πλάτους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, χρησιμοποιώντας τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_\nu=\beta$. Μια τέτοια επιλογή σημείων ονομάζεται ***διαμέριση*** του διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

β) Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\varkappa-1},x_\varkappa]$, $\varkappa=1,2,...,\nu$ επιλέγομε αυθαίρετα ένα σημείο $\xi_\varkappa$. Τα σημεία ξ_1, ξ_2,..., ξ_ν ονομάζονται ***ενδιάμεσα σημεία*** της διαμερίσεως. Στη συνέχεια σχηματίζομε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\varkappa)$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου αυτού (σχ. 6.3α) θα είναι ίσο με:

$$E_\varkappa=f(\xi_\varkappa)\Delta x$$

γ) Θεωρούμε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που σχηματίσαμε στο (β), δηλαδή το

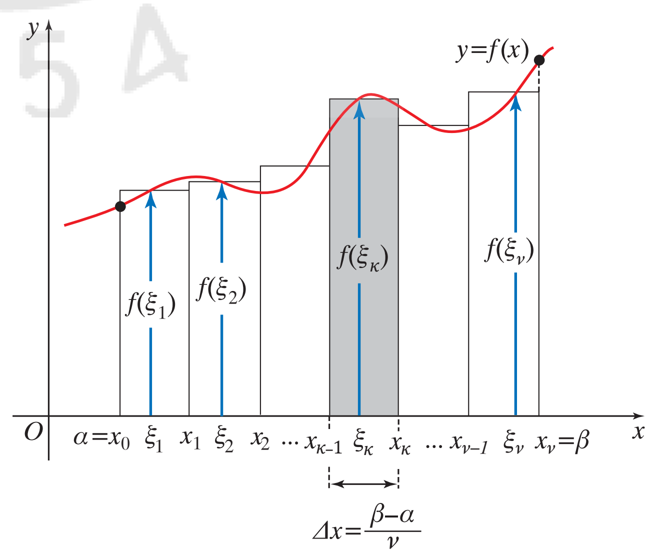
$$R_\nu=E_1+E_2+...+E_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x, \tag{6.3.1}$$

το οποίο προφανώς γράφεται και στην εξής μορφή $R_\nu=[f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_\nu)]\Delta x$.

Είναι φανερό ότι, όσο το πλήθος των σημείων ν της διαμερίσεως αυξάνεται, το άθροισμα R_ν θα προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι το R_ν, όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα (οπότε το πλάτος $\Delta x=(\beta-\alpha)/\nu$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό, δηλ. τείνει στο μηδέν) λαμβάνει μια «οριακή τιμή» που είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των σημείων $\xi_\varkappa$. Η οριακή αυτή τιμή ονομάζεται ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** της συνεχούς συναρτήσεως f από το α στο β, συμβολίζεται με:

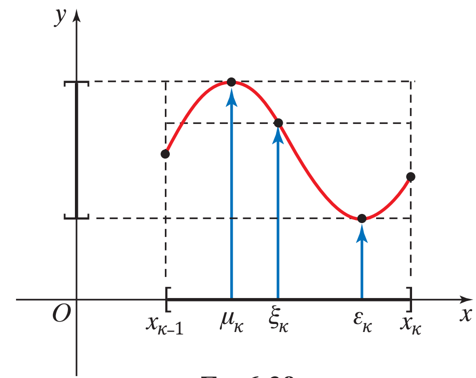
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το α στο β». Ο τρόπος ορισμού του ολοκληρώματος που παρουσιάστηκε παραπάνω προτάθηκε από τον Riemann, για τον λόγο αυτό το άθροισμα (6.3.1)



Σχ. 6.3α.

είναι γνωστό ως άθροισμα Riemann και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ονομάζεται ως ***ολοκλήρωμα Riemann***.



Σχ. 6.3β.

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz. Οι αριθμοί α και β ***ονομάζονται όρια της ολοκληρώσεως.*** Η λέξη «όρια» που χρησιμοποιούμε για να περιγράψομε το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 4, αφού εδώ μας δείχνουν απλά από ποιο μέχρι ποιο σημείο εξετάζομε τη συνάρτηση f.

Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$, $\int_\alpha^\beta f(u)du$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός (σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που γνωρίσαμε στην παράγραφο 6.1, το οποίο παριστάνει ένα σύνολο συναρτήσεων).

Ένας δεύτερος τρόπος προσεγγίσεως της έννοιας του ολοκληρώματος μιας μη αρνητικής συνεχούς συναρτήσεως f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ προκύπτει αν, αντί να πάρομε τυχαία ενδιάμεσα σημεία της διαμερίσεως, θεωρήσομε σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\varkappa-1},x_\varkappa]$, $\varkappa=1,2,...,\nu$ τα σημεία $\varepsilon_\varkappa$, $\mu_\varkappa$, στα οποία η συνάρτηση παίρνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή αντίστοιχα (τέτοια σημεία υπάρχουν πάντοτε σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής που αναφέραμε στην παράγραφο 4.8). Τότε θα έχομε (σχ. 6.3β):

$$f(\varepsilon_\varkappa)\le f(\xi_\varkappa)\le f(\mu_\varkappa)$$

οπότε για το εμβαδόν $E_\varkappa=f(\xi_\varkappa)\Delta x$ του ορθογωνίου που έχει βάση Δx και ύψος $f(\xi_\varkappa)$ θα ισχύει η ανισότητα:

$$f(\varepsilon_\varkappa)\Delta x\le f(\xi_\varkappa)\Delta x\le f(\mu_\varkappa)\Delta x \Leftrightarrow f(\varepsilon_\varkappa)\Delta x\le E_\varkappa\le f(\mu_\varkappa)\Delta x$$

(η ίδια ανισότητα ισχύει αν στη θέση του $E_\varkappa$ θεωρήσομε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\mu_\varkappa$ και $x=\varepsilon_\varkappa$.

Επομένως για τα αθροίσματα:

$$s_\nu=f(\varepsilon_1)\Delta x+f(\varepsilon_2)\Delta x+\cdots+f(\varepsilon_\nu)\Delta x,\ \ S_\nu=f(\mu_1)\Delta x+f(\mu_2)\Delta x+\cdots+f(\mu_\nu)\Delta x \qquad (6.3.2)$$

μπορούμε να γράψομε τις ανισότητες $s_\nu\le R_\nu\le S_\nu$, $s_\nu\le E(\Omega)\le S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι, όσο το πλήθος των σημείων ν της διαμερίσεως αυξάνεται (οπότε το πλάτος $\Delta x=(\beta-\alpha)/\nu$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό), τα αθροίσματα s_ν, S_ν πλησιάζουν προς την ίδια «οριακή τιμή». Η τιμή αυτή θα είναι προφανώς η ίδια με την οριακή τιμή που λαμβάνει το R_ν (αφού ισχύει $s_\nu\le R_\nu\le S_\nu$) και θα ισούται επίσης με το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ (αφού ισχύει $s_\nu\le E(\Omega)\le S_\nu$). Έτσι ξαναφτάνομε στο ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** της συνεχούς συναρτήσεως f από το α στο β, που έχομε εισάγει προηγουμένως μέσω του αθροίσματος R_ν.

Τα παραπάνω γίνονται πιο εύκολα κατανοητά από το σχήμα 6.3γ, στο οποίο θεωρήσαμε μια γνήσια μονότονη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε το ολοκλήρωμα της ***μη αρνητικής συνεχούς*** συναρτήσεως f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι φανερό ότι:

Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$.

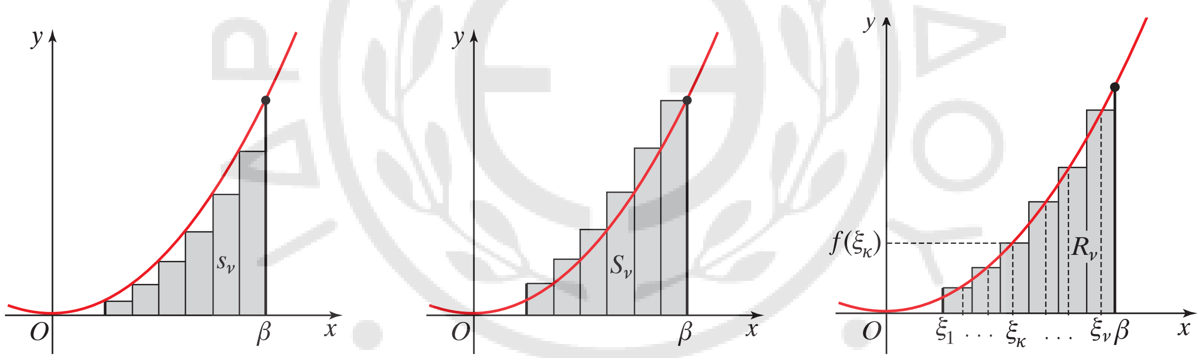
Σημειώνομε ότι, αν η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι γνήσια θετικό, δηλαδή ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0 .$$

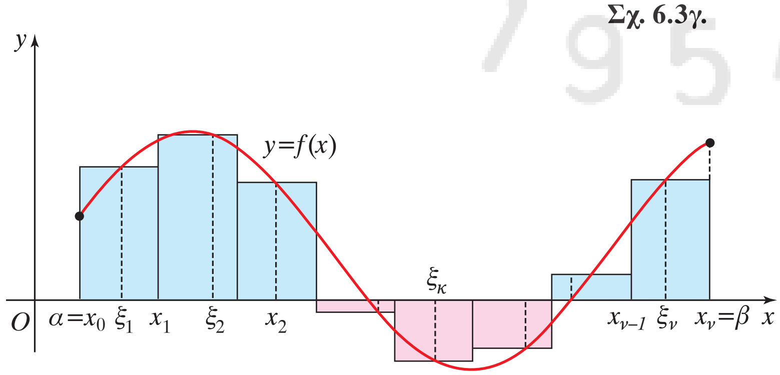
Στην περίπτωση που έχομε μία συνεχή, αλλά όχι απαραίτητα μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ μπορούμε και πάλι να θεωρήσομε τα αθροίσματα (6.3.1), (6.3.2), για τα οποία θα ισχύει επίσης η ανισότητα $s_\nu \le R_\nu \le S_\nu$. Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση αυτή, τα αθροίσματα s_ν, R_ν, S_ν πλησιάζουν προς την ίδια «οριακή τιμή», όταν το πλήθος των σημείων ν της διαμερίσεως αυξάνεται (οπότε το πλάτος $\Delta x = (\beta - \alpha)/\nu$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό). Έτσι ορίζεται το ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** μιας οποιασδήποτε ***συνεχούς*** συναρτήσεως f από το α στο β. Στην περίπτωση αυτή όμως, όπως μπορούμε εύκολα να δούμε, το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.3δ και 6.3ε)[1].

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εισήχθηκε παραπάνω μόνο για την περίπτωση που ισχύει $\alpha < \beta$ (αλλιώς δεν έχει νόημα να μιλάμε για διάστημα $[\alpha, \beta]$). Μπορούμε ωστόσο να επεκτείνομε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha = \beta$ ή $\alpha > \beta$, δεχόμενοι τις εξής συμβάσεις:

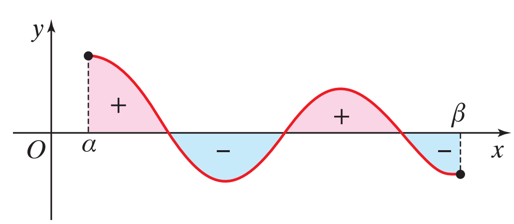
$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx, \text{ για } \alpha > \beta .$$



Σχ. 6.3γ.



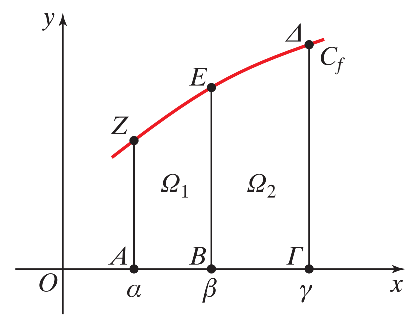
Σχ. 6.3δ.



Σχ. 6.3ε.

1. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε παραπάνω για να ορίσομε το ολοκλήρωμα μπορεί να ακολουθηθεί και για ορισμένες συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς, π.χ. για μονότονες συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα περιοριστούμε στη μελέτη ολοκληρωμάτων συνεχών μόνο συναρτήσεων.

Θα αναφέρομε στη συνέχεια ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στους υπολογισμούς της τιμής του χωρίς να καταφεύγομε κάθε φορά στον ορισμό του (ο οποίος είναι γενικά δύσχρηστος).



Σχ. 6.3στ.

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $Δ$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in Δ$ και $α, β, γ, \in Δ$ με $α<β<γ$ (σχ. 6.3στ). Αν συμβολίσομε με $Ω$ το χωρίο $ΑΓΔΖ$, με $Ω_1$ το $ΑΒΕΖ$ και με $Ω_2$ το $ΒΓΔΕ$, είναι φανερό ότι ισχύει $E(Ω)= E(Ω_1)+E(Ω_2)$.

Όμως

$$E(Ω) = \int_α^γ f(x)dx, \quad E(Ω_1) = \int_α^β f(x)dx, \; E(Ω_2) = \int_β^γ f(x)dx,$$

οπότε θα έχομε

$$\int_α^γ f(x)dx = \int_α^β f(x)dx + \int_β^γ f(x)dx.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για ***οποιαδήποτε*** σημεία $α, β, γ \in Δ$ (ανεξάρτητα της διατάξεώς τους) και για ***οποιαδήποτε*** συνεχή συνάρτηση f. Πιο συγκεκριμένα έχομε το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $Δ$ και $α, β, γ \in Δ$, τότε:

$$\int_α^γ f(x)dx = \int_α^β f(x)dx + \int_β^γ f(x)dx.$$

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος μπορεί να αποδειχθεί και το παρακάτω αποτέλεσμα, που αφορά στο ολοκλήρωμα του αθροίσματος δύο συναρτήσεων και του γινομένου συναρτήσεως επί σταθερό αριθμό.

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[α, β]$ και $λ \in \mathbf{R}$. Τότε ισχύουν οι τύποι:

α) $\int_α^β λf(x)dx = λ\int_α^β f(x)dx$

β) $\int_α^β [f(x)+g(x)]dx = \int_α^β f(x)dx + \int_α^β g(x)dx$

Όπως είδαμε προηγουμένως, για κάθε μη αρνητική συνεχή συνάρτηση f ($f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [α, β]$) έχομε $\int_α^β f(x)dx = E(Ω) \geq 0$. Αν τώρα f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [α, β]$, θα έχομε:

$$\int_α^β g(x)dx - \int_α^β f(x)dx = \int_α^β (g(x)-f(x))dx \geq 0,$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι:

$$\int_α^β f(x)dx \leq \int_α^β g(x)dx.$$

Επομένως, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[α, β]$, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [α, β]$. Τότε:

$$\int_α^β f(x)dx \leq \int_α^β g(x)dx.$$

Τέλος αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε για κάθε $x \in [a,\beta]$ θα ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Επομένως:

$$\int_a^\beta (-|f(x)|)dx \le \int_a^\beta f(x)dx \le \int_a^\beta |f(x)|dx \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad -\int_a^\beta |f(x)|dx \le \int_a^\beta f(x)dx \le \int_a^\beta |f(x)|dx$$

απ' όπου προκύπτει η ανισότητα
$$\left|\int_a^\beta f(x)dx\right| \le \int_a^\beta |f(x)|dx.$$

Επομένως, αποδείχτηκε το εξής αποτέλεσμα:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a,\beta]$ ισχύει η ανισότητα[1]:

$$\left|\int_a^\beta f(x)dx\right| \le \int_a^\beta |f(x)|dx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3.1.

Δίνεται ότι $\int_1^2 f(x)dx = 2$, $\int_1^4 f(x)dx = 1$ και $\int_1^2 g(x)dx = 4$.

α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 [3f(x) - 2g(x)]dx$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 |3f(x) - 2g(x)|dx \ge 2$.

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_2^4 f(x)dx$.

Λύση.

α) Έχομε:

$$\int_1^2 [3f(x) - 2g(x)]dx = \int_1^2 3f(x)dx + \int_1^2 (-2)g(x)dx = 3\int_1^2 f(x)dx - 2\int_1^2 g(x)dx = 3\cdot 2 + (-2)\cdot 4 = -2.$$

β) Έχομε: $\left|\int_1^2 [3f(x) - 2g(x)]dx\right| \le \int_1^2 |3f(x) - 2g(x)|dx$, οπότε $\int_1^2 |3f(x) - 2g(x)|dx \ge |-2| = 2$.

γ) Έχομε: $\int_2^4 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -1 + 2 = 1$.

Ασκήσεις.

6.3.1. Να αποδείξετε ότι $\int_1^5 \ln x^2 dx + 3\int_5^1 \ln\frac{1}{x}dx = 5\int_1^5 \ln x dx$.

6.3.2. Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi \eta\mu^2 x dx + \int_\pi^0 (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)dx = 0$.

6.3.3. Αν $\int_1^{10} f(x)dx = 5$, $\int_3^{10} f(x)dx = 2$ και $\int_8^{10} f(x)dx = 13$, να υπολογίσετε τις τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_1^3 f(x)dx$, $\int_3^8 f(x)dx$, $\int_1^8 f(x)dx$.

1. Η ανισότητα αυτή είναι αντίστοιχη με τη γνωστή τριγωνική ανισότητα $|\alpha_1 + \alpha_2| \le |\alpha_1| + |\alpha_2|$ ή καλύτερα, με τη γενίκευση της $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\kappa| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\kappa|$.

6.3.4. Αν $\int_2^5 f(x)dx = -2$, $\int_5^8 f(x)dx = 2$ και $\int_8^{10} f(x)dx = 4$ να υπολογίσετε τις τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων $\int_2^8 f(x)dx$, $\int_2^{10} f(x)dx$, $\int_{10}^5 f(x)dx$.

6.3.5. Αν $\int_0^3 f(x)dx = -1$ και $\int_0^3 g(x)dx = 2$, να υπολογίσετε τις τιμές των επομένων ορισμένων ολοκληρωμάτων.

α) $\int_0^3 2f(x)dx$ β) $\int_0^3 (-3)g(x)dx$ γ) $\int_0^3 (2f(x)-3g(x))dx$

δ) $\int_3^0 (2f(x)+g(x))dx$ ε) $\int_3^0 f(x)dx + \int_0^3 g(x)dx$ στ) $-3\int_3^0 f(x)dx + 2\int_0^3 g(x)dx$

6.3.6. Δίνεται μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο **R**. Να γράψετε στη μορφή $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ τις επόμενες παραστάσεις.

α) $\int_1^2 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx$ β) $\int_{-1}^5 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx$

γ) $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx + \int_5^{10} f(x)dx$ δ) $\int_{-3}^1 f(x)dx - \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_1^6 f(x)dx$

6.3.7. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ανισότητες:

α) $\int_{-5}^5 (x^2+1)dx \ge 0$ β) $\int_1^3 \ln x dx \ge 0$ γ) $\int_1^2 x^3 dx \ge \int_1^2 x^2 dx \ge \int_1^2 x dx$

δ) $\int_{-5}^5 (x^2-5x+9)dx \ge 0$ ε) $\int_{1/2}^1 \ln x dx \le 0$ στ) $\int_0^1 x^3 dx \le \int_0^1 x^2 dx \le \int_0^1 x dx$

6.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μέχρι το σημείο αυτό, παρότι αναφέραμε διάφορες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζομε κάποια ολοκληρώματα όταν γνωρίζομε κάποια άλλα, δεν έχομε δει τρόπους υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος μιας δεδομένης συναρτήσεως (με εξαίρεση τον τύπο του ορισμού, ως οριακή τιμή αθροισμάτων, ο οποίος είναι δύσχρηστος). Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού που θα μελετήσομε στην παράγραφο αυτή θα μας δώσει έναν αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων, χωρίς τη χρήση του ορισμού.

Ας θεωρήσομε μία συνάρτηση f συνεχή σε ένα διάστημα Δ και έστω α ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ (όχι απαραίτητα άκρο του Δ). Μπορούμε τότε να ορίσομε μια νέα συνάρτηση F με τύπο:

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \; x \in \Delta. \tag{6.4.1}$$

Αποδεικνύεται (η απόδειξη παραλείπεται) ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το διάστημα Δ και ότι η παράγωγός της είναι ίση με την f, δηλαδή ότι ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta \tag{6.4.2}$$

ή ισοδύναμα [συνδυάζοντας τις (6.4.1), (6.4.2)]

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x), \quad x \in \Delta. \tag{6.4.3}$$

Από τον τύπο (6.4.3) και τον τύπο παραγωγίσεως σύνθετης συναρτήσεως προκύπτει ότι για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$, για την οποία έχει νόημα η σύνθεση των f και g, θα ισχύει και ο γενικότερος τύπος:

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x). \tag{6.4.4}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (6.4.2), η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επίσης έχομε $F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt=0$ και $F(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$, οπότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta)-F(\alpha).$$

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως ***Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού***, δείχνει ότι θα μπορούσαμε να υπολογίσομε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ μέσω του τελευταίου τύπου, ακόμη και αν αντί της F χρησιμοποιούσαμε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$$

Πράγματι, αφού η G είναι παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, και η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι επίσης παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $G(x)=F(x)+c$. Θέτοντας στην τελευταία $x=\alpha$ και $x=\beta$ παίρνομε αντίστοιχα:

$$G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c \Leftrightarrow c=G(\alpha),$$

$$G(\beta)=F(\beta)+c=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+c \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-c.$$

Επομένως τελικά θα έχομε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Συνήθως η διαφορά $G(\beta)-G(\alpha)$ θα συμβολίζεται με $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε ο τύπος του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού παίρνει τη μορφή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=[G(x)]_{\alpha}^{\beta} \text{ όπου } G(x)=\int f(x)dx.$$

Για διευκόλυνση κατά την εφαρμογή του τελευταίου τύπου που βρήκαμε παρατίθεται ο πίνακας 6.4.1 (έχει παραλειφθεί η σταθερά c), ο οποίος προκύπτει άμεσα από τον πίνακα 6.1.1.

Πίνακας 6.4.1
Πίνακας παραγουσών (ή αρχικών) συναρτήσεων.

$f(x)$	$x^{\alpha}, \alpha\neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\text{συν}x$	$\text{ημ}x$	$\frac{1}{\text{συν}^2 x}$	$\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$	α^x
Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$\text{ημ}x$	$-\text{συν}x$	$\text{εφ}x$	$-\text{σφ}x$	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}$

Σημειώνεται ότι, οι τύποι της ολοκληρώσεως κατά παράγοντες και της ολοκληρώσεως με αλλαγή μεταβλητής που αναφέραμε στην παράγραφο 6.2 (για αόριστα ολοκληρώματα) λαμβάνουν, για το ορισμένο ολοκλήρωμα, την επόμενη μορφή.

α) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ όπου $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.1.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σταθερά $c \in \mathbf{R}$ ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$.

Λύση.

Μία παράγουσα της συνεχούς συναρτήσεως $f(x) = c$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι η $F(x) = cx$. Επομένως:

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = [cx]_{\alpha}^{\beta} = c\beta - c\alpha = c(\beta - \alpha).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.2.

Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int_{3}^{9} x^2 dx$, $\int_{1}^{3} \frac{1}{x} dx$ $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x dx$, β) $\int_{1}^{2} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} dx$, γ) $\int_{1}^{4} |x-3| dx$

Λύση.

α) Χρησιμοποιώντας τα αόριστα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων του πίνακα 6.1.1 παίρνομε:

$$\int_{3}^{9} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{3}^{9} = \frac{9^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 243 - 9 = 234, \quad \int_{1}^{3} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{1}^{3} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{-\pi}^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0.$$

β) Έχομε διαδοχικά

$$\int_{1}^{2} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} dx = \int_{1}^{2} (x + 2 - \frac{3}{x}) dx == \int_{1}^{2} x dx + 2\int_{1}^{2} 1 dx - 3\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + 2[x]_{1}^{2} - 3[\ln x]_{1}^{2} = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 - 3\ln 2 = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

γ) Αφού

$$|x - 3| = \begin{cases} 3 - x, & x \le 3 \\ x - 3, & x \ge 3 \end{cases}$$

θα έχομε:

$$\int_{1}^{4} |x-3| dx = \int_{1}^{3} (3 - x) dx + \int_{3}^{4} (x - 3) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{3}^{4} = \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right) + \left(-4 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right) = 5.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.3.

Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x\,dx$ β) $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$ γ) $\int_2^3 \frac{\ln x}{x}dx$

Λύση.

α) Έχομε διαδοχικά:

$$I=\int_0^{\pi} x(\eta\mu x)'dx=[x\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(x)'\eta\mu x dx=[x\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=$$

$$=[x\eta\mu x]_0^{\pi}+[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=(\pi\cdot\eta\mu\pi-0\cdot\eta\mu 0)+(\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0)=-1.$$

β) Θέτομε $u=9-x^2$, οπότε $du=-2xdx$, δηλαδή $xdx=-\frac{1}{2}du$. Για $x=0$ είναι $u_1=9$ και για $x=3$ είναι $u_2=0$. Επομένως:

$$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx=\int_9^0\sqrt{u}(-\frac{1}{2})\,du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}[u^{3/2}]_9^0=-\frac{1}{3}(0-\sqrt{9^3})=-\frac{1}{3}(-27)=9.$$

γ) Αν θέσομε $u=\ln x$, θα έχομε $du=(\ln x)'=\frac{1}{x}dx,\ u_1=\ln 2$ και $u_2=\ln 3$. Επομένως:

$$\int_2^3\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=\frac{(\ln 3)^2-(\ln 2)^2}{2}.$$

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ (σχ. 6.4α). Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.8, η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\ \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Θέτοντας $m=f(x_1)$, $M=f(x_2)$, θα έχομε $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και επομένως,

$$\int_\alpha^\beta mdx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta Mdx,$$

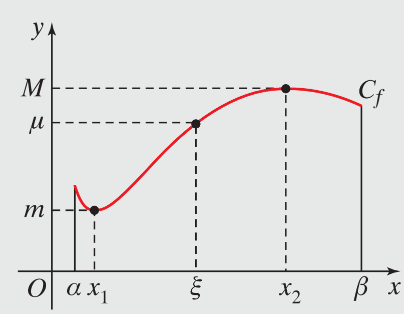
οπότε $m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$ ή ισοδύναμα $m\le\frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}\le M.$

Ο αριθμός $\mu_f=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ονομάζεται ***μέση τιμή*** της συναρτήσεως f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για παράδειγμα, η μέση τιμή μ της συναρτήσεως $f(x)=x$ στο διάστημα $[0,\ 1]$ είναι ίση με:

$$\mu_f=\frac{1}{1-0}\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}=f(1).$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 6.4, αν έχομε μία συνάρτηση f συνεχή στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε η συνάρτηση με τύπο $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $F'(x)=f(x)$. Επομένως, σύμ-



Σχ. 6.4α.

φωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (βλ. παράγραφο 5.3) θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ (σχ. 6.4β) τέτοιο, ώστε να ισχύει:

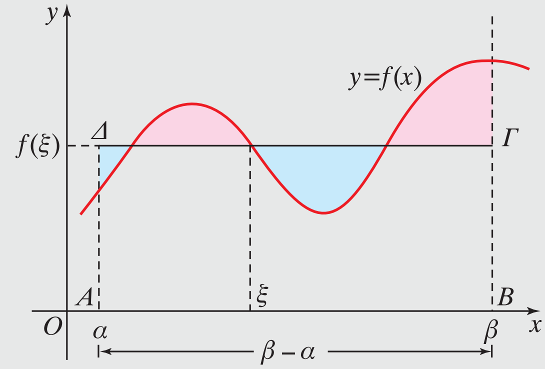
$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Όμως

$$F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt, \qquad F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$$

και δεδομένου ότι ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ θα έχομε $F'(\xi) = f(\xi)$ και επομένως:

$$f(\xi) = F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{F(\beta)}{\beta - \alpha} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt}{\beta - \alpha} = \mu_f.$$



Σχ. 6.4β.

Δείξαμε λοιπόν ότι ισχύει το επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό ως ***θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.***

> Αν μία συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
>
> $$f(\xi) = \mu_f = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta - \alpha}$$
>
> ή ισοδύναμα $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Από την ισότητα

$$(\beta - \alpha)\mu_f = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

είναι φανερό ότι αν μία συνάρτηση *f* έχει ***θετικές τιμές*** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η μέση της τιμή μ_f είναι το ύψος ενός ορθογωνίου βάσεως $\beta - \alpha$, του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$. Αυτό σημαίνει ότι το συνολικό εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων χωρίων του σχήματος 6.4β, που βρίσκονται επάνω από την οριζόντια ευθεία $y = f(\xi)$ είναι ακριβώς ίσο με το συνολικό εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων χωρίων που βρίσκονται κάτω από την ευθεία αυτή.

Ασκήσεις.

6.4.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = xe^x$ και $F(x) = xe^x - e^x$.

α) Να αποδείξετε ότι η F είναι μια παράγουσα της f.

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^2 xe^x dx$, $\int_2^3 xe^x dx$, $\int_0^3 xe^x dx$, $\int_{-1}^1 xe^x dx$.

6.4.2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x\eta\mu x$:

α) Να βρείτε την παράγωγο της f.

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/2} (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx, \quad \int_0^{\pi} (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx.$$

6.4.3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f.

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

6.4.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 e^x dx$ β) $\int_{-1}^0 e^{-x}dx$ γ) $\int_1^2 \frac{5}{x}dx$

δ) $\int_0^{\pi/2}(2\text{συν}x - 3\text{ημ}x)dx$ ε) $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ στ) $\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$

6.4.5. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $F(x)=\int_1^{\text{ημ}x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ β) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\text{συν}(t^2)}{t}dt$ γ) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t}\,dt$

6.4.6. Αν $\int_0^x t^2 f(t)dt = x^3+2x^5$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, να βρείτε το $f(2)$.

6.4.7. Να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως με τύπο $F(x)=e^x+\int_0^x e^x f(t)dt$.

6.4.8. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^3(x^2-9)dx$ β) $\int_1^2\left(x-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx$ γ) $\int_1^3\left(2x^2+1-\frac{1}{x^3}\right)dx$

δ) $\int_1^4\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$ ε) $\int_{-2}^1(x^2+3x+1)dx$ στ) $\int_{-20}^{20}(2x^3+3x)dx$

ζ) $\int_{-2}^2(2x+3)(x^2+3x+1)^3dx$ η) $\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+2}\right)dx$ θ) $\int_2^3\left(x^2+x+\frac{1}{x-1}\right)dx$

6.4.9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-1}^1(x^2-|x|)dx$ β) $\int_{-2}^2\left|x^2-1\right|dx$ γ) $\int_1^4\left|x^2-5x+6\right|dx$

6.4.10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 te^{-t^2}dt$ β) $\int_0^1\frac{x+1}{x^2+2x+6}dx$ γ) $\int_{-1}^1 x^3(x^4+1)^4dx$

δ) $\int_{-1}^1 xe^{x^2+1}dx$ ε) $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^3+3x+2}dx$ στ) $\int_0^1 x(x^2+1)^5dx$

6.4.11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi/2}\text{ημ}^3x\,\text{συν}x\,dx$ β) $\int_{\pi^2}^{3\pi^2}\frac{\text{συν}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ γ) $\int_1^2\frac{x+3}{(x^2+6x)^2}dx$

δ) $\int_{2/\pi}^{3/\pi}\frac{\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$ ε) $\int_1^2 x\ln x\,dx$ στ) $\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$

ζ) $\int_0^1 x^4e^{x^5}dx$ η) $\int_1^2 x(e^{x^2}-2x)dx$ θ) $\int_1^2\frac{x}{9-x^2}dx$

6.4.12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^2 xe^{2x}dx$ β) $\int_0^1 x^2e^{-x/2}dx$ γ) $\int_0^1 (2x^2+3x+1)e^{-x}dx$.

6.4.13. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ και $g(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε η f να λάβει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x+1}.$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\varkappa, \lambda, \mu$, έτσι ώστε η g να λάβει τη μορφή:

$$g(x)=\varkappa x+\lambda+\frac{\mu}{x+1}.$$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 g(x)dx$.

6.4.14. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, έτσι ώστε η f να λάβει τη μορφή:

$$f(x)=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+2}.$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^4 f(x)dx$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\varkappa, \lambda, \mu$, έτσι ώστε η g να λάβει τη μορφή:

$$g(x)=\frac{\varkappa}{x-2}+\frac{\lambda}{x-3}.$$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_4^5 g(x)dx$.

6.4.15. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2, & -1\le x<0\\ 6x^3, & 0\le x\le 2,\end{cases}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

6.4.16. Να βρείτε τη μέση τιμή των επομένων συναρτήσεων στο διάστημα που δίνεται.

α) $f(x)=x$, $[\alpha,\beta]$ β) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0, 4]$ γ) $f(x)=e^x$, $[0,1]$

δ) $f(x)=x^2$, $[0, 10]$ ε) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $[1, 2]$ στ) $f(x)=\text{ημ}x$, $[0,\pi]$

6.4.17. Να βρείτε τη μέση τιμή μ_f μιας συνεχούς συναρτήσεως f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, αν γνωρίζομε ότι ισχύει $\int_a^\beta (f(x)-c)dx=0$, όπου c είναι ένας δοσμένος πραγματικός αριθμός.

6.4.18. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$, $g(x)$=συνχ έχουν την ίδια μέση τιμή στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

6.4.19. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν για τον οποίο ισχύει

$$\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^\nu dx = \frac{1}{12}.$$

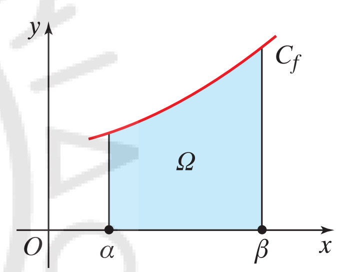
Για την τιμή του ν που βρέθηκε, να υπολογίσετε τη μέση τιμή της συναρτήσεως $f(x) = x^2 - x^\nu$ στο διάστημα $[0, 3]$.

6.5 Εμβαδά επιπέδων σχημάτων.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσομε πώς μπορούμε, χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα, να υπολογίζομε το εμβαδόν επιπέδων σχημάτων, των οποίων τα όρια (σύνορα) καθορίζονται από γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και/ή κατακόρυφες ευθείες.

Στην παράγραφο 6.3 στην πορεία εισαγωγής της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, διαπιστώσαμε ότι το εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας μη αρνητικής συνεχούς ($f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$) συναρτήσεως στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και από τον άξονα των x, δίνεται από τον τύπο (σχ. 6.5α)

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

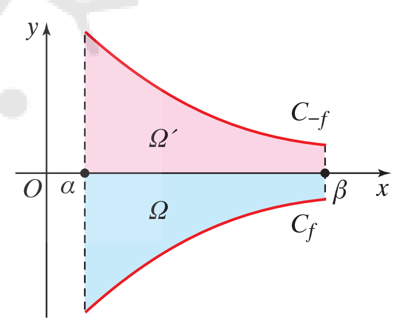


Σχ. 6.5α.

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = x^2$, από τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$ και από τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f παίρνει μόνο αρνητικές ή μηδενικές τιμές στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ($f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$) μπορούμε να θεωρήσομε τη συνάρτηση $-f$ (η οποία θα παίρνει μη αρνητικές τιμές) και το αντίστοιχο χωρίο Ω' που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $-f$ από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.5β). Αφού τα Ω, Ω' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ θα έχουν ίσα εμβαδά, οπότε:

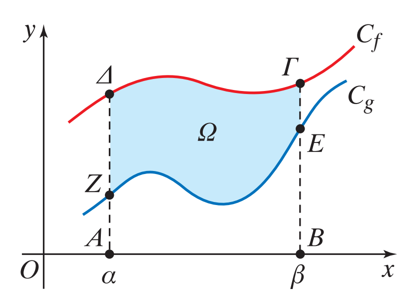


Σχ. 6.5β.

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_\alpha^\beta (-f(x))dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Έστω τώρα δύο συναρτήσεις f, g, συνεχείς μη αρνητικές στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με το σχήμα 6.5γ παίρνοντας τη διαφορά των εμβαδών που αντιστοιχούν στα χωρία $ΑΒΓΔ$ και $ΑΒΕΖ$. Επομένως:

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx.$$

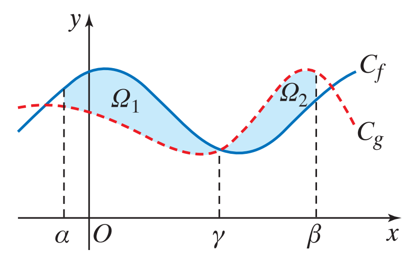


Σχ. 6.5γ.

Ο τύπος αυτός ισχύει ακόμη και όταν οι συνεχείς συναρτήσεις

f, g, δεν είναι μη αρνητικές στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, αρκεί όμως να ικανοποιούν τον περιορισμό $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Αν τέλος η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο σχήμα 6.5δ, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1 και Ω_2, οπότε:



Σχ. 6.5δ.

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\beta}(g(x)-f(x))dx.$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος τύπος μπορεί να γραφεί και στην εξής μορφή:

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx,$$

η οποία αποτελεί την πλέον γενική έκφραση για τον υπολογισμό του εμβαδού $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο οποιωνδήποτε συνεχών συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

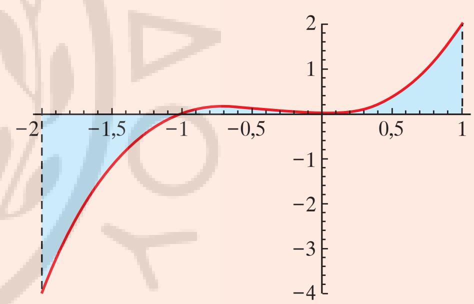
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5.1.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=x^3+x^2$, από τις ευθείες $x=-2, x=1$ και από τον άξονα $x'x$.

Λύση.

Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως τέμνει τον $x'x$ στα σημεία που οι τετμημένες τους είναι ρίζες της εξισώσεως $f(x)=0$. Έχομε $x^3+x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x^2$ είναι συνεχής στο $[-2,1]$ και ισχύει $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[-2,-1]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ (σχ. 6.5ε).



Σχ. 6.5ε.

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$$E(\Omega)=-\int_{-2}^{-1}(x^3+x^2)dx+\int_{-1}^{1}(x^3+x^2)dx=-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{25}{12}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5.2.

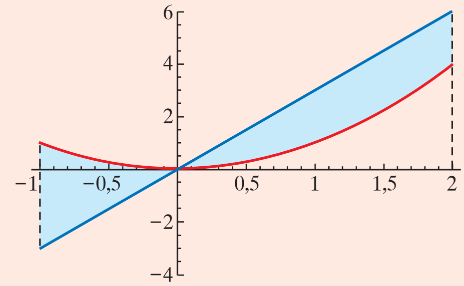
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ και από τις ευθείες $x=-1, x=2$.

Λύση.

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων βρίσκομε αρχικά τις ρίζες της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[-1,2]$. Έχομε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=3x \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3.$$

Η δεύτερη ρίζα δεν μας ενδιαφέρει αφού βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[-1,2]$. Το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[-1,2]$ φαίνεται στον πίνακα 6.5.1 (σχ. 6.5στ).



Σχ. 6.5στ.

Πίνακας 6.5.1

x	-1		0		2
$f(x)-g(x)$	4	$+$	0	$-$	-2

Δηλαδή για $x\in[-1,0]$ ισχύει $f(x)\geq g(x)$ και για $x\in[0,2]$ ισχύει $f(x)\leq g(x)$. Επομένως,

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{2}\left|3x-x^2\right|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{2}(3x-x^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{31}{6}.$$

Ασκήσεις.

6.5.1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f, από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, και από τον άξονα των $x'x$, όταν:

α) $f(x)=e^{-x}$, $\alpha=-1$, $\beta=1$ β) $f(x)=-x^2$, $\alpha=1$, $\beta=3$ γ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\alpha=1$, $\beta=e$

δ) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$, $\alpha=1$, $\beta=e$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $\alpha=0$, $\beta=4$ στ) $f(x)=x(x+2)$, $\alpha=0$, $\beta=3$.

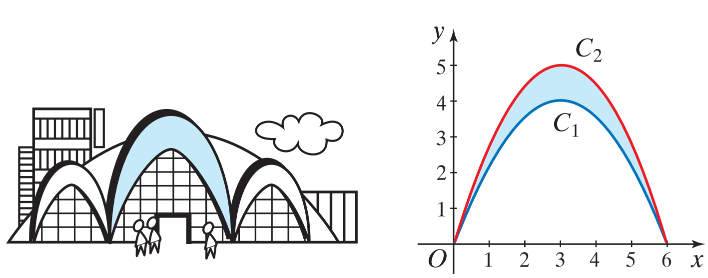
6.5.2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=6x^2-3x$ και από τον άξονα $x'x$.

6.5.3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3+1$, $g(x)=x^2+1$.

6.5.4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2-2x+1$ και $g(x)=x^3-x^2-x+1$ και από τις ευθείες $x=-2$, $x=3$.

6.5.5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=$ ημ$2x$, $g(x)=$ συν$2x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2\pi$.

6.5.6. Στην είσοδο ενός κτηρίου υπάρχουν τρεις αψίδες, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.5ζ. Η κεντρική αψίδα περιγράφεται από τις παραβολές με εξισώσεις $C_1: y=-4x^2+24x$ και $C_2: y=-5x^2+30x$. Αν το κόστος επενδύσεως με ένα συγκεκριμένο υλικό είναι 20 €/m², να υπολογίσετε το συνολικό κόστος για την επένδυση της αψίδας.



Σχ. 6.5ζ.

6.5.7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5x^2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(1,5)$.

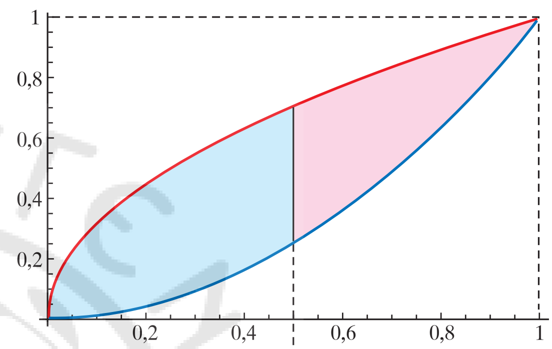
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, από την εφαπτόμενη και από τον άξονα $x'x$.

6.5.8. Το σχήμα 6.5η δείχνει την κάτοψη ενός κανό που χρησιμοποιείται σε θαλάσσιους αγώνες ταχύτητας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των δύο γραμμοσκιασμένων χωρίων του σχήματος, καθώς και το συνολικό εμβαδόν της κατόψεως.

6.5.9. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x<1\\ 2\sqrt{x}-1, & x\geq 1\end{cases}$$

τις ευθείες $x=0$, $x=3$ και τον άξονα των x.



Σχ. 6.5η.

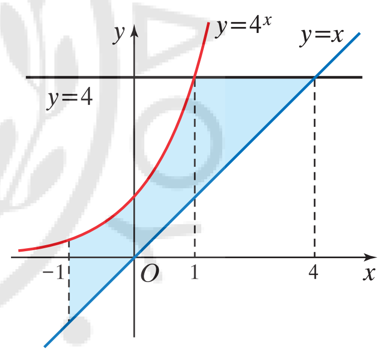
6.5.10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 6.5θ.

6.5.11. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παραστάσεως της f στα σημεία με τετμημένες $x=1$ και $x=e$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f και τις δύο εφαπτόμενες.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e,1)$.

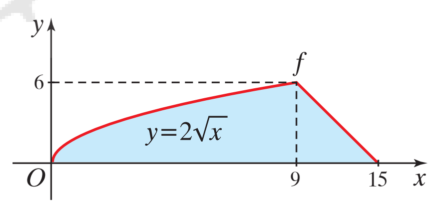


Σχ. 6.5θ.

6.5.12. Το πτερύγιο σταθεροποιήσεως ενός πλοίου έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 6.5ι.

α) Να γράψετε τον τύπο της συναρτήσεως f, η οποία περιγράφει το σχήμα του πτερυγίου

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πλάγιας επιφάνειας του πτερυγίου.

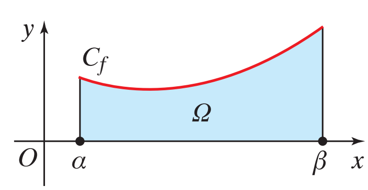


Σχ. 6.5ι.

6.6 Όγκοι στερεών. Μήκος τόξου καμπύλης.

Τα ορισμένα ολοκληρώματα, εκτός από τον υπολογισμό εμβαδών επιπέδων χωρίων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον υπολογισμό των όγκων στερεών, που δημιουργούνται από την περιστροφή ενός επίπεδου σχήματος γύρω από ένα σταθερό άξονα.

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως, από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6α). Αν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$ δημιουργείται ένα στερεό, το οποίο ονομάζεται ***στερεό εκ περιστροφής*** (σχ. 6.6β).



Σχ. 6.6α.

Ο όγκος V_f του στερεού δίνεται από τον παρακάτω τύπο (η απόδειξη παραλείπεται):

$$V_f = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2\, dx$$

Στην περίπτωση που η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα $y'y$ ο όγκος V_f του στερεού δίνεται από τον επόμενο τύπο, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη (και επομένως αντιστρέφεται) στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

$$V_f = \pi \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} (f^{-1}(y))^2\, dy$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f από τις ευθείες $x = 0$, $x = 4$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6γ). Αν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δημιουργήσει το στερεό του σχήματος 6.6δ, που ονομάζεται ***παραβολοειδές*** και χρησιμοποιείται στην κατασκευή παραβολικών κατόπτρων (φώτα αυτοκινήτων κ.λπ.).

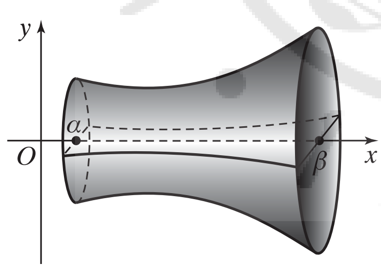
Ο όγκος του στερεού αυτού είναι ίσος με:

$$V_f = \pi \int_0^4 (2\sqrt{x})^2\, dx = 4\pi \int_0^4 x dx \;\; 4\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 32\pi .$$

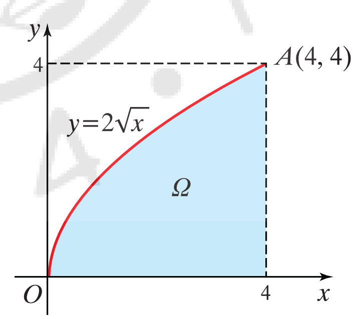
Αν το περιστρεφόμενο χωρίο περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$ και ισχύει $f(x) \ge g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το στερεό που παράγεται έχει όγκο:

$$V_{f,g} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x))^2 - (g(x))^2]\, dx.$$

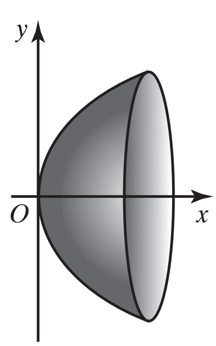
Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις (σχ. 6.6ε): $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = \sqrt{x}$.



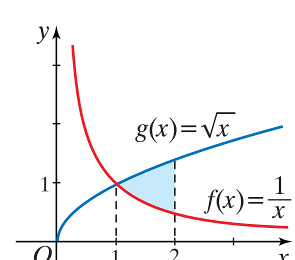
Σχ. 6.6β.



Σχ. 6.6γ.



Σχ. 6.6δ.



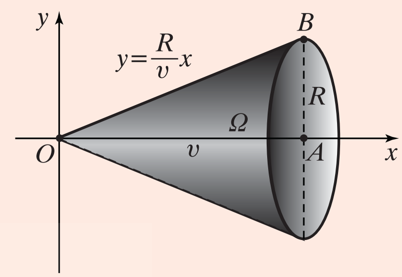
Σχ. 6.6ε.

Αφού ισχύει $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι:

$$V_{f,g} = \pi \int_1^2 [(\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2] dx = \pi \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \pi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6.1.

Το ορθογώνιο τρίγωνο OAB του σχήματος 6.6στ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, δημιουργώντας κατά την περιστροφή του έναν κώνο ύψους $\upsilon = (OA)$ και ακτίνας βάσεως R. Να βρείτε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο του κώνου αυτού συναρτήσει των υ και R.



Σχ. 6.6στ.

Λύση.

Η κλίση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $O(0,0)$ και $B(\upsilon, R)$ είναι ίση με $\lambda = R/\upsilon$. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OB θα περιγράφεται από τον τύπο:

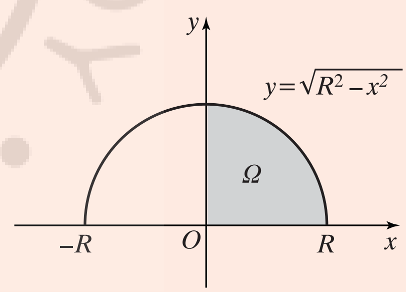
$$f(x) = \lambda x = \frac{R}{\upsilon} x,\ 0 \leq x \leq \upsilon .$$

Επομένως, ο όγκος V_f του στερεού που παράγεται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_f = \pi \int_0^{\upsilon} \left(\frac{R}{\upsilon} x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{\upsilon^2} \int_0^{\upsilon} x^2 dx = \pi \frac{R^2}{\upsilon^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\upsilon} = \pi \frac{R^2}{\upsilon^2} \frac{\upsilon^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 \upsilon.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6.2.

Να υπολογίσετε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο σφαίρας ακτίνας R.



Σχ. 6.6ζ.

Λύση.

Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq R$, από τις ευθείες $x = 0$ και $x = R$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6ζ). Όταν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δημιουργήσει ένα στερεό όγκου

$$V_f = \pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = \pi (R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

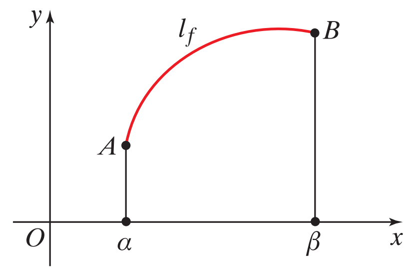
Ο όγκος της σφαίρας ακτίνας R θα βρίσκεται αν πάρομε το διπλάσιο από το προηγούμενο ολοκλήρωμα, δηλαδή είναι ίσος με $V = 2V_f = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Τα ορισμένα ολοκληρώματα, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του μήκους της καμπύλης της γραφικής παραστάσεως C_f μιας συνεχούς συναρτήσεως που αντιστοιχεί σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Συνήθως αναφερόμαστε σ' αυτό με την ονομασία ***μήκος τόξου*** της καμπύλης $y = f(x)$

από το α έως το β (ή ισοδύναμα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$) και θα το συμβολίζομε με $l_f(\alpha, \beta)$ ή απλά l_f (σχ. 6.6η).

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με συνεχή παράγωγο. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το α έως το β δίνεται από τον τύπο (η απόδειξη παραλείπεται):

$$l_f = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$



Σχ. 6.6η.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6.3.

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Να βρείτε το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το 0 έως το 1.

Λύση.

Η παράγωγος της συναρτήσεως f είναι ίση με:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο

$$l_f = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx,$$

για $\alpha = 0, \beta = 1$ παίρνομε

$$l_f = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x + e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}\left([e^x]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1\right) = \frac{1}{2}(e + e^{-1}).$$

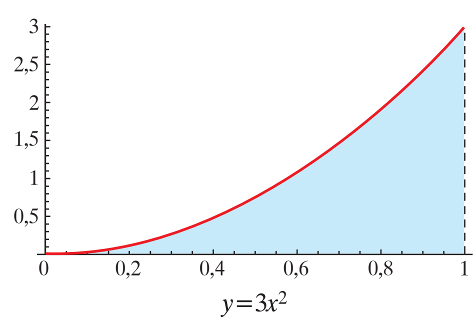
Ασκήσεις.

6.6.1. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 3x^2$ από την ευθεία με εξίσωση $x = 1$ και από τους άξονες $x'x$ και yy' (σχ. 6.6θ).

6.6.2. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \eta\mu 2x$ από τις ευθείες $x = 0, x = \pi/4$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6ι).

6.6.3. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = 3x$.

6.6.4. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται



$y=3x^2$

Σχ. 6.6θ.

από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\sqrt{2x+1}$ από τις ευθείες $x=1$, $x=3$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6ια).

6.6.5. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=3x^2$ από τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$ και από τον άξονα $x'x$.

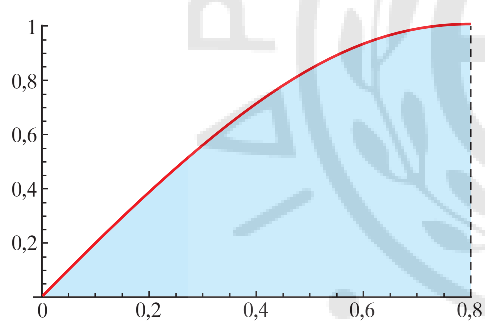
6.6.6. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$, $g(x)=1$ και από τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \pi/3$ (σχ. 6.6ιβ).

6.6.7. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = 3x^3$.

6.6.8. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=xe^{-x}$ και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x = 5$ (σχ. 6.6ιγ).

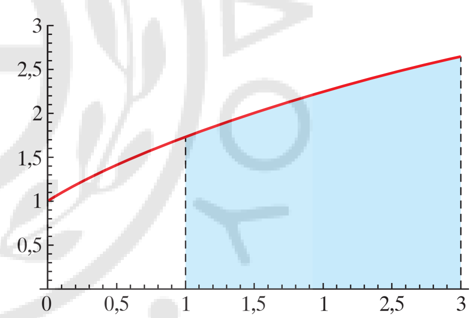
6.6.9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Να υπολογίσετε, το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ στο διάστημα $[0, 27]$.

6.6.10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=e^{x/2}+e^{-x/2}$. Να υπολογίσετε, το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ στο διάστημα $[-1,1]$.



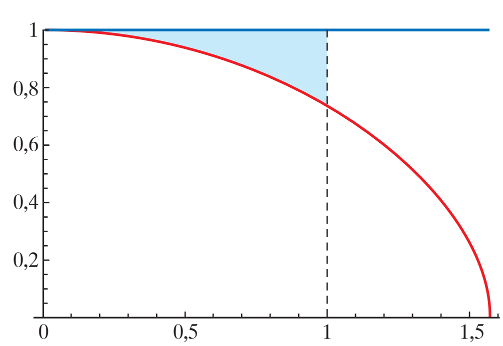
$y=$ημ$2x$

Σχ. 6.6ι.



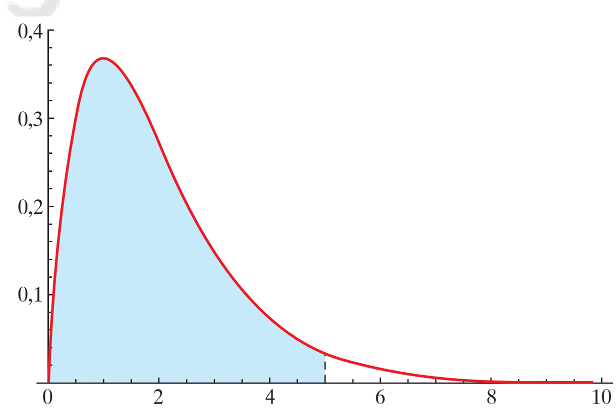
$y=\sqrt{2x+1}$

Σχ. 6.6ια.



$f(x)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$, $g(x)=1$

Σχ. 6.6ιβ.



$f(x)=xe^{-x}$

Σχ. 6.6ιγ.

6.6.11. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{2r}(e^{rx}+e^{-rx})$, όπου r είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως και να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$1+(f'(x))^2=r^2f^2(x).$$

β) Να βρείτε μια παράγουσα της συναρτήσεως $rf(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ δίνεται από την έκφραση:

$$l_f=\frac{1}{2r}\,[(e^{r\beta}+e^{-r\alpha})(e^{-r\beta}+e^{r\alpha})].$$

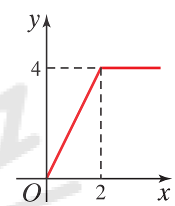
6.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

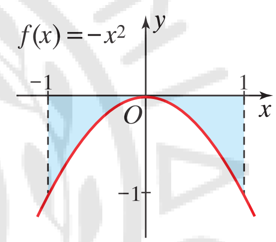
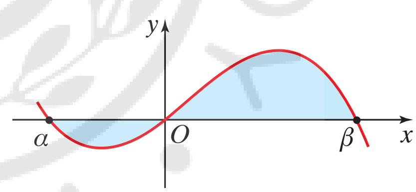
Αρχική συνάρτηση ή αντιπαράγωγος ή παράγουσα της f στο Δ.	Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση F στο Δ για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
Αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ.	$\int f(x)dx=F(x)+c,\quad c\in\mathbf{R}$ όπου F είναι μια παράγουσα της f.
Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.	α) $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$, $\lambda\in\mathbf{R}$ β) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
Ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το αόριστο ολοκλήρωμα.	$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$
Ολοκλήρωση με αντικατάσταση για το αόριστο ολοκλήρωμα.	$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$, όπου $u=g(x)$ και $du=g'(x)dx$.
Ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συναρτήσεως f από το α έως το β.	$\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)=[G(x)]_\alpha^\beta$ όπου G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.
Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.	α) $\int_\alpha^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx$ β) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$ γ) $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$ δ) Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$. ε) Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$. στ) $\left\|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right\|\le\int_\alpha^\beta \|f(x)\|dx$

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.	$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$ όπου G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.
Παράγωγος της συναρτήσεως $$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$	$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = F'(x) = f(x)$$
Ολοκλήρωση κατά παράγοντες για τα ορισμένα ολοκληρώματα.	$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$
Ολοκλήρωση με αντικατάσταση για τα ορισμένα ολοκληρώματα.	$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$$ όπου $u = g(x),\ du = g'(x)dx$.
Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.	Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $$f(\xi) = \mu_f = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta - \alpha}$$
Εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της μη αρνητικής συναρτήσεως f, από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha, x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$
Εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha, x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \lvert f(x) - g(x) \rvert dx$$
Όγκος V ενός στερεού που δημιουργείται από περιστροφή του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$$V_f = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2 dx$$
Όγκος V ενός στερεού που δημιουργείται από περιστροφή του χωρίου Ω που περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, και από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$.	$$V_{f,g} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$
Μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το α έως το β.	$$l_f = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

6.8 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\left\|x^2-1\right\|dx$ είναι ίσο με 0.	**Σ Λ**
2.	Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με $x\ln x - x + c$.	**Σ Λ**
3.	Το ολοκλήρωμα $\int \frac{2\ln x}{x}dx$ είναι ίσο με $\ln^2 x + c$.	**Σ Λ**
4.	Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in[-2,2]$ και $f(1)=g(1)+1$, τότε για κάθε $x\in[-2,2]$ ισχύει $g(x)=f(x)-1$.	**Σ Λ**
5.	Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του σχήματος 6.8α. Τότε $F'(2)=4$.  **Σχ. 6.8α.**	**Σ Λ**
6.	Για το αόριστο ολοκλήρωμα μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως f ισχύει η ισότητα $$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$	**Σ Λ**
7.	Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει $$\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$	**Σ Λ**
8.	Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$, τότε θα ισχύει $$f(x)\le g(x) \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$	**Σ Λ**
9.	Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.	**Σ Λ**
10.	Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$	**Σ Λ**
11.	Ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4-2x)dx \le \int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4-2x+x^{10}e^{-x^2})dx$, για κάθε $\alpha>0$.	**Σ Λ**
12.	Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $$\int_\alpha^\beta f'(x)xdx = [f(x)x]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$	**Σ Λ**

13.	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε και οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+e^x$ είναι παράγουσες της f.	**Σ Λ**
14.	Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο Δ, τότε για κάθε $x_0, x_1 \in \Delta$ ισχύει: $$f(x_1)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx.$$	**Σ Λ**
15.	Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύει: $$\int f'(x)dx = f(x)-c,\ c\in\mathbf{R}.$$	**Σ Λ**
16.	Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(\xi)=0$ για ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$.	**Σ Λ**
17.	Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx$ ή $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta g(x)dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx$.	**Σ Λ**
18.	Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 6.8β είναι ίσο με $\int_1^{-1} f(x)dx=E(\mathbf{\Omega})$.  **Σχ. 6.8β.**	**Σ Λ**
19.	Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 6.8γ είναι ίσο με $\int_\alpha^0 f(x)dx-\int_0^\beta f(x)dx$.  **Σχ. 6.8γ.**	**Σ Λ**
20.	Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 (x^2-2x)\,dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=x^2-2x$ και τον άξονα των x.	**Σ Λ**
21.	Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με συνεχή παράγωγο. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ από το α έως το β δίνεται από τον τύπο: $$l_f=\int_\alpha^\beta \sqrt{\lvert 1+f'(x)\rvert}\,dx.$$	**Σ Λ**

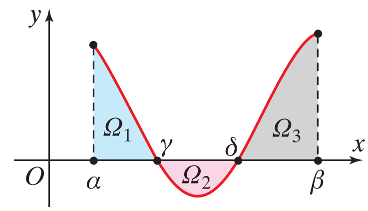
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1-x}dx$ είναι ίσο με: α) $\ln(1-x)+c$ β) $\ln(x-1)+c$ γ) $\ln\lvert 1-x\rvert+c$ δ) $\ln\lvert x\rvert+c$

2. Αν $f(x) = ημx$ και $f(0) = 1$, τότε το $f(\pi)$ ισούται με:

α) 0 β) 1 γ) 2 δ) –1

3. Έστω η συνάρτηση f του σχήματος 6.8δ. Αν τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2, Ω_3 είναι ίσα με 3, 1, 2 αντίστοιχα, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ισούται με:



Σχ. 6.8δ.

α) 4 β) 6 γ) –1 δ) 2

4. Αν $\int_0^2 (4f(x)-3)dx = 0$ τότε η μέση τιμή της συναρτήσεως f στο διάστημα $[0,2]$ είναι ίση με:

α) $\mu_f = \frac{3}{4}$ β) $\mu_f = \frac{3}{8}$ γ) $\mu_f = \frac{4}{3}$ δ) $\mu_f = 3$

5. Η μέση τιμή της σταθερής συναρτήσεως $f(x) = c$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι ίση με:

α) $(\alpha+\beta)/2$ β) μηδέν γ) c δ) $\alpha+\beta$

6. Αν F, G είναι παράγουσες της συναρτήσεως f σε ένα διάστημα Δ, τότε:

α) Η διαφορά $F - G$ είναι σταθερή συνάρτηση στο Δ.

β) Ισχύει $F' = G$ και $G' = F$.

γ) Το γινόμενο $F' \cdot G$ είναι σταθερή συνάρτηση στο Δ.

δ) Η διαφορά $F - G$ είναι ίση με $f - g$.

7. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f(0) = g(0)+1$, τότε:

α) Θα ισχύει $f(x) = g(x) - 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

β) $\int_0^1 (f(x)-g(x))dx = 1$.

γ) $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

δ) $f(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

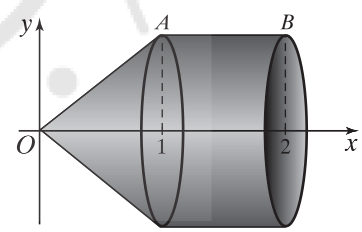
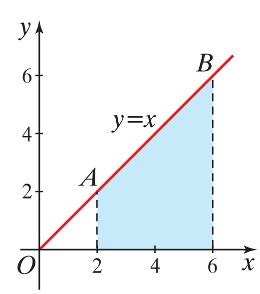
8. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0,1]$ και τον άξονα των x είναι ίσο με:

α) $\int_0^1 (x^2 - x)\,dx$ β) μηδέν γ) $\int_0^1 (x - x^2)\,dx$ δ) 1

9. Αν F είναι μία παράγουσα της συναρτήσεως f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε:

α) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta)$ β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\alpha)F(\beta)$

γ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\alpha) + F(\beta)$ δ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

10.	Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma, \in \Delta$, τότε: α) $\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\beta^\gamma f(x)dx$ β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx \neq \int_\alpha^\beta f(t)dt$ γ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f(t)dt$ δ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\alpha f(t)dt = 0$
11.	Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma, \in \Delta$, τότε: α) $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\gamma^\alpha f(t)dt$ β) $\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^\gamma f(u)du$ γ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(t)dt$ δ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_{-\beta}^{-\alpha} f(x)dx$
12.	Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\lambda \in \mathbf{R}$, τότε: α) $\int_\alpha^\beta (f(x) \circ g(x))dx = \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)\left(\int_\alpha^\beta g(x)dx\right)$ β) $\int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ γ) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = -\lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$ δ) $\int_\alpha^\beta (f(x) + g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$
13.	Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f, από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$ δίνεται από τον τύπο $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ α) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. β) Αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. γ) Για κάθε (συνεχή) συνάρτηση f. δ) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
14.	Ο όγκος V_f του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της τεθλασμένης γραμμής OAB (σχ. 6.8ε) γύρω από τον άξονα $x'x$ είναι ίσος με: α) $V = \pi\int_0^1 x^2dx + \pi\int_1^2 x^2dx$ β) $V = \pi\int_0^1 x^2dx + \pi$ γ) $V = \pi\int_0^2 (x + x^2)dx$ δ) $V = \pi + \pi\int_1^2 x^2dx$  **Σχ. 6.8ε.**
15.	Ο όγκος V_f του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος AB γύρω από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.8στ) είναι ίσος με: α) $V_f = \int_2^6 xdx$ β) $V_f = \frac{\pi}{2}\int_2^4 x^2dx$ γ) $V_f = 2\pi\int_2^4 xdx$ δ) $V_f = \int_2^6 x^2dx$  **Σχ. 6.8στ.**

6.9 Γενικές ασκήσεις.

6.9.1. Σε ένα πλοίο υπάρχει ένα αυτόματο μηχάνημα πωλήσεως αναψυκτικού, στο οποίο έχει παρατηρηθεί ότι ο ρυθμός καταναλώσεως (λόγω πωλήσεως ποτηριών αναψυκτικού στους επιβάτες του πλοίου) δίνεται από τον τύπο $A'(t) = -0{,}09\sqrt{t}$ μονάδες όγκου ανά ώρα. Αν στο πλοίο είχε γίνει κατά τον απόπλου προμήθεια 480 μονάδων όγκου αναψυκτικού, να υπολογίσετε την ποσότητα αναψυκτικού που απομένει προς διάθεση στους επιβάτες του πλοίου ως συνάρτηση του χρόνου. Στη συνέχεια να βρείτε σε πόσο χρόνο θα εξαντληθούν τα αποθέματα αναψυκτικού.

6.9.2. Δίνονται τα ολοκληρώματα $F(x) = \int_0^x e^t \text{συν}^2 t dt$ και $G(x) = \int_0^x e^t \text{ημ}^2 t dt$, $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $F(x) + G(x) = e^x - 1$, $F(x) - G(x) = \frac{1}{5}[e^x(\text{συν}2x + \text{ημ}2x) - 1]$.

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $F(x)$ και $G(x)$.

γ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_{\pi/2}^{\pi} e^t \text{συν}^2 t dt, \int_{\pi/3}^{\pi/2} e^t \text{ημ}^2 t dt.$

6.9.3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(u+1)(u+3)} du$. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

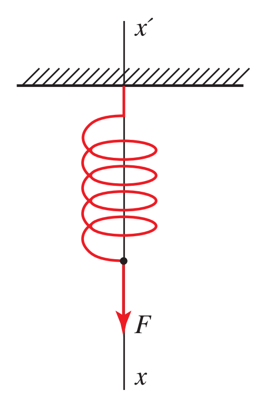
α) $\int \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x(\text{συν}x + 2)} dx$ β) $\int \frac{xe^{x^2}}{(e^{x^2} - 1)(e^{x^2} + 2)} dx$ γ) $\int \frac{x}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} dx$

6.9.4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ και $g(x) = 3x^2 - 12x + 2$.
α) Να διαπιστώσετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς – 4 ,0, 1 και 3.
β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

6.9.5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - x - 2$.
α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{a} f(x)dx$.
β) Να βρείτε τη τιμή του $α$ έτσι, ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{a} f(x)dx$ να λάβει την ελάχιστη τιμή.

6.9.6. Υποθέτομε ότι ένα σώμα κινείται πάνω σ’ έναν άξονα $x'x$ υπό την επίδραση μιας δυνάμεως με διεύθυνση τη διεύθυνση του $x'x$ και μέτρο που εξαρτάται μόνο από τη θέση x του σώματος, δηλαδή το μέτρο της περιγράφεται από μία συνεχή συνάρτηση $F(x)$ (σχ. 6.9). Αποδεικνύεται ότι το έργο της δυνάμεως κατά τη μετακίνηση του σώματος από το σημείο $x = a$ στο σημείο $x = β$ (το οποίο ονομάζεται σύντομα «έργο της δυνάμεως στο διάστημα $[α, β]$») δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$W_f = \int_{α}^{β} F(x)dx.$$



Σχ. 6.9

α) Η δύναμη που απαιτείται για την επιμήκυνση ενός ελατηρίου κατά x cm δίνεται, σύμφωνα με το νόμο του Hook από τον τύπο $F(x) = κx$, όπου $κ$ είναι μια θετική σταθερά. Αν μια δύναμη μέτρου 2 Newton προκαλεί επιμήκυνση 1 cm στο ελατήριο, να υπολογίσετε το έργο που καταναλώνεται για επιμήκυνση του ελατηρίου κατά 5 cm.

β) Δυο ηλεκτρόνια που βρίσκονται σε απόσταση x cm μεταξύ τους απωθούνται με μια δύναμη μέτρου $F(x) = κ/x^2$, όπου $κ$ είναι μια θετική σταθερά. Υποθέτομε ότι ένα ηλεκτρόνιο είναι ακίνητο σε κάποιο σημείο, ενώ ένα δεύτερο κινείται προς αυτό κατά τη διεύθυνση της ευθείας που τα ενώνει. Να βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη, όταν το δεύτερο ηλεκτρόνιο ξεκινάει από απόσταση 3 cm από το πρώτο και κινείται μέχρι να φτάσει σε απόσταση 1 cm.

6.9.7. α) Αν μια συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-a,a]$ είναι περιττή, να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

β) Αν μια συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-a,a]$ είναι άρτια, να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

γ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I_1 = \int_0^a \frac{xe^{-x}}{1+x^2+e^x}dx$, $I_2 = \int_0^a \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x + x^4}dx$.

δ) Να συγκρίνετε μεταξύ τους τα ολοκληρώματα:

$$J_1 = \int_0^2 \frac{x^2e^{-x}}{1+x^2+e^x}dx, \quad J_2 = \int_{-2}^2 \frac{x^2e^{-x}}{1+x^2+e^x}dx, \quad J_2 = \int_{-2}^0 \frac{x^2e^{-x}}{1+x^2+e^x}dx.$$

6.9.8. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^a \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt$, όπου ν είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και α ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι $I_0 = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1)$.

β) Να αποδείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{\alpha^{2\nu+2}}{2\nu+2}$.

γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt, \int_0^1 \frac{t^5}{1+t^2}dt, \int_1^2 \frac{t^3}{1+t^2}dt, \int_1^2 \frac{t^5}{1+t^2}dt.$$

6.9.9. Οι μηνιαίες αποδοχές (σε χιλιάδες ευρώ) δύο υπαλλήλων A και B σε ένα διάστημα 5 ετών μεταβάλλονται συνεχώς σύμφωνα με τους τύπους $f_A(x) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{5}{6}$, $f_B(x) = 2t+2$, όπου $t \in [0,5]$ είναι ο χρόνος (σε έτη).

α) Να προσδιορίσετε το χρονικό διάστημα $[0, t_1]$, κατά το οποίο οι αποδοχές του υπαλλήλου A είναι μικρότερες από τις αποδοχές του B.

β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_0 του διαστήματος $[0, t_1]$, κατά την οποία η διαφορά μεταξύ των αποδοχών λαμβάνει τη μέγιστη τιμή.

γ) Να υπολογίσετε τις μέσες τιμές των συναρτήσεων f_A, f_B στα διαστήματα $[0, t_0]$, $[t_0, t_1]$ και να τις συγκρίνετε. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία των αριθμών που προκύπτουν;

6.9.10. Το κατά κεφαλήν εισόδημα (σε χιλιάδες ευρώ) μιας ευρωπαϊκής χώρας για μια περίοδο 5 ετών προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη συνάρτηση $f(t) = \alpha \ln t + \beta$ όπου $t \in [1, 5]$ και α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Στο τέλος του πρώτου έτους $(t=1)$ το κατά κεφαλήν εισόδημα είναι 5000 €, ενώ ο (στιγμιαίος) ρυθμός αυξήσεως του εισοδήματος είναι 4000.

α) Να υπολογίσετε την τιμή των σταθερών α και β.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της συναρτήσεως f στο διάστημα [1, 5]. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία του αριθμού που προκύπτει;

γ) Να προσδιορίσετε το έτος, κατά το οποίο ο ρυθμός αυξήσεως του κατά κεφαλήν εισοδήματος γίνεται μέγιστος.

7

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

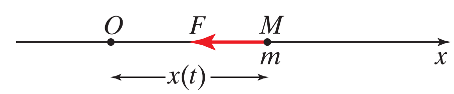
Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαγάγομε την έννοια της διαφορικής εξισώσεως. Μία εξίσωση που περιέχει μία εξαρτημένη μεταβλητή και ένα πλήθος παραγώγων αυτής ως προς μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, καλείται διαφορική εξίσωση. Θα παρουσιάσομε διάφορους τρόπους ταξινομήσεως των εξισώσεων και θα περιγράψομε μεθόδους επιλύσεως αυτών ανά κατηγορία. Επίσης, θα παρουσιάσομε διάφορες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων στη Φυσική και στη Μηχανική. Σημειώνομε, ότι οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν αντικείμενο μελέτης με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για πολλούς μαθηματικούς κατά τους τελευταίους τρεις αιώνες. Παρόλα αυτά, ακόμη και σήμερα ξεχωρίζουν ως ένα δυναμικό πεδίο έρευνας με πολλές εφαρμογές και με πολλά ενδιαφέροντα «άλυτα» προβλήματα.

7.1 Η έννοια της διαφορικής εξισώσεως.

Πολλά σημαντικά προβλήματα στη φυσική, στη χημεία, στη βιολογία, στην αστρονομία και στις κοινωνικές επιστήμες περιγράφονται με τη βοήθεια των διαφορικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα η μοντελοποίηση διαφόρων προβλημάτων που εμφανίζονται στις επιστήμες αυτές, οδηγεί σε εξισώσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν μια άγνωστη συνάρτηση και μία ή περισσότερες παραγώγους αυτής.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφορικής εξισώσεως είναι ο νόμος του Νεύτωνα. Ας θεωρήσομε ένα υλικό σημείο M μάζας m, το οποίο έλκεται από ακίνητο κέντρο O και η δύναμη F που ασκείται από το O προς αυτό είναι ανάλογη της απομακρύνσεως (σχ. 7.1). Τότε ο νόμος κινήσεως του σημείου M περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0 \tag{7.1.1}$$



Σχ. 7.1

ή ισοδύναμα $x''(t)+\omega^2 x(t)=0$, όπου $x(t)$ είναι η θέση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t και $\omega>0$ μία σταθερά.

Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφορικής εξισώσεως είναι η εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt}=-kt \tag{7.1.2}$$

ή ισοδύναμα $x'(t)+k\,t=0$, όπου $x(t)$ εκφράζει την ποσότητα ενός προϊόντος που παράγεται σε μια χημική αντίδραση τη χρονική στιγμή t και k είναι μία σταθερά.

Στις εξισώσεις (7.1.1), (7.1.2), για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συναρτήσεως $x(t)$ ως προς t χρησιμοποιήσαμε τους συμβολισμούς

$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dt} \quad \text{και} \quad x''(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ αντίστοιχα.}$$

Στη συνέχεια, για μια συνάρτηση $y=y(x)$ θα συμβολίζομε την πρώτη παράγωγο της $y=y(x)$ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x με:

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad (\text{αντί } y'(x)=\frac{dy(x)}{dx})$$

τη δεύτερη ως προς x με:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \quad (\text{αντί } y''(x)=\frac{d^2y(x)}{dx^2}) \text{ κ.ο.κ.,}$$

δηλαδή, από εδώ και στο εξής, θα παραλείπεται από τους συμβολισμούς η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Στα προηγουμενα παραδείγματα είναι προφανές ότι η άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ που εμφανίζεται στην εξίσωση εξαρτάται από μία μόνο *ανεξάρτητη* μεταβλητή, το χρόνο t. Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση καλείται ***συνήθης διαφορική εξίσωση***. Αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η εξίσωση καλείται ***διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων***.

Παράδειγμα διαφορικής εξισώσεως μερικών παραγώγων αποτελεί η εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{7.1.3}$$

όπου $u=u(x,y)$ η άγνωστη συνάρτηση με τις $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ να συμβολίζουν τις μερικές παραγώγους της

$u = u(x,y)$ ως προς x και y αντίστοιχα. Μία τέτοια εξίσωση περιγράφει την κατανομή θερμοκρασίας σε μια ομογενή πλάκα.

Επί πλέον παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων είναι τα επόμενα

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x}, \qquad \frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

όπου οι τρεις πρώτες είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με $y = y(x)$ και η τελευταία μερική διαφορική εξίσωση με $w = w(x,y,z)$.

Θα συνεχίσομε την παρουσίασή μας δίνοντας ορισμένους απαραίτητους ορισμούς και τρόπους ταξινομήσεως για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

> Μια ***συνήθης διαφορική εξίσωση*** είναι μία εξίσωση που περιέχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή x, μία άγνωστη συνάρτηση αυτής $y = y(x)$ και έναν πεπερασμένο αριθμό παραγώγων $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ της y ως προς x.

Δηλαδή μια συνήθης διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \quad n \geq 1, \quad y = y(x), \tag{7.1.4}$$

ή ισοδύναμα

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0, \quad n \geq 1, \quad y = y(x). \tag{7.1.5}$$

όπου F είναι μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται σε μια διαφορική εξίσωση, τόσο πιο δύσκολη είναι συνήθως η επίλυσή της. Για το λόγο αυτό η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζεται σ' αυτήν ονομάζεται ***τάξη*** μιας διαφορικής εξισώσεως.

Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^2y + 3x - 1 = 0$$

είναι μια εξίσωση δεύτερης τάξεως, ενώ η εξίσωση $y''' + 3y'' + y' + 1 = 0$ είναι μια διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως κ.ο.κ..

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσομε διάφορες μεθόδους επιλύσεως συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Με τον όρο επίλυση μιας διαφορικής εξισώσεως εννοούμε τη διαδικασία, με την οποία βρίσκομε συναρτήσεις που επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι η συνάρτηση $y = e^{2x}$ αποτελεί λύση της εξισώσεως $y'' - 5y' + 6y = 0$, αφού για $y = e^{2x}$ έχομε:

$$y'' - 5y' + 6y = (e^{2x})'' - 5(e^{2x})' + 6e^{2x} = 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0.$$

Το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση $y = x^2$ όσον αφορά τη διαφορική εξίσωση $y' - 2x = 0$. Πράγματι για $y = x^2$ έχομε:

$$y' - 2x = (x^2)' - 2x = 2x - 2x = 0.$$

Γενικά δίνομε τον παρακάτω ορισμό:

Μία συνάρτηση $y: A \to \mathbf{R}$ λέγεται ***λύση*** της διαφορικής εξισώσεως (7.1.4) αν:
α) Η y έχει παραγώγους μέχρι και n-τάξεως και
β) η συνάρτηση y ικανοποιεί την (7.1.4) για κάθε $x \in A$, δηλαδή ισχύει:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)\right) = 0, \text{ για κάθε } x \in A.$$

Το πεδίο ορισμού A της λύσεως $y: A \to \mathbf{R}$ είναι συνήθως ένα διάστημα της μορφής (α, β), $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ή ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, \beta)$, $(-\infty, \beta]$, $(-\infty, +\infty)$.

Ένα ερώτημα που θα μπορούσε να τεθεί όσον αφορά σε μια διαφορική εξίσωση είναι: Πόσες λύσεις μπορεί να έχει μία συνήθης διαφορική εξίσωση;

Ας θεωρήσομε τη διαφορική εξίσωση $y' = x^{-1/2}$, $x \in (0, +\infty)$, η οποία γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}.$$

Κάθε συνάρτηση της μορφής $y(x) = 2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbf{R}$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, αφού:

$$\frac{dy}{dx} = (2\sqrt{x} + c)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχομε άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μία αυθαίρετη σταθερά $c \in \mathbf{R}$. Η οικογένεια των συναρτήσεων

$$y(x) = 2\sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbf{R} \tag{7.1.6}$$

καλείται ***γενική λύση*** της διαφορικής εξισώσεως. Γενικά κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής (7.1.4) με $n \geq 1$ έχει άπειρες λύσεις.

Από το παραπάνω παράδειγμα καθίσταται φανερό ότι η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως που εξετάστηκε είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά). Αντίστοιχα αποδεικνύεται, ότι η γενική λύση μιας διαφορικής εξισώσεως δεύτερης τάξεως είναι μια διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές) κ.ο.κ.. Αν στη γενική λύση (7.1.6) δώσομε μια συγκεκριμένη τιμή στη σταθερά $c \in \mathbf{R}$, τότε προκύπτει μια συγκεκριμένη λύση η οποία ονομάζεται ***μερική λύση*** της διαφορικής εξισώσεως. Έτσι η μερική λύση που αντιστοιχεί στην τιμή $c = 1$ είναι η:

$$y(x) = 2\sqrt{x} + 1.$$

Επίσης, αν ζητήσομε τη μερική λύση που επαληθεύει τη συνθήκη $y(1) = 2$, τότε από την (7.1.6) προκύπτει ότι:

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 2\sqrt{1} + c \Rightarrow c = 0.$$

Συνεπώς, η μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως $\dfrac{dy}{dx} = x^{-1/2}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(1) = 2$ είναι η $y(x) = 2\sqrt{x}$.

Γενικά δίνομε τους επόμενους ορισμούς:

Θα λέμε ότι η συνάρτηση

$$y = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n) \tag{7.1.7}$$

που εξαρτάται από τις n σταθερές $c_1, \ldots, c_n$ είναι η ***γενική λύση*** της διαφορικής εξισώσεως (7.1.4), όταν:

α) Για κάθε σημείο $(c_1, ..., c_n)$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου Δ του $\mathbf{R}^n$ η (7.1.7) αποτελεί λύση, μια μερική λύση της, (7.1.4) και

β) για οποιοδήποτε σημείο $(x_o, y_o, y_1, ..., y_{n-1})$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου του πεδίου ορισμού της F, υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $(c_1, ..., c_n)$ του Δ, ώστε η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(x_o) = y_o,..., y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1}$.

Κάθε λύση μιας διαφορικής εξισώσεως η οποία προκύπτει από τη γενική λύση της, όταν στις αυθαίρετες σταθερές που περιλαμβάνει δοθούν συγκεκριμένες πραγματικές τιμές, καλείται ***μερική λύση*** αυτής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.1

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y = 0$.

α) Να προσδιορίσετε την τάξη της παραπάνω εξισώσεως.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = \text{συν}2x + \text{ημ}2x$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως.

γ) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

δ) Να βρείτε τη μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(0) = 1 \text{ και } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση είναι η δεύτερη (ο όρος y''), συνεπώς η διαφορική εξίσωση είναι τάξεως 2.

β) Παραγωγίζομε τη συνάρτηση $y = \text{συν}2x + \text{ημ}2x$ ως προς x δύο φορές και παίρνομε:

$$y' = -2\text{ημ}2x + 2\text{συν}2x, \quad y'' = -4\text{συν}2x - 4\text{ημ}2x = -4(\text{συν}2x + 4\text{ημ}2x) = -4y.$$

Από την τελευταία προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

γ) Παραγωγίζομε τη συνάρτηση $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ δύο φορές ως προς x και παίρνομε:

$$y'' = -4c_1\,\text{συν}2x - 4c_2\,\text{ημ}2x.$$

Με αντικατάσταση των y και y'' στο πρώτο μέλος της αρχικής διαφορικής εξισώσεως βρίσκομε:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= -4c_1\,\text{συν}2x - 4c_2\,\text{ημ}2x + 4(c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x) = \\ &= -4c_1\,\text{συν}2x - 4c_2\,\text{ημ}2x + 4c_1\,\text{συν}2x + 4c_2\,\text{ημ}2x = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

δ) Με χρήση της συνθήκης $y(0) = 1$ για την $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ έχομε:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1\,\text{συν}0 + c_2\,\text{ημ}0 = 1 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Επί πλέον αν χρησιμοποιήσομε και τη δεύτερη συνθήκη $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ σε συνδυασμό με την $c_1 = 1$, προκύπτει:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow c_1\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2} - 1.$$

Τελικά, η μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως που ικανοποιεί τις δύο δοθείσες συνθήκες δίνεται από τον τύπο $y = \text{συν}2x + (\sqrt{2}-1)\,\text{ημ}2x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.2.

Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση $y = x\text{εφ}x$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως $xy' = y + x^2 + y^2$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = x\text{εφ}x$ είναι το $A = \{x \in \mathbf{R}\text{: συν}x \neq 0\}$. Αν παραγωγίσομε την $y = x\text{εφ}x$ ως προς x βρίσκομε:

$$y' = (x\text{εφ}x)' = x'\text{εφ}x + x(\text{εφ}x)' = \text{εφ}x + \frac{x}{\text{συν}^2 x},$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση στο πρώτο μέλος της διαφορικής εξισώσεως που δόθηκε προκύπτει:

$$xy' = x\left(\text{εφ}x + \frac{x}{\text{συν}^2 x}\right) = x\text{εφ}x + \frac{x^2}{\text{συν}^2 x}.$$

Ομοίως αντικαθιστώντας την έκφραση $y = x\text{εφ}x$ στο δεύτερο μέλος της εξισώσεως προκύπτει:

$$y + x^2 + y^2 = x\text{εφ}x + x^2 + x^2\text{εφ}^2 x = x\text{εφ}x + x^2(1 + \text{εφ}^2 x) = x\text{εφ}x + \frac{x^2}{\text{συν}^2 x}.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνομε ότι η συνάρτηση $y = x\text{εφ}x$ αποτελεί πράγματι λύση της διαφορικής εξισώσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.3.

Μία καλλιέργεια βακτηρίων πολλαπλασιάζεται, με ρυθμό που είναι ανάλογος του αριθμού $P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας τη χρονική στιγμή t. Ας συμβολίσομε με q το συντελεστή αναλογίας μεταξύ του ρυθμού αυξήσεως των βακτηρίων και του πληθυσμού των βακτηρίων (η ποσότητα αυτή προσδιορίζεται συνήθως από εργαστηριακές μετρήσεις).

α) Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί ο αριθμός $P = P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας και να διαπιστώσετε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $P(t) = e^{c+qt}$, $c \in \mathbf{R}$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως.

β) Να εκφράσετε τον αριθμό $P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας τη χρονική στιγμή $t = 10$ sec συναρτήσει του αρχικού πληθυσμού $P(0)$.

γ) Αν σε μια καλλιέργεια τη χρονική στιγμή $t = 1$ sec ο αριθμός των βακτηρίων είναι 100, τότε να βρείτε τον αρχικό πληθυσμό των βακτηρίων.

Λύση.

α) Γνωρίζομε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συναρτήσεως $P(t)$ είναι ίσος με $P'(t) = \dfrac{dP}{dt}$. Επομένως, σύμφωνα με την εκφώνηση, θα έχομε $\dfrac{dP}{dt} = qP$, όπου q η σταθερά αναλογίας. Κάθε συνάρτηση της μορφής $P(t) = e^{c+qt}$, $c \in \mathbf{R}$, ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, αφού ισχύει:

$$\frac{dP}{dt} = (e^{c+qt})' = e^c\,(e^{qt})' = e^c\,q\,e^{qt} = qe^{c+qt} = qP\,.$$

β) Η λύση της διαφορικής εξισώσεως που δόθηκε στο ερώτημα (α) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(t) = e^{c+qt} = e^c e^{qt} = P_0\,e^{qt}\,,$$

όπου $P_0 = e^c$. Ο αρχικός πληθυσμός των βακτηρίων της καλλιέργειας δίνεται από την τελευταία σχέση για $t = 0$, δηλαδή έχομε:

$$P(0) = P_0\,e^{q\cdot 0} \Rightarrow P(0) = P_0\,.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 10$ sec, ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι $P(10) = P_0\,e^{q\cdot 10} \Rightarrow P(10) = P_0\,e^{10q}$, όπου $P_0 = e^c$ ο αρχικός πληθυσμός βακτηρίων της καλλιέργειας.

γ) Στην περίπτωση αυτή δίνεται $P(1) = 100$, οπότε θα έχομε:

$$P(1) = 100 \Rightarrow P_0\,e^q = 100 \Rightarrow P_0 = \frac{100}{e^q} = 100e^{-q}\,.$$

Ασκήσεις.

7.1.1. Να προσδιορίσετε την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

α) $y' + 2xy = e^{-x}$ β) $y^{(4)} + 4y''' + 3y = x$

γ) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ δ) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 1$

7.1.2. Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι λύσεις των αντιστοίχων διαφορικών εξισώσεων.

α) $y = x^2 + c\,,\quad y' = 2x$ β) $y = c\,x^2\,,\quad xy' = 2y$ γ) $y^2 = e^{2x} + c\,,\quad yy' = e^{2x}$

δ) $y = e^{3x} + e^x\,,\quad y'' - 4y' + 3y = 0,$ ε) $y = \dfrac{1}{1-x^2}\,,\quad y' = 2xy^2$ στ) $y = ce^{y/x}\,,\quad y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$

ζ) $y^2 = x^2 - cx\,,\quad 2xyy' = x^2 + y^2$

7.1.3. Έστω η διαφορική εξίσωση $y' = 2xy,\ \ y > 0$.

α) Να προσδιορίσετε την τάξη της παραπάνω εξισώσεως.

β) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = 4e^{x^2}$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = c\,e^{x^2}$, $c \in \mathbf{R}$ είναι η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως.

δ) Να βρείτε τη μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(2) = 1$.

7.1.4. Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = c_1 e^{-x}$ συν$x + c_2 e^{-x}$ ημx είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως $y'' + 2y' + 2y = 0$. Στη συνέχεια να βρείτε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(\pi) = 0$.

7.1.5. Κατά την κίνηση ενός σώματος επάνω σ' έναν άξονα $x'x$ διαπιστώθηκε ότι η στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t)$ είναι ανάλογη του χρόνου t. Αν συμβολίσομε με $S(t)$ τη συνάρτηση θέσης του κινητού, γνωρίζομε ότι ισχύει $S'(t) = \upsilon(t)$.

α) Να βρείτε τη θέση του κινητού συναρτήσει του χρόνου t.

β) Να βρείτε τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 7$ sec, συναρτήσει της αρχικής θέσεως του κινητού (δηλ. της θέσεως του τη χρονική στιγμή $t = 0$).

γ) Να βρείτε ποια θα είναι η αρχική θέση του κινητού, αν ισχύει $S(1) = 10$.

7.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.

Αρκετά συχνά πολλά προβλήματα της μηχανικής, της οικονομίας, της βιολογίας κ.λπ. οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν την άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$, την πρώτη παράγωγο $y' = f'(x)$ και την ανεξάρτητη μεταβλητή x. Μία τέτοια διαφορική εξίσωση είναι της μορφής (7.1.4) που αντιστοιχεί στην τιμή $n=1$, δηλαδή έχει τη μορφή:

$$F(x,y,y')=0, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right). \tag{7.2.1}$$

Τέτοιες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 7.1, ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, θα μελετηθούν στην παρούσα παράγραφο.

Ας θεωρήσομε αρχικά την απλή περίπτωση, κατά την οποία η (7.2.1) μπορεί να επιλυθεί ως προς $\frac{dy}{dx}$, δηλαδή

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{7.2.2}$$

όπου $f(x,y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Παράδειγμα τέτοιας διαφορικής εξισώσεως αποτελεί η

$$y'(x)=\frac{2y}{x}, \qquad x\neq 0. \tag{7.2.3}$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$y=c\,x^2, \tag{7.2.4}$$

διαπιστώνομε εύκολα με αντικατάσταση της y και της παραγώγου της y', στην (7.2.3), ότι αποτελεί λύση της για κάθε τιμή της σταθεράς $c\in\mathbf{R}$. Πράγματι για το πρώτο μέλος της (7.2.3) έχομε:

$$y'=(c\,x^2)'=2c\,x,$$

ενώ επίσης με αντικατάσταση της y στο δεύτερο μέλος της (7.2.3) προκύπτει και πάλι

$$\frac{2y}{x}=\frac{2c\,x^2}{x}=2c\,x.$$

Στην περίπτωση αυτή μπορέσαμε να βρούμε μια λύση της διαφορικής εξισώσεως, στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή y εκφράζεται συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής x μέσω ενός συγκεκριμένου τύπου.

Ας θεωρήσομε στη συνέχεια τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x)=\frac{1-y^2}{xy}. \tag{7.2.5}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι κάθε συνάρτηση y, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$xy=\ln y+c, \tag{7.2.6}$$

αποτελεί λύση της (7.2.5) για κάθε τιμή της σταθεράς $c\in\mathbf{R}$, χωρίς ωστόσο από την έκφραση αυτή να μπορούμε να εκφράσομε το y συναρτήσει του x. Πράγματι, παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x, προκύπτει:

$$xy'+y=\frac{1}{y}\Leftrightarrow xy'=\frac{1-y^2}{y}\Leftrightarrow y'=\frac{1-y^2}{xy}.$$

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι μερικές φορές η λύση y είναι δύσκολο ή και αδύνατο να εκφραστεί ακριβώς συναρτήσει μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Η μορφή (7.2.6) λέμε ότι δίνει τη λύση της εξισώσεως σε ***πεπλεγμένη μορφή***.

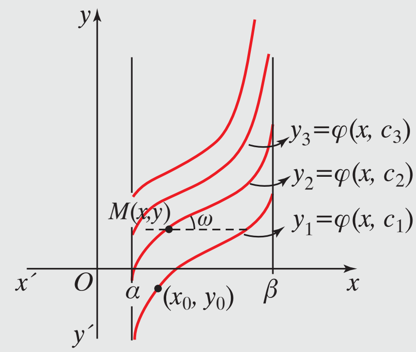
Γενικά, όταν θεωρούμε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως της μορφής $y'(x) = f(x, y), x \in A$, τότε οι λύσεις αυτής μπορεί να δίνονται στη μορφή:

$$y = \Phi(x, c), \quad x \in A, \ c \in \mathbf{R} \tag{7.2.7}$$

ή σε πεπλεγμένη μορφή

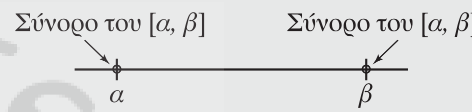
$$\Phi(x, y, c) = 0, \ x \in A, \ c \in \mathbf{R}. \tag{7.2.8}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω λύσεων δίνονται στο σχήμα 7.2α.



Σχ. 7.2α.

Οι λύσεις αυτές αποτελούν μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών, ονομάζονται ***ολοκληρωτικές καμπύλες*** της διαφορικής εξισώσεως και έχουν την ιδιότητα, ότι σε κάθε σημείο τους $M(x, y)$, η κλίση της εφαπτομένης τους ικανοποιεί τη συνθήκη $y' = \text{εφ}\omega = f(x, y)$ [ω είναι η γωνία που σχηματίζεται – κινούμενοι κατά τη θετική φορά, δηλ. αντίθετα από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού – μεταξύ του άξονα Ox και της εφαπτομένης της συναρτήσεως f στο σημείο $M(x, y)$].



Σχ. 7.2β.

Πολλές φορές, όταν έχομε μία διαφορική εξίσωση, ενδιαφερόμαστε όχι μόνο να βρούμε τη γενική λύση της, αλλά μια συγκεκριμένη λύση που ικανοποιεί κάποια δεδομένη ***αρχική συνθήκη***. Αν διαθέτομε μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως $y' = f(x, y)$, συνήθως αναζητούμε μια λύση $y = y(x)$ η οποία για $x = x_0$ να παίρνει την τιμή $y_0 = y(x_0)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχομε ένα ***πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)***. ΄Ετσι στη γενική λύση (7.2.4) του προηγούμενου παραδείγματος, αν αναζητήσομε τη λύση της διαφορικής εξισώσεως που περνά από το σημείο (1, 2), θα έχομε την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$, οπότε $2 = c \cdot 1^2 \Rightarrow c = 2$. Επομένως η μερική λύση της που περνά από το σημείο (1, 2), θα είναι η $y(x) = 2x^2$.

Γενικότερα, σε μια διαφορική εξίσωση n τάξεως της μορφής:

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad y = y(x), \quad n \geq 1,$$

ένα πρόβλημα αρχικών τιμών αναφέρεται σε συνθήκες που ικανοποιεί η άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και οι παράγωγοι μέχρι $(n-1)$ τάξεως στο ίδιο σημείο $x_0 \in A$ [όπου A το πεδίο ορισμού της $y(x)$], δηλαδή,

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Αντίστοιχα, ορίζεται ένα ***πρόβλημα συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.)*** για μια διαφορική εξίσωση n τάξεως, το οποίο αναφέρεται σε κάποιες συνθήκες, που ικανοποιούν η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ και οι παράγωγοί της μέχρι n–1 τάξεως στα άκρα ενός διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Οι συνθήκες αυτές ονομάζονται ***συνοριακές*** γιατί αναφέρονται στο σύνορα (άκρα) του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ (σχ. 7.2β).

Συνοψίζοντας, αναφέρομε ότι όταν ζητάμε την επίλυση μιας διαφορικής εξισώσεως, εννοούμε να βρούμε τη γενική λύση της, η οποία ή να έχει τη μορφή (7.2.4) (ακριβής μορφή) ή τη μορφή (7.2.6) (πεπλεγμένη μορφή). Κατά την επίλυση μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως υπεισέρχεται μία σταθερά c, που καθορίζει τις ολοκληρωτικές καμπύλες της εξισώσεως. Σε κάθε τιμή της σταθεράς αυτής αντιστοιχεί μία μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως. Επί πλέον, μερικές φορές ζητείται η μερική λύση μιας διαφορικής εξισώσεως που περνά από κάποιο συγκεκριμένο σημείο $M(x_0, y_0)$. Τότε προσδιορίζομε την τιμή της σταθερής c, βάζοντας στη γενική λύση $y = \Phi(x, c)$, όπου $x = x_0$ και $y = y_0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.1.

΄Εστω η διαφορική εξίσωση:

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad xy \neq 0 \tag{7.2.9}$$

α) Να επιλύσετε και να βρείτε τη μερική λύση της που περνά από το σημείο (2, 1).

β) Να σχεδιάσετε τις ολοκληρωτικές καμπύλες της.

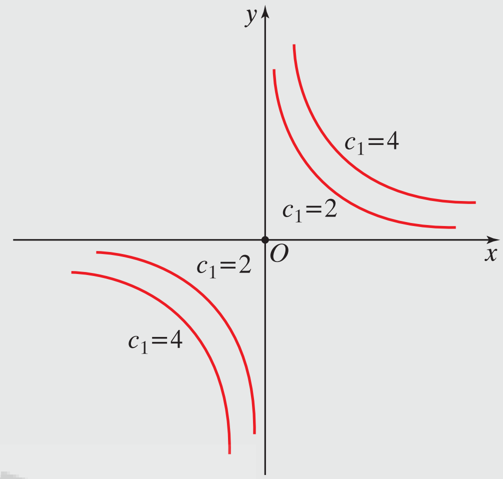
Λύση.

α) Αν γράψομε την (7.2.9) έτσι, ώστε στο αριστερό μέλος της να υπάρχει μόνο η μεταβλητή y και στο δεξί μόνο η μεταβλητή x, θα έχομε:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad xy \neq 0.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας παίρνομε $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + c'$, και θέτοντας $c' = |n|c|$ προκύπτει:

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow |y| = \left|\frac{c}{x}\right|, \quad c \in \mathbf{R}.$$

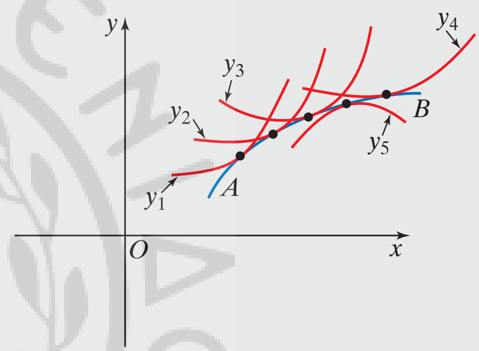


Σχ. 7.2γ.

Η τελευταία εξίσωση δίνει τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως $y = \pm\frac{c}{x} \Rightarrow y = \frac{c_1}{x}$.

Χρησιμοποιώντας τώρα την αρχική συνθήκη $y(2) = 1$, βρίσκομε ότι $c_1 = 2$, και συνεπώς η μερική λύση που ζητάμε είναι η $y = \frac{2}{x}$.

β) Από τη μορφή της γενικής λύσεως προκύπτει ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες της εξισώσεως αποτελούν ***υπερβολές***, όπως αυτές φαίνονται στο σχήμα 7.2γ



Σχ. 7.2δ.

Ας γυρίσομε πάλι στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως $y'(x) = f(x,y), \quad x \in A$ και ας θεωρήσομε εκείνη την περίπτωση που μπορεί να υπάρξει μία καμπύλη AB στο επίπεδο τέτοια, ώστε σε κάθε σημείο της να εφάπτεται μία ολοκληρωτική καμπύλη της διαφορικής εξισώσεως $y' = f(x,y)$ (σχ. 7.2δ). Μια τέτοια καμπύλη ονομάζεται ***περιβάλλουσα*** της οικογένειας των ολοκληρωτικών καμπυλών της διαφορικής εξισώσεως $y' = f(x,y)$ και αποτελεί και η ίδια ολοκληρωτική καμπύλη (λύση) αυτής.

Μία λύση της διαφορικής εξισώσεως $y' = f(x,y), x \in A$, το γράφημα της οποίας είναι τέτοιο, ώστε σε κάθε σημείο του να εφάπτεται τουλάχιστον μία ακόμη ολοκληρωτική καμπύλη της διαφορικής εξισώσεως, ονομάζεται ***ιδιάζουσα λύση***.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια περιβάλλουσα της οικογένειας των ολοκληρωτικών καμπυλών της $y' = f(x,y)$ είναι μία ιδιάζουσα λύση της. Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα δείξομε επίσης ότι μία ιδιάζουσα λύση μιας διαφορικής εξισώσεως μπορεί να μην προκύπτει από τη γενική λύση της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.2.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$y^2[1+(y')^2] = a^2, \quad a > 0. \tag{7.2.10}$$

Λύση.

Λύνοντας την (7.2.10) ως προς y' παίρνομε:

$$y^2 + y^2(y')^2 = a^2 \Rightarrow y^2(y')^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow (y')^2 = \frac{a^2 - y^2}{y^2},$$

οπότε:

$$y' = \pm\sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}}. \tag{7.2.11}$$

Έτσι η δοθείσα διαφορική εξίσωση ανάγεται σε διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y' = f(x,y), \quad \text{με} \quad f(x,y) = \pm\frac{1}{y}\sqrt{a^2 - y^2}, \qquad y = y(x)\,.$$

Υποθέτοντας τώρα ότι $\sqrt{a^2 - y^2} \neq 0$, μπορούμε να γράψομε την εξίσωση ως εξής:

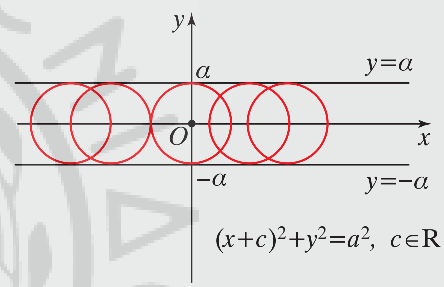
$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{y}\sqrt{a^2 - y^2} \Leftrightarrow \frac{y}{\pm\sqrt{a^2 - y^2}}dy = 1\cdot dx \qquad (7.2.12)$$

και ολοκληρώνοντας την τελευταία κατά μέλη παίρνομε:

$$\int \frac{y}{\pm\sqrt{a^2 - y^2}}dy = \int dx + c \Rightarrow \pm\sqrt{a^2 - y^2} = x + c \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2, \quad c \in \mathbf{R}\,. \qquad (7.2.13)$$

Η (7.2.13) είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια κύκλων ακτίνας a, τα κέντρα των οποίων είναι τα σημεία $(c,0)$ του άξονα Ox. Για κάθε τιμή της παραμέτρου $c \in \mathbf{R}$ έχομε και διαφορετικό κέντρο (σχ. 7.2ε). Επειδή $c \in \mathbf{R}$, τα κέντρα $(c,0)$ των περιφερειών κύκλου σαρώνουν ολόκληρο τον άξονα Ox. Από κάθε σημείο της ζώνης που ορίζεται από τις ευθείες $y = a$ και $y = -a$ διέρχονται δύο περιφέρειες, δηλαδή δύο ολοκληρωτικές καμπύλες της διαφορικής εξισώσεως (7.2.11). Επί πλέον παρατηρούμε ότι οι ευθείες $y = a$, $y = -a$ αποτελούνται μόνο από σημεία επαφής με τις περιφέρειες (7.2.13), δηλ. είναι περιβάλλουσες των περιφερειών αυτών και επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό, είναι ιδιάζουσες λύσεις της αρχικής διαφορικής εξισώσεως. Οι λύσεις $y = \pm a$, δεν προκύπτουν από τη γενική λύση $(x+c)^2 + y^2 = a^2$ και είχαν απωλεσθεί (ή χαθεί) κατά τη μετάβαση από τη διαφορική εξίσωση (7.2.11) στην (7.2.12). Συνεπώς, το σύνολο λύσεων της αρχικής διαφορικής εξισώσεως (7.2.10) αποτελείται από τις περιφέρειες $(x+c)^2 + y^2 = a^2$ και τις ευθείες $y = \pm a$.



Σχ. 7.2ε.

Στη συνέχεια θα περιγράψομε την απλούστερη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Δίνομε τον παρακάτω ορισμό:

Ονομάζομε διαφορική εξίσωση ***χωριζομένων μεταβλητών*** μια διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, της οποίας το δεύτερο μέλος αποτελείται από δύο παράγοντες που ο ένας εξαρτάται από το x και ο άλλος από το y. Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x)\cdot M(y)\frac{dy}{dx} + Q(x)\cdot N(y) = 0 \qquad (7.2.14)$$

μπορεί με κατάλληλες προϋποθέσεις να πάρει την προηγούμενη μορφή.

Αν υποθέσομε ότι $N(y) \neq 0, P(x) \neq 0$, τότε η διαφορική εξίσωση (7.2.14) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$\frac{M(y)}{N(y)}dy = -\frac{Q(x)}{P(x)}dx,$$

στην οποία έχουν διαχωριστεί οι μεταβλητές x και y στα δύο μέλη της εξισώσεως (εκεί οφείλεται και η ονομασία της κατηγορίας αυτής διαφορικών εξισώσεων). Για να επιλύσομε την τελευταία, αρκεί να ολοκληρώσομε και τα δύο μέλη της, οπότε έχομε:

$$\int \frac{M(y)}{N(y)} dy = -\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx + c, \quad c \in \mathbf{R}. \tag{7.2.15}$$

Σημειώνεται ότι αν η $y = \beta$ είναι ρίζα της εξισώσεως $N(y) = 0$, τότε και η σταθερά συνάρτηση $y = \beta$ είναι επίσης λύση της διαφορικής εξισώσεως (7.2.14).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.3.

Να επιλύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση $y' = x^{-1/2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση γράφεται σε μορφή χωριζομένων μεταβλητών, ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2} \Leftrightarrow dy = x^{-1/2} dx.$$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας παίρνομε $\int dy = \int x^{-1/2} dx \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbf{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.4.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $e^y \dfrac{dy}{dx} - (x + x^3) = 0$.

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση γράφεται σε μορφή χωριζομένων μεταβλητών ως εξής:

$$e^y\, dy = (x + x^3)\, dx.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας βρίσκομε:

$$\int e^y dy = \int (x + x^3) dx \Leftrightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c\right), \quad c \in \mathbf{R}.$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι η $y(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + c\right)$, $c \in \mathbf{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.5.

Να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = k(a - y)(\beta - y), \quad y(0) = 0, \tag{7.2.16}$$

όπου α, β, k είναι γνωστές και σταθερές με $\beta > a > 0$, $k > 0$.

Λύση.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\frac{dy}{(a - y)(\beta - y)} = k dx$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχομε:

$$\int \frac{dy}{(a-y)(\beta-y)} = \int k\,dx + c. \tag{7.2.17}$$

Εφαρμόζοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του πρώτου μέλους, παίρνομε:

$$\frac{1}{(a-y)(\beta-y)} = \frac{1}{\beta-a}\cdot\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-\beta}\cdot\frac{1}{\beta-y} \tag{7.2.18}$$

Με αντικατάσταση της (7.2.18) στην (7.2.17) προκύπτει:

$$\frac{1}{\beta-a}\int\frac{1}{(a-y)}dy + \frac{1}{\beta-a}\int\frac{1}{(\beta-y)}dy = kx + c \Rightarrow \frac{1}{a-\beta}\ln|a-y| - \frac{1}{a-\beta}\ln|\beta-y| = kx + c_1,$$

απ' όπου καταλήγομε στην ισότητα $\frac{y-a}{y-\beta} = e^{kx(a-\beta)}e^{c\,(a-\beta)}$. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς y, προκύπτει ότι η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (7.2.16) δίνεται από την έκφραση:

$$y(x) = \frac{a-\beta\,c\,e^{(a-\beta)kx}}{1-c\,e^{(a-\beta)kx}}, \tag{7.2.19}$$

όπου $c = e^{c_1(a-\beta)}$. Αν επί πλέον $(a-y)(\beta-y)=0$, τότε και οι συναρτήσεις $y=a,\ y=\beta$ [με αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση (7.2.16)], προκύπτει ότι είναι λύσεις αυτής.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0)=0$, από την γενική λύση (7.2.19) προκύπτει ότι:

$$y(0)=0 \Rightarrow 0 = \frac{a-\beta\,c\,e^{(a-\beta)k\cdot 0}}{1-c\,e^{(a-\beta)k\cdot 0}} \Rightarrow c = \frac{a}{\beta}$$

και με αντικατάσταση της σταθεράς c στην (7.2.19) παίρνομε τη μερική λύση $y(x) = \frac{a\beta[1-e^{(a-\beta)kx}]}{\beta-ae^{(a-\beta)kx}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.6.

Υποθέτομε ότι η αξία ενός DVD player για home cinema δίνεται από την εξαρτημένη μεταβλητή $y = y(x)$, όπου x τα χρόνια εμφανίσεώς του στην αγορά. Έχει παρατηρηθεί ότι η $y = y(x)$ μειώνεται με ρυθμό που είναι ίσος με την τρέχουσα τιμή του player.

α) Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $y = y(x)$.

β) Να βρείτε τη γενική λύση της.

γ) Αν υποθέσομε ότι στην αγορά του home cinema εμφανίζεται το υψηλής τεχνολογίας Hi-End DVD, με τιμή 2599 €, τότε να βρείτε ποια θα είναι η αξία του ύστερα από ένα χρόνο.

Λύση.

α) Αφού ο ρυθμός μειώσεως της τιμής του DVD player ισούται με την τρέχουσα τιμή του, η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $y = y(x)$ είναι η $\frac{dy}{dx} = -y(x)$.

β) Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται στη μορφή $\frac{dy}{y} = -dx$.

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχομε:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx \Leftrightarrow \ln y = -x + c' \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{-x+c'} \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{c'}\, e^{-x} \Leftrightarrow y = c\, e^{-x},$$

όπου θέσαμε $e^{c'} = c$. Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι η $y(x) = c e^{-x}$, $c \in \mathbf{R}$.

γ) Αν τώρα στην αγορά του home cinema εμφανιστεί το υψηλής τεχνολογίας DVD player, με τιμή 2599 €, η αρχική συνθήκη που θα έχομε γι' αυτό είναι η $y(0) = 2599$.

Επομένως, η τελευταία σε συνδυασμό με τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως δίνει:

$$y(0) = 2599 \Rightarrow 2599 = c\, e^{-0} \Rightarrow c = 2599.$$

Άρα η μερική λύση είναι η $y(x) = 2599 e^{-x}$ και συνεπώς, η αξία του player, ύστερα από ένα χρόνο ($x=1$) θα είναι:

$$y(1) = 2599 e^{-1} = 2599 / e \cong 956 \text{ €}.$$

Ασκήσεις.

7.2.1. Να βρείτε τη γενική λύση των επομένων διαφορικών εξισώσεων:

α) $y' = e^{3x} - x$ β) $y' = x^{-1/2}$ γ) $xy' = 1$ δ) $y' = xe^{x^2}$

7.2.2. Να βρείτε τη γενική λύση των επομένων διαφορικών εξισώσεων και μία οποιαδήποτε μερική λύση για καθεμία από αυτές.

α) $y' = e^{3x} - x$ β) $y' = x^{-1/2}$ γ) $xy' = 1$ δ) $y' = xe^{x^2}$

7.2.3. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $y' + 6xy = 0,\ y(\pi) = 5$ β) $e^y y' = (x + x^3),\ y(0) = 1$ γ) $y' = \log x,\ y(e) = 0$

7.2.4. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη λύση εκείνη που ικανοποιεί την αντίστοιχη δοθείσα αρχική συνθήκη.

α) $y' = xe^x,\quad y(1) = 3$ β) $y' = \log x,\quad y(e) = 0$

γ) $y' = 2\sin x \cos x,\quad y(0) = 1$ δ) $y' = 2x^2,\quad y(0) = 1$

7.2.5. Να λύσετε τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' = \dfrac{x+1}{y^3+3}$ β) $y' = \dfrac{y}{x^2}$ γ) $y' = \dfrac{x^2 y - y}{y+1}$

δ) $y' = 2x$ ε) $y' = x^3 y^2$ στ) $xy' = 2y$

7.2.6. Για κάθε μία από τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις να βρείτε τη λύση εκείνη που ικανοποιεί τη δοθείσα αρχική συνθήκη.

α) $y' = xe^x,\ y(1) = 3$ β) $y' = \log x,\ y(e) = 0$

γ) $y' = 2\sin x \cos x,\ y(0) = 1$ δ) $y' = 2x^2,\ y(0) = 1$

7.2.7. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(x) = \dfrac{x\,y(4-y)}{1+x},\ y(0) = y_0 > 0$.

α) Να βρείτε τη γενική λύση $y = y(x)$ της διαφορικής εξισώσεως.

β) Να υπολογίσετε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στη δοθείσα αρχική συνθήκη.
γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

7.2.8. Υποθέτομε ότι ο αριθμός των αυτοκινήτων μίας μεγαλουπόλεως δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t, από τη συνάρτηση $y = y(t)$ και ότι ο ρυθμός αυξήσεως αυτών είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων. Αν ο αριθμός αυτοκινήτων της μεγαλουπόλεως σε 7 χρόνια είναι τριπλάσιος του αρχικού, να βρείτε σε πόσα χρόνια θα πενταπλασιαστεί.

7.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.

Συνεχίζοντας τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, βρίσκομε στο επόμενο επίπεδο δυσκολίας τις λεγόμενες ***ομογενείς διαφορικές εξισώσεις***.

Ας θεωρήσομε τη συνεχή συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)=x^2+xy$, όπου $(x,y)\in I\subseteq \mathbf{R}^2$ και ας υπολογίσομε την $f(\lambda x, \lambda y)$ για κάθε $\lambda\neq 0$. Τότε, έχομε:

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2 x^2+\lambda^2 x y=\lambda^2 (x^2+x y)=\lambda^2 f(x,y).$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y),\ \ \lambda\neq 0$. Μία τέτοια συνάρτηση λέμε ότι είναι ομογενής δευτέρου βαθμού ή ομογενής βαθμού δύο.

Γενικά έχομε τον επόμενο ορισμό:

> Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ καλείται ***ομογενής βαθμού m*** αν για κάθε $\lambda\neq 0$ ισχύει
>
> $$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y). \qquad (7.3.1)$$

Έτσι οι συναρτήσεις $\sqrt{x^2+y^2}$ και $\sin(x/y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 1 και 0 αντίστοιχα. Είμαστε έτοιμοι τώρα να δώσομε το βασικό ορισμό αυτής της παραγράφου:

> Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ονομάζεται ***ομογενής***, αν είναι της μορφής
>
> $$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0, \qquad (7.3.2)$$
>
> όπου $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού και συνεχείς ως προς τις μεταβλητές τους x και y.

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια της αντικαταστάσεως $z=y/x$ ή $z=x/y$. Με τον τρόπο αυτό η διαφορική εξίσωση (7.3.2) μετατρέπεται σε μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Το παράδειγμα που ακολουθεί αποσαφηνίζει τη διαδικασία αυτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3.1.

Να διαπιστώσετε ότι η διαφορική εξίσωση

$$x^2-y^2+2xyy'=0 \qquad (7.3.3)$$

είναι ομογενής και κατόπιν να την επιλύσετε.

Λύση.

Γράφομε τη διαφορική εξίσωση (7.3.3) στη μορφή:

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \tag{7.3.4}$$

και παρατηρούμε ότι η τελευταία είναι της μορφής (7.3.2), με $P(x,y) = x^2 - y^2$ και $Q(x,y) = 2xy$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό (7.3.1), ελέγχομε αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού. Όντως, παρατηρούμε ότι:

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(x^2 - y^2) = \lambda^2 P(x,y) \quad \text{και} \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 Q(x,y).$$

Αφού διαπιστώσαμε ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι και οι δύο ομογενείς βαθμού δύο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $z = y/x$, οπότε προκύπτει:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z\,x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}. \tag{7.3.5}$$

Με αντικατάσταση της (7.3.5) στη διαφορική εξίσωση (7.3.4) παίρνομε:

$$x^2 - z^2x^2 + 2x\,z\,x\left(x\frac{dz}{dx} + z\right) = 0 \Rightarrow x^2(1-z^2) + 2x^2 z\,x\frac{dz}{dx} + 2x^2z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(1+z^2)dx + 2x^3 z\,dz = 0 \Rightarrow (1+z^2)dx + 2x\,z\,dz = 0,$$

όπου η τελευταία είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Από την έκφραση

$$2x\,zdz = -(1+z^2)\,dx \Rightarrow \frac{z}{1+z^2}dz = -\frac{1}{2x}dx, \tag{7.3.6}$$

ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της, έχομε:

$$\int\frac{z}{1+z^2}dz = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow \log(1+z^2) = -\log x + c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(1+z^2) = -\log x + \log c \quad (c' = \log c) \Rightarrow 1 + z^2 = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

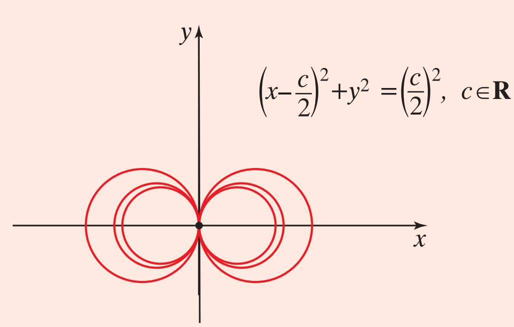
Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της αρχικής μας αντικαταστάσεως $z = y/x$, βρίσκομε από την τελευταία ότι η γενική λύση της (7.3.3.) δίνεται από τη σχέση $x^2 + y^2 = c\,x$, $c \in \mathbf{R}$, όπου $y = y(x)$. Τέλος, μπορούμε εύκολα να δώσομε στη γενική λύση την ισοδύναμη μορφή:

$$x^2 - 2x\frac{c}{2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = 0,$$

δηλαδή

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Η τελευταία μορφή δείχνει ότι οι λύσεις της διαφορικής εξισώσεως αποτελούν μία οικογένεια κύκλων με κέντρα $K(c/2, 0)$ και αντίστοιχες ακτίνες $c/2$, $c \in \mathbf{R}$ (σχ. 7.3).



Σχ. 7.3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3.2.

Να διαπιστώσετε ότι η διαφορική εξίσωση $x+y-x\dfrac{dy}{dx}=0$ είναι ομογενής και κατόπιν την επιλύσετε.

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση που δόθηκε είναι ομογενής, αφού είναι της μορφής (7.3.2) με

$$P(x,y)=x+y\,,\ Q(x,y)=-x$$

και ισχύει

$$P(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)+(\lambda y)=\lambda(x+y)=\lambda P(x,y)\,,$$
$$Q(\lambda x,\lambda y)=-(\lambda x)=\lambda(-x)=\lambda Q(x,y)\,.$$

Αφού διαπιστώσαμε ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι και οι δύο ομογενείς πρώτου βαθμού, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $z=y/x \Leftrightarrow y=zx$, καθώς και την αντίστοιχη παράγωγο (7.3.5). Έτσι, η διαφορική εξίσωση που δόθηκε γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$x+zx-x\left(z+x\frac{dy}{dx}\right)=0 \Rightarrow x+zx-zx-x^2\frac{dz}{dx}=0 \Rightarrow x=x^2\frac{dz}{dx} \Rightarrow dz=\frac{1}{x}dx\,.$$

Η τελευταία αποτελεί διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της παίρνομε:

$$\int dz=\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow z=\ln|x|+c' \Rightarrow z=\ln|x|+\ln|c| \Rightarrow z=\ln|cx|\,,\quad c\in\mathbf{R}$$

όπου $c'=\ln|c|$. Αντικαθιστώντας τέλος το $z=y/x$, βρίσκομε τη λύση $y=x\,\ln|cx|$, $c\in\mathbf{R}$.

Ασκήσεις.

7.3.1. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομογενείς και, αν είναι, να βρεθεί ο βαθμός τους.

α) $f(x,y)=y^2+xy$ β) $g(x,y)=x^3+y^2xe^{\frac{x}{y}}$ γ) $h(x,y)=x+y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ δ) $k(x,y)=xy+x$

7.3.2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς.

α) $y'=\dfrac{y^2}{x}$ β) $2xye^{\frac{x}{y}}-\left(x^2+y^2\sin\dfrac{x}{y}\right)y'=0$ γ) $y'=\dfrac{x^2+y}{x^3}$

7.3.3. Να επαληθεύσετε ότι οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και στη συνέχεια να την επιλύσετε.

α) $(x^2-2y^2)dx+xydy=0$ β) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\dfrac{y}{x}$ γ) $xy'=y+2xe^{-y/x}$ δ) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

7.3.4. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, $y(1)=-2$ β) $2xyy'+x^2-3y^2=0$, $y(2)=1$ γ) $y'=1+\dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$, $y(2)=3$

7.3.5. Να επαληθεύσετε ότι οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και στη συνέχεια να τις επιλύσετε.

α) $2xyy'=x^2+2y^2$ β) $x^2y'-3xy-2y^2=0$ γ) $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

7.3.6. Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\delta x + \varepsilon y + \zeta}\right),$$

όπου $\alpha\varepsilon \neq \beta\delta$. Να διαπιστώσετε ότι, με την αντικατάσταση $x = z - h,\ y = w - k$, και την κατάλληλη επιλογή των σταθερών h, k, η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται σε μία ομογενή διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές z, w. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$ β) $y' = \dfrac{x + y + 1}{2x + 4y + 3}$

7.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Εξίσωση του Bernoulli.

Ένα από τα σημαντικότερα είδη διαφορικών εξισώσεων είναι οι γραμμικές. Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως είναι εκείνη, της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι γραμμική συνάρτηση της άγνωστης συναρτήσεως $y = y(x)$. Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση $y' = 3y + 6$ ή ισοδύναμα η

$$y' - 3y = 6 \tag{7.4.1}$$

είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση. Αν πολλαπλασιάσομε την (7.4.1) με τον παράγοντα

$$Q(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x},$$

(σημειώνομε ότι έχει παραληφθεί η σταθερά της ολοκληρώσεως στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας) προκύπτει:

$$y' e^{-3x} - 3y e^{-3x} = 6e^{-3x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(y e^{-3x}\right) = 6e^{-3x}.$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς x, μπορούμε να λάβομε εύκολα τη γενική λύση ως εξής:

$$\int \frac{d}{dx}\left(y e^{-3x}\right) dx = \int 6e^{-3x} dx \Leftrightarrow y e^{-3x} = -2e^{-3x} + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Όπως θα διαπιστώσομε στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να επιλύσομε οποιαδήποτε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Ας δώσομε όμως αρχικά τον επόμενο ορισμό:

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως καλείται ***γραμμική*** όταν είναι της μορφής

$$y'(x) + p(x)y = f(x), \tag{7.4.2}$$

όπου $p(x)$, $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα διάστημα $A \subseteq \mathbf{R}$. Αν $f(x) = 0$, η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που προκύπτει ονομάζεται ***ομογενής***.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσομε τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

όπου $p(x), q(x)$ και $r(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x.

Το ενδιαφέρον μας σε αυτήν την παράγραφο θα επικεντρωθεί στην επίλυση της εξισώσεως πρώτης τάξεως (7.4.2). Εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται με τη βοήθεια ενός ***ολοκληρωτικού παράγοντα***, γνωστού και ως ***πολλαπλασιαστή*** του ***Euler***, της μορφής

$$Q(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{7.4.3}$$

που εξαρτάται μόνο από το x (δηλ. δεν περιέχει καθόλου το y). Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (7.4.2) με τον παραπάνω ολοκληρωτικό παράγοντα παίρνομε:

$$y' \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} y = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left(y \cdot e^{\int p(x)dx} \right)' = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της τελευταίας βρίσκομε:

$$\int \left(y \cdot e^{\int p(x)dx} \right)' dx = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \Leftrightarrow y e^{\int p(x)dx} = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \,.$$

Συνεπώς:

Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (7.4.2) δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right], \quad c \in \mathbf{R} \,. \tag{7.4.4}$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι:

α) Αν $f(x) = 0$ (ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως) έχομε ουσιαστικά μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών της μορφής $y'(x) + p(x)y = 0,$ της οποίας η λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = c\, e^{-\int p(x)dx} \,.$$

β) Αν οι $p(x), f(x)$ είναι σταθερές, τότε η (7.4.2) είναι και πάλι μία εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και μπορεί να επιλυθεί με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 7.2.

γ) Αν $p(x) = 0$, τότε προκύπτει η εξίσωση $y' = f(x),$ της οποίας η γενική λύση προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση και των δύο μελών, δηλαδή:

$$y' = f(x) \Rightarrow \int y' dy = \int f(x) dx \Rightarrow y = \int f(x) dx + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.1.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' + 3y = e^{2x}$.

Λύση.

Όπως παρατηρούμε, η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική της μορφής (7.4.2) με $p(x) = 3$ και $f(x) = e^{2x}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.4.4) παίρνομε:

$$y(x) = e^{-\int 3dx} \left[\int e^{2x} \cdot e^{\int 3dx} dx + c \right] \Leftrightarrow y(x) = e^{-3x} \left[\int e^{2x} e^{3x} dx + c \right] \Leftrightarrow y(x) = e^{-3x} \left[\int e^{5x} dx + c \right].$$

Επομένως, η γενική λύση της δοθείσας εξισώσεως θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = e^{-3x} \left[\frac{1}{5} e^{5x} + c \right] \Rightarrow y(x) = \frac{1}{5} e^{2x} + c\, e^{-3x}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.2.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x} y = 3x, \; x \neq 0.$

Λύση.

Η παραπάνω εξίσωση είναι προφανώς γραμμική με $p(x)=1/x$ και $f(x)=3x$ και αντίστοιχο ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$Q(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x.$$

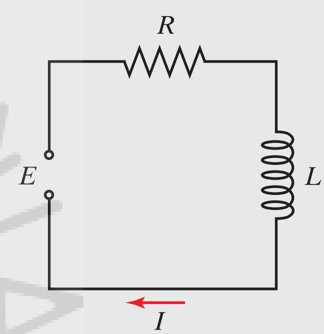
Επομένως, σύμφωνα με την (7.4.4) η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=e^{-\ln x}\left[\int 3x\cdot e^{\ln x}dx+c\right]\Rightarrow y(x)=\frac{1}{x}\left[\int 3x\cdot x\,dx+c\right]\Rightarrow y(x)=\frac{1}{x}\left[3\int x^2\,dx+c\right],$$

απ' όπου προκύπτει τελικά:

$$y(x)=x^2+\frac{c}{x},\quad c\in\mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.3.



Σχ. 7.4α.

Θεωρούμε ένα απλό κύκλωμα RL (σχ. 7.4α), το οποίο αποτελείται από μία ωμική αντίσταση R, ένα πηνίο αυτεπαγωγής L και μία σταθερή ηλεκτρεγερτική δύναμη E. Ας υποθέσομε ότι η βασική εξίσωση που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της εντάσεως $I=I(t)$ του ρεύματος κατά τη χρονική στιγμή t είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{R}{L}I+\frac{E}{L}.$$

α) Να βρείτε τη γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως όταν έχομε ένα κύκλωμα ηλεκτρεγερτικής δυνάμεως E = 5 Volt που αποτελείται από μία ωμική αντίσταση R = 50 Ohm και ένα πηνίο αυτεπαγωγής L = 1 Henry.

β) Αν το αρχικό ρεύμα είναι μηδέν [δηλ. $I(0)$ = 0], να υπολογίσετε το ρεύμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

Λύση.

α) Η διαφορική εξίσωση που μας ενδιαφέρει είναι γραμμική της μορφής (7.4.2), αφού γράφεται ως εξής: $\frac{dI}{dt}+p(t)I=f(t)$ με $p(t)=R/L$ και $f(t)=E/L$. Εισάγοντας τα δεδομένα E = 5 Volt, R = 50 Ohm και L = 1 Henry καταλήγομε στη διαφορική εξίσωση $\frac{dI}{dt}+50I=5$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (7.4.4) παίρνομε:

$$I(t)=e^{-\int 50dt}\left[\int 5\cdot e^{\int 50dt}dt+c\right]=e^{-50t}\left[\int 5e^{50t}+c\right]\Rightarrow I(t)=c\,e^{-50t}+\frac{1}{10},\ c\in\mathbf{R}.$$

β) Από τη γενική λύση, για $t=0$ έχομε $I(0)=0\Rightarrow c\ e^{-50\cdot 0}+\frac{1}{10}=0\Rightarrow c=-\frac{1}{10}$.

Συνεπώς η ένταση $I=I(t)$ του ρεύματος κατά τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο:

$$I(t)=-\frac{1}{10}e^{-50t}+\frac{1}{10}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.4.

Ένα σώμα μάζας m = 15 kg εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h = 150 m με μηδενική αρχική ταχύτητα. Στο σώμα ασκείται η δύναμη της βαρύτητας (επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/sec^2) και η αντίσταση του αέρα η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητάς του με συντελεστή αναλογίας $k=2$.

α) Να βρείτε την έκφραση που δίνει την ταχύτητα $\upsilon=\upsilon(t)$ του σώματος τη χρονική στιγμή t.

β) Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η θέση $x=x(t)$ του σώματος τη χρονική στιγμή t.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος h από το οποίο αφέθηκε το σώμα, αν ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει αυτό στο έδαφος είναι t = 5 sec (επιλέξτε ως θετική φορά τη φορά της πτώσεως).

Λύση.

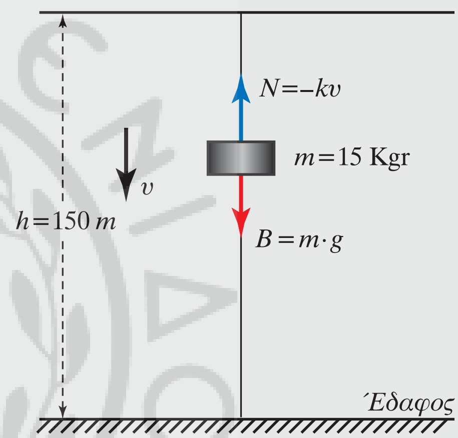
α) Σύμφωνα με το Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για κίνηση σωμάτων, η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m δίνεται από τον τύπο

$$F=ma=m\frac{d\upsilon}{dt} \tag{7.4.5}$$

όπου α η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα κατά την ελεύθερη πτώση του και υ η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t. Η συνισταμένη δύναμη F που ασκείται στο σώμα που μελετάμε είναι ίση με:

$$F=B-N=mg-k\upsilon,$$

όπου $B=mg$ το βάρος του σώματος και $N=-k\upsilon$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα λόγω της αντιστάσεως του αέρα. Η σταθερά $k\geq 0$ είναι η σταθερά αναλογίας (μεταξύ της αντιστάσεως του αέρα και της ταχύτητας) και λαμβάνεται ίση με $k=0$, αν δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα. Τέλος, το αρνητικό πρόσημο στον τύπο $N=-k\upsilon$ δικαιολογείται από το γεγονός ότι η φορά της δυνάμεως αυτής είναι αντίθετη από την φορά κινήσεως του σώματος (σχ. 7.4β).



Σχ. 7.4β.

Αντικαθιστώντας την έκφραση $F=mg-k\upsilon$ στον τύπο (7.4.5) προκύπτει άμεσα η παρακάτω ισότητα, η οποία αποτελεί τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η ταχύτητα του σώματος:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=mg-k\upsilon.$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{k}{m}\upsilon=g$$

και επομένως αποτελεί μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της μορφής (7.4.2). Αν αντικαταστήσομε τα δεδομένα του προβλήματος m = 15 kg, $k=2$, g = 10 m/sec^2, h = 150 m λαμβάνομε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{2}{10}\upsilon=10\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{1}{5}\upsilon=10\Rightarrow y'(x)+p(x)y=f(x)$$

με $p(t)=\dfrac{1}{5}$ και $f(t)=10$. Υπολογίζομε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$Q(t)=e^{\int p(t)dx}=e^{\int\frac{1}{5}dt}=e^{\frac{t}{5}}$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.4.4) έχομε:

$$\upsilon(t)=e^{-\int\frac{1}{5}dt}\left[\int 10\cdot e^{\int\frac{1}{5}dt}dt+c\right]\Rightarrow y(t)=e^{-\frac{t}{5}}\left[\int 10e^{\frac{t}{5}}dt+c\right]\Rightarrow\upsilon(t)=10e^{-\frac{t}{5}}\int e^{\frac{t}{5}}dt+ce^{-\frac{t}{5}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\upsilon(t)=50e^{-\frac{t}{5}}e^{\frac{t}{5}}+ce^{-\frac{t}{5}}\Rightarrow\upsilon(t)=ce^{-\frac{t}{5}}+50.$$

Αφού η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι ίση με μηδέν, θα ισχύει:

$$\upsilon(0)=0\Rightarrow ce^{0}+50=0\Rightarrow c=-50$$

και επομένως η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο:

$$v(t) = -50e^{-\frac{t}{5}} + 50. \tag{7.4.6}$$

β) Στη συνέχεια θα βρούμε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη θέση του σώματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t. Γνωρίζομε ότι η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της μετατοπίσεως, δηλαδή:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Με αντικατάσταση της τελευταίας στην (7.4.6) βρίσκομε την επόμενη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = -50e^{-\frac{t}{5}} + 50.$$

Αυτή είναι εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, οπότε μπορούμε να την επιλύσομε εύκολα ως εξής:

$$dx = \left(-50e^{-\frac{t}{5}} + 50\right)dt \Rightarrow \int dx = \int (-50e^{-\frac{t}{5}} + 50)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -50\int e^{-\frac{t}{5}}dt + 50\int dt \Rightarrow x = 250e^{-\frac{t}{5}} + 50t + c_1, \quad c_1 \in \mathbf{R}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχομε $x = 0$, οπότε η τελευταία δίνει:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 250e^0 + 50 \cdot 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -250.$$

Συνεπώς, η θέση του σώματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = 250e^{-\frac{t}{5}} + 50t - 250 \tag{7.4.7}$$

γ) Το ζητούμενο ύψος είναι ίσο με το διάστημα που διήνυσε το σώμα κινούμενο επί t = 5 sec (χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το σώμα στο έδαφος). Από τον τύπο (7.4.7) παίρνομε, για t = 5,

$$x = 250e^{-\frac{5}{5}} + 50 \cdot 5 - 250 \Rightarrow x = 250/e = 91{,}97.$$

Επομένως το σώμα αφέθηκε από ύψος h = 91,97 m.

Ας θεωρήσομε τώρα τη διαφορική εξίσωση $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$, η οποία διαφέρει από τη γραμμική διαφορική εξίσωση (7.4.2) μόνο κατά τον όρο y^2 στο δεύτερο μέλος. Μία τέτοια εξίσωση (η οποία είναι μεν πρώτης τάξεως αλλά όχι γραμμική) ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli. Γενικά έχομε τον επόμενο ορισμό:

> Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της μορφής:
>
> $$y'(x) + p(x)y = f(x)y^m, \quad m \neq 0{,}1 \tag{7.4.8}$$
>
> όπου $p(x)$, $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x, καλείται ***διαφορική εξίσωση του Bernoulli***.

Αν $m = 0$, η διαφορική εξίσωση του Bernoulli είναι προφανώς γραμμική, ενώ αν $m = 1$ ανάγεται άμεσα σε διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Για άλλες τιμές του m ($m \neq 0{,}1$) μετατρέπεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με τη βοήθεια της αντικαταστάσεως $z = y^{1-m}$ [μετά την αντικατάσταση, η άγνωστη συνάρτηση που αναζητούμε είναι η $z(x)$]. Η διαδικασία αυτή αποσαφηνίζεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.5.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2 y^2, \quad x > 0 \tag{7.4.9}$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (7.4.9) είναι εξίσωση Bernoulli με

$$m = 2 \text{ και } p(x) = \frac{3}{x}, \; f(x) = x^2.$$

Στην περίπτωση που ισχύει $y \neq 0$, μπορούμε να προχωρήσομε στην αντικατάσταση

$$z = y^{1-2} \Leftrightarrow z = y^{-1},$$

οπότε θα έχομε $z' = -y^{-2} y'$ και η δοθείσα παίρνει τη μορφή

$$-y^{-2} y' - \frac{3}{x} y^{-1} = -x^2 \;\; \Rightarrow \;\; z' - \frac{3}{x} z = -x^2.$$

Η τελευταία είναι γραμμική πρώτης τάξεως και μπορούμε να την επιλύσομε εύκολα ακολουθώντας τη γενική πορεία λύσεως που είδαμε στα προηγούμενα. Η λύση που προκύπτει είναι η:

$$y(x) = \frac{1}{x^3 (c - \ln x)}, \quad c - \ln x \neq 0, \quad x > 0$$

όπου $c \in \mathbf{R}$ μία σταθερά. Αξίζει να αναφερθεί ότι και η $y(x) = 0, \quad x > 0$ είναι μια προφανής λύση της (7.4.9), η οποία όμως δεν προκύπτει από τη γενική λύση.

Ασκήσεις.

7.4.1. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση $y' - 3y = 6$.

α) Να βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα για την παραπάνω εξίσωση.

β) Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση.

7.4.2. Να επιλύσετε τις παρακάτω (γραμμικές) διαφορικές εξισώσεις.

α) $y' - \frac{3}{x} y = x^3$ β) $y' + y = \sin x$ γ) $y' + \frac{4}{x} y = x^4$ δ) $y' - xy = -x$

7.4.3. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y' + 2xy = 2x^3, \quad y(0) = 1$ β) $y' + xy = -x, \quad y(0) = -4$

γ) $y' + y = \sin x, \quad y(\pi) = 1$ δ) $y' + \frac{2}{10 + 2y} y = 4, \quad y(2) = 100$

7.4.4. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' + y = e^x y^2$.

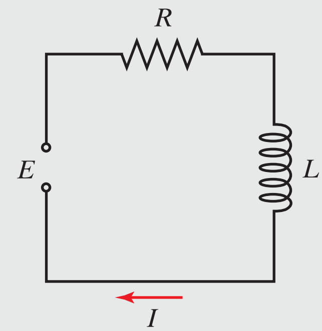
7.4.5. Να επιλύσετε το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών $y' + \frac{6}{x} y = 3 y^{\frac{4}{3}}, \quad y(1) = \frac{1}{8}$.

7.4.6. Ένα σώμα μάζας 15 kg εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος 100 m, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10\ \text{m/sec}^2$ και η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα, τότε:

α) Να βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα του σώματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η θέση του σώματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

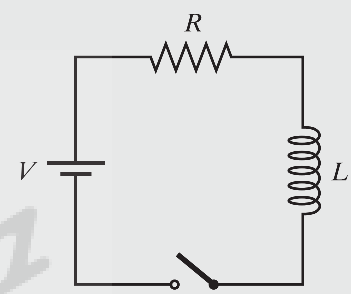
γ) Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το σώμα στο έδαφος.



Σχ. 7.4γ.

7.4.7. Ένα αντικείμενο βάρους $B = 64$ N πέφτει από ύψος $x = 100$ m με αρχική ταχύτητα 10m/sec και υπό την επίδραση της βαρύτητας και της αντιστάσεως του αέρα, η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητάς του με συντελεστή αναλογίας $k = 1{,}63$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t (δίνεται ότι $g = 9{,}8\ \text{m/sec}^2$).

7.4.8. Το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 7.4γ με ηλεκτρεγερτική δύναμη $E = 5$ Volt αποτελείται από μία ωμική αντίσταση $R = 10$ Ohm, ένα πηνίο αυτεπαγωγής $L = 0{,}5$ Henry και τη χρονική στιγμή $t = 0$ δεν διαρρέεται από ρεύμα. Να υπολογίσετε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.



Σχ. 7.4δ.

7.4.9. Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη E, η οποία δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τη σχέση $E = E(t) = 3\sin t$, μία ωμική αντίσταση $R = 10$ Ohm και ένα πηνίο αυτεπαγωγής $L = 0{,}5$ Henry. Αν το αρχικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι 6 Ampere, να υπολογίσετε το ρεύμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

7.4.10. Ας υποθέσομε ότι ένα ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως $I(t)$ περιέχει μια γεννήτρια σταθερού δυναμικού V, ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και μία ωμική αντίσταση R Ohms (σχ. 7.4δ). Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff το ρεύμα $I(t)$ θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$L\frac{dI}{dt} + R\cdot I(t) = V.$$

Να επιλύσετε την παραπάνω διαφορική εξίσωση και να διαπιστώσετε ότι, αν $I(0) = 0$, τότε η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο

$$I(t) = (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})\cdot\frac{V}{R}.$$

7.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσομε τη γενίκευση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Δίνομε αρχικά τον εξής ορισμό:

Γραμμική διαφορική εξίσωση n–τάξεως καλείται μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n(x)y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = f(x), \qquad (7.5.1)$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ και οι συντελεστές $\alpha_i(x),\ i = 0,1,2,\ldots,n$ εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή x.

Αν $f(x) = 0$, τότε η εξίσωση (7.5.1) ονομάζεται ***ομογενής***, ενώ αν $f(x) \neq 0$ ονομάζεται ***μη ομογενής***.

Στην περίπτωση που όλοι οι συντελεστές α_i, $i = 0, 1, 2,...$, είναι σταθεροί αριθμοί, δηλαδή η εξίσωση έχει τη μορφή

$$\alpha_n y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_2 y''(x) + \alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = f(x)$$

θα ονομάζεται ***γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές***.
Η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξεως με σταθερούς συντελεστές μπορεί προφανώς να γραφεί στη μορφή

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0 \tag{7.5.2}$$

όπου p, q σταθεροί αριθμοί. Στη συνέχεια, θα περιορίσομε τη μελέτη μας σε διαφορικές εξισώσεις αυτού του τύπου.

Ας αναζητήσομε αρχικά για την (7.5.2) μερικές λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$. Αφού:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{και} \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

αντικαθιστώντας στην (7.5.2), παίρνομε $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$, οπότε θα έχομε

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{7.5.3}$$

Η τελευταία καλείται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (7.5.2). Αν λ_0 είναι μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξισώσεως (7.5.3), τότε η συνάρτηση $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ θα αποτελεί όντως μια μερική λύση της (7.5.2). Έτσι, για παράδειγμα, η χαρακτηριστική εξίσωση της $y'' + 3y' - 4y = 0$ είναι η $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ και αφού οι ρίζες της τελευταίας είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -4$, οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x$ και $y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-4x}$ θα αποτελούν μερικές λύσεις της.

Σημειώνομε ότι, με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξισώσεως $n-$τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_2 y''(x) + \alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = 0,$$

η οποία θα δίνεται από την

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0.$$

Π.χ. η χαρακτηριστική εξίσωση της $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - y = 0$ είναι η $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση της $\dfrac{d^5x}{dt^5} - 3\dfrac{d^3x}{dt^3} + 5\dfrac{dx}{dt} - 7x = 0$ είναι η $\lambda^5 - 3\lambda^3 + 5\lambda - 7 = 0$ κ.ο.κ..

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις ορίζονται μόνο για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και όχι για τη γενική μορφή (7.5.1). Η χαρακτηριστική εξίσωση παίζει σπουδαίο ρόλο στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, αφού οι ρίζες της σχετίζονται άμεσα με τις λύσεις των αντιστοίχων διαφορικών εξισώσεων.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα περιορίσομε τη μελέτη μας σε διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Για την κατηγορία αυτή διαφορικών εξισώσεων ισχύει το επόμενο γενικό αποτέλεσμα:

Έστω η διαφορική εξίσωση (7.5.2) με αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση την (7.5.3). Ας συμβολίσομε με $\Delta = p^2 - 4q$ τη διακρίνουσα της (7.5.3) και με λ_1, λ_2 τις ρίζες της. Για την εύρεση της γενικής λύσεως $y_{\text{ομ}}$ της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως δεύτερης τάξεως (7.5.2) διακρίνομε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta > 0$, οπότε $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (η χαρακτηριστική εξίσωση (7.5.3) έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες), τότε οι $e^{\lambda_1 x}$ και $e^{\lambda_2 x}$ είναι μερικές λύσεις της (7.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{ομ} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{7.5.4}$$

β) Αν $\Delta = 0$, οπότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (η χαρακτηριστική εξίσωση (7.5.3) έχει μια διπλή πραγματική ρίζα), τότε οι $e^{\lambda x}$ και $x e^{\lambda x}$ είναι μερικές λύσεις της (7.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{ομ} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}. \tag{7.5.5}$$

γ) Αν $\Delta < 0$, οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση (7.5.3) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω $\lambda_1 = a + \beta i,\ \lambda_2 = a - \beta i$, τότε οι $e^{(a+\beta i)x}$ και $e^{(a-\beta i)x}$ είναι μερικές λύσεις της (7.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{ομ} = d_1 e^{(a+\beta i)x} + d_2 e^{(a-\beta i)x},$$

ο οποίος αποδεικνύεται ότι είναι αλγεβρικά ισοδύναμος με τον

$$y_{ομ} = e^{ax}(c_1 \,\text{συν}\beta x + c_2 \,\text{ημ}\beta x). \tag{7.5.6}$$

Στα επόμενα παραδείγματα παρουσιάζεται ο τρόπος εφαρμογής των παραπάνω σε συγκεκριμένες διαφορικές εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.1.

Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Λύση.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξισώσεως είναι η επόμενη $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Αυτή έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$ και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (7.5.4), η γενική λύση της θα δίνεται από τον τύπο $y_{ομ} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.2.

α) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' - 4y' + 4y = 0$.
β) Να βρείτε τη μερική λύση της παραπάνω εξισώσεως που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = y'(0) = 1$.

Λύση.

α) Η παραπάνω εξίσωση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ με ρίζες τις $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$, οπότε η γενική λύση της είναι η $y_{ομ} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.
β) Παρατηρούμε ότι, αν παραγωγίσομε τη γενική λύση έχομε:

$$y'_{ομ} = 2c_1 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + c_2 e^{2x} = e^{2x}(2c_1 + 2xc_2 + c_2).$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = y'(0) = 1$ παίρνομε:

$$y_{ομ}(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1,\quad y'_{ομ}(0) = 1 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 1.$$

Επομένως, $c_1=0,\ c_2=1$ και η μερική λύση για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες είναι η $y_{\text{ομ}}=xe^{2x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.3.

Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y''+4y'+5y=0$.

Λύση.

Η παραπάνω εξίσωση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2+4\lambda+5=0$, με $\Delta=p^2-4q=4^2-4{\cdot}5=-4<0$ και επομένως έχει δύο μιγαδικές ρίζες, τις $\lambda_1=-2+i,\quad \lambda_2=-2-i$.

Σύμφωνα με τον τύπο (7.5.6), η γενική λύση της εξισώσεως είναι η $y_{\text{ομ}}=e^{-2x}(c_1\,\text{συν}x+c_2\,\text{ημ}x)$.

Στις εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων που αφορούν στον τύπο (7.5.6), αν θέσομε $c_1=A$ ημφ, $c_2=A$ συνφ ο τύπος (7.5.6) μετατρέπεται στον ισοδύναμο

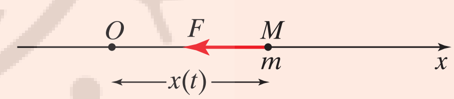
$$y_{\text{ομ}}=e^{ax}(A\,\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\beta x+A\,\text{συν}\varphi\,\text{ημ}\,\beta x)=Ae^{ax}(\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\beta x+\text{συν}\varphi\,\text{ημ}\,\beta x)=Ae^{ax}\,\text{ημ}(\beta x+\varphi)$$

(χρησιμοποιήθηκε ο τριγωνομετρικός τύπος $\text{ημ}(\alpha+\beta)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta$). Η φυσική ερμηνεία της παραπάνω εκφράσεως είναι ότι αν η ανεξάρτητη μεταβλητή x ερμηνευθεί ως χρόνος, τότε από φυσικής απόψεως ο τύπος $y_{\text{ομ}}=Ae^{ax}\,\text{ημ}(\beta x+\varphi)$ περιγράφει ταλαντώσεις με αρχική φάση φ, οι οποίες για $a>0$ μεγαλώνουν απεριόριστα, ενώ για $a<0$ αποσβένουν.

Ως εφαρμογή του παραπάνω, ας επανέλθομε στην πρώτη διαφορική εξίσωση που αναφέρθηκε στην αρχή της παράγραφο 7.1 η οποία προκύπτει από τον νόμο του Νεύτωνα. Στο επόμενο παράδειγμα θα κατασκευάσομε τη διαφορική αυτή εξίσωση και στη συνέχεια θα την επιλύσομε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.4.

Έστω ένα υλικό σημείο M μάζας m, το οποίο έλκεται από ακίνητο κέντρο O και η δύναμη F που ασκείται από το O προς αυτό είναι ανάλογη της απομακρύνσεως (σχ. 7.5). Να βρείτε το νόμο κινήσεως του σημείου M.



Σχ. 7.5

Λύση.

Από τον νόμο του Νεύτωνα γνωρίζομε ότι ισχύει $F=m\cdot a$, όπου a είναι η επιτάχυνση που αποκτά το υλικό σημείο υπό την επίδραση της δυνάμεως F. Γνωρίζομε όμως, από τον νόμο του Hooke, ότι ισχύει επίσης $F=-k\cdot x$, όπου $k>0$ ένας συντελεστής αναλογίας, x η απόσταση του υλικού σημείου M από το O (το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της F είναι αντίθετη προς την μετατόπιση x του M). Είναι επίσης γνωστό ότι η επιτάχυνση $a=a(t)$ δίνεται από τη δεύτερη παράγωγο της αποστάσεως $x=x(t)$ ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγομε στη διαφορική εξίσωση:

$$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2}\Leftrightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\Leftrightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0\Leftrightarrow x''+\omega^2x=0,$$

όπου θέσαμε $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (σταθερά). Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, οπότε $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm \mathrm{i}\omega$, δηλαδή έχει μιγαδικές ρίζες, τις $\lambda_1 = 0 + \mathrm{i}\omega, \quad \lambda_2 = 0 - \mathrm{i}\omega$.

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (7.5.6), η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως που μας ενδιαφέρει δίνεται από τον τύπο $x_{\text{ομ}} = e^{0\cdot x}(c_1\,\text{συνωt} + c_2\,\text{ημωt})$.

Αν θέσομε $c_1 = A$ ημφ, $c_2 = A$ συνφ, η γενική λύση μετατρέπεται στην $x_{\text{ομ}}(t) = A\text{ημ}(\omega t+\varphi), A \geq 0$. Η τελευταία δηλώνει ότι το σημείο M εκτελεί περιοδικές αρμονικές ταλαντώσεις ως προς το κέντρο έλξεως O, με πλάτος ταλαντώσεως A και αρχική φάση φ.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x), \tag{7.5.7}$$

όπου p, q σταθερές και $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσομε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = e^{3x}, \tag{7.5.8}$$

όπου έχομε $p = -2$, $q = 1$ και $f(x) = e^{3x}$. Αν επιλύσομε την ομογενή εξίσωση της (7.5.8), δηλαδή την $y'' - 2y' + y = 0$, τότε από τη χαρακτηριστική της εξίσωση $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ (η οποία έχει μια διπλή ρίζα, την $\lambda = 1$), βρίσκομε ότι η γενική της λύση είναι η

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^x + c_2\, x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε ότι ***μία μερική λύση της μη ομογενούς*** εξισώσεως (7.5.8) είναι η

$$y_\mu = \frac{1}{4}e^{3x},$$

αφού με αντικατάσταση των

$$y_\mu = \frac{1}{4}e^{3x},\ y'_\mu = \frac{3}{4}e^{3x} \quad \text{και} \quad y''_\mu = \frac{9}{4}e^{3x}$$

στην (7.5.8) έχομε

$$y'' - 2y' + y = e^{3x} \Leftrightarrow \frac{9}{4}e^{3x} - 2\,\frac{3}{4}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow e^{3x} = e^{3x},$$

το οποίο προφανώς ισχύει. Αν τώρα προσθέσομε τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως $y'' - 2y' + y = 0$ και τη μερική λύση της μη ομογενούς αυτής, τότε προκύπτει η συνάρτηση

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu = c_1 e^x + c_2\, x e^x + \frac{1}{4}e^{3x},$$

η οποία εύκολα μπορεί να επαληθευθεί ότι αποτελεί τη γενική λύση της (7.5.8).

Γενικά, αποδεικνύεται το εξής:

Η γενική λύση y της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές (7.5.7) δίνεται από την έκφραση:

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu,$$

όπου $y_{\text{ομ}}$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=0$$

και y_μ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (7.5.7) (η οποία δεν θα περιέχει καθόλου σταθερές).

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι, για να υπολογιστεί η γενική λύση μιας μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές της μορφής (7.5.7), θα πρέπει κάθε φορά να γνωρίζομε μία μερική της λύση. Άρα, γεννιέται το βασικό ερώτημα: με ποιον τρόπο μπορούμε να προσδιορίζομε τέτοιες μερικές λύσεις y_μ; Θα περιγράψομε στη συνέχεια μια συγκεκριμένη μέθοδο ευρέσεως μερικής λύσεως, γνωστή ως ***μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών***. Πριν περιγράψομε τη γενική μέθοδο, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.5.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$y''-5y'+6y=x-1 \tag{7.5.9}$$

Λύση.

Επιλύομε αρχικά την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση $y''-5y'+6y=0$, η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση την $\lambda^2-5\lambda+6=0$ με ρίζες $\lambda_1=2, \lambda_2=3$. Άρα η γενική λύση της ομογενούς εξισώσεως είναι η $y_{\text{ομ}}=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$.

Θα αναζητήσομε τώρα μία μερική λύση της (7.5.9). Αφού $f(x)=x-1$ θα μπορούσαμε ίσως να αναζητήσομε μια μερική λύση της μορφής $y_\mu = \varkappa x + \lambda$. Έχομε τότε $y'_\mu = \varkappa$, $y''_\mu = 0$ και αντικαθιστώντας στην (7.5.9) παίρνομε:

$$0-5\varkappa+6\varkappa x+6\lambda=x-1 \Leftrightarrow 6\varkappa x+(6\lambda-5\varkappa)=x-1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδίων δυνάμεων του x βρίσκομε $6\varkappa=1$ και $6\lambda-5\varkappa=-1$, απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\varkappa=\frac{1}{6},\ \lambda=-\frac{1}{36}.$$

Συνεπώς μία μερική λύση της (7.5.9) είναι η $y_\mu=\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}$. Άρα, η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (7.5.9) θα δίνεται από τον τύπο

$$y=y_{\text{ομ}}+y_\mu=c_1e^{2x}+c_2\,e^{3x}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι στην περίπτωση που στη διαφορική εξίσωση (7.5.7) η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο, μπορούμε να αναζητήσομε μια μερική λύση της μορφής $y_\mu=P(x)$, όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο όμοιο με την f.

Γενικά το τι θα επιλέγομε ως μορφή της μερικής λύσεως της (7.5.7) εξαρτάται από τη μορφή της συναρτήσεως f που βρίσκεται στο δεξί της μέλος. Ακολουθούν αναλυτικές οδηγίες για τον τρόπο επιλογής της συναρτήσεως f στις πλέον συνήθεις περιπτώσεις:

Η μερική λύση y_μ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές της μορφής (7.5.7) μπορεί να προσδιορισθεί ως εξής:

α) Έστω ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού n ως προς x. Τότε:

– Αν $q \neq 0$, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

– Αν $q = 0$, αναζητούμε μια μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = x(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0),$$

όπου a_i, $i = 0,1,2,3,\ldots,n$ είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

β) Έστω ότι $f(x) = k e^{\lambda x}$, όπου k, λ είναι γνωστές σταθερές. Τότε αναζητούμε μια μερική λύση της μορφής $y_\mu = A e^{\lambda x}$, όπου A είναι μία σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί.

γ) Έστω ότι $f(x) = k_1$ ημ$\omega x + k_2$ συνωx, όπου k_1, k_2 και ω είναι γνωστές σταθερές. Τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_\mu = A$ ημ$\omega x + B$ συνωx, όπου A, B είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να προσδιορίσομε μερική λύση της (7.5.7) και όταν το δεξί μέλος της είναι συνδυασμός των περιπτώσεων (α), (β) και (γ). Για παράδειγμα, αν η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α) και (β), δηλαδή $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$, τότε θεωρούμε ως μερική λύση την

$$y_\mu = e^{\lambda x}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

με a_i, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, \nu$ σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Αν η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α), (β) και (γ) (πολυωνύμου, εκθετικής συναρτήσεως και όρου ημιτόνου ή συνημιτόνου), δηλαδή:

$$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)\,\text{ημ}\omega x \quad \text{ή} \quad f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)\,\text{συν}\omega x,$$

τότε θεωρούμε ως μερική λύση την

$$y_\mu = e^{\lambda x}\text{ημ}\omega x\,(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) + e^{\lambda x}\text{συν}\omega x\,(\beta_n x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)$$

με a_i, β_i, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Αναφέρομε ότι υπάρχουν και διάφορες άλλες μέθοδοι ευρέσεως μερικών λύσεων που καλύπτουν την περίπτωση που η f δεν ανήκει στους τύπους των συναρτήσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω ή όταν η διαφορική εξίσωση δεν έχει σταθερούς συντελεστές. Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες μεθόδους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.6.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Λύση.

Στην εξίσωση που δόθηκε η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α) και (β), δηλαδή, $f(x) = e^{\lambda x} P_1(x)$, όπου $P_1(x) = 4x$ είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και $\lambda = 2$. Αναζητούμε λοιπόν μια μερική λύση της μορφής $y_\mu = e^{2x}(Ax + B)$, όπου A, B είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Όμως

$$y'_\mu = e^{2x}(2Ax + A + 2B), \quad y''_\mu = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B)$$

και με αντικατάσταση των δύο τελευταίων σχέσεων στη διαφορική εξίσωση παίρνομε:

$$e^{2x}(4Ax+4A+4B)-e^{2x}(2Ax+A+2B)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(Ax+3A+B)=e^{2x}4x \Leftrightarrow Ax+3A+B=4x+0\,.$$

Άρα $A=4$ και $3A+B=0 \Rightarrow B=-12$ και μια μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως που δόθηκε είναι η $y_\mu = e^{2x}(4x-12)$.

Στη συνέχεια υπολογίζομε τη γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $y''-y'-y=0$, η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2-\lambda-1=0$. Οι ρίζες της είναι οι $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$, $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{5}$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς είναι η

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\,.$$

Τελικά η γενική λύση θα είναι η

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + e^{2x}(4x-12)\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.7.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y''-y'-2y=\text{ημ}2x$.

Λύση.

Εύκολα μπορεί να βρει κάποιος, ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία, ότι η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως είναι η $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.

Αφού $f(x)$ = ημ $2x$ αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_\mu = A\text{ημ}2x + B\text{συν}2x$. Παραγωγίζοντας δύο φορές τη μερική λύση έχομε:

$$y'_\mu = 2A\text{συν}2x - 2B\text{ημ}2x, \quad y''_\mu = -4A\text{ημ}2x - 2B\text{συν}2x$$

και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση έχομε:

$$(-4A\text{ημ}2x - 4B\text{συν}2x) - (2A\text{συν}2x - 2B\text{ημ}2x) - 2(A\text{ημ}2x + B\text{συν}2x) = \text{ημ}2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-6A+2B)\text{ημ}2x + (-6B-2A)\text{συν}2x = 1\cdot\text{ημ}2x + 0\cdot\text{συν}2x\,.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοίων όρων παίρνομε $-6A+2B=1$ και $-2A-6B=0$, απ' όπου βρίσκομε:

$$A=-\frac{3}{20} \quad \text{και} \quad B=\frac{1}{20}\,.$$

Επομένως $y_\mu = -\dfrac{3}{20}\text{ημ}2x + \dfrac{1}{20}\text{συν}2x$ και η γενική λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\text{ημ}2x + \frac{1}{20}\text{συν}2x\,.$$

Ασκήσεις.

7.5.1. Να βρείτε την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων και να προσδιορίσετε ποιες από αυτές είναι γραμμικές.

α) $2xy'' + x^2y' - (\text{συν}x)y = 2$ β) $y''-y'-2y=0$ γ) $y''-2y=0$

δ) $yy''' + xy' + y = x^3$ ε) $4y''+4y'+y=0$ στ) $2y'+4xy=x+1$

Ποιες από τις παραπάνω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και ποιες με σταθερούς συντελεστές;

7.5.2. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=5e^{-x}$ είναι δύο μερικές λύσεις της διαφορικής εξισώσεως $y''-2y'+y=0$. Στη συνέχεια να ελέγξετε αν η $y=c_1e^{-x}+c_2\,5e^{-x}$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ αποτελεί επίσης λύση της.

7.5.3. Να επιλύσετε τις εξής διαφορικές εξισώσεις:

α) $y''-6y=0$ β) $y''-7y'=0$ γ) $y''-2y'-y=0$

δ) $y''+2y'+5y=0$ ε) $y''+10y'+21y=0$ στ) $y''-3y'+4y=0$

7.5.4. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $\dfrac{d^2I}{dt^2}+20\dfrac{dI}{dt}+200I=0$.

7.5.5. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2+4x+6$ είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως $y''-2y'+y=x^2$, να βρείτε τη γενική της λύση.

7.5.6. Να αποδείξετε ότι η γενική λύση $y_{\text{ομ}}=d_1\,e^{(a+\beta i)x}+d_2\,e^{(a-\beta i)x}$ της (7.5.2) στην περίπτωση που έχομε δύο μιγαδικές ρίζες, είναι ισοδύναμη με την $y_{\text{ομ}}=e^{ax}\,(c_1\,\text{συν}\beta x+c_2\,\text{ημ}\beta x)$.

7.5.7. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y''+y=0,\ y(2)=y'(2)=1$ β) $y''-y'-2y=0,\ y(0)=2, y'(0)=1$

γ) $y''-5y'+4y=0,\ y(0)=5,\ y'(0)=8$ δ) $y''+4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=2$

7.5.8. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y''-y'-2y=e^{3x}$ β) $y''-y'-2y=4x^2$ γ) $y''-3y'+2y=2\text{ημ}x$

δ) $y''-2y=4x^2e^x$ ε) $y''-7y'+y=e^{2x}(3x-5)$ στ) $y''-3y'+2y=8x-1$

7.5.9. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y''-3y'+2y=2\text{ημ}x,\ y(1)=0,\ y'(1)=1$ β) $y''+8y'+15y=e^x(x+3),\ y(0)=y'(0)=0$

γ) $y''+y=x^2-3x+1,\ y(2)=3,\ y'(2)=0$ δ) $y''-2y+y=\dfrac{e^x}{x},\ y(1)=0,\ y'(1)=1$

7.6 Εφαρμογές.

Η μαθηματική μοντελοποίηση ενός φαινομένου της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, της Μηχανικής και πολλών άλλων επιστημών, οδηγεί αρκετά συχνά σε διαφορικές εξισώσεις. Στην παράγραφο αυτή παραθέτομε παραδείγματα από μία σειρά φυσικών προβλημάτων-φαινομένων, τα οποία μπορούν να περιγραφούν και συγχρόνως να μελετηθούν μέσω διαφορικών εξισώσεων.

Για κάθε κατηγορία μοντέλου παρουσιάζεται αναλυτικά το φυσικό πρόβλημα, καθώς και η διαφορική εξίσωση που το περιγράφει μαθηματικά.

7.6.1 Ραδιενεργή ακτινοβολία.

Χρόνος ημιζωής ή απλά ***ημιζωή*** ενός ***ραδιενεργού στοιχείου*** είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ελαττωθεί κατά το ήμισυ η ένταση της ακτινοβολίας του. Η ημιζωή ενός ραδιενεργού ισοτόπου, σχετίζεται μ’ έναν αριθμό, που χαρακτηρίζει την ταχύτητα ελαττώσεως της εντάσεως ακτινοβολίας με την πάροδο του χρόνου.

Η ελάττωση της εντάσεως της ακτινοβολίας ενός ραδιοϊσοτόπου περιγράφεται μαθηματικά με μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της μορφής

$$\frac{dR}{dt} = kR, \tag{7.6.1}$$

όπου $k < 0$. Η εξίσωση (7.6.1) είναι χωριζομένων μεταβλητών και η γενική της λύση βρίσκεται εύκολα ως εξής

$$\frac{dR}{R} = k\,dt \Rightarrow \int \frac{dR}{R} = k\int dt \Rightarrow \ln R = kt + c' \Rightarrow R(t) = c\,e^{kt}, \tag{7.6.2}$$

όπου $c = e^{c'}$ μία σταθερά. Αν γνωρίζομε την αρχική ένταση ακτινοβολίας του ισοτόπου (δηλ. αυτή που αντιστοιχεί σε χρόνο $t = 0$), τότε η σταθερά c της λύσεως (7.6.2) προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$R(0) = ce^{k\cdot 0} \Rightarrow c = R(0).$$

Επομένως, η σταθερά c είναι ίση με την αρχική ένταση ακτινοβολίας $R(0)$. Η σταθερά k προσδιορίζεται από εργαστηριακές μετρήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.1.

Το ισότοπο άνθρακας 14, του ραδιενεργού άνθρακα, περιέχεται ως συστατικό της ύλης όλων των ζωντανών οργανισμών. Όταν ένας οργανισμός πεθάνει, τότε το ισότοπο άνθρακας-14 εξακολουθεί να ακτινοβολεί μέχρι να μηδενιστεί η ακτινοβολία του (στην πράξη μέχρι να αποκτήσει αμελητέα τιμή). Οι επιστήμονες που χρονολογούν με άνθρακα-14 υποστηρίζουν ότι αυτό θα συμβεί μετά από χρόνο διπλάσιο της ημιζωής του άνθρακα-14, η οποία είναι περίπου 5730 χρόνια.

Αν ο ραδιενεργός άνθρακας που ανιχνεύτηκε σε ένα απολίθωμα εκπέμπει το 77,7% της αρχικής του ακτινοβολίας να προσδιορίσετε την ηλικία του απολιθώματος.

Λύση.

Όπως είδαμε παραπάνω, η γενική λύση της (7.6.1) είναι η $R(t) = ce^{kt}$, όπου $c = R(0)$ η αρχική ακτινοβολία. Σύμφωνα με την υπόθεση των επιστημόνων, η ημιζωή του άνθρακα-14 είναι περίπου 5730 χρόνια, οπότε θα πρέπει να έχομε $R(5730) = 0{,}5R(0)$ ή ισοδύναμα:

$$0{,}5R(0) = R(0)e^{5730k} \Leftrightarrow \ln 0{,}5 = 5730k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{5730}.$$

Αφού ο ραδιενεργός άνθρακας που ανιχνεύτηκε στο απολίθωμα εκπέμπει το 77,7% της αρχικής του ακτινοβολίας, για την ηλικία t του απολιθώματος θα πρέπει να ισχύει $R(t) = 0{,}777R(0)$. Επομένως θα έχομε διαδοχικά:

$$0{,}777\,R(0) = R(0)e^{kt} \Leftrightarrow 0{,}777 = e^{kt} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0{,}777}{k} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0{,}777}{\frac{\ln 0{,}5}{5730}} \cong 2086.$$

Άρα η ηλικία του απολιθώματος εκτιμάται στα 2086 χρόνια.

7.6.2 Ψύξη και θέρμανση.

Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι, σύμφωνα με μια βασική αρχή της διεργασίας ψύξεως, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογος με τη διαφορά μεταξύ της θερμοκρασίας του και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος μέσου. Πρόκειται για το νόμο ψύξεως του Νεύτωνα, που ισχύει βεβαίως και για τη θέρμανση. Παρουσιάζομε στη συνέχεια ένα παράδειγμα σχετικό με το νόμο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.2.

Έστω ότι μία γαλοπούλα βρίσκεται σ' ένα ψυγείο θερμοκρασίας $2^o C$ και στη συνέχεια τοποθετείται σ' ένα φούρνο θερμοκρασίας $200^o C$. Μετά από παρέλευση 30 min η εσωτερική θερμοκρασία της γαλοπούλας ανέρχεται στους $16^o C$. Αν το ψήσιμο της γαλοπούλας ολοκληρώνεται όταν η εσωτερική της θερμοκρασία φτάσει τους $88^o C$, να βρείτε το χρόνο που απαιτείται συνολικά για το ψήσιμο της γαλοπούλας.

Λύση.

Αν συμβολίσομε με $\theta = \theta(t)$ τη θερμοκρασία της γαλοπούλας, τότε ο ρυθμός μεταβολής αυτής θα δίνεται από την παράγωγο $\dfrac{d\theta}{dt}$. Επομένως, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διεργασία θερμάνσεως είναι η

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma(200-\theta),$$

όπου γ ένας συντελεστής αναλογίας (που εξαρτάται από το μέσο). Η τελευταία είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και θα έχομε:

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma(200-\theta) \Leftrightarrow \frac{d\theta}{200-\theta} = \gamma\, dt \Leftrightarrow \int \frac{d\theta}{200-\theta} = \int \gamma\, dt \Leftrightarrow -\ln(200-\theta) = \gamma t + c.$$

Από τη λύση της διαφορικής εξισώσεως προκύπτει ότι:

$$t = \frac{1}{\gamma}(-\ln(200-\theta)-c). \tag{7.6.3}$$

Αφού τη χρονική στιγμή $t=0$ η γαλοπούλα βρισκόταν σε θερμοκρασία $2^o C$, ενώ στο χρόνο $t=30$ η θερμοκρασία της ήταν $16^o C$, από την (7.6.3) προκύπτει $0 = \dfrac{1}{\gamma}(-\ln(200-2)-c) \Rightarrow c = -\ln 198$ και

$$30 = \frac{1}{\gamma}(-\ln(200-16)-c) \Rightarrow 30\gamma = -c - \ln 184 \Rightarrow \gamma = \frac{\ln 198 - \ln 184}{30}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των c, γ στην έκφραση (7.6.3) βρίσκομε το χρόνο που απαιτείται για το ψήσιμο της γαλοπούλας

$$t = 30\,\frac{\ln 198 - \ln 112}{\ln 198 - \ln 184} \cong 233 \min.$$

7.6.3 Εξάπλωση επιδημίας.

Στη Βιολογία με τον όρο «πληθυσμό» εννοούμε τον αριθμό των ατόμων ή οργανισμών που ζουν σε μια δεδομένη περιοχή. Η εξάπλωση επιδημίας σε έναν πληθυσμό αποτελεί ένα φυσικό πρόβλημα, το οποίο μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας διαφορικής εξισώσεως.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μεταβολής της νόσου του πληθυσμού που αποτελείται από φορείς ιού μίας γρίπης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.3.

α) Έστω ότι σε μια μονάδα νεοσυλλέκτων του Πολεμικού Ναυτικού κατατάχτηκαν συνολικά 3000 άτομα, 3 εκ των οποίων είναι φορείς ιού μιας γρίπης. Ο ιός μεταδίδεται με ρυθμό ίσο με το ένα δεκάκις χιλιοστό του γινομένου των νοσούντων και μη νοσούντων ατόμων. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που θα νοσούν μετά από δύο ημέρες.

β) Μετά από πόσες ημέρες θα έχουν νοσήσει όλοι οι νεοσύλλεκτοι; Είναι λογικό το ερώτημα αυτό; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση.

α) Έστω $x = x(t)$ ο αριθμός των νοσούντων ατόμων τη χρονική στιγμή *t*. Από υπόθεση για το ρυθμό μεταβολής, θα έχομε τη σχέση

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10^4} x(3000 - x), \qquad (7.6.4)$$

η οποία είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Η λύση της (7.6.4) είναι η (αφήνεται ως άσκηση στο σπουδαστή)

$$x(t) = \frac{3000}{1 + c e^{-0,3t}}.$$

Από την αρχική συνθήκη $x(0) = 3$, μπορούμε να βρούμε τη σταθερά *c*, ως εξής:

$$x(0) = 3 \Rightarrow \frac{3000}{1 + c e^0} = 3 \Rightarrow c = 999.$$

Άρα

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 999 e^{-0,3t}} \qquad (7.6.5)$$

και ο αριθμός των νεοσυλλέκτων που θα νοσούν μετά από δύο ημέρες θα δίνεται από την (7.6.5) για $t = 2$, δηλαδή θα είναι ίσος με:

$$x(2) = \frac{3000}{1 + 999 e^{-0,6t}} \Rightarrow x(2) \cong 5.$$

β) Αφού θέλομε να έχουν νοσήσει όλοι οι νεοσύλλεκτοι, δηλαδή και τα 3000 άτομα, θα πρέπει να έχουμε $x(t) = 3000$, οπότε παίρνομε

$$3000 = \frac{3000}{1 + 999 e^{-0,3t}} \Rightarrow e^{-0,3t} = 0.$$

Η ισότητα αυτή δεν ισχύει για καμμία συγκεκριμένη πραγματική τιμή του χρόνου *t*. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει για $t \to +\infty$, δηλαδή χρειάζεται άπειρος χρόνος για να νοσήσουν όλοι οι νεοσύλλεκτοι. Επομένως, το ερώτημα αυτό δεν έχει νόημα, αφού το ζητούμενο ενδεχόμενο πρακτικά δεν θα συμβεί ποτέ.

7.6.4 Αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας.

Γνωρίζομε ότι κατά την κίνηση ενός σώματος ασκείται κάποια αντίσταση (δύναμη *F*), η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητάς του. Όσο πιο αργά κινείται το σώμα, τόσο λιγότερο εμποδίζεται η κίνησή του από τον αέρα. Αν *m* είναι η μάζα του σώματος και *υ* η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή *t*, η αντίσταση *F* συνδέεται με την ταχύτητα *υ* με τη σχέση $F = m\frac{d\upsilon}{dt}$, όπου η παράγωγος $\frac{d\upsilon}{dt}$ εκφράζει την επιτάχυνση του σώματος. Υποθέτοντας ότι η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας, έχομε:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{k}{m}\upsilon$$

($k > 0$ μία σταθερά), η οποία αποτελεί μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Η γενική λύση της προκύπτει ως εξής:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}dt \Leftrightarrow \int\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int\frac{k}{m}dt \Leftrightarrow \ln\upsilon = -\frac{k}{m}t + c_1 \Leftrightarrow \upsilon = e^{-\frac{k}{m}t} e^{c} \Leftrightarrow \upsilon = c e^{-\frac{k}{m}t}$$

(όπου θέσαμε $c = e^{c}$) και αν θεωρήσομε επί πλέον την αρχική συνθήκη $\upsilon(0) = \upsilon_0$, η λύση γράφεται στη μορφή:

$$\upsilon = \upsilon_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{7.6.6}$$

Από τον τύπο (7.6.6) παρατηρούμε ότι αν η μάζα του σώματος είναι πολύ μεγάλη π.χ. ένα επιβατηγό πλοίο, τότε απατείται η παρέλευση μεγάλου χρονικού διαστήματος μέχρι αυτό να σταματήσει.

Επιπρόσθετα, αν λάβομε υπόψη ότι η συνάρτηση θέσεως $s(t)$ του κινητού είναι η παράγωγος της ταχύτητας $\upsilon = \upsilon(t)$ ως προς το χρόνο, μπορούμε να βρούμε το μαθηματικό τύπο της συναρτήσεως θέσεως $s(t)$ του κινητού συναρτήσει του t. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.4.

Έστω σώμα που κινείται με αρχική ταχύτητα υ χωρίς ώθηση, με μόνη δύναμη ασκήσεως πάνω του την αντίσταση του αέρα, η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητάς του. Να βρείτε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.6.6), για το ρυθμό μεταβολής της θέσεως $s(t)$ του κινητού ως προς το χρόνο t, μπορούμε να γράψομε: $\frac{ds}{dt} = \upsilon_0 e^{-\frac{k}{m}t}$.

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ως προς t παίρνομε $\int \frac{ds}{dt} = \upsilon_0 \int e^{-\frac{k}{m}t} dt \Rightarrow s(t) = -\upsilon_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + c$.

Αν θεωρήσομε ότι στην αρχή του χρόνου το σώμα βρίσκεται στην αρχή του άξονα, δηλαδή $s(0) = 0$, προκύπτει ότι $-\upsilon_0 \frac{m}{k} + c = 0 \Rightarrow c = \upsilon_0 \frac{m}{k}$ και επομένως η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο:

$$s(t) = -\upsilon_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \upsilon_0 \frac{m}{k} = \upsilon_0 \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Όταν το σώμα μας θα σταματήσει, η ταχύτητά του θα πρέπει να γίνει μηδενική. Όπως φαίνεται από την (7.6.6) αυτό συμβαίνει όταν $t \to +\infty$, δηλαδή σε άπειρο χρόνο. Επομένως, για να βρούμε πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα, αρκεί να βρούμε το όριο του $s(t)$ όταν $t \to +\infty$. Έχομε:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{t \to +\infty} \upsilon_0 \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \upsilon_0 \frac{m}{k} \lim_{t \to +\infty}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \upsilon_0 \frac{m}{k},$$

οπότε το σώμα θα διανύσει, μέχρι να ακινητοποιηθεί απόσταση ίση με $\upsilon_0 \frac{m}{k}$.

7.6.5 Απορρόφηση αλκοόλ από τον ανθρώπινο οργανισμό.

Η απορρόφηση ενός υγρού από τον ανθρώπινο οργανισμό μπορεί να μοντελοποιηθεί με χρήση διαφορικών εξισώσεων, εφόσον είναι γνωστός ο τρόπος, με τον οποίο μεταβάλλεται με το χρόνο ο ρυθμός απορροφήσεως. Ένα τέτοιο πρόβλημα περιγράφεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.5.

Σύμφωνα με τον κώδικα οδικής κυκλοφορίας, είναι παράνομο να οδηγεί κάποιος όταν η περιεκτικότητα αλκοόλ στο αίμα του είναι μεγαλύτερη του $0{,}08\%$. Έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι ο ρυθμός απορροφήσεως του αλκοόλ από τον ανθρώπινο οργανισμό είναι ανάλογος της ποσότητας αλκοόλ που καταναλώθηκε, με συντελεστή αναλογίας $-1/10$. Να βρείτε μετά από πόση ώρα μπορεί να οδηγήσει κάποιος από τη στιγμή που το αλκοτέστ έδειξε περιεκτικότητα αλκοόλ στο αίμα του ίση με $0{,}16\%$.

Λύση.

Σύμφωνα με την περιγραφή της ασκήσεως, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την απορρόφηση $y=y(t)$ του αλκοόλ από τον ανθρώπινο οργανισμό είναι η $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{10}y$.

Αν διαχωρίσομε τις μεταβλητές στην παραπάνω εξίσωση και έπειτα ολοκληρώσομε και τα δύο μέλη της, έχομε:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{1}{10}dt\Rightarrow y(t)=c\,e^{-0,1t}.$$

Αν θεωρήσομε ως χρονική στιγμή $t=0$ τη στιγμή που γίνεται το αλκοτέστ, θα έχομε την αρχική συνθήκη $y(0)=0{,}16$ και η σταθερά c υπολογίζεται εύκολα ως εξής $y(0)=0{,}16\Leftrightarrow c\,e^{-(0,1)\cdot 0}=0{,}16\Leftrightarrow c=0{,}16.$

Επομένως $y(t)=0{,}16e^{-0,1t}$. Για να βρούμε μετά από πόση ώρα μπορεί ο οδηγός να οδηγήσει το αυτοκίνητο του, δεδομένου ότι είναι παράνομο να οδηγεί κάποιος όταν η περιεκτικότητα αλκοόλ στο αίμα του είναι μεγαλύτερη του $0{,}08\%$, θα πρέπει να λύσομε την ανισότητα $y(t)\le 0{,}08$ ως προς t. ΄Εχομε:

$$y(t)\le 0{,}08\Rightarrow 0{,}16e^{-0,1t}\le 0{,}08\Rightarrow t\ge 6{,}94,$$

οπότε ο συγκεκριμένος οδηγός μπορεί να οδηγήσει μετά από 7 ώρες περίπου.

7.6.6 Ηλεκτρικά κυκλώματα.

Στο παράδειγμα 7.4.3 το οποίο αναφέρεται σε ηλεκτρικά κυκλώματα, είδαμε ότι, η βασική εξίσωση που ικανοποιεί η ένταση $I=I(t)$ του ρεύματος σ' ένα κύκλωμα RL (το οποίο αποτελείται από μια αντίσταση R και ένα πηνίο L και περιλαμβάνει μια ηλεκτρεγερτική δύναμη E) είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}\cdot \tag{7.6.7}$$

Εκτός από το παραπάνω κύκλωμα υπάρχει και το ηλεκτρικό κύκλωμα RC, το οποίο περιλαμβάνει μια ηλεκτρεγερτική δύναμη E και αποτελείται από μία αντίσταση R και έναν πυκνωτή C χωρίς πηνίο. Σε ένα τέτοιο κύκλωμα, η διαφορική εξίσωση που εκφράζει το ηλεκτρικό φορτίο $Q=Q(t)$ στα άκρα του πυκνωτή είναι η

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=\frac{E}{R}\cdot \tag{7.6.8}$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής του φορτίου ως προς το χρόνο, δηλαδή:

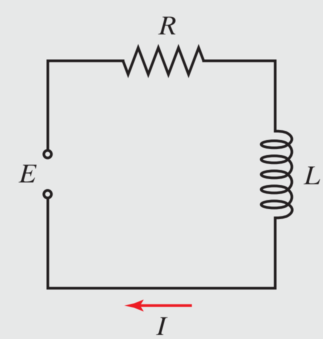
$$I=\frac{dq}{dt}\cdot \tag{7.6.9}$$

Ας δούμε στη συνέχεια δύο συγκεκριμένα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.6.

α) ΄Εστω ένα κύκλωμα RC, (σχ. 7.6α) στο οποίο έχομε μια ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής 400 συν(2t), αντίσταση 100 Ohm και έναν πυκνωτή χωρητικότητας 1/100 Farad. Να βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t υποθέτοντας ότι αρχικά δεν υπάρχει φορτίο στον πυκνωτή.

β) Να βρείτε το ρεύμα του κυκλώματος τη χρονική στιγμή $t=\pi/2$.



Σχ. 7.6α.

Λύση.

α) Θα υπολογίσομε αρχικά το φορτίο q του πυκνωτή. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα $E=400$ συν(2t), $R=100$ Ohm και $C=10^{-2}$ Farad στην εξίσωση (7.6.8) έχομε:

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{100\cdot 10^{-2}}q=\frac{400\,\text{συν}2t}{100}\Leftrightarrow\frac{dq}{dt}+q=4\ \text{συν}2t\,.$$

Αυτή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και η λύση της δίνεται από τον τύπο (αφήνεται ως άσκηση στον σπουδαστή)

$$q(t)=c\,e^{-t}+\frac{8}{5}\text{ημ}2t+\frac{4}{5}\text{συν}2t\,.$$

Από την αρχική συνθήκη $q(0)=0$ και με τη βοήθεια της λύσεως υπολογίζεται η σταθερά c, ως εξής:

$$q(0)=0\Rightarrow c+\frac{4}{5}=0\Rightarrow c=-\frac{4}{5}\cdot$$

Άρα η λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι η $q=-\frac{4}{5}e^{-t}+\frac{8}{5}\text{ημ}2t+\frac{4}{5}\text{συν}2t$.
Λόγω της (7.6.9) μπορούμε να γράψομε:

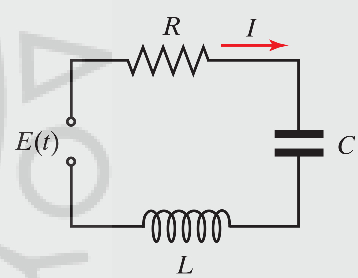
$$I=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dq}\left(-\frac{4}{5}e^{-t}+\frac{8}{5}\text{ημ}2t+\frac{4}{5}\text{συν}2t\right)=\frac{4}{5}e^{-t}+\frac{16}{5}\text{συν}2t-\frac{8}{5}\text{ημ}2t.$$

β) Το ρεύμα του κυκλώματος τη χρονική στιγμή $t=\pi/2$ θα είναι ίσο με:

$$I(\frac{\pi}{2})=\frac{4}{5}e^{-\pi/2}+\frac{16}{5}\text{συν}(2\cdot\frac{\pi}{2})-\frac{8}{5}\text{ημ}(2\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{4}{5}e^{-\pi/2}-\frac{16}{5}\cdot$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.7.

Έστω ένα κύκλωμα RCL (σχ. 7.6β) το οποίο αποτελείται από μια ηλεκτρεγερτική δύναμη $E(t)$ volt, αντίσταση R Ohm, ένα πηνίο L Henry και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C Farad, όλα συνδεδεμένα σε σειρά. Να βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα τη χρονική στιγμή t, καθώς επίσης και το φορτίο q του πυκνωτή.



Σχ. 7.6β.

Λύση.

Σύμφωνα με το νόμο του Kirchhoff, η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το ρεύμα $I=I(t)$ ενός τέτοιου κυκλώματος είναι η:

$$R\,I+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\,q-E(t)=0, \tag{7.6.10}$$

Επίσης το φορτίο q συνδέεται με το ρεύμα I μέσω των σχέσεων:

$$I=\frac{dq}{dt},\qquad \frac{dI}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2} \tag{7.6.11}$$

και με αντικατάσταση των τελευταίων στην πρώτη παίρνομε:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{CL}\,q-\frac{1}{L}E(t)=0\,. \tag{7.6.12}$$

Συνήθως οι αρχικές συνθήκες που δίνονται, έχουν τη μορφή:

$$q(0)=q_0,\qquad I(0)=\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0}=I_0\,.$$

Παραγωγίζοντας την (7.6.10) ως προς t και χρησιμοποιώντας τις (7.6.11), φτάνομε στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{CL}I=\frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt}\cdot \tag{7.6.13}$$

Για να βρούμε μια έκφραση για το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου t, μπορούμε είτε να προχωρήσομε σε λύση της (7.6.13), είτε να λύσουμε την (7.6.12) ως προς το φορτίο $q = q(t)$ και στη συνέχεια να παραγωγίσομε τη συνάρτηση $q = q(t)$ και να υπολογίσομε την ένταση $I = \dfrac{dq}{dt}$.

Ασκήσεις.

7.6.1. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται με ρυθμό ανάλογο με την παρούσα ποσότητά του, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{dN}{dt} = k\,N,$$

όπου $N = N(t)$ είναι η μάζα του υλικού και k μια σταθερά. Αν αρχικά υπήρχαν 50 mg ραδιενεργού υλικού, ενώ έπειτα από δύο ώρες παρατηρήθηκε ότι το υλικό έχει χάσει το 10% της αρχικής του μάζας, να βρείτε:

α) Μια έκφραση για τη μάζα που απομένει οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Τη μάζα του υλικού μετά από 4 ώρες.

γ) Το χρόνο που χρειάζεται για να απομείνει το 50% της αρχικής μάζας.

7.6.2. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται με ρυθμό ανάλογο με την παρούσα ποσότητά του. Υποθέτομε ότι αρχικά υπάρχουν 100 mg, ενώ έπειτα από δύο χρόνια παρατηρήθηκε ότι έχει διασπαστεί το 5% της αρχικής του μάζας. Να βρείτε:

α) Μια έκφραση για τη μάζα για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Το χρόνο που χρειάζεται για να διασπαστεί 10% της αρχικής μάζας.

7.6.3. Σε μία καλλιέργεια αναπτύσσονται βακτηρίδια με ρυθμό ανάλογο με τον πληθυσμό τους. Υποθέτομε ότι αρχικά υπάρχουν 300 άτομα, ενώ μετά από 2 ώρες το πλήθος ατόμων της καλλιέργειας έχει αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος ατόμων της καλλιέργειας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Το χρόνο που χρειάζεται για να διπλασιαστεί ο αρχικός πληθυσμός.

7.6.4. Ένα σώμα θερμοκρασίας $0^o\,F$ τοποθετείται σε περιβάλλον, το οποίο έχει θερμοκρασία $100^o\,F$. Μετά παρέλευση 10 min η θερμοκρασία του σώματος γίνεται $25^o\,F$. Να βρείτε:

α) Το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει η θερμοκρασία στους $50^o\,F$.

β) Τη θερμοκρασία του σώματος μετά από 20 min.

7.6.5. Ένα σώμα θερμοκρασίας 50^oF τοποθετείται σε φούρνο με σταθερή θερμοκρασία $150^o\,F$. Αν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $75^o\,F$, να βρείτε το χρόνο που απαιτείται, ώστε η θερμοκρασία να φτάσει τους $100^o\,F$.

7.6.6. Ένα σώμα θερμοκρασίας $50^o\,F$ τοποθετείται σε φούρνο με σταθερή θερμοκρασία $150^o\,F$. Αν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $75^o\,F$, να βρείτε το χρόνο που απαιτείται, ώστε η θερμοκρασία του να φτάσει τους $100^o\,F$.

7.6.7. Ένα φλιτζάνι ζεστής σοκολάτας με αρχική θερμοκρασία $190^o\,F$, αφήνεται να παγώσει σε περιβάλλον θερμοκρασίας $72^o\,F$. Η θερμοκρασία του μετά από δύο λεπτά πέφτει στους $150^o\,F$. Να υπολογίσετε:

α) Τη θερμοκρασία της σοκολάτας μετά από 5 min.

β) Το χρόνο που χρειάζεται για να πέσει η θερμοκρασία στους $100^o\,F$.

7.6.8. Σ’ έναν πληθυσμό που αποτελείται από 500 ποντίκια μολύνθηκαν σκόπιμα τα 5 από αυτά από ιό μιας μεταδοτικής νόσου. Ο σκοπός της μολύνσεως ήταν να ελεγχθεί μια θεωρία επιδημικής εξαπλώσεως, σύμφωνα με την οποία ο ρυθμός μεταβολής του μολυσμένου πληθυσμού $N(t)$ είναι ανάλογος με το γινόμενο του πλήθους των ποντικών που μολύνθηκαν επί το πλήθος των υγιών ποντικών, δηλαδή $\frac{dN}{dt}=k\,N(500-N)$, όπου k μια σταθερά. Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να μολυνθεί ο μισός πληθυσμός.

7.6.9. Έστω κύκλωμα RC, το οποίο αποτελείται από 100 volt, αντίσταση 5 Ohm και έναν πυκνωτή χωρητικότητας $\frac{2}{100}$ farad, με αρχικό φορτίο $q=5$ Coulomb. Να βρείτε:

α) το φορτίο του πυκνωτή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

7.6.10. Έστω κύκλωμα RCL RCL, το οποίο αποτελείται από ηλεκτρεγερτική δύναμη 10ημt Volt, μία αντίσταση 180 Ohm, ένα πηνίο $L=20$ Henry και έναν πυκνωτή χωρητικότητας $\frac{1}{280}$ Farad, όλα συνδεδεμένα σε σειρά. Αν θεωρήσομε τον πυκνωτή χωρίς αρχική φόρτιση και ότι το κύκλωμα διατρέχεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από ρεύμα $I=1$ Ampere, να βρείτε το φορτίο q του πυκνωτή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

7.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Συνήθης διαφορική εξίσωση $n-$τάξεως.	Μία εξίσωση που περιέχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή x, μία συνάρτηση $y=y(x)$ και έναν πεπερασμένο αριθμό παραγώγων της y ως προς x, δηλαδή: $F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)},y^{(n)}\right)=0,\quad n\geq 1$
Τάξη μιας διαφορικής εξισώσεως.	Είναι η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται σ' αυτήν.
Μερική λύση διαφορικής εξισώσεως.	Κάθε λύση της, η οποία προκύπτει από τη γενική λύση, όταν στις αυθαίρετες σταθερές που περιλαμβάνει δοθούν συγκεκριμένες τιμές.
Διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών πρώτης τάξεως.	$P(x)\cdot M(y)\frac{dy}{dx}+Q(x)\cdot N(y)=0$
Ομογενής συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$, βαθμού m.	$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$ για κάθε $\lambda\neq 0$
Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	$y'(x)+p(x)y=f(x)$, όπου $p(x)$, $f(x)$ δεδομένες συνεχείς συναρτήσεις.
Ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$, όπου $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού και συνεχείς ως προς τις μεταβλητές x και y.

Ολοκληρωτικός παράγοντας ή πολλαπλασιαστής του Euler για τη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως $y'(x)+p(x)y=f(x)$.	$Q(x)=e^{\int p(x)dx}$
Λύση γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξης $y'(x)+p(x)y=f(x)$.	$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+c\right],\ c\in \mathrm{R}$
Διαφορική εξίσωση Bernoulli.	$y'(x)+p(x)y=f(x)y^m,\ \ m\neq 0{,}1$ όπου $p(x),\ f(x)$ συνεχείς συναρτήσεις.
Γραμμική διαφορική εξίσωση $n-$τάξεως.	$\alpha_n y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+...+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=f(x)$
Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές.	$y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=0,\quad (p,q$ σταθερές$)$
Χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξισώσεως $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=0$.	$\lambda^2+p\lambda+q=0$
Χαρακτηριστική εξίσωση της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως $n-$τάξεως.	$\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+...+\alpha_1\lambda+\alpha_0=0$
Γενική λύση $y_{ομ}$ της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=0$ όπου $p,\ q$ σταθερές.	α) $y_{O\mu}=c_1e^{\lambda_1 x}+c_1e^{\lambda_2 x}$ αν $\Delta>0$ β) $y_{O\mu}=(c_1+c_2x)\,e^{\lambda x}$ αν $\Delta=0$ γ) $y_{ομ}=e^{ax}\,(c_1$ συν$\beta x+c_2$ ημ$\beta x)$ αν $\Delta<0$ ($\Delta=p^2-4q$ η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξισώσεως $\lambda^2+p\lambda+q=0$
Γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=f(x)$.	$y=y_0+y_\mu$ όπου y_0 η γενική λύση της ομογενούς $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=0$ και $y_μ$ μία μερική λύση της μη ομογενούς $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=f(x)$
Μερική λύση της $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=P_n(x)$, όπου $P_n(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς x.	α) $y_\mu=a_nx^n+...+a_1x+a_0$, αν $q\neq 0$ β) $y_\mu=x\,(a_nx^n+...+a_1x+a_0$, αν $q=0$
Μερική λύση της $y''(x)+p\,y'(x)+q\,y(x)=k\,e^{\lambda x}$.	$y_\mu=A\,e^{\lambda x}$
Μερική λύση της $y''(x)+py'(x)+qy(x)=k_1$ημ$\omega x+k_2$συνωx.	$y_\mu=A$ ημ$\omega\, x+B$ συν$\omega\, x$

7.8 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Η $y''+3xy'+4y=x^2$, είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως.	**Σ Λ**
2.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=x^2$ είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως.	**Σ Λ**
3.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=x^2$ είναι μία μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	**Σ Λ**
4.	Η $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}=0,\ w=w(x,y)$ είναι μία μερική διαφορική εξίσωση.	**Σ Λ**
5.	Η συνάρτηση $y(x)=2e^{-x}+xe^{-x}$ είναι λύση της $y''+2y'+y=0$.	**Σ Λ**
6.	Η συνάρτηση $y(x)=1$ είναι λύση της $y''+2y'+y=x$.	**Σ Λ**
7.	Η $y=$ ημ$2x$ είναι η γενική λύση της $y''+4y=0$.	**Σ Λ**
8.	Η $y=$ ημ$2x$ είναι μία μερική λύση της $y''+4y=0$.	**Σ Λ**
9.	Η $y=$ ημ$2x+c,\ c\in\mathbf{R}$ είναι γενική λύση της $y''+4y=0$.	**Σ Λ**
10.	Η $y(x)=2e^{3-x}$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'+y=0,\ y(3)=2$.	**Σ Λ**
11.	Μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξεως έχει τη μορφή $F(x,y,y')=0$.	**Σ Λ**
12.	Οι λύσεις μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως δίνονται από την $y=\Phi(x,c)$, $c\in R$.	**Σ Λ**
13.	Η λύση μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως μπορεί να δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την $F(x,y,c)=0$.	**Σ Λ**
14.	Η λύση μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως μπορεί να δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την $F(x,y,c_1,c_2)=0,\ c_1,c_2\in\mathbf{R}$.	**Σ Λ**
15.	Η εξίσωση $e^x dx-y\,dy=0$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.	**Σ Λ**
16.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^4+2y^4}{xy^3}$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.	**Σ Λ**
17.	Η συνάρτηση $f(x,y)=x^4+2y^4$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού 4.	**Σ Λ**
18.	Η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{x^4+2y^4}{xy^3}$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού 4.	**Σ Λ**
19.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση.	**Σ Λ**

20.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ επιλύεται με τη βοήθεια της αντικαταστάσεως $z=\dfrac{x}{y}$.	**Σ Λ**
21.	Η εξίσωση $y'+3y=x$ είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	**Σ Λ**
22.	Η εξίσωση $y'-\dfrac{3}{x}y=x^4y^{1/3}$ είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	**Σ Λ**
23.	Η συνάρτηση $y(x)=c_1e^{-x}+c_2\,e^{2x}$ είναι λύση της $y''-y'-2y=0$.	**Σ Λ**
24.	Η γενική λύση της $y''+py'+qy=0$ με $p^2-4q<0$ δίνεται από τον τύπο $y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$.	**Σ Λ**
25.	Η γενική λύση της $y''+py'+qy=0$ με $p^2-4q>0$ δίνεται από τον τύπο $y=e^{ax}(c_1\,\text{συν}\beta x+c_2\,\text{ημ}\beta x)$.	**Σ Λ**
26.	Η γενική λύση της $y''+py'+qy=0$ με $p^2-4q=0$ δίνεται από τον τύπο $y=c_1\,e^{\lambda x}+c_2\,e^{\lambda x},\ c_1,c_2\in\mathbf{R}$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Η διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ έχει μερική λύση την: α) $y=x+1$ β) $y=-\dfrac{1}{x}$ γ) $y=x$ δ) $y=x^2$
2.	Η διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=2x\sqrt{y-1}$ έχει γενική λύση την: α) (x + c)^2 $(x+c)^2$ β) $1+\dfrac{(x^2+c)^2}{4}$ γ) $y=-\dfrac{1}{x}+c$ δ) $y=-\dfrac{c}{x^2}$
3.	Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=x^4,\ x>0$ έχει γενική λύση την: α) $1+\dfrac{(x^5+c)^2}{4}$ β) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{(x^5+c)^2}{4}$ γ) $\dfrac{x^5}{3}+cx^2$ δ) $\dfrac{x^5}{3}+cx^2+2x$
4.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(1+x^2)y'+2xy=1,\ y(0)=1$ δίνεται από τον τύπο: α) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}+c$ β) $y=x+3$ γ) $y=-\dfrac{4}{x^2}$ δ) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$
5.	Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως Bernoulli $y'+\dfrac{3}{x}y=x^2y^2,\ x>0$ είναι η: α) $y=x^3\ln x+c$ β) $y=\dfrac{1}{x^3}(c-\ln x)^{-1}$ γ) $y=\dfrac{1}{x^5}(c-2\ln x)^{-1}$ δ) $y=\dfrac{2}{x^3}(c-2\ln x)^{-1}$

6.	Η συνάρτηση $f(x,y)=x^3+xy^2e^{x/y}$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού: α) 3 β) 2 γ) 1 δ) 4
7.	Η λύση της διαφορικής εξισώσεως $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ είναι η: α) $y=x^2\ln x+2cx^3$ β) $y=\dfrac{1}{x^2}\ln x+c$ γ) $y^2=x^2\ln x+2cx^3$ δ) $y^2=2x^2\ln x-2cx^2$
8.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, $y(1)=-2$ δίνεται από τον τύπο: α) $y=-\sqrt{2x^2\ln x+4x^2}$ β) $y=+\sqrt{2x^2\ln x+4x^2}$ γ) $y^2+x=\sqrt{3x^2\ln x+4x^2}$ δ) $y^2+x=x^2+\sqrt{x^2\ln x+3x^2}$
9.	Η λύση της διαφορικής εξισώσεως $y'=\dfrac{x+1}{y^4+1}$ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η: α) $y-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^5}{5}-x=c$ β) $y^3-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^8}{8}-x=c$ γ) $\ln(xy)-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^5}{5}-x=c$ δ) $e^{x+y}-\ln(x-y)=c$
10.	Η λύση της διαφορικής εξισώσεως $y'=-\dfrac{y^2}{x}$, $x>0$ που διέρχεται από το σημείο $(1,\dfrac{1}{3})$ είναι η: α) $y=x+3$ β) $y=(x+3)^{-2}$ γ) $y=(3+\ln x)^{-1}$ δ) $y=x+(3-\ln x)^{-1}$
11.	Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως $y''-6y'+25y=0$ δίνεται από: α) $y=c_1e^{3x}\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x$ β) $y=e^{3x}(c_1\,\text{συν}4x+c_2\,\text{ημ}3x)$ γ) $y=c_1xe^{3x}\text{συν}4x+c_2xe^{3x}\text{ημ}4x$ δ) $y=e^{3x}\text{συν}4x+2c_2e^{3x}\text{ημ}4x$
12.	Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y''-6y'+25y=64e^{-x}$. Η λύση της σύμφωνα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών είναι η: α) $y=c_1e^{3x}\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x+4e^{x}$ β) $y=c_1e^{3x}\text{συν}5x+c_2e^{3x}\text{ημ}5x+4e^{x}$ γ) $y=e^{2x}(c_1\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x)+2e^{-x}$ δ) $y=e^{3x}(c_1\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x)+2e^{-x}$
13.	Μία μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως $y''=9x^2+2x-1$ είναι η: α) $y_\mu=-\dfrac{2}{x}+1$ β) $y_\mu=-\dfrac{2}{x}+1$ γ) $y_\mu=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^4}{4}$ δ) $y_\mu=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^4}{4}+cx,\ c\in\mathbf{R}$
14.	Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως $y''-y'-2y=4x^2$ είναι η:

	α) $y = y_0 + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - 2x^2 + 3x - 3$ β) $y = y_0 + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$ γ) $y = y_0 + y_\mu = c_1 e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$ δ) $y = y_0 + y_\mu = c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$
15.	Δίνεται η διαφορική εξίσωση Bernoulli $y' + \frac{6}{t} y = 3y^{4/3},\ t > 0$. Η γενική της λύση είναι η: α) $y = t^2 + c$ β) $y = \dfrac{1}{(ct^2 + t)^3}$, με $ct^2 + t \neq 0,\ t > 0$ γ) $y = (t^2 + c)^{-1},\ t^2 + c \neq 0$ δ) $y = \dfrac{t^2}{(ct^2 + t)^3}$, με $ct^2 + t \neq 0,\ t > 0$

7.9 Γενικές ασκήσεις.

7.9.1. Να προσδιορίσετε την άγνωστη συνάρτηση, την ανεξάρτητη μεταβλητή και την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

α) $y'' - 3yy' + xy = 0$ β) $y^{(6)} + 4y^2 y''' + 5y^8 = x$

γ) $\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)^n = y^3 + 2$ δ) $\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)^{3/2} = 1 + x - y$

7.9.2. Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $\dfrac{dy}{dx} = -2xy$ β) $y' = y\,\text{ημ}x$ γ) $2\sqrt{x}\,\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$

δ) $\dfrac{dy}{dx} = (64xy)^{\frac{1}{3}}$ ε) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-1)y^5}{x^2(2y^3 - y)}$

7.9.3. Να βρείτε τις σταθερές c_1 και c_2, ώστε η συνάρτηση $y(x) = c_1\,\text{ημ}x + c_2\,\text{συν}x$ να ικανοποιεί τις

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

7.9.4. Να βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'' + 4y = 0$, που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

7.9.5. Να επιλύσετε τα επόμενα προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $y' - 2xy = 0,\quad y(0) = -1$ β) $y' - \dfrac{1}{x^2} y = 0,\quad y(0) = 2$

γ) $y' + y = 2,\quad y(0) = 0$ δ) $y' + y = e^x,\quad y(0) = 1$

ε) $xy' + 2y = 4x^2,\quad y(1) = 4$ στ) $y' - 2y = x,\quad y(0) = \dfrac{3}{4}$

7.9.6. Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' + 3y = 2xe^{-3x}$ β) $xy' + (x-2)y = 3x^3 e^{-x}$ γ) $x(x+1)y' - y = 2x^2(x+1)$

δ) $y' + \dfrac{2x-3}{x} y = 4x^3$ ε) $y' - 5y = e^x$

7.9.7. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $\dfrac{dy}{dx} = y e^x, \quad y(0) = 2e$ β) $y y' = \eta\mu x, \quad y(0) = 2$

γ) $y' = e^{x+y}, \quad y(0) = 1$ δ) $(y + e^{-y}) y' = 1, \quad y(1) = 1$

7.9.8. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' + y = x y^3$ β) $y' + y = y^{-1}$

7.9.9. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $\dfrac{dy}{dx} = y e^x, \quad y(0) = 2e$ β) $y y' = \eta\mu x, \quad y(0) = 2$

7.9.10. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομογενείς και, αν είναι, να βρείτε το βαθμό τους.

α) $f(x,y) = \dfrac{y - x}{x}$ β) $g(x,y) = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$

γ) $h(x,y) = \dfrac{y}{x + \sqrt{xy}}$ δ) $k(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + y^4}{x^3 y}$

7.9.11. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και σε περίπτωση θετικής απαντήσεως να τις επιλύσετε.

α) $y' = \dfrac{x + 2y}{x}$ β) $y' = \dfrac{y - x}{x}$

γ) $y' = \dfrac{y^2 + 2x}{xy}$ δ) $y'(y^2 - x^2) = 2xy$

7.9.12. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{1}{x}\, y = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}.$$

α) Να βρείτε τη γενική της λύση $y = y(x)$.

β) Να μελετήσετε τη συμπεριφορά της λύσεως όταν $x \to 0$, δηλαδή να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} y(x)$.

7.9.13. Να επιλύσετε τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις.

α) $y'' + 6y' + 9y = 0$ β) $y'' - 20y' + 64y = 0$ γ) $y'' + y' + 2y = 0$

δ) $y'' + y' + \dfrac{1}{4} y = 0$ ε) $\dfrac{d^2y}{dy^2} - 5\dfrac{dy}{dy} + 7y = 0$ στ) $\dfrac{d^2y}{dy^2} - 18\dfrac{dy}{dy} + 81y = 0$

7.9.14. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 I}{dt^2} - 4I = t^2 e^{-t}.$$

7.9.15. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' - y' - 2y = 0, \;\; y(0) = a, \;\; y'(0) = 2$.

α) Να βρείτε τη λύση του προβλήματος.

β) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς a, ώστε η λύση $y = y(t)$ να τείνει στο μηδέν όταν $t \to +\infty$, δηλαδή να ισχύει $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

7.9.16. Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

7.9.17. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y'' - 2y' + y = x^2 - 1$ β) $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$ γ) $y'' - 2y' + y = 4\text{συν}x$

δ) $y'' - 2y' + y = xe^x$ ε) $y'' - 2y' + y = 3e^x$ στ) $\dfrac{y' - y}{y''} = 3$

7.9.18. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της μορφή $y = p(x)\, y^2 + q(x)\, y + r(x) = 0$, όπου οι συναρτήσεις $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα A, λέγεται ***διαφορική εξίσωση Riccati***. Έστω η διαφορική εξίσωση Riccati

$$y' - e^{-x} y^2 + 3y - 3e^x = 0.$$

α) Να δειχθεί ότι η $y_1(x) = e^x$ είναι μερική λύση της.

β) Αν θέσομε $y(x) = e^x + \dfrac{1}{u(x)}$ να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$u' - u + e^{-x} = 0.$$

γ) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως του ερωτήματος (β).

δ) Να δειχθεί ότι η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξισώσεως είναι η:

$$y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^x + e^{-x}}$$

7.9.19. Ένα σώμα με άγνωστη θερμοκρασία μπαίνει σε ψυγείο, το οποίο έχει σταθερή θερμοκρασία $0^{o} F$. Μετά την παρέλευση 20 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $40^{o} F$ και μετά από 40 min είναι $20^{o} F$. Να βρείτε την αρχική θερμοκρασία του σώματος.

7.9.20. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας T μίας μεταλλικής ράβδου είναι η

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0, \quad T = T(t),$$

όπου k μία σταθερά. Υποθέτομε ότι η μεταλλική ράβδος θερμοκρασίας $100^{o} F$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ τοποθετείται σε περιβάλλον με θερμοκρασία $0^{o} F$. Αν μετά από 20 min η θερμοκρασία της ράβδου έχει γίνει $50^{o} F$, να βρείτε:

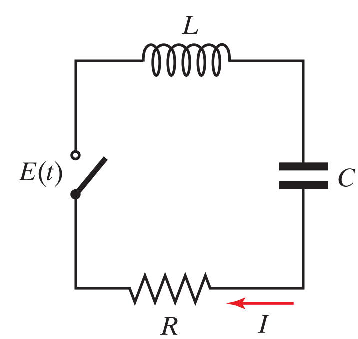
α) Το χρόνο που χρειάζεται για να πέσει η θερμοκρασία της ράβδου στους $20^{o} F$.

β) Τη θερμοκρασία της ράβδου μετά από 10 min.

7.9.21. Σε ένα κύκλωμα RC έχομε ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής $300\text{συν}2t$(σε Volt), μία αντίσταση 150 Ohm και έναν πυκνωτή χωρητικότητας 1/600 Farad. Αν ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο 5 Coulomb

α) Να βρείτε το φορτίο $q = q(t)$ του πυκνωτή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Να βρείτε το ρεύμα του κυκλώματος τη χρονική στιγμή $t = \pi/2$.



Σχ. 7.9.

7.9.22. Έστω κύκλωμα RL με ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής $4\text{ημ}t$ (σε Volt), μία αντίσταση 100 Ohm και ένα πηνίο $L = 4$ Henry. Αν το κύκλωμα έχει μηδενικό αρχικό ρεύμα, να υπολογίσετε το ρεύμα $I = I(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

7.9.23. Έστω κύκλωμα RCL (σχ. 7.9), το οποίο αποτελείται από ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής 200 συν (100*t)* Volt, μια αντίσταση 5 Ohm, ένα πηνίο $L = 0{,}05$ Henry και έναν πυκνωτή χωρητικότητας 0,0004 Farad, όλα συνδεδεμένα σε σειρά. Αν θεωρήσομε ότι το αρχικό ρεύμα είναι μηδέν και ο πυκνωτής δεν έχει αρχική φόρτιση, να υπολογίσετε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

8

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές που εμφανίζεται η ανάγκη λύσεως μίας ή περισσοτέρων διαφορικών εξισώσεων, οι μέθοδοι που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είτε δεν μπορούν να εφαρμοσθούν, είτε εφαρμόζονται με ιδιαίτερη δυσκολία. Μία εναλλακτική μέθοδος, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε τέτοια προβλήματα είναι ο μετασχηματισμός Laplace.

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός με πολλές εφαρμογές, τόσο στα θεωρητικά, όσο και στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσομε τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, θα παρουσιάσομε τις βασικότερες ιδιότητές του και θα αναδείξομε τη χρησιμότητά του στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών για διαφορικές εξισώσεις.

8.1 Ο μετασχηματισμός Laplace.

Στο κεφάλαιο 6 μελετήθηκε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ μίας συνεχούς συναρτήσεως f σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Στο ολοκλήρωμα αυτό, αν συμβεί το ένα ή και τα δύο άκρα της ολοκληρώσεως να είναι άπειρα και η f να είναι συνεχής σε κάθε υποδιάστημα του διαστήματος ολοκληρώσεως, τότε θα λέμε ότι έχομε ένα ***γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους***. Πιο συγκεκριμένα, ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους μπορεί να λάβει μία από τις παρακάτω μορφές:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων αυτών γίνεται, αφού πρώτα υπολογίσομε αντίστοιχα ολοκληρώματα με πεπερασμένο διάστημα ολοκληρώσεως και στη συνέχεια λάβομε το όριο όταν το αντίστοιχο άκρο τείνει στο άπειρο. Για παράδειγμα, αν $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $G(x)=\int f(x)dx$ (ισοδύναμα G είναι μια παράγουσα της f), τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} G(t) - G(a).$$

Ανάλογα έχομε τους επόμενους τύπους:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx = G(a) - \lim_{t\to-\infty} G(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} G(t) - \lim_{s\to+\infty} G(s).$$

Αν κάποιο από τα όρια που εμφανίζονται στους παρακάτω τύπους δεν υπάρχει, τότε θα λέμε ότι το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει. Υπάρχουν διάφορα κριτήρια για το πότε τα παραπάνω ολοκληρώματα υπάρχουν ή όχι, τα οποία είναι γνωστά ως ***κριτήρια συγκλίσεως*** των γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Η θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων είναι εκτενής και πολύ μεγάλη και δεν θα αποτελέσει αντικείμενο αναλυτικής μελέτης στο παρόν εγχειρίδιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.1

Να υπολογίσετε τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx$ β) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x-1}dx$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ με $f(x)=e^{-4x}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και σύμφωνα με τη θεωρία, το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-4x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{e^{-4\beta}-1}{-4}\right] = \frac{1}{4}.$$

β) Στη δεύτερη περίπτωση η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει είναι η $f:[3,+\infty)\to\mathbf{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Η f είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[3,+\infty)$ και για να υπολογίσομε το ολοκλήρωμα $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ θα πρέπει να υπολογισθεί αρχικά το $\int_3^{\beta}\frac{1}{x-1}dx$ και στη συνέχεια το όριο $\lim_{\beta\to+\infty}\int_3^{\beta}\frac{1}{x-1}dx$.

Όμως
$$\int_3^{\beta} \frac{1}{x-1} dx = \ln(\beta-1) - \ln 2$$
και $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \ln(\beta-1) = +\infty$. Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Από τα τρία διαφορετικά είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων που ορίσαμε, εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα είναι το πρώτο, αφού ενός τέτοιου τύπου ολοκλήρωμα εμφανίζεται στον ορισμό του ***μετασχηματισμού Laplace*** μιας συναρτήσεως f. Πιο συγκεκριμένα, έχομε τον επόμενο ορισμό:

Η ***μετασχηματισμένη Laplace*** μιας συνεχούς συναρτήσεως $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ είναι η συνάρτηση F που ορίζεται μέσω του γενικευμένου ολοκληρώματος πρώτου είδους
$$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx. \tag{8.1.1}$$
Ως πεδίο ορισμού της συναρτήσεως F, θεωρούμε το σύνολο των τιμών της μεταβλητής $s\in\mathbf{R}$, για τις οποίες υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα (8.1.1).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μεταβλητή s, κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στο δεξί μέλος της σχέσεως (8.1.1), θεωρείται σταθερά αφού η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x.

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον τύπο (8.1.1) αποκλίνει για κάθε $s\in\mathbf{R}$, τότε θα λέμε ότι η $f(x)$ δεν έχει μετασχηματισμένη Laplace.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.2

Να βρείτε η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=e^{ax}$, $x\geq 0$.

Λύση.

Σύμφωνα με τον τύπο (8.1.1), προκειμένου να βρούμε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=e^{ax}$, $x\geq 0$, θα πρέπει να υπολογίσομε το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{ax}dx = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x}\,dx.$$
Όμως,
$$\int_0^t e^{(a-s)x}\,dx = \left[\frac{e^{(a-s)x}}{a-s}\right]_0^t = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s}$$
και για $a-s<0 \Leftrightarrow s>a$ θα έχομε:
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{(a-s)x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right] - \frac{1}{a-s} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$
Τελικά
$$F(s) = L\{f(x)\} = \frac{1}{s-a}, \qquad s>a.$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί Laplace των βασικών συναρτήσεων, οι οποίοι παρατίθενται στον πίνακα 8.1.1. Στην άσκηση 8.1.5 δίνονται κατάλληλες υποδείξεις για την απόδειξη των τύπων που αφορούν στο μετασχηματισμό Laplace των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημβx και συνβx, ενώ η μετασχηματισμένη Laplace της σταθερής συναρτήσεως $f(x)=1$ μπορεί να προκύψει άμεσα και ως ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace της $f(x)=e^{ax}$ για $a=0$. Τέλος, ένας γρήγορος τρόπος υπολογισμού της μετασχηματισμένης Laplace της συναρτήσεως $f(x)=x^n$, προκύπτει με κατάλληλη χρήση μιας ιδιότητας που θα δοθεί στη συνέχεια (βλ. σχετική υπόδειξη στην άσκηση 8.1.6).

Πριν συνεχίσομε με επί πλέον παραδείγματα θα αναφέρομε ορισμένες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του και τις ιδιότητες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

$\mathbf{L_1}$. ***Γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace.*** Αν $L\{f_1(x)\}=F_1(s)$, $L\{f_2(x)\}=F_2(s)$ και c_1 και $c_2 \in \mathbf{R}$ είναι δύο σταθερές, τότε η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)$ είναι ίση με $c_1 F_1(s)+c_2 F_2(s)$. Δηλαδή:

$$L\{c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\}=c_1 L\{f_1(x)\}+c_2 L\{f_2(x)\}=c_1 F_1(s)+c_2 F_2(s)\,.$$

$\mathbf{L_2}$. ***Τύπος μετατοπίσεως της μετασχηματισμένης Laplace.*** Αν $L\{f(x)\}=F(s)$, και $a \in \mathbf{R}$ είναι οποιαδήποτε σταθερά, τότε ισχύει:

$$L\{e^{ax} f(x)\}=F(s-a)\,.$$

Με άμεση εφαρμογή του τύπου αυτού μπορούμε να συμπληρώσομε τον πίνακα μετασχηματισμών Laplace με τον πίνακα 8.1.2.

$\mathbf{L_3}$. Αν $L\{f(x)\}=F(s)$ είναι η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως f, τότε για κάθε θετικό ακέραιο n, ισχύει:

$$L\{x^n f(x)\}=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s))\,.$$

$\mathbf{L_4}$. ***Μετασχηματισμένη Laplace των παραγώγων μιας συναρτήσεως*** f. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Τότε, για τη μετασχηματισμένη Laplace της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της f ισχύουν οι επόμενοι τύποι:

$$L\{f'(x)\}=s\,L\{f(x)\}-f(0)$$

$$L\{f''(x)\}=s^2 L\{f(x)\}-s\,f(0)-f'(0)\,.$$

Πίνακας 8.1.1

$f(x)$	$L\{f(x)\}=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$
1	$\frac{1}{s}$, $\quad s>0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$, $\quad s>a \quad (a>0)$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $\quad s>0$ (n θετικός ακέραιος)
ημ(βx)	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$, $\quad s>0$
συν(βx)	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$, $\quad s>0$

Πίνακας 8.1.2

$f(x)$	$L\{f(x)\}=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$
e^{ax}ημ(βx)	$\frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}$, $\quad s>a$
e^{ax}συν(βx)	$\frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}$, $\quad s>a$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.3

Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=3+2x^2$.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace των βασικών συναρτήσεων και την ιδιότητα L_1 που δόθηκε παραπάνω μπορούμε να γράψομε:

$$L\{f(x)\}=L\{3\}+L\{2x^2\}=3L\{1\}+2L\left\{x^2\right\}=3\left(\frac{1}{s}\right)+2\left(\frac{2}{s^3}\right)=\frac{3s^2+4}{s^3},\quad \text{για}\ \ s>0.$$

Επομένως

$$L\{f(x)\}=\frac{3s^2+4}{s^3},\quad \text{για}\ \ s>0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.4

Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=e^{3x}+2\,\text{ημ}^2 3x$.

Λύση.

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες $\mathbf{L_1}$ και $\mathbf{L_2}$ βρίσκομε:

$$L\{f(x)\}=L\{e^{3x}\}+2L\{\text{ημ}^2 3x\}=L\{e^{3x}\}+2L\{1-\text{συν}^2 3x\}=L\{e^{3x}\}+2L\left\{1-\frac{\text{συν}6x+1}{2}\right\}=$$

$$=L\{e^{3x}\}+L\{1\}-L\{\text{συν}6x\}=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36}.$$

Επομένως

$$L\left\{e^{3x}+2\,\text{ημ}^2 3x\right\}=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36},\quad \text{για}\ \ s>3.$$

Ασκήσεις.

8.1.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ β) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x+2}dx$ γ) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$

δ) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$ ε) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ στ) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\,dx,\ a>0$

8.1.2. Να αποδείξετε ότι $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}a^{1-p}$ όταν $p>1,\ \ a>0$.

8.1.3. Να βρείτε τις τιμές του p, για τις οποίες συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-px}\,dx$.

8.1.4. Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x^2-3x+4$ β) $g(x)=2\,\text{ημ}x+3\,\text{συν}(2x)$.

8.1.5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x)=\text{ημ}(\omega x)$ και $f_2(x)=\text{συν}(\omega x)$.
Έστω $L\{f_1(x)\}=F_1(s)$, $L\{f_2(x)\}=F_2(s)$ οι μετασχηματισμένες Laplace των συναρτήσεων f_1, f_2 αντίστοιχα.

α) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση να αποδείξετε ότι $F_1(s)=\frac{1}{\omega}-\frac{s^2}{\omega^2}F_1(s)$, $s>0$.

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο $L\{f'(x)\}=s\,L\{f(x)\}-f(0)$ (βλ. ιδιότητα $\mathbf{L_4}$) για τη συνάρτηση $f_1(x)=\text{ημ}(\omega x)$ να αποδείξετε ότι $F_2(s)=\frac{s}{\omega}F_1(s)$, $s>0$.

γ) Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν στα ερωτήματα (α) και (β) να συμπεράνετε τους τύπους του πίνακα 8.1.1 για τις μετασχηματισμένες Laplace των συναρτήσεων:

$$f(x) = \text{ημ}(\omega x) \text{ και } g(x) = \text{συν}(\omega x).$$

δ) Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace των συναρτήσεων:

$$f_1(x) = e^{\omega x}\text{ημ}(\beta x) \text{ και } f_2(x) = \mathrm{e}^{\omega x}\text{συν}(\beta x).$$

8.1.6. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του πίνακα 8.1.1 $L\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$, καθώς και την ιδιότητα $\mathbf{L_3}$, να αποδείξετε ότι:

$$L\{x\} = \frac{1!}{s^2}, \quad s > 0, \quad L\{x^2\} = \frac{2!}{s^3}, \quad s > 0.$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω, να αποδείξετε ότι $L\{x^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$.

Τέλος, να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = [(x+1)e^x]^2$.

8.1.7. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 8.1.1 και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, να αποδείξετε ότι οι μετασχηματισμένες Laplace των συναρτήσεων $f(x)$, οι οποίες παρατίθενται στον πίνακα 8.1.3 δίνονται από τον τύπο που αναφέρεται στη στήλη με επικεφαλίδα $F(s)$.

Πίνακας 8.1.3

$f(x)$	$F(s)$
xe^{-ax}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$(1-ax)e^{-ax}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$)
$e^{-ax} - e^{-\beta t}$	$\dfrac{\beta - a}{(s+a)(s+\beta)} \quad (a \neq \beta)$
$e^{-ax}\text{ημ}\beta x$	$\dfrac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$e^{-ax}\text{συν}\beta x$	$\dfrac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$
συν $(a + \beta x)$	$\dfrac{s\text{συν}a + \beta\text{ημ}a}{s^2 + \beta^2}$
ημ $(a + \beta x)$	$\dfrac{s\,\text{ημ}a + \beta\text{συν}a}{s^2 + \beta^2}$

8.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Πολλές φορές παρατηρείται η ανάγκη ευρέσεως της συναρτήσεως $y = f(x)$ όταν είναι γνωστός ο τύπος του μετασχηματισμού Laplace $F(s)$ της f. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως αντίστροφο πρόβλημα για το μετασχηματισμό Laplace ή πρόβλημα της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών με διαφορικές εξισώσεις, την οποία θα παρουσιάσομε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο. Ένα πρώτο ερώτημα που θα πρέπει να εξετασθεί είναι κατά πόσο ο μετασχηματισμός Laplace μιας συναρτήσεως καθορίζει τη συνάρτηση αυτή με μοναδικό τρόπο.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από την επόμενη πρόταση:

Αν f_1, f_2 συνεχείς συναρτήσεις, για τις οποίες ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace, τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία:

$$L\{f_1(x)\} = L\{f_2(x)\} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \text{ για κάθε } x.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, αν δοθεί η μετασχηματισμένη Laplace $F(s) = L\{f(x)\}$ μίας συναρτήσεως $f(x)$, τότε η $f(x)$ προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο. Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται ***αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace*** που αντιστοιχεί στην $F(s)$ και θα γράφομε $f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ συναρτήσεων και των αντιστοίχων μετασχηματισμένων Laplace.

Γενικά προκύπτει ο παρακάτω ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση $F(s)$. Τότε ορίζομε ως ***αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace*** της $F(s)$, τη μοναδική συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει $L\{f(x)\} = F(s)$. Συμβολικά θα γράφομε:

$$f(x) = L^{-1}\{F(s)\}. \tag{8.2.1}$$

Για παράδειγμα, αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $L\{f(x)\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, τότε, σύμφωνα με τον πίνακα 8.1.1 θα έχομε $L\{f(x)\} = L\{x^n\}$, οπότε $f(x) = x^n = L^{-1}\{F(s)\}$.

Με βάση τον ορισμό που δόθηκε για την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace, οι συναρτήσεις που δίνονται στην πρώτη στήλη του πίνακα 8.1.1 είναι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί εκείνων, που αναφέρονται στη δεύτερη στήλη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει γενικός (ολοκληρωτικός) τύπος για τον υπολογισμό της αντίστροφης μετασχηματισμένης Laplace μιας συναρτήσεως, ο οποίος βασίζεται στη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων. (Ο τύπος αυτός δεν θα παρουσιασθεί αφού απαιτεί πρόσθετες έννοιες και αποτελέσματα, τα οποία δεν έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.1.

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει $L\{f(x)\} = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$.

Λύση.

Ζητείται να υπολογίσομε τη συνάρτηση:

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = L^{-1}\{F(s)\}, \text{ όπου } F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Αναλύομε αρχικά τη συνάρτηση $F(s)$ σε απλά κλάσματα, δηλαδή τη γράφομε στη μορφή:

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}=\frac{a}{s+1}+\frac{\beta}{s+2}\,.$$

Η προηγούμενη ισότητα οδηγεί στην ταυτότητα $\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}=\frac{as+2a+\beta s+\beta}{(s+1)(s+2)}$, από την οποία προκύπτει το σύστημα $\alpha+\beta=0$ και $2\alpha+\beta=1$.

Η λύση του τελευταίου είναι η $\alpha=1$ και $\beta=-1$ και επομένως

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\,.$$

Με τη βοήθεια του πίνακα 8.1.1 μπορούμε να γράψομε $\frac{1}{s+1}=L\{e^{-x}\}$, $\quad\frac{1}{s+2}=L\{e^{-2x}\}$, οπότε

$$L\{f(x)\}=F(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=L\{e^{-x}\}-L\{e^{-2x}\}=L\{e^{-x}-e^{-2x}\}\,.$$

Άρα $f(x)=e^{-x}-e^{-2x}$, δηλαδή η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της $F(s)$ είναι η:

$$f(x)=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}=e^{-x}-e^{-2x}.$$

Κατά τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace μιας συναρτήσεως είναι ιδιαίτερα χρήσιμες οι επόμενες δύο ιδιότητες, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace που αναφέραμε στην παράγραφο 8.1.

I_1. ***Γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace***. Αν $F_1(s), F_2(s)$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f_1(x), f_2(x)$, και $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ είναι δύο σταθερές, τότε ισχύει:

$$L^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}=c_1L^{-1}\{F_1(s)\}+c_2L^{-1}\{F_2(s)\}=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\,.$$

I_2. ***Τύπος μετατοπίσεως του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace***. Αν $f(x)$ είναι η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s)$ (δηλ. $L^{-1}\{F(s)\}=f(x)$) και $a\in\mathbf{R}$ είναι μια σταθερά, τότε η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s-a)$ δίνεται από τον τύπο:

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{ax}f(x)\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.2.

Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συναρτήσεως $F(s)=\frac{2s+1}{s^2+6s+13}$.

Λύση

Για να υπολογίσομε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $F(s)$, θα πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να γραφεί με τέτοιον τρόπο, ώστε να πάρομε εκφράσεις παρόμοιες μ’ αυτές που εμφανίζονται στον πίνακα 8.1.1. Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου στον παρονομαστή της $F(s)$ είναι αρνητική ($\Delta = -16 < 0$), οπότε θα μπορούσαμε να εφαρμόσομε τη γνωστή μέθοδο ***συμπληρώσεως τέλειου τετραγώνου*** για να τον γράψομε στη μορφή

$$s^2 + 6s + 13 = s^2 + 2 \cdot s \cdot 3 + 3^2 + 4 = (s+3)^2 + 2^2 .$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας εκφράσεως, σε συνδυασμό με την ιδιότητα $\mathbf{I_1}$ της γραμμικότητας παίρνομε:

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2s+6-5}{(s+3)^2+2^2}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right\} - \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right\}.$$

Λαμβάνοντας τέλος υπόψη την ιδιότητα $\mathbf{I_2}$, μπορούμε να γράψομε

$$L^{-1}\{F(s)\} = 2L^{-1}\{F_1(s+3)\} - \frac{5}{2}L^{-1}\{F_2(s+3)\},$$

όπου θέσαμε

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2+2^2} = L\{\text{συν}(2x)\}, \qquad F_2(s) = \frac{2}{s^2+2^2} = L\{\text{ημ}(2x)\}.$$

και έτσι καταλήγομε στο επόμενο αποτέλεσμα:

$$L^{-1}\{F(s)\} = 2e^{-3x}\,\text{συν}(2x) - \frac{5}{2}e^{-3x}\,\text{ημ}(2x).$$

Γενικά, για να μπορέσομε να προσδιορίσομε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μιας συναρτήσεως $F(s)$ χρησιμοποιούμε τον πίνακα 8.1.1. Αν η συνάρτηση $F(s)$ δεν έχει ακριβώς μια από τις μορφές που εμφανίζονται στον πίνακα, τότε τη μετατρέπομε με κατάλληλους αλγεβρικούς χειρισμούς (εκμεταλλευόμενοι και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace και του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace) σε μία αναγνωρίσιμη μορφή, όπως ακριβώς εργαστήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ασκήσεις.

8.2.1. Να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace, των επομένων συναρτήσεων:

α) $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ β) $F(s) = \dfrac{2}{(s-1)^2+4}$ γ) $F(s) = \dfrac{s}{(s-2)^2+3}$

δ) $F(s) = \dfrac{24}{(s-5)^5}$ ε) $F(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+7}$ στ) $F(s) = \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{6}{s^4}$

8.2.2. Να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace, των επομένων συναρτήσεων:

α) $F(s) = \dfrac{2}{s^2}$ β) $F(s) = \dfrac{12}{3s+9}$ γ) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-2s+2}$

δ) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$ ε) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2+3s+5}$ στ) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2-3s+4}$

8.2.3. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει $L\{f(x)\} = \dfrac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$, όπου α, β, γ, είναι τρεις διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί.

8.2.4. Δίνεται η συνάρτηση $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.

α) Να βρείτε τις σταθερές $\alpha, \beta, \gamma,$ έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(s+1)\,(s^2+1)}=\frac{\alpha}{s+1}+\frac{\beta s+\gamma}{s^2+1}.$$

β) Να υπολογίσετε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace $f(x)=L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)\,(s^2+1)}\right\}$.

8.3 Λύση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσομε τον τρόπο χρήσεως του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις $n-$τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Υπενθυμίζομε ότι μία γραμμική διαφορική εξίσωση $n-$τάξεως με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή:

$$\alpha_n y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+...+\alpha_2 y''(x)+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=f(x),$$

όπου οι συντελεστές $\alpha_i,\ i=0,1,2,...,n$ είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί. Επίσης, σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, οι αρχικές συνθήκες έχουν τη μορφή:

$$y(0)=c_0,\ y'(0)=c_1,\ y''(0)=c_2,...,\ y^{(n-1)}(0)=c_{n-1}.$$

Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα περιοριστούμε στη μελέτη εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξεως, ωστόσο η μεθοδολογία που θα παρουσιάσομε να μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί για τη γενική περίπτωση της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως $n-$τάξεως.

Υπενθυμίζομε ότι, η τεχνική που εφαρμόζαμε στο κεφάλαιο 7 για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, ήταν να βρίσκομε αρχικά τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως και στη συνέχεια να χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες, προκειμένου να υπολογίσομε τις αυθαίρετες σταθερές που εμφανίζονταν στη γενική λύση. Στη μέθοδο που θα παρουσιάσομε στη συνέχεια για λύση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, η επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών γίνεται μ' ένα μόνο βήμα.

Το βασικό εργαλείο για την ανάπτυξη της μεθοδολογίας είναι η δράση του μετασχηματισμού Laplace επί των παραγώγων μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως *f*. Μ' αυτόν τον τρόπο θα μπορούμε να μετασχηματίζομε τις διαφορικές εξισώσεις σε αντίστοιχες αλγεβρικές με μοναδικό άγνωστο το μετασχηματισμό Laplace της συναρτήσεως που αναζητούμε.

Σύμφωνα με την ιδιότητα $\mathbf{L_4}$, για το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου μιας συναρτήσεως ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν $L\{f(x)\}=F(s)$ είναι η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως *f*, τότε θα ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{aligned} &L\{f'(x)\}=sF(s)-f(0),\\ &L\{f''(x)\}=s^2F(s)-s\,f(0)-f'(0), \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

με την προϋπόθεση ότι η *f* και οι δύο πρώτες παράγωγοί της ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες, ώστε να υπάρχουν οι μετασχηματισμένες Laplace που σημειώνονται.

Το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτείνεται και για την παράγωγο $n-$τάξεως $f^{(n)}$ μιας συναρτήσεως *f*, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f και οι παράγωγοί της ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες. ΄Ετσι, η μετασχηματισμένη Laplace της παραγώγου $n-$τάξεως $f^{(n)}$ μίας συναρτήσεως *f* δίνεται από τον τύπο:

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \ldots - s\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\,. \tag{8.3.2}$$

Πριν παρουσιάσομε τη γενική μεθοδολογία επιλύσεως προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, ας δώσομε ένα απλό παράδειγμα. Ας θεωρήσομε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' - 2y = e^{5x}, \qquad y(0) = 3\,.$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως $y' - 2y = e^{5x}$ παίρνομε $L\{y' - 2y\} = L\{e^{5x}\} \Leftrightarrow L\{y'\} - 2L\{y\} = L\{e^{5x}\}$. Σύμφωνα με τον πίνακα 8.1.1 και τον τύπο (8.3.1) έχομε:

$$L\{y'\} = s\,L\{y(x)\} - y(0), \qquad L\{e^{5x}\} = \frac{1}{s-5}, \quad s > 5$$

οπότε η τελευταία ισότητα λαμβάνει τη μορφή:

$$s\,L\{y(x)\} - y(0) - 2L\{y(x)\} = \frac{1}{s-5}, \qquad s > 5\,.$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 3$ φτάνομε στην ισότητα:

$$s\,L\{y(x)\} - 3 - 2L\{y(x)\} = \frac{1}{s-5}\,,$$

στην οποία εμφανίζεται ένας μοναδικός άγνωστος, η μετασχηματισμένη Laplace $L\{y(x)\}$. Λύνοντας ως προς $L\{y(x)\}$ παίρνομε διαδοχικά:

$$L\{y(x)\}(s-2) = \frac{1}{s-5} + 3 \Leftrightarrow L\{y(x)\}(s-2) = \frac{1+3s-15}{s-5} \Leftrightarrow L\{y(x)\} = \frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\,.$$

Από την τελευταία ισότητα είναι προφανές ότι η άγνωστη συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Y(s) = \dfrac{3s-14}{(s-2)(s-5)}$, δηλαδή $y(x) = L^{-1}\left\{\dfrac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\}$.

Αναλύοντας την $Y(s)$ σε απλά κλάσματα βρίσκομε ότι:

$Y(s) = \dfrac{3s-14}{(s-2)\,(s-5)} = \dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s-5}$, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace παίρνομε:

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\} = \frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)}\right\} = \frac{8}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}\,e^{5x}.$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που μας δόθηκε είναι η $y(x) = \dfrac{8}{3}e^{2x} + \dfrac{1}{3}\,e^{5x}$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε αποτελεί μια γενική διαδικασία που θα μπορούσε να εφαρμοσθεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Πιο συγκεκριμένα, τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν είναι τα επόμενα:

α) Εφαρμόζομε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως.
β) Με χρήση του πίνακα 8.1.1 και του τύπου (8.3.1) (ή του γενικότερου τύπου (8.3.2), αν η διαφορική εξίσωση είναι ανώτερη από δεύτερη τάξη) μετασχηματίζομε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική με άγνωστο τη συνάρτηση $L\{y(x)\}=Y(s)$.
γ) Επιλύομε την αλγεβρική εξίσωση που βρέθηκε στο βήμα (β), ως προς $Y(s)$.
δ) Αντιστρέφομε το μετασχηματισμό Laplace $L\{y(x)\}=Y(s)$ και βρίσκομε τη λύση της διαφορικής εξισώσεως $y(x)=L^{-1}\{Y(s)\}$.

Ας δούμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα επιλύσεως ενός προβλήματος αρχικών τιμών, το οποίο αποτελείται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.3.1.

Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y''-y'-2y=0$ $y(0)=1$, $y'(0)=5$.

Λύση.

Εφαρμόζομε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως και παίρνομε:

$$L\{y''-y'-2y\}=L\{0\} \Leftrightarrow L\{y''\}-L\{y'\}-2L\{y\}=L\{0\}.$$

Με τη βοήθεια του τύπου (8.3.1) για το μετασχηματισμό Laplace για την παράγωγο πρώτης και δεύτερης τάξεως της συναρτήσεως $y=f(x)$ και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$, $y'(0)=5$, φτάνομε στην εξίσωση

$$s^2L\{y(x)\}-y'(0)-s\,y(0)-s\,L\{y(x)\}-y(0)-2L\{y(x)\}=0$$

στην οποία μοναδικός άγνωστος είναι η συνάρτηση $L\{y(x)\}=Y(s)$. Λύνοντας την εξίσωση αυτή έχομε:

$$L\{y(x)\}\,(s^2-s-2)-5-s-1=0 \Leftrightarrow L\{y(x)\}=\frac{s+6}{s^2-s-2}.$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, σε συνδυασμό με ανάλυση σε απλά κλάσματα, μπορούμε εύκολα να καταλήξομε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{s+6}{s^2-s-2}\right\}=-\frac{2}{3}e^{2x}+\frac{5}{3}e^{-x}.$$

Ασκήσεις.

8.3.1. Να λύσετε τα επόμενα προβλήματα αρχικών τιμών με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

α) $y'+2y=0$, $y(0)=1$ β) $y'+2y=2$, $y(0)=1$ γ) $y'+2y=e^x$, $y(0)=1$

δ) $y'+2y=0$, $y(1)=1$ ε) $y'+5y=0$, $y(1)=0$ στ) $y'-5y=e^{5x}$, $y(0)=2$

8.3.2. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y''+16y=2\eta\mu(4x)$, $y(0)=-\frac{1}{2}$, $y'(0)=0$, παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως.

8.3.3. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}05N,$$

όπου $N = N(t)$ μια άγνωστη συνάρτηση με $N(0) = 20$. Θέτοντας $L\{N(t)\} = M(s)$ να βρείτε την αλγεβρική εξίσωση που ικανοποιεί η $M(s)$ και αφού λυθεί να βρείτε τον τύπο της $N(t)$.

8.3.4. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 4y' + 8y = \text{ημ}x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως.

8.4 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Μεταχηματισμένη Laplace μιας συναρτήσεως $f:[0,+\infty) \to \mathbf{R}$.	$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$
Γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους.	$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)\,dx$
Γραμμικότητα του μετασχηματισμένου Laplace.	$L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\}$
Μετατόπιση της μετασχηματισμένης Laplace.	$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$ όπου $F(s) = L\{f(x)\}$
n-οστή παράγωγος της μετασχηματισμένης Laplace.	$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}(F(s)),$
Γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμένου Laplace.	$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}$
Τύπος μετατοπίσεως της αντίστροφης μετασχηματισμένης Laplace.	$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax} f(x), \quad a \in \mathbf{R}$
Το αμφιμονοσήμαντο του μετασχηματισμένου Laplace.	$L\{f_1(x)\} = L\{f_2(x)\} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x), \quad x > 0$
Μετασχηματισμένη Laplace των παραγώγων μιας συναρτήσεως f με $L\{f(x)\} = F(s)$.	$L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$ $L\{f''(x)\} = s^2F(s) - s\,f(0) - f'(0)$ $\dots$ $L\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) -$ $- \dots - s\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.	α) Εφαρμόζομε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως. β) Μετασχηματίζομε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική με άγνωστο τη συνάρτηση $L\{y(x)\} = Y(s)$. γ) Επιλύομε την αλγεβρική εξίσωση ως προς $Y(s)$. δ) Βρίσκομε τη λύση της διαφορικής εξισώσεως με αντιστροφή της μετασχηματισμένης Laplace $Y(s)$.

8.5 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ λέγεται γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους.	**Σ Λ**
2.	Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους μπορεί να έχει και τα δύο άκρα ολοκληρώσεώς του άπειρα.	**Σ Λ**
3.	Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ δεν συγκλίνει.	**Σ Λ**
4.	Ισχύει ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = +\infty$.	**Σ Λ**
5.	Η μετασχηματισμένη Laplace μιας συναρτήσεως $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ είναι η συνάρτηση F που ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα $$F(s)=L\{f(x)\}=\int_0^{+\infty} e^{sx} f(x)\,dx$$ για τις τιμές της μεταβλητής $s\in\mathbf{R}$, για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.	**Σ Λ**
6.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=1,\ x>0$ δίνεται από τον τύπο $L\{1\}=\frac{1}{s},\ s<0$.	**Σ Λ**
7.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ με $f(x)=e^x$ ισούται με $L\{e^x\}=\frac{1}{s-1},\quad s>1$.	**Σ Λ**
8.	Ισχύει ότι $L\{x^4+2e^x-\eta\mu^2 x\}=4L\{x\}+2L\{e^x\}-2L\{\eta\mu x\}$.	**Σ Λ**
9.	Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace για μία δοσμένη συνάρτηση F υπάρχει πάντα.	**Σ Λ**
10.	Αν υπάρχει η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace $L^{-1}\{F(s)\}=f(x)$, τότε ισχύει: $$L^{-1}\{F(s-1)\}=e^{-x}\ f(x),\quad a\in\mathbf{R}.$$	**Σ Λ**
11.	Αν $F_1(s), F_2(s)$ είναι οι μετασχηματισμένες Laplace δύο συναρτήσεων $f_1(x), f_2(x)$ αντίστοιχα και $c_1, c_2 \in\mathbf{R}$, τότε ισχύει: $$L^{-1}\{c_1 F_1(s)+c_2 F_2(s)\}=c_1 L^{-1}\{F_1(s)\}+c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}.$$	**Σ Λ**
12.	Αν υπάρχει η μετασχηματισμένη Laplace της f, οι f', f'' ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες και ισχύει $f(0)=f'(0)=0$, τότε $L\{f''(x)\}=sL\{f'(x)\}$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

		α)	β)	γ)	δ)
1.	Το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ισούται με:	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
2.	Το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους $\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx$ συγκλίνει όταν:	$s<0$	$s=0$	$s>0$	$s=-1$
3.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = x^2$ ισούται με:	2s	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{1}{s^3}$	$-s$
4.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=x\,e^{4x}$ ισούται με:	$\frac{1}{(s-4)^2}$	$\frac{1}{(s-4)^3}$	$\frac{3}{(s-4)^2}$	$\frac{1}{(s-4)^{1/2}}$
5.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=x^{7/2}$ ισούται με:	$\frac{105}{16}s^{-9/2}\sqrt{\pi}$	$\frac{104}{16}s^{-9/2}\sqrt{\pi^3}$	$s^{-9/2}\sqrt{\pi}$	$\frac{104}{16}s^{-9/2}$
6.	Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s)=\frac{1}{s^2+6}$ είναι η:	ημ$(\sqrt{6}x)$	ημ$(2\sqrt{6}x)$	ημ$^2(\sqrt{6}x)$	συν$(\sqrt{6}x)$
7.	Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s)=\frac{3s+7}{s^2-2s-3}$ ισούται με:	e^{3x}	$4e^{3x}+e^{x}$	$4e^{3x}-e^{x}$	$4e^{3x}-e^{-x}$
8.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'-5y=e^{5x}, y(0)=0$, είναι η:	$y(x)=4xe^{3x}$	$y(x)=5x\,e^{5x}$	$y(x)=x\,e^{5x}$	$y(x)=2x\,e^{5x}$

8.6 Γενικές ασκήσεις.

8.6.1. Η *συνάρτηση Γάμμα,* η οποία εμφανίζεται σε διάφορα προβλήματα της θεωρίας Πιθανοτήτων και της Φυσικής, ορίζεται από το επόμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$, όπου a είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της ολοκληρώσεως κατά παράγοντες να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα $\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a),\ a>0$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(1)=1$.

γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β) να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\Gamma(\nu+1)=\nu!$.

δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} x^5e^{-x}dx,\quad \int_0^{+\infty} x^4e^{-3x}dx,\quad \int_0^{+\infty} x^7e^{-x}\,dx$.

8.6.2. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της ασκήσεως 8.6.1 να αποδείξετε ότι η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=x^n$ όπου n ένας θετικός ακέραιος είναι ο $L\{x^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}, s>0$.

8.6.3. Να υπολογίσετε τα επόμενα γενικευμένα ολοκληρώματα, αν υπάρχουν.

α) $\int_{2}^{+\infty} x^{-3}dx$ β) $\int_{-\infty}^{-1} x^{-3}dx$ γ) $\int_{-\infty}^{1} xe^{x}\,dx$

δ) $\int_{1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{2x-1}}dx$ ε) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-3x}}dx$ στ) $\int_{0}^{+\infty} x^{2}e^{-x}\,dx$

8.6.4. Χρησιμοποιώντας τους τύπους υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους, να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\le 2 \\ 4, & x>2. \end{cases}$

8.6.5. Να υπολογίσετε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=\begin{cases} -2, & x\le 3 \\ 2, & x>3 \end{cases}$, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα 8.6α.

8.6.6. Να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace των επομένων συναρτήσεων.

α) $F(s)=\dfrac{s}{(s-2)^{2}+9}$ β) $F(s)=\dfrac{1}{s^{2}-2s+9}$ γ) $F(s)=\dfrac{s+4}{s^{2}+4s+8}$ δ) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^{2}-9}$

8.6.7. Χρησιμοποιώντας την παρακάτω ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$F(s)=\frac{4}{s^{3}\,(s^{2}-s-2)}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{s^{2}}+\frac{\gamma}{s^{3}}+\frac{\delta}{s-2}+\frac{\varepsilon}{s+1},$$

(***Υπόδειξη***: Το τριώνυμο του παρονομαστή γράφεται στη μορφή $s^{2}-s-2=(s-2)(s+1)$], να βρείτε αρχικά τις τιμές των σταθερών α, β, γ, δ, ε και στη συνέχεια να υπολογίσετε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της $F(s)$, δηλαδή τη συνάρτηση $f(x)=L^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^{3}(s^{2}-s-2)}\right\}$).

8.6.8. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $\dfrac{dI}{dt}+50I=5$, όπου $I=I(t)$ μια άγνωστη συνάρτηση με $I(0)=0$.

Θέτοντας $L\{I(t)\}=J(s)$ να βρείτε την αλγεβρική εξίσωση που ικανοποιεί η $J(s)$ και, αφού τη λύσετε, να βρείτε τον τύπο της συναρτήσεως $I(t)$.

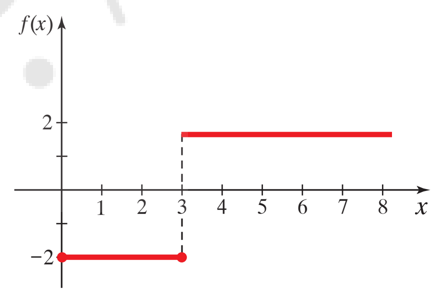
8.6.9. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών με χρήση της μετασχηματισμένης Laplace.

α) $y''++2y'-3y=\eta\mu 2x,\;\; y(0)=y'(0)=0$

β) $y''+y=\eta\mu x,\;\; y(0)=0,\;\; y'(0)=2$

γ) $y''+4y'+4y=0,\;\; y(0)=2,\; y'(0)=-2$

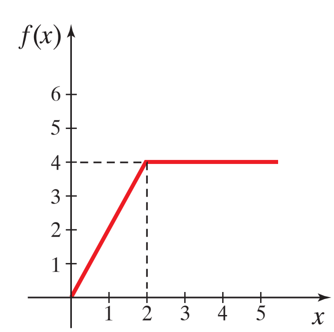
δ) $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}+8\dfrac{dy}{dx}=25y=0,\;\; y(\pi)=0,\;\; y'(\pi)=6$



Σχ. 8.6α.

8.6.10. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace να λύσετε το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών $y''+4y'+4y=x^{2}$, $y(0)=y'(0)=0$ (***Υπόδειξη***: Εργαστείτε με παρόμοιο τρόπο αναλύσεως σε απλά κλάσματα όπως στην άσκηση 8.6.7).

8.6.11. Χρησιμοποιώντας τους τύπους υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους, να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως f, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα 8.6β.



Σχ. 8.6β.

9

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Ο όρος στατιστική είναι ένας γνωστός όρος σε όλους, αφού αρκετά συχνά τα Μ.Μ.Ε. αναφέρονται σε στατιστικά στοιχεία που αφορούν στις αφίξεις τουριστών στην Ελλάδα, στα τροχαία ατυχήματα, στις γεννήσεις, στο εξωτερικό μας εμπόριο κ.ά.. Η στατιστική με την έννοια της απλής συλλογής πληροφοριών (απογραφής), οι οποίες ήταν απαραίτητες για τη λειτουργία του κράτους (για στρατιωτικούς και φορολογικούς λόγους) ήταν γνωστή από την αρχαιότητα. Για το λόγο αυτό, από πολλούς θεωρείται ότι, ο όρος στατιστική προέρχεται από τη λατινική λέξη status, η οποία σημαίνει πολιτεία ή κράτος. Σύμφωνα με ιστορικές μαρτυρίες, η πρώτη συστηματική απογραφή διενεργήθηκε στην Κίνα το 2238 π.Χ. από τον αυτοκράτορα Yao, ενώ κατά καιρούς πραγματοποιήθηκαν επίσης απογραφές και από τους Αιγύπτιους, τους Έλληνες και τους Ρωμαίους.

Ενώ παλαιότερα η Στατιστική είχε ως αντικείμενο τη συγκέντρωση στοιχείων και την παράθεση τεραστίων πινάκων με δεδομένα καθώς και διαγραμμάτων, σήμερα αποτελεί μια αυτοτελή επιστήμη, της οποίας οι βασικές έννοιες και τεχνικές έχουν εισχωρήσει σε όλες σχεδόν τις επιστήμες. Είναι πλέον δύσκολο να φανταστεί κάποιος, τομέα της σύγχρονης ζωής, στον οποίο να μην υπεισέρχεται η στατιστική είτε με την απλοϊκή μορφή της (περιγραφική παρουσίαση δεδομένων), είτε με τις προχωρημένες αναλυτικές τεχνικές της.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Στατιστικής και στις μεθόδους παρουσιάσεως στατιστικών στοιχείων μέσω γραφημάτων και αριθμητικών περιγραφικών μέτρων. Τέλος, θα δοθεί η έννοια της συσχετίσεως δύο μεταβλητών, καθώς και μία σύντομη εισαγωγή στην ανάλυση παλινδρομήσεως.

9.1 Εισαγωγή – Πληθυσμός και δείγμα.

Σύμφωνα με τη συνήθη έννοια, ο όρος στατιστική σημαίνει την οργανωμένη πληροφορία που αντλείται μέσα από απαριθμήσεις ή μετρήσεις γεγονότων και χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των ατόμων ή φαινομένων που μελετάμε. Ο πλέον γνωστός ορισμός της επιστήμης της Στατιστικής είναι εκείνος που δόθηκε από τον R.A. Fisher (1890-1962), σύμφωνα με τον οποίο:

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών που έχουν ως στόχο:

α) Το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων.

β) Τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους.

γ) Την ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η ανάπτυξη επιστημονικών τεχνικών που αφορούν στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση της διαδικασίας συλλογής δεδομένων είναι αντικείμενο μιας περιοχής της Στατιστικής, γνωστής με την ονομασία ***δειγματοληψία*** και μιας δεύτερης που ονομάζεται ***σχεδιασμός πειραμάτων***. Η οργάνωση των δεδομένων και η παρουσίασή τους με συνοπτικό και αποτελεσματικό τρόπο, ώστε αυτά να γίνουν κατανοητά ακόμη και από τους μη ειδικούς, αποτελεί το αντικείμενο ενός κλάδου της Στατιστικής που ονομάζεται ***περιγραφική στατιστική***. Τέλος, η λεγόμενη ***επαγωγική στατιστική*** ή ***στατιστική συμπερασματολογία*** αναπτύσσει μεθόδους για την εξαγωγή επιστημονικά τεκμηριωμένων συμπερασμάτων, ώστε ο ενδιαφερόμενος να οδηγηθεί στη συνέχεια στη λήψη αποφάσεων, με μικρά περιθώρια σφάλματος. Οι τεχνικές που αναπτύσσονται στα πλαίσια της επαγωγικής Στατιστικής επιτρέπουν τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου πληθυσμού, με βάση τα στοιχεία που συλλέχθηκαν για τα χαρακτηριστικά αυτά σ' ένα μικρό υποσύνολο των δεδομένων.

Μια θεμελιώδης έννοια της Στατιστικής είναι αυτή της ομάδας ή του συνόλου, για την οποία οι στατιστικοί χρησιμοποιούν τον όρο *στατιστικός πληθυσμός* ή απλά ***πληθυσμός***. Ο όρος πληθυσμός θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια για να δηλώσει οποιαδήποτε συλλογή ατόμων (ανθρώπων, ζώων κ.λπ.) ή αντικειμένων, τα χαρακτηριστικά των οποίων θέλομε να μελετήσομε. Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως ***μονάδες*** ή ***άτομα*** του πληθυσμού. Οι πληθυσμοί διακρίνονται σε πεπερασμένους και μη πεπερασμένους (ή άπειρους), ανάλογα με το αν το πλήθος των μονάδων που περιλαμβάνουν είναι πεπερασμένο ή όχι.

Για παράδειγμα:

α) Αν, εν όψει των προσεχών εκλογών, μας ενδιαφέρει να εξετάσομε την ηλικία και τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων, ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των ατόμων που μπορούν να ψηφίσουν στις συγκεκριμένες εκλογές. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι οι ψηφοφόροι και ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος.

β) Αν θέλομε να μελετήσομε το χρόνο ζωής ενός GPS πλοίου που παράγεται από μια συγκεκριμένη βιομηχανία, ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των GPS που παράγονται από τη βιομηχανία. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι τα GPS και ο πληθυσμός είναι μη πεπερασμένος (θεωρητικά τουλάχιστον, αν υποθέσομε ότι η βιομηχανία θα συνεχίσει να παράγει το συγκεκριμένο GPS στο μέλλον χωρίς διακοπή).

γ) Αν θέλομε να μελετήσομε εργατικό δυναμικό (αριθμός υπαλλήλων) και το μέγεθος των Ελληνικών ναυτιλιακών εταιρειών (έστω ότι αυτές έχουν ταξινομηθεί σε τρεις κατηγορίες: μικρή, μεσαία, μεγάλη), ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των Ελληνικών ναυτιλιακών εταιρειών. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι οι ναυτιλιακές εταιρείες και ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος.

Σε καθένα από τα παραπάνω παραδείγματα επιθυμούμε να εξετάσομε τις μονάδες ενός πληθυσμού ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους, τα οποία ονομάζονται ***πληθυσμιακά χαρακτηριστικά***. Είναι προφανές ότι οι τιμές των εξεταζομένων χαρακτηριστικών ποικίλλουν (διαφέρουν, μεταβάλλονται) μεταξύ των μονάδων του πληθυσμού. Για το λόγο αυτό τα πληθυσμιακά χαρακτηριστικά καλούνται ***μεταβλητές*** και συμβολίζονται συνήθως με κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, \ldots$. Οι τιμές που μπορεί να λάβει μια μεταβλητή ονομάζονται (δυνατές) ***τιμές της μεταβλητής***. Για τα τρία παραδείγματα που δόθηκαν παραπάνω, οι μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν είναι:

α) Η προτίμηση X των ψηφοφόρων με τιμές «κόμμα α, κόμμα β, ...» και η ηλικία Y των ψηφοφόρων με τιμές «18, 19, 20, ...».

β) Ο χρόνος ζωής Z του GPS που παράγεται από τη βιομηχανία με τιμές στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ) Το δυναμικό W των ναυτιλιακών εταιρειών με τιμές «1, 2,...» και το μέγεθος V με τιμές «μικρή, μεσαία, μεγάλη».

Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με τις τιμές που μπορούν να λάβουν και το είδος της μετρήσεως που επιδέχονται: τις ***ποιοτικές*** ή ***κατηγορικές*** και τις ***ποσοτικές***.

Οι τιμές των ποιοτικών μεταβλητών εκφράζονται με λέξεις, γράμματα ή άλλα σύμβολα (αριθμητικά ή μη) και επιτρέπουν απλά την κατάταξη των επί μέρους μονάδων ενός πληθυσμού σε διακεκριμένες μεταξύ τους κατηγορίες. Καθεμιά μονάδα του πληθυσμού ανήκει οπωσδήποτε σε μία και μόνο κατηγορία και η πληροφόρηση που μπορούμε να έχομε για ένα τέτοιο χαρακτηριστικό είναι η απλή απαρίθμηση των μονάδων-μελών καθεμιάς κατηγορίας. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές X και W που ορίστηκαν παραπάνω είναι ποιοτικές μεταβλητές. Ως άλλα παραδείγματα, μπορούμε να αναφέρομε την ομάδα αίματος (με τιμές *A*, *B*, *AB*, *0*), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), την επιβατική κίνηση των πλοίων σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλή, μέτρια ή χαμηλή κ.λπ..

Δύο ιδιαίτερες κατηγορίες ποιοτικών μεταβλητών είναι οι ***δίτιμες***, οι οποίες χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι μπορούν να λάβουν μόνο δύο τιμές (π.χ. το φύλο, με τιμές αγόρι, κορίτσι) και οι ***διατάξιμες***, οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα στον ερευνητή να διαβαθμίσει (διατάξει) τις κατηγορίες που προκύπτουν από τις τιμές τους σε μια ιεραρχική σειρά (π.χ. το «επίπεδο εκπαιδεύσεως», σύμφωνα με το οποίο κατατάσσομε τις μονάδες του πληθυσμού σε διακριτές κατηγορίες, όπως αυτούς που έχουν τελειώσει πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση, είναι διατάξιμη μεταβλητή, αφού μας δίνεται επί πλέον η δυνατότητα να διατάξομε τις κατηγορίες αυτές σε μία σειρά από το χαμηλότερο προς το ανώτερο εκπαιδευτικό επίπεδο ή αντίστροφα).

Οι ***ποσοτικές*** μεταβλητές, αντίθετα με τις ποιοτικές, μπορούν να λάβουν μόνο αριθμητικές τιμές και για τις τιμές αυτές έχουν νόημα οι συνήθεις αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός κ.λπ.). Στην περίπτωση που μία μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο «μεμονωμένες» αριθμητικές τιμές (π.χ. «1, 2, 3, 4» ή «1, 10, 100» ή «..., –2, –1, 0, 1, 2,...») ονομάζεται ***διακριτή***. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές Y και V που ορίστηκαν στις περιπτώσεις (α) και (γ) παραπάνω είναι διακριτές μεταβλητές. Ως άλλα παραδείγματα, μπορούμε να αναφέρομε τον αριθμό παιδιών μιας οικογένειας, το αποτέλεσμα της ρίψεως ενός ζαριού (με τιμές 1, 2,..., 6), τον αριθμό μελών ενός νοικοκυριού, το μηνιαίο αριθμό θανατηφόρων ατυχημάτων στις εθνικές οδούς κ.λπ..

Η δεύτερη κατηγορία ποσοτικών μεταβλητών είναι οι λεγόμενες ***συνεχείς*** μεταβλητές, οι τιμές των οποίων δύνανται, έστω θεωρητικά, να καλύψουν ένα ολόκληρο διάστημα τιμών, χωρίς να υπάρχει κανένα κενό μεταξύ των δυνατών τιμών τους. Τέτοια περίπτωση είναι η μεταβλητή Z του παραδείγματος (β), η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιαλέξεως, ο χρόνος που χρειάζεται ένα πλοίο για να πραγματοποιήσει ένα προγραμματισμένο δρομολόγιο κ.λπ.. Για τη μέτρηση των συνεχών μεταβλητών υπάρχει συνήθως κάποια καθιερωμένη μονάδα μετρήσεως, π.χ. δευτερόλεπτο (sec), ώρα (hour), μέτρο (m), κιλό (kg) κ.ά..

Στην πράξη ο διαχωρισμός μεταξύ διακριτών και συνεχών μεταβλητών δεν είναι πάντα σαφής, κυρίως λόγω του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι μονάδες μετρήσεως και της πιθανής στρογγυλοποιήσεως που μπορεί να γίνεται. ΄Ετσι, μία διακριτή μεταβλητή μπορεί να έχει προκύψει από την παρατήρηση μιας συνεχούς μεταβλητής, της οποίας η τιμή δεν καταγράφεται με απόλυτη ακρίβεια. Για παράδειγμα η ηλικία ενός ανθρώπου συνήθως δίνεται σε χρόνια, οπότε αποτελεί διακριτή μεταβλητή, ενώ η πραγματική της τιμή, μετρούμενη με απόλυτη ακρίβεια, με σημείο ενάρξεως τη στιγμή γεννήσεως του ανθρώπου, θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή.

΄Ενας τρόπος προκειμένου να αντλήσομε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσομε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται ***απογραφή***.

Σήμερα, σε κάθε χώρα υπάρχουν εθνικές Στατιστικές υπηρεσίες, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τη συλλογή και δημοσίευση δεδομένων που αφορούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό της χώρας και στους περισσότερους τομείς της Εθνικής Οικονομίας. Η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος (ΕΣΥΕ) πραγματοποιεί κάθε 10 χρόνια απογραφή του πληθυσμού, η οποία αποτελεί κύρια πηγή δεδομένων δημογραφικού, οικονομικού, εμπορικού και βιομηχανικού χαρακτήρα. Στην ετήσια έκδοση της «Στατιστικής Επετηρίδας της Ελλάδος», δημοσιεύεται πλήθος στοιχείων που αφορούν σε δημογραφικά στοιχεία του Ελληνικού πληθυσμού, στοιχεία της τουριστικής κινήσεως, νομισματικά και τραπεζοοικονομικά μεγέθη (προερχόμενα από την Τράπεζα της Ελλάδος), παραγωγή και κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας (προερχόμενα από τη ΔΕΗ) κ.λπ.. Υπάρχουν επίσης και διάφοροι άλλοι οργανισμοί, κέντρα ερευνών και υπηρεσίες υπουργείων, όπως το Κέντρο Προγραμματισμού και Οικονομικών Ερευνών (ΚΕΠΕ) ή ο Οργανισμός Απασχολήσεως Εργατικού Δυναμικού (ΟΑΕΔ), αλλά και ιδιωτικές εταιρείες που συλλέγουν και παρέχουν στατιστικές πληροφορίες για διάφορους τομείς του δημοσίου και ιδιωτικού φορέα. Τέλος, από τη στατιστική υπηρεσία της Ευρωπαϊκής Κοινότητας (Eurostat) και του Οργανισμού Ηνωμένων Εθνών δημοσιεύονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα συγκριτικά διεθνή στοιχεία.

Αρκετά συχνά οι (ανθρώπινοι ή μη ανθρώπινοι) πληθυσμοί που ενδιαφερόμαστε να μελετήσομε, είναι πρακτικά μη άπειροι ή τόσο μεγάλοι σε μέγεθος, που είναι πρακτικά δύσκολο ή και σχεδόν αδύνατο να λάβομε τις επιθυμητές πληροφορίες για κάθ' ένα από τα μέλη τους. Παράλληλα, ο χρόνος και τα έξοδα που χρειάζονται για τη διεξαγωγή μιας απογραφής είναι υπερβολικός, ιδίως όταν ο πληθυσμός που εξετάζεται είναι αρκετά μεγάλος. Για παράδειγμα, μια εταιρεία δημοσκοπήσεων που έχει αναλάβει να προβλέψει το αποτέλεσμα των επομένων βουλευτικών εκλογών, πριν αυτές διενεργηθούν, είναι δύσκολο να εξετάσει όλους τους ψηφοφόρους, για να προσδιορίσει το τι θα ψηφίσουν. Ένας κατασκευαστής ηλεκτρικών συσκευών είναι αδύνατο να δοκιμάζει όλες τις παραγόμενες συσκευές, για να ελέγχει την ορθή λειτουργία τους ή να τις παρακολουθεί μέχρι τη στιγμή που θα εμφανίσουν βλάβη για να καταγράψει το χρόνο ζωής τους. Ομοίως, ένας γιατρός, για να υπολογίσει την αποτελεσματικότητα ενός νέου φαρμάκου στην καταπολέμηση της υπερτάσεως είναι αδύνατο να περιμένει να δοκιμαστεί το φάρμακο σε όλα τα άτομα που πάσχουν από τη συγκεκριμένη ασθένεια.

Όταν λοιπόν η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή ασύμφορη, καταφεύγομε στην πράξη στη διαδικασία της ***δειγματοληψίας***, δηλαδή συλλέγομε πληροφορίες από μια σχετικά μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται ***δείγμα*** και καταγράφομε τις τιμές του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει μόνο για τα άτομα που επιλέχτηκαν στο δείγμα. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας κατάλληλες στατιστικές τεχνικές γενικεύομε τα συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Είναι φανερό ότι, για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα που θα προκύψουν από τη μελέτη του δείγματος, δηλαδή να ισχύουν πράγματι με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό, η επιλογή του δείγματος θα πρέπει να πραγματοποιηθεί με ορθό τρόπο ή όπως λέμε στη στατιστική ορολογία το δείγμα να είναι ***αντιπροσωπευτικό*** του πληθυσμού. Πρακτικά, ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Όπως ήδη αναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας παραγράφου, μετά τον ορισμό της έννοιας της Στατιστικής, οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πληθυσμούς είναι αντικείμενο μιας ιδιαίτερης περιοχής της Στατιστικής που αναφέρεται ως Μέθοδοι Δειγματοληπτικών Ερευνών ή απλά ως Δειγματοληψία.

Ασκήσεις.

9.1.1. Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές;

α) Αριθμός ναυτικών ατυχημάτων σε ένα έτος.

β) Τόπος καταγωγής των πλοιάρχων που εργάζονται σε μία ναυτιλιακή εταιρεία.
γ) Αριθμός επιβατών ενός πλοίου.
δ) Μεικτό βάρος ενός πλοίου.
ε) Οικογενειακή κατάσταση του πληρώματος ενός πλοίου.
στ) Είδος απασχολήσεως του πληρώματος ενός πλοίου.
ζ) Τιμή αμόλυβδης βενζίνης σε ένα πρατήριο βενζίνης.
η) Αποτελέσματα εξετάσεων στο μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.
θ) Μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στα μαθήματα των πανελληνίων εξετάσεων.
ι) Βάρος ενός ταχυδρομικού δέματος.
ια) Θερμοκρασία ψύξεως στο χώρο του ψυγείου ενός εμπορικού πλοίου.

9.1.2. Για όσες από τις μεταβλητές της ασκήσεως 9.1.1 διαπιστώθηκε ότι είναι ποσοτικές, να βρείτε ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς.

9.1.3. Σε ένα πλοίο ταξιδεύουν 200 επιβάτες. Αν θέλετε να επιλέξετε με τυχαίο τρόπο 20 άτομα για να τους διανείμετε ένα ερωτηματολόγιο, με ποιους τρόπους θα κάνατε την επιλογή του δείγματος;

9.1.4. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αναφέρετε δυο μεταβλητές που θα μπορούσαν να μας ενδιαφέρουν. Στη συνέχεια, να καθορίσετε το είδος τους (ποιοτικές ή ποσοτικές) και να αναφέρετε μερικές δυνατές τιμές τους.
α) Λαμβάνομε ένα δείγμα επιβατών ενός πλοίου, συνολικής χωρητικότητας 300 επιβατών.
β) Λαμβάνομε ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας, στην οποία εργάζονται 30 άτομα.
γ) Εξετάζομε ένα δείγμα προϊόντων από μια βιομηχανική γραμμή παραγωγής.
δ) Λαμβάνομε τα στατιστικά στοιχεία ενός αγώνα καλαθοσφαιρίσεως.

9.1.5. Σε μία μονάδα ιχθυοκαλλιέργειας εκτρέφεται ένα συγκεκριμένο είδος ψαριού, το οποίο στη συνέχεια πωλείται σε εστιατόρια. Η διεύθυνση της μονάδας, προκειμένου να αποφασίσει κατά πόσο θα χρησιμοποιήσει ή όχι μία νέα τροφή θέλει να εκτιμήσει το βάρος που αποκτούν τα ψάρια μετά από τέσσερεις μήνες εκτροφής τους μ' αυτήν. Για το σκοπό αυτό, μετά τη γέννηση μιας νέας γενιάς ψαριών, ξεκινάει τη χρήση της νέας τροφής και ύστερα από 4 μήνες αλιεύει με τυχαίο τρόπο από την ιχθυοκαλλιέργεια 200 ψάρια.
α) Να αναγνωρίσετε τον υπό μελέτη πληθυσμό, το είδος του, καθώς και το δείγμα.
β) Να βρείτε τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.
γ) Να εξηγήσετε ποια είναι τα στάδια της στατιστικής διαδικασίας που θα πρέπει να ακολουθηθούν.

9.1.6. Με την αγορά μίας καινούργιας ηλεκτρικής συσκευής λαμβάνεται ένα σύντομο στατιστικό δελτίο, το οποίο παρακαλείστε να συμπληρώσετε και να το ταχυδρομήσετε στον εμπορικό αντιπρόσωπο. Το φυλλάδιο περιλαμβάνει τις επόμενες ερωτήσεις:
α) Πόσες άλλες συσκευές ίδιου είδους έχετε στην οικία σας;
β) Το φύλο σας.
γ) Την ημερομηνία γεννήσεώς σας.
δ) Τον τόπο γεννήσεώς σας.
ε) Από πόσα μέλη αποτελείται η οικογένειά σας.
στ) Ποιοι είναι οι τρεις σημαντικότεροι λόγοι που σας οδήγησαν να αγοράσετε το συγκεκριμένο προϊόν;
ζ) Από ποιο κατάστημα αγοράσατε τη συσκευή;
Να αναγνωρίσετε τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο και να τις ταξινομήσετε, δίνοντας παράλληλα και μερικές ή όλες (αν είναι δυνατόν) τις τιμές που μπορούν να λάβουν.

9.2 Πίνακες συχνοτήτων – Γραφικές μέθοδοι παρουσιάσεως στατιστικών στοιχείων.

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων (συνήθως από τις εθνικές στατιστικές υπηρεσίες, αν πρόκειται για απογραφικά δεδομένα ή εταιρείες δημοσκοπήσεων και ερευνητικά κέντρα αν πρόκειται για δεδομένα δειγματοληψίας), η πρώτη ενέργεια που γίνεται συνήθως, είναι η κατασκευή συνοπτικών πινάκων ή γραφικών παραστάσεων, ώστε να είναι εύκολη η κατανόηση των δεδομένων τους και μια προκαταρκτική ανάλυση αυτών. Στους πίνακες αυτούς γίνεται κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση των στοιχείων και να απεικονίζεται με κάποιο τρόπο η δομή του πληθυσμού που μελετάμε.

Για παράδειγμα, ο πίνακας 9.2.1 έχει βασισθεί στα δελτία συμβάντων της Τροχαίας Αττικής του έτους 1970 και δίνει πληροφορίες για τον αριθμό τροχαίων ατυχημάτων κατά βαθμό σοβαρότητας (ελαφρά, σοβαρά, θανατηφόρα).

Προκειμένου να προχωρήσομε στην εισαγωγή των εννοιών που θα αναλύσομε στη συνέχεια, ας υποθέσομε ότι, μετά τη διανομή ενός ερωτηματολογίου σε 20 τυχαία επιλεγμένα ενήλικα άτομα που ταξίδευαν με ένα επιβατικό πλοίο συγκεντρώθηκαν τα δεδομένα του πίνακα 9.2.2.

Είναι φανερό ότι στον πίνακα 9.2.2 έχουν καταχωρηθεί οι τιμές τριών χαρακτηριστικών (επάγγελμα, μηνιαίο εισόδημα και μηνιαία χρήση δρομολογίου) για $\nu = 20$ άτομα. Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι συγκεντρώσαμε τις τιμές για τρεις μεταβλητές, με βάση ένα τυχαία επιλεγμένο δείγμα μεγέθους 20. Αν συμβολίσομε με X, μια από τις μεταβλητές αυτές, θα σημειώνομε με $x_1, x_2, ..., x_\nu$ τις αντίστοιχες τιμές για τα ν άτομα και με $t_1, t_2, ..., t_\kappa$, τις διαφορετικές μεταξύ τους τιμές x_i. Έτσι, αν η μεταβλητή X παριστάνει το επάγγελμα των ατόμων του δείγματος, θα έχομε:

x_1= Δημόσιος υπάλληλος, x_2= Ιδιοκτήτης εταιρείας,
x_3= Ανειδίκευτος εργάτης, x_4= Ιδιοκτήτης εταιρείας,
x_5= Δημόσιος υπάλληλος,..., x_{20}= Δημόσιος υπάλληλος,

ενώ το πλήθος των διαφορετικών τιμών είναι μόλις $\kappa = 5$, δηλαδή

t_1= Δημόσιος υπάλληλος, t_2= Ιδιοκτήτης εταιρείας,
t_3= Ανειδίκευτος εργάτης, t_4= Τεχνίτης,
t_5= Ιδιωτικός υπάλληλος.

Πίνακας 9.2.1

Ατυχήματα	***Αριθμός***
Θανατηφόρα	269
Βαρέα	1.278
Ελαφρά	11.360
Σύνολο	**12.907**

Αντίστοιχα, αν το X παριστάνει τη μηνιαία χρήση του δρομολογίου (πόσες φορές χρησιμοποιεί ο συγκεκριμένος επιβάτης το συγκεκριμένο δρομολόγιο το μήνα) οι τιμές των x_i, $i = 1, 2, ..., 20$ είναι 1, 2, 1, 10, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 4, 10, 1, 6, 2, 6, 6, ενώ $\kappa = 6$ και

$$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 6, t_6 = 10.$$

Ας υποθέσομε ότι $t_1, t_2, ..., t_\kappa$ είναι οι διαφορετικές τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν. Σε κάθε τιμή t_i αντιστοιχίζεται ένας φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή t_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται ***απόλυτη συχνότητα*** ή απλά ***συχνότητα*** της τιμής t_i. Είναι προφανές ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος, δηλαδή ισχύει:

$$\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa = \nu. \qquad (9.2.1)$$

Ο υπολογισμός των συχνοτήτων γίνεται, διατρέχοντας με τη σειρά τα συγκεντρωθέντα δεδομένα και καταγράφοντας κάθε παρατήρηση με ένα σύμβολο (π.χ. μια γραμμή “ | ”). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ***διαλογή των παρατηρήσεων*** και για λόγους εύκολης απαριθμήσεως στη συνέχεια συνηθίζομε να οργανώνομε τα σύμβολα ανά πεντάδες, όπως φαίνεται στους πίνακες 9.2.3 και 9.2.4.

Πίνακας 9.2.2
Στοιχεία που αφορούν 20 ενήλικες επιβάτες.

Άτομο	*Επάγγελμα*	*Μηνιαίο Εισόδημα (σε €)*	*Μηνιαία χρήση δρομολογίου*
1	Δημόσιος υπάλληλος	2000	1
2	Ιδιοκτήτης εταιρείας	5000	2
3	Ανειδίκευτος εργάτης	800	1
4	Ιδιοκτήτης εταιρείας	4000	10
5	Δημόσιος υπάλληλος	1800	1
6	Τεχνίτης	2450	2
7	Ιδιωτικός υπάλληλος	2500	3
8	Τεχνίτης	950	2
9	Δημόσιος υπάλληλος	2100	3
10	Ιδιωτικός υπάλληλος	3500	2
11	Τεχνίτης	1350	2
12	Δημόσιος υπάλληλος	1500	2
13	Ιδιωτικός υπάλληλος	3100	4
14	Ιδιωτικός υπάλληλος	2800	10
15	Δημόσιος υπάλληλος	1700	1
16	Ιδιωτικός υπάλληλος	1600	6
17	Δημόσιος υπάλληλος	1950	2
18	Δημόσιος υπάλληλος	2050	6
19	Ιδιωτικός υπάλληλος	3050	6
20	Δημόσιος υπάλληλος	2150	2

Πίνακας 9.2.3
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή Χ: «Επάγγελμα».

t_i	*Διαλογή*	*Συχνότητα*	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Σχετική συχνότητα* f_i *%*
Δημόσιος υπάλληλος	~~||||~~ |||	8	0,40	40
Ιδιοκτήτης εταιρείας	||	2	0,10	10
Ανειδίκευτος εργάτης			1	0,05	5
Τεχνίτης	|||	3	0,15	15
Ιδιωτικός υπάλληλος	~~||||~~		6	0,30	30
Σύνολο		**20**	**1,00**	**100**

Πίνακας 9.2.4
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή X: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου».

t_i	*Διαλογή*	*Συχνότητα*	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Σχετική συχνότητα* $f_i\%$
1	∣∣∣∣	4	0,20	20
2	~~∣∣∣∣~~ ∣∣∣	8	0,40	40
3	∣∣	2	0,10	10
4	∣	1	0,05	10
6	∣∣∣	3	0,15	15
10	∣∣	2	0,10	10
Σύνολο		**20**	**1,00**	**100**

Η τέταρτη στήλη των πινάκων 9.2.3 και 9.2.4 προκύπτει αν διαιρέσομε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, οπότε λαμβάνομε τη λεγόμενη ***σχετική συχνότητα*** f_i της τιμής t_i, δηλαδή έχομε:

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1,2,...,\varkappa. \tag{9.2.2}$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζομε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i\%$ (βλ. τελευταίες στήλες των πινάκων 9.2.3 και 9.2.4). Είναι προφανές ότι για τις σχετικές συχνότητες ισχύουν οι σχέσεις:

α) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1, 2,..., \varkappa$ αφού $0 \le \nu_i \le \nu$.
β) $f_1 + f_2 + ... + f_\varkappa = 1$.

Η πρώτη προκύπτει άμεσα από την ανισότητα $0 \le \nu_i \le \nu$, $i = 1, 2,..., \varkappa$, ενώ για τη δεύτερη έχομε:

$$f_1 + f_2 + ... + f_\varkappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\varkappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\varkappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

Ένας πίνακας στον οποίο είναι συγκεντρωμένες οι ποσότητες t_i, ν_i, f_i (όπως οι πίνακες 9.2.3 και 9.2.4) ονομάζεται ***πίνακας κατανομής συχνοτήτων*** ή απλά ***πίνακας συχνοτήτων***. Το σύνολο των ζευγών (t_i, ν_i) λέμε ότι αποτελεί την ***κατανομή συχνοτήτων*** και το σύνολο των ζευγών (t_i, f_i), την ***κατανομή των σχετικών συχνοτήτων*** του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για ποσοτικές μεταβλητές, εκτός από τις συχνότητες ν_i και f_i χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες ***αθροιστικές συχνότητες*** N_i και οι ***αθροιστικές σχετικές συχνότητες*** F_i, οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό (απλό ή εκφρασμένο επί τοις εκατό) αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής t_i.

Αν οι διαφορετικές τιμές $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$, $\varkappa \le \nu$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X τοποθετηθούν στον πίνακα συχνοτήτων σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής t_i θα ισούται με $N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$. Ομοίως, για την αθροιστική σχετική συχνότητα θα έχομε $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$, για $i = 1, 2,..., \varkappa$. Από τις δύο τελευταίες εκφράσεις είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\nu_1 = N_1,\ \nu_2 = N_2 - N_1, ..., \nu_\varkappa = N_\varkappa - N_{\varkappa-1}$$

και

$$f_1 = F_1,\ f_2 = F_2 - F_1, ..., f_\varkappa = F_\varkappa - F_{\varkappa-1},$$

μέσω των οποίων μπορούμε να υπολογίζομε τις συχνότητες (απλές ή σχετικές) όταν γνωρίζομε τις αθροιστικές συχνότητες.

Στον πίνακα 9.2.5 δίνονται οι αθροιστικές συχνότητες της μεταβλητής «*Μηνιαία χρήση του δρομολογίου*» για τα δεδομένα του πίνακα 9.2.2.

Πίνακας 9.2.5
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή Χ: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου».

t_i	*Συχνότητα* v_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
1	5	0,25	5	0,25
2	8	0,40	13	0,65
3	2	0,10	15	0,75
4	1	0,05	16	0,80
6	3	0,15	19	0,95
10	1	0,05	20	1,00
Σύνολο	**20**	**1,00**		

Το είδος των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται κάθε φορά (απόλυτες ή σχετικές) εξαρτάται από τη φύση και το σκοπό της μελέτης που πραγματοποιούμε. Οι σχετικές συχνότητες είναι απαραίτητες για συγκρίσεις μεταξύ πληθυσμών (ή δειγμάτων) που διαφέρουν πολύ σε μέγεθος, αλλά και για την καλύτερη κατανόηση της συνθέσεως ενός πληθυσμού (ή δείγματος), αφού μας πληροφορούν για τη σχετική «βαρύτητα» που έχει η κάθε τιμή του χαρακτηριστικού συγκριτικά με τις υπόλοιπες. Από την άλλη πλευρά, η χρήση των απολύτων συχνοτήτων κρίνεται απαραίτητη στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να λάβομε μία σαφή εικόνα των πραγματικών μεγεθών ενός χαρακτηριστικού. Συνεπώς, οι απόλυτες συχνότητες ενδιαφέρουν κατά κύριο λόγο σε κοινωνικοοικονομικές μελέτες που στοχεύουν στον προγραμματισμό για τη λήψη μέτρων σε εθνικό ή ιδιωτικό επίπεδο. Για παράδειγμα, για το σχεδιασμό της επεκτάσεως του δικτύου υδρεύσεως, ηλεκτρικού ρεύματος ή τηλεφωνικών γραμμών, δεν αρκεί μόνο η διαθεσιμότητα του ποσοστού των νοικοκυριών που στερούνται τέτοιων παροχών, αλλά και η γνώση του απόλυτου αριθμού τους.

Πίνακας 9.2.6
Χρήση δρομολογίου.

Valid	*Frequency*	*Percent*	*Cumulative percent*
1	4	20,0	20,0
2	8	40,0	60,0
3	2	10,0	70,0
4	1	5,0	75,0
6	3	15,0	90,0
10	2	10,0	100,0
Total	**20**	**100,0**	

Ένας ταχύς τρόπος δημιουργίας πινάκων συχνοτήτων είναι με χρήση ειδικών προγραμμάτων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, τα οποία είναι γνωστά με την ονομασία ***Στατιστικά Προγράμματα*** ή ***Στατιστικά Πακέτα***. Ο πίνακας 9.2.6 έχει ληφθεί από ένα τέτοιο πρόγραμμα και μας δίνει την κατανομή συχνοτήτων για τη μεταβλητή *X*: *«Μηνιαία χρήση του δρομολογίου»*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2.1.

Στον πίνακα συχνοτήτων 9.2.7 δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής *X* και ορισμένες συχνότητες.

Πίνακας 9.2.7

t_i	***Συχνότητα*** ν_i	***Σχετική συχνότητα*** f_i	***Αθροιστική συχνότητα*** N_i	***Αθροιστική σχετική συχνότητα*** F_i
1				
2	6	0,15	16	
3				0,45
4				
5	18			
Σύνολο				

α) Να συμπληρώσετε όλες οι τιμές του πίνακα που λείπουν.
β) Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι:
– το πολύ 3,
– τουλάχιστον 4,
– μεταξύ του 2 και του 4 (συμπεριλαμβανομένων των τιμών αυτών).

Λύση.

α) Με βάση τους τύπους που γνωρίζομε για τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες (απόλυτες και σχετικές) έχομε διαδοχικά:

$$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} \Rightarrow 0{,}15 = \frac{6}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{6}{0{,}15} = 40\,,\; N_2 = \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow 16 = \nu_1 + 6 \Rightarrow \nu_1 = 10\,,$$

$$N_1 = \nu_1 = 10\,,\; f_1 = F_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{10}{40} = 0{,}25\,,$$

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = F_1 + f_2 + f_3 \Rightarrow 0{,}45 = 0{,}25 + 0{,}15 + f_3 \Rightarrow f_3 = 0{,}05\,,$$

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Rightarrow 0{,}05 = \frac{\nu_3}{40} \Rightarrow \nu_3 = 2\,,$$

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 \Rightarrow 40 = 10 + 6 + 2 + \nu_4 + 18 \Rightarrow \nu_4 = 4\,.$$

Αφού έχει συμπληρωθεί η στήλη με τις συχνότητες του πίνακα είναι πλέον εύκολο να συμπληρωθούν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία που λείπουν και έτσι προκύπτει ο πίνακας 9.2.8.

β) Με βάση τον πίνακα τα ζητούμενα ποσοστά είναι ίσα με:

$f_1 + f_2 + f_3 = F_3 = 45\%$.

$f_4 + f_5 = 0{,}10 + 0{,}45 = 55\%$ ή εναλλακτικά $1 - F_3 = 1 - 0{,}45 = 55\%$.

$f_2 + f_3 + f_4 = 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}30 = 30\%$.

Πίνακας 9.2.8

t_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
1	10	0,25	10	0,25
2	6	0,15	16	0,40
3	2	0,05	18	0,45
4	4	0,10	22	0,55
5	18	0,45	40	1,00
Σύνολο	**40**	**1,00**		

Ένας αποτελεσματικός τρόπος παρουσιάσεως στατιστικών δεδομένων είναι με μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Σε σχέση με τους πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν μία πιο εύληπτη εικόνα του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει και είναι πολύ πιο ελκυστικές, χωρίς πρακτικά να προσφέρουν λιγότερη πληροφορία από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνοτήτων. Επιπρόσθετα, με τα διαγράμματα διευκολύνεται σημαντικά η σύγκριση μεταξύ διάφορων πληθυσμιακών ομάδων ή δειγμάτων.

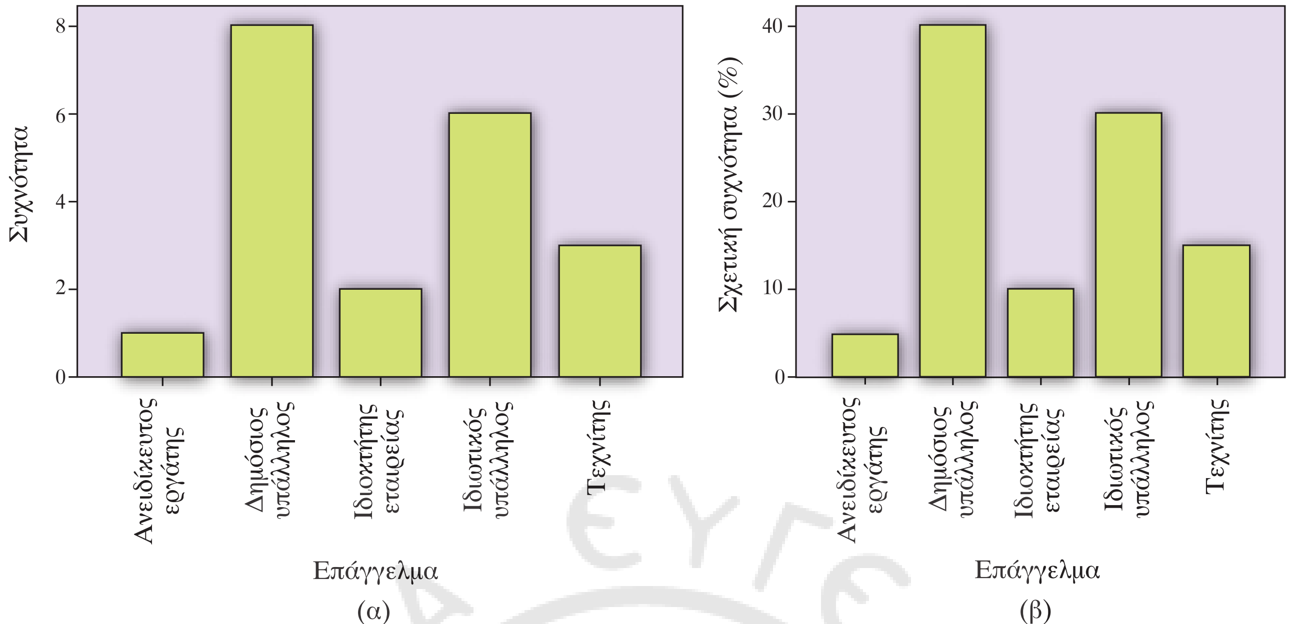
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσιάσεως, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που διαθέτομε. Για τη γραφική απεικόνιση των κατηγορικών δεδομένων χρησιμοποιούνται συνήθως τα ραβδογράμματα και τα κυκλικά διαγράμματα. Στα διαγράμματα αυτά οι απεικονίσεις των διάφορων μεγεθών γίνεται με γεωμετρικά ή άλλα σχήματα, με εφαρμογή της αρχής της αναλογίας ως προς τις παρατηρούμενες συχνότητες, απόλυτες ή σχετικές. Στην περίπτωση που έχομε ποσοτικά χαρακτηριστικά, αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιούμε το λεγόμενο ***διάγραμμα συχνοτήτων***, ενώ για δεδομένα που παρουσιάζει ενδιαφέρον η παρακολούθησή τους κατά την πάροδο του χρόνου, ιδιαίτερα χρήσιμα είναι τα χρονολογικά διαγράμματα ή διαγράμματα χρονοσειράς.

Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή στον κατακόρυφο άξονα. Έτσι, τα ραβδογράμματα αποτελούνται από τόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όσες είναι οι διαφορετικές τιμές της ποιοτικής μεταβλητής που εξετάζομε, έχουν συνήθως βάσεις ίσου εύρους, ενώ τα ύψη τους είναι ανάλογα των συχνοτήτων των αντιστοίχων τιμών, στις οποίες αναφέρονται.

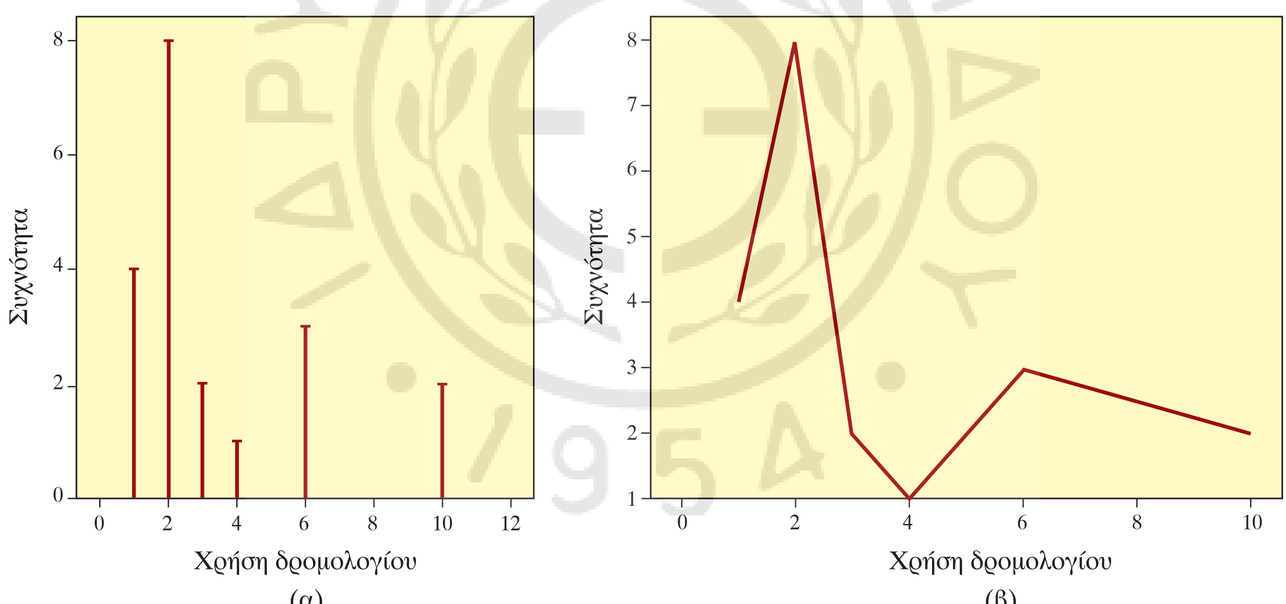
Ανάλογα με το αν στο ραβδόγραμμα απεικονίζονται απόλυτες ή σχετικές συχνότητες έχομε αντίστοιχα το ***ραβδόγραμμα συχνοτήτων*** και το ***ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων***. Στο σχήμα 9.2α δίνεται το ραβδογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων της μεταβλητής X: «*Επάγγελμα*» για τα δεδομένα του πίνακα 9.2.1.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, όταν έχομε μια ποσοτική μεταβλητή, αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το ***διάγραμμα συχνοτήτων*** (σχ. 9.2β). Σ' αυτό, αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια, υψώνομε στη θέση του άξονα που αντιστοιχούν οι διαφορετικές τιμές t_i μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων ν_i στον κάθετο άξονα να βάλομε τις σχετικές συχνότητες f_i, οπότε έχομε το ***διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων***. Ενώνοντας τα σημεία (t_i, ν_i) ή (t_i, f_i) λαμβάνομε το λεγόμενο ***πολύγωνο συχνοτήτων*** *ή* ***πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων***, αντίστοιχα.

Το ***κυκλικό διάγραμμα*** (piechart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων. Για την κατασκευή ενός κυκλικού διαγράμματος αρχικά δημιουργούμε έναν κυκλικό δίσκο και στη συνέχεια τον χωρίζομε σε τόσους κυκλικούς τομείς, όσες και οι δια-



Σχ. 9.2α.
Ραβδόγραμμα συχνοτήτων (α) και σχετικών συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή X: «Επάγγελμα» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2.



Σχ. 9.2β.
Διάγραμμα συχνοτήτων (α) και πολύγωνο συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή X: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2.

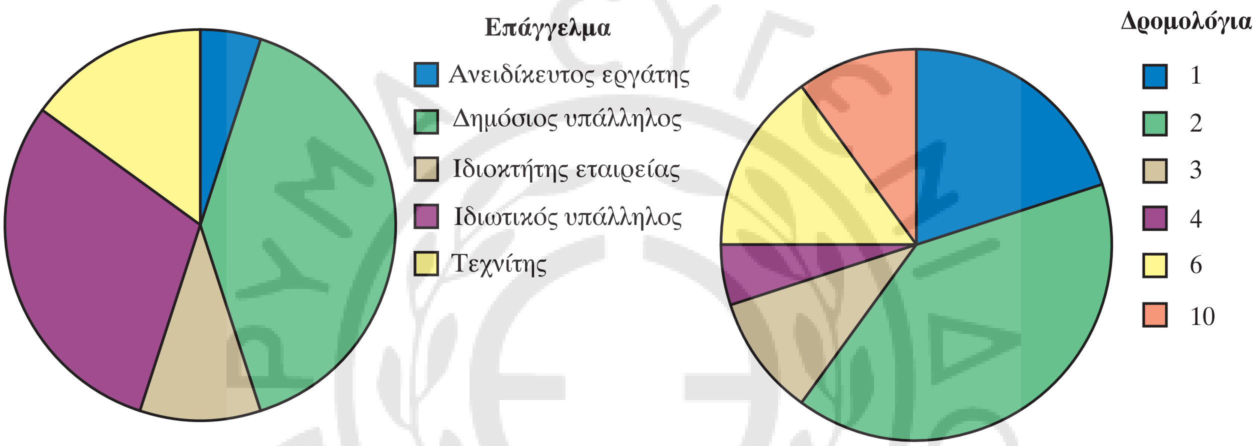
φορετικές τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει, έτσι ώστε τα εμβαδά (ή ισοδύναμα, τα τόξα τους) να είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i. Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσομε με θ_i το τόξο του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή t_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i, τότε θα έχομε:

$$\theta_i = \nu_i \frac{360^{\mathrm{o}}}{\nu} = 360^{\mathrm{o}} f_i \quad \text{για} \quad i = 1, 2, \ldots, \varkappa .$$

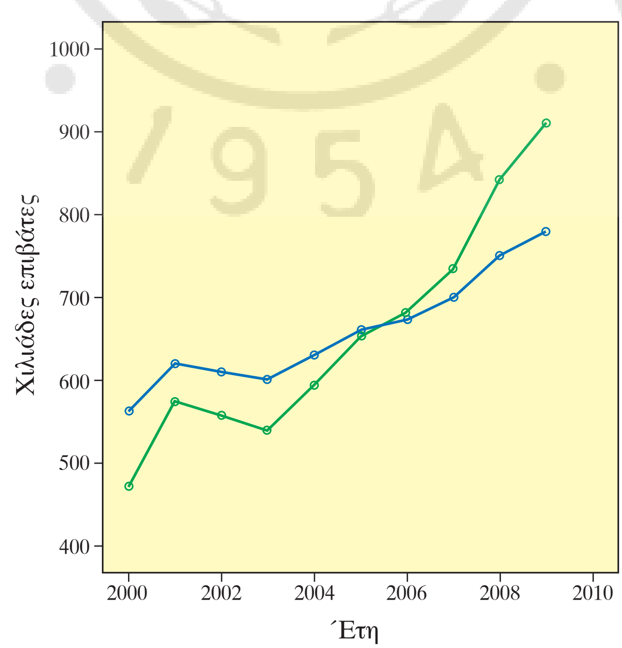
Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες, αφού σε αντίθετη περίπτωση το σχήμα που προκύπτει περιέχει πάρα πολλούς μικρούς κυκλικούς τομείς, με αποτέλεσμα να χάνει την περιγραφική του αξία.

Στο σχήμα 9.2γ δίνεται το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «*Επάγγελμα*» και «*Μηνιαία χρήση του δρομολογίου*» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2.

Ολοκληρώνομε την ενότητα αυτή παρουσιάζοντας τα χρονολογικά διαγράμματα ή διαγράμματα χρονοσειράς, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξελίξεως οικονομικών, πληθυσμιακών ή άλλων χαρακτηριστικών που μεταβάλλονται με το χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα ενός διαγράμματος χρονοσειράς τοποθετείται συνήθως ο χρόνος, ενώ στον κάθετο άξονα η εξεταζόμενη μεταβλητή. Στο σχήμα 9.2δ δίνεται η ετήσια κίνηση (σε χιλιάδες επιβάτες) δύο Ελληνικών λιμανιών κατά τα τελευταία χρόνια. Σύμφωνα με τα διαγράμματα αυτά, μετά το 2003 υπάρχει συνεχής αύξηση της επιβατικής κινήσεως και στα δύο λιμάνια, ενώ από το έτος 2005 στο 2006 υπήρξε ανατροπή της σειράς των δύο λιμανιών ως προς την επιβατική τους κίνηση.

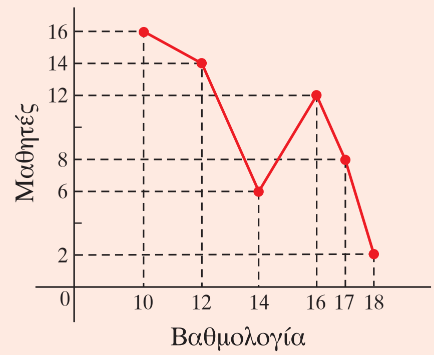


Σχ. 9.2γ.
Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «Επάγγελμα» και «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2.



Σχ. 9.2δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2.2.



Σχ. 9.2ε.

Στο σχήμα 9.2ε δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων που προέκυψε από τη βαθμολογία σ' ένα τεστ σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού.

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στο πολύγωνο συχνοτήτων το οποίο δόθηκε.

β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

Λύση.

α) Διαβάζοντας από το πολύγωνο συχνοτήτων που δόθηκε, τις συχνότητες v_i, $i = 1, 2,... \kappa$ ($\kappa = 6$) και τις τιμές της μεταβλητής που μελετάμε (βαθμολογία των σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού στο τεστ) συμπληρώνομε άμεσα τις πρώτες δύο στήλες του πίνακα 9.2.9.

Πίνακας 9.2.9

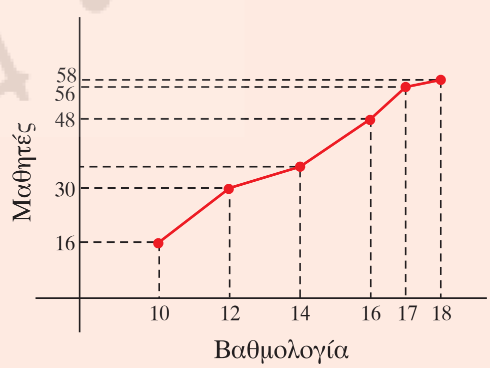
t_i	*Συχνότητα* v_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
10	16	0,275862	16	0,275862
12	14	0,241379	30	0,517241
14	6	0,103448	36	0,62069
16	12	0,206897	48	0,827586
17	8	0,137931	56	0,965517
18	2	0,034483	58	1
Σύνολο	**58**	**1**		

Στη συνέχεια συμπληρώνομε τις υπόλοιπες στήλες με χρήση των τύπων

$$f_i = \frac{v_i}{v}, \quad N_i = v_1 + v_2 + ... + v_i, \quad F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$$

για $i = 1, 2,..., 6$.

β) Από τον προηγούμενο πίνακα, προκύπτει εύκολα το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων που παρουσιάζεται στο σχήμα 9.2στ.



Σχ. 9.2στ.

Ασκήσεις.

9.2.1. Ο πίνακας συχνοτήτων 9.2.10 παρουσιάζει την κατανομή των ωρών λειτουργίας ενός μηχανήματος, σε χιλιάδες ώρες, πριν εμφανίσει βλάβη για πρώτη φορά. Τα δεδομένα προέκυψαν από την παρακολούθηση ενός δείγματος 120 μηχανημάτων που λήφθηκαν από μια συγκεκριμένη γραμμή παραγωγής.

α) Να συμπληρώσετε τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες για κάθε τιμή του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο λιγότερο ή ίσο των 2, 5, 8 και 10 χιλιάδων ωρών.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο μεγαλύτερο των 2, 5, 8 και 10 χιλιάδων ωρών.

δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο μεταξύ 2 και 9 χιλιάδων ωρών.

Πίνακας 9.2.10

Αριθμός ωρών	*Συχνότητα*
1	4
2	7
3	9
4	15
5	16
6	20
7	24
8	10
9	5
10	5
11	3
12	2

9.2.2. Στον πίνακα συχνοτήτων 9.2.11 δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και ορισμένες συχνότητες.

α) Να συμπληρωσετε όλες τις τιμές του πίνακα που λείπουν.

β) Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων, για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι το πολύ 4.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των ατόμων, για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι από 4 μέχρι 6.

Πίνακας 9.2.11

t_i	*Συχνότητα* v_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
1		0,10		
2	4			
3	6		20	
4	20			
5				0,85
6	18			
7				
Σύνολο				

9.2.3. Ο αριθμός των δωματίων 20 διαμερισμάτων που επιλέχτηκαν τυχαία σ' ένα οικοδομικό τετράγωνο ήταν:

2	3	5	2	4	2	2	3	4	4
2	3	5	4	4	4	4	3	6	2

α) Να κατασκευάσετε πίνακα, ο οποίος να περιέχει τις (απόλυτες) συχνότητες, τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες για κάθε τιμή του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των διαμερισμάτων που έχουν τουλάχιστον 3 δωμάτια.
γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των διαμερισμάτων που έχουν το πολύ 4 δωμάτια.

9.2.4. Οι ενδείξεις ενός ζαριού που το ρίξαμε 40 φορές ήταν:

1	3	5	6	1	2	5	2	4	1
6	2	1	4	4	3	1	4	6	2
5	3	1	2	5	2	2	2	4	3
2	4	5	4	6	1	4	1	6	2

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων για τις ενδείξεις τα ζαριού.
β) Να υπολογίσετε το ποσοστό ρίψεων που το ζάρι έδειξε ένδειξη μεγαλύτερη από 3.
γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό ρίψεων που το ζάρι έδειξε ένδειξη μικρότερη από 2.

9.2.5. Καθένας από τους 30 υπαλλήλους μιας επιχειρήσεως πήρε για θερινή άδεια τον παρακάτω αριθμό ημερών:

21	25	26	22	26	24	22	26	24	27
22	26	21	25	24	25	25	25	24	25
24	22	24	23	27	27	23	24	25	24.

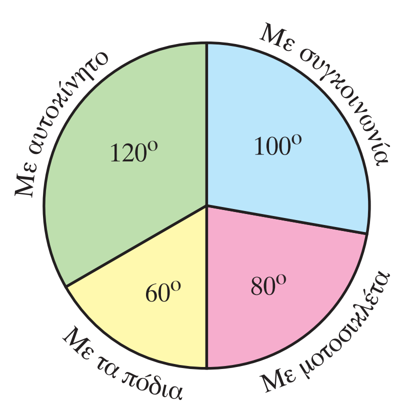
α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.
β) Να σχεδιαστεί διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.
γ) Να σχεδιαστεί κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.

9.2.6. Η οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως είναι η εξής:

Άνδρες ανύπαντροι	15	Γυναίκες ανύπαντρες	18
Άνδρες παντρεμένοι	25	Γυναίκες παντρεμένες	20
Άνδρες διαζευγμένοι	10	Γυναίκες διαζευγμένες	15

α) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα με ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
β) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα μ' ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

9.2.7. Το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζει του σχήματος 9.2ζ το μεταφορικό μέσο που χρησιμοποίησαν 180 άνθρωποι, για να μετακινηθούν από το σπίτι τους στη δουλειά τους.
α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που χρησιμοποίησαν συγκοινωνία.
β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που δεν μετακινήθηκαν με τα πόδια.



Σχ. 9.2ζ.

γ) Να μετατραπεί το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα.

9.2.8. Σ' ένα μετεωρολογικό σταθμό καταγράφεται κάθε έτος ο αριθμός των χιονοπτώσεων. Σε διάστημα 40 ετών συγκεντρώθηκαν τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον πίνακα 9.2.12.

α) Να συντάξετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απολύτων και αθροιστικών).

β) Να συντάξετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να συντάξετε κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας 9.2.12

Αριθμός χιονοπτώσεων	*Αριθμός ετών*
0	21
1	10
2	5
3	2
4	1
5	1
Σύνολο	**40**

9.2.9. Στον πίνακα 9.2.13 δίνονται τα καθαρά κέρδη (σε χιλιάδες €) μιας επιχειρήσεως κατά την οκταετία 2000 – 2007.

Πίνακας 9.2.13

΄Ετος	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Κέρδη	560	550	610	8200	1220	1500	1950	2100

Να παρασταθούν τα δεδομένα σ' ένα χρονολογικό διάγραμμα.

9.2.10. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα έχει απεικονιστεί το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας ναυτιλιακής εταιρείας σε τέσσερεις κατηγορίες:

Α΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ΄ Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαιδεύσεως

Δ΄ Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές. Στην Α΄ κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχειρήσεως. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ΄ κατηγορίας είναι 18°. Οι εργαζόμενοι της επιχειρήσεως της Β΄ κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ΄ κατηγορίας.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.

β) Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

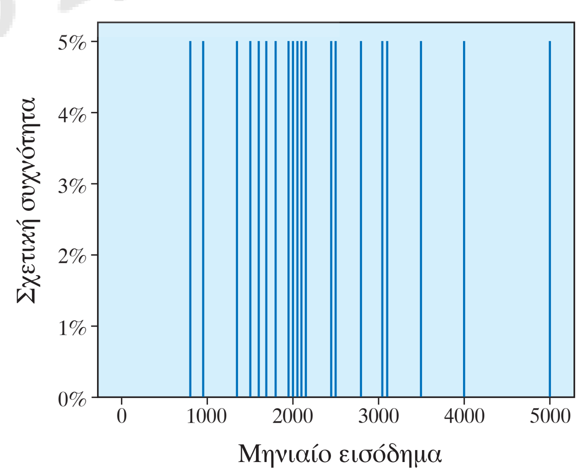
9.2.11. Τα κρούσματα δύο μεταδοτικών νόσων από το 2000–2010 παρουσιάζονται στον πίνακα 9.2.14.
α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα χρονοσειράς για τη νόσο *Α*.
β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα χρονοσειράς για τη νόσο *Β*.
γ) Να σχολιάσετε την εξέλιξη των νόσων και να τις συγκρίνετε με βάση τα δύο διαγράμματα χρονοσειράς.

Πίνακας 9.2.14

Έτος	*Νόσος Α*	*Νόσος Β*
2000	180	720
2001	126	526
2002	256	564
2003	366	362
2004	278	444
2005	412	272
2006	492	264
2007	514	536
2008	686	608
2009	602	232
2010	522	280

9.3 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.

Όταν το πλήθος των διαφορετικών τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο, είναι αρκετά δύσκολο να κατασκευαστούν οι πίνακες συχνοτήτων και τα αντίστοιχα διαγράμματα. Ακόμη όμως και αν τα κατασκευάσομε, οι πληροφορίες που δίνουν έχουν πολύ μικρή αξία, αφού οι πιο πολλές τιμές θα έχουν μικρές ή ίσες συχνότητες εμφανίσεως, με αποτέλεσμα να μην προκύπτει κάποιο χρήσιμο συμπέρασμα από την παρατήρηση του πίνακα συχνοτήτων ή του διαγράμματος. Για παράδειγμα, αν κατασκευάζαμε τον πίνακα συχνοτήτων της μεταβλητής *«Μηνιαίο εισόδημα»* του πίνακα 9.2.2, θα διαπιστώναμε ότι εμφανίζονται 20 διαφορετικές τιμές με συχνότητα 1, οπότε το αντίστοιχο διάγραμμα συχνοτήτων θα είχε τη μορφή που δίνεται στο σχήμα 9.3α και δεν θα παρείχε καμμία χρήσιμη πληροφορία.



Σχ. 9.3α

Το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά έντονο στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, η οποία μπορεί θεωρητικά να λάβει οποιαδήποτε τιμή σε συνεχή διαστήματα, με αποτέλεσμα οι τιμές της να είναι όλες ή σχεδόν όλες διαφορετικές μεταξύ τους και επομένως να μην έχει νόημα να καταγράψομε τη συχνότητα εμφανίσεως κάθε τιμής, αφού το πιθανότερο ενδεχόμενο είναι κάθε τιμή να εμφανίζεται μόνο μια φορά. Παρόμοιο πρόβλημα μπορεί να προκύψει και στην περίπτωση διακριτών μεταβλητών με πολύ μεγάλο εύρος τιμών.

Στις περιπτώσεις αυτές ακολουθούμε την τεχνική της ***ομαδοποιήσεως*** των παρατηρήσεων, σύμφωνα με την οποία τα δεδομένα ταξινομούνται (ομαδοποιούνται) σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται ***ομάδες*** ή ***κλάσεις***, έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει σε μία μόνο κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται ***όρια*** των κλάσεων. Προκειμένου να αποφευχθεί το φαινόμενο της ταξινομήσεως μιας παρατηρήσεως σε περισσότερες από μία κλάσεις, μπορούμε να ακολουθήσομε μία από τις επόμενες δύο τεχνικές:

α) Χρησιμοποιούμε ως όρια τιμές, οι οποίες δεν μπορούν να ληφθούν από το χαρακτηριστικό που μελετάμε. Για παράδειγμα, αν το χαρακτηριστικό που μελετάμε λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές, χρησιμοποιούμε δεκαδικά όρια (0,5 1,5 2,5 κ.λπ.).

β) Θεωρούμε ότι κάθε κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), δηλαδή είναι της μορφής [,) ή αντίστροφα ότι κάθε κλάση περιέχει το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), αλλά όχι το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), δηλαδή είναι της μορφής (,].

Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι τιμές που εμπίπτουν σε κάθε κλάση θεωρούνται μεταξύ τους ισοδύναμες. Πιο συγκεκριμένα υποθέτομε ότι όλες οι παρατηρήσεις μιας κλάσεως είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες (τοποθετημένες) εντός της κλάσεως και μπορούν να «αντιπροσωπευθούν» από τις ***κεντρικές τιμές*** κάθε κλάσεως, δηλαδή το ημιάθροισμα των δύο άκρων της κλάσεως.

Η διαδικασία κατασκευής ενός πίνακα συχνοτήτων για ομαδοποιημένα δεδομένα είναι σχετικά απλή και συνοψίζεται στα επόμενα *βήματα*:

- $\mathbf{B}_1$. Υπολογίζομε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή στα δεδομένα μας.
- $\mathbf{B}_2$. Υπολογίζομε το εύρος των δεδομένων, δηλαδή τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.
- $\mathbf{B}_3$. Υπολογίζομε τον αριθμό των τάξεων (κλάσεων) που θα χρησιμοποιηθούν.
- $\mathbf{B}_4$. Υπολογίζομε το εύρος (πλάτος) κάθε κλάσεως και στη συνέχεια καθορίζομε τα όρια της καθεμιάς.
- $\mathbf{B}_5$. Καταγράφομε τον αριθμό των τιμών της μεταβλητής που ανήκουν σε κάθε μια από τις κλάσεις.
- $\mathbf{B}_6$. Συμπληρώνομε τον πίνακα συχνοτήτων (με τη βοήθεια της διαδικασίας της επιλογής).

Προκειμένου να παρουσιάσομε ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα για τη διαδικασία της ομαδοποιήσεως, θα χρησιμοποιήσομε τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, τα οποία αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση ενός πλοίου σε διάστημα 40 ημερών.

Πίνακας 9.3.1
Ημερήσια επιβατική κίνηση ενός πλοίου σε διάστημα 40 ημερών.

252	255	263	276	265	276	275	279
265	256	264	277	285	277	277	281
277	256	265	277	**241**	289	265	265
247	258	267	287	265	253	277	292
300	262	270	264	272	273	278	277

Εξετάζοντας τα δεδομένα εντοπίζομε την ελάχιστη τιμή $\min\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ και τη μέγιστη τιμή $\max\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$. Σύμφωνα με τα διαθέσιμα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 η μέγιστη τιμή είναι ίση με 300 και η ελάχιστη 241 και έτσι ολοκληρώνεται το $\mathbf{B}_1$.

Σύμφωνα με το $\mathbf{B}_2$, υπολογίζομε στη συνέχεια το εύρος (*Range - R*) των δεδομένων ως τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατηρήσεως. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το εύρος είναι ίσο με $R = 300 - 241 = 59$.

Για την εκτέλεση του $\mathbf{B}_3$, χρησιμοποιούμε τον εμπειρικό τύπο του Sturges, σύμφωνα με τον οποίο το πλήθος $\varkappa$ των κλάσεων δίνεται από την έκφραση:

$$\varkappa = 1 + 3{,}32\log\nu = 1 + 1{,}44\ \ln\nu$$

όπου ν είναι το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιούμε. Ο τύπος αυτός δίνει έναν ενδεικτικό αριθμό κλάσεων και δεν είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιήσομε ακριβώς το πλήθος κλάσεων που προκύπτει από αυτόν, ιδιαίτερα αν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος να έχομε διαφορετικό αριθμό κλάσεων με βάση τη διαθέσιμη εμπειρία. Για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 έχομε $\nu = 40$, οπότε:

$$\varkappa = 1 + 1{,}44\ln 40 \cong 6.31$$

και για τη διαδικασία της ομαδοποίησεως θα χρησιμοποιήσομε $\varkappa = 6$ κλάσεις.

Το $\mathbf{B}_4$ είναι ο προσδιορισμός του εύρους (πλάτους) των κλάσεων, δηλαδή της διαφοράς του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσεως. Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι κλάσεις έχουν το ίδιο εύρος. Για κλάσεις ίσου εύρους, το εύρος c των κλάσεων υπολογίζεται απλά διαιρώντας το εύρος R διά του αριθμού των κλάσεων $\varkappa$, δηλαδή:

$$c = \frac{R}{\varkappa}\cdot$$

Αν χρειαστεί να γίνει στρογγύλευση του αποτελέσματος (ώστε να προκύψει ακέραιο αποτέλεσμα), θα πρέπει να γίνει προς τα επάνω, γιατί σε αντίθετη περίπτωση δεν θα είναι εφικτό να καλύψομε όλες τις παρατηρήσεις του δείγματος. Για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 έχομε $\varkappa = 6$ και $R = 59$, οπότε

$$c = \frac{R}{\varkappa} = \frac{59}{6} \cong 9{,}83$$

και θα μπορούσαμε, για λόγους ευκολίας να θεωρήσομε $c = 10$ (έτσι ώστε το εύρος των κλάσεων να είναι ακέραιος αριθμός).

Στη συνέχεια προχωράμε στην κατασκευή των κλάσεων, δηλαδή στον καθορισμό των άκρων (ορίων) της καθεμιάς. Ξεκινώντας από τη μικρότερη παρατήρηση ή λίγο πιο κάτω από τη μικρότερη παρατήρηση (αν αυτό διευκολύνει για να προκύπτουν πιο εύχρηστα όρια) και προσθέτοντας κάθε φορά το εύρος c, δημιουργούμε τα όρια των $\varkappa$ κλάσεων. Εφόσον η στρογγύλευση κατά τον υπολογισμό του c έχει γίνει προς τα επάνω, η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση και κάθε τιμή θα εμπίπτει σε μία και μόνο μία κλάση. Για το παράδειγμα που επεξεργαζόμαστε θα μπορούσαμε να θεωρήσομε ως αρχή της πρώτης κλάσεως το 240 και προσθέτοντας το εύρος $c = 10$ δημιουργούμε την πρώτη κλάση, η οποία ξεκινά από το 240 και καταλήγει στο $240+10 = 250$. Με την ίδια διαδικασία ορίζομε και τις υπόλοιπες κλάσεις, χρησιμοποιώντας πάντα ως αριστερό όριο για κάθε κλάση το αντίστοιχο δεξί (άνω) όριο της προηγούμενης κλάσεως. Τελικά λαμβάνομε τα επόμενα όρια:

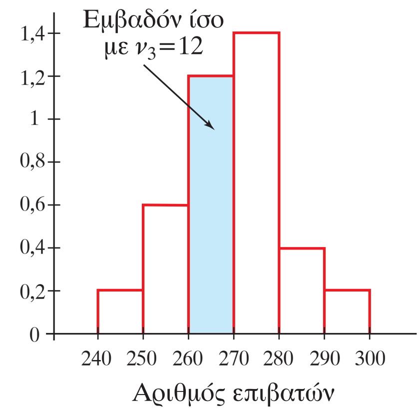
240, 250, 260, 270, 280, 290, 300.

Θεωρώντας ότι κάθε κλάση περιέχει το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά) αλλά όχι το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), δηλαδή είναι της μορφής (,], εκτελούμε τέλος τη διαδικασία της διαλογής και λαμβάνομε τον πίνακα συχνοτήτων 9.3.2 ($\mathbf{B}_5$ και $\mathbf{B}_6$). Το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i που ανήκουν στην κλάση i καλείται ***συχνότητα της κλάσεως*** αυτής. Ως ***κεντρική τιμή***, $i = 1, 2,...,\varkappa$ της κλάσεως i θεωρούμε το ημιάθροισμα των δύο της άκρων της κλάσεως.

Για τη γραφική παράσταση ομαδοποιημένων δεδομένων χρησιμοποιούμε συνήθως το ***ιστόγραμ-***

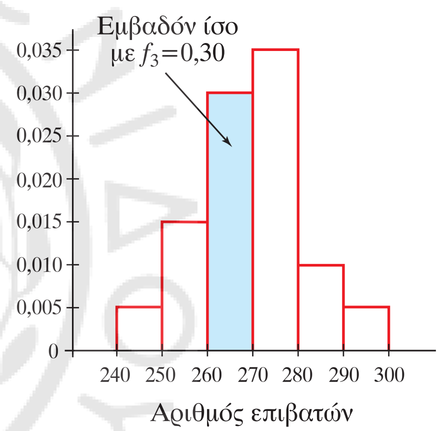
Πίνακας 9.3.2
Πίνακας συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1.

Κλάσεις (–]	*Κεντρικές τιμές*	ν_i	$f_i\,\%$	N_i	$F_i\,\%$
240–250	245	2	5	2	5
250–260	255	6	15	8	20
260–270	265	12	30	20	50
270–280	275	14	35	34	85
280–290	285	4	10	38	95
290–300	295	2	5	40	100
Σύνολο		**40**	**100**	**–**	**–**



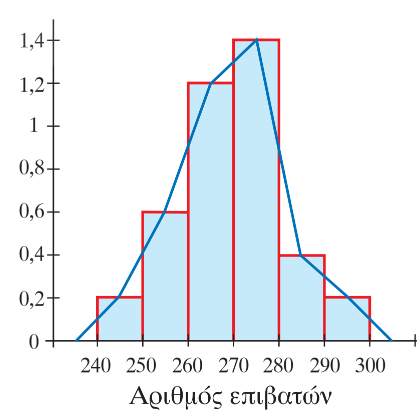
Σχ. 9.3β.
Ιστόγραμμα συχνοτήτων.

μα συχνοτήτων. Σ' αυτό σημειώνομε στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων τα όρια των κλάσεων και στη συνέχεια, κατασκευάζομε διαδοχικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το εύρος της κλάσεως και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσεως αυτής. Στο σχήμα 9.3β δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, όπως αυτά ομαδοποιήθηκαν στον πίνακα 9.3.2.



Σχ. 9.3γ.
Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το ***ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων***, δημιουργώντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το εύρος της κλάσεως και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσεως. Προφανώς το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων θα έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων, με μοναδική διαφορά στην κλίμακα που χρησιμοποιείται στον κατακόρυφο άξονα (σχ. 9.3γ).



Σχ. 9.3δ.
Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων.

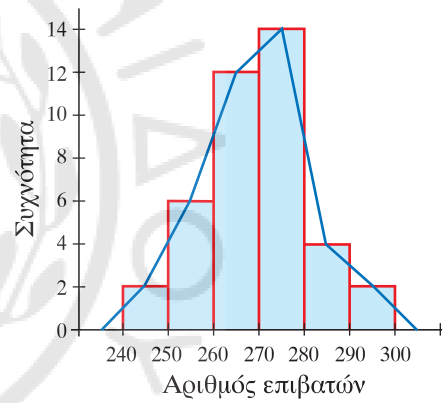
Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων προσθέσομε δύο υποθετικές κλάσεις με μηδενικές συχνότητες, μία πριν από την πρώτη και μια μετά από την τελευταία κλάση και στη συνέχεια ενώσομε τα μέσα των άνω βάσεων όλων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο ***πολύγωνο συχνοτήτων*** (frequency polygon). Από τον τρόπο κατασκευής του είναι προφανές ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν. Στο σχήμα 9.3δ δίνεται το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1.

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται, από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το ***πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων***. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων, δηλαδή 1 (100%).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε κλάσεις ίσου εύρους, όπως στο παράδειγμά μας, είναι φανερό ότι το ύψος κάθε ορθογωνίου θα είναι ανάλογο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσεως, οπότε το σχήμα που δημιουργείται θα είναι όμοιο με αυτό που θα λαμβάναμε αν στον κατακόρυφο άξονα τοποθετούσαμε απλά τις συχνότητες (χωρίς δηλ. να τις διαιρούμε με το εύρος, ώστε το εμβαδό να είναι ίσο με τη συχνότητα). Στο σχήμα 9.3ε δίνεται το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, όπου όμως τώρα στον κατακόρυφο άξονα έχουν σημειωθεί οι (απόλυτες) συχνότητες.

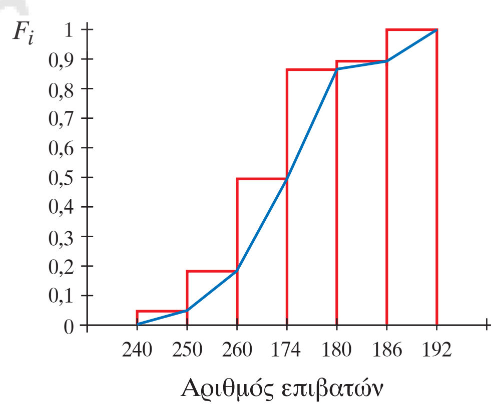
Για πρακτικούς λόγους (ελάττωση των απαιτουμένων υπολογισμών) στον κατακόρυφο άξονα ενός ιστογράμματος συχνοτήτων θα σημειώνομε στη συνέχεια τις συχνότητες των κλάσεων, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό ή έχομε ομαδοποιημένα δεδομένα με κλάσεις άνισου εύρους.

Με τον ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσομε και ***ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων*** και ***αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων***, στα οποία ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τις αθροιστικές ή τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες των κλάσεων. Αν μάλιστα σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων ενώσομε τα δεξιά άκρα των άνω βάσεων των ορθογωνίων του με ευθύγραμμα τμήματα, τότε προκύπτει μια πολυγωνική γραμμή, η οποία ονομάζεται ***πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων***. Στο σχήμα 9.3στ δίνεται το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1. Σημειώνομε ότι, σ' ένα διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων οι επάνω πλευρές των ορθογωνίων παραλληλογράμμων κινούνται προς υψηλότερες θέσεις όσο αυξάνονται οι τιμές της μεταβλητής που μελετάμε, αφού στην περίπτωση αυτή αυξάνονται συνεχώς οι τιμές της αθροιστικής συχνότητας. Επί πλέον, η πολυγωνική γραμμή του πολύγωνου αθροιστικών συχνοτήτων αντιστοιχεί σε μια αύξουσα συνάρτηση.



Σχ. 9.3ε.
Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων.

Μια εξαιρετικά απλή αλλά και ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική συνοπτικής παρουσιάσεως δεδομένων είναι τα λεγόμενα διαγράμματα κορμού-και-φύλλων ή ***φυλλογραφήματα*** (stem and leaf plots). Με την τεχνική αυτή ουσιαστικά οδηγούμαστε σε μια τεχνητή ομαδοποίηση των δεδομένων που διαθέτομε και συγχρόνως δημιουργούμε μια σχηματική παράσταση παρόμοια μ' αυτήν των ιστογραμμάτων, χωρίς όμως να έχομε οποιαδήποτε απώλεια πληροφοριών από τη συγχώνευση διαφορετικών παρατηρήσεων σε κλάσεις. Αυτό συμβαίνει διότι το διάγραμμα κορμού-και-φύλλων παρέχει τη δυνατότητα ανασυστάσεως των μετρήσεων των αρχικών δεδομένων του δείγματος με απόλυτη ακρίβεια, πράγμα το οποίο δεν επιτυγχάνεται με τους πίνακες συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων ή τα ιστογράμματα συχνοτήτων. Η χρήση των φυλλογραφημάτων ενδείκνυται κατά κύριο λόγο για την επεξεργασία μέτριου πλήθους παρατηρήσεων.



Σχ. 9.3στ.
Ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

Τα βασικά πλεονεκτήματα του φυλλογραφήματος είναι ότι:

α) Περιέχει όλα τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί.

β) Δείχνει τη μορφή της κατανομής συχνοτήτων και

γ) εμφανίζει τυχόν ακραίες/έκτροπες παρατηρήσεις, δηλαδή παρατηρήσεις που είναι είτε υπερβολικά μεγάλες, είτε υπερβολικά μικρές σε σχέση με τον κύριο όγκο των δεδομένων.

Θα παρουσιάσομε τον τρόπο, με τον οποίο δημιουργείται ένα φυλλογράφημα μέσα από ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι έχουν συγκεντρωθεί οι επόμενες 25 μετρήσεις που αφορούν στην ηλικία (σε συμπληρωμένα έτη) των ατόμων που αποτελούν το πλήρωμα ενός πλοίου:

39 45 50 41 46   47 40 47 59 59   23 38 39 41 41

50 51 34 35 35   42 43 27 32 34

Διατάσσομε για διευκόλυνση τα δεδομένα κατά μέγεθος από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τιμή:

23 27 32 34 34 35 35 38 39 39 40 41

41 41 42 43 45 46 47 47 50 50 51 59 59

Θεωρούμε ότι κάθε μία παρατήρηση αντιπροσωπεύεται από δύο τμήματα:

α) Αυτό που αποτελείται από ένα πρώτο ή αρχικό ψηφίο και

β) από το δεύτερο ή επόμενο ψηφίο, δηλαδή αυτό που έπεται του τμήματος που θεωρήσαμε ως αρχικό.

Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θεωρήσομε ότι η πρώτη μέτρηση (η τιμή 23) έχει ως αρχικό ψηφίο (stem: κορμό ή μίσχο) το νούμερο 2 και ως επόμενο (leaf: φύλλο) το 3. Αυτό θα σημειώνεται ως εξής:

Κορμός – Stem (μονάδα = 10)	Φύλλο – Leaf (μονάδα = 1)
2	3

Ομοίως, η τελευταία παρατήρηση (η οποία έχει τιμή 59) παριστάνεται ως:

Κορμός – Stem (μονάδα = 10)	Φύλλο – Leaf (μονάδα = 1)
5	9

Το διάγραμμα ολοκληρώνεται τοποθετώντας όλα τα ψηφία που απαρτίζουν τον κορμό των παρατηρήσεων κατά αύξουσα τάξη καθέτως και αριστερά της διαχωριστικής γραμμής και θέτοντας τις τιμές των φύλλων ακριβώς δίπλα από το αντίστοιχο τμήμα κορμού (δεξιά της κάθετης διαχωριστικής γραμμής) επίσης κατ' αύξουσα τάξη μεγέθους. Το φυλλογράφημα του παραδείγματός μας θα έχει τελικά την εξής μορφή:

Κορμός – Stem (μονάδα = 10)	Φύλλο – Leaf (μονάδα = 1)
2	3 7
3	2 4 4 5 5 8 9 9
4	0 1 1 1 2 3 5 6 7 7
5	0 0 1 9 9

Σε γενικές γραμμές ως φύλλο κάθε στατιστικού στοιχείου λαμβάνεται το τελευταίο ή τα δύο τελευταία ψηφία της τιμής της παρατηρήσεως και ως κορμός το πρώτο ή τα εναπομείναντα πρώτα ψηφία. Ας σημειωθεί όμως ότι ο προσδιορισμός του κορμού και του φύλλου των παρατηρήσεων εξαρτάται από τη φύση και το εύρος των τιμών των δεδομένων. Για παράδειγμα, η τιμή 1234 θα μπορούσε, ανάλογα με την περίσταση, να αναπαρασταθεί είτε ως 1│234 είτε ως 12│34 είτε ως 123│4.

Είναι φανερό ότι αν περιστρέψομε νοητά το παραπάνω φυλλογράφημα, έτσι ώστε τα ψηφία του κορμού να λάβουν οριζόντια θέση, θα ήταν σαν να σκιαγραφούσαμε τέσσερα παραλληλόγραμμα (ιστούς) το καθένα με 2, 8, 10 και 5 (συμβατικές) μονάδες ύψους αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό θα λαμβάναμε στην πραγματικότητα την εικόνα του ιστογράμματος συχνοτήτων όταν στα δεδομένα μας έχει γίνει ομαδοποίηση με κλάσεις τις δεκάδες ηλικιών [20, 30), [30, 40), [40, 50), [50, 60).

Ασκήσεις.

9.3.1. Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν στον αριθμό των ατόμων του πληρώματος σε 50 μεγάλα επιβατικά πλοία.

104	109	126	152	130	152	150	158	143	143
130	112	128	154	176	154	154	162	154	112
154	112	125	154	82	178	129	128	201	135
94	116	134	174	127	106	154	184	132	165
205	124	140	128	144	146	156	154	219	217

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα αυτά σε 5 κλάσεις.

β) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, καθώς και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

9.3.2. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 50 τεχνίτες για να συναρμολογήσουν (ο καθένας) ένα εξάρτημα πλοίου ήταν:

39	137	72	19	18	43	44	34	44	32
49	41	19	29	41	36	80	74	132	44
38	102	25	49	38	92	44	121	95	39
19	40	33	109	124	128	34	33	46	64
36	92	33	43	135	35	69	37	75	87

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων.

β) Να συντάξετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.

γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

9.3.3. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ηλικίες 400 επιβατών που ταξίδεψαν μ’ ένα πλοίο.

Ηλικίες [,)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
Αριθμός ατόμων	20	60	200	70	40	10

α) Να συνταχθούν οι πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, καθώς και των αντιστοίχων αθροιστικών συχνοτήτων.
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.
γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, καθώς και το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.
δ) Τι ποσοστό επιβατών ήταν ηλικίας μικρότερης των 40 ετών και τι ποσοστό ανθρώπων ήταν ηλικίας από 25 έως 55 ετών;

9.3.4. Δίνονται οι επόμενες παρατηρήσεις που αφορούν στη βαθμολογία που έλαβαν 20 φοιτητές σε ένα τεστ με κλίμακα 0–1000

724	738	647	583	883	999	829	803	782	755
811	756	756	953	738	638	738	592	988	811

α) Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα των δεδομένων.
β) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε ομάδες εύρους 100, ξεκινώντας από μια ομάδα με κάτω άκρο την τιμή 600 και στη συνέχεια να γίνει το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων.
γ) Να συγκρίνετε τα δύο διαγράμματα μεταξύ τους.

9.3.5. Στον πίνακα 9.3.3 δίνεται η κατανομή συχνοτήτων της συστολικής πιέσεως 160 ατόμων, που λαμβάνουν το φάρμακο *Α* και 180 άλλων ατόμων, που λαμβάνουν το φάρμακο *Β*.
α) Να κατασκευάσετε τα ιστογράμματα σχετικών συχνοτήτων για κάθε φάρμακο και να τα συγκρίνετε μεταξύ τους.
β) Να κατασκευάσετε τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τους ίδιους άξονες συντεταγμένων.

Πίνακας 9.3.3

Συστολική πίεση (σε mm Hg)	ν_i	
	Φάρμακο Α	***Φάρμακο Β***
95–99	8	2
100–104	18	12
105–109	16	14
110–114	24	20
115–119	32	32
120–124	20	26
125–129	14	24
130–134	12	22
135–139	6	12
140–144	6	8
145–149	4	4
Σύνολο	**160**	**180**

9.3.6. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας (ΕΣΥΕ) η κατανομή ανά ηλικία και φύλο των θανάτων το έτος 1995 λόγω υπερτασικής νόσου ήταν η εξής:

α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία των συνολικών ατόμων που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995.

β) Να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τα ιστογράμματα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία των αντρών και των γυναικών, αντίστοιχα, που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995 και στη συνέχεια να τα συγκρίνετε.

Ηλικία	***Θάνατοι***	
	Άνδρες	***Γυναίκες***
50–54	10	7
55–59	10	4
60–64	17	21
65–69	36	57
70–74	44	61
75–79	73	109
80–84	117	162
85–89	123	195

9.3.7. Δίνεται ο πίνακας κατανομής 9.3.4 συχνοτήτων της μεταβλητής X.

α) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία του πίνακα που λείπουν.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων των δεδομένων.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων των δεδομένων.

Πίνακας 9.3.4.

Κλάσεις [–)	***Κεντρικές τιμές***	***Συχνότητα*** v_i	***Σχετική συχνότητα*** f_i	***Αθροιστική σχετική συχνότητα*** F_i **%**
1–5				20
5–9				50
9–13				85
13–17				95
17–21		2		
Σύνολο			1	

9.3.8. Σε μία μεγάλη ναυτιλιακή εταιρεία υπηρετούν συνολικά 100 υπάλληλοι. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των υπαλλήλων δίνεται από τον πίνακα 9.3.5.

α) Πόσοι υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

β) Με την προϋπόθεση ότι κάθε υπάλληλος θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια, πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;

γ) Με την προϋπόθεση ότι κάθε υπάλληλος θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια πόσοι συνολικά υπάλληλοι πρέπει να προσληφθούν στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των υπαλλήλων να παραμένει ο ίδιος;

Πίνακας 9.3.5

Χρόνια υπηρεσίας [–)	*Σχετική συχνότητα* f_i %
0–5	10
5–10	15
10–15	12
15–20	15
20–25	18
25–30	18
30–35	12

9.4 Μέτρα θέσεως.

Στην παρούσα παράγραφο και σ' αυτήν που θα ακολουθήσει, θα παρουσιάσομε τα κυριότερα (στατιστικά) περιγραφικά μέτρα. Με τον όρο αυτό αναφερόμαστε σε κατάλληλες αριθμητικές ποσότητες, οι οποίες μπορούν να συνοψίζουν τις πληροφορίες που περιέχονται στα δεδομένα μας, παρέχοντάς μας μια πλήρη εικόνα για την κατανομή συχνοτήτων του χαρακτηριστικού που μελετάμε. Πιο συγκεκριμένα τα στατιστικά περιγραφικά μέτρα παρέχουν έναν ακόμα πιο σύντομο τρόπο περιγραφής της κατανομής ενός συνόλου δεδομένων σε σχέση με τους πίνακες συχνοτήτων και τις γραφικές παραστάσεις που μελετήσαμε στις παραγράφους 9.2 και 9.3.

Διακρίνομε δυο βασικές κατηγορίες περιγραφικών μέτρων, τα ***μέτρα θέσεως*** και τα ***μέτρα διακυμάνσεως*** ή ***μέτρα μεταβλητότητας***. Επίσης, ανάλογα με το αν τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε αφορούν σε ολόκληρο τον προς μελέτη πληθυσμό ή ένα δείγμα από αυτόν, αναφερόμαστε σε ***πληθυσμιακά μέτρα*** ή ***δειγματικά μέτρα***, αντίστοιχα.

Τα μέτρα θέσεως είναι τα περιγραφικά εκείνα μέτρα, τα οποία παρέχουν πληροφορίες για τη θέση του «κέντρου» της κατανομής των τιμών μιας μεταβλητής. Τα μέτρα διακυμάνσεως ποσοτικοποιούν την τάση των παρατηρήσεων να απομακρύνονται από το «κέντρο» τους.

Τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσεως είναι ο ***αριθμητικός μέσος*** ή ***μέση τιμή***, η ***διάμεσος*** και τα ***εκατοστημόρια*** και τέλος η ***κορυφή*** ή ***επικρατούσα τιμή***. Θα εξετάσομε στη συνέχεια αναλυτικά καθένα από τα μέτρα αυτά.

9.4.1 Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή $(\overline{x})$.

Ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων είναι στην πραγματικότητα ο γνωστός σε όλους από την καθημερινή πράξη μέσος όρος ενός αριθμού παρατηρήσεων. Αποτελεί το σπουδαιότερο και χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των διαθεσίμων παρατηρήσεων διά του πλήθους τους.

Συμβολικά, αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριτικό) X, τότε η μέση τιμή των παρατηρήσεων συμβολίζεται με $\overline{x}$ και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i .$$

Στον παραπάνω τύπο χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο $\sum_{i=1}^{\nu} x_i$ για να παραστήσομε σε συντομογραφία το άθροισμα $x_1 + x_2 + ... + x_\nu$. Η συντομογραφία αυτή ή όταν δεν υπάρχει πρόβλημα συγχύσεως ο απλούστερος συμβολισμός $\sum x_i$, θα χρησιμοποιείται συχνά στη συνέχεια, προκειμένου να μπορούμε να γράφομε με σύντομο και κομψό τρόπο ορισμένους τύπους που θα χρειαστούμε στην πορεία της παρουσιάσεως των στατιστικών περιγραφικών μέτρων, εξοικονομώντας έτσι χώρο.

Για παράδειγμα, η μέση τιμή της ημερήσιας επιβατικής κινήσεως που δίνεται (για διάστημα 40 ημερών) στον πίνακα 9.3.1 βρίσκεται εύκολα ως εξής

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{40}}{40} = \frac{252 + 255 + 263 + ... + 277}{40} = \frac{10800}{40} = 270\,.$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι με βάση τα δεδομένα που διαθέτομε, η μέση ημερήσια επιβατική κίνηση για το διάστημα των 40 ημερών, το οποίο μελετήσαμε, ήταν 270 (επιβάτες ανά ημέρα).

Στην περίπτωση που για τα δεδομένα που συλλέξαμε έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας συχνοτήτων, η μέση τιμή μπορεί να υπολογισθεί πιο γρήγορα χρησιμοποιώντας τον εναλλακτικό τύπο:

$$\overline{x} = \frac{t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + ... + t_\varkappa \nu_\varkappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\varkappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \nu_i}{\sum_{i=1}^{\varkappa} \nu_i} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \nu_i$$

ή ισοδύναμα τον

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i f_i\,,$$

όπου $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\varkappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, ..., f_\varkappa$. Πολλές φορές αναφερόμαστε στον τελευταίο τύπο λέγοντας ότι έχομε ένα ***σταθμικό*** ή ***σταθμισμένο μέσο όρο*** των τιμών $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$, αφού για τον υπολογισμό του $\overline{x}$ σταθμίζονται οι τιμές t_i με τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i που ονομάζονται ***βάρη*** της σταθμίσεως. Για το λόγο αυτό μάλιστα, στην ελληνική βιβλιογραφία ο σταθμικός μέσος όρος αναφέρεται και ως ***βαρυκεντρικός μέσος***.

Για παράδειγμα η μέση μηνιαία χρήση δρομολογίου που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 9.2.2 μπορεί να υπολογισθεί είτε απ' ευθείας μέσω του τύπου:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{20}}{20} = \frac{1 + 2 + 1 + 10 + ... + 6 + 2}{20} = \frac{68}{20} = 3,4$$

είτε, χρησιμοποιώντας και τα στοιχεία του πίνακα συχνοτήτων 9.2.4, μέσω του τύπου:

$$\overline{x} = \frac{t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + ... + t_6\nu_6}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_6} = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 8 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 6\cdot 3 + 10\cdot 2}{20} = \frac{68}{20} = 3,4$$

(προφανώς τα δύο αποτελέσματα δεν διαφέρουν μεταξύ τους).

Ο τύπος $\overline{x} = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i f_i$ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αριθμητικού μέσου ομαδοποιημένων δεδομένων, θεωρώντας ως t_i τις κεντρικές τιμές των αντιστοίχων κλάσεων. Έτσι, με βάση τον πίνακα συχνοτήτων 9.3.2, μπορούμε να υπολογίσομε τη μέση ημερήσια επιβατική κίνηση για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 ως εξής:

$$\overline{x}=\frac{t_1\nu_1+...+t_6\nu_6}{\nu_1+...+\nu_6}=\frac{245\cdot 2+255\cdot 6+265\cdot 12+275\cdot 14+285\cdot 4+195\cdot 2}{40}=\frac{10780}{40}=269{,}5\,.$$

Κατά τον υπολογισμό της μέσης τιμής μέσω πίνακα συχνοτήτων είναι αρκετά σύνηθες να σχηματίζομε τον πίνακα 9.4.1, ο οποίος διευκολύνει κατά πολύ τους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Πίνακας 9.4.1

i	***Κεντρικές τιμές t_i***	ν_i	$t_i\nu_i$
1	245	2	490
2	255	6	1530
3	265	12	3180
4	275	14	3850
5	285	4	1140
6	295	2	590
Σύνολο		**ν = 40**	**$\sum t_i\nu_i$ = 10780**

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή που λάβαμε τώρα για τον αριθμητικό μέσο διαφέρει ελαφρώς από την τιμή ($\overline{x}=270$) που είχαμε βρει προηγουμένως χρησιμοποιώντας τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα. Η μικρή αυτή διαφορά οφείλεται στο ότι κατά την ομαδοποίηση χάνομε πλέον τις αρχικές παρατηρήσεις κάθε κλάσεως και προχωρούμε στον υπολογισμό, θεωρώντας ότι οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και εκπροσωπούνται από την αντίστοιχη κεντρική τιμή t_i. Η υπόθεση αυτή σημαίνει απώλεια πληροφοριών για τις αρχικές τιμές και για το λόγο αυτό χάνομε λίγο ως προς την ακρίβεια (κερδίζομε όμως σε υπολογιστικό χρόνο).

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στον αριθμητικό *μέσο* παραθέτομε τις επόμενες χρήσιμες ιδιότητές του:

M$_1$. Αν όλες οι τιμές των διαθεσίμων παρατηρήσεων είναι ίσες, δηλαδή $x_1=x_2=...=x_\nu=c$, τότε ο αριθμητικός τους μέσος είναι ίσος επίσης με c.

M$_2$. Η τιμή του αριθμητικού μέσου βρίσκεται πάντοτε μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του.

M$_3$. Το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι πάντα ίσο με το μηδέν, δηλαδή ισχύει:

$$(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+...+(x_\nu-\overline{x})=\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\overline{x})=0\,.$$

M$_4$. Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής προσθέσομε μία σταθερή ποσότητα, έστω c, τότε ο αριθμητικός τους μέσος θα αυξηθεί κατά c, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1,x_2,...,x_\nu$ έχουν μέσο $\overline{x}$, τότε οι παρατηρήσεις $y_1=x_1+c,\, y_2=x_2+c,...,y_\nu=x_\nu+c$ θα έχουν μέσο $\overline{y}=\overline{x}+c$.

M$_5$. Αν πολλαπλασιάσομε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε ο αριθμητικός τους μέσος πολλαπλασιάζεται με την ποσότητα αυτή, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$ έχουν μέσο $\bar{x}$, τότε ο αριθμητικός μέσος των παρατηρήσεων $y_1 = cx_1$, $y_2 = cx_2$, ..., $y_\nu = cx_\nu$ θα είναι ίσος με $\bar{y} = c\bar{x}$.

M$_6$. Έστω n σύνολα δεδομένων, εκ των οποίων το πρώτο περιλαμβάνει m_1 μετρήσεις με αριθμητικό μέσο $\bar{x}_1$, το δεύτερο περιλαμβάνει m_2 μετρήσεις με αριθμητικό μέσο $\bar{x}_2$ κ.ο.κ. και το τελευταίο περιέχει m_n μετρήσεις με αντίστοιχο αριθμητικό μέσο $\bar{x}_n$. Τότε ο αριθμητικός μέσος όλων των μετρήσεων, πλήθους $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$, είναι ίσος με:

$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + ... + m_n\bar{x}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x}_i.$$

9.4.2 Διάμεσος (δ) και εκατοστημόρια.

Η διάμεσος ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή που χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων δεδομένων σε δύο ισοπληθή υποσύνολα, έτσι ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες με τη διάμεσο και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες ή ίσες μ' αυτήν. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι διάμεσος (δ) ενός συνόλου ν παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε **αύξουσα σειρά** ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Για να υπολογίσομε τη διάμεσο ενός συνόλου ν παρατηρήσεων εργαζόμαστε ως εξής:

α) Διατάσσομε τα δεδομένα κατά σειρά μεγέθους, από την παρατήρηση με τη μικρότερη τιμή μέχρι την παρατήρηση με τη μεγαλύτερη τιμή.

β) Εντοπίζομε το θετικό ακέραιο αριθμό

$$\nu_0 = \begin{cases} \dfrac{\nu+1}{2}, & \text{αν } \nu \text{ περιττός,} \\[2ex] \dfrac{\nu}{2}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

γ) Η διάμεσος (δ) των δεδομένων μας θα είναι η τιμή της παρατηρήσεως του διατεταγμένου δείγματος, η οποία κατέχει τη θέση ν_0, αν το ν είναι περιττός ή το ημιάθροισμα των παρατηρήσεων, οι οποίες κατέχουν τις θέσεις ν_0 και $\nu_0 + 1$ του διατεταγμένου δείγματος, αν το ν είναι άρτιος.

Για παράδειγμα, η διάμεσος των επομένων $\nu = 7$ παρατηρήσεων:

90 55 50 75 57 80 60,

για τις οποίες το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα είναι το:

50 55 57 **60** 75 80 90

βρίσκεται αν υπολογίσομε τη θέση της διαμέσου:

$$\nu_0 = \frac{\nu+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

και θεωρήσομε την τέταρτη κατά σειρά παρατήρηση του διατεταγμένου δείγματος. Επομένως $\delta = 60$.

Ομοίως η διάμεσος των επομένων $\nu = 8$ παρατηρήσεων

90 55 50 75 57 80 60 95,

για τις οποίες το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα είναι το:

50 55 57 **60** **75** 80 90 95,

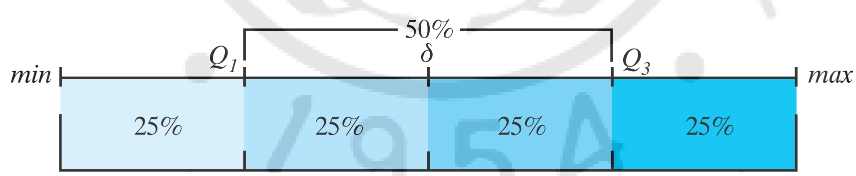
βρίσκεται αν υπολογίσομε το ημιάθροισμα της 4ης και 5ης παρατηρήσεως του τελευταίου δείγματος, αφού τώρα το ν είναι άρτιος αριθμός και $\nu_0 = \frac{\nu}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Επομένως:

$$\delta = \frac{60+75}{2} = 67{,}5.$$

Παρατηρήστε ότι στη δεύτερη περίπτωση η προκύπτουσα τιμή της διαμέσου (67,5) δεν είναι μια τιμή που εμφανίζεται στις παρατηρήσεις μας.

Η διάμεσος είναι ένα πολύ χρήσιμο μέτρο θέσεως, ιδιαίτερα στην περίπτωση που στα δεδομένα υπάρχουν έκτροπες (ακραίες) παρατηρήσεις, δηλαδή παρατηρήσεις που είναι είτε υπερβολικά μεγάλες είτε υπερβολικά μικρές σε σχέση με τον κύριο όγκο των δεδομένων. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να αποφεύγεται η χρήση του μέσου όρου, ο οποίος επηρεάζεται υπερβολικά από τις ακραίες τιμές και στη θέση του να χρησιμοποιείται η διάμεσος. Για παράδειγμα, αν στο τελευταίο παράδειγμα των οκτώ παρατηρήσεων αντικαταστήσομε την τιμή 95 με την τιμή 9500, η διάμεσος των $\nu = 8$ παρατηρήσεων δεν θα αλλάξει, ενώ ο μέσος όρος θα εκτιναχθεί από την τιμή 70,25 (που είχε στα αρχικά δεδομένα) στην τιμή 1184!

Όπως ορίσαμε τη διάμεσο δ, έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες του δ και το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες του δ, μπορούμε ανάλογα να ορίσομε και τα ***εκατοστημόρια*** p_a, $a = 1, 2, ..., 99$ ως την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ a% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του p_a και το πολύ $(100-a)$% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν. Τα εκατοστημόρια p_{25}, p_{50}, p_{75} καλούνται ***τεταρτημόρια***, αφού χωρίζουν το διατεταγμένο δείγμα σε 4 ισομεγέθη τμήματα, και συμβολίζονται με Q_1, Q_2, Q_3, αντίστοιχα (σχ. 9.4α).



Σχ. 9.4α.

Προφανώς ισχύει ότι $Q_2 = p_{50} = \delta$. Αρκετά συχνά, για λόγους ευκολίας ο υπολογισμός των τεταρτημορίων Q_1 και Q_3 γίνεται κατά προσέγγιση, υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα.

Για παράδειγμα ας θεωρήσομε τις $\nu = 40$ παρατηρήσεις του πίνακα 9.3.1, οι οποίες αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση σ' ένα επιβατικό πλοίο. Διατάσσοντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά παίρνομε:

241, 247, 252, 253, 255, 256, 256, 258, 262, 263,
264, 264, 265, 265, 265, 265, 265, 265, 267, 270,
272, 273, 275, 276, 276, 277, 277, 277, 277, 277,
277, 277, 278, 279, 281, 285, 287, 289, 292, 300.

Δεδομένου ότι έχομε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων, η διάμεσος θα βρίσκεται αν υπολογίσομε το ημιάθροισμα της 20ης και 21ης παρατηρήσεως των διατεταγμένων δεδομένων, δηλαδή:

$$\delta = Q_2 = p_{50} = \frac{270+272}{2} = 271\,.$$

Το πρώτο τεταρτημόριο μπορεί να βρεθεί θεωρώντας το πρώτο μισό τμήμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή τις πρώτες 20 παρατηρήσεις:

241, 247, 252, 253, 255, 256, 256, 258, 262, 263,
264, 264, 265, 265, 265, 265, 265, 265, 267, 270

και υπολογίζοντας τη διάμεσό τους, η οποία θα είναι ίση με το ημιάθροισμα της $10^{ης}$ και $11^{ης}$ παρατηρήσεως. Άρα:

$$Q_1 = p_{25} = \frac{263+264}{2} = 263{,}5\,.$$

Ομοίως, θεωρώντας το δεύτερο μισό τμήμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή τις 20 παρατηρήσεις

272, 273, 275, 276, 276, 277, 277, 277, 277, 277,
277, 277, 278, 279, 281, 285, 287, 289, 292, 300

βρίσκομε

$$Q_3 = p_{75} = \frac{277+277}{2} = 277\,.$$

Αν θέλαμε να υπολογίσομε τα εκατοστημόρια p_{10} και p_{90} θα έπρεπε να ελέγξομε πού αντιστοιχεί το 10% και 90% των $\nu = 40$ παρατηρήσεων του δείγματος, δηλαδή το $0{,}01 \cdot 40 = 4$ και $0{,}09 \cdot 40 = 36$. Το p_{10} θα είναι εκείνη η τιμή, για την οποία το πολύ 4 παρατηρήσεις είναι μικρότερές της και το πολύ $40-4=36$ είναι μεγαλύτερες, οπότε θα πρέπει να πάρομε το ημιάθροισμα της $4^{ης}$ και $5^{ης}$ τιμής του διατεταγμένου δείγματος, δηλαδή:

$$p_{10} = \frac{253+255}{2} = 254\,.$$

Αντίστοιχα, το p_{90} θα είναι εκείνη η τιμή, για την οποία το πολύ 36 παρατηρήσεις είναι μικρότερές της και το πολύ $40-36=4$ είναι μεγαλύτερες, οπότε θα πρέπει να πάρομε το ημιάθροισμα της $36^{ης}$ και $37^{ης}$ τιμής του διατεταγμένου δείγματος, δηλαδή:

$$p_{90} = \frac{285+287}{2} = 286\,.$$

Όταν τα δεδομένα που μας ενδιαφέρουν δίνονται με τη μορφή πινάκων συχνοτήτων που έχουν προκύψει μετά από ομαδοποίηση (βλ. παράγρ. 9.3), τότε δεν γνωρίζομε ούτε τις ακριβείς τιμές όλων των παρατηρήσεων, ούτε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι συχνότητες μέσα στα διαστήματα των τάξεων της κατανομής. Στην περίπτωση αυτή, δεν μπορούμε να διατάξομε τις παρατηρήσεις μία προς μία κατά μέγεθος, ώστε να προσδιορίσομε τη μεσαία διατεταγμένη παρατήρηση. Μπορούμε ωστόσο να χρησιμοποιήσομε τις αθροιστικές συχνότητες (οι οποίες μας δίδουν το πλήθος ή το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή μέχρι κάποιο όριο) για να υποκαταστήσομε αυτήν τη διαδικασία και να προσδιορίσομε κατά προσέγγιση τη διάμεσο (υποθέτοντας ότι οι τιμές του χαρακτηριστικού που παρατηρούμε κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στις κλάσεις της ομαδοποιήσεως).

Τα βήματα υπολογισμού της διαμέσου στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων που έχουν προέλθει από ν παρατηρήσεις είναι τα εξής:

α) Υπολογίζομε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες που αντιστοιχούν στα ομαδοποιημένα δεδομένα.

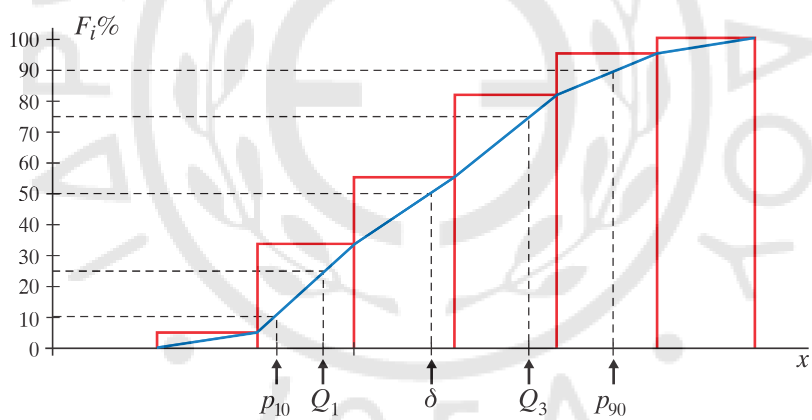
β) Εντοπίζομε την κλάση, η οποία περιέχει τη διάμεσο, δηλαδή τη μεσαία παρατήρηση αν το ν είναι περιττός ή τις δύο μεσαίες, αν το ν είναι άρτιος. Έστω ότι αυτή είναι η i κλάση και ας συμβολίσομε με L_i το κάτω όριο (κάτω άκρο) της κλάσεως αυτής, με F_i την αθροιστική σχετική συχνότητα της ίδιας κλάσεως και με F_{i-1} την αθροιστική σχετική συχνότητα της προηγούμενης κλάσεως απ' αυτήν, στην οποία εντοπίστηκε η διάμεσος.

γ) Υπολογίζομε τη διάμεσο με τον (προσεγγιστικό) τύπο:

$$\delta = L_i + \frac{0{,}5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} c = L_i + \frac{0{,}5 - F_{i-1}}{f_i} c,$$

όπου c το εύρος της κλάσεως τάξεως, στην οποία εντοπίστηκε η διάμεσος (εμείς θα εργαστούμε με κλάσεις ίσου εύρους, οπότε το c θα είναι το κοινό εύρος όλων των κλάσεων).

Με ανάλογο τύπο μπορούν να υπολογισθούν τα τεταρτημόρια και γενικότερα τα εκατοστημόρια P_a εντοπίζοντας την κλάση που περιέχει την αντίστοιχη παρατήρηση που μας ενδιαφέρει κάθε φορά και χρησιμοποιώντας στον παραπάνω τύπο την ποσότητα $a/100$ αντί του 0,5 που εμφανίζεται στον αριθμητή του κλάσματος. Η γεωμετρική ερμηνεία των τύπων υπολογισμού δίνεται στο σχήμα 9.4β, όπου έχει απεικονισθεί ένα ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Σχ. 9.4β.

9.4.3 Επικρατούσα τιμή ή κορυφή (M_0).

Επικρατούσα τιμή ή ***κορυφή M_0*** ενός συνόλου δεδομένων ονομάζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφανίσεως στο δείγμα, δηλαδή η τιμή που εμφανίζεται περισσότερες φορές σ' αυτό. Είναι φανερό ότι η επικρατούσα τιμή:

α) Δεν είναι απαραίτητα μοναδική (μάλιστα, όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή) και

β) μπορεί να οριστεί τόσο στην περίπτωση ποσοτικών, όσο και στην περίπτωση ποιοτικών δεδομένων, αντίθετα με τα άλλα μέτρα θέσεως που έχομε εξετάσει μέχρι τώρα, τα οποία ορίζονται μόνο για ποσοτικά δεδομένα.

Για παράδειγμα η επικρατούσα τιμή για τη μεταβλητή «*Επάγγελμα*» του πίνακα 9.2.2 είναι η τιμή «*Δημόσιος υπάλληλος*» με συχνότητα 8 (και σχετική συχνότητα 40%), όπως φαίνεται στον πίνακα 9.2.3. Επίσης η επικρατούσα τιμή για τη μεταβλητή «*Μηνιαία χρήση δρομολογίου*» του πίνακα 9.2.2 είναι η τιμή $t_2 = 8$ επίσης με συχνότητα 8 (και σχετική συχνότητα 40%), όπως φαίνεται στον πίνακα 9.2.4.

Τα βήματα υπολογισμού της επικρατούσας τιμής στην περίπτωση που έχομε ποσοτικά δεδομένα ομαδοποιημένα σε κλάσεις ίσου εύρους c είναι τα εξής:

α) Υπολογίζομε τις σχετικές συχνότητες που αντιστοιχούν στα ομαδοποιημένα δεδομένα.

β) Εντοπίζομε την ***επικρατούσα κλάση***, δηλαδή την κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Έστω ότι αυτή είναι η i κλάση και ας συμβολίσομε με L_i το κάτω όριο (κάτω άκρο) της κλάσεως αυτής, με f_i τη σχετική συχνότητα της ίδιας κλάσεως και με f_{i-1} τη σχετική συχνότητα της προηγούμενης κλάσεως και με f_{i+1} τη σχετική συχνότητα της επόμενης κλάσεως.

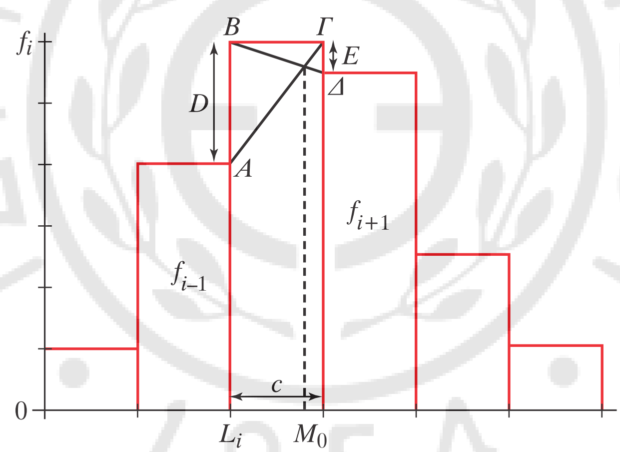
γ) Υπολογίζομε την κορυφή ή την επικρατούσα τιμή M_0 με χρήση του (προσεγγιστικού) τύπου:

$$M_0 = L_i + \frac{D}{D+E}c\,,$$

όπου $D = f_i - f_{i-1}$ και $E = f_i - f_{i+1}$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω τύπου υπολογισμού δίνεται στο σχήμα 9.4γ όπου έχει απεικονισθεί ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις μέσα στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται ως η τετμημένη του σημείου τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $ΑΓ$ και $ΒΔ$.



Σχ. 9.4γ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.4.1.

Ο πίνακας συχνοτήτων 9.4.2 δίνει την κατανομή του χρόνου X (σε min) που χρειάστηκαν 100 σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού για να λύσουν ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο, τη διάμεσο και τον επικρατέστερο χρόνο για τη λύση του προβλήματος. Επίσης να βρείτε το χρόνο εντός του οποίου το 25% των μαθητών είχε κατορθώσει να ολοκληρώσει τη λύση του προβλήματος.

Πίνακας 9.4.2

i	t_i	v_i
1	30	6
2	35	14
3	45	20
4	50	36
5	60	10
6	75	12
7	90	2

Λύση.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής συμπληρώνομε τις στήλες του πίνακα 9.4.3. Επομένως, ο μέσος χρόνος για τη λύση του προβλήματος είναι ίσος με:

$$\overline{x}=\frac{t_1\nu_1+t_2\nu_2+...+t_7\nu_7}{\nu_1+\nu_2+...+\nu_7}=\frac{5050}{100}=50,5.$$

Πίνακας 9.4.3

i	t_i	ν_i	$t_i\nu_i$
1	30	6	180
2	35	14	490
3	45	20	900
4	50	36	1800
5	60	10	600
6	75	12	900
7	90	2	180
Σύνολο		**100**	**5050**

Προκειμένου να προχωρήσομε στον υπολογισμό της διαμέσου παρατηρούμε ότι έχομε $\nu=100$ τιμές που βρίσκονται ήδη σε αύξουσα σειρά, οπότε η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα της $50^{ης}$ και $51^{ης}$ παρατηρήσεως. Και οι δύο αυτές παρατηρήσεις είναι, σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων, ίσες με 50, οπότε $\delta=\dfrac{50+50}{2}=50$ min.

Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, οπότε $M_0=50$ min (με αντίστοιχη συχνότητα $\nu_4=36$).

Για να βρεθεί σε πόσο χρόνο κατόρθωσε να λύσει το πρόβλημα το 25% των μαθητών, θα πρέπει να υπολογίσομε το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 των δεδομένων. Αφού $\nu/4=100/4=25$, θα πρέπει να εξετάσομε την $25^{η}$ και $26^{η}$ παρατήρηση του δείγματος. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων που δόθηκε, όλες οι παρατηρήσεις από την $21^{η}$ μέχρι την $40^{η}$ είναι ίσες με 45, οπότε $Q_1=45$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.4.2.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 9.3.2 (ομαδοποιημένα δεδομένα), να υπολογίσετε την κορυφή για τις ν = 40 παρατηρήσεις του πίνακα 9.3.1, οι οποίες αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση ενός επιβατικού πλοίου.

Λύση.

Για τον υπολογισμό της κορυφής M_0 παρατηρούμε αρχικά ότι η επικρατούσα κλάση, δηλαδή η κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα (14), είναι η τέταρτη και έχει ως κάτω άκρο το $L_4=270$. Έχομε επίσης $f_4=14$, $f_3=12$, $f_5=4$ και $c=10$, οπότε:

$$D=f_i-f_{i-1}=f_4-f_3=14-12=2\,,\quad E=f_i-f_{i+1}=f_4-f_5=12-4=8$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο $M_0=L_i+\dfrac{D}{D+E}c$ προκύπτει:

$$M_0=L_4+\frac{D}{D+E}c=270+\frac{2}{2+8}\cdot 10=272\,.$$

Ασκήσεις.

9.4.1. Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο, την επικρατούσα τιμή (αν υπάρχει) και τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

α) 4 0 2 1 4 3 2 3 3 4 4 111 5 4 7 2

β) 20, 0, 7, 2, 7, 1, 90, 4

γ) 2, 3, 1, 5, 2, 7, 1, 2, 4, 1, 5, 9

9.4.2. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 9 άτομα για να λύσουν ένα απλό πρόβλημα ήταν: 3, 5, α, 36, 6, 7, 4, 7, 8 με μέση τιμή $\overline{x}=9$.

α) Να βρείτε τον χρόνο α που χρειάστηκε το $3^{ο}$ άτομο για να λύσει το πρόβλημα.

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσος των δεδομένων.

γ) Να υπολογίσετε τη κορυφή των δεδομένων.

9.4.3. Για τον έλεγχο της καταναλώσεως καυσίμου (ίδιου τύπου) δύο αυτοκινήτων A και B μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το A και σε πέντε διαδρομές για το B. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 km) για το αυτοκίνητο A ήταν 9, 6, 7, 9, 9, 8, ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο B ήταν 8, 10, 7, 8, 12.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν στο αυτοκίνητο A.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν στο αυτοκίνητο B.

γ) Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο A και όχι το B, ποιο μέτρο θέσεως (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο B και όχι το A, ποιο μέτρο θέσεως (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

9.4.4. Μια εταιρεία απασχολεί 15 υπαλλήλους, εκ των οποίων οι 8 εργάζονται στο τμήμα A και οι 7 στο τμήμα B. Οι μισθοί (σε €) των 8 εργαζομένων στο τμήμα A είναι:

1350, 1450, 1470, 1370, 1410, 1390, 1430, 1410,

ενώ των 7 εργαζομένων στο τμήμα B είναι:

1390, 1150, 1310, 1510, 1230, 1470, 1390

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα A της εταιρείας.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα B της εταιρείας.

γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων της εταιρείας.

9.4.5. Ένα σύνολο δεδομένων αποτελείται από πέντε αριθμούς, που ο καθένας απέχει από τον επόμενό του ίση απόσταση. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς αν ο αριθμητικός μέσος τους είναι ίσος με 10 και η διαφορά του μικρότερου από το μεγαλύτερο είναι ίση με 8.

9.4.6. Η μέση βαθμολογία ενός σπουδαστή της Ακαδημίας του Εμπορικού Ναυτικού σε 10 μαθήματα είναι 18. Ποια θα είναι η μέση βαθμολογία του:

α) Αν στα επόμενα δύο μαθήματα λάβει βαθμολογία 17 και 20;

β) Αν διαγράψει ένα από τα μαθήματά του, στο οποίο είχε επιτύχει βαθμολογία 16;

γ) Αν ξαναδώσει ένα μάθημα, στο οποίο είχε επιτύχει βαθμολογία 16 και η νέα βαθμολογία του είναι 18;

9.4.7. Η μέση ηλικία των ανδρών ενός πληρώματος πλοίου είναι 40 χρόνια, ενώ των γυναικών είναι 36 χρόνια. Ποια είναι η μέση ηλικία του πληρώματος του πλοίου αν:

α) Σε αυτό υπηρετούν 20 άντρες και 16 γυναίκες;

β) Το πλήθος των αντρών και των γυναικών που υπηρετούν στο πλοίο είναι ίδιο;

γ) Το πλήθος των αντρών που υπηρετούν στο πλοίο είναι διπλάσιο από το πλήθος των γυναικών;

9.4.8. Ένα τουριστικό γραφείο απασχολεί 10 υπαλλήλους στο τμήμα A με μέσο (μηνιαίο) μισθό 1200€, 20 υπαλλήλους στο τμήμα B με μέσο μισθό 1500€ και 30 υπαλλήλους στο τμήμα Γ. Αν ο μέσος μισθός των 45 υπαλλήλων που απασχολούνται και στα τρία τμήματα του γραφείου είναι 1700€, να υπολογίσετε το μέσο μισθό των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα Γ του γραφείου.

9.4.9. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δεδομένα:

5, 3, 6, 9, 8, 1, 17.

Στη συνέχεια, χωρίς να γίνουν αναλυτικοί υπολογισμοί με χρήση των τύπων της μέσης τιμής και της διαμέσου, να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα επόμενα δεδομένα:

α) 7, 5, 8, 11, 10, 3, 19

β) 10, 6, 12, 18, 16, 2, 34

γ) 17, 11, 20, 29, 26, 5, 53

9.4.10. Ένας επιβάτης πλοίου αγόρασε 10 είδη από το κατάστημα που υπήρχε στο πλοίο, τα οποία κόστιζαν 50, 25, 25, 65, 70, 15, 25, 95, 37, 33€ αντίστοιχα (προ ΦΠΑ).

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

β) Πώς μεταβάλλονται οι τιμές που προέκυψαν από το ερώτημα (α), αν προσθέσομε και το ΦΠΑ, που είναι 19%;

γ) Αν όλα τα είδη είχαν προσφερθεί με έκπτωση 3€, ποια θα ήταν η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή;

9.4.11. Στον πίνακα 9.4.4 δίνεται η κατανομή της ηλικίας των ατόμων μιας πόλεως. Να υπολογίσετε:

α) τη μέση ηλικία των ατόμων της πόλεως.

β) τη διάμεσο της ηλικίας των ατόμων της πόλεως.

γ) την επικρατούσα τιμή για την ηλικία των ατόμων της πόλεως.

Ποιες θα είναι οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων μετά από πάροδο 5 ετών;

9.4.12. Δίνεται ο πίνακας 9.4.5 συχνοτήτων μιας μεταβλητής *X*.

α) Να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν στον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

γ) Να υπολογίσετε τη διασπορά των παρατηρήσεων.

Πίνακας 9.4.4

Ηλικία (σε έτη)	***Συχνότητα (σε χιλιάδες)***
0–20	8
20–40	12
40–60	17
60–80	6
80–100	1

Πίνακας 9.4.5

Τιμές της μεταβλητής x_i	***Συχνότητα ν_i***	***Σχετική Συχνότητα f_i***	***Αθροιστική Συχνότητα N_i***	$x_i\nu_i$
1				10
2			35	
3				
Άθροισμα	**ν=50**	**1**		

9.5 Μέτρα διακυμάνσεως.

Αφού παρουσιάσαμε τα κυριότερα μέτρα θέσεως θα προχωρήσομε τώρα στην παρουσίαση των ***μέτρων διακυμάνσεως*** ή ***μεταβλητότητας***. Όπως αναφέρθηκε ήδη στην προηγούμενη παράγραφο, τα μέτρα διακυμάνσεως είναι αριθμητικά μέτρα, τα οποία μας παρέχουν συνοπτικές πληροφορίες σχετικά με το κατά πόσον οι τιμές μιας μεταβλητής έχουν την τάση να συγκεντρώνονται γύρω από ένα μέτρο θέσεως ή να διασπείρονται (αποκλίνουν) μακριά από αυτό. Τα σπουδαιότερα μέτρα διακυμάνσεως είναι το ***εύρος***, η ***ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση***, η ***διασπορά*** και η ***τυπική απόκλιση***.

Το απλούστερο μέτρο διακυμάνσεως είναι το ***εύρος*** ή ***κύμανση*** (*R*), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατηρήσεως από τη μέγιστη παρατήρηση. Για παράδειγμα, στα δεδομένα επιβατικής κινήσεως του πίνακα 9.3.1, κατά την υλοποίηση της διαδικασίας ομαδοποιήσεως είχαμε υπολογίσει το εύρος $r = 300 - 241 = 59$. Όταν μας δοθούν ομαδοποιημένα δεδομένα, χωρίς να είναι διαθέσιμες οι αρχικές μετρήσεις, ως εύρος θεωρούμε τη διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσεως από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσεως (η τιμή αυτή μπορεί να διαφέρει ελαφρώς από το πραγματικό εύρος που θα λαμβάναμε αν είχαμε διαθέσιμα τα αρχικά δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν).

Ένα δεύτερο μέτρο διακυμάνσεως είναι το ***ενδοτεταρτημοριακό εύρος*** Q, το οποίο ορίζεται ως η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3, δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

[μερικές φορές χρησιμοποιείται ως μέτρο διασποράς και η ημιδιαφορά $(Q_3 - Q_1)/2$ μεταξύ του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου, η οποία ονομάζεται ***ημιενδοτεταρτημοριακό εύρος***, ωστόσο στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα περιοριστούμε στη χρήση του Q μόνο]. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q μάς δίνει το εύρος ενός διαστήματος, το οποίο εκτείνεται αριστερά και δεξιά από τη διάμεσο δ των δεδομένων μας, το οποίο περιλαμβάνεται το 50% των παρατηρήσεων. Συνεπώς, όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συγκέντρωση των τιμών γύρω από τη διάμεσο και άρα μικρότερη η διακύμανση των τιμών της μεταβλητής. Για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 βρήκαμε στην παράγραφο 9.4 ότι $Q_1 = 263{,}5$, $Q_3 = 277$, οπότε $Q = Q_3 - Q_1 = 277 - 263{,}5 = 13{,}5$.

Το πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο μεταβλητότητας για ποιοτικές μεταβλητές είναι η ***διασπορά***, η οποία ορίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των τετραγώνων των διαφορών (αποκλίσεων), των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό μέσο $\overline{x}$ της μεταβλητής αυτής. Έτσι, αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριτικό) X, τότε η διασπορά της X θα συμβολίζεται με s_X^2 ή, αν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, με s^2 και θα υπολογίζεται από τον τύπο[1]

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \overline{x})^2 .$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στις ακόλουθες δύο μορφές, οι οποίες διευκολύνουν σημαντικά τους αριθμητικούς υπολογισμούς

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - (\overline{x})^2 \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2\right\}.$$

Στην περίπτωση που για τα δεδομένα που συλλέξαμε έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας συχνοτήτων, η διασπορά s^2 μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\varkappa}(t_i - \overline{x})^2\nu_i , \quad s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2\nu_i - (\overline{x})^2 , \quad s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2\nu_i - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i\nu_i\right)^2\right\}$$

ή ισοδύναμα τους:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{\varkappa}(t_i - \overline{x})^2 f_i , \quad s^2 = \sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2 f_i - (\overline{x})^2 , \quad s^2 = \sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i f_i\right)^2 ,$$

όπου $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$ είναι οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\varkappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, ..., f_\varkappa$.

Οι τελευταίοι τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ομαδοποιημένα δεδομένα, θεωρώντας ότι τα $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$ είναι τα αντίστοιχα κέντρα των κλάσεων. Στην περίπτωση αυτή η τιμή που θα προκύψει

1. Πολλές φορές, ιδιαίτερα όταν έχομε μικρά δείγματα παρατηρήσεων, στον τύπο της διακυμάνσεως χρησιμοποιείται ως παρονομαστής η ποσότητα $\nu-1$ αντί του ν, για λόγους που έχουν να κάνουν με τις στατιστικές ιδιότητες του s^2 (αποδεικνύεται ότι τότε γίνεται πιο σωστή εκτίμηση της άγνωστης διασποράς που υπάρχει στον πληθυσμό από τον οποίο λήφθηκε το δείγμα). Στο παρόν εγχειρίδιο θα χρησιμοποιούμε παντού τον τύπο με το ν και όχι το $\nu-1$.

Πίνακας 9.5.1

i	**Κεντρικές τιμές** t_i	ν_i	$t_i\nu_i$	$t_i^2\,\nu_i$
1	245	2	490	120050
2	255	6	1530	390150
3	265	12	3180	842700
4	275	14	3850	1058750
5	285	4	1140	324900
6	295	2	590	174050
	Σύνολο	$\nu=40$	$\sum t_i\nu_i = 10780$	$\sum t_i\nu_i = 2910600$

θα αποτελεί μια προσέγγιση της διακυμάνσεως και όχι την ακριβή τιμή, η οποία δεν μπορεί να υπολογιστεί αν δεν μας δοθούν οι πραγματικές παρατηρήσεις (η διαφορά οφείλεται φυσικά στην απώλεια πληροφορίας λόγω ομαδοποιήσεως των παρατηρήσεων).

Για παράδειγμα, η διασπορά της ημερήσιας επιβατικής κινήσεως με βάση τα δεδομένα που δίνονται στον πίνακα 9.3.1 είναι ίση με (υπενθυμίζομε ότι $\overline{x}=269$)

$$s^2=\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}(x_i-\overline{x})^2=\frac{(252-270)^2+(255-270)^2+\ldots+(277-270)^2}{40}=\frac{6066}{40}=151{,}65\,.$$

Αν χρησιμοποιήσομε τα ομαδοποιημένα δεδομένα και τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων 9.3.2, μπορούμε να υπολογίσομε τη διασπορά της ημερήσιας επιβατικής κινήσεως για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, κατασκευάζοντας τον πίνακα 9.5.1. με βάση τον οποίο έχομε:

$$s^2=\frac{1}{40}\left\{\sum_{i=1}^{6}t_i^2\nu_i-\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{6}t_i\nu_i\right)^2\right\}=\frac{1}{40}\left\{2910600-\frac{10780^2}{40}\right\}=\frac{5390}{40}=134{,}75\,.$$

Για τη *διασπορά* ισχύουν οι επόμενες χρήσιμες ιδιότητες:

Δ$_1$. Αν όλες οι τιμές των διαθεσίμων παρατηρήσεων είναι ίσες, δηλαδή $x_1=x_2=\ldots=x_\nu=c$, τότε η διασπορά τους είναι ίση με μηδέν.

Δ$_2$. Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι ίση με νs^2, δηλαδή:

$$(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_\nu-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\overline{x})^2=\nu s^2.$$

Δ$_3$. Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής προσθέσομε μία σταθερή ποσότητα, έστω c, τότε η διασπορά τους δεν θα μεταβληθεί, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ έχουν διασπορά s_X^2, τότε οι παρατηρήσεις $y_1=x_1+c,\ y_2=x_2+c,\ldots,y_\nu=x_\nu+c$ θα έχουν διασπορά $s_Y^2=s_X^2$.

Δ$_4$ Αν πολλαπλασιάσομε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε η διασπορά τους πολλαπλασιάζεται με το τετράγωνο της ποσότητας αυτής, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$ έχουν διασπορά s_X^2, τότε η διασπορά των παρατηρήσεων $y_1 = cx_1, y_2 = cx_2 ..., y_\nu = cx_\nu$ θα είναι ίση με $s_Y^2 = c^2 s_X^2$.

Δ$_5$. ΄Εστω n σύνολα δεδομένων, εκ των οποίων το πρώτο περιλαμβάνει m_1 μετρήσεις με διασπορά s_1^2, το δεύτερο περιλαμβάνει m_2 μετρήσεις με διασπορά s_2^2, κ.ο.κ. και το τελευταίο περιέχει m_n μετρήσεις με αντίστοιχη διασπορά s_n^2. Τότε η διασπορά s^2 όλων των μετρήσεων ($m = m_1 + m_2 + ... + m_m$) είναι ίση με:

$$s^2 = \frac{m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 + ... + m_n s_n^2}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i s_i^2 .$$

΄Ενα σημαντικό μειονέκτημα της διασποράς s^2 είναι ότι δεν εκφράζεται στις μονάδες, στις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις που μελετάμε. ΄Ετσι, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε m, η διασπορά θα εκφράζεται σε m^2, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε sec, η διασπορά θα εκφράζεται σε $\sec^2$ κ.ο.κ.. ΄Ενας τρόπος για να εξαλειφθεί το πρόβλημα αυτό είναι να θεωρήσομε ως μέτρο διασποράς τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακυμάνσεως, η οποία προφανώς θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μετρήσεως με το χαρακτηριστικό που μελετάμε (όπως ακριβώς συμβαίνει και με όλα τα μέτρα θέσεως που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο). Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ***τυπική απόκλιση*** και συμβολίζεται με s_X ή απλά με s, δηλαδή $s = \sqrt{s^2}$.

Για παράδειγμα, η τυπική απόκλιση για την ημερήσια επιβατική κίνηση που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 είναι ίση με $s = \sqrt{151,65} \cong 12,3$, αν αυτή υπολογιστεί από τα πραγματικά δεδομένα ή $s = \sqrt{134,75} \cong 11,6$, αν υπολογιστεί από τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 9.3.2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.1.

Στο παράδειγμα 9.4.1. δόθηκε ο πίνακας συχνοτήτων που περιγράφει την κατανομή του χρόνου X (σε min) που χρειάστηκαν 100 σπουδαστές της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού για να λύσουν ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση του χρόνου για τη λύση του προβλήματος.

Λύση.

Αφού η μεγαλύτερη τιμή είναι το 90 και η μικρότερη το 30, το εύρος των παρατηρήσεων θα είναι ίσο με:

$$R = 90 - 30 = 60 \text{ min}.$$

Για τον υπολογισμό του ενδοτεταρτημοριακού εύρους $Q = Q_3 - Q_1$ χρειαζόμαστε τις τιμές του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 και του τρίτου τεταρτημόριου Q_3. Στη λύση του παραδείγματος 9.4.1 είχαμε ήδη βρει την τιμή $Q_1 = 45$. Επίσης, αφού $3\nu/4 = 3 \cdot 100/4 = 75$, για να υπολογίσομε το Q_3 θα πρέπει να εξετάσομε την 75$^{\eta}$ και 76$^{\eta}$ παρατήρηση του δείγματος. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων που δόθηκε, όλες οι παρατηρήσεις από την 31$^{\eta}$ μέχρι την 76$^{\eta}$ είναι ίσες με 50, οπότε $Q_3 = 50$. Άρα:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 50 - 45 = 5 .$$

Για τον υπολογισμό της διακυμάνσεως και στη συνέχεια της τυπικής αποκλίσεως θα χρησιμοποιήσομε τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} t_i^2 \nu_i - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} t_i \nu_i\right)^2\right\}, s = \sqrt{s^2}.$$

Με βάση τον πίνακα 9.5.2 βρίσκομε:

$$s^2 = \frac{1}{100}\left\{\sum_{i=1}^{7} t_i^2 \nu_i - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{7} t_i \nu_i\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{100}\left\{272750 - \frac{5050^2}{100}\right\} = \frac{17725}{100} = 177,25.$$

Επομένως, η διασπορά της μεταβλητής X είναι $s^2 = 177,25$ και η τυπική της απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{177,25} = 13,31$.

Πίνακας 9.5.2

i	t_i	ν_i	$t_i \nu_i$	$t_i^2 \nu_i$
1	30	6	180	5400
2	35	14	490	17150
3	45	20	900	40500
4	50	36	1800	90000
5	60	10	600	36000
6	75	12	900	67500
7	90	2	180	16200
Σύνολο		**100**	**5050**	**272750**

Ασκήσεις.

9.5.1. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της ασκήσεως 9.4.2. Ποιο από τα μέτρα αυτά θεωρείτε ότι είναι το πλέον κατάλληλο για την περιγραφή της κυμάνσεως (μεταβλητότητας) των δεδομένων;

9.5.2. Δίνονται τα παρακάτω τρία σύνολα δεδομένων:

10, 30, 50, 60, 70, 90, 110
10, 59, 59, 60, 61, 61, 110
10, 11, 22, 60, 98, 109, 110.

α) Να επαληθεύσετε ότι καθένα από τα τρία σύνολα δεδομένων έχει την ίδια μέση τιμή.
β) Παρατηρώντας με το «μάτι» τα δεδομένα να αποφασίσετε σε ποιο από αυτά εμφανίζεται η μεγαλύτερη και σε ποιο η μικρότερη διασπορά.
γ) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση των δεδομένων αυτών το εύρος;
δ) Να υπολογίσετε όλα τα μέτρα διασποράς που γνωρίζετε και για τα τρία σύνολα δεδομένων.
ε) Ποιο μέτρο διασποράς θεωρείτε το πλέον κατάλληλο για τη σύγκριση των δεδομένων;

9.5.3. Να αποδείξετε ότι εάν από όλες τις τιμές ενός δείγματος αφαιρέσομε τη μέση τιμή τους και διαιρέσομε με την τυπική τους απόκλιση, τότε νέες τιμές που θα προκύψουν έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Οι μετασχηματισμένες τιμές που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο ονομάζονται τυποποιημένες τιμές. Να υπολογίσετε τις τυποποιημένες τιμές των τριών συνόλων δεδομένων που δόθηκαν στην άσκηση 9.5.2. Τι παρατηρείτε;

9.5.4. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της ασκήσεως 9.4.7. Στη συνέχεια, χωρίς να γίνουν ξανά αναλυτικοί υπολογισμοί, να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα που δίνονται στα ερωτήματα (α) και (β).

9.5.5. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της ασκήσεως 9.4.9. Ποιες θα είναι οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων μετά από πάροδο 5 ετών;

9.5.6. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της ασκήσεως 9.4.10. Ποιες θα ήταν οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων αν το ύψος το μετρούσαμε σε cm (αντί για m);

9.5.7. Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους αριθμούς α, β αν είναι γνωστό ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών α, β, 5, 7, 8 είναι ίσος με 6 και η τυπική τους απόκλιση είναι ίση με $\sqrt{2}$.

9.5.8. Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχολήσεως κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο πίνακας 9.5.3.

α) Να βρείτε τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων.

β) Να υπολογίσετε τη μέση υπερωριακή απασχόληση.

γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση της υπερωριακής απασχολήσεως.

δ) Να υπολογίσετε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και στη συνέχεια το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Πίνακας 9.5.3

Ώρες υπερωριακής απασχολήσεως Κλάσεις [–)	*Αθροιστική συχνότητα N_i*
0–2	5
2–4	15
4–6	20
6–8	35
8–10	40

9.5.9. Στον πίνακα 9.5.4 δίνεται η κατανομή του ύψους 50 ατόμων που επιλέχτηκαν τυχαία από το ακροατήριο μιας ομιλίας. Να υπολογίσετε:

α) Το μέσο ύψος των ατόμων του δείγματος.

β) Το διάμεσο ύψος των ατόμων του δείγματος.

γ) Την επικρατούσα τιμή για το ύψος των ατόμων του δείγματος.

δ) Το ύψος, κάτω από το οποίο βρίσκονται το 25% των παρατηρήσεων του δείγματος.

ε) Το ύψος, κάτω από το οποίο βρίσκονται το 75% των παρατηρήσεων του δείγματος.

στ) Το ύψος, κάτω από το οποίο βρίσκονται το 90% των παρατηρήσεων του δείγματος.

ζ) Την τυπική απόκλιση του ύψους των ατόμων του δείγματος.

η) Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο για το ύψος των ατόμων του δείγματος.

θ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για το ύψος των ατόμων του δείγματος.

Πίνακας 9.5.4

Κλάσεις [–)	*Κεντρικές τιμές*	*Συχνότητα ν_i*
162–168	165	8
168–174	171	18
174–180	177	20
180–186	183	7
186–192	189	3

9.5.10. Εξετάζοντας 50 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, σχηματίσαμε τον πίνακα 9.5.5 κατανομής συχνοτήτων.

α) Να συ μπληρώσετε τα δύο στοιχεία που λείπουν από τον πίνακα αν είναι γνωστό ότι ο μέσος αριθμός παιδιών των 50 οικογενειών που εξετάσθηκαν είναι 1,8.

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο για τον αριθμό παιδιών των 50 οικογενειών.

Πίνακας 9.5.5

Αριθμός παιδιών x_i	*Αριθμός οικογενειών ν_i*
0	4
1	16
2	20
3	?
4	?
Σύνολο	**50**

γ) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων των δεδομένων.

δ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων των δεδομένων.

ε) Να υπολογίσετε το εύρος και την τυπική απόκλιση του αριθμού παιδιών για τις οικογένειες του δείγματος των 50 οικογενειών που επιλέχθηκαν.

στ) Να υπολογίσετε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο για τον αριθμό παιδιών των οικογενειών του δείγματος των 50 οικογενειών που επιλέχθηκαν.

ζ) Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τον αριθμό παιδιών των οικογενειών του δείγματος (πίν. 9.5.5).

9.6 Γραμμική παλινδρόμηση.

Αρκετά συχνά εμφανίζεται η ανάγκη ταυτόχρονης μελέτης δύο ή περισσοτέρων χαρακτηριστικών (μεταβλητών), με στόχο τον προσδιορισμό του τρόπου, με τον οποίο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

α) Το πλήθος των επιβατών που θα προσελκύσει μια ακτοπλοϊκή εταιρεία σχετίζεται με το ύψος της διαφημιστικής δαπάνης που θα κάνει.

β) Ο χρόνος αλλοιώσεως ενός γαλακτοκομικού προϊόντος επηρεάζεται αρνητικά από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλη είναι η θερμοκρασία, τόσο μικρότερος θα είναι ο χρόνος που θα υποστεί αλλοίωση το προϊόν.

γ) Η ηλικία και το βάρος ενός παιδιού έχουν κάποια θετική εξάρτηση μεταξύ τους, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο σε ηλικία είναι το παιδί, τόσο μεγαλύτερο βάρος θα έχει.

δ) Η παραγωγή ενός αγροτικού προϊόντος εξαρτάται από την ποσότητα λιπάσματος που θα χρησιμοποιηθεί.

ε) Το ύψος των αποδοχών των υπαλλήλων μιας εταιρείας εξαρτάται από το χρόνο υπηρεσίας τους.

Σε όλα τα παραπάνω προβλήματα παρουσιάζει ενδιαφέρον να εξεταστούν οι επιδράσεις που κάποια μεταβλητή ασκεί σε κάποια άλλη μεταβλητή. Αν μάλιστα θα μπορούσε να βρεθεί και ένα απλό μαθηματικό μοντέλο που να εκφράζει τη σχέση αυτή μέσω μιας συναρτήσεως, τότε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των τιμών μιας μεταβλητής από τις γνώσεις που διαθέτομε για τις άλλες μεταβλητές.

Ο τομέας της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών με στόχο την πρόβλεψη μίας από αυτές με χρήση των τιμών μιας ή περισσοτέρων άλλων ονομάζεται ***ανάλυση παλινδρομήσεως***. Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1885 από τον Άγγλο ανθρωπολόγο Galton (1822-1911) στην εργασία του *Regression Towards Mediocrity in Hereditary Stature* όπου, μελετώντας τα ύψη των παιδιών σε σχέση με το μέσο ύψος των γονέων τους διαπιστώθηκε ότι αυτά είχαν την τάση να παλινδρομούν γύρω από το μέσο γονικό ύψος, αντί να στρέφονται προς ακραίες τιμές.

Παρότι αρχικά ο όρος παλινδρόμηση χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τη συγκεκριμένη διαπίστωση του Galton, με την πάροδο του χρόνου επεκτάθηκε η χρήση του και σήμερα πλέον έχει κατασθεί συνώνυμος με τη στατιστική μελέτη της σχέσεως μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Σε κάθε πρόβλημα παλινδρομήσεως διακρίνομε συνήθως δύο είδη μεταβλητών: τις ***ανεξάρτητες*** ή ***ελεγχόμενες*** και τις ***εξαρτημένες*** μεταβλητές ή ***μεταβλητές αποκρίσεως***. Ανεξάρτητες μεταβλητές, οι οποίες συμβολίζονται συνήθως με X, είναι εκείνες στις οποίες μπορούμε να δίνομε μια συγκεκριμένη τιμή (π.χ. τιμή πωλήσεως ενός προϊόντος, θερμοκρασία επεξεργασίας μιας ουσίας, ποσότητα λιπάσματος που θα χρησιμοποιηθεί σ' έναν αγρό) ή λαμβάνουν τιμές που μπορούμε να παρατηρήσομε, αλλά όχι να ελέγξομε (π.χ. θερμοκρασία περιβάλλοντος, ηλιοφάνεια). Η εξαρτημένη μεταβλητή, η οποία συμβολίζεται συνήθως με Y, αντανακλά το αποτέλεσμα μεταβολών στις ελεγχόμενες μεταβλητές (π.χ. αριθμός πωλήσεων του προϊόντος, χρώμα-καθαρότητα της παραγόμενης ουσίας, παραγωγή του αγρού). Αξίζει να σημειωθεί ότι η διάκριση μεταξύ ανεξαρτήτων και εξαρτημένων μεταβλητών δεν είναι πάντοτε σαφής, αφού μπορεί κάποιος παράγοντας, ο οποίος σε ένα ενδιάμεσο στάδιο θεωρείται εξαρτημένη μεταβλητή, σε ένα επόμενο να λάβει το ρόλο της ανεξάρτητης.

Η απλούστερη περίπτωση παλινδρομήσεως είναι η ***απλή γραμμική παλινδρόμηση***, κατά την οποία υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή X και μία εξαρτημένη μεταβλητή Y, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία γραμμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής X.

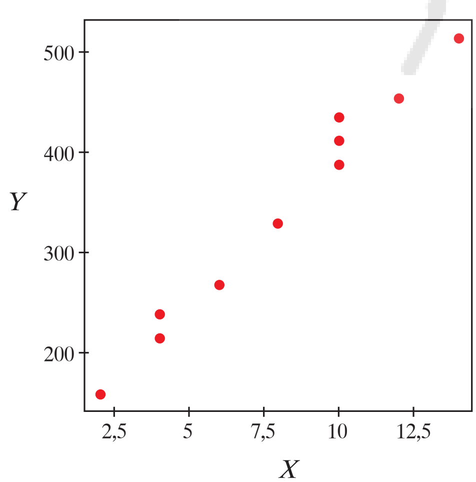
Ας ξεκινήσομε με ένα απλό παράδειγμα. Στον πίνακα 9.6.1 δίνεται η ετήσια επιβατική κίνηση Y (σε χιλιάδες επιβάτες) που αφορά σε μια ακτοπλοϊκή εταιρεία για $\nu=10$ έτη και το ποσό X (σε εκατομμύρια €) που δαπάνησε η συγκεκριμένη εταιρεία για διαφημιστική δαπάνη στην αρχή του έτους.

Πίνακας 9.6.1
Ετήσια επιβατική κίνηση Y και διαφημιστική δαπάνη X μιας ακτοπλοϊκής εταιρείας για $\nu=10$ έτη.

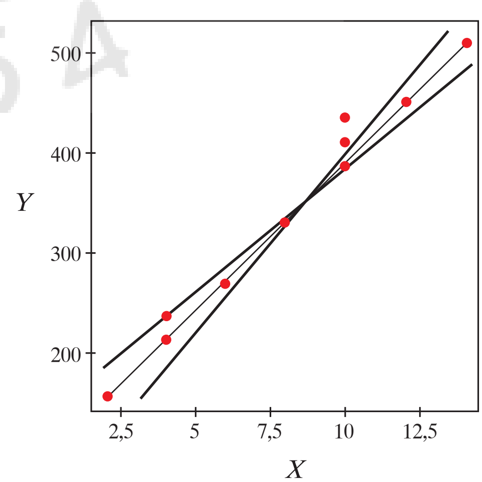
i	x_i	y_i
1	4	225
2	2	156
3	10	390
4	14	516
5	6	267
6	8	330
7	10	411
8	4	213
9	12	450
10	10	402

Αν παραστήσομε τα ζεύγη (x_i, y_i) των παρατηρήσεων σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, θα πάρομε το σχήμα 9.6α το οποίο ονομάζεται ***διάγραμμα διασποράς***.

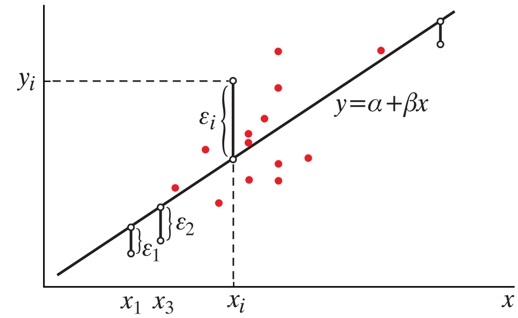
Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται να υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ποσό X που δαπανά η εταιρεία για διαφήμιση στην αρχή του έτους και την ετήσια επιβατική κίνηση Y. Πιο συγκεκριμένα, τα σημεία (x_i, y_i), $i = 1, 2,..., 10$ δείχνουν να είναι συγκεντρωμένα γύρω από μία ευθεία, δηλαδή η σχέση μεταξύ των X και Y φαίνεται να είναι γραμμική (κατά προσέγγιση). Θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος της διαφημιστικής δαπάνης X και ως εξαρτημένη μεταβλητή την επιβατική κίνηση Y, η ευθεία που θα προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία αυτά (με βάση κάποιο κριτήριο που θα δούμε στη συνέχεια) θα ονομάζεται ***ευθεία παλινδρομήσεως*** της Y πάνω στη X. Στο σχήμα 9.6β παρουσιάζεται το διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 μαζί με τρεις ευθείες που περνούν «ανάμεσα» στα 10 σημεία και φαίνεται να τα προσεγγίζουν ικανοποιητικά. Προφανώς η χάραξη της «με το μάτι», παρά την απλότητά της, έχει πολλά μειονεκτήματα, το κυριότερο από τα οποία είναι έλλειψη αντικειμενικότητας, αφού διάφορα άτομα μπορούν να προτείνουν πολλές διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να αναζητήσομε ένα αντικειμενικό (μάλλον μαθηματικό) κριτήριο επιλογής της βέλτιστης ευθείας προσεγγίσεως.



Σχ. 9.6α.
Διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1.



Σχ. 9.6β.
Διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 και ευθεία προσεγγίσεως.



Σχ. 9.6γ.
Διάγραμμα διασποράς και κατακόρυφες αποστάσεις εi από την ευθεία προσεγγίσεως.

Ας θεωρήσομε ότι η εξίσωση της ευθείας που προσεγγίζει τα δεδομένα μας έχει τη γενική μορφή:

$$y = \alpha + \beta x.$$

Η παράμετρος α θα μας δίνει τότε τη θέση όπου η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$, ενώ η παράμετρος β παριστάνει την κλίση (συντελεστή διευθύνσεως) της ευθείας. Το ερώτημα που προκύπτει είναι με ποιον τρόπο μπορούμε να καθορίσομε τις άγνωστες παραμέτρους α και β έτσι, ώστε η ευθεία που θα προκύψει να μας δίνει όσο το δυνατόν την καλύτερη περιγραφή της σχέσεως(εξαρτήσεως) που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών X και Y. Η διαδικασία καθορισμού των α και β ονομάζεται ***εκτίμηση*** των παραμέτρων, ενώ οι τιμές που προκύπτουν γι' αυτές με την υλοποίηση της διαδικασίας εκτιμήσεως ονομάζονται ***εκτιμήτριες***.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β είναι η ***μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων***, η οποία προτάθηκε το 1805 σε μια εργασία του Γάλλου μαθηματικού Legendre, (1752-1833) και αμέσως μετά από το Γερμανό μαθηματικό Gauss, (1777-1855). Σύμφωνα μ' αυτήν ο προσδιορισμός των παραμέτρων α, β, γίνεται έτσι, ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των κατακορύφων αποστάσεων

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία $y = \alpha + \beta x$ (σχ. 9.6γ). ΄Ετσι, εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι η ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$AT = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \qquad (9.6.1)$$

Οι τιμές των παραμέτρων α και β, που ελαχιστοποιούν την (9.6.1), καλούνται ***εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων*** και συμβολίζονται $\hat{\alpha}$ με $\hat{\beta}$ και αντίστοιχα. Αποδεικνύεται[1] ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i - \hat{\beta} \cdot \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i. \qquad (9.6.2)$$

Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$ καλείται ***ευθεία ελαχίστων τετραγώνων*** ή ***ευθεία παλινδρομήσεως*** της Y (πάνω) στη X.

Αν συμβολίσομε με

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i, \qquad \overline{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i$$

τους αριθμητικούς μέσους των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ και $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ αντίστοιχα, ο τύπος που δό-

1. Η απόδειξη παραλείπεται, αφού απαιτεί τη γνώση αποτελεσμάτων που δεν έχουν καλυφθεί στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου.

θηκε προηγουμένως για την εκτιμήτρια του α, γίνεται

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν αντικαταστήσομε την έκφραση $\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x}$ στην εξίσωση της ευθείας παλινδρομήσεως, η τελευταία γράφεται στη μορφή

$$\hat{y} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x} + \hat{\beta}\,x \Leftrightarrow \hat{y} - \overline{y} = \hat{\beta}(x - \overline{x}),$$

η οποία δείχνει ότι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,x$ διέρχεται πάντοτε από το σημείο με συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y})$.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 μπορούμε να προχωρήσομε εύκολα στους υπολογισμούς που δίνονται στον πίνακα 9.6.2 και αντικαθιστώντας στους τύπους (9.6.2) βρίσκομε:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} = \frac{10\cdot 30960 - 80\cdot 3360}{10\cdot 776 - 80^2} = 30$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i - \hat{\beta}\cdot\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \frac{1}{10}\cdot 3360 - 30\cdot\frac{1}{10}\cdot 80 = 96.$$

Πίνακας 9.6.2

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	4	225	16	900
2	2	156	4	312
3	10	390	100	3900
4	14	516	196	7224
5	6	267	36	1602
6	8	330	64	2640
7	10	411	100	4110
8	4	213	16	852
9	12	450	144	5400
10	10	402	100	4020
	$\sum x_i = 80$	$\sum y_i = 3360$	$\sum x_i^2 = 776$	$\sum x_i y_i = 30960$

Επομένως έχομε τις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta} = 30$ και $\hat{\alpha} = 96$ και η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα είναι η:

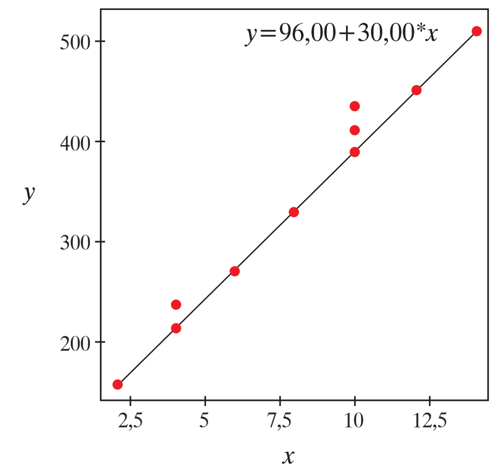
$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,x = 96 + 30x$$

(σχ. 9.6δ). Σύμφωνα μ' αυτήν, η εκτίμησή μας για την ετήσια επιβατική κίνηση Y (σε χιλιάδες επιβάτες) όταν δεν γίνει καμμία διαφημιστική δαπάνη ($x=0$) είναι:

$$\hat{y}=96+30\cdot 0=96.$$

Γενικά, στην εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ (που αποτελεί την τεταγμένη του σημείου, στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$), μας δίνει την (αναμενόμενη, εκτιμώμενη) τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν $x=0$. Προφανώς, αν προκύψει $\hat{\alpha}=0$, τότε η ευθεία θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Προκειμένου να δώσομε μια πρακτική ερμηνεία στην εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β, δηλαδή στο συντελεστή διευθύνσεως $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$, ας θεωρήσομε δύο διαδοχικές τιμές x_1 και $x_2=x_1+1$ της ανεξάρτητης μεταβλητής X. Τότε η διαφορά των αντιστοίχων προβλεπομένων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής θα είναι ίση με:



Σχ. 9.6δ.
Διάγραμμα διασποράς και κατακόρυφες αποστάσεις ε_i από την ευθεία προσεγγίσεως.

$$\hat{y}_2-\hat{y}_1=(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_2)-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_1)=\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_1+1)-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_1)=\hat{\beta}.$$

Συνεπώς $\hat{y}_2=\hat{y}_1+\hat{\beta}$ και μπορούμε να πούμε ότι:

> Η εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta}>0$ ή ελαττώνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta}<0$.

Για παράδειγμα, με βάση την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x=96+30x$ που βρήκαμε προηγουμένως για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1, μπορούμε να διατυπώσομε τον ισχυρισμό ότι αν η διαφημιστική δαπάνη της ακτοπλοϊκής εταιρείας αυξηθεί κατά 1 μονάδα (1.000.000 €), εκτιμάμε ότι η ετήσια επιβατική κίνηση Y θα αυξηθεί κατά 30 μονάδες (30.000 επιβάτες).

Ολοκληρώνομε την παράγραφο αυτή αναφέροντας ένα δείκτη για την ποιότητα της προσεγγίσεως που προσφέρεται από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων αποτελεί ο λεγόμενος ***συντελεστής προσδιορισμού*** (coefficient of determination) R^2, ο οποίος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{\nu}\hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2},$$

όπου

$$\hat{y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_i,\;\; \hat{\varepsilon}_i=y_i-\hat{y}_i \;\text{ για }\; i=1,2,\ldots,\nu.$$

Ο συντελεστής προσδιορισμού λαμβάνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1 ($0\le R^2\le 1$) και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό. Τιμές του R^2 κοντά στο 1 σημαίνουν ότι η ευθεία παλινδρομήσεως περνάει πολύ κοντά από τα περισσότερα σημεία, ενώ τιμές κοντά στο 0 σημαίνουν ότι όλα σχεδόν τα σημεία βρίσκονται μακριά από την ευθεία παλινδρομήσεως και επομένως θα πρέπει να αναζητηθεί κάποια άλλη σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής (μη γραμμική).

Πίνακας 9.6.3

i	x_i	y_i	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$\hat{\varepsilon}_i = y_i-\hat{y}_i$	$\hat{\varepsilon}_i^2=(y_i-\hat{y}_i)^2$
1	4	225	–111	12321	216	9	81
2	2	156	–180	32400	156	0	0
3	10	390	54	2916	396	–6	36
4	14	516	180	32400	516	0	0
5	6	267	–69	4761	276	–9	81
6	8	330	–6	36	336	–6	36
7	10	411	75	5625	396	15	225
8	4	213	–123	15129	216	–3	9
9	12	450	114	12996	456	–6	36
10	10	402	66	4356	396	6	36
Άθροισμα			**0**	**122940**	**3360**	**0**	**540**

Χρησιμοποιώντας τα αθροίσματα που υπολογίστηκαν στον πίνακα 9.6.3. μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το συντελεστή προσδιορισμού για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 ως εξής:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2} = 1 - \frac{540}{3360} = 0{,}9956.$$

Με βάση την τιμή αυτή (99,6%) συμπεραίνομε ότι η ευθεία παλινδρομήσεως που δημιουργήσαμε προηγουμένως προσφέρει πολύ ικανοποιητική προσέγγιση των σημείων που διαθέτομε και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματική πρόβλεψη της ετήσιας επιβατικής κινήσεως με βάση τη διαφημιστική δαπάνη της εταιρείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.6.1.

Δίνονται ν σημεία (x_i, y_i) $i = 1, 2 \ldots \nu$ του επιπέδου. Από όλες τις ευθείες της μορφής $y = \beta x$ που περνάνε από την αρχή των αξόνων, ζητάμε να προσδιορίσομε εκείνη που τα προσεγγίζει καλύτερα με βάση την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

α) Να εκτιμήσετε την παράμετρο β της ευθείας $y = \beta x$.

β) Να βρείτε την εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ για τα επόμενα δεδομένα.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	30	20	60	80	40	50	70	90
y_i	75	52	120	170	86	110	153	194

Λύση.

α) Ο υπολογισμός της εκτιμήτριας ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β θα γίνει με την ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$AT = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \beta x_i)^2 .$$

Θεωρώντας την ποσότητα αυτή ως μια συνάρτηση του β, δηλαδή

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \beta x_i)^2 = (y_1 - \beta x_1)^2 + (y_2 - \beta x_2)^2 + \ldots + (y_\nu - \beta x_\nu)^2$$

αντιλαμβανόμαστε ότι, σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε στο κεφάλαιο 5, για να λάβει η $f(\beta)$ την ελάχιστη τιμή της θα πρέπει να ισχύει $f'(\beta) = 0$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση

$$f(\beta) = (y_1 - \beta x_1)^2 + (y_2 - \beta x_2)^2 + \ldots + (y_\nu - \beta x_\nu)^2 =$$

$$= (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_\nu^2) - 2\beta(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu) + \beta^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2)$$

ως προς β προκύπτει:

$$f'(\beta) = -2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu) + 2\beta(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2)$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της αθροίσεως

$$f'(\beta) = -2\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + 2\beta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 2(\beta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i).$$

Λύνοντας τέλος τη σχέση $f'(\beta) = 0$ ως προς β βρίσκομε:

$$\beta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i) = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2} .$$

Επομένως, η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β θα δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2} .$$

β) Με βάση τους υπολογισμούς που δίνονται στον πίνακα 9.6.4.

Πίνακας 9.6.4

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	***Άθροισμα***
x_i	30	20	60	80	40	50	70	90	
y_i	75	52	120	170	86	110	153	194	
x_i^2	900	400	3600	6400	1600	2500	4900	8100	28400
$x_i y_i$	2250	1040	7200	13600	3440	5500	10710	17460	61200

παίρνομε $\hat{\beta} = \dfrac{61200}{28400} = 2{,}155$ οπότε η ευθεία παλινδρομήσεως θα είναι η $y = \hat{\beta}\, x = 2{,}155x$.

Ασκήσεις.

9.6.1. Στον πίνακα 9.6.5 φαίνονται οι μετρήσεις του βάρους Y και του ύψους X είκοσι βρεφών, τα οποία κατά τη γέννηση είχαν βάρος μικρότερο των 1500 gr (λιπόβαρα).

α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

β) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος βρεφών συγκεκριμένου ύψους.

γ) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το ύψος βρεφών συγκεκριμένου βάρους.

δ) Θα μπορούσε να προκύψει το ένα μοντέλο από το άλλο χωρίς να επαναλάβετε όλους τους υπολογισμούς;

ε) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (α).

στ) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (β). Τι παρατηρείτε;

9.6.2. Τα βάρη των δέκα πρώτων βρεφών του πίνακα 9.6.5 αφορούν σε αγόρια, ενώ τα βάρη των δέκα επομένων αφορούν σε κορίτσια.

α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων, σημειώνοντας συγχρόνως ποια σημεία αντιστοιχούν σε αγόρια και ποια σε κορίτσια.

β) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος αγοριών συγκεκριμένου ύψους.

γ) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος κοριτσιών συγκεκριμένου ύψους.

δ) Να διαπιστώσετε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (β) είναι σημαντικά καλύτερος απ' αυτόν του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (γ).

ε) Αν μας ενδιαφέρει να εκτιμηθεί το βάρος ενός βρέφους συγκεκριμένου ύψους ποια εκτίμηση είναι πιο αξιόπιστη, αυτή που αφορά σε αγόρια ή αυτή που αφορά σε κορίτσια;

στ) Ποιο βάρος προβλέπετε ότι θα έχει ένα κορίτσι ύψους 40 cm; Ποιο βάρος προβλέπετε ότι θα έχει ένα αγόρι ύψους 40 cm;

9.6.3. Ένα υλικό συσκευάζεται από ένα εργοστάσιο σε μεγάλα κουτιά, ο αριθμός των οποίων ποικίλλει ανάλογα με την παραγγελία. Ο πίνακας 9.6.6 δίνει τον αριθμό των κουτιών που συσκευάστηκαν (ώστε να καλυφθούν οι παραγγελίες που δέχτηκε το εργοστάσιο) και τις εργατοώρες που χρειάστηκαν για 10 πρόσφατες παραγγελίες που εκτελέστηκαν.

α) Ποια από τις δύο μεταβλητές (αριθμός κουτιών, εργατοώρες) μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή X και ποια ως εξαρτημένη Y;

Πίνακας 9.6.5

Ύψος (σε cm)	*Βάρος (σε gr)*
41	1450
40	1490
38	1400
38	1410
38	1380
32	1100
33	1150
38	1420
30	1000
34	1150
32	1100
39	1450
38	1400
39	1450
37	1350
39	1450
38	1380
42	1490
39	1480
38	1450

Πίνακας 9.6.6

Αριθμός κουτιών	*Εργατοώρες*
60	230
40	161
120	365
160	515
80	263
100	335
100	335
140	464
180	587
70	245

β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

γ) Να υπολογίσετε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων την ευθεία γραμμικής παλινδρομήσεως της Y πάνω στη X και να χαραχθεί στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.

δ) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων που αφορούν στη μεταβλητή X και των παρατηρήσεων που αφορούν στη μεταβλητή Y. Στη συνέχεια να δώσετε ένα χαρακτηριστικό σημείο, απ' το οποίο διέρχεται η ευθεία παλινδρομήσεως.

ε) Να δώσετε η ερμηνεία του συντελεστή του x, καθώς και του σταθερού όρου της ευθείας γραμμικής παλινδρομήσεως της Y πάνω στη X.

στ) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που αναπτύχθηκε.

ζ) Πόσες εργατοώρες προβλέπετε ότι θα χρειασθούν για να ικανοποιηθεί μια παραγγελία που απαιτεί τη συσκευασία 85 κουτιών;

9.6.4. Ας θεωρήσομε και πάλι τα δεδομένα της ασκήσεως 9.6.3.

α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 9.6.1, να βρείτε την ευθεία της μορφής $y = \beta x$ (η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων), που προσεγγίζει τα δεδομένα καλύτερα με βάση τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου και να συγκρίνετε με το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που αναπτύχθηκε στην άσκηση 9.6.3

γ) Πόσες εργατοώρες προβλέπετε ότι θα χρειασθούν για να ικανοποιηθεί μία παραγγελία που απαιτεί τη συσκευασία 85 κουτιών;

9.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Απόλυτη συχνότητα ή απλά συχνότητα ν_i της τιμής t_i.	Ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή t_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος ($i = 1, 2,..., \varkappa$).
Σχετική συχνότητα f_i της τιμής t_i.	$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2,..., \varkappa$
Ιδιότητες της σχετικής συχνότητας.	α) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2,..., \varkappa$ β) $f_1 + f_2 + ... + f_\varkappa = 1$
Αθροιστικές συχνότητες N_i.	$N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$ για $i = 1, 2,..., \varkappa$
Αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i.	$F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$ για $i = 1, 2,..., \varkappa$
Τρόποι γραφικής απεικονίσεως κατηγορικών δεδομένων.	Με ραβδογράμματα και κυκλικά διαγράμματα.
Τρόποι γραφικής απεικονίσεως ποσοτικών δεδομένων.	Με διαγράμματα συχνοτήτων (ιστογράμματα, όταν έχει γίνει ομαδοποίηση των δεδομένων), κυκλικά διαγράμματα και φυλλογραφήματα.
Εμπειρικός τύπος του Sturges.	$\varkappa = 1 + 3{,}32 \log \nu = 1 + 1{,}44 \ln \nu$
Μέτρα θέσεως.	α) Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή. β) Διάμεσος. γ) Κορυφή ή επικρατούσα τιμή.

Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ($\overline{x}$)	$\overline{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}t_i\nu_i$
Διάμεσος (δ).	Η τιμή που χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων δεδομένων σε δύο ισοπληθή υποσύνολα έτσι, ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες από αυτήν και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από αυτήν.
Εκατοστημόρια p_a, $a = 1, 2, ..., 99$.	Η τιμή εκείνη, για την οποία το πολύ a% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του p_a και το πολύ $(100-a)$% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.
Τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.	Τα εκατοστημόρια p_{25}, p_{50}, p_{75}
Υπολογισμός διαμέσου για ομαδοποιημένα δεδομένα.	$\delta=L_i+\frac{0{,}5-F_{i-1}}{F_i-F_{i-1}}c=L_i+\frac{0{,}5-F_{i-1}}{f_i}c$
Επικρατούσα τιμή ή κορυφή (M_0).	Η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.
Υπολογισμός της κορυφής για ομαδοποιημένα δεδομένα.	$M_0=L_i+\frac{D}{D+E}c$ όπου $D=f_i-f_{i-1}$ και $E=f_i-f_{i+1}$
Μέτρα διακυμάνσεως.	α) Εύρος ή κύμανση. β) Ενδοτεταρτημοριακό εύρος. γ) Διασπορά.
Εύρος ή κύμανση (R).	Η διαφορά της ελάχιστης παρατηρήσεως από τη μέγιστη παρατήρηση.
Διασπορά s^2.	$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(t_i-\overline{x})^2\nu_i$ ή ισοδύναμα $s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2\right\}=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}t_i^2\nu_i-\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\kappa}t_i\nu_i\right)^2\right\}$
Τυπική απόκλιση.	$s=\sqrt{s^2}$
Εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων.	$\hat{\beta}=\frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu}y_i\right)}{\nu\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}$, $\hat{\alpha}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}y_i-\hat{\beta}\cdot\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i$

Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρομήσεως της Y (πάνω) στη X.	$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$
Συντελεστής προσδιορισμού.	$R^2 = 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \bar{y})^2}$ όπου $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x_i$, $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ για $i = 1,2,..., \kappa$.

9.8 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων.	**Σ Λ**
2.	Αν συμβολίσομε με θ_i το τόξο του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή t_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, τότε $\theta_i = 360^{o} \nu_i$ για $i = 1, 2,..., \kappa$.	**Σ Λ**
3.	Ο αριθμός παιδιών μιας οικογένειας είναι μια ποσοτική συνεχής μεταβλητή.	**Σ Λ**
4.	Η τιμή της αμόλυβδης βενζίνης σ' ένα πρατήριο είναι συνεχής ή μεταβλητή.	**Σ Λ**
5.	Η μέση τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για ποιοτικά, όσο και για ποσοτικά δεδομένα.	**Σ Λ**
6.	Ένα φυλλογράφημα δεν περιέχει όλα τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, αφού κατά τη δημιουργία του χάνονται ορισμένες πληροφορίες που αφορούν στα δεδομένα.	**Σ Λ**
7.	Η διάμεσος των παρατηρήσεων 1 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με τη διάμεσο των 1 888 88 2 4 6 88.	**Σ Λ**
8.	Η διασπορά των παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δίνεται από τον τύπο: $s^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2$.	**Σ Λ**
9.	Η διασπορά s^2 εκφράζεται στις μονάδες, με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις που μελετάμε.	**Σ Λ**
10.	Όταν έχομε ακραίες παρατηρήσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή αντί της διαμέσου.	**Σ Λ**
11.	Όταν προσθέσομε τον αριθμό 5 σε όλες τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής, τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυξάνουν κατά 5.	**Σ Λ**
12.	Όταν πολλαπλασιάσομε τις τιμές μιας μεταβλητής επί 4, τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί 2.	**Σ Λ**
13.	Στην ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$ η εκτιμήτρια του α εκφράζει την αναμενόμενη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y, όταν το X μεταβληθεί κατά μια μονάδα.	**Σ Λ**

14.	Τα τεταρτημόρια είναι μέτρα θέσεως, ενώ η διαφορά τους είναι μέτρο διακυμάνσεως.	**Σ Λ**
15.	Ο αριθμητικός μέσος μπορεί να λάβει τιμή μικρότερη από την ελάχιστη τιμή των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του.	**Σ Λ**
16.	Ένας προσεγγιστικός υπολογισμός των τεταρτημορίων Q_1 και Q_3 μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα.	**Σ Λ**
17.	Η επικρατούσα τιμή ή κορυφή M_0 ενός συνόλου δεδομένων είναι πάντοτε μοναδική.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής t_i δίνεται από τον τύπο: α) $f_i = \nu \cdot \nu_i$ β) $f_i = \dfrac{\nu}{\nu_i}$ γ) $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ δ) $f_i = \dfrac{1}{\nu_i}$
2.	Για τις σχετικές συχνότητες ισχύει: α) $f_1 + \ldots + f_\kappa = 1$ β) $f_1 + \ldots + f_\kappa = 0$ γ) $-1 \le f_i \le 1$ δ) $1 \le f_i \le 2$.
3.	Το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι: α) Ίσο με το μηδέν. β) Πάντοτε αρνητικό. γ) Πάντοτε θετικό. δ) Ορισμένες φορές θετικό και ορισμένες αρνητικό
4.	Η κορυφή των παρατηρήσεων 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με: α) $M_0 = 8$ β) $M_0 = 2$ γ) $M_0 = 4$ δ) $M_0 = 6$.
5.	Η διάμεσος των παρατηρήσεων 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με: α) $\delta = 3$ β) $\delta = 7$ γ) $\delta = 2$ δ) $\delta = 4$.
6.	Ποιο από τα επόμενα είναι μέτρο θέσεως; α) Η διάμεσος β) Η διασπορά γ) Το εύρος δ) Κανένα
7.	Ποιο από τα επόμενα είναι μέτρο διακυμάνσεως; α) Η τυπική απόκλιση β) Η μέση τιμή γ) Η κορυφή δ) Η διάμεσος
8.	Η διάμεσος είναι πάντοτε ίση με: α) Το δεύτερο τεταρτημόριο. β) Το πρώτο τεταρτημόριο. γ) Το τρίτο τεταρτημόριο. δ) Την κορυφή.
9.	Η σχετική συχνότητα μπορεί να λάβει: α) Τιμές μεταξύ του 0 και του 1 μόνο. β) Κάθε πραγματική τιμή. γ) Τιμές μεγαλύτερες από 1. δ) Αρνητικές τιμές.

10.	Ένα μέτρο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για ποιοτικά, όσο και για ποσοτικά δεδομένα είναι: α) Η επικρατούσα τιμή. β) Τυπική απόκλιση. γ) Η διασπορά. δ) Η διάμεσος.
11.	Το αποτέλεσμα της ρίψεως ενός ζαριού είναι: α) Μια διακριτή ποσοτική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. β) Μια συνεχής ποσοτική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. γ) Μια κατηγορική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. δ) Μια διακριτή ποσοτική μεταβλητή με τιμές 0, 1,..., 6.
12.	Αν πολλαπλασιάσομε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε ο αριθμητικός τους μέσος: α) Πολλαπλασιάζεται με την ποσότητα αυτή. β) Διαιρείται με την ποσότητα αυτή. γ) Δεν μεταβάλλεται. δ) Μεγαλώνει όσο ακριβώς είναι η τιμή της ποσότητας αυτής.
13.	Ο συντελεστής προσδιορισμού λαμβάνει τιμές: α) Μεταξύ του 0 και του 1, δηλαδή ισχύει $0 \leq R^2 \leq 1$. β) Μεγαλύτερες από 1, δηλαδή ισχύει $R^2 > 1$. γ) Μεταξύ του –1 και του 0, δηλαδή ισχύει $-1 \leq R^2 \leq 0$. δ) Μόνο αρνητικές, δηλαδή ισχύει $R^2 \leq 0$.

9.9 Γενικές ασκήσεις.

9.9.1. Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ενός συνόλου δεδομένων ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}},$$

εκφράζεται συνήθως επί τοις εκατό και αποτελεί ένα μέτρο σχετικής διακυμάνσεως των τιμών που μελετάμε. Όταν ο συντελεστής μεταβολής είναι μικρότερος ή ίσος από 10%, δεχόμαστε ότι το σύνολο τιμών είναι ομοιογενές. Να εξετάσετε τα επόμενα σύνολα τιμών ως προς την ομοιογένεια και να τα συγκρίνετε μεταξύ τους με βάση τη διασπορά τους τη σχετική διασπορά τους.
α) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
β) 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109.
γ) 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190.

9.9.2. Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων A και B, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν:

Πόλη A: 20 18 20 17 18 17 16 17 16 10
Πόλη B: 18 16 17 15 16 12 16 17 20 22

α) Να βρείτε την μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων A και B.
β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών των πόλεων A και B και να διαπιστώ-

σετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη A παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς, ενώ το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη B αύξανε τη θερμοκρασία κατά 10%. Να βρείτε τις νέες τιμές της μέσης θερμοκρασίας και της τυπικής αποκλίσεως για τις δύο πόλεις.

9.9.3. Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσεως είναι τουλάχιστον 11 kg, αλλά μικρότερο από 26 kg. Γνωρίζομε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 kg, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 kg, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 kg και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 kg.

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σ' έναν πίνακα συχνοτήτων.

β) Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 kg, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσεως αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

γ) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του προβλήματος.

δ) Να υπολογίσετε το μέσο βάρος των αποσκευών των επιβατών της πτήσεως.

ε) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του βάρους των αποσκευών των επιβατών της πτήσεως.

στ) Να υπολογίσετε τη διασπορά του βάρους των αποσκευών των επιβατών της πτήσεως.

9.9.4. Ένας αριθμός επιβατών ενός πλοίου ρωτήθηκε πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασε ο καθένας κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν οι εξής: 5 επιβάτες δεν διάβασαν κανένα βιβλίο (0 βιβλία), 25 επιβάτες διάβασαν 1 βιβλίο, 15 επιβάτες διάβασαν 2 βιβλία, ενώ τέλος 5 επιβάτες διάβασαν 3 βιβλία.

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων των δεδομένων.

β) Να βρείτε πόσοι από τους επιβάτες που ρωτήθηκαν διάβασαν κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους το πολύ δύο βιβλία.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των βιβλίων που διάβασε κάθε επιβάτης κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους.

δ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την κορυφή των δεδομένων.

ε) Να υπολογίσετε τη διασπορά και την τυπική απόκλιση των δεδομένων.

στ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων των δεδομένων.

9.9.5. Στον πίνακα 9.9.1 δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 ατόμων. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσεως είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσεως, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και στην τέταρτη κλάση.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά των δεδομένων.

γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την κορυφή των δεδομένων.

Πίνακας 9.9.1

Βάρος (σε kg) [–)	*Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i*
45–55	0,2
55–65	0,5
65–75	
75–85	

9.9.6. Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια θετική ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριστικό) X, τότε, ο γεωμετρικός μέσος g_x των παρατηρήσεων ορίζεται ως η ν-οστή ρίζα του γινομένου των τιμών των διαθεσίμων παρατηρήσεων, δηλαδή $g_x = \sqrt[\nu]{x_1 x_2 \cdots x_\nu}$.

Ο γεωμετρικός μέσος χρησιμοποιείται στην εκτίμηση της μέσης ετήσιας μεταβολής (αυξήσεως ή μειώσεως) του όγκου ή της αξίας της παραγωγής προϊόντων, στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής ενός πληθυσμού, στην κατάρτιση αριθμοδεικτών (δεικτών τιμών ή ποσοτήτων αγαθών) κ.λπ..

α) Να αποδείξετε ότι ο λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου είναι ίσος με τον αριθμητικό μέσο των λογαρίθμων των τιμών των διαθεσίμων παρατηρήσεων.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των παρατηρήσεων 1, 3, 5, 10, 15.

γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που βρέθηκε στο ερώτημα (α), να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των παρατηρήσεων 2, 2^2, 2^3, 2^4.

9.9.7. Έστω n σύνολα δεδομένων με ίσο αριθμό παρατηρήσεων, σε κάθε σύνολο. Ας συμβολίσομε με $\bar{x}_1$ και s_1^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά αντίστοιχα του πρώτου συνόλου δεδομένων, με $\bar{x}_2$ και s_2^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά του δεύτερου συνόλου δεδομένων κ.ο.κ. και με $\bar{x}_n$ και s_n^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά του n-οστού συνόλου δεδομένων.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος όλων των μετρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i .$$

β) Να αποδείξετε ότι η διασπορά s^2 όλων των μετρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_n^2 .$$

γ) Ισχύει αντίστοιχος τύπος για την τυπική απόκλιση;

9.9.8. Προκειμένου να διαπιστωθεί η επίδραση της θερμοκρασίας X στην αντοχή Y ενός υλικού, θέλομε να δημιουργήσομε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων μια ευθεία της μορφής $y = a + \beta x$.

α) Αν χρησιμοποιούμε $\nu = 5$ μετρήσεις της αντοχής του υλικού y_1, y_2, y_3, y_4 και y_5 στις θερμοκρασίες $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ και $x_5 = 2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5, \quad \hat{\beta} = \frac{1}{10}(-2y_1 - y_2 + y_4 + 2y_5 .$$

β) Αν χρησιμοποιούμε $\nu = 6$ μετρήσεις της αντοχής του υλικού y_1, y_2, y_3, y_4 και y_5 στις θερμοκρασίες $x_1 = -2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ και $x_6 = 1$ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{84}(9y_1 + 9y_2 + 15y_3 + 15y_4 + 18y_5 + 18y_6), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{28}(-5y_1 - 5y_2 + y_3 + y_4 + 4y_5 + 4y_6).$$

9.9.9. Με βάση τα αποτελέσματα της ασκήσεως 9.9.8 να βρείτε τις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β και το συντελεστή προσδιορισμού για τα επόμενα δεδομένα

x_i	–2	–1	0	1	2
y_i	3,5	7,2	10,4	12,6	15,9

9.6.10. Για τις παρατηρήσεις y_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ δίνεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$y_1 = a - 3\beta + \varepsilon_1, y_2 = a - 5\beta + \varepsilon_2, y_3 = a + \varepsilon_3, y_4 = a + 5\beta + \varepsilon_4, y_5 = a + 3\beta + \varepsilon_5.$$

Να αποδείξετε ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{68}(-3y_1 - 5y_2 + 5y_4 + 3y_5).$$

9.9.11. Η διοίκηση μιας επιχειρήσεως ενδιαφέρεται να προσδιορίσει πώς επηρεάζονται οι πωλήσεις ενός προϊόντος της από διάφορα χαρακτηριστικά, τα οποία θεωρούνται ότι έχουν σχέση μ' αυτές. Για το σκοπό αυτό κατέγραψε για 20 δίμηνα διαστήματα τον αριθμό πωλήσεων που επιτεύχθηκε (εξαρτημένη μεταβλητή Y), την τιμή πωλήσεώς του σε € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_1), την τιμή του κύριου ανταγωνιστικού προϊόντος σε € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_2), το κόστος τηλεοπτικής διαφημίσεως του προϊόντος σε χιλιάδες € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_3) και το κόστος ραδιοφωνικής διαφημίσεως (ανεξάρτητη μεταβλητή X_4) σε χιλιάδες €. Τα αποτελέσματα της έρευνας δίνονται στον πίνακα 9.9.2.

Να εξετάσετε όλα τα δυνατά μοντέλα παλινδρομήσεως που έχουν ως ανεξάρτητες μεταβλητές μία από τις X_1, X_2, X_3, X_4 και ως εξαρτημένη μεταβλητή την Y. Να βρείτε το καλύτερο από αυτά με βάση την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού R^2.

Πίνακας 9.9.2

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	82	5	8	10	2
2	99	7,4	9	11	3
3	123	6,8	10	12	4
4	231	6	12	13	5
5	53	8,4	7	4	1
6	85	8	8,4	6	5
7	37	8,9	6,6	3	6,6
8	90	7,7	6,8	9	4,4
9	120	7,8	7	9,9	2,2
10	313	6,1	9,9	13,1	6
11	51	10	5,5	6,4	7,1
12	81	8,2	7,6	8,8	4,1
13	181	5,8	7,3	9,8	4
14	151	5,7	7,1	8,7	5,1
15	121	6,2	6	5,4	5,2
16	88	6,6	5	4,3	3,4
17	213	6,3	11	11,1	4
18	54	8,98	9	3,3	2,1
19	111	8,86	9,2	10,6	2,4
20	77	9,9	6,1	6,1	3

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ
ΠΙΝΑΚΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954