



# Σημειώσεις Μαθηματικών – 1

Λογάριθμοι

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός



## Κεφάλαιο 1 Λογάριθμοι

### 1.1 Ορισμός λογαρίθμου

*Ορισμός 1*

Λογάριθμος  $\log_a y$  ενός θετικού αριθμού  $y$  με βάση  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ) λέγεται ο αριθμός  $x$  στον οποίο όταν υψωθεί ο  $a$  προκύπτει ο  $y$ .

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Πχ.

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{αφού} \quad 2^3 = 8$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{αφού} \quad a^0 = 1$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2} \quad \text{αφού} \quad 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\log_{10} \frac{1}{10} = -1 \quad \text{αφού} \quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Συμβολίζουμε :

Τους λογαριθμούς με βάση το 10 με **log** και τους ονομάζουμε δεκαδικούς και τους λογαρίθμους με βάση το  $e$  **ln** και τους ονομάζουμε φυσικούς. Δηλαδή:

$$\log_{10} y = \log y \quad \log_e y = \ln y$$

### 1.2 Χαρακτηριστικό λογαρίθμου

Α. Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού **μεγαλύτερου της μονάδας** είναι θετικός. Το ακέραιο μέρος του ονομάζεται **χαρακτηριστικό** και το δεκαδικό του **μαντίσσα**.

$$\log 78509 = 4,89492$$

Χαρακτηριστικό **c=4**, Μαντίσσα **μ=0,89492**

Σε αυτή τη περίπτωση το χαρακτηριστικό είναι πάντα θετικός και ισούται με το πλήθος των ψηφίων του αριθμού πριν τη υποδιαστολή μειωμένο κατά 1. Δηλαδή :

Αριθμός	Αριθμός ψηφίων πριν την υποδιαστολή	Χαρακτηριστικό	Λογάριθμος
567	3	<b>2</b>	$\log 567 = 2,7535$
32,5	2	<b>1</b>	$\log 32,5 = 1,512$
2,39	1	<b>0</b>	$\log 2,39 = 0,378$



Εαν μας δοθεί η μαντίσσα ενός αριθμού μπορούμε να βρούμε το λογάριθμό του αφού πρώτα βρούμε το χαρακτηριστικό του :

Αριθμός	Μαντίσσα	Χαρακτηριστικό	Λογάριθμος
6.780	0,8312	3	3,8312
67,8	0,8312	1	1,8312
6,78	0,8312	0	0,8312

**Β.** . Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού **μικρότερου της μονάδας** είναι αρνητικός. Το **χαρακτηριστικό** του είναι αρνητικός και η απόλυτη τιμή του ισούται με πλήθος των μηδενικών μεταξύ της υποδιαστολής και του πρώτου μη μηδενικού ψηφίου αυξημένο κατά 1. Η **μαντίσσα** του ισούται με τη διάφορα του απολύτου του χαρακτηριστικού και του λογαρίθμου του.

$$\log 0,275 = -0,5606$$

$$\text{Χαρακτηριστικό } c = -1 \quad \text{Μαντίσσα } \mu = 1 - 0,5606 = 0,4394$$

Αριθμός	Αριθμός μηδενικών μεταξύ υποδ. και πρώτου μη μηδ. ψηφίου	Χαρακτηριστικό
0,0197	1	-2
0,00294	2	-3

Εαν μας δοθεί η μαντίσσα ενός αριθμού μπορούμε να βρούμε το λογάριθμό του αφού πρώτα βρούμε το χαρακτηριστικό του και προσθέσουμε τη μαντίσσα του.

Αριθμός	Μαντίσσα	Χαρακτηριστικό	Λογάριθμος
0,678	0,8312	-1	0,8312-1=-0,1688
0,0678	0,8312	-2	0,8312-2=-1,1688
0,00678	0,8312	-3	0,8312-3=-2,1688

Άσκηση (Βιβλίο 9.2.1)

### 1.3 Ιδιότητες Λογαρίθμων

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log a^x = x \cdot \log a$$

$$\log 10^x = x$$

$$\log \frac{1}{y} = -\log y$$

$$\log \sqrt[k]{x} = \log x^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \log x$$

$$\log_{\beta} x = \frac{\log_a x}{\log_a \beta}$$



Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων μπορούμε να υπολογίζουμε ευκολότερα αριθμητικές παραστάσεις.

Πχ.1

$$A = \frac{\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[6]{5}}$$

Αρχικά λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη και απλοποιούμε τη παράσταση χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες :

$$\log A = \log\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[6]{5}}\right), \quad \log A = \log \sqrt[3]{7} - \log 2\sqrt[6]{5},$$

$$\log A = \log \sqrt[3]{7} - (\log 2 + \log \sqrt[6]{5})$$

$$\log A = \frac{1}{3}\log 7 - \log 2 - \frac{1}{6}\log 5$$

Από τους πίνακες λογαρίθμων βρίσκουμε  $\log 7 = 0,8451$  ,  $\log 2 = 0,3010$ ,

$\log 5 = 0,6987$ . Άρα  $\log A = -0,136$ .

Από τους πίνακες λογαρίθμων βρίσκουμε:

$$\log 0,731 = -0,136$$

Άρα  $A=0,731$ .

Πχ2.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\log 49 - 3\log 4}{3\log 7 - 6\log \sqrt{8}}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\log 49 - 3\log 4}{3\log 7 - 6\log \sqrt{8}} = \frac{\log 49 - \log 4^3}{\log 7^3 - \log \sqrt{8}^6} = \frac{\log 49 - \log 4^3}{\log 7^3 - \log 8^3} = \frac{\log 49 - \log 64}{\log 7^3 - \log 8^3} \\ &= \frac{\log \frac{49}{64}}{\log \left(\frac{7}{8}\right)^3} = \frac{\log \left(\frac{7}{8}\right)^2}{\log \left(\frac{7}{8}\right)^3} = \frac{2\log \frac{7}{8}}{3\log \frac{7}{8}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι :

$$\frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$$

2. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \log \left( \frac{4\sqrt{5} \cdot \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt{2}} \right)$$

$$(\log 2 = 0,301, \quad \log 3 = 0,477, \quad \log 5 = 0,699)$$



#### 1.4 Λογαριθμικές Εξισώσεις

Κάθε εξίσωση που περιέχει τον όρο  $\log x$  ή  $\log f(x)$  την ονομάζουμε λογαριθμική. Για να λύσουμε μια τέτοια εξίσωση πρέπει πρώτα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων και να καταλήψουμε στη μορφή :

$$\log f(x) = \log g(x)$$

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση γίνεται  $f(x) = g(x)$  και δεν είναι ποια λογαριθμική οπότε λύνουμε μια απο τις γνωστές εξισώσεις.

Προσέχουμε πάντα οι παραστάσεις που είναι στους λογαριθμους να είναι θετικές οπότε να απορρίψουμε κάποιες από τις λύσεις.

Πχ. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

1.  $\log x = -4$

πρέπει  $x > 0$

$$\log x = -4 \Rightarrow \log x = \log 10^{-4} \Rightarrow x = 10^{-4} > 0$$

2.  $\log(x + 3) = -\log 2$

πρέπει  $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$$\log(x + 3) = -\log 2 \Rightarrow \log(x + 3) = \log 2^{-1} \Rightarrow x + 3 = 2^{-1} = \frac{1}{2} > -3$$

3.  $\log(x + 1) + \log(x - 1) = \log 2$

πρέπει  $x + 1 > 0$  και  $x - 1 > 0$  δηλαδή  $x > -1$  και  $x > 1$  οπότε συναληθεύοντας έχουμε  $x > 1$

$$\log(x + 1) + \log(x - 1) = \log 2 \Rightarrow \log(x + 1)(x - 1) = \log 2$$

$$(x + 1)(x - 1) = 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Οι λύσεις είναι δύο  $x_1 = -\sqrt{3} < 1$  που απορρίπτεται και  $x_2 = \sqrt{3} > 1$  που είναι δεκτή.

#### Ασκήσεις

1. Βιβλίο σελ 410

9.8.6. Να επιλύσετε τη λογαριθμική εξίσωση:  $\log(8x + 2) = \log 3 + \log(x^2 - 3)$ .

9.8.7. Να επιλύσετε τη λογαριθμική εξίσωση:  $\frac{1}{2} \log x + \log \sqrt{x + 10} = 2 + \log \sqrt{x}$ .

9.8.8. Να επιλύσετε τη λογαριθμική εξίσωση:  $\log(4x) = \log 33 + \log(x^2 - 5)$ .

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α)  $\log(x - 13) + 3 \log 2 = \log(3x + 1)$

β)  $\log 2 + \log(x^2 + 1) = \log 5 + \log x$

γ)  $2 \log(2x - 4) - \log(9 - x) = 2 \log 3$

δ)  $\log(x - 9) + 2 \log \sqrt{2x - 1} = 2$