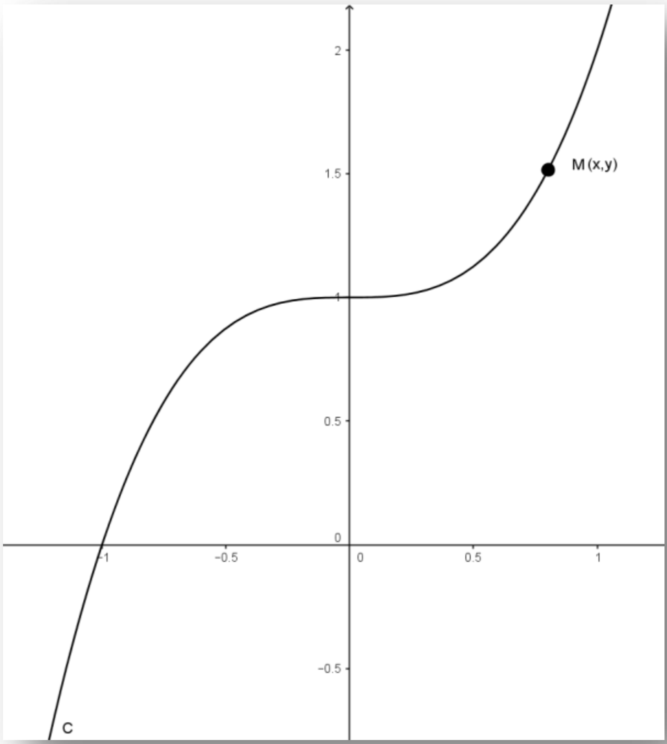
Σημειώσεις Μαθηματικών – 1

Αναλυτική Γεωμετρία

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

Κεφάλαιο 4 Αναλυτική Γεωμετρία

4.1 Εξίσωση Καμπύλης



Έστω C μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$. Η C αποτελείται από άπειρα σημεία Μ(x,y). Έξίσωση μιας καμπύλης C : f(x)=y ονομάζουμε αυτή που επαληθεύεται απο τα σημεία της Μ(x,y) και μόνον αυτά.

Π.χ.

Έστω η καμπύλη C με τύπο $y=x^3+1$.

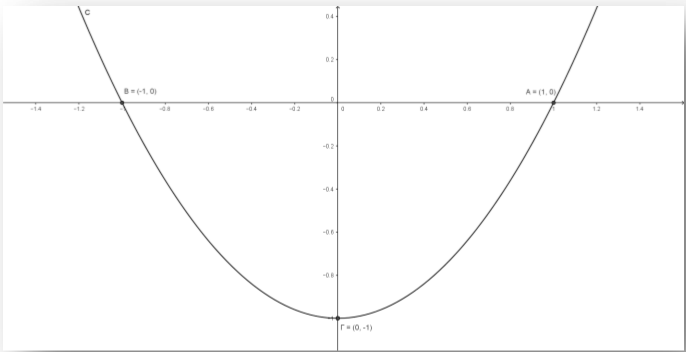
Το σημείο Α(1,2) είναι σημείο της C (Α$\in$C) αφού για x=1 έχουμε :

$y = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2.$

Σημείο Β(-2,4) δεν είναι σημείο της C (Β$\notin$C) αφού για x=-2 έχουμε :

$y = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7 \neq 4.$

Σημεία Τομής με τους Άξονες



Για να βρούμε που μια καμπύλη τέμνει τους άξονες θέτουμε :

Α. Για τον **x'x** όπου y=0

Β. Για τον **y'y** όπου x=0

Π.χ.

Να βρείτε που τέμνει τους άξονες η $C: y = x^2 - 1$

$$x'x: \quad \Gamma\iota\alpha \quad y = 0 \iff 0 = x^2 - 1 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

Άρα τον x'x τον τέμνει στα Α(1,0) και Β(-1,0)

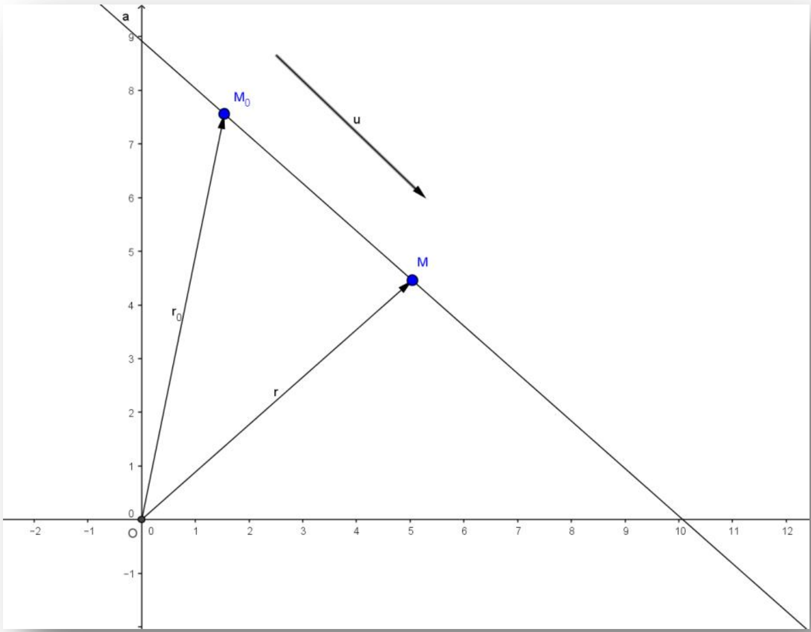
$$y'y: \quad \Gamma\iota\alpha \quad x = 0 \iff y = 0^2 - 1 \iff y = -1$$

Άρα τον y'y τον τέμνει στο Γ(0,-1)

4.2 Εξίσωση Ευθείας

1. Διανυσματική Εξίσωση Ευθείας

α. Έστω ευθεία (ε) που **είναι παράλληλη σε δοσμένο διάνυσμα $\vec{u} \neq \vec{0}$ και διέρχεται από δοσμένο σημείο $M_0(x_0,y_0)$.**



Έστω M(x,y) ένα τυχαίο σημείο της ευθεία (ε) και $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ τα διανύσματα θέσης των M, M_0 τότε :

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M} \quad (1)$$

Όμως $\overrightarrow{M_0M} // \vec{u}$ άρα $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{u}$ για $t \epsilon \mathbb{R}$.

Όποτε από την (1)

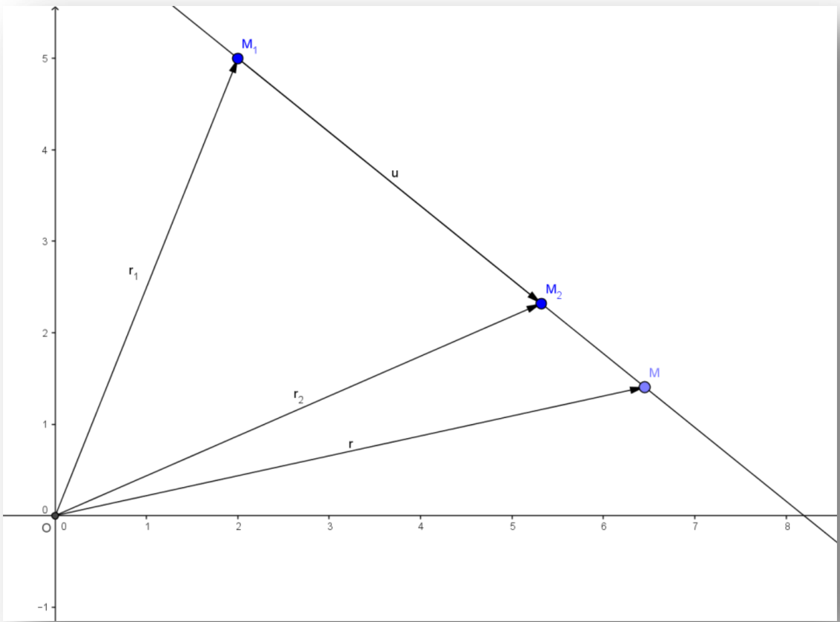
$$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u}} \quad (1)$$

Π.χ. 12.7.1

Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στο $\vec{u} = (-1,3)$ και διέρχεται από το σημείο $M_0(1,2)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \vec{r} = (1,2) + t \cdot (-1,3) \Leftrightarrow \vec{r} = (1,2) + (-t, 3t)$$
$$\vec{r} = (1-3t, 2+3t)$$

β. Έστω ευθεία (ε) που **διέρχεται από δύο δοσμένα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$.**



Έστω $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}, \vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$. Η ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ και διέρχεται από το M_1 άρα από την (1) έχουμε :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{u}$$

$$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1})} \quad (2)$$

Π.χ. 12.7.3

Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $M_1(-2,3)$, $M_2(4,5)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \Leftrightarrow \vec{r} = (-2,3) + t \cdot [(4,5) — 2,3) \Leftrightarrow \vec{r} = (-2,3) + t \cdot (6,2)$$
$$\vec{r} = (-2 + 6t, 3 + 2t)$$

<u>2. Παραμετρική Εξίσωση Ευθείας</u>

α. Έστω ευθεία (ε) που **είναι παράλληλη σε δοσμένο διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$ και διέρχεται από δοσμένο σημείο $M_0(x_0,y_0)$.**

Από την (1) έχουμε :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (x, y) = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$

Άρα η παραμετρική της εξίσωση είναι :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + \alpha t} \\ \boldsymbol{y = y_0 + \beta t} \end{cases} \quad \textbf{(3)}}$$

Π.χ. 12.7.1

Να βρείτε τη παραμετρική εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στο $\vec{u} = (-1,3)$ και διέρχεται από το σημείο $M_0(1,2)$.

Η διανυσματική είναι : $\vec{r} = (1 - 3t, 2 + 3t)$. Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

β. Έστω ευθεία (ε) που **διέρχεται από δύο δοσμένα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$.**

Από την (2) έχουμε :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \Leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1) + t \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Άρα η παραμετρική της εξίσωση είναι :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)} \\ \boldsymbol{y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1)} \end{cases} \quad \textbf{(4)}}$$

Π.χ 12.7.3

Να βρείτε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $M_1(-2,3)$, $M_2(4,5)$.

Η διανυσματική είναι : $\vec{r} = (-2 + 6t, 3 + 2t)$. Άρα έχουμε :

$$\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

<u>3. Αναλυτική Εξίσωση Ευθείας</u>

α. Έστω ευθεία (ε) που **είναι παράλληλη σε δοσμένο διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$ και διέρχεται από δοσμένο σημείο $M_0(x_0,y_0)$.** Από τη (3) και λύνοντας ως προς t έχουμε

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{\alpha} \\ t = \dfrac{y - y_0}{\beta} \end{cases}$$

Άρα η αναλυτική εξίσωση είναι :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \quad \gamma\iota\alpha\ \alpha\ \kappa\alpha\iota\ \beta \neq 0} \quad (5)}$$

Αν **α=0** τότε η ευθεία έχει αναλυτική εξίσωση **$x=x_0$**. Αν **β=0** τότε **$y=y_0$**.

Πχ 12.7.1
Να βρείτε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στο $\vec{u} = (-1,3)$ και διέρχεται από το σημείο $M_0(1,2)$.
Από την (5) έχουμε :

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x - 3 = -y + 2$$

β. . Έστω ευθεία (ε) που **διέρχεται από δύο δοσμένα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ με $\overrightarrow{M_1M_2} \neq \vec{0}$.**
Από την (4) και λύνοντας ώς προς t έχουμε την αναλυτική εξίσωση :

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (6)}$$

Πίνακας Εξισώσεων Ευθείας

	Διανυσματική	**Παραμετρική**	**Αναλυτική**
Ευθεία παράλληλη σε δοσμένο διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha,\beta) \neq \vec{0}$ και διέρχεται από δοσμένο σημείο $M_0(x_0,y_0)$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u}$	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$	$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{\beta}$ Για α=0 $x=x_0$ Για β=0 $y=y_0$
Ευθεία διέρχεται από δύο δοσμένα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ με $\overrightarrow{M_1M_2} \neq \vec{0}$	$\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1})$	$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1) \end{cases}$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

4. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

Κάθε εξίσωση της μορφής :

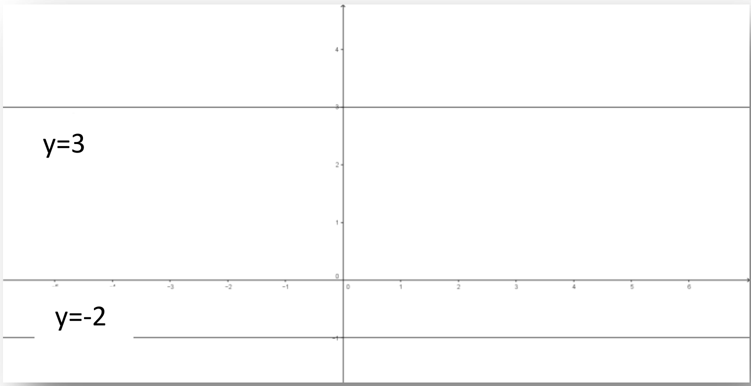
$$\boldsymbol{Ax + By + \Gamma = 0 \quad \mu\varepsilon\ A \neq 0} \text{ ή } \boldsymbol{B \neq 0}$$

Παριστάνει μια ευθεία (ε) στο επίπεδο και ονομάζεται Γενική Μορφή εξίσωσης ευθείας.
Η ευθεία αυτή έχει :

1. Ένα **Παράλληλο Διάνυσμα** που συμβολίζομε με $\vec{u}$ και είναι ίσο με
$$\vec{u} = (B, -A)$$
2. Ένα **Κάθετο Διάνυσμα** που συμβολίζομε με $\vec{\eta}$ και είναι ίσο με
$$\vec{\eta} = (A, B)$$

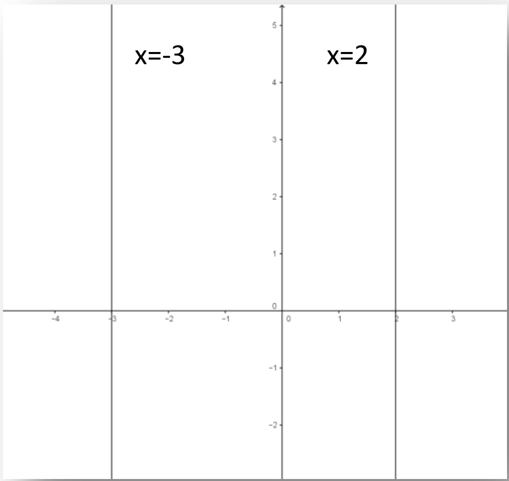
Ειδικές Περιπτώσεις ευθειών Αx+Βy+Γ=0

1. Αν Α=0 (Β≠0) τότε η ευθεία είναι της μορφής $By + \Gamma = 0 \ \Leftrightarrow y = -\frac{\Gamma}{B}$ ή γενικότερα **y=κ**.



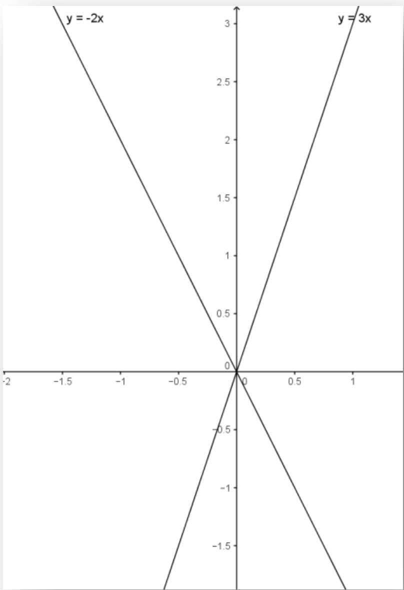
Η ευθεία αυτή είναι πάραλληλη με τον άξονα χ΄χ και διέρχεται από το σημείο Μ(0,κ).

2. Αν Β=0 (Α≠0) τότε η ευθεία είναι $Ax + \Gamma = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$ ή γενικότερα **x=k.**



Η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον y'y και διέρχεται από το Μ(κ,0).

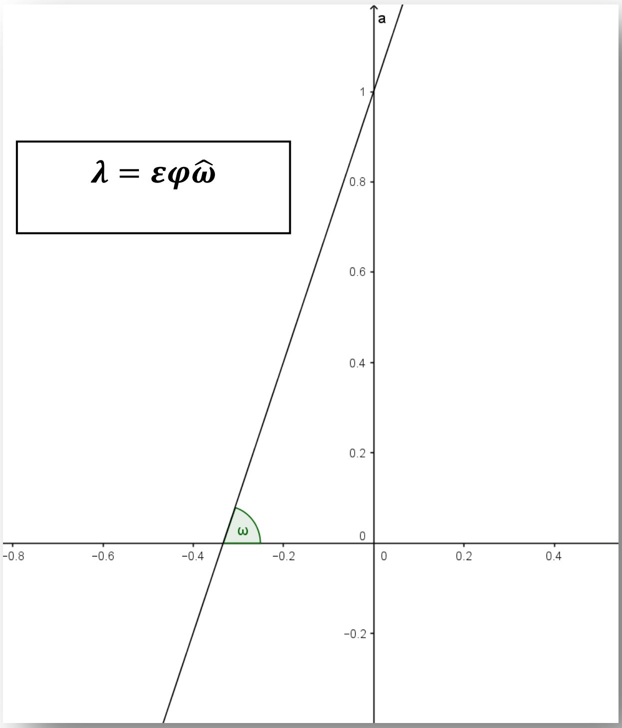
3. Αν Γ=0 τότε η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)



<u>4.3 Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας</u>

Ορισμός

Συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας (ε) συμβολίζομε με λ, ονομάζουμε την εφαπτομένη της γωνίας $\widehat{\omega}$ $(0^0 \leq \widehat{\omega} < 180^0$ που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα Οχ. Δηλαδή $\boldsymbol{\lambda = \varepsilon\varphi\widehat{\omega}}$.



Αν $\widehat{\omega} = \frac{\pi}{2} = 90^0$ τότε λ=εφ90^0=δεν ορίζεται, και η ευθεία είναι παράλληλη με τον y'y δηλαδή έχει τύπο x=k.

Αν $\widehat{\omega} = 0^0$ τότε λ=εφ0^0=0, και η ευθεία είναι παράλληλη με τον x'x δηλαδή έχει τύπο x=k.

Τρόποι εύρεσης συντελεστή διεύθυνσης

1. Αν μας δίνεται η γωνία $\widehat{\omega}$ τότε $\boldsymbol{\lambda = \varepsilon\varphi\widehat{\omega}}$.
2. Αν μας δίνονται δύο σημεία της ευθείας Α(x_1,y_1) και Β(x_2,y_2) τότε :

$$\boldsymbol{\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \mu\varepsilon\ x_1 \neq x_2}$$

Αν $x_1 = x_2$ τότε λ_{AB}=δεν ορίζεται

3. Αν μας δίνεται ο συντελεστής μιας παράλληλης ευθείας ε_2 τότε :

$$\boldsymbol{\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$$

4. Αν μας δίνεται ο συντελεστής μιας κάθετης ευθείας ε_2 τότε :

$$\boldsymbol{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \quad \alpha\nu\ \lambda_1, \lambda_2 \neq 0\ \kappa\alpha\iota\ o\rho\acute{\iota}\zeta o\nu\tau\alpha\iota.}$$

Αν $\boldsymbol{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2\ \kappa\alpha\iota\ \lambda_1 = 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lambda_2 = \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota}$

5. Αν Αx+Βy+Γ=0 η γενική εξίσωση μιας ευθείας ε τότε

$$\boldsymbol{\text{Αν}\ B \neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B}}$$

$$\boldsymbol{A\nu\ B = 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lambda_\varepsilon = \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota}$$

Εξίσωση ευθείας με γνωστό Συντ. Διευθυνσης λ και ένα σημείο Μ(x_0,y_0)

$$\boldsymbol{y - y_0 = \lambda(x - x_0)} \ \ \mu\varepsilon\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{x = x_0} \ \ \alpha\nu\ \lambda = \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota.$$

Πχ.

12.15.6 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x+4y-11=0$ και $2x-3y+21=0$ και είναι:
α) Παράλληλη προς την ευθεία $x+2y+1=0$.
β) Κάθετη προς την ευθεία $3x-y+5=0$.
γ) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
δ) Παράλληλη στον άξονα $x'x$.
ε) Παράλληλη στον άξονα $y'y$.

Για να προδιορίσουμε το σημείο τομής δύο ευθειών λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases}3x+4y-11=0\\2x-3y+21=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}-2\cdot\\3\cdot\end{matrix}\begin{cases}3x+4y-11=0\\2x-3y+21=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x-8y+22=0\\6x-9y+33=0\end{cases} \oplus$$

$$-17y+55=0 \Leftrightarrow y=5$$

$$3x+4\cdot 5-11=0 \Leftrightarrow x=-3$$

Αρα οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο Α(-3,5).

α) Αφού η ευθεία (ε_1) είναι παράλληλη στην (η): x+2y+1=0 έχουμε $\lambda_{\varepsilon1}=\lambda_\eta$. Όμως $\lambda_\eta=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}$.

Άρα $\lambda_{\varepsilon1}=-\frac{1}{2}$. Οπότε η εξίσωση της ($\varepsilon_1$) είναι :

$$(\varepsilon_1):y-5=-\frac{1}{2}(x+3)$$

$$2y-10=-x-3 \Leftrightarrow x+2y-7=0$$

β) Αφού η ευθεία (ε_2) είναι κάθετη στη (ζ): 3x-y+5=0, $\lambda_{\varepsilon_2}\cdot\lambda_\zeta=-1$. Όμως $\lambda_\zeta=-\frac{3}{-1}=3$.

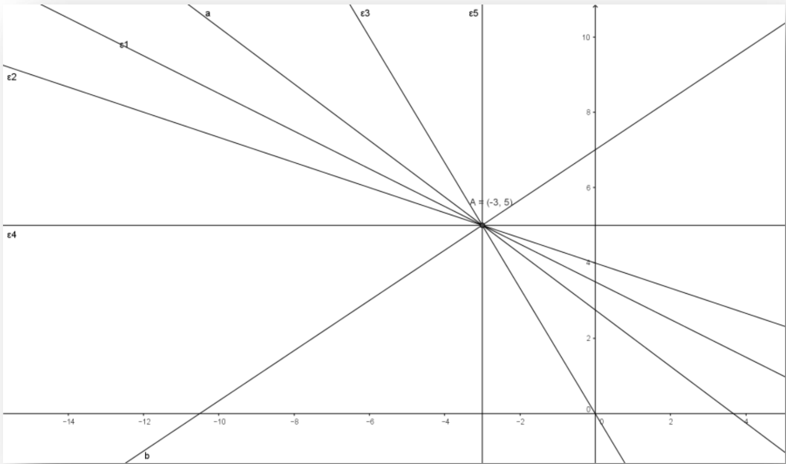
Άρα :

$$\lambda_{\varepsilon_2}\cdot\lambda_\zeta=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2}\cdot 3=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{1}{3}$$

Οπότε η εξίσωση της (ε_2) είναι :

$$(\varepsilon_2):\ y-5=-\frac{1}{3}(x+3)$$

$$3y-15=-x-3 \Leftrightarrow x+3y-12=0$$



γ) Η ευθεία (ε_3) διέρχεται από δύο σημεία Α(-3,5) και Ο(0,0) άρα ο συντελεστής της είναι :

$$\lambda_{\varepsilon_3}=\frac{0-5}{0+3}=-\frac{5}{3}$$

Οπότε η εξίσωση της (ε_3) είναι :

$$(\varepsilon_3):\ y-0=-\frac{5}{3}(x-0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y=-\frac{5}{3}x$$

δ) Η ευθεία (ε_4) είναι παράλληλη στον χ'χ οπότε $\lambda_{\varepsilon3}$=0 και

$$(\varepsilon_3):\ \ y=5$$

ε) Η ευθεία (ε_5) είναι παράλληλη στον γ'γ οπότε $\lambda_{\varepsilon4}$=δεν ορίζεται και

$$(\varepsilon_3):\ \ x=-3$$

12.15.12 Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-1, -5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να βρείτε το συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας ΑΒ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία ΑΒ.

α) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι :

$$x_M = \frac{1-1}{2} = 0\ ,\ y_M = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}, M(0, -\frac{1}{2})$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ΑΒ) είναι :

$$\lambda_{AB} = \frac{-5-4}{-1-1} = \frac{9}{2}$$

γ) Η μεσοκάθετος του ΑΒ διέρχεται απο το μέσο $M(0, -\frac{1}{2})$ και είναι κάθετη στην ΑΒ άρα :

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{9}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{2}{9}$$

Οπότε η εξίσωση της είναι :

$$(\varepsilon): y + \frac{1}{2} = -\frac{2}{9}(x-0) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{9}x - \frac{1}{2}$$

δ) Η ευθεία (η) διέρχεται από το Ο(0,0) και είναι κάθετη στην ΑΒ άρα $\lambda_\eta = -\frac{2}{9}$. Οπότε η εξίσωση της είναι :

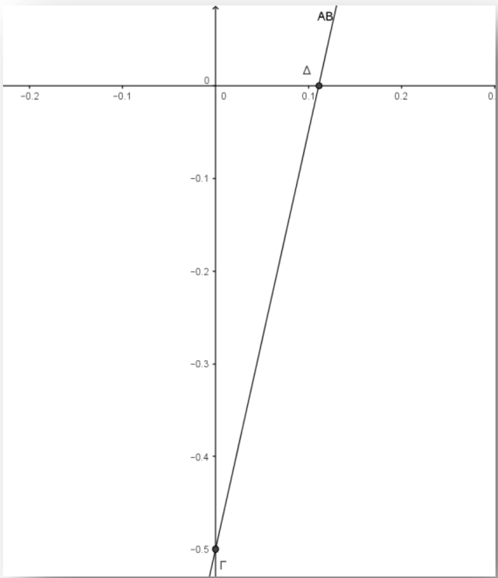
$$(\eta) : y - 0 = -\frac{2}{9}(x-0) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{9}x$$

ε) Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ και τα σημεία τομής με τους άξονες :

$$(AB) : y - 4 = \frac{9}{2}(x-1) \Leftrightarrow 9x - 2y - 1 = 0$$

Για $x = 0 \Leftrightarrow 0 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία τέμνει τον y'y στο Γ$(0, -\frac{1}{2})$

Για $y = 0 \Leftrightarrow 9x - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$. Άρα η ευθεία τέμνει τον x'x στο Δ$(\frac{1}{9}, 0)$



Από το σχήμα το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΓΔ είναι :

$$E = \frac{O\Gamma \cdot O\Delta}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}}{2} = \frac{1}{36}$$

12.15.14 Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1\,(t-1, t+2)$ και $\Pi_2\,(3t, 3t-1)$ για κάθε χρονική στιγμή t $(t>0)$.
α) Να βρείτε τις γραμμές, πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.
β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.
γ) Να βρείτε την απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t=3$.

α) Για το πλοίο Π_1 :

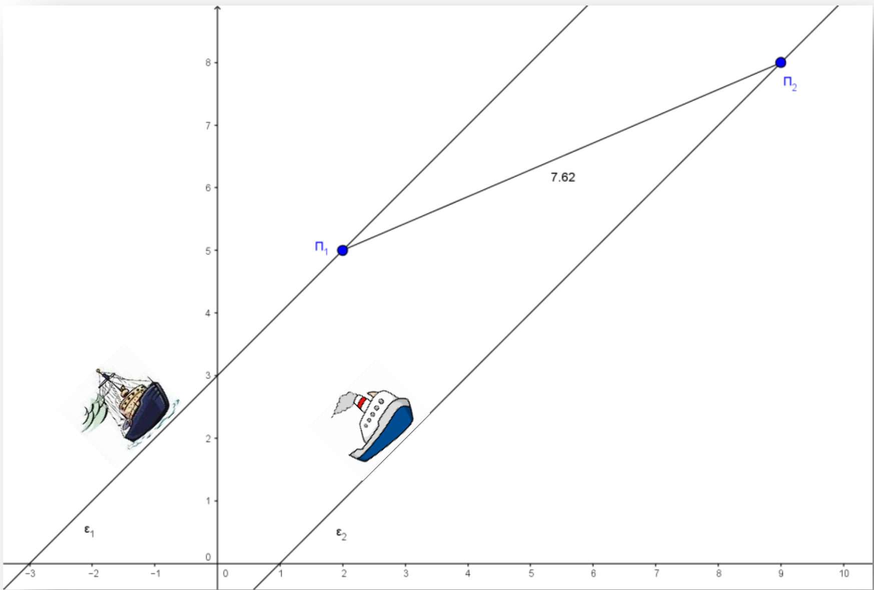
$$\tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta : x = t-1$$
$$\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta : y = t+2$$

Απαλλοίφωντας το t απο τις δυο εξισώσεις έχουμε :

$$\begin{matrix} 1\cdot \\ -1\cdot \end{matrix}\begin{cases} x = t-1 \\ y = t+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t-1 \\ -y = -t-2 \end{cases} \Leftrightarrow x-y=-3 \Leftrightarrow x-y+3=0$$

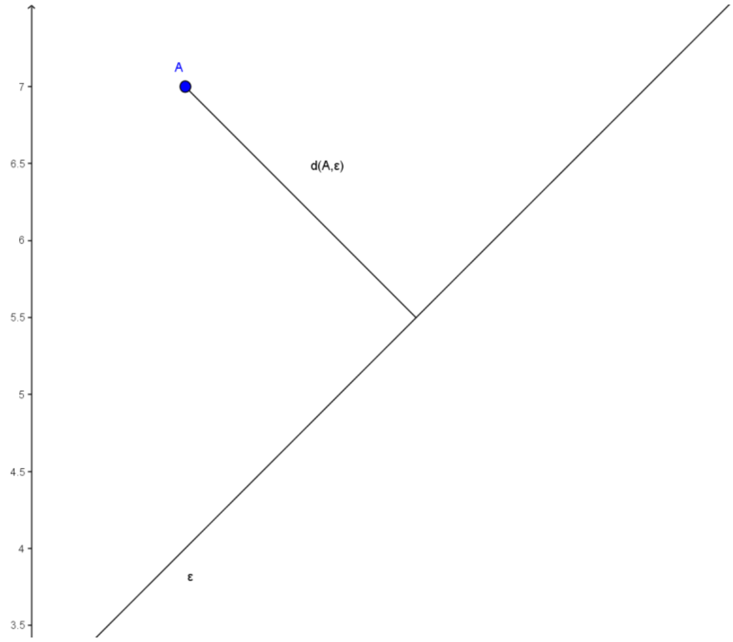
Η πορεία του Π_1 είναι ευθεία ε_1 με τύπο x-y+3=0.
Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για το Π_2 και η πορεία του είναι ευθεία ε_2 με τύπο x-y-1=0 .
β) Για να συναντηθούν τα δύο πλοία πρέπει οι πορείες τους να τέμνονται για την ίδια χρονική στιγμή t. Όμως $\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{-1} = 1 = \lambda_{\varepsilon_2}$ άρα οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και τα πλοία δεν θα συναντηθούν.
γ) Για t=3 $\Pi_1(2,5)$ και $\Pi_2(9,8)$. Η απόσταση μεταξύ τους είναι :

$$\Pi_1\Pi_2 = \sqrt{(9-2)^2+(8-5)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \approx 7{,}62$$



4.4 Απόσταση Σημείου Από ευθεία– Διχοτόμος Γωνίας– Γωνία δύο Ευθειών

1. Απόσταση σημείου $A(x_0,y_0)$ από ευθεία (ε) με τύπο Αx+Βy+Γ=0



$$d(A,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Πχ

12.7.10 Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(1,2)$ από την ευθεία (ε): $4x-3y-5=0$.

Λύση.

Από τη σχέση αποστάσεως σημείου από ευθεία (παράγρ. 12.6 και 12.6.5) έχομε:

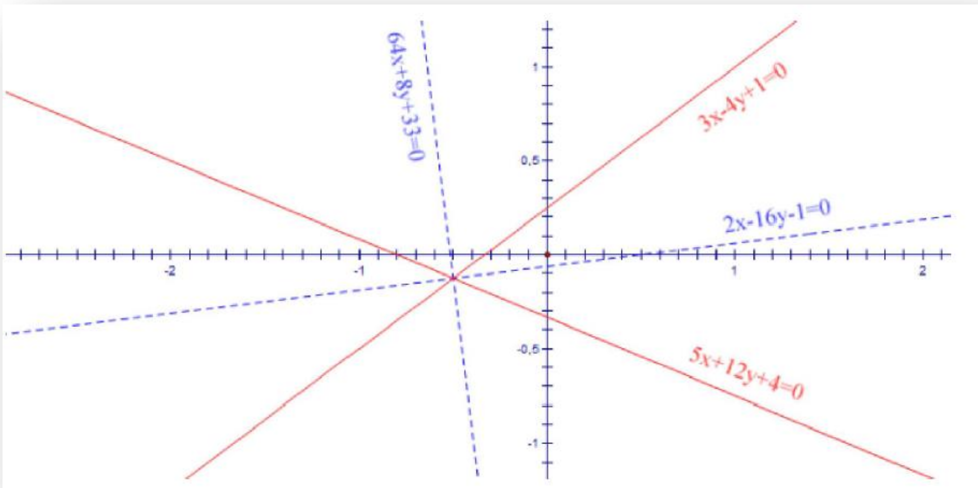
$$d(A,\varepsilon)=\frac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 1+3\cdot 2-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1.$$

2. Διχοτόμος Γωνίας Τεμνόμενων Ευθειών

Πχ. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες :

$$\varepsilon_1: 3x-4y+1=0 \qquad \varepsilon_2: 5x+12y+4=0$$

Έστω Μ(x,y) τυχαίο σημείο της διχοτόμου (δ). Τότε το Μ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας δηλαδή από τις ε_1 και ε_2. Οπότε :



$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)\ \Leftrightarrow\ \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5x+12y+4|}{\sqrt{5^2+12^2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{|3x-4y+1|}{5}=\frac{|5x+12y+4|}{13}\Leftrightarrow 13|3x-4y+1|=5|5x+12y+4|\Leftrightarrow$$

$$13(3x-4y+1)=5(5x+12y+4)\quad ή \quad 13(3x-4y+1)=-5(5x+12y+4)$$

Άρα μετά από πράξεις οι εξισώσεις των διχοτόμων είναι :

$$\delta_1: 2x-16y-1=0 \quad και \quad \delta_2: 64x+8y+33=0$$

3. Γωνία δύο ευθειών

Για να βρούμε τη γωνία δύο ευθειών, βρίσκουμε τα παράλληλα διαντύσματά τους $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ και το συν($\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$)=$\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$.

Πχ. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 *: x - y +1 =0* και ε_2 *: 2x + y -3 =0*.

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\overrightarrow{u_1}=(B,-A)=(1,1)\ \ και\ \ \overrightarrow{u_2}=(B,-A)=(1,-2)$. Επομένως, η γωνία ϑ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας φ των διανυσμάτων $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$. Όμως, είναι:

$$\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})=\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{1\cdot 1-1\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, οπότε θ =$72^0$.

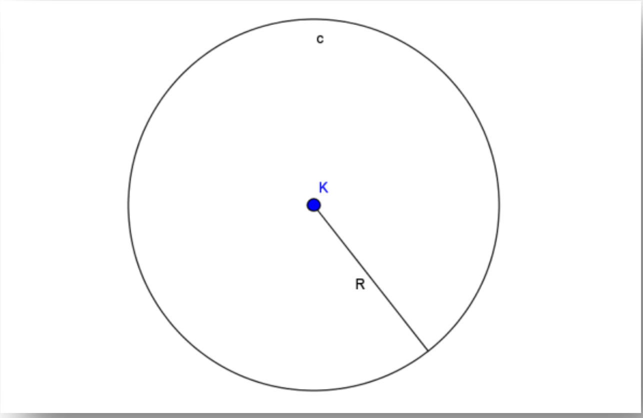
12.15.27 Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων, η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου από το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{R}$.
α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A;
β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι Α, όταν κινείται ευθύγραμμα.
γ) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;

12.15.28 Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων *Oxy*, ένα πλοιάριο ξεκινά από ένα λιμάνι Α και κατευθύνεται στο λιμάνι Ο. Το ραντάρ θέσεως για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοιάριο $(2t-40, t-30)$, $t\geq 0$.
α) Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι Α;
β) Πόσο απέχει το λιμάνι Α από το Ο;
γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοιάριου; Ποια είναι η εξίσωσή της;

4.5 Κύκλος

Ορισμός

Κύκλος ονομάζεται ο **Γεωμετρικός Τόπος** των σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο το **Κέντρο** Κ σταθερή απόσταση ίση με την **Ακτίνα R**.



1. Αναλυτική εξίσωση κύκλου

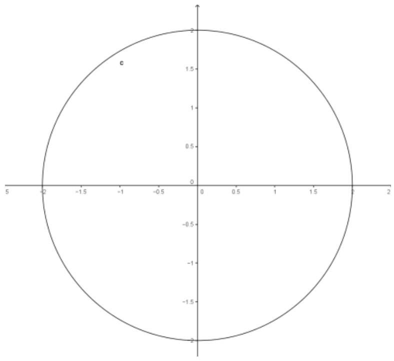
Έστω κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα R. Τότε η αναλυτική εξίσωση του δίνεται από τον τύπο :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

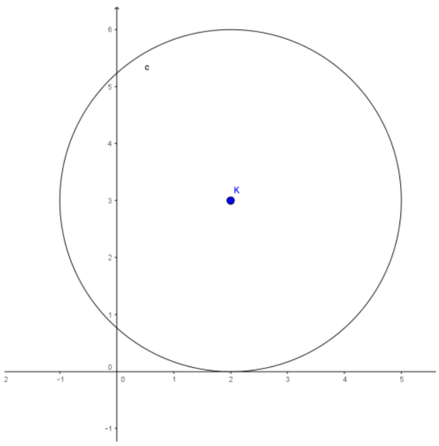
Π.χ

Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα στους παρακάτω κύκλους :

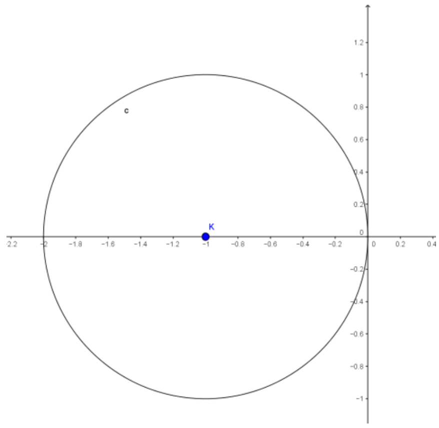
α. $x^2+y^2=4$ Κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα R=2.



β. $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ Κύκλος με κέντρο K(2,3) και ακτίνα R=3



γ. $(x+1)^2+y^2=1$ Κύκλος κέντρου Κ(-1,0) και ακτίνα R=1



2. Γενική εξίσωση Κύκλου

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ και ακτίνα $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Π.χ.

Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

Α=-2, Β=4, Γ=-4

Υπολογίζουμε την παράσταση

$$A^2+B^2-4\Gamma=(-2)^2+4^2-4(-4)=4+16+16=36>0$$

άρα η C παριστάνει κύκλο με κέντρο :

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-2}{2},-\frac{4}{2}\right)=K(1,-2)$$

και ακτίνα :

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+4^2-4(-4)}}{2}=\frac{\sqrt{36}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Οπότε η αναλυτική εξίσωση του C είναι :

$$C:\ (x-1)^2+(y+2)^2=9$$