Σημειώσεις Μαθηματικών – 2

Συναρτήσεις - 2

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

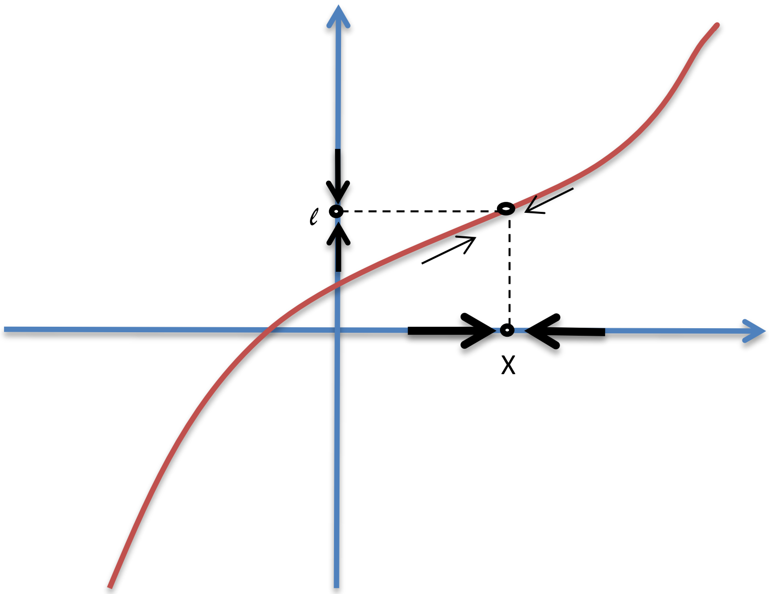
Κεφάλαιο 2 Όρια Συναρτήσεων

2.1 Πεπερασμένο Όριο $x \to x_0$

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f πλησιάζουν σε έναν αριθμό $l \epsilon \mathbb{R}$ καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 τότε λέμε ότι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 είναι το l και συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Σχηματικά έχουμε :



Γενικά ισχύουν τα εξής :

α. Για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου στον αριθμό x_0 πρέπει αυτό να ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ το οποίο να είναι υποσύνολο του D(f). Δηλαδή θα πρέπει να υπάρχουν τιμές του πεδίου ορισμού της f κοντά στο x_0 ώστε να μπορούμε να το προσεγγίσουμε. Το σημείο x_0 δεν ανήκει υποχρεωτικά στο D(f).

β. Όταν προσεγγίζουμε την τιμή x_0 από μικρότερες τιμές δηλαδή $x < x_0$ τότε λέμε ότι βρίσκουμε το **αριστερό όριο στο x_0** ή x_0^- δηλαδή:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Αντίστοιχα αν $x > x_0$ βρίσκουμε το **δεξί όριο στο x_0** ή x_0^+ δηλαδή:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Τα δύο αυτά όρια τα ονομάζουμε **πλευρικά όρια στο x_0** και ισχύει ότι :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \ \alpha\nu \ \kappa\alpha\iota \ \mu o\nu o \ \alpha\nu \ \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Αυτό σημαίνει ότι αν τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα τότε το όριο της f όταν x→ x_0 **δεν υπάρχει.**

Ιδιότητες ορίων

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = l$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0 \ \ \tau ό\tau\varepsilon \ f(x) > 0 \ \kappa o\nu\tau ά \ \sigma\tau o \ x_0$
4. $A\nu \ f(x) \leq g(x) \ \kappa o\nu\tau ά \ \sigma\tau o \ x_0 \ \kappa\alpha\iota \ \upsilon\pi ά\rho\chi o\upsilon\nu \ \tau\alpha \ o\rho\iota ά \ \tau o\upsilon\varsigma \ \sigma\tau o \ x_0 \ \tau ό\tau\varepsilon$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Όρια και πράξεις

Έστω δύο συναρτήσεις f, g για τις οποίες **υπάρχουν τα όρια στο x_0** με

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \ \ \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

Τότε ισχύουν τα παρκάτω :

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \pm l_2$
2. $\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot l_1$
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$
4. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} \ \ \alpha\nu \ \ l_2 \neq 0$
5. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right| = |l_1|$
6. $\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n = l_1^n$
7. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{l_1} \ \ \mu\varepsilon \ l_1 \geq 0$

Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω f, g, h τρείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, και

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Τότε :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Υπολογισμός Ορίων.

Α. Με αντικατάσταση

Η εύρεση ενός ορίου επιτυγχάνεται πολλές φορές αντικαθιστώντας το x με x_0 αλλά και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων. Αυτό συμβαίνει μονο όταν αντικαθιστώντας δεν οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή.

Πχ.

$$\lim_{x \to 1}(x^3 + 1) = 1^3 + 1 = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 5}{x^2 + 1} = \frac{1^5 - 5}{1^2 + 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} + x - 2}{x^2 - 2x + 2} = \frac{\sqrt{3^2 + 7} + 3 - 2}{3^2 - 2 \cdot 3 + 2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu^2 x + 1}{x^2 + 1} = \frac{\eta\mu^2 0 + 1}{0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Β. Απροσδιόριστη Μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$

Όταν κατά την αντικατάσταση βρεθούμε σε μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ τότε πρέπει να άρουμε την απροσδιοριστία. Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις :

1η Περίπτωση (Ρητή)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Σε αυτή τη περίπτωση παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή, απλοποιούμε τον κοινό παράγοντά τους και στη συνέχεια αντικαθιστούμε :
Πχ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

2η Περίπτωση (Άρρητη)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}}{\sqrt{T(x)}\pm\sqrt{S(x)}}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την συζηγή παράσταση του αριθμητή ή του παρονομαστή ή και των δύο δηλάδη :

Παράσταση	Συζηγής	Αποτέλεσμα γινομένου
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$\alpha-\beta$
$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\alpha-\beta$
$\sqrt{\alpha}+\beta$	$\sqrt{\alpha}-\beta$	$\alpha-\beta^2$
$\sqrt{\alpha}-\beta$	$\sqrt{\alpha}+\beta$	$\alpha-\beta^2$
$\alpha+\sqrt{\beta}$	$\alpha-\sqrt{\beta}$	$\alpha^2-\beta$
$\alpha-\sqrt{\beta}$	$\alpha+\sqrt{\beta}$	$\alpha^2-\beta$

Στη συνέχεια παραγοντοποιούμε , απλοποιούμε και τέλος αντικαθιστούμε.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x^2-1)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{(1+1)(1+1)}$$
$$=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{x^2+12}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(2x-\sqrt{x^2+12}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}{(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-\sqrt{x^2+12}^2}{(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-(x^2+12)}{(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-x^2-12}{(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x^2-4)}{(x-2)\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+2)}{\left(2x+\sqrt{x^2+12}\right)}=\frac{3\cdot 4}{4+4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

3η Περίπτωση (Τριγωνομετρικά)

Με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής αποδεικνύεται ότι :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την ιδιότητα : $|\eta\mu x|\leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x|\leq 1$ και εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής μπορούμε να βρούμε όρια όπως :

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x^3}\right)$$

Γνωρίζουμε ότι $\left|\eta\mu\frac{1}{x^3}\right|\leq 1 \Rightarrow \left|x^2\eta\mu\frac{1}{x^3}\right|\leq |x^2|\cdot 1 \Rightarrow \left|x^2\eta\mu\frac{1}{x^3}\right|\leq |x^2|=x^2$ άρα

$$\overbrace{-x^2}^{h(x)}\leq \overbrace{x^2\eta\mu\frac{1}{x^3}}^{f(x)}\leq \overbrace{x^2}^{g(x)}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}(-x^2)=0=\lim_{x\to 0}x^2$$

Άρα απο Κριτ. Παρεμβολής:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x^3}\right)=0$$

Γ. Συναρτήσεις με πολλαπλό τύπο.

Έστω ότι θέλουμε το όριο μιας συνάρτησης με πολλαπλό τύπο για $x\to x_0$. Τότε

Α. Αν η f έχει τον ίδιο τύπο κοντά στο x_0 βρίσκουμε το όριο με τον τύπο αυτό.

Β. Αν η f αλλάζει τύπο στο x_0 τότε βρίσκουμε τα πλευρικά όρια. Αν αυτά είναι ίσα τότε αυτό είναι το όριο της συνάρτησης, αν είναι άνισα τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο στο x_0.

Πχ.1

Στην συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 \quad , & x\le 0 \\ \dfrac{x^2-x}{x} \quad , & 0<x\le 2 \\ \sqrt{x^2+5} \quad , & x>2 \end{cases}$$

Να βρείτε τα όρια :

$$a.\ \lim_{x\to -1} f(x) \qquad \beta.\ \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\gamma.\ \lim_{x\to 2} f(x) \qquad \delta.\ \lim_{x\to 3} f(x)$$

α. Για την πρώτη περίπτωση αφού $x\to -1$ και η f έχει τον ίδιο τύπο κοντά στο -1 έχουμε :

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x^2-1) = (-1)^2-1 = 1-1 = 0$$

β. Στην δεύτερη περίπτωση το $x\to 0$ και η f αλλάζει τύπο κοντα στο 0 άρα θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια :

$$\textit{Για } x<0 \textit{ έχουμε} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-1) = 0-1 = -1$$

$$\textit{Για } x>0 \textit{ έχουμε} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+}(x-1) = 0-1$$
$$= -1$$

Ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

γ. Στην Τρίτη περίπτωση το $x\to 2$ και η f αλλάζει τύπο κοντα στο 2 άρα θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια :

$$\textit{Για } x<2 \textit{ έχουμε} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x} = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$\textit{Για } x>2 \textit{ έχουμε} \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\sqrt{x^2+5} = \sqrt{2^2+5} = \sqrt{9} = 3$$

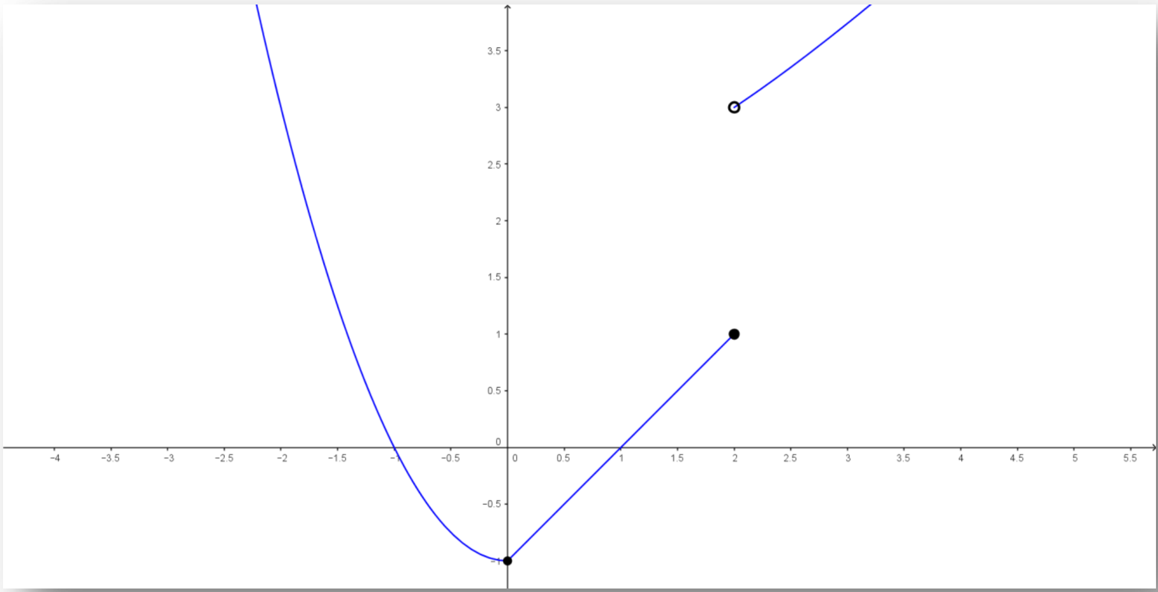
Ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad \acute{\alpha}\boldsymbol{\rho\alpha} \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 2} f(x)\ \delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi}\acute{\alpha}\boldsymbol{\rho\chi\varepsilon\iota}$$

δ. Για την τέταρτη περίπτωση αφού $x\to 3$ και η f έχει τον ίδιο τύπο κοντά στο 3 έχουμε :

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+5} = \sqrt{3^2+5} = \sqrt{14}$$

Το παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να το δούμε και γραφικά :



Πχ.2 (Βιβλίο 3.5.5 σελ. 155)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.5.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^3-25, & x<3 \\ x-3a, & x\geq 3. \end{cases}$

α) Να βρείτε το αριστερό πλευρικό όριο της f στο $x_0=3$ είτε

β) να βρείτε το δεξί πλευρικό όριο της f στο $x_0=3$ είτε

γ) να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της f στο $x_0=3$.

Λύση.

α) Για $x<3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^3-25)=3^3-25=2$.

β) Για $x>3$ έχομε $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3a)=3-3a$.

γ) Αφού ζητάμε να υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο $x_0=3$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

δηλαδή, $3-3a=2$ οπότε $a=\frac{1}{3}$.

Ασκήσεις Βιβλίο σελ. 155-158

3.5.1, 3.53, 3.5.5, 3.5.7, 3.5.8, 3.5.9, 3.5.10, 3.5.11, 3.5.12, 3.5.13, 3.5.14

2.2 Όρια στο Άπειρο ($x \to \pm\infty$)

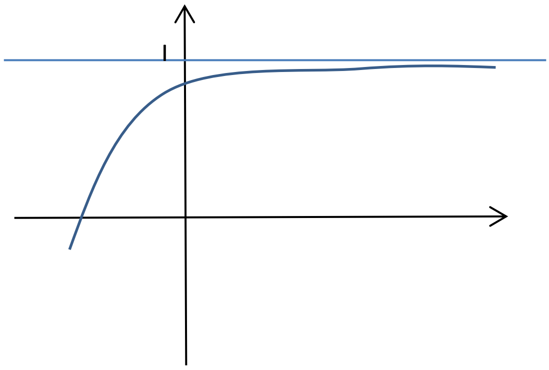
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού της μορφής $(\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \alpha)$. Αντικαθιστώντας πολύ μεγάλες τιμές ή αντίθετα πολύ μικρές, μπορούμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της στο +∞ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα. Τότε λέμε ότι βρίσκουμε το όριο της συνάρτηση στο $+\infty$ ή $-\infty$, και γράφουμε :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Όταν x→ $+\infty$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

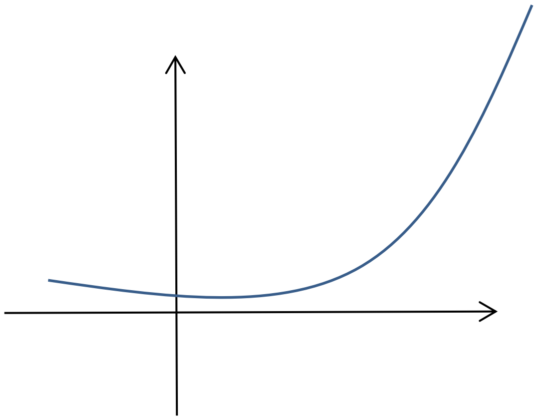
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν στον αριθμό l όσο μεγαλύτερες τιμές αντικαθιστούμε. Στη περίπτωση αυτή η ευθεία y=l είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.



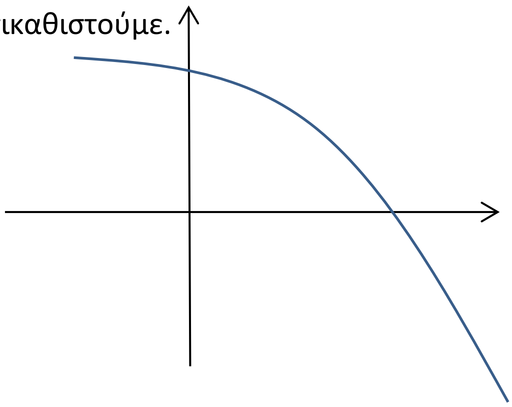
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Οι τιμές της συνάρτησης αυξάνουν όσο μεγαλύτερες τιμές αντικαθιστούμε.



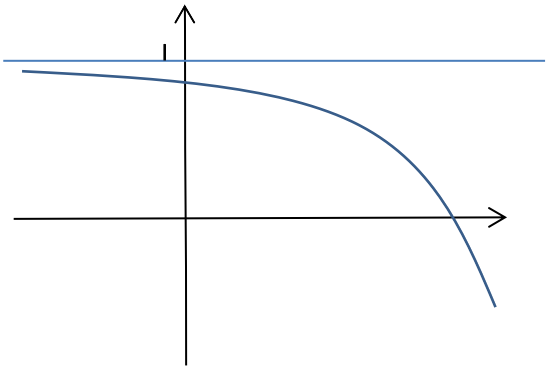
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Οι τιμές της συνάρτησης φθίνουν όσο μεγαλύτερες τιμές αντικαθιστούμε.

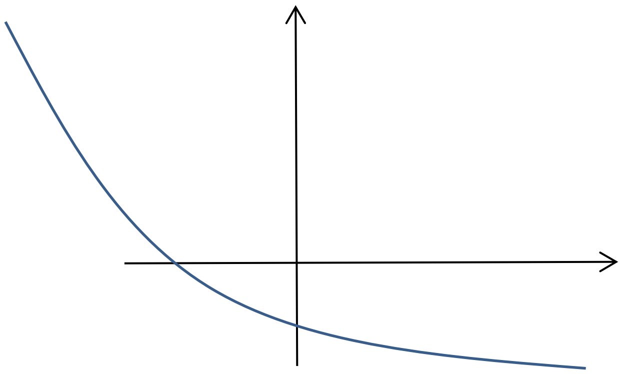


Ομοίως όταν $x \to -\infty$

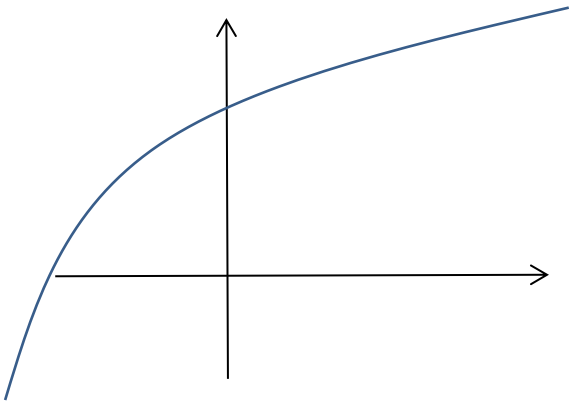
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



Από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων προκύπτει ότι :

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{x^{\nu}} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{x^{\nu}} = \begin{cases} +\infty & \boldsymbol{\alpha\nu\ \nu}\ \text{ά}\boldsymbol{\rho\tau\iota o\varsigma} \\ -\infty & \boldsymbol{\alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau}\text{ός} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x^{\nu}}} = \boldsymbol{0} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x^{\nu}}} = \boldsymbol{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{e^{x}} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{e^{x}} = \boldsymbol{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{lnx} = +\infty$$

Για τον υπολογισμό των άπειρων ορίων χρησιμοποιούμε και τις παρακάτω ιδιότητες :

Όριο της f	Όριο της g	Όριο της $f+g$
ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$
ℓ_1	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	απροσδιόριστο
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$
0	$-\infty$	$-\infty$

Όριο της f	Όριο της g	Όριο της $f\cdot g$
ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1\ell_2$
ℓ_1	$+\infty$	$+\infty$, αν $\ell_1>0$ $-\infty$, αν $\ell_1<0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	απροσδιόριστο
0	$-\infty$	απροσδιόριστο

Όριο Πολυωνυμικής Συνάρτησης στο$\pm\infty$

Το όριο μιας πολυωνύμικής συνάρτησης $f(x) = a_\nu x^\nu + \cdots + a_1 x + \alpha_0$ στο $\pm\infty$ ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της δηλαδή :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_\nu x^\nu + \cdots + a_1 x + \alpha_0) = \lim_{x\to\pm\infty}(a_\nu x^\nu)$$

Πχ.

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3 + 7x - 3) = \lim_{x\to+\infty}(5x^3) = 5\lim_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(5x^3 + 7x - 3) = \lim_{x\to-\infty}(5x^3) = 5\lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

Όριο Ρητής Συνάρτησης στο$\pm\infty$

Τό όριο μιας Ρητής Συνάρτησης $f(x) = \frac{a_\nu x^\nu + \cdots + a_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$ στο $\pm\infty$ ισούται με το όριο των μεγιστοβάθμιων όρων τους δηλαδή:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu + \cdots + a_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \cdots + \beta_1 x + \beta_0} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$$

Πχ.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2 - 4}{x^3 - 4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3 + x - 7}{3x^3 - x + 1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{3} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4 - 1}{x^3 + x + 2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}2x = +\infty$$

Ασκήσεις Βιβλίο σελ 174

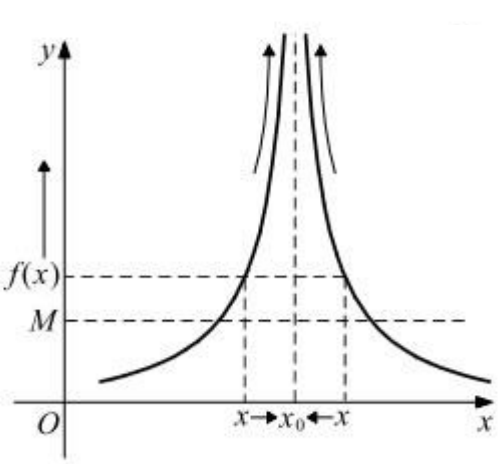
3.6.1, 3.6.2, 3.6.3, 3.6.5

2.3 Μη πεπερασμένοα όρια ($x \to x_0$)

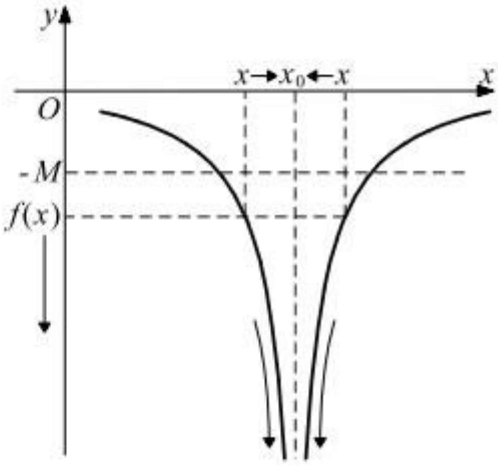
Έστω μια συνάρτηση f για την οποία όταν οι τιμές του x πλησιάζουν στο x_0, οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα ή μειώνονται απεριόριστα. Τότε θα λέμε ότι το όριο της f όταν x τείνει στο x_0 είναι +∞ ή -∞ αντίστοιχα. Δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Σχηματικά έχουμε τις εξής περιπτώσεις :



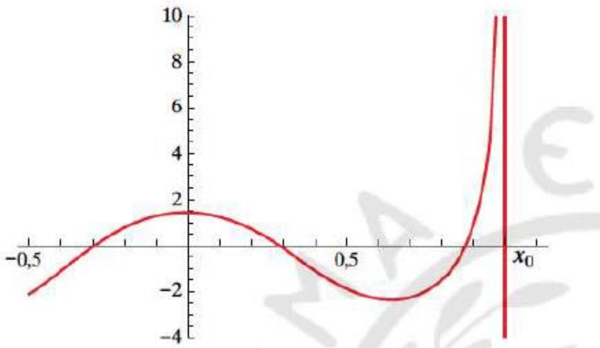
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



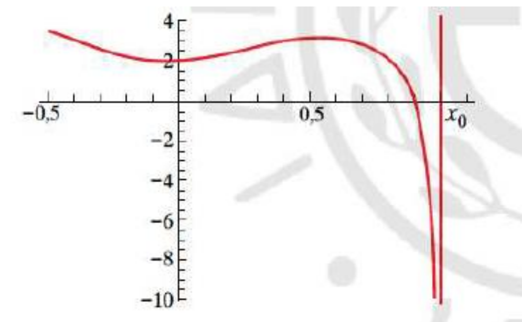
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Στις περιπτώσεις αυτές ισχύουν και τα πλευρικά όρια δηλαδή :

Όταν το x τείνει από αριστερά στο x_0 η συνάρτηση να αυξάνεται ή να μειώνεται απεριόριστα οπότε :

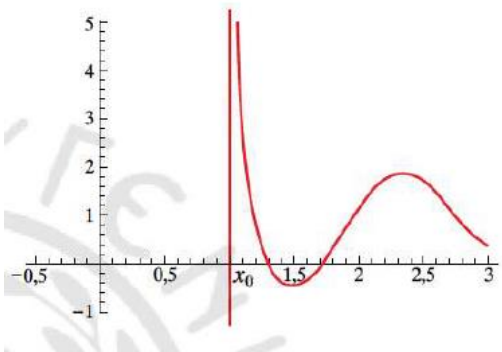


$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

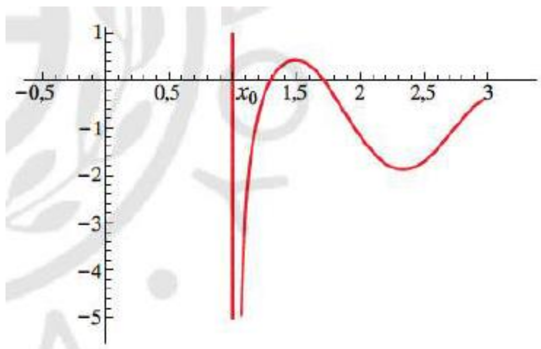


$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

ή αντίστοιχα



$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις θα λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \;\; \alpha\nu\; \kappa\alpha\iota\; \mu o\nu o\; \alpha\nu \;\; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

Και

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \;\; \alpha\nu\; \kappa\alpha\iota\; \mu o\nu o\; \alpha\nu \;\; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Ιδιότητες

1. $A\nu \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \;\; \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; f(x) > 0\; \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\; \sigma\tau o\; x_0$
2. $A\nu \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \;\; \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; f(x) < 0\; \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\; \sigma\tau o\; x_0$
3. $A\nu \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \;\; \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
4. $A\nu \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \;\; \kappa\alpha\iota\; f(x) > 0\; \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\; \sigma\tau o\; x_0\; \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
5. $A\nu \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \;\; \kappa\alpha\iota\; f(x) < 0\; \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\; \sigma\tau o\; x_0\; \tau\acute{o}\tau\varepsilon\; \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Υπολογισμός ορίου $\left(\frac{\alpha}{0}\right)$

Για να υπολογίσουμε τέτοιας μορφής όρια πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο του παρονομαστή κοντα στο x_0 και να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες 4, 5. Αν το πρόσημο αλλάζει πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια

Πχ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}$$

Το όριο είναι της μορφής $\left(\frac{1}{0}\right)$ θα μελετήσουμε το πρόσημο του παρονομαστή :

x	0	
x^4	+	+

Άρα σύμφωνα με την ιδιότητα 4 το όριο είναι :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}$$

Το όριο είναι της μορφής $\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}}\right)$ θα μελετήσουμε το πρόσημο του παρονομαστή :

x	2	
$x-2$	$-$	$+$

Το πρόσημο αλλάζει άρα θα πάρουμε πλευρικά όρια :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=-\infty \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2}=+\infty$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2-2x+1}{x^2-4x+4}$$

Το όριο είναι της μορφής $\left(\frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{0}}\right)$ θα μελετήσουμε το πρόσημο του παρονομαστή :

Η Διακρίνουσα του παρονομαστή είναι Δ=0 άρα έχει μια διπλή ρίζα x_0=2 και διατηρεί σταθερό πρόσημο :

x	2	
$x^2-4x+4=(x-2)^2$	$+$	$+$

Άρα :

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2-2x+1}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\left[(-2x^2-2x+1)\frac{1}{x^2-4x+4}\right]\overset{-11\cdot+\infty}{\cong}-\infty$$

Ασκήσεις (Βιβλίο σελ 175)

3.6.7, 3.6.9, 3.6.10