Σημειώσεις Μαθηματικών – 2

Συναρτήσεις - 4

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

Κεφάλαιο 4 Παράγωγος Συνάρτησης

4.1 Έννοια Παραγώγου

Ορισμός

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη** στο $x_0 \in Df$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή το όριο αυτό ονομάζεται πρώτη παράγωγος (κλίση, ρυθμός μεταβολής) της f στο x_0 και συμβολίζουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Π.χ.(Βιβλίο 4.1.1β, 4.1.2 β)

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f(x)=x^2+2, στο x_0=4.

Θα βρούμε το όριο:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2-18}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=8\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 4 και f'(4)=8.

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f(x)=$\begin{cases}3x-2 & , \quad x\le 1\\ 2x^2 & , \quad x>1\end{cases}$, στο x_0=1

Αφού η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο 1 θα βρούμε τα πλευρικά όρια :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-3}{x-1}=3$$

Το $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ονομάζεται αριστερή παράγωγος της f στο 1 και

συμβολίζουμε f'_{α}(1)=3.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-1}{x-1}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$$

Το δεξί όριο είναι +∞ άρα η δεξιά παράγωγος f'_{δ} δεν υπάρχει οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=1.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ τότε είναι και **συνεχής** σε αυτό.

Απόδειξη

Αφού f παραγωγίσιμη στο x_0 ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Θα υπόλογίσουμε το όριο της f στο x_0

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}\cdot(x-x_0)\right]=f'(x_0)(x_0-x_0)=0$$

$$Άρα\ \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\ \ και\ η\ f\ συνεχής\ στο\ x_0$$

Π.χ. Βιβλίο 4.1.4

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2 & \text{αν} \quad x\leq 1 \\ x+\beta & \text{αν} \quad x>1. \end{cases}$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Αφού f παραγωγίσιμη στο x_0=1 θα είναι και συνεχής στο 1, άρα :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \alpha x^2 = \lim_{x\to 1^+} x+\beta \Rightarrow a = 1+\beta \quad (1)$$

και

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Όποτε :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{a(x-1)(x+1)}{x-1} = 2a$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+\beta-\alpha}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Άρα 2α=1 α=1/2 και β=-1/2.

Έφαπτομένη γραφικής παράστασης

Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0. Η εφαπτομένη της γραφικής της παράσταση στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστη διέυθυνσης λ=$f'(x_0)$, και δίνεται από τον τύπο :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Π.χ. Βιβλίο 4.1.3

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=3x+2x^2$.

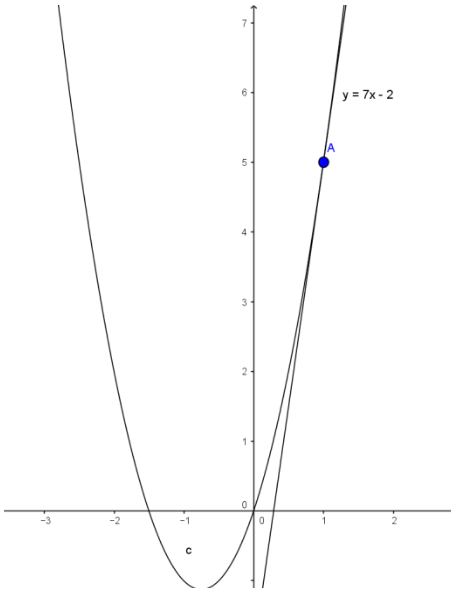
α) Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 \in \mathbf{R}$.

β) Να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=1$ και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,5)$.

α)

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+2x^2-5}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+\frac{5}{2})}{x-1} = 2\cdot\frac{7}{2} = 7$$

Άρα η κλίση της f στο 1 είναι λ=f'(1)=7.



β) Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι :

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y-5 = 7(x-1) \Leftrightarrow$$
$$y = 7x-2$$

4.2 Παράγωγος Συνάρτηση Κανόνες Παραγώγισης

Ορισμός

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάθε x∈Δ. Η συνάρτησηf' : x⟶ f'(x) για κάθε x∈Δ ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f.

Η πρώτη παράγωγος της παραγώγου συνάρτησης f' ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται f''. Επαγωγικά ορίζεται η ν-ιοστη παράγωγος που συμβολίζεται $f^{(\nu)}$.

Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

1. (c)'=0

Απόδειξη

Θέτουμε f(x)=c τότε :

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

2. (x)'=1

Απόδειξη

Θέτουμε f(x)=x τότε :

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

3. $(x^{\nu})'=\nu\cdot x^{\nu-1}$

4. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

5. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Απόδειξη

Θέτουμε $f(x)=\sqrt{x}$ τότε :

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

6. (ημx)'=συνx 7. (συνx)'=-ημx 8. $(e^x)'=e^x$ 9. $(lnx)'=\frac{1}{x}$

Κανόνες Παραγώγισης

Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε :

1. Παράγωγος Αθροίσματος

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

2. Παράγωγος Γινομένου

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

3. Παράγωγος Πηλίκου

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}\quad ,\ g(x)\neq 0$$

4. Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης (Κανόνας Αλυσίδας)

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Πίνακας 4.2.3
Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων.

f		f'	
$(g(x))^{\nu}$	$\varepsilon\varphi\,(g(x))$	$\nu(g(x))^{\nu-1}\cdot g'(x)$	$\dfrac{g'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(g(x))}$
$\sqrt{g(x)}$, με $g(x)>0$	$\sigma\varphi(g(x))$	$\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$-\dfrac{g'(x)}{\eta\mu^2(g(x))}$
$\eta\mu(g(x))$	$e^{g(x)}$	$\sigma\upsilon\nu(g(x))g'(x)$	$e^{g(x)}\cdot g'(x)$
$\sigma\upsilon\nu(g(x))$	$\ln(g(x))$, με $g(x)>0$	$-\eta\mu(g(x))g'(x)$	$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Π.χ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.2.4.

Να βρείτε τις παραγώγους των εξής συναρτήσεων:

α) $h(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^4$ β) $h(x)=e^{-x^3+2x}$ γ) $h(x)=\ln(x^4+2x^2+2)$

Λύση.

α) Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x)=x^4 \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι έχομε, $h(x)=[g(x)]^4=f(g(x))$ και χρησιμοποιώντας τον πρώτο τύπο του πίνακα 4.2.3 παίρνομε $h'(x)=4(g(x))^3\cdot g'(x)$.

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)'(x+3)-(x^2-4)(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{2x(x+3)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}.$$

β) Έχομε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(1+\sqrt{x})-e^x(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{e^x(1+\sqrt{x})-e^x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=e^x\,\frac{2\sqrt{x}+2x-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

γ) Έχομε διαδοχικά:

$$g'(x)=(\sqrt{x}\,\eta\mu x)'+\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=(\sqrt{x})'\eta\mu x+\sqrt{x}(\eta\mu x)'+\frac{(\ln x)'(x-1)-(x-1)'\ln x}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x+\sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu x+\frac{\dfrac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{\eta\mu x+2x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x}}+\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

Με τον κανόνα του πηλίκου εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,, (\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

Π.χ. Βιβλίο 4.2.11

Αφού η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία π/4 με τον άξονα τότε :

$$\lambda = f'(x_0) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$$

Όμως $f'(x) = (-2x + x^3)' = -2 + 3x^2$ οπότε

$$-2 + 3x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

Άρα οι εφαπτόμενες είναι δύο στα σημεία A(1,f(1))=A(1,-1) και B(-1,f(-1))=B(-1,1)

$$\varepsilon_1 : y + 1 = 1(x - 1)$$
$$\varepsilon_2 : y - 1 = 1(x + 1)$$

Ασκήσεις

4.2.1 – 4.2.7 – 4.2.9 – 4.2.14 – 4.2.17 – 4.2.18 – 4.2.20 .

4.3 Θεώρημα Μέσης Τιμής Εφαρμογές

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

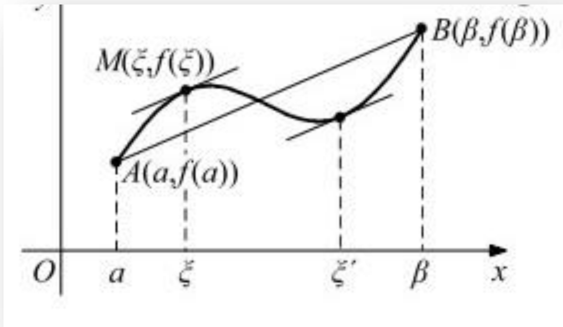
Έστω f μια συνάρτηση τέτοια ώστε :

α. f συνεχής στο [α,β]

β. f παραγωγίσιμη στο (α,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$



Θεώρημα Rolle

Έστω f μια συνάρτηση τέτοια ώστε :

α. f συνεχής στο [α,β]

β. f παραγωγίσιμη στο (α,β)

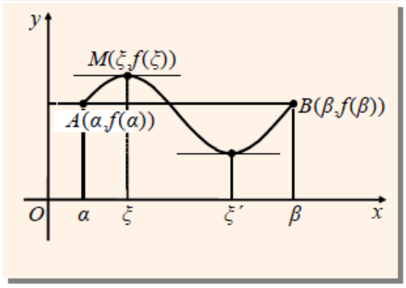
γ. f(α)=f(β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = 0$$

Η απόδειξη του θεωρήματος Rolle είναι προφανής εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ αφού f(α)=f(β).

Γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Θεώρημα Σταθερής Συνάρτησης

Έστω f συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο Δ. Αν f'(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι σταθερή δηλαδή f(x)=c για κάθε x στο Δ.

Θεώρημα

Έστω δύο συναρτήσεις f,g συνεχείς στο Δ και ισχύει f'(x)=g'(x). Τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε f(x)=g(x)+c.

Απόδειξη

Θέτω h(x)=f(x)-g(x). Η h είναι συνεχής στο Δ ώς διαφορά συνεχών και

$$h'(x) = \big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x) = 0$$

Από το θεώρημα της σταθερής

$$h(x) = c \Leftrightarrow f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$$

Μονοτονία Συνάρτησης – Ακρότατα

1. Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και f'(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι Γνησίως Αύξουσα στο Δ.
2. Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και f'(x)<0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι Γνησίως Φθίνουσα στο Δ.

Π.χ.

1. Να βρείτε τη μονοτονία της $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 1$

Η f έχει $D_f=\mathbb{R}$. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

Θα βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο της f'

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 4$$

Ο πίνακας μονοτονίας είναι :

	-∞		2		4		+∞
f'		+	O	−	O	+	
f		↗		↘		↗	

Άρα η f είναι Γνησίως Αύξουσα στα διαστήματα (-∞,2] και [4,+∞) και Γνησίως Φθίνουσα στο [2,4].

2. Να βρείτε το Σύνολο Τιμών της $f(x) = e^x + 2x^5 - 2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώς πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = (e^x + 2x^5 - 2)' = e^x + 10x^4$$

Η f'(x)>0 για κάθε x στο $\mathbb{R}$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών το Σύνολο τιμών της f είναι :

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left(\lim_{x\to-\infty}(e^x + 2x^5 - 2), \lim_{x\to+\infty}(e^x + 2x^5 - 2)\right)$$
$$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Ασκήσεις

4.3.10 - 4.3.11

Ορισμός

Ένα σημείο $x_0 \in D_f$ μιας συνάρτησης f λέγεται **Τοπικό Μέγιστο (Τοπικό Ελάχιστο)** όταν $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Τα Τοπικά Μέγιστα και τα Τοπικά Ελάχιστα μιας συνάρτησης ονομάζονται **Τοπικά Ακρότατα.**

Θεώρημα Fermat

Αν η f παρουσιάζει Τοπικό Ακρότατο στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε

$$f'(x_0) = 0.$$

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής τότε **πιθανές θέσεις Τοπικών Ακροτάτων** είναι :

1. Τα άκρα κλειστού Διαστήματος [α,β] στο οποίο ορίζεται η f.
2. Τα σημεία που η f δεν είναι παραγωγίσιμη.
3. Τα σημεία στα οποία $f'(x_0) = 0$.

Στην περίπτωση 1 αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β] τότε το f(α) Ελάχιστο και το f(β) Μέγιστο και αντίστροφα αν f γνησίως φθίνουσα.

Στις περιπτώσεις 2,3 πρέπει :

x_0		x_0	
↗	↘	↘	↗
Τοπικό Μέγιστο		Τοπικό Ελάχιστο	

Π.χ.

Να μελετηθεί ώς προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Το Πεδίο Ορισμού είναι $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

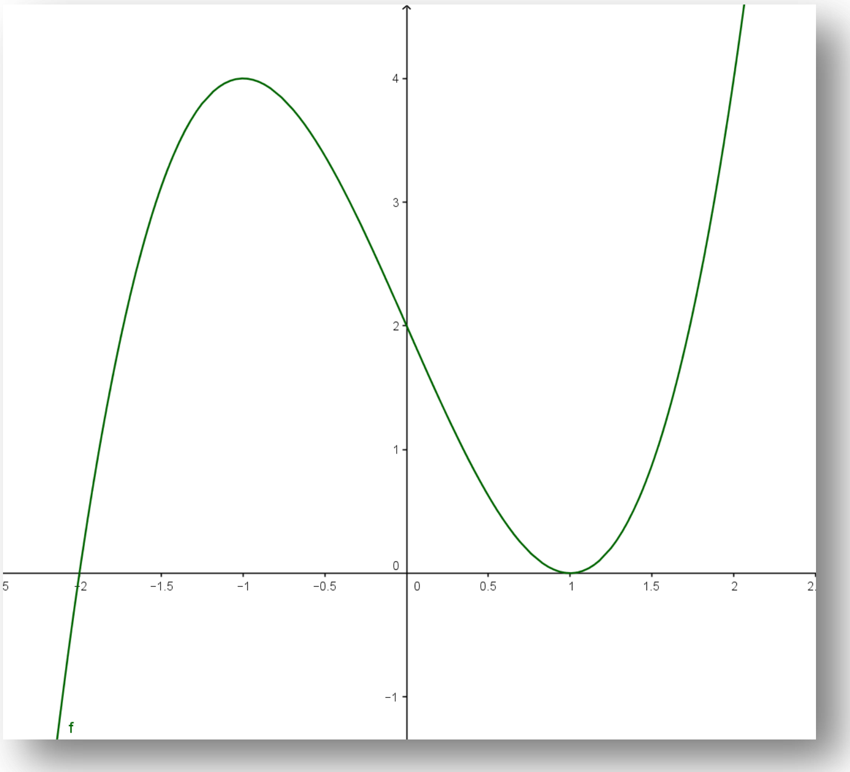
$$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$$

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της f' και κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

	-∞		-1		1		+∞
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	
			TM f(-1)=4		**TE f(1)=0**		

Η γραφική παράσταση της f είναι :



Π.χ.

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{lnx - 1}{x}$$

Πεδίο Ορισμού D_f=(0,+∞).

$$f'(x) = \left(\frac{lnx - 1}{x}\right)' = \frac{(lnx - 1)'x - (lnx - 1)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - lnx + 1}{x^2} = \frac{1 - lnx + 1}{x^2}$$
$$= \frac{2 - lnx}{x^2}$$

Αφού $x^2 \geq 0$ και $2 - lnx = 0 \Leftrightarrow lnx = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ ο πίνακας μονοτονίας είναι

	0	e^2	+∞
f’	+	0	–
f	↗		↘
		TM $f(e^2)=1/e^2$	

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ. Θα λέμε ότι η f είναι **κυρτή** στο Δ (**κοίλη** στο Δ) αν η f’ είναι Γνησίως Αυξουσα στο Δ (Γνησίως Φθίνουσα στο Δ)

Ορισμός

Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε διάστημα (α,β) εκτός ίσως του $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Θα λέμε ότι το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι **Σημείο Καμπής** αν

1. Η C_f έχει εφαπτομένη στο Α
2. Η f κοίλη στο (α,x_0) και κυρτή στο (x_0,β) ή αντίστροφα.

Θεώρημα

Αν το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f και η f τότε ή $f''(x_0)=0$ ή δέν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.2.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2-48x+100$.

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το **R** με:

$$f'(x)=3x^2-18x-48 \quad \text{και} \quad f''(x)=6x-18.$$

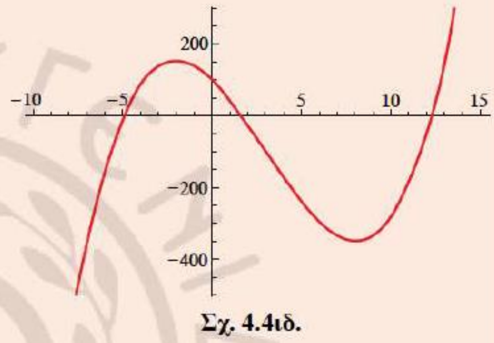
Επίσης έχομε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x-48=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=8$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Leftrightarrow x=3$.

Το πρόσημο της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου, η μονοτονία της συναρτήσεως και το είδος της (κυρτή/κοίλη) παρουσιάζονται στον πίνακα 4.4.4 μεταβολών της f.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ την τιμή $f(-2)=152$ και τοπικό ελάχιστο για $x=8$ την τιμή $f(8)=-348$. Τέλος η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $\Gamma(3, f(3))$, δηλαδή το $\Gamma(3, -98)$. Στο σχήμα 4.4ιδ δίνεται η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f.

Πίνακας 4.4.4

x	$-\infty$		-2		3		8		$+\infty$
f'		+	0		−		0	+	
f''			−		0		+		
f			$\frown$				$\smile$		
			τοπικό μέγιστο		σημείο καμπής		τοπικό ελάχιστο		



Σχ. 4.4ιδ.

Π.χ.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=xe^{-x}$ ως προς τη Μονοτονία τα Ακρότατα την Κυρτότητα και τα σημεία καμπής

$D_f=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=(xe^{-x})'=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$

Αφού $e^{-x}>0$ έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Ο πίνακας μονοτονίας είναι :

	-∞	1	+∞
f’	+	0	–
f	$\nearrow$		$\searrow$
		ΤΜ f(1)=1/e	

$$f''(x) = \left(e^{-x}(1-x)\right)' = (1-x)'e^{-x} + (1-x)(e^{-x})' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(x-2)$$

Αφού $e^{-x}>0$

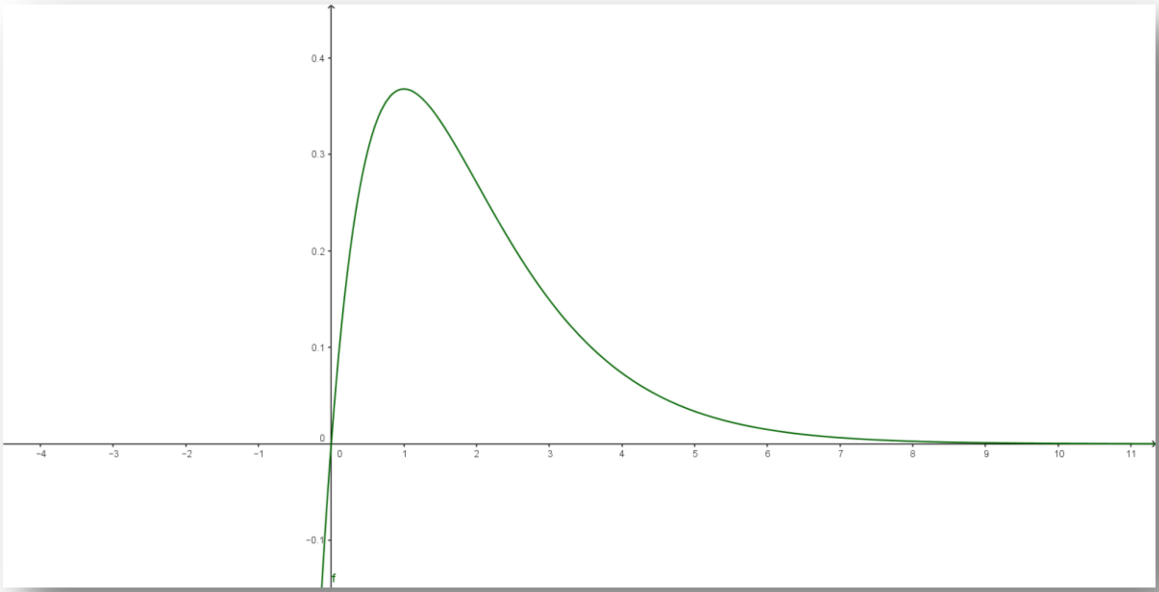
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Ο πίνακας κυρτότητας είναι

	-∞	2	+∞
f’	–	0	+
f			
		ΣΚ f(2)=2/e^2	

Συνολικά ο πίνακας Μεταβολών είναι

	-∞	1		2	+∞
f’	+	0	–		–
f’’	–		–	0	+
f					
		ΤΜ f(1)=1/e		ΣΚ f(2)=2/e^2	



Ασκήσεις

4.4.1 – 4.4.2 - 4.412 – 4.4.14