Σημειώσεις Μαθηματικών – 3

Εφαρμογές Στη Ναυτιλία

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

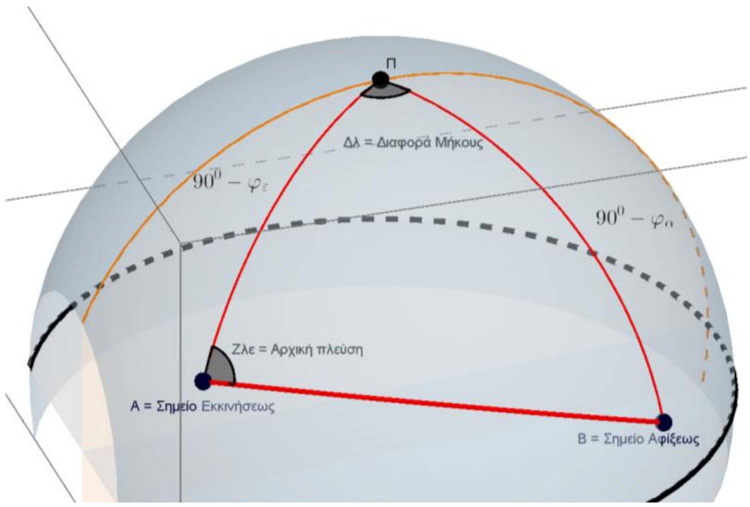
Κεφάλαιο 2 Εφαρμογές στη Ναυτιλία

2.1 Τρίγωνο Ορθοδρομίας

Μια πρώτη και σημαντική εφαρμογή της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία είναι το Τρίγωνο Ορθοδρομίας.

Ορισμός

Τρίγωνο Ορθοδρομίας ή Γήινο Τρίγωνο είναι το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης με Α το σημείο εκκινήσεως ενός Πλοίου, Β το σημείο αφίξεως και Π τον πόλο της γης που βρίσκεται στο ίδιο ημισφαίριο με το σημείο εκκινήσεως Α.



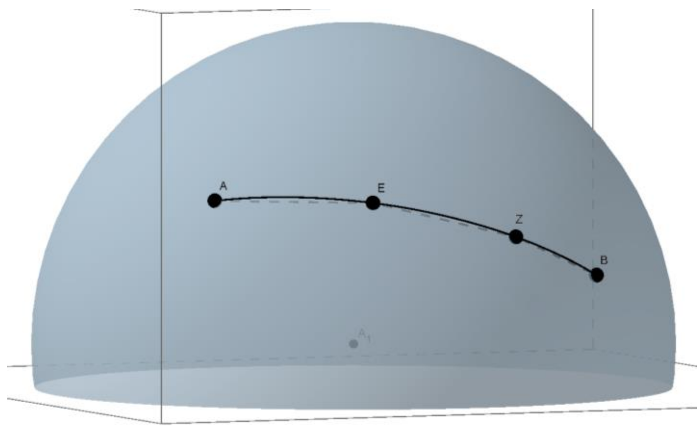
Τα στοιχεία του Τριγώνου Ορθοδρομίας είναι :

1. Η πλευρά ΠΑ που είναι ίση με 90^0-φ_ε όπου φ_ε το πλάτος του σημείου εκκινήσεως Α.
2. Η πλευρά ΠΒ που είναι ίση με 90^0-φ_α αν το Β βρίσκεται στο ίδιο ημισφαίριο με το Α ή 90^0+φ_α αντίθετα, όπου φ_α το πλάτος του σημείου αφίξεως Β.
3. Η πλευρά ΑΒ=γ που ονομάζεται **Ορθοδρομική Απόσταση.**
4. Η γωνία Π=Δ_λ δηλαδή η **Διαφορά των Μηκών** των Α και Β.
5. Η γωνία Α=$Z_{\lambda\varepsilon}$ που ονομάζεται **Αρχική Πλεύση.**
6. Η γωνία Β δηλαδή η **Τελική Πλεύση**.

2.2 Ορθοδρομία

Ορισμός

Το μικρότερο του 180^0 τόξο μεγίστου κύκλου που συνδέει δύο σημεία στην επιφάνεια της γής ονομάζεται **Ορθοδρομικό Τόξο.**



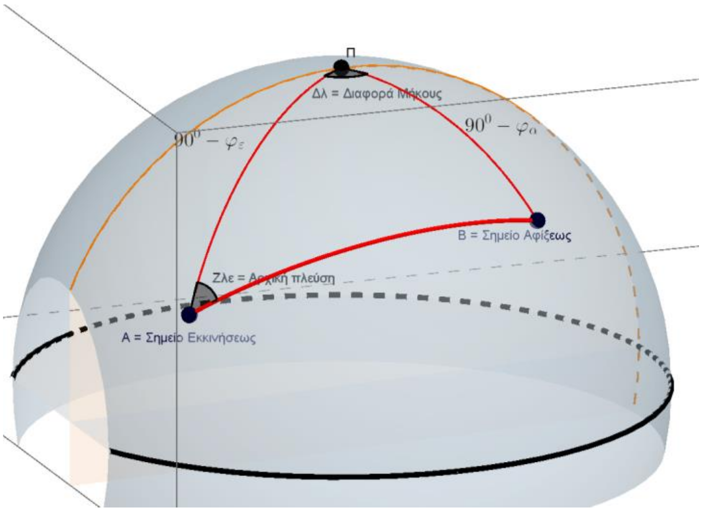
Το μέτρο αυτού του τόξου είναι η ορθοδρομική απόσταση στο τρίγωνο ορθοδρομίας και όταν υπολογιστεί σε πρώτα λεπτά της μοιρας μας δίνει την απόσταση σε **Ναυτικά Μίλια** .

Η πλεύση όμως ενός πλοίου πάνω στο ορθοδρομικό τόξο συνεπάγεται τη συνεχή μεταβολή της πορείας του πλοίου. Στην πράξη αυτό είναι αδύνατο άρα η πλεύση γίνεται πάνω σε μια τεθλασμένη γραμμη, οι κορυφές της οποίας είναι σημεία του Ορθοδρομικού Τόξού. Ο πλους αυτός ονομάζεται **Ορθοδρομικός Πλους** και οι κορυφές του **Ενδιάμεσα Σημεία.**

2.3 Υπολογισμός Ορθοδρομικής Αποστάσεως ΑΒ και Αρχικής Πλέυσεως $Z_{λε}$

Έστω δύο τόποι Α, Β στην επιφάνεια της γης με συντεταγμένες $φ_ε$, $λ_ε$ για το Α και $φ_α$, $λ_α$ για το Β. Για να υπολογίσουμε την Ορθοδρομική Απόσταση ΑΒ και την αρχική πλεύση $Z_{λε}$, θα επιλύσουμε το τρίγωνο ΠΑΒ χρησιμοποιώντας τους τύπους ημιπαρημιτόνων αφού γνωρίζουμε 2 πλευρές και την περιεχόμενη γωνία (ΠΓΠ).

Πχ.
Να βρεθεί η Ορθοδρομική Απόσταση και η Αρχική Πλεύση με σημείο Εκκίνησης τη Χονολουλού με $φ_ε=21^0$ 18,3'Β και $λ_ε=157^0$52,3'Δ και σημείο Αφίξεως το Σαν Φραντζίσκο με $φ_α=37^0$ 47,5'Β και $λ_α=122^0$ 25,7'Δ.



Πρέπει πρώτα να υπόλογίσουμε από τα δεδομένα τις πλευρές ΑΠ=β και ΒΠ=α καθώς και την γωνία Π=Δλ του σφαιρικού τριγώνου ΠΒΑ. Άρα :

$$ΒΠ = \alpha = 90^0 - \varphi_\alpha = 90^0 - 37^0 47{,}5' = 52^0 12{,}5'$$
$$ΑΠ = \beta = 90^0 - \varphi_\varepsilon = 90^0 - 21^0 18{,}3' = 68^0 41{,}7'$$
$$\Gamma = \Pi = \Delta_\lambda = 157^0 52{,}3' - 122^0 25{,}7' = 35^0 26{,}6'$$

Υπολογισμός της γ

$$ημπργ = ημπρ(\alpha - \beta) + ημα \cdot ημβ \cdot ημπρ\Gamma \quad (1)$$

Θέτουμε :

$$ημπρX = ημα \cdot ημβ \cdot ημπρ\Gamma$$

Λογαριθμίζουμε :

$$logημπρX = logημ(52^0 12{,}5') + logημ(68^0 41{,}7') + logημπρ 35^0 26{,}6'$$
$$logημπρX = 9{,}89776 + 9{,}96926 + 8{,}96687 = 8{,}83389$$

Από τους πίνακες $ημπρX = 0{,}06822$.
Αφού $\beta - \alpha = 16^0 29{,}2'$ έχουμε λόγω της (1)

$$ημπργ = ημπρ(\beta - \alpha) + ημπρX = 0{,}02056 + 0{,}06822 = 0{,}08878$$

Από τους πίνακες η Ορθοδρομική Απόσταση είναι :

γ=$34^0$40,2'=2040'+40,2'=2080,2'=2080,2 Ναυτικά Μίλια.

Υπολογισμός Α=$Z_{λε}$

$$ημπρA = ημ(τ-β)\cdot ημ(τ-γ)\cdot στεμβ \cdot στεμγ$$
$$τ = \frac{α+β+γ}{2} = 77^0 47{,}2'$$
$$τ-β = 9^0 5{,}5', \quad τ-γ = 43^0 41{,}7'$$

Λογαριθμίζουμε :

$$logημπρA =$$
$$logημ(9^0 5{,}5') + logημ(43^0 41{,}7') + logστεμ(68^0 41{,}7') + logστεμ(34^0 40{,}2')$$
$$logημπρA = 9{,}19870 + 9{,}83473 + 0{,}03074 + 0{,}24500 = 9{,}30917$$

Από τους πίνακες **Α=$Z_{λε}$=$53^0$40,2'**.

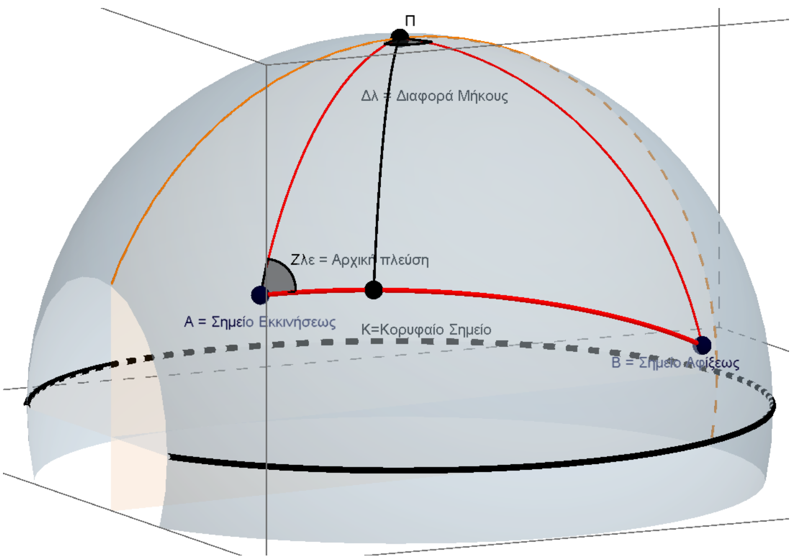
Ασκηση

Να βρεθεί η συντομότερη (Ορθοδρομική) απόσταση σε Ναυτικά Μίλια με σημείο Εκκίνησης τη Νέα Υόρκη ($φ_ε=40^0 43'$Β , $λ_ε=74^0$Δ) και σημείο αφίξεως το Ρίο Ντε Τζανέιρο ($φ_α=22^0 54'$Ν , $λ_α=43^0 11'$Δ)

2.4 Κορυφαίο Σημείο Ορθοδρομίας

Ορισμός

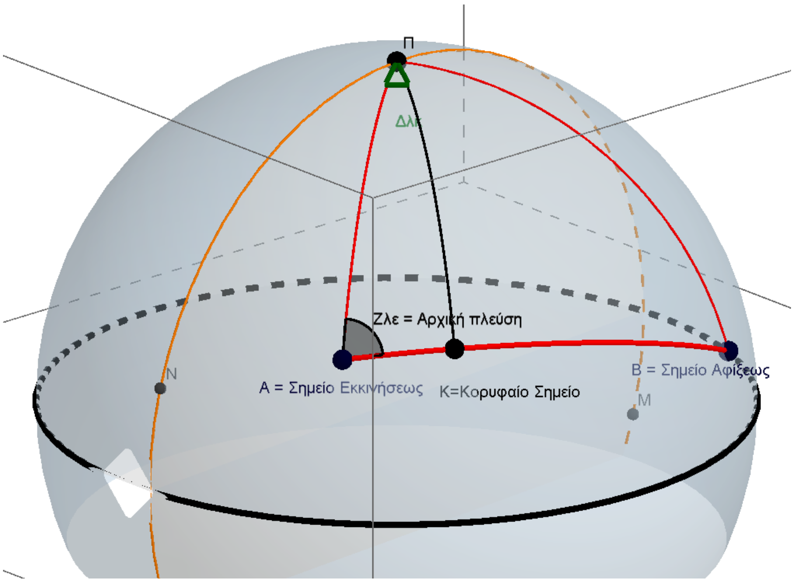
Το σημείο τομής Κ του Ορθοδρομικού Τόξου ΑΒ και του μεγίστου κύκλου ΠΠ' (Μεσημβρινού) που είναι κάθετος στο ΑΒ ονομάζεται **Κορυφαίο (Vertex) ενδιάμεσο σημείο** του ορθοδρομικού τόξου.



Το σημείο αυτό απέχει την μικρότερη απόσταση από τον ομώνυμο Πόλο του Α και την μεγαλύτερη από τον Ισημερινό, απο τα σημεία του Ορθοδρομικού Τόξου.

2.4 Υπολογισμός Κορυφαίου Σημείου Ορθοδρομίας

Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (ϕ_κ,λ_κ), επιλύουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΚ βρίσκοντας την πλευρά ΠΚ και τη γωνία Π=$\Delta_{\lambda\kappa}$.



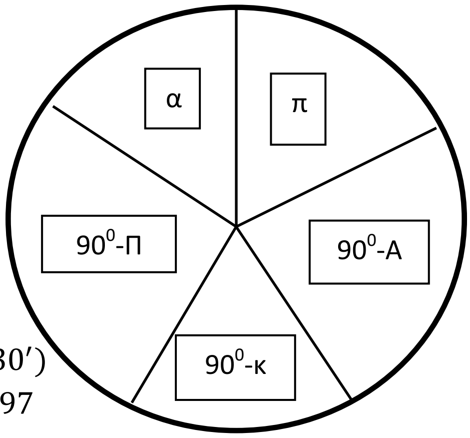
Πχ.

Ένα πλοίο πλέει από σημείο Α (ϕ_ε=41^{0}30'Β , λ_ε=65^{0}40'Δ) στο σημείο Β εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Αν η αρχική πλεύση είναι Α=Ζλε=Β 53^{0}23' Α να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του Κορυφαίου σημείου.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΠΑΚ γνωρίζουμε :

Την ΠΑ=κ=90-ϕ_ε=90^0-41^{0}30'=48^{0}30'

Την Α=Ζλε=53^{0}23'



Υπολογισμός α

Η α έχει απέναντι τις 90^0-Α και 90^0-κ άρα

$$\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu(90^0 - A) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^0 - \kappa)$$

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu A \cdot \eta\mu\kappa$$

$$log\eta\mu\alpha = log\eta\mu(53^0 23') + log\eta\mu(48^0 30')$$

$$log\eta\mu\alpha = 9{,}90452 + 9{,}87445 = 9{,}77897$$

Άρα ΠΚ=α=36^{0}57' ή α=143^{0}3' αλλά αφού Α<90^0 α=36^{0}57'.

Οπότε

$$\phi_\kappa=90^0-36^0 57'=53^0 3'B.$$

Υπολογισμός Π=Δλκ

Η 90^0-κ έχει προσκείμενες τις 90^0-Π και 90^0-Α άρα :

$$\eta\mu(90^0 - \kappa) = \varepsilon\varphi(90^0 - \Pi) \cdot \varepsilon\varphi(90^0 - A)$$

$$\sigma\upsilon\nu\kappa = \sigma\varphi\Pi \cdot \sigma\varphi A \Leftrightarrow \sigma\varphi\Pi = \sigma\upsilon\nu\kappa \cdot \varepsilon\varphi A$$

$$log\sigma\varphi\Pi = log\sigma\upsilon\nu(48^0 30') + log\varepsilon\varphi(53^0 23') = 0{,}12894 + 9{,}82126 = 9{,}95020$$

Άρα Π=Δλκ=48^{0}17' ή Π=131^{0}43' όμως αφού κ<90^0 και Α<90^0 και Π<90^0 άρα Π=Δλκ=48^{0}17'.

Επειδή το μήκος του Α είναι Δυτικά και το Κ Ανατολικά του Α

$$\lambda_\kappa=65^0 40' - 48^0 17'=17^0 23'\Delta$$