Πίνακες.

Ορισμοί, είδη, μορφές, ισότητα πινάκων, μοναδιαίος, μηδενικός πίνακας.

Πλοίο προσεγγίζει το λιμάνι της Πάφου στη νοτιοδυτική Κύπρο. Πλοίαρχος που αναζητά περισσότερα στοιχεία για το λιμένα προορισμού, μπορεί να δει τον παρακάτω πίνακα και να εξάγει χρήσιμα συμπεράσματα για τις καιρικές συνθήκες που αναμένεται να συναντήσει.

Months	Maximum daily coastal temperature in ^{O}C	Minimum night coastal temperature in ^{O}C	Mean daily Sunshine (Hours)	Sea temperature in ^{O}C	Humidity (%)	Rain days
January	17,3	8,4	6,1	16,5	77	11,4
February	17,5	8,1	7,2	16,6	73	9,1
March	19,4	10,0	8,0	16,9	68	8,9
April	22,6	12,7	9,2	17,4	67	5,0
May	26,6	16,5	11,2	19,0	69	2,6
June	30,7	20,1	12,8	21,8	70	0,3
July	33,0	22,2	12,6	24,1	71	0,0
August	33,2	22,6	11,9	25,4	73	0,0
September	31,3	20,4	10,6	25,8	67	0,3
October	28,6	17,7	8,9	23,2	68	3,4
November	23,5	13,4	7,2	20,2	73	7,4
December	19,0	10,0	5,8	18,6	81	10,0

Στις σελίδες κάποιου από τα εξειδικευμένα περιοδικά που ασχολούνται με το χώρο της ναυτιλίας μπορεί να συναντήσει τους παρακάτω πίνακες που παρουσιάζουν ένα ημερολόγιο και στατιστικά στοιχεία σχετικά με τη ναυτιλία.

Top 20 lenders to Greek owners

	BANK	\$m*
1	Royal Bank of Scotland	12,945
2	HSH Nordbank	5,900
3	Deutsche Schiffsbank	4,800
4	Credit Suisse **	3,500
5	Piraeus Bank	3,376
6	Alpha Bank	2,677
7	Calyon **	2,500
8	National Bank of Greece	2,392
9	Marfin Egnatia Bank	2,250
10	DNB	2,181
11	HVB	2,043
12	Commercial Bank of Greece	1,890
13	DVB Nedship	1,720
14	Commerzbank	1,707
15	HSBC	1,700
16	EFG Eurobank	1,610
17	Fortis Bank	1,525
18	Citibank	1,280
19	ABN AMRO	1,150
20	DB/SHL Shipping	966

* At end December 2007 **Market estimates
Greek banks are show in red.

Η πορεία του διεθνούς εμπορίου δια θαλάσσης (εκατομμύρια τόνοι)

Έτος	Δεξαμενόπλοια	Ξηρό φορτίο	Κύρια φορτία*
1970	1.442	1.124	448
1980	1.871	1.833	796
1990	1.755	2.253	968
2000	2.163	3.821	1.288
2006**	2.674	4.742	1.828

* Σιδηρομετάλλευμα, δημητριακά, άνθρακας, βωξίτης, αλουμίνα, φωσφορικό άλας.
** Εκτιμήσεις

Οκτώβριος 2020

Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Η πορεία του ελληνόκτητου στόλου

Έτος	Πλοία	DWT	GT
Φεβρουάριος 1998	3.358	133.646.831	78.900.843
Μάρτιος 1999	3.424	139.255.184	83.454.890
Μάρτιος 2000	3.584	150.966.324	90.227.491
Μάρτιος 2001	3.618	168.434.370	100.220.348
Μάρτιος 2002	3.480	164.613.935	98.195.100
Μάιος 2003	3.355	171.593.487	103.807.860
Μάρτιος 2004	3.370	180.140.898	108.929.135
Μάρτιος 2005	3.338	182.540.868	109.377.819
Μάρτιος 2006	3.397	190.058.534	113.603.803
Φεβρουάριος 2007	3.699	218.229.552	129.765.470
Φεβρουάριος 2008	4.173	260.929.221	154.599.274

Ορισμός. Ονομάζομε πίνακα ή μήτρα (matrix) τύπου $\mu x \nu$ ή πιο απλά $\mu x \nu$ πίνακα των πραγματικών αριθμών a_{ij} $(i = 1,\ 2,\ ...,\mu\ \&\ j = 1,\ 2,\ ...,\nu)$, μία ορθογώνια τοποθέτηση των αριθμών αυτών σε μ γραμμές και ν στήλες.

Το πλήθος μ των γραμμών και ν των στηλών, ονομάζονται διαστάσεις του πίνακα. Οι αριθμοί που σχηματίζουν τον πίνακα ονομάζονται στοιχεία του πίνακα. Συνήθως, οι πίνακες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα Α, Β, Γ,... ενώ τα στοιχεία τους με μικρά. Το στοιχείο ενός πίνακα Α διαστάσεων $\mu x \nu$ που βρίσκεται στη i γραμμή και j στήλη, συμβολίζεται a_{ij} και ο πίνακας γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1\nu\text{-}1} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2\nu\text{-}1} & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{i\nu\text{-}1} & \alpha_{i\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu\text{-}11} & \alpha_{\mu\text{-}12} & \cdots & \alpha_{\mu\text{-}1j} & \cdots & \alpha_{\mu\text{-}1\nu\text{-}1} & \alpha_{\mu\text{-}1\nu} \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu j} & \cdots & \alpha_{\mu\nu\text{-}1} & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Επίσης γράφεται ως $\mathrm{A}_{\mu x \nu} = \left[a_{ij}\right]$ ή $\mathrm{A}_{\mu x \nu} = \left(a_{ij}\right)$ ή $\mathrm{A} = \left[a_{ij}\right]$ ή $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$, ή συντομογραφικά $\left[a_{ij}\right]$ ή $\left(a_{ij}\right)$ $i = 1,\ 2,\ ...,\mu\ \&\ j = 1,\ 2,\ ...,\nu$. Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στην ίδια γραμμή έχουν ίδιο τον πρώτο τους δείκτη ενώ όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη έχουν ίδιο το δεύτερο τους δείκτη.

Εφαρμογή. Ο παρακάτω πίνακας, διαστάσεων $2x3$, δείχνει το πλήθος των αξιωματικών γέφυρας και μηχανής που απασχολούνται σε δύο πλοία ναυτιλιακής εταιρείας. Ο πίνακας δηλώνει ότι στο πρώτο πλοίο απασχολούνται 3, 5, 7 και στο δεύτερο πλοίο 4, 6, 8 αξιωματικοί Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεως αντίστοιχα. Είναι α_{11}=3, α_{12}=5, α_{13}=7, α_{21}=4, α_{22}=6, α_{23}=8.

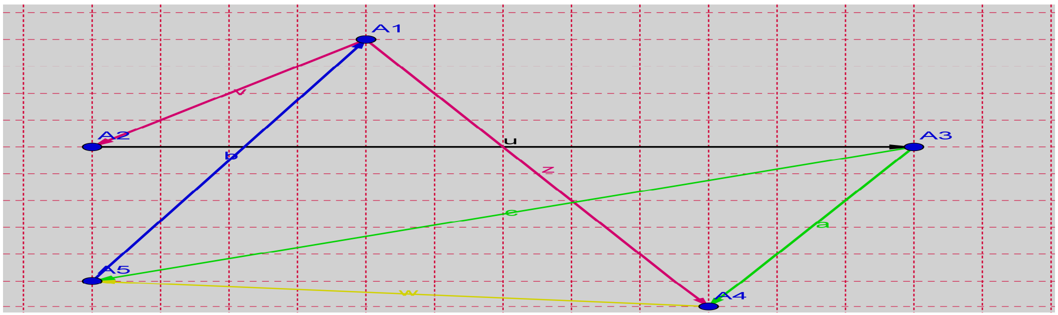
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{A}' & \mathrm{B}' & \Gamma' \end{array} \\ \mathrm{A}= & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{πλοίο 1} \\ \text{πλοίο 2} \end{array} \end{array}$$

Άσκηση. Στον $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ βρείτε τα στοιχεία α_{12}, α_{21}, α_{32}, α_{23}, α_{24}.

Π.χ. Σχηματίστε τον A_{2x3}, αν ισχύει ότι $a_{ij}=i+j$.
Είναι α_{11}=1+1=2, $\alpha_{12}=\alpha_{21}$=1+2=3, α_{13}=1+3=4, α_{22}=2+2=4, α_{23}=2+3=5.
Συνεπώς, ο πίνακας A είναι $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Άσκηση. Σχηματίστε τον A_{3x3}, αν ισχύει ότι $a_{ij}=2i+3j$.

Εφαρμογή. Το διάνυσμα $\overrightarrow{A_iA_j}$ δηλώνει ότι το A_i επηρεάζει το A_j. Περιγράψτε τη σχέση επιρροής με πίνακα $\left[\alpha_{ij}\right]$ σημειώνοντας $\alpha_{ij}=\begin{cases} 1, \text{όταν το } A_i \text{ επηρρεάζει το } A_j \\ 0, \text{όταν διαφορετικά} \end{cases}$



Είναι

$$A=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array}$$

$$A=\left[\begin{array}{ccccc} 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}$$

Την εφαρμογή αυτή μπορούμε να μην τη δούμε μόνο με τη στενή μαθηματική της διατύπωση, αλλά να φανταστούμε ότι τα σημεία παριστάνουν μέλη μίας ομάδας ανθρώπων (ή ομάδες συμφερόντων ή επιχειρήσεις ή κράτη και μελετούμε τις μεταξύ τους σχέσεις επιρροής), άρα η θεωρία πινάκων είναι ένα χρήσιμο εργαλείο και βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς τομείς της επιστήμης. Επίσης μπορούμε να δούμε πόσα και ποια άτομα, τουλάχιστον, πρέπει να μεσολαβήσουν ώστε να φτάσει μία πληροφορία από τον πομπό στο δέκτη, άρα να τη γνωρίζουν.

Πίνακας στοιχείο, ονομάζεται ο πίνακας που έχει μία γραμμή και μία στήλη, άρα περιέχει ένα στοιχείο και η γενική του μορφή είναι $A=\left[\alpha_{11}\right]$.

Π.χ. $A_{1x1}=\left[9\right], B_{1x1}=\left[007\right]$

Πίνακας (ή διάνυσμα) **γραμμή**, ονομάζεται ο πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή $(\mu=1)$ και η γενική μορφή του είναι $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dots & \alpha_{1\nu\text{-}1} & \alpha_{1\nu}\end{bmatrix}$.

Π.χ. $\mathrm{A}_{1x4}=\begin{bmatrix}-7 & \sqrt{5} & 8 & \cos45^0\end{bmatrix}, \mathrm{B}_{1x3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 7\end{bmatrix}, \Gamma_{1x2}=\begin{bmatrix}-2 & \sin30^0\end{bmatrix}$

Πίνακας (ή διάνυσμα) **στήλη**, ονομάζεται ο πίνακας που έχει μόνο μία στήλη $(\nu=1)$ και η γενική μορφή του είναι $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \alpha_{31}\\ \alpha_{41}\\ \dots\\ \alpha_{\mu\text{-}11}\\ \alpha_{\mu1}\end{bmatrix}$. **Π.χ.** $\mathrm{A}_{4x1}=\begin{bmatrix}1\\9\\6\\8\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}_{3x1}=\begin{bmatrix}-1\\2\\3{,}6\end{bmatrix}$, $\Gamma_{2x1}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ \ln8\end{bmatrix}$.

Τετραγωνικός, ονομάζεται ο πίνακας που έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών $(\mu=\nu)$. Αν ν είναι το πλήθος γραμμών και στηλών, θα σημειώνομε ότι έχομε το $\nu x\nu$ πίνακα A ή τον πίνακα $\mathrm{A}_{\nu x\nu}$.

$$\mathrm{A}_{2x2}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}, \mathrm{A}_{3x3}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$$

Π.χ. $\mathrm{B}_{4x4}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 9 & \pi\\ 0 & 6 & -5 & \sin90^0\\ 3 & 7 & \sqrt{7} & 3/5\\ 4 & 8 & e & 7{,}2\end{bmatrix}, \Delta_{3x3}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 6\\ 7 & 4 & 8\end{bmatrix}, \Gamma_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 7 & 4\end{bmatrix}$

Κύρια (ή πρωτεύουσα) **διαγώνιος**, ενός τετραγωνικού πίνακα $\nu x\nu$, ονομάζεται εκείνη η διαγώνιος που περιέχει τα στοιχεία a_{ij} $(i,j=1,\ 2,\ \dots,\nu)$ που έχουν $i=j$.

Δηλαδή, περιέχει τα στοιχεία $\alpha_{11},\ \alpha_{22},\ \alpha_{33},\dots,\ \alpha_{\nu\nu}$ που ονομάζονται πρωτεύοντα στοιχεία του πίνακα. Στον τετραγωνικό πίνακα, τα στοιχεία a_{ij} που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο, έχουν την ιδιότητα $i<j$, ενώ όσα βρίσκονται κάτω από αυτήν, έχουν την ιδιότητα $i>j$.

$$\mathrm{A}_{2x2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha_{11}} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \boldsymbol{\alpha_{22}}\end{bmatrix}, \mathrm{A}_{3x3}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha_{11}} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \boldsymbol{\alpha_{33}}\end{bmatrix}$$

Δευτερεύουσα διαγώνιος, ενός τετραγωνικού πίνακα $\nu x\nu$ ονομάζεται η διαγώνιος που περιέχει τα στοιχεία a_{ij} $(i,j=1,\ 2,\ \dots,\nu)$ για τα οποία ισχύει ότι $i+j=\nu+1$.

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix} \text{ με } 1+2=2+1=3,\quad A_{3x3}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix} \text{με } 1+3=2+2=3+1=4.$$

Κλιμακωτός άνω, ονομάζεται ο πίνακας $\mu x \nu$ όταν όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα κάτω από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν. Δηλαδή $a_{ij}=0$ όταν $i>j$.

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dots & \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\nu}\\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu}\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3\nu-1} & \alpha_{3\nu}\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & \dots & \alpha_{4\nu-1} & \alpha_{4\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{\mu-1\nu-1} & \alpha_{\mu-1\nu}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix}$$

Π.χ. $A_{3x2}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B_{2x3}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 8\\ 0 & 5 & 9\end{bmatrix}$.

Κλιμακωτός κάτω, ονομάζεται ο πίνακας $\mu x \nu$ όταν όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα πάνω από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν. Δηλαδή $a_{ij}=0$ όταν $i<j$.

Π.χ. $A_{3x2}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 7 & 4\\ 9 & 5\end{bmatrix}$, $B_{2x3}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0\end{bmatrix}$.

Τριγωνικός άνω, ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα κάτω από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν. Δηλαδή $a_{ij}=0$ όταν $i>j$.

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dots & \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\nu}\\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu}\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3\nu-1} & \alpha_{3\nu}\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & \dots & \alpha_{4\nu-1} & \alpha_{4\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{\nu-1\nu-1} & \alpha_{\nu-1\nu}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}$$

Π.χ. $A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{bmatrix}$, $B_{3x3}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 8\\ 0 & -3 & 7\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

Τριγωνικός κάτω, ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα πάνω από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν. Δηλαδή $a_{ij}=0$ όταν $i<j$.

Π.χ. $A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 9 & 4\end{bmatrix}$, $B_{3x3}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 6 & 4 & 5\end{bmatrix}$.

- Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός πίνακας.

Επεξήγηση. $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax & 0\\ bx+cy & cz\end{pmatrix}$

Διαγώνιος, ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας που όσα στοιχεία του δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν. Δηλαδή $a_{ij}=0$ όταν $i \neq j$. Κάθε διαγώνιος πίνακας είναι τριγωνικός άνω και κάτω. **Π.χ.** $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{3x3}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Εφαρμογή. Βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι διαγώνιος ο $A=\begin{bmatrix} 12 & x^2-1 \\ x+1 & -3 \end{bmatrix}$.

Λύση

Για να είναι ο πίνακας A διαγώνιος πρέπει $\begin{cases} x+1=0 \\ \text{και} \\ x^2-1=0 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} x=-1 \\ \text{και} \\ x=\pm 1 \end{cases}$ άρα $x=-1$.

Ανάστροφος, του $A_{\mu x \nu}=[a_{ij}]$, ονομάζεται ο $A^T_{\nu x \mu}=[a_{ji}]$, δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει από τον A, αν οι γραμμές αυτού γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές, με την ίδια τάξη. Προφανώς, ανάστροφός του ανάστροφου είναι ο αρχικός πίνακας, δηλαδή $\left(A^T\right)^T=A$.

Π.χ. $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, A^T{}_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{3x3}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, B^T{}_{3x3}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

$\Gamma_{2x3}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\Gamma^T{}_{3x2}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Συμμετρικός, ονομάζεται ο $A_{\nu x \nu}$ που τα στοιχεία του, τα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, είναι ίσα. Δηλαδή $[\alpha_{ij}]=[\alpha_{ji}]$. Άρα, αν $A_{\nu x \nu}=A^T_{\nu x \nu}$, ο $A_{\nu x \nu}$ είναι συμμετρικός.

Π.χ. $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B_{3x3}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Αντισυμμετρικός, ονομάζεται ο $A_{\nu x \nu}$ που τα στοιχεία του, τα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, είναι αντίθετα και όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μηδέν. Δηλαδή $\alpha_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{, όταν i=j} \\ -\alpha_{ji} & \text{, όταν } i \neq j \end{cases}$ Άρα, αν $A_{\nu x \nu}=-A^T_{\nu x \nu}$, ο $A_{\nu x \nu}$ είναι αντισυμμετρικός.

Π.χ. $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{3x3}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

• Κάθε πίνακας, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Μηδενικός, ονομάζεται ο διαστάσεων $\mu x\nu$ πίνακας, κάθε στοιχείο του οποίου είναι μηδέν και συμβολίζεται ως $O_{\mu x\nu}$ ή όταν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως ως O. Επειδή ο πραγματικός αριθμός 0 είναι μοναδικός, έπεται ότι και ο μηδενικός πίνακας είναι μοναδικός, για κάθε διάσταση πίνακα.

Π.χ. $\mathrm{O}_{1x1}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$, $\mathrm{O}_{2x2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathrm{O}_{2x3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathrm{O}_{3x2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathrm{O}_{3x3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Αντίθετος ενός πίνακα $\mathrm{A}_{\mu x\nu}$, ονομάζεται ο ίδιων διαστάσεων πίνακας, που όλα τα στοιχεία του είναι αντίθετα των, αντίστοιχων τους, στοιχείων του A. Συμβολίζεται ως $-\mathrm{A}$. Ισχύει ότι $-(-\mathrm{A})=\mathrm{A}$.

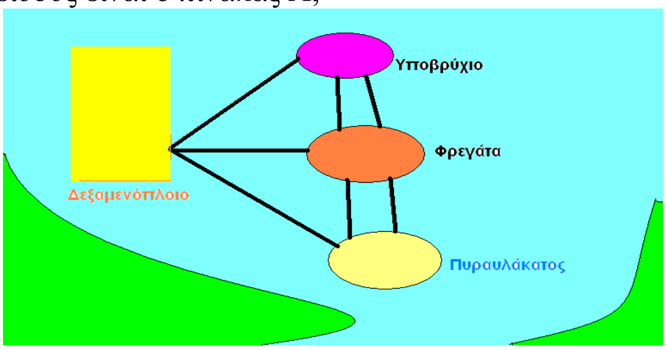
Π.χ. Αντίθετος του $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ είναι ο $-\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & 4\\ -5 & -6\end{bmatrix}$.

Μοναδιαίος, ονομάζεται εκείνος ο διαγώνιος πίνακας που όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι 1 $(\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=...=\alpha_{\nu\nu}=1)$. Τον I_ν, γράφομε απλούστερα ως I, όταν είναι φανερός ο τύπος του από τις πράξεις με τους άλλους πίνακες.

Π.χ. $\mathrm{I}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathrm{I}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathrm{I}_\nu=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & 0\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1\end{bmatrix}$.

Εφαρμογή. Κατά τη διάρκεια ασκήσεως του ναυτικού, τέσσερα πλοία παίρνουν τις παρακάτω θέσεις (1–δεξαμενόπλοιο, 2–υποβρύχιο, 3–φρεγάτα, 4– πυραυλάκατος) και επικοινωνούν, μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Κατασκευάστε πίνακα $\mathrm{A}=\left[\alpha_{ij}\right]$, ώστε κάθε στοιχείο του α_{ij}, να δείχνει το πλήθος των καναλιών άμεσης επικοινωνίας, μεταξύ των πλοίων (Π.χ. $\alpha_{34}=2$). Τι είδους είναι ο πίνακας Α;



	Δ/Ξ	Υ/Β	Φ/Γ	Π/Ρ
Δ/Ξ	0	1	1	1
Υ/Β	1	0	2	0
Φ/Γ	1	2	0	2
Π/Ρ	1	0	2	0

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Τα κανάλια άμεσης επικοινωνίας, περιγράφονται από τον παραπάνω πίνακα διπλής εισόδου, από τον οποίο προκύπτει και ο συμμετρικός πίνακας A.

Ισότητα πινάκων.

Δύο πίνακες A, B ονομάζονται ίσοι όταν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, τον ίδιο αριθμό στηλών (άρα είναι του ιδίου τύπου) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Για να δηλώσομε ότι δύο πίνακες είναι ίσοι γράφομε $A = B$.

Δύο ή περισσότερα στοιχεία ονομάζονται αντίστοιχα, όταν βρίσκονται στην ίδια γραμμή και στήλη σε δύο ή περισσότερους πίνακες.

Π.χ. Βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$ ώστε $A = B$, αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύση. Για να ισχύει η ισότητα αρκεί τα αντίστοιχα στοιχεία να είναι ίσα, ένα προς ένα. Άρα $\alpha_{11}=2=\beta_{11}$, $\alpha_{12}=3=\beta_{12}$, $\alpha_{21}=x=5=\beta_{21}$, $\alpha_{22}=1=\beta_{22}$. Άρα πρέπει $x = 5$.

Άσκηση. Αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 3x \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2x & 5 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A \neq B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.

(α) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$ **(β)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$ **(γ)** $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ x & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$

(δ) $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **(ε)** $\begin{bmatrix} 12 & x^2-1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ x^2-4x & -7 \end{bmatrix}$

Ιδιότητες της ισότητας πινάκων.

Από τις ιδιότητες της ισότητας των πραγματικών αριθμών, συνάγεται ότι η ισότητα των πινάκων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Κάθε πίνακας A, είναι ίσος με τον εαυτό του, δηλαδή $A = A$ (ανακλαστική).

2. Αν ισχύει ότι $A = B$, τότε ισχύει και ότι $B = A$ (συμμετρική).

3. Αν $A = B$ και $B = \Gamma$, τότε ισχύει και ότι $A = \Gamma$ (μεταβατική).

Πρόσθεση πινάκων.

Ναυτιλιακή εταιρεία που έχει δρομολογήσει το σκάφος της Ικαρία 1 με προορισμό τον Εύδηλο Ικαρίας, έχει κόψει για τη $2^{η}$ εβδομάδα του Αυγούστου εισιτήρια όπως φαίνονται, ανά ημέρα και κατηγορία, στον παρακάτω πίνακα A.

Όμως, λόγω μηχανικής βλάβης, δε θα καταστεί δυνατό να εκτελέσει τα προγραμματισμένα δρομολόγια του και θα αντικατασταθεί από το σκάφος της ίδιας εταιρείας, Ικαρία 2, το οποίο όμως έχει κόψει για την ίδια εβδομάδα εισιτήρια όπως φαίνονται, ανά ημέρα και κατηγορία, στον παρακάτω πίνακα B.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \Phi/\Gamma & \text{I.X.} & \text{MOT.} & \text{VIP} & \text{OIK.} \end{array} \\
\text{A}= & \begin{bmatrix} 50 & 70 & 30 & 80 & 600 \\ 40 & 60 & 40 & 70 & 500 \\ 30 & 80 & 50 & 90 & 400 \\ 50 & 90 & 60 & 100 & 700 \\ 20 & 100 & 150 & 150 & 900 \\ 20 & 150 & 100 & 100 & 800 \\ 45 & 100 & 90 & 90 & 700 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \text{Δευτέρα} \\ \text{Τρίτη} \\ \text{Τετάρτη} \\ \text{Πέμπτη} \\ \text{Παρασκευή} \\ \text{Σάββατο} \\ \text{Κυριακή} \end{array}
\quad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \Phi/\Gamma & \text{I.X.} & \text{MOT.} & \text{VIP} & \text{OIK.} \end{array} \\
\text{B}= & \begin{bmatrix} 25 & 30 & 40 & 85 & 300 \\ 20 & 30 & 40 & 76 & 200 \\ 15 & 40 & 50 & 98 & 200 \\ 25 & 50 & 60 & 104 & 300 \\ 10 & 80 & 150 & 153 & 200 \\ 10 & 700 & 100 & 102 & 400 \\ 40 & 60 & 90 & 91 & 300 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ο συνολικός αριθμός των φορτηγών αυτοκίνητων, ι.χ., μοτοποδήλατων, επιβατών διακεκριμένης και οικονομικής θέσεως που θα χρειασθεί να μεταφέρει, ανά ημέρα, το Ικαρία 2, είναι ένας τρίτος πίνακας Γ, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A, B. Ο Γ ονομάζεται άθροισμα των δύο προηγουμένων πινάκων. Η πράξη με την οποία βρίσκομε το άθροισμα δύο πινάκων, ονομάζεται πρόσθεση πινάκων.

$$
\Gamma=\begin{bmatrix} 50+25 & 70+30 & 30+40 & 80+85 & 600+300 \\ 40+20 & 60+30 & 40+40 & 70+76 & 500+200 \\ 30+15 & 80+40 & 50+50 & 90+98 & 400+200 \\ 50+25 & 90+50 & 60+60 & 100+104 & 700+300 \\ 20+10 & 100+80 & 150+150 & 150+153 & 900+200 \\ 20+10 & 150+700 & 100+100 & 100+102 & 800+400 \\ 45+40 & 100+60 & 90+90 & 90+91 & 700+300 \end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{bmatrix} 75 & 100 & 70 & 165 & 900 \\ 60 & 90 & 80 & 146 & 700 \\ 45 & 120 & 100 & 188 & 600 \\ 75 & 140 & 120 & 204 & 1000 \\ 30 & 180 & 300 & 303 & 1100 \\ 30 & 850 & 200 & 202 & 1200 \\ 85 & 160 & 180 & 181 & 1000 \end{bmatrix}.
$$

Ορισμός. Άθροισμα δύο $\mu x \nu$ πινάκων $\text{A}=\left[a_{ij}\right], \text{B}=\left[\beta_{ij}\right]$, ονομάζεται ο $\mu x \nu$ πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων των A, B. Δηλαδή $\text{A}+\text{B}=\left[a_{ij}+\beta_{ij}\right]$.

$$
\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots\cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots\cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \cdots\cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots\cdots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots\cdots & \beta_{2\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \beta_{\mu 1} & \beta_{\mu 2} & \beta_{\mu 3} & \cdots\cdots & \beta_{\mu\nu} \end{bmatrix}=
$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \alpha_{13}+\beta_{13} & \ldots\ldots & \alpha_{1\nu}+\beta_{1\nu} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \alpha_{23}+\beta_{23} & \ldots\ldots & \alpha_{2\nu}+\beta_{2\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1}+\beta_{\mu1} & \alpha_{\mu2}+\beta_{\mu2} & \alpha_{\mu3}+\beta_{\mu3} & \ldots\ldots & \alpha_{\mu\nu}+\beta_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Δεν ορίζεται άθροισμα πινάκων διαφορετικού τύπου.

Ιδιότητες της προσθέσεως πινάκων.

Οι ιδιότητες της προσθέσεως πινάκων είναι ανάλογες με τις ιδιότητες της προσθέσεως πραγματικών αριθμών. Αν Α, Β, Γ τρεις πίνακες διαστάσεων $\mu x \nu$ και $\mathbf{O}$ ο αντίστοιχος μηδενικός πίνακας διαστάσεων $\mu x \nu$, ισχύουν:

1. $A+B=B+A$ Αντιμεταθετική ιδιότητα

2. $(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$ Προσεταιριστική ιδιότητα

Το $(A+B)+\Gamma$ ονομάζεται άθροισμα των Α, Β, Γ και συμβολίζεται απλά $A+B+\Gamma$. Η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπει να γράφομε $A+B+\Gamma$ για καθένα από τα ίσα αθροίσματα $A+(B+\Gamma),(A+B)+\Gamma$.

Ομοίως, αν Α, Β, Γ, Δ πίνακες ιδίου τύπου, ισχύει [(Α+Β)+Γ]+Δ=(Α+Β)+(Γ+Δ) = [Α+ (Β+Γ)] +Δ=Α+ [Β+ (Γ+Δ)] =Α+[(Β+Γ) +Δ]=[(Β+Α) +Γ]+Δ = κ.ο.κ.

Γενικότερα, με παρόμοιο τρόπο, ορίζεται το άθροισμα περισσοτέρων από τρεις (κ≥3) πινάκων διαστάσεων $\mu x \nu$, $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ το οποίο συμβολίζεται ως $A_1+A_2+\ldots+A_\kappa$ και είναι ίδιο, κατά οιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί η πρόσθεση, διότι ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα.

3. $A+\mathbf{O}=\mathbf{O}+A=A$ Ουδέτερο στοιχείο

Παρατήρηση. Για κάθε $A_{\mu x \nu}$, υπάρχει ένα και μόνο ένα ουδέτερο στοιχείο της προσθέσεως. Δηλαδή ο $\mathbf{O}$ που επαληθεύει την ανωτέρω σχέση είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Έστω ότι ο $A_{\mu x \nu}$ έχει και έναν άλλο, εκτός τον $\mathbf{O}$, προφανώς ιδίων διαστάσεων, πίνακα $\mathbf{O}'$ για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις
$A+\mathbf{O}=\mathbf{O}+A=A$ (1), $A+\mathbf{O}'=\mathbf{O}'+A=A$ (2)
Η (1) για $A=\mathbf{O}'$ γίνεται $\mathbf{O}'+\mathbf{O}=\mathbf{O}+\mathbf{O}'=\mathbf{O}'$ (3)
Η (2) για $A=\mathbf{O}$ γίνεται $\mathbf{O}+\mathbf{O}'=\mathbf{O}'+\mathbf{O}=\mathbf{O}$ (4)
Από τις (3), (4) έχομε ότι, αφού είναι ίσα τα πρώτα μέλη, είναι ίσα και τα δεύτερα. Άρα $\mathbf{O}=\mathbf{O}'$.

4. $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{O}$.

Παρατήρηση. Για κάθε Α υπάρχει μόνο ένας αντίθετος πίνακας.

Απόδειξη. Έστω ότι ο Α δεν έχει αντίθετο μόνο τον $-A$, αλλά και τον $(-A')$. Τότε, πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω ισότητες
$A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{O}$ και $A+(-A')=(-A')+A=\mathbf{O}$.

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει

$$(-\mathrm{A}')=(-\mathrm{A}')+\mathbf{O}=(-\mathrm{A}')+\left[\mathrm{A}+(-\mathrm{A})\right]=\left[(-\mathrm{A}')+\mathrm{A}\right]+(-\mathrm{A})=\mathbf{O}+(-\mathrm{A})=(-\mathrm{A})$$

Άρα οι $-\mathrm{A}$, $(-\mathrm{A}')$ συμπίπτουν.

5. Αν A, B είναι πίνακες διαστάσεων $\mu x\nu$, ισχύει ότι $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$.

Άσκηση. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λάθος, τις παρακάτω προτάσεις.

1. Το άθροισμα δύο πινάκων διαστάσεως $2x3$ είναι πίνακας ίδιας διαστάσεως. ✓

2. Το άθροισμα δύο διαγωνίων πινάκων είναι διαγώνιος πίνακας. ✓

Επεξήγηση. $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+a & 0 \\ 0 & y+b \end{pmatrix}$

3. Οι μηδενικοί πίνακες είναι διαγώνιοι. (Λάθος) Επεξήγηση. $\mathbf{O}_{2x3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Οι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $\nu x\nu$ έχουν ν^2 στοιχεία. ✓

5. Οι μοναδιαίοι πίνακες είναι κλιμακωτοί άνω. (Λάθος)

Επεξήγηση. $\mathrm{I}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{I}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Οι μοναδιαίοι πίνακες είναι συμμετρικοί. ✓

7. Οι μηδενικοί πίνακες είναι συμμετρικοί. (Λάθος) Επεξήγηση. $\mathbf{O}_{2x3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Ο I_2 έχει 2 στοιχεία. (Λάθος)

9. Ο I_2 έχει 2 στοιχεία διάφορα του μηδέν. ✓

10. Ο ανάστροφος ενός πίνακα γραμμή είναι ένας πίνακας στήλη. ✓

11. Η κύρια διαγώνιος ενός τετραγωνικού πίνακα έχει περισσότερα στοιχεία από τη δευτερεύουσα διαγώνιο. (Λάθος)

12. Η κύρια διαγώνιος ενός πίνακα διαστάσεων $3x3$, περιέχει 3 τουλάχιστον στοιχεία. (Λάθος)

13. Αν οι A, B, Γ είναι διαστάσεων $2x3$ τότε και ο $(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma)$ είναι $2x3$. ✓

14. Αν Α τετραγωνικός και A^{T} ο ανάστροφος του, ο $(\mathrm{A}+\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$ είναι συμμετρικός. ✓

Επεξήγηση. $A=\begin{pmatrix} x & a \\ b & y \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} x & b \\ a & y \end{pmatrix}$, $A+A^T=\begin{pmatrix} 2x & a+b \\ a+b & 2y \end{pmatrix}$.

15. Οι μηδενικοί πίνακες είναι ίσοι μεταξύ τους. (Λάθος) Επεξήγηση $\mathbf{O}_{2x2}=\mathbf{O}_{2x3}=\mathbf{O}_{3x3}$.

16. Οι μηδενικοί πίνακες είναι πάντα τετραγωνικοί. (Λάθος) Επεξήγηση $\mathbf{O}_{1x3}$

17. Οι μοναδιαίοι πίνακες είναι πάντα διαστάσεων $2x2$ ή $3x3$. (Λάθος)

Εφαρμογή. Οι ημερήσιες πωλήσεις εφημερίδων, από περίπτερο, για δύο συνεχόμενες ημέρες, αριθμούν σε φύλλα όπως δείχνουν οι παρακάτω πίνακες.

1η Ημέρα	Αθλητικές	Οικονομικές	Πολιτικές
Πρωινές	100	200	300
Απογευματινές	80	50	900

2η Ημέρα	Αθλητικές	Οικονομικές	Πολιτικές
Πρωινές	200	100	100
Απογευματινές	180	30	500

Κατασκευάστε τους πίνακες Α, Β των πωλήσεων της 1ης, 2ης ημέρας αντίστοιχα, υπολογίστε τον πίνακα Α+Β και ερμηνεύστε τον. Είναι

$$\begin{array}{cccc} & \text{Αθλ.} & \text{Οικ.} & \text{Πολ.} \\ A= & \left[\begin{matrix} 100 & 200 & 300 \\ 80 & 50 & 900 \end{matrix}\right. & & \left.\right] \end{array} \begin{matrix} \text{Πρωινές} \\ \text{Απογευματινές} \end{matrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 200 & 100 & 100 \\ 180 & 30 & 500 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 80 & 50 & 900 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 200 & 100 & 100 \\ 180 & 30 & 500 \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Αθλ.} & \text{Οικ.} & \text{Πολ.} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 300 & 300 & 400 \\ 260 & 80 & 1400 \end{bmatrix} \end{array}\begin{matrix} \text{Πρωινές} \\ \text{Απογευματινές} \end{matrix}$$

Ο $A+B$ εκφράζει τις συνολικές πωλήσεις εφημερίδων, πρωινών και απογευματινών, το διήμερο, ανά κατηγορία.

Άσκηση. Ο μέσος όρος των ημερήσιων πωλήσεων ενός αυτόματου πωλητή αναψυκτικών δίνεται από τον πίνακα A για τις πρωινές και από τον πίνακα B για τις απογευματινές πωλήσεις. Βρείτε τον $A+B$ και εξηγήστε τι εκφράζει.

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Cola} & H_2O & \text{Τσάι} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 80 & 40 \\ 3 & 70 & 30 \end{bmatrix} \end{array}\begin{matrix} 1^{\eta}\ \text{Μηχανή} \\ 2^{\eta}\ \text{Μηχανή} \end{matrix} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Cola} & H_2O & \text{Τσάι} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 30 & 100 & 60 \\ 20 & 90 & 50 \end{bmatrix} \end{array}\begin{matrix} 1^{\eta}\ \text{Μηχανή} \\ 2^{\eta}\ \text{Μηχανή} \end{matrix}$$

Άσκηση. Η κατανάλωση ρεύματος σε kwh, ανά τετράμηνο, 4 διαμερισμάτων πολυκατοικίας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	Α΄ Τετράμηνο 14/01/2019 – 15/05	Β΄ Τετράμηνο 16/05 – 17/09	Γ΄ Τετράμηνο 18/09 – 19/01/2020
1η Οικογένεια	850	300	650
2η Οικογένεια	1200	600	900
3η Οικογένεια	----	300	500
4η Οικογένεια	1500	600	1000

Αν η *kwh* κοστίζει 0,82 € και κάθε τετράμηνο ο λογαριασμός επιβαρύνεται με πάγια χρέωση 10 €, δημοτικά τέλη 20 € και 10 € για την ΕΡΤ, παραστήστε με ένα πίνακα Β τα ποσά που θα πληρώσει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο.

Αν η ΔΕΗ αυξήσει την τιμή της κιλοβατώρας στο 1 €, βρείτε πόσο θα επιβαρυνθούν, κατ΄ έτος, οι οικογένειες αυτές. Αν η τέταρτη οικογένεια, θορυβημένη από την αύξηση της τιμής της *kwh* κατάφερε να μειώσει την κατανάλωση της κατά 25% (αλλάζοντας τις λάμπες με ηλεκτρονικές, εγκαθιστώντας ηλιακό θερμοσίφωνα και τοποθετώντας στις οροφές φωτιστικά με ανεμιστήρα) βρείτε πόσα χρήματα εξοικονόμησε.

Άσκηση. Αν $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}7&9&0\\-1&-2&-3\end{bmatrix}, \Gamma=\begin{bmatrix}11&-2&3\\0&-5&0\end{bmatrix}$, βρείτε τα αθροίσματα $A+B, A+\Gamma, B+\Gamma, A+B+\Gamma$.

Αφαίρεση πινάκων.

Πλοίο αναχωρεί από Πειραιά για Εύδηλο Ικαρίας και Σάμο μεταφέροντας οχήματα και επιβάτες όπως φαίνεται, ανά κατηγορία, στον πίνακα Α. Αν στον Εύδηλο πρόκειται να αποβιβασθούν τόσα οχήματα και επιβάτες όσα φαίνονται στον πίνακα Β, πόσοι επιβάτες και οχήματα αναμένεται να αποβιβασθούν στη Σάμο προκειμένου να ενημερωθεί έγκαιρα το εκεί λιμεναρχείο;

$$A=\begin{bmatrix}30\\160\\200\\300\\1.000\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{Φορτηγά}\\\text{Ι.Χ.}\\\text{Δίκυκλα}\\\text{V.I.P.}\\\text{Οικονομική}\end{array}\qquad B=\begin{bmatrix}10\\90\\120\\100\\500\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{Φορτηγά}\\\text{Ι.Χ.}\\\text{Δίκυκλα}\\\text{V.I.P.}\\\text{Οικονομική}\end{array}$$

Η διαφορά οχημάτων και επιβατών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο είναι διαφορά των αντίστοιχων στοιχείων των A, B.

$$\Gamma=\begin{bmatrix}30-10\\160-90\\200-120\\300-100\\1.000-500\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{Φορτηγά}\\\text{Ι.Χ.}\\\text{Δίκυκλα}\\\text{V.I.P.}\\\text{Οικονομική}\end{array}\ \text{Άρα}\ \Gamma=\begin{bmatrix}20\\70\\80\\200\\500\end{bmatrix}$$ επιβάτες και οχήματα, ανά κατηγορία, αναμένεται να αποβιβασθούν στη Σάμο.

Ορισμός. Αν $\mathrm{A}_{\mu x\nu}=\left[a_{ij}\right]$, $\mathrm{B}_{\mu x\nu}=\left[\beta_{ij}\right]$, ονομάζεται διαφορά του B από τον A, ο διαστάσεων $\mu x\nu$ πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι η διαφορά των αντίστοιχων στοιχείων των A, B και συμβολίζεται $\mathrm{A}-\mathrm{B}$. Δηλαδή $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left[a_{ij}-\beta_{ij}\right]=\mathrm{A}+\left(-\mathrm{B}\right)$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots\ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \alpha_{\mu3} & \ldots\ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots\ldots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \ldots\ldots & \beta_{2\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \beta_{\mu1} & \beta_{\mu2} & \beta_{\mu3} & \ldots\ldots & \beta_{\mu\nu} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}-\beta_{11} & \alpha_{12}-\beta_{12} & \alpha_{13}-\beta_{13} & \ldots\ldots & \alpha_{1\nu}-\beta_{1\nu} \\ \alpha_{21}-\beta_{21} & \alpha_{22}-\beta_{22} & \alpha_{23}-\beta_{23} & \ldots\ldots & \alpha_{2\nu}-\beta_{2\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1}-\beta_{\mu1} & \alpha_{\mu2}-\beta_{\mu2} & \alpha_{\mu3}-\beta_{\mu3} & \ldots\ldots & \alpha_{\mu\nu}-\beta_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Για να ορίζεται η διαφορά δύο πινάκων πρέπει οι πίνακες να είναι ιδίων διαστάσεων. Η πράξη με την οποία βρίσκομε τη διαφορά δύο πινάκων, λέγεται αφαίρεση πινάκων. Προφανώς ισχύει ότι $\mathrm{A}-\mathrm{O}=\mathrm{A}$.

Ιδιότητες της αφαιρέσεως πινάκων.

1. Στους πραγματικούς αριθμούς γνωρίζομε ότι η εξίσωση $\alpha+x=\beta$ έχει μοναδική λύση $x=\beta-\alpha$. Ομοίως, στο σύνολο $\Pi_{\mu x\nu}$, των πινάκων που έχουν διαστάσεις $\mu x\nu$, ισχύει

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{A}+\mathrm{X}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X}=\mathrm{B}+(-\mathrm{A}) \\ \text{ή} \\ \mathrm{X}+\mathrm{A}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X}=\mathrm{B}+(-\mathrm{A}) \end{array}\right\}\left(\text{Μοναδική λύση εξίσωσης}\right).$$

Μία ισότητα μεταξύ πινάκων, που περιέχει έναν άγνωστο πίνακα, ονομάζεται εξίσωση με πίνακες. Η διαδικασία που ακολουθείται, με σκοπό να βρεθεί ο άγνωστος πίνακας X, ονομάζεται επίλυση εξισώσεως.

2. Στους πραγματικούς αριθμούς ισχύει $a+x=b+x \Rightarrow a=b$. Ομοίως, στο σύνολο $\Pi_{\mu x\nu}$ ισχύει $\mathrm{A}+\mathrm{X}=\mathrm{B}+\mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{A}=\mathrm{B}$. (Νόμος της διαγραφής).

Π.χ. Αν $\mathrm{A}_{\mu x\nu}$, $\mathrm{B}_{\mu x\nu}$ δείξτε ότι αν $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ τότε $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathbf{O}$.

Πράγματι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ άρα $\mathrm{A}+\left(-\mathrm{B}\right)=\mathrm{B}+\left(-\mathrm{B}\right)=\mathbf{O}$ άρα $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathbf{O}$.

3. Αν $\mathrm{A}_{\mu x\nu}$, τότε ισχύει ότι $\left(-\mathrm{A}\right)^{\mathrm{T}}=-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

4. Αν $\mathrm{A}_{\mu x\nu}$, $\mathrm{B}_{\mu x\nu}$, $\Gamma_{\mu x\nu}$ τότε $\mathrm{A}-\left(\mathrm{B}+\Gamma\right)=\mathrm{A}-\mathrm{B}-\Gamma$, $-\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)=-\mathrm{A}-\mathrm{B}$.

Άσκηση. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

1. Αν οι A, B, Γ είναι διαστάσεων $2x3$ τότε ο $\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\Gamma\right)^{\mathrm{T}}$ είναι $2x3$. Λάθος

2. Αν Α τετραγωνικός, τότε ο $A-A^T$ είναι αντισυμμετρικός. ✓
Επεξήγηση.

$$A=\begin{pmatrix} k & n \\ m & \ell \end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix} k & m \\ n & \ell \end{pmatrix},\ A-A^T=\begin{pmatrix} k & n \\ m & \ell \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & m \\ n & \ell \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & n-m \\ m-n & 0 \end{pmatrix}$$

3. Αν Α, Β συμμετρικοί, τότε οι $(A+B),(A-B)$ είναι συμμετρικοί. ✓
Επεξήγηση.

$$A=\begin{pmatrix} k & m \\ m & n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix},\ A+B=\begin{pmatrix} k+x & m+y \\ m+y & n+z \end{pmatrix}, A-B=\begin{pmatrix} k-x & m-y \\ m-y & n-z \end{pmatrix}$$

Άσκηση. Αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \Gamma=\begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -11 \end{bmatrix}$ βρείτε τους $-(A+B)+\Gamma$, $A+(B+\Gamma)$, $(-A)+(-B)$, $-(A+B)$, $A-(B-\Gamma)$, $(A-B)+\Gamma$, $A+A$.

Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί πίνακα.

Ναυτιλιακή εταιρεία λόγω αυξημένης κερδοφορίας αποφασίζει εφέτος να διπλασιάσει το bonus, που χορηγεί κάθε πρωτοχρονιά, στους αξιωματικούς των πλοίων της και το οποίο μέχρι τώρα αντιστοιχούσε σε ένα μισθό, ανάλογα με την τάξη και την ειδικότητα. Η μισθοδοσία (σε \$), ανά ειδικότητα και βαθμό, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα Α.

$$A=\begin{array}{c} \text{Πλ.} \quad\quad \text{Μηχ.} \\ \begin{bmatrix} 10.000 & 9.000 \\ 8.000 & 7.000 \\ 6.000 & 5.000 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{Α΄ τάξεως} \\ \text{Β΄τάξεως} \\ \text{Γ΄τάξεως} \end{array}$$

Ζητείται να υπολογισθεί το ύψος που θα κυμανθούν τα φετινά bonus. Προφανώς, όλα τα ανωτέρω ποσά θα διπλασιασθούν και τα εφετινά bonus θα φαίνονται στον πίνακα Β, ο οποίος είναι ίδιας διαστάσεως ($3x2$) με τον Α και κάθε στοιχείο του προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου στοιχείου του Α επί τον αριθμό 2.

$$B=\begin{array}{c} \text{Πλ.} \quad\quad \text{Μηχ.} \\ \begin{bmatrix} 20.000 & 18.000 \\ 16.000 & 14.000 \\ 12.000 & 10.000 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{Α΄ τάξεως} \\ \text{Β΄ τάξεως} \\ \text{Γ΄ τάξεως} \end{array}$$

Ορισμός. Γινόμενο πραγματικού αριθμού λ επί πίνακα $A=\left[a_{ij}\right]$, ονομάζεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε κάθε στοιχείο του Α με λ. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $\lambda \bullet A$ ή λA. Δηλαδή, $\lambda \bullet A=\left[\lambda \cdot a_{ij}\right]$. Η πράξη με την οποία βρίσκομε το γινόμενο αριθμού επί πίνακα, ονομάζεται πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί πίνακα. Στον παραπάνω ορισμό δεν αναφερθήκαμε καθόλου στις διαστάσεις του πίνακα, άρα ορίζεται πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με πίνακα τυχαίων διαστάσεων.

Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{i\nu-1} & \alpha_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu-11} & \alpha_{\mu-12} & \dots & \alpha_{\mu-1j} & \dots & \alpha_{\mu-1\nu-1} & \alpha_{\mu-1\nu} \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \dots & \alpha_{\mu j} & \dots & \alpha_{\mu\nu-1} & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$ τότε, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

ισχύει ότι $\lambda \bullet A=\begin{bmatrix} \lambda\cdot\alpha_{11} & \lambda\cdot\alpha_{12} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{1j} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{1\nu-1} & \lambda\cdot\alpha_{1\nu} \\ \lambda\cdot\alpha_{21} & \lambda\cdot\alpha_{22} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{2j} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{2\nu-1} & \lambda\cdot\alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\cdot\alpha_{i1} & \lambda\cdot\alpha_{i2} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{ij} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{i\nu-1} & \lambda\cdot\alpha_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\cdot\alpha_{\mu-11} & \lambda\cdot\alpha_{\mu-12} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{\mu-1j} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{\mu-1\nu-1} & \lambda\cdot\alpha_{\mu-1\nu} \\ \lambda\cdot\alpha_{\mu1} & \lambda\cdot\alpha_{\mu2} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{\mu j} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{\mu\nu-1} & \lambda\cdot\alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$

Στη σχέση $\lambda \bullet A=\left[\lambda\cdot\alpha_{ij}\right]$ η τελεία ($\bullet$), στο πρώτο μέλος, είναι το σύμβολο για την πράξη του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί πίνακα που δίνει αποτέλεσμα πίνακα, ενώ η τελεία ($\cdot$), στο δεύτερο μέλος, είναι το σύμβολο για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Επειδή ο πολλαπλασιασμός μεταξύ πραγματικών είναι αντιμεταθετική πράξη δηλαδή $\lambda\cdot\alpha_{ij}=\alpha_{ij}\cdot\lambda$, μπορούμε να γράφομε $\lambda \bullet A=\left[\lambda\cdot\alpha_{ij}\right]=\left[\alpha_{ij}\cdot\lambda\right]$.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί πίνακα.

Αν Α, Β πίνακες διαστάσεων $\mu x \nu$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού

1. $(\kappa+\lambda)A=\kappa A+\lambda A$,

2. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,

3. $\kappa(\lambda A)=(\kappa\lambda)A$,

4. $1A = A$ όπου 1 το μοναδιαίο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

5. Αν $\mathbf{O}$ ο μηδενικός πίνακας τότε $\lambda\mathbf{O}=\mathbf{O}$.

6. Αν $\lambda A=\mathbf{O}$ τότε $\lambda=0$ ή $A=\mathbf{O}$.

7. Το γινόμενο του πραγματικού αριθμού 0 επί τον τυχαίο πίνακα Α είναι ο αντίστοιχος μηδενικός πίνακας Δηλαδή $0A=\mathbf{O}$. Προκύπτει από λA, για $\lambda=0$.

8. $(-1)A=-A$ Προκύπτει από λA, για $\lambda=-1$.

9. Αν Α=Β τότε $\lambda \mathrm{A} = \lambda \mathrm{B}$.

10. Αν $\lambda \mathrm{A} = \lambda \mathrm{B}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

$$9\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix}$$

Αν $0\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ δεν έπεται ότι $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

11. Αν $\kappa \mathrm{A} = \lambda \mathrm{A}$ και $\mathrm{A} \neq \mathbf{O}$ τότε $\kappa = \lambda$.

Αν $5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν έπεται ότι $5 = k$.

$$5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 5 = k$$

12. Αν $\mathrm{A}_{\mu x \nu}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $(\lambda \mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \lambda \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Εφαρμογή. Ο πίνακας Α δείχνει τις τιμές πωλήσεως τριών ηλεκτρικών συσκευών σε δύο υποκαταστήματα.

$$\begin{array}{cccc} & \text{TV} & \text{dvd} & \text{MP3} & \\ \mathrm{A}= & \left[\begin{array}{ccc} 1000 & 200 & 300 \\ 1500 & 250 & 200 \end{array}\right] & & & \begin{array}{l} \text{Υποκατάστημα 1} \\ \text{Υποκατάστημα 2} \end{array} \end{array}$$

Αν κατά την περίοδο των εκπτώσεων, οι ηλεκτρικές συσκευές προσφέρονται στους καταναλωτές με έκπτωση 10%, υπολογίστε με χρήση πινάκων, τις νέες τους τιμές. Αφού τα προϊόντα πωλούνται με έκπτωση 10%, η τιμή πωλήσεως τους είναι το 90% της αρχικής τιμής ή διαφορετικά τα 9/10 αυτής. Οι νέες τιμές φαίνονται στον πίνακα Β, για τον οποίο ισχύει ότι Β = 0,9 ·Α.

$$\mathrm{B}=0{,}9\begin{bmatrix} 1000 & 200 & 300 \\ 1500 & 250 & 200 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{TV} & \text{dvd} & \text{MP3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 900 & 180 & 270 \\ 1350 & 225 & 180 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Υποκατάστημα 1} \\ \text{Υποκατάστημα 2} \end{array}$$

Εφαρμογή. Αποδείξτε ότι το παρακάτω άθροισμα είναι διαγώνιος πίνακας.

$$\cos \mathbf{A}\begin{bmatrix} \cos \mathbf{A} & -\sin \mathbf{A} \\ \sin \mathbf{A} & \cos \mathbf{A} \end{bmatrix} + \sin \mathbf{A}\begin{bmatrix} \sin \mathbf{A} & \cos \mathbf{A} \\ -\cos \mathbf{A} & \sin \mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, $\cos \mathbf{A}\begin{bmatrix} \cos \mathbf{A} & -\sin \mathbf{A} \\ \sin \mathbf{A} & \cos \mathbf{A} \end{bmatrix} + \sin \mathbf{A}\begin{bmatrix} \sin \mathbf{A} & \cos \mathbf{A} \\ -\cos \mathbf{A} & \sin \mathbf{A} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \cos \mathbf{A} \cdot \cos \mathbf{A} & -\sin \mathbf{A} \cdot \cos \mathbf{A} \\ \sin \mathbf{A} \cdot \cos \mathbf{A} & \cos \mathbf{A} \cdot \cos \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \mathbf{A} \cdot \sin \mathbf{A} & \cos \mathbf{A} \cdot \sin \mathbf{A} \\ -\cos \mathbf{A} \cdot \sin \mathbf{A} & \sin \mathbf{A} \cdot \sin \mathbf{A} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \mathbf{A} & -\sin \mathbf{A} \cdot \cos \mathbf{A} \\ \sin \mathbf{A} \cdot \cos \mathbf{A} & \cos^2 \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 \mathbf{A} & \cos \mathbf{A} \cdot \sin \mathbf{A} \\ -\cos \mathbf{A} \cdot \sin \mathbf{A} & \sin^2 \mathbf{A} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \mathbf{A} + \sin^2 \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos^2 \mathbf{A} + \sin^2 \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή. Βιομηχανία επεξεργασίας ξύλου χρησιμοποιεί τέσσερις μηχανές με τις οποίες κατασκευάζει τραπέζια, καρέκλες, και κρεβάτια. Το πλήθος των παραγόμενων προϊόντων, ανά ώρα και ανά μηχανή, δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Τρ} & \text{Καρ} & \text{Κρεβ} \end{array} \\ A= & \begin{bmatrix} 10 & 80 & 5 \\ 30 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 70 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1^{\eta} \text{ μηχανή} \\ 2^{\eta} \text{ μηχανή} \\ 3^{\eta} \text{ μηχανή} \\ 4^{\eta} \text{ μηχανή} \end{array} \end{array}$$

Στο τέλος μίας εργάσιμης ημέρας (8 ώρες εργασίας) πόσες μονάδες, από το κάθε προϊόν, θα έχει κατασκευάσει η κάθε μηχανή; Προφανώς, όλα τα ανωτέρω ποσά θα οκταπλασιαστούν και φαίνονται από τον πίνακα Β που ακολουθεί.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Τρ} & \text{Καρ} & \text{Κρεβ} \end{array} \\ B=8A=8\begin{bmatrix} 10 & 80 & 5 \\ 30 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 70 & 5 & 20 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 80 & 640 & 40 \\ 240 & 0 & 400 \\ 0 & 800 & 0 \\ 560 & 40 & 160 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1^{\eta} \text{ μηχανή} \\ 2^{\eta} \text{ μηχανή} \\ 3^{\eta} \text{ μηχανή} \\ 4^{\eta} \text{ μηχανή} \end{array} \end{array}$$

Ο Β είναι ιδίων διαστάσεων ($4x3$) με τον Α και κάθε στοιχείο του προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό, του αντίστοιχου στοιχείου του Α, επί τον αριθμό 8.

Εφαρμογή. Τα τρίποντα, τα δίποντα και οι ελεύθερες βολές που πέτυχαν, εντός και εκτός έδρας, τέσσερις ομάδες μπάσκετ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πόντοι	Τρίποντα	Τρίποντα	Δίποντα	Δίποντα	Ελεύθερες βολές	Ελεύθερες βολές
Ομάδες	Εντός έδρας	Εκτός έδρας	Εντός έδρας	Εκτός έδρας	Εντός έδρας	Εκτός έδρας
Αστραπή	10	8	21	15	10	8
Κεραυνός	9	7	18	14	12	11
Θύελλα	6	5	17	13	2	0
Ανίκητος	1	4	16	3	20	19

Γράψτε τα δεδομένα υπό μορφή τριών πινάκων Α, Β, Γ που να περιέχουν αντίστοιχα, τα τρίποντα, δίποντα και τις ελεύθερες βολές της κάθε ομάδος.

Βρείτε πίνακα που να δίνει τους συνολικούς πόντους που σημείωσε η κάθε μία ομάδα εντός και εκτός έδρας. Οι Α, Β, Γ δίνουν τα τρίποντα, τα δίποντα, τις ελεύθερες βολές, αντίστοιχα, που σημειώθηκαν εντός και εκτός έδρας.

$$A=\begin{bmatrix}10&8\\9&7\\6&5\\1&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}21&15\\18&14\\17&13\\16&3\end{bmatrix}, \Gamma=\begin{bmatrix}10&8\\12&11\\2&0\\20&19\end{bmatrix}.$$

Ο Δ δίνει τους συνολικούς πόντους κάθε ομάδας.

$$\Delta=3\begin{bmatrix}10&8\\9&7\\6&5\\1&4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}21&15\\18&14\\17&13\\16&3\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}10&8\\12&11\\2&0\\20&19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30&24\\27&21\\18&15\\3&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}42&30\\36&28\\34&26\\32&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10&8\\12&11\\2&0\\20&19\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30+42+10&24+30+8\\27+36+12&21+28+11\\18+34+2&15+26+0\\6+32+20&12+6+19\end{bmatrix}=\begin{array}{cc}\text{Εντός} & \text{Εκτός}\\ \left[\begin{array}{cc}82&62\\75&60\\54&41\\58&37\end{array}\right] & \begin{array}{l}\text{Αστραπή}\\ \text{Κεραυνός}\\ \text{Θύελλα}\\ \text{Ανίκητος}\end{array}\end{array}$$

Εφαρμογή. Τέσσερις εταιρείες καταλαμβάνουν από έναν όροφο μεγάρου, του οποίου η ανάλυση των εξόδων μηνός Μαρτίου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Καθαριότητα	Ανελκυστήρας	Θέρμανση	Φύλαξη	Ειδικά έξοδα
3.500 €	200 €	1.000 €	5.000 €	500 €

Αν η αναλογία επιβαρύνσεως κατά όροφο είναι:

1ος όροφος	2ος όροφος	3ος όροφος	4 ος όροφος
100 ‰	150 ‰	350 ‰	400 ‰

(**α**) Κατασκευάστε πίνακα που να αναλύει, κατά κατηγορία, τα έξοδα κάθε ορόφου.
(**β**) Τον Απρίλιο, λόγω ανόδου της θερμοκρασίας, θα μειωθεί κατά 10% η δαπάνη θερμάνσεως αλλά θα αυξηθούν κατά 20% τα ειδικά έξοδα, λόγω συντηρήσεως αποχετεύσεων και κηπευτικών εργασιών στον περιβάλλοντα χώρο. Βρείτε, με βάση τα νέα δεδομένα, τι ποσό θα πληρώσει ο κάθε όροφος τον Απρίλιο.
(**α**) Είναι 100‰=0,1 και 150‰=0,15 και 350‰=0,35 και 400‰=0,4. Κατασκευάζομε τον πίνακα στήλη που περιέχει τις αναλογίες (χιλιοστά) επιβαρύνσεως κάθε ορόφου.
$\begin{bmatrix}0,1\\0,15\\0,35\\0,4\end{bmatrix}$. Τα έξοδα, ανά κατηγορία, προκύπτουν από τους πολλαπλασιασμούς

$$3.500\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}350\\525\\1.225\\1.400\end{bmatrix}$$ για καθαριότητα, $$200\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\30\\70\\80\end{bmatrix}$$ για ανελκυστήρες,

$$1.000\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\150\\350\\400\end{bmatrix}$$ για θέρμανση, $$5.000\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}500\\750\\1.750\\2.000\end{bmatrix}$$ για φύλαξη,

$$500\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50\\75\\175\\200\end{bmatrix}$$ για τα ειδικά έξοδα.

Ο αναλυτικός πίνακας εξόδων, του Μαρτίου, κατά κατηγορία, για κάθε όροφο είναι

	Καθαριότητα	Ανελκυστήρες	Θέρμανση	Φύλαξη	Ειδικά έξοδα	Σύνολο
$1^{ος}$ όροφος	350 €	20 €	100 €	500 €	50 €	1.020€
$2^{ος}$ όροφος	525 €	30 €	150 €	750 €	75 €	1.530€
$3^{ος}$ όροφος	1.225 €	70 €	350 €	1.750 €	175 €	3.570€
$4^{ος}$ όροφος	1.400 €	80 €	400 €	2.000 €	200 €	4.080€
Σύνολο	3.500 €	200 €	1.000 €	5.000 €	500 €	10.200€

(**β**) Τον Απρίλιο η δαπάνη για θέρμανση θα μειωθεί κατά 10%, άρα θα ανέρχεται στο 90% της αντίστοιχης δαπάνης του Μαρτίου και ο καταμερισμός της, ανά όροφο, προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό $1.000\cdot 0{,}9\cdot\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=900\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\\135\\315\\360\end{bmatrix}$

Η δαπάνη για ειδικά έξοδα θα σημειώσει αύξηση 20%, άρα θα ανέρχεται στο 120% της αντίστοιχης δαπάνης του Μαρτίου και ο καταμερισμός της, ανά όροφο, προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό $500\cdot 1{,}2\cdot\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=600\begin{bmatrix}0{,}1\\0{,}15\\0{,}35\\0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\\90\\210\\240\end{bmatrix}$.

Οι λοιπές δαπάνες παραμένουν αμετάβλητες (3.500 € για καθαριότητα, 200 € για συντήρηση ανελκυστήρων και 5.000 € για υπηρεσίες φυλάξεως). Η δαπάνη, ανά όροφο, τον Απρίλιο προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό

$$\left(3.500+200+0,9\cdot 1.000+5.000+500\cdot 1,2\right)\cdot\begin{bmatrix}0,1\\0,15\\0,35\\0,4\end{bmatrix}=$$

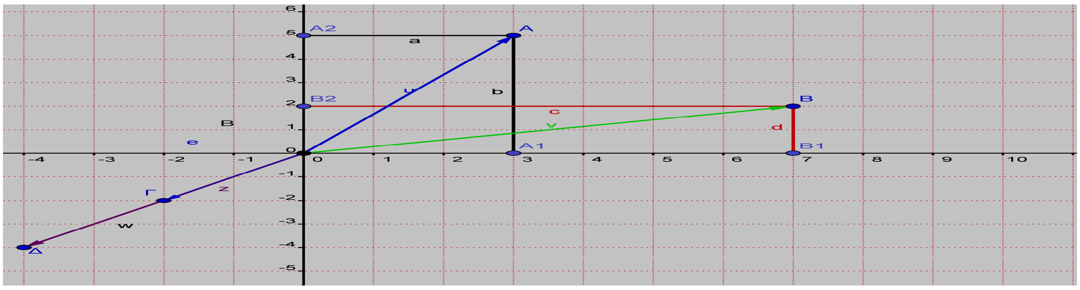
$$10.200\cdot\begin{bmatrix}0,1\\0,15\\0,35\\0,4\end{bmatrix}=\begin{array}{c|l}\begin{bmatrix}1.020\\1.530\\3.570\\4.080\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{εταιρεία } 1^{\text{ου}} \text{ ορόφου}\\ \text{εταιρεία } 2^{\text{ου}} \text{ ορόφου}\\ \text{εταιρεία } 3^{\text{ου}} \text{ ορόφου}\\ \text{εταιρεία } 4^{\text{ου}} \text{ ορόφου}\end{array}\end{array}$$

Εφαρμογή. Κάθε διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια πίνακα γραμμή ή πίνακα στήλη. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα,

$\overrightarrow{OA}$=[A1,A2]=[3,5] ή $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}A1\\A2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OB}$=[B1,B2]=[7,2] ή $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}B1\\B2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$

Για να προσθέσομε ή αφαιρέσομε δύο διανύσματα, προσθέτομε ή αφαιρούμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες τους. Συνεπώς είναι

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}A1\\A2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B1\\B2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\7\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}A1\\A2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B1\\B2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$



Όταν ένα διάνυσμα πολλαπλασιάζεται επί έναν πραγματικό αριθμό, τότε το διάνυσμα που προκύπτει έχει ως συντεταγμένες τις αντίστοιχες συντεταγμένες του αρχικού, πολλαπλασιασμένες επί τον πραγματικό αριθμό. Στο παραπάνω σχήμα είναι $\overrightarrow{O\Gamma}=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{O\Delta}=2\,\overrightarrow{O\Gamma}=2\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-4\end{bmatrix}$. Συνεπώς ο πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα ανάγεται σε πολλαπλασιασμό αριθμού επί πίνακα.

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Οι αξιωματικοί που απασχολούνται σε εταιρεία, ανά ειδικότητα (πλοίαρχοι, μηχανικοί) και βαθμό (Α΄, Β΄, Γ΄) φαίνονται στον πίνακα.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc}\text{Πλ.} & \text{Μηχ.}\end{array}\\ A= & \begin{bmatrix}30 & 40\\35 & 45\\50 & 60\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{Α΄ τάξεως}\\ \text{Β΄τάξεως}\\ \text{Γ΄τάξεως}\end{array}\end{array}$$

Λόγω αυξημένης κερδοφορίας, η εταιρεία κατέβαλε πέρυσι πριμ 8.000 € σε κάθε αξιωματικό γέφυρας και 7.000 € σε κάθε αξιωματικό μηχανής, ανεξαρτήτως τάξεως. Για εφέτος προγραμματίζει να κάνει το ίδιο, προσφέροντας 10.000 € και 9.000 € αντίστοιχα. Ζητείται από το λογιστήριο να υπολογίσει πόσα χρήματα δόθηκαν πέρυσι στους αξιωματικούς (πλοιάρχους και μηχανικούς) κάθε τάξεως ξεχωριστά και πόσα θα δοθούν εφέτος. Ο λογιστής, θα σχηματίσει τον $2x2$ πίνακα Β των bonus και θα κάνει τις παρακάτω πράξεις

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Πέρυσι} & \text{Εφέτος}\end{array} \\ \text{Β=} & \begin{bmatrix} 8.000 & 10.000 \\ 7.000 & 9.000 \end{bmatrix} \begin{array}{l}\text{Πλοίαρχοι} \\ \text{Μηχανικοί}\end{array} \end{array}$$

Για το περσινό πριμ των αξιωματικών Α΄ τάξεως (πλοιάρχων και μηχανικών) έδωσε 30 ·8.000 € + 40 ·7.000 € = 240.000 € + 280.000 € = **520.000 €.**
Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 30 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \cdot 8.000 + 40 \cdot 7.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 520.000 \end{bmatrix}$$

Για το εφετινό πριμ των αξιωματικών Α΄ τάξεως (πλοιάρχων και μηχανικών) θα δώσει 30 ·10.000 € + 40 ·9.000 € = 300.000 € + 360.000 € = **660.000 €.**
Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} 30 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10.000 \\ 9.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \cdot 10.000 + 40 \cdot 9.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 660.000 \end{bmatrix}$$

Για το περσινό πριμ των αξιωματικών Β΄ τάξεως (πλοιάρχων και μηχανικών) έδωσε 35 ·8.000 € + 45 ·7.000 € = 280.000 € + 315.000 € = **595.000 €.**
Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} 35 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \cdot 8.000 + 45 \cdot 7.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 595.000 \end{bmatrix}$$

Για το εφετινό πριμ των αξιωματικών Β΄ τάξεως (πλοιάρχων και μηχανικών) θα δώσει 35 ·10.000 € + 45 ·9.000 € = 350.000 € + 405.000 € = **755.000 €.**
Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} 35 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10.000 \\ 9.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \cdot 10.000 + 45 \cdot 9.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 755.000 \end{bmatrix}$$

Για το περσινό πριμ των αξιωματικών Γ΄ τάξεως (πλοιάρχων και μηχανικών) έδωσε 50 ·8.000 € + 60 ·7.000 € = 400.000 € + 420.000 € = **820.000 €.**
Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} 50 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \cdot 8.000 + 60 \cdot 7.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 820.000 \end{bmatrix}$$

Για το εφετινό πριμ των αξιωματικών Γ΄ τάξεως (πλοιάρχων και μηχανικών) θα δώσει 50 ·10.000 € + 60 ·9.000 € = 500.000 € + 540.000 € = **1.040.000 €.**
Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} 50 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10.000 \\ 9.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \cdot 10.000 + 60 \cdot 9.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.040.000 \end{bmatrix}$$

Όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων μπορούν να συνοψιστούν υπό τη μορφή πίνακα διπλής εισόδου ως εξής

Πέρυσι	Εφέτος	Αξ/κοί (Πλ/χοι & μηχ/κοί)
520.000	660.000	Α΄ τάξεως
595.000	755.000	Β΄ τάξεως
820.000	1.040.000	Γ΄ τάξεως

ή υπό μορφή πίνακα

$$\begin{array}{c} \\ \Gamma= \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Πέρυσι} & \text{Εφέτος} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 520.000 & 660.000 \\ 595.000 & 755.000 \\ 820.000 & 1.040.000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{(Πλ/χοι \& Μηχ/κοί) Α΄} \\ \text{(Πλ/χοι \& Μηχ/κοί) Β΄} \\ \text{(Πλ/χοι \& Μηχ/κοί) Γ΄} \end{array}$$

Ο πίνακας Γ ονομάζεται γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β και συμβολίζεται ΑΒ. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο γ_{11} προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της πρώτης στήλης του Β και αθροίσουμε τα γινόμενα. Το στοιχείο γ_{12} προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της δεύτερης στήλης του Β και αθροίσομε τα γινόμενα, κ.ο.κ.

Ορισμός. Αν $A_{\mu x \nu}=\left[\alpha_{ik}\right]$, $B_{\nu x \rho}=\left[\beta_{kj}\right]$ ορίζομε ως γινόμενο του Α με τον Β και το συμβολίζομε με ΑΒ ή $A \cdot B$, τον $\mu x \rho$ πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της i γραμμής του A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης του B. Δηλαδή $\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\alpha_{i3}\beta_{3j}+\ldots+\alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}$.

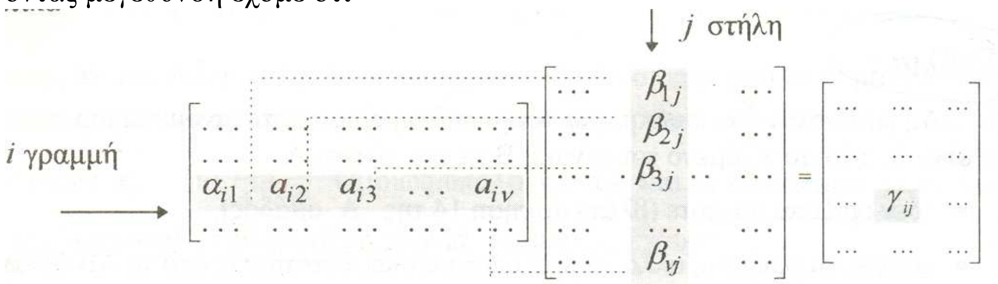
Σχηματικά αυτό περιγράφεται ως εξής

$$A_{\mu x \nu}=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{i\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{i γραμμή} \\ \\ \\ \end{array}, \quad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \text{j στήλη} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1j} & \ldots & \beta_{1\rho} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2j} & \ldots & \beta_{2\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \ldots & \beta_{ij} & \ldots & \beta_{i\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \ldots & \beta_{\nu j} & \ldots & \beta_{\nu\rho} \end{bmatrix} \end{array} \text{ και}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{i γραμμή} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{i\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \text{j στήλη} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1j} & \ldots & \beta_{1\rho} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2j} & \ldots & \beta_{2\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \ldots & \beta_{ij} & \ldots & \beta_{i\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \ldots & \beta_{\nu j} & \ldots & \beta_{\nu\rho} \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$\begin{array}{cc} \text{j στήλη} & \\ \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1j} & \cdots & \gamma_{1\rho} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2j} & \cdots & \gamma_{2\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \cdots & \gamma_{ij} & \cdots & \gamma_{i\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \cdots & \gamma_{\mu j} & \cdots & \gamma_{\mu\rho} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{i γραμμή} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Κάνοντας μεγέθυνση έχομε ότι



Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός ΑΒ των Α, Β δεν ορίζεται για όλους τους πίνακες αλλά μόνο για αυτούς στους οποίους <u>ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα</u>.

Ορισμός. Δύναμη ενός τετραγωνικού πίνακα διαστάσεως ν, με εκθέτη φυσικό αριθμό $\kappa \neq 0$ ορίζομε τον πίνακα $A^{\kappa} = \underbrace{AAA...A}_{\kappa\ \text{φορές}}$. Όταν κ=1, ορίζομε $A^1 = A$.

Εφαρμογή. Το παρακάτω δίκτυο παρουσιάζει τις συνδέσεις των λιμανιών Λ1, Λ2 με τα λιμάνια Λ3, Λ4, Λ5 μίας άλλης χώρας και τις συνδέσεις αυτών με τα λιμάνια Λ6, Λ7. Ο αριθμός των ναυτιλιακών εταιρειών που συνδέουν τα λιμάνια αυτά φαίνεται στο δίκτυο πάνω από κάθε γραμμή.

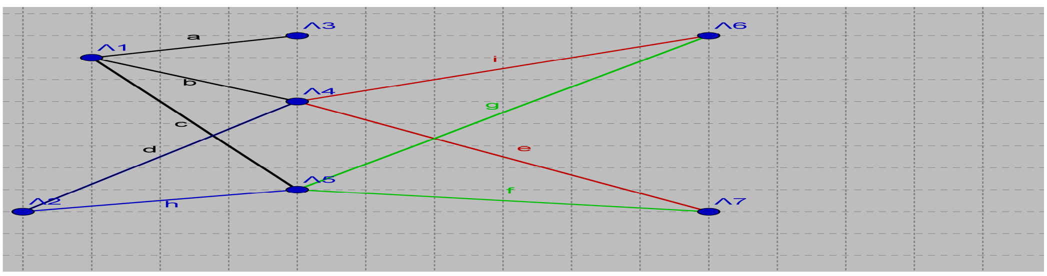
1. Να δοθούν με τη μορφή πίνακα Α οι πληροφορίες του δικτύου για τα δρομολόγια από τα λιμάνια Λ1, Λ2 προς τα λιμάνια Λ3, Λ4, Λ5.

2. Ομοίως με τη μορφή πίνακα Β για τα δρομολόγια από τα λιμάνια Λ3, Λ4, Λ5 προς τα λιμάνια Λ6, Λ7.

3. Γράψτε πίνακα Γ που να δίνει πληροφορίες για το πλήθος όλων των δυνατών δρομολογίων μεταξύ των Λ1, Λ2 και Λ6, Λ7.

4. Υπολογίστε το γινόμενο ΑΒ και να το συγκρίνετε με τον πίνακα Γ.

Να γίνει εφαρμογή για a=3, b=6, c=1, d=5, e=2, f=3, g=4, h=2, i=1.



1. Οι πληροφορίες δίνονται από τον πίνακα διπλής εισόδου και τον πίνακα Α

	Λ3	Λ4	Λ5
Λ1	a=3	b=6	c=1
Λ2	0	d=5	h=2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Οι πληροφορίες δίνονται από τον πίνακα διπλής εισόδου και τον πίνακα Β

	Λ6	Λ7
Λ3	0	0
Λ4	i=1	e=2
Λ5	g=4	f=3

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

3. Οι πληροφορίες δίνονται από τον πίνακα διπλής εισόδου και τον πίνακα Γ

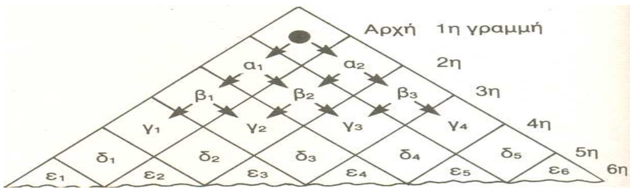
	Λ6	Λ7
Λ1	bi + cg = 6 + 4 = **10**	be +cf = 12 + 3 = **15**
Λ2	di + hg = 5 + 8 =**13**	de + hf= 10 + 6 =**16**

$$\Gamma=\begin{bmatrix}10 & 15\\ 13 & 16\end{bmatrix}$$

4. Εκτελούμε τις πράξεις και παρατηρούμε ότι ΑΒ = Γ.

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 15\\ 13 & 16\end{bmatrix}=\Gamma$$

Άσκηση. Η μπίλια στο σχήμα μπορεί να κινηθεί από την κορυφή του πλέγματος προς τα κάτω, μόνο πλαγίως, όπως δείχνουν τα βέλη και μόνο κατά ένα τετράγωνο την κάθε φορά.



(**α**) Να συμπληρωθούν οι παρακάτω κινήσεις της μπίλιας, από γραμμή σε γραμμή του πλέγματος, ακολουθώντας τον εξής κανόνα: Γράφομε 1 αν η μπίλια μπορεί να μετακινηθεί από το ένα τετράγωνο στο άλλο και 0 αν δε μπορεί.

$$\begin{array}{c|cc} \text{Στο} & \alpha1 & \alpha2 \\ \text{Από την αρχή} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{bmatrix}} \end{array},\qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\beta1 & \beta2 & \beta3\end{array} \\ \text{Από}\begin{array}{c}\alpha1\\ \alpha2\end{array} & \begin{bmatrix}\dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}\end{array},\qquad \begin{array}{cc} \text{Στο} & \begin{array}{cccc}\gamma1 & \gamma2 & \gamma3 & \gamma4\end{array} \\ \text{Από}\begin{array}{c}\beta1\\ \beta2\\ \beta3\end{array} & \begin{bmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}\end{array},$$

$$\begin{array}{cc} \text{Στο} & \begin{array}{ccccc}\delta1 & \delta2 & \delta3 & \delta4 & \delta5\end{array} \\ \text{Από}\begin{array}{c}\gamma1\\ \gamma2\\ \gamma3\\ \gamma4\end{array} & \begin{bmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}\end{array},\qquad \begin{array}{cc} \text{Στο} & \begin{array}{cccccc}\varepsilon1 & \varepsilon2 & \varepsilon3 & \varepsilon4 & \varepsilon5 & \varepsilon6\end{array} \\ \text{Από}\begin{array}{c}\delta1\\ \delta2\\ \delta3\\ \delta4\\ \delta5\end{array} & \begin{bmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}\end{array}.$$

(**β**) Αν A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 είναι κατά σειρά οι παραπάνω πίνακες, να βρεθεί το γινόμενο $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ και να εξηγηθεί τι παριστάνει.

Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων.

$$A_{2\times2}B_{2\times2}=(AB)_{2\times2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}.$$

$$A_{2X3}B_{3X2}=[AB]_{2X2}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&7\\8&9\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot0+2\cdot8-3\cdot1&1\cdot7+2\cdot9-3\cdot2\\4\cdot0+5\cdot8-6\cdot1&4\cdot7+5\cdot9-6\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&19\\34&61\end{bmatrix}.$$

$$A_{3X1}B_{1X3}=(AB)_{3X3}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4&1\cdot5&1\cdot6\\2\cdot4&2\cdot5&2\cdot6\\3\cdot4&3\cdot5&3\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&6\\8&10&12\\12&15&18\end{pmatrix}.$$

$$A_{1X3}B_{3X1}=(AB)_{1X1}$$

$$\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3)=(32).$$

$$A_{3X1}B_{1X2}=(AB)_{3X2}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4&1\cdot5\\2\cdot4&2\cdot5\\3\cdot4&3\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\8&10\\12&15\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix}$$

Εφαρμογή. Έστω το γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων και δύο αγνώστων $\begin{cases}3x-y=3\\5x+2y=16\end{cases}$. Αυτό μπορεί με τη βοήθεια πινάκων να γραφεί με τη μορφή A·X=B, όπου A=$\begin{bmatrix}3&-1\\5&2\end{bmatrix}$ ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ο πίνακας των αγνώστων και B=$\begin{bmatrix}3\\16\end{bmatrix}$ ο πίνακας των σταθερών όρων.

Άσκηση. Το σύστημα $\begin{cases} x+y+2z=8 \\ 2x-y+3z=15 \\ 3x+2y-z=-3 \end{cases}$ να γραφεί στη μορφή ΑΧ=Β.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων.

1. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι πράξη αντιμεταθετική, όπως ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών, διότι υπάρχουν οι εξής πέντε περιπτώσεις:

(**α**) Να μην ορίζονται ούτε το ΑΒ ούτε το ΒΑ. Π.χ. $\mathbf{A}_{1X2}$, $\mathbf{B}_{3X4}$

(**β**) Να ορίζεται μόνο το ΑΒ αλλά όχι το ΒΑ. Π.χ. $\mathbf{A}_{1X2}$, $\mathbf{B}_{2X3}$

(**γ**) Να ορίζεται μόνο το ΒΑ αλλά όχι το ΑΒ. Π.χ. $\mathbf{B}_{3X4}$, $\mathbf{A}_{4X1}$

(**δ**) Να ορίζονται το ΑΒ και το ΒΑ, αλλά να είναι πίνακες διαφορετικών διαστάσεων, άρα όχι ίσοι μεταξύ τους. Π.χ. $\mathbf{A}_{2X3}\ \mathbf{B}_{3X2} \to (\mathbf{AB})_{2X2}$ και $\mathbf{B}_{3X2}\ \mathbf{A}_{2X3} \to (\mathbf{BA})_{3X3}$

(**ε**) Να ορίζονται τα ΑΒ και ΒΑ, να είναι πίνακες ιδίων διαστάσεων αλλά ΑΒ≠ΒΑ.

Π.χ. Αν Α=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, Β=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ τότε

$$\text{AB}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot1+3\cdot2 & 2\cdot0+3\cdot7 \\ 1\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot0+4\cdot7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 9 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\text{BA}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot3+0\cdot4 \\ 2\cdot2+7\cdot1 & 2\cdot3+7\cdot4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 34 \end{bmatrix}$$

Πιθανό στην εκφώνηση κάποιων ασκήσεων, να αναφέρεται ότι ΑΒ=ΒΑ. Αυτό είναι μία ειδική περίπτωση, δεν είναι κάτι γενικό και σε καμία περίπτωση δε σημαίνει ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

2. Αν ΑΒ=**Ο** αυτό δε συνεπάγεται ότι Α=**Ο** ή Β=**Ο** όπως συμβαίνει στους πραγματικούς αριθμούς.

Πράγματι αν Α=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}$, Β=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}$ τότε ΑΒ=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$=O.

3. Αν $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ και Α, Β, Γ πίνακες, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες υπό την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται.

- $\text{A}(\text{B}\pm\Gamma)=\text{AB}\pm\text{A}\Gamma$ επιμεριστική,
- $(\text{B}\pm\Gamma)\text{A}=\text{BA}\pm\Gamma\text{A}$ επιμεριστική,
- $(\kappa\text{A})(\lambda\text{B})=(\kappa\lambda)\text{AB}$,
- $\lambda(\text{AB})=(\lambda\text{A})\text{B}=\text{A}(\lambda\text{B})$,
- $\text{AI}_\nu=\text{I}_\mu\text{A}=\text{A}$ όπου μ, ν οι διαστάσεις του Α,
- Αν Α οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας διάστασης ν, ισχύει $\text{AI}_\nu=\text{I}_\nu\text{A}=\text{A}$,

➢ $A(B\Gamma)=(AB)\Gamma$ προσεταιριστική.

Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει να γράφομε $AB\Gamma$ για καθένα από τα ίσα γινόμενα $A(B\Gamma)$, $(AB)\Gamma$. Αν Α, Β, Γ, Δ πίνακες τέτοιοι ώστε να ορίζονται τα γινόμενα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, έχομε (ΑΒ)(ΓΔ) = [(ΑΒ)Γ]Δ = Α[Β(ΓΔ)] = [Α(ΒΓ)]Δ και μπορούμε να γράφομε ΑΒΓΔ για καθένα από τα γινόμενα αυτά.

Γενικά, επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν πολλαπλασιάζομε έναν αριθμό πινάκων A_1, A_2, A_3, …$A_{\nu-1}$, A_ν, το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός, χωρίς όμως να αλλάξει η σειρά των παραγόντων και συμβολίζεται $A_1A_2A_3\ldots A_{\nu-1}A_\nu$.

4. Αν $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}^*$ και $\rho\in\mathbb{R}$, ισχύουν:

➢ $A^\kappa A^\lambda=A^{\kappa+\lambda}$, Π.χ. $A^2A^3=A^5$

➢ $\left(A^\kappa\right)^\lambda=A^{\kappa\lambda}$, Π.χ. $\left(A^2\right)^3=A^6$, $\left(A^3\right)^2=A^6$

➢ $(\rho A)^\kappa=\rho^\kappa A^\kappa$, Π.χ. $(3A)^2=9A^2$, $(2A)^3=8A^3$

➢ $A^1=A$,

➢ $(I_\nu)^\kappa=I_\nu$.

5. Αν $A_{\nu\chi\mu}$, $B_{\mu\chi\rho}$ τότε $(AB)^T=B^TA^T$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $(A_1A_2A_3...A_\nu)^T=A_\nu^T\ A_{\nu-1}^T\ A_{\nu-2}^T\ ...A_3^TA_2^TA_1^T$.

6. Αν Α,Β διαγώνιοι διαστάσεως ν, οι ΑΒ, ΒΑ είναι διαγώνιοι και $AB=BA$.

Π.χ. Αν $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0\\0&5\end{pmatrix}$ τότε $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&15\end{pmatrix}$.

7. Αν $A=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}$ τότε $A^2=\begin{bmatrix}\alpha^2&0\\0&\beta^2\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}\alpha^3&0\\0&\beta^3\end{bmatrix}$,…, $A^\nu=\begin{bmatrix}\alpha^\nu&0\\0&\beta^\nu\end{bmatrix}$ όπου $\nu\in\mathbb{N}$.

Αν $B=\begin{bmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{bmatrix}$ τότε $B^2=\begin{bmatrix}\alpha^2&0&0\\0&\beta^2&0\\0&0&\gamma^2\end{bmatrix}$, $B^3=\begin{bmatrix}\alpha^3&0&0\\0&\beta^3&0\\0&0&\gamma^3\end{bmatrix}$,…, $B^\nu=\begin{bmatrix}\alpha^\nu&0&0\\0&\beta^\nu&0\\0&0&\gamma^\nu\end{bmatrix}$ όπου $\nu\in\mathbb{N}$.

8. Αν για τους Α, Β, Γ ισχύει ότι $AB=A\Gamma$, δεν έπεται ότι $B=\Gamma$ (νόμος διαγραφής).

Π.χ. Έστω $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}-3&-2\\2&0\end{bmatrix}$.

Προφανώς $B\neq\Gamma$. Όμως $AB=A\Gamma=\begin{bmatrix}1&-2\\3&-6\end{bmatrix}$.

Παρατήρηση. Αν $A_{\mu\chi\nu}$ δείξτε ότι οι AA^T, A^TA είναι συμμετρικοί.

Απόδειξη. Γνωρίζομε ότι $(AB)^T = B^T A^T$ και ότι αν $A = A^T$ τότε ο A είναι συμμετρικός. Αφού $(A A^T)^T = (A^T)^T A^T = A A^T$, θα είναι ο AA^T συμμετρικός. Ομοίως $\left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = AA^T$. Συνεπώς ο AA^T είναι συμμετρικός.

Αδύναμος, ονομάζεται ο πίνακας $A_{\nu x \nu}$ για τον οποίο ισχύει $A^2 = A$. Ένας αδύναμος πίνακας ονομάζεται και περιοδικός με περίοδο 1. Οι αδύναμοι πίνακες έχουν πολλές εφαρμογές στη στατιστική.

Π.χ. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Αν $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ είναι $B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 4+3-5 & -6-12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή. Αν $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\Gamma^2 = \Gamma$, $\Delta^2 = \Delta$.

Ορθογώνιος, ονομάζεται ο πίνακας $A_{\nu x \nu}$ για τον οποίο ισχύει ότι $AA^T = A^T A = I$.
Και επειδή $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ είναι $A^{-1} = A^T$.

Άσκηση. Εξετάστε αν είναι ορθογώνιος ο $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Είναι $A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Παραδείγματα και ασκήσεις.

Εφαρμογή. Εμπορική επιχείρηση έχει υποκαταστήματα σε Αθήνα, Θεσσαλονίκη και Ηράκλειο, από τα οποία πούλησε, σε μία ημέρα, τρία προϊόντα, σε ποσότητες ανά υποκατάστημα, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3
Υποκαταστήματα	Laptop	Printer	Scanner
Αθηνών	90	80	20
Θεσσαλονίκης	70	50	45
Ηρακλείου	60	150	100

Αν οι τιμές πωλήσεως για τα προϊόντα 1, 2, 3 είναι 600 €, 50 €, 40 € αντίστοιχα, ανεξάρτητα από το υποκατάστημα που πωλούνται, να βρεθούν, με τη βοήθεια πράξεων των πινάκων, τα έσοδα κάθε υποκαταστήματος.

Ο A_{3x3} δείχνει τις πωλήσεις ανά προϊόν και υποκατάστημα. Ο B_{3x1} δείχνει τις τιμές πωλήσεως κάθε προϊόντος. Ο $\Gamma_{3x1} = AB$ δείχνει τα έσοδα κάθε υποκαταστήματος.

$$A_{3X3}=\begin{array}{cc} \begin{matrix}\text{Lap} & \text{Pr} & \text{Scan}\end{matrix} & \\ \begin{bmatrix}90 & 80 & 20\\ 70 & 50 & 45\\ 60 & 150 & 100\end{bmatrix} & \begin{matrix}\text{Αθήνα}\\ \text{Θεσ/νίκη}\\ \text{Ηράκλειο}\end{matrix}\end{array} \qquad B_{3X1}=\begin{bmatrix}600\\ 50\\ 40\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{Laptop}\\ \text{Printer}\\ \text{Scanner}\end{matrix}$$

$$\Gamma=A_{3x3}B_{3x1}=\begin{bmatrix}90 & 80 & 20\\ 70 & 50 & 45\\ 60 & 150 & 100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}600\\ 50\\ 40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\cdot 600+80\cdot 50+20\cdot 40\\ 70\cdot 600+50\cdot 50+45\cdot 40\\ 60\cdot 600+150\cdot 50+100\cdot 40\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}54.000+4.000+800\\ 42.000+2.500+1.800\\ 36.000+7.500+4.000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58.800\\ 46.300\\ 47.500\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{Αθήνα}\\ \text{Θεσ/νίκη}\\ \text{Ηράκλειο}\end{matrix}$$

Π.χ. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$, δείξτε ότι $A^2+B^2=(A+B)^2$. Ποιο είναι το συμπέρασμα σας; Είναι:

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \quad B^2=BB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

άρα $A^2+B^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.

Ισχύει ότι $AB=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, άρα $AB+BA=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Επίσης είναι $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.

Άρα $A^2+B^2=(A+B)^2$.

Το συμπέρασμα είναι ότι, γενικά, στους πίνακες δεν ισχύουν οι ταυτότητες που γνωρίζαμε στους πραγματικούς αριθμούς διότι δεν ισχύει στους πίνακες η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσομε τον $(A+B)^2$ και ως εξής $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$.

Εφαρμογές.

1. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 6 & 11\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $AB=BA=\begin{bmatrix}17 & 26\\ 39 & 56\end{bmatrix}$.

2. Αν $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&0\\0&5\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $AB=BA=\begin{bmatrix}8&0\\0&15\end{bmatrix}$.

3. Αν $A=\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $AB=BA=\begin{bmatrix}2&8\\6&4\end{bmatrix}$.

4. Αν $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-3&4\\3&-3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&3&3\\-1&0&-1\\-4&-4&-3\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A^2=I_3$, $B^2=I_3$.

Άσκηση. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

1. Για να ορίζετε ο A^2 πρέπει ο A να είναι τετραγωνικός. ✓

2. Αν A_{2x2} ισχύει ότι $AA^2=A^2A$. ✓

3. Αν $A_{\mu x\nu}$ και $AI_\nu=I_\nu A=A$ τότε $\mu=\nu$. ✓

4. Αν A_{2x3}, B_{3x2}, τότε ορίζονται τα γινόμενα AB, BA και $AB=BA$. (Λάθος)

Άσκηση. Ποιοί από τους παρακάτω πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με τον $(A+B)^2$;

1. $(B+A)^2$ ✓

2. $A^2+2AB+B^2$ (Λάθος)

3. $A(A+B)+B(A+B)$ ✓

4. $A^2+AB+BA+B^2$. ✓

Άσκηση. Σημειώστε τη σωστή απάντηση.

1. Αν δύο πίνακες είναι ιδίων διαστάσεων τότε ορίζεται πάντα
(**α**) Το $A+B$ ✓
(**β**) Το AB (Λάθος)
(**γ**) Και τα δύο
(**δ**) Τίποτα από τα δύο.

2. Αν για δύο πίνακες $2x2$ ισχύει $A^2=B^2$, τότε
(**α**) $A=B$
(**β**) $A=-B$
(**γ**) Ισχύουν και τα δύο
(**δ**) Μπορεί να μην ισχύει κανένα από τα δύο. ✓

Επεξήγηση. Αν $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}$, δηλαδή $A\neq B\neq\Gamma$ είναι $A^2=B^2=\Gamma^2=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}$.

3. Αν για δύο πίνακες διαστάσεων $\nu x \nu$ ισχύει $(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2=\mathbf{O}$, τότε

(**α**) $\mathrm{A}=\mathrm{B}$

(**β**) $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathbf{O}$

(**γ**) Δεν είναι απαραίτητο να ισχύει το (**α**) ή το (**β**). ✓

4. Αν για τον A_{2x2} είναι $\mathrm{A}^2=\mathbf{O}$, τότε

(**α**) $\mathrm{A}=\mathrm{I}_2$

(**β**) $\mathrm{A}=\mathbf{O}$

(**γ**) Δεν είναι απαραίτητο να ισχύει το (**α**) ή το (**β**). ✓

Άσκηση. Οι διαστάσεις των Α, Β αντίστοιχα, ώστε το γινόμενο τους να είναι πίνακας στοιχείο είναι

(**α**) $\mu x \nu, \nu x 1$

(**β**) $1 x \nu, \nu x 1$ ✓

(**γ**) $1 x \nu, \nu x \lambda$.

Άσκηση. Αν Α, Β τετραγωνικοί ιδίου τύπου δείξτε ότι $(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2=\mathrm{A}^2-\mathrm{AB}-\mathrm{BA}+\mathrm{B}^2$. Πότε ισχύει η ισότητα $(\mathrm{A}\pm\mathrm{B})^2=\mathrm{A}^2\pm 2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2$;

Άσκηση. Βιομηχανία επίπλων έχει δύο εργοστάσια E_1, E_2. Οι Α, Β δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές σε ευρώ (€), του προσωπικού αντιστοίχως.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc}\text{Κατασκευή} & \text{Βάψιμο} & \text{Συσκευασία}\end{array} \\
\mathrm{A}= & \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}\text{Τραπέζι} \\ \text{Κρεβάτι} \\ \text{Καρέκλα}\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}\mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2\end{array} \\
\mathrm{B}= & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}\text{Κατασκευή} \\ \text{Βάψιμο} \\ \text{Συσκευασία}\end{array}$$

Βρείτε τον πίνακα ΑΒ και εξηγήστε τι εκφράζει. Ποιο το κόστος εργασίας για την παραγωγή μίας καρέκλας στο E_1 και ενός τραπεζιού στο E_2;

Άσκηση. Αν A_{3x3}, B_{3x3} σημειώστε ποιές από τις προτάσεις θεωρείτε σωστές, αιτιολογώντας την απάντηση σας. Για τις λάθος προτάσεις δώστε αντιπαράδειγμα.

(**α**) Αν η 1η και η 3η στήλη του Β είναι ίδιες, τότε η 1η και η 3η στήλη του ΑΒ είναι ίδιες. ✓

Επεξήγηση. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & 1 & k \\ \ell & 2 & \ell \\ m & 4 & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k+2\ell+3m & \ldots & k+2\ell+3m \\ 4k+5\ell+6m & \ldots & 4k+5\ell+6m \\ 7k+8\ell & \ldots & 7k+8\ell \end{pmatrix}$

(**β**) Αν η 1η και η 3η γραμμή του Β είναι ίδιες, τότε η 1η και η 3η γραμμή του ΑΒ είναι ίδιες. (Λάθος)

Επεξήγηση. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & \ell & m \\ x & y & z \\ k & \ell & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4k+2x & 4\ell+2y & 4m+2z \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 7k+8x & 7\ell+8y & 7m+8z \end{pmatrix}$

(γ) Αν η $1^η$ και η $3^η$ γραμμή του πίνακα Α είναι ίδιες, τότε και η $1^η$ με την $3^η$ γραμμή του ΑΒ είναι ίδιες. ✓

Επεξήγηση. $\begin{pmatrix} k & \ell & m \\ x & y & z \\ k & \ell & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+4\ell+7m & 2k+5\ell+8m & 3k+6\ell \\ \dots & \dots & \dots \\ k+4\ell+7m & 2k+5\ell+8m & 3k+6\ell \end{pmatrix}$

Άσκηση. Βρείτε με δοκιμές, πίνακες $2x2$ ώστε:

(**α**) $A^2 = -I$ με στοιχεία του Α πραγματικούς αριθμούς.

$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

(**β**) $B^2 = \mathbf{O}$ με κάποια στοιχεία του Β διάφορα του μηδενός

(**γ**) $\Gamma \cdot \Delta = -\Delta \cdot \Gamma$, με $\Gamma \cdot \Delta \neq \mathbf{O}$,

(**δ**) $EZ = \mathbf{O}$, με όλα τα στοιχεία των Ε, Ζ μη μηδενικά.

Άσκηση. Α. Δείξτε ότι το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων, διαστάσεως 3, είναι άνω τριγωνικός, διαστάσεως 3.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & k & l \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb+yd & xc+ye+zf \\ 0 & kd & ke+lf \\ 0 & 0 & mf \end{pmatrix}$$

Β. Δείξτε ότι το γινόμενο δυο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός πίνακας.

Γ. Δείξτε ότι κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Δ. Δείξτε ότι αν Α, Β συμμετρικοί, ισχύει ότι: AB *συμμετρικός* $\Leftrightarrow AB = BA$.

Ε. Αν για τους Α, Β ορίζονται τα $A+B$, AB δείξτε ότι οι Α, Β είναι τετραγωνικοί.

Στ. Αν $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ δείξτε ότι $\cos x \begin{bmatrix} \cos x & \tan x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} + \sin x \begin{bmatrix} \sin x & -1 \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix} = I_2$.

Στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών πίνακα - Βαθμός πίνακα.

Αν ένας πίνακας έχει μία μόνο γραμμή και ν στήλες, τότε ονομάζεται πίνακας (ή διάνυσμα) γραμμή. Αν έχει μόνο μία στήλη και μ γραμμές ονομάζεται πίνακας (ή διάνυσμα) στήλη. Τα διανύσματα γραμμές του $A_{\mu x \nu} = \left[\alpha_{ij}\right]$ είναι τα

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \end{bmatrix},\ \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \end{bmatrix}, \dots,\ \Gamma_\mu = \begin{bmatrix} \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

και τα διανύσματα στήλες τα $\Sigma_1=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \dots\\ \alpha_{\mu 1}\end{bmatrix}$, $\Sigma_2=\begin{bmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \dots\\ \alpha_{\mu 2}\end{bmatrix}$, …, $\Sigma_\nu=\begin{bmatrix}\alpha_{1\nu}\\ \alpha_{2\nu}\\ \dots\\ \alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix}$.

Ορισμός. Τα διανύσματα στήλες Σ_1, Σ_2, ..., Σ_κ του $A_{\mu x\nu}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\kappa \in \mathbb{R}$, με έναν τουλάχιστο διάφορο του μηδέν, ώστε $\lambda_1\cdot\Sigma_1+\lambda_2\cdot\Sigma_2+...+\lambda_\kappa\cdot\Sigma_\kappa=\mathbf{O}_{\mu x1}$. Για τα διανύσματα γραμμές έχομε τον ίδιο ορισμό, με το $\mathbf{O}$ του δευτέρου μέλους να συμβολίζει το μηδενικό πίνακα $1x\nu$.

Π.χ. Οι στήλες $\Sigma_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $\Sigma_2=\begin{bmatrix}10\\20\\30\\40\end{bmatrix}$, είναι γραμμικώς εξαρτημένες διότι $\Sigma_2=10\Sigma_1$.

Οι $\Gamma_1=\begin{bmatrix}5 & -6 & 7\end{bmatrix}, \Gamma_2=\begin{bmatrix}15 & -18 & 21\end{bmatrix}$, είναι γραμμικώς εξαρτημένες διότι $\Gamma_2=3\Gamma_1$.

Ορισμός. Τα διανύσματα στήλες Σ_1, Σ_2, ..., Σ_κ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα όταν η σχέση $\lambda_1\cdot\Sigma_1+\lambda_2\cdot\Sigma_2+...+\lambda_\kappa\cdot\Sigma_\kappa=\mathbf{O}_{\mu x1}$, με $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\kappa\in\mathbb{R}$, ισχύει μόνο αν $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_\kappa=0$. Όμοιο ορισμό έχομε για τις γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_\kappa$ μόνο που με $\mathbf{O}$ συμβολίζομε το μηδενικό πίνακα $1x\nu$.

Π.χ. Οι στήλες $\Sigma_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\Sigma_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες διότι $\lambda_1\Sigma_1+\lambda_2\Sigma_2=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}$. Από $\lambda_1\Sigma_1+\lambda_2\Sigma_2=\mathbf{O}$ έχομε $\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}=\mathbf{O}$ άρα $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Ορισμός. Σε κάθε πίνακα A το μέγιστο πλήθος ρ των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του, ονομάζεται βαθμός του πίνακα και συμβολίζεται rank A=ρ.

Πορίσματα.

1. Αν $A_{\mu x\nu}$ και ρ ο βαθμός αυτού, είναι $\rho\le\mu$, $\rho\le\nu$.

2. Αν ρ ο βαθμός του πίνακα, υπάρχουν ρ στήλες (ή γραμμές) του που είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, ενώ οποιεσδήποτε $\rho+1$ στήλες (ή γραμμές) του είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Π.χ. Βρείτε το βαθμό του $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Ο πίνακας έχει 3 γραμμές και 5 στήλες. Άρα $rank\ A\le 5$.

Επειδή $2\Sigma_1=\Sigma_2$ οι στήλες Σ_1, Σ_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες, άρα $rank\ A\le 4$.

Οι Σ_1, Σ_3, Σ_5 είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι $\lambda_1\Sigma_1+\lambda_3\Sigma_3+\lambda_5\Sigma_5=\mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_3\\ \lambda_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

Άρα $3 \le rank\ \mathrm{A} \le 4$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει $3\Sigma_1+5\Sigma_3+0\Sigma_5 = \Sigma_4$ άρα οι $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_5, \Sigma_4$ γραμμικά εξαρτημένες άρα $rank\ \mathrm{A} = 3$.

Άσκηση. Δείξτε ότι $rank\ \mathrm{A} = 2$, $rank\ \mathrm{B} = 3$, όπου $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Αντιστρέψιμοι πίνακες. Ορισμός αντιστρόφου πίνακα.

Γνωρίζομε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ υπάρχει ο αντίστροφος του, που συμβολίζεται με $1/\alpha$ ή α^{-1}, για τον οποίο ισχύει ότι $\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=1$. Αναρωτιόμαστε αν κάτι αντίστοιχο συμβαίνει στους πίνακες. Δηλαδή, αν δοθέντος πίνακα A, υπάρχει πίνακας X ώστε $\mathrm{AX} = \mathrm{XA} = \mathrm{I}_\nu$.

Ορισμός. Έστω $\mathrm{A}_{\nu x \nu}$. Αν υπάρχει πίνακας διαστάσεων $\nu x \nu$ ώστε $\mathrm{AX} = \mathrm{XA} = \mathrm{I}_\nu$, ο A ονομάζεται αντιστρέψιμος πίνακας, ο X ονομάζεται αντίστροφος του A και συμβολίζεται ως A^{-1}. Είναι προφανές εκ του ορισμού, ότι αντίστροφος του αντιστρόφου, είναι ο ίδιος ο πίνακας, δηλαδή ότι $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathrm{A}$.

Π.χ. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $\mathrm{X}=\begin{bmatrix}-2&1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ είναι $\mathrm{AX} = \mathrm{XA} = \mathrm{I}_2$, άρα $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}$.

Άσκηση. Δείξτε ότι ο $\mathrm{X}=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}$ είναι αντίστροφος του $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}$.

$$\mathrm{X}\cdot\mathrm{A} = \begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot2-1\cdot5 & 3(-5)+5\cdot3\\ 1\cdot2-2\cdot1 & 1(-5)+2\cdot3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{X} = \begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot3-5\cdot1 & 2\cdot5-5\cdot2\\ -1\cdot3+3\cdot1 & -1\cdot5+3\cdot2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Εφαρμογές.

1. Αν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}$.

2. Αν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$.

3. Αν $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 6\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

4. Αν $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

5. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A^{-1}=\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

Παρατήρηση. Αν ο $A_{\nu x\nu}$ έχει αντίστροφο, αυτός είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Έστω ότι ο A δεν έχει ως αντίστροφο μόνο τον A^{-1}, αλλά και τον B^{-1}. Τότε $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ και $AB^{-1}=B^{-1}A=I$. Θα δείξομε ότι $A^{-1}=B^{-1}$.

Πράγματι $B^{-1}=B^{-1}I=B^{-1}(AA^{-1})=(B^{-1}A)A^{-1}=IA^{-1}=A^{-1}$.

Παρατήρηση. Αν $A_{\nu x\nu}$ αντιστρέψιμος τότε A^T αντιστρέψιμος & $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

Απόδειξη. Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος ισχύει ότι $AA^{-1}=A^{-1}\ A=I$.

Άρα $(AA^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=I^T$. Συνεπώς είναι $(A^{-1})^T A^T=A^T(A^{-1})^T=I$.

Άρα ο A^T είναι αντιστρέψιμος και αντίστροφος του είναι ο $(A^{-1})^T$. Άρα $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

Παρατήρηση. Αν $A_{\nu x\nu}$ ορθογώνιος τότε $AA^T=A^TA=I$. Άρα $A^{-1}=A^T$. Συνεπώς οι ορθογώνιοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

Π.χ. Αν A,B αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεως ν και $AB=A$, $BA=B$, δείξτε ότι $A^2=A$, $B^2=B$.

Είναι $A^2=AA=(AB)A=A(BA)=AB=A$, $B^2=BB=(BA)B=B(AB)=BA=B$

Π.χ. Αν $A_{\nu x\nu}$, $B_{\nu x\nu}$, αντιστρέψιμοι με $AB=BA$, δείξτε ότι $A^{-1}B=BA^{-1}$, $A^{-1}B=BA^{-1}$.

Είναι $AB=BA \Leftrightarrow \left(AB\right)B^{-1}=\left(BA\right)B^{-1} \Leftrightarrow A\left(BB^{-1}\right)=B\left(AB^{-1}\right) \Leftrightarrow AI=B\left(AB^{-1}\right) \Leftrightarrow$ $A=B\left(AB^{-1}\right) \Leftrightarrow B^{-1}A=B^{-1}\left[B\left(AB^{-1}\right)\right] \Leftrightarrow B^{-1}A=\left(B^{-1}B\right)\left(AB^{-1}\right) \Leftrightarrow B^{-1}A=I\left(AB^{-1}\right) \Leftrightarrow$ $B^{-1}A=AB^{-1}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $A^{-1}B=BA^{-1}$.

Ιδιότητες των αντιστρέψιμων πινάκων.

1. Ο $\mathbf{O}_{\nu x\nu}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

2. Ο I_ν είναι αντιστρέψιμος και $I_\nu=I_\nu^{-1}$.

3. Αν A αντιστρέψιμος τότε ο A^{ν} είναι αντιστρέψιμος με $\left(A^{\nu}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\nu}=A^{-\nu}$.

4. Αν A, B, αντιστρέψιμοι τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος με $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
Πράγματι $(AB)(AB)^{-1}=(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$
και $(AB)^{-1}(AB)=\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$

Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται και για περισσότερους πίνακες. Για 3 πίνακες ισχύει ότι $(AB\Gamma)^{-1}=\Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Πράγματι $(AB\Gamma)(AB\Gamma)^{-1}=(AB\Gamma)\left(\Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1}\right)=A\left[B\left(\Gamma\Gamma^{-1}\right)B^{-1}\right]A^{-1}=I$
και $(AB\Gamma)^{-1}(AB\Gamma)=\left(\Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1}\right)(AB\Gamma)=\Gamma^{-1}\left[B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B\right]\Gamma=I$

Αν A_1, A_2, A_3, ..., A_ν αντιστρέψιμοι $\nu x\nu$ πίνακες, τότε ο $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ είναι αντιστρέψιμος και $\left(A_1A_2A_3\ldots A_\nu\right)^{-1}=A_\nu^{-1}\ldots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$.

5. Αν A, B αντιστρέψιμοι και $A=B$ τότε $A^{-1}=B^{-1}$.

6. Αν A αντιστρέψιμος και $AB=A\Gamma$ ή $BA=\Gamma A$ τότε $B=\Gamma$.
Πράγματι
$AB=A\Gamma \Leftrightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(A\Gamma)\Leftrightarrow\left(A^{-1}A\right)B=\left(A^{-1}A\right)\Gamma\Leftrightarrow IB=I\Gamma\Leftrightarrow B=\Gamma$
και επίσης
$BA=\Gamma A\Leftrightarrow(BA)A^{-1}=(\Gamma A)A^{-1}\Leftrightarrow B\left(AA^{-1}\right)=\Gamma\left(AA^{-1}\right)\Leftrightarrow BI=\Gamma I\Leftrightarrow B=\Gamma$

7. Αν A αντιστρέψιμος και $AB=\mathbf{O}$ ή $BA=\mathbf{O}$ τότε $B=\mathbf{O}$.
Πράγματι $AB=\mathbf{O}\Leftrightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}\mathbf{O}\Leftrightarrow\left(A^{-1}A\right)B=\mathbf{O}\Leftrightarrow IB=\mathbf{O}\Leftrightarrow B=\mathbf{O}$
και $BA=\mathbf{O}\Leftrightarrow(BA)A^{-1}=\mathbf{O}A^{-1}\Leftrightarrow B\left(AA^{-1}\right)=\mathbf{O}\Leftrightarrow BI=\mathbf{O}\Leftrightarrow B=\mathbf{O}$

8. Αν $AB=I$ τότε $A^{-1}=B$, $B^{-1}=A$.

9. Αν A, B αντιστρέψιμοι δεν έπεται ότι οι $(A+B)$, $(A-B)$ είναι αντιστρέψιμοι.
Έτσι, αν A αντιστρέψιμος δεν έπεται ότι ο $(A+\lambda I)$ είναι αντιστρέψιμος.

10. Αν $A^2=I$ είναι $AA=I\Leftrightarrow A=A^{-1}$. Ενδεικτικά είναι $A=A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

11. Αν $A^3=I\Leftrightarrow\left.\begin{cases}A^2\cdot A=I\\A\cdot A^2=I\end{cases}\right\}\Leftrightarrow A^2=A^{-1}$

12. Είναι $A^2=3A+I\Leftrightarrow A^2-3A=I\Leftrightarrow\left.\begin{cases}A(A-3I)=I\\(A-3I)A=I\end{cases}\right\}\Leftrightarrow A^{-1}=A-3I$

Άσκηση. Αν Α αντιστρέψιμος, τότε $(\lambda \mathrm{A})^{-1} = \lambda^{-1}\mathrm{A}^{-1}$ για $\lambda \neq 0$.

Εύρεση αντιστρόφου ενός 2x2 πίνακα.

Έστω $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Θα εξετάσομε αν υπάρχει ο αντίστροφος του. Έστω ότι υπάρχει και είναι $\mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$. Τότε

$$\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{I} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha x+\beta z & \alpha y+\beta\omega \\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta\omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha x+\beta z=1 \\ \gamma x+\delta z=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha y+\beta\omega=0 \\ \gamma y+\delta\omega=1 \end{Bmatrix}$. Στη συνέχεια λύνομε τα δύο συστήματα.

Π.χ. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$.

Από $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{I} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x+3z & -y+3\omega \\ 2x-5z & 2y-5\omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} -x+3z=1 \\ 2x-5z=0 \end{Bmatrix}$ και $\begin{Bmatrix} -y+3\omega=0 \\ 2y-5\omega=1 \end{Bmatrix}$ άρα $\begin{Bmatrix} x=5 \\ z=2 \end{Bmatrix}$ και $\begin{Bmatrix} y=3 \\ \omega=1 \end{Bmatrix}$ άρα $\mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ορισμός. Ορίζουσα του $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$.

Αν $\mathrm{D}\neq 0$, ο Α αντιστρέφεται και $\mathrm{A}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{D}}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Π.χ. Ο $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται διότι $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=2\cdot 10-4\cdot 5=0$.

Αν $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ τότε $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=20\neq 0$ άρα $\mathrm{B}^{-1}=\dfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$.

Παρατήρηση. Δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο, αλλά μόνο όσοι έχουν μη μηδενική ορίζουσα.

Εφαρμογή. Λογιστής ναυτιλιακής εταιρείας πλήρωσε, από ένα μισθό, το πρωί τους υποπλοίαρχο και ανθυποπλοίαρχο του Δ/Ξ Οινούσσες και το μεσημέρι, πέντε υποπλοιάρχους και δύο ανθυποπλοιάρχους των Δ/Ξ Χίος 1, 2, 3. Ο λογιστής το πρωί έδωσε συνολικά 14.000 €, ενώ το μεσημέρι 55.000 €. Βρείτε τους μισθούς υποπλοιάρχου και ανθυποπλοιάρχου.

Έστω (σε χιλιάδες €) x ο μισθός ανθυποπλοιάρχου και y του υποπλοιάρχου.

Είναι $\left.\begin{cases} x \quad + y = 14 \\ 2x+5y = 55 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{B}$, με $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 14 \\ 55 \end{bmatrix}$.

Ο Α αντιστρέφεται διότι $|\mathrm{A}| = 3 \neq 0$ και $\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Από $\mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AX}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \Leftrightarrow (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{IX} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$

Άρα $\mathrm{X} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 55 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 15 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ άρα $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ (σε χιλιάδες €).

Εφαρμογή.
Αν Α, Β, Γ αντιστρέψιμοι, τότε $(\mathrm{AB\Gamma})^{-1}(\mathrm{AB\Gamma})^2(\mathrm{B\Gamma})^{-1}(\mathrm{BA})^{-1}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$.
Είναι

$(\mathrm{AB\Gamma})^{-1}(\mathrm{AB\Gamma})^2(\mathrm{B\Gamma})^{-1}(\mathrm{BA})^{-1}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1})^{-1} =$

$(\Gamma^{-1}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})(\mathrm{AB\Gamma})(\mathrm{AB\Gamma})(\Gamma^{-1}\mathrm{B}^{-1})(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1})\mathrm{BA} =$

$(\Gamma^{-1}\mathrm{B}^{-1})(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{AB})(\Gamma\Gamma^{-1})\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{B})\mathrm{A} =$

$(\Gamma^{-1}\mathrm{B}^{-1})\mathrm{I}(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{AB})\mathrm{IB}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{IA} =$

$(\Gamma^{-1}\mathrm{B}^{-1})(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{AB})\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} =$

$\Gamma^{-1}(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{B})\Gamma\mathrm{A}(\mathrm{BB}^{-1})(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}) =$

$\Gamma^{-1}\mathrm{I}\Gamma\mathrm{AII} = (\Gamma^{-1}\Gamma)\mathrm{A} = \mathrm{IA} = \mathrm{A}$

Εφαρμογή. Βρείτε, αν υπάρχουν, τους αντιστρόφους των $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3-(-1)5 = 6+5 = 11 \neq 0,\quad \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-5}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$

$|\mathrm{B}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4-2\cdot 2 = 0$ Ο πίνακας Β δεν αντιστρέφεται.

$|\Gamma|=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0,\quad \Gamma^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Π.χ. Αν $\mathrm{A}_{\nu x\nu}$, με $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}+\mathrm{I}_\nu=\mathbf{O}$, βρείτε τον A^{-1} και δείξτε ότι $\mathrm{A}^{100}+\mathrm{A}^{101}+\mathrm{I}_\nu^{102}=\mathbf{O}$.

Είναι $A^2+A+I_\nu=\mathbf{O} \Leftrightarrow I_\nu=-A^2-A \Leftrightarrow I_\nu=A(-A-I_\nu)=(-A-I_\nu)A \Leftrightarrow$
$A^{-1}=-A-I_\nu=A^2$.

Σχόλιο Αφού $A^{-1}=A^2 \Leftrightarrow AA^{-1}=AA^2 \Leftrightarrow I_\nu=A^3$.
Είναι $A^{100}+A^{101}+I_\nu^{102}=(A^3)^{33}A+(A^3)^{33}A^2+I_\nu=I_\nu^{33}A+I_\nu^{33}A^2+I_\nu=$
$I_\nu A+I_\nu A^2+I_\nu=A+A^2+I_\nu=O$.

Άσκηση.

1. Αν $A_{\nu x\nu}$ και $A^4+A^3+A^2+A+I_\nu=O$, να βρεθεί ο A^{-1}.

2. Αν $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $f(x)=x^2-6x+5$, δείξτε ότι $f(A)=\mathbf{O}$. Εύρεση A^{-1}.

3. Δείξτε ότι αν $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, τότε $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

4. Δείξτε ότι $\forall x,y\in\mathbb{R}$ είναι $A\cdot B=B\cdot A$, αν $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & x\\ x & y\end{pmatrix}\\ B\cdot A=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & x\\ x & y\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot B=B\cdot A$$

5. Αν A,B αντιστρέψιμοι με $AB=A$, $BA=B$. Δείξτε ότι $A^2=A$, $B^2=B$.

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{A^2=A\cdot A=(A\cdot B)\cdot A=A\cdot B\cdot A}\\ \mathbf{A=A\cdot B=A\cdot(B\cdot A)=A\cdot B\cdot A}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{A^2=A}. \qquad \text{Ομοίως } B^2=B.$$

$2^{ος}$ τρόπος.

$A^2=A\cdot A=(A\cdot B)\cdot A=A\cdot(B\cdot A)=A\cdot B=A$. Ομοίως $B^2=B$.

6. Αν A,B αντιστρέψιμοι με $AB=BA$, δείξτε ότι (**α**) $A\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A$, (**β**) $A^{-1}B=BA^{-1}$.

(**α**)

$AB=BA \Rightarrow (AB)B^{-1}=(BA)B^{-1} \Rightarrow A(BB^{-1})=B(AB^{-1}) \Rightarrow$
$AI=B(AB^{-1}) \Rightarrow A=B(AB^{-1}) \Rightarrow B^{-1}A=B^{-1}[B(AB^{-1})] \Rightarrow$
$B^{-1}A=(B^{-1}B)(AB^{-1}) \Rightarrow B^{-1}A=I(AB^{-1}) \Rightarrow B^{-1}A=AB^{-1}$.

(**β**) Ομοίως.

7. Αν $A_{\nu x \nu}$ με $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_\nu = O$, δείξτε ότι $A^{-1} = A^4$.

$$I_\nu = -A^4 - A^3 - A^2 - A = \begin{cases} (-A^3 - A^2 - A - I_\nu)\cdot A \\ A(-A^3 - A^2 - A - I_\nu) \end{cases}.$$

Άρα υπάρχει ο A^{-1} και είναι $A^{-1} = -A^3 - A^2 - A - I_\nu$.

$2^{ος}$ τρόπος.

$$A^4 + A^3 + A^2 + A + I_\nu = O \Rightarrow (A\text{-}I_\nu)(A^4 + A^3 + A^2 + A + I_\nu) = (A\text{-}I_\nu)O \Rightarrow$$

$$A^5 - I_\nu = O \quad \Rightarrow A^5 = I_\nu \quad \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} A\cdot A^4 = I_\nu \\ A^4\cdot A = I_\nu \end{matrix} \right\} \Rightarrow A^{-1} = A^4.$$

8. Δείξτε ότι ο $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ επαληθεύει τη σχέση $X^{4K+1} + 2^{2K}X = O$, όπου K περιττός αριθμός.

Αποδεικνύω αρχικά τη σχέση $X^4 = -4I_2$. Άρα: $\begin{cases} X^{4K+1} & +2^{2K}X = \\ (X^4)^K X & +(2^2)^K X = \\ (-4I_2)^K X & +4^K X = \\ -4^K X & +4^K X = O \end{cases}$

9. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ βρείτε τους A^2, A^{20}.

Αν $\mathbf{O} = f(A) = A^{40} + \alpha\cdot A^6 + 14\cdot\beta\cdot I_2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι $49\cdot\alpha + 2\cdot\beta = -7^{19}$.

- $A^2 = 7I_2$, $\qquad A^{20} = \left(A^2\right)^{10} = \left(7\cdot I_2\right)^{10} = 7^{10}\left(I_2\right)^{10} = 7^{10}\cdot I_2$..
- $f(A) = A^{40} + \alpha\cdot A^6 + 14\beta\cdot I_2$

$$= 7^{20}I_2 + \alpha\cdot 7^3\cdot I_2 + 14\cdot\beta\cdot I_2 = \left(7^{20} + \alpha\cdot 7^3\cdot I_2 + 14\cdot\beta\right)I_2 = O$$

Άρα $7^{20} + \alpha\cdot 7^3 + 14\cdot\beta = 0 \Rightarrow 7^{19} + \alpha\cdot 7^2 + 2\beta = 0 \Rightarrow 49\cdot\alpha + 2\cdot\beta = -7^{19}$.

10. Έστω $A\in\prod_\nu$ και $A^2 = 2A$. Λύστε στο $\prod_\nu$ την $X + A = X\cdot A$.

$$A^2 = 2\cdot A \quad \Rightarrow A^2 - 2\cdot A = O \quad \Rightarrow A^2 - 2\cdot A\cdot I_\nu + I_\nu^2 = I_\nu^2 \quad \Rightarrow$$

$(A - I_\nu)^2 = I_\nu \Rightarrow$ *ο πίνακας* $(A - I_\nu)$ είναι αντιστρέψιμος και $(A - I_\nu)^{-1} = A - I_\nu$

$$X + A = X\cdot A \Rightarrow$$
$$A = X\cdot A - A = X\cdot(A - I_\nu) \Rightarrow$$
$$X = A\cdot(A - I_\nu)^{-1} = A\cdot(A - I_\nu) = A^2 - A\cdot I_\nu = 2\cdot A - A = A.$$

11. Βρείτε, αν υπάρχει, το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού των $2x2$ πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}^*$.

Έστω $I = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$ με $x \in \mathbb{Z}^*$ το ουδέτερο στοιχείο.

Τότε $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$, άρα $\begin{bmatrix} ax & 0 \\ 2ax & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$, άρα $x = 1$.

Άρα $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ουδέτερο στοιχείο από δεξιά.

Επίσης $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$, άρα $\begin{bmatrix} ax & 0 \\ 2ax & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$, άρα $x = 1$.

Συνεπώς, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ουδέτερο στοιχείο και από αριστερά, άρα είναι το ουδέτερο στοιχείο.

12. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ όπου $a \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $A^\nu = \begin{bmatrix} 1 & \nu a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}$.

- Όταν $\nu = 1$, είναι $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{A}$.
- Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή έστω ότι $A^\kappa = \begin{bmatrix} 1 & \kappa a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Θα δειχθεί ότι, η προς απόδειξη σχέση, ισχύει για $\nu = \kappa + 1$. Πράγματι $A^{\kappa+1} = A^\kappa \cdot \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\kappa+1)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Από τα βήματα 1, 2, 3 και τα γνωστά από την επαγωγή, έχομε ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

13. Βρείτε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{2020}$.

Είναι $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ισχυρίζομαι ότι $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \nu \in \mathbb{N}$.

➢ Όταν $\nu = 1$, είναι $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

➢ Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή έστω ότι $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\kappa} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

➢ Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu = \kappa + 1$. Πράγματι $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\kappa+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\kappa} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Από τα βήματα1, 2, 3 και τα γνωστά από την επαγωγή, έχομε ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν. Άρα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{2020} = \begin{bmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Αν $A = \begin{bmatrix} cosa & sina \\ -sina & cosa \end{bmatrix}$, βρείτε τον A^{ν}, όπου $\nu \in \mathbb{N}$.

Είναι $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} cos^2\alpha - sin^2\alpha & 2 \cdot sina \cdot cosa \\ -2 \cdot sina \cdot cosa & cos^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(2\alpha) & sin(2\alpha) \\ -sin(2\alpha) & cos(2\alpha) \end{bmatrix}$

Ισχυρίζομαι ότι $A^{\nu} = \begin{bmatrix} cos(\nu\alpha) & sin(\nu\alpha) \\ -sin(\nu\alpha) & cos(\nu\alpha) \end{bmatrix}$.

➢ Για $\nu = 1$ ισχύει. Πράγματι είναι $A^1 = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}^{1} = A$.

➢ Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή έστω ότι $A^{\kappa} = \begin{bmatrix} cos(\kappa\alpha) & sin(\kappa\alpha) \\ -sin(\kappa\alpha) & cos(\kappa\alpha) \end{bmatrix}$.

➢ Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu = \kappa + 1$. Δηλαδή θα δειχθεί ότι $A^{\kappa+1} = \begin{bmatrix} cos[(\kappa+1)\alpha] & sin[(\kappa+1)\alpha] \\ -sin[(\kappa+1)\alpha] & cos[(\kappa+1)\alpha] \end{bmatrix}$.

Πράγματι: $A^{\kappa+1} = A^{\kappa} \cdot A = \begin{bmatrix} cos(\kappa\alpha) & sin(\kappa\alpha) \\ -sin(\kappa\alpha) & cos(\kappa\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} =$

$$=\begin{bmatrix} cos(\kappa\alpha)\cdot cos\alpha - sin(\kappa\alpha)\cdot sin\alpha & cos(\kappa\alpha)\cdot \eta\mu(\alpha)+sin(\kappa\alpha)\cdot cos\alpha \\ -sin(\kappa\alpha)\cdot cos\alpha - sin\alpha\cdot cos(\kappa\alpha) & -sin\alpha\cdot sin(\kappa\alpha)+cos(\kappa\alpha)\cdot cos\alpha \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} cos(\kappa\alpha+\alpha) & sin(\kappa\alpha+\alpha) \\ -sin(\kappa\alpha+\alpha) & cos(\kappa\alpha+\alpha) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos[(\kappa+1)\alpha] & sin[(\kappa+1)\alpha] \\ -sin[(\kappa+1)\alpha] & cos[(\kappa+1)\alpha] \end{bmatrix}.$$

Από τα βήματα1, 2, 3 και τα γνωστά από την επαγωγή, έχομε ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Άλυτες ασκήσεις.

1. Λύστε την $A+X=B$, αν $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -7 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Βρείτε τους A, B αν $A-B=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$, $3\cdot A+B=O$.

3. Βρείτε $x, y, z, \omega \in \mathbb{R}$ αν $\begin{bmatrix} 4x & -3y \\ 5z & \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x & -7 \\ -4 & 5\omega \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & x+y \\ z+\omega & 12 \end{bmatrix}$.

4. Βρείτε $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $A\cdot B=I_2$ αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$.

5. Βρείτε $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $A\cdot B=4\cdot B$, αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

6. Αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε πίνακα $B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ώστε $A\cdot B=3\cdot B$.

7. Λύστε την $\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & -cos\alpha \end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$.

8. Αν $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι η $A\cdot X=\lambda\cdot X$ έχει $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, μία και μόνο μία λύση στο σύνολο των $2x1$ πινάκων.

9. Αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ βρείτε πίνακα X, ώστε $A\cdot X=B$.

10. Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 2\alpha & 0 \end{bmatrix}$ όπου $\alpha\in R^*$, $B=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$ βρείτε $x\in\mathbb{R}$ ώστε $A\cdot B=A$.

11. Αν $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ βρείτε $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $x \cdot A + y \cdot B = O$.

12. Αν $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ λύστε την $2 \cdot A + 3 \cdot X = -B$.

13. Βρείτε τους X, Y αν $X+Y=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $3 \cdot X + 4 \cdot Y=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

14. Λύστε την $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

15. Βρείτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 2\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta & 5 \\ -4 & -3\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

16. Αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ λύστε το $\begin{cases} 2 \cdot X + 3 \cdot Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$.

17. Βρείτε πίνακες X, Y ώστε $X+Y=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $5 \cdot X + 6 \cdot Y=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

18. Αν $A=\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ βρείτε $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $(A - x \cdot I)(A - y \cdot I) = O$.

19. Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha\gamma+\delta & \beta\gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \alpha\varepsilon+\zeta & \beta\varepsilon \\ \varepsilon & \zeta \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A \cdot B = B \cdot A$.

20. Αν $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ βρείτε το $A \cdot B$.

21. Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha+\gamma & \beta \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \alpha+\delta & \beta \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A \cdot B = B \cdot A$, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

22. Αν A_{2x2} αντιστρέψιμος, λύστε την εξίσωση $D(x \cdot A) = x \cdot D(A)$, όπου $x \in \mathbb{R}$, $D(A)$ ορίζουσα του A και $D(x \cdot A)$ ορίζουσα του $x \cdot A$.

23. Αν $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ υπολογίστε το $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (A^2 + B^2)$.

24. Αν $\varphi(x)=x^3-2x^2+3\cdot\mathrm{I}$, $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ βρείτε τον πίνακα $\varphi(\mathrm{A})$.

25. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & x-y\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=\mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2$, $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$.

26. Βρείτε πίνακες Χ ώστε $\mathrm{X}\cdot\begin{bmatrix}7 & 2\\ 7 & 2\end{bmatrix}=\mathrm{I}_2$.

27. Έστω συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\Pi_2$ με $f(x)=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & -\cos x\end{bmatrix}$,

$$\varphi:\mathbb{R}\to\Pi_2 \text{ με } \varphi(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $f(\alpha)\cdot f(\beta)=\varphi(\alpha-\beta)$, $[f(\alpha)]^2=\mathrm{I}_2$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

28. Εξετάστε αν για τον $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ ισχύει $\mathrm{A}=\mathrm{A}^2=\mathrm{A}^3=\mathrm{A}^4=\ldots=\mathrm{A}^\nu$.

29. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}$ βρείτε τον A^2.

30. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -x\\ -1 & 0 & y\\ -x & y & 0\end{bmatrix}$, $x^2+y^2=1$, δείξτε ότι $\mathrm{A}^3=\mathrm{O}$.

31. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}=3\mathrm{B}-\mathrm{A}$.

32. Αν ο $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & \omega\end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, λύστε την $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$.

33. Ισχύει ότι $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot\mathrm{A}^{-1}\cdot(\mathrm{A}-\mathrm{B})=(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cdot\mathrm{A}^{-1}\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})$, αν $\mathrm{A}_{\nu x\nu}$, $\mathrm{B}_{\nu x\nu}$, $|\mathrm{A}|\neq 0$;

34. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}$ λύστε την $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}+\mathrm{I}=O$.

35. Αν $A_{\nu x \nu}$, $B_{\nu x \nu}, \lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι οι A, B αντιμετατίθενται αν και μόνο αν αντιμετατίθενται οι $(A-\lambda \cdot I)$, $(B-\lambda \cdot I)$.

36. Οι συναρτήσεις $f_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $f_2 = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένες;

37. Βρείτε τους A, B αν $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Ιστορικό σημείωμα.

Ένα μέρος της θεωρίας πινάκων αναπτύχθηκε την περίοδο 1800-1850 σε προβλήματα διαφορικών εξισώσεων, που προέκυψαν από τη μηχανική και την αστρονομία. Την οριστική τους μορφή πήραν το 1850 όταν ο James Sylvestyer (1814-1879) κατασκεύασε μία ορθογώνια διάταξη αριθμών με σκοπό να δημιουργήσει τετράγωνα με αριθμούς, αποκόπτοντας από αυτή γραμμές και στήλες.

Ο Sylvestyer είχε προτίμηση στο να δίνει φανταχτερά ονόματα στα αντικείμενα στα οποία εργαζόταν. Έτσι, ονόμασε τις ορθογώνιες διατάξεις matrix (πίνακες, μήτρες, καλούπια). Η ονομασία αυτή αποδείχθηκε κατάλληλη διότι μήτρα είναι ένα όργανο μέσα στο οποίο κάτι αναπτύσσεται ή δημιουργείται.

Το 1858 ο William Rowan Hamilton *SB *MT (1805-1865) και ο Arthur Cayley *SB *MT (1821-1895) διατύπωσαν το βασικό θεώρημα της θεωρίας πινάκων «Κάθε τετραγωνικός πίνακας επαληθεύει την χαρακτηριστική εξίσωση αυτού». Ο Hamilton σε ηλικία 13 ετών γνώριζε 13 γλώσσες, μεταξύ των οποίων και ελληνικά, σε ηλικία 17 ετών επεσήμανε λάθος στο έργο του Laplace «Πραγματεία για την ουράνια μηχανική», σε ηλικία 22 ετών διορίστηκε καθηγητής αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο του Δουβλίνου και διετέλεσε πρόεδρος της Ακαδημίας της Ιρλανδίας.

Τη φήμη του οφείλει στην επινόηση και επεξεργασία ιδιότυπου συστήματος αριθμών, το λεγόμενο κβαντέρνιο (λογισμός τετραέδρων) και γι' αυτό θεωρείται ένας από τους ιδρυτές του διανυσματικού λογισμού.

Ο Cayley, στη διάρκεια της δεκατετραετούς θητείας ως δικηγόρος, γνωρίστηκε και έγινε φίλος με τον J.J. Sylvester και δημοσίευσε 300 μαθηματικές εργασίες. Εγκατέλειψε τη δικηγορία όταν ανέλαβε καθηγητής μαθηματικών στην Οξφόρδη, ο νεότερος που είχε εκλεγεί έως τότε, θέση που κράτησε μέχρι το θάνατο του, διετέλεσε πρόεδρος της London Mathematical Society από το 1868 έως το 1870, ανακάλυψε την θεωρία πινάκων και επαλήθευσε με σαφήνεια ότι ο πολλαπλασιασμός συστήματος τετραέδρων μπορεί να εκφρασθεί με πίνακες.

Βαθμιαία, οι μαθηματικοί αναγνώρισαν ότι οι πίνακες ήταν κατάλληλοι συμβολισμοί για την επέκταση της κοινής έννοιας των αριθμών. Έτσι έγινε αντιληπτό ότι η θεωρία τους μπορεί να επεκταθεί πέρα από τα σύνορα της άλγεβρας και να εκφράσει πολλές ιδέες των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Το 1910, ο Andrey Markoff (1856-1922), εισήγαγε τους πίνακες στις πιθανότητες και τη πτατιστική και το 1925, ο Werner Heisenberg, στην κβαντική μηχανική. Στις τελευταίες δεκαετίες, με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, έγιναν το κύριο μέσο για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων στην επιστήμη και στην τεχνολογία. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα μαγικά τετράγωνα, δηλαδή τετραγωνικοί πίνακες που το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου είναι ο ίδιος αριθμός.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 72 & 9 & 54 \\ 27 & 45 & 62 \\ 36 & 81 & 18 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 148 & 333 & 74 \\ 111 & 185 & 259 \\ 296 & 37 & 222 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 96 & 11 & 89 & 68 \\ 86 & 69 & 91 & 16 \\ 61 & 86 & 18 & 99 \\ 19 & 96 & 66 & 81 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & 9 & 3 & 22 & 16 \\ 17 & 11 & 5 & 4 & 23 \\ 24 & 18 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 20 & 19 & 13 & 7 \\ 8 & 2 & 21 & 15 & 14 \end{bmatrix}.$$