Κεφάλαιο 5ο

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Σε προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε την έννοια της δύναμης με **βάση** έναν πραγματικό αριθμό και **εκθέτη** ακέραιο. Συγκεκριμένα:

— Στην αρχή ορίσαμε τη δύναμη ενός πραγματικού αριθμού με εκθέτη θετικό ακέραιο, ως εξής:

$$\alpha^{\nu}=\begin{cases}\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}} & ,\ \text{αν}\ \ \nu>1\\ \alpha & ,\ \text{αν}\ \ \nu=1\end{cases}\quad,\alpha\in\mathbb{R}\ \text{και}\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$

— Στη συνέχεια με τη βοήθεια των ισοτήτων:

$$\alpha^0=1\ \text{και}\ \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu},\ \text{και}\ \alpha\neq 0\ \ \nu\in\mathbb{N}^*$$

επεκτείναμε την έννοια της δύναμης ενός πραγματικού αριθμού και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ακέραιος. Για παράδειγμα:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $2^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{4}}$ και γενικά της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\alpha\geq 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος. Τις παραστάσεις αυτές θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Τι θα πρέπει να σημαίνει π.χ. το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $(\alpha^p)^q=\alpha^{pq}$ και για τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι:

$$(3^{\frac{2}{5}})^5=3^{\frac{2}{5}\cdot 5}=3^2$$

Αρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5 = 3^2$, δηλαδή ο αριθμός $\sqrt[5]{3^2}$.

Πρέπει δηλαδή να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$.

Γενικά

Αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Επιπλέον, αν μ, ν, θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Έτσι π.χ.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4}$$

Αποδεικνύεται ότι, όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ρητό.

Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι είναι π.χ.

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{\alpha^7}$$

Οι δυνάμεις αυτές υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης ως εξής:

ΔΥΝΑΜΗ		ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$2^{1,4}$	2	$\boxed{x^y}$ 1.4 $\boxed{=}$	2.6390158
$1,4^{-3,421}$	1.4	$\boxed{x^y}$ 3.21 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$	0.3395697
$5^{\frac{7}{3}}$	5	$\boxed{x^y}$ $\boxed{(}$ 7 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$	42.749398

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

Γεννιέται τώρα το ερώτημα:

Μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις της μορφής α^x με x άρρητο, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούνται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητό εκθέτη; Μπορούμε για παράδειγμα να ορίσουμε την $3^{\sqrt{2}}$;

Όπως είδαμε (βιβλίο Β' Γυμνασίου σελ. 104) οι δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ κατά προσέγγιση ακέραιας μονάδας, δεκάτου, εκατοστού κτλ. είναι

1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213,.... (1)

Ας πάρουμε τώρα την ακολουθία αυτή των δεκαδικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ και την αντίστοιχη ακολουθία των δυνάμεων του 3:

$3^{1},\quad 3^{1,4},\quad 3^{1,41},\quad 3^{1,414},\quad 3^{1,4142},\quad 3^{1,41421},\quad 3^{1,414213},\ldots$ (2)

Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
3^{1} &= 3\\
3^{1,4} &\simeq 4,6555367\\
3^{1,41} &\simeq 4,7069650\\
3^{1,414} &\simeq 4,7276950\\
3^{1,4142} &\simeq 4,7287339\\
3^{1,41421} &\simeq 4,7287839\\
3^{1,414213} &\simeq 4,7288015
\end{aligned}$$

Αν παρατηρήσουμε τους αριθμούς αυτούς μας δίνεται η εξής εντύπωση: Όταν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της ακολουθίας (1) αυξάνει, οι όροι της ακολουθίας (2) φαίνεται να προσεγγίζουν ένα ορισμένο αριθμό, που λέγεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της ακολουθίας αυτής. Είναι επομένως λογικό να ορίσουμε τη δύναμη $3^{\sqrt{2}}$ ως την πιο πάνω οριακή τιμή. Έτσι με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων είναι $3^{\sqrt{2}} \cong 4,7288$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\alpha>0$, x άρρητος και ρ_ν η δεκαδική προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία, τότε καθώς το ν αυξάνει τείνοντας στο $+\infty$, οι όροι της ακολουθίας (α^{ρ_ν}) «προσεγγίζουν» έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό, τον οποίο στο εξής θα ονομάζουμε όριο της ακολουθίας (α^{ρ_ν}).

Το όριο αυτό συμβολίζεται με α^x και λέγεται **δύναμη του α με εκθέτη x**. Συμβολικά γράφουμε:

$$\boldsymbol{\alpha^x = \lim_{\nu\to\infty} \alpha^{\rho_\nu}}$$

Επιπλέον, για κάθε $x>0$, ορίζουμε $0^x=0$.

Ο υπολογισμός δυνάμεων με άρρητο εκθέτη γίνεται με υπολογιστή τσέπης όπως στα παρακάτω παραδείγματα:

ΔΥΝΑΜΗ	ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$3^{\sqrt{2}}$	3 $\boxed{x^y}$ 2 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$	4.728801
2^{π}	2 $\boxed{x^y}$ $\boxed{\text{exp}}$ $\boxed{=}$	8.824977

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων, γνωστές από την Α' Λυκείου, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό αριθμό.

Συγκεκριμένα:

Αν α, β είναι **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2} \qquad \alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$$

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$$

$$(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω α ένας **θετικός** αριθμός. Όπως είδαμε προηγουμένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη α^x. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη α^x, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \alpha^x,$$

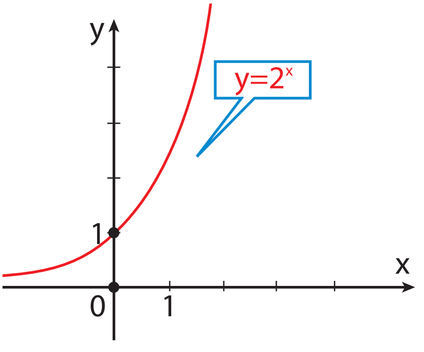
η οποία, στην περίπτωση που είναι $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$, λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση α**.

Αν είναι **α = 1**, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση **f(x) = 1**.

Έστω τώρα η εκθετική συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$y=2^x$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

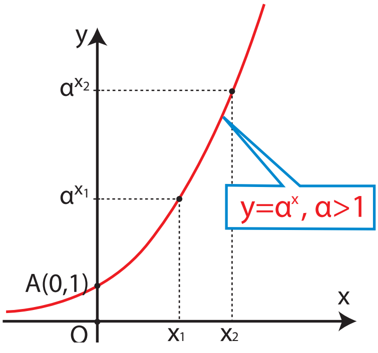
Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα στο καρτεσιανό επίπεδο και ενώνοντάς τα με συνεχή καμπύλη έχουμε το διπλανό σχήμα.



Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{f(x) = \alpha^x} \qquad \textbf{με } \boldsymbol{\alpha>1},$$

αποδεικνύεται ότι:



• Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

• Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

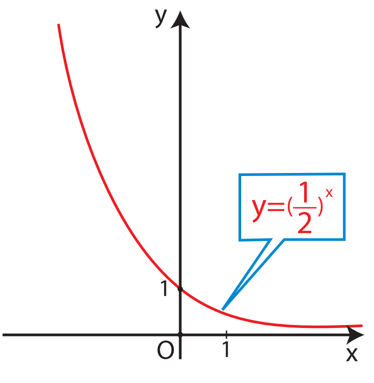
• Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$$

• Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x.

Έστω επιπλέον και η εκθετική συνάρτηση $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$	32	16	8	4	2	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{32}$



Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα στο καρτεσιανό επίπεδο και ενώνοντάς τα με συνεχή καμπύλη έχουμε το διπλανό σχήμα.

Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{f(x)=\alpha^x \;\; με\; 0<\alpha<1,}$$

αποδεικνύεται ότι:

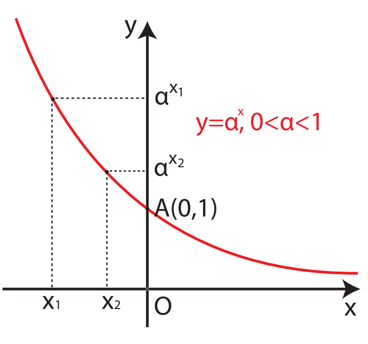
• Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

• Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$$

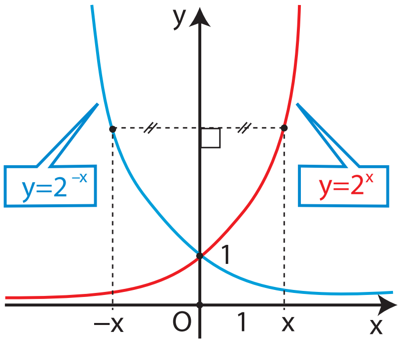
• Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των x.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Για τις συναρτήσεις $f(x)=2^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}=f(-x)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y'y.



ΣΧΟΛΙΟ Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha\neq 1$, προκύπτει ότι:

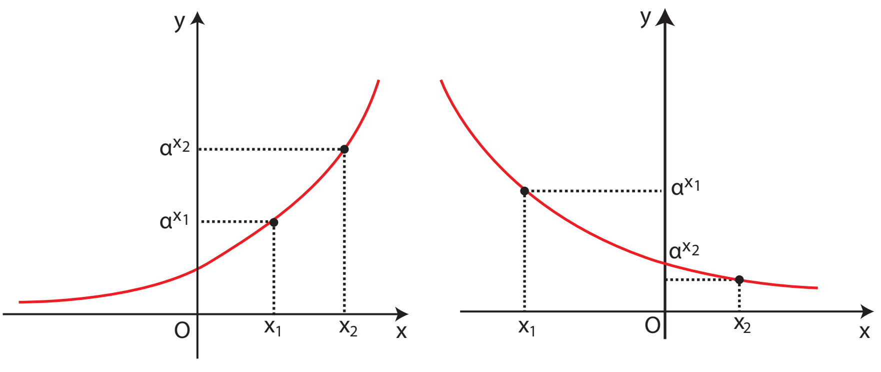
$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } \alpha^{x_1} \neq \alpha^{x_2}$$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

$$\text{αν } \alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}, \text{ τότε } x_1=x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$$



Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση εξισώσεων, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στον εκθέτη. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **εκθετικές εξισώσεις**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\mathbf{2^{3x} = \frac{1}{64}}$ **ii)** $\mathbf{9^x - 8\cdot 3^x - 9 = 0}$

ΛΥΣΗ

i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2^{3x} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-6} \quad \begin{bmatrix}\text{Επειδή η εκθετική}\\ \text{συνάρτηση είναι 1–1}\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow 3x = -6$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$

ii) Η εξίσωση γράφεται

$$3^{2x} - 8\cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8\cdot 3^x - 9 = 0$$

Αν θέσουμε $3^x = y$, αυτή γίνεται $y^2 – 8y – 9 = 0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 9. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$3^x = -1 \text{ και } 3^x = 9$$

Απ' αυτές η πρώτη είναι αδύνατη, αφού $3^x > 0$, ενώ η δεύτερη γράφεται $3^x = 3^2$ και έχει ρίζα το x=2, που είναι και μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

2ο Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \mathbf{2\cdot 3^x - 3\cdot 2^y = -22} \\ \mathbf{5\cdot 3^x + \frac{1}{2}\cdot 2^y = 9} \end{cases} \qquad \text{(εκθετικό σύστημα)}$$

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $3^x = \omega$ και $2^y = \varphi$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2\omega - 3\varphi = -22 \\ 5\omega + \frac{1}{2}\varphi = 9 \end{cases}$$

Το γραμμικό αυτό σύστημα έχει λύση ω = 1 και φ = 8, οπότε το αρχικό σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3^x = 1 \\ 2^y = 8 \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} 3^x = 3^0 \\ 2^y = 2^3 \end{cases}$$

από το οποίο παίρνουμε x = 0 και y = 3.

3ο Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}$ **ii)** $(\frac{1}{2})^{x^2+x} < \frac{1}{4}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε
$$3^{x^2-3x} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x^2-3x} > 3^{-2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x > -2 \qquad \left[\text{αφού } 3>1\right]$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+2>0$$
$$\Leftrightarrow x<1 \quad \text{ή} \quad x>2$$

ii) Έχουμε
$$(\frac{1}{2})^{x^2+x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{x^2+x} < (\frac{1}{2})^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+x>2 \qquad \left[\text{αφού } \frac{1}{2}<1\right]$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-2>0$$
$$\Leftrightarrow x<-2 \quad \text{ή} \quad x>1$$

4ο Να γίνουν οι γραφικές πραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x)=2^x+3$ **ii)** $g(x)=2^{x-3}$ **iii)** $h(x)=2^{x-3}+2$

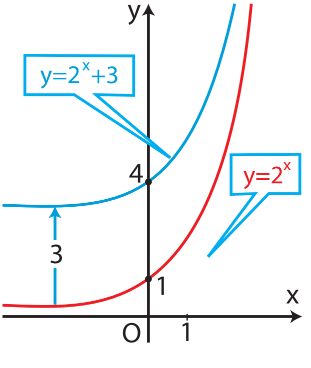
ΛΥΣΗ

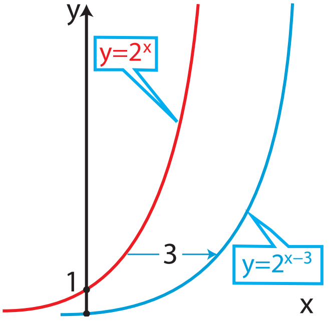
i) Η γραφική πράσταση της f προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $\varphi(x)=2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

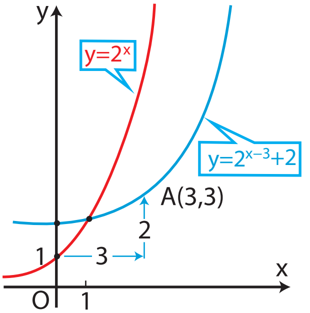
ii) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $\varphi(x)=2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.

iii) Τέλος η γραφική παράσταση της h προκύπτει από δυο μετατοπίσεις της $\varphi(x)=2^x$

– μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και
– μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.







Ο αριθμός e

Μια Τράπεζα για να διαφημιστεί κάνει μια πολύ ειδική προσφορά. Όποιος καταθέσει την επόμενη μέρα ποσό 1 εκατομμυρίου ευρώ, αυτό θα τοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 100% και με δυνατότητα ανατοκισμού του 1, 2, 3, ... ή ν φορές το χρόνο, σε ίσα χρονικά διαστήματα, ανάλογα με την επιθυμία του καταθέτη.
Έχει σημασία για τον καταθέτη το πόσες φορές το χρόνο θα ανατοκιστεί το κεφάλαιο:

Από το γνωστό τύπο του ανατοκισμού $\alpha_\nu = \alpha_0(1+\tau)^\nu$, όπου $\tau = \frac{\varepsilon}{100}$.

- για ν=1, είναι τ=1 και $\alpha_1 = 1(1+1)^1 = 2$ εκατομμύρια ευρώ.
- για ν=2, είναι τ= $\frac{1}{2}$ και $\alpha_2 = 1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$ εκατομμύρια ευρώ.
- για ν=3, είναι τ= $\frac{1}{3}$ και $\alpha_3 = 1\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2,44$ εκατομμύρια ευρώ.

....

- για ν=ν, είναι τ= $\frac{1}{\nu}$ και $\alpha_\nu = 1\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ εκατομμύρια ευρώ.

Αν χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή τσέπης κατασκευάζουμε τον πίνακα:

ν	1 (ανά έτος)	2 (ανά εξάμηνο)	4 (ανά εποχή)	12 (ανά μήνα)	52 (ανά εβδομάδα)
$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$	2	2,25	2,441406	2,613035	2,704813

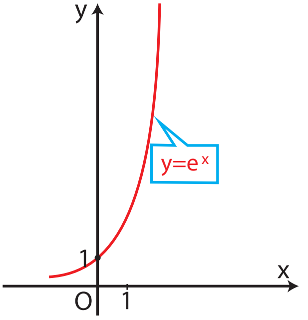
1000	10000	100000	1000000
2,716923	2,718145	2,718268	2,718280

Παρατηρούμε ότι, καθώς το ν αυξάνει, αυξάνει και το $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e. Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό Leohard Euler (1707-1783). Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι e = 2,71828.

Συμβολικά γράφουμε $$e = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι τιμές του ν έχουν μεγάλη σημασία όσο αυτές παραμένουν «μικρές». Από μια τιμή όμως και μετά, όσο και αν αυξάνει το ν, το τελικό ποσό δεν μεταβάλλεται ουσιαστικά.

Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συναρτήσεις με βάση τον αριθμό e. Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = e^x$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απλώς **εκθετική** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Μία ακόμη εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct} \qquad (1)$$

Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t. Το Qo είναι η **αρχική τιμή** του Q (για t = 0) και είναι $Q_0 > 0$, ενώ το c είναι μια σταθερά πουεξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής.** Αν c > 0 η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής αύξησης**, ενώ αν c<0 η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής απόσβεσης**. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής αποτελεί ένα ικανοποιητικό μοντέλο για πάρα πολλές εφαρμογές της Φυσικής, της Βιολογίας, της Στατιστικής και άλλων επιστημών. Για παράδειγμα ο αριθμός των γραμμαρίων μιας ραδιενεργού ουσίας κατά τη χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) δίνεται από τον τύπο $Q(t) = 200 \cdot e^{-0,3t}$. Αυτό σημαίνει ότι η ουσία που παραμένει αδιάσπαστη μετά από 7 δευτερόλεπτα είναι:

$$Q(7) = 200e^{-0,3 \cdot 7} \simeq 200(2,718)^{-2,1} \simeq 24,5 \text{ γραμμάρια.}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να διαπιστωθεί ή να εξαφανισθεί η μισή ποσότητα μιας ραδιενεργού ουσίας λέγεται **ημιζωή** ή **χρόνος υποδιπλασιασμού** της ραδιενεργού ουσίας.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρεται η ημιζωή ορισμένων ραδιενεργών ισοτόπων:

ΙΣΟΤΟΠΟ	**ΗΜΙΖΩΗ**
Άνθρακας (C^{14})	5730 έτη
Ράδιο (Ra^{226})	1600 έτη
Πολώνιο (Po^{210})	138 ημέρες
Φώσφορος (P^{32})	14 ημέρες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 5 χρόνια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι $Q(t)=Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η ημιζωή είναι 5 χρόνια, από το νόμο της εκθετικής απόσβεσης $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$ έχουμε:

$$\frac{Q_0}{2}=Q_0\cdot e^{c\cdot 5}\Leftrightarrow e^{5c}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^c=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{5}}$$

Άρα $Q(t)=Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=3^x$ και $f_1(x)=(\frac{1}{3})^x$

ii) $f(x)=3^x$, $f_2(x)=3^x+2$ και $f_3(x)=3^x-3$

iii) $f(x)=3^x$, $f_4(x)=3^{x-2}$ και $f_5(x)=3^{x+2}$

iv) $f(x)=3^x$ και $f_6(x)=3^{x-2}+1$

v) $g(x)=e^x$, $g_1(x)=e^{x+2}$, $g_2(x)=e^{-x}$ και $g_3(x)=e^{-x}+2$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x=64$ **ii)** $(\frac{1}{2})^x=\frac{1}{8}$ **iii)** $(\frac{1}{2})^x=4$ **iv)** $3^{-x}=\frac{1}{81}$

v) $(\frac{3}{4})^x=\frac{64}{27}$ **vi)** $27^{4x}=9^{x+1}$ **vii)** $32^x=16^{1-x}$ **viii)** $3^{x^2-x-2}=1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{2x+1}-4\cdot 2^x=0$ ii) $2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2=0$

iii) $3^{2x+1}-26\cdot 3^x-9=0$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5^{x^2-5x+6}<1$ **ii)** $7^{2x-4}>7^{x+1}$ **iii)** $(\frac{1}{2})^{x+1}<(\frac{1}{2})^{2x-4}$

5. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 4^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}=5^{2y+1}\end{cases}$ **ii)** $\begin{cases}3^x+2^y=11\\ 3^x-2^y=7\end{cases}$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} e^x : e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$

7. Να λύσετε την ανίσωση $w^2 - 101w + 100 < 0$ και στη συνέχεια την ανίσωση

$$10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 < 0.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση: $f(x) = \left(\dfrac{2-\alpha}{2\alpha-1}\right)^x$. Για ποιές από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι:

i) γνησίως φθίνουσα **ii)** γνησίως αύξουσα

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^{x-1} - 5\sqrt{4^{x-2}} + 1 = 0$ **ii)** $3^x + 3^{x-1} = \dfrac{45}{3^{x+2}} + \dfrac{7}{3^x}$

iii) $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$ **iv)** $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$

v) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

3. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + 16 \cdot 2^{-x} = 11 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$

4. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3^{|x|}$ **ii)** $f(x) = 3^{-|x|}$

5. Αν $f(x) = \dfrac{1}{2}(\alpha^x + \alpha^{-x})$ και $g(x) = \dfrac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$, να αποδείξετε ότι

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$$

6. Αν αφήσουμε το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου με βενζίνη ανοικτό, η βενζίνη εξατμίζεται με ρυθμό 20% ανά εβδομάδα.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες.

ii) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

iii) Με τη χρήση υπολογιστή τσέπης να διαπιστώσετε ότι μετά 40 εβδομάδες μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

7. Το ραδιενεργό Ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Αν η αρχική ποσότητα είναι 5 γραμμάρια,

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση, η οποία δίνει την ποσότητα του Ραδίου μετά από t χρόνια είναι $Q(t)=5(0,5)^{\frac{t}{1600}}$

ii) να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 600 χρόνια με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

iii) να αποδείξετε ότι μετά από 20000 χρόνια μόλις 0,001 γραμμάρια θα έχουν απομείνει.

8. Ένας πωλητής αυτοκινήτων βεβαιώνει τους πελάτες του ότι η αξία ενός αυτοκινήτου 40.000 ευρώ ελαττώνεται κατά 15% το χρόνο στα πρώτα 6 χρόνια από την πώληση του.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή του αυτοκινήτου μέσα στα 6 χρόνια.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του αυτοκινήτου στο τέλος του έκτου χρόνου.

9. Η ένταση του ηλιακού φωτός σε βάθος x μέτρα, μιας θολής λίμνης, ελαττώνεται εκθετικά ως προς το x, σύμφωνα με τον τύπο

$$I(x)=I_0\cdot e^{-0,5x}\quad (x\geq 0),$$

όπου I_0 είναι η ένταση στην επιφάνεια του νερού.

i) Να υπολογίσετε το $e^{-0,5x}$ για x = 0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 .

ii) Να βρείτε την τιμή του x, στον πλησιέστερο ακέραιο, για την οποία ο λόγος είναι $\dfrac{I(x)}{I_0}$ είναι

(α) 1 (β) 0,1.

iii) Να επιβεβαιώσετε και γραφικά την τιμή που θα βρείτε.

10. Η θερμοκρασία T(t) (σε °C) ενός βραστήρα, κατέρχεται μέχρι να φτάσει την θερμοκρασία T_0 του δωματίου, σύμφωνα με τον τύπο

$$T(t)=T_0(1+e^{-2t})\quad (t\geq 0)$$

i) Να υπολογίσετε το e^{-2t} για t = 0,1, 2, 3

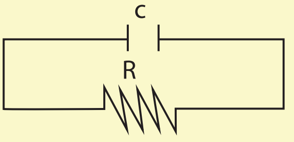
ii) Να βρείτε την τιμή του t, στον πλησιέστερο ακέραιο, για την οποία ο λόγος $\dfrac{T(t)}{T_0}$ είναι

(α) 1,1 (β) 2.

11. Πυκνωτής χωρητικότητας C (σε F) έχει φορτίο q_0 (σε Cb). Αν συνδέσουμε τον πυκνωτή με αντίσταση R (σε ohm), το φορτίο του πυκνωτή ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο.

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \text{ (t σε δευτερόλεπτα)}$$

i) Με μια «πρόχειρη» γραφική πράσταση να δείξετε πώς μεταβάλλεται το φορτίο q ως προς το χρόνο t.



ii) Να βρείτε τις τιμές του t της μορφής kRC (k ακέραιος) μετά τις οποίες το φορτίο γίνεται μικρότερο από:

α) $\frac{1}{2}q_0$ β) $\frac{1}{10}q_0$

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Η έννοια του λογάριθμου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ **Ο πληθυσμός της γης αυξάνει με ετήσιο ρυθμό 1,7%. Το 1987 ήταν 5 δισεκατομμύρια κάτοικοι. Αν συνεχίζει να αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό, πότε θα διπλασιαστεί;**

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1(1+\frac{\varepsilon}{100})^\nu$ (βλ. ανατοκισμός βιβλίο Άλγεβρας Α' Λυκείου) ο πληθυσμός της γης μετά από t χρόνια θα είναι:

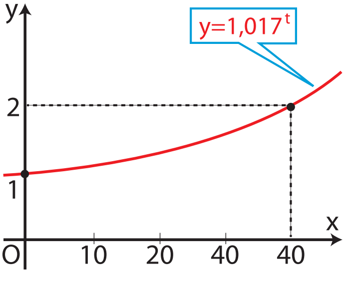
$$N(t) = 5\cdot 10^9 \cdot 1,017^t \text{ κάτοικοι}$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα ζητάμε εκείνη την τιμή του t για την οποία ισχύει $N(t) = 2\cdot 5\cdot 10^9$ κάτοικοι, ζητάμε δηλαδή τη λύση της εξίσωσης

$$5\cdot 10^9 \cdot 1,017^t = 2\cdot 5\cdot 10^9$$

ή ισοδύναμα της: $$1,017^t = 2 \qquad (1)$$

Την εξίσωση αυτή, με τις γνώσεις που έχουμε μέχρι τώρα, μόνο με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(t) = 1,017^t$ μπορούμε να τη λύσουμε. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι $t \simeq 41$. Επομένως ο πληθυσμός της γης θα διπλασιαστεί σε 41 περίπου χρόνια από το 1987, δηλαδή το 2028.



Με ανάλογο τρόπο, όπως στο παραπάνω πρόβλημα, μπορούμε να βρούμε κατά προσέγγιση τη λύση της εξίσωσης:

$$\alpha^x = \theta, \text{ όπου } \alpha > 0 \text{ με } \alpha \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση, αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως μονότονη και ο θ ανήκει στο σύνολο τιμών της. Τη μοναδική αυτή λύση τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\log_\alpha \theta}$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση α.**

Ώστε, αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$\boxed{\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta}$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ

Για παράδειγμα:

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{, γιατί} \quad 8 = 2^3$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \text{, γιατί} \quad 2 = 4^{1/2}$$

$$\log_{10} 0{,}001 = -3 \quad \text{, γιατί} \quad 0{,}001 = 10^{-3}$$

$$\log_{0{,}5} 0{,}25 = 2 \quad \text{, γιατί} \quad 0{,}25 = 0{,}5^2$$

Από τον παραπάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι, αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\boxed{\log_\alpha \alpha^x = x} \quad \text{και} \quad \boxed{\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta}$$

Εξάλλου, επειδή $1 = \alpha^0$ και $\alpha = \alpha^1$, ισχύει:

$$\boxed{\log_\alpha 1 = 0} \quad \text{και} \quad \boxed{\log_\alpha \alpha = 1}$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων

Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών. Οι ιδιότητες αυτές, όπως θα δούμε, προκύπτουν από αντίστοιχες ιδιότητες των δυνάμεων, πράγμα φυσικό άλλωστε, αφού και οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται ως εκθέτες δυνάμεων.

Αν α>0 με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$
2. $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$
3. $\log_\alpha\theta^k = k\log_\alpha\theta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Εστω ότι είναι:

$$\log_\alpha\theta_1 = x_1 \qquad \text{και} \qquad \log_\alpha\theta_2 = x_2 \qquad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \qquad \text{και} \qquad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2} = \theta_1\theta_2, \qquad \text{και} \qquad \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$$

2. Εργαζόμασθε με τον ίδιο τρόπο.

3. Έστω ότι είναι:

$$\log_\alpha\theta = x \qquad (2)$$

Τότε έχουμε $\alpha^x=\theta$ οπότε:

$$\alpha^{kx} = \theta^k$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha\theta^k = kx$$

από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι:

$$\log_\alpha\theta^k = k\cdot\log_\alpha\theta$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Επειδή για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\sqrt[\nu]{\theta} = \theta^{\frac{1}{\nu}}$, έχουμε

$$\log_\alpha\sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha\theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\log_\alpha\theta$$

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πως οι παραπάνω ιδιότητες μας διευκολύνουν στο λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{2}\log_2 256 + 2\log_2 3 - \log_2 18$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\log_2 256 + 2\log_2 3 - \log_2 18 \\ &= \log_2\sqrt{256} + \log_2 3^2 - \log_2 18 && \text{[Ιδιότητα 3]} \\ &= \log_2 16 + \log_2 9 - \log_2 18 \\ &= \log_2\left(\frac{16\cdot 9}{18}\right) && \text{[Ιδιότητες 1,2]} \\ &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί λογάριθμοι**.

Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται απλά με $\log\theta$ και όχι με $\log_{10}\theta$.

Επομένως:

$$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

Οι δεκαδικοί λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα, με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
log 213	213	log	=	2.328379603
log 0,325	0.325	log	=	–0.488116639

Φυσικοί λογάριθμοι

Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι λογάριθμοι**.

Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται με $\ln\theta$, και όχι με $\log_e\theta$.

Επομένως:

$$\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

Οι φυσικοί λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα, με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης, όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
ln 325	325 $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$	$\boxed{5.783825172}$
ln0,37	0,37 $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$	$\boxed{-0.994252273}$

Αλλαγή βάσης

Αν και οι χρησιμοποιούμενες βάσεις των λογαρίθμων είναι συνήθως το 10 και το e, εντούτοις μερικές φορές απαιτείται να υπολογίσουμε λογάριθμους με άλλη βάση. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με τον ακόλουθο τύπο, που είναι γνωστός ως τύπος αλλαγής βάσης των λογαρίθμων.

Αν α,β>0 με $\alpha,\beta\neq 1$, τότε για κάθε θ>0 ισχύει: $\log_\beta\theta=\dfrac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

Έστω ότι είναι $\log_\beta\theta=x$. Τότε $\theta=\beta^x$, οπότε:

$$\log_\alpha\theta=\log_\alpha\beta^x=x\log_\alpha\beta=\log_\beta\theta\cdot\log_\alpha\beta \qquad (\text{επειδή } x=\log_\beta\theta)$$

Άρα έχουμε:

$$\log_\beta\theta\cdot\log_\alpha\beta=\log_\alpha\theta,\ \text{οπότε}\ \log_\beta\theta=\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$$

ΣΧΟΛΙΟ Σύμφωνα με τον τύπο αυτό έχουμε:

$$\log_\beta\theta=\frac{\log\theta}{\log\beta} \quad \text{και} \quad \log_\beta\theta=\frac{\ln\theta}{\ln\beta}$$

Επομένως ο υπολογισμός του $\log_\beta\theta$ ανάγεται στον υπολογισμό των δεκαδικών λογαρίθμων logθ και logβ, ή των φυσικών λογαρίθμων lnθ και lnβ.
Για παράδειγμα είναι:

$$\log_2 17=\frac{\log 17}{\log 2}=4.087462841$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Επειδή το σύμβολο $\log_\alpha\theta$ ορίσθηκε μόνο όταν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ και $\theta>0$, όπου στο εξής το συναντάμε, θα εννοείται ότι $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ και $\theta>0$ χωρίς να τονίζεται ιδιαίτερα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος R ενός σεισμού εντάσεως I δίνεται από τον τύπο $$\mathbf{R=\log\frac{I}{I_0}}$$

όπου I_0 μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.

i) Να βρεθεί το μέγεθος R ενός σεισμού που έχει ένταση $I=1000I_0$

ii) Να εκφρασθεί το I ως συνάρτηση του R και του I_0

iii) Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου σεισμού που είναι μικρότερος κατά 1 μονάδα Richter.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $I=1000I_0$ από τον τύπο $R=\log\frac{I}{I_0}$ βρίσκουμε ότι:

$$R=\log\frac{1000I_0}{I_0}=\log 1000=3$$

ii) Από τον ορισμό του δεκαδικού λογάριθμου προκύπτει ότι

$$R=\log\frac{I}{I_0}\Leftrightarrow\frac{I}{I_0}=10^R\Leftrightarrow I=I_0\cdot 10^R \qquad (1)$$

iii) Έστω δυο σεισμοί με εντάσεις I, I' και μεγέθη R, R' αντίστοιχα.

Αν $R'=R+1$ τότε λόγω του τύπου (1) έχουμε:

$$\frac{I'}{I}=\frac{I_0\cdot 10^{R'}}{I_0\cdot 10^R}=\frac{10^{R+1}}{10^R}=10, \quad \text{οπότε} \quad I'=10\cdot I$$

Επομένως η ένταση I' ενός σεισμού είναι 10πλάσια της έντασης I ενός άλλου σεισμού μικρότερου κατά 1 μονάδα Richter.

2ο Οι χημικοί χρησιμοποιούν έναν αριθμό που συμβολίζεται με pH για να περιγράψουν την οξύτητα ενός διαλύματος. Εξ' ορισμού είναι $pH=-\log[H^+]$, όπου $[H^+]$ είναι η συγκέντρωση των H^+ σε γραμμοϊόντα ανά λίτρο.

i) Να υπολογίσετε το pH των εξής ουσιών:

— του ξιδιού: $[H^+]\simeq 6,3\cdot 10^{-3}$

— του νερού της θάλασσας: $[H^+]\simeq 5,0\cdot 10^{-9}$

ii) Να υπολογίσετε τη συγκέντρωση γραμμοϊόντων υδρογόνου $[H^+]$ στις εξής ουσίες:

— Μπύρα: $pH\simeq 4,2$

— Γάλα: $pH\simeq 6,6$

ΛΥΣΗ

i) — Το pH του ξιδιού είναι ίσο με $-\log(6,3\cdot 10^{-3})\simeq 2,2$

— Το pH του νερού της θάλασσας είναι ίσο με $-\log(5,0\cdot 10^{-9})\simeq 8,3$

ii) — Επειδή για τη μπύρα είναι $\text{pH}\simeq 4,2$, έχουμε

$4,2=-\log[H^+]\Leftrightarrow \log[H^+]=-4,2\Leftrightarrow [H^+]=10^{-4,2}\Leftrightarrow [H^+]=6,3\cdot 10^{-5}$

— Επειδή για το γάλα είναι $\text{pH}\simeq 6,6$, έχουμε

$6,6=-\log[H^+]\Leftrightarrow \log[H^+]=-6,6\Leftrightarrow [H^+]=10^{-6,6}\Leftrightarrow [H^+]=2,5\cdot 10^{-7}$

3^ο Αν η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση του φωσφόρου P^{32} είναι $N(t)=N_0\cdot e^{-0,0495t}$, όπου t ο χρόνος σε ημέρες, να βρεθεί η ημιζωή του φωσφόρου P^{32}.

ΛΥΣΗ

Αν t είναι η ζητούμενη ημιζωή, τότε θα είναι $N(t)=\frac{N_0}{2}$. Επομένως έχουμε:

$$N_0\cdot e^{-0,0495t}=\frac{N_0}{2}\Leftrightarrow e^{-0,0495t}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -0,0495t=\ln\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -0,0495t=-0,69314718$$
$$\Leftrightarrow t=14 \quad \text{ημέρες}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογισθούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι:

i) $\log_{10}0,001$ **ii)** $\log_{\frac{1}{10}}\sqrt{10}$ **iii)** $\log_{\frac{1}{2}}32$

iv) $\log_9\frac{\sqrt{27}}{3}$ **v)** $\log_{\sqrt{2}}16$ **vi)** $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8}{27}}$

2. Για ποια τιμή του x ισχύει:

i) $\log_{10}x=3$ **ii)** $\log_4 x=-\frac{1}{2}$ **iii)** $\log_{\sqrt{2}}x=\frac{2}{3}$

3. Για ποια τιμή του α ισχύει:

i) $\log_\alpha 16=4$ **ii)** $\log_\alpha 8=\frac{3}{2}$ **iii)** $\log_\alpha 0,1=-3$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_2 3+2\log_2 4-\log_2 12=2$ **ii)** $3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=1$

iii) $\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=1-\log_{10}2$ **iv)** $2^{\log_2 6-2\log_2\sqrt{3}}=2$

v) $2\log_2(2+\sqrt{2})+\log_2(6-4\sqrt{2})=2$

5. Ο αριθμός των βακτηριδίων που εμφανίζονται σε μια καλλιέργεια μετά από t ώρες δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_0e^{0,34t}$, όπου Q_0 είναι ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων. Πόσος χρόνος θα περάσει ώστε ο αριθμός των βακτηριδίων να δεκαπλασιασθεί;

6. Κάτω από σταθερή θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση p (σε Pascals), σε ύψος h (σε μέτρα) δίνεται από τον τύπο

$$p=101300\cdot e^{kh}$$

i) Να βρείτε την τιμή του k, αν σε ύψος 3050m η ατμοσφαιρική πίεση είναι 68900 Pascals.

ii) Ποια είναι η ατμοσφαιρική πίεση σε ύψος 1000m;

7. Οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με τη (φαινόμενη) λαμπρότητά τους σε κατηγορίες που καλούνται μεγέθη. Οι ασθενέστεροι αστέρες με λαμπρότητα L_0 λέμε ότι έχουν μέγεθος 6. Κάθε άλλος αστέρας λαμπρότητας L έχει μέγεθος m που καθορίζεται από τον τύπο:

$$m=6-2,5\cdot\log\frac{L}{L_0}$$

i) Να βρείτε το μέγεθος m του αστέρα που έχει λαμπρότητα $L=\sqrt[5]{100}\cdot L_0$.

ii) Πόσες φορές λαμπρότερος είναι ένας αστέρας 1ου μεγέθους από έναν αστέρα 6ου μεγέθους;

8. Οι πωλήσεις S(t) (σε χιλιάδες μονάδες) ενός προϊόντος σε διάστημα t χρόνων μετά την εισαγωγή του στην αγορά δίνονται από τον τύπο $S(t)=100(1-e^{kt})$.

i) Να υπολογίσετε το k, αν οι πωλήσεις κατά το πρώτο έτος ανήλθαν σε 15000 μονάδες.

ii) Πόσες θα είναι οι πωλήσεις στα 5 πρώτα χρόνια;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $4^{1-\frac{1}{2}\log_2 3}$ **ii)** $9^{\frac{1}{2}\log_3 18-1}$

2. Αν οι θετικοί αριθμοί θ_1, θ_2, θ_3, ... είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι $\log\theta_1$, $\log\theta_2$, $\log\theta_3$, ... είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και αντιστρόφως.

3. Μιας αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι ίσος με log2 και ο δεύτερος όρος με log8. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Σ_ν των ν-πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο.

$$\Sigma_\nu=\nu^2\cdot\log 2$$

4. Να αποδείξετε ότι: $\log\left(\log\underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\ldots\sqrt[10]{10}}}}}_{\nu\ \text{ριζικά}}\right)=-\nu$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\log(1-\frac{1}{2})+\log(1-\frac{1}{3})+\log(1-\frac{1}{4})+....+\log(1-\frac{1}{\nu})=-\log\nu$$

* **6.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\log_{\alpha}x=\log_{\alpha^2}x^2$$

***7.** Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_{\alpha}\beta\cdot\log_{\beta}\alpha=1$ **ii)** $\log_{\alpha}\beta^2\cdot\log_{\beta}\alpha^3=6$

iii) $\log_{\alpha}\beta\cdot\log_{\beta}\gamma\cdot\log_{\gamma}\alpha=1$

***8.** Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_{\alpha}\theta+\log_{\frac{1}{\alpha}}\theta=0$

ii) $\log_{\alpha}(\alpha\beta)+\log_{\beta}(\alpha\beta)=\log_{\alpha}(\alpha\beta)\cdot\log_{\beta}(\alpha\beta)$

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η λογαριθμική συνάρτηση

Έστω α ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2, για κάθε $x>0$ ορίζεται ο $\log_{\alpha}x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in(0,+\infty)$ στο $\log_{\alpha}x$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } f(x)=\log_{\alpha}x$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α**.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_{\alpha}x$. Επειδή

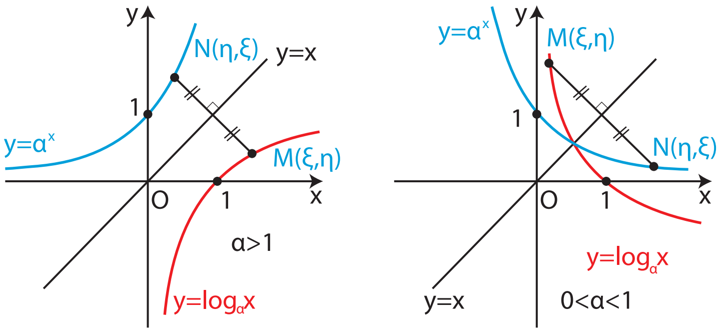
$$\log_{\alpha}x=y\Leftrightarrow\alpha^y=x,$$

αν το Μ(ξ,η) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{y=\log_{\alpha}x}$, τότε το Ν(η,ξ) θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{y=\alpha^x}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, Μ(ξ,η) και Ν(η,ξ) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y=\log_{\alpha}x \quad \text{και} \quad y=\alpha^x$$

Είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.



Αν λάβουμε τώρα υπόψη μας την παραπάνω συμμετρία και όσα μάθαμε για την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

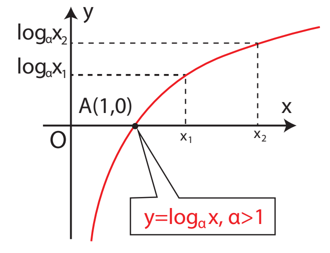
Αν **α > 1**, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

• Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$$



απ' όπου προκύπτει ότι:

$(\log_\alpha x < 0,\ \text{αν } 0<x<1)$ και $(\log_\alpha x > 0,\ \text{αν } x>1)$

• Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy'.

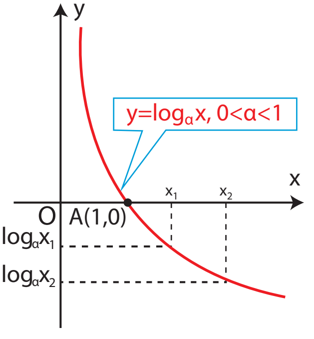
Αν **0 < α < 1,** τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

• Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι:

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$$



απ' όπου προκύπτει ότι:

$(\log_\alpha x > 0, \text{αν } 0<x<1)$ και $(\log_\alpha x < 0, \text{αν } x>1)$

• Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.

Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } \log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2$$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

$$\text{αν } \log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2, \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\mathbf{\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2}$$

Η τελευταία ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για επίλυση εξισώσεων όπως π.χ. η $\log_2(x^2-1)=3$, που λύνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\log_2(x^2-1)=3 &\Leftrightarrow \log_2(x^2-1)=\log_2 2^3\\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2-1)=\log_2 8\\ &\Leftrightarrow x^2-1=8\\ &\Leftrightarrow x^2=9\\ &\Leftrightarrow x=3 \;\text{ ή }\; x=-3\end{aligned}$$

Εξισώσεις όπως η προηγούμενη, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στο λογάριθμο λέγονται **λογαριθμικές εξισώσεις**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

i) $\varphi(x)=\ln x$ ii) $f(x)=\ln x+1$ iii) $g(x)=\ln(x-2)$

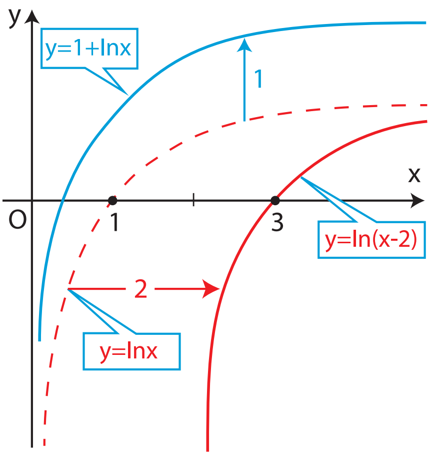
ΛΥΣΗ

Για τη γραφική παράσταση της φ(x) = lnx κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών:

x	0,2	0,3	0,5	0,7	1	2	3	4	5
y=lnx	–1,6	–1,2	–0,7	–0,4	0	0,7	1,1	1,4	1,6

Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα στο καρτεσιανό επίπεδο και ενώνοντάς τα με συνεχή καμπύλη βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x)=lnx.

Η γραφική παράσταση της f(x)=lnx+1 προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ(x)=lnx κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $g(x)=\ln(x-2)$ από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ(x)=lnx κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



2° Να βρεθεί το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Από την ανισότητα $2>1$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$2\log 0,5 > 1\cdot \log 0,5$$
$$\log 0,5^2 > \log 0,5$$
$$\log 0,25 > \log 0,5$$
$$0,25 > 0,5,$$

που είναι άτοπο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη της ανισότητας 2>1 με log0,5<0 και δεν αλλάξαμε φορά.

3° Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{\log_2(x^2-x)=1+\log_2(x-1)}$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x^2-x>0$ και $x-1>0$. Με αυτούς τους περιορισμούς η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\log_2(x^2-x)=\log_2 2+\log_2(x-1) &\Leftrightarrow \log_2(x^2-x)=\log_2[2(x-1)]\\ &\Leftrightarrow x^2-x=2(x-1)\\ &\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=2\end{aligned}$$

Από τις τιμές αυτές του x μόνο η x=2 ικανοποιεί τους περιορισμούς. Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, τη x = 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$f(x)=\log_2 x$ και $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

Τι παρατηρείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντηση.

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$f(x)=\log x$, $g(x)=\log x-1$ και $h(x)=\log(x-1)$

3. Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ και τη λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο:

i) $Α(2,4)$ **ii)** $Β(-2,4)$ **iii)** $Γ(2,-4)$ **iv)** $Δ(-2,-4)$

4. Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο y = 1+10logx, να φτιάξετε έναν πίνακα τιμών της παραπάνω συνάρτησης για x= 50, 100, 200, 400, 800, 1600 ASA. Τι παρατηρείτε; (Δίνεται ότι log2 = 0,3).

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\log(x+1)+\log(x-1)=\log 2$ **ii)** $\log(x-1)+\log x=1-\log 5$

iii) $\log x^2=(\log x)^2$ **iv)** $\log(x^2+1)-\log x=\log 2$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5^x=2^{1-x}$ **ii)** $3^{x-1}=2^{x+1}$

7. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\log_3 2$ και $\log_3 5$ **ii)** $\log_{0,3} 5$ και $\log_{0,3} 7$

iii) $\log(x^2+1)$ και $\log 2x$

8. Ένα διάλυμα θεωρείται **όξινο** αν $[H^+]>10^{-7}$ και **βασικό** αν $[H^+]<10^{-7}$. Να βρείτε τις αντίστοιχες ανισότητες για το pH.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\ln|x|$ **ii)** $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$ **iii)** $f(x)=|\ln x|$

iv) $f(x)=\log(10x-20)$

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

i) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ **ii)** $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$

3. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ οι αριθμοί

$$\log 178,\quad \log\sqrt{81(2^x+2\cdot 3^x)},\quad x\log 3$$

με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

*** 4.** Αν $\log_\alpha\beta=\log_\beta\gamma\cdot\log_\gamma\alpha$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$ ή $\alpha=\frac{1}{\beta}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log\sqrt{x}=\sqrt{\log x}$ **ii)** $\ln^4 x-5\ln^2 x+4=0$

6. Να αποδείξετε ότι $x^{\log 5}=5^{\log x}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$5^{2\log x}=5+4\cdot x^{\log 5}$$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases}\log(xy)=4\log 2\\ \log x\cdot\log y=3(\log 2)^2\end{cases}$ **ii)** $\begin{cases}xy=8\\ \log y=2\log x\end{cases}$ **iii)** $\begin{cases}y=2x\\ 2\log y=\log x+\log 2\end{cases}$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\log x^2>(\log x)^2$ **ii)** $\log(x^2-4)<\log 3x$ **iii)** $x^{\log x}>10$

*** 9.** Να αποδείξετε ότι $\log_2 3>\log_6 9$

10. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha,\beta>0$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει:

$$\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta>\alpha^\beta\cdot\beta^\alpha$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ΟΜΑΔΑΣ)

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x^2-3x+1)^{3x-5}=1$ **ii)** $x^{x^2+3x+1}=x$

2. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι:

$$\log_{\alpha+\beta}\gamma+\log_{\alpha-\beta}\gamma=2\log_{\alpha+\beta}\gamma\cdot\log_{\alpha-\beta}\gamma \quad (\alpha+\beta,\alpha-\beta\neq 1)$$

3. Αν $(\alpha\gamma)^{\log_\alpha\beta}=\gamma^2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$ και $\log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1,\quad \theta>0)$.

4. Αν αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\log_\alpha\theta-\log_\beta\theta}{\log_\beta\theta-\log_\gamma\theta}=\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta} \quad \begin{pmatrix} 0<\alpha,\beta,\gamma,\theta\neq 1 \\ \beta\neq\gamma \end{pmatrix}$$

5. Να αποδείξετε ότι $\log 5=1-\log 2$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $x^{\log(2x)}=5$

6. Να λύσετε στο $(0,\frac{\pi}{2})$ την εξίσωση:

$$\log_{\eta\mu x}2+\log_{\sigma\upsilon\nu x}2+\log_{\eta\mu x}2\cdot\log_{\sigma\upsilon\nu x}2=0$$

7. Να λύσετε στο $(0,\frac{\pi}{2})$ την εξίσωση: $(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x}=(\sigma\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

8. Να λύσετε την ανίσωση: $27^x+12^x-2\cdot 8^x>0$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η βασική ιδέα των λογαρίθμων

Η έννοια του λογάριθμου επινοήθηκε στις αρχές του 17ου αιώνα ως ένα μέσο απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών και η εμφάνιση των πρώτων λογαριθμικών πινάκων είχε, εκείνη την εποχή, επίπτωση στην επιστήμη ανάλογη μ' αυτήν που έχουν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στις μέρες μας. Η αρχική μαθηματική ιδέα στην οποία στηρίζεται η έννοια του λογάριθμου είναι πολύ απλή. Αν θέσουμε σε αντιστοιχία ένα προς ένα τους όρους μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου, όπως π.χ.

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , ...
1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256 , 512 , 1024 , 2048 , 4096 , ...

τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το γινόμενο 2 όρων της γεωμετρικής (π.χ. $32 \cdot 128 = 4096$) βρίσκεται ακριβώς κάτω από το άθροισμα των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής ($5+7 = 12$). Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ανάγεται ουσιαστικά σε μια πρόσθεση. Πολύ εύκολα μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι η διαίρεση ανάγεται σε αφαίρεση, η ύψωση σε δύναμη σε απλό πολλαπλασιασμό με τον εκθέτη και η εξαγωγή ρίζας σε απλή διαίρεση με τον δείκτη. Π.χ.

$$4096 : 128 = 32 \qquad (12 - 7 = 5)$$
$$16^3 = 4096 \qquad (4 \cdot 3 = 12)$$
$$\sqrt[4]{4096} = 8 \qquad (12 : 4 = 3)$$

Αυτές τις αναγωγές των βασικών πράξεων σε απλούστερες είχαν επισημάνει και διατυπώσει πολλοί μαθηματικοί του 15ου και 16ου αιώνα, όπως ο Γάλλος N. Chuquet το 1484 και ο Γερμανός M. Stifel το 1544. Όπως είναι φανερό σε μας, οι προηγούμενες αναγωγές στηρίζονται στις ιδιότητες των δυνάμεων (οι παραπάνω πρόοδοι είναι οι ακολουθίες των εκθετών και των αντιστοίχων δυνάμεων του 2 ή, με άλλα λόγια, οι όροι της αριθμητικής είναι οι λογάριθμοι των αντίστοιχων όρων της γεωμετρικής με βάση το 2). Τον 16ο αιώνα όμως δεν υπήρχε κάποιος κοινά αποδεκτός συμβολισμός για τις δυνάμεις ούτε είχαν διατυπωθεί με γενικότητα οι ιδιότητές τους. Το πρόβλημα που τέθηκε στους μαθηματικούς της εποχής ήταν η κατασκευή γεωμετρικών προόδων αρκετά «πυκνών», ώστε ανάμεσα στους όρους τους να μπορούν να

*Το ιστορικό σημείωμα έγραψε ο Μαθηματικός Γιάννης Θωμαΐδης παρεμβληθούν, χωρίς σημαντικό σφάλμα, οι αριθμοί που εμφανίζονταν συχνά στους υπολογισμούς (π.χ. οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων). Ταυτόχρονα οι όροι μιας τέτοιας γεωμετρικής προόδου θα έπρεπε να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους όρους μιας αριθμητικής προόδου.

Οι πρώτοι πίνακες λογαρίθμων

Η κατασκευή πινάκων τέτοιων προόδων ήταν για την εποχή εκείνη έργο τεράστιο που η ολοκλήρωση του απαίτησε πολλά χρόνια. Οι πρώτοι που δημοσίευσαν τέτοιους πίνακες ήταν ο Ελβετός Jobst Bürgi (1552-1632) και ο Σκωτσέζος John Napier (1550-1617).

Ο Bürgi ήταν ωρολογοποιός και κατασκευαστής αστρονομικών οργάνων και με τις ιδιότητες αυτές εργάστηκε στα μεγαλύτερα αστεροσκοπεία της εποχής του. Στους πίνακές του, που δημοσιεύθηκαν το 1620 στην Πράγα, κατασκεύασε μια γεωμετρική πρόοδο σύμφωνα με την αναδρομική σχέση

$$\begin{cases} \alpha_0 = 100.000.000 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \dfrac{\alpha_\nu}{10.000} \end{cases} \qquad (1)$$

Δηλαδή ο Bürgi ξεκινά από το 100.000.000 και υπολογίζει τον επόμενο κάθε όρου προσθέτοντας σ' αυτόν το ένα δεκάκις χιλιοστό του. Με τον τρόπο αυτό υπολόγισε, έναν προς ένα, περισσότερους από 23.000 όρους της προόδου.

Από την (1), που γράφεται $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu\left(1+\dfrac{1}{10^4}\right)$, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος αυτής της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = 1+\dfrac{1}{10^4} = 1{,}0001$ και ο γενικός της όρος μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\alpha_\nu = \alpha_0 \cdot \lambda^\nu \text{ δηλαδή } \alpha_\nu = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^\nu, \quad \nu=0,1,2,...$$

Σ' αυτή την πρόοδο, ο Bürgi αντιστοίχισε την αριθμητική πρόοδο 0, 10, 20, 30,..., 230.270 με γενικό όρο $\beta_\nu = 10\nu$.

Έτσι στους πίνακες του Bürgi υπάρχει η αντιστοιχία

$$\alpha_0 = 100.000.000 \longleftrightarrow 0 = \beta_0$$

$$\alpha_1 = 100.010.000 \longleftrightarrow 10 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = 100.020.001 \longleftrightarrow 20 = \beta_2$$

....

$$\alpha_\nu = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^\nu \longleftrightarrow 10\nu = \beta_\nu$$

$$\alpha_{23027} = 999.999.779 \longleftrightarrow 230.270 = \beta_{23027}$$

Από τους πίνακες του Bürgi απουσιάζει οποιαδήποτε αναφορά σε έννοιες όπως «εκθέτης» ή «βάση» στις οποίες στηρίζεται ο σύγχρονος ορισμός του λογάριθμου. (Ο προηγούμενος γενικός συμβολισμός για το $α_ν$ χρησιμοποιείται από μας, για λόγους που θα φανερωθούν παρακάτω, όταν εξηγήσουμε τη σημασία του αριθμού e). Ούτε άλλωστε ο όρος «λογάριθμος» χρησιμοποιήθηκε από τον Burgi. Ο τίτλος του βιβλίου του ήταν «Πίνακες αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων» και οι όροι της αριθμητικής προόδου αναφέρονταν ως «κόκκινοι αριθμοί» από το χρώμα της μελάνης που είχαν εκτυπωθεί.

Η προέλευση του όρου «λογάριθμος»

Οι πίνακες προόδων του Bürgi δεν γνώρισαν μεγάλη διάδοση γιατί δημοσιεύτηκαν αργά, όταν είχαν ήδη προηγηθεί, το 1614, οι πίνακες του Napier. Ο John Napier ήταν πλούσιος ευγενής με έντονο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους. Οι πίνακες του στηρίζονται επίσης στην αντιστοιχία των όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου. Οι πρόοδοι αυτές όμως είναι πολύ πιο πυκνές (και επομένως χρήσιμες στην πράξη) από εκείνες του Bürgi και για τον υπολογισμό των όρων τους ο Napier επινόησε μια σειρά από ιδιοφυή τεχνάσματα. Στον Napier οφείλεται επίσης η δημιουργία του όρου «λογάριθμος» από τη σύνθεση των ελληνικών λέξεων «λόγος» και «αριθμός». (Ο τίτλος του βιβλίου του ήταν «Περιγραφή του θαυμάσιου κανόνα των λογαρίθμων»). Η σημασία του όρου είναι ακριβώς «ο αριθμός που μετρά το πλήθος των λόγων». Αν θεωρήσουμε π.χ. τις προόδους

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots,$$
$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

τότε, ο 6 π.χ. (που είναι ο λογάριθμος του 64 με βάση το 2) δείχνει «πόσοι λόγοι» χρειάζονται στη συνεχή αναλογία

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\frac{64}{32}=\ldots.$$

για να φτάσουμε στον όρο 64 (στην εποχή του Napier, η γεωμετρική πρόοδος ορίζονταν σαν μια ακολουθία αριθμών που βρίσκονται σε συνεχή αναλογία).

Η σημασία του αριθμού e

Η αναγνώριση της δυνατότητας να οριστούν οι λογάριθμοι σαν εκθέτες ως προς μια βάση έγινε βαθμιαία, αφού πρώτα αποσαφηνίστηκε και γενικεύτηκε η έννοια της δύναμης. Η έννοια της βάσης όμως και ειδικότερα ο αριθμός e = 2,7 1828 1828 45 90 45 ... (προσέξτε τη μνημοτεχνική διάταξη των ψηφίων του) βρίσκεται ήδη, στους πρώτους λογαριθμικούς πίνακες, σε μια «λανθάνουσα» κατάσταση. Η γεωμετρική πρόοδος του Bürgi.

$$\alpha_\nu = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^\nu$$

γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{\alpha_\nu}{10^8} = \left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{\nu}{10^4}} = \left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{10\nu}{10^5}} = \left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{\beta_\nu}{10^5}}$$

Αν θέσουμε στην προηγούμενη $x = \frac{\alpha_\nu}{10^8}$ (1) και $y = \frac{\beta_\nu}{10^5}$ (2), τότε αυτή γίνεται

$$x = \left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^y \qquad (3)$$

Παρατηρούμε όμως ότι είναι

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2,718145927...$$

μια τιμή που συμπίπτει σε 4 δεκαδικά ψηφία μ' αυτήν του αριθμού e. Έτσι λοιπόν, η προηγούμενη ισότητα (3) μπορεί ν' αντικατασταθεί με ικανοποιητική ακρίβεια από την $x = e^y$, δηλαδή ισχύει $y = \ln x$. (4) Από τις ισότητες (1), (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι, αν στο σύστημα του Bürgi, οι όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν) διαιρεθούν με το 10^8 και οι όροι της αριθμητικής προόδου (β_ν) με το 10^5 (αυτές οι διαιρέσεις σημαίνουν απλώς μια μετακίνηση της υποδιαστολής κατά 8 και 5 θέσεις, αντίστοιχα, προς αριστερά), τότε

> Το σύστημα προόδων του Bürgi ισοδυναμεί, με ικανοποιητική προσέγγιση, με το σημερινό σύστημα των φυσικών λογαρίθμων που έχουν βάση τον αριθμό e.

Σαν παράδειγμα ας πάρουμε από τους πίνακες του Bürgi τον 98ο όρο της γεωμετρικής προόδου 100.984.768 και τον αντίστοιχο του της αριθμητικής 980. Διαιρώντας με το 10^8 και το 10^5 αντίστοιχα, βρίσκουμε

$$1,00984768 \text{ και } 0,0098$$

Ένας σύγχρονος υπολογιστής τσέπης μας δίνει

$$\ln(1,00984768) = 9,7995075\times10^{-3} = 0,0097995075 \cong 0,0098$$

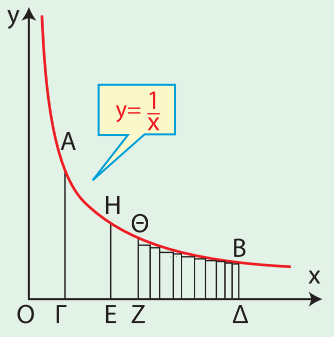
Όπως βλέπουμε λοιπόν, ο αριθμός e δεν επιλέγεται αυθαίρετα αλλά εμφανίζεται αναπόφευκτα όταν θελήσει κάποιος να κατασκευάσει μια πυκνή γεωμετρική πρόοδο (οπότε ο λόγος της θα είναι ένας αριθμός ελάχιστα μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας). Με την έννοια αυτή, ο αριθμός e «υπάρχει» στους πίνακες των Bürgi και Napier, οι οποίοι όμως δεν είχαν καμμιά αντίληψη του ρόλου του.

Το σύμβολο e χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον L. Euler το 1728, έναν αιώνα μετά την εμφάνιση των λογαρίθμων.

Η εμφάνιση των φυσικών λογαρίθμων

Ενώ λοιπόν οι λογάριθμοι είχαν επινοηθεί, όπως είδαμε, αποκλειστικά για την απλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών, γύρω στο 1650 διαπιστώθηκε μια απροσδόκητη εμφάνισή τους σε γεωμετρικά ζητήματα.

Αφετηρία υπήρξε το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από ένα τόξο ΑΒ της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$, τις παράλληλες από τα Α, Β προς τη μια ασύμπτωτη και από το τμήμα ΓΔ που ορίζουν οι παράλληλες στην άλλη ασύμπτωτη (δηλ. το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τραπεζίου ΑΒΔΓ στο διπλανό σχήμα).



Παρατηρήθηκε τότε ότι, αν το ΓΔ διαιρεθεί έτσι ώστε τα τμήματα ΟΓ, ΟΕ, ΟΖ, ΟΔ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ΑΗΕΓ), (ΗΘΖΕ), (ΘΒΔΖ) είναι ίσα μεταξύ τους και επομένως τα εμβαδά (ΑΗΕΓ), (ΑΘΖΓ), (ΑΒΔΓ) αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Αν π.χ. είναι ΟΓ = 1, ΟΕ = 2, ΟΖ = 4, ΟΔ = 8, τότε υπολογίζοντας καθένα από τα εμβαδά (ΑΗΕΓ), (ΗΘΖΕ), (ΘΒΔΖ) προσεγγιστικά, σαν άθροισμα εγγεγραμμένων ορθογωνίων (όπως π.χ., στο σχήμα, το ΘΒΔΖ αποτελείται από 10 τέτοια ορθογώνια) βρίσκουμε ότι, με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, είναι: (ΑΗΕΓ) = (ΗΘΖΕ) = (ΘΒΔΖ) = 0,6931. Έτσι λοιπόν μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στη γεωμετρική πρόοδο

ΟΕ = 2, ΟΖ = 4, ΟΔ = 8,...

και την αριθμητική πρόοδο

(ΑΗΕΓ) = 0,6931, (ΑΘΖΓ) = 1,3862, (ΑΒΔΓ) = 2,0793,...

Έχουμε δηλαδή τη βασική αρχή ενός λογαριθμικού συστήματος, του οποίου όμως οι λογάριθμοι (όροι της αριθμητικής προόδου) έχουν εδώ μια προφανή **φυσική σημασία**: Εκφράζουν τα εμβαδά συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων. Πρώτος χρησιμοποίησε τον όρο «φυσικοί λογάριθμοι» το 1668 ο N. Mercator (1620-1687) και αυτοί είναι ακριβώς οι σημερινοί λογάριθμοι με βάση τον e, που συμβολίζονται διεθνώς με το σύμβολο ln (από τα αρχικά των λέξεων logarithmus naturalis).

Η λογαριθμική συνάρτηση

Στη σημερινή εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η αρχική χρησιμότητα των λογαρίθμων ως ένα μέσο απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών έχει φυσικά εκμηδενιστεί. Αντίθετα όμως, είναι πολύ μεγάλη η χρησιμότητα της λογαριθμικής συνάρτησης σαν ένα μέσο μαθηματικής περιγραφής καταστάσεων του φυσικού κόσμου. Πρέπει μάλιστα να σημειώσουμε ότι πολλές από τις εφαρμογές της λογαριθμικής συνάρτησης στηρίζονται στην αρχική ιδέα της αντιστοιχίας μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου.

Συγκεκριμένα, όταν ένα μέγεθος μεταβάλλεται πολύ γρήγορα («γεωμετρικά») και ένα άλλο, που σχετίζεται μ' αυτό, πολύ αργά («αριθμητικά») τότε η μεταξύ τους σχέση μπορεί να εκφραστεί λογαριθμικά. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί ο νόμος των Weber-Fechner στην Ψυχολογία, που περιγράφει μαθηματικά τη σχέση ανάμεσα σ' ένα ερέθισμα και την αίσθηση που προκαλεί. Αν, για παράδειγμα, Ε είναι η ένταση ενός ήχου και Α η ένταση του ακουστικού αισθήματος που προκαλεί, τότε ισχύει

$$A = \kappa \log E$$

όπου κ μια σταθερά, εξαρτωμένη από τη συχνότητα του ήχου και τον αποδέκτη του ερεθίσματος. Η σχέση αυτή προέκυψε ύστερα από πειράματα των Γερμανών επιστημόνων E.H. Weber (1795-1878) και G.T. Fechner (1801-1887), που έδειξαν ότι, μια σειρά ερεθισμάτων (οπτικών, ακουστικών κ.λπ.) τα οποία μπορούν να μετρηθούν και αυξάνουν κατά γεωμετρική πρόοδο, προκαλούν μια σειρά αισθημάτων (αντιδράσεων) που αυξάνουν κατά αριθμητική πρόοδο. Στην προηγούμενη ισότητα στηρίζεται ο ορισμός των μονάδων ακουστότητας bel και decibel.

Μια άλλη εντυπωσιακή, σύγχρονη εφαρμογή της λογαριθμικής συνάρτησης γίνεται στην Πληροφορική και συγκεκριμένα στη σχέση ανάμεσα στην ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρει ένα σύμβολο και την πιθανότητα εμφάνισης του.