Κανόνες παραγώγισης

Κανόνας παραγώγισης αθροίσματος. Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x), g'(x)$, ισχύει ότι $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$.

Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι για πεπερασμένο πλήθος προσθετέων ισχύει ότι $[f_1(x)+f_2(x)+...+f_k(x)]' = f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_k'(x)$.

Παρατήρηση. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0, είναι πιθανόν η συνάρτηση $f+g$ να είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0.

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x-\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στην θέση $x_0 = 0$, ενώ η συνάρτηση $h(x) = f(x)+g(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στην θέση $x_0 = 0$.

- $(x^4+5x^2+3)' = (x^4)' + (5x^2)' + (3)' = 4x^3+10x+0 = 4x^3+10x = 2x(2x^2+5)$
- $(1+sinx)' = 1' + (sinx)' = 0 + cosx = cosx$
- $(x^3+cosx)' = (x^3)' + (cosx)' = 3x^2 - sinx$
- $\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+1\right)' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' + \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 1' = \frac{1}{5}(x^5)' + \frac{1}{3}(x^3)' + 1' = x^4+x^2$

Κανόνας παραγώγισης διαφοράς. Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x)$, $g'(x)$, ισχύει ότι $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$.

Παρατήρηση. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0, είναι πιθανόν η συναρτήσεις $f-g$, $g-f$ να είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0.

Κανόνας παραγώγισης γινομένου. Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x)$, $g'(x)$, ισχύει ότι $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Γενικεύοντας, ισχύει ότι

$[(fgh)(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$.

Παρατήρηση. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0, είναι πιθανόν η συνάρτηση fg να είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0.

Πράγματι οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στην θέση $x_0=0$, ενώ η συνάρτηση $h(x)=f(x)\cdot g(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη στην θέση $x_0=0$.

Ειδική περίπτωση. Αν $c\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ισχύει ότι $(cf)'(x)=cf'(x)$

- $\left[x^2\cdot sinx\right]'=\left(x^2\right)'sinx+x^2\left(sinx\right)'=2xsinx+x^2cosx$
- $\left(e^x\cdot lnx\right)'=\left(e^x\right)'lnx+e^x\left(lnx\right)'=e^x\cdot lnx+\frac{e^x}{x}=e^x\left(lnx+\frac{1}{x}\right)$
- $\left(x^2\cdot e^x\cdot lnx\right)'=\left(x^2\right)'e^xlnx+x^2\left(e^x\right)'lnx+x^2e^x\left(lnx\right)'=2xe^xlnx+x^2e^xlnx+xe^x=$
  $xe^x\left(2lnx+xlnx+1\right)$
- $\left(e^xcosx\right)'=\left(e^x\right)'cosx+e^x\left(cosx\right)'=e^xcosx-e^xsinx=e^x\left(cosx-sinx\right)$
- $\left(2xsinx-\left(x^2-2\right)cosx\right)'=\left(2xsinx\right)'-\left[\left(x^2-2\right)cosx\right]'=$
  $2\left(xsinx\right)'-\left[\left(x^2-2\right)'cosx+\left(x^2-2\right)\left(cosx\right)'\right]=$
  $2\left(x'sinx+xcosx\right)-\left[2xcosx+\left(x^2-2\right)\left(-sinx\right)\right]=$
  $2\left(sinx+xcosx\right)-2xcosx+x^2sinx-2sinx=x^2sinx$
- $\left(x^3\cdot\log x-\frac{1}{3}x^3\right)'=\left(x^3\cdot\log x\right)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\left(x^3\right)'\log x+x^3\left(\log x\right)'-\frac{1}{3}\left(x^3\right)'=$

$3x^2\log x+x^3\left(\frac{lnx}{ln10}\right)'-x^2=3x^2\log x+x^3\frac{1}{xln10}-x^2=3x^2\log x+\frac{x^2}{ln10}-x^2=$

$x^2\left(3\log x+\frac{1}{ln10}-1\right)$

Παράγωγος πηλίκου. Για κάθε $x\in D\left(f\right)\cap D\left(g\right)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x)$, $g'(x)$ και $g(x)\neq 0$ ισχύει ότι $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

- $\left(tanx\right)'=\left(\frac{sinx}{cosx}\right)'=\frac{\left(sinx\right)'cosx-sinx\left(cosx\right)'}{cos^2x}=\frac{cosx\cdot cosx+sinx\cdot sinx}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$
- $\left(\sigma\phi x\right)'=\left(\frac{cosx}{sinx}\right)'=\frac{\left(cosx\right)'sinx-cosx\left(sinx\right)'}{sin^2x}=\frac{-sinx\cdot sinx-cosx\cdot cosx}{sin^2x}=\frac{-1}{sin^2x}$

- $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1'x - 1x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$
- $\left(\frac{5}{x}\right)' = \frac{5'x - 5x'}{x^2} = \frac{-5}{x^2}$
- $(logx)' = \left(\frac{lnx}{ln10}\right)' = \frac{(lnx)'\,ln10 - lnx(ln10)'}{ln^2 10} = \frac{\frac{1}{x}ln10 - 0}{ln^2 10} = \frac{1}{x\cdot ln10}$
- $\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x)'\,x^2 - e^x(x^2)'}{x^4} = \frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} = \frac{e^x x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$
- $\left(\frac{e^x}{2^x}\right)' = \frac{(e^x)'\,2^x - e^x(2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{e^x 2^x - e^x 2^x ln2}{(2^x)^2} = \frac{e^x - e^x ln2}{2^x} = \frac{e^x(1-ln2)}{2^x}$
- $\left(\frac{sinx}{x} + \frac{x}{sinx}\right)' = \frac{x\cdot cosx - sinx}{x^2} + \frac{sinx - x\cdot cosx}{sin^2 x}$

Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων

- $\left[sine^x\right]' = (e^x)'\,cose^x = e^x cose^x$
- $\left[(x^2+1)^5\right]' = 5(x^2+1)^4(x^2+1)' = 10x(x^2+1)^4$
- $\left[cos(3x+2)\right]' = -sin(3x+2)\cdot(3x+2)' = -3sin(3x+2)$
- $\left[cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right]' = -sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cdot\left(\frac{3x}{2}\right)' = -\frac{3}{2}sin\left(\frac{3x}{2}\right)$
- $\left[sin(3x)\right]' = (3x)'\,cos(3x) = 3cos(3x)$
- $\left[sin(x^2+1)\right]' = (x^2+1)'\,cos(x^2+1) = 2x\cdot cos(x^2+1)$
- $\left[sin(cosx)\right]' = cos(cosx)\cdot(cosx)' = -sinx\cdot cos(cosx)$
- $\left[(x^2+1)^3\right]' = 3(x^2+1)^2(x^2+1)' = 6x(x^2+1)^2$
- $\left[e^{x^2}\right]' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$
- $\left[log(x^2+1)\right]' = \left[\frac{ln(x^2+1)}{ln10}\right]' = \frac{1}{ln10}\left[ln(x^2+1)\right]' = \frac{1}{ln10}\cdot\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} = \frac{2x}{(x^2+1)\cdot ln10}$
- $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\left[cos^2(3x) + sin^2(2x)\right]' = \left[cos^2(3x)\right]' + \left[sin^2(2x)\right]' =$

$$2cos(3x)\left[cos(3x)\right]' + 2sin(2x)\left[sin(2x)\right]' =$$

$$-2cos(3x)\cdot sin(3x)\cdot(3x)' + 2sin(2x)\cdot cos(2x)\cdot(2x)' =$$

$$-6cos(3x)\cdot sin(3x)+4sin(2x)\cdot cos(2x)$$

•

$$\left[sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right]'=2sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right]'=2sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)'=$$
$$6sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$$

• Αν $f(x)=\left(x^2+1\right)^x$, να υπολογισθεί η $f'(x)$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και $x^2+1=e^{ln\left(x^2+1\right)}\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^x=\left[e^{ln\left(x^2+1\right)}\right]^x\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^x=e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}$

Είναι $f(x)=\left(x^2+1\right)^x=e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}$

Άρα $f'(x)=\left[e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}\right]'=e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}\left[x\cdot ln\left(x^2+1\right)\right]'=$

$$\left(x^2+1\right)^x\left[x'\cdot ln\left(x^2+1\right)+x\cdot ln'\left(x^2+1\right)\right]=\left(x^2+1\right)^x\left[ln\left(x^2+1\right)+x\cdot\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}\right]=$$

$$\left(x^2+1\right)^x\left[ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right]$$

• Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Δείξτε ότι:

- Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.
- Αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.
- Αν η f είναι περιοδική, τότε η f' είναι περιοδική, ίδιας περιόδου.

Απόδειξη

- f άρτια $\Leftrightarrow\begin{cases}1.\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\\ 2.\ f(x)=f(-x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)=f(-x)\Leftrightarrow f'(x)=\left[f(-x)\right]'=f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(-x)$ (3)
Από (1), (3) έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι περιττή.

- f περιττή $\Leftrightarrow\begin{cases}1.\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\\ 2.\ f(x)=-f(-x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)=-f(-x)\Leftrightarrow f'(x)=\left[-f(-x)\right]'=-f'(-x)\cdot(-x)'=f'(-x)$ (3)
Από (1), (3) έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι άρτια.

- f περιοδική περιόδου Τ $\Leftrightarrow\begin{cases}1.\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+\mathrm{T}\in\mathbb{R}\\ 2.\ f(x)=f\left(x+\mathrm{T}\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$f(x)=f\left(x+\mathrm{T}\right)\Leftrightarrow f'(x)=\left[f\left(x+\mathrm{T}\right)\right]'=f'\left(x+\mathrm{T}\right)\cdot\left(x+\mathrm{T}\right)'=f'\left(x+\mathrm{T}\right)$ (3)
Από (1), (3) έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι περιοδική περιόδου T.

Εφαρμογή 1. Ισχύει ότι $x=e^{lnx}$ διότι $lnx=ln\left(e^{lnx}\right)=lnx\cdot lne=lnx\cdot 1=lnx$

• Είναι $x^x=\left(e^{lnx}\right)^x=e^{x\cdot lnx}$

Άρα, $\left(x^x\right)'=\left(e^{x\cdot lnx}\right)'=e^{x\cdot lnx}\left(x\cdot lnx\right)'=x^x\left(1\cdot lnx+x\dfrac{1}{x}\right)=x^x\left(1+lnx\right)$

• Είναι $5^{sinx}=e^{ln5^{sinx}}=e^{sinx\cdot ln5}$

Άρα, $\left(5^{sinx}\right)'=\left(e^{sinx\cdot ln5}\right)'=e^{sinx\cdot ln5}\left(sinx\cdot ln5\right)'=5^{sinx}\cdot cosx\cdot ln5$

• Είναι $\left(lnx\right)^x=e^{ln(lnx)^x}=e^{x\cdot ln(lnx)}$

Άρα, $\left[\left(lnx\right)^x\right]'=\left[e^{x\cdot ln(lnx)}\right]'=e^{x\cdot ln(lnx)}\left[x\cdot ln\left(lnx\right)\right]'=$

$\left(lnx\right)^x\left[ln\left(lnx\right)+x\dfrac{1}{lnx}\dfrac{1}{x}\right]=\left(lnx\right)^x\left[ln\left(lnx\right)+\dfrac{1}{lnx}\right]$

• Είναι $\left(x^2+1\right)^{x^2}=e^{ln\left(x^2+1\right)^{x^2}}=e^{x^2ln\left(x^2+1\right)}$

Άρα, $\left[\left(x^2+1\right)^{x^2}\right]'=\left[e^{x^2ln\left(x^2+1\right)}\right]'=e^{x^2ln\left(x^2+1\right)}\left[x^2ln\left(x^2+1\right)\right]'=$

$\left(x^2+1\right)^{x^2}\left[2xln\left(x^2+1\right)+\dfrac{x^2 2x}{x^2+1}\right]=\left(x^2+1\right)^{x^2}2x\left[ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{x^2}{x^2+1}\right]$

• Είναι $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Άρα, $\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]'=\left[e^{x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]'=e^{x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[x\cdot ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]'=$

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+x\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'\right]=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+x\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\dfrac{-1}{x^2}\right]$

$=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right].$

Άλυτες ασκήσεις παραγώγων

1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και μελετήστε ως προς τα ακρότατα, τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x)=3x-2$ **(β)** $f(x)=2x^2-3x+5$ **(γ)** $f(x)=3x-4x^2$

(δ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ **(ε)** $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ **(στ)** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(ζ) $f(x)=-x^2+2x-1$ **(η)** $f(x)=-x^4+4x^2-3$ **(θ)** $f(x)=x-\ln x$

(ι) $f(x)=x\cdot\ln x$ **(ια)** $f(x)=3-x-x^2-x^3$ **(ιβ)** $f(x)=x^3-3x+2$

(ιγ) $f(x)=e^x-x+1$ **(ιδ)** $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ **(ιε)** $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

2. Βρείτε τα διαστήματα κυρτότητας –κοιλότητας και τα σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x)=3x^4-4x^3+1$ **(β)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **(γ)** $f(x)=x\cdot\ln x-1$

(δ) $f(x)=2x-x^3$ **(ε)** $f(x)=3x^2-2x^3+1$ **(στ)** $f(x)=x^3-9x^2+24x+2$

3. Έστω οι συναρτήσεις $f, f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $g, g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Δείξτε ότι $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=f(x)$.

4. Αν $y=a\cdot\cos(kx)+b\cdot\sin(kx)$ δείξτε ότι $y''+k^2y=0$.

5. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\cos x-\sin x$. Υπολογίστε την συνάρτηση $f^{(2000)}(x)$.

6. Έστω άρτια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f' είναι περιττή.

7. Παραγωγίστε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$, $g(x)=|x+5|=\begin{cases}x+5, & x\ge -5\\ -x-5, & x<-5\end{cases}$

$h(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ x^2+2, & x\le 0\end{cases}$, $w(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\\ -x^2+2, & x\in(0,1)\end{cases}$

8. Με την βοήθεια του ορισμού, βρείτε τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f, στην θέση x_0.

(α) $f, f(x)=\sin x$, $x_0=0$ **(β)** $f, f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$

(γ) $f, f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x_0=2$ **(δ)** $f, f(x)=x^2-x-2$, $x_0=-1$ & $x_0=5$

9. Παραγωγίστε τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x)=\sin\left(x^2+1\right)$ **(β)** $f(x)=\sin(3x)$ **(γ)** $f(x)=\sin\left(e^x\right)$

(δ) $f(x)=\cos(3x+2)$ **(ε)** $f(x)=\cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$ **(στ)** $f(x)=\cos\left(x^3\right)$

(ζ) $f(x)=\sin(\cos x)$ **(η)** $f(x)=\left(x^2+1\right)^3$ **(θ)** $f(x)=e^{x^2}$

(ι) $f(x)=\log\left(x^2+1\right)$ **(ια)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **(ιβ)** $f(x)=\tan(5x)$

(ιγ) $f(x)=\text{cotan}\left(x^2\right)$ **(ιδ)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **(ιε)** $f(x)=1+\sin x$

(ιστ) $f(x)=x^3+\cos x$ **(ιζ)** $f(x)=x^2\cdot\sin x$ **(ιη)** $f(x)=x^2\cdot\ln x\cdot e^x$

(ιθ) $f(x)=x^2\cdot\ln x$ **(κ)** $f(x)=e^x\cdot\cos x$ **(κα)** $f(x)=e^x\cdot x^3$

(κβ) $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$ **(κγ)** $f(x)=\tan x-\text{cotan}\,x$ **(κδ)** $f(x)=x^4+5x^2+3$

(κε) $f(x)=2x\sin x-\left(x^2-2\right)\cos x$ **(κστ)** $f(x)=\dfrac{e^x}{2^x}$ **(κζ)** $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)^2$

(κη) $f(x)=\dfrac{x^2}{\log x}$ **(κθ)** $f(x)=x^3\cdot\log x-\dfrac{1}{3}x^3$ **(κι)** $f(x)=\tan x$

(λ) $f(x)=\text{cotan}\, x$ **(λα)** $f(x)=|x-1|+2$ **(λβ)** $f(x)=|x^2-4x+3|$

(λγ) $f(x)=|\sin x|$ **(λδ)** $f(x)=(x-1)2^x$ **(λε)** $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$

(λστ) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-2)^2}$ **(λζ)** $f(x)=(x^2+1)^{3x}$ **(λη)** $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$

(λθ) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$ **(λι)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **(λκ)** $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$

(μ) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ **(μα)** $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$ **(μβ)** $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{x^2}$

(μγ) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+1$ **(μδ)** $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos(2x)$ **(με)** $f(x)=\sin^2(x^2+2x)$

(μστ) $f(x)=\cos^2(3x)+\sin^2(2x)$ **(μζ)** $f(x)=|\cos x|$ **(μη)** $f(x)=\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(μθ) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ (x-2)^2, & x>1 \end{cases}$ **(μι)** $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(μκ) $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Εξίσωση εφαπτομένης σε γραφική παράσταση συνάρτησης

Π.χ. 1. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα xx', η εφαπτομένη στο σημείο $\text{M}(\alpha,\ \beta)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{a^2}{x}$.

Είναι $f'(x)=-\dfrac{a^2}{x^2}$ και $f'(a)=-\dfrac{a^2}{a^2}=-1$. Αν $\widehat{\omega}$ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε $tan\widehat{\omega}=f'(a)=-1$. Άρα, $\widehat{\omega}=\dfrac{3\pi}{4}=135^0$.

Π.χ. 2. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x$ στο σημείο της που έχει τετμημένη $x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

Είναι $f'(x)=\dfrac{-1}{sin^2x}+\dfrac{1}{cos^2x}$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-8}{3}$ και $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\text{M}\left(\dfrac{\pi}{6},f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\text{M}\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ είναι

$$y-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow y-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{-8}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Π.χ. 3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=2x^2+x+3$ στο σημείο $\mathrm{M}(0,\ 3)$.
Είναι $f'(x)=4x+1$ και $f'(0)=4\cdot 0+1=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{M}(0,\ 3)$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-3=1x\Leftrightarrow y=x+3$.

Π.χ. 4. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x-1$ στο σημείο $\mathrm{M}\left(1,\ \frac{23}{6}\right)$. Ακολούθως βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα xx'.
Είναι $f'(x)=x^2-5x+7$ και $f'(1)=3$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{M}\left(1,\ \frac{23}{6}\right)$ είναι $y-\frac{23}{6}=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x+\frac{5}{6}$. Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},\ 0)$ όπου $0=3x_\mathrm{A}+\frac{5}{6}\Leftrightarrow -\frac{5}{6}=3x_\mathrm{A}\Leftrightarrow x_\mathrm{A}=-\frac{5}{18}$. Άρα, είναι $\mathrm{A}\left(-\frac{5}{18},\ 0\right)$.

Π.χ. 5. Να προσδιορισθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο $\mathrm{A}(2,\ -10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-12$ και η εφαπτομένη στο σημείο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης -3.
Αφού το σημείο $\mathrm{A}(2,\ -10)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, ισχύει ότι $-10=\alpha\cdot 2^3+\beta\cdot 2^2+9\cdot 2-12\Leftrightarrow -4=2\alpha+\beta\quad (1)$.
Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+9$ και $f'(2)=12\alpha+4\beta+9$.
Ισχύει ότι $f'(2)=-3\Leftrightarrow 12\alpha+4\beta+9=-3\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-3\quad (2)$.
Από (1), (2) προκύπτει ότι $\alpha=1$, $\beta=-6$.

Π.χ. 6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x+3}+x-3$ στο σημείο της που έχει τετμημένη $x_0=-3$.
Είναι $D(f)=[-3,\ +\infty)$, $f(x_0)=f(-3)=-6$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+1$.
Για τον υπολογισμό του $f'(-3)$, θα γίνει χρήση του ορισμού, οπότε

$$f'(-3)=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+3}+x-3+6}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+3}+(x+3)}{x+3}=$$

$\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\lim\limits_{x\to -3^+}1=(+\infty)+1=+\infty$. Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{A}(-3,\ -6)$ είναι $x=-3$.

Επεξήγηση. $x\to -3^+\Leftrightarrow x>-3\Leftrightarrow x+3>0\Leftrightarrow \sqrt{x+3}>0\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+3}}\xrightarrow[x\to -3^+]{}+\infty$.

Π.χ. 7. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2+3x+\beta$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι:
(**α**) Παράλληλη προς τον άξονα xx'.
(**β**) Παράλληλη προς την ευθεία $y=2x-3$.
(**γ**) Παράλληλη προς την ευθεία $y=x$.
Λύση. Είναι $f'(x)=2x+3$ και $f'(x_0)=2x_0+3$.
(**α**) Έστω $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ το ζητούμενο σημείο. Για να είναι η εφαπτομένη στο σημείο αυτό παράλληλη προς τον άξονα xx', πρέπει $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0+3=0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{-3}{2}$.

Είναι $f(x_0)=f\left(\dfrac{-3}{2}\right)=\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{-3}{2}\right)+\beta=\dfrac{-9}{4}+\beta$.

Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}\left(\dfrac{-3}{2},\ \dfrac{-9}{4}+\beta\right)$.

(**β**) Η ευθεία $y=2x-3$ έχει συντελεστή διευθύνσεως 2. Αν $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ το ζητούμενο σημείο, πρέπει $f'(x_0)=2 \Leftrightarrow 2x_0+3=2 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{-1}{2}$.

Είναι $f(x_0)=f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\beta=\dfrac{-5}{4}+\beta$.

Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}\left(\dfrac{-3}{2},\ \dfrac{-9}{4}+\beta\right)$.

(**γ**) Ομοίως πρέπει $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow 2x_0+3=1 \Leftrightarrow x_0=-1$.
Είναι $f(x_0)=f(-1)=(-1)^2+3(-1)+\beta=-2+\beta$.
Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}(-1,\ -2+\beta)$.

Π.χ. 8. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, στα σημεία με τετμημένες $x_1=1$, $x_2=-1$ αντιστοίχως, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3+3x^2+2x$. Εξετάστε αν οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έχουν και άλλα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Π.χ. 9. Να βρεθεί ο $a\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=a^x$ να έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=x$. **Απάντηση** $\left(a=e^{\frac{1}{e}}\right)$.

Π.χ. 10. Να βρεθεί ο $a\in\mathbb{R}$ ώστε το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(ax-x^3\right)$ να τέμνει τον άξονα xx' υπό γωνία $\widehat{\omega}=45^0$. **Απάντηση** $(a=4)$.

Π.χ. 11. Να βρεθούν οι ευθείες της μορφής $y=\alpha x-1$, όπου $a\in\mathbb{R}$ οι οποίες εφάπτονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ και να δειχθεί ότι τέμνονται μεταξύ τους σε σημείο του άξονα yy'. **Απάντηση** $\left(y=\pm 2x-1,\ \ (x_0,y_0)=(0,\ -1)\right)$.

Ακρότατα συναρτήσεων

1^{o} κριτήριο. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(a,\ \beta)$ και $x_0 \in (a,\ \beta)$ με $f'(x_0)=0$. Η f παρουσιάζει:

• Τοπικό μέγιστο στο x_0, όταν $f'(x_0) \geq 0$ $\forall x \in (a,\ x_0]$ και $f'(x_0) \leq 0$ $\forall x \in [x_0,\ \beta)$.

• Τοπικό ελάχιστο στο x_0, όταν $f'(x_0) \leq 0$ $\forall x \in (a,\ x_0]$ και $f'(x_0) \geq 0$ $\forall x \in [x_0,\ \beta)$.

Παρατηρήσεις

1. Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και όταν $a=-\infty$ ή $\beta=+\infty$.

2. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο $x_0 \in (a,\ \beta)$ όταν η f' μηδενίζεται στο x_0 αλλάζοντας πρόσημο. (Από $+$ σε $-$ έχουμε τοπικό μέγιστο. Από $-$ σε $+$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.)

3. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in (a,\ \beta)$ και είναι συνεχής στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, όταν η f' αλλάζει πρόσημο στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση $f, f(x)=|x|$ στο σημείο $x_0=0$

4. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[a,\ \beta] \to \mathbb{R}$

• Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο β και τοπικό ελάχιστο στο σημείο a.

• Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο a και τοπικό ελάχιστο στο σημείο β.

5. Από τα παραπάνω συνάγεται πως για να βρούμε τα τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης, πρέπει πρώτα να τη μελετήσουμε ως προς την μονοτονία.

2^{o} κριτήριο. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(a,\ \beta)$ και $x_0 \in (a,\ \beta)$ με $f'(x_0)=0$.

• Όταν $f''(x_0)>0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0.

• Όταν $f''(x_0)<0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0.

Παρατηρήσεις

1. Όταν $f''(x_0)=0$, τότε εξετάζουμε με το 1^{o} κριτήριο αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

2. Συνήθως το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται όταν είναι δύσκολη η εύρεση του πρόσημου της f'.

Κριτήριο μονοτονίας. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,\ \beta]$.

• Όταν $f'(x)>0$ $\forall x \in (a,\ \beta) \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[a,\ \beta]$.

• Όταν $f'(x)<0$ $\forall x \in (a,\ \beta) \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[a,\ \beta]$.

Παρατηρήσεις

1. Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η μονοτονία μίας συνάρτησης εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου της και εξετάζετε πάντα σε διάστημα ή διαστήματα.

2. Το κριτήριο ισχύει και για διάστημα της μορφής $[a,\ \beta)$ ή $(a,\ \beta]$ ή $(a,\ \beta)$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $(a,\ \beta)$, τότε ισχύει ότι $f'(x)\geq 0\ \ \forall x\in(a,\ \beta)$.

Πράγματι, αφού η f είναι αύξουσα στο $(a,\ \beta)$, προκύπτει ότι $\forall x, x_0\in(a,\ \beta)$ με $x\neq x_0$ ισχύει ότι $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)\geq 0$, δηλαδή $f'(x_0)\geq 0$.

Το αντίστροφο της πρότασης αυτής γενικά δεν ισχύει. Δηλαδή είναι δυνατό να ισχύει $f'(x)\geq 0$ και όμως η συνάρτηση f να μην είναι γνησίως αύξουσα στο $(a,\ \beta)$. Ανάλογη πρόταση ισχύει και για φθίνουσα συνάρτηση.

4. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(a,\ \beta)$, τότε έχει ως σύνολο τιμών το διάστημα $(\kappa,\ \lambda)$, όπου $\kappa=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ και $\lambda=\lim\limits_{x\to \beta^-}f(x)$.

Αν όμως η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(a,\ \beta)$, τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(\lambda,\ \kappa)$.

Π.χ. 12. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=-x^2+2x-1$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=-2(x-1)$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	
			Ολικό maximum		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην θέση $(1,\ f(1))=(1,\ 0)$.

Π.χ. 13. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=3(x-1)(x-3)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ.max		Τοπ.min		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στην θέση $(1,\ f(1))$ και τοπικό ελάχιστο στην θέση $(3,\ f(3))$.

Π.χ. 14. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=-x^4+4x^2-3$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=-4x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Τοπ.max		Τοπ.min		Τοπ.max		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στις θέσεις $\left(-\sqrt{2},\ f\left(-\sqrt{2}\right)\right)$ & $\left(\sqrt{2},\ f\left(\sqrt{2}\right)\right)$ και έχει τοπικό ελάχιστο στην θέση $(0,\ -3)$.

Π.χ. 15. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2(x+2)^3$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=(x+2)^2(x-1)(5x+1)$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ η $x=-2$ η $x=\frac{-1}{5}$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{5}$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ.min		Τοπ.max		Τοπ.min		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στην θέση $\left(\frac{-1}{5},\ f\left(\frac{-1}{5}\right)\right)$ και τοπικά ελάχιστα στις θέσεις $(-2,\ f(-2))$ και $(1,\ f(1))$.

Π.χ. 16. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$. Η f ως ρητή παραγωγίσιμη στο $D(f)$.

Είναι $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Η $f'(x)$ έχει ίδιο πρόσημο με το $x(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$							$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	
			Τοπ. max $(-2,\ -4)$				Τοπ.min $(0,\ 0)$		

Π.χ. 17. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Η f, ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$. Είναι $f'(x)=\dfrac{-7}{(2x-1)^2}$, $f'(x)<0 \quad \forall x\in D(f)$, άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D(f)$.

Π.χ. 18. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}^*$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$, $f'(x)=\dfrac{-x-2}{x^3}$. Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με το γινόμενο $x(-x-2)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	ΙΙ	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	ΙΙ	$\searrow$	
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$		Τοπ.min		Τοπ. max		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Π.χ. 19. Να λυθεί η εξίσωση $3x^4+x+2lnx=4$.
Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=3x^4+x+2lnx-4$ με $D(f)=(0,\ +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=12x^3+1+\dfrac{2}{x}$.

Είναι $f'(x)>0 \quad \forall x\in D(f)$. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $D(f)$. Όταν $x=1$ τότε $f(1)=0$. Η λύση $x=1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $3x^4+x+2lnx=4$.

Π.χ. 20. Για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\lambda x^2}{1+x}$ στο πεδίο ορισμού της; Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, $f'(x)=\dfrac{\lambda x^2+2\lambda x-1}{(1+x)^2}$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $P(x)=\lambda x^2+2\lambda x-1$.
- Όταν $\lambda=0$ τότε $P(x)=-1<0$
- Όταν $\lambda\neq 0$ τότε για το τριώνυμο $P(x)$ πρέπει να είναι

$$\begin{cases}\Delta\le 0\\ \alpha=\lambda<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\lambda(1+\lambda)\le 0\\ \lambda<0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le\lambda<0.$$

Άρα, όταν $-1\le\lambda<0$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Π.χ. 21. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x-lnx$.

Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.
Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $x-1$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Π.χ. 22. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=e^x-x+1$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=e^x-1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό minimum $(0,\ 1)$		

Επεξηγήσεις

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \Leftrightarrow x<0$

Π.χ. 23. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}^*$. Η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$. Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $x(x-1)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0)\cup[1,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$.

Π.χ. 24. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x^x$.
Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=x^x(1+lnx)$.
Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $1+lnx$.

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό minimum		

Επεξηγήσεις

$1+lnx=0 \Leftrightarrow lnx=-1 \Leftrightarrow lnx=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$1+lnx>0 \Leftrightarrow lnx>-1 \Leftrightarrow lnx>\ln e^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$1+lnx<0 \Leftrightarrow lnx<-1 \Leftrightarrow lnx<\ln e^{-1} \Leftrightarrow x<e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

Π.χ. 25. Να δειχθεί ότι $\forall x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $x \cdot sinx + cosx > 1$.

Έστω συνάρτηση $f(x) = x \cdot sinx + cosx - 1$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$.

Είναι $f(x) > 0\ \ \forall x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x \cdot cosx$.

Είναι $f'(x) > 0\ \forall x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $\forall x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$.

Π.χ. 26. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1+x}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^2}, & x < 0 \end{cases}$.

Δεν υπάρχει το $f'(0)$ διότι $f'_\delta(0) = -2 \neq 2 = f'_\alpha(0)$.

$\forall x > 0$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\ +\infty)$.

$\forall x < 0$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$.

Π.χ. 27. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. max $(-1,\ 4)$		Τοπ.min $(1,\ 0)$		

Π.χ. 28. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 9x - x^3$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και $f'(x) = 9 - 3x^2$.

Είναι $D(f') = \mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $D(f')$ και $f''(x) = -6x$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

- Είναι $f''(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$, άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στην θέση $x_0 = \sqrt{3}$, ίσο με $f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$.
- Είναι $f''(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0$, άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στην θέση $x_0 = -\sqrt{3}$, ίσο με $f(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$.

Π.χ. 29. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x^4-8x^2+5$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$.
Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=\pm 2$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. min $(-2,\ -11)$		Τοπ.max $(0,\ 5)$		Τοπ. min $(2,\ -11)$		

Π.χ. 30. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=2$ θέσεις πιθανών ακρότατων.
Θέση πιθανού ακροτάτου είναι και η θέση $x_0=1$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	II	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	II	$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ.max $(0,\ 0)$				Τοπ. min $(2,\ 4)$		

Π.χ. 31. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^x$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=e^x(x+1)$.
Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ θέση πιθανού ακρότατου.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό minimum $\left(-1,\ \dfrac{-1}{e}\right)$		

Π.χ. 32. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x\cdot lnx$.
Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=1+lnx$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$ θέση πιθανού ακρότατου.

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό minimum $\left(e^{-1},\ -e^{-1}\right)$		

Π.χ. 33. Ποια τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$; Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2ax+\beta$ $f'(x)=2ax+\beta$ και $f''(x)=2a$. Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-\beta}{2a}$ θέση πιθανού ακρότατου.

- Όταν $\alpha>0$ τότε $f''\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=2a>0$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση $x_0=\dfrac{-\beta}{2a}$, ίσο με $f\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$.
- Όταν $\alpha<0$ τότε $f''\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=2a<0$, άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $x_0=\dfrac{-\beta}{2a}$, ίσο με $f\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$.

Π.χ. 34. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f:(1,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x}{lnx}$.
Να συγκριθούν οι αριθμοί e^x και x^e όταν $x>0$.
Είναι $D(f)=(1,\ +\infty)$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{lnx-1}{ln^2x}$.
Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $(lnx-1)$.

x	$-\infty$		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό minimum		

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(e,\ e)$.

Επεξηγήσεις

$\forall x>1\Rightarrow f(x)\geq e\Rightarrow \dfrac{x}{lnx}\geq e\Rightarrow x\geq elnx\Rightarrow x\geq lnx^e\Rightarrow lne^x\geq lnx^e\Rightarrow e^x\geq x^e$

$\forall x\in(0,\ 1)\Rightarrow 0<x<1\Rightarrow e^x>e^0=1\geq x^e$, άρα $\forall x>0$ είναι $e^x\geq x^e$

Π.χ. 35. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$.
Είναι $D(f)=[0,\ 3]$. Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0,\ 3]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 3)$ με $f'(x)=\dfrac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$.
Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $3-2x$.
Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$ και ολικό ελάχιστο $f(0)=f(3)=0$.

x	0		$3/2$		3
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

Π.χ. 36. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με $f'(x)=\dfrac{-2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

Η f συνεχής στη θέση $x_0=1$. Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $-2(x-1)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	ΙΙ	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ολικό maximum

$(1, f(1))=(1,\ 1)$

Παρατήρηση

Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0\in(a,\ \beta)$ και είναι συνεχής στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 όταν η f' αλλάζει πρόσημο στο σημείο αυτό.

Π.χ. 37. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{lnx}{x}$.

Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$. Η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$ θέση πιθανού ακρότατου.

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ολικό maximum

$(e,\ f(e))=(e,\ e^{-1})$

Σημείωση. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Π.χ. 38. Να δειχθεί ότι $e^x\geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Αρκεί να δειχθεί ότι $e^x-x\geq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Έστω συνάρτηση $f(x)=e^x-x$ με $D(f)=\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-1$. Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ θέση πιθανού ακρότατου.

$\forall x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 1\Leftrightarrow e^x-x\geq 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό minimum

$(0,\ 1)$

Π.χ. 39. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x\cdot lnx$.

Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=1+lnx$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow lnx=-1 \Leftrightarrow lnx=ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ θέση πιθανού ακρότατου.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό minimum

$\left(e^{-1}, f\left(e^{-1}\right)\right)=\left(e^{-1},\ -e^{-1}\right)$

Επεξήγηση. $1+lnx>0 \Leftrightarrow lnx>-1 \Leftrightarrow lnx>lne^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1}$.

Π.χ. 40. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & x<0\end{cases}$

Δεν υπάρχει το $f'(0)$. Η θέση $x_0=0$ είναι θέση πιθανού ακρότατου. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στην θέση $x_0=0$. Πράγματι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	II	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό minimum

$\left(0,\ f(0)\right)=\left(0,\ \ 0\right)$

Π.χ. 41. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2}{2}-x+6$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x-1$.
Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ θέση πιθανού ακρότατου.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό minimum

$\left(1,\ f(1)\right)$

Π.χ. 42. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=x^4-8x^2+17$
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\ \eta\ x=\pm 2$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. min $(-2,\ f(-2))$		Τοπ.max $(0,\ f(0))$		Τοπ. min $(2,\ f(2))$		

Π.χ. 43. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=lnx-x$.

Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ θέση πιθανού ακρότατου.

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	
			Ολικό maximum $(1,\ f(1))=(1,\ -1)$		

Π.χ. 44. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^5(x+1)^4$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη με $f'(x)=(x-2)^4(x+1)^2(x+1)(9x-3)$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$ ή $x=\dfrac{1}{3}$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. max $(-1, f(-1))$		Τοπ. min $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$				

Π.χ. 45. Να δειχθεί ότι $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}<ln(x+1)$, $\forall x>0$.

Έστω συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-ln(x+1)$ με $D(f)=(0,\ +\infty)$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{-x^4}{x+1}$ και επειδή $f'(x)<0$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα, $f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$.

Π.χ. 46. Να δειχθεί ότι $(1+x)^a>1+ax$, $\forall x>0$.

Έστω συνάρτηση $f(x)=(1+x)^a-1-ax$, $D(f)=(0,\ +\infty)$.

Η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=a\left[(1+x)^{a-1}-1\right]$.

Η f' δεν μηδενίζεται ποτέ. $\forall x>0$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$.

Είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow(1+x)^{a}-1-ax>0\Leftrightarrow(1+x)^{a}>1+ax$, $\forall x\in(0,\ +\infty)$.

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f		$\nearrow$	

Π.χ. 47. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=ln\left(x^{2}-9\right)$.

Είναι $D(f)=(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$ και $f'(x)=\dfrac{2x}{(x-3)(x+3)}$.

Είναι $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$, άρα δεν υπάρχουν πιθανά ακρότατα.

x	0		-3		3		$+\infty$
f'		$-$		-----		$+$	
f	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	

Π.χ. 48. Να βρεθεί ο $a\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^{2}+ax+\dfrac{1}{x}+\dfrac{17}{4}$, $a\in\mathbb{R}$ να έχει ακρότατο το 0 στην θέση $x_0=\dfrac{-1}{2}$. Είναι $D(f)=\mathbb{R}^{*}$, $f'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x^{2}}$ και $f'\left(\dfrac{-1}{2}\right)=0\Leftrightarrow a=5$ για πιθανό ακρότατο στη θέση $x_0=\dfrac{-1}{2}$. Είναι $f'(x)=2\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^{2}+2x-2\right)}{x^{2}}$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$\frac{-1}{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Τοπ. maximum

$$\left(\frac{-1}{2},\ f\left(\frac{-1}{2}\right)\right)=\left(\frac{-1}{2},\ 0\right)$$

Π.χ. 49. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x+a)(x+\beta)}{(x-a)(x-\beta)}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{\alpha,\beta\}$ και $f'(x)=\dfrac{-2(\alpha+\beta)\left(x^{2}-\alpha\beta\right)}{(x-a)^{2}(x-\beta)^{2}}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a\beta}$, θέσεις πιθανών ακρότατων $x_0=a$, $x_0=\beta$, $x_0=\pm\sqrt{a\beta}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{a\beta}$		a		$\sqrt{a\beta}$		β		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	II	$+$	0	$-$	II	$-$	
f		↘		↗	II	↗		↘	II	↘	
			Τοπ.minimum				Τοπ.maximum				

Π.χ. 50. Να δειχθεί ότι $\forall x>0$ και $0<a<1$ είναι $x^a - ax \le 1-a$.
Αρκεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^a-ax$ έχει μέγιστο το $1-a$. Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=a\left(x^{a-1}-1\right)$ και $f(x)=a(a-1)x^{a-2}$. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Είναι $f''(1)=a(a-1)<0$, άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο το οποίο είναι $f(1)=1-a$.

Π.χ. 51. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=4x^5-5x^4+2$.
Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=20x^3(x-1)$.
Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=1$ θέσεις πιθανών ακρότατων.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	
			Τοπ. max		Τοπ. min		
			$(0,\ 2)$		$(1,\ 1)$		

Σχόλιο. $f''(x)=80x^3-60x^2=20x^2(4x-3)$, $f''(0)=0$.

Π.χ. 52. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6(x-1)(x-2)$. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ η $x=2$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	
			Τοπ. max		Τοπ. min		
			$(1,\ 7)$		$(2, f(2))$		

Σχόλιο
$f''(x)=12x-18$
$f''(1)=-6<0$, άρα για $x_0=1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
$f''(2)=6>0$, άρα για $x_0=2$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

Π.χ. 53. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^4$.
$\forall x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\ge f(0)$. Άρα στη θέση $x_0=0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο. Αλλά $f'(x)=4x^3$ και $f'(0)=0$. Επίσης $f''(x)=12x^2$ και $f''(0)=0$. Δηλαδή, οι συνθήκες $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)\ne 0$ είναι ικανές για την ύπαρξη ακρότατου. Δεν είναι αναγκαίες.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό minimum

Άλυτες ασκήσεις

10. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια υποτείνουσα a, ποιο έχει: (**α**) μέγιστο εμβαδό, (**β**) μέγιστη περίμετρο;

11. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια περίμετρο, ποιό έχει την μικρότερη υποτείνουσα;

12. Σε σφαίρα ακτίνας R να εγγραφεί ορθός κύλινδρος με μέγιστο όγκο.

13. Σε κώνο να εγγράψετε κύλινδρο με μέγιστη ολική επιφάνεια.

14. Σε σφαίρα (O,R) να εγγράψετε ορθό κώνο με μέγιστη παράπλευρη επιφάνεια.

15. Σε τυχαίο τρίγωνο να εγγραφεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μέγιστο εμβαδό.

16. Από όλους τους κώνους με τον ίδιο όγκο, ποιος έχει τη μικρότερη παράπλευρη επιφάνεια;

17. Σε τετράγωνο πλευράς a να εγγράψετε άλλο τετράγωνο με ελάχιστο εμβαδό.

18. Ποια τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=x^3-ax+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

19. Ποια είναι τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=e^x sinx$.

20. Ομοίως για τη συνάρτηση $f(x)=(2x-3)e^x+2x(1-x)+1$.

21. Βρείτε το σημείο της ευθείας $x+2y=6$, του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα σημεία $\mathrm{A}(3,\ 5)$ και $\mathrm{B}(-7,\ -3)$ είναι ελάχιστο.

Εφαρμογή 2. Ο αριθμός x των τόνων τσιμέντου που πωλεί εταιρεία εξαρτάται από την τιμή k (σε €) του ενός τόνου. Αν $x=100-\frac{k}{10}$, όπου $100\le k\le 1.000$, ποιά τα έσοδα από την πώληση x τόνων; Για ποιά τιμή του k μεγιστοποιούνται τα έσοδα;

Τα έσοδα από την πώληση x τόνων είναι $f(k)=x\cdot k=\left(100-\frac{k}{10}\right)k=100k-\frac{k^2}{10}$

Άρα, $f'(k)=100-\frac{k}{5}$. Είναι $f'(k)=0\Leftrightarrow k=500$. Ισχύει ότι $f'(k)>0\Leftrightarrow 100-\frac{k}{5}>0\Leftrightarrow k<500$. Ισχύει ότι $f'(k)<0\Leftrightarrow 100-\frac{k}{5}<0\Leftrightarrow k>500$.

Άρα, τα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν ο τόνος πωλείται προς 500 €.

k	100		500		1.000
$f'(k)$		+	0	–	
$f(k)$		↗	Ολικό	↘	

Maximum

Εφαρμογή 3. Τα έσοδα από την παραγωγή x τεμαχίων προϊόντος είναι $E(x)=500x-20x^2$. Το κόστος για την παραγωγή τους είναι $K(x)=x^3-50x^2+500x+250$, με $0\le x\le 35$. Βρείτε την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το κέρδος.

Είναι Κέρδος= Έσοδα – Έξοδα. Άρα, αν $P(x)$ το κέρδος, ισχύει ότι $P(x)=E(x)-K(x)=-x^3+30x^2-250$. Συνεπώς $P'(x)=-3x(x-20)$. Άρα $P'(x)=-3x(x-20)$ και $P'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=20\end{cases}$

Είναι $P'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,20)$ και $P'(x)<0\Leftrightarrow x>20$. Άρα, το κέρδος μεγιστοποιείται όταν παράγονται 20 τεμάχια προϊόντος.

x	0		20		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	–	
$P(x)$		↗	Ολικό	↘	

Maximum

Εφαρμογή 4. Βρείτε τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεγίστου εμβαδού, αν οι δύο πλευρές του βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και η μία από τις κορυφές του ανήκει στην ευθεία $y=-x+2$.

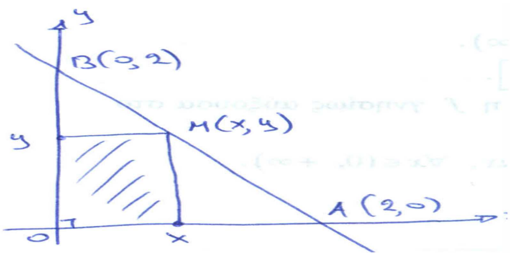
Λύση

$E(x)=x\cdot y=x(-x+2)=-x^2+2x$

$E'(x)=-2x+2=2(1-x)$

$E'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$E''(x)=-2<0$



Αν $x=1\Rightarrow y=1$, άρα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γίνεται τετράγωνο

Εφαρμογή 5. Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερό εμβαδόν k^2 $(k>0)$, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

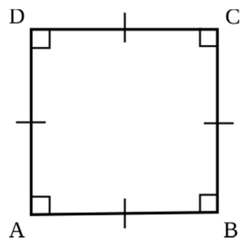
E	x	y	Περίμετρος
100	100	1	202
100	50	2	104
100	25	4	58
100	200	0,5	401
100	10	10	40

$$\left.\begin{aligned} E &= k^2 \\ E &= x\cdot y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x\cdot y = k^2 \Rightarrow y = \frac{k^2}{x}$$

Η περίμετρος είναι $2(x+y)$ και η ελαχιστοποίηση της σημαίνει ελαχιστοποίηση της παράστασης $x+y$ δηλαδή της παράστασης $x+\dfrac{k^2}{x}$.

Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x+\dfrac{k^2}{x}$. Είναι $f'(x)=\dfrac{(x+k)(x-k)}{x^2}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases} k, & \text{Δεκτή} \\ -k<0, & \text{Απορρίπτεται} \end{cases}$



Είναι $f''(x)=\dfrac{2k^2}{x^3}$, άρα $f''(k)=\dfrac{2k^2}{k^3}=\dfrac{2}{k}>0$, συνεπώς $x=y=k$, οπότε $E=x\cdot y=x^2=k^2$.

Εφαρμογή 6. Σε σφαίρα ακτίνας R να εγγραφεί κώνος με μέγιστο όγκο.

Είναι $\text{ΟΑ}=\text{ΟΒ}=\text{ΟΓ}=R$ Άρα, $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot(\text{ΚΒ})^2\,\text{ΑΚ}=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(R^2-x^2\right)(R+x)=$

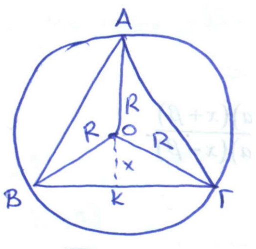
$\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(R^3+R^2x-Rx^2-x^3\right)=V(x)$

x: Η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το επίπεδο της βάσης του κώνου.

Είναι $V'(x)=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(R^2-2Rx-3x^2\right)$ & $V''(x)=\dfrac{1}{3}\pi\cdot(-2R-6x)$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow R^2-2Rx-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases} -R, & \text{Απόρριψη} \\ \dfrac{R}{3}, & \text{Δεκτή} \end{cases}$

$V''\left(\dfrac{R}{3}\right)=\dfrac{-4}{3}\pi\cdot R<0$. Άρα, $OK=x=\dfrac{R}{3}$



Σχήμα. Τομή της σφαίρας & του κώνου

Κυρτές συναρτήσεις –σημεία καμπής

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

• Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), τότε η f είναι **κυρτή** ή στρέφει τα **κοίλα πάνω** στο $[\alpha,\beta]$.

• Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β), τότε η f είναι **μη κυρτή** ή στρέφει τα **κοίλα κάτω** στο $[\alpha,\beta]$.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει η ακόλουθη πρόταση:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β).

• Όταν $\forall x \in (\alpha,\beta)$ είναι $f''(x) > 0$ τότε η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[\alpha,\beta]$.

• Όταν $\forall x \in (\alpha,\beta)$ είναι $f''(x) < 0$ τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha,\beta]$.

Ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f, όταν

(**α**) Η f είναι συνεχής στην θέση x_0.

(**β**) Υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(x_0, f(x_0))$.

(**γ**) Η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου x_0.

Ειδική περίπτωση. Αν $f'(x_0) = 0$ (το x_0 είναι στάσιμο σημείο της f), λέμε ότι έχουμε σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει η πρόταση: Αν το $M(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, τότε είναι $f''(x_0) = 0$ ή δεν ορίζεται η f'' στο x_0.

Γεωμετρική ερμηνεία

• Αν η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα Δ, τότε η γραφική της παράσταση μένει πάνω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

• Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα Δ, τότε η γραφική της παράσταση μένει κάτω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

• Αν η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ «διαπερνά» την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Π.χ. 54. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας – κοιλότητας και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $f'(x) = 6x - 6x^2$ και $f''(x) = [f'(x)]' = 6 - 12x = 6(1-2x)$.

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(1-2x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$. Θέση πιθανού σημείου καμπής.

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f		$\cup$	σ.κ	$\cap$	

Συνεπώς, σημείο καμπής είναι το σημείο $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Π.χ. 55. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας –κοιλότητας και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)=x\cdot lnx-1$.
Είναι $D(f)=(0, +\infty)$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Είναι $f'(x)=1+lnx$ και $f''(x)=\frac{1}{x}$. $\forall x\in D(f)$ είναι $f''(x)>0$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω. Δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

Π.χ. 56. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας –κοιλότητας και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Είναι $f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$, $f''(x)=\frac{2x(3+x^2)}{(x^2-1)^3}$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Θέση πιθανού σημείου καμπής. Η f'' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $\frac{x}{x^2-1}$, δηλαδή με το γινόμενο $x(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f''		$-$	II	$+$	0	$-$	II	$+$	
f		$\cap$	II	$\cup$		$\cap$	II	$\cup$	

Συνεπώς, σημείο καμπής είναι το σημείο $(0, 0)$.

Π.χ. 57. Να βρεθούν οι $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{\alpha x}{x^2+\beta}$ να έχει σημείο καμπής το σημείο $\mathrm{M}\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πρέπει να διέρχεται από το σημείο M, άρα ισχύει ότι $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2a=3+\beta$ (1). Για να παρουσιάζει η συνάρτηση f καμπή στο σημείο M, πρέπει να ισχύει ότι $f''(\sqrt{3})=0$ και επιπλέον η συνάρτηση $f''(x)$ να αλλάζει πρόσημο στην θέση $x_0=\sqrt{3}$. Είναι $f'(x)=\frac{\alpha\beta-\alpha x^2}{(x^2+\beta)^2}$,
$f''(x)=\frac{2x(ax^2-3\alpha\beta)}{(x^2+\beta)^3}$, $f''(\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow 6a\sqrt{3}(1-\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha(1-\beta)=0 \Leftrightarrow \beta=1$.
Αποκλείεται να είναι $\alpha=0$, διότι τότε $f(x)=0$ και η f δεν έχει σημείο καμπής.
Από (1) έπεται ότι $\alpha=2$. Άρα $f''(x)=\frac{4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$. Η f'' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			σ.κ.		σ.κ.		σ.κ.		

Π.χ. 58. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^4-x^3+\dfrac{3}{2}x^2-1$ σε οποιοδήποτε σημείο της M, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση πλην του M.
Αρκεί να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης μένει, διαρκώς, πάνω ή κάτω από οποιανδήποτε εφαπτομένη της, δηλαδή αρκεί να δειχθεί ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω σε όλο το πεδίο ορισμού της που είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.
Πράγματι, $f'(x)=4x^3-3x^2+3x$ και $f''(x)=12x^2-6x+3$.
Είναι $f''(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω.

Π.χ. 59. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω σε ένα διάστημα Δ. Η συνάρτηση g είναι αύξουσα και στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $f(\Delta)$. Δείξτε ότι η gof στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα Δ.
Αρκεί να δειχθεί ότι $(gof)''(x)\geq 0$. Είναι $(gof)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Είναι $(gof)''(x)=g''(f(x))\cdot[f'(x)]^2+g'(f(x))\cdot f''(x)$.

Ισχύει ότι $(gof)''(x)\geq 0$, διότι:
- Η f στρέφει τα κοίλα άνω, άρα $f''(x)\geq 0\ \ \forall x\in\Delta$.
- Η g στρέφει τα κοίλα άνω, άρα $g''(f(x))\geq 0\ \ \forall x\in\Delta$.
- Η g αύξουσα άρα $g'(f(x))\geq 0\ \ \forall x\in\Delta$.
- Ισχύει ότι $[f'(x)]^2\geq 0\ \ \forall x\in\Delta$.

Π.χ. 60. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία σημεία καμπής που είναι συνευθειακά.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Είναι $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$. Η f'' έχει το ίδιο πρόσημο με το πολυώνυμο $P(x)=x^3+3x^2-3x-1=(x-1)\left[x-\left(-2-\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right]$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			σ.κ.		σ.κ.		σ.κ.		

Είναι $f\left(-2-\sqrt{3}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$, $f\left(-2+\sqrt{3}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ και $f(1)=1$.

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\left(-2-\sqrt{3},\ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-2+\sqrt{3},\ \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{1}{4}$ και εξίσωση $x-4y+3=0$ την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες του σημείου $(1,\ 1)$.

Π.χ. 61. Εύρεση των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}$.

Είναι $f(x)=\left|x^2-1\right|$, $D(f)=\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)2x}{2\left|x^2-1\right|}=\begin{cases}2x, & x>1 \ \eta \ x<-1\\ -2x, & -1<x<1\end{cases}$, $\quad D(f')=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

Είναι $f''(x)=\begin{cases}2, & x>1 \ \eta \ x<-1\\ -2, & -1<x<1\end{cases}$, $\quad D(f'')=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Η συνάρτηση f'' αλλάζει πρόσημο στα σημεία $x_0=1$ και $x_0=-1$ στα οποία και δεν ορίζεται. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημεία $x_0=1$ και $x_0=-1$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει εφαπτομένη στα σημεία αυτά. Άρα, η γραφική της παράσταση δεν έχει σημεία καμπής.

Π.χ. 62. Εύρεση των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & x\ge 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}$.

Είναι $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x>0\\[2mm] \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}, & x<0\end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}, & x>0\\[2mm] \dfrac{2}{9\sqrt[3]{(-x)^5}}, & x<0\end{cases}$.

- Είναι $f''(x)<0$ όταν $x>0$.
- Είναι $f''(x)>0$ όταν $x<0$.
- Είναι $f'_{\delta}(0)=f'_{\alpha}(0)=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το $f'(0)$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο στη θέση $x_0=0$. Η f είναι συνεχής στη θέση $x_0=0$.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει εφαπτομένη στο σημείο αυτό. Άρα, το $\left(0,\ f(0)\right)=(0,\ 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Π.χ. 63. Εύρεση των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ και $\begin{cases}f''(x)<0, & \forall x\in(-\infty,\ 0)\\ f''(x)>0, & \forall x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$

Άρα, η θέση $x_0=0$ επειδή δεξιά και αριστερά της αλλάζει πρόσημο η f'' «φαίνεται» να είναι σημείο καμπής. Όμως $0\notin D(f)$, άρα δεν υπάρχει σημείο καμπής.

Π.χ. 64. Εύρεση των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x)=3x^4-4x^3+1$.

Είναι $f'(x)=12x^3-12x^2$, $\quad f''(x)=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \eta \ x=\frac{2}{3}$ θέσεις πιθανών σημείων καμπής.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			σ.κ.		σ.κ.		

• Όταν $x=0 \Rightarrow f'(0)=0$, άρα το σημείο $(0, f(0))=(0, 1)$ είναι σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

• Όταν $x=\frac{2}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right)\neq 0$, άρα το σημείο $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής με πλάγια εφαπτομένη.

Άσκηση 22. Βρείτε τα διαστήματα κοιλότητας –κυρτότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=2x-x^3$, **(β)** $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$, **(γ)** $f(x)=x\cdot e^x$,

(δ) $f(x)=x\cdot|x|$, **(ε)** $f(x)=x^3-3x^2$, **(στ)** $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$,

(ζ) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, **(η)** $f(x)=x^3\cdot e^{-x^2}$, **(θ)** $f(x)=e^x\cdot \eta\mu x$,

(ι) $f(x)=\ln|\ln x|$, **(ια)** $f(x)=\ln|x^2-1|$, **(ιβ)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,

(ιγ) $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, **(ιδ)** $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, **(ιε)** $f(x)=x^x$,

(ιζ) $f(x)=e^x\cdot\left(7+x^2-5x\right)$ **(ιη)** $f(x)=sin^3x+cos^3x$ **(ιθ)** $f(x)=4x^5-5x^4+2$

(κ) $f(x)=(x-1)^4(3-x)^3$ **(κα)** $f(x)=\frac{a}{x}ln\left(\frac{a}{x}\right)$, $a>0$

(κβ) $f(x)=\frac{2a\sqrt{2ax-x^2}}{x}$, $a>0$ **(κγ)** $f(x)=x^3-9x^2+24x+2$

Απροσδιόριστες μορφές

1η μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Εμφανίζεται όταν έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$. Τότε, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2η μορφή $(+\infty)-(+\infty)$ ή $(-\infty)-(-\infty)$. Εμφανίζεται όταν έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ και είναι: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty\\ \text{ή}\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty\end{cases}$. Τότε κάνουμε την διαφορά (των κλασμάτων) κλάσμα και καταλήγουμε **πάντα** στη μορφή $\frac{0}{0}$.

3η μορφή $0\cdot(\pm\infty)$ ή $(\pm\infty)\cdot 0$. Εμφανίζεται όταν έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ με $x_0\in\overline{\Re}=\Re\cup\{+\infty,-\infty\}$ και $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ \text{ή}\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\end{cases}$.

Τότε έχουμε $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ μορφή $\frac{0}{0}$ ή $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Παρατήρηση. Ποτέ δεν αντιστρέφουμε την συνάρτηση $y=lnx$.

4η μορφή 0^0 ή $(+\infty)^0$ ή $1^{\pm\infty}$. Εμφανίζεται όταν έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ όπου $f(x)>0$ και $x_0\in\overline{\Re}=\Re\cup\{+\infty,-\infty\}$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, προκύπτει η μορφή 0^0.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, προκύπτει η μορφή $(+\infty)^0$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, προκύπτει η μορφή $1^{\pm\infty}$.

Όλες αυτές οι μορφές αντιμετωπίζονται ως εξής:

$f(x)>0\Rightarrow f(x)=e^{\ln f(x)}\Rightarrow\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)}$

Σχόλια

1. Οι συναρτήσεις e^x, $\ln x$, x^ν, $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\phi x$ είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους. Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0} e^x=e^{x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$, κ.ο.κ. Επίσης, κάθε αλγεβρική παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων, είναι συνεχής.

2. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος της σύγκλισης & σύνθεσης μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\lim\limits_{x\to x_0} e^{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\ln f(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\eta\mu f(x)\right]$, κ.ο.κ.

3. Απροσδιόριστες μορφές είναι

- Για την πρόσθεση στο $\mathbb{R}$ οι μορφές: $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$
- Για την αφαίρεση στο $\mathbb{R}$ οι μορφές: $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$
- Για τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{R}$ οι μορφές: $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$
- Για την διαίρεση στο $\mathbb{R}$ οι μορφές: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$
- Για τις δυνάμεις στο $\mathbb{R}$ οι μορφές: $(+\infty)^0$, 0^0, $1^{\pm\infty}$

Π.χ. 65. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$ Οι συναρτήσεις $\begin{cases} f, f(x)=x \\ g, g(x)=e^x \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $\begin{cases} f', f'(x)=1 \\ g', g'(x)=e^x \end{cases}$. Άρα, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

Π.χ. 66. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+\ln x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\ln x)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} f, f(x)=e^x \\ g, g(x)=x^2+\ln x \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με $\begin{cases} f', f'(x)=e^x \\ g', g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}\neq 0 \end{cases}$ Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x+\dfrac{1}{x}}$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Οι συναρτήσεις f', g' είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με $\begin{cases} f'', f''(x)=e^x \\ g'', g''(x)=2-\dfrac{1}{x^2}\neq 0 \end{cases}$

$$\text{Είναι } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{2-\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$

Π.χ. 67. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$, $\lim\limits_{x\to0} x^2=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} f, f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x \\ g, g(x)=x^2 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $\begin{cases} f', f'(x)=\eta\mu x \\ g', g'(x)=2x\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^* \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{2x}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$

Π.χ. 68. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}2x^2=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} f, f(x)=e^x+e^{-x}-2 \\ g, g(x)=2x^2 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $\begin{cases} f', f'(x)=e^x-e^{-x} \\ g', g'(x)=4x\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^* \end{cases}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{4x}$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-e^{-x})=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}4x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Οι συναρτήσεις f', g' είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ $\begin{cases} f'', f''(x)=e^x+e^{-x} \\ g'', g''(x)=4\neq 0 \end{cases}$.

Άρα, είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{4}=\dfrac{e^0+e^0}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Π.χ. 69. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-x^5}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^5\right)=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-x^5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^5\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x}{-5x^4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{5x^3}=\dfrac{2}{5}$

Π.χ. 70. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{2x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu 3x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\right)=0$ (*). Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\eta\mu 3x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sigma\upsilon\nu 3x}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu 3x=\dfrac{3}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2}$

(*) **Επεξήγηση** $\phi, \phi(x)=\eta\mu 3x$, $\phi=f\circ g, \begin{cases} f, f(x)=\eta\mu x \\ g, g(x)=3x=\psi \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}3x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f\left(\psi\right)=\lim\limits_{\psi\to 0}\eta\mu\psi=0$

Π.χ. 71. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x)=0$. Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{2\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x}=\dfrac{0}{2}=0$

Π.χ. 72. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(x-\eta\mu x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\eta\mu x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}3x^2=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\eta\mu x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(3x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{6x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}6x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\eta\mu x)'}{(6x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{6}=\dfrac{1}{6}$

Π.χ. 73. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}(7x^7-8x^5-x+2)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3-x^2-x+1)=0$

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(7x^7-8x^5-x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{49x^6-40x^4-1}{3x^2-2x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}(49x^6-40x^4-1)=8$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(3x^2-2x-1)=0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(49x^6-40x^4-1)\cdot\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{3x^2-2x-1}=8\cdot(+\infty)=+\infty$

Επεξήγηση. Είναι $3x^2-2x-1=3\cdot(x-1)\cdot\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$

x	$-\infty$ $\quad$ $-1/3$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$3x^2-2x-1$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$$x\to 1^+ \Rightarrow x>1 \Rightarrow 3x^2-2x-1>0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(3x^2-2x-1\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{3x^2-2x-1}=+\infty$$

Π.χ. 74. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-5x^2+7\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-1\right)=+\infty$

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^3-5x^2+7\right)'}{\left(2x^3-1\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-10}{6x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-10\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}6x=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-10}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(3x-10\right)'}{\left(6x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

Π.χ. 75. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{10}=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x\right)^{(10)}}{\left(x^{10}\right)^{(10)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{10!}=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot10}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\dfrac{1}{10!}\left(+\infty\right)=+\infty$

Π.χ. 76. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x+1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]=+\infty$ (*), $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1\right)=+\infty$, Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$ Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]'}{\left(x+1\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^x}=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $0\cdot\left(+\infty\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[e^x\right]'}{\left(1+e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

(*) **Επεξήγηση.** $\phi, \phi(x)=\ln\left(1+e^x\right),\ \ \phi=f\circ g, \begin{cases} f, f(x)=\ln x \\ g, g(x)=1+e^x=\psi \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty,\ \lim\limits_{\psi\to+\infty} f\left(\psi\right)=\lim\limits_{\psi\to+\infty}\ln\psi=+\infty$

Π.χ. 77. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Π.χ. 78. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\eta\mu x-1}{\ln(1+x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+\eta\mu x-1\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\left[\ln(1+x)\right]=0$ (*) Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\eta\mu x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x+\eta\mu x-1\right)'}{\left[\ln(1+x)\right]'}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x)\cdot\left(e^x+\sigma\upsilon\nu x\right)\right]=2$

(*) **Επεξήγηση.** $\phi, \phi(x)=\ln\left(1+x\right),\ \ \phi=f\circ g, \begin{cases} f, f(x)=\ln x \\ g, g(x)=1+x=\psi \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1,\ \lim\limits_{\psi\to1} f\left(\psi\right)=\lim\limits_{\psi\to1}\ln\psi=0$

Π.χ. 79. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x-e^{-x}-2x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0}(x-\eta\mu x)=0$ Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\eta\mu x\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\eta\mu x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x-e^{-x}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\eta\mu x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\eta\mu x\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}$

Είναι $\lim_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}\right)=2$ και $\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=1$. Άρα, $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}=2$

Π.χ. 80. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0^+}\left(x^a\cdot\ln x\right)$.

Είναι $\lim_{x\to 0^+}x^a=0$ και $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $0\cdot(-\infty)$.

Συνεπώς, $\lim_{x\to 0^+}\left(x^a\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^a}}$. Είναι $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^a}=+\infty$

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$

Συνεπώς $\lim_{x\to 0^+}\left(x^a\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^a}}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x^a}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^a}{-a}=\dfrac{1}{-a}\cdot\lim_{x\to 0^+}x^a=0$

Π.χ. 81. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)$.

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\varepsilon\phi x=0$, $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $0\cdot(-\infty)$

Συνεπώς, $\lim_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\sigma\phi x}$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\sigma\phi x=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$

Συνεπώς, $\lim_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\sigma\phi x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(\sigma\phi x)'}=-\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\eta\mu^2 x=0$ και $\lim_{x\to 0^+}x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)=-\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\eta\mu^2 x\right)'}{x'}=-2\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=0$

Π.χ. 82. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}=0$, $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(0^0\right)$

Είναι $y=e^{\ln y}$. Άρα $\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}=e^{\ln\varepsilon\phi\frac{x}{2}}\Rightarrow\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=$

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)\right]}=e^{\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)\right]}e^1\overset{*}{=}e\,.$$

(*) **Επεξήγηση.**

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2})\right]\overset{*}{=}-\infty$. Επίσης $\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2})=\dfrac{\ln(\varepsilon\phi\frac{x}{2})}{\ln x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left[\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)\right]'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\eta\mu x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x'}{(\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{1}=1$

(*) **Επεξήγηση.**

$\phi,\phi(x)=\ln\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)$, $\phi=fog$, όπου $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$ και $\lim\limits_{\psi\to 0}f(\psi)=\lim\limits_{\psi\to 0}\ln\psi=-\infty$

Π.χ. 83. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(1^{-\infty}\right)$

Είναι $y=e^{\ln y}$. Άρα $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}\overset{*}{=}e^1=e$

(*) **Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$ (*) Άρα απροσδιόριστη μορφή (?)$(-\infty)\cdot 0$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$

(*) **Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=0$.

Είναι $\phi,\phi(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\phi=f\circ g\begin{cases}f(x)=\ln x\\ g(x)=1+\frac{1}{x}=\psi\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$,

$\lim\limits_{\psi\to1}f(\psi)=0$

Π.χ. 84. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\eta\mu^2x}\overset{*}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)-(+\infty)$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\eta\mu^2x}{x^2\cdot\eta\mu^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2-\eta\mu^2x\right)'}{\left(x^2\cdot\eta\mu^2x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x\cdot\eta\mu^2x+x^2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\eta\mu^2x+x^2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=0$

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$ Συνεπώς,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(x\cdot\eta\mu^2x+x^2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2x+2\cdot x\cdot\eta\mu2x+x^2\cdot\sigma\upsilon\nu2x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\sigma\upsilon\nu2x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(\eta\mu^2x+2\cdot x\cdot\eta\mu2x+x^2\cdot\sigma\upsilon\nu2x\right)=0$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$ Συνεπώς

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu2x\right)'}{\left(\eta\mu^2x+2\cdot x\cdot\eta\mu2x+x^2\cdot\sigma\upsilon\nu2x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu2x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu2x+3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu2x-x^2\cdot\eta\mu2x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\eta\mu2x=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu2x+3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu2x-x^2\cdot\eta\mu2x\right)=0$

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$ Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu 2x)'}{\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 2x+3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-x^2\cdot\eta\mu 2x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-4\cdot x\cdot\eta\mu 2x-x^2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x}$$

Είναι $\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu 2x=1$ και $\lim_{x\to 0}\left(3\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-4\cdot x\cdot\eta\mu 2x-x^2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\right)=3$.

Άρα, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$

(*) **Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\eta\mu^2 x}=+\infty$

Όταν $x\to 0\Rightarrow \eta\mu^2 x>0$. Από $\lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{\eta\mu^2 x}=+\infty$

Π.χ. 85. Βρείτε η τιμή του $a\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f, f(x)=\frac{e^{ax}-e^x-x}{x^2}$ να έχει στο σημείο $x_0=0$, όριο πραγματικό αριθμό.

$\lim_{x\to 0}\left(e^{ax}-e^x-x\right)=0=\lim_{x\to 0}x^2$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} g, g(x)=e^{ax}-e^x-x \\ h, h(x)=x^2 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\begin{cases} g', g'(x)=ae^{ax}-e^x-1 \\ h', h'(x)=2x\neq 0, \quad (x\neq 0) \end{cases}$

Άρα, $\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-e^x-1}{2x}=1$ $\quad\begin{cases} \lim_{x\to 0}(2x)=0 \\ \lim_{x\to 0}\left(ae^{ax}-e^x-1\right)=a-2 \end{cases}$

Όταν $a-2\neq 0$ το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός. Άρα, $a=2$, οπότε απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$. Οι συναρτήσεις g', h' είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$\begin{cases} g''(x)=4e^{2x}-e^x \\ h''(x)=2\neq 0 \end{cases}$ $\quad\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{h''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad$ Άρα, $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}$

Π.χ. 86. Έστω η συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases} \frac{\eta\mu^2(\pi x)}{x-1}, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$.

(**α**) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}$.

(**β**) Εξετάστε αν η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.

(**α**)

$$\forall x\in\Re-\{1\}\Rightarrow f(x)=\frac{\eta\mu^2(\pi x)}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}$$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης f στην θέση $x_0=1$.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}$$ Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$

Συνεπώς $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\left[\eta\mu^2(\pi x)\right]'}{\left[(x-1)^2\right]'}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cdot\eta\mu(2\pi x)}{2(x-1)}$ Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$

Συνεπώς, $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cdot\left[\eta\mu(2\pi x)\right]'}{2(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\left(\pi^2\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\right)=\pi^2\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi)=\pi^2$

Άρα, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\Re$

$$f',f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}, & x\neq 1\\ \pi^2, & x=1\end{cases}$$

(**β**) $\lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{(x-1)^2}-\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}=2\pi^2-\pi^2=\pi^2=f'(1)$$

Άρα, η συνάρτηση f' είναι συνεχής στη θέση $x_0=1$.

Π.χ. 87. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f,f(x)=e^{|x|}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

Π.χ. 88. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g,g(x)=|\ln x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Π.χ. 89. Βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως $f,f(x)=\alpha^{|x-\beta|}$, όπου $\beta\in\Re$ και $0<a\neq 1$.

Π.χ. 90. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

(**α**) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}$, (**β**) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$, (**γ**) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$, (**δ**) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2^x}$, (**ε**) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$,

(**στ**) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{e^x}$, (**ζ**) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^2-1}$, (**η**) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$, (**θ**) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x^2+1)}$,

(**ι**) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\eta\mu x}$, (**κ**) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}$, (**λ**) $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\eta\mu(\beta x)},(\alpha,\beta\in\Re^*)$,

(**μ**) $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x)-\sigma\upsilon\nu(\beta x)}{\sigma\upsilon\nu(\gamma x)-\sigma\upsilon\nu(\delta x)}$, $(\gamma\neq\delta)$, (**ν**) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{e^{\beta x}-\sigma\upsilon\nu(\beta x)}$, $(\alpha,\beta\in\Re^*)$.

Π.χ. 91. Παραγωγίστε την συνάρτηση $f,f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & -\frac{1}{2}<x\leq 0\\ 2x, & x>0\end{cases}$

Π.χ. 92. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ η συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases} a\cdot e^{2x} & ,x\le 0 \\ \eta\mu(2x)+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(3x) & ,x>0 \end{cases}$.

Π.χ. 93. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες: $f, f(x)=\begin{cases} ax+\beta, & x>e \\ \ln^3 x, & 0<x\le e \end{cases}$, $\quad g, g(x)=\begin{cases} \ln^4 x, & 0<x<e \\ ax^2+\beta x+1, & x\ge e \end{cases}$

Π.χ. 94. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x\le 0 \\ x\cdot\ln x, & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{e}\cdot e^{-x}, & x\ge 1 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία 0 και 1.

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης $y=f(x)$ ονομάζονται οι ευθείες που για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές των x,y προσεγγίζουν ικανοποιητικά την γραφική παράσταση της f.

Η ευθεία $x=\alpha$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f όταν ένα τουλάχιστον από τα $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

Π.χ. 95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ Άρα, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Η ευθεία $y=\beta$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f όταν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\beta$.

Π.χ. 96. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$ Άρα, η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ σε μία περιοχή του $+\infty$.

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f όταν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$. Η ασύμπτωτη είναι πλάγια όταν $\lambda\ne 0$ και οριζόντια όταν $\lambda=0$.

Π.χ. 97. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$ Άρα, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Η εύρεση της οριζόντιας ή πλάγιας ασύμπτωτης γίνεται με χρήση της πρότασης: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, αν και μόνο αν $\lambda=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]$, όπου $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις

1. Οι γραφικές παραστάσεις ρητών συναρτήσεων έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες της μορφής $x = a$, όπου a ρίζα του παρονομαστή μόνο. Αν το a είναι ρίζα και του αριθμητή, για να είναι η ευθεία $x = a$ κατακόρυφη ασύμπτωτη πρέπει το a να είναι ρίζα του παρονομαστή με μεγαλύτερη πολλαπλότητα από αυτήν του αριθμητή.

2. Καθώς $x \to +\infty$ (ή $x \to -\infty$) δεν είναι δυνατό να υπάρχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης. Άρα, έχουμε το πολύ δύο ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$.

3. Η γραφική παράσταση πολυωνυμικών συναρτήσεων με βαθμό $\nu \geq 2$ δεν έχει οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη. Πράγματι, αν $f, f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, όπου $a_\nu \neq 0$ και $\nu \geq 2$, τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_\nu x^\nu}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_\nu x^{\nu-1}\right) = a_\nu \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{\nu-1} = \pm\infty$. Άρα, η γραφική παράσταση της $f, f(x) = ax + \beta$ που είναι η ευθεία $y = ax + \beta$ έχει ασύμπτωτη την ίδια την ευθεία.

4. Είναι δυνατόν η γραφική παράσταση συνάρτησης να τέμνει μία ασύμπτωτη της, σε ένα τουλάχιστον σημείο.

5. Για τη γραφική παράσταση ρητών συναρτήσεων ισχύει ένα από τα παρακάτω:
- Όταν ο βαθμός αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη.
- Όταν ο βαθμός αριθμητή είναι κατά ένα μεγαλύτερος του βαθμού παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη.
- Όταν ο αριθμητής έχει βαθμό τουλάχιστον κατά δυο μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, τότε δεν υπάρχουν ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

6. Αν $f(x) = \lambda x + \beta + g(x)$ με $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, διότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

Π.χ. 98. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{x^5}{x^2 - 4}$.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$. Άρα, οι ευθείες $x = \pm 2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Άρα, δεν υπάρχουν οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Π.χ. 99. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x + 3}$.

Εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 2x + 3 > 0$. Άρα, δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$. Άρα, η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Εύρεση της οριζόντιας ασύμπτωτης. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-2$. Άρα, η ευθεία $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-2$. Άρα, η ευθεία $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $-\infty$.

Π.χ. 100. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f, f(x)=\dfrac{3|x|-2x+1}{x+3}$.

Εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης. Είναι $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)=0$, $\lim\limits_{x\to-3}\left[3|x|-2x+1\right]=16>0$. Άρα, είναι $\lim\limits_{x\to-3^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^-}f(x)=-\infty$. Άρα, η $x=-3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. Η γραφική παράσταση προσεγγίζει την $x=-3$ από δεξιά και αριστερά.

Εύρεση της οριζόντιας– πλάγιας ασύμπτωτης.

Είναι $f, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x+3}, x\geq 0\\ \dfrac{1-5x}{x+3}, x<0 \text{ και } x\neq -3\end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=1$.

Άρα, η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-5$.

Άρα, η $y=-5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $-\infty$.

Π.χ. 101. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f:(1,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{x-1}$.

Εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης. Είναι $D(f)=(1,+\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f είναι η $x=1$. Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=+\infty$. Άρα, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη γραφικής παράστασης της f.

Εύρεση της οριζόντιας ασύμπτωτης. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=1=\lambda$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1}=\frac{2}{1+1}=1=\beta$$

Άρα, η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Π.χ. 102. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}\right]=0$.

Αν είναι $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-f(x)\right]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+\beta)\right]=0$

Άρα, η $y=ax+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f καθώς $x\to-\infty$. Άρα, $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=3$.

Παρατήρηση. Έστω συνάρτηση $f,f(x)$. Η ευθεία $y=ax+\beta$ ονομάζεται πλάγια ασύμπτωτη της f αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=ax+\beta$ ή ισοδύναμα $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0$. Εύρεση των α, β. $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\beta$

Μελέτη περιπτώσεων

- Όταν $a=0$ και $\beta=0$, υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη που είναι ο άξονας xx'.
- Όταν $a=0$ και $\beta\neq0$, υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη που είναι η ευθεία $y=\beta$.
- Όταν $a\neq0$ και $\beta=0$, υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη που είναι η ευθεία $y=ax$.
- Όταν $a\neq0$ και $\beta\neq0$, υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη που είναι η ευθεία $y=ax+\beta$.

Π.χ. 103. Βρείτε σε μία περιοχή του $+\infty$ την ασύμπτωτη $y=ax+\beta$ της γραφικής παράστασης της $f,f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=ax+\beta\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}-ax-\beta\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{\beta}{x}\right]\right\}=(+\infty)(4-a)$$

- Όταν $4-a>0\Leftrightarrow4>a$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=+\infty$.
- Όταν $4-a<0\Leftrightarrow4<a$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=-\infty$.
- Όταν $4-a=0\Leftrightarrow4=a$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=(+\infty)0\,(?)$ Απροσδιόριστη μορφή. Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}-4x-\beta\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}-x\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+1}-3x\right]-\beta$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}-4x-\beta\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}-x\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+1}-3x\right]-\beta$$

Χρησιμοποιώντας δύο φορές συζυγή παράσταση έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}-x\right]+\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+1}-3x\right]-\beta=0+0-\beta=-\beta$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0\Leftrightarrow a=4,\ \beta=0$.

Π.χ. 104. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2+5x-1}{x+2}-(ax+\beta)\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-\sqrt{x^2+x+2}\right]=0$.

Π.χ. 105. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f, f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x^2+ax+\beta}$ να έχει ως κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1$, $x=2$

Στη συνέχεια εξετάστε αν η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

Π.χ. 106. Ποιες οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων;

(α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5}$, **(β)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, **(γ)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$, **(δ)** $f(x)=3x+\dfrac{1}{x^2}$,

(ε) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, **(στ)** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-3}$, **(ζ)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, **(η)** $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x}}$

(θ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{x}$, **(ι)** $f(x)=1-\dfrac{|x|}{x-2}$, **(κ)** $f(x)=-x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Θεώρημα του Pierre Fermat

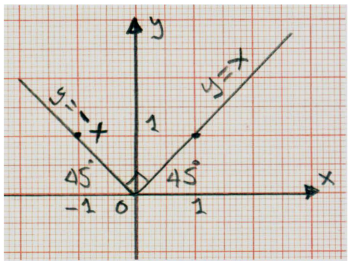
Αν μία συνάρτηση f:

- ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ
- παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$
- είναι παραγωγίσιμη στο x_0

τότε $f'(x_0) = 0$.

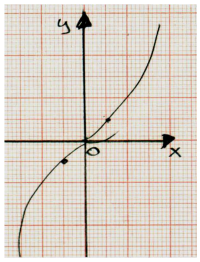
Σχόλια

1. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.



Π.χ. 107. Η συνάρτηση $f, f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 0$, όμως παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση αυτή. Δηλαδή $f(x) = |x| \geq 0 = f(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Ο μηδενισμός της παραγώγου μίας συναρτήσεως σε ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακρότατου της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

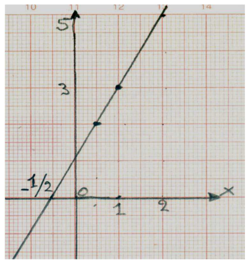


Π.χ. 108. Η συνάρτηση $f, f(x) = x^3$ έχει παράγωγο συνάρτηση $f'(x) = 3x^2$ που μηδενίζεται στην θέση $x_0 = 0$. Πράγματι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Όμως στη θέση αυτή η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

- Δεν παρουσιάζει μέγιστο διότι: $\forall x > 0$ είναι $f(x) > 0$.
- Δεν παρουσιάζει ελάχιστο διότι: $\forall x < 0$ είναι $f(x) < 0$.

3. Η υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο ανοικτού διαστήματος είναι αναγκαία.



Π.χ. 109. Έστω η συνάρτηση $f: [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1$. Στη θέση $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει μέγιστο διότι $\forall x \in [0,\ 1]$ είναι $f(x) = 2x + 1 \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3 = f(1)$.

Όμως η παράγωγος συνάρτηση f' της f που έχει τύπο $f'(x) = 2$, στην θέση $x_0 = 1$ δεν μηδενίζεται, διότι $f'(1) = 2 \neq 0$.

Π.χ. 110. Βρείτε τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης $f, f(x) = \dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{2 \cdot e^x}$, στο διάστημα $(0,\ 2\pi)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x}\right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Άρα, τα $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ αποτελούν θέσεις των πιθανών ακρότατων της συνάρτησης.

Σημείωση. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 2\pi)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Π.χ. 111. Ισχύει το θεώρημα του Fermat για την συνάρτηση $f, f(x)=\eta\mu x$ με $D(f)=[0,\ 2\pi]$;

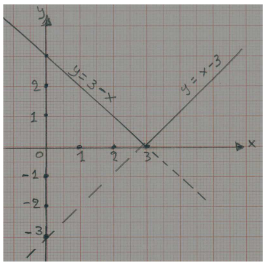
- Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0,\ 2\pi)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο για $x_0=\frac{\pi}{2}$, $x_0=\frac{3\pi}{2}$
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στις θέσεις $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$

Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ολικό μέγιστο και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ολικό ελάχιστο.

Πράγματι, $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{3\pi}{2}$

ή διαφορετικά $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

Π.χ. 112. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=|x-3|=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases}$. Η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στην θέση $x_0=3$, το $f(3)$, αλλά δεν ισχύει το θεώρημα Fermat. Γιατί;



- $D(f)=\mathbb{R}=(-\infty,\ +\infty)$, ανοικτό διάστημα
- Η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_0=3$, το $f(x_0)=0<f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$
- Η f **<u>δεν</u>** είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=3$. Πράγματι

$$\left.\begin{cases} f'_\delta(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1 \\ f'_\alpha(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3-x}{x-3}=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow f'_\delta(3)=1\neq -1=f'_\alpha(3)$$

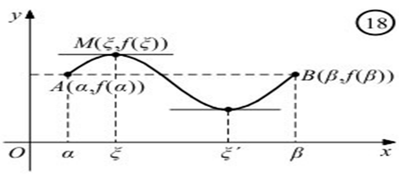
Άρα, δεν υπάρχει το $f'(3)$.

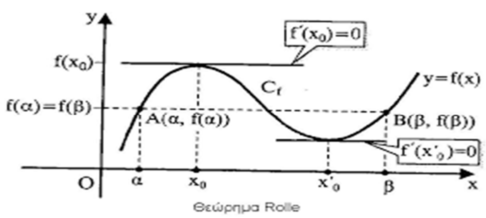
Θεώρημα του Michel Rolle

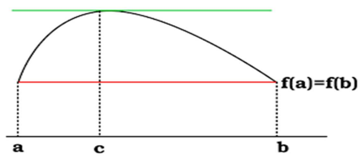
Αν μία συνάρτηση f είναι:

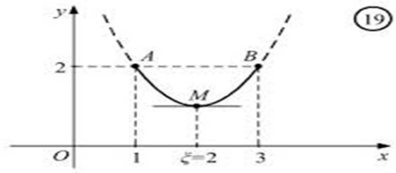
- ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β)
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi)=0$.









Πόρισμα. Αν μία συνάρτηση f είναι:

- ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)
- τα α, β είναι ρίζες της $f(x)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi) = 0$.

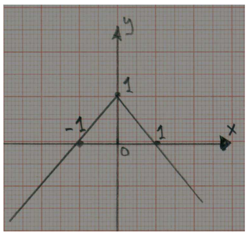
Παρατηρήσεις

1. Για την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle είναι δυνατό να μην έχει η συνάρτηση f παράγωγο στα σημεία α, β. Πράγματι, έστω συνάρτηση $f, f(x) = \sqrt{1-x^2}$ τότε:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\ 1]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,\ 1)$
- $f(-1) = 0 = f(1)$

Συνεπώς, από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$. Πράγματι, $f'(0) = 0$, δηλαδή $\xi = 0$. Και ενώ ισχύουν αυτά, δεν υπάρχουν τα $f'(-1)$ και $f'(1)$.

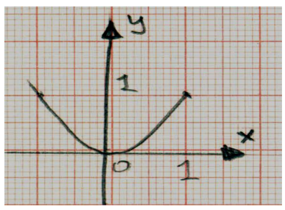
2. Η ύπαρξη της παραγώγου της συνάρτησης στο (α, β) είναι αναγκαία για την εφαρμογή του θεωρήματος. Η συνάρτηση $f, f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1-x, & x \geq 0 \\ 1+x, & x \leq 0 \end{cases}$, είναι:



- συνεχής στο διάστημα $[-1,\ 1]$
- $f(1) = f(-1) = 0$
- $f'(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, δεν υπάρχει το $f'(0)$

Άρα, η f όχι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$. Άρα $\nexists\, \xi \in (-1,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$ και αυτό διότι δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f $\forall x \in (-1,\ 1)$.

3. Η υπόθεση $f(a) = f(\beta)$ για το θεώρημα του Rolle είναι αναγκαία. Πράγματι αν $f, f(x) = x^2$ με $[\alpha, \beta] = [0,\ 1]$ είναι:



- συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική
- παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$ ως πολυωνυμική
- αλλά $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$, οπότε $\nexists\, \xi \in (0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

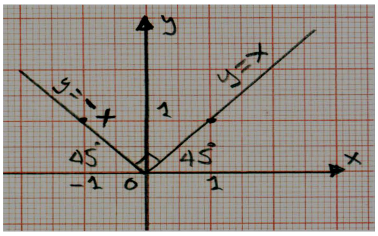
Πράγματι, $f'(x) = 2x$, $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \notin (0,\ 1)$.

4. Η υπόθεση της συνέχειας της συνάρτησης στο $[\alpha,\beta]$ είναι αναγκαία για το θεώρημα του Rolle. Πράγματι, έστω συνάρτηση $f, f(x)=\frac{1}{x}+1$, $D(f)=\mathbb{R}^*$.

- $f(0)\overset{?}{=}f(1)=2$
- f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
- f ασυνεχής στην θέση $x_0=0$. Άρα $\nexists$ $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Πράγματι, $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2}=0$ αδύνατη.

Π.χ. 113. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=|x|$. Είναι συνεχής στο $[-2,\ 2]$, $f(-2)=f(2)$. Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στην θέση $x_0=0$, άρα ούτε και στο διάστημα $(-2,\ 2)$. Συνεπώς, δεν εφαρμόζεται για αυτήν το θεώρημα του Rolle.

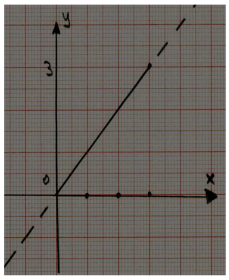


Π.χ. 114. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\frac{2}{3}x$. Είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β), αλλά $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Άρα, δεν εφαρμόζεται για αυτήν το θεώρημα του Rolle.

Π.χ. 115. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases}3, & x=0\\ x, & 0<x\le 3\end{cases}$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 3)$ και ισχύει ότι $f(0)=f(3)=3$

Δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ 3]$ διότι δεν είναι συνεχής στην θέση $x_0=0$. Άρα, δεν εφαρμόζεται για αυτήν το θεώρημα του Rolle.



Π.χ. 116. Έστω συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ x^3, & x>0\end{cases}$. Ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1,\ 1]$; Αν ναι να υπολογίσετε την τιμή του ξ.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x<0 \Rightarrow f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x\\ \forall x<0 \Rightarrow f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ παραγωγισιμη στο } \mathbb{R}^*$$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης f στην θέση $x_0=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0\end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)=0$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη συνεπώς και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έτσι, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 1)$ και $f(-1)=f(1)=1$. Από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Είναι $f', f'(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ 3x^2, x<0\end{cases}$, άρα $\xi=0$.

Π.χ. 117. Δείξτε με το θεώρημα του Rolle ότι η εξίσωση $6x^5-4x+1=0$ έχει <u>τουλάχιστον μία</u> ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=6x^5-4x+1$. Θεωρώ συνάρτηση $h, h(x)=x^6-2x^2+x$. Δηλαδή $h'(x)=f(x)$. Η συνάρτηση h ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0,\ 1)$.

Η συνάρτηση h ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,\ 1]$.

Είναι $h(0)=h(1)=1$ Άρα, από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε $h'(\xi)=0$. Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f(\xi)=0$. Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Π.χ. 118. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(2x-1)(x+3)(x-5)(x-7)$ με $D(f)=\mathbb{R}$. Βρείτε πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x)=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι $-3,\ \frac{1}{2},\ 5,\ 7$. Η $f'(x)$ είναι πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού. Άρα, έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left[-3,\ \frac{1}{2}\right]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα $\exists\ \xi_1\in\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1)=0$.
- Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},\ 5\right]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα $\exists\ \xi_2\in\left(\frac{1}{2},\ 5\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2)=0$.
- Η συνάρτηση f στο διάστημα $[5,\ 7]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα $\exists\ \xi_3\in(5,\ 7)$ έτσι ώστε $f'(\xi_3)=0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.

Π.χ. 119. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^5+4x^3+5x+2012$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία πραγματική και τέσσερεις μιγαδικές ρίζες.

Το πολυώνυμο είναι περιττού βαθμού, άρα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, έστω την ρ. Έστω ότι $\rho_1\neq\rho$ είναι μία άλλη πραγματική ρίζα του πολυωνύμου.

Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\rho_1<\rho$, η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[\rho_1,\ \rho]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\ \rho)$ έτσι ώστε

$f'(\xi)=0$. Άτοπο, διότι $f'(x)=5x^4+12x^2+5>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Καταλήξαμε σε άτοπο διότι δεχθήκαμε την ύπαρξη και $2^{ης}$ πραγματικής ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$, άρα αυτή έχει μία μόνο πραγματική ρίζα, οπότε οι άλλες τέσσερεις είναι μιγαδικές.

Θεώρημα. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Π.χ. 120. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^5$ με $D(f)=\mathbb{R}$. Ισχύει το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,\ 1]$; Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Οπότε η συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο διάστημα $[-1,\ 1]$
- παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,\ 1)$
- $f(-1)=-1\neq 1=f(1)$.

Συνεπώς, δεν ισχύει το θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[-1,\ 1]$.

Π.χ. 121. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(1-x)\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$. Δείξτε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

- f συνεχής στο διάστημα $[0,\ 1]$
- $\left.\begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(1)=-\eta\mu 1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano

υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Π.χ. 122. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=1+x^{\mu}(1-x)^{\nu}$, $\mu,\nu\in\mathbb{N}$. Χωρίς να υπολογισθεί η $f'(x)$, δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει <u>τουλάχιστον μία</u> ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$

Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζω το θεώρημα του Rolle.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ 1]$
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$
- $f(0)=1=f(1)$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Άρα, η $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Π.χ.123. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\frac{c_0}{1}x+\frac{c_1}{2}x^2+\ldots+\frac{c_\nu}{\nu+1}x^{\nu+1}$, όπου $c_0,c_1,\ldots,c_\nu\in\mathbb{R}$ με $\frac{c_0}{1}+\frac{c_1}{2}+\ldots+\frac{c_\nu}{\nu+1}=0$. Δείξτε ότι υπάρχει <u>τουλάχιστον ένα</u> $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζω το θεώρημα του Rolle.

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ 1]$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$
- $f(0)=0=f(1)$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Π.χ. 124. Δείξτε ότι η εξίσωση $a_0x^{\nu}+a_1x^{\nu-1}+\ldots+a_{\nu-1}x+a_{\nu}=0$ έχει <u>τουλάχιστον μία</u> ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$ όταν $\dfrac{a_0}{\nu+1}+\dfrac{a_1}{\nu}+\ldots+\dfrac{a_{\nu-1}}{2}+a_{\nu}=0$.

Αν $f, f(x)=a_0x^{\nu}+a_1x^{\nu-1}+\ldots+a_{\nu-1}x+a_{\nu}$ τότε η συνάρτηση η οποία έχει την f σαν παράγωγο είναι η $h, h(x)=\dfrac{a_0}{\nu+1}x^{\nu+1}+\dfrac{a_1}{\nu}x^{\nu}+\ldots+\dfrac{a_{\nu-1}}{2}x^2+a_{\nu}x$.

Η συνάρτηση h, ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Εφαρμόζω το θεώρημα του Rolle.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ 1]$
- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$
- $h(0)=0=h(1)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $h'(\xi)=0$.

Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f(\xi)=0$.

Άρα, η συνάρτηση f έχει στο διάστημα $(0,\ 1)$ τουλάχιστον μία ρίζα.

Μέθοδος εργασίας. Γενικά, αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha,\ \beta)$, θα προσδιορίζουμε μία συνάρτηση $h, h(x)$ για την οποία έχουμε $h'(x)=f(x)$ και για την h θα διαπιστώνουμε ότι στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, οπότε θα υπάρχει στο διάστημα $(\alpha,\ \beta)$ μία τουλάχιστον ρίζα για την $h'(x)$, δηλαδή για την $f(x)$.

Π.χ. 125. Δίνεται η εξίσωση $x^5+x^3+2x+\alpha=0$. Δείξτε ότι $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^5+x^3+2x+\alpha$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f', f'(x)=5x^4+3x^2+2$.

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει δυο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Η συνάρτηση f στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Άτοπο, διότι είναι $f'(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Μέθοδος εργασίας. Αν ζητείται να αποδειχθεί ότι μία εξίσωση έχει k <u>το πολύ</u> ρίζες, θα το αποδεικνύουμε εργαζόμενοι ως εξής: Θα υποθέτουμε ότι έχει $k+1$ το πλήθος ρίζες και θα καταλήγουμε σε άτοπο. Θα γίνεται χρήση του θεωρήματος του Rolle στα διαστήματα ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ρίζες.

Π.χ. 126. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3-3x+a=0$ δεν έχει για κανέναν πραγματικό αριθμό a δυο ρίζες στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^3-3x+a$ με $D(f)=\mathbb{R}$. Παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι $\exists a\in\mathbb{R}$: $0<\rho_1<\rho_2<1$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$. Η συνάρτηση f στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος του Rolle, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Άτοπο, διότι $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$.
Σχόλιο. $\pm1\notin(\rho_1,\rho_2)\subset(0,\ 1)$.

Π.χ. 127. Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ απλή ρίζα ενός πολυωνύμου $f(x)$. Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ απλή ρίζα της παραγώγου $f'(x)$. Τότε το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$.
Εξ΄ υποθέσεως είναι $f(x)=(x-\rho)\cdot P(x)$ και $f'(x)=(x-\rho)\cdot Q(x)$.
Επίσης $f'(x)=[(x-\rho)\cdot P(x)]'=(x-\rho)'\cdot P(x)+(x-\rho)\cdot P'(x)=P(x)+(x-\rho)\cdot P'(x)$
Συνεπώς, $P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x)-(x-\rho)\cdot P'(x)=(x-\rho)\cdot[Q(x)-P'(x)]$.
Από την $f(x)=(x-\rho)\cdot P(x)$ έπεται ότι:
$$f(x)=(x-\rho)\cdot(x-\rho)\cdot[Q(x)-P'(x)]=(x-\rho)^2\cdot[Q(x)-P'(x)].$$

Π.χ. 128. Αν ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $f(x)$ με πολλαπλότητα $k\in\mathbb{N}$, τότε και η παράγωγος του $f(x)$, η $f'(x)$, έχει ρίζα ρ με πολλαπλότητα $k-1$.
Εξ΄ υποθέσεως είναι $f(x)=(x-\rho)^k\cdot P(x)$. Συνεπώς,
$$f'(x)=\left[(x-\rho)^k\right]'\cdot P(x)+(x-\rho)^k\cdot P'(x)=k\cdot(x-\rho)^{k-1}P(x)+(x-\rho)^k\cdot P'(x)=$$
$$(x-\rho)^{k-1}\cdot[k\cdot P(x)+(x-\rho)\cdot P'(x)]=\ (x-\rho)^{k-1}\cdot Q(x)$$

Π.χ. 129. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^{2\nu}+ax+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$ και $D(f)=\mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες.
Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

- Στο διάστημα $[\rho_1,\ \rho_2]$ ισχύει το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\ \rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1)=0$. (1)
- Στο διάστημα $[\rho_2,\ \rho_3]$ ισχύει το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\ \rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2)=0$. (2)

Αλλά $f'(x)=2\nu x^{2\nu-1}+\alpha$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x^{2\nu-1}=\dfrac{-\alpha}{2\nu}\Leftrightarrow x=\sqrt[2\nu-1]{\dfrac{-\alpha}{2\nu}}$. Δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα. Από τις (1), (2) καταλήγουμε σε άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες.

Π.χ. 130. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(x^2-1)e^x$. Δείξτε με τη βοήθεια του θεωρήματος του Rolle ότι υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ έτσι ώστε $f'(x_0)=0$. Να βρεθεί το

x_0. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$
- Είναι $f(-1) = 0 = f(1)$

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 1)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$. Αλλά $f'(x) = (x^2 - 1 + 2x)e^x$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + 2x = 0 \Leftrightarrow x_0 = \begin{cases} -1+\sqrt{2} \in (-1, 1) \\ -1-\sqrt{2} \notin (-1, 1) \end{cases}.$$

Π.χ. 131. Έστω συνάρτηση $f, f(x) = 2x^3 - 3x - 1$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει <u>ακριβώς</u> μία ρίζα $\rho \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Bolzano:

- Η f είναι συνεχής διάστημα στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- $\left.\begin{array}{l} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1 > 0 \\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - 1 < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ έτσι ώστε $f(\rho) = 0$.

Έστω ότι υπάρχει $\rho_1 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $\rho_1 < \rho$ έτσι ώστε $f(\rho_1) = 0$.

Τότε από το θεώρημα του Rolle:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\rho_1, \rho]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ρ_1, ρ)
- $f(\rho_1) = 0 = f(\rho)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$. Άτοπο, διότι

$$f'(x) = 6x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Είναι $(\rho_1, \rho) \subset \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Π.χ. 132. Έστω συνάρτηση $f, f(x) = x^2 - x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$. Δείξτε ότι έχει <u>το πολύ</u> δύο πραγματικές ρίζες.

Έστω ότι η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

• Στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ισχύει το θεώρημα του Rolle για την f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1) = 0$. (1)

•Στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ ισχύει το θεώρημα του Rolle για την f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2) = 0$. (2)

Όμως $f'(x) = 2x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x = x \cdot (2 - \sigma\upsilon\nu x)$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x = 2 \text{ Αδύνατο} \end{cases}$

Δηλαδή, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση. Συνεπώς, από τα (1), (2) οδηγούμαστε σε άτοπο.

Π.χ. 133. Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \in [-2, 0) \\ \gamma x^2 + 3x + 3, & x \in [0, 2] \end{cases}$. Βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-2, 2]$. Προκειμένου να ισχύει το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-2, 2]$, πρέπει:

• Η f να είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$. Άρα συνεχής και στην θέση $x_0 = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Επειδή $f(0) = 3$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \beta$ είναι $\beta = 3$.

• Η f να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2, 2)$. Άρα παραγωγίσιμη και στην θέση $x_0 = 0$, δηλαδή:

$$\left. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\gamma x^{\cancel{2}} + 3\cancel{x} + \cancel{3} - \cancel{3}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (\gamma x + 3) = 3 = f_\delta'(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^{\cancel{2}} + a\cancel{x} + \cancel{3} - \cancel{3}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + a) = a = f_\alpha'(0) \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \alpha = 3$$

• $\left. \begin{cases} f(2) = 4\gamma + 6 + 3 = 4\gamma + 9 \\ f(-2) = 4 - 6 + 3 = 1 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow f(2) = f(-2) \Leftrightarrow 4\gamma + 9 = 1 \Leftrightarrow \gamma = -2$

Π.χ. 134. Αν η εξίσωση $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x = 0$ έχει μία θετική ρίζα x_0, τότε η εξίσωση $\nu a_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1) a_{\nu-1} x^{\nu-2} + \ldots + a_1 = 0$ έχει μία τουλάχιστο θετική ρίζα μικρότερη του x_0.

Θεωρώ την συνάρτηση $f, f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x$. Είναι $f(0) = f(x_0) = 0$.
Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

• Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x_0]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x_0)$

• $f(0) = f(x_0)$. Άρα, από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x_0)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$. Δηλαδή το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ και είναι $\xi < x_0$, διότι $\xi \in (0, x_0)$.

Π.χ. 135. Να υπολογισθούν οι $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1,\ 1]$ για την συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases} x^2+\beta x+\gamma, & x\in[-1,\ 0] \\ ax^2+4x+4, & x\in(0,\ 1) \end{cases}$.

• Η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[-1,\ 1]$ και ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$.

Εξετάζω την συνέχεια της f στην θέση $x_0=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=1-\beta+\gamma=f(-1)$$

Εξετάζω την συνέχεια της f στην θέση $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(ax^2+4x+4\right)=a+8=f(1)$$

Εξετάζω την συνέχεια της f στην θέση $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=\gamma,\ f(0)=\gamma,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(ax^2+4x+4\right)=4$$

Άρα $\gamma=4$

• $\forall x\in(-1,\ 0)\Rightarrow f(x)=x^2+\beta x+\gamma\Rightarrow f'(x)=2x+\beta$

$\forall x\in(0,\ 1)\Rightarrow f(x)=ax^2+4x+4\Rightarrow f'(x)=2\alpha x+4$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της f στην θέση $x_0=0$

$$\left.\begin{aligned} f_a'(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\beta x+\cancel{\gamma}-\cancel{\gamma}}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+\beta)=\beta \\ f_\delta'(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+4x+\cancel{4}-\cancel{4}}{x}=\lim_{x\to 0^+}(ax+4)=4 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\beta=4$$

• $$\left.\begin{aligned} f(-1)&=1-\beta+\gamma=1-\cancel{4}+\cancel{4}=1 \\ f(1)&=\alpha+8 \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\alpha+8=1\Leftrightarrow\alpha=7$$

Π.χ. 136. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(x-a+1)(x-a)(x-a-1)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=a-1$ ή $x=a$ ή $x=a+1$. Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Οπότε:

• Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[a-1,\ a]$, $[a,\ a+1]$.

• Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(a-1,\ a)$, $(a,\ a+1)$.

• $f(a-1)=f(a)=f(a+1)=0$

Από το θεώρημα του Rolle προκύπτει ότι στο διάστημα:

• $(a-1,\ a)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα x_1, έτσι ώστε $f'(x_1)=0$ (1)

• $(a,\ a+1)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα x_2, έτσι ώστε $f'(x_2)=0$ (2)

Αλλά $f'(x)=3x_2-6ax+\left(2a^2-1\right)$, τριώνυμο, άρα έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες. Από (1), (2) έπεται ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες $x_1\in(a-1,\ a)$, $x_2\in(a,\ a+1)$, οπότε είναι διακεκριμένες.

Π.χ. 137. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)$, όπου $\alpha<\beta<\gamma\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δυο ακριβώς πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.
Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Οπότε: • Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha,\ \beta]$, $[\beta,\ \gamma]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \gamma)$

• Είναι $f(a)=f(\beta)=f(\gamma)=0$

• Στο $[\alpha,\ \beta]$, από το θεώρημα του Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(\alpha,\ \beta)$: $f'(x_1)=0$.

• Στο $[\beta,\ \gamma]$, από το θεώρημα του Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(\beta,\ \gamma)$: $f'(x_2)=0$.

Δηλαδή η $f', f'(x)=3x^2-2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)x+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$, που είναι τριώνυμο, έχει τουλάχιστον δυο ρίζες $x_1\in(\alpha,\ \beta)$, $x_2\in(\beta,\ \gamma)$, προφανώς διακεκριμένες. Όμως η $f'(x)=0$ ως δευτεροβάθμια εξίσωση έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες. Άρα, αυτές θα είναι οι x_1, x_2.

Π.χ. 138. Εξετάστε αν ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-4,\ 0]$ για τη συνάρτηση $f, f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}$.
Είναι $f=(h\circ g)\circ\phi$, όπου $h, h(x)=\sqrt[3]{x}$, $D(h)=\mathbb{R}$

$g, g(x)=x^2$, $D(g)=\mathbb{R}$

$\phi, \phi(x)=(x+2)$, $D(\phi)=\mathbb{R}$

$D(h\circ g)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$, $D(f)=D\left((h\circ g)\circ\phi\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:(x+2)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$

Η f, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή το $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[-4,\ 0]$. Επίσης $f(-4)=f(0)=\sqrt[3]{4}$.

Όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-4,\ 0)$ διότι δεν είναι παραγωγίσιμη στην θέση -2 καθόσον $f', f'(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$.
Άρα, δεν ισχύει το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-4,\ 0]$.

Π.χ. 139. Αποδείξτε ότι αν μία πολυωνυμική συνάρτηση f μηδενίζεται για k διαφορετικές τιμές του $x\in\mathbb{R}$, τότε η f' μηδενίζεται για $(k-1)$ τουλάχιστον τιμές του $x\in\mathbb{R}$.
Έστω $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\ldots,\rho_{\kappa-1},\rho_k\in\mathbb{R}$ ρίζες της f, διαφορετικές ανά δύο μεταξύ τους, με $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\ldots<\rho_{\kappa-1}<\rho_k$. Η f ως πολυωνυμική έχει $D(f)=\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θεωρώ τα διαστήματα $[\rho_1,\ \rho_2]$, $[\rho_2,\ \rho_3]$, …, $[\rho_{k-1},\ \rho_k]$. Από το θεώρημα του Rolle για την f προκύπτει ότι:
• Στο $[\rho_1,\ \rho_2]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\ \rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1)=0$.
• Στο $[\rho_2,\ \rho_3]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\ \rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2)=0$.

....

• Στο $\left[\rho_{k-1},\ \rho_k\right]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_{\kappa-1} \in \left(\rho_{\kappa-1},\ \rho_k\right)$ έτσι ώστε $f'\left(\xi_{\kappa-1}\right)=0$.
Άρα, η f' έχει τουλάχιστον $k-1$ πραγματικές ρίζες, διακεκριμένες.

Π.χ. 140. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\log(\eta\mu x)$ με $D\left(f\right)=\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία λύση στο $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$ η οποία και να βρεθεί.

$D\left(f\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:\eta\mu x>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:0<x<\pi\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:2k\pi<x<(2k+1)\pi\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi,\ (2k+1)\pi\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $D\left(f\right)$. Συνεπώς:

• Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$

• $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\log\frac{1}{2}$. Συνεπώς, από το θεώρημα του Rolle προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Είναι $f'(x)=\sigma\phi x$, $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \sigma\phi\xi=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi=0 \Leftrightarrow \xi=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Αλλά $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}<\xi<\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\cancel{\pi}}{6}<k\cancel{\pi}+\frac{\cancel{\pi}}{2}<\frac{5\cancel{\pi}}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}<k+\frac{1}{2}<\frac{5}{6} \Leftrightarrow$
$1<6k+3<5 \Leftrightarrow -2<6k<2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k=0$. Άρα, $\xi=k\pi+\frac{\pi}{2}\overset{k=0}{=}0$. Δηλαδή, το ξ έχει μια μόνο τιμή, την $\frac{\pi}{2}$, διότι και το k έχει μία μόνο τιμή, την $k=0$.

Ασκήσεις

Υπάρχουν δύο κατηγορίες ασκήσεων πάνω στο θεώρημα του Rolle.
• Να δειχθεί αν για μία συγκεκριμένη συνάρτηση τηρούνται, σε κάποιο διάστημα, οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ή αν ισχύει το θεώρημα.
• Να δειχθεί ότι κάποιο πολυώνυμο ή πολυωνυμική εξίσωση ή συνάρτηση ή το παράγωγο πολυώνυμο ή η παράγωγος εξίσωση ή η παράγωγος συνάρτηση έχει ακριβώς μία ή το πολύ μία ή το πολύ k ή τουλάχιστον k ή τουλάχιστον μία ρίζα.

1. Με το θεώρημα του Rolle να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+6x+1=0$ δεν μπορεί να έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες.

2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^6+\alpha x+\beta=0$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει <u>το πολύ</u> δυο πραγματικές ρίζες.

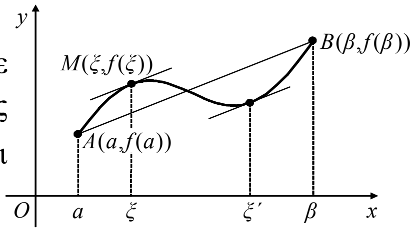
Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού

Αν η συνάρτηση f είναι: • Συνεχής στο <u>κλειστό</u> διάστημα $[\alpha,\ \beta]$

• Παραγωγίσιμη στο <u>ανοικτό</u> διάστημα $(\alpha,\ \beta)$,

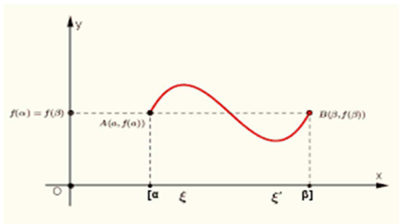
Τότε υπάρχει <u>τουλάχιστον ένα</u> $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta - a}$.

Γεωμετρική ερμηνεία. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ ώστε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f, στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς το τμήμα AB, με $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, οπότε η κλίση της εφαπτομένης είναι $f'(\xi)$ και του AB είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta - a}$, με $f'(\xi) = \lambda_{AB}$.



Παρατηρήσεις

1. Από το θεώρημα της μέσης τιμής, αν $f(\beta) = f(a)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. Δηλαδή προκύπτει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle. Συνεπώς, το θεώρημα του Rolle είναι μερική περίπτωση του θεωρήματος της μέσης τιμής.



2. Μεταξύ δύο ριζών μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της παραγώγου συνάρτησης.

Απόδειξη. Έστω $\rho_1,\ \rho_2$ δυο ρίζες της παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Ισχύει ότι:

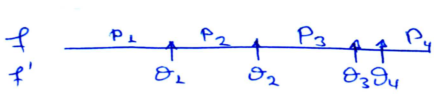
• Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\rho_1,\ \rho_2]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\rho_1,\ \rho_2)$

• $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1,\ \rho_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

3. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της παραγώγου συνάρτησης, υπάρχει το πολύ μία ρίζα της αρχικής συνάρτησης.



Απόδειξη. Έστω $\theta_1,\ \theta_2$ δυο διαδοχικές ρίζες της παραγώγου συνάρτησης.

Έστω $\rho_1,\ \rho_2$ δυο ρίζες της αρχικής συνάρτησης. Αν $\rho_1,\ \rho_2 \in (\theta_1,\ \theta_2)$ έπεται ότι υπάρχει $\theta_3 \in (\rho_1,\ \rho_2)$ όπου θ_3 ρίζα της παραγώγου συνάρτησης. Άρα οι ρίζες $\theta_1,\ \theta_2$ δεν είναι διαδοχικές, πράγμα άτοπο.

Π.χ. 141. Δείξτε ότι αν $0 < x_1 < x_2$, τότε $e^{x_1} < \dfrac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} < e^{x_2}$.

Έστω συνάρτηση $f, f(x) = e^x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

• Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,\ x_2]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_1,\ x_2)$

Άρα, από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1,\ x_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow e^{\xi} = \dfrac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα από $0 < x_1 < \xi < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{\xi} < e^{x_2}$, δηλαδή $e^{x_1} < \dfrac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} < e^{x_2}$.

Π.χ. 142. Δείξτε ότι αν $0 < x_1 < x_2$, τότε: $1 - \dfrac{x_1}{x_2} < \ln\dfrac{x_2}{x_1} < \dfrac{x_2}{x_1} - 1$.

Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \ln x$, παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

• Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,\ x_2]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_1,\ x_2)$

Άρα, από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1,\ x_2)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1}$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα από $0 < x_1 < \xi < x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{x_1}$.

Άρα, $0 < x_1 < \xi < x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} < \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_2}(x_2 - x_1) < \ln\dfrac{x_2}{x_1} < \dfrac{1}{x_1}(x_2 - x_1) \Rightarrow$

$1 - \dfrac{x_1}{x_2} < \ln\dfrac{x_2}{x_1} < \dfrac{x_2}{x_1} - 1$.

Π.χ. 143. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0,\ 1)$ είναι $1 + x < e^x < 1 + ex$.

Έστω συνάρτηση $f, f(x) = e^x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\ x]$ με $f'(x) = e^x$, από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (0,\ x)$ τέτοιος ώστε $\dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = e^{\xi}$ ή $\dfrac{e^x - 1}{x} = e^{\xi}$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0 < \xi < x < 1$ είναι $e^0 < e^{\xi} < e^1$.

Άρα $e^0 < \dfrac{e^x - 1}{x} < e^1 \Leftrightarrow 1 < \dfrac{e^x - 1}{x} < e \Leftrightarrow x < e^x - 1 < ex \Leftrightarrow x + 1 < e^x < ex + 1$.

Π.χ. 144. Δείξτε ότι $\nu x^{\nu-1}(x - y) \geq x^{\nu} - y^{\nu} \geq \nu y^{\nu-1}(x - y)$, όπου $x \geq y > 0$.

• Όταν $x = y$ ισχύει η ισότητα.

• Όταν $x > y$, θεωρώ την συνάρτηση $f, f(x) = x^{\nu}$ οπότε $f, f'(x) = \nu x^{\nu-1}$.

Από το θεώρημα της μέσης τιμής στο $\left[y,\ x\right]$ έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(y,\ x\right)$ ώστε $\nu\xi^{\nu-1}=\dfrac{x^\nu-y^\nu}{x-y}$. Θέλω να αποδείξω ότι $\nu x^{\nu-1}\geq\dfrac{x^\nu-y^\nu}{x-y}\geq\nu y^{\nu-1}$.
Αρκεί να δειχθεί ότι $\cancel{\nu}x^{\nu-1}\geq\cancel{\nu}\xi^{\nu-1}\geq\cancel{\nu}y^{\nu-1}\Leftrightarrow x^{\nu-1}\geq\xi^{\nu-1}\geq y^{\nu-1}\Leftrightarrow x\geq\xi\geq y$.
Αυτό όμως ισχύει.

Π.χ. 145. Έστω συνάρτηση $f:\left[0,\ 3\right]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3-x+1$. Να βρεθεί $x_0\in\left(0,\ 3\right)$ ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}$ και να διαπιστώσετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0, είναι παράλληλη προς την χορδή που ορίζεται από τα σημεία $\left(0,\ 1\right)$ και $\left(3,\ 25\right)$.
- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\ 3\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\ 3\right)$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\ 3\right)$ ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}=\dfrac{25-1}{3}=8$.
Επειδή $f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(x_0)=3x_0^2-1$.

Άρα, $3x_0^2-1=8\Leftrightarrow x_0^2=3\Leftrightarrow x_0=\begin{cases}\sqrt{3} & \text{Δεκτή}\\ -\sqrt{3} & \text{Απορρίπτεται}\end{cases}$

Π.χ. 146. Δείξτε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ είναι $\left|\eta\mu x-\eta\mu y\right|\leq\left|x-y\right|$.
- Για $x=y$ η προς απόδειξη σχέση είναι προφανής, διότι ισχύει η ισότητα.
- Για $x\neq y$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x<y$.

Η προς απόδειξη σχέση γίνεται $\left|\dfrac{\eta\mu x-\eta\mu y}{x-y}\right|\leq1$.
Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\eta\mu x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Στο διάστημα $\left[x,\ y\right]$ από το θεώρημα της μέσης τιμής για την f, έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(x,\ y\right)$ ώστε $f, f'(x)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\xi=\dfrac{\eta\mu x-\eta\mu y}{x-y}$.
Αρκεί να δειχθεί ότι $\left|\sigma\upsilon\nu\xi\right|\leq1$. Είναι προφανές ότι ισχύει.

Άρα είναι και $\left|\dfrac{\eta\mu x-\eta\mu y}{x-y}\right|\leq1$.