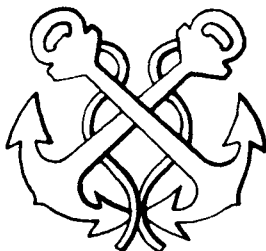


ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
Α.Δ.Σ.Ε.Ν.
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

Το ίδρυμα Ευγενίδου, μετά τα υπ' αρ. 2117.2/1/91 της 2.7.91, 2117.1/4/91 της 1.10.91 και 2117.1/5/91 της 22.10.91 έγγραφα του ΥΕΝ και προκειμένου να βοηθήσει τους σπουδαστές των ΑΔΣΕΝ στη μελέτη των μαθημάτων τους, απεφάσισε κατ' εξαίρεση να προβεί στην προσωρινή εκτύπωση του βιβλίου Ανώτερα Μαθηματικά ΑΔΣΕΝ/Πλοιάρχων, όπως αυτό παραδόθηκε από το συγγραφέα.

Είναι προφανές ότι, εφ' όσον δεν έχει τηρηθεί η πάγια διαδικασία συγγραφής, ελέγχου και εκδόσεως του βιβλίου, η οποία ακολουθείται απαρεγκλίτως από την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου, τόσο η έκταση της ύλης του βιβλίου, όσο το περιεχόμενο και η στάθμη του, δεν εκφράζουν τις απόψεις της επιτροπής, αλλά μόνον του συγγραφέα.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

ΑΔΣΕΝ - ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

ΧΡΗΣΤΟΥ Ι. ΠΕΠΠΑ
ΚΛΗΡΗΓΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΔΣΕΝ - ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

ΑΘΗΝΑ
2006



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν εύχρησμο αποτελεί υλοποίηση της από 2-7-91 διαταγής του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας με την οποία μου ανατέθηκε η ευχρησμογία σου, για να χρησιμοποιηθεί από το Ακαδημαϊκό Έτος 1991-92. Η διαταγή αυτή εξέδωθη λόγω της ελλείψεως κατάλληλου ευχρησμογματος Μαθηματικών για τους επουδαούς-Πλοίαρχους των ΑΔΣΕΝ της χώρας μας, και για τον πρόεδρο λόγω ότι έφρεπε να καλυφθεί νέα ύλη που προέκυψε εκ της αλλαγής του εφόρου φοιτήσεως των επουδαοών με νέα προοδευτικότερα ευσέματα επουδών (εάντουιτς-κόρσε).

Η έλλειψη επαρκούς χρόνου για την ευχρησμογία ενός τέτοιου εκπαιδευτικού κειμένου ήταν αβυσσεική, όμως η υπερδεκαετηγείρα μου από την διδασκαλία των Μαθηματικών στους επουδαούς Πλοίαρχους των ΑΔΣΕΝ με βοήθησε να ξεπεράσω το μεγάλο αυτό εφόδιο και νομίζω ότι είμαι σε θέση να το παραδώσω πλέον στους επουδαούς-Πλοίαρχους, έχοντας την βεβαιότητα ότι εφθυμώσει πλήρως τους λόγους για τους οποίους εξέδωθη. Αυτό θα το παρατηρήσει ο αναγνώσεως από το πλήθος των εφαρμογών και παραδειγματων πάνω σε μαθηματικά θέματα που αφορούν τον Πλοίαρχο, αλλά και της προοηθείας που έχει καταφλυθεί ώστε να μην παύει να είναι ένα αυτεγρό Μαθηματικό κείμενο που να καλύπτει τις ανάγκες ενός επουδαοτή-Πλοίαρχου Ανωτέρων Σχολών που επιδυμεί ενόχηση των επουδών του σε Πανεπιστήμια ή Πολυτεχνεία της χώρας μας ή του εφωτεγικού.

Επειδή το εύχρησμο αυτό, λόγω των υπερβολικά εσειών χρονικών περιωριών ήταν τεχνικώς αδύνατο να εετυηωθεί εφέτος σε βιβλίο, αναγκάσθηκα και να το καταραχρήσω και χ' αυτό ζήτηώ την επεικετατου αναγνώση για ευκόν παραλείψεις και αβλεπίες που ηθαυόν να διαοιτωθούν ε' αυτό.

Ο ευχρησμογίας
Σεπτεμβριος 1991

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

1. Λογάριθμοι	σελ	1
2. Επίλυση επιπέδων Τριγώνων	»	12
3. Διανυσματικός Λογισμός	»	29
4. Αναλυτική Γεωμετρία	»	74
5. Γραφήματα	»	106
6. Προβεχθίζουσες τιμές	»	131
7. Παρεμβολές	»	143

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

1. Συναρτήσεις - Ορια - Ακολουθίες	»	156
2. Παράγωγος και Διαφορικό	»	189
3. Μελέτη των Συναρτήσεων	»	209
4. Αόριστα Ολοκληρώματα	»	228
5. Ορισμένα Ολοκληρώματα	»	262
6. Στοιχεία Στατιστικής	»	300
7. Πίνακες - Γραμμικά Συστήματα	»	317.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

1. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

1.1. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

1.1.1 ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λογαριθμός ενός θετικού αριθμού A , ως προς βάση τον αριθμό 10 , λέγεται η δύναμη (ο εκθέτης) στην οποία πρέπει να υψωθεί η βάση 10 για να δώσει τον αριθμό A .

π.χ. Γνωρίζουμε ότι $10^3 = 1.000$. Άρα λογαριθμός του θετικού αριθμού 1.000 ως προς βάση το 10 , λέγεται ο εκθέτης 3 στον οποίο πρέπει να υψωθεί το 10 για να μας δώσει το 1.000 . Συνελώς:

$$10^3 = 1.000 \iff \log_{10} 1.000 = 3.$$

Επίσης:

$$\log_{10} 1 = 0 \text{ διότι } 10^0 = 1$$

$$\log_{10} 10 = 1 \text{ διότι } 10^1 = 10$$

$$\log_{10} 0,001 = -3 \text{ διότι } 10^{-3} = \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Γενικά λοιπόν έχουμε:

$$10^k = A \iff \log_{10} A = k.$$

1.1.2 ΒΑΣΕΙΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Σαν βάση των λογαριθμών μπορεί να ληφθεί οποιοσδήποτε θετικός αριθμός π.χ. $5^2 = 25 \iff \log_5 25 = 2$

Συνήθως όμως σαν βάση των λογαριθμών χρησιμοποιείται είτε ο αερόμετρος αριθμός $e = 2,71828\dots$, είτε ο αριθμός 10 .

Εαν ληφθεί σαν βάση των λογαριθμών ο αριθμός e τότε έχουμε το λεγόμενο "Νεπέρειο Λογαριθμικό Σύστημα", και οι λογαριθμοί λέγονται "Νεπέρειοι Λογαριθμοί", προς τιμήν του John Napier (1550 - 1617) που πρώτος επινόησε τους λογαριθμούς. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το σύμβολο \ln χωρίς να υποβιβάζουμε την βάση e (δηλαδή δεν γράβουμε $\ln_e A$) π.χ.

$$\text{Εάν } e^k = A \iff \ln A = k.$$

Με το σύστημα αυτό δεν θα ασκαλιθούμε, διότι δεν το χρησιμοποιούν οι Ναυτιλόμενοι. Χρησιμοποιείται ευνίδως στα Ανώτερα Μαθηματικά.

Εαν ληφθεί σαν βάση των λογαρίθμων ο αριθμός 10, τότε έχουμε το λεγόμενο "Δεκαδικό Σύστημα Λογαρίθμων", και οι λογαρίθμοι λέγονται "δεκαδικοί λογαρίθμοι," ή "καινοί".

Σεση περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το σύμβολο \log κυρίως να υποδεικνύουμε την βάση 10 (δηλαδή δεν χράφουμε $\log_{10} A$) π.χ.

$$\text{Εάν } 10^k = A \iff \log A = k.$$

Το σύστημα αυτό ως πλέον πρακτικό και εύχρηστο, χρησιμοποιείται από τους Ναυτιλομένους και χ' αυτό θα το επεξηγήσουμε πάρα κάτω με κάθε λεπτομέρεια. (Το σύστημα αυτό το χρησιμοποίησε πρώτος, ο Άγγλος Henry Briggs (1.556-1630)).

1.1.3. ΥΠΑΡΞΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ.

Με τα Μαθηματικά αποδεικνύεται ότι:

α') Όλοι οι θετικοί αριθμοί έχουν λογαρίθμο. Αυτός είναι πραγματικός αριθμός θετικός, αρνητικός ή μηδέν.

β') Αντικερόπως, κάθε πραγματικός αριθμός είναι λογαρίθμος ενός μόνο θετικού αριθμού.

γ') Στο δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα, οι αριθμοί οι μεγαλύτεροι της μονάδας, έχουν θετικό λογαρίθμο. Οι αριθμοί οι μικρότεροι της μονάδας (και πέφτουν μεγαλύτεροι του 0) έχουν αρνητικό λογαρίθμο (π.χ. $\log \frac{1}{1000} = -3$ διότι $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$)

δ') Οι μη θετικοί αριθμοί (δηλαδή οι αρνητικοί και το μηδέν) δεν έχουν λογαρίθμο.

ε') Αύξανόμενου του αριθμού αυξάνεται και ο λογαρίθμος και αντικερόπως.

62') Ο λογαριθμός οποιουδήποτε αριθμού (εκτός των ευμεγερων δυνάμεων του 10) έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιόδικά. Προσεχγουικά λαμβάνουμε τα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία.

1.14. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Αναφέρουμε εδώ τις ιδιότητες των λογαριθμών, χωρίς την απόδειξη τους, αφού αυτή δεν ενδιαφέρει τους Ναυτιλομένους.

I. Ο λογαριθμός του γινομένου δύο η περισσότερων δεσικών αριθμών, ισούται με το άθροισμα των λογαριθμών των αριθμών αυτών. Δηλαδή

$$\begin{aligned}\log A \cdot B &= \log A + \log B \\ \log A \cdot B \cdot \Gamma &= \log A + \log B + \log \Gamma \quad \text{κ.λ.η.}\end{aligned}$$

II. Ο λογαριθμός του ηλικού δύο δεσικών αριθμών ισούται με τον λογαριθμό του διαφερέσου μείον τον λογαριθμό του διαρέου. Δηλαδή

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

III. Ο λογαριθμός μίας δυνάμεως ενός δεσικού αριθμού ισούται με το γινόμενο του εκθέτη επί τον λογαριθμό του αριθμού π.χ.

$$\log A^k = k \cdot \log A.$$

IV. Ο λογαριθμός μίας ρίζας δεσικού αριθμού, ισούται με το ηλικό του λογαριθμού του αριθμού δια του δείκτη της ρίζας.

Δηλαδή

$$\log \sqrt[k]{A} = \frac{\log A}{k} = \frac{1}{k} \cdot \log A.$$

1.15. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ.

Χαρακτηριστικό ενός λογαριθμού λέγεται το ακέραιο μέρος αυτού.

Για το χαρακτηριστικό ενός λογαριθμού ισχύουν οι εξής

δύο κανόνες:

1^ο: Όταν ο αριθμός είναι μεγαλύτερος της μονάδας τότε το χαρακτηριστικό του λογαριθμού του ισούται με το πλήθος των ψηφίων του αριθμού που βρίσκονται αριστερά της υποδιαστολής, ε-
λαττωμένο κατά 1 π.χ.

$$\log 451,27 = 2,65444$$

Διότι αριστερά της υποδιαστολής έχουμε τρία ψηφία. Άρα $3-1=$
 $=$ χαρακτηριστικό 2.

$$\text{επίσης } \log 6457 = 3,81003.$$

2^ο: Όταν ο αριθμός είναι μικρότερος της μονάδας (αλλά
φραϊώς θετικός) τότε το χαρακτηριστικό του λογαριθμού του, βρίσκε-
ται ως εξής: Αφαιρούμε τον αριθμό των μηδενικών που βρίσκονται
αμέσως δεξιά της υποδιαστολής, από τον αριθμό 9 προσθέτοντας
ευχρόνως στον λογαριθμο -10 π.χ.

$$\log 0,2 = 9,30103 - 10 = -0,69897$$

$$\log 0,04 = 8,60206 - 10 = -1,39794$$

Σημείωση 1^η: Τα παραπάνω πρέπει να τα γνωρίζουμε καλά όταν
ψάχνουμε τον λογαριθμο ενός αριθμού από τους λογαριθμικούς πίνακες
Εκεί βρίσκουμε το δεκαδικό μέρος των λογαριθμών, το δε χαρακτηριστικό
το υπολογίζουμε εμείς βάσει των παραπάνω κανόνων. Η προσέλαδα αυ-
τή είναι επίπονος και δεν μας δίνει ακριβή αποτελέσματα.

Η σύγχρονη τεχνολογία μας έδωσε τα κομπιούτερ τέλεις από τα
οποία υπολογίζουμε σε δευτερόλεπτα και το χαρακτηριστικό του
λογαριθμού και το δεκαδικό του μέρος ευχρόνως. Τα αποτελέσμα-
τα που μας δίνουν οι υπολογιστές τέλεις, είναι απολύτου ακριβείας
και δεν απαιτούνται παρά κλάσματα του δευτερολέπτου.

Σημείωση 2^η: Οι αριθμοί 0,2 και 0,04 που πήραμε σαν
παράδειγμα πιο πάνω, αφού είναι μικρότεροι της μονάδας θα έχουν
λογαριθμο αρνητικό (βλ.1.38)

$$\text{Πράγματι: } \log 0,2 = -0,69897.$$

$$\log 0,04 = -1,39794$$

Επειδή όμως τα παλαιότερα χρόνια οι ναυίαρχοι δεν ήξεραν καλά μαθηματικά, για να μη μηρδεύονται με τους αρνητικούς αριθμούς και τις Αλγεβρικές πράξεις, το Αρχαίο Ναυαρχείο καθιέρωσε την πρόσθεση (με δανεισμό) του αριθμού 10 σε κάθε αρνητικό αποτέλεσμα και έτσι οι πράξεις διευκολύνονται κατά πολύ, αφού οι αριθμοί δεσικοποιούνται. Το σύστημα αυτό παρέμεινε μέχρι σήμερα στους Ναυτιλομένους επειδή δεν αμφισβητείται η πρακτικότητα του λόγω της άνευσης διεξαγωγής των οποιωνδήποτε πράξεων μόνο με δεσικούς αριθμούς. Έτσι για τους λογαριθμούς των παραπάνω αριθμών με το σύστημα αυτό γράφουμε:

$$\log 0,2 = -0,69897 + 10 \text{ (δανεικά 10)} = 9,30103 - 10.$$

$$\log 0,04 = -1,39794 + 10 \text{ (δανεικά 10)} = 8,60206 - 10.$$

Έτσι όταν έχουμε να κάνουμε μία οποιαδήποτε πράξη μεταξύ των λογαριθμών των αριθμών αυτών, π.χ. πρόσθεση, θα έχουμε (προσέξτε τον δανεισμό των 10):

$$\begin{aligned} \log 0,2 + \log 0,04 &= (9,30103 - 10) + (8,60206 - 10) = \\ &= (9,30103 + 8,60206) - 20 = 17,90309 - 20 \text{ (= -2,09691)}. \end{aligned}$$

Σε όμοιο βεβαιώς αποτέλεσμα θα βγάσουμε εκτελώντας τις πράξεις αλγεβρικά:

$$\log 0,2 + \log 0,04 = (-0,69897) + (-1,39794) =$$

$$\text{Αντιεστρόφως:} = -0,69897 - 1,39794 = -2,09691$$

Για το αντίστροφο ισχύουν οι εξής δύο κανόνες:

1^{ος}: Εάν το χαρακτηριστικό του λογαριθμού είναι θετικό (όχι βεβαιά πάνω από 6 γιατί στην Ναυτιλία, εν αντιθέσει με την Αστρονομία, δεν χρησιμοποιούμε τόσο τεράστιους αριθμούς) ή 0, ο αντίστροφος αριθμός θα έχει τόσα ακέραια ψηφία, όσες μονάδες έχει το χαρακτηριστικό του συν ένα.

$$\text{π.χ. } 2,52755 = \log 337,09321$$

2° : Εάν το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι θετικό, αλλά πολύ μεγάλο π.χ. 7, 8, 9 τότε εσφαλώς φαίνεται ότι του έχουμε δανείσει 10 μονάδες (και ότι δεν πρόκειται για τεράστιο αριθμό). Ο αντίστοιχος λοιπόν αριθμός θα είναι οπωδήποτε μικρότερος της μονάδας και θα έχει τόσα μηδενικά αμέσως δεξιά της υποδιαστολής, όσο είναι το χαρακτηριστικό του, αφαιρούμενου από το 9. π.χ.

$$\log x = 9,30103 \Rightarrow x = 0,2$$

($9-9=0$ άρα κανένα μηδενικό αμέσως μετά την υποδιαστολή)

$$\log y = 8,60206 \Rightarrow y = 0,04$$

($9-8=1$ μηδενικό αμέσως μετά την υποδιαστολή)

(Τα υπόλοιπα ψηφία βρίσκονται από τους πίνακες ή τον επιστημονικό υπολογιστή τέτοιας).

1.2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ.

Μέχρι πριν από λίγα μόλις χρόνια η εύρεση των λογαρίθμων γινόταν από ειδικούς πίνακες λογαρίθμων, τους λεγόμενους πίνακες Dupuis. Στην Ναυτιλία ειδικώς, χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα οι πίνακες Nörlies. Στους πίνακες αυτούς μπορεί να βρει κανείς τις οδηγίες χρήσεώς τους, προκειμένου να τους χρησιμοποιήσει για την εύρεση των λογαρίθμων των αριθμών ή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Όπως όμως προαναφέραμε, η τεχνολογία σήμερα, μας έχει προσφέρει ένα πρώτης τάξεως εργαλείο, τους επιστημονικούς υπολογιστές τέτοιας, με την βοήθεια των οποίων μπορούμε εύκολα και χωρίς παρεμβολές να βρίσκουμε με σχεδόν απόλυτη ακρίβεια τους λογαρίθμους των αριθμών και των τριγωνομετρικών αριθμών και αντιστρόφως.

Στο τέλος του βιβλίου αυτού υπάρχουν κατάλληλες οδηγίες και προγράμματα για την ταχύτερη εύρεση οποιουδήποτε βροικείου.

Σημείωση: Για τους λογαρίθμους των τριγωνομετρικών αριθμών πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας τα εξής:

Επειδή τα ημίτονα και συνημίτονα είναι μικρότερα της μονάδας, οι αντίστοιχοι λογαρίθμοι θα είναι αρνητικοί. Εφαρμόζουμε τότε και 6' αυτή την περίπτωση ενώ πρόδωσα (με δα-νειαμό) των 10 μονάδων. π.χ.

$$\log_{\eta\mu}(40^\circ 25,4') = -0,18814 + 10 - 10 = 9,81186 - 10$$

$$\log_{\sigma\upsilon\nu}(27^\circ 50,2') = -0,05341 + 10 - 10 = 9,94659 - 10.$$

$$\text{Ενώ } \log_{\sigma\phi}(72^\circ 31,4') = 0,50189$$

1.3. ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ, ΠΗΛΙΚΩΝ, ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί με την κρίση λογαρίθμων η παρά-
σταση:

$$x = \frac{2423 \cdot 17^4 \cdot \sqrt[5]{23,257}}{35^3 \cdot \sqrt[4]{4253^3}}$$

Λύση:

Λογαριθμίζουμε αμφοτέρωτα τα μέλη της εξίσωσης:

$$\log x = \log \frac{2423 \cdot 17^4 \cdot \sqrt[5]{23,257}}{35^3 \cdot \sqrt[4]{4253^3}} \quad \text{και συνεχίζουμε εφαρμό-}$$

ζοντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων:

$$\begin{aligned} \log x &= \log 2423 \cdot 17^4 \cdot \sqrt[5]{23,257} - \log 35^3 \sqrt[4]{4253^3} = \\ &= (\log 2423 + \log 17^4 + \log \sqrt[5]{23,257}) - (\log 35^3 + \log \sqrt[4]{4253^3}) = \\ &= \log 2423 + 4 \log 17 + \frac{1}{5} \log 23,257 - 3 \log 35 - \frac{3}{4} \log 4253 \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\log 2423 = 3,38435$$

$$4 \log 17 = 4 \cdot 1,23045 = 4,92180.$$

$$\frac{1}{5} \log 23,257 = \frac{1}{5} \cdot 1,36655 = 0,27331$$

$$3 \log 35 = 3 \cdot 1,54407 = 4,63221$$

$$\frac{3}{4} \log 4253 = \frac{3}{4} \cdot 3,62870 = 2,72153$$

$$\text{Άρα } \log x = (3,38435 + 4,92180 + 0,27331) - (4,63221 + 2,72153) \Rightarrow$$

$$\log x = 8,57946 - 7,35374 \Rightarrow$$

$$\log x = 1,22572 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 16,816}$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογισθεί η παράσταση

$$k = \frac{\sqrt{28} \cdot \sqrt{65,2} \cdot 7,82 \cdot \sin(35^\circ 27')}{\sqrt[3]{742} \sqrt{671}}$$

Λύση:

Λογαριθμίζουμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης:

$$\log k = \log \frac{\sqrt{28 \cdot 65,2} \cdot 7,82 \cdot \sin(35^\circ 27')}{\sqrt[3]{742} \cdot \sqrt{671}} = \log \frac{\sqrt{1825,6} \cdot 7,82 \sin(35^\circ 27')}{\sqrt[3]{742} \cdot \sqrt{671}}$$

$$= \log \sqrt{1825,6} \cdot 7,82 \sin(35^\circ 27') - \log \sqrt[3]{742} \cdot \sqrt{671} =$$

$$= \log \sqrt{1825,6} + \log 7,82 + \log \sin(35^\circ 27') - (\log \sqrt[3]{742} + \log \sqrt{671}) =$$

$$= \frac{1}{2} \log 1825,6 + \log 7,82 + \log \sin(35^\circ 27') - \frac{1}{3} \log 742 - \frac{1}{2} \log 671.$$

Έχουμε τώρα:

$$\frac{1}{2} \log 1825,6 = \frac{1}{2} \cdot 3,26141 = 1,63070$$

$$\log 7,82 = 0,89321$$

$$\log \sin(35^\circ 27') = -0,08904$$

$$\frac{1}{3} \log 742 = \frac{1}{3} \cdot 2,87040 = 0,95680$$

$$\frac{1}{2} \log 671 = \frac{1}{2} \cdot 2,82672 = 1,41336$$

$$\text{Άρα } \log k = 1,63070 + 0,89321 - 0,08904 - 0,95680 - 1,41336 =$$

$$= 2,52391 - 2,45920 = 0,06471.$$

$$\text{και } \boxed{k = 1,16}$$

14. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε εξίσωση που έχει τον άγνωστο βών εκθέσει λέγεται

εκθετική εξίσωση.

π.χ. η εξίσωση $2^x = 8$ λέγεται εκθετική εξίσωση ($x=3$)

Λύση μιας εκθετικής εξίσωσης λέγεται η εύρεση των τιμών των αχώνυμων που επαληθεύουν την εξίσωση.

Μορφές εκθετικών εξισώσεων:

$$\text{I. } a^x = \beta \quad (a, \beta \geq 0)$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1^η: Ο β είναι δύναμη του a . Έστω $\beta = a^k$, τότε

$$a^x = a^k \Leftrightarrow x = k.$$

Παράδειγμα: $4^x = 4.096$

Επειδή $4.096 = 4^6 \Leftrightarrow 4^x = 4^6 \Leftrightarrow x = 6.$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2^η: Ο β δεν είναι δύναμη του a . Τότε λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της $a^x = \beta$ και έχουμε:

$$\log a^x = \log \beta \Leftrightarrow$$

$$x \log a = \log \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log \beta}{\log a}$$

Παράδειγμα: $2,48^x = 42,7 \Leftrightarrow$

$$\log 2,48^x = \log 42,7 \Leftrightarrow$$

$$x \log 2,48 = \log 42,7 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log 42,7}{\log 2,48} \Leftrightarrow x = \frac{1,63043}{0,39445} \Leftrightarrow x = 4,13$$

$$\text{II. } a^{f(x)} = \beta$$

Οι εκθετικές εξισώσεις αυτές της μορφής λύνονται όπως οι εξισώσεις της μορφής I.

Παράδειγμα 1^ο: Να λυθεί η εξίσωση $5^{x^2-2x+2} = 625$

Επειδή $625 = 5^4 \Leftrightarrow$

$$5^{x^2-2x+2} = 5^4 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x-2 = 0 \text{ και λύνοντας την δευτεροβάθμια αυ-}$$

τή εξίσωση βρίσκουμε: $x_1 = 2,73205$ και $x_2 = -0,73205$

Παράδειγμα 2^ο: Να λυθεί η εξίσωση:

$$(7^{5-x})^{3-x} = 1$$

Λύση:

Λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης:

$$\log (7^{5-x})^{3-x} = \log 1 \Leftrightarrow$$

$$(3-x) \log 7^{5-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta \quad 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$$

$$\eta \quad \log 7^{5-x} = 0 \Leftrightarrow (5-x) \log 7 = 0 \text{ και επειδή } \log 7 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 5-x=0 \Leftrightarrow x=5$$

$$\text{III. } \alpha k^{2x} + \beta k^x + \gamma = 0$$

Για την λύση αυτής της μορφής θέτουμε $k^x = y$

οπότε η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ η οποία είναι κλασική μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση: $7 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

Λύση:

$$\text{Αυτή γράφεται: } 7 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot (2^x) - 4 = 0$$

Θέτουμε $2^x = y$ και έχουμε:

$$7 \cdot y^2 - 3y - 4 = 0$$

η οποία έχει ρίζες: $y_1 = 1$, $y_2 = -0,5714$

$$\text{Άρα } 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$$

και $2^x = -0,5714$ η οποία δεν έχει λύση

Συνεπώς η ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 0$.

$$\text{IV: } \alpha k^{x+p} + \beta k^{x+q} + \dots = 0$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$$

Λύση:

Αυτή γράφεται:

$$3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3^{-1} - 3^x \cdot 3^{-2} = 128 \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - \frac{3^x}{9} = 128 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Θέτουμε } 3^x &= y \Leftrightarrow \\ 9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} &= 128. \Leftrightarrow \\ 128y &= 1.152 \Leftrightarrow \\ y &= 9 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

1.5. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΕΩΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

Έστω ότι ο λογάριθμος ενός αριθμού δίδεται με ένα σύστημα με βάση α και θέλουμε να υπολογίσουμε τον λογάριθμο του αριθμού αυτού με ένα νέο σύστημα με βάση β . Ο σχετικός τύπος που μας δίνει την σχέση αυτή, είναι:

$$\log_{\beta} k = \log_{\alpha} k \cdot \frac{1}{\log_{\alpha} \beta}$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται με απλή εφαρμογή του ορισμού του λογαρίθμου ενός αριθμού ως προς μία βάση και αναλυτικά μας λέει ότι:

“ Ο λογάριθμος ενός αριθμού k ως προς μία νέα βάση β , ισούται με το γινόμενο του λογαρίθμου του αριθμού αυτού ως προς την παλαιά βάση α , επί ένα κλάσμα που έχει αριθμητή την μονάδα και παρονομαστή τον λογάριθμο της νέας βάσεως ως προς την παλαιά.”

Σημείωση: Ο παραπάνω τύπος δεν ενδιαφέρει άμεσα τους μαθητικούς, επειδή στην Μαθητική γίνεται γενικά χρήση των δεκαδικών λογαρίθμων.

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2.1. ΜΕΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Κρίνουμε εδώ απαραίτητο να υπενθυμίσουμε μερικά στοιχεία από την Επίπεδη Τριγωνομετρία, τα οποία θεωρούνται απαραίτητα για διάφορες εφαρμογές της Ναυτιλίας που θα μελετήσουμε στο επίπεδο. Το μάθημα βεβαίως της Επίπεδης Τριγωνομετρίας διδάσκεται εκτενώς στα λύκεια, οπότε οι βασικές της γνώσεις θεωρούνται γνωστές.

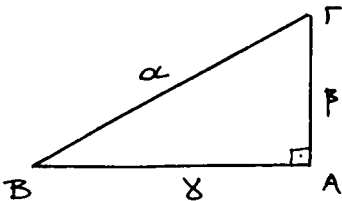
Στην Ναυτιλία μας ενδιαφέρει κυρίως να γνωρίζουμε να επιλύσουμε ένα επίπεδο τρίγωνο (Επίλυση ενός τριγώνου, επίπεδου ή σφαιρικού, λέγεται ο υπολογισμός των βιοκειμένων του, όταν δίδονται ορισμένα από αυτά).

2.2. ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟ.

Ορθογώνιο επίπεδο τρίγωνο λέγεται εκείνο το οποίο έχει μία γωνία ορθή. Συμβολίζουμε με α, β, γ τις πλευρές του και με A, B, Γ τις γωνίες του. (Συνήθίζεται να θεωρείται ορθή η γωνία A).

2.2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΑΒΓ.



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, εάν A είναι η ορθή του γωνία, τότε α είναι η υποπείνουσα και ισχύει το θεώρημα του Πυθαγόρα:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί (μίκρονο, συνμίκρονο, εφαπομένη και συνεφαπομένη) μιας οξείας γωνίας B ορίζονται ως εξής:

$$\mu\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{μίκρος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μίκρος υποκείμενης}}$$

$$\text{συν} B = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{μίκρος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}{\text{μίκρος υποκείμενης}}$$

$$\text{εφ} B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{μίκρος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μίκρος προσκείμενης καθ. πλευράς}}$$

$$\text{σφ} B = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{μίκρος προσκείμενης καθ. πλευράς}}{\text{μίκρος απέναντι κάθετης πλευράς}}$$

Ορίζονται επίσης η τέμνουσα και η συντέμνουσα της γωνίας B ως εξής:

$$\tau\epsilon\mu B = \frac{1}{\text{συν} B} = \frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu B = \frac{1}{\mu\mu B} = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

2.2.2. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ B ΚΑΙ Γ .

Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$, οι γωνίες B και Γ είναι συμπληρωματικές, άρα θα ισχύει:

$$\mu\mu B = \text{συν} \Gamma$$

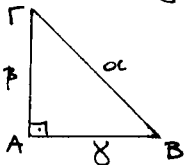
$$\text{συν} B = \mu\mu \Gamma$$

$$\text{εφ} B = \text{σφ} \Gamma$$

$$\text{σφ} B = \text{εφ} \Gamma$$

Εφαρμογές:

α'. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45° .



Θεωρούμε το ισοσκελές ορθογ. τρίγωνο $AB\Gamma$.

Τούτο θα έχει: $B = \Gamma = 45^\circ$ και $\beta = \gamma$. Άρα

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{2\beta^2} = \beta\sqrt{2}$$

$$\mu\mu B = \mu\mu 45^\circ = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left\| \quad \text{εφ} B = \text{εφ} 45^\circ = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\beta} = 1 \right.$$

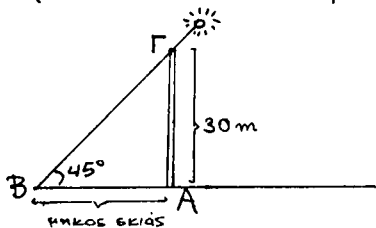
$$\text{συν} B = \text{συν} 45^\circ = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left\| \quad \text{σφ} B = \text{σφ} 45^\circ = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1 \right.$$

κ) Να υπολογισθούν οι εριχωνομετρικοί αριθμοί των χωνιών 30° και 60°

Θεωρώντας όπως και πάλι πάνω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με χωνία $\beta = 30^\circ$, θα έχουμε χιά ενν Γ χωνία του, $\Gamma = 60^\circ$ και εριχωνομετρικοί όπως και προηγουμένως μπορούμε να πάρουμε τον παρακάτω πίνακα:

Γωνία α	$\eta\mu\alpha$	$\epsilon\upsilon\sigma\alpha$	$\epsilon\phi\alpha$	$\epsilon\theta\alpha$	τεμ α	ερεμ α
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{5}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$

γ) Όταν ο ήλιος φρίκεται 45° πάνω από τον οριζοντα, ποιά είναι το μήκος της εκιάς που ρίχνει ένα κείριο 30 μέτρων;

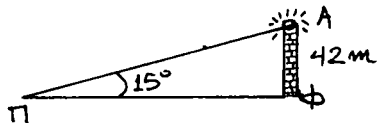


Το μήκος της εκιάς θα είναι το AB .

$$\text{Θά έχουμε: } \epsilon\phi\beta = \frac{A\Gamma}{AB} \Rightarrow$$

$$AB = \frac{A\Gamma}{\epsilon\phi\beta} = \frac{30}{1} = 30 \text{ m.}$$

δ) Ένας βάρος έχει ύψος 42 m από την επιφάνεια της θάλασσας. Από ένα πλοίο υπολογίζουν την κατακόρυφη χωνία της κορυφής του βάρου, ίση με 15° . Σε τι απόσταση από τον βάρο φρίκεται το πλοίο;



$$\text{Θά έχουμε } \epsilon\phi 15^\circ = \frac{42}{\Pi\Phi} \Rightarrow$$

$$\Pi\Phi = \frac{42}{\epsilon\phi 15^\circ} = \frac{42}{0,26795} = 156,7 \text{ m.}$$

2.3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

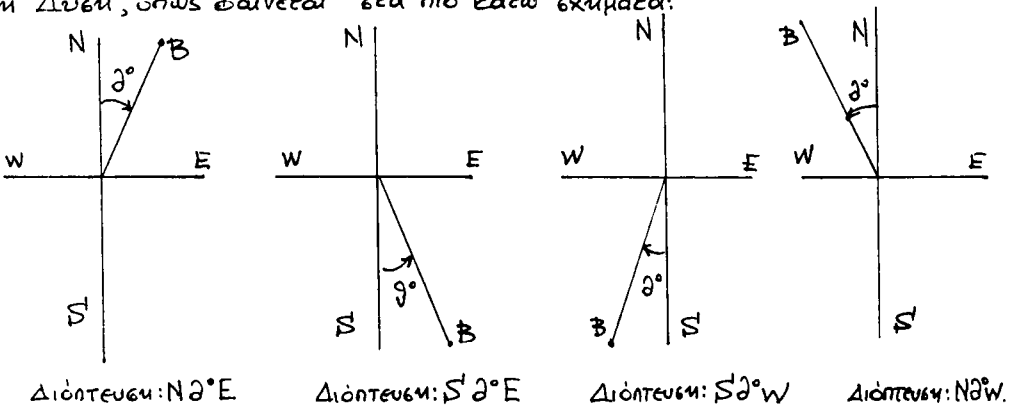
ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΣΤΗΝ ΝΑΥΤΙΛΙΑ.

2.3.1 ΔΙΟΠΤΕΥΣΕΙΣ

Διόπτευση ενός σημείου Β από ένα σημείο Α:

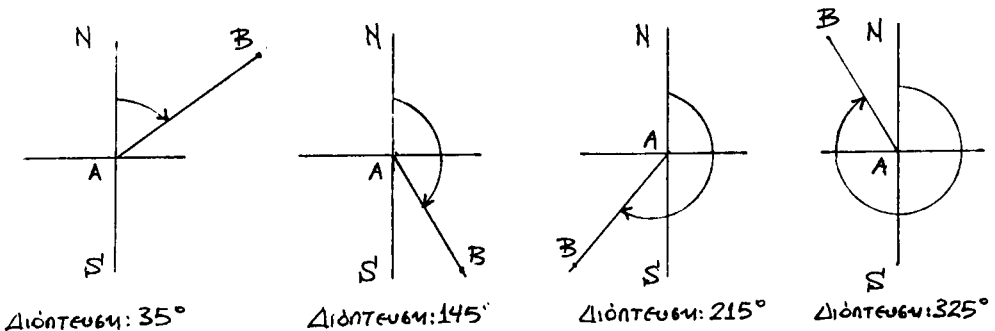
Ονομάζουμε (τεταραδοκυκλική) διόπτευση ενός σημείου Β από ένα σημείο Α στο οριζόντιο επίπεδο, την γωνία που εκμαρτυρείται από την κεντρική που αχθεί από το Α στο Β, με την ευθεία που έχει διεύθυνση Βορράς-Νότος που διέρχεται από το Α.

Η διόπτευση λοιπόν ορίζεται με αρχή την ευθεία (που διεύθυνεται προς) Βορρά ή Νότο και τέλος (την διεύθυνση προς) την Ανατολή ή Δύση, όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα:



Σημείωση:

Πολλές φορές (κυρίως στην Αεροναυτιλία) χρησιμοποιείται και η ολοκυκλική διόπτευση όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



2.3.2. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΕΩΣ (Navigation triangle)

Τρίγωνο πλεύσεως ονομάζεται ένα επίπεδο προσανατολισμένο τρίγωνο $\triangle BEA$. Η κορυφή του E είναι το σημείο Εκκινήσεως, η δε κορυφή A το σημείο Αφίξεως.

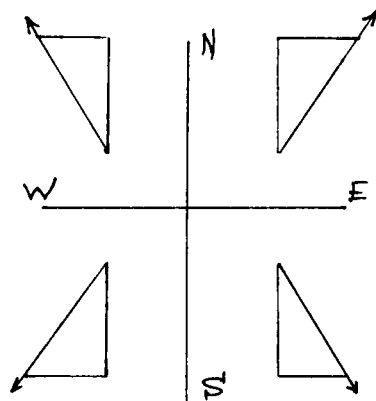
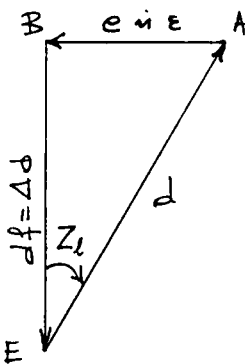
Οι πλευρές του είναι: Η κάθετος πλευρά \vec{BE} που έχει την διεύθυνση Βορράς-Νότος, η οποία ονομάζεται διαφορά πλάτους και συμβολίζεται $(\vec{BE}) = d \downarrow = \Delta\phi$.

Η κάθετος πλευρά \vec{AB} που ονομάζεται αποχώρηση και συμβολίζεται $(\vec{AB}) = e$ (ή E).

Η υποκείμενη \vec{EA} που ονομάζεται διάστημα (distance) και συμβολίζεται $(\vec{EA}) = d$.

Από τις γωνίες, η πιο ενδιαφέρουσα είναι η \hat{BEA} που ονομάζεται αληθής πορεία (ηλέυση) και συμβολίζεται $\hat{BEA} = Z_l$

Το τρίγωνο πλεύσεως έχει εφαρμογή στον λοξοδρομικό πλού.



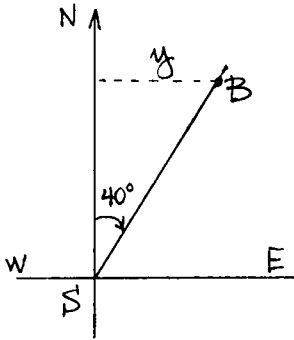
Παραδείγματα:

1. Ένα πλοίο μετατοπίζεται κατά την διεύθυνση $N 40^\circ E$ και ταξιδεύει επί 3 ώρες με ταχύτητα 20 κίλια/ώρα. Κατά πόσο μετατοπίστηκε κατά τον Βορρά και κατά πόσο κατά την Ανατολή;

Λύση

Έστω ότι το πλοίο ανακωρεί από το σημείο A . Άρουμε την ευθεία AD που σχηματίζει γωνία 40° με την διεύθυνση $N-S$.

Εντός 3 ωρών το πλοίο θα έχει διανύσει το διάστημα:



$$AB = v \cdot t \Rightarrow$$

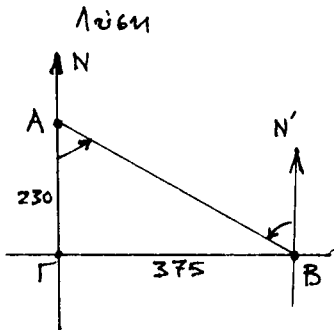
$$AB = 20 \cdot 3 \Rightarrow AB = 60 \text{ μίλια.}$$

Εκ του Β φέρουμε ευθ ΒΓ κάθετα εσω ευθεία Ν-Σ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα έχουμε:

$$AG = AB \sin A = AB \sin 40^\circ = 60 \cdot 0,76604 = 45,96 \text{ μίλια.}$$

$$BG = AB \cos A = AB \cos 40^\circ = 60 \cdot 0,76604 = 38,57 \text{ μίλια.}$$

2. Τρία πλοία είναι τοποθετημένα ως εξής: Το Α βρίσκεται 230 μίλια κατ'ευθείαν προς Βορράν του Γ και το Β 375 μίλια κατ'ευθείαν προς Ανατολώς του Γ. Ποια είναι η διόπτυσή: α') του Β από το Α β') του Α από το Β;



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

α') Η διόπτυσή του Β από το Α είναι η γωνία ΓΑΒ και προκύπτει από την σχέση:

$$\epsilon\phi \Gamma AB = \frac{375}{230} = 1,63043 \Rightarrow \hat{\Gamma AB} = 58^\circ 28,7'$$

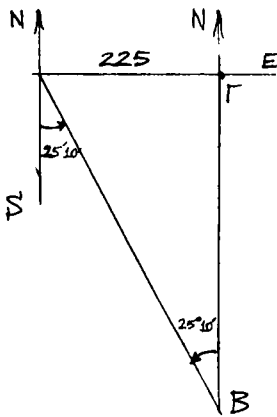
Άρα η ζητούμενη διόπτυσή είναι
 $\text{S } 58^\circ 28,7' \text{ E.}$

β') Η διόπτυσή του Α από το Β είναι η γωνία Ν'ΒΑ ίση με ΓΑΒ. Άρα η διόπτυσή εδώ είναι $\text{N } 58^\circ 28,7' \text{ W.}$

3. Τρία πλοία είναι τοποθετημένα ως εξής: Το Α βρίσκεται 225 μίλια δυτικά του Γ, ενώ το Β βρίσκεται Νότια του Γ και διοπτύεται από το Α, $\text{S } 25^\circ 10' \text{ E.}$ α') Σε ποιά απόσταση από το Β βρίσκεται το Α; β') Σε ποιά απόσταση από το Γ βρίσκεται το Β; γ') Ποια είναι η διόπτυσή του Α από το Β;

Λύση

α') Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ έχουμε:



$$\mu\phi B = \frac{A\Gamma}{AB} \Rightarrow AB = \frac{A\Gamma}{\mu\phi B} = \frac{225}{0,42525} = 529,14.$$

$$\beta') \epsilon\phi B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow$$

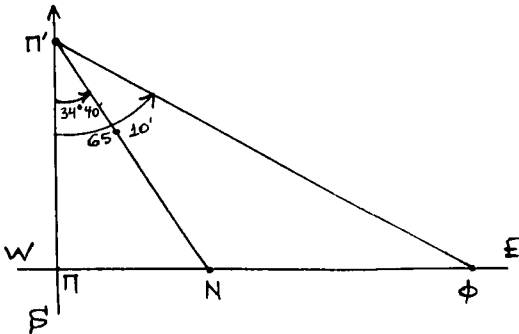
$$B\Gamma = \frac{A\Gamma}{\epsilon\phi B} = \frac{225}{0,46985} = 478,87 \text{ μίλια}$$

γ') Επειδή $\hat{B} = \hat{S}AB$ και ζητούμενη διε-
πτευση θα είναι $N 25^\circ 10' W$.

4. Από ένα πλοίο που κατευθύνεται προς Βορράν με ταχύτητα 16,5 μιλ/ώρα παρατηρούμε κατ'ευθείαν προς Ανατολώς του ένα ναυάγιο και πιο πέρα ένα φάρο. Μια ώρα αργότερα το ναυάγιο και ο φάρος διοπτρεύονται $S 34^\circ 40' E$ και $S 65^\circ 10' E$ αντίστοιχα.

Να βρεθεί η απόσταση του ναυαγίου από τον φάρο.

Λύση



Στο σχήμα φαίνεται το πλοίο Π, το ναυάγιο Ν και ο φάρος Φ καθώς βρίσκονται ευθυγραμμισμένα κατά την κατεύθυνση W-E.

Μια ώρα αργότερα το πλοίο βρίσκεται στο σημείο Π' που απέχει από το Π 16,5 μίλια.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΠ'Ν έχουμε:

$$\epsilon\phi \Pi\Pi'N = \frac{\Pi N}{\Pi\Pi'} \Rightarrow \Pi N = \Pi\Pi' \cdot \epsilon\phi \Pi\Pi'N \Rightarrow$$

$$\Pi N = 16,5 \epsilon\phi(34^\circ 40') = 16,5 \cdot 0,69157 \Rightarrow \Pi N = 11,41 \quad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΠ'Φ έχουμε:

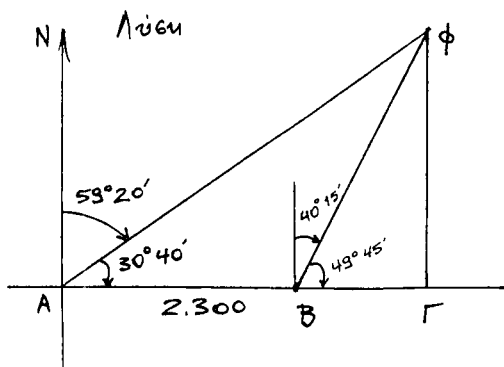
$$\epsilon\phi \Pi\Pi'\Phi = \frac{\Pi\Phi}{\Pi\Pi'} \Rightarrow \Pi\Phi = \Pi\Pi' \cdot \epsilon\phi \Pi\Pi'\Phi \Rightarrow \Pi\Phi = 16,5 \cdot 2,16090 = 35,65 \quad (2)$$

$$\text{Εκ των (1) και (2) έχουμε: } N\Phi = \Pi\Phi - \Pi N = 35,65 - 11,41 \Rightarrow$$

$$N\Phi = 24,24 \text{ μίλια.}$$

5. Ένα πλοίο κατευθύνεται προς Ανατολώς, όταν παρατηρείται

μία φωτιά σε διόπτρευση $N 59^{\circ} 20' E$. Αφού το πλοίο διαγύσει 2.300 μέτρα, η φωτιά διοπτρεύεται $N 40^{\circ} 15' E$. Εάν το πλοίο συνεχίσει την πορεία του, σε ποιά θέση η απόστασή του από την φωτιά θα είναι ελάχιστη και πόση είναι η ελάχιστη αυτή απόσταση;



Έστω Α η θέση του πλοίου κατά την πρώτη διόπτρευση, Β η θέση του κατά την δεύτερη διόπτρευση και Γ η θέση του κίνησης που η απόστασή του από το πλοίο γίνεται ελάχιστη (τότε βεβαίως η γωνία Γείναι ορθή).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΦ έχουμε:

$$ΑΓ = ΓΦ \cdot \epsilon\phi(30^{\circ} 40') \quad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΦ έχουμε:

$$ΒΓ = ΓΦ \cdot \epsilon\phi(49^{\circ} 45') \quad (2)$$

$$\text{και επειδή } ΑΒ = ΑΓ - ΒΓ \quad (3)$$

εκ των (1), (2), (3) συνεπάγεται:

$$ΑΒ = ΓΦ \cdot \epsilon\phi(30^{\circ} 40') - ΓΦ \cdot \epsilon\phi(49^{\circ} 45')$$

$$\Rightarrow 2.300 = ΓΦ \cdot 1,68643 - ΓΦ \cdot 0,84656$$

$$\Rightarrow 2.300 = ΓΦ (1,68643 - 0,84656)$$

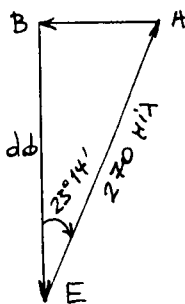
$$\Rightarrow 2.300 = 0,83987 \cdot ΓΦ$$

$$\Rightarrow \Gamma\Phi = \frac{2.300}{0,83987} \Rightarrow \boxed{\Gamma\Phi = 2.738,5 \text{ m}} \text{ και } ΒΓ = 2.310,3 \text{ m}$$

6. Ένα πλοίο ανακρωρεί από ένα λιμάνι Ε γεωγραφικού πλάτους $\varphi_E = 45^{\circ} 20' N$ και πλέει $N 23^{\circ} 14' E$ σε απόσταση 270 μιλίων. Να βρεθεί το πλάτος φ_A του σημείου αφίξεως Α και η απόκλιση ε.

Λύση

α') Εύρεση του φ_A :



Από το ορθογώνιο τρίγωνο πλευσών ΕΑΒ έχουμε: $d\phi = 270 \cdot \sin(23^\circ 14')$

$$\Rightarrow d\phi = 270 \cdot 0,31891$$

$$\Rightarrow d\phi = 248,1 \text{ κιλ} = 248,1' = 4^\circ 8,1' \text{ του}$$

μεσημρηίνου της χής.

Το πλάτος του Β ίσούται με το πλάτος του Α,

δηλαδή $\phi_B = \phi_A$.

$$\text{Αλλά } \phi_B = \phi_E + d\phi \Rightarrow \phi_B = (45^\circ 20') + (4^\circ 8,1') = 49^\circ 28,1'$$

Άρα και $\phi_A = 49^\circ 28,1' \text{ N}$.

β') Εύρεση αποχωρήσεως e :

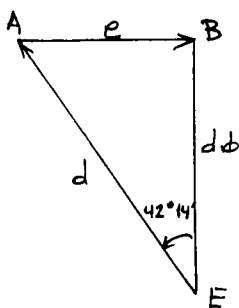
$$e = 270 \cdot \cos(23^\circ 14')$$

$$\Rightarrow e = 270 \cdot 0,39448$$

$$\Rightarrow e = 106,51.$$

7. Ένα πλοίο απέπλευσε από ένα λιμάνι Ε γεωγρ. πλάτους $\phi_E = 24^\circ 21' \text{ S}$. με πορεία $Z_f = \text{N } 42^\circ 14' \text{ W}$ και έφθασε σε ένα λιμάνι Α γεωγραφικού πλάτους $\phi_A = 6^\circ 12' \text{ N}$. Να υπολογισθεί η διανυθείσα απόσταση d (διάγραμμα) και η αποχώρηση e .

Λύση



α') Υπολογισμός d :

Έστω ΕΑΒ το τρίγωνο πλευσών.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \phi_B = \phi_A \text{ και } d\phi &= (24^\circ 21') + (6^\circ 12') = \\ &= 30^\circ 33' = 1800' + 33' = 1833' = 1.833 \text{ κίλια.} \end{aligned}$$

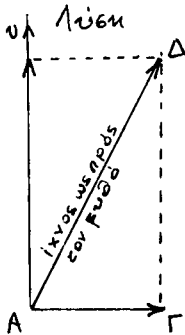
$$\text{Συνεπώς } d = \frac{1833}{\sin(42^\circ 14')} = \frac{1833}{0,74041} = 2.475,66 \text{ κίλια.}$$

β') Υπολογισμός e :

$$e = d \cdot \cos(42^\circ 14') \Rightarrow e = 1833 \cdot 0,90781 \Rightarrow e = 1.664 \text{ κίλια.}$$

8. Ένα πλοίο πλέει προς Βορρά με ταχύτητα 14 κόμβων, ενώ υπόκειται σε ρεύμα ανατολικής διεύθυνσεως και ταχύτητας 3 κόμβων.

Να φρεθεί η διεύθυνση του ίχνους του πλοίου ως προς τον βορρά και η πραγματική του ταχύτητα.



Εάν δεν είχαμε την επίδραση του ρεύματος, το πλοίο σε μία ώρα θα διήνυε 14 μίλια προς Βορρά.

Εάν, επίσης, ενερχόσε σε αυτό μόνο το ρεύμα, σε μία ώρα θα διήνυε 3 μίλια προς Ανατολάς. Επομένως το πλοίο κινείται υπό την επενέργεια δύο δυνάμεων (μηχανικών και ρεύματος) άρα θα διευ-

θύνεται ως προς τον βορρά κατά την συνισταμένη τους δηλαδή την ΑΔ.

$$\text{Έχουμε: } \epsilon\phi \text{ } \widehat{BAD} = \frac{3}{4} = 0,21429$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 12^\circ 5,7'$$

$$AD = \frac{AB}{\epsilon\phi(12^\circ 5,7')} = \frac{14}{0,27780} = 14,32 \text{ μίλια}$$

Άρα πραγματική ταχύτητα πλοίου, $u = 14,32$ κόμβοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

9. Ένα πλοίο διανύει κατά την διεύθυνση $N 28^\circ 14,6' E$ μια απόσταση 55,375 μιλίων και στην συνέχεια κατά την κατεύθυνση $N 61^\circ 45,4' W$ μια απόσταση 94,625 μιλίων. Ποιά είναι η απόστασή του και η διόπτυσή του από το σημείο ανακωμίσεώς του;

10. Ένα αεμόπλοιο καθώς πλέει προς Ανατολάς διοπτύει ένα φάρο προς Ν (Βορρά) και λαμβάνει γωνιακό ύψος αετού $24^\circ 31'$. Μετά από πλοίο 210 m διοπτύει τον φάρο $N 39^\circ 40' W$. Να φρεθεί το ύψος του φάρου.

11. Από ένα λιμάνι αναχωρούν ευχρόνως δύο αεμόπλοια, με πορείες το ένα προς Ν (Βορρά) και το άλλο προς W.

Μετά μία ώρα το δεύτερο διοπτύει το πρώτο $N 36^\circ 15' E$. Εάν το άθροισμα των ταχυτήτων είναι 28 μίλια, να φρεθεί η ταχύτητα του κάθε αεμοπλοίου.

2.4. ΤΟ ΤΥΧΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Τυχόν επίπεδο τρίγωνο λέγεται εκείνο που δεν έχει καμία ορθή γωνία.

Συμβολίζουμε με αυτό με α, β, γ τις πλευρές του και A, B, Γ τις γωνίες του.

Για να επιλυθεί ένα τυχόν τρίγωνο, αρκεί να μας δοθούν τρία στοιχεία του (εκ των οποίων το ένα οπωσδήποτε γραμμικό).

Υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις επίλυσης ενός τυχόντος επιπέδου τριγώνου :

Περίπτωση I: Δίδονται μία πλευρά και δύο γωνίες.

» II: Δίδονται δύο πλευρές και η περιεχομένη γωνία.

» III: Δίδονται τρεις πλευρές.

» IV: Δίδονται δύο πλευρές και η γωνία η απέναντι σε μία από αυτές.

Οι κυριώτεροι τύποι που χρησιμοποιούνται στις επιλύσεις των τυχόντων επιπέδων τριγώνων είναι:

1. Ο νόμος των ημιτόνων (από επίπεδο):
$$\frac{\alpha}{\mu\mu A} = \frac{\beta}{\mu\mu B} = \frac{\gamma}{\mu\mu \Gamma}$$

2. Οι τύποι των ημιημιτόνων γωνιών:
$$\mu\mu\pi A = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{\beta\gamma} \quad (\text{κυκλικά})$$

[Εδώ υπενθυμίζουμε ότι $\mu\mu\pi\omega = \mu\mu^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \epsilon\omega\omega}{2}$. (βλ. Σφαίρική Τριγωνομετρία, Χρ. Πέππα, εκδόσεις Εδρενίδου)].

3. Οι τύποι των εφαπτομένων:
$$\epsilon\beta \frac{\beta - \Gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \epsilon\beta \frac{A}{2} \quad (\text{κυκλικά}).$$

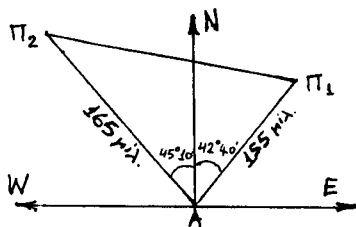
Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τυποποιημένες μορφές των τεσσάρων περιπτώσεων επίλυσης ενός τυχόντος επιπέδου τριγώνου και τους τύπους που πρέπει να χρησιμοποιούμε σε κάθε μία περίπτωση με τα δεδομένα στοιχεία. Έστω καθόλου ο πίνακας αυτός πάρα πολύ χρήσιμος για αρκετές εφαρμογές λύσεων εις επίπεδου τριγωνομετρίας στην Ναυσιπλοΐα.

	1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση	4η περίπτωση												
Δ	$\hat{a}, \hat{A}, \hat{B}$	Δύο πλευρές και μια αντικειμένη γωνία: α, β, \hat{A}		α, β, γ												
Ζ	$\hat{\Gamma} = 180 - (\hat{A} + \hat{B})$ $\frac{\beta}{\eta\mu\hat{\Gamma}} = \frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}$ $\beta = \frac{\alpha\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\hat{A}}$ και $\beta = \alpha\eta\mu\beta\sigma\tau\epsilon\mu\hat{A}$ $\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} = \frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}$ $\gamma = \alpha\eta\mu\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\hat{A}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>2 λύσεις</th> <th>1 λύση</th> <th>καμία</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\alpha = 105,35$</td> <td>$\alpha = 536\mu$</td> <td>$\alpha = 37,24$</td> </tr> <tr> <td>$\beta = 110,72$</td> <td>$\beta = 352\mu$</td> <td>$\beta = 50,68$</td> </tr> <tr> <td>$\hat{\Lambda} = 53,53^\circ, 84$</td> <td>$\hat{\Lambda} = 71^\circ 15$</td> <td>$\hat{\Lambda} = 73^\circ 54,3$</td> </tr> </tbody> </table> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;">Χρησιμοποιούμε Νόμο ημιτόνων</div>	2 λύσεις	1 λύση	καμία	$\alpha = 105,35$	$\alpha = 536\mu$	$\alpha = 37,24$	$\beta = 110,72$	$\beta = 352\mu$	$\beta = 50,68$	$\hat{\Lambda} = 53,53^\circ, 84$	$\hat{\Lambda} = 71^\circ 15$	$\hat{\Lambda} = 73^\circ 54,3$	Μπορούμε με νόμο συνημιτόνων αλλά: μειονέκτημα: Τα αθροίσματα δεν λογαριθμούνται. Γι' αυτό: Ημιπαρμύτονα.	Τα $\hat{B} - \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma}$ είναι γνωστά διότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180 - \hat{A}$ και $\epsilon\phi \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \cdot \sigma\phi \frac{\hat{A}}{2}$
2 λύσεις	1 λύση	καμία														
$\alpha = 105,35$	$\alpha = 536\mu$	$\alpha = 37,24$														
$\beta = 110,72$	$\beta = 352\mu$	$\beta = 50,68$														
$\hat{\Lambda} = 53,53^\circ, 84$	$\hat{\Lambda} = 71^\circ 15$	$\hat{\Lambda} = 73^\circ 54,3$														

2.4.1. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΝΑΥΤΙΛΙΑ.

12. Δύο πλοία είναι εφοδιασμένα με όργανα ραδιομεταδόσεως, εμβελείας 200 μιλίων. Το ένα πλοίο βρίσκεται 155 μίλια $N 42^\circ 40' E$ και το άλλο 165 μίλια $N 45^\circ 10' W$ από ένα σημείο Α ευς ακτής. Μπορούν τα δύο πλοία να επικοινωνήσουν απ' ευθείας μεταξύ τους;

Λύση



Έστω ότι Π_1 είναι η θέση του ενός πλοίου και Π_2 του άλλου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σχηματιζόμενο τρίγωνο γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχομένη γωνία. Άρα είμαστε στην 4^η

περίπτωση επίλυσης τυχόντος επιπέδου τριγώνου. Θέλουμε να υπολογίσουμε την $\Pi_1\Pi_2$ για να πληροφορηθούμε από το μήκος της αν τα δύο πλοία μπορούν να επικοινωνήσουν απ' ευθείας μεταξύ τους.

Υπολογίζουμε κατ' αρχήν τις γωνίες Π_1 και Π_2 εκ του αθροίσματος και της διαφοράς τους. Το αθροισμά τους είναι:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 180^\circ - (87^\circ 50') \Rightarrow$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 42^\circ 40' \quad (1)$$

Η διαφορά τους υπολογίζεται εκ του τύπου:

$$\epsilon\phi \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = \frac{165 - 155}{165 + 155} \cdot \epsilon\phi \frac{87^\circ 50'}{2} \Rightarrow$$

$$\epsilon\phi \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = \frac{10}{320} \cdot \epsilon\phi (43^\circ 55') \Rightarrow$$

$$\epsilon\phi \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = 0,03125 \cdot \epsilon\phi (43^\circ 55'). \text{ Λογαριθμίζουμε:}$$

$$\log \epsilon\phi \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = \log 0,03125 + \log \epsilon\phi (43^\circ 55'). \Rightarrow$$

$$\log \epsilon\phi \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = -1,50515 + 0,01643 \Rightarrow$$

$$\log \epsilon\phi \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = -1,48872 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = 1^\circ 51,3' \Rightarrow$$

$$\pi_1 - \pi_2 = 3^\circ 43' \quad (2)$$

Εκ των (1) και (2) συνεπάγεται:

$$\pi_1 = 47^\circ 56,5' \quad \text{και} \quad \pi_2 = 44^\circ 13,5'$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον Νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{\pi_1 \pi_2}{\eta\mu (87^\circ 50')} = \frac{165}{\eta\mu (47^\circ 56,5')} \Rightarrow$$

$$\pi_1 \pi_2 = 165 \cdot \eta\mu (87^\circ 50') \cdot \csc (47^\circ 56,5') \Rightarrow$$

$$\log \pi_1 \pi_2 = \log 165 + \log \eta\mu (87^\circ 50') + \log \csc (47^\circ 56,5') \Rightarrow$$

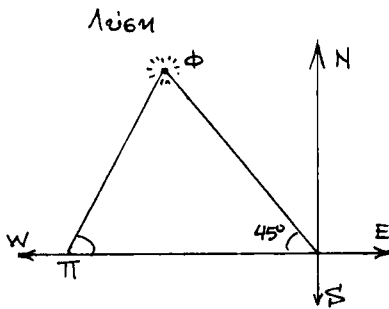
$$\log \pi_1 \pi_2 = 2,21748 + (9,99969 - 10) + 0,12933 \Rightarrow$$

$$\log \pi_1 \pi_2 = 12,34650 - 10 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \pi_2 = 222 \text{ μίλια.}$$

Συμπέρασμα: Τα δύο πλοία δεν μπορούν να επικοινωνήσουν απ' ευθείας μεταξύ τους.

13. Ένας φάρος βρίσκεται 10 μίλια βορειοδυτικά από μια αποθήκη παραλίας (dock). Ένα πλοίο εγκαταλείπει το dock στις 9 το πρωί και κατευθύνεται Δυτικά με ταχύτητα 12 μίλια/ώρα. Τι ώρα θα βρίσκεται σε απόσταση 8 μιλίων από τον φάρο;



Εφαρμόζοντας τον νόμο των ημιτόνων
υπολογίζουμε κατ'αρχήν την γωνία Π :

$$\frac{\Pi \Phi}{\mu\kappa 45^\circ} = \frac{10}{\mu\kappa \Pi} \Rightarrow \frac{8}{0,70711} = \frac{10}{\mu\kappa \Pi}$$

$$\Rightarrow \mu\kappa \Pi = 0,88388 \Rightarrow \Pi = 62^\circ 6,87'$$

Η γωνία Φ επομένως θα είναι:

$$\Phi = 180^\circ - [(62^\circ 6,87') + 45] \Rightarrow$$

$$\Phi = 72^\circ 54,13'$$

Εφαρμόζουμε πάλι τον νόμο των ημιτόνων για να υπολογίσουμε την πλευρά $\Pi\Lambda$:

$$\frac{8}{\mu\kappa 45^\circ} = \frac{\Pi\Lambda}{\mu\kappa(72^\circ 54,13')} \Rightarrow \frac{8}{0,70711} = \frac{\Pi\Lambda}{0,95580} \Rightarrow \Pi\Lambda = 10,8 \text{ μίλια.}$$

Άρα όταν το πλοίο θα απέχει από τον φάρο 8 μίλια θα έχει διανύσει 10,8 μίλια. Από τον τύπο $v = \frac{s}{t}$ βρίσκουμε τον χρόνο t που χρειάζεται για να διατρέξει την απόσταση αυτή με την ταχύτητα των 12 μιλ/ώρα: $t = \frac{s}{v} = \frac{10,8}{12} = 0,9 \text{ h} = 54 \text{ min.}$

Συνεπώς το πλοίο θα φτάσει σε απόσταση 8 μιλίων από τον φάρο στις 9 h 54 min το πρωί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

14. Ένα πλοίο καθώς πλέει Ν 70° Ε ανιχνεύεται ένα βύθ σε διόπτρευση Ν 36° Ε. Όταν το πλοίο έχει προχωρήσει 6,5 μίλια επί της ίδιας πορείας, η διόπτρευση του βυθός ήταν Ν 49° W. Ποιά ήταν η απόσταση του βυθός από το πλοίο κατά την πρώτη και κατά την δεύτερη διόπτρευση;

15. Ένα σμηκίο επί της ξηράς απέχει από ένα πλοίο 6,7 μίλια και διοπτεύεται αν' αερό Ν $49^\circ 20'$ Ε. Το πλοίο κατευθύνεται προς Ανατολώς και μετά 1,25 ώρες το σμηκίο απέχει 8 μίλια. Ποιά είναι η ταχύτητα του πλοίου και η διόπτρευση του σμηκίου από την δεύτερη

θέσει του πλοίου;

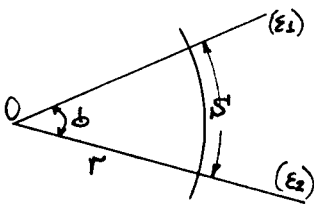
16 Ένας φάρος διοπτρεύεται $N 15^\circ W$ από ένα πλοίο που απέχει απ' αυτόν 5 μίλια. Το πλοίο πλέει Βόρειο-Δυτικά και μετά από ταξίδι 8 μιλίων ο φάρος απέχει απ' αυτό 7 μίλια. Να βρεθεί η διεύθυνση του φάρου ενώ δεύτερη θέση του πλοίου.

17. Ένα πλοίο πλέει προς S με ταχύτητα 13 mil/h και διοπτρεύει ένα φάρο $N 57^\circ E$. Μετά από πλοή 1h και 15min διοπτρεύει τον ίδιο φάρο $N 40^\circ E$. Να υπολογισθούν οι αποστάσεις του πλοίου από τον φάρο κατά τις δύο παρατηρήσεις.

2.5. ΜΙΚΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ.

Η θεωρία των μικρών γωνιών και οι μέθοδοι υπολογισμού αυτών καθώς και των τριγωνομετρικών τους αριθμών, έχουν τα τελευταία χρόνια εκτεταμένα εφαρμοσθεί, διότι οι πάρα πάνω υπολογισμοί γίνονται τώρα με την χρήση των επιστημονικών υπολογιστών τέτοιας με απόλυτη ακρίβεια.

Δίνουμε πάντως εδώ ορισμένα θεωρήματα για τις μικρές γωνίες, υπενθυμίζοντας κατ' αρχήν την έννοια του ορισμού της γωνίας γενικά και της μονάδας μετρήσεώς της.



καλούμε γωνία ϕ το ημικύκλιο του μήκους s του τόξου που αποκόπτεται από δύο ευθείες τεμνόμενες (E_1) και (E_2) στο κέντρο O , όταν το τόξο αυτό ανήκει σε περιφέρεια κέντρου O και ακτίνας r ,

διά του μήκους r της ακτίνας αυτής. Δηλαδή $\phi = \frac{s}{r}$.

Η μονάδα μετρήσεως της γωνίας χρησιμοποιείται το 1 ακκίνιο (1 rad)

Το ακκίνιο ορίζεται σαν εκείνη η επίκεντρη γωνία που σε κύκλο ακτίνας r , αποκόπτει τόξο μήκους ίσου με r .

Κατά συνέπεια η γωνία σε ακκίνια, που αντιστοιχεί σε πλήρη κύκλο

βρίσκεται αν εσον τόπο $\phi = \frac{s}{r}$ θέσουμε ανεί του s , το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, που είναι $2\pi r$. Άρα $\phi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ ακτίνια $= 2 \cdot 3,14 \dots \approx \approx 6$ ακτίνια.

Μία άλλη μονάδα μερσίσεως των χωνιών είναι η μοίρα (1°) που προκύπτει αν διαιρέσουμε τον κύκλο σε 360 ίσα μέρη.

Σχέση μεσοξύ 1 ακτίνιου και 1 μοίρας:

Τα 2π ακτίνια αντιστοιχούν σε 360°

το 1 ακτίνιο αντιστοιχεί σε $\frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ$.

Η χωνία ϕ είναι καθαρός αριθμός (ηλικό ομοειδών ποσών) άρα η αριθμητική της τιμή δεν χρειάζεται να ακολουθείται από μονάδα μερσίσεως (η ονομασία r και μ ηταινεί σε ακτιδιασεολή προς την μοίρα).

Ανατέρομε τώρα μερικά βασικά θεωρήματα, χωρίς απόδειξη, που αφορούν σε μικρές χωνίες:

Θεώρημα 1^ο:

Εάν x είναι το μέτρο σε ακτίνια μιας χωνίας θετικής μικρότερης της ορθής, θα ισχύει:

$$\mu\mu x < x < εφ x.$$

Θεώρημα 2^ο:

Εάν x είναι το μέτρο σε ακτίνια μιας χωνίας, ο λόγος $\frac{x}{\mu\mu x}$ τείνει προς την μονάδα, όταν η χωνία αυτή τείνει στο μηδέν.

Όταν λοιπόν η χωνία είναι πολύ μικρή, μπορούμε να λάβουμε ανεί του ημίστονου της, το μέτρο της σε ακτίνια.

Δηλαδή μπορούμε να θέσουμε $\mu\mu x = x$.

Φυσικά μπορούμε να θέσουμε και $\epsilonφ x = x$ και η προσέγγιση θα είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο η χωνία θα είναι μικρότερη.

Δίνουμε τώρα και μερικές εφαρμογές πάνω στις μικρές χωνίες:

Εφαρμογή 1^η:

Να ηρεθούν τα $\mu\mu 10'$, $\epsilon\sigma\eta 10'$, $\epsilonφ 10'$.

Λύση:

$$\text{Επειδή } 10' = \frac{1^\circ}{6} = \frac{\pi}{180 \cdot 6} = \frac{3,14 \dots}{1080} = 0,002908 \dots$$

Εάν αρκεσθούμε στα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία, θα έχουμε $\mu\eta 10' = 0,00291$.

Για το συνημίτονο θα έχουμε: $\epsilon\upsilon\eta 10' = \sqrt{1 - \mu\eta^2 10'} = 0,999995$.
και αρκούμενοι στα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία, θα έχουμε: $\epsilon\upsilon\eta 10' = 1$.

Για την εφαπτομένη θα έχουμε:

$$\epsilon\phi 10' = \mu\eta 10' = 0,00291$$

Σημείωση: Τα ανωτέρω αποτελέσματα μας τα δίνει απευθείας ο επι-
εμπνηκός υπολογιστής τέλης, εάν τον τροφοδοτήσουμε με $10'$ και πατώντας
διαδοχικά τα κουμπιά \sin , \cos , \tan .

Εφαρμογή 2^η:

Να βρεθεί το $\epsilon\upsilon\eta$, $\mu\eta$ $\epsilon\phi$ και $\mu\eta$ $\epsilon\phi$ της γωνίας $89^\circ 45'$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \epsilon\upsilon\eta (89^\circ 45') &= \mu\eta 15' = \frac{15}{60} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,00435 = \\ &= \epsilon\phi 15' = \epsilon\phi (89^\circ 45'). \end{aligned}$$

$$\epsilon\phi (89^\circ 45') = \frac{1}{0,00435} = 229,182.$$

Εφαρμογή 3^η:



Στο εκκίμα ποτό θα είναι το λάθος
σε πόδια (feet) ανά μίλι του μ , εάν

η χορδή ελκύθην όσο το αντίστοιχο τόξο και η επίκεντρο γωνία είναι

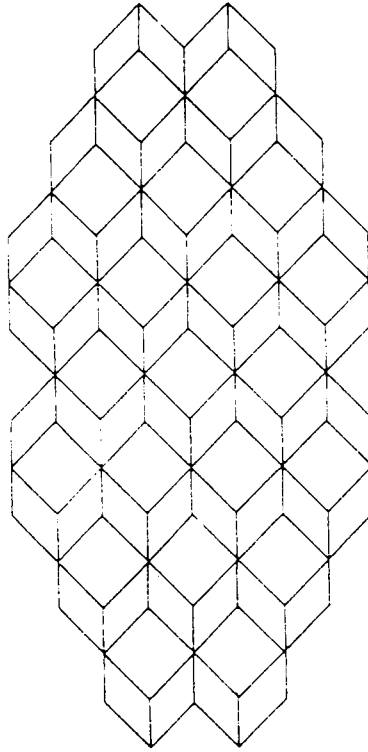
α') 1° , β') 5° , γ') 10° ;

Λύση

$$\alpha) \frac{1}{4} \text{ ft για } 1^\circ$$

$$\beta) 6\frac{1}{2} \text{ ft για } 5^\circ$$

$$\gamma) 25 \text{ ft για } 10^\circ.$$



3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1. Μονόμετρα και διανυσματικά μεχέδια

Όπως είναι γνωστό, φυσικό μεχέδιο λέγεται κάθε μεχέδιο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Η μέτρηση ενός φυσικού μεχέδιου συνίσταται στην σύγκριση αυτού με ένα άλλο ομοειδές του που το δεκάμετρο είναι μονάδα. Από την σύγκριση αυτή προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται αριθμητική τιμή του μετρούμενου μεχέδιου.

Τα φυσικά γώρα μεχέδια διαιρούνται σε μονόμετρα και σε διανυσματικά.

Μονόμετρο λέγεται το φυσικό μέγεθος που ορίζεται τελείως από την αριθμητική του τιμή και την μονάδα μετρήσεώς του.

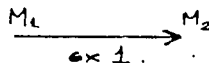
π.χ. η μάζα (10 gm), η θερμότητα (15 cal) είναι μονόμετρα μεγέθη

Διανυσματικό λέγεται το μέγεθος που ορίζεται τελείως από την αριθμητική του τιμή, την μονάδα μετρήσεώς του, αλλά ακόμη και από την διεύθυνση και την φορά του. π.χ. η δύναμη, η ταχύτητα, είναι διανυσματικά μεγέθη.

3.2. Διανύσματα

Ονομάζουμε διάνυσμα κάθε ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 που τα άκρα του M_1, M_2 λαμβάνονται με ορισμένη τάξη

Συμβολίζεται δε με $\overrightarrow{M_1M_2}$.



Το πρώτο σημείο M_1 ονομάζεται αρχή και το δεύτερο πέρας (ή τέλος) του διανύσματος M_1M_2

Πολλές φορές συμβολίζουμε τα διανύσματα με μικρά γράμματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$,

Μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{AB} ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

Μηδευικό διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα που η αρχή του και το τέλος του συμπίπτουν. Συμβολίζεται δε με $\vec{0}$.

Τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{BA} θεωρούνται ότι έχουν αντίθετη φορά και δεκόμεθα ότι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

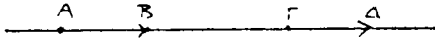
Η φορά του μηδενικού διανύσματος δεν ορίζεται ενώ το μέτρο του είναι ο αριθμός 0.

3.2.1. ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Δύο διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που κρίζονται πάνω στην ίδια ευθεία λέγονται ίσα όταν:

1. Έχουν τα ίδια μέτρα, δηλαδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

2 Έχουν την ίδια φορά

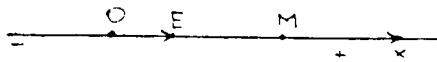


εκ. 2

3.3. Άξονας συντεταχμένων

Αν βε μία ευθεία θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο O που το ονομάζουμε αρχή και ένα διάνυσμα \vec{OE} με αρχή το O και μέτρο τήν μονάδα, τότε την ευθεία αυτή την ονομάζουμε αξονα συντεταχμένων

Το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{OE} ($|\vec{OE}| = 1$) ονομάζεται ακόμη και μονάδα μέτρησης.



εκ. 3.

Θετική φορά του άξονα λέγεται εκείνη που συμπίπτει με την φορά του μοναδιαίου διανύματος \vec{OE} και αρνητική η αντίθετή της (εκ. 3)

Συντεταχμένη του σημείου M που βρίσκεται πάνω στον άξονα με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το \vec{OE} , ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό x που τον συμβολίζουμε με (\vec{OM}) και δίνεται από την ιδιότητα $(\vec{OM}) = x = \pm \frac{|\vec{OM}|}{|\vec{OE}|}$

Το πρόσημο $+$ λαμβάνεται αν τα διανύσματα \vec{OM} και \vec{OE} έχουν την ίδια φορά και το $-$ αν τα διανύσματα \vec{OM} και \vec{OE} έχουν αντίθετη φορά.

Το σημείο M του άξονα στο οποίο αντιστοιχεί συντεταχμένη x το συμβολίζουμε με $M(x)$.

Το σημείο M έχει συντεταχμένη μηδέν αν αυτό συμπίπτει με την αρχή O .

Από τον ορισμό της συντεταχμένης ενός σημείου του άξονα συμπεραίνουμε ότι βέ κάθε σημείο αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας πραγματικός αριθμός δηλ. η συντεταχμένη του και αντίστροφα.

Έχουμε έτσι για αβήμονοβήμανση απεικόνιση του εσώλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών προς το σύνολο των σημείων του άξονα

3.3.1. Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων του ίδιου άξονα

Η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο διανυσμάτων του ίδιου άξονα δίνονται αντίστοιχα από τους παρακάτω τύπους

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{BG} &= \vec{AG} \\ \vec{AG} - \vec{BG} &= \vec{AB}.\end{aligned}\quad (1)$$

Η συντεταχμένη διανύσεως $\vec{M_1M_2}$ όπου $M_1(x_1)$ και $M_2(x_2)$ εναρβολίζεσασ με $(\vec{M_1M_2})$ και ορίζεσασ από τον τύπο

$$(\vec{M_1M_2}) = x_2 - x_1 \quad (2)$$

Τό μέτρο $|\vec{M_1M_2}|$ του διανύσεως $|\vec{M_1M_2}|$ η η απόσταςσ d μεσασύ των σημείων $M_1(x_1)$ και $M_2(x_2)$ ορίζεσασ από τωσ εκέσασ:

$$|\vec{M_1M_2}| = d = |x_2 - x_1| \quad (3)$$

3.3.2. Απλός λοχος τριών σημείων του ίδιου άξονα

Απλός λοχος τριών σημείων A, B, Γ που ριβεσασσ πάνω στον ίδιο άξονα και με τωσ τασσ A, B, Γ ονομάζεσασ ο πρσσασσασσ αρίθμσσ λ που εναρβολίζεσασ με $(\lambda B \Gamma)$ και ορίζεσασ από τωσ εκέσασ:

$$(\lambda B \Gamma) = \frac{(\vec{A\Gamma})}{(\vec{\Gamma B})} \quad (4)$$

Αν έσασσ τρία σημεία $A(x_1), B(x_2)$ και $\Gamma(x_3)$ του ίδιου άξονα τότε από τωσ (4) έσασσ

$$(\lambda B \Gamma) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \quad (5)$$

Από τον ορίσασσ του απλού λοχου τριών σημείων A, B, Γ έσασσ τωσ πρσσασσασσ

Ο λόγος $(AB\Gamma)$ είναι θετικός ή αρνητικός καθώς το Γ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του τμήματος AB

Για κάθε $\lambda \neq -1$ υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο $\Gamma(x)$ που διαιρεί το τμήμα AB στο λόγο $(AB\Gamma) = \lambda$

Αν $A(x_1)$, $B(x_2)$, $\Gamma(x)$ και $(AB\Gamma) = \lambda$ τότε από τις (4) και (5) παίρνουμε:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (6)$$

Εάν $\lambda = 1$ το σημείο $\Gamma(x)$ είναι μέσο του τμήματος AB και η συντεταχμένη x του Γ ορίζεται από τον τύπο

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (6a)$$

Παραδείγματα:

18. Να βρεθούν τα σημεία που οι συντεταχμένες τους ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$a) \frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3 \quad b) x^2 - 4 = 0$$

Λύση:

Πρέπει τις παραπάνω εξισώσεις να τις λύσουμε ως προς x για να βρούμε τις συντεταχμένες των σημείων

$$a) \frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3 \iff$$

$$14(5x-2) - 6(2x-1) = 21(3x+4) - 3 \cdot 42$$

$$\iff x = 4. \quad \text{Άρα το σημείο είναι το } A(4)$$

$$b) x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2 \quad \text{και τα σημεία είναι } B(2) \text{ και } \Gamma(-2)$$

19. Να βρεθεί η συντεταχμένη (\vec{AB}) και το μέτρο $|\vec{AB}|$ του διανύσματος \vec{AB} , όταν α) $A(2)$, $B(5)$, β) $A(-2)$, $B(4)$
 γ) $A(-5)$, $B(4)$, δ) $A(-2)$, $B(-4)$

Λύση:

Σύμφωνα με τους τύπους (2) και (3) έχουμε:

$$\alpha) (\vec{AB}) = 5-2 = 3 \quad \text{και} \quad |\vec{AB}| = |5-2| = 3$$

$$\beta) (\vec{AB}) = 4-(-2) = 6 \quad \text{και} \quad |\vec{AB}| = |4-(-2)| = 6$$

$$\gamma) (\vec{AB}) = -4-(-5) = 1 \quad \text{και} \quad |\vec{AB}| = |-4-(-5)| = 1$$

$$\delta) (\vec{AB}) = +4-(-2) = 6 \quad \text{και} \quad |\vec{AB}| = |4-(-2)| = 6$$

20. Δίνονται τα σημεία $A(-1)$, $B(5)$ και $\Gamma(3)$. Να βρεθεί ο απλός λόγος που το κάθε σημείο από αυτά διαιρεί το ευδιάχρημο τμήμα των δύο άλλων

Λύση:

Βάσει του τύπου (4), έχουμε:

$$\alpha) (\frac{A\Gamma}{B\Gamma}) = \frac{(\vec{A\Gamma})}{(\vec{B\Gamma})} = \frac{3+1}{5-3} = 2 \quad \beta) (\frac{A\Gamma B}{B\Gamma}) = \frac{(\vec{A\Gamma})}{(\vec{B\Gamma})} = \frac{3+1}{3-5} = -3$$

$$\gamma) (\frac{B\Gamma}{\Gamma A}) = \frac{(\vec{B\Gamma})}{(\vec{\Gamma A})} = \frac{3-5}{-1-3} = \frac{1}{2} \quad \delta) (\frac{\Gamma A B}{B\Gamma}) = \frac{(\vec{\Gamma A})}{(\vec{B\Gamma})} = \frac{5-3}{-1-5} = -\frac{1}{3}$$

21. Δίνονται τα σημεία $M_1(7)$ και $M_2(6)$. Να βρεθεί η τεταγμένη x του σημείου M που διαιρεί το τμήμα $M_1 M_2$ σύμφωνα με

$$\alpha) \lambda = 3 \quad \beta) \lambda = -\frac{1}{2}$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι αν $(MM_1 M_2) = \lambda$ με $M_1(x_1)$ και $M_2(x_2)$ τότε για το $M(x)$ έχουμε $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. Άρα εδώ έχουμε

$$x = \frac{7 + 6\lambda}{1 + \lambda}$$

Από αυτή τη σχέση τώρα έχουμε

$$\alpha) \lambda = 3 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{7 + 6 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{25}{4}$$

$$\beta) \lambda = -\frac{1}{2} \quad \text{άρα} \quad x = 8$$

22. Έστω $(ABP) = 2$ και $(AB\Sigma) = 4$. Αν P είναι το μέσο του τμήματος $P\Sigma$ να υπολογίσετε τον λόγο (ABT)

Λύση

Μπορούμε να πάρουμε $A(0)$ και $B(1)$. Αν θέσουμε $P(\rho)$ και $\Sigma(\sigma)$ οι εκθέσεις που μας δίνονται από την εκφώνηση μας δίνουν

$$\rho = \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{1}{1+\mu} \quad (1)$$

Επειδή το $T(\tau)$ είναι μέσο του PS , έχουμε

$$\tau = \frac{\rho + \sigma}{2} = \frac{\frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1+\mu}}{2} = \frac{\lambda + \mu + 2}{2(\lambda + 1)(\mu + 1)} \quad (2)$$

$$\text{Άρα } (ABT) = \frac{(\vec{AT})}{(\vec{TB})} = \frac{\tau - 0}{1 - \tau} = \frac{\frac{\lambda + \mu + 2}{2(\lambda + 1)(\mu + 1)}}{1 - \frac{\lambda + \mu + 2}{2(\lambda + 1)(\mu + 1)}} = \frac{\lambda + \mu + 2}{\mu + 2\lambda + 2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

23. Δίνονται τα σημεία $A(2)$, $B(7)$ και $\Gamma(4)$. Να βρείτε την συντεταγμένη του σημείου Δ αν $(AB\Delta) = -\frac{2}{3}$ και αν Δ' είναι το μέσο του τμήματος $\Gamma\Delta$, να βρείτε το λόγο $(AB\Delta')$

24. Να βρείτε την συντεταγμένη του σημείου A αν 1) $B(3)$ και $(\vec{AB}) = 5$, 2) $B(-1)$ και $(\vec{BA}) = 2$

25. Αν $(ABM) = \lambda$, να βρείτε το λόγο (ABM') , όπου M είναι συμμετρικό του σημείου M ως προς το μέσο του τμήματος AB .

26. Πάνω στο διάνυσμα \vec{AB} παίρνουμε σημείο Γ ώστε $(AB\Gamma) = \lambda \neq 1$, το σημείο Δ ώστε $(AB\Delta) = -\lambda$ και το σημείο E που είναι το μέσο του διανύσματος $\vec{\Gamma\Delta}$. 1) Να βρείτε το λόγο (ABE) . 2) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \neq \pm 1$ το σημείο E βρίσκεται έξω από το διάνυσμα \vec{AB}

27. Αν $\frac{(\vec{AP})}{(\vec{PB})} = \lambda$, $\frac{(\vec{AQ})}{(\vec{QB})} = \mu$ και $\frac{(\vec{AR})}{(\vec{RB})} = \nu$ ($\mu \neq \nu$), να βρείτε το λόγο (PQR) .

3.4. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

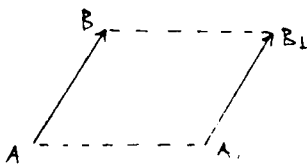
3.4.1. ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο μη μηδενικά διανύσματα \vec{AB} και $\vec{A_1B_1}$ είναι ίσα (ή ισοδύναμα) όταν:

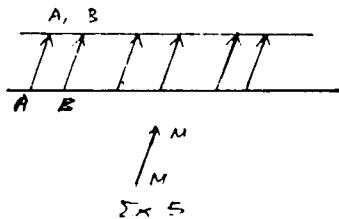
α) Έχουν ίσα μέτρα δηλ. $|\vec{AB}| = |\vec{A_1B_1}|$

β) Είναι παράλληλο (δηλαδή βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες)

γ) Έχουν την ίδια φορά.



Σχ 4



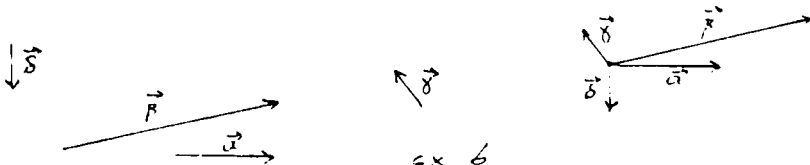
Σχ 5

Από τον ορισμό της ισότητας δύο διανυσμάτων συμπεραίνουμε ότι δύο διανύσματα διαφέρουν μόνο ως προς το σημείο εφαρμογής τους, δηλαδή το διάνυσμα $\vec{A_1B_1}$ είναι το ίδιο το διάνυσμα \vec{AB} που μεταφέρθηκε παράλληλα επί άξονα $\vec{A_1B_1}$.

Έτσι όλα τα διανύσματα που είναι ίσα, ανεξάρτητα από το σημείο εφαρμογής τους αποτελούν κλάση διανυσμάτων $\vec{MM_1} = \vec{AA_1}$.

Το σύνολο αυτό θεωρείται για καινούργια μαθηματική έννοια που ονομάζεται ελευθερο διάνυσμα και ορίζεται από κάθε ένα από τα ίσα διανύσματα που αποτελούν την συγκεκριμένη κλάση (σχ 5)

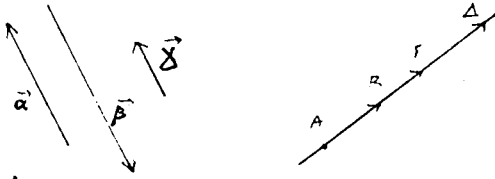
Από τον ορισμό της ισότητας συμπεραίνουμε πως οποιοσδήποτε αριθμός διανυσμάτων μπορούμε να τον μεταφέρουμε παράλληλα έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή (σχ. 6)



σχ 6

3.4.2. Συγχρημικά διανύσματα

Τα διανύσματα που είναι παράλληλα (δηλ. βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες ή στην ίδια ευθεία) ονομάζονται συγχρημικά (εκ. 7).



εκ. 7

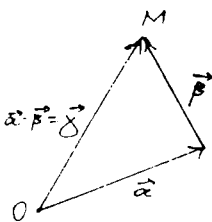
Ομόροπα ονομάζονται τα συγχρημικά διανύσματα που έχουν την ίδια φορά π.χ. τα \vec{a} και $\vec{\gamma}$ (εκ. 7).

Αντίροπα ονομάζονται τα συγχρημικά διανύσματα που έχουν αντίθετη φορά π.χ. τα \vec{a} και $\vec{\beta}$ (εκ. 7).

3.4.3. Πρόσθεση διανυσμάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αθροίση των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που κατασκευάζεται ως εξής:

Από τυχόν σημείο O (εκ. 8) καθόσουμε το διάνυσμα $\vec{OM} = \vec{a}$



εκ. 8

και με αρχή το σημείο B καθόσουμε το διάνυσμα $\vec{BM} = \vec{\beta}$

Το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{OM}$ είναι το αθροίση των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ (εάνονος τριγώνου). Γράψουμε τότε $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ (I)

Ισχύουν οι ανισώσεις:

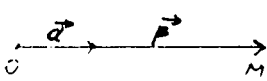
$$|\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \quad (8)$$

$$|\vec{a} + \vec{\beta}| \geq \left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| \quad (9)$$

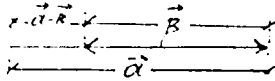
που εκφράζουν τις ιδιότητες της πλευράς \vec{OM} του τριγώνου OMB (εκ. 8)

Στην εκέση (8) η ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι ομο-

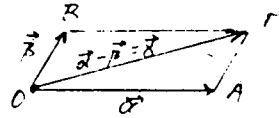
επίσης (βλ. 9), στην (9) μόνο όταν είναι ανεπίσημα (βλ. 10)



εκ. 9



εκ. 10



εκ. 11

Κανόνας παραλληλογράμμου: Όταν τα \vec{a} και \vec{b} δεν είναι συγχρονικά διανύσματα, τότε το άθροισμα $\vec{a} + \vec{b}$ μπορούμε να το ορίσουμε ως εξής: Από τυχόν σημείο O σαν αρχή (βλ. 11) κατασκευάζουμε το διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$ και το $\vec{OB} = \vec{b}$. Με πλευρές OA και OB κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $OAGB$. Το διάνυσμα τότε $\vec{OG} = \vec{\gamma}$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} (διότι $\vec{AG} = \vec{OB} = \vec{b}$ άρα $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG}$).

Άθροισμα αντιθέτων διανυσμάτων: Εκ του ορισμού του α-θροίσματος συναχόμεν ότι το άθροισμα αντιθέτων διανυσμάτων ισούται με μηδέν, δηλαδή

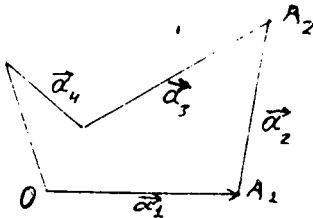
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad (\text{II})$$

Ίσχύει εδώ η αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{III})$$

34.4. Άθροισμα πολλών διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Άθροισμα πολλών διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ονομάζεται το διάνυσμα που κατασκευάζεται μέσα από βήμα διαδοχικών προσθέσεων: Στο διάνυσμα \vec{a}_1 προστίθεται το διάνυσμα \vec{a}_2 , το άθροισμα $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ προστίθεται το διάνυσμα \vec{a}_3 , κ.α.κ. Έτσι συναχεται ο εφής τρόπος κατασκευής του αθροίσματος πολλών διανυσμάτων



εκ. 12

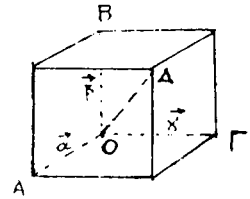
(κανόνας πολυγώνου) Από τυχόν β.η. μηδ. O κατασκευάζουμε το διάνυσμα $\vec{OA}_1 = \vec{a}_1$, από το β.η.η.

Α₁ δέσουμε το διάνυσμα $\vec{A}_1 A_2 = \vec{a}_2$ κ.λ.π. Το διάνυσμα $\vec{O A}_n$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ δηλαδή

$$\vec{O A}_n = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$$

Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + (\vec{a}_2 + \vec{a}_3)$

Αν τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μετά την μεταφορά τους σε κοινή αρχή, δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο τότε το άθροισμά τους βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλεπίπεδου (εχ. 13): $\vec{O D} = \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$



εχ. 13

Παραδείγματα:

28. Δίδεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με βάσεις ΑΔ = α και ΒΓ = β (α > β). Να κατασκευασθούν τα διανύσματα:

i) $\vec{A D} + \vec{B \Gamma}$, ii) $\vec{A D} + \vec{\Gamma B}$, iii) $\vec{A B} + \vec{\Gamma D}$. Να βρεθούν κατόπιν τα μέτρα των διανυσμάτων αυτών.

Λύση:

i) Με αρχή το Δ παίρνουμε διάνυσμα $\vec{\Delta E} = \vec{B \Gamma}$. Έχουμε

$$\vec{A D} + \vec{B \Gamma} = \vec{A D} + \vec{\Delta E} = \vec{A E}$$

Το μέτρο του $\vec{A D} + \vec{B \Gamma}$ είναι:

$$|\vec{A D} + \vec{B \Gamma}| = |\vec{A E}| = \alpha + \beta = |\vec{A D}| + |\vec{B \Gamma}|.$$

ii) Με αρχή το Δ παίρνουμε διάνυσμα $\vec{\Delta Z} = \vec{\Gamma B}$ οπότε:

$$\vec{A D} + \vec{\Gamma B} = \vec{A D} + \vec{\Delta Z} = \vec{A Z}$$

$$\text{Μέτρο: } |\vec{A D} + \vec{\Gamma B}| = |\vec{A Z}| = \alpha - \beta = |\vec{A D}| - |\vec{\Gamma B}|.$$

iii) Έχουμε $\vec{\Gamma D} = \vec{B Z}$. Άρα $\vec{A B} + \vec{\Gamma D} = \vec{A B} + \vec{B Z} = \vec{A Z}$

$$\text{Μέτρο: } |\vec{A B} + \vec{\Gamma D}| = |\vec{A Z}| = \alpha - \beta.$$

29. Δίδονται 4 σημεία στο επίπεδο Α, Β, Γ, Δ.

Να δείξει ότι: i) $\vec{A B} + \vec{\Delta A} = \vec{\Delta B}$ ii) $\vec{A B} + \vec{B \Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}$.

Λύση

Έχουμε:

$$i) \vec{AB} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{DB}$$

$$ii) \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GA} = (\vec{AB} + \vec{BG}) + \vec{GA} = \vec{AG} + \vec{GA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

30. Δίνεται το παραλληλεπίπεδο $AB\Gamma\Delta A_1 B_1 \Gamma_1 \Delta_1$. Να κρετέ το άθροισμα των διανυσμάτων: i) $\vec{AB} + \vec{BB}_1 + \vec{B}_1\Gamma_1$ ii) $\vec{GB} + \vec{B}_1 A_1 + \vec{A}_1 \Delta_1$ iii) $\vec{A}\Gamma_1 + \vec{\Delta}_1 \vec{A} + \vec{B}\vec{\Delta}_1$

Λύση

$$i) \vec{AB} + \vec{BB}_1 + \vec{B}_1\Gamma_1 = (\vec{AB} + \vec{BB}_1) + \vec{B}_1\Gamma_1 = \vec{AB}_1 + \vec{B}_1\Gamma_1 = \vec{A}\Gamma_1$$

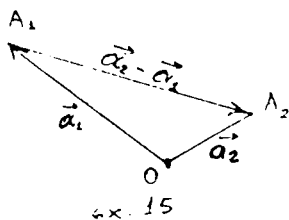
ii) Είναι $\vec{B}_1 A_1 = \vec{BA}$ διότι έχουμε παραλληλο επιπεδο. Άρα $\vec{GB} + \vec{B}_1 A_1 + \vec{A}_1 \Delta_1 = \vec{GB} + \vec{BA} + \vec{A}_1 \Delta_1 = (\vec{GB} + \vec{BA}) + \vec{A}_1 \Delta_1 = \vec{GA} + \vec{A}_1 \Delta_1 = \vec{G}\vec{\Delta}_1$

$$iii) \vec{A}\Gamma_1 + \vec{\Delta}_1 \vec{A} + \vec{B}\vec{\Delta}_1 = \vec{\Delta}_1 \vec{A} + \vec{A}\Gamma_1 + \vec{B}\vec{\Delta}_1 = (\vec{\Delta}_1 \vec{A} + \vec{A}\Gamma_1) + \vec{B}\vec{\Delta}_1 = \vec{\Delta}_1 \vec{\Gamma}_1 + \vec{B}\vec{\Delta}_1 = \vec{B}\vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_1 \vec{\Gamma}_1 = \vec{B}\vec{\Gamma}_1$$

3.4.5 Αφαίρεση διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ. Η αφαίρεση διανυσμάτων είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης. Έτσι έχουμε

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{x} \iff \vec{a} = \vec{b} + \vec{x}$$



Από τον ορισμό συναχεται οπαρα κάτω τρόπος κατασκευής της διαφοράς δύο διανυσμάτων:

Από τυχόν σημείο O (ε.χ. O) φέρουμε τα διανύσματα $\vec{OA}_1 = \vec{a}_1$, $\vec{OA}_2 = \vec{a}_2$. Το διάνυσμα $A_1 A_2$ (που καθι-

ζεται από το τέλος του αφαιρέτου προς το τέλος του μειω-
ρου) είναι η διαφορά.

$$\vec{A_1 A_2} = \vec{OA}_2 - \vec{OA}_1 \quad (10)$$

Σημείωση: Ο παραπάνω τύπος γράφεται και στη μορφή

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \quad (10')$$

και χρησιμοποιείται για την λύση ασκήσεων.

Παραδείγματα

31. Θεωρούμε σημείο O που δεν ανήκει στο επίπεδο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να βρεθούν τα διανύσματα:

$$i) \vec{OA} - \vec{OB} \quad ii) -\vec{OA} - \vec{AB} \quad iii) \vec{OA} + \vec{AB} - \vec{OG}$$

Λύση:

Έχουμε:

$$i) \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + (-\vec{OB}) = \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}$$

$$ii) -\vec{OA} - \vec{AB} = (-\vec{OA}) + (-\vec{AB}) = \vec{AO} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{AO} = \vec{BO}$$

$$iii) \vec{OA} + \vec{AB} - \vec{OG} = (\vec{OA} + \vec{AB}) - \vec{OG} = \vec{OB} - \vec{OG} = \vec{OB} + (-\vec{OG}) = \vec{OB} + \vec{GO} = \\ = \vec{GO} + \vec{OB} = \vec{GB}$$

32. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι:
 $\vec{OA} + \vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OD}$ όπου O τυχόν σημείο του χώρου

Λύση:

Έχουμε $\vec{DA} = \vec{GB}$ (το $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο)

$$\Leftrightarrow \vec{DO} + \vec{OA} = \vec{GO} + \vec{OB} \Leftrightarrow -\vec{OD} + \vec{OA} = -\vec{OG} + \vec{OB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{OA} + \vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

33. Να δείξετε ότι αν τα σημεία O, A και B δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία και $\vec{OG} = \vec{OA} - \vec{OB}$ τότε το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

$$\text{Από την } \vec{OG} = \vec{OA} - \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OG} = \vec{OA} + \vec{BO} \Leftrightarrow$$

$$\vec{OG} = \vec{BO} + \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OG} = \vec{BA} \quad \text{Από εδώ, ενοχρεάται ότι}$$

οι απέναντι πλευρές OG και BA είναι παράλληλες και έχουν ίσα μέτρα, άρα το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

3.4.6. Πολλαπλασιασμός διανύσματος επί αριθμό

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πολλαπλασιασμός διανύσματος \vec{a} επί αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$

Λέγεται το διάνυσμα που είναι ευχρημαμικό με το \vec{a} και έχει μήκος $|\lambda||\vec{a}|$. Αν $\lambda > 0$ η φορά του διανύσματος (γινομένου) θα συμπίπτει με την φορά του διανύσματος \vec{a} , ενώ αν $\lambda < 0$ τότε η φορά του θα είναι αντίθετη του \vec{a} .

Αν $\lambda = 0$ τότε το γινόμενο είναι μηδενικό διάνυσμα. Το γινόμενο διανύσματος επί αριθμό το ευθυλοζούμε με $\lambda\vec{a}$ ή $\vec{a}\lambda$ και ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$\delta') \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$\epsilon') \quad \lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu(\vec{a}) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\epsilon\tau') \quad \lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$$

$$\zeta') \quad \vec{a}(\lambda + \mu) = \vec{a}\lambda + \vec{a}\mu.$$

Επομένως το σύνολο των διανυσμάτων εφοδιασμένο με τις πράξεις "πρόθεση διανυσμάτων" και "παραπλασιασμός διανύσματος επί αριθμό", που εκπληρώνει τις ιδιότητες α' , β' , γ' , δ' , ϵ' , $\epsilon\tau'$ και ζ' αποτελεί διανυσματικό χώρο.

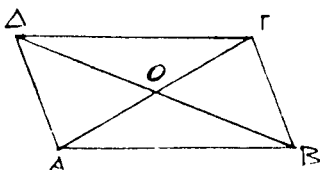
Αν το διάνυσμα \vec{a} δεν είναι μηδενικό τότε $\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ όπου $|\vec{a}^\circ| = 1$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Από την παρά πάνω σχέση έχουμε $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^\circ$.

Συνθήκη ευχρημαμικότητας δύο διανυσμάτων είναι $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ όπου $\lambda = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$ όπου το + λαμβάνεται αν τα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι ομόροπα και το - όταν είναι αντίροπα.

Παραδείγματα:

34. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κέντρου Ο. Να υπολογισθεί ο x αν: i) $\vec{AB} = x \vec{\Gamma D}$ ii) $\vec{A\Gamma} = x \vec{AO}$ iii) $\vec{OB} = x \vec{A\Gamma}$ iv) $\vec{O\Gamma} = x \vec{\Gamma D}$.

Λύση:



$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \text{Έχουμε: } \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AB} = -\vec{CD} \\ & \Leftrightarrow \vec{AB} = (-1)\vec{CD} \text{ άρα } x = -1. \\ \text{ii)} \quad & \text{Ισχύει } \vec{A\Gamma} = \vec{AO} + \vec{O\Gamma} = \vec{AO} + \vec{AO} = \end{aligned}$$

$$= 2\vec{AO} \Leftrightarrow x=2.$$

$$\text{iii)} \text{ Ισχύει } \vec{OB} = 2\vec{\Delta B} \Leftrightarrow \vec{OB} = (-2)\vec{B\Delta} \text{ άρα } x=-2$$

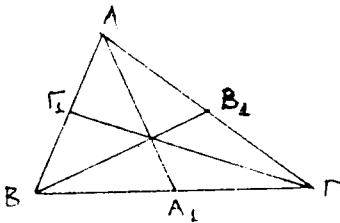
iv) Επειδή τα διανύσματα $\vec{O\Gamma}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ δεν είναι ευχρηματικά δεν υπάρχει x τέτοιο που $\vec{O\Gamma} = x\vec{\Gamma\Delta}$

35. Οι διάμετροι AA_1, BB_1 και $\Gamma\Gamma_1$ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουνται στο εσωτερικό Μ. Να υπολογισθεί ο αριθμός k αν

$$\text{i)} \vec{A_1\Gamma} = k \vec{B\Gamma} \quad \text{ii)} \vec{\Gamma_1 B} = k \vec{\Gamma_1 A}, \quad \text{iii)} \vec{AM} = k \vec{MA_1}$$

$$\text{iv)} \vec{\Gamma\Gamma_1} = k \vec{\Gamma_1 M} \quad \text{v)} \vec{MB_1} = k \vec{B_1 B} \quad \text{vi)} \vec{MA} = k \vec{AA_1}$$

Λύση:



$$\text{i)} \vec{A_1\Gamma} = \frac{1}{2} \vec{B\Gamma} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \vec{\Gamma_1 B} = \vec{A\Gamma_1} \Rightarrow \vec{\Gamma_1 B} = -\vec{\Gamma_1 A} \Rightarrow k = -1$$

$$\text{iii)} \vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AA_1} = 2\left(\frac{1}{3} \vec{AA_1}\right) = 2\vec{MA_1}$$

$$\Rightarrow k=2.$$

$$\text{iv)} \vec{\Gamma\Gamma_1} = 3\vec{M\Gamma_1} \Rightarrow \vec{\Gamma\Gamma_1} = -3\vec{\Gamma_1 M} \Rightarrow k = -3$$

$$\text{v)} \vec{MB_1} = \frac{1}{3} \vec{BB_1} \Rightarrow \vec{MB_1} = -\frac{1}{3} \vec{B_1 B} \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$\text{vi)} \vec{MA} = \frac{2}{3} \vec{A_1 A} \Rightarrow \vec{MA} = -\frac{2}{3} \vec{AA_1} \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Ξ. Δίδονται τρία σημεία A, B, Γ για τα οποία έχουμε $\vec{AB} = 2\vec{B\Gamma}$. Να δείξετε ότι για τυχόν σημείο O ισχύει:

$$\vec{OB} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{O\Gamma}.$$

Λύση:

Επειδή $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OB}$ έχουμε:

$$\vec{AB} = 2\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{OB} - \vec{OA} = 2(\vec{O\Gamma} - \vec{OB}) \Leftrightarrow$$

$$3\vec{OB} = \vec{OA} + 2\vec{O\Gamma} \Leftrightarrow \vec{OB} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{O\Gamma}$$

37. Αν το Β είναι συμμετρικό του Α ως προς το κέντρο Σ και Ο τυχόν σημείο του επιπέδου, δείξτε ότι: $\vec{OB} = 2\vec{OS} - \vec{OA}$

Λύση:

Αφού τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Σ, έχουμε: $\vec{\Sigma B} = -\vec{\Sigma A}$.

Οπότε για κάθε σημείο Ο του επιπέδου θα έχουμε:

$$\vec{OB} - \vec{OS} = \vec{OS} - \vec{OA} \quad (\text{διότι } \vec{\Sigma B} = \vec{OB} - \vec{OS} \text{ και } \vec{\Sigma A} = \vec{OS} - \vec{OA})$$

$$\text{αρα } \vec{OB} = 2\vec{OS} - \vec{OA}.$$

38. Αν Μ το μέσο του ευδ. τμήματος ΑΒ και Ο τυχόν σημείο δείξτε ότι: $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$.

Λύση:

$$\text{Επειδή } \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{AO} + \vec{OM} = \vec{MO} + \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM} - \vec{MO} = -\vec{AO} + \vec{OB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OM} + \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

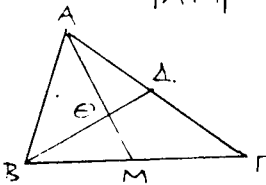
$$\Leftrightarrow 2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

39. Αν Θ είναι το κέντρο βαρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι: $\vec{\Theta A} + \vec{\Theta B} + \vec{\Theta \Gamma} = \vec{0}$

Λύση:

Εστω ότι η ΑΘ τέμνει την ΒΓ στο Μ. Αφού το Θ είναι σημείο τομής των διαμέτρων του τριγώνου και η ΑΜ διάμετρος του θα ισχύει $\frac{|\vec{A\Theta}|}{|\vec{AM}|} = \frac{2}{3}$, και επειδή τα διανύσματα $\vec{A\Theta}$ και \vec{AM}

είναι ομόροτα, έχουμε: $\frac{\vec{A\Theta}}{\vec{AM}} = \frac{|\vec{A\Theta}|}{|\vec{AM}|}$



Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{\vec{A\Theta}}{\vec{AM}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \vec{A\Theta} = \frac{2}{3} \vec{AM} \quad (1)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG}}{2}$ οπότε η (1) γράφεται $\vec{A\Theta} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AG})$ (2)

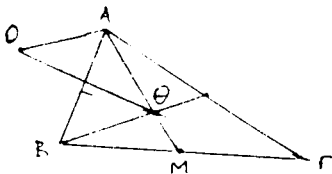
$$\text{Ομοίως θα έχουμε } \vec{B\Theta} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BG}), \vec{\Gamma\Theta} = \frac{1}{3}(\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}) \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \vec{A\Theta} + \vec{B\Theta} + \vec{\Gamma\Theta} &= \frac{1}{3}[(\vec{AB} + \vec{AG}) + (\vec{BA} + \vec{BG}) + (\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B})] = \\ &= \frac{1}{3}[(\vec{AB} + \vec{BA}) + (\vec{BG} + \vec{GB}) + (\vec{\Gamma A} + \vec{A\Gamma})] = \\ &= \frac{1}{3}[\vec{0} + \vec{0} + \vec{0}] = \frac{1}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

40. Αν Θ είναι το κέντρο μάζας ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και O τυχόν σημείο, δείξτε ότι: $\vec{O\Theta} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG})$

Λύση:



Έχουμε:

$$\vec{O\Theta} = \vec{OA} + \vec{A\Theta}$$

$$\vec{O\Theta} = \vec{OB} + \vec{B\Theta}$$

$$\vec{O\Theta} = \vec{O\Gamma} + \vec{\Gamma\Theta}$$

Προσθέτοντας τις εκέθεις αωγές κατὰ μέλη έχουμε

$$3\vec{O\Theta} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}) + (\vec{A\Theta} + \vec{B\Theta} + \vec{\Gamma\Theta}) \quad (1)$$

και επειδή από τὸ προηγούμενο παράδειγμα πύραμε

$$\vec{A\Theta} + \vec{B\Theta} + \vec{\Gamma\Theta} = \vec{0}, \text{ η (1) γίνεται}$$

$$3\vec{O\Theta} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} \Leftrightarrow \vec{O\Theta} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma})$$

41. Έστω M σημείο του επιπέδου ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Αν O είναι το σημείο κομής των διαγωνίων του, δεί-

$$\xi\sigma\tau\epsilon \text{ \textbf{ό}\textbf{τι}: } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} = 4\vec{MO}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{Επειδή το } O \text{ είναι μέσο της διαγωνίου } A\Gamma \text{ έχουμε: } \vec{AO} = \vec{O\Gamma} \\ \text{ή } \vec{AM} + \vec{MO} = \vec{OM} + \vec{M\Gamma} \text{ ή } 2\vec{MO} = \vec{MA} + \vec{M\Gamma} \quad (1) \end{aligned}$$

Ομοίως επειδή το O είναι μέσο της διαγωνίου $B\Delta$ θα έχουμε:

$$2\vec{MO} = \vec{MB} + \vec{M\Delta} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατὰ μέλη θα παρωμε:

$$4\vec{MO} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta}$$

42. Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ δίνονται αντίστοιχα τα σημεία Γ₁, Β₁, Α₁ τέτοια ώστε: $\vec{A}\vec{\Gamma}_1 = k\vec{A}\vec{B}$, $\vec{B}\vec{A}_1 = k\vec{B}\vec{\Gamma}$, $\vec{\Gamma}\vec{B}_1 = k\vec{\Gamma}\vec{A}$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{A}\vec{A}_1 + \vec{B}\vec{B}_1 + \vec{\Gamma}\vec{\Gamma}_1$.

Λύση:

$$\text{Έχουμε } \vec{A}\vec{A}_1 = \vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{A}_1 \Leftrightarrow \vec{A}\vec{A}_1 = \vec{A}\vec{B} + k\vec{B}\vec{\Gamma} \quad (1)$$

$$\text{ομοίως παίρνουμε: } \vec{B}\vec{B}_1 = \vec{B}\vec{\Gamma} + k\vec{\Gamma}\vec{A} \quad (2)$$

$$\vec{\Gamma}\vec{\Gamma}_1 = \vec{\Gamma}\vec{A} + k\vec{A}\vec{B} \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2), (3) και έχουμε:

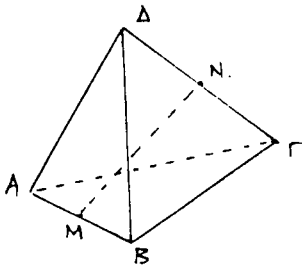
$$\vec{A}\vec{A}_1 + \vec{B}\vec{B}_1 + \vec{\Gamma}\vec{\Gamma}_1 = (1+k)(\vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}\vec{A})$$

και επειδή $\vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}\vec{A} = \vec{0}$ και παραπάνω εκέση γραφεται

$$\vec{A}\vec{A}_1 + \vec{B}\vec{B}_1 + \vec{\Gamma}\vec{\Gamma}_1 = \vec{0}$$

43. Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράεδρο και Μ, Ν τα μέσα των ακμών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχως. Να δείξετε ότι $\vec{M}\vec{N} = \frac{\vec{A}\vec{D} + \vec{B}\vec{C}}{2}$

Λύση:



Έστω Ο τυχόν σημείο στο χώρο.

Επειδή τα Μ και Ν είναι μέσα των ΑΒ

και ΓΔ από το παράδειγμα 5 θα

έχουμε:

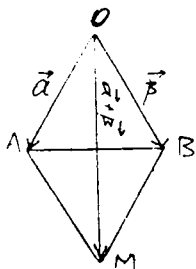
$$\vec{O}\vec{M} = \frac{\vec{O}\vec{A} + \vec{O}\vec{B}}{2}, \quad \vec{O}\vec{N} = \frac{\vec{O}\vec{\Gamma} + \vec{O}\vec{D}}{2}$$

$$\text{Άρα } \vec{O}\vec{N} - \vec{O}\vec{M} = \frac{\vec{O}\vec{\Gamma} + \vec{O}\vec{D}}{2} - \frac{\vec{O}\vec{A} + \vec{O}\vec{B}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{O}\vec{N} + \vec{M}\vec{O} = \frac{\vec{O}\vec{\Gamma} - \vec{O}\vec{A} + \vec{O}\vec{D} - \vec{O}\vec{B}}{2} = \frac{(\vec{A}\vec{O} + \vec{O}\vec{D}) + (\vec{B}\vec{O} + \vec{O}\vec{\Gamma})}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{M}\vec{O} + \vec{O}\vec{N} = \vec{M}\vec{N} = \frac{\vec{A}\vec{D} + \vec{B}\vec{C}}{2}$$

44. Να δείξετε ότι το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ δύο μη ευθυγραμμικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, έχει την διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τότε και μόνο τότε όταν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

Λύση:

1^ο: Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε το παραλληλόγραμμο OAMB είναι ρόμβος και η διαγώνιος OM είναι διχοτόμος της γωνίας O

2^ο: Αν η διαγώνιος OM είναι διχοτόμος της γωνίας O, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, συνεπώς

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| \text{ δηλαδή } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$$

45. Έστω O τυχόν σημείο του επιπέδου και A, B, Γ τρία διακεκριμένα συνευθειακά σημεία. Να δείξετε ότι τότε υπάρχει κατάλληλος αριθμός k για τον οποίο να έχουμε: $\vec{OG} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}$

Αντιστρόφως: Αν ισχύει η παραπάνω ισότητα για τρία διακεκριμένα σημεία A, B, Γ, τότε αυτά είναι συνευθειακά

Λύση:

Έστω ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά. Τότε τα διανύσματα \vec{BG} και \vec{BA} είναι ευχρηματικά δηλαδή

$$\vec{BG} = k \vec{BA} \quad (1)$$

Αλλά $\vec{BG} = \vec{OG} - \vec{OB}$ και $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$ άρα η (1) γράφεται

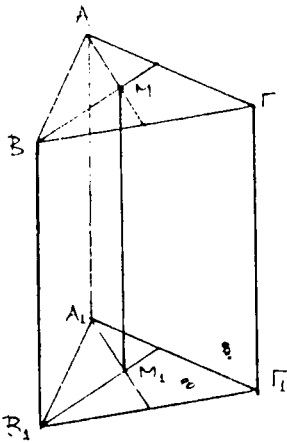
$$\vec{OG} - \vec{OB} = k(\vec{OA} - \vec{OB}) \Leftrightarrow \vec{OG} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}$$

Αντιστρόφως: Έστω ότι ισχύει η $\vec{OG} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB} \Leftrightarrow$

$$\vec{OG} - \vec{OB} = k(\vec{OA} - \vec{OB}) \Leftrightarrow \vec{BG} = k \vec{BA} \text{ που σημαίνει ότι: τα } \vec{BG} \text{ και } \vec{BA} \text{ είναι ευχρηματικά, άρα τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.}$$

46. Έστω ότι ένα τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι παραλληλι προβάτη στο επίπεδο ενός τριγώνου ABΓ. Αν $|\vec{AA}_1| = \alpha$, $|\vec{BB}_1| = \beta$, $|\vec{\Gamma\Gamma}_1| = \gamma$, να βρεθεί η απόσταση των σημείων κομής των διαμέτρων των τριγώνων αυτών

Λύση



Εστω M και M_1 τα σημεία τομής των διαμέσων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A_1B_1\Gamma_1$ και O ένα τυχόν σημείο του χώρου.

Από το παράδειγμα 7 έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_1} &= \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{O\Gamma_1}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{O\Gamma_1} - \overrightarrow{O\Gamma}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}) \Leftrightarrow \\ |\overrightarrow{MM_1}| &= \frac{1}{3}|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}|\end{aligned}$$

Αν οι κορυφές του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ βρίσκονται προς το αυτό μέρος του επιπέδου προβολής τότε τα διανύσματα αυτά είναι συνάρροπα και $|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}| = |\overrightarrow{AA_1}| + |\overrightarrow{BB_1}| + |\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}| = \alpha + \beta + \chi$ συνεπώς $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \chi)$.

Αν οι κορυφές A και B μαζί και η Γ χωρίζεται βρίσκονται εκατέρωθεν του επιπέδου προβολής τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}$ έχει αντίθετη φορά από τα $\overrightarrow{AA_1}$ και $\overrightarrow{BB_1}$. Τότε $|\overrightarrow{MM_1}| = \frac{1}{3}|\alpha + \beta - \chi|$.

47. Εστω δύο μη μηδενικά διανύσματα \vec{a} και \vec{b} για τα οποία $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Να δείχθει ότι τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Λύση:

Μεταφέρουμε τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή. Τότε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$ είναι αντίστοιχως οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου με πλευρές \vec{a} και \vec{b} . Εξ υποθέσεως έχουμε $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ συνεπώς το παραλληλόγραμμο αυτό είναι ρόμβος, άρα οι διαγώνιοι του είναι κάθετες. Αν τα \vec{a} και \vec{b} είναι συγχρημικά τότε ένα από τα διανύ-

μέγιστα $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, το οποίο είναι κάθετο ε' οποιοδήποτε διάνυσμα.

48. Αν AM είναι η εσωτερική διχοτόμος ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τότε: $\vec{AM} = \frac{\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AG}}{\beta + \gamma}$ όπου $\beta = |\vec{AG}|$ και $\gamma = |\vec{AB}|$

Λύση:

Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $\frac{BM}{MG} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow$

$$\frac{\vec{BA} + \vec{AM}}{\vec{MA} + \vec{AG}} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta \vec{BA} + \beta \vec{AM} = \gamma \vec{MA} + \gamma \vec{AG}$$

$$\Leftrightarrow \beta \vec{AM} + \gamma \vec{AM} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AG}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AG}}{\beta + \gamma}$$

49. Αν $\Gamma\Gamma_1$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε ισχύει $|\Gamma\Gamma_1| < \frac{|\vec{GA}| + |\vec{GB}|}{2}$

Λύση:

$$\text{Έχουμε } \vec{\Gamma\Gamma_1} = \frac{\vec{GA} + \vec{GB}}{2} \Rightarrow |\vec{\Gamma\Gamma_1}| = \frac{|\vec{GA} + \vec{GB}|}{2}$$

Επειδή τα \vec{GA} και \vec{GB} δεν είναι συγχρονικά, ισχύει η τριγωνική ανισότητα:

$$|\vec{GA} + \vec{GB}| < |\vec{GA}| + |\vec{GB}|$$

$$\text{Άρα } |\vec{\Gamma\Gamma_1}| < \frac{|\vec{GA}| + |\vec{GB}|}{2}$$

50. Αν M είναι το κέντρο βαρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και O τυχόν σημείο του επιπέδου του τριγώνου να δείξετε ότι:

$$|\vec{OM}| < \frac{1}{3} (|\vec{OA}| + |\vec{OB}| + |\vec{OG}|)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι (παράδ. 6): $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{0}$ και ότι:

(παράδ. 7): $\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG})$.

Επειδή τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OG}$ δεν είναι συγχρονικά

$$|\vec{OM}| = \frac{1}{3} |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG}| < \frac{1}{3} (|\vec{OA}| + |\vec{OB}| + |\vec{OG}|)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

51. Τα διανύσματα $\vec{AG} = \vec{a}$, $\vec{BD} = \vec{b}$ είναι διαγώνιοι του παραλληλογραμμού $ABGD$. Να εκφραστεί τα διανύσματα \vec{AE} , \vec{BG} , \vec{GD} , \vec{DA} συναρτήσει των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} .

52. Τα διανύσματα \vec{AD} , \vec{BE} και \vec{GZ} όπου AD, BE και GZ είναι οι διάμετροι τριγώνου ABG , να εκφραστούν συναρτήσει των διανυσμάτων \vec{AB} και \vec{AG} .

53. Εάν \vec{AD} , \vec{BE} και \vec{GZ} είναι οι διάμετροι τριγώνου ABG , να βρεθεί το άθροισμα $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{GZ}$.

54. Δίνεται το τραπέζιο $ABGD$ στο οποίο $\vec{AD} = \lambda \vec{BG}$, όπου $\lambda > 0$. Να εκφραστούν τα διανύσματα \vec{AB} , \vec{BG} , \vec{GD} και \vec{DA} συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{AG} = \vec{a}$ και $\vec{BD} = \vec{b}$ και του λ .

55. Τετραπλεύρου $ABGD$ τα σημεία E και Z είναι μέσα των πλευρών του AB και GD . Να δείχθει ότι: $\vec{EZ} = \frac{\vec{BG} + \vec{AD}}{2}$ και βεβαιωθεί να δείχθει το θεώρημα για την διάμετρο του τραπεζίου.

3.5. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

3.5.1. Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία διανυσμάτων

Προτάβουμε τους παρακάτω ορισμούς που ισχύουν για ένα διανυσματικό χώρο V .

1. Ένα διάνυσμα \vec{a} του διανυσματικού χώρου V λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ του χώρου V όταν και μόνον όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

2. Το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \mid \vec{a}_k \in V, k=1,2,\dots,n\}$ λέγεται γραμμικά εξαρτημένο, όταν και μόνο όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

3. Το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \mid \vec{a}_k \in V, k=1,2,\dots,n\}$ λέγεται γραμμικά ανεξαρτητικό όταν και μόνον όταν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο.

4. Το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \mid \vec{a}_k \in V, k=1,2,\dots,n\}$ λέγεται γραμμικά ανεξαρτητικό όταν από κάθε ισότητα της μορφής $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Αν το σύνολο $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \mid \vec{a}_k \in V, k=1,2,\dots,n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο ή γραμμικά ανεξαρτητικό τότε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ή γραμμικά ανεξαρτητικά.

3.5.2. Συγχρημικά διανύσματα

Τα διανύσματα που βρίσκονται σε παράλληλους φορείς ονομάζονται ευχρηματικά.

Τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι ευχρηματικά αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\vec{a} = \lambda \vec{\beta}.$$

Ο λόγος δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ ορίζεται τότε και μόνο τότε όταν τα διανύσματα αυτά είναι ευχρηματικά και ένα τουλάχιστο από αυτά είναι διάφορο του μηδενός. Τότε γράφουμε.

$$\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ο λόγος λ δύο ευχρηματικών διανυσματων είναι ίσος με $\pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$ όπου το $+$ λαμβάνεται αν τα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι ομορροπα και το $-$ όταν αυτά είναι αντιρροπα. Άρα $\frac{\vec{a}}{|\vec{\beta}|} = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$

3.5.3. Συνεπιπέδα διανύσματα

Τα διανύσματα που οι φορείς τους είναι παράλληλοι προς το ίδιο επίπεδο ονομάζονται συνεπιπέδα.

Προφανώς δύο διανύσματα είναι πάντοτε συνεπιπέδα
Ισχύουν οι προτάσεις:

1. Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπιπέδα αν και μόνο αν αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί k, λ, μ όχι όλοι ίσοι με μηδέν έτσι ώστε να ισχύει

$$k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$$

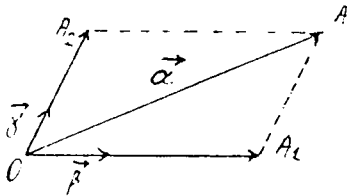
τα διανύσματα τότε $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπιπέδα

2. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπιπέδα και τα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ όχι ευχρηματικά τότε το διάνυσμα \vec{a} γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ κατά μοναδικό τρόπο.

Υπάρχουν δηλαδή τότε πραγματικοί αριθμοί k, λ ώστε να ισχύει

$$\vec{a} = k\vec{\beta} + \lambda\vec{\chi}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε αναλυση του διανύσματος \vec{a} ως προς τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\chi}$, αυτα δε δηλαδή τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\chi}$ αποτελούν μια βάση στο επίπεδο.



3. Αν έχουμε τέσσερα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\chi}, \vec{\delta}$ από τα οποία τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\chi}$ δεν είναι συνεπιπέδα τότε το διάνυσμα $\vec{\delta}$ μπορεί να χρηματιστεί κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή:

$$\vec{\delta} = k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\chi}$$

Τότε λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ αναλύθηκε κατά τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\chi}$ τα οποία αποτελούν μια βάση του χώρου.

3.54. Συντεταγμένες διανύσματος

Αν στο επίπεδο (αντίστοιχα στο χώρο) επιλεχτική μια βάση τότε σε κάθε διάνυσμα αντίστοιχά μοναδικό ζευγάρι (αντίστοιχα τριάδα) πραγματικών αριθμών και αντίστροφα (αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση).

Έστω ότι $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι μία βάση και $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ τότε οι αριθμοί a_1, a_2, a_3 ονομάζονται συντεταγμένες του διανύσματος \vec{a} ως προς τη δεδομένη βάση. Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες με $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ή $\vec{a}(x, y, z)$ Στο επίπεδο γράβουμε $\vec{a}(a_1, a_2)$ ή $\vec{a}(x, y)$

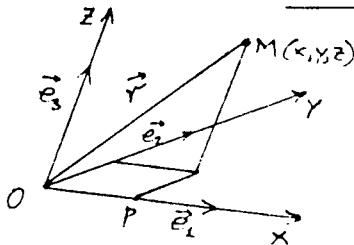
Αν $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ τότε:

- α) $\vec{a} + \vec{\beta} = (a_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (a_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (a_3 + \beta_3)\vec{e}_3$ και $\vec{a} + \vec{\beta} = (a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2, a_3 + \beta_3)$
- β) $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3$ και $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$
- γ) $\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow a_1 = \beta_1, a_2 = \beta_2, a_3 = \beta_3$

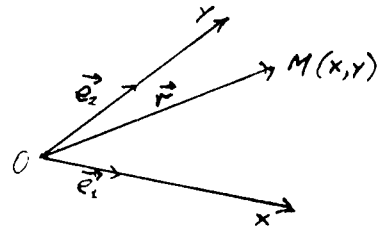
3.5.5. Συστήματα συντεταχμένων

Ονομάζεται καρτεσιανό (πλαχιοχώνιο) σύστημα συντεταχμένων στο χώρο το σύστημα ενός σημείου και μιας ράβης

Το σημείο αυτό ονομάζεται αρχή των συντεταχμένων και οι ευθείες οι διερχόμενες από την αρχή των συντεταχμένων και που έχουν την διεύθυνση των διανυσμάτων της ράβης ονομάζονται άξονες συντεταχμένων



εκ. α



εκ. β'

Ο ένας άξονας ονομάζεται άξονας των τετμημένων, ο άλλος άξονας των τεταχμένων και ο τρίτος άξονας των κατηχμένων

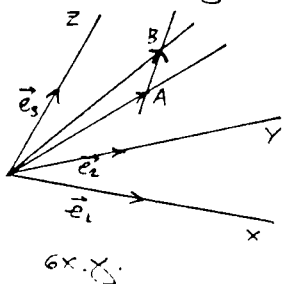
Τα επίπεδα που ορίζουν ανα δύο οι άξονες των συντεταχμένων ονομάζονται συντεταχμένα επίπεδα

Αν M είναι ένα σημείο στο χώρο τότε το διάνυσμα $\vec{r} = \vec{OM}$ έχει συντεταχμένες $M(x, y, z)$ που είναι και συντεταχμένες του σημείου M ως προς αυτό το σύστημα συντεταχμένων (εκ. α). Ομοίως ορίζεται και το καρτεσιανό σύστημα συντεταχμένων στο επίπεδο. Στο επίπεδο το σημείο έχει δύο συντεταχμένες (εκ. β')

Σε δεδομένο σύστημα συντεταχμένων οι συντεταχμένες ενός σημείου ορίζονται μονοσημαντικά

3.5.6. Συντεταχμένες διανύσματα \vec{AB} στο χώρο

Έστω το διάνυσμα \vec{AB} , όπου $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ είναι οι συντεταχμένες των A και B ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταχμένων. Ισχύει $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ Αλλά



$$\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1) \text{ και } \vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$$

άρα

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Επομένως για να βρούμε τις συντεταχμένες του διανυσματος πρέπει, από τις συντεταχμένες του τέλους του να

αφαιρέσουμε τις συντεταχμένες της αρχής του (σχ.χ).

357. Ορθογώνιο σύστημα συντεταχμένων

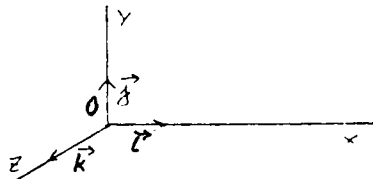
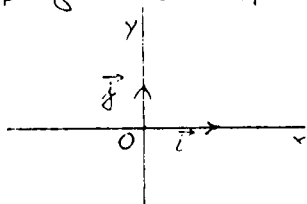
Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ($|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$) θα λέμε ότι αποτελούν ορθοκανονική βάση στον τρισδιάστατο χώρο αν και μόνο αν.

1. Τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ αποτελούν μια βάση
2. Τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι ανα δυο κάθετα

Η ορθοκανονική βάση συμπληρώνεται με $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Έτσι κάθε διάνυσμα $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$ ως προς την ορθοκανονική βάση $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ γράφεται:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

Στον διεδδιάστατο χώρο (επίπεδο) ισχύουν ανάλογα ΟΡΙΣΜΟΣ: Το καρτεσιανό σύστημα συντεταχμένων με ορθοκανονική βάση ονομάζεται ορθογώνιο σύστημα συντεταχμένων. Στα παρακάτω σχήματα παριστάνονται τα δεξιόστροφα ορθογώνια συστήματα συντεταχμένων στο επίπεδο και στο χώρο.



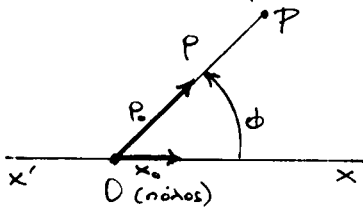
3.5.8. Πολικές συντεταχμένες.

Κατά την μελέτη διαφόρων προβλημάτων (π.χ. νόμα του Κέπλερ στην Αστρονομία) είναι πολλές φορές εκόπιμο να χρησιμοποιούμε αντί των Καρτεσιανών, τις πολικές συντεταχμένες.

Οι πολικές συντεταχμένες ενός σημείου στο επίπεδο, ορίζονται ως εξής:

Ορίζουμε έναν άξονα xx' επί του επιπέδου, που τον ονομάζουμε πολικό άξονα. Πάνω στον άξονα αυτόν ορίζουμε ένα σημείο O που το ονομάζουμε πόλο.

Το μοναδιαίο διάνυσμα ρ_0 του πολικού άξονα, μαζί με το σημείο O , ονομάζεται Πολικό Σύστημα Αναφοράς. Εάν δοθεί τώρα ένα σημείο P του επιπέδου, το διάνυσμα OP λέγεται Διανυσματική ακτίνα του σημείου P .



Εάν επί της OP ορίσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα ρ_0 , τότε η αλγεβρική τιμή της γωνίας $(\vec{x}_0, \vec{\rho}_0) = \phi$ λέγεται πολική γωνία του σημείου P .

Η συντεταχμένη του σημείου P δηλαδή του διανύσματος \vec{OP} , $(\vec{OP}) = \pm \frac{|\vec{OP}|}{|\rho_0|} = \pm \rho$ λέγεται πολική ακτίνα αυτού.

Τα στοιχεία του διατεταχμένου ζεύγους (ϕ, ρ) λέγονται πολικές συντεταχμένες του σημείου P .

Αν δίδεται ένα ζεύγος (ϕ, ρ) , ανεικονείται ε' αυτό ένα σημείο P του επιπέδου. Αντίστροφα όμως, αν δίδεται ένα σημείο P στο επίπεδο, δεν ανεικονείται ε' αυτό ένα μόνο ζεύγος (ϕ, ρ) πολικών συντεταχμένων (διότι στη γωνία ϕ ανεικονούνται και όλες οι γωνίες $2k\pi + \phi$). Επομένως οι πολικές συντεταχμένες των σημείων του επιπέδου δηλαδή τα ζεύγη (ϕ, ρ) δεν απεικονίζονται αμφιμονοσήμαντα στα σημεία του επιπέδου, χ' αυτό η χρήση τους, ιδιαίτερα στην Ναυτιλία και την Αστρονομία, απαιτεί μεγαλύτερη προσοχή απ' όση η χρήση των Καρτεσιανών Συντεταχμένων.

3.5.9. Μέτρο διανύσματος

Το μέτρο $|\vec{a}|$ του διανύσματος $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ως προς την ορθοκανονική βάση $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Στο επίπεδο αν $\vec{a} = (a_1, a_2)$ τότε $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $A_1(x_1, y_1, z_1)$ και $A_2(x_2, y_2, z_2)$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$|\vec{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{a}^0 δίνεται από τον τύπο $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ή με την κριση συντεταχμένων

$$\vec{a}^0 = \frac{a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Παραδείγματα.

Ε.ο Να δείξει ότι τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, 4, -6)$ είναι ευχρηματικά

Λύση:

Αρκεί να δείξει ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος

ώστε
$$\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$$

Η σχέση αυτή ισοδυναμεί με την $(1, -2, 3) = \lambda(-2, 4, -6)$

$$\Leftrightarrow (1, -2, 3) = (-2\lambda, 4\lambda, -6\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -2\lambda = 1 \\ 4\lambda = -2 \\ -6\lambda = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Ερα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{\beta}$ συνεπώς τα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι ευχρηματικά.

Ε.φ. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\vec{\beta} = (-1, 2, 5)$ και $\vec{\gamma} = (k, \lambda, \mu)$. Να υπολογισθούν τα k, λ, μ ώστε να ισχύει $-2\vec{a} + 3\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = \vec{0}$.

Λύση.

$$\text{Εκ τῆς } -2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(1, 3, 2) + 3(-1, 2, 5) - 5(k, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (-2, -6, -4) + (-3, 6, 15) + (-5k - 5\lambda - 5\mu) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (-5 - 5k, -5\lambda, 11 - 5\mu) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 5k = 0 \\ -5\lambda = 0 \\ 11 - 5\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ \lambda = 0 \\ \mu = \frac{11}{5} \end{cases}$$

58. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, \mu, \lambda + 2)$ και $\vec{\beta} = (6, 5\lambda + \mu - 1, 6 + 3\lambda)$. Να προσδιορισθούν τα λ, μ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα

Λύση:

Για να είναι τα δεδομένα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ παράλληλα πρέπει ως γνωστόν να υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{\alpha} = k \vec{\beta} \quad \text{Άρα:}$$

$$\vec{\alpha} = k \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow (2, \mu, \lambda + 2) = k(6, 5\lambda + \mu - 1, 6 + 3\lambda) \Leftrightarrow$$

$$(2, \mu, \lambda + 2) = (6k, k(5\lambda + \mu - 1), k(6 + 3\lambda)) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6k = 2 \\ k(5\lambda + \mu - 1) = \mu \\ k(6 + 3\lambda) = \lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ 5\lambda - 2\mu = 1 \\ \lambda + 2 = \lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ 5\lambda - 2\mu = 1 \end{cases}$$

Η εξίσωση $5\lambda - 2\mu = 1$ έχει άπειρες λύσεις. Για $\mu = p$ έχουμε

$$\lambda = \frac{2p + 1}{5}$$

Άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, p, \frac{2p + 1}{5})$ και $\vec{\beta} = (6, 3p, \frac{6p + 3}{5})$

είναι παράλληλα για κάθε $p \in \mathbb{R}$

59. Να βρεθούν οι εντεταχμένες του διανύσματος που είναι μοναδιαίο και συγχρημαμικό με το $\vec{\alpha} = (6, -8)$.

Λύση:

Εστω $\vec{\beta}$ το ζητούμενο διάνυσμα που είναι μοναδιαίο και

ευχρηματικό του \vec{a} .

Πρέπει τότε να ισχύει:

$$\begin{cases} \vec{\beta} = \lambda \vec{a} & \lambda \in \mathbb{R} \\ |\vec{\beta}| = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{\beta} = \lambda (6, -8), \lambda \in \mathbb{R} \\ |\vec{\beta}| = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{\beta} = (6\lambda, -8\lambda) & \lambda \in \mathbb{R} \\ |\vec{\beta}| = 1 \end{cases}$$

Από την δεύτερη απ' αυτές λόγω της πρώτης παίρνουμε:

$$36\lambda^2 + 64\lambda^2 = 1 \Rightarrow 10|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{10} \text{ οπότε η πρώ-}$$

τη δίνει δύο μοναδιαία, τα

$$\vec{\beta} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \text{ ομόρροπο του } \vec{a} \text{ διότι } \lambda = \frac{1}{10} > 0$$

$$\text{και } \vec{\beta} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \text{ αντίρροπο του } \vec{a} \text{ διότι } \lambda = -\frac{1}{10} < 0$$

60. Στον άξονα Ογ να βρεθεί το σημείο που ισαπέχει από δύο σημεία $A(3, 1, 0)$ και $B(-2, 4, 1)$

Λύση:

Το ζητούμενο πάνω στον άξονα Ογ σημείο θα είναι το $M(0, \gamma, 0)$ με αγνώστο τεταμένη το γ

Θα πρέπει $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$ και επειδή

$$\vec{MA} = (3-0, 1-\gamma, 0) \text{ και } \vec{MB} = (-2-0, 4-\gamma, 1-0) \text{ θα έχουμε}$$

$$\sqrt{3^2 + (1-\gamma)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4-\gamma)^2 + 1^2} \iff$$

$$9 + 1 - 2\gamma + \gamma^2 = 4 + 16 - 8\gamma + \gamma^2 + 1 \iff$$

$$6\gamma = 11 \iff \gamma = \frac{11}{6}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0, \frac{11}{6}, 0)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

61. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{OB} = \vec{b} = (2, -2, 1)$, $\vec{OG} = \vec{g} = (4, 0, 3)$ και $\vec{OD} = \vec{d} = (16, 10, 18)$. Από το Δ δέσουμε παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{OG} = \vec{g}$ που τέμνει

στο επίπεδο των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} στο E . Να βρεθεί το διάνυσμα \vec{OE} .

62. Στο συντεταχμένο επίπεδο που ορίζεται από τους άξονες Ox και Oz να βρεθεί το σημείο που ισοπέχει από τα τρία σημεία $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ και $\Gamma(0,5,1)$.

63. Δίδονται οι κορυφές $A(2,-3)$, $B(1,3)$ και $\Gamma(-6,-4)$ τριγώνου $AB\Gamma$. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο M της κορυφής A ως προς την πλευρά $B\Gamma$.

64. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου του διερχομένου εκ του σημείου $A(2,-1)$ και ο οποίος εφάπτεται στους δύο άξονες των συντεταχμένων.

65. Δίδεται διάνυσμα $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Να βρεθεί το διάνυσμα \vec{p} αν $|\vec{a}| = |\vec{p}|$, η τεταγμένη του διανύσματος \vec{p} είναι ίση με την τεταγμένη του διανύσματος \vec{a} και η τεταγμένη του διανύσματος \vec{a} είναι ίση με το μηδέν.

66. Να εξετασθεί αν είναι παραλληλόγραμμο το τετραπλευρό που οι κορυφές του είναι $A(-3,1)$, $B(3,6)$, $\Gamma(2,2)$ και $\Delta(-4,-3)$.

67. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-3,0,4)$ και $\vec{b} = (5,-2,-14)$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} .

68. Να ερευνηθεί αν οι παρακάτω τριάδες διανυσμάτων \vec{a} , \vec{b} , $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες και αν ναι να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των \vec{a} και \vec{b} .

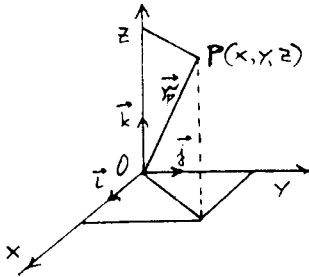
$$i) \vec{a} = (5,4), \vec{b} = (-3,0), \vec{\gamma} = (19,8).$$

$$ii) \vec{a} = (-6,2), \vec{b} = (4,7), \vec{\gamma} = (9,-3).$$

69. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2,1,0)$, $\vec{b} = (1,-1,2)$, $\vec{\gamma} = (2,2,-1)$ και $\vec{\delta} = (3,7,-7)$. Να βρείτε το καθένα από αυτά γνωστήσει των τριών άλλων.

3.6. Μερικά βασικά στοιχεία.

α'. Διανυσματική ακτίνα: Αν P είναι ένα σημείο του



χώρου και $Oxyz$ το ορθοκανονικό σύστημα συντεταχμένων τότε το διάνυσμα $\vec{OP} = \vec{r}_P$ ονομάζεται διανυσματική ακτίνα του σημείου P . Αν το P έχει συντεταχμένες

(x, y, z) τότε η διανυσματική ακτίνα $\vec{OP} = \vec{r}_P$ γράφεται: $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ δηλαδή το \vec{OP} έχει τις ίδιες συντεταχμένες με το P . Το P πολλές φορές γράφεται και $P(\vec{r}_P)$.

Αν $A(\vec{r}_A)$, $B(\vec{r}_B)$ είναι δύο σημεία με διανυσματικές ακτίνες \vec{r}_A και \vec{r}_B τότε έχουμε:

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (1)$$

β'. Απόσταση δύο σημείων: Αν $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο σημεία του χώρου τότε η απόσταση των $d(P_1, P_2)$ είναι ίση με το μέτρο του διανυσματος $\vec{P_1P_2}$.

Η απόσταση $d(P_1, P_2)$ των σημείων $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταχμένων δίδεται από τον τύπο:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2)$$

γ'. Συντεταχμένες σημείου P οριζόμενου εκ του απλού λόγου $(P_1, P_2, P) = \lambda$: Έστω δύο σημεία του χώρου $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ και ένα άλλο $P(x, y, z)$ για το οποίο έχουμε $(P_1, P_2, P) = \lambda$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$. Οι συντεταχμένες τότε x, y, z του P θα δίδονται από τους τύπους:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (3)$$

Αν οι $P(x, y, z)$ είναι μέσο του $P_1 P_2$ τότε $\lambda=1$ οπότε

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (3a)$$

δ'. Γωνία δύο διανυσμάτων: Γωνία δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ που έχουν κοινή αρχή (αν δεν έχουν κοινή αρχή, με παράλληλη μεταφορά τα κάνουμε να έχουν) κατά την τάξη με την οποία έχουν γραφεί, ορίζεται η γωνία που διαγράφει το διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$ όταν στρέφεται επί του επιπέδου των \vec{a} και $\vec{\beta}$ περί το O , κατά φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου, μέχρι που να συμπίψει με το άλλο διάνυσμα $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Η γωνία αυτή παριστάνεται με $(\vec{a}, \vec{\beta})$ και μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ τότε

$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (4)$$

αν $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow xx + yy + zz = 0$ (βλ. παρακάτω ερωτηματολόγιο)

Ε' Κατευθύνοντα συννημίτονα: Αν δίδεται το διάνυσμα $\vec{a} = (x, y, z)$ τότε οι γωνίες ϕ, τ, ω που εκηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ με το \vec{a} αντίστοιχα, δίδονται από τους τύπους:

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \tau = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \omega = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (5)$$

Τα $\cos \phi, \cos \tau, \cos \omega$ ονομάζονται κατευθύνοντα συννημίτονα του διανύσματος \vec{a}

Παραδείγματα:

7α Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-2, 0)$. Να βρεθεί ένα σημείο Γ πάνω στον άξονα των τετμημένων έτσι ώστε

το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές.

Λύση

Για το σημείο Γ θα έχουμε $\Gamma(x, 0)$. Έτσι

$$\vec{AB} = (-3, -4), \vec{B\Gamma} = (x+2, 0), \vec{\Gamma A} = (1-x, 4)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

α'. Το ισοσκελές έχει κορυφή το A . Τότε

$$|\vec{AB}| = |\vec{A\Gamma}| \Rightarrow 5 = \sqrt{(1-x)^2 + 16} \Rightarrow (1-x)^2 = 9$$

$$\Rightarrow 1-x = \pm 3 \Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 4 \text{ και έχουμε δύο λύσεις}$$

$$\Gamma_1(-2, 0) \text{ και } \Gamma_2(4, 0).$$

β'. Το ισοσκελές έχει κορυφή το B . Τότε

$$|\vec{BA}| = |\vec{B\Gamma}| \Rightarrow 5 = \sqrt{(x+2)^2 + 0} \Rightarrow (x+2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x+2 = \pm 5 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -7 \text{ και έχουμε δύο λύσεις}$$

$$\Gamma_3(3, 0) \text{ και } \Gamma_4(-7, 0)$$

γ'. Το ισοσκελές έχει κορυφή το Γ . Τότε

$$|\vec{\Gamma A}| = |\vec{\Gamma B}| \Rightarrow \sqrt{(1-x)^2 + 16} = \sqrt{(x+2)^2} \Rightarrow$$

$$(1-x)^2 + 16 = (x+2)^2 \Rightarrow x = \frac{13}{6} \text{ και έχουμε για λύση}$$

$$\Gamma_5\left(\frac{13}{6}, 0\right)$$

71. Να βρεθεί η τεταχμένη του σημείου P αν η τετμημένη του είναι 7 και η απόστασή του από το σημείο $A(-1, 5)$ είναι 10.

Λύση:

Αν η τεταχμένη του P είναι y , τότε $P(7, y)$

$$\text{Εξ υποθέσεως όμως } d(P, A) = 10 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(-1-7)^2 + (5-y)^2} = 10$$

$$\Rightarrow (5-y)^2 = 36 \Rightarrow 5-y = \pm 6 \Rightarrow y = -1 \text{ ή } y = 11$$

Άρα $P(7, -1)$ ή $P(7, 11)$

72. Να βρεθούν οι συντεταχμένες των μέσων των πλευρών ενός τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A(3, -7)$, $B(5, 2)$ και $\Gamma(-1, 0)$.

Λύση:

Αν $M(x, y)$ είναι το μέσο της $BΓ$ τότε για τα x και y

θα έχουμε:

$$x = \frac{5 + (-1)}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{2 + 0}{2}$$

δηλαδή $x = 2$, $y = 1$ άρα $M(2, 1)$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι το μέσο της AB έχει συντεταγμένες $(4, -\frac{5}{2})$ και το μέσο της $AΓ$ $(1, -\frac{7}{2})$.

73. Ευθύγραμμο τμήμα AB με άκρα τα $A(3, 2)$ και $B(15, 6)$ διαιρείται σε 5 ίσα μέρη. Ζητούνται οι συντεταγμένες των εν-
μέσων διαιρέσεων.

Λύση:

Εστω K, Λ, M, N τα σημεία στα οποία διαιρείται το AB σε 5 ίσα μέρη. Βρίσκουμε το λόγο (ABK) και κατοπιν

$\underline{A \quad K \quad \Lambda \quad M \quad N \quad B}$

τις συντεταγμένες του K

$$(ABK) = \frac{\vec{AK}}{KB} = \frac{\frac{1}{5} \vec{AB}}{\frac{4}{5} \vec{AB}} = \frac{1}{4}$$

Αφού $A(3, 2)$ και $B(15, 6)$ θα έχουμε:

$$x_K = \frac{3 + \frac{1}{4} \cdot 15}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{27}{5} \quad \text{και} \quad y_K = \frac{2 + \frac{1}{4} \cdot 6}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{14}{5}$$

Άρα $K(\frac{27}{5}, \frac{14}{5})$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε: $\Lambda(\frac{39}{5}, \frac{18}{5})$, $M(\frac{51}{5}, \frac{22}{5})$ και $N(\frac{63}{5}, \frac{26}{5})$.

74. Να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (1, 7)$. Κατόπιν των $\vec{\gamma} = (2, 5, 4)$ και $\vec{\delta} = (6, 0, -3)$

Λύση:

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 45^\circ$$

$$\cos(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\delta}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{2 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} \sqrt{6^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{0}{45} = 0 \Rightarrow (\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\delta}}) = 90^\circ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

75. Να δείξει ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(0,0)$, $B(3,1)$ και $\Gamma(1,7)$ είναι ορθογώνιο.
76. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(3,2)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(11,6)$
77. Στον άξονα Oy να ευρεθεί σημείο που να απέχει από το $A(4,-6)$ απόσταση 5
78. Αν είναι γνωστές οι διανυσματικές ακτίνες τριών διαδοχικών κορυφών ενός παραλληλογραμμού να βρείτε συνάρτηση αυτών την διανυσματική ακτίνα του σημείου τομής των διαγωνίων του.
79. Να βρεθεί το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία $A(3,-2)$, $B(3,5)$, $\Gamma(0,4)$ και $\Delta(-1,1)$.
80. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1,-1,1)$ και $\vec{\beta} = (1,1,2)$

3.7. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Εσωτερικό ή αριθμητικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ καλείται το γινόμενο των μητρών τους επί το συνημιτόνο της γωνίας που εκυματίζουν. Συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των \vec{a} και $\vec{\beta}$ με $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$. Επομένως είναι:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{\beta}}).$$

Εκ' τού ορισμού προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός και όχι διάνυσμα.

Είναι δε θετικός αν η γωνία $(\hat{\vec{a}, \vec{\beta}})$ είναι οξεία και αρνητικός αν η γωνία είναι αμβλύα.

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

$$1. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$2. \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$$

$$3. \lambda(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{\beta}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4. \vec{0} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{0} = 0$$

Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ή τα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και αντίστροφα

$$5. \vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$$

$$6. (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) \cdot (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \dots + \vec{\beta}_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{a}_i \cdot \vec{\beta}_j$$

$$7. \cos(\hat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|}, \quad \vec{a}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων γιναρτίζεται των συντεταγμένων τους:

Ισχύει:

$$\vec{i}^2 = 1, \quad \vec{j}^2 = 1, \quad \vec{k}^2 = 1 \quad \text{και} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{όπου}$$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ και $\vec{k} = (0, 0, 1)$ οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ και

$$\cos(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Παραδείγματα:

θ1. Τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Αν $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, να υπολογισθούν τα γινόμενα: $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, \vec{a}^2 , $\vec{\beta}^2$, $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$.

Λύση:

Έχουμε:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \theta = 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$$

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = 9$$

$$\vec{\beta}^2 = \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\beta}| \cos 0 = 16$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{\beta})^2 &= (\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} + \vec{\beta}) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{a} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \\ &= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 9 - 12 + 16 = 13 \end{aligned}$$

θ2. Να υπολογισθεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων (i)

$$\vec{a} = (3, 5, 7), \vec{\beta} = (-2, 6, 1) \quad \text{ii) } \vec{a} = (2, 5, 1), \vec{\beta} = (3, -2, 4)$$

Λύση:

$$\text{i) } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 1 = 31$$

$$\text{ii) } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

θ3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, -2, 4)$, $\vec{\beta} = (5, 1, 6)$ και $\vec{\gamma} = (-3, 0, 2)$. Να βρεθεί διάνυσμα \vec{x} που ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 4, \quad \vec{\beta} \cdot \vec{x} = 35, \quad \vec{\gamma} \cdot \vec{x} = 0.$$

θ4. Αν $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{\beta} = (2\lambda, \nu, 1)$ και $\vec{\gamma} = (1, \lambda, -3\nu)$ είναι τρία διανύσματα, τότε να προσδιορισθούν οι παραμετροί λ και ν , έτσι ώστε το \vec{a} να είναι κάθετο στα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

3.8. Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

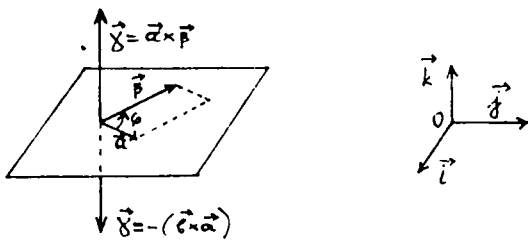
Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ λέγεται το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

1. Το μήκος (μέτρο) του διανύσματος $\vec{\gamma}$ ισούται με:

$|\vec{\gamma}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \sin \phi$, όπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

2. Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$: $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$

3. Σαν διατεταγμένη τριάδα τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ σχηματίζουν τριάδα όμοια με αυτή των μοναδιαίων βασικών διανυσμάτων \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} (βλ. α). Συμπολισμός: $\vec{\gamma} = \vec{a} \times \vec{\beta}$



Σκ. α.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι αν \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι ευχρηματικά διανύσματα, τότε $\vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{0}$.

Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου:

- i) $\vec{a} \times \vec{\beta} = -(\vec{\beta} \times \vec{a})$
- ii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{\beta}) = (\lambda\vec{a} \times \vec{\beta})$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- iii) $\vec{\gamma} \times (\vec{a} + \vec{\beta}) = \vec{\gamma} \times \vec{a} + \vec{\gamma} \times \vec{\beta}$
- iv) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Αν τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ ορίζονται από τις συντεταγμένες τους: $\vec{a} = (x, y, z)$ και $\vec{\beta} = (x', y', z')$, τότε το εξωτερικό γινόμενο εκφράζεται από τον τύπο:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k} \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (yz' - y'z) \vec{i} + (zx' - z'x) \vec{j} + (xy' - yx') \vec{k}$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό προκύπτει ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογραμμού που έχει διαδοχικές πλευρές τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} .

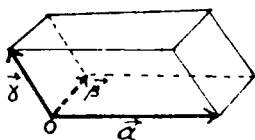
Το εξωτερικό γινόμενο υπολογίζεται και από τον τύπο:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

3.9. Μικτό γινόμενο

Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ (λαμβάνομενα κατά τη σειρά $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$) καλείται το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος \vec{a} επί το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{b} και $\vec{\gamma}$ δηλαδή $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma})$ Συμβολισμός: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma})$.

Το μικτό γινόμενο $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma})$ είναι ίσο με τον όγκο του παραλληλεπίπεδου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ που έχουν κοινή αρχή (βλ. β).



Σκ. β.

Ο αριθμός αυτός είναι θετικός αν η διατεταγμένη τριάδα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι όπως η τριάδα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ και αρνητικός στην αντίθετη περίπτωση.

Ιδιότητες μικτού γινομένου

$$i) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\gamma}$$

$$ii) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = (\vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{a}) = (\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{\gamma}) = -(\vec{\gamma}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{\gamma}, \vec{b}).$$

iii) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπιπεδα

iv) Αν $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (x', y', z')$, $\vec{\gamma} = (x'', y'', z'')$ τότε

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

Παραδείγματα:

Εξ. Να βρεθεί το εξωτερικό γινόμενο των διανυσματων $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (5, 6, 4)$

Λύση:

Σύμφωνα με τον τύπο έχουμε:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \vec{k} \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

Εξ. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 7, 4)$, $\vec{\gamma} = (1, 2, 1)$ Να βρεθεί το μικτό γινόμενο $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma})$

Λύση:

$$\text{Έχουμε } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (7 \cdot 1 - 2 \cdot 8) - 1 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 8) + 2 \cdot (4 \cdot 1 - 7 \cdot 2) =$$

$$= -3 + 6 - 6 = -3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Εξ. Να βρείτε το εξωτερικό γινόμενο αν .

$$i) \vec{a} = (5, -2, 1), \vec{b} = (4, 0, 6)$$

$$ii) \vec{a} = (-2, 6, -4), \vec{b} = (3, -9, 6)$$

82. Να βρεθεί το εμβαδό παραλληλογράμμου που έχει πλευρές τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (2, 4, 1), \vec{b} = (2, -2, 1) \quad (\text{Απ. } 18\sqrt{2})$$

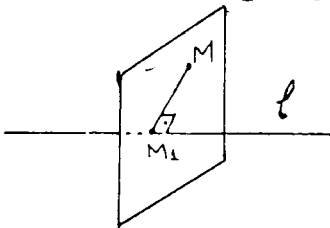
83. Να υπολογισθεί ο όγκος παραλληλεπιπέδου που έχει πλευρές τα διανύσματα:

$$\vec{P} = (3, 1, -2), \vec{Q} = (1, 5, -1), \vec{R} = (1, 5, 1) \quad (\text{Απ. } V = 6)$$

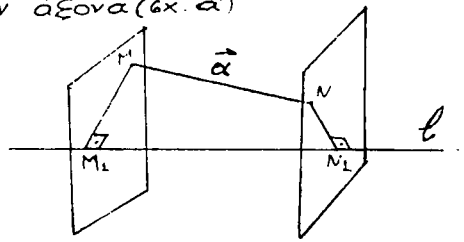
3.10. Προβολή διανύσματος σε άξονα.

Προβολή σημείου M σε άξονα ℓ καλείται το ίκνος M_1 της καθέτου που άρχει από το M στον άξονα ℓ .

Η προβολή αυτή μπορεί επίσης να οριστεί ως το σημείο κομής του άξονα ℓ με το επίπεδο το διεκκόμενο από το M και το οποίο είναι κάθετο προς τον άξονα (βλ. α')



Σκ. α'



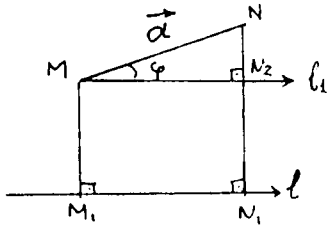
Σκ. β'

Έστω τώρα ότι $\vec{a} = \vec{MN}$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα, με M_1 και N_1 τις προβολές των σημείων M και N στον άξονα ℓ (βλ. β')

Προβολή διανύσματος ή διανυσματική προβολή του διανύσματος MN στον άξονα ℓ ονομάζουμε το διάνυσμα $\vec{M_1N_1}$ και το ευφορίζουμε με $\text{Pr}_\ell \vec{MN}$ δηλαδή $\vec{M_1N_1} = \text{Pr}_\ell \vec{MN}$.

Αν η ευθεία MN είναι παράλληλη προς τον άξονα ℓ τότε $\text{Pr}_\ell \vec{MN} = \vec{MN}$. Αν η ευθεία MN είναι κάθετη στον άξονα ℓ τότε $\text{Pr}_\ell \vec{MN} = \vec{0}$.

Ιδιότητες προβολών



1. Η προβολή του διανύσματος \vec{a} στον άξονα l είναι ίση με το γινόμενο του μέτρου του διανύσματος \vec{a} επί το συνημίτονο της γωνίας ϕ μεταξύ του διανύσματος και του άξονα. Δηλαδή

$$\text{Π}_{r_l} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \phi.$$

2. Η προβολή αθροίσματος διανυσμάτων επί έναν άξονα ισούται με το άθροισμα των προβολών των προσδετέων διανυσμάτων στον ίδιο άξονα. Δηλαδή

$$\text{Π}_{r_l} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = \text{Π}_{r_l} \vec{a}_1 + \text{Π}_{r_l} \vec{a}_2 + \dots + \text{Π}_{r_l} \vec{a}_n$$

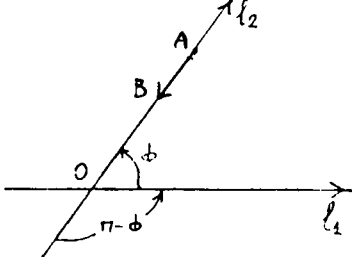
3. Η προβολή του χινομένου διανύσματος επί αριθμό λ ισούται με το γινόμενο του αριθμού επί την προβολή του διανύσματος στον ίδιο άξονα. Δηλαδή

$$\text{Π}_{r_l} (\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot \text{Π}_{r_l} \vec{a}$$

Παράδειγματα:

Ex. Δυο άξονες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60° . Στον άξονα l_2 βρίσκεται ένα διάνυσμα \vec{AB} μήκους 20 και με φορά αντίθετη του l_2 . Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος αυτού στον άξονα l_1 .

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι:

$$\text{Π}_{r_{l_1}} \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos(\widehat{(\vec{AB}, l_1)})$$

Αφού το διάνυσμα \vec{AB} έχει αντίθετη φορά από τον άξονα l_2 , η γωνία $(\widehat{(\vec{AB}, l_1)})$ θα είναι $\pi - 60^\circ$. Άρα

$$\text{Π}_{r_{l_1}} \vec{AB} = 20 \cdot \cos(\pi - 60^\circ) =$$

$$= -20 \cos 60^\circ = -10.$$

91. Δίνεται το διάνυσμα \vec{MN} με $M(6, -4, 3)$ και $N(3, 2, 1)$
 Να βρεθεί η προβολή του \vec{MN} πάνω στους άξονες συντεταγμένων.

Λύση:

$$\text{Επειδή } \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} \text{ έχουμε}$$

$$\pi_{P_x} \vec{MN} = \pi_{P_x} \vec{ON} - \pi_{P_x} \vec{OM}$$

$$\text{Αλλά } \pi_{P_x} \vec{ON} = x_2 \text{ και } \pi_{P_x} \vec{OM} = x_1 \text{ άρα } \pi_{P_x} \vec{MN} = x_2 - x_1$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\pi_{P_y} \vec{MN} = y_2 - y_1$ και $\pi_{P_z} \vec{MN} = z_2 - z_1$.

Άρα θα έχουμε:

$$\pi_{P_x} \vec{MN} = 3 - 6 = -3$$

$$\pi_{P_y} \vec{MN} = 2 - (-4) = 6$$

$$\pi_{P_z} \vec{MN} = 1 - 3 = -2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

92. Η διανυσματική ακτίνα του σημείου M εκκλιμακίζεται με τους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα γωνίες 45° και 60° . Το μέτρο της είναι $|\vec{r}| = |\vec{OM}| = 6$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , αν η συντεταγμένη του z είναι αρνητική.

93. Ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ εκκλιμακίζεται με τόν άξονα των x γωνία 120° και έχει μέτρο 4. Να υπολογισθεί η $\pi_{P_x} \vec{\beta}$.

4. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η ΕΥΘΕΙΑ

4.1. Καμπύλες. Γενικά περί καμπύλων

Μια εξίσωση της μορφής $C \rightarrow f(x, y) = 0$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταχμένων στο επίπεδο περιγράφει γενικά μία καμπύλη C . Η εξίσωση αυτή ονομάζεται αναλυτική εξίσωση της καμπύλης C .

Αν ενός σημείου της καμπύλης οι συντεταχμένες του x και y έχουν εκφραστεί συναρτήσει μιας παραμέτρου t , $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν $x = x(t)$, $y = y(t)$ τότε οι εξισώσεις αυτές λέγονται παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης C δηλαδή η καμπύλη εκφράζεται παραμετρικά συναρτήσει του t .

Οι παραπάνω παραμετρικές εξισώσεις γράφονται και ως μία εξίσωση της μορφής

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

όπου \vec{r} είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου $M(x, y)$ της καμπύλης C , και ονομάζεται διανυσματική παραμετρική εξίσωση της καμπύλης C .

Παράδειγμα:

94. Δίνεται η καμπύλη C , που ορίζεται από την εξίσωση $y = x^4 + x^2 + 1$. Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις αυτής και μία διανυσματική παραμετρική εξίσωσή της.

Λύση:

Θέτοντας $x = t$ παίρνουμε $y = t^4 + t^2 + 1$. Άρα παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης C είναι:

$$x = t \quad y = t^4 + t^2 + 1$$

Μία διανυσματική παραμετρική εξίσωση της C είναι η $C \rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t) = t\vec{i} + (t^4 + t^2 + 1)\vec{j}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

95. Δίνεται η καμπύλη C που ορίζεται από την εξίσωση

$y = \frac{x+5}{x-2}$. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της καθώς και μία διανυσματική παραμετρική εξίσωσή της.

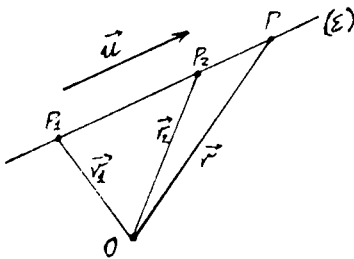
96. Δίνεται η καμπύλη C που ορίζεται από τις εξισώσεις $x = 4 \cos t$, $y = 5 \sin t$. Να βρεθούν μία διανυσματική παραμετρική εξίσωσή της και η εξίσωσή της C χωρίς παραμετρο.

4.2. Η ευθεία γραμμή

Μία ευθεία μπορεί να οριστεί κατά διαφορούς τρόπους. Παρακάτω θα ορίσουμε τις εξισώσεις της ευθείας σε κάθε περίπτωση αφού προτάξουμε ευθύς αμέσως την έννοια του διευθύνοντος διανυσματος της ευθείας.

Διευθύνον διάνυσμα μιας ευθείας λέγεται κάθε διάνυσμα που δεν είναι ίσο με μηδέν και είναι παράλληλο προς την ευθεία αυτή.

Διανυσματική εξίσωση ευθείας Μία ευθεία (ε) μπορεί



να οριστεί από ένα σημείο της $P_1(\vec{r}_1)$ και ένα διάνυσμα \vec{u} παράλληλο προς αυτή.

Αν $P(\vec{r})$ είναι ένα άλλο τυκόν σημείο της ε τότε έχουμε $\vec{P_1P} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και επειδή $\vec{P_1P} = \vec{r} - \vec{r}_1$ έχουμε $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

Η εξίσωση (1) ονομάζεται διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $P_1(\vec{r}_1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα \vec{u} .

Εάν η ευθεία ορίζεται από δύο σημεία $P_1(\vec{r}_1)$ και $P_2(\vec{r}_2)$ η διανυσματική της εξίσωση θα είναι τότε η

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας: Έστω ότι η ευθεία ε ορίζεται από ένα σημείο $P_1(x_1, y_1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha, \beta)$. Τότε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \alpha\lambda \\ y &= y_1 + \beta\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2)$$

ονομάζονται παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας.

Εάν η ευθεία ε ορίζεται από δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ τότε οι παραμετρικές της εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3)$$

Συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση ευθείας: Η εδαπομένη της γωνίας ω που διαγράφει ο θετικός άξονας x στρεφόμενος κατά φορά αντίθετη της φοράς εστρώσης των δεικτών του ωρολογίου (ορθή μαθηματική φορά) μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε , ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας ε . Άρα

$$\lambda = \varepsilon \phi \omega \quad (4)$$

Αν η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα των y τότε η κλίση της δεν ορίζεται.

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ (αλλά όχι παράλληλη προς τον άξονα των y), η κλίση της δίνεται από την

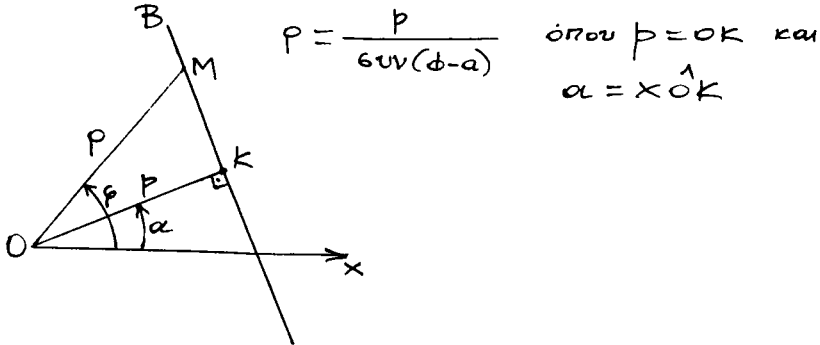
$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \quad (5)$$

Αν η ευθεία ε ορίζεται από δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ (και δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των y), η κλίση της δίνεται από την

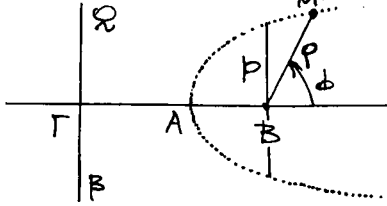
$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

4.2. Γενική εξίσωση ευθείας σε πολικές συντεταχμένες.

Έστω μια ευθεία AB που δεν διέρχεται από τον πόλο O.
Τότε αυτή σε πολικές συντεταχμένες έχει εξίσωση



4.3. Γενική εξίσωση καμπύλων (κωνικών) σε πολικές συντεταχμένες.

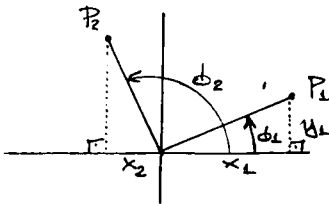


$$\rho = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \phi}$$

(όπου ϵ η εκκενρότητα (πλ. παρακάτω) της καμπύλης).

4.4. Μετασχηματισμός Πολικών Συντεταχμένων σε Καρτεσιανές και ανίστροφα.

Θεωρούμε ότι ο πόλος του συστήματος των Πολικών Συντεταχμένων συμπίπτει με την αρχή του συστήματος των Καρτεσιανών και ότι ο πολικός άξονας του πρώτου συστήματος συμπίπτει με τον άξονα x'x του δεύτερου.



Αν τότε ένα σημείο P του επιπέδου έχει πολικές συντεταχμένες (ϕ, ρ) και καρτεσιανές (x, y) , θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$x = \rho \cos \phi \quad \text{και} \quad y = \rho \sin \phi$$

Άρα θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{array} \right| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \phi = \frac{y}{x} \end{array} \left| \begin{array}{l} \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right.$$

Εξίσωση ευθείας γνωστού συντελεστή διεύθυνσης: Η

εξίσωση της ευθείας που έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ , διέρχεται από γνωστό σημείο $P_1(x_1, y_1)$ και δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των x είναι η

$$y - y_1 = \lambda (x - x_1) \quad (7)$$

Εξίσωση ευθείας διερχομένης από δύο γνωστά σημεία: Η

εξίσωση της ευθείας που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των x και διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ είναι

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (8)$$

ή

$$\varepsilon \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \varepsilon \rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Εξίσωση ευθείας διερχομένης από γνωστό σημείο και παράλληλης προς γνωστό διάνυσμα: Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο $P_1(x_1, y_1)$ και είναι παράλληλη προς γνωστό διάνυσμα $\vec{u} = (a, \beta)$ είναι

$$\varepsilon \rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ a & \beta \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Γενική ή Καρτεσιανή εξίσωση ευθείας:

Από τις προηγούμενες εξισώσεις διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση κάθε ευθείας μπορεί να πάρει την μορφή

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad (11)$$

η οποία ονομάζεται γενική ή καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας.

Εξίσωση ευθείας παράλληλης προς τον άξονα των x

Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς τον άξονα των x είναι η:

$$y = \alpha$$

Εξίσωση ευθείας παράλληλης προς τον άξονα των y:

Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς τον άξονα των y είναι η

$$x = \alpha$$

Συντελεστής διεύθυνσης όταν η ευθεία έχει την μορφή

$Ax + By + \Gamma = 0$: Αν $B \neq 0$ η εξίσωση αυτή γράφεται

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B} \quad \text{άρα} \quad \lambda = -\frac{A}{B} \quad (12)$$

Σημείωση: Αν $A \neq 0$ και $B = 0$ η $Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται $Ax + \Gamma = 0 \Rightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$ και παριστάνει ευθεία ϵ παράλληλη προς τον άξονα Oy σε απόσταση απ' αυτόν $-\frac{\Gamma}{A}$.

Αν $A = 0$ και $B \neq 0$ η $Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται $By + \Gamma = 0 \Rightarrow y = -\frac{\Gamma}{B}$ και παριστάνει ευθεία ϵ παράλληλη προς τον άξονα Ox σε απόσταση απ' αυτόν $-\frac{\Gamma}{B}$.

Αν $\Gamma = 0$ τότε η $Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται

$Ax + By = 0$ και παριστάνει ευθεία διερχομένη από την αρχή των αξόνων

4.5 Μελέτη δύο ευθειών

4.5.1 Σχετική θέση δύο ευθειών:

Θεωρούμε δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις

$$\epsilon_1 \rightarrow A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 \rightarrow A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0.$$

Αυτές μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν.

Αν τέμνονται τότε $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Αν είναι παράλληλες τότε $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ αλλά για τουλάχιστο

κίετο από τις οριζούσες $\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$ ηρε.

ητι να είναι διαφορι του μηδενός

Αν ευμηλιτουν τότε $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ και $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$

4.5.2. Σχέση των συντελεστών διευθύνσεως δύο ευθειών.

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι συντελεστές διευθύνσεώς τους λ_1 και λ_2 είναι ίσοι, δηλαδή

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2 \quad (12)$$

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες αν και μόνο αν οι συντελεστές διευθύνσεώς τους λ_1 και λ_2 έχουν γινόμενο -1

δηλαδή $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_1 \lambda_2 = -1 \quad (13)$

4.5.3 Γωνία δύο ευθειών

Γωνία ω δύο ευθειών τέμνομένων, ε_1 και ε_2 , κατά την θη. ρά που έκων χραφεί, ονομάζεται η γωνία που διαγράβη η ε_1 σρεβομενη κατά την ορδη μαθημασικη φορα εως οτου ευμηλι με την ε_2 . Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διευθύνσεως αντίστοιχα των ευθειών ε_1 και ε_2 τότε η γωνία τους ω δινεται από τον τύπο:

$$\varepsilon \omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2} \quad (14)$$

Διχοτομολ των χωνιών δυο ευθειών: Αν θεωρήσουμε δυο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις

$$\epsilon_1 \rightarrow A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \quad \epsilon_2 \rightarrow A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$$

τότε οι διχοτόμοι των χωνιών τους δίνονται από τους τύπους:

$$\frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (15)$$

Το + λαμβάνεται για την διχοτόμο της οξείας γωνίας των δύο ευθειών και το - για την διχοτόμο της αμβλείας γωνίας.

4.6. Δέσμη ευθειών

Δέσμη ευθειών ονομάζεται το σύνολο όλων των ευθειών που ευρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και διέρχονται από το ίδιο σημείο που ονομάζεται κέντρο της δέσμης

Αν $\epsilon_1 \rightarrow A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $\epsilon_2 \rightarrow A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ είναι δυο τεμνόμενες ευθείες, τότε κάθε ευθεία ϵ που διέρχεται από το σημείο τομής τους, κάθε δηλαδή ευθεία που ανήκει στη δέσμη των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 έχει εξίσωση

$$\alpha (A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \beta (A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \quad (16)$$

Αν $\alpha \neq 0$ και $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ η (16) γίνεται:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 + \lambda (A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \quad (17)$$

Συνθήκη για τρεις ευθείες: Δίδονται τρεις ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\epsilon_1 \rightarrow A_1x + B_1y + \Gamma_1, \quad \epsilon_2 \rightarrow A_2x + B_2y + \Gamma_2, \quad \epsilon_3 \rightarrow A_3x + B_3y + \Gamma_3$$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να διέρχονται από το ίδιο σημείο είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

4.7. Απόσταση σημείου από ευθεία.

Έστω η ευθεία $\varepsilon \rightarrow Ax + By + \Gamma$ και $P_0(x_0, y_0)$ ένα γνωστό σημείο. Η απόσταση $d(P_0, \varepsilon)$ του σημείου αυτού από την ευθεία ε δίνεται από τον τύπο:

$$d(P_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (19)$$

4.8. Εμβαδόν τριγώνου.

Αν ενός τριγώνου οι κορυφές είναι $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$ τότε το εμβαδόν του E δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (20)$$

Επομένως από τον παραπάνω τύπο συμπεραίνουμε ότι: Τρία σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

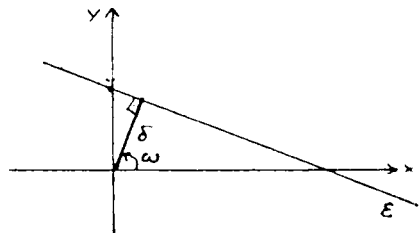
4.9. Κανονική εξίσωση ευθείας ή ευθεία του Hesse

Μια ευθεία ε που δεν διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων μπορεί να γραφεί

$$\varepsilon \rightarrow x \cos \omega + y \sin \omega - \delta = 0 \quad (22)$$

όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο δεξιός ημιάξονας Ox με την κάθετη που άρχεται από την αρχή των συντεταγμένων προς την ε . Η ω μεταβάλλεται από 0 έως 2π .

Το δ είναι η απόσταση της αρχής των συντεταγμένων από την ε .



Παραδείγματα:

57. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$

Λύση:

Εφαρμόζουμε τους τύπους $x = x_1 + \alpha\lambda$, $y = y_1 + \beta\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και βρίσκουμε ότι οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

$$x = -2 - \lambda$$

$$y = 4 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

58. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας της διαμέσου από τα σημεία $P_1(-2, 3)$ και $P_2(1, 0)$

Λύση:

Από τους τύπους $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις είναι:

$$x = -2 + \lambda(1 - (-2))$$

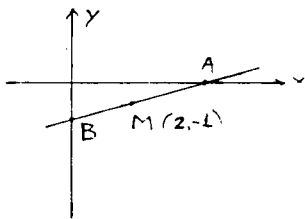
$$x = -2 + 3\lambda$$

$$y = 3 + \lambda(0 - 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\iff y = 3 - 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

59. Να γραφεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2, -1)$ το οποίο είναι μέσο του τμήματος της ευθείας αυτής που ορίζεται από τους άξονες των συντεταγμένων

Λύση:



Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(2, -1)$ και εκκλίνει λ είναι

$$y + 1 = \lambda(x - 2)$$

Αν αυτή τέμνει τους άξονες Ox και Oy

στα σημεία A και B αντίστοιχως τότε είναι: $A\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda}, 0\right)$ και $B(0, -2\lambda-1)$. Αφού το M είναι μέσο του AB θα έχουμε

$$2 = \frac{\frac{2\lambda+1}{\lambda} + 0}{2} \quad \text{και} \quad -1 = \frac{0 + (-2\lambda-1)}{2}$$

Απο όπου παίρνουμε. $\lambda = \frac{1}{2}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι $\varepsilon \rightarrow x - 2y - 4 = 0$.

100. Να υπολογισθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των τεταγμένων η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$.

Λύση:

Αν ω η ζητούμενη γωνία και λ κλίση της ευθείας, πρέπει:

$$\epsilon\phi\omega = \lambda$$

$$\epsilon\phi\omega = \lambda$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{4 - 0}{-2 - 0} = -1$$

$$\Rightarrow \epsilon\phi\omega = -1 \Rightarrow \omega = 135^\circ$$

101. Στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία 45° να βρεθεί σημείο με τεταγμένη 4.

Λύση

Αφού η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία 45° ο συντελεστής διεύθυνσής της θα είναι

$$\lambda = \epsilon\phi 45^\circ \Rightarrow \lambda = 1$$

Άρα η ευθεία θα έχει εξίσωση

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow x - y - 2 = 0 \quad (1)$$

Για να βρούμε σημείο με τεταγμένη 4 που ανήκει στην ευθεία, θέτουμε στην (1) $y = 4$ οπότε $x = 6$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(6, 4)$.

102. Δίνονται τρίγωνο $ΑΒΓ$ κορυφών $A(1,5)$, $B(-1,3)$, $\Gamma(3,-1)$.

Να γραφεί η εξίσωση της διαικσού του $ΑΜ$.

Λύση:

Επειδή το M είναι μέσο του τμήματος $B\Gamma$ οι συντελεστές του θα είναι:

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad \text{και} \quad y = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{Άρα } M(1,1)$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $M(1,1)$ δηλαδή της διαμέσου AM θα είναι

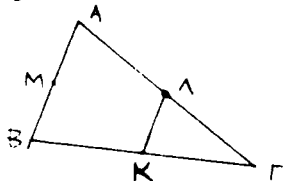
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-5}{1-5} = \frac{x-1}{1-1} \Rightarrow$$

$$(y-5)(1-1) = (x-1)(1-5) \Rightarrow 0 = -4(x-1) \Rightarrow$$

$$AM \rightarrow x-1=0.$$

10.3. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μέσα πλευρών τα σημεία $K(-3,2)$, $\Lambda(-5,7)$, $M(2,-3)$. (βλ. σχήμα). Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

Λύση:



Βρίσκουμε πρώτα την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία K και Λ . Αυτή θα είναι:

$$\frac{y-2}{7-2} = \frac{x+3}{-5+3} \Rightarrow \frac{y-2}{5} = \frac{x+3}{-2}$$

$$\Rightarrow 5(x+3) = -2(y-2)$$

$$\Rightarrow 5x+15 = -2y+4$$

$$\Rightarrow K\Lambda \rightarrow 5x+2y+11=0 \Rightarrow \lambda_{K\Lambda} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Επειδή όμως } AB \parallel K\Lambda \Rightarrow \lambda_{K\Lambda} = \lambda_{AB} = -\frac{5}{2}$$

Η ευθεία λοιπόν που ορίζεται από τα σημεία A και B διέρχεται από γνωστό σημείο $M(2,-3)$ και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης. Άρα θαί έχει εξίσωση:

$$y+3 = -\frac{5}{2}(x-2) \Rightarrow$$

$$-5x+10 = 2y+6 \Rightarrow$$

$$AB \rightarrow 5x+2y-4=0$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$B\Gamma \rightarrow 10x+7y+16=0$$

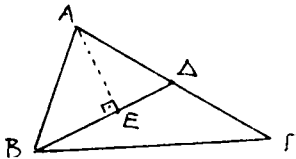
$$A\Gamma \rightarrow x+y-2=0$$

104. Τρίγωνο έχει κορυφές τα σημεία $A(-2,0)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(3,1)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που σχετίζεται από το A κάθετα στη διαμέτρο $ΒΔ$.

Λύση:

Το μέσο Δ της $ΑΓ$ έχει συντεταχμένες τις

$$x_{\Delta} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_{\Delta} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$



Τα σημεία λοιπόν B και Δ είναι γνωστά άρα και η ευθεία που ορίζεται από αυτά προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{y-5}{\frac{1}{2}-5} = \frac{x-2}{\frac{1}{2}-2} \Rightarrow 9x - 3y - 3 = 0. \text{ Άρα } ΒΔ \rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_{ΒΔ} = 3$ Επειδή τώρα οι ευθείες $ΒΔ$ και $ΑΕ$ είναι κάθετες οι συντελεστές διευθύνσεώς τους θα πρέπει να έχουν γινόμενο -1 . Άρα:

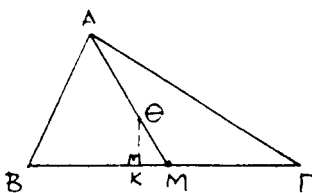
$$\lambda_{ΑΕ} \cdot \lambda_{ΒΔ} = -1 \Rightarrow \lambda_{ΑΕ} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \lambda_{ΑΕ} = -\frac{1}{3}$$

Η ευθεία λοιπόν $ΑΕ$ έχει γνωστό λ και διέρχεται από γνωστό σημείο A . Άρα θα έχει εξίσωση:

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x + 2) \Rightarrow ΑΕ \rightarrow x + 3y + 2 = 0$$

105. Ένα τρίγωνο έχει κορυφές τα σημεία $A(6,0)$, $B(0,2)$ και $\Gamma(-4,6)$. Να υπολογισθούν οι συντεταχμένες του ίκνου της κάθετης που σχετίζεται από το κέντρο βαρύτητας Θ του τριγώνου προς την πλευρά $ΒΓ$.

Λύση:



Βρίσκουμε πρώτα τις συντεταχμένες του σημείου M (μέσο της $ΒΓ$): Έχουμε:

$$x_M = \frac{0-4}{2} = -2, \quad y_M = \frac{2+6}{2} = 4$$

Το Θ σαν βαρύκεντρο διαιρεί την δια-

μέσο AM σε δύο τμήματα με λόγο $\frac{2}{1}$. Άρα οι συντεταγμένες του Θ θα είναι

$$x_{\Theta} = \frac{6 + \frac{2}{1}(-2)}{1 + \frac{2}{1}}, \quad y_{\Theta} = \frac{0 + \frac{2}{1} \cdot 4}{1 + \frac{2}{1}} \Rightarrow$$

$$x_{\Theta} = \frac{2}{3}, \quad y_{\Theta} = \frac{8}{3}$$

Η ΒΓ σαν ευθεία έχει εξίσωση: $\frac{y-2}{6-2} = \frac{x-0}{-4-0} \Rightarrow$

$$\frac{y-2}{4} = \frac{x}{-4} \Rightarrow \text{ΒΓ} \rightarrow x+y-2=0 \Rightarrow \lambda_{\text{ΒΓ}} = -\frac{1}{1} = -1$$

Επειδή οι ευθείες ΒΓ και ΘΚ είναι κάθετες, θα ισχύει

$$\lambda_{\text{ΒΓ}} \cdot \lambda_{\text{ΘΚ}} = -1 \Rightarrow -1 \cdot \lambda_{\text{ΘΚ}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{ΘΚ}} = 1.$$

Η ευθεία τώρα ΘΚ προσδιορίζεται από την εξίσωση (γνωστο $\lambda_{\text{ΘΚ}}$ και γνωστό σημείο Θ):

$$y - \frac{8}{3} = 1 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\text{ΘΚ} \rightarrow x - y + 2 = 0$$

Συνεπώς οι συντεταγμένες του Κ θα είναι:

$$K = \text{ΒΓ} \cap \text{ΘΚ} = \{(x,y) / x+y-2=0 \wedge x-y+2=0\} \Rightarrow K(0,2)$$

10%. Να δείξει ότι οι ευθείες $\epsilon_1 \rightarrow 3x+4y-2=0$ και $\epsilon_2 \rightarrow 6x+8y-15=0$ είναι παράλληλες και να βρεθεί η με-
ταξύ τους απόσταση

Λύση:

Εάν λ_1 και λ_2 είναι αντίστοιχως οι κλίσεις των ϵ_1 και ϵ_2 , έχουμε $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$ και $\lambda_2 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$.

Αφού λοιπόν $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \epsilon_1 \parallel \epsilon_2$

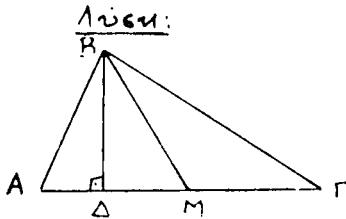
Για να βρεθεί η απόσταση τους αρκεί να βρούμε την από-
σταση ενός σημείου της μιας από την άλλη. Ένα τέτοιο ση-

μείο της ϵ_1 είναι π.χ το $P_1(-2,2)$ Άρα

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = d(P_1, \epsilon_2) = \frac{|6 \cdot (-2) + 8 \cdot 2 - 15|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-11|}{10} = \frac{11}{10}$$

107. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(-2,0)$, $B(2,6)$ και $\Gamma(4,2)$

Να γραφούν οι εξισώσεις της πλευράς $A\Gamma$, του ύψους $B\Delta$ και της διαμέσου BM .



Πλευρά $A\Gamma$:

$$A\Gamma \rightarrow \frac{y-0}{2-0} = \frac{x+2}{4+2} \Rightarrow$$

$$A\Gamma \rightarrow x-3y+2=0 \Rightarrow \lambda_{A\Gamma} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Επειδή } A\Gamma \perp B\Delta \Rightarrow \lambda_{B\Delta} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

Η $B\Delta$ διέρχεται από γνωστό σημείο B και έχει γνωστή κλίση,

άρα η εξίσωσή της θα είναι: $y-6 = -3(x-2) \Rightarrow$

$$B\Delta \rightarrow 3x+y+12=0.$$

Το σημείο M ως μέσο του ευθυγραμμίου $A\Gamma$ θα έχει συντεταγμένες

$$M_x = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{και} \quad M_y = \frac{0+2}{2} = 1$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα B και M

$$\text{θα είναι } \frac{y-6}{1-6} = \frac{x-2}{1-2} \Rightarrow \frac{y-6}{-5} = \frac{x-2}{-1} \Rightarrow$$

$$BM \rightarrow 5x-y-4=0$$

108. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $A(\alpha, 1)$, $B(0, \beta)$ και $\Gamma(\gamma, 1)$.

Λύση:

Εφαρμόζουμε τον τύπο (20) του υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου και έχουμε:

$$E = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \beta & 1 \\ \gamma & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \alpha (\beta - 1) - \frac{1}{2} (-\gamma) + \frac{1}{2} (-\beta\gamma) = \frac{1}{2} (\alpha\beta - \alpha + \gamma - \beta\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} [\beta(\alpha - \gamma) - (\alpha - \gamma)] = \frac{(\alpha - \gamma)(\beta - 1)}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

109. Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία Α(-5,2), Β(5,6) και Γ(1,2). Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη προς την διάμεσο ΑΜ στο σημείο Μ.

110. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα των x στο 3 και η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $x - 4y + 2 = 0$.

111. Να γραφούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon \rightarrow 2x - 5y - 10 = 0$ στα σημεία τομής αυτής της ευθείας με τους άξονες των συντεταγμένων.

112. Να γραφούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(-1,0) και σχηματίζουν γωνία 45° με την ευθεία $\varepsilon \rightarrow 2x + 3y - 6 = 0$.

113. Οι εξισώσεις των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι $\varepsilon_1 \rightarrow 2x - 3y + 5 = 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 3x + 2y - 7 = 0$. Να γραφούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του ορθογωνίου, αν η μία του κορυφά είναι το σημείο Α(2,-3).

114. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Ρ(4,-1) από την ευθεία $12x - 5y - 27 = 0$.

115. Το τμήμα της ευθείας $\varepsilon \rightarrow x - y + 4 = 0$ που αποκόπτεται

απο τους άξονες των συντεταχμένων είναι η μία διαχώνια ενός ρομβού. Να βρεθεί η εξίσωση της άλλης διαχώνιας του ρομβού

116. Να διαπιστωθεί ποιές είναι παράλληλες και ποιές κάθετες μεταξύ των ευθειών: $\varepsilon_1 \rightarrow 3x - 2y + 7 = 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 6x - 4y - 9 = 0$, $\varepsilon_3 \rightarrow 6x + 4y - 5 = 0$ και $\varepsilon_4 \rightarrow 2x + 3y - 6 = 0$.

117. Να βρεθεί η γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 στις παρακάτω περιπτώσεις:

α'. $\varepsilon_1 \rightarrow 6x + 4y + 9 = 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 3x + 2y = 0$

β'. $\varepsilon_1 \rightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, $\varepsilon_2 \rightarrow \frac{x}{\beta} - \frac{y}{\alpha} = 1$

118. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με εξισώσεις $\varepsilon_1 \rightarrow 3x - y + 6 = 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow x - y + 4 = 0$, $\varepsilon_3 \rightarrow x + 2y = 0$. Να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου.

119. Ένος τριγώνου ΑΒΓ δύο από τα ύψη του βρίσκονται στις ευθείες $\varepsilon_1 \rightarrow 7x - 2y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 \rightarrow 2x - 7y - 6 = 0$. Η μία κορυφή του είναι η Α(3, -4). Να γραφούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

120. Δίδονται τα σημεία Α(-2, 3), Β(3, 8), Γ(3, 1) και Δ(-2, -4). Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και ναδειχθεί ότι αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

121. Οι δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $AB \rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$ και $AD \rightarrow 5x - 12y - 6 = 0$. Το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ έχει συντεταγμένες $(-2, \frac{13}{6})$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του παραλληλογράμμου

122. Να γραφεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(2, -1) και από την κομή των ευθειών $\varepsilon_1 \rightarrow 7x - y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 \rightarrow 3x + 5y - 4 = 0$

123. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που ενώνουν τα μέσα των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφές (-3, 2), (3, -2) και (0, -1) και ναδειχθεί ότι είναι παράλληλες προς τις πλευρές.

124. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από την κομή των ευθειών $\varepsilon_1 \rightarrow x + 2y = 1$, $\varepsilon_2 \rightarrow 2x - 4y - 3 = 0$.

4.10. Ο Κύκλος

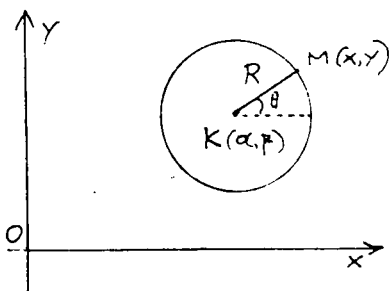
Κύκλος ονομάζεται το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου καθένα από τα οποία απέχει εαθερή απόσταση από ένα εαθερό σημείο K που λέγεται κέντρο του κύκλου

Η εαθερή απόσταση ονομάζεται ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $d(M, K) = R$ (1)

Αν $K(a, \beta)$ είναι το κέντρο του κύκλου και R η ακτίνα του εκ της (1) έχουμε

$$(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \quad (2)$$

η οποία ονομάζεται κανονική εξίσωση του κύκλου.



Αν το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των συντεταχμένων η (2) γράφεται

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$

Από την (2) έχουμε

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2\beta y + a^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Αν θέσουμε } \Delta = -2a, \quad E = -2\beta, \quad Z = a^2 + \beta^2 - R^2 \quad (5)$$

η (4) γράφεται:

$$x^2 + y^2 + \Delta x + E y + Z = 0 \quad (6)$$

Από τις (5) έχουμε:

$$a = -\frac{\Delta}{2}, \quad \beta = -\frac{E}{2} \quad \text{και} \quad R^2 = \frac{\Delta^2 + E^2 - 4Z}{4}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η καμπύλη που περιγράφεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + \Delta x + E y + Z = 0$, προσδιορίζεται ως εξής:

α') Εάν $\Delta^2 + E^2 - 4Z > 0$ η καμπύλη είναι κύκλος με κέντρο $(-\frac{\Delta}{2}, -\frac{E}{2})$ και ακτίνα $R = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + E^2 - 4Z}$

β') Αν $\Delta^2 + E^2 - 4Z = 0$ η καμπύλη εκφυλίζεται σε ένα σημείο $(-\frac{\Delta}{2}, -\frac{E}{2})$.

χ') Αν $\Delta^2 + E^2 - 4Z < 0$, δεν υπάρχει καμπύλη

Ένα σύστημα παραμετρικών εξισώσεων του κύκλου είναι

$$x = \alpha + R \cos \theta, \quad y = \beta + R \sin \theta \quad (7)$$

με παράμετρο την γωνία θ που εκμηματίζει η τυχούσα ακτίνα KM , όπου $M(x, y)$ τυχόν σημείο του κύκλου, με τον άξονα Ox

Από τις (7) έχουμε μια διακυβηματική παραμετρική εξίσωση του κύκλου:

$$\vec{r}(\theta) = (\alpha + R \cos \theta) \vec{i} + (\beta + R \sin \theta) \vec{j} \quad (8)$$

Η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τρία δεδομένα σημεία $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ είναι:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

με την προϋπόθεση ότι:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Παραδείγματα:

125. Να γραφούν στην κανονική τους μορφή οι εξισώσεις των κύκλων: i) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ ii) $x^2 + y^2 + x - 5y - 3 = 0$.

Λύση:

i) Έχουμε $\Delta = -2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 1$

$E = -2\beta = 4 \Rightarrow \beta = -2$

$Z = 0, \quad R^2 = \frac{4 + 16 - 40}{4} = 5$

Άρα από την $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

ii) Έχουμε:

$$\Delta = -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$E = -2\beta = -5 \Rightarrow \beta = \frac{5}{2}$$

$$Z = -3$$

$$R^2 = \frac{1+25-4(-3)}{4} = \frac{1+25+12}{4} = \frac{38}{4}$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{38}{4}$$

125. Να γραφεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$, $B(0,6)$, $\Gamma(3,0)$

Λύση:

1^{ος} τρόπος: Με την κανονική εξίσωση του κύκλου:

$$\text{Έστω } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \quad (1)$$

ο ζητούμενος κύκλος. Αφού το σημείο A βρίσκεται πάνω

ε'αυτὸν θὰ ἔκοιμε $(0-\alpha)^2 + (1-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$

$$\alpha^2 + 1 + \beta^2 - 2\beta = R^2 \quad (2)$$

Για τὸ σημείο B θὰ ἔκοιμε ομοίως:

$$(0-\alpha)^2 + (6-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 36 + \beta^2 - 12\beta = R^2 \quad (3)$$

Για τὸ σημείο Γ :

$$(3-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$9 + \alpha^2 - 6\alpha + \beta^2 = R^2 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3), (4) βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{5}{2}, \beta = \frac{7}{2}, R^2 = \frac{\sqrt{50}}{2} \quad (\text{δηλ } R = \frac{5\sqrt{2}}{2})$$

καί αντικαθιστώντας στην (1) ἔκοιμε τὴν ζητούμενη εξίσωση:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Δηλ. τὸ κέντρο τοῦ εἶναι $K\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

2^{ος} τρόπος:

Έστω ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 + y^2 + \Delta x + E y + Z = 0 \quad (1)$$

Επειδή τα σημεία Α, Β, Γ βρίσκονται επί του κύκλου, θα επαληθεύσουν οι συντεταγμένες τους την (1). Έτσι θα έχουμε

$$\text{για το σημείο Α (0,1): } 0^2 + 1^2 + \Delta \cdot 0 + E \cdot 1 + Z = 0 \Rightarrow 1 + E + Z = 0 \quad (2)$$

$$\text{για το σημείο Β (0,6): } 0^2 + 6^2 + \Delta \cdot 0 + E \cdot 6 + Z = 0 \Rightarrow 36 + 6E + Z = 0 \quad (3)$$

$$\text{για το σημείο Γ (3,0): } 3^2 + 0^2 + \Delta \cdot 3 + E \cdot 0 + Z = 0 \Rightarrow 9 + 3\Delta + Z = 0 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2), (3), (4) παίρνουμε:

$$E = -7, \quad Z = 6, \quad \Delta = -5$$

αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε την ζητούμενη εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$$

Παρατήρηση: Το κέντρο του κύκλου θα είναι $K\left(-\frac{\Delta}{2}, -\frac{E}{2}\right)$
 $\Rightarrow K\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ και η ακτίνα του $R = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + E^2 - 4Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 49 - 24} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{50} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

127. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(0, -3)$, $P_2(4, 0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $x + 2y = 0$.

Λύση:

Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 + y^2 + \Delta x + E y + Z = 0 \quad (1)$$

Αφού τα σημεία P_1, P_2 βρίσκονται επί του κύκλου, έχουμε αντίστοιχα:

$$0^2 + (-3)^2 + \Delta \cdot 0 + E(-3) + Z = 0 \Rightarrow 9 - 3E + Z = 0 \quad (2)$$

$$4^2 + 0^2 + \Delta \cdot 4 + E \cdot 0 + Z = 0 \Rightarrow 16 + 4\Delta + Z = 0 \quad (3)$$

Το κέντρο της (1) είναι $\left(-\frac{\Delta}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ και επειδή βρίσκεται επί της ευθείας $x + 2y = 0$, θα έχουμε:

$$-\frac{\Delta}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{E}{2}\right) = 0 \Rightarrow \Delta + 2E = 0 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2), (3), (4) παίρνουμε

$$\Delta = -\frac{14}{5}, \quad E = \frac{7}{5}, \quad Z = -\frac{24}{5}, \quad \text{και ανεικαθιστώντας}$$

στην (1) παίρνουμε την ζητούμενη εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - \frac{14}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow$$

$5x^2 + 5y^2 - 14x + 7y - 24 = 0$. Κέντρο είναι το σημείο $(\frac{7}{5}, -\frac{7}{10})$ και η ακτίνα r με $\frac{1}{2}\sqrt{29}$

128. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1, -1)$ που να εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon \rightarrow 5x - 12y + 9 = 0$.

Λύση:

Εστω R η ακτίνα του κύκλου. Επειδή αυτός εφάπτεται στην (ε) πρέπει

$$R = d(K, \varepsilon) \Rightarrow R = 2$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

129. Να γραφτεί την εξίσωση του κύκλου του οποίου τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-3, 2)$ είναι άκρα της διαμέτρου του.

Λύση:

Το κέντρο K του κύκλου θα είναι μέσο του ευθυγραμμίου τμήματος AB , άρα θα έχει συντεταγμένες

$x_k = \frac{1-3}{2} = -1$ και $y_k = \frac{4+2}{2} = 3$ Άρα το κέντρο είναι $K(-1, 3)$

Η ακτίνα R θα είναι $R = \frac{d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$

Συνεπώς ο κύκλος έχει εξίσωση:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

130. Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου $C \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon \rightarrow 5x + 2y - 13 = 0$.

Λύση:

Ο κύκλος C γράφεται και ως εξής (βλ. παραδείγμα 1)

$$C \rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 30$$

και παρατηρούμε ότι έχει κέντρο $K(-2, 3)$. Αφού η ζητούμενη διάμετρος είναι κάθετη στον $E \rightarrow 5x + 2y - 13 = 0$, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{2}{5}$. Άρα αφού μια διάμετρος διέρχεται από το κέντρο $K(-2, 3)$, θα έχει εξίσωση.

$$y-3 = \frac{2}{5}(x+2) \Rightarrow 2x - 5y + 19 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

131. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(-2, 0)$ και ακτίνα $R=2$.

132. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(2, 3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$.

133. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(4, 2)$, $(-6, -2)$ και έχει το κέντρο του στον άξονα των y .

134. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $(-1, -5)$ και εφάπτεται στον άξονα των x .

135. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία $P_1(3, 2)$ και $P_2(-7, 4)$.

136. Ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ευθείες $E_1 \rightarrow x-6=0$, $E_2 \rightarrow x+2y=0$, $E_3 \rightarrow x-2y=8$.

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου αυτού.

137. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(5, 0)$ και απόκοπται από τον άξονα των τεταγμένων κορδή μήκους 10.

138. Δίνεται ο κύκλος $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$ και το σημείο $(2, 6)$.

Μια ευθεία διέρχεται από το σημείο A και εφάπτεται του κύκλου στο B . Να υπολογίσετε το μήκος του AB .

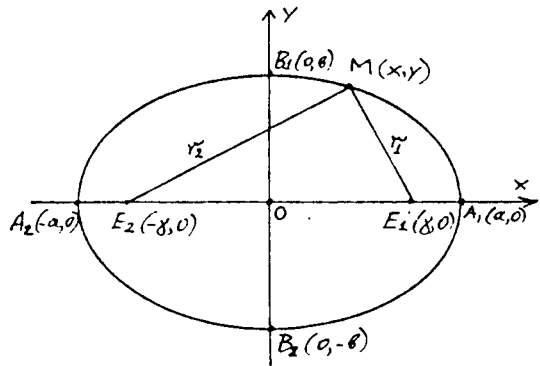
4.11. Η έλλειψη

Έλλειψη καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο δεδομένα σημεία E_1 και E_2 είναι σταθερό. Δηλαδή

$$d(M, E_1) + d(M, E_2) = \text{σταθερό.}$$

Τα σημεία E_1 και E_2 ονομάζονται εστίες της έλλειψης και η απόστασή τους $d(E_1, E_2)$ εστιακή απόσταση.

Οι αποστάσεις του σημείου M από τις εστίες E_1 και E_2 ονομάζονται εστιακές ακτίνες



Συμβολισμοί:

$$d(E_1, E_2) = 2c > 0$$

$$d(M, E_1) + d(M, E_2) = 2a > 0$$

$$d(M, E_1) = r_1$$

$$d(M, E_2) = r_2$$

Παρατηρούμε ότι: $r_1 + r_2 > 2c \Rightarrow 2a > 2c \Rightarrow a > c$.

Άξονα των x θεωρούμε τον διερχόμενο από τις εστίες και ονομάζεται κύριος άξονας.

Άξονα των y θεωρούμε τον μεσοκάθετο της εστιακής απόστασης και ονομάζεται δευτερεύων άξονας.

Είσιωση έλλειψης: Αποδεικνύεται εύκολα ότι η είσιωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ όπου $b^2 = a^2 - c^2$.

Οι εστίες έχουν συντεταγμένες $E_1(c, 0)$, $E_2(-c, 0)$

Τα σημεία $A_1(a, 0)$ και $A_2(-a, 0)$ που η έλλειψη τέμνει τον κύριο άξονα ονομάζονται κύριες κορυφές.

Το ευθύγραμμο τμήμα $A_1A_2 = 2a$ ονομάζεται μεγάλος άξονας

Τα σημεία $B_1(0, b)$ και $B_2(0, -b)$ έτα οποία η έλλειψη τέμνει τον

τον δευτερεύοντα άξονα ονομάζονται δευτερεύουσες κορυφές

Το ευθύγραμμο τμήμα $B_1B_2 = 2\beta$ ονομάζεται μικρός άξονας.

ΟΡΙΣΜΟΙ: I. Εκκεντρότητα ϵ της έλλειψης ονομάζουμε τον λο.

$$\chi \sigma \quad \epsilon = \frac{\chi}{\alpha}$$

$$\text{Επειδή } \chi < \alpha \Rightarrow \epsilon < 1.$$

II. Διευθετούσες δ_1, δ_2 της έλλειψης ονομάζονται

$$\text{οι ευθείες } \delta_1 \rightarrow x_1 - \frac{a^2}{\chi} = 0 \quad \text{και} \quad \delta_2 \rightarrow x + \frac{a^2}{\chi} = 0$$

Επειδή $\chi < \alpha \Rightarrow \alpha < \frac{a^2}{\chi}$ άρα οι διευθετούσες δ_1 και δ_2 δεν τέμνουν την έλλειψη.

III. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο βυκείο της $P_0(x_0, y_0)$

$$\text{έχει εξίσωση } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1.$$

Παραδείγματα:

139. Να γραφούν οι εξισώσεις της έλλειψης στις παρακατω περιπτώσεις:

α) Οι ημιάξονες είναι αντίστοιχα 4 και 2

β) Η εστιακή απόσταση είναι 6 και ο μεγάλος άξονας 5.

γ) Ο μεγάλος ημιάξονας 10 και η εκκενρότητα $\epsilon = 0,8$.

δ) Ο μικρός ημιάξονας 3 και η εκκενρότητα $\epsilon = \sqrt{2}/2$.

ε) Το άθροισμα των ημιαξόνων θ και η εστιακή απόσταση θ

Λύση:

$$\alpha) \text{ Έχουμε } a=4 \text{ και } \beta=2 \text{ άρα } \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\beta) \text{ Από } 2\chi = 6 \Rightarrow \chi = 3 \text{ . Εκ της } \beta^2 = a^2 - \chi^2 \text{ με } \chi = 3 \text{ και } a = 5 \text{ βρίσκουμε } \beta^2 = 16 \text{ . Άρα } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$\gamma) \text{ Έχουμε } a = 10 \text{ και } \epsilon = 0,8 \text{ . Εκ της } \epsilon = \frac{\chi}{a} = 0,8 \Rightarrow \chi = 8 \text{ και εκ της } \beta^2 = a^2 - \chi^2 \Rightarrow \beta^2 = 36 \text{ . Άρα } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

$$\delta) \text{ Είναι } \beta = 3 \text{ άρα } a^2 = 18 \text{ άρα } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\epsilon) \text{ Είναι } a + \beta = \theta \text{ και } 2\chi = \theta \Rightarrow \chi = 4$$

$$\text{Επειδή } \chi^2 = a^2 - \beta^2 \Rightarrow a^2 - \beta^2 = 16 \text{ και λύνουμε το σύστημα:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 8 \\ \alpha^2 - \beta^2 = 16 \end{array} \right\} \text{ απ' όπου } \alpha = 5, \beta = 3. \text{ Άρα } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

140. Από την εστία $E_1(x, 0)$ της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ φέρουμε κορδή κάθετη στον μεγάλο άξονα. Να βρεθεί το μήκος αυτής της κορδής.

Λύση:

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $E_1(x, 0)$ και είναι κάθετη στο μεγάλο άξονα της έλλειψης έχει εξίσωση

$$\varepsilon \rightarrow x = \chi.$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ε με την έλλειψη, λύ-
 νουμε το σύστημα:

$$\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = \chi \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - \chi^2) \\ x = \chi \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y^2 = \frac{b^4}{a^2} \\ x = \chi \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \pm \frac{b^2}{a} \\ x = \chi \end{array}$$

$$\text{Άρα } M_1(x_1, y_1) = \left(\chi, \frac{b^2}{a} \right), M_2(x_2, y_2) = \left(\chi, -\frac{b^2}{a} \right)$$

$$\text{Και } |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \frac{2b^2}{a}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

141. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μικρό ημιάξονα ίσο με θ και διευθετούσες με εξισώσεις $x = \pm \theta$

142. Να γραφούν οι εξισώσεις της έλλειψης όταν: α) Οι ημιάξονες είναι 5 και 4. β) Η εστιακή απόσταση είναι θ και ο μεγάλος ημιάξονας 10. γ) Ο μεγάλος ημιάξονας είναι 26 και η εκκεντρότητα $e = \frac{12}{13}$.

143. Οι αποστάσεις μιας εστίας της έλλειψης από τις κύριες κορυφές της είναι 7 και 1. Να γραφτεί η εξίσωση της έλλειψης

144. Δίνεται η έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$ και το σημείο $P(1, 1)$. Να γραφτεί η εξίσωση της κορδής που έχει μέσο το P .

4.12. Η υπερβολή

Υπερβολή καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που η απόλυτη διαφορά των αποστάσεων από δύο δεδομένα σημεία E_1 και E_2 είναι σταθερή. Δηλαδή

$$|d(M, E_1) - d(M, E_2)| = \text{σταθερό}$$

Τα σημεία E_1 και E_2 ονομάζονται εστίες της υπερβολής και η απόστασή τους $d(E_1, E_2)$ εστιακή απόσταση

Οι αποστάσεις του σημείου M από τις εστίες E_1 και E_2 ονομάζονται εστιακές ακτι

νες.

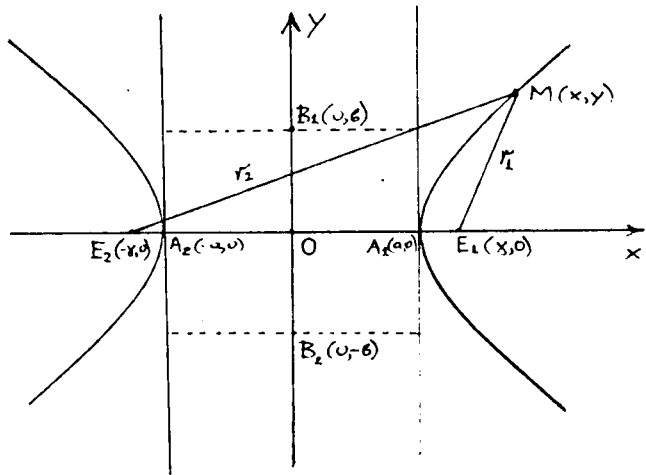
Συμβολισμοί:

$$d(E_1, E_2) = 2\alpha$$

$$|d(M, E_1) - d(M, E_2)| = 2\alpha$$

$$d(M, E_1) = r_1$$

$$d(M, E_2) = r_2$$



Άξονα των x θεωρούμε τον διερχόμενο από τις εστίες και ονομάζουμε πρωτεύων ή πραγματικός άξονας.

Άξονα των y θεωρούμε τον μεσοκάθετο της εστιακής απόστασης και ονομάζουμε δευτερεύων ή φανταστικός άξονας.

Το μέσο O της εστιακής απόστασης ονομάζεται κέντρο

Εξίσωση υπερβολής: Αποδεικνύεται εύκολα ότι η εξίσωση της υπερβολής είναι: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

Οι εστίες έχουν συντεταχμένες $E_1(\gamma, 0)$, $E_2(-\gamma, 0)$

Τα σημεία $A_1(\alpha, 0)$ και $A_2(-\alpha, 0)$ που η υπερβολή τέμνει τον πρωτεύοντα άξονα ονομάζονται κορυφές.

Το ευθύγραμμο τμήμα $AA = 2\alpha$ ονομάζεται άξονας της υπερβολής

Στο επίπεδο μπορούμε να ορίσουμε δύο σημεία $B_1(0, \beta)$ και $B_2(0, -\beta)$ που δεν ανήκουν στην υπερβολή. Το μήκος $B_1B_2 = 2\beta$ ονομάζεται μήκος του δευτερεύοντα άξονα και το ευθύγραμμο τμήμα B_1B_2 ευζυγής άξονα.

ΟΡΙΣΜΟΙ: I. Εκκεντρότητα ϵ της υπερβολής ονομάζουμε τον λόγο $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

$$\text{Επειδή } \gamma > \alpha \Rightarrow \epsilon > 1$$

II. Διευθετούσες δ_1, δ_2 της υπερβολής ονομάζονται οι ευθείες $\delta_1 \rightarrow x - \frac{\alpha}{\epsilon} = 0$ και $\delta_2 \rightarrow x + \frac{\alpha}{\epsilon} = 0$

Επειδή $\frac{\beta}{\alpha} > 1 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\gamma} < \alpha$ άρα οι διευθετούσες δ_1 και δ_2 δεν τέμνουν την υπερβολή.

III. Η εδαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $P_0(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $\frac{x_0 x}{\alpha} - \frac{y_0 y}{\beta} = 1$

IV. Ασύμπτωτες της υπερβολής ονομάζονται οι ευθείες $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$.

V. Συζυγείς λέγονται οι υπερβολές με εξισώσεις $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$

VI: Ισοσκελής λέγεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$.

Παραδείγματα:

145. Να γραφεί η εξίσωση της υπερβολής με εστιακή απόσταση 10 και απόσταση κορυφών 8.

Λύση:

Έχουμε $E_1E_2 = 10$ και $A_1A_2 = 8$, άρα $2\gamma = 10$ και $2\alpha = 8$

Επειδή στην υπερβολή έχουμε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = 16$ και $\beta^2 = 9$

Άρα η εξίσωση θα είναι $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

146. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από τα σημεία $A(5, \frac{9}{2})$ και $B(\frac{20}{3}, 8)$.

Λύση:

$$\text{Εστω } C \rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (1)$$

η ζητούμενη εξίσωση της υπερβολής.

$$\text{Επειδή το σημείο } A \in C \text{ θα έχουμε: } \frac{25}{\alpha^2} - \frac{\frac{81}{4}}{\beta^2} = 1 \quad (2)$$

$$\text{και επειδή } B \in C \text{ θα έχουμε } \frac{\frac{400}{9}}{\alpha^2} - \frac{64}{\beta^2} = 1 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) βρίσκουμε

$$\alpha^2 = 16, \quad \beta^2 = 36$$

Άρα από την (1) έχουμε

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$$

147. Να γραφεί η εξίσωση της υπερβολής με μήκος πρωτεύοντα άξονα 6 που να διέρχεται από το σημείο $A(9, -4)$.

Λύση:

$$\text{Εστω } \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ η εξίσωση της υπερβολής.}$$

$$\text{Έχουμε } 2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3 \text{ άρα η εξίσωση γράφεται } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Επειδή όμως η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $A(9, -4)$

$$\text{θα έχουμε } \frac{9^2}{9} - \frac{16}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \beta^2 = 2 \text{ οπότε η υπερβολή θα είναι:}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

148. Να βρεθεί η τομή της ευθείας $2x - y + 1 = 0$ με την υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

149. Η εκκεντρότητα μιας υπερβολής είναι $e = 2$ και μία από τις εστίες της $E(12, 0)$. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου M της υπερβολής με τεταγμένη $x = 13$ από την διευθετούσα που αντίστοιχη στη δεδομένη εστία

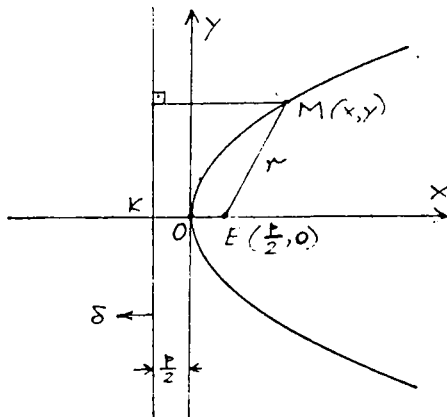
4.13. Η παραβολή

Παραβολή καλείται ο χωμαεργικός τόπος των ευθειών M του επιπέδου που η απόστασή τους από μία σταθερή ευθεία είναι ίση με την απόστασή τους από ένα δεδομένο σημείο. Δηλαδή

$$d(M, \delta) = d(M, E)$$

Η σταθερή ευθεία ονομάζεται διευθετούσα της παραβολής και το δεδομένο σημείο E εστία της παραβολής

Η απόσταση $EK = p$ της εστίας από την διευθετούσα ονομάζεται παραμέτρος της παραβολής



Εξίσωση παραβολής:

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της παραβολής είναι: $y^2 = 2px$.

Άξονα των x θεωρούμε την κάθετη από την εστία στην διευθετούσα.

Άξονα των y θεωρούμε την μεσοκάθετη του τμήματος KE

Η εστία έχει συντεταχμένες $\frac{p}{2}, 0$ δηλαδή $E(\frac{p}{2}, 0)$

Η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $\delta \rightarrow x + \frac{p}{2} = 0$.

Το σημείο που η παραβολή τέμνει τον άξονα των x ονομάζεται κορυφή της παραβολής.

Ο άξονας των x λέγεται άξονας της παραβολής

Η απόσταση r κάθε σημείου M της παραβολής από την εστία της ονομάζεται εστιακή ακτίνα. Είναι $r = \frac{p}{2} + x$ (όταν η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2px$).

Η εόσπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $P_0(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση: $y_0 y = p(x + x_0)$. Άρα και η κάθετη της ίδιας παραβολής στο ίδιο σημείο έχει εξίσωση $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$.

Παραδείγματα:

150. Στην παραβολή $y^2 = 16x$ να βρεθούν τα σημεία που έχουν εστιακή απόσταση $r = 13$

Λύση:

$$\text{Από την } y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 8x \Rightarrow p = 8$$

$$\text{Από τον τύπο } r = \frac{p}{2} + x \Rightarrow x = r - \frac{p}{2} \Rightarrow x = 13 - \frac{8}{2} = 9$$

Θέτοντας τώρα $x = 9$ στην $y^2 = 16x$ παίρνουμε

$$(9, 12), (9, -12)$$

151. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο $E(5, 0)$ και διευθετούσα τον άξονα των τεταγμένων

Λύση:

Εάν $M(x, y)$ τυχόν σημείο της παραβολής, εκ του ορισμού της έχουμε

$$\begin{aligned} d(M, E) &= d(M, O_y) \Rightarrow \\ \sqrt{(x-5)^2 + y^2} &= |x| \\ \Rightarrow y^2 &= 10x - 25 \end{aligned}$$

152. Να βρεθεί το σημείο επαφής της ευθείας $E \rightarrow x + 3y + 9 = 0$ και της παραβολής $y^2 = 4x$

Λύση:

Η εφαπτομένη e_1 της παραβολής $y^2 = 4x = 2 \cdot 2x$ στο σημείο της $P_0(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $e_1 \rightarrow yy_0 = 2(x+x_0) \Rightarrow e_1 \rightarrow 2x - yy_0 + 2x_0 = 0$

Αλλά οι E και e_1 ως εφαπτόμενες στο σημείο P_0 της παραβολής, ταυτίζονται

$$\text{Άρα πρέπει } \frac{2}{1} = \frac{-y_0}{3} = \frac{2x_0}{9} \Rightarrow (x_0, y_0) = (9, -6)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

153. Ποιά είναι η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 12x$, κάθετη στην ευθεία $2x + y - 7 = 0$.

154. Να γραφούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 8x$ που διέρχονται από το σημείο $P(5, -7)$

4.14 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ.

Οι πολικές συντεταχμένες της ελλείψεως και της υπερβολής με πόλο του εστιακού αναφοράς το κέντρο της κωνικής, είναι:

$$\text{Έλλειψη: } r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \phi}$$

$$\text{Υπερβολή: } r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \phi - 1}$$

Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν από τον Κέπλερ, μετά την διατύπωση απ' αυτόν του πρώτου, υπό το όνομα του Νόμου της Αστρονομίας. Ο πρώτος αυτός Νόμος του Κέπλερ μας λέει ότι οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις των οποίων τ'ήν μία εστία κατέχει ο Ήλιος.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε σαν (πολικές) συντεταχμένες της θέσεως ενός πλανήτη, κατά μία χρονική στιγμή, την απόστασή του από τον Ήλιο και την γωνία που αντιστοιχεί στην θέση αυτή, της πολικής ακτίνας με τον ηρωτεύοντα άξονα της ελλειπτικής τροχιάς του πλανήτη.

5. ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Οι γραφικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται συχνά στις εφρμοσμένες επιστήμες και στα οικονομικά για να παρουσιάσουν βεβαιτικές πληροφορίες με τέτοιο τρόπο, ώστε η μεταβολή των τιμών μιας ποσότητας που εξαρτάται από την μεταβολή των τιμών μιας άλλης ποσότητας, να μπορεί να φανεί με μία ματιά.

Η ακρίβεια των γραφικών μεθόδων υπολογισμού είναι περιωρισμένη. Η εποπτικότητα όμως και η εαφήνισά τους είναι μεγάλη.

Χρησιμοποιείται συνήθως το τετραγωνισμένο χαρτί όπου οι οριζόντιες γραμμές καλούνται "εετημένες," και οι κατακόρυφες "εταχμένες".

Όταν έχουν υπολογισθεί διάφορες διαδοχικές τιμές και έχουν καταγραφεί τα αποτελέσματα υπό μορφή σημείων (κουκιδιών) πάνω στο τετραγωνισμένο χαρτί, η γραμμή που είνεται από σημείου σε σημείο (από τα οποία μπορούν να διαβασθούν αμέσως οι τιμές εκείνων που υπολογίστηκαν) ονομάζεται γράφημα.

Όταν η τιμή μιας μεταβλητής ποσότητας μεταβάλλεται σε αμεση αναλογία με την άλλη, το γράφημα είναι ευθεία γραμμή.

ΓΡΑΦΗΜΑ I

Να κατασκευασθεί ένα γράφημα που να ευνδέει ταχύτητα και απόσταση ανά 24 ώρες.

α. Από το σημείο 0 και των κάτω αριετερή γωνία του χαρτιού, αριθμούμε τα τετράγωνα οριζοντίως από αριετερα προς τα δεξιά, προκειμένου να παριστάνονται αποστάσεις.

β. Αριθμούμε τα κατακόρυφα τετράγωνα προς τα πάνω, αρχίζοντας από το 0, σε κόμψους.

γ. Διαλέξουμε μία ταχύτητα έετω 10 κόμψων, μετά 10 κόμψων 24 ώρες = 240 κίλια ανά ημέρα.

δ. Ξέρουμε 240 μίλια βση κλίμακα αποστάσεων και διατρέουμε τση κατακόρυφη γραμμή μέχρι να τμήσει την οριζόντια γραμμή την διερχομένη δια των 10 κόμβων. Σημειώνουμε και ενώνουμε το σημείο αυτό με το σημείο μηδέν και το υπογραμμίζουμε εντονώτερα.

Η ευθεία αυτή είναι το ζητούμενο γράμμα.

Ανάχωση του γραφήματος:

Ερώτηση 1^η: Η ταχύτητα ενός πλοίου κυμαίνεται εως 11,4 κόμβους. Ζητείται η απόσταση που διανύει την ημέρα.

Ξέρουμε 11,4 κόμβους βση κατακόρυφη κλίμακα και διατρέουμε τση αντίστοιχη οριζόντια γραμμή μέχρις ότου τμήσει το γράμμα. Στο σημείο τομής παρατηρούμε πάνω και κάτω τση αντίστοιχη κατακόρυφη γραμμή και διαβάουμε τση απόσταση βση οριζόντια κλίμακα.

Απάντηση: 274 μίλια.

Ερώτηση 2^η: Η μέση διανυόμενη απόσταση ενός πλοίου το 24ωρο είναι 160 μίλια. Ζητείται η μέση ταχύτητά του.

Ξέρουμε 160 μίλια βση κλίμακα αποστάσεων και διατρέουμε τση κατακόρυφη γραμμή προς τα πάνω μέχρι το γράμμα. Έπειτα παρατηρούμε αριστερά του σημείου τομής κατά μήκος της οριζόντιας γραμμής που διερχεται από αυτό και διαβάουμε τση ταχύτητα βση κατακόρυφη κλίμακα.

Απάντηση: 6,6 κόμβοι.

Το γράμμα αυτό είναι απλώς ένας τυποποιημένος υπολογισμός, αλλά ταυτόχρονα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι εάν γραφική παράσταση γενικώς δεν είναι τόσο ακριβής όπως αναφέραμε και πιο πάνω.

ΓΡΑΦΗΜΑ II.

Το γράμμα αυτό είναι παρόμοιο με το I και συνδέει ταχύτητα-κρόνο.

Η οριζόντια ή κατακόρυφη κλίμακα παριστα ταχύτητα σε κόμβους και η κατακόρυφη ή κατακόρυφη κλίμακα, λεπτά της ώρας μέχρι 1 ώρα. Οι διαχώνιες γραμμές που διασκορπίζονται από το σημείο 0 παριστα διαδοχικά γράμματα για ταχύτητες από 6 έως 10 κόμβους.

Τα γραψίματα αυτά έχουν κατασκευασθεί ως εξής:

Το σημείο κομής π.χ. της κατακόρυφης που διέρχεται από το 6 (ταχύτητα 6 κόμβοι) και της οριζόντιας που διέρχεται από το 60 (χρόνος 60 λεπτά), εκεί ενωθεί με το 0. Η γραμμή αυτή είναι το χράφιμα των 6 κόμβων.

Ερώτηση 1^η: Ένα πλοίο έχει ταχύτητα 6 κόμβων. Να υπολογισθεί η απόσταση που καλύπτει σε 40 λεπτά.

Βρίσκουμε τα 40 λεπτά στην κατακόρυφη κλίμακα και διατρέχουμε την οριζόντια γραμμή έως ότου εμπίπτει το χράφιμα. Μετά αίχουμε την κατακόρυφη γραμμή και διαβάζουμε την απόσταση.

Απάντηση: 4 μίλια

Ερώτηση 2^η: Ένα πλοίο διανύει 6,2 μίλια σε 37 λεπτά. Να υπολογισθεί η ταχύτητά του.

Βρίσκουμε 6,2 μίλια στην οριζόντια κλίμακα και 37 λεπτά στην κατακόρυφη κλίμακα. Οι αντίστοιχες κάθετες στις κλίμακες αυτές που αχόνται από αυτά τα σημεία, τέμνονται στο χράφιμα των 10 κόμβων.

Απάντηση: Ταχύτητα 10 κόμβοι.

Ερώτηση 3^η: Δύο πλοία ξεκινούν συγχρόνως με την ίδια πορεία, το ένα με ταχύτητα 6 κόμβων, το άλλο με 9 κόμβους. Πόσο θα απομακρυνθούν μέσα σε 40 λεπτά;

Βρίσκουμε τα 40 λεπτά στην κατακόρυφη κλίμακα και εμειώνουμε που αυτή τέμνει το χράφιμα των 6 κόμβων και που των 9 κόμβων.

Μετά μετρούμε οριζοντίως τον αριθμό των τετραγωνιδίων που ορίζουν τα δύο σημεία κομής. Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δύο τέτοια τετράγωνα.

Απάντηση: Η απόσταση των δύο πλοίων είναι 2 μίλια.

ΓΡΑΦΗΜΑ III.

Η Στατιστική μας προσφέρει ενδιαφέροντα στοιχεία για την δημιουργία γραφικών παραστάσεων. Το χράφιμα III κατασκευάστηκε από πληροφορίες που μας δίδονται από τις εφευρέσεις των υπονηφίων για απόσταση πτυ-

χιών ειδικοτήτων των Πλοιάρχων του Εμπορικού Ναυτικού.

Η εσεπιμένη παρυσά τὰ ές 1960-68 και η τεσαχημένη τον αριθμό των πτυχιών που εδόθησαν. Η συνεχής γραμμή είναι το χράφημα των πτυχιών Πλοιάρχων Α', η διακεκομένη γραμμή, το χράφημα των Πλοιάρχων Β' και η διπλά διακεκομένη γραμμή το χράφημα για τους Γ' Πλοιάρχους.

Ζητείται να υπολογισθεί ο κατά προεχχίση αριθμός των διπλωμάτων των Α' Πλοιάρχων, Β' Πλοιάρχων, Γ' Πλοιάρχων που εδόθησαν το έτος 1963.

Μία τυκαία ματιά στα 3 χράφηματα μας, δείχνει ότι το 1963 είχαμε μία περίπου σύμπτωση του αριθμού των κορυχιθέντων διπλωμάτων Α' και Β' Πλοιάρχων, ενώ το ίδιο έτος κορυχιόθηκε ο μεγαλύτερος αριθμός διπλωμάτων Γ' τάξεως. Επίσης παρατηρούμε ότι κατά το έτος 1968 είχαμε μία προεχχιστική ιώουτα δοθέντων διπλωμάτων και των τριών τάξεων, αν' ότι οποιοδήποτε άλλο έτος.

ΓΡΑΦΗΜΑ IV

Το χράφημα IV μας δείχνει τις διακυμάνσεις ανά μήνα για μία περίοδο ετών στο φορτείο ανά εόνο για την μεταφορά κάρβουνου από το Λάρναιφ στην Ρουέν, στην Γένοβα και στο Ράιφερ. Η κατακόρυφος κλίμακα παρυσά βελίγια ανά εόνο και η ορξόνεια κλίμακα εους μήνες εού εους. Οι εεαυροί από τον Μάιο ως τον Νοέμβριο 1966 καλύπτουν την περίοδο μιας πολύχρονης απερχίας των ανδρακορύκων όταν δεν παρήχασε καθόλου κάρβουνο.

ΓΡΑΦΗΜΑ V

Το χράφημα αυτό επεξηχεί την αναλογία μεσαξύ των κλιμάκων των θερμομέτρων Φαρεναίτ και Κελσίου. Πρέπει να θυμόμαστε ότι τα δύο βεαδερὰ βημεία μιας θερμομετρικής κλίμακας είναι το βημείο πηξέως και το βημείο ψραβμού. Το διάστημα μεσαξύ αυτών των βημείων εσον θερμομετρικό βωλήνα, διαμρείται σε 180 ίσα μέρη στην κλίμακα Φαρεναίτ

και οι υποδιαίρεσεις αριθμούνται από 32 έως 212, ενώ το θερμομέτρο Κελσίου διαίρεται σε 100 ίσα μέρη από 0 έως 100. Η αναλογία μεταξύ των δύο κλίμακων είναι ως εκ τούτου η εξής: Στο 180 αντιστοιχούν 100 ή στο 9 το 5, άρα μία υποδιαίρεση Φαρενάιτ θα αντιστοιχεί σε μία υποδιαίρεση Κελσίου ίση με $\frac{9}{5} C + 32$.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η αναχώνη Φαρενάιτ που αντιστοιχεί σε 35° Κελσίου.

Φαρ. = $\frac{9}{5} \times 35 + 32 = 63 + 25 = 95$. Έτσι σε τετραγωνημένο χαρτί, η τετηνημένη του οποίου είναι οιαταχυνώσεως Κελσίου και η τετραχήμενη αναχυνώσεως Φαρενάιτ, από την ένδειξη 95 της κλίμακας Φαρενάιτ, άνω των οριζόντια γραμμής έως ότου συναντήσει την κατακόρυφη την αχόμενη προς τα κάτω, από την ένδειξη 35 της κλίμακας Κελσίου.

Το σημείο κομής το ενώνουμε με το 32 της κλίμακας Φαρενάιτ. Η ευθεία γραμμής είναι το ζητούμενο χράφημα.

Ερώτηση 1^η: Να μετατραπούν 82° Φαρενάιτ σε Κελσίου.

Βρίσκω 82 στην κλίμακα Φαρενάιτ, άνω εξ αυτού των οριζόντια γραμμής έως ότου συναντήσει το χράφημα και διατρέχω μετὰ, άνω ή κάτω την κατακόρυφα γραμμής και διαβάζω στην κλίμακα Κελσίου.

Απάντηση: 28° Κελσίου.

Ερώτηση 2^η: Μετατραπή 20° C σε Φαρενάιτ.

Βρίσκω 20 στην κλίμακα Κελσίου, διατρέχω άνω την κατακόρυφη γραμμής του χραφίματος, έπειτα κατά μήκος της οριζόντιας γραμμής αριστερά και διαβάζω στην κλίμακα Φαρενάιτ.

Απάντηση: 68° Φαρενάιτ.

ΓΡΑΦΗΜΑ VI

Οι αναχυνώσεις από ευκευές καταχραφής καιρού, παριβεάνονται ελεύθερα από χραφίματα. Τα πιο χυνωκά είναι αυτά που τα ίχνη τους γμειώνονται με την πένα ενός βαροχραφού ενδεβεμένου με το καρτί που είναι τυλιχμένο χύρω από περιβερεμένο τύμπανο.

Ένα ρολόι εντός του τυμπάνου περιτερέβει τον κώνδυρο περί κατα-
κέρυφο άξονα μειοστακή περιστροφή. Η πένα είναι τοποθετημένη σε
ένα μοκλό που ενερχοποιείται από την κίνηση μεταλλικών κρεών εν
μέρει κωρίς άέρα, οι πλευρές των οποίων κινούνται ανάλογα με τις αυ-
φομειώσεις της πίεσης της ατμοσφάιρας. Στο χράφημα αυτό δι-
δονται οι τυπικές βαρομετρικές ενδείξεις μίας ατμοσφαιρικής υβέσης
που διέρκεται από περιοχές που βρίσκονται σε ανώτερα βόρεια πλάση.

Η τεσημημένη διαρείται σε ωριαίες περιόδους για μιά ημέρα από
μεβάνυχτα σε μεβάνυχτα και η τεσαχημένη σε βαρομετρικές ενδείξεις.

Η αριστερή πλευρά δίνει τις ίντες υδραρχύρου και η δεξιά πλευρά
ανάλογες μονάδες πίεσης που ονομάζονται μιλιμπαρ .

Τα βέλη σε κατά μήκος διαστήματα του βαρομετρικού χράφημα-
τος δείκνουν την κατεύθυνση του ανέμου και ο αριθμός των γραμ-
μών του πίεω μέρος του βέλους δείκνει την δύναμή του (του ανέμου).

4 γραμμές-βέλους δείκνουν ένα μέτριο ασράκι, 8 γραμμές-βέλους
έναν άνεμο καταχίδας που έχει ταχύτητα 40 μιλ/ώρα, κλπ.

Τα μικρά χράμματα στα βέλη του ανέμου είναι από την κλίμακα
Μηοφώρ που περιχράφουν την κατάσταση του ουρανού. Α σημαί-
νει ψικάλα, Ν βροκή, ρ λάιλαπα, Ο ουρανός νεφελώδης, C με
μονωμένα νέφη, P κοπική καταχίδα, και b ουρανός χαλάζιος, που
όλα αυτά εξασφαλίζουν οικονομία χράψήματος και προφέρουν με
μία ματιά, όλες τις πληροφορίες που αφορούν τον άνεμο και τον και-
ρό, σε δεδομένη βειχημή.

Το χράφημα αυτό και οι πληροφορίες για τον καιρό, συνδυαζό-
μενες με αυτό, διαβάζονται ως εξής:

Το παρόμερο έχει πέσει από 29,7 ίντες σε μεβάνυχτα, σε
29,0 ίντες στις 2 μ. και μεσα ανέβηκε στις 29,3 ίντες σε επό-
μενα μεβάνυχτα. Ο άνεμος εν τω μεταξύ έχει αλλάξει από νότιο
ανατολικό, δυνάμειως 4, σε δυνατό νοτιοδυτικό άνεμο δυνάμειως 7
στις 8 π.μ., έπειτα σε νότιο δυνάμειως 8 το μεσημέρι, μετά απ' αυτό

εχει ανεμει σε βορειο δυτικὸ ἀκόμη με δύναμη καταιγίδας, ανε-
φαίνει και ἄλλο βορεια και μειώνεται σε δύναμη με ανεϊστοικη ἀνεμ-
ση βαρομετρικῶν. Ο ουρανὸς κατα την διάρκεια της περιόδου αυτης
εχει ἀλλάξει, ἀπὸ ψιχάλα σε λαίλαγα βροχῆς, σε νεφελώδη, σε βροχή
και λαίλαγα το μεσημέρι και μετὰ σε μεμονωμένα σύννεφα και τοπι-
κὲς καταιγίδες, ἔτσι ο ἀνεμος χυρίσει σε βορειο-δυτικὸ.

Το χράφημα αὐτὸ χαράχθηκε ἀπὸ ηλιοφορίες οι οποίες μπο-
ροῦν να καταχραφθοῦν σε ἕνα ημερολόγιο αλοιοῦ ὅπως φαίνεται παρα
κάτω:

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ ΠΛΟΙΟΥ

Χρόνος	Βαρόμετρο		Ἄνεμος	Δύναμη	Ουρανὸς
	Ίντσες	Μιλιπαρς			
Μεσάνυχτα	29.70	1005.7	S.E	4	Ψιχάλα
4 π.μ.	29.53	1000.0	S.S.W	5	Βροχοπτώσεις
8 π.μ.	29.22	989.2	S.W	7	Νεφ. Τοπ. Βροχ.
Μεσημέρι	29.03	983.0	W.	8	Νεφ. Βροχή
4 μ.μ.	29.02	982.7	N.W	8	Συνεφ. παρ. Βροχ
8 μ.μ.	29.12	986.0	N.N.W	5	" " "
Μεσάνυχτα	29.30	992.2	N.N.W	4	Γαλανὸς

ΓΡΑΦΗΜΑ VII

Το χράφημα αὐτὸ εἶναι μία ἐπεξήχηση του πως συνδέεται η
κατανάλωση καυσίμων, η ταχύτητα και η ἀπόσταση, ὅπως προκύπτει
ἀπὸ εἰς δοκιμὲς πλεΰρωσης ενός πλοιοῦ. Η καμπύλη παρὶςτὰ ἕνα
τόνο καυσίμου. Οι τεσημμένες παρὶςτὰίνουν ταχύτητα σε κόμβους
και οι τεσαχμένες την ἀπόσταση που διανύεται ὅταν καταναλώνη
ἕνα τόνο καυσίμου. Σημειώνεται ὅτι στην οριζόντια κλίμακα ανε-
στοιχοῦν 5 τεσεράχωνα στον κόμβο και στην κατακόρυφη κλίμακα
2 τεσεράχωνα σε μίλι. Με μία ταχύτητα 7 κόμβων, το πλοιο
μπορει να προχωρήσει 25½ μίλια με 1 τόνο καυσίμου. Πράγματι,
πρίσκειμε 7 κόμβους στον ἀξονα των τεσημμένων, ἀίχουμε την κατα-
κόρυφο προς τα πάνω μέχρι να εμπίει την καμπύλη και ἀπὸ το σημείο

κομής άχουμε την οριζόντια που τέμνει την εσαχημένη στα $25\frac{1}{2}$ μίλια.

Στους 10 κόμβους η απόσταση που καλύπτει είναι 19 μίλια, στους 12 κόμβους η απόσταση είναι $15\frac{1}{4}$ μίλια. Στους 11 κόμβους η απόσταση είναι περίπου $12\frac{1}{4}$ μίλια σε μία κατανάλωση 1 τόνου καυσίμου.

Το χράφημα απαντά τυχαίως, σεση ερώτηση για μία οικονομική ταχύτητα ενός πλοίου συνδέοντας την κατανάλωση ενέργειας, την ταχύτητα και την απόσταση. Όταν η ταχύτητα είναι 10 κόμβοι, 1 τόνος καυσίμου δίνει την δυνατότητα σε εν λόγω πλοίο να κάνει 19 μίλια, αλλά όταν η ταχύτητα μειώνεται στους 7 κόμβους, τότε 1 τόνος καυσίμου καθιστά αυτό ικανό να κάνει $25\frac{1}{2}$ μίλια κόττω από τις ίδιες συνθήκες ανέμου και καιρού, πράγμα κρίσιμο να σε χυμώσουμε στην περίπτωση που μας τελειώνουν τα καύσιμα.

ΓΡΑΦΗΜΑ VIII

Οι ναυπηγοί χρησιμοποισούν πολλές φορές διάφορες καμπύλες και χράφηματα από τα οποία μπορούν να συνδυασθούν διάφορα επίπεδα, θέσεις κέντρων βάρους και ανεώσεως και λοιπά μεταβλητά στοιχεία. Το χράφημα αυτό είναι μία καμπύλη εκροπίστατος. Η κωμικιότητα εκροπίστατος ενός πλοίου είναι το βάρος του άγκου του ύδατος που αυτό εκροπίζει στο μέσο βύθισμά του. Η εσαχημένη διαμείνεται σε τόνους και μετααχμένη σε κλίμακα βύθισματος σε πόδια. Η εκροπίση σε τόνους για διάφορα βύθισματα σχεδιάζεται μέσω των σημείων. Από αυτά την καμπύλη εκροπίστατος παρατηρούμε ότι στο άφορο βύθισμα των 11 ποδιών, το βάρος του πλοίου είναι 1.200 τόνοι. Όταν λοιπόν δεν υπάρχει φορτίο στο πλοίο, αυτό αντιστοιχεί στο βάρος του κίτους, των μηχανημάτων και του εξοπλισμού.

Ακολουθώντας τις διακεκομμένες γραμμές στο εκήμα παρατηρούμε στα παρακάτω παραδείγματα ότι:

σε	13	πόδια	βύθισματος	το	εκροπίσμα	είναι	1.450	τόνοι
>	14	>	>	>	>	>	1.590	>
>	16	>	>	>	>	>	1.880	>

Ερώτηση 1^η: Πόσοι τόνοι φάρως απαιτούνται για να αυξηθούν το φορτίμα του πλοίου από 13 πόδια στα 16 πόδια και 9 ίντσες;

Στα 13 πόδια το εκτόπιμα είναι 1450 τόνοι

$$\Rightarrow 16 \text{ και } 9 \text{ ίντσες} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \underline{2.000} \quad \Rightarrow$$

Διαφορά 550 \Rightarrow

Απάντηση: 550 τόνοι.

Ερώτηση 2^η: Το φορτίμα του πλοίου είναι 14 πόδια. Πρέπει να φορτωθεί ένα ε' αερό φάρω 250 τόνων φορτίου. Ποιό θα είναι το νέο φορτίμα;

Στα 14 πόδια φορτίματος το εκτόπιμα είναι 1.590 τόνοι

Βάρω που πρέπει να φορτωθεί $\underline{250 \text{ τόνοι}}$

Νέο εκτόπιμα 1.840 τόνοι

Απάντηση: Νέο φορτίμα 15 πόδια και 9 ίντσες

ΓΡΑΦΗΜΑ IX

Μία καμπύλη σε τόνους ανά ίντσα φορτίματος (T.P.I.) είναι κρήνημη επί του πλοίου. Η καμπύλη είναι εφαρμόσιμη μόνο για κάθε πλοίο ξεχωριστά εκτός φεβαίως, της περιπέλευσης που τα πλοία είναι εκεδόν όμοια σε ανάγκα και διαστάσεις.

Η τετρακλήμη είναι μία κλίμακα που παριστά τον αριθμό των τόνων που πρέπει να τοποθετηθούν επί του πλοίου ή να αφαιρεθούν από το πλοίο για να αλλάξει το μέσο φορτίμα του κατά 1 ίντσα. Η ποσότητα αυτή δεν είναι ίδια σε όλα τα φορτία.

Η τετρακλήμη είναι η κλίμακα μέσων φορτίματων σε πόδια.

Ερώτηση 1^η: Ζητούνται οι τόνοι ανά ίντσα φορτίματος σε ένα φορτίμα 24 ποδιών από την καμπύλη T.P.I.

Βρίσκουμε 24 πόδια στην κλίμακα φορτίματος και άρχουμε την οριζόντια γραμμή προς τα δεξιά μέχρι όπου χμύσουμε την καμπύλη, μετά φέρουμε μία κατακόρυφη γραμμή άνωθεν του σημείου αυτού και διαγράφουμε από εκεί την κλίμακα των τόνων.

Απάντηση: 50 τόνοι.

Ερώτηση 2^η: Ζητούνται οι νόμοι ανά ίντσα σε ένα βρόχιμα 12 ποδ.

Απάντηση : 42 νόμοι.

ΓΡΑΦΗΜΑ X

Μία καμπύλη ευσταθείας είναι αυτή που δείχνει γραφικώς τις εκτετικές ροπές που ασκούνται στο πλοίο για να επανέλθει μόνο του σε μία θέση ισορροπίας όταν αυτό έχει εξαναγκασθεί να κλίνει από τον άνεμο ή από την θάλασσα.

Η ανάχνηση της καμπύλης αυτής αφορά σε μία γενική κατανομή των αρχών της ευσταθείας, όταν δεν προτιθέμεθα να εισέλθουμε σε αυτή λεπτομερώς, αλλά μας αρκεί ένα σύντομο σημείωμα προς εξυπηρέτηση του σκοπού μας.

Στο γράφημα τα εκτίνα των κελιμένων πλοίων δείχνουν ένα σταθμό σε διαφορετικές χωνίες κλίσεως και σε κάθε περίπτωση το G παριστάνει το κέντρο βάρους του πλοίου που είναι για σταθερή έκθεση, εκτός εάν τα βάρη στο πλοίο αλλάζουν. Ολόκληρο το βάρος του πλοίου επενεργεί κατακόρυφα προς τα κάτω διεκκόμενο δια του G (παριστάνεται δια του GW). Το B είναι το κέντρο ανώσεως του πλοίου και είναι το κέντρο του όγκου του εκτοπιζομένου ύδατος. Αλλάζει θέση ανάλογα με την αλλαγή της υπό το ύδωρ μορφής του πλοίου.

Η γενολική προς τα πάνω πίεση του ύδατος που ισοσταί με ολόκληρο το βάρος του πλοίου, επενεργεί κατακόρυφως προς τα άνω δια του B στην κατεύθυνση BW . Η οριζοντια απόσταση GZ μεταξύ των δύο αντεδίων κατακορυσίων δυνάμεων καλείται μοχλός επαναφοράς. Όταν το GZ εξαφανίζεται, το πλοίο είναι σε ισορροπία και δεν δείχνει τάση κλίσεως προς την μία πλευρά ή την άλλη. Όταν κλίνει βραίως το GZ αυξάνει σε μήκος και ο δυναμικός μοχλός δημιουργείται, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν η προς τα κάτω δύναμη μέσω του G και η προς τα πάνω δύναμη μέσω του B υπερβαίνουν και οι δύο ένα μοχλοβραχίονα, καλούμενο "ζεύχος" που φέρνει το πλοίο σε μία όρθια θέση. Αυτή η δύναμη εφόρζεται σε

πόδια-τόνοι.

Αν υποθεθεί ότι το βάρος του πλοίου είναι 5.000 τόνοι και το μήκος του GZ είναι 1 πόδι, τότε η ροπή επαναφοράς λέμε ότι είναι 5000 πόδια-τόνοι που ισούται με τον συντελεστή στρέψης των 5000 τόνων πύρρος αιωρουμένων βεση άκρη μίας ράβδου μήκους 1 ποδίου ή πύρρος 1 τόνου αιωρουμένου βεση άκρη μίας ράβδου μήκους 5000 ποδίων.

Στα διαδοχικά εκτήματα A , B και Γ ο μοχλός επαναφοράς GZ αυξάνει προοδευτικώς και το πλοίο έχει για αυξάνουσα τάση να επιστρέψει σε μία ορθή θέση.

Στο εκτήμα Δ όμως το GZ έχει εξαφανισθεί, οπότε το πλοίο είναι σε μια ουδέτερη ισορροπία, δηλαδή αδρανεί και δεν μπορεί από μόνο του να επιστρέψει στην ορθία θέση.

Το εκτήμα E δείχνει το πλοίο σε μία θέση ασταθούς ισορροπίας, διότι βλέπουμε ότι η προς τα κάτω δια του G δύναμη και η προς τα πάνω δια του B δύναμη, συμπάλλουν στο να δημιουργηθεί μοχλός GZ ανατροπής του πλοίου.

Ίσως η βίντομη αυση εφήμερη μπορεί να φουθήσει τον εισοδασει να διαφάσει έξυπνα των καμηύλη ευκαθείας που δείκνεσαι στο χροφίμα Σ .

Η τεσημένη είναι μία κλίμακα βαθμών που παριεκά χωνίες εκκαθείας κλίσεως του πλοίου και η τεταχημένη είναι η κλίμακα ποδίων που ανεπροσηπεί το μήκος του μοχλού επαναφοράς GZ .

Ανάχνηση καμηύλης ευκαθείας:

Το εκτήμα A παριεκά το πλοίο κεκλιμένο σε χωνία 7° . Ξρίσκουμε 7 σαν άξονα των κεκημένων, φέρουμε την κατακόρυφη προς τα άνω που τεμνει την καμηύλη στο A και εξ αυτού άχουμε μία οριζόντια χραμμή προς τα αριστερά και διαβάζουμε το μήκος της GZ από την κλίμακα. Ο μοχλός επαναφοράς είναι $5\frac{1}{2}$ ιντσες ή 0,45 πόδια. Εάν το βάρος του πλοίου είναι 5.000 τόνοι, τότε η στρεπτική ισός που δημιουργείται από το πλοίο για να επανέλθει στην ορθή θέση είναι 5.000 τον. \times 0,45 ιν. \times 1,66 = 2.250 πόδια-τόνοι.

Το ετήσιο Β παρίστα μία κλίση 26° . Το μήκος του ΓΖ από την καμψύλη είναι 2,2 πόδια, με ερεπτική ισχύς θα είναι $5.000 \text{ τόν.} \times 2,2 \text{ πόδ.} = 11.000 \text{ πόδια-τόνοι.}$

Το ετήσιο Γ παρίστα μία κλίση 46° , το μήκος του ΓΖ από την καμψύλη είναι περίπου 3,6 πόδια, η ροπή επαναφοράς θα είναι $5.000 \text{ εακ} \times 3,6 \text{ πόδ.} = 18.000 \text{ πόδια-τόνοι.}$

Αυτή είναι η θέση μεξίστης προσηλασίας, επειδή αποδεικνύεται ότι όταν οι χωνίες κλίσεως αυξάνουν πέραν των 45° , το ολοίο καδίθεταται ηιο δύσκολο στο να επανέλθει στην ορθή θέση (όπως έχει αποδειχθεί από τα ελλασούμενα μήκη του μοκλού επαναφοράς) και σε μία χωνία περίπου πέραν των 78° , το ολοίο θα ανατραπεί εάν αφεθεί μόνο του.

ΓΡΑΦΗΜΑ XI

Το γραφήμα αυτό μας προσφέρει ενδιαφέρουσες πληροφορίες από στατιστικές καταγραφές του Παγκοσμίου Στόλου δεξαμενοπλοίων της περιόδου 1965-81

Ερώτημα 1^η: Ποιό έτος είχαμε τον μέγιστο αριθμό παραγωγικών δεξαμενοπλοίων;

Απάντηση: Το έτος 1973

Ερώτημα 2^η: Πότε είχαμε τον μέγιστο αριθμό δεξαμενοπλοίων;

Απάντηση: Τον Οκτώβριο του 1976

ΓΡΑΦΗΜΑ XII

Το γραφήμα XII μας προσφέρει μία χειριστική αντίληψη ανάμεσα στην Παγκόσμια Παραγωγή Πετρελαίου και την Κατανάλωση κατά εό έτος 1961

Ερώτημα 1^η: Η κατανάλωση πετρελαίου στις Η.Π.Α. είναι σύμφωνη με την παραγωγή;

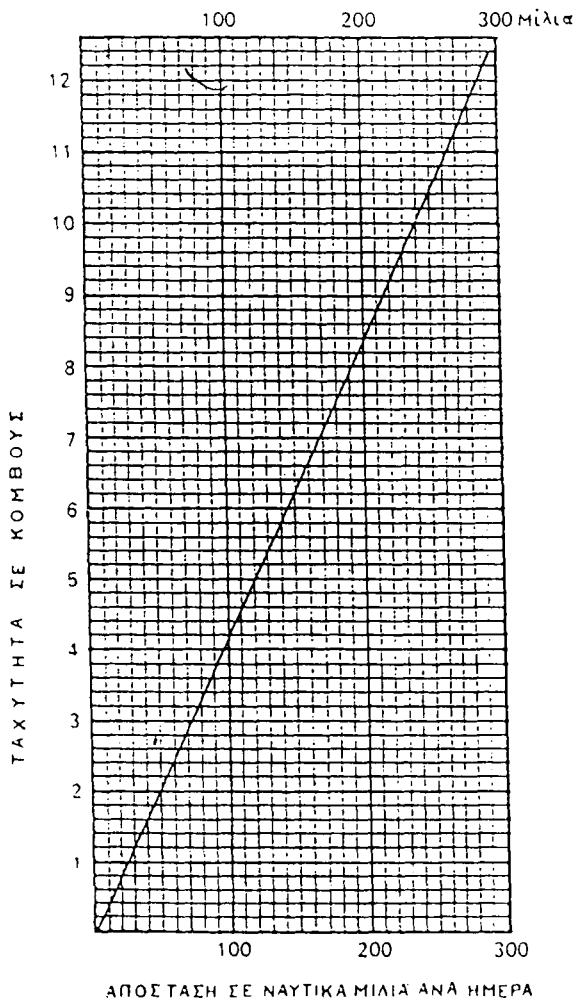
Απάντηση : Όχι. Οι Η.Π.Α. καταναλώνουν 250 εκατομύρια τόνους πετρελάου από ότι παράχουν.

Ερώτηση 2^η: Η κατανάλωση πετρελαίου στην Σοβιετική Ένωση είναι σύμφωνη με την παραγωγή;

Απάντηση: Ναι. Η Σοβιετική Ένωση παράγει αρκετό πετρέλαιο για να ανταποκριθεί στην κατανάλωσή της και επίσης της Ανατ. Ευρώπης.

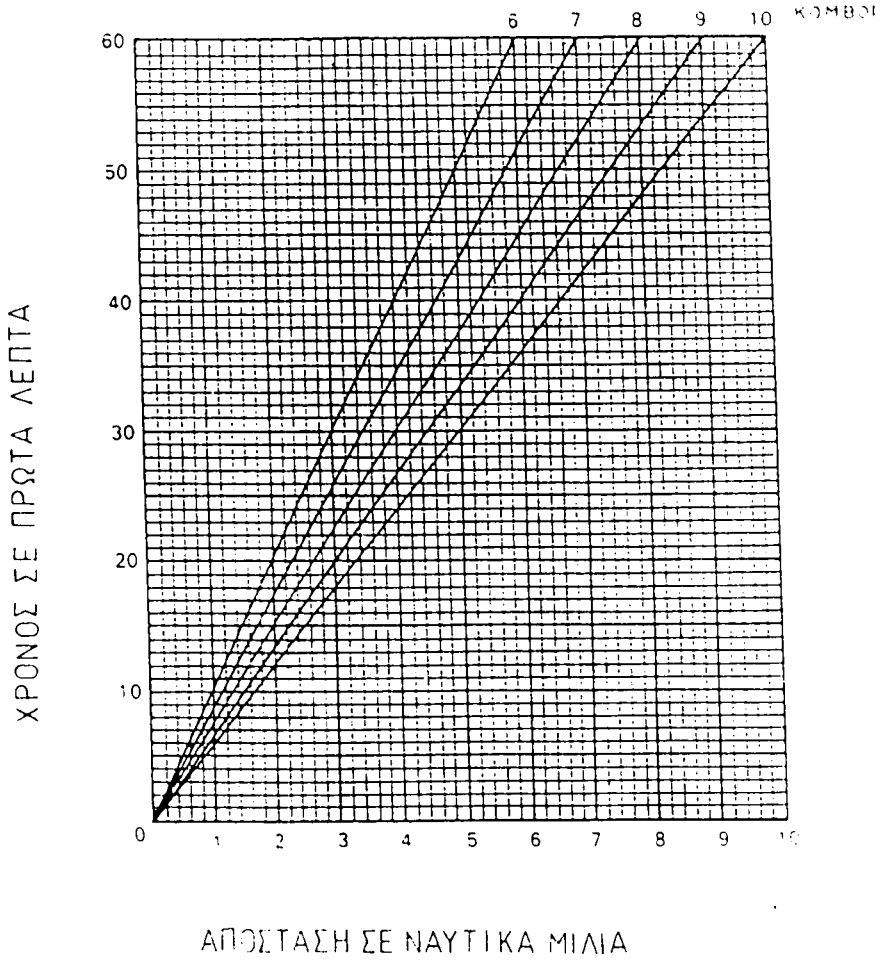
ΓΡΑΦΗΜΑ Ι

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ



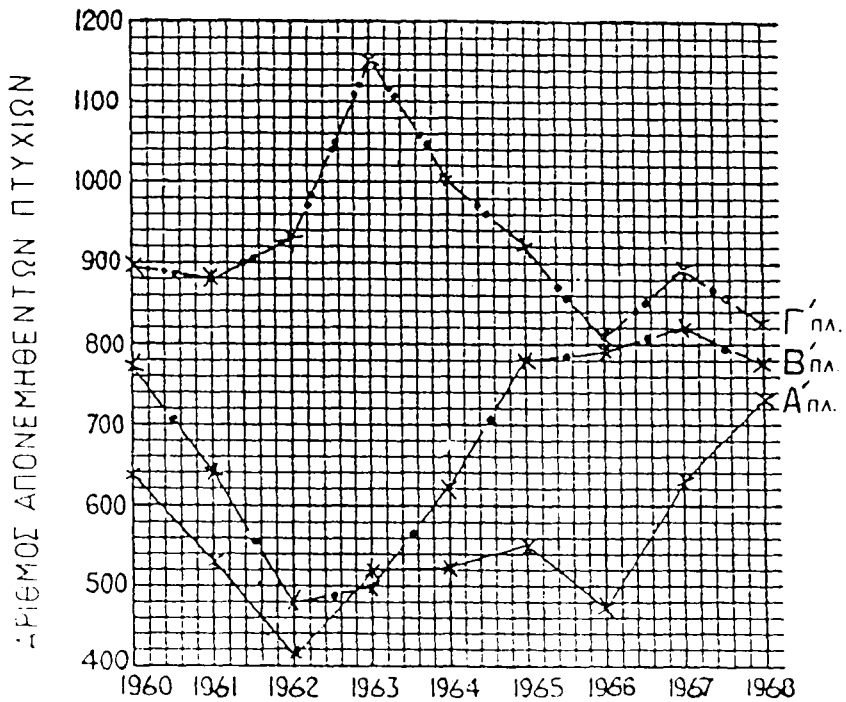
ΓΡΑΦΗΜΑ ΙΙ

ΤΑΧΥΤΗΤΑ



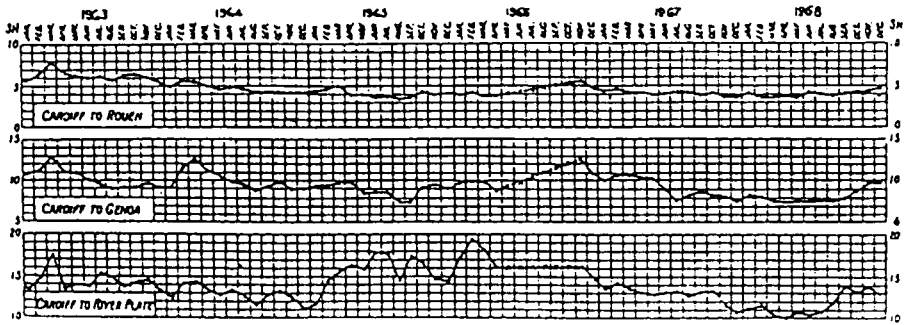
ΓΡΑΦΗΜΑ ΙΙΙ

Στατιστικό Γράφημα
Απονομής Πτυχίων Ειδικότητων Πλοιάρχων



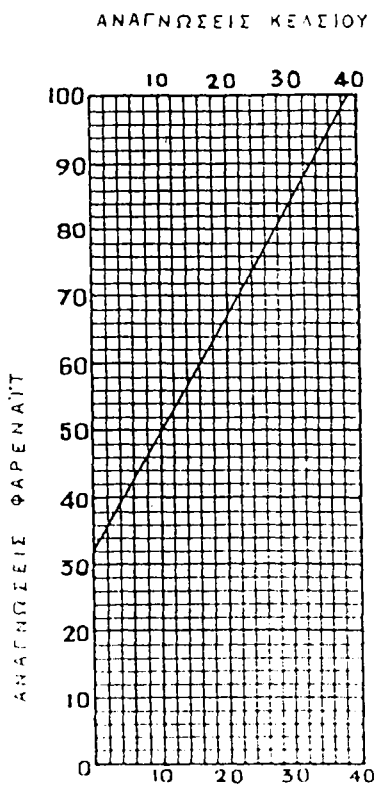
ΓΡΑΦΗΜΑ IV

Συγκριτικός Μέσος Όρος Εξαγωγής
Φορτίων Κάρβουνου

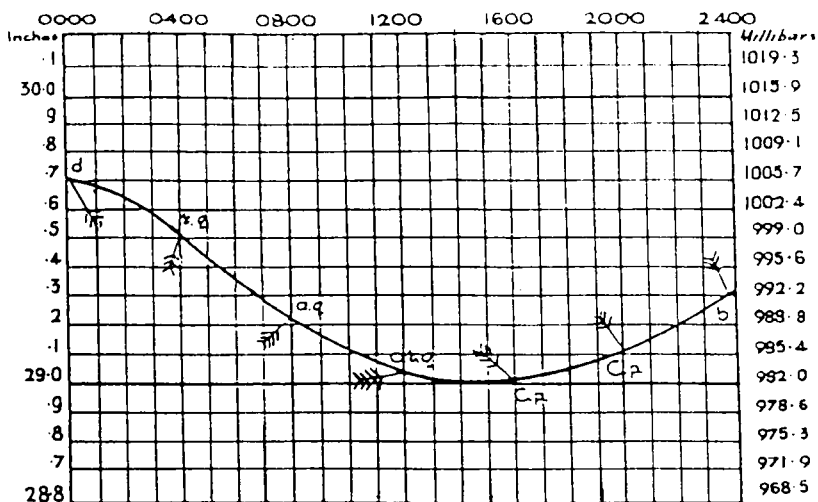


ΓΡΑΦΗΜΑ V

ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΟΥ



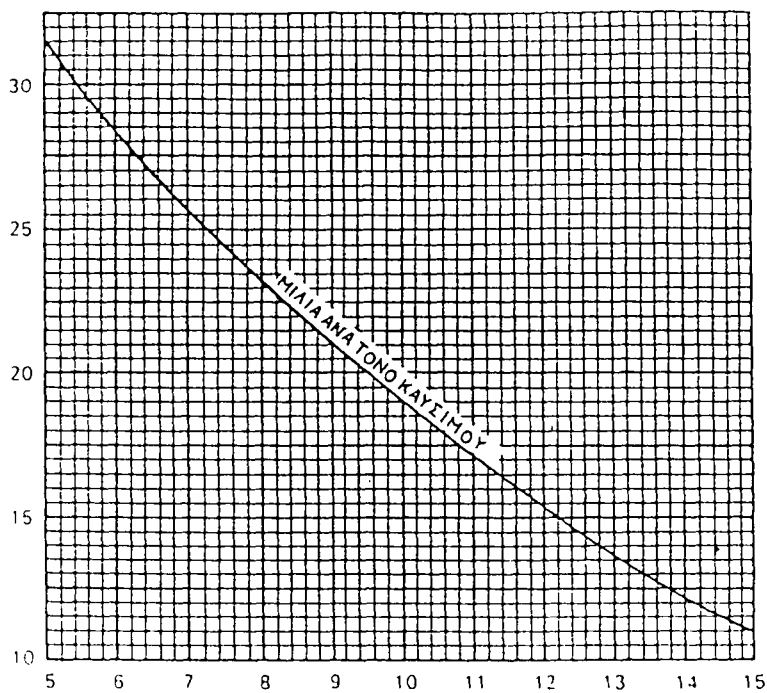
ΓΡΑΦΗΜΑ VI



ΒΑΡΟΜΕΤΡΟ ΑΝΕΜΟΥ & ΚΑΙΡΟΥ

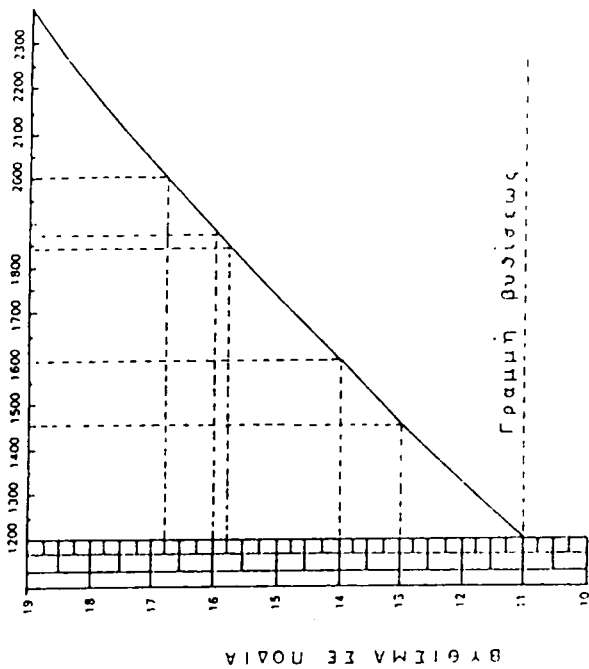
ΓΡΑΦΗΜΑ VII

ΔΙΑΝΥΣΜΕΝΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΝΑ ΤΟΝΟ ΚΑΥΣΙΜΟΥ



ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΕ ΚΟΜΒΟΥΣ

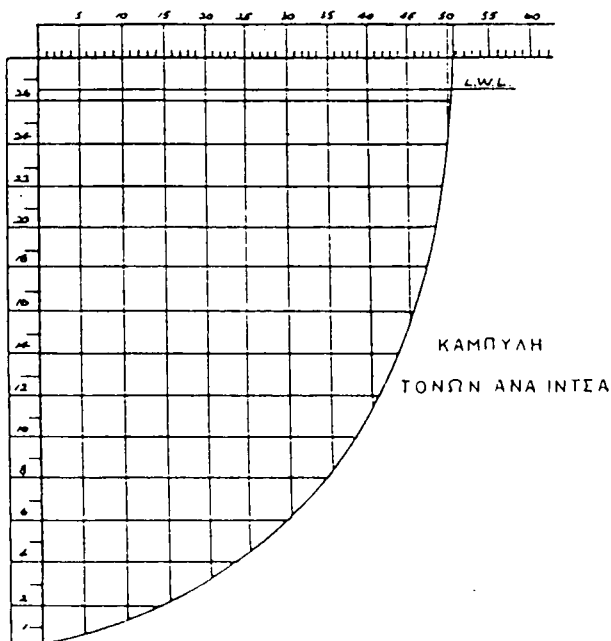
ΤΟΝΟΙ ΕΚΤΟΝΙΣΜΑΤΟΣ



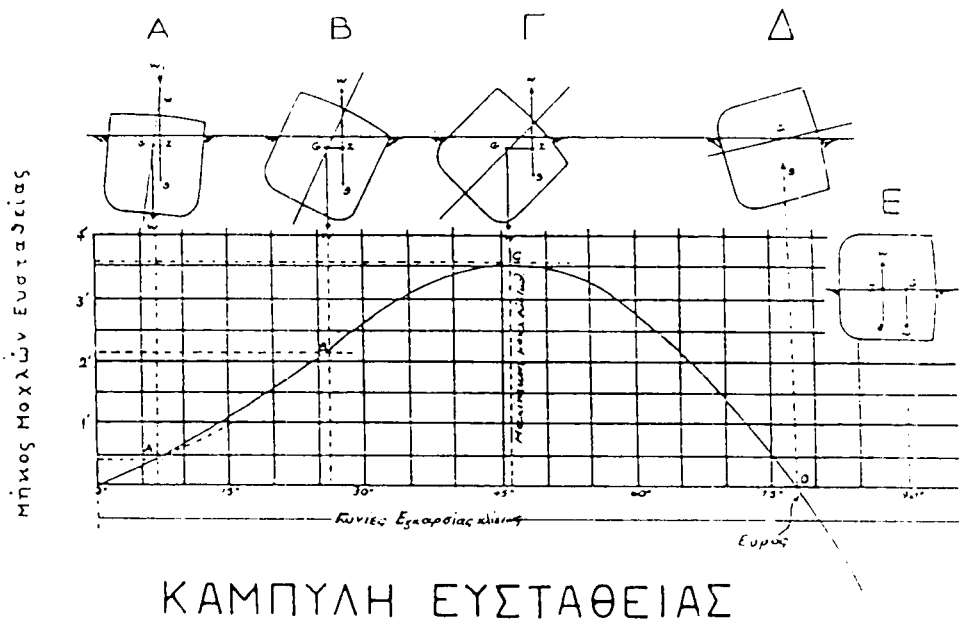
ΓΡΑΦΗΜΑ ΙΧ

ΚΛΙΜΑΚΑ ΤΟΝΩΝ ΑΝΑ ΙΝΤΣΑ

ΚΛΙΜΑΚΑ ΜΕΙΣΟΥ ΒΥΘΙΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΠΟΔΙΑ

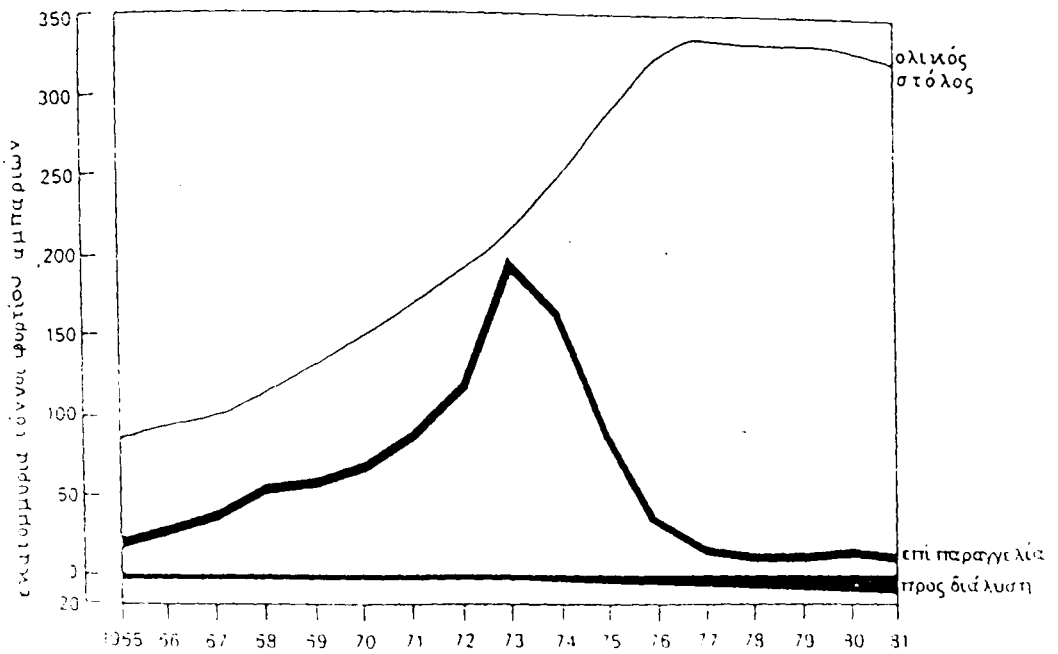


ΓΡΑΦΗΜΑ X



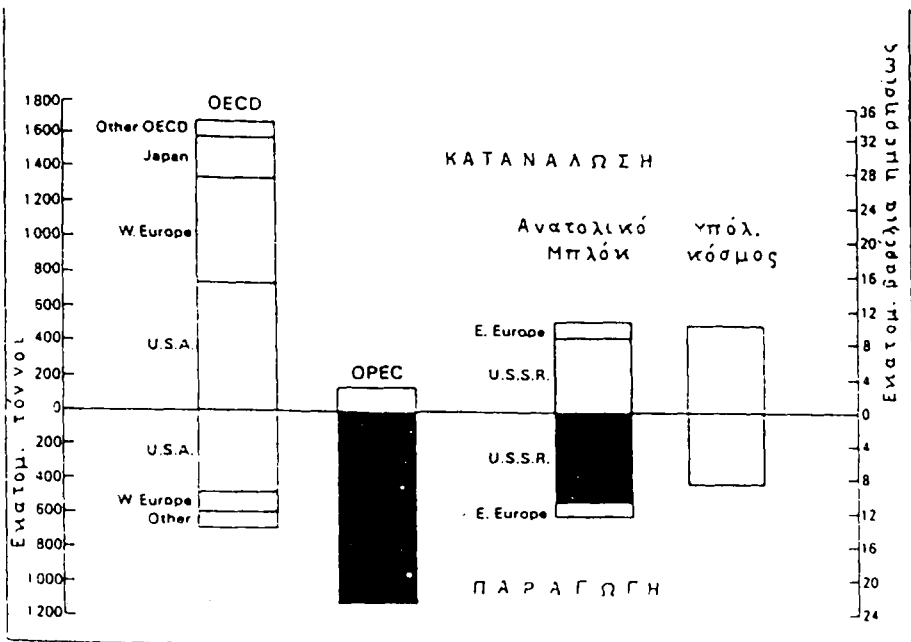
ΓΡΑΦΗΜΑ ΣΙ

Παγκόσμιος Στόλος Δεξαμενοπλοίων 1981



ΓΡΑΦΗΜΑ XII

Παγκόσμιος Παραγωγή Πετρελαίου
και Κατανάλωση 1981



6. ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

6.1. Η έννοια της προσεγγίζουσας τιμής.

Ο άνθρωπος στις πρακτικές του δραστηριότητες συχνά κάνει μετρήσεις διαφόρων μεγεθών. Οι μετρήσεις αυτές εκφράζονται με αριθμούς. Οι αριθμοί αυτοί μόνο κατά προσέγγιση εκφράζουν τα ζητούμενα μεγέθη. Ακριβείς μετρήσεις είναι αδύνατες γιατί τα όργανα μετρήσεως δεν είναι τέλεια και οι ανθρώπινες δυνατότητες είναι περιορισμένες.

Έτσι, ανεί να έχουμε την αληθινή τιμή ενός μεγέθους έχουμε μια τιμή που χαρακτηρίζει το μέγεθος αυτό με κάποιο βαθμό ακριβείας που την ονομάζουμε προσεγγίζουσα τιμή.

6.2. Σφάλματα

Έστω ότι x είναι η αληθινή τιμή κάποιου μεγέθους και a η προσεγγίζουσα τιμή της, τότε

$$\Delta = |x - a| \quad (1)$$

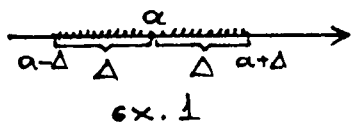
ονομάζεται απόλυτο σφάλμα

Παράδειγμα 1: Να βρείτε τον αριθμό x , αν η προσεγγίζουσα τιμή του είναι $a = 0,8$ και το απόλυτο σφάλμα $\Delta = 0,01$.

Λύση

Από την (1) έχουμε:

$$\Delta = |x - a| \Leftrightarrow x - a = \pm \Delta \Leftrightarrow x = a + \Delta \text{ ή } x = a - \Delta \quad (\text{εκ.1})$$



Έτσι παίρνουμε

$$x = 0,8 + 0,01 = 0,81 \quad \eta$$

$$x = 0,8 - 0,01 = 0,79$$

Παράδειγμα 2: Είναι γνωστό ότι $\frac{1}{3} = 0,333\dots$
Θά προσπαθήσουμε να βρούμε το απόλυτο εφάλμα

Λύση:

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) παίρνουμε:

$$\Delta = \left| \frac{1}{3} - 0,333 \right| = \left| \frac{1000}{3.000} - \frac{999}{3.000} \right| = \frac{1}{3.000}$$

Αν θεωρήσουμε $\frac{1}{3} = 0,3333$, τότε $\Delta = \left| \frac{1}{3} - 0,3333 \right| = \frac{1}{30.000}$.

Επειδή η αληθινή τιμή του ζητούμενου μεγέθους κατά κανόνα είναι άγνωστη, ο υπολογισμός του απόλυτου εφάλματος της προεχθίζουσας αυτού του μεγέθους είναι αδύνατος. Γι' αυτό για κάθε συγκεκριμένη περίπτωση είναι δυνατόν να υποδειχθεί ένας δε-
τικός αριθμός, του οποίου δεν θα υπερβίνει το απόλυτο εφάλμα. Αυτός ο αριθμός ονομάζεται φράγμα του απόλυτου εφάλματος. Έτσι, αν $h > 0$ είναι το φράγμα του απόλυτου εφάλματος, τότε

$$\Delta = |x - \alpha| \leq h \quad (2)$$

Παράδειγμα: Να βρείτε το φράγμα του αριθμού $x = 10,6 \pm 0,5$.

Λύση:

Επειδή από την (2) έχουμε

$$|x - \alpha| \leq h \iff \alpha - h \leq x \leq \alpha + h \quad \text{Τότε}$$

$\alpha = 10,6$ και $h = 0,5$, συνεπώς

$$10,6 - 0,5 \leq x \leq 10,6 + 0,5 \iff$$

$$10,1 \leq x \leq 11,1.$$

Το απόλυτο εφάλμα δεν εκφράζει επαρκώς την ποιότητα της μέτρησης ή την ακρίβεια των λογαριασμών.

Για παράδειγμα ας εξετάσουμε την περίπτωση μετρικής του πάχους ενός ριβλίου με $d = 3 \pm 0,5$ cm και το ύψος ενός τραπεζίου με $H = 100 \pm 0,5$ cm. Παρατηρούμε ότι το φράγμα του απόλυτου εφάλματος $h = 0,5$ είναι σαν αριθμός μικρός, όμως το αποτέλεσμα μέτρησης του πάχους του ριβλίου ($d \approx 3$) είναι αρκετά κοντό σε σύγκριση με το αποτέλεσμα μέτρησης του τραπεζίου ($H \approx 100$). Έτσι, για να συγκρίνουμε την ακρίβεια μιας προσεγγίζουσας τιμής είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε ποιό μέρος του ζητούμενου μεχέδους αποτελεί το απόλυτο εφάλμα. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε την έννοια του σχετικού εφάλματος:

Σχετικό εφάλμα δ μιας προσεγγίζουσας λέγεται το πηλίκο του απόλυτου εφάλματος προς την απόλυτη τιμή της προσεγγίζουσας, δηλαδή

$$\delta = \frac{|x-a|}{|a|} = \frac{\Delta}{|a|} \quad (3)$$

Συνήθως το σχετικό εφάλμα εκφράζεται με

$$\delta = \frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\%$$

Όπως και στην περίπτωση του απόλυτου εφάλματος υπολογίζουμε όχι το σχετικό εφάλμα μιας προσεγγίζουσας αλλά το φράγμα αυτής, δηλαδή έναν θετικό αριθμό E , τέτοιον ώστε

$$\delta \leq E \iff \frac{\Delta}{|a|} \leq E$$

Αν τώρα h είναι το φράγμα του Δ μιας προσεγγίζουσας a , τότε $\Delta \leq h$ και

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \leq \frac{h}{|a|} \leq E$$

Έτσι, $E = \frac{h}{|a|}$ (4).

λέχεται φράγμα του σχετικού εφάλματος, και $\delta \leq E$.

Επειδή $h = |a| \cdot E$, ο τύπος $x = a \pm h$ παίρνει την μορφή: $x = a \pm |a| \cdot E = a(1 \pm E)$.

Παράδειγμα: Στο παραγόμενο παράδειγμα είχαμε $d = 3 \pm 0,5$. Επειδή $h = 0,5$ είναι $E = \frac{0,5}{3} = 0,166\dots$ ή $E \approx 0,167 \Rightarrow E \approx 16,7\%$.

Έτσι στην μέτρηση του πάκας του φίρλιου το σχετικό εφάλμα δεν υπερβαίνει το $16,7\%$. Στο ίδιο παράδειγμα $H = 100 \pm 0,5$, οπότε $E = \frac{0,5}{100} = \frac{1}{200} \Rightarrow E = \frac{1}{200} \cdot 100\% = \frac{1}{2}\% = 0,5\%$. Όπως βλέπουμε η ποιότητα μέτρησης του τραπέζιου είναι ανώτερη γιατί το σχετικό εφάλμα δεν υπερβαίνει το $0,5\%$.

6.3. Γραφή προσεγγιζόντων αριθμών

Στο χρώση των αριθμών εννιάως αναφέρουμε το φράγμα του απολύτου εφάλματος π.χ. αν η μέτρηση έγινε με ακρίβεια $0,5 \text{ cm}$ και το αποτέλεσμα είναι 112 cm , τότε γράφουμε

$$112 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ cm}.$$

Όμως στους λογαριασμούς είναι δύσκολο να γράφονται οι αριθμοί και τα εφάλματά τους. Γι' αυτό εισάγουμε την έννοια του αξιόπιστου ψηφίου.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το ψηφίο a στη γραφή προσεγγιζόντων αριθμού λέχεται αξιόπιστο αν το φράγμα του απολύτου εφάλματος δεν υπερβαίνει την μονάδα αυτής της τάξης στην οποία είναι γραμμένο το ψηφίο αυτό.

π.χ. στον προσεγγίζοντα αριθμό του π που είναι $3,14$ όλα τα ψηφία είναι αξιόπιστα επειδή το φράγμα του απόλυτου εφάλματος ($3,142 - 3,14 = 0,002$) $0,002 < 0,01$.

Είναι φανερό ότι αν α είναι αξιόπιστο ψηφίο, τότε όλα τα ψηφία που προηγούνται είναι αξιόπιστα.

Αν το φράγμα του απόλυτου εφάλματος μιας προσέγγισης είναι μεγαλύτερο της μονάδας κάποιας τάξης, τότε το ψηφίο αυτό (όπως και τα επόμενα) το λέμε αμφίβολο.

Προτείνεται να γραφόνεαι οι προσεγγίζοντες αριθμοί έτσι ώστε τα ψηφία τους να είναι όλα αξιόπιστα.

Ας δούμε π.χ. τον προσεγγίζοντα αριθμό $23,47$

Η γραφή του δείχνει ότι όλα τα ψηφία είναι αξιόπιστα και το φράγμα του απόλυτου εφάλματος είναι μικρότερο του $0,01$, δηλαδή

$$x = 23,47 \pm 0,01$$

Ας εξετάσουμε επίσης τον αριθμό $x = 4,63 \pm 0,05$.

Η γραφή αυτή σημαίνει ότι

$$4,63 - 0,05 \leq x \leq 4,63 + 0,05 \iff$$

$$4,58 \leq x \leq 4,68$$

Στον αριθμό $4,63$ έχουμε το ψηφίο 3 αμφίβολο γιατί $0,05 > 0,01$, όπου $h = 0,05$ είναι το φράγμα του απόλυτου εφάλματος.

Το ψηφίο 6 είναι αξιόπιστο γιατί $0,05 < 0,1$, όπου $0,1$ είναι η μονάδα της τάξης του ψηφίου 6.

Έστω x ένας προσεγγίζοντας αριθμός. Όλα τα αξιόπιστα ψηφία του x εκτός από τα μηδενικά που βρίσκονται αριστερώτερα του πρώτου μη μηδενικού ψηφίου λέγονται σημαινόμενα ψηφία.

π.χ. στον αριθμό 3,14 υπάρχουν τρία δεκαίοντα ψηφία, στον αριθμό 0,01255 είναι τέσσερα, στον αριθμό 0,108 είναι τρία, στον αριθμό 0,1200 είναι τέσσερα, στον αριθμό $126 \cdot 10^8$ είναι τρία τα δεκαίοντα ψηφία.

6.4. Κανόνας ετροχχυλοποίησης

Για να ετροχχυλοποιήσουμε έναν αριθμό μέχρι V δεκαίοντα ψηφία, διαγραψουμε όλα τα ψηφία που ακολουθούν μετά την V -στή τάξη, ή, αν αυτό χρειάζεται για την διατήρηση της τάξης, τα αντικαθιστούμε με μηδενικά. Στην ενέργεια αυτή:

i) αν το πρώτο από τα διαγραφόμενα ψηφία είναι μικρότερο του 5, τότε το τελευταίο διατηρητέο ψηφίο δεν μεταβάλλεται.

ii) αν το πρώτο από τα διαγραφόμενα ψηφία είναι μεγαλύτερο του 5, τότε το τελευταίο διατηρητέο ψηφίο μεγαλώνει κατά μία μονάδα.

iii) αν το πρώτο από τα διαγραφόμενα ψηφία είναι ίσο με το 5 και όλα τα υπόλοιπα διαγραφόμενα ψηφία είναι μηδενικά, τότε το τελευταίο διατηρητέο ψηφίο δεν μεταβάλλεται αν αυτό είναι άρτιο και μεγαλώνει κατά μία μονάδα, αν αυτό είναι περιττό.

Το εφάλμα ετροχχυλοποίησης δεν υπερβαίνει τις πέντε μονάδες της πρώτης διαγραφόμενης τάξης.

Συχνά ετοις υπολογισμοίς κρυσιμοποιούνται πολύ μεγάλοι και πολύ μικροί αριθμοί (δετικοί).

Τέτοιοι αριθμοί διευκολύνει καλλίτερα να γράφονται στη μορφή $\alpha \cdot 10^v$, όπου $1 \leq \alpha < 10$ και $v \in \mathbb{Z}$, με

των διατήρηση μόνο αξιόπιστων ψηφίων.

Όταν γράφουμε μία προσεγγίζουσα τιμή στη μορφή $x \approx a \cdot 10^y$, τότε το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει την μονάδα της τελευταίας διατηρητέας τάξης του αριθμού, πολλαπλασιασμένης επί τον 10^y .

Έστω η γραφή $x \approx 5,3 \cdot 10^3$.

Τότε το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει τον αριθμό $0,1 \cdot 10^3$, δηλαδή $x = 5,3 \cdot 10^3 \pm 0,1 \cdot 10^3$ ή $x = 10^3 (5,3 \pm 0,1)$.

Αν $x \approx 5,3 \cdot 10^{-3}$, τότε $x = (5,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$.

Παραδείγματα μεγάλων και μικρών αριθμών αποτελούν τα παρακάτω:

Η διάμετρος του μλίου είναι $1390.600.000 = 1,3906 \cdot 10^9$ m, η διάμετρος ενός μορίου νερού είναι $0,00000003$ cm $= 3 \cdot 10^{-8}$ cm, η μάζα της γης είναι $5,98 \cdot 10^{24}$ kg, η ταχύτητα του φωτός είναι $2,99793 \cdot 10^8$ m/s.

Το απόλυτο σφάλμα της διαμέτρου του μλίου δεν υπερβαίνει το $0,0001 \cdot 10^9$ ή $\Delta \leq \frac{1}{10^4} \cdot 10^9 = 10^5 \Rightarrow \Delta \leq 100.000$ m ή $\Delta \leq 100$ km.

6.5. Πρόσθεση και Αφαίρεση Προσεγγιζόμενων αριθμών

Έστω a και b ότι είναι οι προσεγγιζόμενες τιμές των αριθμών x και y αντίστοιχα, με ακρίβεια h_a και h_b , δηλαδή $x = a \pm h_a$, $y = b \pm h_b$ ή $a - h_a \leq x \leq a + h_a$ και $b - h_b \leq y \leq b + h_b$.

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί το φράγμα του απόλυτου σφάλματος του αθροίσματος $a + b$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη

παίρνουμε :

$$a+b - (h_a+h_b) \leq x+y \leq a+b + (h_a+h_b),$$

δηλαδή :

$$x+y = a+b \pm (h_a+h_b) \quad (5)$$

Έτσι παίρνουμε : $h_{a+b} = h_a+h_b$ Ο κανόνας αυτός επεκτείνεται για οποιοδήποτε αριθμό προσδεταίων.

Συνεπώς το φράγμα του σχετικού εφάλματος ενός αθροίσματος είναι :

$$E_{a+b} = \frac{h_a+h_b}{a+b} \quad (6)$$

αν $a > 0, b > 0$.

Από τον τύπο $h_{a+b} = h_a+h_b$ προκύπτει ότι, αν ένας από τους προσδετέους έχει απόλυτο εφάλμα που υπερβαίνει εμφαντικά τα απόλυτα εφάλματα των άλλων προσδετέων, τότε την ακρίβεια του αθροίσματος δεν είναι δυνατό να την βελτιώσουμε, βελτιώνοντας την ακρίβεια των προσδετέων αυτών.

Για τον υπολογισμό των αξιοπιστιών ψηφίων στην πρόσθεση προσεγγιζόντων αριθμών με όλα τα ψηφία αξιόπιστα, προτείνεται ο παρακάτω κανόνας :

1. Ξεχωρίζουμε τον προσδετέο με τα λιγότερα αξιόπιστα δεκαδικά ψηφία (ο λιγότερο ακριβής προσδετέος)
2. Στρογγυλοποιούμε τους υπόλοιπους προσδετέους, αβλίνοντας στον καθένα ένα ψηφίο περισσότερο από τον πρώτο (λιγότερο ακριβή) προσδετέο.
3. Κάνουμε την πρόσθεση υπολογίζοντας όλα τα διατηρηθέντα ψηφία.
4. Στρογγυλοποιούμε το αποτέλεσμα μέχρι το προτελευταίο ψηφίο.

Παράδειγμα 1. Αν $a_1 = 0,423$, $a_2 = 72,8$, $a_3 = 14,715$,
βρείτε το $a_1+a_2+a_3$.

Λύση:

Ο a_2 έχει λιγώτερα αξιόπιστα δεκαδικά ψηφία δηλαδή ένα, γι' αυτό αυτός δεν μεταβάλλεται. Στρογγυλοποιούμε τους a_2 και a_3 μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία, δηλαδή

$$a_1 = 9,42 \quad , \quad a_2 = 14,72 \quad , \quad \text{τότε}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 9,42 + 72,0 + 14,72 = 87,94.$$

Στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμα μέχρι ένα δεκαδικό ψηφίο παίρνουμε το άθροισμα 87,9.

Όπως και στην περίπτωση του αθροίσματος έτσι και για την διαφορά έχουμε:

$$h_a - h_b = h_a - h_b \quad (7)$$

Συνεπώς το φράγμα του σχετικού σφάλματος είναι:

$$E_{a-b} = \frac{h_a - h_b}{|a - b|} \quad (8)$$

Από τον τύπο (8) προκύπτει ότι όταν αφαιρούμε δύο σχεδόν ίσους προσεγγίζοντες αριθμούς, τότε $h_a - h_b$ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο, δηλαδή μπορεί να προκύψει απώλεια της ακρίβειας.

π.χ. αν $a = 1,234$, $b = 1,238$ και $h_a = h_b = 0,001$, τότε

$$E_{a-b} = \frac{0,001 + 0,001}{|1,234 - 1,238|} = \frac{0,002}{0,004} = \frac{1}{2}$$

ή $E_{a-b} = 100\% \cdot 0,5 = 50\%$. Γι' αυτό συνήθως αποφεύγουμε την αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών.

Παράδειγμα 2: Να βρείτε την διαφορά $x - y$, αν $x \approx 7,25$, $y \approx 3,8245$

Λύση:

Στρογγυλοποιούμε τον αριθμό 3,8245 μέχρι τρία δεκαδικά ψηφία: $3,8245 \approx 3,824$.

Βρίσκουμε

$$x - y = 7,25 - 3,824 = 3,426$$

Στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμα μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία, παίρνουμε $3,43 = x - y$.

Πολλαπλασιασμός και Διάρθρωση προσεγγιζόντων αριθμών

Έστω $x = a + h_a$, $y = b + h_b$, όπου $a > 0$, $b > 0$.

Τότε το φράγμα του απόλυτου εφάλματος του γινομένου $a \cdot b$ και του πηλίκου ορίζονται από τους τύπους:

$$h_{a \cdot b} = a \cdot h_b + b \cdot h_a \quad (9)$$

$$h_{\frac{a}{b}} = \frac{h_a}{a} + \frac{h_b}{b} \quad (10)$$

Από τους (9) και (10) προκύπτουν οι τύποι που ορίζουν το σχετικό εφάλμα:

$$E_{a \cdot b} = E_a + E_b \quad (11)$$

$$E_{\frac{a}{b}} = E_a + E_b \quad (12)$$

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το γινόμενο των αριθμών 16,43 και 2,7539

Λύση:

$$16,43 \cdot 2,7539 \approx 16,43 \cdot 2,754 = 45,25.$$

Εδώ στον αριθμό 2,7539 διατηρήσαμε τέσσερα σημαίνοντα ψηφία, όσα εκεί και ο αριθμός 16,43.

Παράδειγμα 2: Να υπολογίσετε το πηλίκο $\frac{x}{y}$, αν $x = 47,2 \pm 0,5$, $y = 19,4 \pm 0,1$.

Λύση:

Έχουμε:

$$\frac{x}{y} \approx \frac{47,2}{19,4} \approx 2,43, \quad E_{\frac{x}{y}} = \frac{0,5}{47,2} + \frac{0,1}{19,4} \approx 0,0158$$

$$h_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \cdot E_{\frac{x}{y}} \approx 2,43 \cdot 0,0158 \approx 0,039, \text{ συνεπώς}$$

$$\frac{x}{y} = 2,43 \pm 0,039 \quad \mu$$

$$\frac{x}{y} = 2,43 \pm 0,4$$

Παράδειγμα 3: Να υπολογίσετε την παράσταση

$$x + yz, \text{ αν } x \approx 104,367, y \approx 14,8, z \approx 0,73$$

Λύση:

Έχουμε

$yz \approx 14,8 \cdot 0,73 = 10,804$. Στρογγυλοποιούμε αυ-
τό το ενδιάμεσο αποτέλεσμα διατηρώντας ένα δεκα-
δικό ψηφίο, δηλαδή 10,8.

Γι' αυτό

$$x + yz \approx 104,367 + 10,8 \quad \mu$$

$$x + yz \approx 104,37 + 10,8 = 115,17 \approx 115.$$

Το τελικό αποτέλεσμα το στρογγυλοποιήσαμε μέχρι
ακέραιο γιατί στον προσθετέο 10,8 το ψηφίο 8 ή-
ταν εφεδρικό και δεν υπαλογίζεται.

Παρατήρηση: Στην ύψωση δύναμης και εξαγωγή ρίζας
στο αποτέλεσμα πρέπει να διατηρηθούν τόσα σημαίνο-
να ψηφία, όσα έχει η βάση της δύναμης και αντίστοι-
κα το υπόρριζο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

155. Τον αριθμό 5,84 να τον στρογγυλοποιήσετε μέχρι
δέκατα με έλλειψη και υπερβολή

156. Να βρείτε τον αριθμό x , αν η προσεγγίζουσα
τιμή του είναι $a = 2,4$ και το απόλυτο σφάλμα $\Delta = 0,01$.

(Απ. : $2,4 \pm 0,04$)

157. Να βρείτε τα φράγματα του αριθμού $y = 22,7 \pm 0,5$.

(Απ.: $22,2 \leq \psi \leq 23,2$)

158. Δίνονται δύο αποτελέσματα μέτρησης ενός μήκους:
 $l_1 = 15 \pm 0,5$ και $l_2 = 140 \pm 0,5$. Ποιά μέτρηση είναι α-
 κριβέστερη; (Απ.: η δεύτερη)

159. Να βρείτε το φράγμα του εκετικού εφάλματος του
 αριθμού $x = 0,23 \pm 0,005$ (Απ.: $\approx 2,2\%$).

160. Έστω ο αριθμός $x = 83,4 \pm 0,5$. Ποιά ψηφία στη
 γραφή της προσεγγίζουσας τιμής είναι αξιόπιστα; (Απ.: 8 και 3)

161. Τους αριθμούς 28,4501, 28,450, 28,550 να
 στρογγυλοποιήσετε μέχρι δέκατα. (Απ.: 28,5, 28,4, 28,6).

162. Να βρείτε τους προσεγγίζοντες αριθμούς του αθροί-
 σματος και της διαφοράς των αριθμών:

α) $a \approx 2,38$ και $b \approx 15,41$, β) $a \approx 7,2$ και $b \approx 4,25$

163. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $a - b + \gamma$, αν
 $a \approx 27,345$, $b \approx 13,8$, $\gamma \approx 5,23$ (Απ.: 18,8).

164. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $a b - \gamma$, αν
 $a \approx 2,9$, $b \approx 13,5$, $\gamma \approx 7,563$ (Απ.: 31,6)

165. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $x + \frac{y}{z}$, όταν
 $x \approx 121,34$, $y \approx 271,3$, $z \approx 34,5$ (Απ.: 129,20).

7. ΠΑΡΕΜΒΟΛΕΣ.

Πολλές φορές χρησιμοποιώντας διαφόρους πίνακες, βρίσκουμε την τιμή μιας συνάρτησης, γνωρίζοντας μία συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής της (αν έχει μία μεταβλητή).

Έτσι, εάν υφίσταται δύο μέγεθος συνδεδεμένα μεταξύ τους με μία μαθηματική σχέση π.χ. $y=2x$, το δεύτερο μέγεθος y μεταβάλλεται συναρτήσει του πρώτου x . Το μέγεθος που μεταβάλλεται αυθαίρετως ονομάζεται (ανεξάρτητη) μεταβλητή, ενώ αυτό που υφίσταται την μεταβολή ονομάζεται συνάρτηση.

Στο παράδειγμά μας το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το y είναι μία συνάρτηση.

Στην τιμή της μεταβλητής $x=1$, η τιμή της συνάρτησης είναι $y=2 \cdot 1=2$, στην τιμή $x=3$ αντιστοιχεί η τιμή $y=6$ κ.λ.η.

Σεως πίνακες υπολογισμού των τιμών μιας συνάρτησης λαμβάνονται διάφορες τιμές, υπολογισμένες από μία σειρά τιμών της μεταβλητής που βρίσκονται γενικά σε κατέχονσα διαστήματα. Θα μπορούσαμε π.χ. να υπολογίσουμε για την συνάρτησή μας $y=2x$ τις νέες τιμές της που αντιστοιχούν σε μία σειρά τιμών της μεταβλητής x που καθεμιά τους είναι 5 ενότιες μεγαλύτερη από την προηγούμενή της και να ενδώσουμε τον πίνακα:

x	y	a
$x_1=0$	$y_1=0$	$a_2=10$
$x_2=5$	$y_2=10$	$a_3=10$
$x_3=10$	$y_3=20$	$a_4=10$
$x_4=15$	$y_4=30$	κ.λ.η.

Συμβαίνει συχνά και μάλιστα εκθεδόν πάντοτε, να φράχνουμε να βρούμε την τιμή μιας συνάρτησης που αντιστοιχεί σε μία ενδιάμεση τιμή της μεταβλητής, δηλαδή σε μία τιμή σου x μη περιλαμβανομένη στον πίνακα.

Στην περίπτωση μας π.χ. για $x=7$ ή $x=8$. Η ερχομαι ευρεθως της λύσεως σε μία τέτοια περίπτωση λέχεται παρεμβολή.

Την παρεμβολή των εφαρμόζουμε πάντοτε μεταξύ των άλλων, στον υπολογισμό του λογαρίθμου ενός δεδομένου αριθμού ή αντεκρίσεως στον υπολογισμό του αριθμού που αντιστοιχεί σε δεδομένο λογαρίθμο.

Η παρεμβολή επίσης κρμεικοποιείται ευκνά στην Ναυτιλία και στην Αστρονομία.

Εάν οι τιμές της ευναρτήσεως είναι ευθέως ανάλογες της μεσαρλητικής x , η λύση του προβλήματος είναι απλή.

Για να διαπιστώσουμε ότι η ευναρτησιν μεσαρβήλεται αναλόγως της μεσαρλητικής της, πρέπει να χράψουμε σε θέλες τις διαφορές μεταξύ δύο μεσαρλητικών τιμών της ευναρτήσεως.

Συμβολίζουμε τις διαφορές αυτές με α . Οι διαφορές αυτές οφείλουν να είναι εσαυτέρες (ίσεσ μεταξύ τους). Στο παράδειχμά μας οι διαφορές είναι 10.

Ο υπολογισμός των ενδιαμέσων τιμών της ευναρτήσεως y ανάχεται λοιπόν στην επίλυση μιας απλής εξισώσεως της μορφής:

$$y = y_3 + \alpha \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

υποδέκοντας επί παραδείχματι, ότι γάχνουμε το y που αντιστοιχεί σε x περιλαμβανόμενο μεταξύ x_3 και x_4 .

Έτσι, για y που αντιστοιχεί σε $x=12$, έχουμε:

$$y = 20 + 10 \cdot \frac{12 - 10}{15 - 10} = 20 + 10 \cdot \frac{2}{5} = 24.$$

Με άλλα λόχα μπορούμε να πούμε ότι: Μια ευναρτησιν είναι ίση με την τιμή που δίδεσαι από τον πίνακα που αντιστοιχεί στην κατώεσρη πλησιέστερη τιμή της μεσαρλητικής, αυξημένη κατά το χυνόμενο σεσ πρώτης διαφοράς (μεταξύ της δεδομένης τιμής της ευναρτήσεως και της συνεχόμενης τιμής της) επί το ολικό των διαφορών των χυονικών τιμών της μεσαρλητικής, που αντιστοιχούν στον πίνακα (βλ. τύπο).

Εάν οι πρώτες διαφορές είναι άνιθεσ, αφαιρώντας από κάθε μία εξ

αυτών την προηγούμενη διαφορά, λαμβάνουμε τις δεύτερες διαφορές β (πίνακας 1). Εάν ούτε αυτές οι δεύτερες διαφορές είναι σταθερές, μπορούμε με ανάλογο τρόπο να υπολογίσουμε τις τρίτες διαφορές γ κλπ. μέχρι να καταλήξουμε σε διαφορές σταθερές ή πολύ μικρές.

Στον πίνακα 2 που δίνουμε για παράδειγμα, όλες οι έκτης διαφορές δεν είναι σταθερές, εν τούτοις οι τέταρτες διαφορές διαφέρουν ήδη να λιγώ και γ αμέσως από τις πέμπτες διαφορές και μετά, η παρεμφαση μπορεί να τις αγνοήσει.

Π Ι Ν Α Κ Α Σ 1

x	ψ	α	β	γ	δ
x_1	ψ_1	α_2			
x_2	ψ_2		β_3		
x_3	ψ_3	α_3	β_4	γ_4	δ_5
x_4	ψ_4	α_4	β_5	γ_5	
x_5	ψ_5	α_5			

Π Ι Ν Α Κ Α Σ 2

x	ψ	α	β	γ	δ	ϵ	$\sigma\tau$
1,0	+19° 19,6'	ή 1159,6'					
2,0	16 2,2	962,2	-197,4'				
3,0	11 53,4	713,4	-248,8	-51,4'			
4,0	7 11,1	431,1	-282,3	-33,5	-17,9'	+0,3'	
5,0	+2 12,9	+132,9	-298,2	-15,9	-17,6	+1,5	+1,2'
6,0	-2 45,1	-165,1	-298,0'	+0,2	-16,1	+2,4	+0,9
7,0	7 29,2	-449,2	-284,1	+13,9	-13,7	+2,0	-0,4
8,0	-11 47,7	-707,7	-258,5	+25,6	-11,7'		

As υποθέσουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης y για $x = x_1 + \theta h$ όπου x_1 είναι η κατώτερη τιμή εκ του πίνακος, η πλησιέστερη της μεταβλητής, h η εκ του πίνακος διαφορά

των χειονοικιών ειμών και ∂ μία ενδιαίτησι. Τότε κατά την θεωρία της παρεμβολής:

$$y = y_1 + \partial \left[a_2 + \frac{\partial-1}{2} \left[\beta_3 + \frac{\partial-2}{3} \left(\chi_4 + \frac{\partial-3}{4} \delta_4 \right) \right] \right]$$

όπου y_1 είναι η τιμή της y για $x = x_1$.

Είναι πολύ ενάτιο να προερέκουμε σε ανώτερες της τέταρτης διαφορές και χ' αυτό ο παραπάνω τύπος αρκεί.

Εάν κατά τους υπολογισμούς, μπορούμε να περιοριστούμε στις δεύτερες ή στις τρίτες διαφορές, δεχόμεθα ότι οι υπόλοιπες διαφορές είναι 0.

Για παράδειγμα, παρεμβάλλοντας με τις τρίτες διαφορές, έχουμε:

$$y = y_1 + \partial \left[a_2 + \frac{\partial-1}{2} \left(\beta_3 + \frac{\partial-2}{3} \chi_4 \right) \right]$$

Παρεμβάλλοντας με τις δεύτερες διαφορές, έχουμε:

$$y = y_1 + \partial \left[a_2 + \frac{\partial-1}{2} \beta_3 \right]$$

Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα, φάσει του πίνακα 2, την τιμή του y που αντιστοιχεί στο $x = 1,2$.

Στην περιπτωσή μας έχουμε, $h = 1,0$ $\partial = 0,2$ $y_1 = 1159,6'$

Κάνοντας παρεμβολή με τις τέταρτες διαφορές λαμβάνουμε:

$$y = 1159,6 + 0,2 \left\{ -197,4 + \frac{0,2-1}{2} \left[-51,4 + \frac{0,2-1}{2} \left(-17,9 + \frac{0,2-3}{2} 0,3 \right) \right] \right\}$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2 \left\{ -197,4 - 0,4 \left[-51,4 - 0,6 \left(-17,9 - 0,7 \cdot 0,3 \right) \right] \right\}$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2 \left\{ -197,4 - 0,4 \left[-51,4 - 0,6 \left(-18,1 \right) \right] \right\}$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2 \left\{ -197,4 - 0,4 \left[-40,54 \right] \right\}$$

$$\Rightarrow y = 1159,6 + 0,2 \left(-181,2 \right) = 1123,4$$

$$\Rightarrow y = 1123,4'$$

Εάν υπολογίσουμε μόνο τις δεύτερες διαφορές, θα λαμβάνουμε:

$$y = 1159,6 + 0,2 \left[-197,4 + \frac{0,2-1}{2} \left(-51,4 \right) \right] = 1124,2'$$

Η τιμή αυτή είναι λιγώτερο ακριβής, αλλά δεν διαφέρει παρά 0,8' του αποτελέσματος που πήραμε προηγουμένως.

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι όσο η τάξη των διαφορών που παίρνουμε είναι μεγαλύτερη (π.χ. τρίτες διαφορές, τέταρτες διαφορές),

κόβο και επιρροή στο αποτέλεσμα είναι πιο ισχυρή και έτσι για κάθε δεδομένη περίπτωση δεν είναι δύσκολο να αποφασίσουμε ποιές διαφορές μας αρκούν για την παρεμβολή.

Συμφωνεί όμως, ως χωνευτόν, μια ενάρτηση να εξαρτάται από δύο μεταβλητές. Στον πίνακα 3 για παράδειγμα η ενάρτηση z εξαρτάται από τις δύο μεταβλητές x και y .

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

$x \backslash y$	36	40	41
1	210	199	187
2	405	384	360
3	573	543	510
4	701	664	624

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε το z που αντιστοιχεί στα $x = 1\frac{1}{3}$ και $y = 37$. Βρίσκουμε κατ'αρχήν την τιμή του z για $x = 1\frac{1}{3}$ ($\beta = \frac{1}{3}$) για κάθε βήμα.

$$y = 36$$

x	y	α	β	δ
1	210	+195		
2	405	+168	-27	
3	573	+128	-40	-13
4	701			

$$y = 40$$

x	y	α	β	δ
1	199	+185		
2	384	+159	-26	
3	543	+121	-38	-12
4	664			

$$y = 44$$

x	y	a	β	δ
1.	187			
2	360	+173	-23	
3	510	+150	-36	-13
4	624	+144		

από εδώ βρίσκουμε τις τιμές του z για $x = \frac{1}{3}$.

y	z	a	β
36	277		
40	263	-14	-3
44	246	-17	

Εφαρμόζοντας ε'αυτών τον πίνακα ακόμη μία φορά τον καινό-
να μας ($\delta = \frac{1}{4}$) βρίσκουμε:

$$z = 277 - \frac{1}{4} \cdot 14 + \frac{3}{32} \cdot 3 = 274$$

Συμβαίνει καμιά φορά να πρέπει να υπολογισθεί μία συνάρτηση
για κάποια μεταβλητή που η τιμή της ξεπερνά το πλαίσιο των τιμών
του πίνακα. Η λύση του προβλήματος αυτού λέγεται Εξτραπολίση

Όταν η συνάρτηση είναι ανάλογη της τιμής της μεταβλητής, ο τύ-
πος της εξτραπολίσης γράφεται:

$$y = y_1 - a_2 \frac{x_1 - x}{x_2 - x_1}$$

και αυτή ανταποκρίνεται στον περίπτωση που π.χ. παίρνουμε
το y για ένα x μικρότερο από το πρώτο από τα x που πε-
ριλαμβάνονται στον πίνακα (ελλειψίς εξτραπολίσης).

Στο πρώτο-πρώτο παράδειγμα που μελετήσαμε, υπολογίζουμε το
y για $x = -5$:

$$y = 0 - 10 \cdot \frac{0 - (-5)}{5 - 0} = -10$$

Ο τύπος της καθ' υπερβολήν εξτραπολίσης είναι της μορφής

$$y = y_4 + a_4 \frac{x - x_4}{x_4 - x_3}$$

Από αυτές των τύπων σε υπολογίζουμε το y για $x=27$

$$y = 30 + 10 \frac{27-15}{15-10} = 30 + 24 = 54$$

Για να είναι ευκολότερη η παρεμβολή, οι αετρωνομικές εφημερίδες δίνουν συχνά των ωριαία μεταβολή της συνάρτησως, δηλαδή των μεταβολή της από ώρα σε ώρα.

Σημείωση 1^η: Αν θέλουμε να δώσουμε ένα γενικότερο ορισμό της παρεμβολής με ένα μαθηματικό τρόπο θα λέγαμε: Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα $[a, \beta]$ από τις τιμές:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n) \quad (1)$$

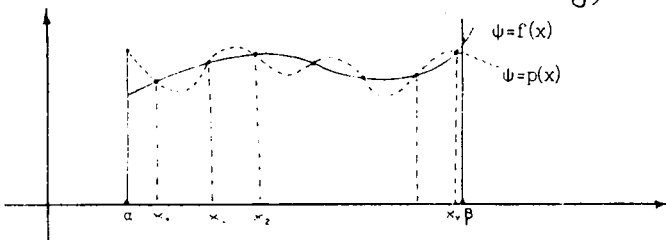
Το πρόβλημα της παρεμβολής είναι: "Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x) = P_n(x)$ βαθμού μικρότερου ή ίσου του n τέτοιο ώστε οι τιμές του στα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ να συμπίπτουν με τις τιμές της δεδομένης συνάρτησως f ," δηλαδή

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n \quad (2)$$

Το πρόβλημα αυτό έχει αληθή γεωμετρική ερμηνεία: Πρέπει να βρεθεί καμπύλη με εξίσωση:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

που να διέρχεται από τα δεδομένα σημεία $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, \dots, n$) (βλ. σχήμα).



Το πολυώνυμο $P(x)$ λέγεται πολυώνυμο παρεμβολής. Τα δεδομένα σημεία $x_i \in [a, \beta]$ λέγονται κόμβοι της παρεμβολής.

Αποδεικνύεται ότι πάντα υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο και είναι μοναδικό. Το πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$ χρησιμοποιείται συνήθως για προβλεπτικούς υπολογισμούς της δεδομένης συνάρτησως f στα σημεία x που είναι διάφορα από τους κόμβους παρεμβολής.

Η πράξη αυτή λέγεται παρεμβολή της συναρτήσεως f .

Αν ο υπολογισμός γίνεται όταν $x \in [x_0, x_n]$, δηλαδή όταν η τιμή της x είναι ενδιάμεσος των x_0 και x_n , τότε η πράξη αυτή λέγεται παρεμβολή. Αν όμως η τιμή της $x \notin [x_0, x_n]$ τότε λέγεται εξτραπολίση.

Σημείωση 2^η: Εάν παίρνουμε μόνο τις πρώτες διαφορές η παρεμβολή λέγεται γραμμική. Εάν πάρουμε τις δεύτερες διαφορές λέγεται παραβολική ή τετραγωνική κ.ο.κ.

Σημείωση 3^η: Τύπος παρεμβολής του Νεύτωνα:

Έστω x_0, x_1, \dots, x_n οι πινακοποιημένες τιμές μιας μεταβλητής των οποίων οι διαφορές $h = \Delta x$ ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$) είναι σταθερές και έστω y_0, y_1, \dots, y_n οι αντιστοιχικές τιμές της συνάρτησεως y . Τότε η τιμή της συνάρτησεως y για μία ενδιάμεσο τιμή της μεταβλητής x , δίδεται προσεγγιστικώς από τον τύπο παρεμβολής του Νεύτωνα:

$$y = y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q \cdot (q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (3)$$

όπου $q = \frac{x-x_0}{h}$ και $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ είναι οι πρώτες, δεύτερες κλπ. διαδοχικές διαφορές. Για $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) το πολυώνυμο (3) παίρνει ακριβώς τις πινακοποιημένες τιμές y_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Όπως είπαμε στην σημείωση 2 έχουμε και εδώ ειδικές περιπτώσεις του τύπου του Νεύτωνα για $n=1$ (γραμμική παρεμβολή), για $n=2$ (τετραγωνική παρεμβολή) κ.λ.π.

Σημείωση 4^η: Τύπος παρεμβολής του Lagrange:

Σε μια γενική περίπτωση το πολυώνυμο βαθμού n , για $x = x_i$ αποδέχεται τις δεδομένες τιμές y_i ($i = 0, 1, \dots, n$), δίδεται δέ (το πολυώνυμο) από τον τύπο παρεμβολής του Lagrange:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x-x_0)(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} y_k + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

166. Να υπολογισθεί η τιμή $\sqrt{2}$, αφού βρεθεί το πολυώνυμο παρεμφερής της συναρτήσεως $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[1,69, 2,05]$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον πίνακα:

x	y	a	β
1,69	1,3		
1,87	1,4	0,1	
2,05	1,5	0,1	0

167. Να γράψετε τον τύπο της συναρτήσεως f από τον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον πίνακα:

x	y	a	β
0	5,2		
1	8,0	2,8	-0,4
2	10,4	2,4	-0,4
3	12,4	2,0	-0,4
4	14,0	1,6	-0,4
5	15,2	1,2	

168. Να γράψετε παραβολικό πολυώνυμο παρεμφερής της συναρτήσεως f με $f(x) = e^x$ που δίδεται στον πίνακα:

x	3,50	3,55	3,60	3,67	3,70
y	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447

169. Η συνάρτηση f δίδεται με τον πίνακα:

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	2,7854	2,8330	2,8761	2,9151

i. Να χράσετε οαλυώνυμς κριου βραθμού παρεμφυλίσ εσο Διάβευμα [1,1 , 3°].

ii. Να υπολοχίβεεε εωυ τιμή $f(1,15)$

170. Να υπολοχίβεεε το $\mu\mu 14^\circ$ από τον παρακάτω πίνακα:

x	y	a	β	δ
15°	0,2588			
20°	0,3420	832	-26	-6
25°	0,4226	774	-32	-6
30°	0,500	736	-38	-6
35°	0,5736	692	-44	-6
40°	0,6428	643	-49	-6
45°	0,7071	589	-54	-6
50°	0,7660	532	-57	-6
55°	0,8192			

Παρατήρησει: Η παρεμφολή εδω ήρπει να χίνε ετός του Δίασει-μακος [15,55] άρα έκουμε extrapolation.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

171. Να βρείτε με παρεμφολή εώμφωνα με τον πίνακα I εωυ εξι-ωσει του χρόνου εωυ 20^η Ιουλίου ετις 6 h ώρα Γερμίνουιτς.

172. Να ηροεδιορίβεεε εώμφωνα με τον πίνακα I εωυ κλίση του Η-λίου εωυ 29^η Ιουλίου ετις 18 h ώρα Γερμίνουιτς.

173. Να υπολοχίβεεε με παρεμφολή εώμφωνα με τον πίνακα I εωυ ορθή αναφορά του Ηλίου εωυ 6^η Ιουλίου ετις 18 h ώρα Γερμίνουιτς.

174. Να υπολογίσετε με παρεμβολή των ορθών αναφορά του Ηλίου στις 23 Ιουλίου στις 1h 32 min 44,3 sec ώρα Γκρίνουιτς.

Πάρτε τα δεδομένα από τον πίνακα I.

175. Να υπολογίσετε εύθωνα με τον πίνακα I των κλίσεων του Ηλίου των 10^h Ιουλίου στις 17h 12 min 30,3 sec ώρα Γκρίνουιτς.

176. Να βρείτε εύθωνα με τον πίνακα I των εξίσωσης του χρόνου των 2^α Ιουλίου στις 4h 50 min 19,1 sec ώρα Γκρίνουιτς

177. Υπολογίστε εύθωνα με τον πίνακα II των τιμών της ενέργειας μεταπτώσεως των Ισημερινών κατά των ορθών αναφορά για $\alpha = 1,08 \text{ h}$, $\delta = +63^\circ$.

178. Να βρείτε των ενέργεια μεταπτώσεως των Ισημερινών για $\alpha = 5,2 \text{ h}$, $\delta = +45,9^\circ$

179. Ομοίως για $\alpha = 17,9 \text{ h}$ και $\delta = +56,9^\circ$

180. Ομοίως για $\alpha = 19,8 \text{ h}$ και $\delta = +37,9^\circ$.

Πίνακας Ι

Η Α Ι Ο Σ

Μέση ημερησίως Γερμανίας (0^η διεθνούς χρόνου)

Ημερησίως Γερμανίας	Ημέρα της εβδομάδας	Μέση ημερησίως Γερμανίας (0 ^η διεθνούς χρόνου)					Ακτίνα	Λοιπός Χρόνος
		Εξίσωση Χρόνου	Ωριακή Μεταβολή	Φαινόμενη σημειολογία	Φαινόμενη σημειολογία	Φαινόμενη κλίση		
13	Δ	0 ^h 23 ^m 7 ^s	0	5,70	23 11 49	9 ^m 18 ^s	045 43	19 32 20 1280
14	Ε	0 13 31	0 483	5 25 4	23 11 49	8 18	045 41	18 30 16 1838
15	Σ	0 0 70	0 472	5 20 14	23 11 52	7 0	045 40	18 40 13 387
16	Κ	0 3 23	0 401	5 33 21	23 11 57	4 0	045 39	18 44 10 055
17	Α	0 9 55	0 410	5 37 13	23 12 0	4 0	045 35	18 48 7 513
18	Π	0 12 06	0 410	5 41 42	23 12 5	4 0	045 38	18 52 5 022
19	Ε	0 37 35	0 423	5 41 42	23 12 5	4 0	045 38	18 55 5 030
20	Σ	0 37 03	0 423	5 45 52	23 12 12	1 0	045 38	18 59 56 195
21	Κ	0 50 27	0 423	5 50 2	23 12 20	1 0	045 40	19 3 52 717
22	Α	1 4 06	0 409	5 54 11	23 12 25	1 0	045 42	19 7 40 305
23	Π	1 17 35	0 378	5 58 21	23 12 35	0 0	045 44	19 11 46 858
24	Ε	1 30 52	0 378	0 2 31	23 12 47	0 0	045 46	19 15 49 158
25	Σ	1 50 11	0 394	0 10 50	23 12 57	0 0	045 49	19 19 59 528
26	Κ	2 21 48	0 401	0 14 59	23 13 0	0 0	045 53	19 23 32 700
27	Α	2 31 52	0 424	0 19 8	23 13 8	0 0	045 57	19 27 28 104
28	Π	2 47 03	0 417	0 23 17	23 13 13	0 0	045 57	19 31 28 292
29	Ε	2 50 33	0 410	0 27 20	23 13 18	0 0	045 57	19 35 25 312
30	Σ	3 11 40	0 401	0 31 35	23 13 23	0 0	045 57	19 39 23 321
1	Κ	3 23 39	0 432	0 35 43	23 13 28	0 0	045 57	19 43 21 330
2	Α	3 35 10	0 483	0 39 51	23 13 33	0 0	045 57	19 47 19 339
3	Π	3 46 56	0 472	0 43 59	23 13 38	0 0	045 57	19 51 17 348
4	Ε	3 57 70	0 401	0 48 7	23 13 43	0 0	045 57	19 55 15 357
5	Σ	4 8 00	0 410	0 52 15	23 13 48	0 0	045 57	19 59 13 366
6	Κ	4 19 32	0 423	0 56 22	23 13 53	0 0	045 57	20 0 11 375
7	Α	4 20 04	0 423	0 60 29	23 13 58	0 0	045 57	20 4 9 384
8	Π	4 39 02	0 409	0 64 35	23 14 03	0 0	045 57	20 7 7 393
9	Ε	4 49 25	0 394	0 68 41	23 14 08	0 0	045 57	20 10 5 402
10	Σ	4 58 51	0 378	0 72 47	23 14 13	0 0	045 57	20 14 3 411
11	Κ	5 7 38	0 301	0 76 53	23 14 18	0 0	045 57	20 18 1 420
12	Α	5 15 84	0 344	0 80 59	23 14 23	0 0	045 57	20 21 59 429
13	Π	5 23 08	0 329	0 85 05	23 14 28	0 0	045 57	20 25 57 438
14	Ε	5 31 48	0 307	0 89 10	23 14 33	0 0	045 57	20 29 55 447
15	Σ	5 38 01	0 287	0 93 16	23 14 38	0 0	045 57	20 33 53 456
16	Κ	5 45 25	0 267	0 97 21	23 14 43	0 0	045 57	20 37 51 465
17	Α	5 51 50	0 245	0 101 26	23 14 48	0 0	045 57	20 41 49 474
18	Π	5 57 03	0 223	0 105 31	23 14 53	0 0	045 57	20 45 47 483



ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ
ΕΤΗΣΙΑ ΜΕΤΑΠΤΩΣΗ ΙΣΤΗΜΕΡΙΩΝ

α	δ	Μετέπτωση ως προς την ορθή αναφορά											Μετέπτωση ως προς κλίση.					
		-40°	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°		70°				
0h																		
1		3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	3 ^h ,1	+20"
2		2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,7	3,7	4,0	4,0	+19"
3		2,5	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,5	3,5	3,6	3,6	4,2	4,2	4,9	4,9	+17"
4		2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	4,4	4,4	5,7	5,7	+14"
5		2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,3	3,3	3,3	3,5	3,8	4,2	4,2	4,6	4,6	6,6	6,6	+10"
6		2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,3	3,3	3,3	3,6	3,8	4,2	4,2	4,7	4,7	7,7	7,7	0
7		2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,3	3,3	3,3	3,5	3,8	4,2	4,2	4,6	4,6	6,6	6,6	-5
8		2,1	2,4	2,7	2,9	3,1	3,3	3,3	3,3	3,5	3,7	4,0	4,0	4,4	4,4	6,2	6,2	-10
9		2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,7	4,0	4,0	4,2	4,2	5,7	5,7	-14
10		2,5	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,3	3,5	3,6	3,6	3,9	3,9	4,9	4,9	-17
11		2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5	4,0	4,0	-19
12		3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	-20
13		3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,2	2,8	2,8	2,7	2,5	2,1	2,1	-19
14		3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,2	2,5	2,5	2,3	2,1	1,9	1,2	-17
15		3,9	3,6	3,4	3,2	3,1	2,9	2,7	2,7	2,5	2,2	2,5	2,5	2,0	1,4	0,5	0,5	-14
16		4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,7	2,5	2,2	2,1	2,1	1,7	1,1	0,1	0,1	-10
17		4,2	3,8	3,5	3,3	3,1	2,8	2,6	2,6	2,4	2,1	2,0	2,0	1,5	0,8	0,5	0,5	-5
18		4,2	3,8	3,6	3,3	3,1	2,8	2,6	2,6	2,3	2,0	2,0	2,0	1,5	0,8	0,5	0,5	0
19		4,2	3,8	3,5	3,3	3,1	2,8	2,6	2,6	2,3	2,0	2,0	2,0	1,5	0,8	0,5	0,5	+5
20		4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,7	2,5	2,2	2,1	2,1	1,7	1,1	0,1	0,1	+10
21		3,9	3,6	3,4	3,2	3,1	2,9	2,7	2,7	2,5	2,2	2,3	2,3	2,0	1,4	0,5	0,5	+14
22		3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,8	2,8	2,5	2,5	2,5	2,5	2,3	1,9	1,2	1,2	+17
23		3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	2,8	2,8	2,8	2,8	2,7	2,5	2,1	2,1	+19
24		3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	+20"

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II.

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω δύο μη κενά σύνολα X και Y .

Αν σε κάθε στοιχείο x του συνόλου X αντιστοιχεί ένα και μόνο στοιχείο y του συνόλου Y , δηλαδή

$$\forall x \in X \rightarrow y \in Y$$

τότε λέμε ότι στο σύνολο X ορίζεται συνάρτηση f (απεικόνιση) με σύνολο τιμών στο Y :

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \text{ή} \quad f: X \rightarrow Y.$$

Η συνάρτηση επίσης συμβολίζεται με τον τύπο:

$$y = f(x)$$

όπου x ονομάζεται μεσαβλητή και $f(x)$ τιμή της συνάρτησης.

(η $y_0 = f(x_0)$ είναι μία συγκεκριμένη (μερική) τιμή της συνάρτησης)

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των τιμών της μεσαβλητής x στις οποίες η συνάρτηση παίρνει τιμή πραγματικού αριθμού.

Το πεδίο ορισμού συμβολίζεται με $\Delta(f)$.

ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = f(x)$ ονομάζεται το σύνολο όλων των $y \in Y$ στις οποίες υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$.

Το πεδίο τιμών συμβολίζεται με $E(f)$.

Στα επόμενα θα θεωρούμε $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή θα μελετήσουμε μόνο πραγματικές συναρτήσεις.

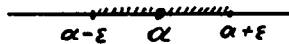
Διάστημα (a, b) ονομάζεται το σύνολο των x που ικανοποιεί τις ανισώσεις $a < x < b$.

Κλειστό διάστημα $[a, b]$ ονομάζεται το σύνολο των x

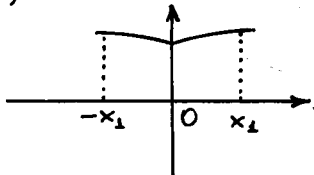
που ικανοποιεί τις ανισώσεις $\alpha \leq x \leq \beta$.

Υπάρχουν διάφορα διαστήματα όπως: $(-\infty, +\infty)$, $[a, \beta)$, $(a, \beta]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$.

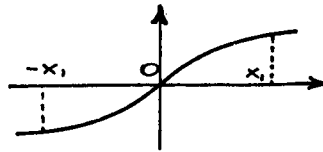
ε-περιοχή του σημείου α στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε διάστημα της μορφής $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ που περικλείει το σημείο $x = \alpha$.



Η συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται άρτια αν για κάθε $x \in \Delta(f)$ η τιμή $-x \in \Delta(f)$ και ικανοποιεί την συνθήκη $f(x) = f(-x)$.



Η συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται περιττή αν για κάθε $x \in \Delta(f)$, η τιμή $-x \in \Delta(f)$ και ικανοποιεί την συνθήκη $f(x) = -f(-x)$.



Ω1. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ: Η συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται αύξουσα (\uparrow) στο διάστημα $(a, \beta) \subseteq \Delta(y)$, αν για κάθε $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ αληθεύουν οι συνεπαγωγές:

$$x_2 > x_1 \quad (x_2 < x_1) \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1))$$

Η συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται εθίνουσα (\downarrow) στο διάστημα $(a, \beta) \subseteq \Delta(y)$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ αληθεύουν οι συνεπαγωγές:

$$x_2 > x_1 \quad (x_2 < x_1) \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \quad (f(x_2) > f(x_1)).$$

Η συνάρτηση που είναι είτε αύξουσα είτε εθίνουσα στο διάστημα $(a, \beta) \subseteq \Delta(y)$ ονομάζεται μονότονη στο (a, β)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Να βρεθούν οι τιμές: $f(0)$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{f(x)}$.

Λύση:

Αντικαθιστώντας το x με τις τιμές του, έχουμε:

$$f(0) = \sqrt{1+0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

182. Έστω $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$. Να δείξετε ότι $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

Λύση:

*Έχουμε $f(y) = \log \frac{1+y}{1-y}$. Άρα:

$$f(x) + f(y) = \log \frac{1+x}{1-x} + \log \frac{1+y}{1-y} = \log \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y} =$$

$$= \log \frac{1+x+y+x+y}{1-x-y-x-y} = (\text{διαρπίνοντας διὰ } 1+xy) = \log \frac{1 + \frac{x+y}{1+xy}}{1 - \frac{x+y}{1+xy}} =$$

$$= f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

183. Έστω $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

Λύση:

Θέτουμε $x+1 = t \Rightarrow x = t-1$.

$$\begin{aligned} \text{οπότε } f(x+1) &= f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = \\ &= t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

184. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ που δίδεται με σιν μορφή:

$$f(x) = \begin{cases} \pi x & \forall x \in [0, +\infty) \\ \sin x & \forall x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των: $f(0)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f(-\pi)$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση:

Επειδή $0 \in [0, +\infty)$ έχουμε $f(0) = \eta\mu 0 = 0$. Ομοίως, $\pi \in [0, +\infty)$ άρα $f(\pi) = \eta\mu \pi = 0$.

$$\frac{3\pi}{2} \in [0, +\infty), \text{ άρα } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1.$$

$$-\frac{\pi}{4} \in (-\infty, 0), \text{ άρα } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\omega \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\pi \in (-\infty, 0), \text{ άρα } f(-\pi) = \sigma\omega(-\pi) = \sigma\omega\pi = -1.$$

$$-\frac{\pi}{2} \in (-\infty, 0), \text{ άρα } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\omega\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\omega \frac{\pi}{2} = 0.$$

185. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x) = \sqrt{x^2+2}$.

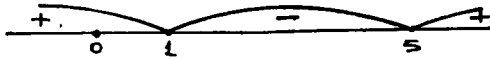
Λύση:

Η τετραγωνική ρίζα υπάρχει όταν $x^2+2 \geq 0$ που ικανοποιείται για οποιαδήποτε τιμή του $x \in \mathcal{R}$, δηλαδή $\Delta(f) = (-\infty, +\infty)$

186. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x) = \sqrt[3]{6x-x^2-5}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η ρίζα $\sqrt[3]{x}$ ορίζεται όταν ισχύει η σχέση $x \geq 0 \quad \forall \text{ } \mathbb{N}$. Πρέπει λοιπόν $6x-x^2-5 \geq 0 \iff x^2-6x+5 \leq 0$
 $\iff (x-5)(x-1) \leq 0$. Άρα $\Delta(f) = [1, 5]$ (βλ. και σχήμα):



187. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = \frac{x}{x^2-3x-4}$.

Λύση

Πρέπει $x^2-3x-4 \neq 0$ ή $(x-4)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 4, x \neq -1$.

$$\text{Άρα } \Delta(f) = \mathcal{R} - \{4, -1\}.$$

188. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

Λύση

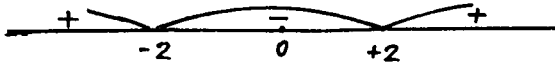
Πρέπει $-x \geq 0$ και $2+x > 0$ ή $x \leq 0$ και $x > -2$. Η τομή αυτών των συνόλων είναι $-2 < x \leq 0$, άρα $\Delta(f) = (-2, 0]$.

189. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = \log(x^2 - 4)$.

Λύση:

Η λογαριθμική συνάρτηση $y = \log x$ ορίζεται όταν $x > 0$, συνεπώς πρέπει $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$, αν' όπου

$$\Delta(f) = \mathbb{R} - \{[-2, 2]\}.$$



190. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = \log \frac{2+x}{2-x}$

Λύση.

Η συνάρτηση ορίζεται αν $\frac{2+x}{2-x} > 0$, $x \neq 2$.

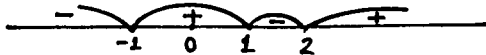
$$\Leftrightarrow (2+x)(2-x) > 0. \text{ Άρα } \Delta(f) = (-2, 2)$$

191. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = \log \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$

Λύση

Πρέπει $\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$, $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(x+1) > 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) > 0. \text{ Άρα } \Delta(f) = (-1, 1) \cup (2, +\infty)$$



192. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = \sqrt{\eta\mu 2x}$.

Λύση

$$\text{Πρέπει } \eta\mu 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi \Leftrightarrow$$

$$k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Έτσι } \Delta(f) = \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right], k \in \mathbb{Z}.$$

193. Να διαπιστώσετε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιές περιττές:

$$\alpha') f(x) = \frac{1}{2} (a^x + a^{-x})$$

$$\beta') f(x) = \log \frac{2+x}{2-x}$$

$$\gamma') y = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

$$\delta') f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$$

Λύση

α') Σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει να ελέγξουμε τών $f(-x)$, όταν $-x \in \Delta(f)$.

$$\text{Έχουμε } f(-x) = \frac{1}{2} (a^{-x} + a^x) = \frac{1}{2} (a^x + a^{-x}) = f(x)$$

άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

$$\beta') f(-x) = \log \frac{2-x}{2+x} = \log \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{-1} = -\log \frac{2+x}{2-x} = -f(x)$$

άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

$$\gamma') y(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = y(x)$$

άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

δ') $f(-x) = \sqrt[3]{[1-2(-x)]^2} = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$. Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

194. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε διάστημα συμμετρικό ως προς την αρχή των συντεταχμένων. Να δείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $F_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση $F_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ είναι περιττή.

195. Δίδονται οι συναρτήσεις $f(x) = 10^x$, $\phi(x) = \pi^3 2x + 3$.
Να προεδούν:

$$\alpha') \frac{\phi(0) + f(1)}{\phi(\pi) - f(0)} \quad (\text{Απ.: } 17)$$

$$\beta') \frac{f(2) + \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f(3) - \phi\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \quad (\text{Απ.: } \frac{103}{1.000})$$

1.1.2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Γραφική παράσταση (χράφιμα) της συνάρτησης $y = f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ ή $\Gamma = \{ (x, f(x)) : y = f(x) \}$.

Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$ εργαζόμαστε ως εξής:

α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες των ετεταχμένων $x = 0$, $y = y_0$ και $y = 0$, $x = x_0$.

γ) Αν η συνάρτηση είναι περιττή, τότε η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των ετεταχμένων και κατασκευάζουμε το χράφιμα για $x \geq 0$.

Αν η συνάρτηση είναι άρτια, τότε η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα OY (άξονας τεταχμένων) και κατασκευάζουμε το χράφιμα για $x \geq 0$.

δ) Αν η συνάρτηση είναι περιοδική τότε κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση σε διάστημα μήκους μιας περιόδου T και μετά μεταφέρεται κατά μήκος του άξονα Ox .

ε) Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών x, y .

1.1.3. ΣΥΝΘΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $y = g(x)$ και $z = f(y)$, όπου $\Delta(f(y)) \supseteq E(g(x))$, δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $z = f(y)$ περιλαμβάνει το πεδίο τιμών της συνάρτησης $y = g(x)$.

Η συνάρτηση $z = f(g(x))$ ονομάζεται σύνθετη συνάρτηση.

Συμβολίζεται επίσης και ως εξής: $f(x) \circ g(x) = f(g(x))$.

1.1.4. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρούμε την συνάρτηση $y = f(x)$ που εστω ότι έχει πεδίο ορισμού $\Delta = X$ και πεδίο τιμών $E = Y$

Αν σε κάθε σημείο $y \in Y$ αντιστοιχεί μοναδικό στοιχείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$ τότε αυτή η αντιστοιχία (απεικόνιση) ορίζει κάποια συνάρτηση $x = g(y)$ που ονομάζεται αντίστροφη ως προς την $y = f(x)$. Η αντίστροφη συνάρτηση συμβολίζεται επίσης και έτσι: $g(y) = f^{-1}$.

Αν στην αντίστροφη συνάρτηση αντικαταστήσουμε το x με το y τότε αυτή θα πάρει την μορφή $y = g(x)$ που και αυτή είναι αντίστροφη.

Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης $y = g(x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παραστάσεως $y = f(x)$ ως προς την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης ορθής γωνίας του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων XOY ($y = x$).

Κανή συνθήκη υπάρξεως αντίστροφης συνάρτησης στο διάστημα (a, b) είναι η μονοτονία στο (a, b) .

1.15. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΕΙΞ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

I. Δυναμική συνάρτηση $y = x^a$

Το πεδίο ορισμού της για κάθε a περιέχει το διάστημα $(0, +\infty)$. Το σημείο 0 ανήκει στο διάστημα αυτό αν $a \geq 0$ και δεν ανήκει αν $a < 0$.

Το διάστημα $(-\infty, 0)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού. Όταν π.χ.

$$a = \pm 1, a = \pm 2, \dots, a = \pm \frac{1}{3}, \dots, a = \pm \frac{1}{2n+1}.$$

II. Εκθετική συνάρτηση $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$). Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, +\infty)$

III. Λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$). Το πεδίο ορισμού της είναι $(0, +\infty)$. Αν $a = e$ τότε $y = \ln x$.

IV. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}
 y &= \mu\eta x && \text{με πεδίο ορισμού } (-\infty, +\infty) \\
 y &= \sigma\omega x && \text{με πεδίο ορισμού } (-\infty, +\infty) \\
 y &= \epsilon\phi x && \text{με πεδίο ορισμού } \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 y &= \sigma\theta x && \text{με πεδίο ορισμού } \mathbb{R} - (k\pi, k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

V Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}
 y &= \sigma\zeta\mu\eta x && \text{με πεδίο ορισμού } |x| \leq 1 \text{ ή } \Delta = [-1, 1]. \\
 y &= \sigma\zeta\sigma\omega x && \text{με πεδίο ορισμού } |x| \leq 1 \text{ ή } \Delta = [-1, 1]. \\
 y &= \sigma\zeta\epsilon\phi x && \text{με πεδίο ορισμού } (-\infty, +\infty) \\
 y &= \sigma\zeta\sigma\theta x && \text{με πεδίο ορισμού } (-\infty, +\infty)
 \end{aligned}$$

VI Πολυωνυμική (ακεραία) συνάρτηση: Ονομάζεται η συνάρτηση της μορφής:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \text{ όπου } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ πραγματικοί αριθμοί, } n \in \mathbb{N}.$$

VII. Ρητή συνάρτηση: Ονομάζεται η συνάρτηση της μορφής:

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \text{ και } b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \neq 0.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

196 Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = x^3 - 3x.$$

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού είναι $\Delta = (-\infty, +\infty)$

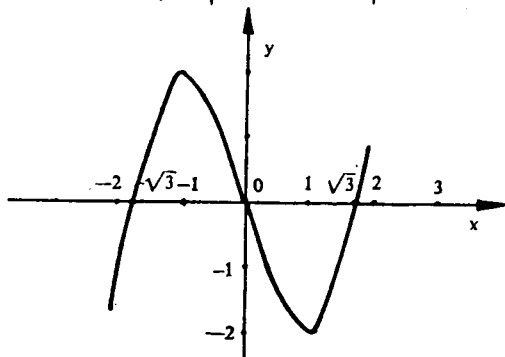
β) $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x).$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

γ) $y = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$,
 δηλαδή τὰ σημεία τομής με τους άξονες συντεταγμένων
 είναι $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$

Συμπληρωματικά κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα

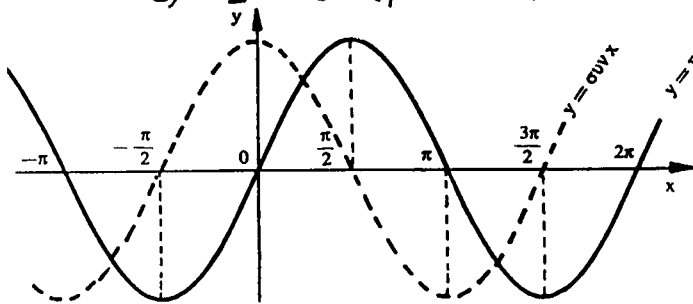
x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{8}$
1	-2
3	18



197. Να ορίσετε την συνάρτηση $y = \cos \mu x$ και να χίμη η
 γραφική της παράσταση.

Λύση

Θεωρούμε τήν συνάρτηση $y = \mu x$ όπου $\Delta(y) = (0, 2\pi)$
 και $E(y) = [-1, 1]$ (βλ. το παρακάτω σχήμα). Αυτή είναι κομό-



σони στα διαστήματα
 $[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}]$, και
 γενικώς στα διαστή-
 ματα αυτά είναι α-
 ντιστρέφими. Παιρ-
 νουμε ένα διάστημα

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση ως εξής:

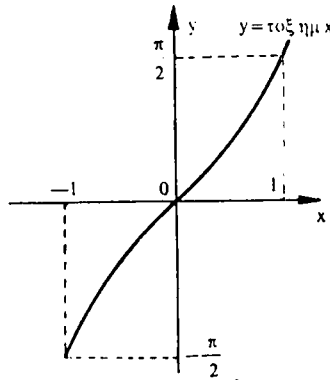
$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ ή } x = \cos \mu y$$

Εναλλάσσουμε τώρα τα x με y και παίρνουμε την συνάρτηση
 $y = \cos \mu x$ όπου $\Delta(\cos \mu x) = [-1, 1]$,

$$E(\cos \mu x) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \quad \text{Βλέπουμε ακόμη ότι}$$

$\mu(-x) = \cos \mu(-x) = -\cos \mu x = -y(x)$, δηλαδή είναι περιττή.

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$



198. Να ορίσετε την συνάρτηση $y = \cos \delta \omega x$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση.

Θεωρούμε την συνάρτηση $y = \sin x$ όπου $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$ και $E(y) = [-1, 1]$. Τα διαστήματα μονοτονίας είναι $[k\pi, k\pi + \pi]$.

Στο διάστημα $[0, \pi]$ ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \text{ ή } x = \arcsin y$$

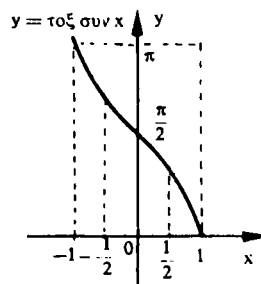
Εναλλάσσουμε τώρα τα x με y και έχουμε $y = \cos \delta \omega x$ όπου

$$\Delta(y) = [-1, 1] \text{ και } E(y) = [0, \pi]$$

Η συνάρτησή μας δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια

$$\text{Δίνει } \cos \delta \omega (-x) = \pi - \cos \delta \omega x$$

x	y
0	$\pi/2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
1	0
-1	π



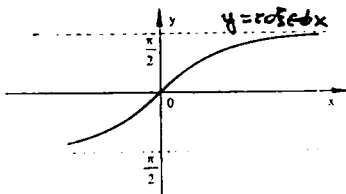
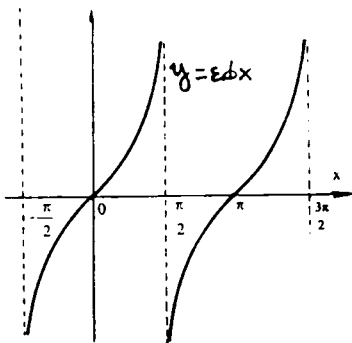
199. Να ορίσετε την συνάρτηση $y = \cos \epsilon \phi x$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση

Θεωρούμε την $y = \sin x$ όπου $\Delta(y) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \right\}$ και $E(y) = (-\infty, +\infty)$. Τα διαστήματα μονοτονίας είναι

$$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με τη μορφή: $f^{-1}: (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ή $x = \text{τοξέφ}y$.



Εναλλάσσουμε τα x με y και γράφουμε $y = \text{τοξέφ}x$ που έχει $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$ και $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Βλέπουμε ακόμη ότι $y(-x) = \text{τοξέφ}(-x) = -\text{τοξέφ}x = -y(x)$. Άρα είναι περιττή συνάρτηση.

200. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Λύση

Το πεδίο ορισμού είναι $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$. Η συνάρτησή μας είναι θετική, δηλαδή

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \quad \forall x \in \Delta$. Όταν $x=0$

έχουμε $y=1$. Η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $\Delta(y)$

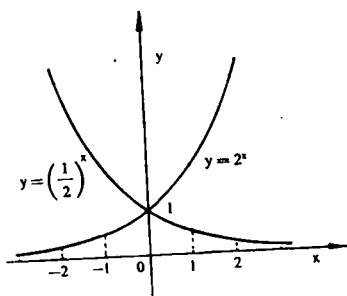
διότι για $x_2 > x_1 \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$

\Rightarrow

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} < 0$$

x	y
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
-1	2
-2	4
-3	8



$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2 - x_1} - 1 \right] < 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$$

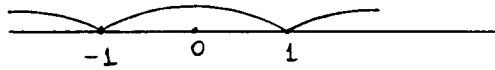
Συμείωση: Ομοίως κατασκευάζεται και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2^x$.

201. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = |x-1|-2|x+1|$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού είναι $\Delta = (-\infty, +\infty)$. Χωρίζουμε τον άξονα στα διαστήματα:

$$(-\infty, -1), [-1, 1) \text{ και } [1, +\infty)$$



Στο διάστημα $[1, +\infty)$ έχουμε $x-1 \geq 0$ $x+1 \geq 0$.

$$\text{άρα } y = x-1-2x-2 = -x-3$$

Στο διάστημα $[-1, 1)$ έχουμε $x-1 < 0$, $x+1 > 0$

$$\text{άρα } y = -x+1-2x-2 = -3x-1.$$

Στο διάστημα $(-\infty, -1)$ έχουμε $x-1 < 0$, $x+1 < 0$.

$$\text{άρα } y = -x+1+2x+2 = x+3.$$

Έτσι πείραμε:

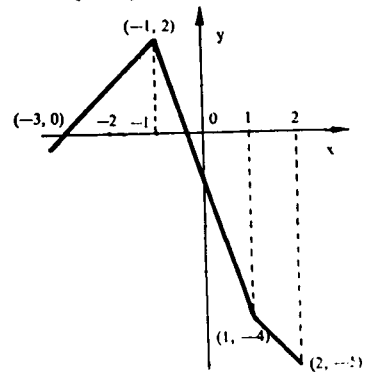
$$y = \begin{cases} -x-3 & \text{όταν } x \in [1, +\infty) \\ -3x-1 & \text{όταν } x \in [-1, 1) \\ x+3 & \text{όταν } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

Βρίσκουμε τα σημεία $(-1, 2)$,

$(1, -4)$ και από ένα σημείο των διαστημάτων $(-\infty, -1)$ και $[1, +\infty)$.

π.χ. τα $(-3, 0)$ και $(2, -5)$. Άρα

έχουμε το παραλεύρως χράφισμα.



202. Δίδονται οι συναρτήσεις $\phi(x) = x^2$ και $f(x) = 2^x$. Να βρεθεί η συνδυαστική συνάρτηση $\phi(x) \circ f(x)$ καθώς και η $f(x) \circ \phi(x)$

Λύση

$$\text{Έχουμε: } \phi(x) \circ f(x) = \phi(f(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

$$f(x) \circ \phi(x) = f(\phi(x)) = 2^{x^2}.$$

203. Δίδονται οι συναρτήσεις $\phi(x) = \cos x$ και $f(x) = x^2 + 4x + 6$.

Είναι δυνατή η σύνθεση των συναρτήσεων $\phi(x) \circ f(x)$;

Λύση

Τυπικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi(x) \circ f(x) = \phi(f(x)) = \text{τοξμπ}(x^2 + 4x + 6)$$

Όμως το πεδίο τιμών της συναρτήσεως $f(x) = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2$ είναι $E(f(x)) = [2, +\infty)$

Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $\phi(x) = \text{τοξμπ}x$ είναι $\Delta(\phi) = [-1, 1]$. Παρατηρούμε ότι το $E(f)$ δεν περικλείεται στο $\Delta(\phi)$ και επομένως δεν ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων αυτών.

204. Να βρεθούν οι αντίστροφες συναρτήσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 1+x$ β) $y = x^2 - 1$ γ) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

δ) $y = \log \frac{x}{2}$.

Λύση

α) Έχουμε $y = 1+x \Rightarrow x = y-1$. Εναλλάσσουμε τα x και y και έχουμε $y = x-1$ που είναι η ζητούμενη αντίστροφη συνάρτηση.

β) $y = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y+1 \Rightarrow x = \sqrt{y+1}, x = -\sqrt{y+1}$

η $y = \sqrt{x+1}, y = -\sqrt{x+1}$. $\Delta(y) = [-1, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι πήραμε δύο αντίστροφες συναρτήσεις διότι η συνάρτηση $y = x^2 - 1$ έχει δύο διακεκλιμένα μοσχο-νίας: Στο $[0, +\infty)$ είναι αύξουσα, στο $(-\infty, 0)$ είναι φθίνουσα.

γ) $y = \sqrt[3]{1-x^3} \Rightarrow 1-x^3 = y^3 \Rightarrow x^3 = 1-y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1-y^3}$ ή τελικά $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ όπου $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$

δ) $y = \log \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 10^y \Rightarrow x = 2 \cdot 10^y$ ή $y = 2 \cdot 10^x$ όπου $\Delta(y) = (-\infty, +\infty)$ και $E(y) = (0, +\infty)$.

205. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f(f(x))$ και $f(f(f(x)))$.

Λύση:

$$\text{Έχουμε } f(f(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = -\frac{1-x}{x}, \quad x \neq 0, x \neq 1.$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - f(f(x))} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} = x, \quad x \neq 0, x \neq 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να κατασκευασθούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

206. $y = 2 + (x-1)^3$

207. $y = \log |x-1|$

208. $y = -|x-2|$

209. $y = |x| - x$

210. $y = |x-1|$

211. $y = \frac{1}{2}(x+|x|)$

212. $y = \sqrt{x+2}$

213. $y = 2 + x - x^2$

214. $y = x^2 + 1$

215. $y = 2x - x^3$

216. $y = |x^2 - 1|$

217. $y = \log |x|$

218. $y = (x-2)^3 + 5$

219. $y = \pi(x+1) + 2$

220. $y = 2^{x+1} + 1$

221. $y = \log(x-1) + 2.$

222. $y = \frac{|x|}{x}$

1.2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

1^ο: Ακολουθία ονομάζεται η συνάρτηση f που ορίζεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Στην γενική της μορφή η ακολουθία συμβολίζεται: $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$

Αν $f(n) = a_n$, τότε η ακολουθία γράφεται: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Ο όρος a_n ονομάζεται γενικός όρος της ακολουθίας.

2^ο: Η ακολουθία a_n ονομάζεται αύξουσα αν $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} > a_n$

3^ο: Η ακολουθία a_n ονομάζεται φθίνουσα αν $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} < a_n$

4^ο: Η ακολουθία ονομάζεται περιωρισμένη (φραγμένη) αν'τα πάνω αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq M$.

5^ο: Η ακολουθία ονομάζεται περιωρισμένη (φραγμένη) αν'τα κάτω αν υπάρχει αριθμός k τέτοιος ώστε $\forall n \in \mathbb{N} a_n \geq k$.

6^ο: Η ακολουθία ονομάζεται περιωρισμένη αν αυτή είναι περιωρισμένη αν'τα πάνω και αν'τα κάτω, δηλαδή υπάρχουν αριθμοί M και k τέτοιοι ώστε $\forall n \in \mathbb{N} k \leq a_n \leq M$.

Αν θέσουμε $B = \max\{|k|, |M|\}$, τότε η ακολουθία θα ονομάζεται περιωρισμένη αν υπάρχει αριθμός $B > 0$ τέτοιος ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ να ισχύει η ανίσωση $|a_n| \leq B$.

2.1. ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ:

Ο αριθμός a ονομάζεται οριο της ακολουθίας a_n αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός $N(\varepsilon)$ ώστε $\forall n > N(\varepsilon)$ να ισχύει η ανίσωση $|a_n - a| < \varepsilon$ και γράφουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{οταν} \quad n \rightarrow \infty$$

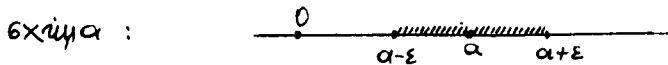
Με άλλα λόγια ο αριθμός a ονομάζεται οριο της ακολουθίας a_n ($\forall \varepsilon > 0$) $(\exists N = N(\varepsilon)) (\forall n > N) |a_n - a| < \varepsilon$.

Γεωμετρική ερμηνεία του ορίου ακολουθίας:

Εκ του ορισμού του ορίου έχουμε, $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $\forall n > N(\varepsilon)$ $|a_n - a| < \varepsilon$ δηλαδή $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Όλοι οι όροι της ακολουθίας a_n αρχίζοντας από το $n > N$ (a_{N+1} ,

, a_{N+2}, \dots) πέφτουν στο διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ όπως φαίνεται στο



Εκτός του διαστήματος ωσού θα βρεθεί περιγεμένη πλύ-
θωσών.

Μηδενική Ακολουθία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ακολουθία a_n ονομάζεται μηδενική αν το όριο της
ισούται με μηδέν. Δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon)) (\forall n > N(\varepsilon)) (|a_n - 0| < \varepsilon)$ δηλ. $|a_n| < \varepsilon$.

Συγκλίνουσα Ακολουθία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Όταν για ακολουθία έχει όριο ονομάζεται συγκλίνουσα
ακολουθία. Όταν για ακολουθία δεν έχει όριο ονομάζεται μη συγκλι-
νουσα (αποκλίνουσα) ακολουθία

1.2.2. Θεωρήματα ορίων Ακολουθιών

Αν οι ακολουθίες a_n και β_n συγκλίνουν, τότε:

$$\alpha') \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

$$\beta') \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

$$\gamma') \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ όπου } c = \text{σταθερό}$$

$$\delta') \text{ Αν } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \neq 0 \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n}$$

1.2.3. Ακολουθία που το όριο τείνει στο άπειρο

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ακολουθία a_n ονομάζεται ακολουθία με όριο το
άπειρο (απειρίζουσα) αν $\forall A > 0$ μπορεί να βρεθεί τέτοιος φυσι-
κός αριθμός $N(\varepsilon)$ ώστε $\forall n > N(\varepsilon)$ να ισχύει η ανίσωση

$$|a_n| > A \text{ και χράφουμε: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Ισχύουν οι εξής δύο χρήσιμες εκθέσεις:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{a_n} = 0, \text{ όταν } a_n \text{ είναι απειρίζουσα ακολουθία } (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty)$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{a_n} = \infty, \text{ όταν } a_n \text{ είναι μηδενική ακολουθία } (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

223. Να δείχθει ότι αν $a_n = \frac{3n-1}{n}$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Λύση

Εκ του ορισμού του ορίου έπεται ότι πρέπει να βρούμε τέτοιους φυσικούς αριθμούς N ώστε $\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\left| \frac{3n-1}{n} - 3 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Επειδή μας ενδιαφέρουν μόνο οι φυσικοί αριθμοί, λαμβάνουμε $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, όπου $\left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού $\frac{1}{\varepsilon}$. Έτσι για κάθε $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ ισχύει η $|a_n - 3| < \varepsilon$ ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n} = 3$.

224. Να δείχθει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$

Λύση

Έχουμε $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\left| \frac{6n+2-6n+3}{2(2n-1)} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{5}{2(2n-1)} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow 5 < \varepsilon(4n-2) \Leftrightarrow$$

$$n > \frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}$$

Έτσι $\forall n > N = \frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}$ ισχύει η ανίσωση $\left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$.

225. Να δείχθει ότι η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ είναι μηδενική.

Λύση

Εξετάζουμε την ανίσωση $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$. Επειδή $n^2+1 > n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Έτσι η ανίσωση $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$ εκπληρώνεται όταν $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Επομένως $\forall n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ εκπληρώνεται η ανίσωση $\left| \frac{1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$

άρα η ακολουθία a_n είναι μηδενική.

Χρήσιμη πρόταση: Κάθε μονότονη περιπεριεμένη ακολουθία έχει όριο (συγκλίνει).

226. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{8v-3}{13-7v}$

Λύση

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ακολουθίες που το όριό τους τείνει στο ∞ , συνεπώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του ορίου ενός κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή θα διαφύσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή δια του v .

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{8v-3}{13-7v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{3}{v}}{\frac{13}{v} - 7} = \frac{\lim_{v \rightarrow \infty} 8 - \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{3}{v}}{\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{13}{v} - \lim_{v \rightarrow \infty} 7}$$

Επειδή δε $\lim_{v \rightarrow \infty} 8 = 8$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{3}{v} = 0$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{13}{v} = 0$, $\lim_{v \rightarrow \infty} 7 = 7$, έπεται

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{8v-3}{13-7v} = \frac{8}{-7} = -\frac{8}{7}.$$

227. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{3v^2-3v-1}{4-5v-v^3}$

Λύση

Διαφορώντας δια v^3 (δίνει όπως και στην προηγούμενη άσκηση. εμ έχουμε $\frac{\infty}{\infty}$) παίρνουμε: $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{3v^2-3v-1}{4-5v-v^3} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{v} - \frac{3}{v^2} - \frac{1}{v^3}}{\frac{4}{v^3} - \frac{5}{v^2} - 1} = \frac{0}{1} = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

228. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+v}{v^2}$

229. Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{v \rightarrow \infty} (\sqrt{v^2+v+1} - \sqrt{v^2-v+1})$

230. Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{v^2+1} + \sqrt{v}}{\sqrt[4]{v^3+v} - \sqrt{v}}$

Μέσω τον πολλαπλασιασμό του οριζομένου του ορίου ακολουθίας να δείξετε ότι αληθεύουν οι παρακάτω ισότητες:

231. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2}{v^4} = 0$

232. $\lim_{v \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^v}) = 1$

233. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(-1)^v}{5^v} = 0$

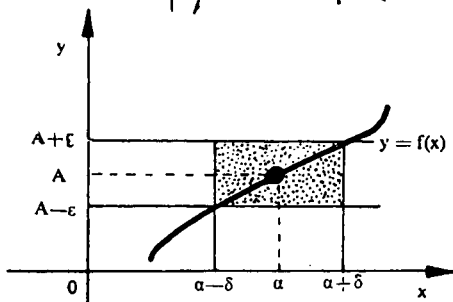
234. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{5v-1}{v+1} = 5$

Να υπολογίσετε τα όρια:

235. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{3v^2+5v+4}{2+v^2}$ (ΑΠ.: 3) 236. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{4v^2-4v+3}{2v^3+3v+4}$ (ΑΠ.: 0).

13. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο αριθμός A ονομάζεται όριο της συνάρτησης $f(x)$ με $x \rightarrow a$, όταν $\forall \varepsilon > 0$ βρεθεί τέτοιος αριθμός $\delta > 0$ ώστε για όλες τις τιμές του $x \neq a$ που ικανοποιούν την ανίσωση $0 < |x-a| < \delta$, να αληθεύει η ανίσωση $|f(x) - A| < \varepsilon$



Γράφουμε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ή $f(x) = A$ όταν $x \rightarrow a$

Παρατήρηση: Το σημείο $x=a$ στο οποίο εξετάζεται η συνάρτηση μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού Δ , μπορεί όμως και να μην ανήκει ε'αυτού. Η συνάρτηση πρέπει να ορίζεται στην περιοχή του σημείου a .

Η γεωμετρική σημασία του ορίου συνάρτησης αποδίδεται στο παραπάνω σχήμα.

Όμοιας, ο αριθμός A ονομάζεται όριο της συνάρτησης $f(x)$ με $x \rightarrow \infty$, αν $\forall \varepsilon > 0 \exists$ αριθμός $M(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε όταν $|x| > M(\varepsilon)$, να αληθεύει η ανίσωση $|f(x) - A| < \varepsilon$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Η συνάρτηση $\phi(x)$ ονομάζεται συνάρτηση με όριο μηδέν (απειροστικό) όταν $x \rightarrow a$, αν $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$ δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε όταν $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ να αληθεύει η ανίσωση $|\phi(x)| < \varepsilon$

Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται συνάρτηση με όριο το άπειρο (απειροζούσα) όταν $x \rightarrow a$, αν $\forall N > 0$ υπάρχει τέτοιος αριθμός $\delta(N) > 0$ ώστε για όλες τις τιμές του $x \neq a$ που ικανοποιούν την ανίσωση

$$0 < |x-a| < \delta, \text{ να αληθεύει η ανίσωση } |f(x)| > N.$$

Ιδιότητες των ορίων

α') $\lim c = c$, όπου c σταθερά.

$$\text{β')} \lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

γ') Αν οι συναρτήσεις $\phi(x)$ και $f(x)$ έχουν όρια (συγκλιίνουν) τότε:

$$\gamma_1) \lim_{x \rightarrow a} (\phi(x) \pm f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\gamma_2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \phi(x)$$

$$\gamma_3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \phi(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \neq 0)$$

$$\gamma_4) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\phi(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} \phi(x)}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

237. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ δεν ορίζεται στο $x = 2$. Από τον ορισμό έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, |x - 2| < \delta \Rightarrow (x \neq 2)$

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} - 4 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$|x - 2| < \varepsilon$. Αν τώρα θέσουμε $\delta = \varepsilon$, τότε $\forall x$ που ικανοποιεί την

ανίσωση $|x - 2| < \delta$ αληθεύει η ανίσωση $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

238. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \forall \varepsilon > 0 \quad |2x - 1 - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$2|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν τώρα θέσουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ θα έχουμε $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ώστε $\forall x \neq 2$ που ικανοποιεί την ανίσωση $|x - 2| < \delta$ αληθεύει η ανίσωση $|f(x) - 3| < \varepsilon$

$$\text{συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3.$$

239. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε τέτοιο $M > 0$ ώστε $\forall x$ που ικανοποιεί την ανίσωση $|x| > M$ να αληθεύει η ανίσωση $\left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| < \varepsilon$.

$$\text{Πράγματι } \forall \varepsilon > 0 \left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{-1}{1+x^2} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{1+x^2} < \varepsilon$$

$$\text{Η τελευταία ανίσωση αληθεύει όταν } \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Αν τώρα θέσουμε $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = M$, τότε $\forall x$ που ικανοποιεί την ανίσωση $|x| > M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, αληθεύει και η ανίσωση $\left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| < \varepsilon$ συνεπώς $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$.

240. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

Λύση.

Οι ιδιότητες των ορίων εφαρμόζονται αν έχουν όρια οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 1$ και $\phi(x) = 2x^2 - x - 1$ όταν $x \rightarrow 0$. Θέσουμε προς το αντί x των οριακή τιμή του x , δηλαδή $x = 0$ και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - \lim_{x \rightarrow 0} 1}{2 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - \lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1.$$

Υπολογισμός των ορίων συναρτήσεων.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση για τον υπολογισμό των ορίων πρέπει να θέσουμε αντί x των οριακή του τιμή, δηλαδή τιμή που τείνει. Είναι φανερό ότι πολλές φορές θα έχουμε σαν αποτέλεσμα τις απεκαταστάσεις αυτές, εκφράσεις της μορφής

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

Οι εκφράσεις αυτές ονομάζονται συνήθως αοριστίες και αντιμετωπίζονται με διάφορους μεθόδους.

Σημειώνουμε ακόμη μερικούς χρήσιμους τύπους για τον υπολογισμό των ορίων.

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{f(x)} = \infty, \text{ αν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ όπου } c = \text{σταθερά}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{f(x)} = 0, \text{ αν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 0, \text{ αν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \infty$$

$$241. \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$$

Λύση

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(2x - 1) = \infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 10) = \infty$$

Επειδή έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ (Σ' αυτή την περίπτωση

διαφορούμε με τον μεγαλύτερο βαθμό x , δηλαδή εδώ με το x^2)

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{10}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$242. \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$$

Λύση

Διαφορούμε με x , επειδή έχουμε $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 6}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$243. \text{ Ομοίως να υπολογισθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x + 5}{0,01x^2 - 6x}$$

Λύση

$$\text{Επειδή έχουμε } \frac{\infty}{\infty} \text{ έχουμε: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{10}{x} + \frac{5}{x^2}}{0,01 - \frac{6}{x}} = \frac{0}{0,01} = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$244. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}}$$

$$245. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$$

$$246. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$247. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$248. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{4x + 3}$$

$$249. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$$

$$250. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{4x + 3}$$

$$251. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$$

$$252. \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{2x}{x+3}}$$

$$253. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

1.3.1. ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΑ ΟΡΙΑ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο διάστημα (a, b) . Ο αριθμός B ονομάζεται δεξιό (δεξιόπλευρο) όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο a , αν $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει τέτοιο $\delta > 0$ ώστε για κάθε x που ικανοποιεί την σχέση $a < x < a + \delta$ να ισχύει η ανίσωση $|f(x) - B| < \epsilon$.

Στην περίπτωση αυτή χράφουμε:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = B \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \quad (1)$$

Ομοίως ο αριθμός Γ ονομάζεται αριστερό (αριστερόπλευρο) όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο b αν $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει τέτοιο $\delta > 0$ ώστε για κάθε x που ικανοποιεί την σχέση $b - \delta < x < b$ να ισχύει η ανίσωση $|f(x) - \Gamma| < \epsilon$

Στην περίπτωση αυτή χράφουμε:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = \Gamma \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b-0) \quad (2)$$

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι:

α) Αν υπάρχει όριο στο $x = x_0$, δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, τότε και τα μονόπλευρα όρια υπάρχουν και $f(x_0+0) = f(x_0-0) = A$.

β) Αντιεπερώτως, αν τα μονόπλευρα όρια στο $x = x_0$ υπάρχουν και $f(x_0+0) = f(x_0-0) = A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει και το όριο της συνάρτησης και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Επομένως: Για την διαπίστωση της υπάρξεως ορίου της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο a είναι ικανό και αναγκαίο να ελεγχθεί η εκπλήρωση των εξής τριών συνθηκών: α) Ύπαρξη αριστερού ορίου β) Ύπαρξη δεξιού ορίου και γ) Ισότητα μονοπλευρών ορίων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

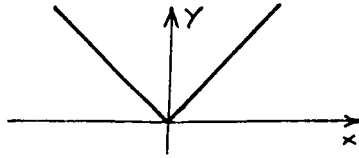
254. Να βρεθούν τα μονόπλευρα όρια της συνάρτησης

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Λύση

$$\Delta(f(x)) = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$$



Έτσι $f(+0) = f(-0) = 0$ δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

255. Να προσδούν τα μονόπλευρα όρια της συναρτήσεως

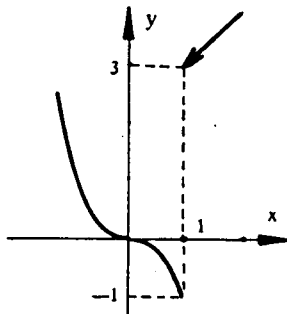
$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leq 1 \\ 2+x, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Προσδύμε τα μονόπλευρα όρια στο $x=1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (-x^3) = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (2+x) = 3$$



Άρα $f(1+0) = 3 \neq f(1-0) = -1$, συνεπώς η συνάρτηση δεν έχει όριο (δεν συγχλίνει στο $x=1$ (πλ. και αήμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

Να προσδούν τα μονόπλευρα όρια των συναρτήσεων:

$$256. f(x) = \frac{|x| + x}{x}$$

$$257. f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$$

1.4. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, b)$ ονομάζεται συνεχής στο σημείο (θέση) $x_0 \in (a, b)$, όταν το όριο της συνάρτησής $f(x)$ υπάρχει στο σημείο x_0 και ισούται με την τιμή της συνάρτησής στο σημείο αυτό:

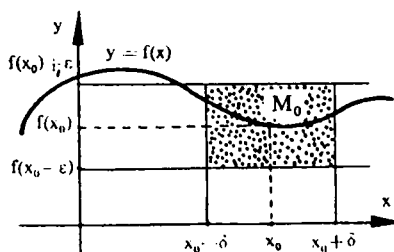
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Ετσι για να είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο x_0 πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

- α) Η $f(x)$ πρέπει να είναι ορισμένη στο σημείο x_0 .
- β) Να υπάρχει το όριο της συνάρτησής στο σημείο x_0 .
- και γ) Το όριο της $f(x)$ στο σημείο x_0 να συμπίπτει με την τιμή της συνάρτησής στο σημείο x_0 .

Στην περίπτωση που στο σημείο x_0 δεν ικανοποιείται έστω και μία από τις παραπάνω συνθήκες, τότε λέμε πως ε'αυτό το σημείο η συνάρτηση είναι ασυνεχής.

Γεωμετρικά η συνέχεια της συνάρτησής $f(x)$ στο σημείο x_0 αποδίδεται με το παρακάτω σχήμα



Αν θέσουμε $x = x_0 + \Delta x$ ($\Delta x = x - x_0$) τότε η συνθήκη (1) γράφεται

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \implies$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{ή θέτοντας } \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

έχουμε $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$

όπου $\Delta f(x)$ ονομάζεται αύξμεν της συνάρτησης και Δx ονομάζεται αύξμεν της μεταβλητής.

1.4.1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση ονομάζεται συνεχής στο διάστημα (a, b) αν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.

Στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ η συνάρτηση είναι συνεχής αν σε κάθε σημείο του (a, b) είναι συνεχής από δεξιά στο σημείο a και συνεχής από αριστερά στο σημείο b .

Το σημείο x_0 ονομάζεται σημείο ασυνεχείας (διακοπής) πρώτης κατηγορίας αν η συνάρτηση έχει στο σημείο αυτό πεπερασμένα όρια μονόπλευρα:

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0) \quad \text{ή} \quad f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το σημείο ασυνεχείας (διακοπής) ονομάζεται σημείο ασυνεχείας δεύτερης κατηγορίας.

1.4.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

(Εξετάζουμε τις συναρτήσεις που ορίζονται σε κάποιο διάστημα (a, b))

I. Το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο $x = x_0$ αποτελεί συνάρτηση συνεχή στο σημείο αυτό.

II. Το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο σημείο x_0 αποτελεί συνάρτηση συνεχή στο σημείο αυτό.

III. Το ηλίκιο δύο συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο σημείο x_0 είναι συνάρτηση συνεχής στο σημείο αυτό αν η συνάρτηση του παρονομαστή είναι διάφορη του μηδενός στο σημείο x_0 .

IV. Το πολυώνυμο (ακεραία συνάρτηση) $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ είναι συνεχές στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

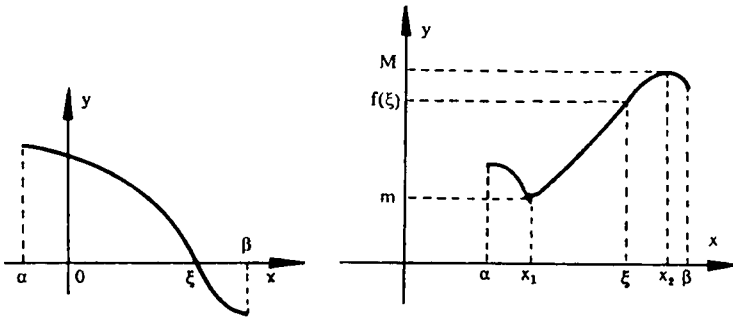
V. Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{και} \quad Q(x) = b_0 x^h + b_1 x^{h-1} + \dots + b_h$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο που ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Αναφέρουμε ακόμα τις βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα

VI Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και στα άκρα παίρνει τιμές αντίθετων προσημών ($f(a) > 0, f(\beta) < 0$ ή $f(a) < 0, f(\beta) > 0$), τότε στο $[a, \beta]$ θα βρεθεί τουλάχιστον ένα σημείο ξ στο οποίο η συνάρτηση αυτή μηδενίζεται ($f(\xi) = 0$). (βλ. κάτω αριστερό σχήμα)



VII Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε αυτή παίρνει τουλάχιστον μία φορά την μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή m . Εκτός αυτού παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης των τιμών της (βλ. άνω σχήμα δεξιά)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να εξετάσετε τις συναρτήσεις ως προς την συνέχεια και να κατασκευάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

$$258. f(x) = \frac{x}{|x|}$$

Λύση:

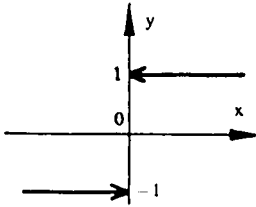
Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $\Delta = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{Αν } x > 0 \Rightarrow f(x) = 1 \text{ και αν } x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{-x} = -1$$

Έτσι η συνάρτηση στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ είναι συνεχής.

Πρέπει τώρα να ελεγχουμε το σημείο $x=0$. Φρίσκουμε:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +1$$



Συνεπώς $f(-0) \neq f(+0)$.

Άρα η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x=0$.

$$253. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

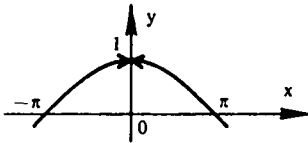
Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, αλλά στο σημείο $x=0$ η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ δεν ορίζεται, γ' αυτό φέρνουμε τα μονόπλευρα όρια:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{λόγω του αξιωματικού ορίου } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$$

Φέρνουμε τώρα την άλλη συνάρτησή μας

στο $x=0$.



Έχουμε $f(0) = 1$, συνεπώς $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής.

$$260. f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} x - 1, & \text{αν } x \neq -1 \\ 1, & \text{αν } x = -1. \end{cases}$$

Λύση

$$\Delta(f) = (-\infty, +\infty)$$

Εξετάζουμε την συνάρτηση στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

Αν $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$ δηλαδή $\forall x \in (-1, +\infty)$ έχουμε $f(x) = \frac{x+1}{x+1} x - 1 = x - 1$. Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $(-1, +\infty)$ είναι συνεχής σαν πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

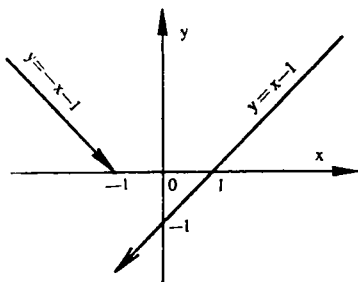
Αν $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$, δηλαδή $\forall x \in (-\infty, -1)$ έχουμε $f(x) = \frac{-(x+1)}{x+1} x - 1 = -x - 1$, που σημαίνει ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, -1)$.

Τρέπει τώρα να μελετήσουμε το σημείο $x = -1$. Φέρνουμε τα μονόπλευρα

οπια: $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = f(-1-0) = -(-1) - 1 = 1 - 1 = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = f(-1+0) = (-1) - 1 = -2$$

Συνεπώς $f(-1-0) = 0 \neq f(-1+0) = -2$ και η συνάρτηση είναι ασυνεχής.



$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \forall x \in (-1, +\infty) \\ 1, & x = -1 \\ -x-1, & \forall x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να εξετασθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την συνέχεια και να κατασκευασθούν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

$$261. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3), & \forall x \in (-\infty, 1] \\ 6-5x, & \forall x \in (1, 3) \\ x-3, & \forall x \in [3, +\infty). \end{cases}$$

$$262. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \forall x \in [1, +\infty) \\ x, & \forall x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

$$263. f(x) = [x]$$

$$264. f(x) = \begin{cases} \eta\mu \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$265. f(x) = \eta\mu x.$$

$$266. f(x) = x + \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$267. f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$$

15. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΟΡΙΟ ΜΗΔΕΝ (ΑΠΕΙΡΟΣΤΩΝ)

Α'. Εξω μερικές συναρτήσεις $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, ... που α όριο τους είναι μηδέν όταν $x \rightarrow x_0$ ή $x \rightarrow \infty$

Για να χαρακτηρίσουμε την τάση αυτών των συναρτήσεων πέρα από μηδέν θα χρησιμοποιήσουμε το ημίλογο (λίγος), αλλά δεχόμαστε ότι η συνάρτηση που θα είναι στον παρονομαστή δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή του σημείου $x = x_0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις $\alpha(x)$ και $\beta(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις που έχουν όριο μηδέν της αυτής τάξεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, τότε $\beta(x)$ είναι ενωμένη με όριο μηδέν ανωτέρας τάξεως ως προς την συνάρτηση $\alpha(x)$ που έχει όριο μηδέν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, οι $\alpha(x)$ και $\beta(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις με όριο μηδέν ισοδύναμες και γράφουμε $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $\alpha(x) = x$ και $\beta(x) = \eta\mu 2x$ όταν $x \rightarrow 0$ είναι της αΐτης τάξεως.

Λύση

Οι συναρτήσεις αυτές έχουν όριο μηδέν όταν $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu 2x = 0$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\eta\mu 2x \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\eta\mu 2x} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{2} \neq 0$ που σημαίνει, σύμφωνα με τον ορισμό 1, ότι είναι της αΐτης τάξεως.

268. Να εκτιμήσετε τις συναρτήσεις που έχουν όριο μηδέν αν $x \rightarrow 0$.

$$\alpha) \phi(x) = x, \quad f_1(x) = \epsilon\phi x^3$$

$$\beta) \phi(x) = x, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{\eta\mu^2 x}$$

$$\gamma) \phi(x) = x, \quad f_3(x) = \sqrt{9+x} - 3.$$

Λύση

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\phi x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{\epsilon\phi x^3} \right) \cdot \frac{1}{x^2} = \infty \quad (\text{δία } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\epsilon\phi x} = 1).$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{\phi(x)} = 0$, άρα η $\epsilon \phi \chi^3$ είναι συνάρτηση με όριο μηδέν ανωτέρως τάξεως βέ εχέου με την συνάρτηση x .

$$\text{β')} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{\mu\pi^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{\mu\pi^2 x}} \cdot \sqrt[3]{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{x} \right) = 0 \Rightarrow$$

η $\phi(x) = x$ είναι συνάρτηση με όριο μηδέν ανωτέρως τάξεως βέ εχέου με την συνάρτηση $f_2(x) = \sqrt[3]{\mu\pi^2 x}$.

$$\text{γ')} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{9+x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{9+x} + 3)}{9+x-9} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{9+x} + 3) = 6$$

$\Rightarrow \phi(x) = x$ και $f_2(x) = \sqrt{9+x} - 3$ είναι συναρτήσεις με όριο μηδέν της ανωτέρας τάξεως.

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

269. Να πείτε τις τάξεις των συναρτήσεων πού έχουν όριο μηδέν (απειρο-εσών) όταν $x \rightarrow 0$.

$$\text{α')} \phi(x) = x, \quad f(x) = 2\mu\pi^4 x - x^5$$

$$\text{β')} \phi(x) = x, \quad f_1(x) = \sqrt{1+x^3} - 1$$

$$\text{γ')} \phi_2(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_4(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$$

$$\text{δ')} \phi_3(x) = x, \quad f_5(x) = e^x - 1.$$

Β'. Εφαρμογή στον υπολογισμό ορίων, των συναρτήσεων που έχουν όριο μηδέν και είναι ισοδύναμες.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το όριο του πηλίκου δύο συναρτήσεων πού έχουν όριο μηδέν δεν μεσφαλλάει, αν τον αριθμητή και παρονομαστή αντικαταστά-
σουμε με οποιαδήποτε ισοδύναμη συνάρτηση πού έχει όριο μηδέν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$270. \text{ Να υπολογισθεί το όριο: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\mu\pi(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$$

Λύση

Όταν $x \rightarrow 3$ τότε $\mu\pi(x-3) \rightarrow 0$ και $x^2 - 4x + 3 \rightarrow 0$ καθώς και $\mu\pi(x-3) \sim x-3$. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\mu\pi(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

271. Να υπολογίσεις το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\omega 4x - 6\omega 2x}{(\cos \mu 3x)^2}$

Λύση

Έχουμε $6\omega 4x - 6\omega 2x = -2\mu \frac{4x+2x}{2} \mu \frac{4x-2x}{2} = -2\mu 3x \mu x$

Όταν $x \rightarrow 0$, $\mu 3x \sim 3x$ και $\mu x \sim x$, επομένως $\mu 3x \sim 3x$

Έτσι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\omega 4x - 6\omega 2x}{(\cos \mu 3x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(3x)x}{(3x)^2} = -\frac{2}{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσεις τα όρια

272. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 6\omega ax}{x^2}$

273. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \mu x}{3x}$

274. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \cos \mu x}{2x + \cos \epsilon b x}$ (Υπόδειξη: Να διαφερείς διά x το κλάσμα)

2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

2.1. ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1^{ος} ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω η συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ και κάποιο σημείο x_0 του διαστήματος (a, β) . Το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

αν αυτό υπάρχει, ονομάζεται παραίγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Έτσι έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν $x - x_0 = \Delta x \Rightarrow x_0 = x + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, όπου Δx ονομάζεται αίχμη της μεταβλητής και Δy αίχμη της συνάρτησης, τότε

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ ή}$$

$$\forall x \in (a, \beta) \quad \boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Η πράξη της εύρεσης της παραίχου μιας συνάρτησης ονομάζεται παραίχηση (διαφορίση)

2^{ος}: ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ που έχει σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, β) παραίχου, ονομάζεται παραίχισιμη στο διάστημα αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραίχου στο σημείο x_0 , τότε αυτή είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

3^{ος}: ΔΕΞΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δίδεται συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ και σημείο x_0 του διαστήματος (a, β) . Το δεξιόπλευρο όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ αν αυτό υπάρχει, ονομάζεται δεξιά παραίχου της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 και συμβολίζεται με $f'_+(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δίδεται συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ και σημείο x_0 του διαστήματος (a, β) . Το αριστερόπλευρο όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ αν αυτό υπάρχει, ονομάζεται αριστερά παραίχου της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο

μείο x_0 και ευθυολίζεται με $f'_-(x_0)$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη υπάρξεως της παραγώγου στο σημείο x_0 , όπου η $f(x)$ ορίζεται σε κάποια περιοχή του x_0 είναι η σχέση

$$\boxed{f'_-(x_0) = f'_+(x_0)}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

275. Έστω $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c είναι σταθερά. Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$.

Λύση

α) Βρίσκουμε την διαφορά $f(x) - f(x_0) = c - c = 0$.

β) Βρίσκουμε το πηλίκιο $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0$

γ) Βρίσκουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$.

Άρα $f'(x) = (c)' = 0$.

276. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $y = kx + \beta$

Λύση

Βρίσκουμε κατά σειράν:

α) Έν διαφορά $f(x) - f(x_0) = (kx + \beta) - (kx_0 + \beta) = k(x - x_0)$

β) Το πηλίκιο $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k(x - x_0)}{x - x_0} = k$.

γ) Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$

Άρα $(kx + \beta)' = k$.

277. Να παραγωγίσετε την συνάρτηση $y = x^3$.

Λύση

Βρίσκουμε κατά σειράν:

α) Έν διαφορά $y(x) - y(x_0) = x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$

β) Το πηλίκιο $\frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = x^2 + xx_0 + x_0^2$.

γ) Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 3x_0^2$

Άρα $(x^3)' = 3x^2$. Επειδή $x_0 = x \in \mathbb{R}$ είναι αυθαίρετο σημείο μπορούμε να γράψουμε $(x^3)' = 3x^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Με την βοήθεια του ορισμού να φράδων οι παραγώγοι των συναρτήσεων:

τύπων:

$$278. y = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$280. y = \sqrt{x}$$

$$279. y = \eta \mu^2 x$$

$$281. y = \frac{1}{x}$$

2.2. ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΩΝ ΚΥΡΙΟΤΕΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. $(f^v(x))' = v f^{v-1}(x) \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(x^v)' = v x^{v-1}$]
2. $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	[αντίστ. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$]
3. $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	[αντίστ. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$]
4. $(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(a^x)' = a^x \ln a$]
5. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(e^x)' = e^x$]
6. $(\eta \mu f(x))' = \epsilon \omega f(x) \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\eta \mu x)' = \epsilon \omega x$]
7. $(\epsilon \omega f(x))' = -\eta \mu f(x) \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\epsilon \omega x)' = -\eta \mu x$]
8. $(\epsilon \phi f(x))' = \frac{1}{\epsilon \omega^2 f(x)} \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\epsilon \phi x)' = \frac{1}{\epsilon \omega^2 x}$]
9. $(\epsilon \phi f(x))' = -\frac{1}{\eta \mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\epsilon \phi x)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 x}$]
10. $(\epsilon \sigma \epsilon \eta \mu f(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\epsilon \sigma \epsilon \eta \mu x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]
11. $(\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \omega f(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \omega x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]
12. $(\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \phi f(x))' = \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \phi x)' = \frac{1}{1+x^2}$]
13. $(\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \phi f(x))' = -\frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$	[αντίστ. $(\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \phi x)' = -\frac{1}{1+x^2}$]
14. $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	[αντίστ. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$]

2.3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Έστω η συνάρτηση $y = g(x)$, $x \in (a, \beta)$ ότι έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ και ότι η συνάρτηση $z = f(y)$ ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το πεδίο τιμών της συνάρτησης f και έχει παράγωγο στο σημείο $y_0 = g(x_0)$.

Τότε η σύνθετη συνάρτηση $\Phi(x) = f(g(x))$ έχει παράγωγο στο σημείο x_0 που υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Phi'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

2.4. ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΩΣ

$$1. (x)' = 1$$

$$2. (c)' = 0 \quad \text{όπου } c = \text{σταθερά.}$$

$$3. [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_k(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \dots \pm f_k'(x)$$

$$4. [f_1(x) \cdot f_2(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x)$$

$$5. (k f(x))' = k \cdot f'(x), \text{ όπου } k = \text{σταθερά.}$$

$$6. \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$7. \left(\frac{f(x)}{k}\right)' = \frac{f'(x)}{k}$$

$$8. \left(\frac{k}{f(x)}\right)' = -\frac{k f'(x)}{(f(x))^2}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$282. y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5.$$

Λύση

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (2x^2)' + (4x)' - 5' = \\ &= \frac{1}{3} 3x^2 - 2 \cdot 2x + 4 \cdot 1 - 0 = x^2 - 4x + 4. \end{aligned}$$

$$283. y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$$

Λύση

$$y' = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right)' = \left(\frac{x^5}{5} \right)' - \left(\frac{2x^3}{3} \right)' + (x)' \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{5} 5x^4 - \frac{2}{3} 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1.$$

$$284. y = x + 2\sqrt{x}$$

Λύση

$$y' = (x + 2\sqrt{x})' = (x)' + 2(\sqrt{x})' = 1 + 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$285. y = \frac{10}{x^3}$$

Λύση

$$y' = \left(\frac{10}{x^3} \right)' = \frac{10 \cdot x^3 - 10 \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{0 \cdot x^3 - 10 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{30}{x^4}$$

$$286. y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$$

Λύση

$$y' = (6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x})' = 6\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - 4\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' \Rightarrow$$

$$y' = 6 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$287. y = x - \mu\pi x$$

Λύση

$$y' = (x - \mu\pi x)' = (x)' - (\mu\pi x)' = 1 - \epsilon\pi x.$$

$$288. y = x^2 \epsilon\pi x$$

Λύση

$$y' = (x^2 \epsilon\pi x)' = (x^2)' \epsilon\pi x + (\epsilon\pi x)' x^2 = 2x \epsilon\pi x - \mu\pi x \cdot x^2 = \\ = x (2\epsilon\pi x - x\mu\pi x).$$

$$289. y = \frac{\epsilon\phi x}{\sqrt{x}}$$

Λύση

$$y' = \left(\frac{\epsilon\phi x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{(\epsilon\phi x)' \sqrt{x} - \epsilon\phi x (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{\epsilon\omega^2 x} \sqrt{x} - \epsilon\phi x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{2x - \mu\chi\epsilon\omega x}{2x\sqrt{x}\epsilon\omega^2 x} = \frac{4x - \mu\chi 2x}{4x\sqrt{x}\epsilon\omega^2 x}$$

$$290. y = \frac{\mu\chi x + \epsilon\omega x}{\mu\chi x - \epsilon\omega x}$$

Λύση

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\mu\chi x + \epsilon\omega x}{\mu\chi x - \epsilon\omega x} \right)' = \frac{(\mu\chi x + \epsilon\omega x)'(\mu\chi x - \epsilon\omega x) - (\mu\chi x - \epsilon\omega x)'(\mu\chi x + \epsilon\omega x)}{(\mu\chi x - \epsilon\omega x)^2} = \\ &= \frac{(\epsilon\omega x - \mu\chi x)(\mu\chi x - \epsilon\omega x) - (\epsilon\omega x + \mu\chi x)(\mu\chi x + \epsilon\omega x)}{(\mu\chi x - \epsilon\omega x)^2} = \\ &= \frac{-(\epsilon\omega x - \mu\chi x)^2 - (\mu\chi x + \epsilon\omega x)^2}{(\mu\chi x - \epsilon\omega x)^2} = \frac{-2(\mu\chi^2 x + \epsilon\omega^2 x)}{(\mu\chi x - \epsilon\omega x)^2} = -\frac{2}{(\mu\chi x - \epsilon\omega x)^2} \end{aligned}$$

$$291. y = e^x \epsilon\omega x$$

Λύση

$$y' = (e^x \epsilon\omega x)' = (e^x)' \epsilon\omega x + e^x (\epsilon\omega x)' = e^x \epsilon\omega x - e^x \mu\chi x = e^x (\epsilon\omega x - \mu\chi x)$$

$$292. y = \frac{x^2}{\ln x}$$

Λύση

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(x^2)' \ln x - x^2 (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{2x \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \\ &= \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln x} \end{aligned}$$

Να παραχωρίσετε τις παρακάτω σύνθετες συναρτήσεις:

$$293. y = (1 + 3x - 5x^2)^{10}$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } f(x) = 1 + 3x - 5x^2$$

$$\text{Άρα } y = f^{10}(x) \text{ και } y' = (f^{10}(x))' \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned} y' &= 10 f^9(x) f'(x) = 10 (1 + 3x - 5x^2)^9 (3 - 10x) = \\ &= 10 (1 + 3x - 5x^2)^9 (3 - 10x) \end{aligned}$$

$$294. y = \sqrt{1-x^2}$$

Λύση

$$\text{Εδώ } f(x) = 1-x^2$$

$$\text{Άρα } y' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$295. y = (3-2\pi x)^5$$

Λύση

$$\begin{aligned} y' &= \left[(3-2\pi x)^5 \right]' = 5(3-2\pi x)^4 (3-2\pi x)' = \\ &= 5(3-2\pi x)^4 (-2\pi) = -10\pi x (3-2\pi x)^4 \end{aligned}$$

$$296. y = \pi^3 x + 6\pi x^3$$

Λύση

$$\begin{aligned} y' &= (\pi^3 x)' + (6\pi x^3)' = 3\pi^2 x (\pi x)' + 3\pi x^2 (6\pi x)' = \\ &= 3\pi^2 x \pi - 3\pi x^2 \pi = 3\pi x \pi - 3\pi x^2 \pi = 3\pi x \pi (1-x) = \frac{3}{2} \pi x (2\pi x - \pi x) \end{aligned}$$

$$297. f(x) = \ln(2x+7)$$

Λύση

$$f'(x) = \left[\ln(2x+7) \right]' = \frac{(2x+7)'}{2x+7} = \frac{2}{2x+7}$$

$$298. f(x) = x^2 10^{2x}$$

Λύση

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 10^{2x})' = (x^2)' 10^{2x} + x^2 (10^{2x})' = 2x 10^{2x} + x^2 10^{2x} \ln 10 (2x)' = \\ &= 2x 10^{2x} + 2x^2 10^{2x} \ln 10 = 2x 10^{2x} (1 + x \ln 10) \end{aligned}$$

$$299. f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$$

Λύση

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{\ln x + 1})' + (\ln(\sqrt{x} + 1))' = \\ &= \frac{(\ln x + 1)'}{2\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{(\sqrt{x} + 1)'}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1} = \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

2.5. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Λογαριθμική παράγωγος της συναρτήσεως $y = f(x)$ ονομάζεται η παράγωγος του λογαρίθμου της συναρτήσεως αυτής, δηλαδή

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

2.6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Αν η παραχρησίμη συνάρτηση $y = f(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση $F(x, y) = 0$, τότε η συνάρτηση λέγεται συνήθως πεπλεγμένη, δηλαδή εσω περίπτωση αυτή η y δεν εκφράζεται άμεσα μέσω της x , π.χ.

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^3 + xy + y^2 = 1 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Για να παραχρησίουμε την συνάρτηση $F(x, y) = 0$ πρέπει:

α) Να υπολογίσουμε την παράγωγο ως προς x του πρώτου μέλους της $F(x, y) = 0$, θεωρώντας το y σαν συνάρτηση της x .

β) Να εξισώσουμε την παράγωγο αυτή με το μηδέν, δηλαδή να θέσουμε $F'_x(x, y) = 0$

και γ) Να λύσουμε την εξίσωση $F'_x(x, y) = 0$ ως προς y' .

2.7. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ.

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα (a, β) , και έστω ότι αυτή σε κάθε σημείο του διαστήματος έχει παράγωγο $f'(x)$.

Την παράγωγο αυτή $f'(x)$ μπορούμε να την ονομάσουμε πρώτη παράγωγο (ή παράγωγο πρώτης τάξεως) της συναρτήσεως $f(x)$.

Αν η $g(x) = f'(x)$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 \in (a, \beta)$, τότε την παράγωγο αυτή την ονομάζουμε δευτέρα παράγωγο (ή παραγωγο δευτέρας τάξεως) και την συμβολίζουμε:

$$f''(x_0) = (f'(x_0))' \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο οποιαδήποτε τάξεως.

Έτσι n -στή παράγωγος (ή παράγωγος n -οτης τάξεως) της συναρτήσεως $y = f(x)$ στο σημείο x , ονομάζεται η παράγωγος της παραγωγού

($n-1$)-οτης τάξεως στο σημείο αυτό και ευθυλοξίζουσι:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \quad \text{ή} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$$

Για να προύμε των παράγωγο n -οτης τάξεως πρέπει να προύμε όλες τις παραγωγούς μέχρι των ($n-1$)-οτή παράγωγο. Μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις είναι δυνατό να προύμε απ' ευθείας των n -οτή παράγωγο, όταν ανακαλύψουμε τον γενικό τύπο που μας δίνει των παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως.

Αν η συνάρτηση δίδεται με μορφή πεπλεγμένη $F(x, y) = 0$ η πρώτη παράγωγος y' βρίσκεται όπως είπαμε παραπάνω (παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησεως). Έστω $y' = f(x, y)$ (1) δηλαδή η πρώτη παράγωγος εκφράζεται μέσω των x και y .

Για να προύμε των δεύτερη παράγωγο παραγωγίζουμε των (1) (θεωρούμε πάλι το y σαν συνάρτηση του x) και μετά αντικαθιστούμε στο y' με το δεξίό μέλος της (1). Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκονται και οι παράγωγοι των άλλων τάξεων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

300. Να παραγωγίσετε την συνάρτηση $f(x) = x^{nx}$

Λύση

Η εφαρμογή του τύπου $(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$ δεν είναι εδώ δυνατή διότι το a είναι σταθερά, ενώ το x όχι.

Γ' αφορμή λογαριθμίζουμε και κατόπιν παραγωγίζουμε:

$$\ln f(x) = nx \ln x \quad \text{και} \quad (\ln f(x))' = (nx \ln x)' \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (nx)' \ln x + nx (\ln x)' \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = nx \ln x + nx \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x) \left(nx \ln x + \frac{1}{x} nx \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{nx} \left(\ln x nx + \frac{1}{x} nx \right)$$

301. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

Λύση

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι δυνατόν να εμφανιστεί με την μορφή $y = f(x)$. Επομένως θα την παραχρησιάσουμε σαν πεπλεγμένη $F(x, y) = 0$ γνωρίζοντας ότι y είναι συνάρτηση του x .

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad (x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' &= 0 \Rightarrow \\ 3x^2 + 3y^2 y' - 3a(y'x + yx') &= 0 \end{aligned}$$

Προσέχουμε ότι η y είναι συνάρτηση και y' ως $y' \neq 1$

Για να προέξω την παράγωγο y' έχουμε:

$$\begin{aligned} y'(3y^2 - 3ax) &= 3ay - 3x^2 \Rightarrow \\ y' &= \frac{3(ay - x^2)}{3(y^2 - ax)} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \end{aligned}$$

302. Να παραχρησθεί η συνάρτηση $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε} \quad (x^3)' + (x^2y)' + (y^2)' &= 0 \\ \Rightarrow \quad 3x^2 + (x^2)'y + x^2y' + 2yy' &= 0 \\ \Rightarrow \quad 3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' &= 0 \\ \Rightarrow \quad y'(x^2 + 2y) &= -3x^2 - 2xy \\ \Rightarrow \quad y' &= -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y} \end{aligned}$$

303. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = 3 + \frac{5}{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση $xy' + y = 3$.

Λύση

$$\text{Πρίστωμε} \quad y' = \left(3 + \frac{5}{x}\right)' = (3)' + 5\left(\frac{1}{x}\right)' = 5\left(-\frac{x}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2}$$

Θέτουμες τώρα στην εξίσωση $y' = -\frac{5}{x^2}$ και $y = 3 + \frac{5}{x}$ έχουμε

$$x\left(-\frac{5}{x^2}\right) + \left(3 + \frac{5}{x}\right) = -\frac{5}{x} + 3 + \frac{5}{x} = 3$$

304. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = \ln \frac{1}{1+x}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$xy' + 1 = e^{\frac{1}{1+x}}$$

Λύση

$$\text{Έχουμε } y' = (\ln|1 - \ln(1+x)|)' = -\frac{(1+x)'}{1+x} = -\frac{1}{1+x}$$

$$\text{Τότε } xy' + 1 = x\left(-\frac{1}{1+x}\right) + 1 = -\frac{x}{1+x} + 1 = \frac{1}{1+x}$$

$$\text{Από την δοθείσα } y = \ln \frac{1}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = e^y, \text{ συνεπώς}$$

$$xy' + 1 = \frac{1}{1+x} = e^{\frac{1}{1+x}}$$

305. Έστω η συνάρτηση $y = (1+x)^5$. Να βρείτε των y''' .

Λύση

Βρίσκουμε διαδοχικά πρώτη, δεύτερα και τρίτη παράγωγο:

$$y' = 5(1+x)^4(1+x)' = 5(1+x)^4$$

$$y'' = [5(1+x)^4]' = 20(1+x)^3(1+x)' = 20(1+x)^3$$

$$y''' = [20(1+x)^3]' = 60(1+x)^2(1+x)' = 60(1+x)^2$$

306. Έστω η συνάρτηση $y = a^x$. Να βρείτε των $y^{(n)}$.

Λύση

Βρίσκουμε διαδοχικά:

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a$$

$$y'' = (a^x \ln a)' = \ln a (a^x)' = \ln^2 a a^x$$

$$y''' = (\ln^2 a (a^x))' = \ln^3 a a^x.$$

Ο τρόπος εκτιμασισμού διαδοχικά των παραγώγων έγινε χυνός, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$y^{(n)} = (\ln a)^n a^x.$$

307. Να βρεθεί η παράγωγος n -ετης τάξεως της συνάρτησης $y = \eta \mu x$

Λύση

$$\text{Έχουμε: } y' = (\eta \mu x)' = \epsilon \omega \mu x, \quad y'' = (\epsilon \omega \mu x)' = -\eta \mu x$$

$$y''' = (-\eta \mu x)' = -\epsilon \omega \mu x. \text{ Παρατηρούμε την εναλλαγή των διαδοχικών}$$

παραγώγων: $\epsilon \omega \mu x, -\eta \mu x, -\epsilon \omega \mu x, \eta \mu x$ αντίστοιχα.

Είναι φανερό πως $y^{(5)} = y'$, $y^{(6)} = y''$, $y^{(7)} = y'''$, $y^{(8)} = y^{(4)}$ κ.ο.κ.

Έτσι φρίκαμε τον νόμο με βάση του οποίου υπολογίζουμε τις παραχόμενες τις συναρτήσεις $y^{(n)}$.

Μπορούμε να δώσουμε και γενικό τύπο:

$$\begin{aligned} y &= \mu\eta x \\ y' &= \sigma\omega x = \mu\eta \left(x + \frac{\eta}{2}\right) \\ y'' &= -\mu\eta x = \mu\eta \left(x + 2 \cdot \frac{\eta}{2}\right) \\ y''' &= -\sigma\omega x = \mu\eta \left(x + 3 \cdot \frac{\eta}{2}\right) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= = \mu\eta \left(x + n \cdot \frac{\eta}{2}\right). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

$$308. y = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,3x + 0,1.$$

$$309. y = \sqrt{x} (x^3 - \sqrt{x} + 1)$$

$$310. y = (1 + \sqrt[3]{x})^2$$

$$311. y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$312. y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$$

$$313. y = \frac{2}{x^3 - 1}$$

$$314. y = x^3 \sigma\omega x$$

$$315. y = \frac{\epsilon\phi x}{\sqrt{x}}$$

$$316. y = e^x (\mu\eta x - \sigma\omega x)$$

$$317. y = 3^x \epsilon\omicron\epsilon\mu x$$

$$318. y = (1 + 2x)^{30}$$

$$319. y = \left(\frac{1+x^2}{1+x} \right)^5$$

$$320. y = 6wx^2$$

$$321. y = 3\mu x^2 - \mu x^3$$

$$322. y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$$

$$323. y = \ln^2 x$$

$$324. y = 10^{2x-3}$$

$$325. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

Να πρῶδει η δευτέρα παράγωγος των συναρτήσεων:

$$326. y = x e^{x^2}$$

$$327. y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$328. y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}$$

Να πρῶδει η νιοστή παράγωγος $y^{(n)}$ των συναρτήσεων:

$$329. y = x e^x$$

$$330. y = \mu x^2$$

$$331. y = \mu \alpha x + 6w \beta x.$$

332. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = e^x \mu x$ ικανοποιεί τω σχέση

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad \text{και η συνάρτηση } y = e^{-x} \mu x \text{ τω σχέση}$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

333. Να πρῶδει η παράγωγος n -ετης τάξεως της συναρτήσεως

$$y = 6wx.$$

334. Να πρῶδει η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ της συναρτήσεως

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

2.8 ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

2.8.1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Διαφορικό πρώτης τάξεως της συναρτήσεως $y = f(x)$ ονομάζεται ή γράφει

$$dy = f'(x) dx \quad (1)$$

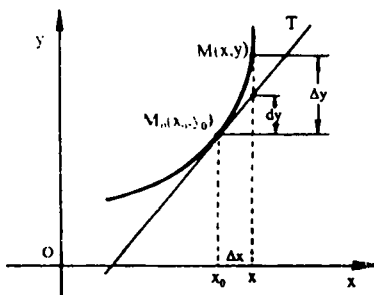
Η αύξηση της συναρτήσεως $y = f(x)$ εκφράζεται ως εξής:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A(x) \Delta x + a(x, \Delta x) \Delta x$$

όπου $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(x, \Delta x) = 0$ και $A(x) \Delta x$ το κύριο μέρος της αύξησης που ονομάζεται διαφορικό. Είναι δε $A(x) = f'(x)$ και $\Delta x = dx$

Αν Δx είναι αρκετά μικρή μεσαρλυτή, τότε $\Delta y \approx dy$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού αποδίδεται στο παρακάτω σχήμα



2.8.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ

1. $dc = 0$ όπου $c = \text{σταθερά}$.
2. $dx = \Delta x$
3. $d(cf(x)) = cdf(x)$
4. $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$
5. $d(f(x) \cdot g(x)) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$
6. $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{(g(x))^2} \quad (g(x) \neq 0)$
7. $d f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) d\varphi(x)$

2.9. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΣΤΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Αν Δx είναι μικρή μεσαρλυτή κατ' απόλυση τιμή, τότε

$$\Delta y \approx dy$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx f'(x) \Delta x$$

ή, αν $x = x_0 + \Delta x$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x}$$

2.10. ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ:

Το διαφορικό dy της συναρτήσεως $y = f(x)$ είναι ενωάρσειον τού:

$$dy = f'(x) dx$$

Συνεπώς το διαφορικό δεύτερης τάξεως είναι

$$d^2y = d(dy) = f''(x) (dx)^2$$

Ομοίως και αν άλλων τάξεων:

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x) (dx)^3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d^{(n)}y = d(d^{(n-1)}y) = y^{(n)} (dx)^n$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335. Έστω η ενωάρσειον $y = (1 + \epsilon dx)^8$. Να πρίεις το διαφορικό dy .

Λύση

Έχουμε $dy = y' dx$. Πρίσκουμε τω παρίχητ:

$$y' = 8(1 + \epsilon dx)^7 (\epsilon dx)' = 8(1 + \epsilon dx)^7 \cdot \frac{1}{\epsilon \omega^2 x}$$

$$\text{Άρα } dy = 8(1 + \epsilon dx)^7 \cdot \frac{1}{\epsilon \omega^2 x} dx$$

336. Να πρίεις το διαφορικό και αν αίξισον τής ενωάρσειου

$$y = 3x^3 + x - 1 \text{ στο σημείο } x=1 \text{ όσω } \Delta x = 0,1.$$

337. Να πρίεις αν απόλυτο και σχετικό σφάλμα που προκύπτουν από

αντικατάσταση του Δy με dy .

Λύση

Η αίξισον είναι:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x) - 1 - (3x^3 + x - 1)$$

$$\Rightarrow \Delta y = 9x^2 \Delta x + 9x (\Delta x)^2 + 3 (\Delta x)^3 \Delta x$$

Το διαφορικό είναι:

$$dy = (3x^3 + x - 1) dx = (9x^2 + 1) \Delta x \quad (\Delta x = dx)$$

Συνέπεις η διαφορά:

$$\Delta y - dy = 9x(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3.$$

Ανακαθιστώντας στο: $x=1$ και $\Delta x = 0,1$ παίρνουμε:

$$\Delta y - dy = 0,09 + 0,003 = 0,093$$

$$dy = 1, \quad \Delta y = 1,093$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι $|\Delta y - dy| = |1,093 - 1| = 0,093$

Το σχετικό σφάλμα είναι: $\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = \frac{0,093}{1,093} \approx 0,085$ ή $8,5\%$

332. Με την βοήθεια του διαφορικού να βρεις κατά προσέγγιση την

τιμή της συνάρτησης: $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$, όταν $x = 0,15$

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$

έχουμε για $x_0 = 0$ και $\Delta x = 0,15$

$$f(0 + 0,15) \approx f'(0) \cdot 0,15 + f(0) \quad (1)$$

Βρίσκουμε:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\frac{(2+x)^4}{(2-x)^2}} \cdot \frac{(-4)}{(2+x)^2} \quad \text{αν'όπου}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{5} \cdot \text{Επίσης } f(0) = \sqrt[5]{\frac{2-0}{2+0}} = 1.$$

Από είν (1) τώρα έχουμε:

$$f(0 + 0,15) \approx -\frac{1}{5} \cdot 0,15 + 1 \Rightarrow f(0,15) \approx -0,03 + 1 = 0,97$$

Σελικά επειδή $y = f(x)$, έχουμε:

$$y(0,15) = f(0,15) = 0,97.$$

333. Να βρεις προσεγγιστικά το $\sin 31^\circ$.

Λύση

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$

χράζουμε την συνάρτηση $y = \sin x$ με $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$

$$\text{Έτσι } \sin 31^\circ \approx (\sin x)'_{x=\frac{\pi}{6}} \cdot \Delta x + (\sin x)_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{Βρίσκουμε } (\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\sin x)'_{x=\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} = 0,5$$

$$\text{και } (\sin x)_{x=\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Sigma\upsilon\nu\epsilon\omega\varsigma \quad \epsilon\omega \ 31^\circ \approx -0,5 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,851.$$

340. Να πρῆξει σα διαδορικά dy , d^2y τῆς ἐωαρτίσεωσ

$$y = 4x^5 - 7x^2 + 3$$

λύση

$$\begin{aligned} \text{Ἐχομε} \quad dy &= y' dx = (4x^5 - 7x^2 + 3)' dx = (20x^4 - 14x) dx \\ d^2y &= d(dy) = (20x^4 - 14x)' (dx)^2 = (80x^3 - 14) (dx)^2. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

Να υπολογίσετε το διαδορικό τῶν ἐωαρτίσεων:

$$341. \quad y = \frac{x}{1-x}$$

$$342. \quad y = \cos \pi \frac{x}{a}$$

$$343. \quad y = x \ln x - x$$

$$344. \quad x^2 + 2xy - y^2 = a^2$$

$$345. \quad y = e^{-\frac{x}{2}}$$

Να υπολογίσετε κατὰ προσέγγιση τῶν τιμῶν τῶν ἐωαρτίσεων.

$$346. \quad f(x) = \sqrt{1+x}, \quad \text{ὡσαν} \quad x=0,2$$

$$347. \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \text{ὡσαν} \quad x=0,1$$

2.4. ΤΥΠΟΙ TAYLOR - MACLAURIN

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και έχει συνεχείς παράγωγους ως την $(n-1)$ -ετή τάξη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Αν σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, b) έχει παράγωγο n -ετής τάξεως τότε $\forall x \in [a, b]$ αληθεύει ο τύπος του Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}(x-a)^n \quad (1)$$

όπου $\xi = a + \theta(x-a)$ και $0 < \theta < 1$

Αν στον τύπο (1) θέσουμε $a=0$, τότε θα πάρουμε τον τύπο του Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}x^n \quad (2)$$

όπου $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

Ο τελευταίος όρος του τύπου Taylor γράφεται:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} (x-a)^n \quad (3)$$

και αντίστοιχα του Maclaurin:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n \quad (4)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

348. Να αναλύσετε σε πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ με την βοήθεια του τύπου Taylor στο σημείο $x=1$.

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) έχουμε $a=1$ και η παράγωγος είναι

$$P'(1) = (x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1)'_{x=1} = (5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2)'_{x=1} = 5 - 8 + 3 - 2 + 2 = 0$$

$$P''(1) = (5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2)'_{x=1} = (20x^3 - 24x^2 + 6x - 2)'_{x=1} = 20 - 24 + 6 - 2 = 0$$

$$P'''(1) = (20x^3 - 24x^2 + 6x - 2)'_{x=1} = (60x^2 - 48x + 6)'_{x=1} = 60 - 48 + 6 = 18.$$

$$P^{(4)}(1) = (60x^2 - 48x + 6)'_{x=1} = (120x - 48)_{x=1} = 120 - 48 = 72.$$

$$P^{(5)}(1) = (120x - 48)'_{x=1} = 120$$

$$P^{(6)}(1) = 0 \quad \text{και όλες οι άλλες παραγώγιοι είναι μηδέν.}$$

$$\text{Τέλος βρίσκουμε: } P(1) = 1 - 2 + 1 - 1 + 2 - 1 = 0.$$

Αντικαθιστώντας εύρα τις τιμές των παραγώγων και την τιμή του πολυ-
νόμου όταν $x=1$ βρον τύπο Ταυλον έχουμε:

$$P(x) = \frac{18(x-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{72(x-1)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{120(x-1)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\Rightarrow P(x) = 3(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + (x-1)^5.$$

349. Να αναλυθεί η συνάρτηση $y = \eta \mu x$ με τον τύπο του Μασλαωτίνη

Λύση

Βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησεως και τις τιμές των παραγώγων
ως των V -οσών στο σημείο $x=0$.

$$\text{Έχουμε } f(0) = \eta \mu 0 = 0$$

Έχουμε πρέι σε προκρομένη άσκηση (πλ. κεφάλαιο παραγώγων)

$$\text{ότι } y^{(v)} = \eta \mu \left(x + v \cdot \frac{\pi}{2} \right), \text{ όπου } v = 0, 1, \dots$$

Αν $v = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) τότε $y^{(2k)} = 0 = \eta \mu k\pi = 0$ και χ'ακό
σεω ανάλυση θα αποσειάζουν οι όροι με άρτιους δείκτες.

Αν $v = 2k-1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) τότε

$$y^{(2k-1)}(0) = \eta \mu \frac{2k-1}{2} \pi = (-1)^{k-1} \quad (\text{διότι } \eta \mu \frac{\pi}{2} = 1,$$

$\eta \mu \frac{3\pi}{2} = -1, \eta \mu \frac{5\pi}{2} = 1, \dots$) . Έτσι το πρόβλημα των περιττών όρων

θα εναλλάσσεται

Αν $v = 2k+1$ τότε

$$\eta \mu x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} x^{2k-1} + R_{2k+1}(x),$$

$$\text{όπου } R_{2k+1}(x) = \frac{y^{(2k+1)}(\xi)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} x^{2k+1} \Rightarrow$$

$$R_{2k+1}(x) = \frac{\eta \mu \left(\xi + \frac{2k+1}{2} \pi \right)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \cdot x^{2k+1} = (-1)^k \frac{6 \omega \xi}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} x^{2k+1}$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε τελικά:

$$\ln x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{k-1} + \frac{(-1)^k 6\omega\xi}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

όπου $\xi = x\vartheta$, $0 < \vartheta < 1$ και $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \nu = \nu!$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

350. Να αναλυθεί η ενοάρθρωση $y = \ln(1+x)$ που ορίζεται στο $[0, 1]$ με τον τύπο Μασλαβίν. Να εκτιμηθεί το εφάλμα όταν διασπρωθούν οι δέκα πρώτοι όροι.
351. Να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση της ενοαρεύσεως $y = \ln x$ από των προηγούμενη λύμένη άσκηση, για την εκτίμηση του εφάλματος, διασπρωίνοντας τρεις όρους ($0 \leq x \leq 0,1$).
352. Να αναλυθεί με τον τύπο Ταυλόρ η ενοάρθρωση $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 4$ όταν $x = a = 1$.
353. Να αναλυθεί το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$ με τον τύπο του Μασλαβίν.
354. Να εκτιμηθεί το εφάλμα του προσεγγιστικού τύπου $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ στο διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$

3. ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

3.1. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ).

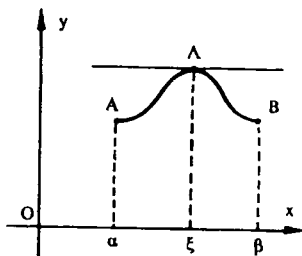
1^ο: ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE : Αν η συνάρτηση $y = f(x)$

α') είναι συνεκώς στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$

β') είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)

γ') ισχύει $f(a) = f(\beta)$

τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ του διαστήματος (a, β)
στο οποίο $f'(\xi) = 0$



Το παραπάνω σχήμα μας δίνει την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος και σημαίνει ότι : Στο τόξο της καμπύλης ΑΒ θα βρεθεί τουλάχιστον ένα σημείο Λ στο οποίο η εφαπτομένη θα είναι παράλληλη προς τον άξονα ΟΧ.

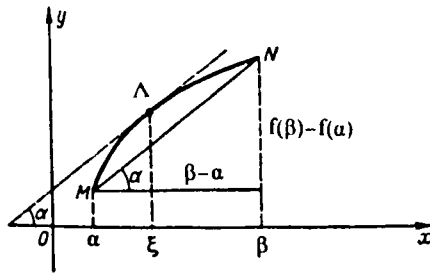
2^ο: ΘΕΩΡΗΜΑ LAGRANGE : Αν η συνάρτηση $y = f(x)$

α') είναι συνεκώς στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$

β') είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)

τότε στο διάστημα (a, β) θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ στο οποίο $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = f'(\xi)$ ($a < \xi < \beta$)

Στο παρακάτω σχήμα μας δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος που σημαίνει ότι : Στο τόξο ΜΝ θα βρεθεί τουλάχιστον ένα σημείο Λ στο οποίο η εφαπτομένη θα είναι παράλληλη προς τη χορδή ΜΝ



3^ο: ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY: Αν δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$

α) είναι συνεκείς στο κλειστό διάστημα $[a, b]$

β) είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b) και

γ) $g'(x) \neq 0$ στο διάστημα (a, b)

τότε στο διάστημα (a, b) θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ στο οποίο θα ισχύει η ισότητα

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{όπου } a < \xi < b$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

355. Να ελέγξουμε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

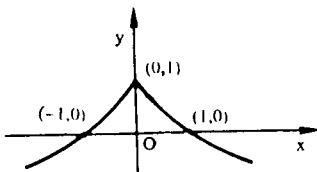
Λύση

α) Η συνάρτηση αυτή είναι συνεκής στο $[-1, 1]$.

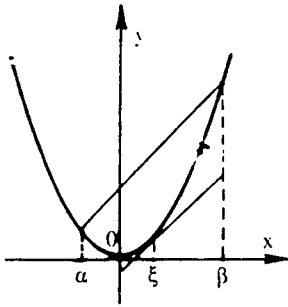
$$\beta) f'(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})' = -\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Αν θέσουμε $x=0 \in [-1, 1]$, τότε $f'(0) \rightarrow \infty$, συνεπώς η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$. Επομένως το θεώρημα του Rolle

δεν εφαρμόζεται. Από το σχήμα φαίνεται ότι στο διάστημα $[-1, 1]$ δεν υπάρχει σημείο των κομψών στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox .



356. Να γράψετε τον τύπο Lagrange εις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και να πείτε το $\xi \in (a, b)$.



$$\text{Επίσκοπουμε: } f(\beta) = \beta^2, \quad f(a) = a^2$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(\xi) = 2\xi.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο

$$\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = f'(\xi) \text{ έχουμε}$$

$$\frac{\beta^2 - a^2}{\beta - a} = 2\xi \Rightarrow 2\xi = a + \beta \Rightarrow \xi = \frac{a + \beta}{2}$$

Έτσι η ενδιαφέρουσα τιμή $\xi \in (a, \beta)$ ισούται με τη μέση τιμή των άκρων του διαστήματος. Αυτή είναι και ιδιότητα της παραβολής $y = x^2$

357. Να διαπιστώσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $\phi(x) = x^3 - 1$ εκπληρώνουν τις συνθήκες του θεωρήματος Cauchy και να βρείτε το ξ στο κλειστό διάστημα $[1, 2]$.

Λύση

$$\text{Επίσκοπουμε: } f(2) = 2^2 + 2 = 6, \quad f(1) = 1^2 + 2 = 3$$

$$\phi(2) = 2^3 - 1 = 7, \quad \phi(1) = 1^3 - 1 = 0$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(\xi) = 2\xi, \quad \phi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \phi'(\xi) = 3\xi^2$$

Τότε ο τύπος του θεωρήματος $\frac{f(\beta) - f(a)}{\phi(\beta) - \phi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$ μας δίνει

$$\frac{6-3}{7-0} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{2}{3\xi} \Rightarrow \xi = \frac{14}{9}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

358. Με την κρίση του θεωρήματος του Rolle να δείξει ότι η παράγωγος $f'(x)$ της συναρτήσεως $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ μηδενίζεται σε απειροστικό σημείο του διαστήματος $(0, 1)$.

359. Να διαπισωθεί αν αληθεύει το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $y = 3\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ στο κλειστό διάστημα $[1, 2]$.

360. Αληθεύει το θεώρημα Lagrange για την συνάρτηση $f(x) = x - x^3$ στο κλειστό διάστημα $[-2, 1]$; Να βρεθεί η τιμή του ξ .

3.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ (ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOSPITALÉ)

Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στον πεδίο του σημείου a με εξαίρεση το ίδιο το σημείο a και $g'(x) \neq 0$ και

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

τότε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει.

Η μεταβλητή x μπορεί να τείνει στο a ή στο ∞ ($x \rightarrow a$ ή $x \rightarrow \infty$)

Σημείωση: Η παρά πάνω εκένη καλείται κανόνας του L'Hospital (λοπιτάλ) και αντιμετωπίζουμε με αυτήν αοριστίες της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ και ακόμα της μορφής 0^0 , ∞^0 , 1^∞

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

361. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

Λύση

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 0$, άρα έχουμε $\frac{0}{0}$

Καταφεύγουμε λοιπόν στον κανόνα του L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)'}{(x^3 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

362. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

Λύση

Παρατηρούμε αμέσως ότι πρόκειται για αοριστία $\frac{0}{0}$, συνεπώς βάζει του L'Hospital $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 3x + 2)'}{(x^3 - x^2 - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$

Αλλά εδώ έχουμε και πάλι αοριστία $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε ξανά τον κανόνα L'Hospital, και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 3)'}{(3x^2 - 2x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

363. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\delta x} - \mu \mu x}{\mu \mu^3 x}$

Λύση

Επειδή έχουμε αβεβαιότητα της μορφής $\frac{0}{0}$, εφαρμόζουμε τον κανόνα L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \mu\eta x}{\mu\eta^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\epsilon\phi x - \mu\eta x)'}{(\mu\eta^3 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 6\omega x}{3\mu\eta^2 x + 6\omega x}$$

Εδώ πάλι έχουμε $\frac{0}{0}$ > αλλά η εφαρμογή του κανόνα L'Hospital δεν

— γνωρίζεται. Είναι προτιμότερο να μετασχηματίσουμε την παράσταση

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} : \frac{1 - 6\omega x}{3\mu\eta^2 x + 6\omega x} = \frac{1 - 6\omega x}{3\mu\eta^2 x + 6\omega x} \text{ και παρατηρούμε ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 6\omega^2 x = 1 \text{ έχουμε τελικά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \mu\eta x}{\mu\eta^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 6\omega x}{3\mu\eta^2 x}$$

Εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα L'Hospital ακόμα μία φορά έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \mu\eta x}{\mu\eta^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 6\omega x)'}{3(\mu\eta^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36\omega^2 x + \mu\eta x}{6\mu\eta x + 6\omega x} = \frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

364. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

365. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - \beta^x}{x\sqrt{1-x^2}}$

366. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sigma\phi x}$

367. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$.

3.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ : Επαναλαμβάνου.

με τον ορισμό της αύξουσας και φθίνουσας συναρτήσεως:

Η συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ ονομάζεται αύξουσα στο διάστημα (a, β) αν αυτή ικανοποιεί την συνθήκη:

$$(\forall x_1 \in (a, \beta)), (\forall x_2 \in (a, \beta)) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$$

Η συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ ονομάζεται φθίνουσα στο διάστημα (a, β) αν αυτή ικανοποιεί την συνθήκη:

$$(\forall x_1 \in (a, \beta)), (\forall x_2 \in (a, \beta)) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$$

Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζονται διαστήματα μονοτονίας.

α') Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει θετική παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, β) τότε η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο (a, β) , δηλαδή η παραχωχίστη στο διάστημα (a, β) $f(x)$ αυξάνει στο (a, β) αν εκπληρώνεται η συνθήκη

$$(\forall x \in (a, \beta)) f'(x) > 0.$$

β') Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει αρνητική παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, β) τότε η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο (a, β) , δηλαδή η παραχωχίστη στο διάστημα (a, β) $f(x)$ φθίνει στο (a, β) αν εκπληρώνεται η συνθήκη

$$(\forall x \in (a, \beta)) f'(x) < 0.$$

Πως βρίσκονται τα διαστήματα μονοτονίας: Για να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας εργαζόμαστε ως εξής:

α') Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$ της δεδομένης συναρτήσεως $f(x)$ και μετά βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η $f'(x)$ μηδενίζεται ή δεν υπάρχει. Τα σημεία αυτά ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως.

β') Χωρίζουμε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως σε διαστήματα με τα κρίσιμα σημεία. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά η $f'(x)$ διατηρεί το πρόσημό της. Τα διαστήματα αυτά θα είναι διαστήματα μονοτονίας.

γ') Ερευνούμε το πρόσημο της $f'(x)$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα που βρήκαμε.

Αν σε εξεταζόμενο διάστημα $f'(x) < 0$ τότε η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Αν δε σε εξεταζόμενο διάστημα $f'(x) > 0$ τότε η $f(x)$ είναι αύξουσα σε αυτό.

Για την κατανομή των παραπάνω δίνουμε τα εξής παραδείγματα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο: Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $y = x^2 - 2x + 5$

Λύση

α) Βρίσκουμε την παράγωγο: $y' = (x^2 - 2x + 5)' = 2x - 2$

β) Μηδενίζουμε την παράγωγο: $y' = 0$

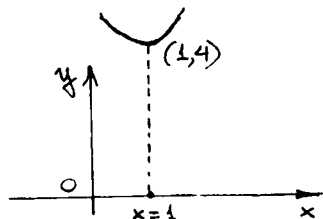
$$\Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1.$$

Το πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ χωρίζεται στα διαστήματα μονοτονίας $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

$$\gamma') f'(x) > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Επομένως στο διάστημα $(-\infty, 1)$ η συνάρτηση φθίνει (\downarrow) και στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι αύξουσα, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο: Να μελετηθεί η συνάρτηση $y = \frac{1}{x+2}$ ως προς την μονοτονία.

Λύση α) $y' = -\frac{(x+2)'}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$, $y' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x+2)^2} \neq 0$

Η παράγωγος λοιπόν δεν μηδενίζεται, όμως στο $x = -2$ δεν υπάρχει, άρα αυτό είναι κρίσιμο σημείο.

β) Το πεδίο ορισμού είναι: $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ και αυτά είναι και τα διαστήματα μονοτονίας.

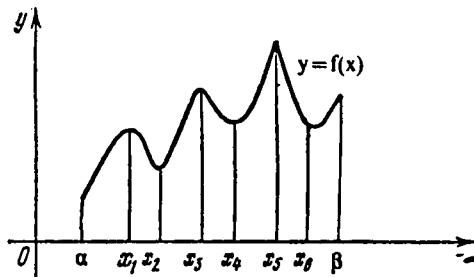
γ) Εξετάζουμε το πρόσημο της $f'(x)$: $y' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0 \forall x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$, άρα η συνάρτηση είναι φθίνουσα (\downarrow) στο πεδίο ορισμού.

3.4. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (Μέγιστα και Ελάχιστα)

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)$ ονομάζεται ελάχιστο της συναρτήσεως αυτής, αν υπάρχει τέτοια δ -περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του σημείου x_0 ώστε $\forall x \neq x_0$ της δ -περιοχής να εκπληρώνεται η ανίσωση $f(x) > f(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)$ ονομάζεται μέγιστο της συναρτήσεως αυτής, αν υπάρχει τέτοια δ -περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του σημείου x_0 ώστε $\forall x \neq x_0$ της δ -περιοχής να εκπληρώνεται η ανίσωση $f(x) < f(x_0)$.

Τα σημεία που η συνάρτηση έχει ελάχιστο και μέγιστο ονομάζονται ακρότατα της συναρτήσεως. Στο σχήμα δίνονται η γραφική άποψη των ακροσάτων.



Στο διάστημα (α, β) έχουμε έξι σημεία όπου η συνάρτηση έχει ακρότατα. Στο σημείο $x = x_4$ έχει ελάχιστο, όμως $f(x_4) > f(x_1)$ όπου x_1 είναι μέγιστο. Αυτό δεν αντιφάσκει στον ορισμό γιατί τα ακρότατα έχουν τοπικό χαρακτήρα κοντά στο δεδομένο σημείο.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΥΠΑΡΞΕΩΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ: Αν το σημείο x_0 είναι ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) της $f(x)$ που ορίζεται σε κάποια περιοχή του x_0 και στο σημείο αυτό υπάρχει παράγωγος $f'(x)$ τότε αυτή μηδενίζεται, δηλαδή $f'(x_0) = 0$.

Το σημείο x_0 στο οποίο $f'(x_0) = 0$ ή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει, ονομάζεται κρίσιμο σημείο.

ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΥΠΑΡΞΕΩΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ: Δεχόμεθα ότι η συνάρτηση

$f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 και στην δ -περιοχή του έχει παράγωγο εκτός του σημείου x_0 (που μπορεί και να μην έχει).

Τότε:

α') Αν η παράγωγος $f'(x) > 0$, όταν $x < x_0$ και $f'(x) < 0$, όταν $x > x_0$ (δηλαδή περνώντας μέσω του x_0 η παράγωγος από αριστερά προς τα δεξιά αλλάζει πρόσημο από $+$ σε $-$) τότε στο σημείο x_0 η συνάρτηση έχει μέγιστο (μακίμιμ).

β') Αν $f'(x) < 0$ όταν $x < x_0$ και $f'(x) > 0$ όταν $x > x_0$ (δηλαδή περνώντας μέσω του x_0 η παράγωγος από αριστερά προς τα δεξιά αλλάζει πρόσημο από $-$ σε $+$) τότε στο σημείο x_0 η συνάρτηση έχει ελάχιστο (μινιμίμ).

γ') Αν υπάρχει περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του σημείου x_0 που η παράγωγος $f'(x)$ διατηρεί το πρόσημο τότε στο σημείο x_0 η δεδομένη συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει ούτε μακ, ούτε μιν.

3.4.1. ΤΡΟΠΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ: Έστω

είναι η $f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα (a, b) . Τότε

για να βρούμε τα ακρότατα:

α') Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως, δηλαδή τα σημεία που $f'(x) = 0$ ή $f'(x)$ δεν υπάρχει.

β') Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγωγού $f'(x)$ σε κάποια δ -περιοχή καθενός κρίσιμου σημείου.

$$\text{και αν } \left. \begin{array}{l} \text{I. } \left. \begin{array}{l} f'(x) = + \\ x < x_0 \\ f'(x) = - \\ x > x_0 \end{array} \right\} \text{ έχουμε max} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{II. } \left. \begin{array}{l} f'(x) = - \\ x < x_0 \\ f'(x) = + \\ x > x_0 \end{array} \right\} \text{ έχουμε min} \end{array} \right\}$$

$$\text{III} \quad \left. \begin{array}{l} f'(x) = + (-) \\ x < x_0 \\ f'(x) = + (-) \\ x > x_0 \end{array} \right\} \text{δεν έχουμε ούτε μίνι ούτε μακ}$$

Παρατήρηση: Το μέγιστο και το ελάχιστο συνεχώς εναλλάσσονται διαδοχικά.

342. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ:

Έστω ότι στο κρίσιμο σημείο x_0 η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη δύο φορές $[f'(x) = 0]$

Αν συγχρόνως $f''(x_0) > 0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει στο σημείο x_0 ελάχιστο (μίνι).

Αν $f''(x_0) < 0$ τότε στο σημείο x_0 η συνάρτηση έχει μέγιστο (μακ).

Αν $f''(x_0) = 0$ το ζήτημα υπάρξεως μακ ή μίνι παραμένει άλυτο (καταφεύγουμε στην πρώτη παράγωγο).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

368. Να βρεις τα ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας και να κατασκευάσεις την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Λύση

α) Παραγωγίζουμε για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

β) Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγωγού από το εξής

σχήμα:



Έχουμε $y' = 3(x-1)(x-3)$ και από το σχήμα:

$$x=1: \left. \begin{array}{l} y'_{x<1} = + \\ y'_{x>1} = - \end{array} \right\} \text{max} \quad x=3: \left. \begin{array}{l} y'_{x<3} = - \\ y'_{x>3} = + \end{array} \right\} \text{min}$$

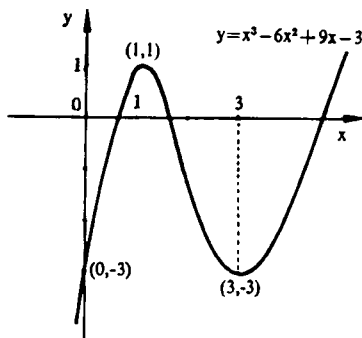
Τα διαστήματα μονοτονίας είναι $(-\infty, 1) \uparrow$, $(1, 3) \downarrow$, $(3, +\infty) \uparrow$

γ) Βρίσκουμε τις τιμές της συναρτήσεως όταν $x=1$ και $x=3$.

$$y(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1, \quad y(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3.$$

Έτσι, τα ακρότατα είναι: $(1, 1)$ και $(3, -3)$

Για να κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση, επισημάνου με τα σημεία των ακρότατων στο επίπεδο συντεταγμένων, βρίσκουμε με το σημείο $x=0$ και $y=-3$ και αν κρετασθεί βρίσκουμε συμπληρωματικά και άλλα σημεία.



369. Να βρείτε τα ακρότατα και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = \frac{x^4}{4} - x^3$

Λύση

Το πεδίο ορισμού είναι $\Delta = (-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{4x^3}{4} - 3x^2 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ και } x_2 = 3.$$

Έτσι τα κρίσιμα σημεία είναι $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

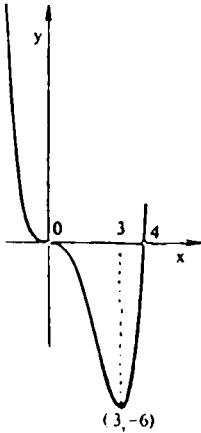
Τα διαστήματα μονοτονίας είναι $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, +\infty)$



Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγωγού

$$y' = x^2(x-3)$$

Για $x=0$: $\left. \begin{array}{l} y'_{x<0} = - \\ y'_{x>0} = - \end{array} \right\}$ δεν υπάρχει ούτε min ούτε max



Βρίσκουμε $f(0) = 0$ και το $\min(3, -6)$.
 Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παραλεύρως σχήμα.

Συμπληρωματικά βρίσκουμε το σημείο $x = 4, y = 0$.

370. Να προσδοούν τα ακρότατα και να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της θηαρρέσεως $y = x + 6\omega 2x$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού δεσχεύεται στο $(0, \pi)$.

$$y' = 1 - 2\omega 2x, \quad y' = 0 \Rightarrow 1 - 2\omega 2x = 0 \Rightarrow \omega 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ και } 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{κεκ.}$$

Στο διάστημα $(0, \pi)$ έχουμε τα κρίσιμα σημεία

$$x_1 = \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{12}$$

Εδώ καλύτερα να εφαρμόσουμε την δεύτερα παράγωγο για να προσδοή στο ακρότατο. Βρίσκουμε λοιπόν την 2' παράγωγο:

$$y'' = (1 - 2\omega 2x)' = -4\omega 2x.$$

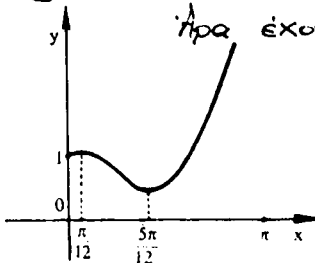
Εξετάζουμε το πρόσημο της στα σημεία $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$:

$$y''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -4\omega 2\frac{\pi}{12} = -4\omega \frac{\pi}{6} = -4\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} < 0$$

Άρα έχουμε μέγιστο

$$y''\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -4\omega 2\frac{5\pi}{12} = -4\omega \frac{5\pi}{6} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} > 0$$

Άρα έχουμε ελάχιστο.



Βρίσκουμε

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1, \quad y\left(\frac{5\pi}{12}\right) \approx 0,4.$$

Έτσι

$$\max\left(\frac{\pi}{12}, 1\right) \text{ και } \min\left(\frac{5\pi}{12}, 0,4\right).$$

371. Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $y = x^2(x-12)^2$.

Λύση

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο:

$$y' = (x^2)'(x-12)^2 + x^2 [(x-12)^2]' = 2x(x-12)^2 + x^2 \cdot 2(x-12)$$

$$\Rightarrow y' = 2x(x-12)(x-12+x) = 2x(x-12)(2x-12) = 4x(x-12)(x-6)$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

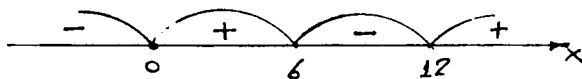
$$y' = 0 \Rightarrow 4x(x-12)(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 6$$

Για τα κρίσιμα σημεία είναι: $x=0, x=12, x=6$.

Εξετάζουμε το πρόσημο της παραγώγου στην περιοχή των κρίσιμων

σημείων: $y' = 4x(x-12)(x-6)$

$x' = 0$		$x = 6$		$x = 12$		
$y'_{x < 0} = -$	} $\min(0,0)$	$y'_{x < 6} = +$	} $\max(6,36^2)$	$y'_{x < 12} = -$	} $\min(12,0)$	$y'_{x > 12} = +$
$y'_{x > 0} = +$		$y'_{x > 6} = -$		$y'_{x > 12} = +$		



Βρίσκουμε τώρα:

$$y(0) = 0 \quad y(6) = 36(6-12)^2 = 36^2 \quad y(12) = 12^2(12-12) = 0$$

Άρα τα ακρότατα της συναρτήσεως είναι $(0,0), (6,36^2), (12,0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

372. Χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο να βρεις τα ακρότατα

της συναρτήσεως $y = 2\mu x + 6\omega 2x$

373. Να βρεις τα ακρότατα της συναρτήσεως $y = x - \ln(1+x)$

374. Ομοίως της συναρτήσεως $y = \frac{x^3}{x^2+3}$

375. Ομοίως της συναρτήσεως $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

Να βρεθούν τα ακρότατα και να γίνει η γραφική παράσταση των

συναρτήσεων

376. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

377. $y = x^2 + 2x - 3$

3.4.3. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Εστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Τότε η συνάρτηση μπορεί να πάρει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή, στο κλειστό διάστημα, στα κρίσιμα σημεία ή στα άκρα του διαστήματος. Το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης στο $[a, \beta]$ θα τα ονομάσουμε γενικά ακρότατα.

Για να βρούμε τα γενικά ακρότατα της συνάρτησης στο διάστημα $[a, \beta]$:

- Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης σε όλα τα κρίσιμα σημεία του διαστήματος $[a, \beta]$.

- Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα, δηλαδή υπολογίζουμε τα $f(a)$ και $f(\beta)$.

- Ελέγχουμε απ' αυτές την μέγιστη και την ελάχιστη.

Αν η συνάρτηση ορίζεται και είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (a, β) τότε η συνάρτηση μπορεί να μην έχει γενικά ακρότατα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεις το μέγιστο και το ελάχιστο στο διάστημα $[-3, \frac{3}{2}]$ της συνάρτησης $y = x^3 - 3x + 3$

Λύση

α) Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$y' = 3x^2 - 3 \quad \text{και} \quad \text{για} \quad y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = -1.$$

Ετσι τα κρίσιμα σημεία είναι $x_1 = 1, x_2 = -1$.

β) Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα κρίσιμα σημεία:

$$y(1) = 1 - 3 + 3 = 1, \quad y(-1) = -1 + 3 + 3 = 5.$$

γ) Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος, δηλαδή:

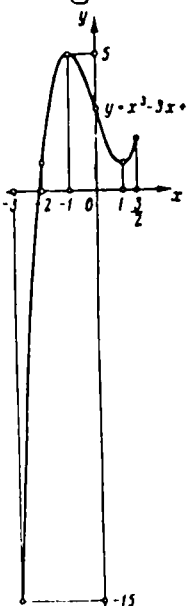
$$y(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 3 = -27 + 9 + 3 = -15$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{27}{8} - \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{8}$$

Τελικά έχουμε τις τιμές από τις οποίες θα διαλέξουμε το μέγιστο και ελάχιστο: $-15, 1, \frac{15}{8}, 5$ απ' όπου

το μέγιστο είναι $y(-1) = 5$ και το ελάχιστο

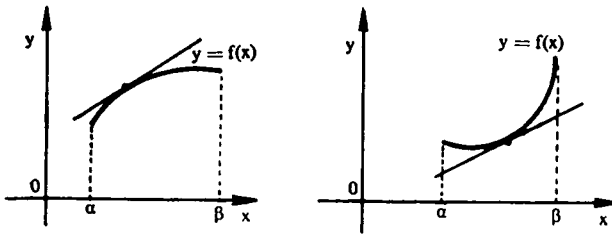
$$y(-3) = -15.$$



3.5. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Λέμε ότι στο διάστημα (a, β) η γραφική παράσταση της συνεκούς παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ είναι ετραμένη προς τα πάνω με το κυρτό μέρος (κυρτή), αν η παράγωγος $f'(x)$ είναι φθίνουσα στο (a, β) . Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο της γραφικής παραστάσεως $y = f(x)$, $x \in (a, \beta)$ υπάρχει εφαπτομένη και βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησεως (βλ. σχήμα αριστερά).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Λέμε ότι στο διάστημα (a, β) η γραφική παράσταση της συνεκούς παραγωγίσιμης συνάρτησεως $f(x)$, $x \in (a, \beta)$ είναι ετραμένη προς τα κάτω με το κυρτό μέρος (κοίλη), αν η παράγωγος $f'(x)$ είναι αύξουσα στο (a, β) . Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο της γραφικής παραστάσεως $y = f(x)$, $x \in (a, \beta)$ υπάρχει εφαπτομένη και βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησεως (βλ. σχήμα δεξιά).



3.5.1. ΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ:

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in (a, \beta)$ έχει πρώτη και δεύτερα παράγωγο. Τότε:

α') Αν $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, \beta)$, η καμπύλη είναι ετραμένη με το κυρτό μέρος προς τα πάνω (κυρτή) στο (a, β) .

β') Αν $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, \beta)$, η καμπύλη είναι ετραμένη με το κυρτό μέρος προς τα κάτω (κοίλη) στο (a, β) .

Για να βρούμε τα διαστήματα κυρτότητας της καμπύλης $y = f(x)$ πρέπει:

α. Να βρούμε τα κρίσιμα σημεία (ως προς την δεύτερα παράγωγο) που ανήκουν στο διάστημα (α, β) , δηλαδή τα σημεία εκείνα όπου $f''(x) = 0$ ή $f''(x)$ δεν υπάρχει.

β. Σε κάθε διάστημα από το σύνολο των διαστημάτων που τα κρίσιμα σημεία χωρίζουν το πεδίο ορισμού, διαπιστώνεται εκ πρόσημο της $f''(x)$.

Αν $f''(x) > 0$, τότε στο διάστημα αυτό η καμπύλη είναι κοίλη, αν δε $f''(x) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι κυρτή.

3.5.2. ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Σημείο καμπής της γραφικής παραστάσεως (καμπύλης) $y = f(x)$ ονομάζεται το σημείο της καμπύλης f που χωρίζει τα διαστήματα κυρτότητας της καμπύλης αυτές.

Εστω ότι η $y = f(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ έχει στο διάστημα αυτό εναλλακτικές παραχώσεις πρώτης και δεύτερας τάξεως και $f''(x)$ εκει περναμένο πλάτος σημείων που μηδενίζεται. Τότε για να βρούμε τα σημεία καμπής πρέπει:

α. Να βρούμε τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τα σημεία που $f''(x) = 0$ ή δεν υπάρχει, της συναρτήσεως $y = f(x)$ που ανήκουν στο (α, β) .

β'. Να εξετάσουμε το πρόσημο της $f''(x)$ σε κάποια περιοχή κάθε κρίσιμου σημείου x_0 . Και, αν $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο πέρασμα της μεσαφλυτής από το σημείο x_0 τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της καμπύλης $y = f(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$.

Παρατήρηση: Στο σημείο καμπής η εθαστομένη της καμπύλης από την μία πλευρά θα βρισκείται πάνω από την καμπύλη και από την άλλη κάτω από την καμπύλη (βλ. σχήμα της γάρα κάτω λιγμένως ασκήσεως).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεις τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

378. $y = x^3$.

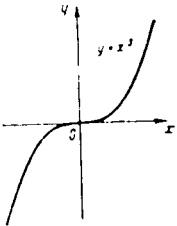
Λύση

α'. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y' = 3x^2, \quad y'' = 6x, \quad \text{για } y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Επειδή έχουμε κρίσιμο σημείο $x = 0$ που χωρίζει το πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ σε δύο διαστήματα κυρτότητας $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

β'. Διαπιστώνουμε το πρόσημο της $f''(x)$ στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$.



$$\left. \begin{array}{l} y''_{x < 0} = - \\ y''_{x > 0} = + \end{array} \right\} \Rightarrow \text{έχουμε σημείο καμπής και}$$

στο $(-\infty, 0)$ η καμπύλη είναι κυρτή.

Στο $(0, +\infty)$ είναι κοίλη. Το σημείο καμπής

είναι $(0, 0)$. (βλ. σχήμα).

379. $y = x e^{-x}$

Λύση

α'. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y' = e^{-x} - e^{-x}x$$

$$y'' = -e^{-x} + e^{-x}x - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

Το σημείο $x=2$ χωρίζει το διάστημα $\Delta = (-\infty, +\infty)$ σε διαστήματα $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$.

β'. Εξετάζουμε το πρόσημο της y''

$$\left. \begin{array}{l} y''_{x < 2} = - \\ y''_{x > 2} = + \end{array} \right\} \Rightarrow x=2 \text{ είναι σημείο καμπής}$$

Η καμπύλη είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 2)$ γιατί $y'' < 0$ και κοίλη στο διάστημα $(2, +\infty)$ γιατί $y'' > 0$.

$$380. y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$$

Λύση

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία: $y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24$

$$y'' = 12x^2 + 6x - 36 \quad y'' = 0 \Rightarrow 12x^2 + 6x - 36 = 0$$

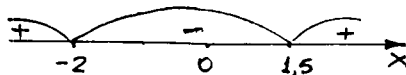
$$\Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$$

Γράφουμε την δεύτερα παράγωγο υπό την μορφή

$$y'' = 6(x+2)(x-1,5)$$

Τα διαστήματα κυρτότητας είναι $(-\infty, -2)$, $(-2, 1,5)$, $(1,5, \infty)$.

Για να φέρουμε το πρόσημο της δεύτερας παραγωγής χρησιμοποιούμε το εξής σχήμα



Έτσι τα σημεία $x = -2$, $x = 1,5$ είναι σημεία καμπής και στα διαστήματα $(-\infty, -2) \cup (1,5, +\infty)$ είναι κοίλη.

Στο διάστημα $(-2, 1,5)$ είναι κυρτή.

$$381. y = x^2 + 2\mu\eta x$$

Λύση

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y' = 2x + 2\mu\eta x, \quad y'' = 2 - 2\mu\eta x$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 2(1 - \mu\eta x) = 0 \Rightarrow \mu\eta x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Παρατηρούμε ότι:

$y'' = 2(1 - \mu\eta x) \geq 0$, επειδή $\mu\eta x \leq 1$, συνεπώς η καμπύλη είναι παντού κοίλη στο $(-\infty, +\infty)$ και σημεία καμπής δεν υπάρχουν.

382. Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές α, β, γ , ώστε η καμπύλη $y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$ να έχει σημεία καμπής;

Λύση

Βρίσκουμε την δεύτερα παράγωγο:

$$y' = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$$

$$y'' = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$y''=0 \Rightarrow 12ax^2+6\beta x+2\gamma=0$$

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει ρίζες πραγματικές και διάφορες όταν η διακρίνουσα $\Delta > 0$, άρα

$$\Delta = 9\beta^2 - 24a\gamma > 0 \Leftrightarrow$$

$3\beta^2 - 8a\gamma > 0$. Αυτή είναι και η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές a, β, γ .

383. Για ποιές τιμές των a και β το σημείο $(1,3)$ είναι σημείο καμπής της καμπύλης $y = ax^3 + \beta x^2$;

Λύση

Έχουμε $y' = 3ax^2 + 2\beta x$, $y'' = 6ax + 2\beta$.

Το σημείο καμπής πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες: α) Να μηδενίζει την δεύτερα παράγωγο. β) Να ικανοποιεί την εξίσωση της καμπύλης. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} 6a \cdot 1 + 2\beta = 0 \\ a \cdot 1 + \beta \cdot 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + \beta = 0 \\ a + \beta = 3 \end{cases}$$

Από όπου παίρνουμε $a = -1,5$ και $\beta = 4,5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ .

Να βρείτε τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

384. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 7$

385. $y = (x+1)^4$

386. $y = \frac{x^3}{x^2+12}$

387. $y = x^2 \ln x$

4. ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1. ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΚΑΙ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Η συνάρτηση $F(x)$ ονομάζεται παράγουσα της συναρτήσεως $f(x)$ στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, αν σε όλα τα σημεία του διαστήματος αυτού ισχύει η σχέση:

$$F'(x) = f(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $F_1(x)$ και $F_2(x)$ δύο παράγουσες της συναρτήσεως $f(x)$ στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η διαφορά τους ισούται με σταθερό αριθμό, δηλαδή

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Αν συνάρτηση $F(x)$ είναι παράγουσα της συναρτήσεως $f(x)$, τότε $F(x) + C$ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της συναρτήσεως $f(x)$ και συμβολίζεται:

$$\int f(x) dx \quad \text{όπου } x \text{ ονομάζεται μεταβλητή της συναρτήσεως.}$$

Έτσι έχουμε: $\int f(x) dx = F(x) + C$ αν $F'(x) = f(x)$.

Το αόριστο λοιπόν ολοκλήρωμα παρουσιάζει οικειότητα συναρτήσεων $y = F(x) + C$.

4.1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

I. $(\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

II. $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$

III. $\int dF(x) = F(x) + C$

IV: $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_k(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_k(x) dx$.

V: $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$, όπου a σταθερά.

VI: Αν $\int f(x) dx = F(x) + C$, τότε $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$.

4.2. ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

Η πράξη της εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος $\int f(x) dx$ ονομάζεται ολοκλήρωση της συναρτήσεως $f(x)$.

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει η παράγωγος και συνεπώς το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$

Οι παρακάτω τύποι ολοκληρώσεως μπορούν να ελεγχθούν με την φωνή της παραγωγίσεως.

$$1. \int x^v dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + C \quad (v \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int \eta \mu x dx = -\epsilon \omega x + C$$

$$4. \int \epsilon \omega x dx = \eta \mu x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sigma \omega^2 x} = \epsilon \phi x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\eta \mu^2 x} = -\sigma \phi x + C$$

$$7. \int \sigma \phi x dx = \ln|\eta \mu x| + C$$

$$8. \int \epsilon \phi x dx = -\ln|\epsilon \omega x| + C$$

$$9. \int e^x dx = e^x + C$$

$$10. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \tau \omicron \xi \epsilon \phi x + C \quad 11'. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tau \omicron \xi \epsilon \phi \frac{x}{a} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau \omicron \xi \eta \mu x + C \quad 13'. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \tau \omicron \xi \eta \mu \frac{x}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

$$388. \int (2x^3 - 3\mu\chi\kappa) dx$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες IV, V έχουμε:

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 3\mu\chi\kappa) dx &= 2 \int x^3 dx - 3 \int \mu\chi\kappa dx = (\text{τύπος 1, 3}) = \\ &= 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} + 3 \epsilon\omega x = \frac{x^4}{2} + 3 \epsilon\omega x + C. \end{aligned}$$

$$389. \int \frac{x-2}{x^3} dx$$

Λύση:

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα IV έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^3} dx &= \int \frac{x}{x^3} dx - \int \frac{2}{x^3} dx = \int x^{-2} dx - 2 \int x^{-3} dx \Rightarrow (\text{τύπος 1}) \\ \int \frac{x-2}{x^3} dx &= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -x^{-1} + x^{-2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + C. \end{aligned}$$

$$390. \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

Λύση

$$\text{Έχουμε } \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$$

$$391. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx &= \int e^x dx - \int \frac{dx}{x^2} = e^x - \int x^{-2} dx = \\ &= e^x - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = e^x + \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

$$392. \int \frac{\epsilon\omega 2x}{\epsilon\omega^2 x \cdot \mu\chi^2 x} dx$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\epsilon\omega 2x = \epsilon\omega^2 x - \mu\chi^2 x$. Άρα

$$\int \frac{\epsilon\omega \cdot x}{\epsilon\omega^2 x \cdot \mu\mu^2 x} dx = \int \frac{\epsilon\omega^2 x - \mu\mu^2 x}{\epsilon\omega^2 x \mu\mu^2 x} dx = \int \frac{\epsilon\omega^2 x}{\epsilon\omega^2 x \mu\mu^2 x} dx - \int \frac{\mu\mu^2 x}{\epsilon\omega^2 x \mu\mu^2 x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{\mu\mu^2 x} - \int \frac{dx}{\epsilon\omega^2 x} = (\text{εισοί 5 και 6}) = -\epsilon\phi x - \epsilon\delta x + C.$$

393. $\int \frac{dx}{\mu\mu^2 x \sigma\omega^2 x}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\mu\mu^2 x + \epsilon\omega^2 x = 1$. Άρα:

$$\int \frac{dx}{\mu\mu^2 x \epsilon\omega^2 x} = \int \frac{\mu\mu^2 x + \epsilon\omega^2 x}{\mu\mu^2 x \epsilon\omega^2 x} dx = \int \frac{\mu\mu^2 x}{\mu\mu^2 x \epsilon\omega^2 x} dx + \int \frac{\epsilon\omega^2 x}{\mu\mu^2 x \epsilon\omega^2 x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{\epsilon\omega^2 x} + \int \frac{dx}{\mu\mu^2 x} = \epsilon\delta x - \sigma\phi x + C.$$

394. $\int \mu\eta\rho x dx$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\mu\eta \rho x = \mu\mu^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \epsilon\omega x}{2}$

$$\text{Άρα } \int \mu\eta\rho x dx = \int \frac{1 - \epsilon\omega x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \epsilon\omega x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \mu\mu x + C.$$

Να βρείτε τα ολοκληρώματα και να ελεγήσετε τις απαντήσεις με
εσω βοήθεια της παραγωγικής

395. $\int \sigma\phi^2 x dx$

Λύση

$$\int \sigma\phi^2 x dx = \int \frac{\epsilon\omega^2 x}{\mu\mu^2 x} dx = \int \frac{1 - \mu\mu^2 x}{\mu\mu^2 x} dx = \int \frac{dx}{\mu\mu^2 x} - \int dx = -\sigma\phi x - x + C$$

Έλεγχος: $(-\sigma\phi x - x + C)' = -(\sigma\phi x)' - (x)' = -\left(-\frac{1}{\mu\mu^2 x}\right) - 1 = \frac{1}{\mu\mu^2 x} - 1 =$

$$= \frac{1 - \mu\mu^2 x}{\mu\mu^2 x} = \frac{\epsilon\omega^2 x}{\mu\mu^2 x} = \sigma\phi^2 x, \text{ δηλαδή οπότε } (F(x) + C)' = f(x).$$

396. $\int \left(\mu\mu \frac{x}{2} - \epsilon\omega \frac{x}{2}\right)^2 dx$

Λύση

$$\int \left(\mu \frac{x}{2} - \epsilon \omega \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\mu^2 \frac{x^2}{2} - 2\mu \frac{x}{2} \epsilon \omega \frac{x}{2} + \epsilon \omega^2 \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int dx - \int \mu \epsilon \omega x dx = x + \epsilon \omega \nu x + C$$

Έλεγχος:

$$(x + \epsilon \omega \nu x + C)' = 1 - \mu \epsilon \omega x = \mu^2 \frac{x^2}{2} + \epsilon \omega^2 \frac{x^2}{2} - 2\mu \frac{x}{2} \epsilon \omega \frac{x}{2} =$$

$$= \left(\mu \frac{x}{2} - \epsilon \omega \frac{x}{2} \right)^2.$$

$$397. \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$$

Λύση

Φέρνουμε το ολοκλήρωμα σε μία από τις μορφές του πίνακα, ως εξής:

$$\int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx + 2 \int \frac{x dx}{x(1+x^2)}$$

$$\text{ή } \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{1+x^2} = \ln|x| + 2 \arctan x + C$$

$$\text{Έλεγχος: } (\ln|x| + 2 \arctan x + C)' = \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)} = \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρείτε τα ολοκλήρωμα και να ελεγχέστε τις απαντήσεις

με την βοήθεια της παραγωγής:

$$398. \int \frac{10x^6+3}{x^4} dx$$

$$399. \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$$

$$400. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx$$

$$401. \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$402. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$403. \int e^{\phi^2} x dx$$

4.3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

4.3.1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ Η ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x) dx$ (1) αλλά δεν μπορούμε να βρούμε ευν παράγωγα της συνάρτησης $f(x)$ στον γνωστό πίνακα. Είναι γνωστό όμως ότι η παράγωγα υπάρχει.

Εκλέγουμε τότε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας

$$x = \phi(t) \quad (2)$$

όπου $\phi(t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο που έχει επίσης ανείσροφη συνάρτηση.

Τότε $dx = \phi'(t) dt$ και ισχύει η ισότητα

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \quad (3)$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ εκλέγεται έτσι ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση του δεξιού μέλους της (3).

Παρατήρηση: Πολλές φορές η αλλαγή της μεταβλητής δεν γίνεται με ευν αντικατάσταση $x = \phi(t)$ αλλά με ευν $t = \psi(x)$.

π.χ. αν έχουμε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx \quad \text{ή} \quad \int f(x) f'(x) dx$$

τότε είναι προτιμότερη η αντικατάσταση: $\psi(x) = t \Rightarrow \psi'(x) dx = dt$

$$\text{οπότε} \quad \int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\psi(x)| + C$$

ή $f(x) = t \Rightarrow f'(x) dx = dt$ οπότε

$$\int f(x) f'(x) dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{f^2(x)}{2} + C$$

Μπορούμε ακόμα κρυσιμοποιώντας το διαφορικό, να χρζαφουμε ($d\psi(x) = \psi'(x) dx$, $d f(x) = f'(x) dx$):

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \int \frac{d(\psi(x))}{\psi(x)} = \ln|\psi(x)| + C$$

$$\text{ή} \quad \int f(x) f'(x) dx = \int f(x) d(f(x)) = \frac{f^2(x)}{2} + C$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

$$404. \int (x^2 - 3x + 1)^{10} (2x - 3) dx$$

Λύση

Επειδή $(2x - 3) dx = d(x^2 - 3x + 1)$, έχουμε

$$\int (x^2 - 3x + 1)^{10} (2x - 3) dx = \int (x^2 - 3x + 1) d(x^2 - 3x + 1) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^{11}}{11} + C$$

$$405. \int \sqrt{1+x^2} x dx$$

Λύση

Επειδή $x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(1+x^2)$, χράζουμε

$$\int \sqrt{1+x^2} x dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} = \frac{1}{3} (1+x^2) \sqrt{1+x^2} + C$$

(Εφαρμόσαμε τον τύπο 1 του πίνακα, θεωρώντας ως μεταβλητή το $1+x^2$ που μπορούμε να το θεωρήσουμε και με t δηλαδή $t=1+x^2$)

$$406. \int \sqrt{\eta\chi} \epsilon\omega\chi dx$$

Λύση

Ισχύει $d\eta\chi = \epsilon\omega\chi dx$, άρα

$$\int \sqrt{\eta\chi} \epsilon\omega\chi dx = \int (\eta\chi)^{\frac{1}{2}} d\eta\chi = \frac{(\eta\chi)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \eta\chi \sqrt{\eta\chi} + C.$$

$$407. \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

Λύση $x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2)$, άρα

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$408. \int \sigma\upsilon\upsilon^2 x dx$$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τύπο $\epsilon\omega^2 x = \frac{1+\epsilon\omega 2x}{2}$ έχουμε

$$\int \sigma\upsilon\upsilon^2 x dx = \int \frac{1+\epsilon\omega 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \epsilon\omega 2x dx$$

Επειδή $dx = d(2x) \cdot \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\int \sigma \omega^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sigma \omega 2x d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \eta \mu 2x + C.$$

409. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Λύση

Γράφουμε $x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(1+x^2)$. Άρα

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

410. $\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x}$

Λύση

Γράφουμε $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$. Συνεπώς

$$\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

411. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$

Λύση

Γράφουμε $\int \frac{dx}{3x^2+5} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{5})^2}$ και επειδή $dx = \frac{1}{\sqrt{3}} d(\sqrt{3}x)$

$$\text{έχουμε } \int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ζοξέει } \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}} \text{ ζοξέει } \sqrt{\frac{3}{5}} x + C.$$

412. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η παράσταση $\frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$ έχει περίπου την μορφή της $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, συνεπώς

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{8}x)^2 + (\sqrt{7})^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{d(\sqrt{8}x)}{\sqrt{(\sqrt{8}x)^2 + (\sqrt{7})^2}} = (\text{βλ. τύπο 14}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \ln \left| \sqrt{8}x + \sqrt{8x^2+7} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| 2\sqrt{2}x + \sqrt{8x^2+7} \right| + C$$

$$413. \int \frac{dx}{\mu\eta x}$$

Λύση

$$\int \frac{dx}{\mu\eta x} = \int \frac{dx}{2\mu\frac{x}{2} \epsilon\omega\frac{x}{2}} = (\text{διαίρουμε αριθμητή και παρονομαστή με } \epsilon\omega^2 \frac{x}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{dx}{\epsilon\omega^2 \frac{x}{2}}}{\epsilon\phi \frac{x}{2}} \quad \text{και επειδή } \frac{dx}{\epsilon\omega^2 \frac{x}{2}} = 2 d\left(\epsilon\phi \frac{x}{2}\right), \text{ έχουμε}$$

$$\int \frac{dx}{\mu\eta x} = \int \frac{d\left(\epsilon\phi \frac{x}{2}\right)}{\epsilon\phi \frac{x}{2}} = \ln \left| \epsilon\phi \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$414. \int \epsilon\phi x dx$$

Λύση

$$\int \epsilon\phi x dx = \int \frac{\mu\eta x}{\epsilon\omega x} dx = - \int \frac{d(\epsilon\omega x)}{\epsilon\omega x} = - \ln |\epsilon\omega x| + C.$$

$$415. \int \mu\eta^3 \acute{\alpha} x \epsilon\omega \acute{\alpha} x dx$$

Λύση

$$\text{Επειδή } \epsilon\omega \acute{\alpha} x dx = \frac{1}{6} d(\mu\eta \acute{\alpha} x), \text{ θα έχουμε}$$

$$\int \mu\eta^3 \acute{\alpha} x \epsilon\omega \acute{\alpha} x dx = \frac{1}{6} \int (\mu\eta \acute{\alpha} x)^3 d(\mu\eta \acute{\alpha} x) = \frac{1}{6} \frac{(\mu\eta \acute{\alpha} x)^4}{4} = \frac{\mu\eta^4 \acute{\alpha} x}{24} + C$$

$$416. \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

Λύση

$$\text{Έχουμε: } \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{(x+a) - (x-a)}{2a(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}. \quad \text{Τότε}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a} \int \frac{d(x-a)}{x-a} -$$

$$- \frac{1}{2a} \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \frac{1}{2a} \ln |x-a| - \frac{1}{2a} \ln |x+a| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$417. \int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2}$$

Λύση

Επειδή $x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4)$ έχουμε

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 - (\sqrt{2})^2} = (\text{πρόσθ. άρ. άκυβ.}) = \frac{1}{4 \cdot 2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right|$$

418. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αντικατάστασης να βρεις το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } \sqrt{2-x} = t \Rightarrow 2-x = t^2 \Rightarrow x^2 = (2-t^2)^2$$

$$d(2-x) = d(t^2) \Rightarrow -dx = 2t dt, \text{ οπότε}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = - \int \frac{4-4t^2+t^4}{t} 2t dt = -2 \int (4-4t^2+t^4) dt =$$

$$= -2 \left(4t - 4 \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) = -\frac{2}{15} t (60 - 20t^2 + 3t^4) + C =$$

$$= -\frac{2}{15} \sqrt{2-x} [60 - 20(2-x) + 3(2-x)^2] + C = -\frac{2}{15} \sqrt{2-x} (32 + 8x - 3x^2) + C \quad (x < 2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

Με την μέθοδο της αντικατάστασης να υπολογισθούν τα ολοκλήρωμα:

$$419. \int 6 \sin^5 x \sqrt{\mu x} dx$$

$$420. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$421. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$$

$$422. \int \mu x \frac{x}{2} dx$$

$$423. \int \frac{dx}{6 \sin^2 4x}$$

$$424. \int (e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}) dx$$

$$425. \int \sqrt{1-x^2} x dx$$

$$426. \int x^3 (1-2x^4)^3 dx$$

$$427. \int \mu x (2-3x) dx$$

$$428. \int x (x^2+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$429. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}}$$

$$430. \int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx$$

4.3.2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

$$I. \quad J_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + \gamma}$$

Μετασχηματίζουμε τον παρονομαστή στη μορφή αθροίσματος ή διαφοράς τετραγώνων:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + \gamma &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\gamma}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\gamma}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε } \pm k^2 = \frac{\gamma}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{και } x + \frac{b}{2a} = t \Rightarrow dx = dt, \text{ τότε}$$

$$J_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} \quad \text{που αφού φέρουμε στον παρονομαστή ολοκληρωμάτων (τύποι II' ή II)}$$

Παρατήρηση: Στο $\pm k^2$ το πρόσημο εκλέγεται ανάλογα με το αν η παράσταση $\frac{\gamma}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ παίρνει + ή -, δηλαδή αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ έχει μιγαδικές ή πραγματικές ρίζες.

$$II. \quad J_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + \gamma} dx$$

Μετασχηματίζουμε την συνάρτηση ως εξής:

$$J_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + \gamma} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right)}{ax^2 + bx + \gamma} dx \Rightarrow$$

$$J_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + \gamma} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + \gamma}$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα κάνουμε την υπεκατάσταση

$$ax^2 + bx + \gamma = t \Rightarrow (2ax + b) dx = dt$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το J_1 που το υπολογίζουμε, άρα

$$J_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{dt}{t} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) J_1 = \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + \gamma| + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) J_1$$

$$III \quad J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + \gamma}}$$

Εργαζόμενοι όπως και για τα J_1, J_2 ανάλογα με το πρόσημο του a , έχουμε

$$J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}} = \begin{cases} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k^2}}, & \text{αν } a > 0 \\ \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}, & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα είναι στον πίνακα (13' και 14)

$$\text{IV} \quad J_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}} dx$$

Μετασχηματίζοντας την συνάρτηση όπως και στο J_2 έχουμε:

$$\begin{aligned} J_4 &= \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + \beta) + (B - \frac{A\beta}{2a})}{\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + \beta}{\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}} dx + (B - \frac{A\beta}{2a}) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}} = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + \beta x + \gamma)}{\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}} + (B - \frac{A\beta}{2a}) J_3 \Rightarrow \\ J_4 &= \frac{A}{2a} \cdot 2 \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} + (B - \frac{A\beta}{2a}) J_3 \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Δεν είναι απαραίτητη η απομνημόνευση των τελικών τύπων των ολοκληρωμάτων J_1, J_2, J_3, J_4 , αρκεί η γνώση της μεθόδου.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$431. I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

Λύση

$$\text{Έχουμε } 2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10) = 2((x+2)^2 + (10-4)) = 2((x+2)^2 + 6)$$

$$\text{Τότε } I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση: $x+2 = t \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

$$432. I = \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$$

$$\text{Έχουμε } 2+3x-x^2 = -(x^2-3x-2) = -\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2\right] =$$

$$= -\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right] = \frac{17}{4} - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{οπότε}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right) - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} \quad \text{Κάνουμε την αντικατάσταση } x-\frac{3}{2} = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{17}{4} - t^2}} = (\text{τύπος 13}') = \text{εοξμη} \frac{t}{\sqrt{\frac{17}{4}}} + C \Rightarrow$$

$$I = \text{εοξμη} \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{17}} + C = \text{εοξμη} \frac{2x-3}{\sqrt{17}} + C.$$

$$433. I = \int \frac{x dx}{x^4 - 4x^2 + 3}$$

Λύση

κάνουμε την αντικατάσταση $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$ οπότε

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 3}$$

$$\text{Τώρα } t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 4 + 3 = (t-2)^2 - 1 \text{ και}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t-2)^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 - 1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2-1}{t-2+1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-3}{t-1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-3}{x^2-1} \right| + C.$$

$$434. I = \int \frac{6wx}{\mu\eta^2 x - 6\mu\eta x + 12} dx$$

Λύση

Κατ' αρχήν κάνουμε την αντικατάσταση: $\mu\eta x = t \Rightarrow dt = 6\eta x dx$

$$\text{οπότε } I = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 12}$$

$$\text{Γράβουμε } t^2 - 6t + 12 = (t-3)^2 - 9 + 12 = (t-3)^2 + 3 \text{ οπότε}$$

$$I = \int \frac{dt}{(t-3)^2 + 3} = \int \frac{d(t-3)}{(t-3)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{εοξεδ} \frac{t-3}{\sqrt{3}} + C \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{εοξεδ} \left(\frac{\mu\eta x - 3}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

4.3.3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΡΗ

Ας εξετάσουμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x)$ και $\varphi(x)$. Γνωρίζουμε ότι το διαφορικό του γινομένου $f(x) \cdot \varphi(x)$ φτάνει από τον τύπο:

$$d(f(x) \cdot \varphi(x)) = d f(x) \cdot \varphi(x) + d \varphi(x) \cdot f(x) \quad (1)$$

Ολοκληρώνοντας την (1) παίρνουμε:

$$\int d(f(x) \cdot \varphi(x)) = f(x) \cdot \varphi(x) = \int \varphi(x) d f(x) + \int f(x) d \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\int f(x) d \varphi(x) = f(x) \varphi(x) - \int \varphi(x) d f(x) \quad (2)$$

Ο τύπος (2) ονομάζεται τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη. Ο (2)

γράφεται επίσης και στην μορφή:

$$\int f(x) \varphi'(x) dx = f(x) \varphi(x) - \int \varphi(x) f'(x) dx \quad (2')$$

Ο τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη εφαρμόζεται σε παραστάσεις που μπορούν να εμφανισθούν υπό μορφήν γινομένου δύο παραγόμενων $f(x)$ και $d \varphi(x)$ έτσι ώστε η αναζήτηση της συναρτήσεως $\varphi(x)$ με βάση το διαφορικό της και ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \varphi(x) d f(x)$ να αποτελούν πρόβλημα ευκολώτερο από την ολοκλήρωση του αρχικού ολοκληρώματος $\int f(x) d \varphi(x)$. Στις παρακάτω λυμένες ασκήσεις θα δειξουμε πώς παρουσιάζεται κάθε φορά η παράσταση του ολοκληρώματος στην μορφή του γινομένου των $f(x)$ και $d \varphi(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$435. I = \int x 2^{-x} dx$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } x = f(x) \Rightarrow d f(x) = dx$$

$$\text{και } 2^{-x} dx = d \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} \text{ Άρα}$$

$$I = \int x 2^{-x} dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} dx = -\frac{2^{-x} \cdot x}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln^2 2} + C \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{\ln^2 2} (x \ln 2 + 1) 2^{-x} + C$$

$$436. I = \int e^x \epsilon \omega x dx$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } f(x) = e^x \Rightarrow df(x) = e^x dx$$

$$\text{και } d\varphi(x) = \epsilon \omega x dx \Rightarrow \varphi(x) = \mu \eta x. \text{ Τότε}$$

$$I = \int e^x \epsilon \omega x dx = e^x \mu \eta x - \int e^x \mu \eta x dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του β' μέλους, χρειαζόμαστε τον ίδιο τρόπο, δηλαδή θέτουμε:

$$f(x) = e^x \Rightarrow df(x) = e^x dx$$

$$\text{και } d\varphi(x) = \mu \eta x dx \Rightarrow \varphi(x) = -\sigma \upsilon \eta x. \text{ Τότε}$$

$$I = e^x \mu \eta x - (-e^x \epsilon \omega x + \int e^x \epsilon \omega x dx) \Rightarrow$$

$$I = e^x \mu \eta x + e^x \epsilon \omega x - \int e^x \epsilon \omega x dx. \text{ Η εξίσωση όμως αυξεί}$$

είναι για εξίσωση με άγνωστο το ολοκλήρωμα $\int e^x \epsilon \omega x dx$.

Χωρίζουμε λοιπόν χυμωσούς από αγνώστους:

$$2 \int e^x \epsilon \omega x dx = e^x (\mu \eta x + \epsilon \omega x) \Rightarrow$$

$$I = \frac{e^x}{2} (\mu \eta x + \epsilon \omega x) + C$$

$$437. I = \int \ln x dx$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } f(x) = \ln x \Rightarrow df(x) = \frac{dx}{x}$$

$$d\varphi(x) = dx \Rightarrow \varphi(x) = x. \text{ Τότε}$$

$$I = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

$$438. I = \int x \epsilon \omega \zeta x dx$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } f(x) = x \Rightarrow df(x) = x$$

$$\text{και } d\varphi(x) = \epsilon \omega \zeta x dx \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{3} \mu \eta \zeta x. \text{ Τότε}$$

$$I = \frac{1}{3} x \mu \eta \zeta x - \frac{1}{3 \cdot 3} \int \mu \eta \zeta x d(3x) = \frac{1}{3} x \mu \eta \zeta x - \frac{1}{9} \epsilon \omega \zeta x + C.$$

$$439. I = \int x \mu \kappa \epsilon \omega x dx$$

Λύση

Κάνουμε τον μεσαεικμασιμό $\mu \kappa \epsilon \omega x = \frac{1}{2} \mu \kappa 2x$, οπότε

$$I = \frac{1}{2} \int x \mu \kappa 2x dx$$

Θέτουμε: $\mu \kappa 2x dx = d\phi(x) \Rightarrow \phi(x) = -\frac{1}{2} \epsilon \omega 2x$

$x = f(x) \Rightarrow dx = df(x)$ τότε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int x \mu \kappa 2x dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \epsilon \omega 2x + \frac{1}{2} \int \epsilon \omega 2x dx \right) = \\ &= -\frac{1}{4} x \epsilon \omega 2x + \frac{1}{8} \mu \kappa 2x + C \end{aligned}$$

$$440. I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$

Λύση

$$\text{Έχουμε } I = \int \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \int \frac{x \cdot x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} =$$

$$= a^2 \ell n |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + \int x d(\sqrt{a^2 + x^2}).$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$I = a^2 \ell n |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + x \sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} (a^2 \ell n |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + x \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

$$441. I = \int \frac{x^2 dx}{(x+1)^2}$$

Λύση

$$I = \int \frac{x \cdot x dx}{(x+1)^2} = (\text{εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη}) =$$

$$= \int x d\left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right) = -\frac{1}{2(x^2+1)} x + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \alpha \xi \epsilon \phi x + C$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα :

$$442. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$$

$$443. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$$

$$444. \int \frac{5x + 2}{x^2 + 2x + 10} dx$$

$$445. \int \frac{x dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$$

$$446. \int x \ln x dx$$

$$447. \int x \arctan x dx$$

$$448. \int \frac{x dx}{e^x}$$

$$449. \int \frac{x dx}{\ln^2 x}$$

$$450. \int 3^x \cos x dx$$

$$451. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$452. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$453. \int x^2 e^x \arctan x dx$$

4.4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Είναι γνωστό ότι κάθε ρητή συνάρτηση είναι δυνατό να παρουσιασθεί υπό μορφή κλάσματος:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m}{B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_m} \quad (1)$$

Χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα των παρακάτω ελληλογημιών, υποθέτουμε ότι τα πολυώνυμα $F(x)$ και $f(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες.

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή ($m < n$), τότε το κλάσμα θα λέγεται κανονικό. Στην αντίθετη περίπτωση ($m \geq n$) θα το λέμε μη κανονικό.

Αν το κλάσμα είναι μη κανονικό, τότε διαιρώντας αριθμητή διά του παρονομαστή έχουμε:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{P(x)}{f(x)} \quad (2)$$

όπου $M(x)$ είναι ακεραία συνάρτηση (πολυώνυμο) και $\frac{P(x)}{f(x)}$ είναι κανονικό κλάσμα.

Έστω ότι δίνονται για ολοκλήρωση η ρητή συνάρτηση $\frac{F(x)}{f(x)}$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να ολοκληρώσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx \quad (3)$$

Τότε από την (2) παίρνουμε

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \int M(x) dx + \int \frac{P(x)}{f(x)} dx \quad (4)$$

Η ολοκλήρωση του πολυωνύμου είναι γνωστή, συνεπώς πρέπει να εξετάσουμε την ολοκλήρωση του κανονικού κλάσματος $\frac{P(x)}{f(x)}$.

Αν ο παρονομαστής $f(x)$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ως εξής:

$$f(x) = (x-a)^k (x-\beta)^l \dots (x^2 + Ax + B)^r (x^2 + \gamma x + \delta)^s \quad (5)$$

όπου τα διώνυμα εδώ και τα τριώνυμα είναι διακεκριμένα και τα τριώνυμα δεν έχουν πραγματικές ρίζες, τότε:

$$\begin{aligned}
 \frac{P(x)}{f(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\
 &+ \frac{B_1}{x-p} + \frac{B_2}{(x-p)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-p)^l} + \dots \\
 &\dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+Ax+B} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+Ax+B)^2} + \dots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+Ax+B)^r} + \dots + \\
 &\dots + \frac{R_1x+L_1}{x^2+\gamma x+\delta} + \frac{R_2x+L_2}{(x^2+\gamma x+\delta)^2} + \dots + \frac{R_sx+L_s}{(x^2+\gamma x+\delta)^s} + \dots, \quad (6)
 \end{aligned}$$

όπου $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, R_1, L_1, R_2, L_2, \dots$ είναι πραγματικοί αριθμοί που ονομάζονται προσδιοριστέοι συντελεστές και απαιτείται ο προσδιορισμός τους.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών, τα δύο μέλη της ταυτότητας (6) τα φέρουμε σε κοινό παρονομαστή και μετά εξισώνουμε τους συντελεστές των ισοβάθμων όρων της μεταβλητής x .

Έτσι παίρνουμε σύστημα γραμμικό ως προς τους προσδιοριστέους συντελεστές. Μπορούμε επίσης να πάρουμε σύστημα εξισώσεων των συντελεστών, αν και στα δύο μέλη της ταυτότητας (6) θέσουμε κατάλληλες τιμές της μεταβλητής x . Μπορεί να γίνει και συνδυασμός των δύο τρόπων ερώπων.

Έτσι καταλήγουμε στα εξής:

Αν έχουμε να ολοκληρώσουμε ρητό κλάσμα μη κανονικό τότε με την διαίρεση αριθμητή δια παρονομαστή, ξεχωρίζουμε ένα ακέραιο πολυώνυμο, που η ολοκλήρωσή του είναι χυδαία και ένα κανονικό κλάσμα που το εμφανίζουμε με την μορφή (6) και κατόπιν το ολοκληρώνουμε.

Από τον τύπο (6) βγαίνει ότι η ολοκλήρωση του ρητού κλάσματος ανάγεται στην ολοκλήρωση των πάρα κάτω παραστάσεων του θα τις ονομάζουμε απλούστατα κλάσματα:

$$I \quad \frac{A}{x-a}$$

$$II \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ και } k \geq 2)$$

$$\text{III} \quad \frac{Ax+B}{ax^2+px+q} \quad \left(\begin{array}{l} p^2 - 4q < 0, \text{ δηλ. απαρονομαστί έχει ρίζες μιγαδικές} \\ 4 \end{array} \right)$$

$$\text{IV} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+px+q)^k} \quad ((k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 2), \text{ οι ρίζες του παρονομαστί μιγαδικές})$$

Είναι γνωστό δε ότι:

$$\text{I} \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C.$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int (x-a)^{-k} d(x-a) + A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{A}{(-k)(x-a)^{k-1}} + C \end{aligned}$$

$$\text{III} \quad \int \frac{Ax+B}{ax^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$454. \quad I = \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}$$

Λύση

Το κλάσμα $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ είναι κανονικό χ^2 αυτό σύμφωνα με τον τύπο (6)

$$\text{εχουμε: } \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + \Gamma(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + \Gamma(x-1)$$

Προσδιορισμός συντελεστών:

Η τελευταία ισότητα χράφεται:

$$x = (A+B)x^2 + (2A+\Gamma)x + (A-B-\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$0 \cdot x^2 + x \cdot 1 + 0 = (A+B)x^2 + (2A+\Gamma)x + (A-B-\Gamma)$$

$$\text{Η ισότητα αυτή ισχύει αν: } \begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+\Gamma=1 \\ A-B-\Gamma=0 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα από παίρνουμε: $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $\Gamma = \frac{1}{2}$

$$\text{Συνεπώς: } I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C \Rightarrow$$

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2(x+1)} + C$$

$$455. I = \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Λύση

Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραχόντων:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

$$\text{Τότε έχουμε: } \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$1 = A(x-1)^2 + B(x-1)x + \Gamma x$$

Επειδή εδώ οι ρίζες του πολυωνύμου $x^3 - 2x^2 + x$ είναι 1 και 0,

θέτουμε $x=0$ οπότε $A=1$, θέτουμε $x=1$ οπότε $1 = \Gamma \cdot 1 \Rightarrow \Gamma=1$

Μπορούμε τώρα να θέσουμε π.χ. $x=2$ οπότε

$$1 = A + 2B + 2\Gamma \Rightarrow 2B = 1 - A - 2\Gamma = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow B = -1. \text{ Άρα}$$

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

$$456. I = \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Λύση

Το κλάσμα $\frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}$ είναι μη κανονικό, γι' αυτό εκτελούμε την διαίρεση $(x^2 - 5x + 9) : (x^2 - 5x + 6)$ από την οποία έχουμε:

$$(x^2 - 5x + 9) = (x^2 - 5x + 6) \cdot 1 + 3$$

$$\text{ή } \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{Συνεπώς: } I = \int dx + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = x + 3 \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

Έχουμε τώρα:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow 1 = A(x-3) + B(x-2)$$

Θέτουμε $x=3$ παίρνουμε $1 = B(3-2) \Rightarrow B=1$

Θέτουμε $x=2$, παίρνουμε $1 = A(2-3) \Rightarrow A=-1$. Άρα

$$I = x + 3 \left(-\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} \right) = x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.$$

457. $I = \int \frac{x^2+2}{x^4+4} dx$

Λύση

Επειδή $x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, έχουμε

$$\frac{x^2+2}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+2x+2}$$

(Τα τριώνυμα x^2-2x+2 και x^2+2x+2 έχουν μιγαδικές ρίζες

διότι $\Delta = 4-8 < 0$)

$$\Leftrightarrow x^2+2 = (Ax+B)(x^2+2x+2) + (\Gamma x+\Delta)(x^2-2x+2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβάθμων x , έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} x^3: 0 = A + \Gamma \\ x^2: 1 = B + 2A - 2\Gamma + \Delta \\ x: 0 = 2B + 2A + 2\Gamma - 2\Delta \\ x^0: 2 = 2B + 2\Delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} A=0, \Gamma=0 \\ B=\frac{1}{2}, \Delta=\frac{1}{2} \end{array}$$

οπότε έχουμε:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2+2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2} \left[\arctan(x-1) + \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \right] + C.$$

458. Ποιά συνθήκη πρέπει να εκπληρώνει το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} dx \text{ για να είναι ρητή συνάρτηση;}$$

Λύση

Έχουμε: $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x^3} + \frac{\Delta}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}$

συνολώς:

$$\begin{aligned}
 I &= A \int \frac{dx}{x} + B \int \frac{dx}{x^2} + \Gamma \int \frac{dx}{x^3} + \Delta \int \frac{dx}{x-1} + E \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \\
 &= A \ln|x| - \frac{B}{x} - \frac{\Gamma}{2x^2} + \Delta \ln|x-1| - \frac{E}{x-1} + C.
 \end{aligned}$$

Για να είναι το ολοκλήρωμα κλειστή συνάρτηση πρέπει οι συντελεστές A και Δ να είναι ίσοι με μηδέν δηλαδή $A=0$ και $\Delta=0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Τότε } \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \Gamma(x-1)^2 + B(x-1)^2 x + E x^3 \Leftrightarrow \\
 \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \Gamma(x^2 - 2x + 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + E x^3
 \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβάθμων x , έχουμε:

$$x^3: \quad 0 = B + E$$

$$x^2: \quad \alpha = \Gamma - 2B$$

$$x: \quad \beta = -2\Gamma + B$$

$$x^0: \quad \gamma = \Gamma$$

Αντικαθιστώντας από το σύστημα αυτό τους συντελεστές B, E

πρобиεουμε την συνθήκη: $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$

Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωμα

$$459. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$$

$$460. \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$461. \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx$$

$$462. \int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x + 16} dx$$

$$463. \int \frac{x dx}{x^3 - 1}$$

$$464. \int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$465. \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}$$

$$466. \int \frac{x dx}{x^8 - 1}$$

$$467. \int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx$$

$$468. \int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx$$

4.5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η ολοκλήρωση μιας άρρητης συνάρτησης δεν είναι πάντα δυνατή.

Θα εξετάσουμε μερικές άρρητες συναρτήσεις που η ολοκλήρωσή τους με την βοήθεια κατάλληλων αντικαταστάσεων, ανάγεται στην ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων:

$$I. \int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots) dx, \text{ όπου } R \text{ μία ρητή συνάρτηση}$$

των μεταβλητών της. Έστω k ο κοινός παρονομαστής των κλασμάτων $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$. Τότε η αντικατάσταση

$$x = t^k \Rightarrow dx = k t^{k-1} dt$$

μεταβάλλει το δεδομένο ολοκλήρωμα, σε ολοκλήρωμα με ρητή συνάρτηση ως προς την μεταβλητή t .

Τα ολοκληρώματα με γενικώτερη μορφή:

$$\int R(x, (ax+\beta)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+\beta)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots) dx \quad \eta$$

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right] dx$$

με τις αντίστοιχες αντικαταστάσεις:

$$ax+\beta = t^k \quad \eta \quad \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta} = t^k \quad \text{επίσης μεταβάλλονται σε}$$

ολοκληρώματα με ρητές συναρτήσεις.

$$II. \int R(x, \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}) dx$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται με την βοήθεια τριών αντικαταστάσεων του Euler:

$$1. \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = t \pm x\sqrt{a}, \text{ αν } a > 0$$

$$2. \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = tx \pm \sqrt{\gamma}, \text{ αν } \gamma > 0$$

$$3. \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = (x-p_1)t, \text{ αν } ax^2+\beta x+\gamma = a(x-p_1)(x-p_2),$$

όπου p_1 μία πραγματική ρίζα.

$$\text{III} \int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+\gamma}} dx, \text{ όπου } P_m(x) \text{ πολυώνυμο } m \text{ βαθμού}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+\gamma}} = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+\gamma} + k \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+\gamma}} \quad (1)$$

όπου $P_{m-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m-1$ με προσδιοριστέους συντελεστές και k επίσης προσδιοριστέος συντελεστής.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών παραγωγίζουμε την ισότητα (1) και την πολλαπλασιάζουμε με την ρίζα $\sqrt{ax^2+bx+\gamma}$. Ύστερα από αυτό εξισώνουμε τους συντελεστές των ισοβάθμων όρων του x .

$$\text{IV.} \int x^m (a+\beta x^n)^p dx, \text{ όπου } m, n, p \text{ ρηχοί αριθμοί.}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ανάγεται σε ολοκλήρωμα με ρηχή συνάρτηση με τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

1) Όταν p είναι ακέραιος θετικός αριθμός, τότε η ανάλυση με τον τύπο του Νεύτωνα κάνει δυνατή την ολοκλήρωση. Αν $p < 0$ τότε θέτουμε $x = t^k$, όπου k είναι κοινός παρονομαστής των κλάσμάτων m και n .

2) Όταν $\frac{m+1}{n}$ είναι ακέραιος αριθμός, τότε κάνουμε την αντικατάσταση $a+\beta x^n = t^h$ όπου h παρονομαστής του κλάσματος p .

3) Όταν $\frac{m+1}{n} + p$ είναι ακέραιος, τότε θέτουμε $a+\beta x^n = t^h x^n$, όπου h είναι παρονομαστής του κλάσματος p .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκλήρωματα

$$469. \text{ I} = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

Λύση

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου I γ'αυτό κάνουμε την ανεικατάσταση:

$$3x+1=t^3 \Rightarrow x=\frac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx=\frac{3t^2}{3}dt=t^2dt$$

$$\text{Οπότε έχουμε: } I = \int \frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t} t^2 dt = \frac{1}{3} \int t(t^3+2) dt = \frac{1}{3} \int (t^4+2t) dt =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{t^5}{5} + t^2 \right) = \frac{1}{15} t^2 (t^3+5) + C = \frac{1}{15} \sqrt[3]{(3x+1)^2} [(3x+1)+5] \Leftrightarrow$$

$$I = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} = \frac{1}{5} (x+2) \sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$$

$$47c. I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Λύση

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου II. Έχουμε $a=1 > 0$

και γ'αυτό κάνουμε την ανεικατάσταση: $\sqrt{x^2+2x+2} = t-x \Leftrightarrow$

$$x^2+2x+2 = t^2-2tx+x^2 \Leftrightarrow 2x+2t = t^2-2 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{t^2-2}{2(1+t)} \Leftrightarrow dx = \frac{2t(1+t) - (t^2-2)}{2(1+t)^2} dt = \frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2} dt$$

$$\text{Επίσης } 1+\sqrt{x^2+2x+2} = 1+t-x = 1+t - \frac{t^2-2}{2(1+t)} = \frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}$$

$$\text{Οπότε παίρνουμε: } I = \int \frac{\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2} dt}{\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)^2}} = \int \frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2} dt$$

Το κλάσμα τώρα αναλύεται ως εξής:

$$\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t+2} + \frac{\Gamma}{(t+2)^2} \Leftrightarrow$$

$$t^2+2t+2 = A(t+2)^2 + B(1+t)(t+2) + \Gamma(1+t)$$

Έχοντας διαδικασικά $t=-1, t=-2, t=0$ παίρνουμε $A=1, B=0, \Gamma=-2$

$$\text{Άρα: } I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dt}{1+t} - 2 \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|1+t| + 2 \frac{1}{t+2} + C \Leftrightarrow$$

$$I = \ln|x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + \frac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C.$$

$$471. I = \int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Λύση

$$\text{Έχουμε } I = \int \frac{x^4 a^2 - x^6}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου III, όπου

$$x^4 a^2 - x^6 = P_6(x), P_5(x) = Ax^5 + Bx^4 + \Gamma x^3 + \Delta x^2 + Ex + F$$

Τότε έχουμε:

$$\int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx = (Ax^5 + Bx^4 + \Gamma x^3 + \Delta x^2 + Ex + F) \sqrt{a^2 - x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Παραγωγίζοντας τις ισότητες αυτή παίρνουμε:

$$\frac{x^4 a^2 - x^6}{\sqrt{a^2 - x^2}} = (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3\Gamma x^2 + 2\Delta x + E) \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} (Ax^5 + Bx^4 + \Gamma x^3 + \Delta x^2 + Ex + F) + \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Leftrightarrow$$

$$x^4 a^2 - x^6 = (a^2 - x^2)(5Ax^4 + 4Bx^3 + 3\Gamma x^2 + 2\Delta x + E) - x(Ax^5 + Bx^4 + \Gamma x^3 + \Delta x^2 + Ex + F) + \lambda$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβάθμων όρων του x , έχουμε:

$$x^6: -1 = -6A$$

$$x^2: 0 = 3a^2\Gamma - 2E$$

$$x^5: 0 = -5B$$

$$x: 0 = 2\Delta a^2 - F$$

$$x^4: a^2 = 5a^2 A - 4\Gamma$$

$$x^0: 0 = E a^2 + \lambda$$

$$x^3: 0 = 4B a^2 - 3\Delta$$

Από το σύστημα αυτό βρίσκουμε:

$$A = \frac{1}{6}, B = 0, \Gamma = -\frac{a^2}{24}, \Delta = 0, E = -\frac{a^4}{16}, F = 0, \lambda = \frac{a^6}{16}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left(\frac{x^5}{6} - \frac{a^2 x^3}{24} - \frac{a^4 x}{16} \right) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^6}{16} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= \left(\frac{x^5}{6} - \frac{a^2 x^3}{24} - \frac{a^4 x}{16} \right) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^6}{16} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

$$472. I = \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3}}$$

Λύση

$$\text{Γράφουμε } I = \int x^{-1} (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου IV, όπου $m=-1$, $n=3$, $p=-\frac{1}{2}$

Το p είναι κλάσμα, συνεπώς ελέγχουμε τον αριθμό $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{3} = 0$

άρα είναι αβέβαιος και στην περίπτωση αυτή, κάνουμε την αντικατάσταση:

$$1+x^3 = t^2 \iff x = (t^2-1)^{\frac{1}{3}} \iff$$

$$dx = \frac{1}{3}(t^2-1)^{-\frac{2}{3}} 2t dt \quad \text{οπότε:}$$

$$I = \int x^{-1}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \int (t^2-1)^{-\frac{1}{3}} (t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}(t^2-1)^{-\frac{2}{3}} 2t dt =$$

$$= \frac{2}{3} \int (t^2-1)^{-1} dt = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{2}{3 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1} \right| + C.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωμα

$$473. I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$$

$$474. I = \int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$475. I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$476. I = \int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}} dx$$

$$477. I = \int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

$$478. I = \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1} + 1}$$

479. Ποιά συνθήκη πρέπει να εκπληρώνει το ολοκλήρωμα $I =$

$$= \int \frac{a_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1}{\sqrt{a x^2 + \beta x + \gamma}} dx \quad \text{ώστε να αποτελεί αλγεβρική συνάρτηση;}$$

4.6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων με την βοήθεια αντεκατάστα-
σεών ανάμεσα συνήθως είναι ολοκλήρωση ρητών ή αρρήτων συναρτήσεων.

Γι' αυτό τις ταξινομούμε κατά τύπους (ελάσεις).

I. Έστω το ολοκλήρωμα εις μορφή:

$$\int R(\mu\eta x, \epsilon\omega x) dx$$

Η αντεκατάσταση $\epsilon\phi \frac{x}{2} = t$ ($-\pi < x < \pi$) μετατρέπει πάντα το ολοκλή-
ρωμα αυτό σε ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως. Πράγματι

$$\mu\eta x = \frac{2\mu\eta \frac{x}{2} \epsilon\omega \frac{x}{2}}{\mu\eta^2 \frac{x}{2} + \epsilon\omega^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\epsilon\phi \frac{x}{2}}{1 + \epsilon\phi^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\epsilon\omega x = \frac{\epsilon\omega^2 \frac{x}{2} - \mu\eta^2 \frac{x}{2}}{\epsilon\omega^2 \frac{x}{2} + \mu\eta^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \epsilon\phi^2 \frac{x}{2}}{1 + \epsilon\phi^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ακόμη από την $\epsilon\phi \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \epsilon\alpha\zeta\epsilon\phi t \Rightarrow$

$$x = 2\epsilon\alpha\zeta\epsilon\phi t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ οπότε το ολοκλήρωμα γρά-}$$

φεται:
$$\int R(\mu\eta x, \epsilon\omega x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

Επειδή όμως με την αντεκατάσταση αυτή καταλήγουμε συχνά σε
δύσκολες ρητές συναρτήσεις, γι' αυτό προσείνονται και άλλες αντεκαταστάσεις.

I₁. Αν το ολοκλήρωμα έχει την μορφή $\int R(\mu\eta x) \epsilon\omega x dx$, τότε
κάνουμε την αντεκατάσταση:

$$\mu\eta x = t \Rightarrow \epsilon\omega x dx = dt \text{ και}$$

$$\int R(\mu\eta x) \epsilon\omega x dx = \int R(t) dt$$

I₂. Αν το ολοκλήρωμα έχει την μορφή $\int R(\epsilon\omega x) \mu\eta x dx$,
τότε κάνουμε την αντεκατάσταση:

$$\epsilon\omega x = t \Rightarrow -\mu\eta x dx = dt \text{ και}$$

$$\int R(\epsilon\omega x) \mu\eta x dx = -\int R(t) dt$$

I_3 . Αν η συνάρτηση του ολοκληρώματος εξαρτάται μόνο από την $\epsilon\phi x$ (ή $\delta\phi x$), τότε η αντικατάσταση $\epsilon\phi x = t$ (ή $\delta\phi x = t$) \Rightarrow

$$x = \tau\delta\epsilon\phi t \text{ (ή } x = \tau\delta\phi\delta t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \text{ (ή } -\frac{dt}{1+t^2})$$

μετατρέπει το ολοκλήρωμα από το ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως:

$$\int R(\epsilon\phi x) dx = \int R(t) \frac{dt^2}{1+t^2} \text{ (ή } \int R(\delta\phi x) dx = -\int R(t) \frac{dt}{1+t^2})$$

I_4 . Αν η συνάρτηση $R(\mu\eta x, \epsilon\omega x)$ περιέχει $\mu\eta x$ και $\epsilon\omega x$ με άρτιους εκθέτες, δηλαδή $R(-\mu\eta x, -\epsilon\omega x) = R(\mu\eta x, \epsilon\omega x)$, τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση: $\epsilon\phi x = t$ οπότε:

$$\epsilon\omega^2 x = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\mu\eta^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1+\epsilon\phi^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{και}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

II. Εξετάζουμε τώρα το ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int \eta\mu^m x \epsilon\omega^n x dx, \text{ όπου } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

II₁. m, n είναι τέτοιοι αριθμοί ώστε κατάχλιζον ο ένας απ' αυτούς να είναι περιττός: Έστω $n = 2p+1$, τότε

$$\int \eta\mu^m x \epsilon\omega^{2p+1} x dx = \int \eta\mu^m x \epsilon\omega^{2p} x \epsilon\omega x dx = \int \eta\mu^m x (1-\mu\eta^2 x)^p d(\mu\eta x)$$

Κάνουμε την αντικατάσταση: $\mu\eta x = t \Rightarrow d(\mu\eta x) = dt$

$$\int \eta\mu^m x (1-\mu\eta^2 x)^p d(\mu\eta x) = \int t^m (1-t^2)^p dt$$

II₂ m, n είναι μη αρνητικοί και άρτιοι αριθμοί:

Θέτουμε $m = 2p, n = 2q$ και επειδή

$$\mu\eta^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \epsilon\omega 2x, \quad \epsilon\omega^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \epsilon\omega 2x, \text{ έχουμε}$$

$$\int \eta\mu^m x \epsilon\omega^n x dx = \int \eta\mu^{2p} x \epsilon\omega^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \epsilon\omega 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \epsilon\omega 2x\right)^q dx$$

Εκτελώντας κατόπιν τις πράξεις θα πάρουμε ολοκληρώματα γνωστών τύπων.

III. Θα εξετάσουμε εέλος τα ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \epsilon\omega kx \epsilon\omega nx dx, \int \mu\eta kx \epsilon\omega nx dx, \int \mu\eta kx \mu\eta nx dx$$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με σω βοήθεια των γνωστών

τύπων: $\epsilon\omega kx \epsilon\omega nx = \frac{1}{2} [\epsilon\omega (k+n)x + \epsilon\omega (k-n)x] \quad (k \neq n)$

$$\mu\eta kx \epsilon\omega nx = \frac{1}{2} [\mu\eta (k+n)x + \mu\eta (k-n)x] \quad (k \neq n)$$

$$\mu\eta kx \mu\eta nx = \frac{1}{2} [-\epsilon\omega (k+n)x + \epsilon\omega (k-n)x] \quad (k \neq n)$$

$$\begin{aligned} \text{π.χ. } \int \epsilon\omega kx \epsilon\omega nx dx &= \frac{1}{2} \int [\epsilon\omega (k+n)x + \epsilon\omega (k-n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{\epsilon\omega (k+n)x d(k+n)x}{k+n} + \frac{1}{k-n} \int \epsilon\omega (k-n)x d(k-n)x \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \epsilon\omega kx \epsilon\omega nx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+n} \mu\eta (k+n)x + \frac{1}{k-n} \mu\eta (k-n) \right] + C.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

480. $I = \int \frac{dx}{2\mu\eta x - \epsilon\omega nx}$

Λύση

Το ολοκλήρωμα είναι του τύπου I και γ' αυτό εφαρμόζουμε την αντικατάσταση:

$$\epsilon\phi \frac{x}{2} = z \Rightarrow x = 2\epsilon\phi z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

Επίσης $\mu\eta x = \frac{2z}{1+z^2}, \epsilon\omega nx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

Τότε έχουμε:

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{4z - 1 + z^2} = 2 \int \frac{dz}{(z+2)^2 - 5} =$$

$$= 2 \int \frac{d(z+2)}{(z+2)^2 - 5} = \frac{2}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{z+2-\sqrt{5}}{z+2+\sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2-\sqrt{5} + \epsilon\phi \frac{x}{2}}{2+\sqrt{5} + \epsilon\phi \frac{x}{2}} \right| + C.$$

$$481. I = \int \frac{\eta \mu x}{(1 - \epsilon \eta x)^2} dx$$

Λύση

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι του τύπου Π_2 διότι

$$\eta \mu dx = -d(\epsilon \eta x)$$

ευνενώς θα κάνουμε την αντικατάσταση: $\epsilon \eta x = t \Leftrightarrow -\eta \mu x dx = dt$

Οπότε:

$$I = - \int \frac{dt}{(1-t)^2} = \int (1-t)^{-2} d(1-t) = \frac{(1-t)^{-1}}{-1} + C \Leftrightarrow$$

$$I = - \frac{1}{1-t} + C = - \frac{1}{1 - \epsilon \eta x} + C$$

$$482. I = \int \frac{1 + \epsilon \phi x}{1 - \epsilon \phi x} dx$$

Λύση

Πρόκειται για ολοκλήρωμα του τύπου I_3 γ'αυτό κάνουμετην αντικατάσταση: $\epsilon \phi x = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{\epsilon \phi} \arctan t \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Οπότε έχουμε:

$$I = \int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)} dt$$

Εφαρμόζουμε κατά την όπως στα ολοκλήρωματα ρητών συναρτήσεων:

$$\frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+\Gamma}{1+t^2} \Leftrightarrow$$

$$1+t = A(1+t^2) + (1-t)(Bt+\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$1+t = t^2(A-B) + t(B-\Gamma) + A+\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} t^2: 0 = A-B \\ t^1: 1 = B-\Gamma \\ t^0: 1 = A+\Gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} A-B=0 \\ A+B=2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{array}} \right\} A=1, B=1, \Gamma=0$$

οπότε έχουμε:

$$I = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{t dt}{1+t^2} = - \int \frac{d(1-t)}{1-t} + \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} =$$

$$= -\ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \ln \frac{\sqrt{1+t^2}}{|1-t|} + C = \ln \frac{\sqrt{1+\epsilon \phi^2 x}}{|1-\epsilon \phi x|} + C$$

$$\text{ή } I = -\ln|\epsilon \eta x - \eta \mu x| + C.$$

$$483. I = \int \frac{dx}{3\mu^2 x^2 + 5\epsilon\omega^2 x}$$

Λύση

Πρόκειται για ολοκλήρωμα του τύπου I_4 διότι η συνάρτηση

$$R(-\mu x, -\epsilon\omega x) = \frac{1}{3(-\mu x)^2 + 5(-\epsilon\omega x)} = \frac{1}{3\mu^2 x^2 + 5\epsilon\omega x}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση: $\epsilon\phi x = t \Leftrightarrow x = \frac{t}{\epsilon\phi} \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{\epsilon\phi}$

$$\epsilon\omega^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \mu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \text{οπότε}$$

$$I = \int \frac{\frac{dt}{\epsilon\phi}}{\frac{3t^2}{1+t^2} + \frac{5}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}t)}{(\sqrt{3}t)^2 + (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \epsilon \cdot x \right) + C$$

$$484. I = \int \mu^2 x \epsilon\omega^2 x^2 dx$$

Λύση

Οι εκθέτες είναι άρτιοι (τύπος Π_2), γι' αυτό έχουμε:

$$I = \int \frac{1 - \epsilon\omega^2 x}{2} \cdot \frac{1 + \epsilon\omega^2 x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1 - \epsilon\omega^2 x^2) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \mu^2 x^2 dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \epsilon\omega^2 x}{2} dx = \frac{1}{8} \left[\int dx - \frac{1}{4} \int \epsilon\omega^2 x d(x) \right] \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \mu^2 x^2 + C.$$

$$485. I = \int \frac{\epsilon\omega^2 x^6}{\mu^6 x} dx$$

Λύση

Οι εκθέτες είναι άρτιοι εκ των οποίων ο ένας αρνητικός (τύπος Π_3), γι' αυτό κάνουμε την αντικατάσταση:

$$\epsilon\phi x = t \Leftrightarrow x = \frac{t}{\epsilon\phi} \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{\epsilon\phi}$$

Έχουμε ακόμη

$$\epsilon\omega^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \mu^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2} \Leftrightarrow \mu^6 x = \frac{t^6}{(1 + t^2)^3}$$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{\frac{1}{1+t^2} \cdot dt}{\frac{t^6}{(1+t^2)^3}} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^6} = \int \frac{dt}{t^6} + \int \frac{dt}{t^4} =$$

$$= -\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{5\epsilon\phi^5 x} - \frac{1}{3\epsilon\phi^3 x} + C$$

$$486. I = \int \frac{dx}{\epsilon\omega^4 x}$$

Λύση

$$\Gamma\rho\acute{\alpha}\beta\omicron\upsilon\mu\epsilon \frac{1}{\epsilon\omega^4 x} = \frac{1}{\epsilon\omega^2 x} \cdot \frac{1}{\epsilon\omega^2 x} = (1+\epsilon\phi^2 x)d(\epsilon\phi x)$$

και τότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int (1+\epsilon\phi^2 x)d(\epsilon\phi x) = \int d(\epsilon\phi x) + \int \epsilon\phi^2 x d(\epsilon\phi x) =$$

$$= \epsilon\phi x + \frac{\epsilon\phi^3 x}{3} + C.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$487. I = \int \frac{dx}{5+4\epsilon\omega ax}$$

$$488. I = \int \frac{\epsilon\omega ax dx}{\sqrt{k^2 + \eta\mu^2 ax}}$$

$$489. I = \int \frac{\epsilon\phi x dx}{1-\sigma\phi^2 x}$$

$$490. I = \int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^3 x dx$$

$$491. I = \int \eta\mu^3 x \epsilon\omega 5x dx$$

$$492. I = \int \epsilon\omega \frac{x}{2} \epsilon\omega \frac{x}{3} dx$$

$$493. I = \int \frac{dx}{\epsilon\omega^3 x}$$

5. ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

5.1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Θεωρούμε τω συνεκτί συνάρτησι $f(x)$ στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

Αν: α) χωρίσουμε το διάστημα $[a, \beta]$ με οποιοδήποτε τρόπο σε n τμήματα

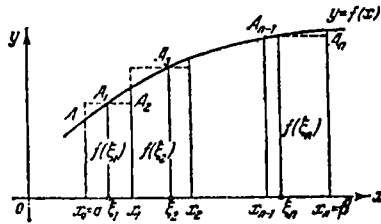
με τα σημεία $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = \beta$ ($x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$)

και συμβολίσουμε με:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

β) Εκλέξουμε σε κάθε τμήμα από ένα τυχαίο σημείο $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$,

δηλαδή $\xi_i \in \Delta x_i$ όπως δείχνει το σχήμα:



γ) Υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησως $f(x)$ στα ελεγχμένα σημεία και

δ) Σχηματίσουμε το άθροισμα:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

τότε αυτό αναγράφεται άθροισμα ολοκληρώσεως (άθροισμα Riemann) της συνάρτησως $f(x)$.

Χωρίζοντας το διάστημα $[a, \beta]$ σε n τμήματα με διάφορους τρόπους και εκλέγοντας ε'αυτά από ένα σημείο ξ_i επίσης σε διάφορες θέσεις, μπορούμε, για τω δεδομένη συνάρτησι $f(x)$ και για το δεδομένο διάστημα $[a, \beta]$, να σχηματίσουμε απερανόητο διαφορετικῶν αθροισμάτων ολοκληρώσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν για κάθε διαμερίσι (χωρισμό) του διαστήματος $[a, \beta]$ τέτοια ώστε $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) και για κάθε επιλογή σημείων ξ_i από το διάστημα Δx_i το άθροισμα ολοκληρώσεως

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

είναι δε ένα και το αυτό όριο σ , τότε το όριο αυτό ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησως $f(x)$ στο διάστημα $[a, \beta]$ και συμβολίζεται $\int_a^\beta f(x) dx$

Έτσι από τον ορισμό έχουμε:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει, τότε η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Οι αριθμοί a και β ονομάζονται κάτω και άνω όρια ολοκλήρωσως. Το διάστημα $[a, \beta]$ ονομάζεται διάστημα ολοκλήρωσως και το x ονομάζεται μεταβλητή ολοκλήρωσως.

Κάθε συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό.

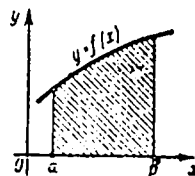
Η τιμή του ορισμένου ολοκλήρωματος εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησως $f(x)$ και από τα όρια ολοκλήρωσως, γ' αυτό:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta f(t) dt = \dots = \int_a^\beta f(y) dy$$

Αν $f(x) \geq 0$ τότε το ολοκλήρωμα

$$s = \int_a^\beta f(x) dx$$

παρουσιάζει από γεωμετρικής απόψεως, το εμβαδόν καμπυλογράμμου εραπεζίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ και τον άξονα Ox .



52. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

$$1. \int_a^\beta f(x) dx = - \int_\beta^a f(x) dx$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3. \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx \text{ όπου } [a, \beta] = [a, \gamma] \cup [\gamma, \beta]$$

$$4. \int_{\alpha}^{\beta} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_k(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x) dx \pm \dots \pm \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx$$

$$5. \int_{\alpha}^{\beta} \mu f(x) dx = \mu \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \text{ όπου } \mu = \text{εσταθερά.}$$

6. Εκτίμηση ορισμένου ολοκληρώματος

Αν $m \leq f(x) \leq M$ στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε αληθεύουν οι ανισώσεις:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

όπου m και M είναι το ελάχιστο και το μέγιστο αντίστοιχα της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a, \beta]$.

7. Θεώρημα μέσης τιμής.

Αν $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ τότε υπάρχει τέτοιο σημείο ξ : ξ ($a \leq \xi \leq \beta$) ώστε να αληθεύει η σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

8. Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση των ορίων του

Η συνάρτηση $\Phi(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του άνω ορίου του.

Αν $f(x)$ είναι συνεχής, τότε

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x f(t) dt = f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

5.3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

5.3.1. ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛ. ΡΩΜΑ

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και $F(x)$ είναι μία οποιαδήποτε παράγωγος αυτής ($F'(x) = f(x)$) τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα ικανοποιεί την σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha) \quad (1)$$

Παρατήρηση: Βλέπουμε κατ' αρχήν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι αριθμός και όχι συνάρτηση όπως το αόριστο ολοκλήρωμα. Για να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα πρέπει να φρούκτε την παράχουδα (πίνακας αορίσεων ολοκλήρωμαίων) και μεαά να υπολογίουμε την διαφορά αυτών εα δύο όρια άνωφκάω

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

494. Με την φούδα του ορισμού να υπολογιόαί το $\int_0^1 x^2 dx$

Λύση

Η συνάρτηση είναι $f(x) = x^2$ και το διάστημα $[0, 1]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[0, 1]$ σε n ίσα τμήματα. Τότε:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$$

Σε κάθε διάστημα Δx_i εκλέχουμε από ένα σημείο ξ_i ως εξής:

$$\xi_0 = x_0 = 0, \xi_1 = x_1 = \frac{1}{n}, \xi_2 = x_2 = \frac{2}{n}, \dots, \xi_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \xi_n = x_n = 1$$

Υπολογίζουμε τις τιμές της συναρτήσεωε σε α σημεία αυαά:

$$f(0) = 0, f(\xi_1) = \frac{1}{n^2}, f(\xi_2) = \frac{4}{n^2}, \dots, f(\xi_{n-1}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, f(\xi_n) = 1$$

Τότε το άθροισμα ολοκλήρωσεωε είναι:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{1} = \frac{1}{3}$$

Και τελικά λοιπόν έχουμε: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Να υπολογίσεα τα ολοκλήρωμαα

495. $I = \int_0^1 x^3 dx$

Λύση

Η συνάρτηση είναι $f(x) = x^3$, συνεπώς μία από τις παραγώγους αυτής είναι $F(x) = \frac{x^4}{4}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) έχουμε:

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (2^4 - 1) = \frac{1}{4} (16 - 1) = \frac{15}{4}$$

$$496. I = \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$I = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} [(2^2)^{\frac{3}{2}} - 1] = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}$$

$$497. I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 4x dx$$

Λύση

Επειδή $\eta\mu 4x dx = -\frac{1}{4} d(\epsilon\omega 4x)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\epsilon\omega 4x) = -\frac{1}{4} \epsilon\omega 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4} (\epsilon\omega 4 \frac{\pi}{4} - \epsilon\omega 0) = \\ &= -\frac{1}{4} (\epsilon\omega \pi - \epsilon\omega 0) = -\frac{1}{4} (-1 - 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

498. Να βρεις τη μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε:

$$f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad \text{όπου } \alpha \leq \xi \leq \beta.$$

$$\text{συνεπώς } f(\xi) = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = \frac{1}{\pi} (-\epsilon\omega x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (1 + 1) = \frac{2}{\pi}$$

499. Να βρεις τη μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Όπως και στην προηγούμενη άσκηση έχουμε: } f(\xi) &= \frac{1}{1+1} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \tau\omicron\xi\epsilon\phi x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (\tau\omicron\xi\epsilon\phi 1 - \tau\omicron\xi\epsilon\phi(-1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5.32. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ (Η ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ).

Αν η συνάρτηση $x = \phi(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. Η $\phi(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και έχει ε' ωςό συνεχή παράγωγο $\phi'(t)$.
2. Όταν η παράμετρος t μεταβάλλεται στο διάστημα $[t_1, t_2]$, η συνάρτηση $x = \phi(t)$ μεταβάλλεται στο διάστημα $[a, \beta]$.
3. $\phi(t_1) = a$ και $\phi(t_2) = \beta$.

τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[a, \beta]$ αληθεύει ο τύπος αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

Συνήθως αντί της αντικατάστασης $x = \phi(t)$ εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $t = \psi(x)$. Στην περίπτωση αυτή τα όρια t_1 και t_2 προσδιορίζονται άμεσα από τις ισότητες $t_1 = \psi(a)$ και $t_2 = \psi(\beta)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να υπολογισθούν τα ολοκλήρωμα

500. $I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2 \Leftrightarrow dx = 2t dt$. Αν $x=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{0} = t_1 \Leftrightarrow t_1 = 0$, αν $x=4 \Leftrightarrow \sqrt{4} = t_2 \Leftrightarrow t_2 = 2$, συνεπώς

$$I = \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{1+t} \right) \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \left(t \Big|_0^2 - \ln|1+t| \Big|_0^2 \right) = 2(2-0 - \ln 3 + \ln 1) = 4 - 2 \ln 3$$

501. $I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

Λύση

Θέτουμε $x = a \sin t \Leftrightarrow dx = a \cos t dt$.

$$\text{Αν } x=0 \Leftrightarrow 0 = a\mu\pi t \Leftrightarrow t_1=0, \text{ αν } x=a \Leftrightarrow a = a\mu\pi t \Leftrightarrow \mu\pi t=1 \Leftrightarrow t_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ επομένως}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \mu\pi^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \mu\pi^2 t} \cdot a \cos t dt \Leftrightarrow$$

$$I = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu\pi^2 t \cos^2 t dt \quad (|\cos t| = \cos t \text{ [} 0, \frac{\pi}{2} \text{]}) \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu\pi^2 2t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{a^4}{4} \left(\frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8} \mu\pi 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{a^4 \pi}{16}$$

$$502. I = \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} &\text{Κάνουμε την αντικατάσταση: } 1+3x^8 = z^2 \Leftrightarrow 24x^7 dx = 2z dz \\ &\Leftrightarrow x^7 dx = \frac{z dz}{12}, \text{ και γράβουμε } x^{15} dx = x^7 \cdot x^8 dx = x^7 dx \frac{z^3 - 1}{3} \Leftrightarrow \\ &x^{15} dx = \frac{z(z^2-1)}{36} \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι έχουμε } (x=0 \Leftrightarrow t_1=1, x=1 \Leftrightarrow t_2=2)$$

$$I = \frac{1}{36} \int_1^2 z^2(z^2-1) dz = \frac{1}{36} \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{29}{270}$$

$$503. I = \int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } \frac{1}{1+x} = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{t} - 1 \Leftrightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}, x^2+1 = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2.$$

$$\text{Όταν } x=0 \Rightarrow t_1=1, \text{ όταν } x=0,75 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{7}. \text{ Οπότε}$$

$$I = \int_1^{\frac{4}{7}} \frac{-\frac{dt}{t^2} \cdot t^2}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} = \int_1^{\frac{4}{7}} \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\frac{4}{7}} \frac{d(t - \frac{1}{2})}{\sqrt{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \left(t - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}} \right| \Big|_1^{\frac{4}{7}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{14} + \sqrt{\left(\frac{1}{14}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$$

5.3.3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΡΗ

Αν $f(x)$ και $\phi(x)$ έχουν συνεχείς παραγώγους στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f(x) \phi'(x) dx = f(x) \cdot \phi(x) \Big|_a^\beta - \int_a^\beta \phi(x) f'(x) dx \quad \eta$$

συνομοίως

$$\int_a^\beta f(x) d\phi(x) = f(x) \cdot \phi(x) - \int_a^\beta \phi(x) df(x) \quad (1)$$

Η μέθοδος αυτή ολοκλήρωσης ονομάζεται και παραγοντική ολοκλήρωση

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογισθούν τα ολοκλήρωμα:

$$504. I = \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } f(x) = \ln(1+x) \Leftrightarrow df(x) = \frac{dx}{1+x}$$

$$\text{και } \phi(x) = x \Leftrightarrow d\phi(x) = dx$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$I = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{dx}{1+x} = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x} dx =$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \ln 2 - x \Big|_0^1 + \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1$$

$$505. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \epsilon \omega x dx$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } f(x) = x \Leftrightarrow df(x) = dx \quad \text{και}$$

$$\phi(x) = \pi x \Leftrightarrow \sin x dx = d\phi(x)$$

Βάσει του τύπου (1) θα έχουμε:

$$I = x \pi x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x dx = \frac{\pi}{2} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$506. I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \pi \sqrt{x} dx$$

Λύση

Κατ' αρχήν κάνουμε την αντικατάσταση $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2$

$$dx = 2t dt. \text{ Αν } x=0 \Rightarrow t_1=0, \text{ αν } x=\frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t_2=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Έτσι παίρνουμε: } I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi t t dt$$

Εφαρμόζουμε τώρα ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$f(t) = t \Leftrightarrow df(t) = dt$$

$$\pi t dt = d\phi(t) \Leftrightarrow \phi(t) = -\cos t$$

και έχουμε:

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi t \cdot dt = 2 \left(-t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \right) \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \pi t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$507. I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$$

Λύση

$$\text{Θέτουμε } \ln(1+x^2) = f(x) \Leftrightarrow df(x) = \frac{2x dx}{1+x^2}$$

$$x dx = d\phi(x) \Leftrightarrow \phi(x) = \frac{x^2}{2}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη:

$$I = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1} \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε: } \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} \text{ δηλαδή}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

(2)

Από τις (1) και (2) έχουμε τελικά:

$$\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Νά υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$508. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$509. \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^2}$$

$$510. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(1+5x)^3}$$

$$511. \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\omega^5 \mu 2x dx$$

$$512. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$513. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$$

$$514. \int_{-7}^7 \frac{x^4 \mu x}{x^6+2}$$

$$515. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 6\omega x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$$

$$516. \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

$$517. \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

$$518. \int_0^{\pi} e^x \mu x dx$$

$$519. \int_0^1 x^2 e^{x^2-\sqrt{x}} dx.$$

$$520. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\mu^2 x}$$

$$521. \int_0^1 x e^{-x} dx$$

522. Να αποδείξετε τον αναδρομικό τύπο:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\omega^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\omega^{n-2} x dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

5.4. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

I. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΟΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ όπου $a < \beta < +\infty$ δηλαδή στο διάστημα $[a, +\infty)$ τότε

θεωρούμε (πλ. εκύμα αριστερά):

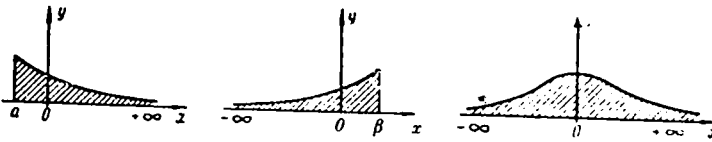
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx \quad (1)$$

Αν το όριο του δευτέρου μέλους της (1) υπάρχει, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ λέμε ότι συγκλίνει, αν δε το παραπάνω όριο δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει (αποκλίνει)

Ομοίως ορίζουμε τα ολοκληρώματα (πλ. ε.χ. μεσαίο και δεξιά)

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (2)$$

και
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (3)$$



Κριτήρια συγκλίσεως:

Το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

α) συγκλίνει αν $|f(x)| \leq \frac{M}{x^m}$ και $m > 1$

β) αποκλίνει αν $f(x) \geq \frac{M}{x^m}$ και $m \leq 1$, $m = \text{const.}$

II. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΠΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(a, \beta]$ και στο σημείο $x = a$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ τότε θεωρούμε

$$\int_a^{\beta} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{\beta} f(x) dx \quad (\varepsilon > 0) \quad (4)$$

(πλ. εκύμα αριστερά)

Αν το όριο στο δεύτερο μέλος της (4) υπάρχει, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ λέμε ότι συγκλίνει, αν δέ το παραπάνω όριο δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει (αποκλίνει).

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta-\varepsilon} f(x) dx \quad (5)$$

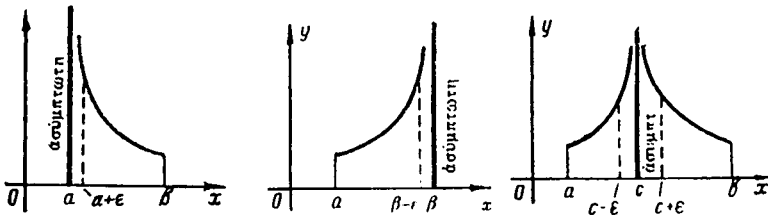
όταν $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \infty$ (πλ. μεσαίο σχήμα)

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, c) \cup (c, \beta]$ και

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ τότε θεωρούμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{\beta} f(x) dx \quad (6)$$

(πλ. δεξιο σχήμα)



Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ συγκλίνει όταν και τα δύο όρια του δεύτερου μέλους της ισότητας (6) υπάρχουν. Δεν συγκλίνει αν τουλάχιστον ένα από τα δύο αυτά όρια δεν υπάρχει.

Κριτήρια συγκλίσεως

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ασυνεχής στο ένα από τα άκρα του διαστήματος $[a, \beta]$ π.χ. στο σημείο $x = a$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$), τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx:$$

α') συγκλίνει αν $|f(x)| \leq \frac{M}{(x-a)^m}$ και $m < 1$

β') δεν συγκλίνει αν $f(x) \geq \frac{M}{(x-a)^m}$ και $m > 1$ (m, M θεαδρές)

Αν $f(x)$ είναι ασυνεχής στο σημείο $x = c$ του διαστήματος $[a, \beta]$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)$ το διασπάμε σε άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων από το a έως το c και από το c έως το β και εφαρμόζουμε στο καθένα ολοκλήρωμα τα παραπάνω κριτήρια.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$523. I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$I = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^{\beta} \right) = 1 - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} = 1$$

άρα το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει.

$$524. I = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (2) έχουμε.

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_{\alpha}^0 \right) = 0 - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \alpha = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Παρατήρηση: Στο άκρο του διαστήματος $[a, \beta]$ που η συνάρτηση $f(x)$ δεν απειρίζεται βρίσκουμε μια τιμή της $f(x)$ στο σημείο αυτό. Ενώ στο άλλο άκρο που η συνάρτηση απειρίζεται βρίσκουμε το όριο της $F(x)$, όπου $F(x)$ είναι η παράγουσα της $f(x)$

$$525. I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$$

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο (3) έχουμε:

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{\alpha}^0 \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_0^{\beta} \right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{\alpha+2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{\beta+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογίσετε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$526. \int_1^{+\infty} \frac{x^b}{(1+x^2)^2} dx = I \quad (b < 1)$$

$$527. \int_0^{+\infty} \frac{x^b}{x^2+1} dx = I \quad (b > 1)$$

5.5. ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

Αν στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ η συνάρτηση $f(x) \geq 0$, τότε, όπως είναι γνωστό, το εμβαδόν του καμπυλογράμμου τραπεζίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ (ε.χ. α) υπολογίζεται από τον τύπο:

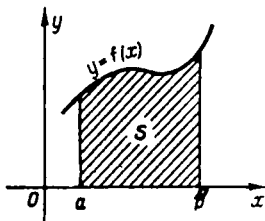
$$S = \int_a^\beta f(x) dx \quad (1)$$

Αν $f(x) \leq 0$ στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x) dx \leq 0$. Το εμβαδόν στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται από τον τύπο

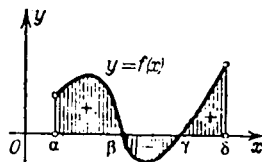
$$S = \left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \quad (2)$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ αλλάζει πρόσημο μερικές φορές στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε στον υπολογισμό του εμβαδού παίρνουμε το άθροισμα των απολύτων τιμών των ολοκληρωμάτων που είναι αρνητικά (ε.χ. β'), δηλαδή:

$$S = \int_a^p f(x) dx + \left| \int_p^q f(x) dx \right| + \int_q^s f(x) dx \quad (3)$$



Σχ. α



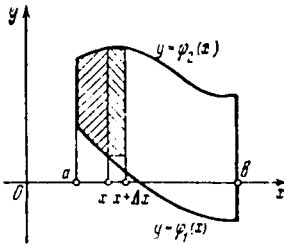
Σχ. β'

Αν το επίπεδο σχήμα (χωρίο) περιορίζεται από δύο συνεχείς συναρτήσεις $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$ και από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ τότε (ε.χ. γ) ($\phi_2(x) \geq \phi_1(x)$):

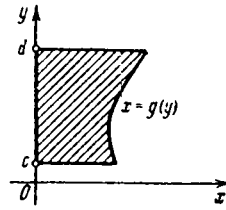
$$S = \int_a^\beta [\phi_2(x) - \phi_1(x)] dx \quad (4)$$

Αν το σχήμα περιορίζεται από την καμπύλη $x = g(y)$, τον άξονα Oy και τις ευθείες $y = c$, $y = d$ (ε.χ. δ) τότε έχουμε:

$$S = \int_c^d g(y) dy \quad (5)$$



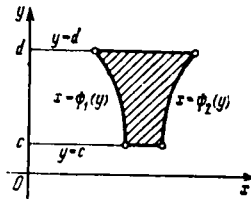
Σx. ζ'



Σx. δ'

Κατ' αναλογία με τον τύπο (4) μπορούμε να γράψουμε (εκ. ε'):

$$S = \int_c^d [\psi_2(y) - \psi_1(y)] dy \quad (6)$$



Σx. ε'

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

528. Να υπολογισθεί το εμβαδό του εκκλίματος που περιορίζεται από μια παραβολή $y = x^2$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$. (βλ. εκκλίμα).

Λύση

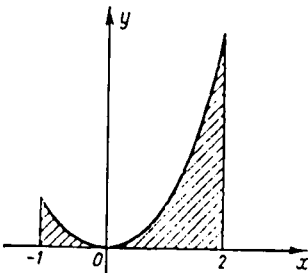
Για να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός επιπέδου εκκλίματος:

- α') Σχεδιάσουμε το εκκλίμα β') Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης και γ') Ελέγχουμε έναν από τους τύπους (4) έως (6).

Τα όρια ολοκλήρωσης εδώ είναι $a = -1$, $b = 2$.

Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

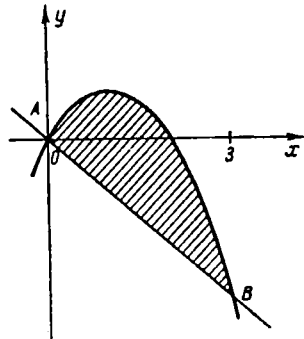
$$S = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3} (2^3 - (-1)^3) = \frac{9}{3} = 3$$



529. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής που περιορίζεται από την παραβολή $y = 2x - x^2$ και την ευθεία $y = -x$.

Λύση

Έχουμε $y = x(2-x)$ που είναι παραβολή, και όπου για $x=0, y=0$, για $x=2, y=0$ και για $x=1, y=1$.



Για να βρούμε τα όρια της ολοκλήρωσης λύνουμε το σύστημα:

$$y = -x$$

$$y = 2x - x^2 \Leftrightarrow 2x - x^2 = -x \Leftrightarrow$$

$$x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } x=3$$

ευνενώς $a=0$ και $b=3$. Έχουμε

$$\text{λοιπόν σύμφωνα με τον τύπο (4): } S' = \int_0^3 [2x - x^2 - (-x)] dx =$$

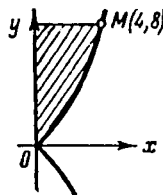
$$= \int_0^3 (3x - x^2) dx = 3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

530. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κωβίου που ορίζεται από την $y^2 = x^3$, και τις ευθείες $y=8$ και $x=0$.

Λύση

Η κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης γίνεται με την βοήθεια του πίνακα:

y	x
0	0
1	1
$2\sqrt{2}$	2
$3\sqrt{3}$	3
8	4



Τα όρια ολοκλήρωσης είναι $y=0$ και $y=8$, ευνενώς θα κρυφιστούμε τον τύπο (5):

$$y^2 = x^3 \Leftrightarrow x = y^{\frac{2}{3}} \text{ και } S' = \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \Big|_0^8 = \frac{3}{5} (2^3)^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot 2^5 = \frac{3 \cdot 32}{5} = \frac{96}{5}.$$

531. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y^2 = 2x+1$ και $x-y-1=0$

Λύση

Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της υπερβολής $y^2 = 2x+1$ και της ευθείας $x-y-1=0$

$$\Delta(y) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης ως προς την μεσαρμένη y :

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 2x+1 \\ x = y+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y^2 = 2y+2+1 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = 3$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον τύπο (6) έχουμε:

$$S = \int_{-1}^3 \left(y+1 - \frac{y^2-1}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2} \right) \Big|_{-1}^3 \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} (9-1) + \frac{3}{2} [3-(-1)] - \frac{1}{6} (27-(-1)^3) = 4+6-\frac{14}{3} = \frac{16}{3}$$

532. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της ελλείψεως $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

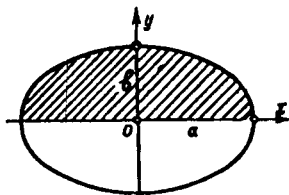
Λύση

$$\text{Από την } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Τα όρια ολοκλήρωσης είναι: $x = -a, x = a$

Έτσι έχουμε (λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα Ox)

$$S = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$



Επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό και ως προς τον άξονα Oy μπορούμε να γράψουμε:

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ αν' όπου τελικά βρίσκουμε } S = \pi a b. (\text{Αν } a=b \text{ έχουμε κύκλο εμβαδού } S = \pi a^2)$$

533. Να βρεθεί το εμβαδό του κυρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=e^x$, $y=e^{-x}$ και $x=1$.

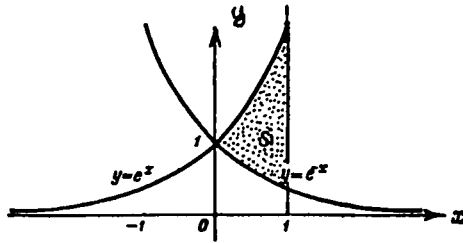
Λύση

Τα όρια ολοκλήρωσης είναι $x=0$ και $x=1$.

Έχουμε τότε:

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx =$$

$$= e^x \Big|_0^1 + e^{-x} \Big|_0^1 = e - 1 + e^{-1} - 1 = e + e^{-1} - 2.$$



534. Να βρεθεί το εμβαδό της περιοχής που περιορίζεται από τις καμπύλες $y = \frac{1}{1+x^2}$ και $y = \frac{x^2}{2}$

Λύση

Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης από το σύστημα

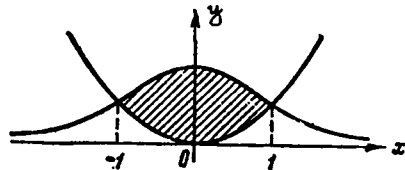
$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{1+x^2} \\ y = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ή } x_2 = +1$$

Επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό

ως προς τον άξονα ΟΥ παίρνουμε:

$$S = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= 2 \left(\arctan x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 \right) = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυρίου που ορίζεται από:

535. Την υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και την ευθεία $x=2a$

536. Δύο κλάδους της καμπύλης $(y-x)^2 = x^3$ και την ευθεία $x=1$

537. Τις καμπύλες $y=x+1$, $y=\sin x$ και $y=0$

538. Την καμπύλη $y^2 = x^3 - x^2$ και την ευθεία $x=2$.

539. Τις καμπύλες $y=4x^2$, $y=\frac{x^2}{9}$ και την ευθεία $y=2$

540. Να βρεθεί το εμβαδό της θλιπιάς που σχηματίζει η καμπύλη $y^2 = x(x-1)^2$

56. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΚΟΥΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Έστω ότι η καμπύλη στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων α-
ρίζεται από την εξίσωση $y = f(x)$ ή $x = F(y)$. Τότε το δια-
φορικό του μήκους τόξου εκφράζεται από τους τύπους:

$$dl = \sqrt{1+y'^2} dx \quad \text{ή} \quad dl = \sqrt{1+x'^2} dy \quad (1)$$

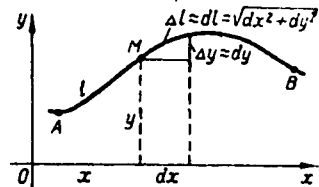
και το μήκος του τόξου \widehat{AB} ριζεται

από τον τύπο:

$$L_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} dl \quad (2)$$

$$\text{ή} \quad L = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+y'^2} dx, \quad L = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{1+x'^2} dy \quad (3)$$

$$(x_A < x_B, y_A < y_B)$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

541. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y^2 = x^3$, από
 $x=0$ μέχρι $x=1$ ($y \geq 0$)

Λύση

Εφαρμόζοντας τον πρώτο τύπο της (3) έχουμε:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx$$

Βρίσκουμε την παράγωγο της εξίσωσης

$$(y^2)' = (x^3)' \Rightarrow 2yy' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y} \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2x^{3/2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\text{και τότε έχουμε: } L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) \rightarrow$$

$$L = \frac{4}{9} \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right)$$

542. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$
που περιορίζεται από τα σημεία $y=1$ και $y=2$

Λύση

Είναι προσιμώτερο να εφαρμόσουμε τον τύπο :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+x'^2} dy$$

Έτσι έχουμε:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$1+x'^2 = \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 1 + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{4y^2} \text{ άρα}$$

$$1+x'^2 = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right)^2 \text{ συνεπώς}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right)^2} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right) dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \ln|y| \Big|_1^2 \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{4}(4-1) + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

543. Να βρεις το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = \ln \cos x$, που περιορίζεται από τα σημεία $x=0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Λύση

$$\text{Βρίσκουμε την παράγωγο } y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

Έχουμε $1+y'^2 = 1+\tan^2 x$, άρα:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow L = \ln \frac{3\pi}{8}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

544. Να βρεθεί το μήκος της αστροειδούς $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

545. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = \ln x$ που περιορίζεται από τα σημεία $x = \frac{3}{4}$, $x = \frac{12}{5}$.

546. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y^2 = x^3$ που περιορίζεται από την ευθεία $x = \frac{4}{3}$

547. Να βρεθεί το μήκος όλης της καμπύλης $x^2 + y^2 = a^2$

548. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ που περιορίζεται από την ευθεία $x = -1$.

5.7. ΟΓΚΟΙ ΣΤΕΡΕΩΝ

Το πρόβλημα του ορισμού και της εύρεσης των όγκων είναι γενική του μορφή λύνεται με την βοήθεια των διπλών και τριπλών ολοκληρώσεων. Επειδή όμως η θεωρία αυτή ξεφεύγει των ορίων της προβλεπόμενης ύλης του παρόντος συγγραμματος το οποίο απευθύνεται σε συγκεκριμένους σπουδαστές της Γ' τάξης εκπαίδευσης, γι' αυτό θα εξετάσουμε εδώ δύο μόνο περιπτώσεις:

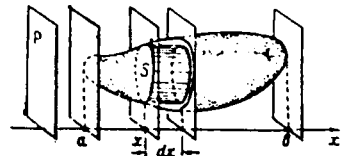
I. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΓΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΕΣ ΠΛΑΓΙΕΣ ΤΟΜΕΣ

Έστω ότι $S = S(x)$ είναι το εμβαδόν της τομής του στερεού από επίπεδο κάθετο σε άξονα Ox (Oy ή Oz),

στο σημείο x (βλ. σχήμα). Τότε ο όγκος

του στερεού αυτού υπολογίζεται από τον τύπο

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (1)$$



όπου a και b είναι οι τεταγμένες των ακραίων τομών του στερεού.

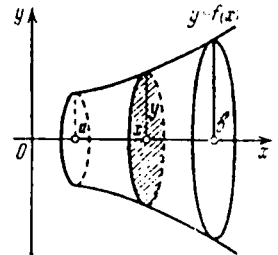
Αν οι τομές είναι κάθετες αντιστοίχα στους άξονες Oy και Oz τότε ο όγκος υπολογίζεται από τους τύπους:

$$V = \int_{y_1}^{y_2} S(y) dy \quad (2) \quad \text{και} \quad V = \int_{z_1}^{z_2} S(z) dz \quad (3)$$

II ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Έστω ότι το σχήμα που περιορίζεται από τις καμπύλες $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Ox (βλ. διπλανό σχήμα). Για να βρούμε τον τύπο, με την βοήθεια του οποίου θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1), δηλαδή τον τύπο

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

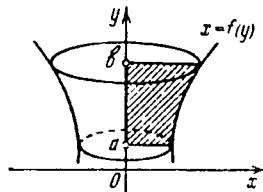


Η τομή του στερεού από το κάθετο προς τον άξονα Ox επίπεδο στο σημείο x , είναι κύκλος με ακτίνα y ($y=f(x)$) δηλαδή $S(x)=\pi y^2$

$$\text{Έτσι } V_x = \pi \int_a^p y^2 dx \quad (4)$$

Αν το σχήμα που περιορίζεται από τις καμπύλες $x=f(y)$, $y=a$, $y=b$, $x=c$ (π.δ. διπλαίο σχήμα) περιστρέφεται περί τον άξονα Oy , τότε ο όγκος V του στερεού εκ περιστροφής υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy \quad (5)$$



Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox του σχήματος που περιορίζεται από τις καμπύλες $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) και τις ευθείες $x=a$, $x=b$, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \quad (6)$$

Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα Oy του σχήματος που περιορίζεται από τις καμπύλες $x=\phi_1(y)$, $x=\phi_2(y)$ και τις ευθείες $y=c$, $y=d$, υπολογίζεται από τον τύπο:

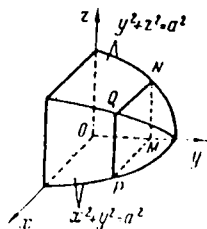
$$V_y = \pi \int_c^d [\phi_2^2(y) - \phi_1^2(y)] dy \quad (7)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

549. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που περιορίζεται από τις κυλινδρικές επιφάνειες $x^2+y^2=a^2$ και $y^2+z^2=a^2$

Λύση

Κατασκευάζουμε το $\frac{1}{8}$ του στερεού (π.δ. σχήμα). Η κομμή του κάθετου επιπέδου προς τον άξονα Oy δίνει τετράγωνο $PMNQ$. Συμμερίζοντας με $|\vec{OM}|=y$, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου $PMNQ$ είναι



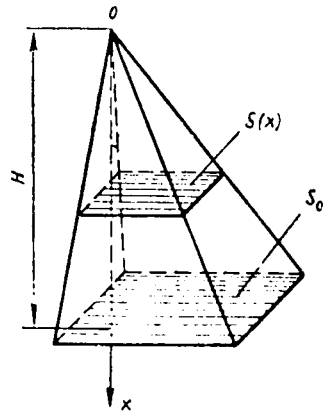
$S(y) = (PM)^2 = (\sqrt{a^2 - y^2})^2 = a^2 - y^2$ (η ακτίνα του κύκλου είναι OP και ισούται με a), όπου $0 \leq y \leq a$.

Ο όγκος όλου του στερεού, σύμφωνα με τον τύπο (2) θα δίνεται από το ολοκλήρωμα: $V = \theta \int_0^a (a^2 - y^2) dy$

550. Να βρεθεί ο όγκος της πυραμίδας που έχει βάση S_0 και ύψος H .

Λύση

Έστω ότι έχουμε μια πυραμίδα του διηλανού σχήματος. Πάνω στο ύψος της πυραμίδας κατα-
θύνουμε τον άξονα Ox . Θεωρούμε το κάθε-
το επίπεδο στον άξονα Ox που διέρχεται από
το τυχόν σημείο x και του οποίου η κοπή με
την πυραμίδα δίνει πολύγωνο, του οποίου
το εμβαδόν συμβολίζουμε με $S(x)$.



Για να βρούμε το εμβαδόν $S(x)$ κρυσίμο-

ποιήσουμε τον γνωστό τύπο από την γεωμετρία: $\frac{S(x)}{S_0} = \frac{(H-x)^2}{H^2} \Rightarrow$
 $S(x) = \frac{S_0}{H^2} (H-x)^2$, όπου S_0 είναι το εμβαδόν της βάσης.

Σύμφωνα τώρα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$V = \frac{S_0}{H^2} \int_0^H (H-x)^2 dx = -\frac{S_0}{H^2} \int_0^H (H-x) d(H-x) \Rightarrow$$

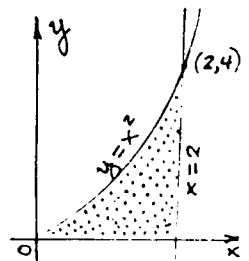
$$V = -\frac{S_0}{H^2} \cdot \frac{(H-x)^3}{3} \Big|_0^H = \frac{S_0}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} S_0 H.$$

και έτσι πήραμε τον γνωστό τύπο του όγκου της πυραμίδας.

551. Να βρεις τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται από
την περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy του σχήματος που περι-
ρίζεται από τις καμπύλες: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$

Λύση

Επειδή το σχήμα περιορίζεται από τις κα-
μπύλες $x^2 = y$ και $x = 2$ και βρέφεται περι-
τον άξονα Oy εφαρμόζουμε τον τύπο (7):



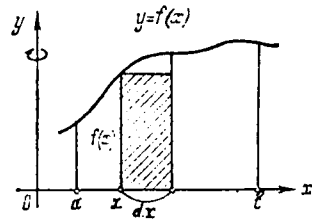
$$V_y = \pi \int_0^4 (4-y) dy \Rightarrow V_y = \pi \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \pi \left(16 - \frac{16}{2} \right) = 8\pi$$

552. Έστω ότι το καμπυλογραμμο τραπέζιο που περιορίζεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις ευθείες $x = a$, $x = b$ και τον άξονα Ox εστρέφεται γύρω από τον άξονα Oy . Να δείξεις ότι ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται υπολογίζεται από τον τύπο

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Λύση

Θεωρούμε το γραμμοσκιασμένο ορθόγωνιο του σχήματος. Με την εστρόφι του περί τον άξονα Oy παράγεται κυλινδρικό σώμα πάχους dx (το οποίο είναι η διαφορά κυλινδρων ίδιου ύψους και ακτίνας βάσεων x και $x+dx$ αντίστοιχα)



Ο όγκος του σώματος αυτού κατά προσέγγιση είναι

$$\begin{aligned} dV &= \pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) \Leftrightarrow \\ dV &= (\pi x^2 + 2\pi x dx + \pi dx^2 - \pi x^2) f(x) \Leftrightarrow \\ dV &= (2\pi x dx + \pi dx^2) f(x) \end{aligned}$$

Επειδή $(dx)^2$ είναι απειροστό ανωτέρας τάξεως ως προς το dx μπορούμε να γράψουμε: $dV = 2\pi x f(x) dx$ αν'όπου: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

553. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy του καμπυλογραμμο τραπέζιου που περιορίζεται από ένα τόξο της ημιτονοειδούς $y = \sin x$ που αντιστοιχεί σε μία ημιπερίοδο.

554. Έστω ότι το σχήμα $y = 2x - x^2$, $y = 0$ εστρέφεται περί τον άξονα Oy . Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής.

555. Να βρεθεί ο όγκος του παραγομένου στερεού εκ της περιστροφής του σχήματος $y = x^2$ και $y = 4$ περί την ευθεία $x = 2$.

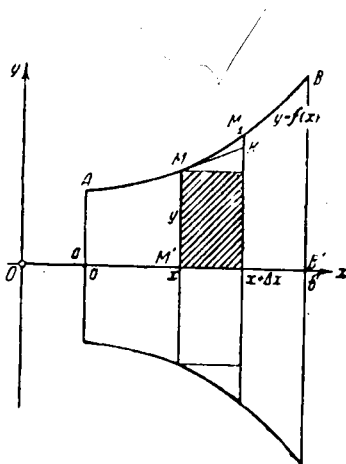
58. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗ

I. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε κάποιο σταθερό μέγεθος (γεωμετρικό ή άλλο) που ευαρεσίζεται με το κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Δεδομένα επίσης ότι το μέγεθος Q είναι μία «προσθετική ευχάριστη» του διαστήματος» και πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της που αντιστοιχεί σε όλο το διάστημα $[a, \beta]$.

Για παράδειγμα ας πάρουμε στο επίπεδο την καμπύλη $y = f(x)$, $x \in [a, \beta]$ του σχήματος.

Τότε το μήκος L της καμπύλης AB , το εμβαδό S του καμπυλογραμμίου τραπέζιου $AA'B'B$ και ο όγκος V του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τραπεζίου περί τον άξονα Ox , είναι όλα μεγέθη της παραπάνω μορφής.



Θα εξετάσουμε το «στοιχειώδες» ΔQ

του μεγέθους Q που αντιστοιχεί στο «στοιχειώδες διάστημα» $[x, x + \Delta x]$. Προσπα-

θούμε από τους όρους του προβλήματος να υπολογίσουμε το ΔQ κατά προσέγγιση, εκφράζοντας αυτό στην μορφή $q(x) \cdot \Delta x$ δηλαδή

$$\boxed{\Delta Q \approx q(x) \Delta x} \quad (1)$$

Συνήθως την (1) γράφουμε στην μορφή

$$dQ = q(x) dx \quad (2)$$

από όπου

$$\boxed{Q = \int_a^\beta q(x) dx} \quad (3)$$

Για το παράδειγμα που αναφέραμε σημειώνουμε ότι:

το στοιχειώδες τόξο MM_1 μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με

το εγχείμα της εβαλομένης ΜΚ έτσι ώστε

$$\Delta L = \sqrt{1+y^2} \Delta x = \sqrt{1+[f'(x)]^2} \Delta x$$

Την στοιχειώδη ζώνη ΔS μπορούμε να αντικαταστήσουμε με το ορθογώνιο που έχει εμβαδό $\Delta S = y \cdot \Delta x = f(x) \Delta x$

Το ΔV μπορούμε να το εκφράσουμε ως εξής:

$$\Delta V = \pi y^2 \Delta x = \pi [f(x)]^2 \Delta x.$$

Στα παραπάνω μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το εμβαδά που προέκυψε από τις αντικαταστάσεις είναι απειροεσο ανωτέρας τάξεως ως προς το Δx .

Το ότι ο τύπος (3) εκφράζει με ακρίβεια το μέγεθος Q μπορούμε να το εβιχυήσουμε και ως εξής:

Το διάστημα $[a, \beta]$ διαμερίζουμε με τα βιμεία x_1, x_2, \dots, x_{n-1} σε στοιχειώδη διαστήματα $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, \beta]$.

Επειδή σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ ή $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ αντιστοιχεί στοιχειώδες μέρος του μεγέθους Q , που κατά προέχχεν ισούται με $q(x_i) \Delta x_i$ τότε όλο το ζιτιούμενο μέγεθος Q κατά προέχχεν θα εκφρασθεί με το άθροισμα:

$$Q \approx \sum_{i=1}^n q(x_i) \Delta x_i$$

Επομένως το όριο του παραπάνω άθροίσματος θα μας δώσει το ολοκλήρωμα

$$\int_a^\beta q(x) dx$$

Έτσι το όλο πρόβλημα συνίσταται κάθε φορά εβιω εύρεση του προεχχενικού τύπου (1).

II ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ

Έστω ότι υλικό βιμείο κινείται κατά μήκος του άξονα Ox από το βιμείο $x=a$ ως το βιμείο $x=\beta$ ($a < \beta$) υπό την ενέργεια της μεταβιμικής δύναμεις $F=F(x)$ που η διεύθυνσή της βιμηληται

με την διεύθυνση κινήσεως. Για να βρούμε το έργο εξετάζουμε την στοιχειώδη μετατόπιση στο $[x, x+dx]$. Στο διάστημα αυτό θεωρούμε την δύναμη ελαστική, συνεπώς το έργο στο διάστημα αυτό είναι

$$dA = F(x) dx \quad \text{από όπου έχουμε:}$$

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (4)$$

III. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι μέσα σε υγρό βρίσκεται κατακόρυφα κάποιο επίπεδο σχήμα όπως το διπλανό. Πρέπει να βρούμε την πλήρη υδροστατική πίεση W του υγρού πάνω στο επίπεδο σχήμα $A_1B_1B_2A_2$.

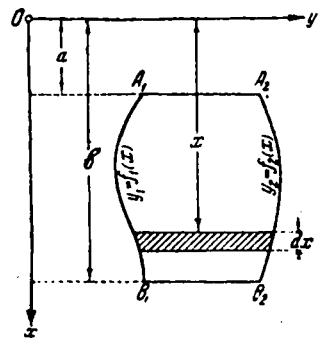
Η στοιχειώδης υδροστατική πίεση που ενεργεί στο διάστημα $[x, x+dx]$ είναι

$$dW = \gamma x (y_2 - y_1) dx, \quad \text{όπου}$$

γ είναι το ειδικό βάρος του υγρού, x είναι το βάθος της ζώνης $[x, x+dx]$ και $(y_2 - y_1) dx$

είναι το εμβαδόν της στοιχειώδους ζώνης. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ισότητα έχουμε:

$$W = \int_a^b \gamma x [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (5)$$



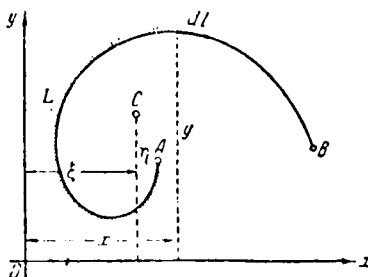
IV. ΡΟΠΕΣ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Είναι γνωστό ότι η ελαστική ροπή M του υλικού σημείου μάζας m ως προς κάποιον άξονα ισούται με το γινόμενο της μάζας m επί της απόστασης d του σημείου από τον άξονα.

Σε μια περίπτωση που έχουμε σύστημα υλικών σημείων με μάζες m_1, m_2, \dots, m_n που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τον άξονα από τον οποίον απέχουν αντιστοίχως d_1, d_2, \dots, d_n η ελαστική ροπή θα είναι

$$M = \sum_{i=1}^n m_i d_i \quad (6)$$

Έστω τώρα ότι η καμπύλη είναι υλική και ομογενής, δηλαδή η πυκνότητά της $\rho = \text{const}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την στατική ροπή του τμήματος AB της καμπύλης ως προς τον άξονα Ox (πλ το διπλανό σχήμα).



Πάνω στην καμπύλη θεωρούμε κά-

ποιο στοιχείο dl της καμπύλης (που έχει μάζα ρdl). Θεωρώντας το στοιχείο ως πρόσεγγιστικά ένα υλικό σημείο που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα Ox , έχουμε $dM_x = y\rho dl$ (7)

$$\text{ή θεωρώντας } \rho = 1, \quad M_x = \int_a^p y dl \quad (8)$$

$$\text{ομοίως έχουμε} \quad M_y = \int_a^p x dl \quad (9)$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το κέντρο μάζας εκφράζεται με τον τύπο

$$\xi = \frac{M_y}{L}, \quad \eta = \frac{M_x}{L} \quad \text{έχουμε}$$

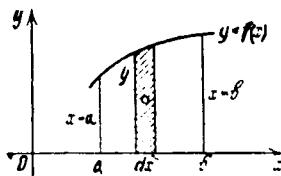
$$\xi = \frac{\int_a^p x dl}{\int_a^p dl} = \frac{\int_a^p x \sqrt{1+y^2} dx}{\int_a^p \sqrt{1+y^2} dx} \quad (10)$$

$$\eta = \frac{\int_a^p y dl}{\int_a^p dl} = \frac{\int_a^p y \sqrt{1+y^2} dx}{\int_a^p \sqrt{1+y^2} dx} \quad (11)$$

V. ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε καμπυλόγραμμο εραπέδιο, οριζόμενο από την καμπύλη $y = f(x)$ ($a \leq x \leq p$), τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=a$, $y=p$, στην επιφάνεια S του οποίου συνεχώς κατανέμεται μάζα με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα ρ

Μπορούμε να θεωρούμε $\rho = 1$, οπότε η μάζα οποιουδήποτε τμήματος του καμπυλόγραμμου



ισούσαι με το εμβαδόν αυτού.

Για τον υπολογισμό των βρατικών ροπών M_x και M_y του σχήματος παίρνουμε το στοιχειώδες χωρίο σε μορφή κατακόρυφης ζώνης (βλ. σχήμα).

Η μάζα της ζώνης αυτής ισούσαι με $dS = y dx$. Θεωρώντας την μάζα της ζώνης στο κέντρο μάρους $(x, \frac{y}{2})$ έχουμε:

$$dM_x = y dx \cdot \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} y^2 dx,$$

$$dM_y = y dx \cdot x = x y dx$$

Από τους τύπους αυτούς παίρνουμε

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx \quad (12)$$

$$M_y = \frac{1}{2} \int_a^b x y dx \quad (13)$$

Σύμφωνα με τους γνωστούς τύπους και τους (12), (13) παίρνουμε τις συντεταγμένες του κέντρου μάρους επιπέδου σχήματος:

$$\xi = \frac{\int_a^b x y dx}{\int_a^b y dx}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx} \quad (14)$$

Οι τύποι (14) στην περίπτωση που το επίπεδο σχήμα περιορίζεται από δύο καμπύλες, παίρνουν την μορφή:

$$\xi = \frac{\int_a^b x(y_2 - y_1) dx}{\int_a^b (y_2 - y_1) dx}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx}{\int_a^b (y_2 - y_1) dx} \quad (14')$$

VI

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Ροπή αδρανείας J υλικού σημείου μάζας m ως προς ένα άξονα ονομάζεται το γινόμενο της μάζας επί το τετράγωνο της αποστάσεως του σημείου από τον άξονα αυτόν: $J = m d^2$

Ροπή αδρανείας συστήματος n σημείων ισούσαι με το άθροισμα των ροπών αδρανείας των σημείων αυτών: $J = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \quad (15)$

Θα θεωρήσουμε ότι η μάζα κατανέμεται ομοιόμορφα στην καμπύλη, στην επιφάνεια και στο βρεφείο, αντίστοιχα.

Θέτοντας $\rho = 1$ και επιλέγοντας στοιχείο μάζας dm βρίσκουμε το στοιχειώδες στοιχείο αδρανείας $dJ = d^2 \cdot dm$

Συνεπώς η ροπή αδρανείας υπολογίζεται από τον τύπο

$$J = \int_a^b d^2 \cdot dm \quad (15')$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

556. Να βρεθεί το έργο που χρειάζεται για την επιμήκυνση ελατηρίου κατά 4cm , αν είναι γνωστό ότι δύναμη 1N επιμηκώνει το ελατήριο αυτό κατά 1cm .

Λύση

Η αντίδραση F του ελατηρίου που σε ένα άκρο του είναι δεμένο εκφράζεται σύμφωνα με τον νόμο του Χουκ από τον τύπο :

$$F(x) = kx \quad (1)$$

όπου k είναι συντελεστής αναλογίας και x είναι η μεταβολή του ελατηρίου. Εφόσον για την επιμήκυνση του ελατηρίου κατά 1cm ενεργεί δύναμη 1N , τον συντελεστή αναλογίας k τον βρίσκουμε από την σχέση $1\text{N} = k \cdot 1\text{cm} \Rightarrow k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ και από την (1) έχουμε $F(x) = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} x$. Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο (4) έχω

$$A = \int_0^{0,04\text{m}} 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x dx = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 5 \cdot 0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} (0,04)^2 \Rightarrow$$

$$A = 0,08\text{N} \cdot \text{m} = 0,08 \text{ Joule}$$

557. Ηλεκτρικό φορτίο E ευχενερωμένο στην αρχή των συντεταγμένων απωθεί φορτίο e από το σημείο $(\alpha, 0)$ στο σημείο $(\beta, 0)$.

Να βρεις το έργο A της δύναμης καθίστης.

Λύση

Από την φυσική γνωρίζουμε ότι η δύναμη είναι $F = \frac{Ee}{x^2}$.

Το διαφορικό του έργου είναι

$$dA = F dx = \frac{Ee}{x^2} dx \Rightarrow A = Ee \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x^2} = Ee \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \Rightarrow$$

$$A = eE \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{Ee(\beta - a)}{a\beta}$$

Αν $\beta \rightarrow \infty$, τότε $A = \frac{Ee}{a} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta - a}{\beta} = \frac{Ee}{a} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{\beta} \right) = \frac{Ee}{a}$

558. Να βρεθεί το έργο που απαιτείται για την εκτόξευση πυραύλου βάρους P από την επιφάνεια της γης, κατακόρυφα σε ύψος h .

Λύση

Σημειώνουμε με \vec{F} την δύναμη έλξης του πυραύλου από την γη όπως φαίνεται στο σχήμα.

Σύμφωνα με τον νόμο της παχρότητας έλξης

$$\text{έχουμε } F = \frac{m_n m_g}{x^2} \quad (1)$$

όπου m_n, m_g είναι αντίστοιχα οι μάζες του πυραύλου και της γης, και x η απόσταση του πυραύλου από το κέντρο της γης. Για τον προσδιορισμό του k θέτουμε $x = R$ όπου R η ακτίνα της γης.

$$\text{Τότε έχουμε: } F(R) = P = k \frac{m_n m_g}{R^2} \quad (2)$$

Αν όπου παίρνουμε $k m_n m_g = PR^2$, οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$F = - \frac{PR^2}{x^2}$$

Σύμφωνα τώρα με τον τύπο (1) θα έχουμε:

$$A = -PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_R^{R+h} = -PR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = - \frac{PRh}{R+h}$$

559. Να υπολογισθεί το έργο που χρειάζεται για την άντληση νερού από δοχείο που έχει σχήμα μικροκωνδρίου μήκους a και ακτίνας R .

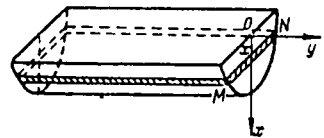
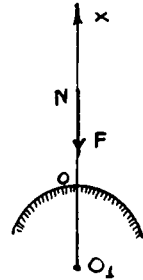
Λύση

Εξετάζουμε σύστημα συντεταχμένων όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο όγκος που περιβάλλεται νερού που φρίσκει σε βάθος x και έχει μήκος a υπολογίζεται από τον τύπο

$$dV = a MN dx \quad (1)$$

όπου MN είναι χορδή παράλληλη προς την διάμετρο της μικροπεριφέρειας, συνεπώς

$$MN = 2\sqrt{R^2 - x^2} \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) έχουμε: $dV = 2a\sqrt{R^2 - x^2} dx$

Η σταθερή δύναμη που απαιτείται για να ανυψωθεί το στρώμα του νερού είναι: $dF = 2a\gamma\sqrt{R^2 - x^2} dx$, όπου γ η πυκνότητα του νερού.

Το στοιχειώδες έργο είναι $dA = dF \cdot x$ άρα

$$A = 2a\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot x dx = -\frac{2}{3} a\gamma (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R \Rightarrow A = \frac{2}{3} a\gamma R^3$$

560. Κατακόρυφο φράγμα έχει σχήμα τραπέζιου του οποίου πάνω βάση είναι 70 m, η κάτω 50 m και το ύψος 20 m. Να ευρεθεί η πίεση του νερού στο φράγμα αυτό.

Λύση

Εκλέγοντας σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα έχουμε:

$$dW = \gamma MN dx \cdot x \quad (1)$$

$$MN = ML + LN = ML + KB = ML + (70 - 20) = ML + 50$$

Το ML υπολογίζεται από τα όμοια τρίγωνα MΛΔ

$$\text{και } \triangle AKD : \frac{ML}{AK} = \frac{20-x}{20} \Leftrightarrow ML = 20 \frac{20-x}{20} =$$

$$= 20 - x \text{ συνεπώς } MN = 20 - x + 50 = 70 - x \quad (2)$$

Η (1) με την προίθετα της (2) μας δίνει:

$$dW = \gamma (70 - x) x dx \Rightarrow W = \gamma \int_0^{20} (70 - x) x dx \Rightarrow W = 11333 \frac{1}{3} \gamma.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

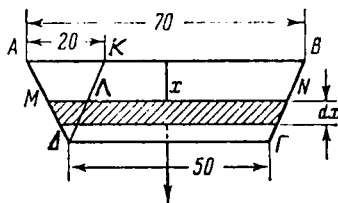
561. Ένα καζάνι (λέβητος) έχει σχήμα παραβολοειδούς εκ περιστροφής με βάθος $H = 0,5$ m και ακτίνα βάσεως $R = 0,4$ m. Να βρεθεί το έργο που χρειάζεται για την άντληση του νερού που περιέχεται στο καζάνι αυτό.

562. Να υπολογιστεί η πίεση του νερού σε κατακόρυφο πλάτα κυκλικού σχήματος διαμέτρου 6 m. Η διάμετρος βρίσκεται στην επιφάνεια του νερού.

563. Να υπολογιστεί η πίεση του νερού επί της επιφάνειας σφαίρας διαμέτρου 4 m, αν το κέντρο της βρίσκεται σε βάθος 3 m από την επιφάνεια του νερού.

564. Να βρεθεί η στατική ροπή και η ροπή αδράνειας της κυματοειδούς $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($-R \leq x \leq R$) ως προς τον άξονα Ox.

565. Ποιά η ροπή αδράνειας ομογενούς κώνου R βάσεως και H (ύψους) ως προς τον άξονά του.



5.9. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ GULDIN-ΠΑΠΠΟΥ.

1^ο ΘΕΩΡΗΜΑ: Το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή τόξου επιπέδου καμπύλης γύρω από έναν άξονα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτό, από την μία πλευρά αυτού, ισούται με το χνόμενο του μήκους τόξου που περιεγράφεται, επί το μήκος της περιφέρειάς που περιγράφει το κέντρο βάρους του.

Απόδειξη:

Το εμβαδό της επιφάνειας υπολογίζεται από γνωστό τύπο:

$$P_x = 2\pi \int_L y dl \quad (1)$$

Το κέντρο βάρους της καμπύλης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\eta = \frac{1}{l} \int_L y dl \quad (2)$$

Εκ των (1) και (2) έχουμε $\boxed{P_x = 2\pi \eta l}$ όπου l είναι το μήκος του περιεγεγραμμένου τόξου και $2\pi \eta$ το μήκος της περιφέρειάς που περιγράφει το κέντρο βάρους κατά την περιστροφή του περί τον Οκ.

2^ο ΘΕΩΡΗΜΑ: Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή επιπέδου εχήματος γύρω από τον άξονα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτό, από την μία πλευρά αυτού, ισούται με το χνόμενο του εμβαδού του περιεγεγραμμένου εχήματος επί το μήκος της περιφέρειάς που περιγράφει το κέντρο βάρους του.

Απόδειξη

Έχουμε μάθει ότι ο όγκος στερεού εκ περιστροφής υπολογίζεται από τον

$$\text{τύπο: } V_x = \pi \int_a^p y^2 dx \quad (1) \quad \text{και το κέντρο}$$

βάρους του επιπέδου εχήματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\eta = \frac{1}{2S} \int_a^p y^2 dx \quad (2) \quad \text{από εδώ παίρνουμε:}$$

$$\int y^2 dx = 2S\eta \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τών (3) ετών (1) έχουμε: $V_x = 2\pi \eta S$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

566. Να βρεθεί το κέντρο μάζας μικκυκλίου με ακτίνα R .

Λύση

Επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα Oy θα έχουμε $\xi = 0$.

Για να βρούμε την συντεταγμένη η του μικκυκλίου θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Guldin:

$$V = 2\pi S\eta \Rightarrow \eta = \frac{V}{2\pi S}$$

Το εμβαδόν του μικκυκλίου είναι $S = \frac{1}{2}\pi R^2$, ο δε όγκος του στερεού εκ περιστροφής του μικκυκλίου είναι ο όγκος της σφαίρας που ισούται με

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{και έτσι}$$

$$\eta = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

567. Να βρεθούν τα εμβαδά των επιφανειών και οι όγκοι των στερεών που παράγονται από την περιστροφή του κύκλου $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ γύρω από τους άξονες Ox και Oy ($a > R, b > R$).

Λύση

Όταν το σχήμα αυτό περιστρέφεται περί τον Ox τότε το κ.β. του κύκλου (a, b) απέχει από τον άξονα Ox κατά b , συνεπώς σύμφωνα με το 1^ο θεώρημα Guldin έχουμε ($l = 2\pi R$): $P_x = 2\pi R \cdot 2\pi b = 4\pi^2 Rb$, όπου S το εμβαδό του περιεπεριφερόμενου σχήματος και $2\pi R$ το μήκος της περιφέρειας που περιγράφει το κ.β. του κατά την περιστροφή του περί τον Ox .

Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα έχουμε ($S = \pi R^2$): $V_x = \pi R^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 R^2 b$. Αν το σχήμα περιστρέφεται περί τον Oy , τότε το κ.β. απέχει απόσταση a από τον άξονα Oy και άρα

$$P_y = 4\pi^2 R a \Rightarrow V_y = 2\pi^2 R^2 a$$

5.1α ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Για τον υπολογισμό, κατά προσέγγιση, ορισμένων ολοκληρωμάτων υπάρχουν διάφοροι τρόποι. Αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται με κάποιο τύπο ή πίνακα, τότε η κατά προσέγγιση τιμή του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$ μπορεί να βρεθεί με τον εξής τρόπο:

1. Χωρίζεται (διαμερίζεται) το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, \beta]$ με τα σημεία x_1, x_2, \dots, x_{n-1} σε n ίσα μέρη με: $h = \frac{\beta - a}{n}$.

2. Υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης $y = f(x)$ στα n μέρη διαμερίσεως: $y_0 = f(a), y_1 = f(x_1), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1}) = f(\beta)$

3. Εφαρμόζεται ένας από τους προσεγγιστικούς τύπους.

Οι πιο εύχρηστοι προσεγγιστικοί τύποι είναι οι παρακάτω που έχουν την αρχή τους στην γεωμετρική παρουσίαση του ορισμένου ολοκληρώματος σαν εμβαδόν καμπυλογράμμου τραπέζιου.

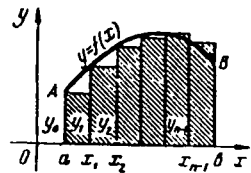
I. ΤΥΠΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ

$$\int_a^b y dy \approx h (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (1)$$

$$\text{ή} \quad \int_a^b y dy \approx h (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) = h \sum_{i=1}^n y_i \quad (1')$$

Με τους τύπους (1) και (1') το εμβαδόν

του καμπυλογράμμου τραπέζιου $\alpha A B \beta$ που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$, αντικαθίσταται με το άθροισμα των εμβαδών των χρωματισμένων ορθογωνίων του σχήματος.



Το σφάλμα του τύπου των ορθογωνίων είναι

$$\delta(n) \leq \frac{(\beta - a)^2}{2n} y'_{\max}$$

όπου y'_{\max} είναι η μέγιστη τιμή $|y'|$ στο διάστημα $[a, \beta]$.

II. ΤΥΠΟΣ ΤΡΑΠΕΖΙΩΝ

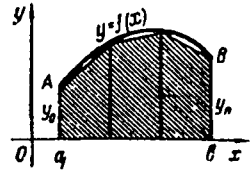
$$\int_a^b y dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad (2)$$

Ο τύπος (2) από γεωμετρικής απόψεως αντικαθίστα το εμβαδόν καμπυλογράμμου τραπεζίου με το άθροισμα των εμβαδών των γραμμωσμένων τραπεζίων του εκτίμαστος.

Το σφάλμα του τύπου τραπεζίων είναι

$$\delta(\eta) \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{12\eta^2} y''_{\max}$$

όπου y''_{\max} είναι η μέγιστη τιμή $|y''|$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.



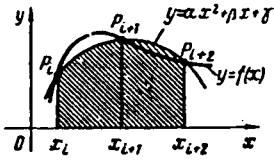
III. ΤΥΠΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΩΝ ΤΡΑΠΕΖΙΩΝ (Simpson).

$$\int_{\alpha}^{\beta} y dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})) \quad (3)$$

όπου n είναι άρτιος.

Μέ τον τύπο (3) το εμβαδόν κάθε ζεύγους κατακορύφων τραπεζίων $x_i P_i P_{i+1} x_{i+1}$ αντικαθίσταται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παραβολοειδούς τραπεζίου που εκτίμασζεται με την αντικατάσταση

του αντίστοιχου τμήμαστος της καμπύλης $y=f(x)$ με το εδφο της παραβολής $y = ax^2 + bx + c$, που διέρχεται από τρία σημεία P_i, P_{i+1}, P_{i+2} όπως φαίνεται στο εκτίμα.



Το σφάλμα του τύπου (3) είναι

$$\delta \leq \frac{(\beta - \alpha)^5}{180\eta^4} y^{(4)}_{\max}$$

όπου $y^{(4)}_{\max}$ είναι η μέγιστη τιμή της $|y^{(4)}|$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Παρατήρηση: Οι προσεγγιστικοί τύποι (1), (1'), (2), (3) είναι τόσο ακριβέστεροι όσο μεγαλύτερο είναι το η . Συνεπώς για αρκετά μεγάλο η , καθένας από τους παραπάνω τύπους μπορεί να ορίσει την τιμή του ορισμένου ολοκληρώμαστος με όποια ακρίβεια θέλουμε. Για την ίδια τιμή του η , συνήθως ο τύπος (2) είναι ακριβέστερος του (1) και ο (3) ακριβέστερος του (2).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56B. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^9 \sqrt{6x-5} dx$ ακριβώς, με τους προσεγγιστικούς τύπους ορθογωνίων, τραπεζίων και Σίμπσον, διαμερίζοντας το διάστημα $[1, 9]$ σε 8 ίσα μέρη. Μετά να εκτιμηθεί σε ποσοστά το σφάλμα των αποτελεσμάτων που πήραμε με τους προσεγγιστικούς τύπους.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \int_1^9 \sqrt{6x-5} dx = \frac{1}{6} \int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}} d(6x-5) = \frac{1}{6} \frac{(6x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = 38.$$

Διαιρούμε το διάστημα $[1, 9]$ σε 8 ίσα μέρη και εκμηατίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$x_0 = 1$	$y_0 = \sqrt{1} = 1,0000$
$x_1 = 2$	$y_1 = \sqrt{7} = 2,6458$
$x_2 = 3$	$y_2 = \sqrt{13} = 3,6056$
$x_3 = 4$	$y_3 = \sqrt{19} = 4,3589$
$x_4 = 5$	$y_4 = \sqrt{25} = 5,0000$
$x_5 = 6$	$y_5 = \sqrt{31} = 5,5678$
$x_6 = 7$	$y_6 = \sqrt{37} = 6,0828$
$x_7 = 8$	$y_7 = \sqrt{43} = 6,5574$
$x_8 = 9$	$y_8 = \sqrt{49} = 7,0000.$

$$\text{Έχουμε επίσης } h = \frac{9-1}{8} = 1$$

$$\text{Από τον τύπο (1) έχουμε } \int_1^9 \sqrt{6x-5} dx \approx 34,8183$$

$$\text{Το απόλυτο σφάλμα είναι: } |38 - 34,8183| = 3,1817$$

$$\text{Το σχετικό σφάλμα είναι } \delta = \frac{100 \cdot 3,1817}{38} \% \approx 8,37\%$$

$$\text{Από τον τύπο (1') έχουμε } \int_1^9 \sqrt{6x-5} dx \approx 40,8183$$

$$\text{Το απόλυτο σφάλμα είναι } |38 - 40,8183| = 2,8183$$

$$\text{και το σχετικό } \delta = \frac{100 \cdot 2,8183}{38} \% \approx 7,42\%$$

$$\text{Από τον τύπο (2) έχουμε } \int_1^9 \sqrt{6x-5} dx \approx 37,8133$$

$$\text{Το απόλυτο σφάλμα είναι } |38 - 37,8133| \approx 0,1867$$

$$\text{και το σχετικό } \delta = \frac{0,1867 \cdot 100}{38} \% \approx 0,49\%$$

Από τον τύπο (3) έχουμε:

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5} \, dx \approx \frac{1}{3} (8 + 4 \cdot 19,1299 + 2 \cdot 146884) \approx 37,9655$$

Το απόλυτο εφάλμα είναι: $|38 - 37,9655| = 0,0345$

και το σχετικό : $\delta = \frac{0,0345 \cdot 100}{38} \% \approx 0,09 \%$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

569. Να υπολογισθεί με τους τρεις τύπους το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 \approx 0,6932. \text{ Να βρεθεί το απόλυτο και σχετικό εφάλμα.}$$

570. Να υπολογισθεί με τον τύπο (3) το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

571. Να υπολογισθεί με τον τύπο (3) το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$ ($n=10$).

6. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

6.1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ: Η μαθηματική στατιστική είναι ένας τομέας των μαθηματικών που αφορούνεται σε μαθηματικές μεθόδους συστηματοποίησης, επεξεργασίας και χρησιμοποίησης των στατιστικών δεδομένων για επιστημονικά και πρακτικά επιπεράματα.

Στατιστικά δεδομένα ονομάζονται οι πληροφορίες για τον αριθμό των στοιχείων ενός ορισμένου ενόλου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές ιδιότητες.

Αν εξετάσουμε τα στοιχεία ενός ορισμένου ενόλου Π ως προς μια μεταβλητή ιδιότητα τους, τότε

— Το έναιο Π ονομάζεται στατιστικός πληθυσμός ή απλώς πληθυσμός.

— Οι πληροφορίες ή μετρήσεις που προκύπτουν από την εξέταση (πείραμα) των στοιχείων του Π ονομάζονται παρατηρήσεις (ή στατιστικά στοιχεία ή στατιστικά ευρήματα).

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε τις οικογένειες μιας πολυκατοικίας σχετικά με τον αριθμό των παιδιών τους και από την εξέταση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί 1, 2, 1, 0, 1, 3, 0, 4, ... που καθένας τους δηλώνει τον αριθμό των παιδιών μιας οικογένειας. Το έναιο των οικογενειών της πολυκατοικίας είναι ο «πληθυσμός», ενώ κάθε οικογένεια αποτελεί ένα «άτομο» του πληθυσμού. Οι αριθμοί 1, 2, 1, ... αποτελούν τις «παρατηρήσεις». Η μεταβλητή X είναι τώρα «ο αριθμός των παιδιών της οικογένειας» που μπορεί να μετρηθεί.

Μια ιδιότητα που μπορεί να μετρηθεί ονομάζεται ποσοτική μεταβλητή ή απλώς μεταβλητή. Οι παρατηρήσεις μας ονομάζονται τιμές της μεταβλητής.

Μια τέτοια μεταβλητή ονομάζεται

— ευνεκής, όταν παίρνει μεμονωμένες τιμές,

— ευνεκής, όταν μπορεί να πάρει κάθε τιμή (τομάρικου θεωρη-

εικά) ενός αριθμητικού διαστήματος (α, β)

6.2. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΔΙΑΛΟΓΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ.

Αν εξετάσουμε όλα τα αερα και πληθυσμού, τότε λέμε ότι κάναμε απογραφή του πληθυσμού. π.χ. «έχινε απογραφή των ριοτεχνίων της περιοχής Αθήνας» θα πει ότι εξετάθηκαν όλες οι ριοτεχνίες ως προς μία ή περισσότερες μεσαφντές ιδιότητες. Οι απογραφές όμως μεγάλων πληθυσμών απαιτούν πολλά έξοδα και πολύ χρόνο, υπάρχουν δε και πληθυσμοί που δεν μπορούν να απογραφούν, π.χ. "1.000 λαμπτήρες να εξετασθούν ως προς την διάρκεια ζωής τους", γιατί κρείσσεται να περιμένουμε να καταστραφούν

Γι' αυτό καταφεύγουμε στην εξέταση ενός υποσυνόλου του πληθυσμού.

Τό υποσύνολο αυτό ονομάζεται δείγμα και η διαδικασία αυτή δειγματοληψία.

Γιά να εξετάσουμε την διάρκεια της ζωής π.χ. των 1.000 λαμπτήρων δοκιμάζουμε π.χ. 20. Αν 10 απ' αυτά έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από 800 ώρες, ο καθένας, τότε παραδεχόμεθα ότι οι μισοί περίπου από τους 1.000 λαμπτήρες έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από 800 ώρες.

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα συμπεράσματα που φχαίνονται από την εξέταση ενός δείγματος, τα μεταφέρουμε σε ολόκληρο τον πληθυσμό μας. Όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα τόσο μεγαλύτερος είναι ο «βαθμός αξιοπιστίας» της μεταφοράς αυτής.

Η επιλογή πάντως του δείγματος δεν είναι εύκολη υπόθεση γιατί το δείγμα αυτό πρέπει να είναι «αντιπροσωπευτικό», υπάρχουν δε ειδικοί τρόποι για την αντιμετώπιση της επιλογής.

Ας πάρουμε το παράδειγμα της μελέτης των οικογενειών μιας πολυκατοικίας και ας υποθέσουμε ότι αριθμίζοντας τις οικογένειες μενούμερα, φρήκαμε:

Η m_1 έχει 1 παιδί, η m_2 έχει 2 παιδιά, η m_3 έχει 1 παιδί, η m_4 έχει 0 παιδιά, η m_5 έχει 2 παιδιά, η m_6 έχει 3 παιδιά, η m_7 έχει 1 παιδί, η

Τα μέσα των διαθεσιμίων (a_{k-1}, a_k) συμπληρώνονται με \tilde{x}_k και θεωρούνται τιμή της x που επαναλαμβάνεται m_k φορές ύστερα απ' αυτό κάνουμε τον παρακάτω πίνακα:

\tilde{x}	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_k	\tilde{x}_n
m	m_1	m_2	m_k	m_n
P	P_1	P_2	P_k	P_n

Παράδειγμα 1: Έστω ότι ο ερευνητής της παραγωγικότητας μιας αυτόματης μονάδας στην διάρκεια του περασμένου χρόνου εξέδωσε με αυτή του προηγούμενου χρόνου, πηρε τα παρακάτω αποτελέσματα επί τοις εκατό (%) για 117 αυτόματες μονάδες:

111, 85, 85, 91, 104, 109, 86, 102, 111, 98, 105, 85, 112, 98, 112, 113, 87, 109, 109, 115, 99, 105, 111, 94, 107, 99, 107, 125, 89, 104, 113, 96, 103, 145, 104, 105, 88, 103, 97, 115, 109, 89, 108, 107, 97, 106, 107, 96, 109, 116, 109, 117, 108, 109, 139, 116, 117, 103, 127, 119, 118, 125, 105, 116, 117, 106, 101, 113, 107, 105, 119, 107, 119, 111, 112, 129, 113, 106, 107, 106, 98, 123, 108, 93, 105, 106, 139, 108, 109, 93, 107, 117, 107, 118, 99, 108, 108, 119, 98, 108, 101, 109, 109, 128, 128, 127, 121, 118, 122, 116, 124, 125, 114, 126, 131, 143, 141.

Να ομαδοποιήσετε και να χράψετε τον πίνακα κατανομής ευκνοτήτων.

Λύση:

Φυσικά, εδώ χρειάζεται να κωρίσουμε το διάστημα $(80, 150)$ σε μικρότερα διαστήματα. Είναι ευκολο να διαπιστώσουμε ότι τα διαστήματα θα είναι ανά 10. Οπότε δά έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Παραχωρότητα μίας ατέλειας μονάδας x_k	Ποσότητα ατέλειων μονάδων m_k	Σχετική συχνότητα $\frac{m_k}{n} = f_k$	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική αθροιστική συχνότητα
80-90	8	$\frac{8}{117} = 0,068$	8	$\frac{8}{117} = 0,068$
90-100	15	$\frac{15}{117} = 0,128$	23	$\frac{23}{117} = 0,196$
100-110	46	$\frac{46}{117} = 0,393$	69	$\frac{69}{117} = 0,590$
110-120	29	$\frac{29}{117} = 0,248$	98	$\frac{98}{117} = 0,838$
120-130	13	$\frac{13}{117} = 0,111$	111	$\frac{111}{117} = 0,949$
130-140	3	$\frac{3}{117} = 0,026$	114	$\frac{114}{117} = 0,974$
140-150	3	$\frac{3}{117} = 0,026$	117	$\frac{117}{117} = 1$
Σύνολο	117	1		

6.3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

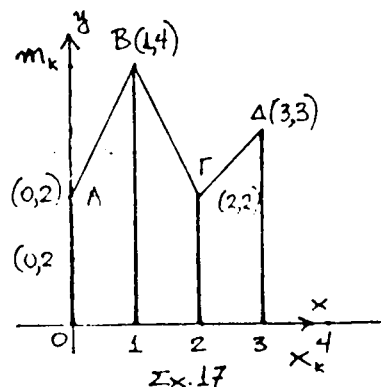
Η γραφική παράσταση της κατανομής συχνοτήτων (μ δεικίων συχνοτήτων) γίνεται με ένα ορθογώνιο ευθύγραμμο βιντεοακτίων, όπου στον άξονα ΟΧ καταθέτουμε τις τιμές της μεσαφίτης και στον άξονα ΟΥ τις συχνότητες τους.

Οι πιο συχνές γραφικές παραστάσεις των κατανομών συχνοτήτων (μ δεικίων συχνοτήτων) είναι το πολύγωνο συχνοτήτων και το ισόγραμμα.

Θα δείξουμε παρακάτω με το παραδείγμα πως κατασκευάζονται αυτές οι γραφικές παραστάσεις:

Παράδειγμα 1: Ας πάρουμε σαν παράδειγμα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα της σελίδας 57:

Αριθμός παιδιών x_k	Οικογένειες m_k
0	2
1	4
2	2
3	3



Τό εἰκμα 17 εἰς παραδείχματος παριστάνει τὴν γραφικὴν παρά-
 γραφὴν τῆς κατανομῆς ἐκκενότητων. Ἡ τετραγώνη γραμμὴ που ἐπιπέ-
 ται εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ εἶναι τὸ πολύγωνο ἐκκενότητων, ἐνῶ τὰ
 ἐπιπέτα τμήματα που περιγράφονται τὰς τετραγώνησ ἐπιπέτων Α,
 Β, Γ καὶ Δ ἀποτελοῦν τὸ διάγραμμα ἐκκενότητων.

Κατασκευάζουμε τώρα τὸν πίνακα κατανομῆς τῶν ἐκκενῶν ἐκκενότητων:

$$\text{Ἔχουμε } n = 2 + 4 + 2 + 3 = 11 \text{ καὶ } P_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{2}{11} \approx 0,182.$$

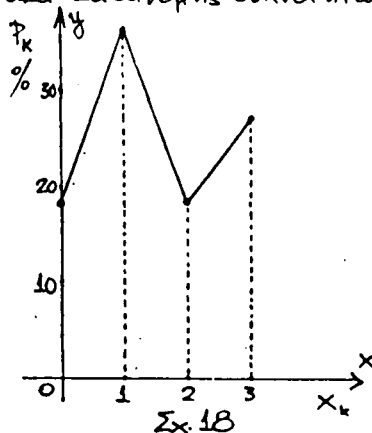
$$P_2 = \frac{m_2}{n} = \frac{4}{11} \approx 0,364, P_3 = \frac{2}{11} \approx 0,182, P_4 = \frac{3}{11} \approx 0,273$$

Συνήθως οἱ ἐκκενῆσ ἐκκενότητες ἐκφράζονται μετὰ 100 πλάσια εἰς,
 δηλαδὴ μετὰ ποσοδὰ ἐπὶ τοῖσ ἐκατοῖ. Ἐτεῖ οἱ παραπάνω ἐκκενῆσ ἐκκενότητες
 γράφονται ἀντίστροφα:

$$0,182 = 18,2\%, 0,364 = 36,4\%, 0,182 = 18,2\%, 0,273 = 27,3\%.$$

Ὑτότε ἔχουμε τὸν παρακάτω πίνακα κατανομῆς ἐκκενότητων καὶ ἐσὶ δι-

Ἀριθμὸς παιδιῶν x_k	Ὁλικὴ ποσὴ % P_k
0	18,2
1	36,4
2	18,2
3	27,3
	≈ 100



πλανὸ εἰκμα 18 τὸ πολὺγωνο τῶν ἐκκενῶν ἐκκενότητων.

Παράδειγμα 2: Ἀς ἐξετάσουμε τώρα τὸ παράδειγμα 1 τῆσ § 2.

Γὰ τὰς κατανομῆσ ἐκκενότητων που εἶναι χωρισμένες ἐσὶ μικρὰ διαστήμα-
 τα κατασκευάζουμε ἰσοῦγραμμα.

Τὸ ἰσοῦγραμμα γενικὰ κατασκευάζεται ὡσ ἐξῆσ:

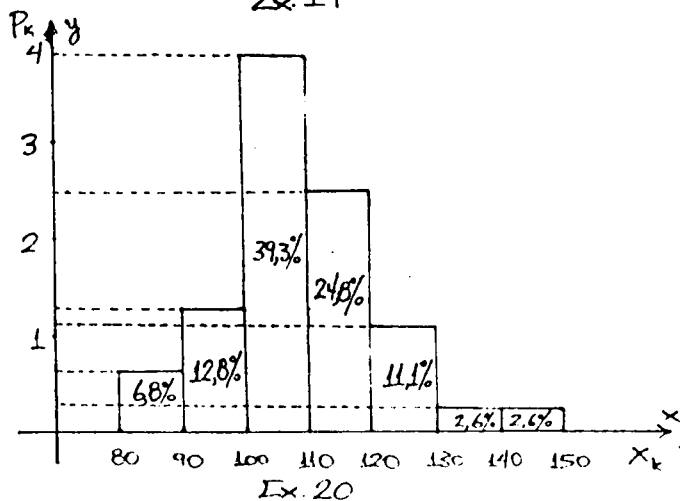
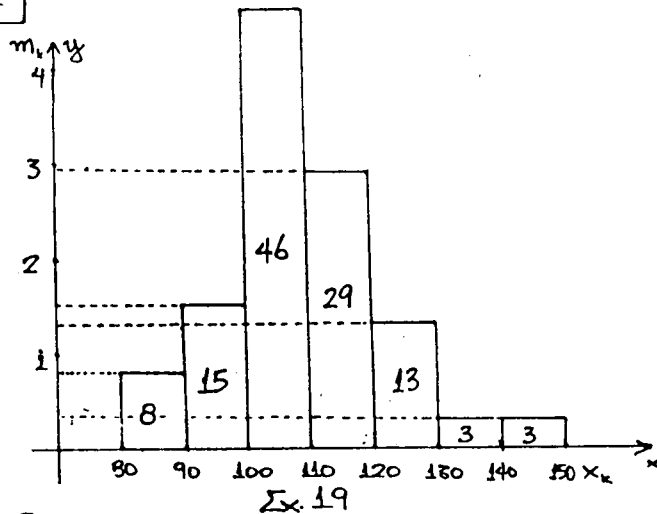
Στὸν ἀξὸνα Ox μετὰ εἰς τὸ τμήμα $[a_{k-1}, a_k]$ ἐκκενάζουμε ὀρθοῦ-
 νιο που ἐκεῖ ἐμφαδὸ 160 μετὰ P_k ἢ m_k , δηλαδὴ $E_k = m_k \Rightarrow$

$$[a_{k-1}, a_k] \cdot h_k = m_k \Rightarrow h_k = \frac{m_k}{[a_{k-1}, a_k]}, \text{ ὡπου } h_k \text{ εἶναι τὸ ὕψος.}$$

Γράψουμε εἰς τὸν πίνακα τοῦ παραδείγματος 1 §2 τὴν ἑξῆς μορφήν:

Παραγωγὴ x	Ποσὴτα αἰσθητῶν παιδῶν m_k	Σχετικὴ συχνότητα P_k		
80-90	8	$h_1 = \frac{8}{117} = 0,08$	6,8%	$h_1 = \frac{6,8}{10} = 0,68$
90-100	15	$h_2 = 1,5$	12,8%	$h_2 = 1,28$
100-110	46	$h_3 = 4,6$	39,3%	$h_3 = 3,93$
110-120	29	$h_4 = 2,9$	24,8%	$h_4 = 2,48$
120-130	13	$h_5 = 1,3$	11,1%	$h_5 = 1,11$
130-140	3	$h_6 = 0,3$	2,6%	$h_6 = 0,26$
140-150	3	$h_7 = 0,3$	2,6%	$h_7 = 0,26$

117



Τα εκλήματα 19 και 20 είναι το "ιστόγραμμα συχνότητας" και το "ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων" της κατανομής αυτής.

6.4. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΙΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Όπως είπαμε και προηγουμένως, η στατιστική σκοπάζει από τις πληροφορίες ενός πληθυσμού ή ενός δείγματος να καταλήξει σε συγκεκριμένα συμπεράσματα για τις νομοτελίες που διέπουν αυτόν τον πληθυσμό ή το δείγμα. Οι γραφικές παραστάσεις και ο πίνακας κατανομής έχουν μεγάλη πρακτική σημασία, αλλά ένα αποτέλεσμα εκφραζόμενο με αριθμό θα μας δώσει καλύτερες πληροφορίες. Γι' αυτό εισάγονται στην στατιστική οι λεγόμενες χαρακτηριστικές τιμές.

1. Μέση τιμή:

Έστω ότι η μεταβλητή X λαμβάνει τιμές x_1, x_2, \dots, x_n και παρουσιάζει συχνότητες αντίστοιχα m_1, m_2, \dots, m_n . Τότε μέση τιμή είναι:

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{h} \Rightarrow$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{h} \quad (32)$$

Αν $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, έχουμε τον γνωστό αριθμητικό μέσο:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \quad (33)$$

Αν η μεταβλητή είναι συνεχής και εξετάζονται παρατηρήσεις μιας συνεχούς μεταβλητής σε διαστήματα, τότε:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k m_k}{n} \quad (34)$$

όπου \tilde{X}_k είναι το μέσο του τμήματος $[a_{k-1}, a_k]$

2. Διάμεσος τιμή. Επικρατούσα τιμή:

Αν οι x_1, x_2, \dots, x_n είναι τιμές μιας μεταβλητής ταξινομημένες κατ' αυ-

Εξυπόμμενο μέγεθος ε' ενα πλνθύμερο με η βροικερα, τότε δίαμε-
ρος τιμή αυτισ της μεταρλητις ονομάζερα η τιμή που ενα βει με-
βει τών παραηάνω ταξνομημένων τιμων.

Ερω οει εκουμε περιττό αριθμό παρατηρήσεων, δηλαδή $n = 2q - 1$.
Τότε οι ταξνομημένες κατ' αυξανόμενο μέγεθος παρατηρήσεις ενα:

$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(q-1)}, x_{(q)}, x_{(q+1)}, \dots, x_{(n)}$. Οπου με $x_{(i)}$
εμφρολίζερα η τιμή της μεταρλητις που εκει τών i θέσει ετιν ταξνο-
μημένη βειρά. Στι μέση αυτισ της βειρας ενα η τιμή $x_{(q)}$. Άρα:

$\tilde{M} = x_{(q)}$ οπου με \tilde{M} εμφρολίζερα η διάμερος.

Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων ενα αρτιος, δηλαδή $n = 2q$,
τότε η διάμερος υπολοχίζερα από τον τυπο:

$$\tilde{M} = \frac{x_{(q)} + x_{(q+1)}}{2}$$

Για παρατηρήσεις που εξεάζωνται κατ' διασειμαρα υπάρχει εύνθετος
τύπος που δέν εόν εξεάζουμε εδω.

Επικρατούσα τιμή ονομάζερα εκείνη που ανάμεσα σε όλες τις εμ-
φανζόμενες τιμές της μεταρλητις μας, παρσειάζει τών μεγαλύτερη εικνότητα.

Η επικρατούσα τιμή και η διάμερος ονομάζωνται δομικές τιμές
σον κατανομων.

3. Διακύμανση κατανομης (διασπορά) - Τυπική απόκλιση.

Ερω οει εκουμε εο εύνολο η παρατηρήσεων η μερύσεων οπου
η τιμή x_1 εαναλαμφάνερα m_1 φορές, η x_2 εαναλαμφάνερα m_2 φο-
ρές κ.λ., η x_n εαναλαμφάνερα m_n φορές. Ερωμε δηλαδή τον πινακα:

Συκνότητα m_i	m_1	m_2	m_n
Τιμή x x_i	x_1	x_2	x_n

η η μέση εμμή ενα:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k m_k$$

Δίνει όλα τα στοιχεία για τον υπολογισμό των \bar{x} και S και την κατασκευή του ιστογράμματος

Πίνακας κατανομής

Υψος σε cm x_k	Άρρο \tilde{x}_k	Μήτρο m_k	$\tilde{x}_k \cdot m_k$	\tilde{x}_k^2	$\tilde{x}_k^2 \cdot m_k$
155-159	157	4	628	394.384	1577.536
159-163	163	6	966	933.155	5.598.930
163-167	167	10	1.650	2.722.500	27.225.000
167-171	169	13	2.197	4.826.809	62.748.517
171-175	173	22	3.806	14.485.636	318.684.192
175-179	177	10	1.770	3.132.900	313.229.000
179-183	181	5	905	819.025	4.095.125
183-187	185	7	1.295	1.677.025	11.739.175
187-191	189	3	567	321.489	964.467
Σ		80	13784		463.955.848

Υπενθυμίζεται ότι $\tilde{x}_k = \frac{[a_{k-1}, a_k]}{2}$, που ονομάζεται μέσο ή κεντρική τιμή του διαστήματος.

$$\text{Έτσι τώρα έχουμε: } \bar{x} = \frac{13784}{80} = 172,3$$

$$s^2 = \frac{463.955.848}{80} - (172,3)^2 \Rightarrow$$

$$s^2 \approx 5.799.448 - 26.687,29 \approx 5.769.760$$

$$\text{Άρα τελική απόκλιση } S = \sqrt{5.769.760} \approx 2.402.$$

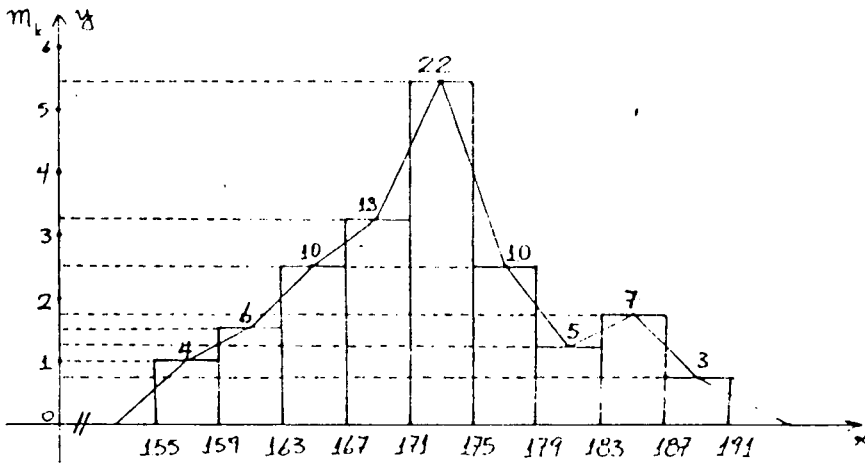
Για την κατασκευή του ιστογράμματος βρίσκουμε τα ύψη των ορθογωνίων που έχουν βάση το μήκος των υποδιαστημάτων και εμβαδό την συχνότητα που αντιστοιχεί ε' αυτά, δηλαδή

$$h_k = \frac{m_k}{[a_{k-1}, a_k]}. \text{ Έτσι έχουμε:}$$

$$h_1 = \frac{4}{4} = 1, h_2 = \frac{6}{4} = 1,5, h_3 = \frac{10}{4} = 2,5, h_4 = \frac{13}{4} = 3,25, h_5 = \frac{22}{4} = 5,5,$$

$$h_6 = \frac{10}{4} = 2,5, h_7 = \frac{5}{4} = 1,25, h_8 = \frac{7}{4} = 1,75, h_9 = \frac{3}{4} = 0,75$$

Το επόμενο βήμα είναι το "ισόγραμμα συχνοτήτων".



Σχ 21

Η πεδλωμένη γραμμή που διαφύκεται από τα μέρη των επάνω βασών των ορθογωνίων είναι το πολύγωνο συχνοτήτων.

573. Σαν αποτέλεσμα κάποιου πειράματος ελάγαμε τα παρακάτω βέσι κατά (παρατηρήσεις):

Τύπος x_k	-2	0	1	2	3	5	7
Συχνότητα m_k	4	5	7	8	6	2	1

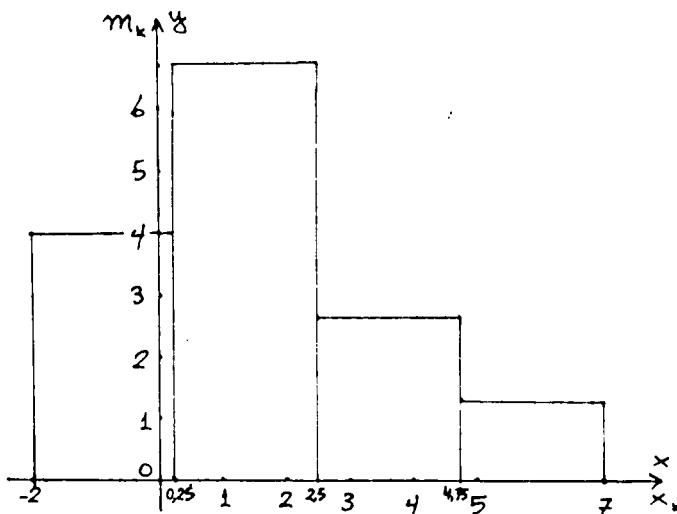
Να κατασκευάσετε το ισόγραμμα συχνοτήτων και να βρείτε την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Λύση:

Για να κατασκευάσουμε το ισόγραμμα παίρνουμε το μήκος του διαστήματος από το -2 μέχρι το 7 που είναι 9 και το διαίρουμε δια του 4

Έτσι έχουμε τα υποδιαστήματα και τις συχνότητες στον παρακάτω πίνακα:

Τιμές x_k	m_k	$h_k = \frac{m_k}{2,25}$
-2-0,25	9	4
0,25-2,5	15	6,67
2,5-4,75	6	2,67
4,75-7	3	1,3



Σχ. 22

Με βάση τον πίνακα κατασκευάσαμε το ισόγραμμα.

Κάνουμε τώρα έναν πίνακα ακόμη για να διευκολυνόμαστε στην εξαγωγή της μέσης τιμής και της τυπικής αποκλίσεως.

x_k	m_k	$x_k m_k$	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2$	$(x_k - \bar{x})^2 m_k$
-2	4	-8	-0,5	0,25	1
0	5	0	-1,5	2,25	11,25
1	7	7	0,5	0,25	1,75
2	8	16	0,5	0,25	2
3	6	18	1,5	2,25	13,5
5	2	10	3,5	12,25	24,5
7	1	7	5,5	30,25	30,25
Σ	33	50			84,25

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{n} = \frac{50}{33} = 1,5.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο (35):

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 m_k = \frac{84,25}{33} = 2,55 \Rightarrow s = \sqrt{2,55} \approx 1,6$$

Ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι $n = 7 = 29 - 1$,
 $q = 4 \Rightarrow n = 2 \cdot 4 - 1$

Συνεπώς η διάμεσος είναι: $\tilde{M}_{(n)} = 2$

Όπως ξέρουμε η επικρατούσα τιμή είναι αυτή που αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο αριθμό εκκινήσεων, δηλαδή εδώ είναι $\tilde{M}_0 = 2$, οπου \tilde{M}_0 είναι η επικρατούσα τιμή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

574. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων του διπλανού πίνακα, ο οποίος παρουσιάζει την διάρκεια ζωής των λαμπτήρων που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο.

ΩΡΕΣ	ΛΑΜΠΤΗΡΕΣ
700-750	20
750-800	56
800-850	100
850-900	92
900-950	68
950-1000	44
	380

(Απ.: $\bar{x} = 859,73$, $s = 68,47$).

575. Σε μια πόλη μετρήσαμε την μέγιστη θερμοκρασία επί 30 συνεχείς ημέρες και βρήκαμε:

18, 21, 21, 19, 23, 19, 25, 27, 24, 23, 20, 21, 24, 19, 23,
 16, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 27, 29, 28, 25, 26, 26, 24.

Να βρεθεί η διάμεσος και η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών αυτών.

Να κατασκευασθεί το ισόγραμμα (Απ.: Διαμ. = 23, $s = 3,56$).

576. Ένα κατάστημα πούλησε σε μία ημέρα 45 ζεύγη υποδημάτων με διαστάσεις:

39, 41, 40, 42, 41, 40, 42, 44, 40, 43, 42, 41, 43, 39, 42,
 41, 42, 39, 41, 37, 43, 41, 38, 43, 42, 41, 40, 41, 38, 44,
 40, 39, 41, 40, 42, 40, 41, 42, 40, 43, 38, 39, 41, 41, 42.

Να υπολογισθούν η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή.

(Απ.: $\bar{x} = 41,1$, $\tilde{M}_0 = 41$, $\tilde{M} = 40$).

577. Στον παρακάτω πίνακα δίδεται η κατανομή του πλινθισμού

μιας Αφρικανικής χώρας κατά ηλικία:

Όμοιες κατά ηλικία	μέχρι 7 ετών	8-11	12-14	15-19	20-29	30-39	40-49	50-59	πάνω από 60
Αριθμός ατόμων ανά ομάδα επί 1000	18,6	9,7	7,9	8,9	18,0	14,9	9,0	6,4	6,6

Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα, να φέρει η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση. (ΑΠ: $\bar{x} = 25,4$, $s = 18,3$).

578. Δίδεται η κατανομή της περιεκτικότητας ασβέστης σε μέταλλο (γραμμάρια ανά χιλιόγραμμο):

Περιεκτικότητα ασβέστης	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
Συχνότητα	188	75	44	24	13	8	6	5	1	1

Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα και να υπολογισθεί η μέση τιμή. (ΑΠ: $\bar{x} = 6,9$ gr.).

Ο παρακάτω πίνακας έχει 50 τιμές που είναι αποτελέσματα μετρήσεων ενός μεγέθους:

4,8, 4,7, 5,3, 5,2, 5,3, 4,7, 5,0, 5,1, 4,7, 5,0,
5,0, 4,8, 5,1, 5,0, 4,8, 5,2, 5,2, 5,3, 5,0, 4,9,
5,1, 4,9, 4,9, 5,1, 4,8, 5,0, 4,9, 4,9, 5,1, 4,8,
5,2, 4,7, 5,0, 4,8, 5,0, 4,8, 5,0, 5,0, 5,3, 5,0,
4,9, 5,1, 5,1, 5,0, 5,0, 5,1, 5,1, 5,2, 4,9, 5,1.

Να υπολογισθεί η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή. Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα. (ΑΠ: $\bar{x} = 5,0$, $\tilde{M}_0 = 5,0$, $\tilde{M} = 4,95$).

579. Ο παρακάτω πίνακας έχει πληροβαρίες για την ηλικία 54 μαθητών της Β' τάξης Λυκείου:

17, 17, 18, 17, 18, 17, 19, 17, 20, 19, 17, 18, 20, 18,
17, 20, 21, 20, 17, 18, 22, 18, 17, 18, 19, 17, 22, 19,
21, 19, 21, 18, 17, 21, 21, 17, 19, 19, 20, 17, 18, 19,
19, 17, 18, 19, 17, 20, 17, 18, 18, 18, 20, 17.

Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά. (ΑΠ: $\bar{x} = 18,5$, $s = 1,26$).

2. ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

7.1. ΈΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Ας εξετάσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{aligned} a_1 x + \beta_1 y &= \gamma_1 \\ a_2 x + \beta_2 y &= \gamma_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Το σύστημα αυτό λέγεται γραμμικό και ορίζεται πλήρως αν είναι δεδομένοι οι αριθμοί $a_1, \beta_1, a_2, \beta_2$, που ονομάζονται συντελεστές των αγνώστων (μεταβλητών) x, y .

Γράφοντας τους τέσσερις αριθμούς $a_1, \beta_1, a_2, \beta_2$ στη διάταξη που είναι γραμμένοι στο σύστημα (1) θα έχουμε:

$$\begin{array}{cc} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{array}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σχήμα με τους παραπάνω αριθμούς σε ορισμένη διάταξη θα το ονομάσουμε πίνακα δεύτερης τάξης και θα τον συμβολίσουμε με

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A έχει 4 αριθμούς που λέγονται στοιχεία του πίνακα, δύο γραμμές και δύο στήλες:

$$\begin{array}{l} \text{I} \rightarrow \quad a_1 \quad \beta_1 \qquad \qquad a_1 \quad \beta_1 \\ \text{II} \rightarrow \quad a_2 \quad \beta_2 \qquad \qquad a_2 \quad \beta_2 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow \quad \uparrow \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{I} \quad \text{II} \end{array}$$

Στο σύστημα (1) υπάρχουν και οι αριθμοί γ γ που λέγονται ελεύθεροι όροι του συστήματος που έχουν και αυτοί των εμβαδία τους, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τους πίνακες:

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Ο πίνακας B έχει 6 στοιχεία και αποτελείται από 2 γραμμές και 3 στήλες και λέγεται πίνακας 2×3

Γενικότερα δίνουμε τον εξής ορισμό του πίνακα:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πίνακας $\nu \times \mu$ λέγεται κάθε ορθογώνια διάταξη $\nu \cdot \mu$ αριθμών (ή άλλων μαθηματικών εννοιών) σε ν γραμμές και μ στήλες, και συμβολίζεται με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & & a_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{i\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & & a_{\nu j} & & a_{\nu \mu} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ή απλούστερα $A = [a_{ij}]$, $i=1,2,\dots,\nu$, $j=1,2,\dots,\mu$, όπου a_{ij} είναι το στοιχείο που ανήκει στην i -γραμμή και j -στήλη. Συνήθως λέμε ότι ο πίνακας $A = [a_{ij}]$, $i=1,2,\dots,\nu$, $j=1,2,\dots,\mu$ έχει διαστάσεις $\nu \times \mu$.

Παράδειγμα 1: Να γράψετε τον πίνακα από τους συντελεστές των μεταβλητών x_1, x_2 , αν

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Λύση:

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2: Να γραφτεί τους πίνακες από τους συντελεστές των x_1, x_2, x_3 , αν

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \gamma_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \gamma_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \gamma_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \gamma_1 &= x_1 + x_2 & \text{iii)} \quad \gamma &= kx_1 & \text{iv)} \quad \gamma_1 &= -x_1 \\ \gamma_2 &= x_2 & \gamma &= x_2 & \gamma_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Λύση:

i) έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ii)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iv)

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3: Στις Ανώτερες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού Πλοιάρχων οι ώρες διδασκαλίας των Μαθηματικών κατανομούνται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα (ώρες κατά εβδομάδα)

	1 ^ο εξαμήνο	2 ^ο εξαμήνο	3 ^ο εξαμήνο
Μαθηματικά I	3	3	3
Μαθηματικά II	3	3	3

Λύση:

Ο πίνακας μας δίνει τις εξής πληροφορίες :

Αφού το εξάμνο έχει 13 εκπαιδευτικές εβδομάδες,

δες, έχουμε για τα Μαθηματικά Ι

$$(3 \times 13) \cdot 3 = 117 \text{ ώρες}$$

και για τα Μαθηματικά ΙΙ

$$(3 \times 13) \cdot 3 = 117 \text{ ώρες}$$

7.2. Πράξεις με Πίνακες

1^ο: Δύο πίνακες διαστάσις $n \times m$ $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ θεωρούνται ίσοι αν και μόνο αν τα αντιστοιχία στοιχεία τους a_{ij} και b_{ij} είναι ίσα. π.χ. οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

είναι ίσοι, ενώ $A \neq B$ όταν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

2^ο: Είδη πινάκων : Αν ένας πίνακας έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών, αυτός λέγεται τετραγωνικός.

π.χ. $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ γράφεται στη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ένας πίνακας λέχεται πίνακας-γραμμή, όταν $\nu=1$ (μια μόνο γραμμή), π.χ

$$A = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1\nu}] \quad , \quad B = [0, 1, 3]$$

Ένας πίνακας λέχεται πίνακας-στήλη, όταν $\mu=1$ (μια μόνο στήλη), π.χ. οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

είναι πίνακες στήλες.

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέχεται μοναδιαίος όταν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στη διαγώνιο από επάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά (κύρια διαγώνιος) είναι ίσα με την μονάδα, τα δε υπόλοιπα ίσα με το μηδέν:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ο μοναδιαίος πίνακας χράζεται και ως εξής:

$$E = [a_{ij}] \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,\nu \\ j=1,2,\dots,\nu \end{matrix} \quad \text{μέ} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Ο πίνακας A^* λέχεται αντίστροφος ως προς τον πίνακα A , αν οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμές του πίνακα A^* . π.χ. οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

είναι ανάστροφος.

3^ο: Πρόσθεση πινάκων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω οι $n \times m$ πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$.
Το άθροισμα $A+B = \Gamma$ ορίζεται αν και μόνο αν $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ και $\gamma_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i,j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$

π.χ. αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, τότε

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Επίσης $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 2+3 \\ 4-1 & 0+0 \\ -1+3 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Σημειώνουμε μερικές ιδιότητες της πρόσθεσης:

i) Προβεταιριστική:

$$(A+B) + \Gamma = (A+B) + \Gamma.$$

ii) Αγτιμεταθετική:

$$A+B = B+A$$

iii) Ουδέτερο στοιχείο:

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ που έχει

όλα τα στοιχεία του μηδέν συμπολιζείται με 0 και λέγεται μηδενικός. Έτσι

$$A+0 = 0+A = A$$

και ο μηδενικός πίνακας είναι ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση των πινάκων.

iv) Αγτίθετος πίνακας: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{Τότε ο πίνακας}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{λέγεται αντίθετος πίνακας του A.}$$

Είναι φανερό ότι :

$$A + A' = A' + A = 0$$

Πράγματι εστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A' = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 2-2 & 3-3 \\ -1+1 & 0 \\ 3-3 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Η διαφορά δύο πινάκων $n \times m$ μπορεί τώρα να οριστεί ως εξής :

$$A - B = A + (-B)$$

π.χ. έχουμε :

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 & 6+3 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

4: Πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό

ΟΡΙΣΜΟΣ: Γινόμενο του πίνακα $A = [a_{ij}]$, $i=1,2,\dots, n$, και $j=1,2,\dots, m$ επί τον αριθμό k λέγεται ο πίνακας $n \times m$ που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχείων του A επί τον

αριθμό k :

$$k \cdot A = k \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$kA = Ak$$

$$\lambda(kA) = k(\lambda A)$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$(k+\lambda)A = kA + \lambda A$$

$$1A = A$$

$$0 \cdot A = 0$$

όπου $\lambda, k \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

τότε $A+B = \begin{bmatrix} 4+1 & 5+0 & 6+1 \\ 3+0 & 1+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 2:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

τότε $A-B = \begin{bmatrix} 2-4 & 5-2 \\ 3-1 & 6-0 \\ 4-2 & 8-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 3:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Νά βρείτε το $3A+2B$.

Λύση:

Έχουμε $3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{bmatrix}$

$$2B = 2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } 3A + 2B = \begin{bmatrix} 6-4 & 3+2 & -3+0 \\ 0-6 & 3+4 & -12+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4:

Να βρείτε τον πίνακα T , για τον οποίο ισχύει η ισότητα $A + 2T = B$,

όταν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Έστω ότι ο ζητούμενος πίνακας είναι

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad \text{Τότε εκ της } A + 2T = B \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1+2a_{11} & 3+2a_{12} & 2a_{13} \\ 1+2a_{21} & 3+2a_{22} & -1+2a_{23} \\ 2+2a_{31} & 1+2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$1+2a_{11}=1, \quad 3+2a_{12}=1, \quad 2a_{13}=0$$

$$1+2a_{21}=3, \quad 3+2a_{22}=3, \quad -1+2a_{23}=-1 \Leftrightarrow$$

$$2+2a_{31}=4, \quad 1+2a_{32}=1, \quad 2a_{33}=2$$

$$a_{11}=0, \quad a_{12}=-1, \quad a_{13}=0$$

$$a_{21}=1, \quad a_{22}=0, \quad a_{23}=0$$

$$a_{31}=1, \quad a_{32}=0, \quad a_{33}=1.$$

Έτσι πύραμε:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

$$580. \text{ Αν } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 8 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

Βρείτε τα αθροίσματα $A+B$, $A+B+\Delta$, $B+\Gamma+\Delta$.

581. Να βρείτε τους x, y, z, w , αν

$$\begin{bmatrix} 2x & -y \\ 3z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -3 \\ -1 & 4w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ x+w & -1 \end{bmatrix}$$

$$582. \text{ Αν } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 1 & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

τότε δείξτε ότι:

$$A - 3B + \Gamma + 2\Delta - 7E = 0$$

583. Να βρείτε τον πίνακα x , αν

$$3x - 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \frac{15}{2} & 3 & 9 \end{bmatrix} = x - 3 \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(\text{ΑΠ.: } x = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ \frac{15}{2} & 3 & 9 \end{bmatrix})$$

584. Να βρείτε τον πίνακα T , αν $A + 2B = 3T$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ΑΠ.: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix})$$

5^ο Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Εξετάζουμε κατ' αρχην για ειδική περίπτωση:

Γινόμενο της γραμμής A επί των στύλων B όπου

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ και } B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ λέγεται ο αριθμός} \\ a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots + a_n \beta_n.$$

Το γινόμενο δύο πινάκων $A = [a_{ik}]$ και $B = [\beta_{kj}]$ ορίζεται, μόνον όταν ο αριθμός των στύλων του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Γινόμενο AB του πίνακα A επί τον πίνακα B , όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kj} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix}$$

λέγεται ο πίνακας Γ , του οποίου το κοινό στοιχείο της i -γραμμής και της j -στύλης είναι ίσο με το γινόμενο της i -γραμμής επί των j -στύλων, δηλαδή

$$\gamma_{ij} = a_{i1} \beta_{1j} + a_{i2} \beta_{2j} + \dots + a_{ik} \beta_{kj} = \sum_{p=1}^k a_{ip} \beta_{pj}$$

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rightarrow a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kj} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \gamma_{ij} & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \dots & \gamma_{nj} & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Παραδείγματα:

585 Πότε είναι δυνατός ο πολλαπλασιασμός πίνακα-γραμμής επί πίνακα-στήλης; Να γράψετε το αποτέλεσμα.

Λύση:

Ο πίνακας-γραμμή είναι $(1 \times \nu)$ και ο πίνακας-στήλη είναι $(\nu \times 1)$. Σύμφωνα με τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πρέπει να είναι $\nu = \nu$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_\nu\beta_\nu \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1 \times \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

586. Να βρείτε τα γινόμενα AB και BA , αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Ο πίνακας A είναι 2×3 και ο πίνακας B είναι 3×2 , συνεπώς AB θα είναι πίνακας 2×2 , δηλαδή τετραγωνικός. Ομοίως BA θα είναι 3×3 .

Έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & -2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 & -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

587. Για ποιούς πίνακες ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$; Για ποιούς πίνακες είναι δυνατή η ισότητα $AB = BA$;

Λύση:

Αν $A = [a_{ij}]$ είναι πίνακας $\mu \times \nu$ και $B = [b_{ij}]$ είναι πίνακας $k \times \lambda$, τότε το γινόμενο $A \cdot B$ ορίζεται όταν $\nu = k$ και $B \cdot A$ όταν $\lambda = \mu$. Συνεπώς, τα γινόμενα AB και $B \cdot A$ ορίζονται συγχρόνως μόνον όταν A είναι πίνακας $\mu \times \nu$ και B είναι πίνακας $\nu \times \mu$.

Συνεπώς

$$A \cdot B = \boxed{\mu \times \nu} \cdot \boxed{\nu \times \mu} = \boxed{\mu \times \mu} \quad \text{και}$$

$$B \cdot A = \boxed{\nu \times \mu} \cdot \boxed{\mu \times \nu} = \boxed{\nu \times \nu}$$

Άρα AB είναι πίνακας τετραγωνικός $\mu \times \mu$ και $B \cdot A$ είναι πίνακας τετραγωνικός $\nu \times \nu$

Για να είναι $AB = B \cdot A$ πρέπει να αληθεύει η ισότητα $\mu = \nu$ όταν A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες.

588 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Να βρείτε όλους τους πίνακες X που ικανοποιούν τη σχέση $A \cdot X = X \cdot A$

Λύση:

Από την άσκηση 3 προκύπτει ότι οι πίνακες X και A

πρέπει να είναι τετραγωνικοί 2×2 Έστω λοιπόν ότι

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \text{ τότε}$$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς $A \cdot X = X \cdot A \iff$

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix} \iff$$

$x_1 = x_4, x_3 = 0$. Άρα

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

589. Για την κατασκευή μιας μηχανής χρειάζονται 5 εξαρτήματα τύπου Α, 6 εξαρτήματα τύπου Β και 2 εξαρτήματα τύπου Γ. Το τιμολόγιο αυτών των εξαρτημάτων χράφεται σε μορφή πίνακα-στήλης $\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 1,2 \end{bmatrix}$. Αν χραφούν οι τύποι των εξαρτημάτων σε μορφή πίνακα-γραμμής $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, τότε το γινόμενο $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 1,2 \end{bmatrix}$ τι περιεχόμε-νο έχει;

Λύση:

Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 1,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,3 + 2 \cdot 1,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,7 \end{bmatrix} = 6,7$$

Σαν αποτέλεσμα πήραμε την αξία όλων των εξαρτημάτων.

590. Να βρείτε όλους τους τετραγωνικούς πίνακες B για τους οποίους $AB=O$, όταν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση:

Έστω ο ζητούμενος πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad \text{τότε,}$$

$$A \cdot B = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_3 = -x_1$$

$$x_2 + x_4 = 0$$



$$x_4 = -x_2$$

Επομένως οι ζη-

τούμενοι πίνακες έχουν την μορφή:

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_1 & -x_2 \end{bmatrix}$$

591. Αν θεωρήσουμε $A \cdot A = A^2$, $A \cdot A \cdot A = A^3$, $A \cdot A \cdot \dots \cdot A = A^n$, τότε να βρείτε το A^3 , όταν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

592. Δίνεται το τρίγωνο $P(x) = x^2 - 5x + 6$ και πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε το $P(A)$.

Λύση:

Ας θεωρήσουμε ότι

$$P(A) = A^2 - 5A + 6E. \quad \text{Τότε αφού}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix},$$

$$5A = 5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad 6E = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

Έχουμε

$$P(A) = A^2 - 5A + 6E = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \iff$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Άλλος τρόπος:

Αφού $P(x) = (x-2)(x-3)$, τότε

$$P(A) = (A-2E)(A-3E) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

593. Δίνονται οι πίνακες A και B :

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε τα γινόμενα AB .

$$\text{(Απ.: } \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{)}.$$

594. Να βρείτε τον πίνακα AB και να τον συγκρίνετε με τον πίνακα A , όταν:

$$A = \begin{bmatrix} 82 & -90 & 43 & 8 \\ 0,5 & 0,3 & -1 & 100 \\ 10 & -17 & 3 & -45 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ΑΠ.: $AB = \begin{bmatrix} 43 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$).

595. Να βρείτε το γινόμενο $AB\Gamma$, όταν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ΑΠ.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$).

596. Να υπολογίσετε τα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & -\mu\upsilon\alpha \\ \mu\upsilon\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix}^Y$$

(ΑΠ.: $\begin{bmatrix} 13 & -0,4 \\ 21 & -22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & -\mu\upsilon\alpha \\ \mu\upsilon\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix}$).

597. Να βρείτε των τιμή του τριωνύμου $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, αν θέσουμε όπου x τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ΑΠ.: } f(A) = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix})$$

598. Αν $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$, βρείτε των τιμή του $f(A)$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ΑΠ.: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

599. Να βρείτε τον πίνακα X , όταν

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{ΑΠ.: } \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix})$$

600. Να βρείτε τον πίνακα X , όταν

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{ΑΠ.: } \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix})$$

601. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ικανοποιεί
τη σχέση:

$$x^2 - (\alpha + \delta)x + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

7.3. Οριζούσες Πινάκων Δεύτερης τάξης

Για τον τετραγωνικό πίνακα εισάγεται μια καινούργια έννοια, που είναι η οριζούσα πίνακα.

Την οριζούσα του τετραγωνικού πίνακα A θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(A)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Οριζούσα πρώτης τάξης (δηλαδή πίνακα που αποτελείται από ένα στοιχείο) λέγεται ο αριθμός εκείνος που είναι το μοναδικό στοιχείο του πίνακα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Οριζούσα πίνακα δεύτερης τάξης $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ λέγεται ο αριθμός που υπολογίζεται από τον τύπο $\mathcal{D}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ή ακόμη μπορούμε να χράψουμε

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (5)$$

Η διαχώνιος του τετραγωνικού πίνακα από το αριστερό επάνω στοιχείο έως το δεξιό κάτω λέγεται κύρια διαχώνιος.

Η άλλη διαχώνιος λέγεται δευτερεύουσα διαχώνιος.

π.χ. η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ είναι

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -3 + 2 = -1$$

Παρατήρηση: Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι αριθμός σε αντίθεση με τον πίνακα που είναι άλλη μαθηματική έννοια.

Από τον ορισμό (5) προκύπτουν οι ιδιότητες:

1. Από την μεράδευση των γραμμών του πίνακα επί δύο των στηλών και αντίστροφα, η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται.

Πράγματι, έστω $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ και $A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, που έγινε από τον A με μεράδευση της πρώτης γραμμής του A επί πρώτης στήλης και της δεύτερης γραμμής επί δεύτερης στήλης. Τότε

$$\mathcal{D}(A^*) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{(5)}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \mathcal{D}(A).$$

2. Αν αλλάξουμε την θέση δύο γραμμών (ή δύο στηλών) τότε η απόλυτη τιμή της ορίζουσας δεν μεταβάλλεται, ενώ το πρόσημο αλλάζει στο αντίθετο.

Πράγματι, έστω $A_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix}$, τότε

$$\mathcal{D}(A_1) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}(A_1) = -\mathcal{D}(A).$$

3. Αν ο πίνακας έχει δύο ίδιες γραμμές (ή στήλες), τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

4. Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) είναι

ίσα με μηδέν τότε η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

5. Αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) με τον ίδιο αριθμό, τότε η ορίζουσα του πίνακα αυτού πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

6. Έστω ότι όλα τα στοιχεία κάποιας γραμμής (ή στήλης) ενός πίνακα A είναι άθροισμα δύο όρων, δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} + \beta_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \beta_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} + \beta_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \beta_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & a_{12} \\ \beta_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Οι ιδιότητες 3, 4, 5, 6 αποδεικνύονται όπως και οι 1, 2.

7. Η ορίζουσα ενός πίνακα A δεν μεταβάλλεται αν στα στοιχεία κάποιας γραμμής (ή στήλης) του πίνακα, προσέδουμε αριθμούς ανάλογους με τα στοιχεία άλλης γραμμής (ή στήλης).

Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ και $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} + k a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$

Τότε $\mathcal{D}(A_1) = \begin{vmatrix} a_{11} + k a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k a_{12} & a_{12} \\ k a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{D}(A_1) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + k \cdot 0 = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Παραδειγμα 1: Να υπολογίσετε την ορίζουσα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} \eta\alpha & \epsilon\upsilon\alpha \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\upsilon\beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \epsilon\upsilon\alpha & \eta\alpha \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\upsilon\beta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \eta\alpha + \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\upsilon\beta + \sigma\upsilon\alpha \\ \epsilon\upsilon\beta - \sigma\upsilon\alpha & \eta\alpha - \eta\mu\beta \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & \log_a \alpha \\ \log_a \beta & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (5), έχουμε:

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} \eta\alpha & \sigma\upsilon\alpha \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\upsilon\beta \end{vmatrix} = \eta\alpha\sigma\upsilon\upsilon\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha = \eta\alpha(\alpha - \beta).$$

$$\mathcal{D}(B) = \begin{vmatrix} \epsilon\upsilon\alpha & \eta\alpha \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\upsilon\beta \end{vmatrix} = \epsilon\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\beta - \eta\alpha\eta\mu\beta = \epsilon\upsilon\alpha(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Gamma) &= \begin{vmatrix} \eta\alpha + \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\upsilon\beta + \sigma\upsilon\alpha \\ \epsilon\upsilon\beta - \sigma\upsilon\alpha & \eta\alpha - \eta\mu\beta \end{vmatrix} = \eta\alpha^2 - \eta\mu\beta^2 - (\epsilon\upsilon\beta^2 - \epsilon\upsilon\alpha^2) = \\ &= \eta\alpha^2 + \epsilon\upsilon\alpha^2 - (\eta\mu\beta^2 + \sigma\upsilon\upsilon\beta^2) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Delta) &= \begin{vmatrix} 1 & \log_a \alpha \\ \log_a \beta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_a \beta \cdot \log_a \alpha = 1 - \log_a \beta \cdot \frac{1}{\log_a \beta} = \\ &= - - - = - \end{aligned}$$

7.4. Ορίζουσες Πινάκων Τρίτης τάξης

Ας εξετάσουμε τον πίνακα τρίτης τάξης:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι κάθε στοιχείο του πίνακα βρίσκεται στη διασταύρωση μιας γραμμής και μιας στήλης. π.χ. το στοιχείο a_{12} ορίζει την πρώτη γραμμή και την δεύτερη

στήλη. Αν τώρα διαγράψουμε αυθαίρετα την γραμμή και την στήλη κάποιου στοιχείου του πίνακα, τότε θα πάρουμε νέο πίνακα δεύτερης τάξης.

π.χ. για το στοιχείο a_{12} είναι $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ για το στοιχείο a_{23} , είναι $A_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, κ.λ.π.

Επειδή τα στοιχεία του πίνακα τρίτης τάξης είναι 9 και οι υποπίνακες δεύτερης τάξης θα είναι 9: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζουμε πίνακα τρίτης τάξης

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

λέγεται ο αριθμός που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \quad (6)$$

$$\text{όπου } M_{11} = \mathcal{D}(A_{11}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$M_{12} = \mathcal{D}(A_{12}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \quad (7)$$

$$M_{13} = \mathcal{D}(A_{13}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

Ο τύπος (6) που ορίζει την ορίζουσα τρίτης τάξης με την βοήθεια των (7) θα πάρει την μορφή:

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{D}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (8)$$

Από τον τύπο (8) προκύπτει ότι η ορίζουσα του πίνακα τρίτης τάξης είναι άθροισμα έξι προσθετέων. Κάθε προσθετέας είναι γινόμενο τριών στοιχείων, ένα από κάθε γραμμή και κάθε στήλη.

Ο τύπος (8) σχηματικά παρουσιάζεται ως εξής:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} - & - & - & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Ο τύπος (8) λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα τρίτης τάξης από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.

Οι ιδιότητες 1-7 των οριζουσών του πίνακα δεύτερης τάξης ισχύουν και για τις ορίζουσες των πινάκων τρίτης τάξης.

Παραδείγματα:

602. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Γράβουμε:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}, \text{ τότε}$$

$$\mathcal{D} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 + 1 - 2 - 6 = -1$$

Με τον τύπο (6) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 2(-3) + 1(-6) = \\ &= -2 + 6 + 1 - 6 = -1. \end{aligned}$$

603. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & \beta & \gamma \\ a^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Εδώ θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα 7 για να πάρουμε δύο μηδενικά στην πρώτη γραμμή, γι' αυτό αφαιρούμε την τρίτη στήλη από την πρώτη και την δεύτερη διαδοχικά. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-\gamma & \beta & \gamma \\ a^3-\gamma^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-\gamma & \beta-\gamma & \gamma \\ a^3-\gamma^3 & \beta^3-\gamma^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} a-\gamma & \gamma \\ a^3-\gamma^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a-\gamma & \beta-\gamma \\ a^3-\gamma^3 & \beta^3-\gamma^3 \end{vmatrix} = \\ &= (a-\gamma)(\beta^3-\gamma^3) - (\beta-\gamma)(a^3-\gamma^3) = \\ &= (a-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2 - a^2 - a\gamma - \gamma^2) = \\ &= (a-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta^2+\beta\gamma - a^2 - a\gamma) = \\ &= (a-\gamma)(\beta-\gamma)[(\beta-a)(\beta+a) + \gamma(\beta-a)] = \\ &= (a-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta-a)(\beta+a+\gamma). \end{aligned}$$

7.5. Ορίζουσες πινάκων ανώτερων τάξεων

Τις ορίζουσες των πινάκων 4-ης και άνω τάξεων θα ορίσουμε αναλογικά με την ορίζουσα του πίνακα τρίτης τάξης.

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & \dots & a_{vv} \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζουσα του πίνακα A v -ης τάξης λέγεται ο αριθμός που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & \dots & a_{vv} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{v-1} a_{1v}M_{1v} \quad (9)$$

Στον τύπο (9) M_{ij} είναι η ορίζουσα του υποπίνακα $(v-1)$ -ης τάξης που ανειστοίχει στο στοιχείο a_{ij} . Η ορίζουσα M_{ij} λέγεται ελάσσων ορίζουσα.

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα v -ετης τάξεως υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mathcal{D}(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{i+v} a_{iv}M_{iv} \quad (10)$$

Ο τύπος (10) λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας από τα στοιχεία κάποιας γραμμής. Όμοιος τύπος μπορεί να γραφεί και για ανάπτυγμα από τα στοιχεία κάποιας στήλης (οι γραμμές και οι στήλες είναι ισοδύναμες στην ορί-

ζουσα). Οι ιδιότητες 1-7 των οριζουσών δεύτερης τάξης, επεκτείνονται και στις οριζούσες ανωτέρων τάξεων.

Παραδείγματα:

604. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\alpha & 1 \\ \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\beta & 1 \\ \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Εδώ μπορούμε να κάνουμε δύο μηδενικά στην πρώτη στήλη αφαιρώντας από την πρώτη και δεύτερη γραμμή την πρώτη:

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\alpha & 1 \\ \alpha\beta\beta & \beta\gamma\beta & 1 \\ \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\alpha & 1 \\ \alpha\beta\beta - \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\beta - \beta\gamma\alpha & 0 \\ \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\gamma - \beta\gamma\alpha & 0 \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \alpha\beta\beta - \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\beta - \beta\gamma\alpha \\ \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma & \beta\gamma\gamma - \beta\gamma\alpha \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 1 \cdot [(\alpha\beta\beta - \alpha\beta\gamma)(\beta\gamma\gamma - \beta\gamma\alpha) - (\beta\gamma\beta - \beta\gamma\alpha)(\alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma)] =$$

$$= \alpha\beta\beta\beta\gamma - \alpha\beta\beta\gamma\alpha - \alpha\beta\gamma\beta\gamma + \alpha\beta\gamma\alpha\beta - \alpha\beta\gamma\beta\alpha +$$

$$+ \alpha\beta\gamma\alpha\beta - \alpha\beta\gamma\alpha\beta =$$

$$= (\alpha\beta\beta\beta\gamma - \alpha\beta\beta\gamma\alpha) + (\alpha\beta\gamma\alpha\beta - \alpha\beta\gamma\beta\alpha) +$$

$$+ (\alpha\beta\gamma\alpha\beta - \alpha\beta\gamma\beta\alpha) = \alpha\beta(\beta - \gamma) + \alpha\beta(\alpha - \beta) + \alpha\beta(\gamma - \alpha).$$

605. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} x & x' & ax + \beta x' \\ y & y' & ay + \beta y' \\ z & z' & az + \beta z' \end{vmatrix}$$

Λύση:

Εδώ θα εφαρμόσουμε τις ιδιότητες της ορίζουσας.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x & x' & ax + \beta x' \\ y & y' & ay + \beta y' \\ z & z' & az + \beta z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & ax \\ y & y' & ay \\ z & z' & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x' & \beta x' \\ y & y' & \beta y' \\ z & z' & \beta z' \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} x & x' & x \\ y & y' & y \\ z & z' & z \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} x & x' & x' \\ y & y' & y' \\ z & z' & z' \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

αφού οι ορίζουσες έχουν από δύο ίδιες στήλες.

606. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} (a_1 + \beta_1)^2 & a_1^2 + \beta_1^2 & a_1\beta_1 \\ (a_2 + \beta_2)^2 & a_2^2 + \beta_2^2 & a_2\beta_2 \\ (a_3 + \beta_3)^2 & a_3^2 + \beta_3^2 & a_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Τα στοιχεία της τρίτης στήλης πολλαπλασιάζουμε επί 2 και τα προσθέτουμε στα στοιχεία της δεύτερης στήλης:

$$\begin{vmatrix} (a_1 + \beta_1)^2 & a_1^2 + \beta_1^2 & a_1\beta_1 \\ (a_2 + \beta_2)^2 & a_2^2 + \beta_2^2 & a_2\beta_2 \\ (a_3 + \beta_3)^2 & a_3^2 + \beta_3^2 & a_3\beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1 + \beta_1)^2 & a_1^2 + \beta_1^2 + 2a_1\beta_1 & a_1\beta_1 \\ (a_2 + \beta_2)^2 & a_2^2 + \beta_2^2 + 2a_2\beta_2 & a_2\beta_2 \\ (a_3 + \beta_3)^2 & a_3^2 + \beta_3^2 + 2a_3\beta_3 & a_3\beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1 + \beta_1)^2 & (a_1 + \beta_1)^2 & a_1\beta_1 \\ (a_2 + \beta_2)^2 & (a_2 + \beta_2)^2 & a_2\beta_2 \\ (a_3 + \beta_3)^2 & (a_3 + \beta_3)^2 & a_3\beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

607. Να δείξετε ότι

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \sigma\omega \frac{a-\beta}{2} & \omega\mu \frac{a+\beta}{2} & \sigma\omega \frac{a+\beta}{2} \\ \sigma\omega \frac{\beta-\gamma}{2} & \omega\mu \frac{\beta+\gamma}{2} & \sigma\omega \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \sigma\omega \frac{\gamma-a}{2} & \omega\mu \frac{\gamma+a}{2} & \sigma\omega \frac{\gamma+a}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[\omega\mu(\beta-a) + \omega\mu(\gamma-\beta) + \omega\mu(a-\gamma) \right]$$

Λύση:

Γράβουμε το ανάπτυγμα από τα στοιχεία της πρώτης στήλης:

$$\mathcal{D} = (-1)^{1+1} \sigma\omega \frac{a-\beta}{2} \begin{vmatrix} \omega\mu \frac{\beta+\gamma}{2} & \sigma\omega \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \omega\mu \frac{\gamma+a}{2} & \sigma\omega \frac{\gamma+a}{2} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \omega\mu \frac{a+\beta}{2} \begin{vmatrix} \sigma\omega \frac{a+\beta}{2} & \sigma\omega \frac{a+\beta}{2} \\ \sigma\omega \frac{\beta+\gamma}{2} & \sigma\omega \frac{\beta+\gamma}{2} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \sigma\omega \frac{\gamma-a}{2} \begin{vmatrix} \omega\mu \frac{a+\beta}{2} & \sigma\omega \frac{a+\beta}{2} \\ \omega\mu \frac{\beta+\gamma}{2} & \sigma\omega \frac{\beta+\gamma}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma\omega \frac{a-\beta}{2} \left(\omega\mu \frac{\beta+\gamma}{2} \sigma\omega \frac{\gamma+a}{2} - \sigma\omega \frac{\beta+\gamma}{2} \omega\mu \frac{\gamma+a}{2} \right) - \sigma\omega \frac{\beta-\gamma}{2} \left(\omega\mu \frac{a+\beta}{2} \sigma\omega \frac{a+\beta}{2} - \right.$$

$$\left. - \sigma\omega \frac{a+\beta}{2} \omega\mu \frac{a+\beta}{2} \right) + \sigma\omega \frac{\gamma-a}{2} \left(\omega\mu \frac{a+\beta}{2} \sigma\omega \frac{\beta+\gamma}{2} - \sigma\omega \frac{a-\beta}{2} \omega\mu \frac{\beta+\gamma}{2} \right) =$$

$$= \sigma\omega \frac{a-\beta}{2} \omega\mu \left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\gamma+a}{2} \right) - \sigma\omega \frac{\beta-\gamma}{2} \omega\mu \left(\frac{a+\beta}{2} - \frac{a+\beta}{2} \right) +$$

$$+ \sigma\omega \frac{\gamma-a}{2} \omega\mu \left(\frac{a+\beta}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2} \right) = \sigma\omega \frac{a-\beta}{2} \omega\mu \frac{\beta-a}{2} - \sigma\omega \frac{\beta-\gamma}{2} \omega\mu \frac{\beta-\gamma}{2} +$$

$$+ \sigma\omega \frac{\gamma-a}{2} \omega\mu \frac{a-\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left(2\omega\mu \frac{\beta-a}{2} \sigma\omega \frac{\beta-a}{2} + 2\omega\mu \frac{\gamma-\beta}{2} \sigma\omega \frac{\gamma-\beta}{2} + \right.$$

$$\left. + 2\omega\mu \frac{a-\gamma}{2} \sigma\omega \frac{a-\gamma}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\omega\mu(\beta-a) + \omega\mu(\gamma-\beta) + \omega\mu(a-\gamma) \right].$$

608. Να υπολογίσετε την ορίζουσα τετάρτης τάξης

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \delta \\ 0 & \beta & 0 & \gamma \\ 1 & 2 & \gamma & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix},$$

Λύση:

Επειδή η τρίτη γραμμή έχει τρία μηδενικά, γράφουμε το ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot \delta \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix} = \\ &= \delta \cdot \gamma (\alpha\beta - 0 \cdot \beta) = \alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

609. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

Λύση: Από την δεύτερη και τρίτη γραμμή αφαιρούμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Τότε παίρνουμε:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y-x & (y-x)(y+x) \\ z-x & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(z+x-y-x) = (y-x)(z-x)(z-y).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Υπολογίσετε τις οριζούσες:

610.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} \quad (\text{Απ.: } 100)$$

611

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix} \quad (\text{Απ.: } 20)$$

612.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \alpha+x & x & x \\ x & \beta+x & x \\ x & x & \gamma+x \end{vmatrix} \quad (\text{Απ.: } x(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) + \beta\gamma\alpha)$$

613.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} \quad (\text{Απ.: } 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να υπολογίσετε τις οριζούσες:

614.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \eta\mu^2\alpha & 1 & \epsilon\omega\nu^2\alpha \\ \eta\mu^2\beta & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\beta \\ \eta\mu^2\gamma & 1 & \epsilon\omega\nu^2\gamma \end{vmatrix} \quad (\text{Απ.: } 0).$$

615.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma & 1 \\ \beta+\gamma & \alpha & 1 \\ \alpha+\gamma & \beta & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Απ.: } 0)$$

616.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} \quad (\text{ΑΠ.: } (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)).$$

617.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad (\text{ΑΠ.: } 17)$$

618.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} (\alpha+\beta)^2 & \gamma^2 & \gamma^2 \\ \alpha^2 & (\beta+\gamma)^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & \beta^2 & (\gamma+\alpha)^2 \end{vmatrix} \quad \text{ΑΠ.: } 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$$

619. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

620. Να λύσετε την ανίσωση :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$$

7.6. Αντίστροφος Πίνακας. Τρόπος υπολογισμού.

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας A n -στής n -αξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ο πίνακας A^{-1} λέγεται αντίστροφος

του πίνακα A αν και μόνο αν αληθεύσει η ισότητα

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \quad (11)$$

όπου $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίος πίνακας.

Αποδεικνύεται ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει μοναδικό ανείστροφο πίνακα, αν και μόνο αν, η ορίζουσα του $|A| \neq 0$.

Για να βρούμε τον τύπο του ανείστροφου πίνακα τρίτης τάξης αποδεικνύουμε μερικές βοήθηματικές σχέσεις.

Αν εμφολισουμε με $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, τότε η ορίζουσα πίνακα τρίτης τάξης

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

μπορεί να εκφραστεί από τους τύπους:

$$\mathcal{D}(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\mathcal{D}(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad \eta$$

$$\mathcal{D}(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$\mathcal{D}(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\mathcal{D}(A) = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\mathcal{D}(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία κάποιας γραμμής (ή στήλης) με A_{ij} που ανειστροφούν σε στοιχεία άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε το άθροισμα των γινομένων είναι μηδέν.

Πράγματι, έστω $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$

$$= a_{11}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = 0.$$

Έτσι έχουμε:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$$

.....

Έστω λοιπόν πίνακας επιτυς τάξης A με $\mathcal{D}(A) \neq 0$, τότε ο ανειδερόφορος πίνακας υπάρχει και ορίζεται από τον τύπο:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (12).$$

Απόδειξη:

Πρέπει και αρκεί να είναι:

$$A^{-1} \cdot A = E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{21}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{31}}{\mathcal{D}} \\ \frac{A_{12}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{22}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{32}}{\mathcal{D}} \\ \frac{A_{13}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{23}}{\mathcal{D}} & \frac{A_{33}}{\mathcal{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31}) & \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32}) & \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33}) \\ \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{12}a_{21} + A_{22}a_{21} + A_{32}a_{31}) & \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{12}a_{22} + A_{22}a_{22} + A_{32}a_{32}) & \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{12}a_{23} + A_{22}a_{23} + A_{32}a_{33}) \\ \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{13}a_{31} + A_{23}a_{31} + A_{33}a_{31}) & \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{13}a_{32} + A_{23}a_{32} + A_{33}a_{32}) & \frac{1}{\mathcal{D}} (A_{13}a_{33} + A_{23}a_{33} + A_{33}a_{33}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E.$$

Ο αριθμός A_{ij} λέγεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του πίνακα.

Ας δούμε τώρα πως θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα δεύτερης τάξης. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ με } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Πρώτος τρόπος:

Εφαρμόζουμε τον τύπο (12)

$$\text{Έχουμε: } A^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Ομως

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = -a_{12}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = a_{11}.$$

Τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Άλλος τρόπος: Ας λύσουμε αμέσως το πρόβλημα ξεκινώντας

από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} x_{11} = -\frac{a_{22}}{a_{21}} x_{21} \\ a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ x_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_{22} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x_{11} = -\frac{a_{22}}{a_{21}} x_{21} \\ x_{21} \left(-\frac{a_{22}a_{11}}{a_{21}} + a_{12} \right) = 1 \\ x_{22} \left(-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} + a_{22} \right) = 1 \\ x_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_{22} \end{array} \right) \Leftrightarrow \\
 & \left(\begin{array}{l} x_{11} = -\frac{a_{22}}{a_{21}} x_{21} \\ x_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ x_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_{22} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ll} x_{21} = -\frac{a_{21}}{\mathcal{D}} & x_{11} = -\frac{a_{22}}{\mathcal{D}} \\ x_{22} = \frac{a_{11}}{\mathcal{D}} & x_{12} = -\frac{a_{12}}{\mathcal{D}} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Έτσι παίρνουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Παράδειγμα 1: Να βρείτε τον αντιστρεφόμενο πίνακα A^{-1} αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Λύση:

Κατ' αρχήν βρίσκουμε τον ορίζοντα του πίνακα A

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(A) &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
 &= 3 \cdot 1 - 2 - 0 = 1 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (12), έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \text{ όπου}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \textcircled{3} & \dots & 2 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & \dots & \textcircled{2} & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & \dots & 2 & \dots & \textcircled{-1} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & \dots & 2 & \dots & -1 \\ \textcircled{1} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & \dots & \textcircled{1} & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & \dots & 1 & \dots & \textcircled{2} \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \textcircled{2} & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & \dots & \textcircled{2} & \dots & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Τελικά παίρνουμε τον αντίστροφο πίνακα:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2:

Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του A αν

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Σύμφωνα με τον τύπο (12) τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου αλλάζουν μεταξύ τους θέση και τα στοιχεία της άλλης διαγωνίου αλλάζουν πρόσημο. Έτσι παίρνουμε:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

7.7. Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Με την βοήθεια των πινάκων θα δώσουμε μία μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= d_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Το σύστημα (14) λέγεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (μεταβλητές).

Αν συμβολίσουμε με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(A) \neq 0, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

τότε το σύστημα (14) θα γραφεί στη μορφή

$$AX = B \quad (15)$$

Την εξίσωση (15) πολλαπλασιάζουμε επί τον πίνακα A^{-1} , που είναι αντίστροφος του πίνακα A :

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \iff$$

$$EX = A^{-1}B \iff$$

$$X = A^{-1}B \iff$$

$$X = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} a_{22}d_1 - a_{12}d_2 \\ -a_{21}d_1 + a_{11}d_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$x_1 = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} (a_{22}d_1 - a_{12}d_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} (a_{11}d_2 - a_{21}d_1).$$

Επειδή $a_{22}d_1 - a_{12}d_2 = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \mathcal{D}_1$ και

$$a_{11}d_2 - a_{21}d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 \\ a_{12} & d_2 \end{vmatrix} = \mathcal{D}_2, \text{ τότε}$$

$$x_1 = \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 \\ a_{12} & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (16)$$

Οι τύποι (16) ορίζουν μοναδική λύση του συστήματος (14) αν και μόνο αν $\mathcal{D}(A) \neq 0$ δηλαδή

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Παραδειγμα

Να λύσετε το σύστημα με τη βοήθεια των πινάκων

$$7x + 3y = 10$$

$$2x - 9y = -7.$$

Λύση:

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \text{ και } \Delta(A) = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -63 - 6 = -69 \neq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix} \text{ Τότε}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Βρίσκουμε τον $A^{-1} = -\frac{1}{69} \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ οπότε

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{69}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{69} \begin{bmatrix} -90 & +21 \\ -20 & -49 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -69 \\ -69 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{69}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

$$y = 1.$$

Έστω τώρα το γραμμικό σύστημα:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1v}x_v = d_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2v}x_v = d_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + \dots + a_{vv}x_v = d_v$$

Ας συμπολίσουμε με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & \dots & a_{vv} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_v \end{bmatrix}$$

Τότε το παραπάνω σύστημα θα γράφει στη μορφή:

$$AX = B \Leftrightarrow$$

$$\boxed{X = A^{-1}B} \quad (17) \text{ , αν } \mathcal{D}(A) \neq 0.$$

Παραδείγματα

Να λύσετε με την βοήθεια των πινάκων τα συστήματα:

621.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

Λύση:

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{D}(A) \neq 0$, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \text{ και σύμφωνα με}$$

τον τύπο (17) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{bmatrix} d_1 A_{11} + d_2 A_{21} + d_3 A_{31} \\ d_1 A_{12} + d_2 A_{22} + d_3 A_{32} \\ d_1 A_{13} + d_2 A_{23} + d_3 A_{33} \end{bmatrix} \quad (i)$$

Αλλά είναι γνωστό ότι:

$$d_1 A_{11} + d_2 A_{21} + d_3 A_{31} = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathcal{D}x$$

$$d_1 A_{12} + d_2 A_{22} + d_3 A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \mathcal{D}y$$

$$d_1 A_{13} + d_2 A_{23} + d_3 A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix} = \mathcal{D}z,$$

Ευνενώς από τη σχέση (i), παίρνουμε:

$$x = \frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}(A)}$$

$$y = \frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}(A)} \quad (18)$$

$$z = \frac{\mathcal{D}z}{\mathcal{D}(A)}$$

Οι τύποι (18) λέγονται τύποι του Κραμερ

622.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3$$

Λύση

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } \mathcal{D}(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0, B = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{31} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17,$$

$$A_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Έτσι πήραμε:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε από την εξίσωση

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \text{έχουμε}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -24 & 15 \\ -1 & +34 & -21 \\ 0 & -4 & +3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -8, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να λύσετε με τη βοήθεια των πινάκων τα γραμμικά συστήματα:

$$623. \quad 3x - 5y = 13$$

$$2x - 7y = 81$$

$$(ΑΠ.: x=16, y=7).$$

$$624. \quad 3x - 4y = 1$$

$$3x + 4y = 18$$

$$(ΑΠ.: x=2, y=3)$$

$$625. \quad 2ax - 3\beta y = 0$$

$$3ax - 6\beta y = a\beta$$

$$(ΑΠ.: x=-\beta, y=-\frac{2}{3}a)$$

$$626. \quad 5x - 3y = 4$$

$$7x - 5y = -8$$

$$(ΑΠ.: x=11, y=17).$$

$$627. \quad 3x - 4y = 2$$

$$4x + 3y = -14$$

$$(ΑΠ.: x=y=-2).$$

$$628. \quad 2x - 8y + z = 8$$

$$x - 3y - 5z = 6$$

$$3x + y - 7z = -4$$

$$(ΑΠ.: x=2, y=-3, z=1).$$

$$629. \quad 7x + 2y + 3z = 15$$

$$5x - 3y + 2z = 15$$

$$10x - 11y + 5z = 36$$

$$(ΑΠ.: x=2, y=-1, z=1).$$

$$630. \quad 2x + y = 5$$

$$x + 3z = 16$$

$$5y - z = 10$$

$$(ΑΠ.: x=1, y=3, z=5).$$

COPYRIGHT ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

