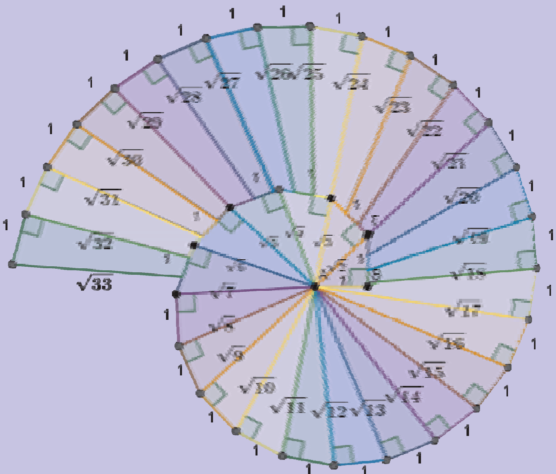
130

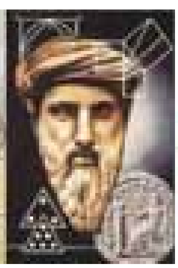
Μαθηματικό περιοδικό για το

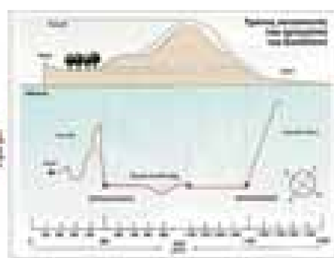
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

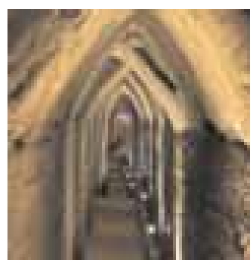
Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2023 ευρώ 3,00









Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 130

Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2023

Τιμή Τεύχους 3,00 Εύρω

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

✓ Γενικά άρθρα

Η μέθοδος της Εξάντλησης και των Αδιαιρέτων
Γιάννης Νικολόπουλος 1

ΕΥΠΑΛΙΝΟΣ: «από τα Μέγαρα στη Σάμο»
Θανάσης Χριστόπουλος 5

Τα οφέλη της Τεχνολογίας στην διδασκαλία
Όλγα Τζελέτα 8

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

● **Α΄ Τάξη**

Ασκήσεις στις Εξισώσεις
Χρήστος Κουστέρης 11

Ασκήσεις στη Συμμετρία
Λέοντας Κουτσούρης 15

● **Β΄ Τάξη**

Η χρήση των συναρτήσεων για την επίλυσηπροβλημάτων
Στέργιος Τουρναβίτης 18

Πυθαγόρειο Θεώρημα
Θέμις Καψή 25

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

● **Γ΄ Τάξη**

Εξισώσεις δευτέρου βαθμού - Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων
Αρδαβάνη Καλλιόπη - Μάλλιαρης Χρήστος 29

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με 0 ω 90
Λέοντας Κουτσούρης 35

✓ Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών 39

✓ Διάφορα ΟΧΙ Αδιάφορα

Ο Γκάρι Κασπάροφ και η Εύα
Επιμέλεια: Παναγιώτης Χριστόπουλος 44

2024
Παναγιώτης Χριστόπουλος 45

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ
Παναγιώτης Χριστόπουλος 48

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Πολλές ευχές σε όλους τους μαθητές και καθηγητές για μια καλή και δημιουργική χρονιά.

Καλή πρόοδο, Χρονιά Πολλά

$$2024=(20+24)^2+(20+24)\times 2$$

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

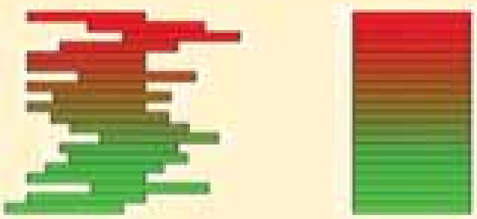
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Η μέθοδος της Εξάντλησης και των Αδιαιρέτων

Γιάννης Νικολόπουλος

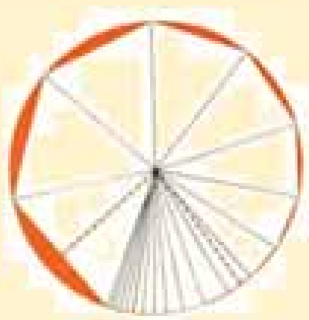
Καταρχάς, η Μαθηματική Γνώση κατακτιέται καλύτερα, δηλαδή πιο εύκολα και σε βάθος όταν συνδέεται με την πραγματικότητα. Βέβαια η πραγματικότητα σχετίζεται με το σήμερα, ωστόσο θα ασχοληθούμε με ζητήματα της ιστορίας των Μαθηματικών. Τι ήθελαν να υπολογίσουν οι Μαθηματικοί πριν αιώνες; Για παράδειγμα οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήθελαν να υπολογίσουν τον όγκο, δηλαδή να μετρήσουν πόσο στάρι περιείχε μια αποθήκη σταριού, όπου το σχήμα «έμοιαζε» με κύλινδρο. Πώς θα έκαναν αυτόν τον υπολογισμό;

Εδώ θα αναφέρουμε την Μέθοδο της Εξάντλησης του Αρχιμήδη και την Μέθοδο των Αδιαιρέτων του Καβαλιέρι, που κατά την γνώμη μας ταιριάζουν αρκετά χωρίς να ταυτίζονται. Η λογική αυτών των μεθόδων ή αρχών, όπως συνηθίζεται να λέγονται, στηρίζεται στην άποψη ότι το άθροισμα των πολύ μικρών τεμαχίων που δεν μπορούν να διαιρεθούν σε μικρότερα μπορεί να μετασχηματιστεί με μια σχετική τροποποίηση της θέσης που καταλαμβάνουν στο χώρο.

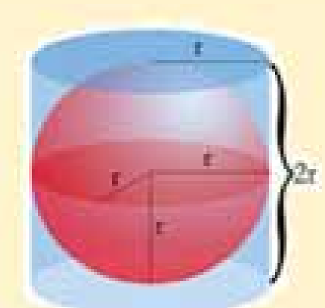


Διαμέριση και τροποποίηση θέσης

Με τα νομίσματα τροποποίηση θέσης

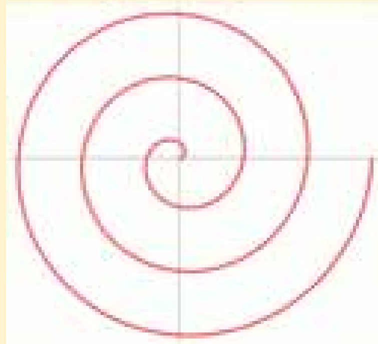


Εμβαδόν του Κύκλου, υπολογισμός μέσω Εξαντλητικής Διαμέρισης



Η σχέση των όγκων περιγεγραμμένου στη σφαίρα κυλίνδρου

Δύο λόγια για τον Αρχιμήδη τον Συρακούσιο (287 π.Χ.–212 π.Χ.), ήταν αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός και αστρονόμος. Μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές ιδιοφυΐες όλων των εποχών και ένας από τους λαμπρότερους επιστήμονες της κλασικής αρχαιότητας. Η παρακαταθήκη του στη φυσική είναι, μεταξύ άλλων, οι βάσεις της στατικής της υδροστατικής και μια εξήγηση της αρχής του μοχλού. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης, για τον υπολογισμό της περιοχής και έδωσε μια εξαιρετικά ακριβή προσέγγιση για τον αριθμό π. Όρισε, επίσης, την επίπεδη έλικα (σπείρα) που φέρει το όνομά του, τύπους για τον όγκο των επιφανειών εκ περιστροφής και ένα ευφυές σύστημα για την έκφραση πολύ μεγάλων αριθμών. Επίσης στην ενασχόλησή του με τα στερεά είχε αποδείξει ότι ο όγκος μιας σφαίρας είναι τα 2/3 του αντίστοιχου περιγεγραμμένου στη σφαίρα κλειστού κυλίνδρου και αυτό θεωρείται ως το μεγαλύτερο των μαθηματικών επιτευγμάτων του. Μελέτησε με λεπτομέρεια τις ιδιότητες της επίπεδης έλικας στο έργο του «Περί Ελίκων». Κάνοντας χρήση των γεωμτρικών ιδιοτήτων της έλικας αυτής, κατάφερε να κατασκευάσει μία λύση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, παρακάμπτοντας έτσι την "αυστηρή κατασκευή" που απαιτούσε αποκλειστικά την χρηση κανόνα και διαβήτη.



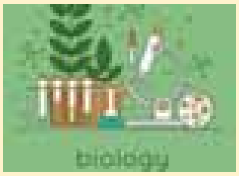
Να γνωρίσουμε με δύο λόγια και τον Καβαλιέρι, ο Μποναβεντούρα Καβαλιέρι (1598 μ.Χ.–1647 μ.Χ.) ήταν Ιταλός μαθηματικός και μέλος του θρησκευτικού τάγματος των Τζεζουάτι. Είναι γνωστός για την ενασχόληση του με προβλήματα της οπτικής και της κίνησης, την αρχή του Καβαλιέρι ή αλλιώς την μέθοδο των Αδιαιρέτων. Με βάση μια παλαιότερη μελέτη του Γαλιλαίου, ο Καβαλιέρι ανέπτυξε την μέθοδο των αδιαιρέτων και δημοσίευσε την μελέτη το 1635 με τίτλο: Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (Μέθοδος για την ανάπτυξη μιας νέας γεωμετρίας των συνεχών αδιαιρέτων). Στο εν λόγω έργο, μια περιοχή θεωρείται πως αποτελείται από τεράστιο αριθμό παράλληλων τμημάτων, και ο όγκος αποτελείται από ένα τεράστιο αριθμό παράλληλων επιπέδων. Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται αδιαίρετα ως προς το εμβαδό και τον όγκο αντίστοιχα και αποτελούν τα συστατικά στοιχεία της μεθόδου του Καβαλιέρι. Δηλαδή έχει πραγματοποιηθεί μια τέτοια διαμέριση που δεν γίνεται να συνεχισθεί και γιαυτό ακριβώς το λόγο ονομάζεται των «αδιαιρέτων».

Σε τούτη ακριβώς τη λογική, της εξαντλητικής διαμέρισης που δεν γίνεται νέα διαίρεση εφόσον βρισκόμαστε στο αδιαίρετο, αναφέρουμε ότι η μέθοδος της Εξάντλησης του Αρχιμήδη και η μέθοδος των Αδιαιρέτων του Καβαλιέρι μοιάζουν σα δύο σταγόνες νερό.

Είναι αναγκαίο να τονίσουμε ότι η επιστήμη κάνει άλματα και εκεί που κάποια άποψη πριν 2-3 αιώνες αποτελούσε θέσφατο σήμερα δεν ισχύει και για παράδειγμα η λέξη «αδιαίρετο» ήταν για παράδειγμα το μόριο του άνθρακα (C) ωστόσο σήμερα έχει διαιρεθεί το μόριο σε άτομα και τα άτομα σε κουάρκς και δεν γνωρίζουμε που θα φτάσουμε, έτσι και το πεπερασμένο «αδιαίρετο» του Καβαλιέρι δεν είναι πλέον σήμερα «αδιαίρετο», ωστόσο δεν μπορούμε να αμφισβητήσουμε την συνολική προσφορά αυτής της μεθόδου στη μαθηματική επιστήμη.

Αυστηρές και μη αυστηρές μέθοδοι στα Μαθηματικά

Να ερμηνεύσουμε τη διαφορά μεταξύ αυτού που ονομάζουμε στα Μαθηματικά «αυστηρή» και μη «αυστηρή» μέθοδο. Συχνά συναντάμε εκφράσεις όπως: «με αρκετή ακρίβεια» ή «χωρίς ιδιαίτερη μαθηματική αυστηρότητα» κ.τ.λ. κυρίως σε βιβλία και έρευνες Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Σαφώς τα Μαθηματικά «υπακούουν» σε κανόνες με αυστηρότητα, ωστόσο όταν απομακρυνόμαστε από τα Θεμελιωμένα-Θεωρητικά Μαθηματικά και προχωράμε προς τα Εφαρμοσμένα, η πράξη/εφαρμογή δείχνει την ορθότητα που μάλιστα δηλώνεται: «Με αρκετή ακρίβεια». Παρατηρούμε ότι αυτή η έκφραση έχει ποσοτική ερμηνεία αφού περιέχει τη λέξη «αρκετά» που απέχει πολύ από την έκφραση με «ακρίβεια» ή με «πλήρη ακρίβεια».



Ωστόσο η εξέλιξη και η συμπεριφορά των περισσότερων φαινομένων τόσο στη φύση όσο και στην κοινωνία όπως ο ηλεκτρισμός, ο μαγνητισμός, η μηχανική, η οπτική, η θερμότητα, η οικονομία, η ψυχολογία, η βιολογία, η ιατρική κ.τ.λ. μπορούν να περιγράφουν με μεγάλη ακρίβεια με (ανώτερες πανεπιστημιακού επιπέδου) εξισώσεις. Μάλιστα με κάποια γενικότητα χωρίς την ιδιαίτερη μαθηματική αυστηρότητα, μπορούμε να απαντήσουμε στα ανωτέρω θέματα που αποτελούν κορυφαία ζητήματα της ζωής.

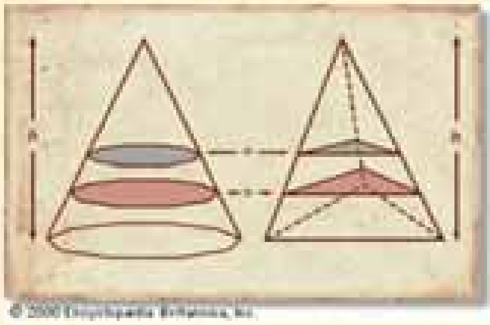
Ας σταθούμε στη Διδακτική Μέθοδο της Επίλυσης Προβλήματος, ταιριάζει περισσότερο με τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, ξεκινά συνήθως από την άτυπη γνώση και οδηγεί με βήματα στην τυπική. Η άτυπη γνώση εν προκειμένω είναι η σχεδόν ακριβής υπολογιστική και η τυπική γνώση είναι η θεμελιωμένη που στηρίζεται στην αποδεικτική διαδικασία. Σε σχέση με τις αρχές της Εξάντλησης ή των Αδιαιρέτων βρισκόμαστε στην περιοχή της άτυπης γεωμετρίας. Η άτυπη γεωμετρία προετοιμάζει το μαθητή για τη θεωρητική/τυπική γεωμετρία που διδάσκεται στο Γυμνάσιο, και περισσότερο στο Λύκειο. Με με την άτυπη γεωμετρία οι μαθητές δέχονται ερεθίσματα και εξοικειώνονται, για παράδειγμα, όταν ταξινομούν (στερεά) ανάλογα με το σχήμα ή το μέγεθος, έτσι αποκτούν εμπειρίες και προσεγγίζουν έννοιες από την πράξη.

Υπάρχει αναγκαιότητα, τουλάχιστον από το Γυμνάσιο, της «στροφής» της μαθηματικής παιδείας προς τα ζητήματα που απασχολούν την κοινωνία και να αναδείξουμε πρακτικά προβλήματα που θα τραβήξουν το ενδιαφέρον των μαθητών και θα επιβεβαιώσουν την αξία των Μαθηματικών. Σήμερα στην αναπτυγμένη ανθρωπότητα κυριαρχεί η διδασκαλία STEM (Science, Technology, Engineering & Mathematics), όπου συνταιριάζουν οι υπόλοιπες θετικές επιστήμες με τα Μαθηματικά και βέβαια χωρίς τα Μαθηματικά δεν θα είχαμε την σημερινή εξέλιξη. Να σημειωθεί ότι η επίλυση προβλήματος, ταιριάζει περισσότερο με τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και ξεκινά συνήθως από την άτυπη γνώση και οδηγούμαστε με βήματα στην τυπική. Όταν οι μαθητές ‘εθισθούν’ από τους εκπαιδευτικούς με την επίλυση προβλημάτων, τότε διαμορφώνουν μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά.

Άρα τα Θεωρητικά-Αποδεικτικά Μαθηματικά αποτελούν τη βάση και τη θεμελίωση, επίσης συμβάλουν στην ανάπτυξη του Νου ωστόσο τα Εφαρμοσμένα μας προσφέρουν την Σύγχρονη Εξέλιξη.

Κατά τον Καβαλιέρι μπορούμε να πεισθούμε ότι δύο πυραμίδες ή κώνοι, με ίσες βάσεις και ίσα ύψη έχουν ίσους όγκους, αν τα εν λόγω στερεά τα τεμαχίσουμε σε φέτες με επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις και θεωρήσουμε αυτές τις φέτες, κατά προσέγγιση, ως [ελάχιστα] πρίσματα ή κυλίνδρους.”

Στο διπλανό σχήμα ο B. Cavalieri παρουσιάζει έναν κώνο και μια πυραμίδα. Οι οριζόντιες διατομές τους στο ίδιο ύψος είναι ίσες και επεξηγεί ότι τα δύο στερεά έχουν τον ίδιο όγκο. Τα εν λόγω στερεά έχουν βάσεις (κύκλο και τρίγωνο) με ίσα εμβαδά και επιπλέον είναι ισοϋψή. (h).



Ο Γαλιλαίος και ο Καβαλιέρι

Ο Γαλιλαίος είχε ισχυρή επιρροή στον Καβαλιέρι και ο Καβαλιέρι επικοινωνούσε μαζί του και του έγραψε τουλάχιστον 112 επιστολές. Ο Γαλιλαίος είπε γι' αυτόν, «λίγοι, αν υπάρχουν, από τον Αρχιμήδη, έχουν εμβαθύνει τόσο μακριά και τόσο βαθιά στην επιστήμη της γεωμετρίας».

Γαλιλαίος

Στο αναφερθέν έργο του «Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota» (Μπολόνια, 1635), προέβλεψε τον απειροελάχιστο λογισμό του Leibnitz και με μια ιδιοφυή σκέψη εφάρμοσε τα αδιαίρετα στην Σπείρα του Αρχιμήδη. Δεδομένης της εξαιρετικά τεχνικής φύσης του, το εν λόγω βιβλίο, αν και εκτιμήθηκε πολύ στον κύκλο του Γαλιλαίου και θεωρήθηκε αριστούργημα από τις επόμενες γενιές, δεν έγινε πλήρως κατανοητό από τους σύγχρονούς του. Ο ίδιος ο Γαλιλαίος, συντετριμμένος εκείνα τα χρόνια από την καταδίκη του*, δεν μπόρεσε να αφιερώσει τη δέουσα προσοχή στο έργο του Καβαλιέρι.

Καβαλιέρι

Ο Γαλιλαίος ήξερε τα μαθηματικά της γεωμετρίας και των αναλογιών και δεν συμμετείχε στην προσπάθεια-που προκλήθηκε, από τους μαθητές του κύκλου του Cavalieri και Torricelli-να επεκτείνει την μελέτη του στο βασίλειο των μαθηματικών.

Ως πρακτικό συμπέρασμα

Το νόημα αυτής της δημοσίευσης, πέρα της ιστορικής αναδρομής, σχετίζεται με την υπόδειξη ή καλύτερα την προτροπή μιας διδακτικής που οφείλει να στηρίζεται στην πράξη, να εκμαιεύει τα θέματα μέσα από τη ζωή, όπως και από την ιστορική εξέλιξη της Μαθηματικής Επιστήμης. Επίσης αξίζει να εξηγούμε ή καλύτερα να αφηγούμαστε πως οι Μεγάλοι Έλληνες της Αρχαιότητας και οι αντίστοιχοι Ευρωπαίοι τους τελευταίους αιώνες πλησίαζαν με μεθοδικό τρόπο τα μαθηματικά προβλήματα και όχι μόνο.

---

* Ο Γαλιλαίος όπως είναι γνωστό είχε την περιπέτειά του με την Ιερά Εξέταση στο γνωστό θέμα αν γυρίζει η Γη ή ο Ήλιος. Στην ουσία αν το σύστημα είναι Ηλιοκετρικό ή Γεωκεντρικό.

ΕΥΠΑΛΙΝΟΣ: *«από τα Μέγαρα στη Σάμο»*

Θανάσης Χριστόπουλος

Ίσως θα έχετε ακούσει ή θα έχετε επισκεφθεί το Ευπαλίνειο όρυγμα που βρίσκεται στο όμορφο νησί μας στη φημισμένη Σάμο. Με δυο λόγια αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από ένα μεγάλο τεχνικό έργο ένα τεράστιο τούνελ, το οποίο κατασκεύασε ο μηχανικός Ευπαλίνος στη Σάμο με ανάθεση του τύραννου του νησιού Πολυκράτη.

Η Σάμος την εποχή που έγινε το έργο είχε μεγάλη οικονομική δύναμη, ήταν σύμμαχος της Αιγύπτου. Είχε ως μεγαλύτερη πόλη-πρωτεύουσα το σημερινό Πυθαγόρειο. Άρχοντας του νησιού ήταν ο Πολυκράτης ο πληθυσμός της πόλης του Πυθαγορείου μεγάλωνε και το αγαθό, που πλέον δεν επαρκούσε, ήταν το νερό. Στη Σάμο μακριά από την πόλη υπήρχε μία πηγή, αλλά μεταξύ της πηγής και της πόλης υπήρχε ένα μεγάλο βουνό τότε ο Πολυκράτης έμαθε για ένα σπουδαίο μηχανικό τον Ευπαλίνο από τα Μέγαρα.

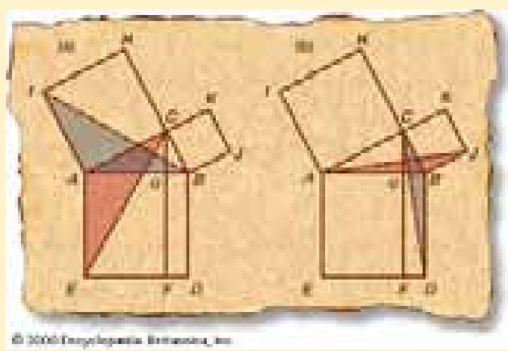
Του ανέθεσε το έργο να μεταφέρει το νερό της πηγής στο Πυθαγόρειο. Ο Ευπαλίνος σκέφτηκε ότι πρέπει να τρυπήσει το βουνό. Αν έβαζε μία ομάδα σκαπανέων να αρχίσει να τρυπάει το βουνό, κάποια στιγμή θα ήταν πολύ μεγάλη η απόσταση να βγάζουν το χώμα και να προχωρούν, οπότε το έργο θα καθυστερούσε πολύ. Έτσι αποφάσισε να βάλει δύο ομάδες η μία να αρχίσει από την πλευρά του βουνού κοντά στην πηγή και η άλλη από την πλευρά της πόλης. Εδώ βρίσκεται το μεγαλείο αυτού του εγχειρήματος. Οι μαθηματικοί υπολογισμοί του Ευπαλίνου είναι πέρα από κάθε φαντασία!!! έπρεπε να είναι τέτοιοι ώστε, οι δύο ομάδες να συναντηθούν στο κέντρο του βουνού.

Καταλαβαίνουμε ότι με ελάχιστη παρέκκλιση θα μπορούσε μία ομάδα να βρεθεί πάνω από την άλλη ή να βρεθεί μία δίπλα από την άλλη και Συνεπώς να μη συναντηθούν ποτέ!!!

Ο Ευπαλίνος κατάφερε οι δύο ομάδες να συναντηθούν και τελικά να υδροδοτηθεί το Πυθαγόρειο. Μέχρι και σήμερα να φτάνει νερό μέσα από το Ευπαλίνειο όρυγμα. Σκεφτείτε 2.500 χρόνια πριν!!!

Το έργο κατασκευάστηκε μεταξύ του 550 και 530 π.Χ. υδροδοτούσε την πόλη μέχρι τον 7ο αιώνα Δηλαδή για πάνω από 1.100 χρόνια.

Ο Ηρόδοτος που επισκέφτηκε τον 5ο αιώνα προ Χριστού την Σάμο μας αναφέρει τα τρία μεγάλα έργα του Πολυκράτη στη Σάμο.



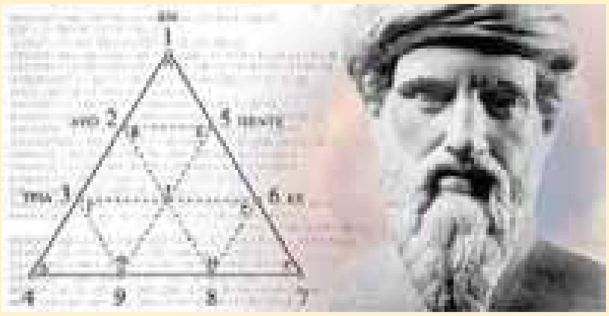
1) Ο μόλος του λιμανιού με μήκος περίπου δύο στάδια και βάθος 20 οργιές

2) Ο ναός της Ήρας στο Ηραίο, πού είναι ο μεγαλύτερος όσων είχε δει ο Ηρόδοτος και

3) το Ευπαλίνειο όρυγμα το οποίο είχε μήκος περίπου 7 στάδια (1.036 m)το ύψος του βουνού ήταν 150 οργιές (270m) το

Ευπαλίνειο όρυγμα ήταν 1,8m σε πλάτος και 1,8m περίπου σε ύψος, το κανάλι του νερού μέσα σε αυτό, στο πλάι είχε βάθος(4m-8m) και πλάτος 0,6m. Σήμερα το επισκέψιμο τμήμα του μνημείου είναι περίπου 120 m από το νότιο στόμιο.

Ποιος ήταν όμως ο Ευπαλίνος και πως ο Πολυκράτης τον εμπιστεύτηκε για ένα τέτοιο μεγάλο έργο? ας ψάξουμε λίγο και να ερμηνεύσουμε κάποια δεδομένα.

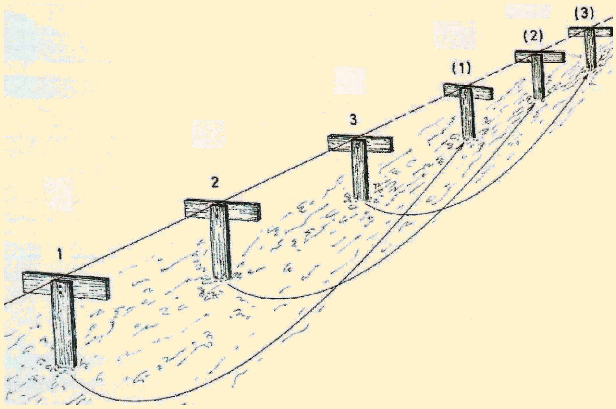


Αν σήμερα θέλουμε να κάνουμε ένα μεγάλο τεχνικό έργο, ποιον θα εμπιστευτούμε άραγε? θα εμπιστευτούμε τον οποιοδήποτε? ή θα επιλέξουμε κάποιον που έχει να μας παρουσιάσει ένα παρόμοιο τεχνικό έργο ίδιας περίπου δυσκολίας που έχει κατασκευάσει? Άρα μήπως για αυτό επέλεξε τον Ευπαλίνο? Μήπως ο Ευπαλίνος είχε πριν φτιάξει παρόμοιο έργο? πως θα τα ψάξουμε? Ίσως έχετε προσέξει στην Εθνική Οδό Αθηνών-Κορίνθου στην Κακιά Σκάλα το δεύτερο μεγάλο τούνελ που λέγεται «Ευπαλίνος» γιατί άραγε? απλά γιατί ο Ευπαλίνος ήταν από τα Μέγαρα εκεί λοιπόν στα Μέγαρα θα αναζητήσουμε το πρωτόλειο έργο του Ευπαλίνου πού ήταν η διαφήμιση του για να τον επιλέξει ο Πολυκράτης.

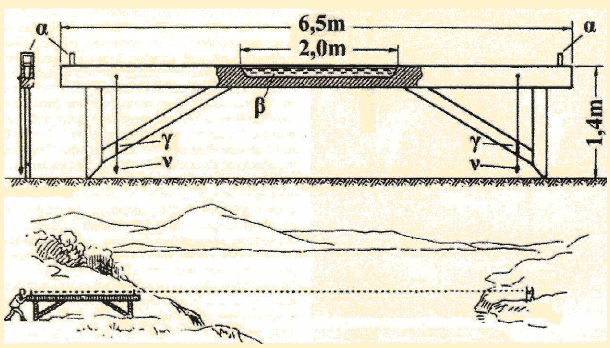
Τα «θαύματα» του Ευπαλίνου στα Μέγαρα.

Τρία από τα σημαντικότερα αρχαία μνημεία συνδέονται με τον αρχαίο μηχανικό Ευπαλίνο και με το Θεαγένη, αμφότεροι Μεγαρείς.

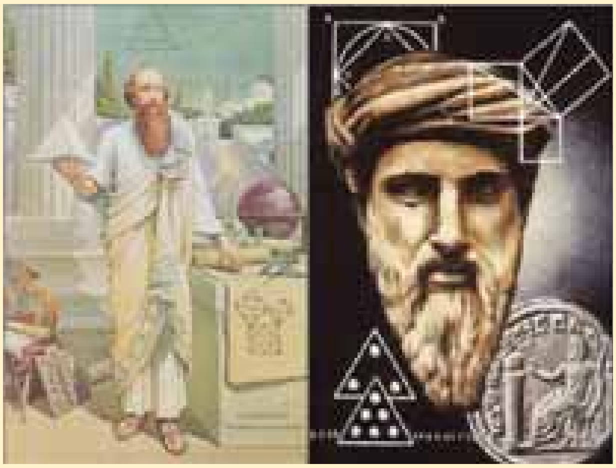
Η Κρήνη του Θεαγένους που έχει πάρει το όνομα του τυράννου Θεαγένους αποδίδεται στον Ευπαλίνο και αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα και μεγαλύτερα κτίσματα υδροδότησης. Ένα υπόγειο υδραγωγείο που κατασκευάστηκε τον 6ο αιώνα προ Χριστού και φαίνεται ότι αποτελεί το πρωτόλειο έργο του Ευπαλίνου. Επίσης έχει εντοπιστεί στη θέση «όρκος» και αποτελείται από υδρομάστευση και σήραγγες που συνέλεγαν και μετέφεραν το νερό στην πόλη με τη βοήθεια της φυσικής κλίσης. Το νερό από το υδραγωγείο οδηγούνταν με λιθόκτιστο αγωγό στην κεντρική Κρήνη της πόλης τη Κρήνη του Θεαγένους.



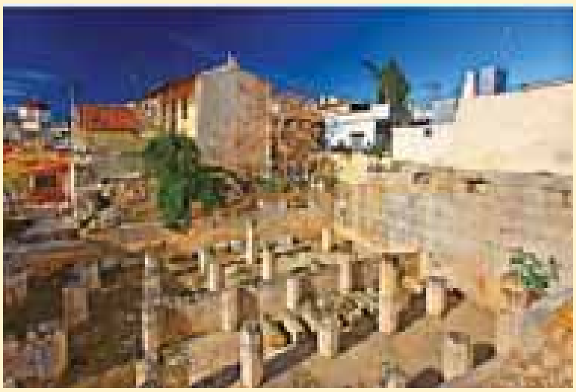
Όπως έχει εξηγήσει η αρχαιολόγος **Παναγιώτα Αυγερινού** το υδραγωγείο εμφανίζει ομοιότητες με το περίφημο υδραγωγείο της Σάμου.



Το γεγονός αυτό μαζί με τη χρονολόγηση του έργου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για πρωτόλειο έργο του Ευπαλίνου που καταγόταν από τα Μέγαρα και ήταν γιός του **Ναυστρόφου** από την κατασκευή του απέκτησε την απαιτούμενη εμπειρία για την τεχνική αρτιότητα που απαιτείτο, για το σχεδιασμό ενός τόσο μεγάλου και σύνθετου έργου όπως το Ευπαλίνειο όρυγμα.



Στο νότιο τμήμα της πόλης δίπλα στον οχυρωματικό περίβολο έχει αποκαλυφθεί τρίτο δημόσιο έργο ύδρευσης η νότια Κρήνη που χρονολογείται στις αρχές του 5ου αιώνα προ Χριστού, ως σύλληψη αποτελεί συνδυασμό των δύο προηγούμενων έργων καθώς συνδύαζε άντληση και αποθήκευση νερού.



η Κρήνη του Θεαγένους

το Ευπαλίνειο όρυγμα στη Σάμο

Η αποκαλούμενη «Κρήνη του Θεαγένους».
Ένα υπόγειο υδραγωγείο,
που κατασκευάστηκε τον 6ο αιώνα π.Χ.,
και φαίνεται ότι αποτελεί πρωτόλειο έργο του
περίφημου Μεγαρίτη αρχιτέκτονα Ευπαλίνου,
έφεραν στο φως οι ανασκαφές της Γ' ΕΠΚΑ
στην αγροτική περιφέρεια των Μεγάρων.

Παλαιότερες **μονάδες μέτρησης μήκους**

1) Ο μικρός πήχυς 0,648m
υποδιαιρέσεις:
μικρός πήχυς=8 ρούπια ,1 ρούπι= 8,1cm

2) Ο τεκτονικός πήχυς 0,75m

3) Η οργυά ή οργιά 1,8m

4) το στάδιο (Αττικό) 184,87m ή **185,15m** ή184,98

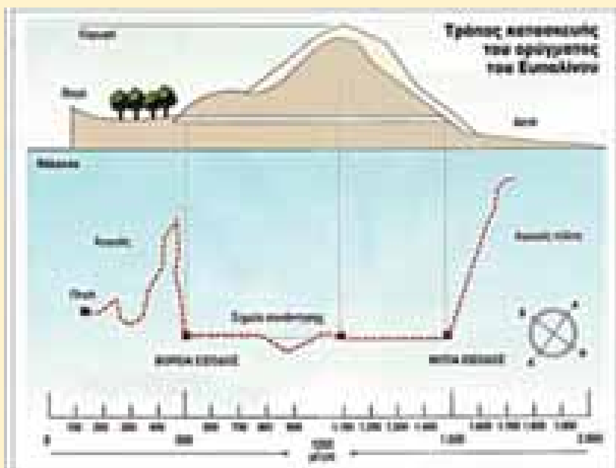
5) το στάδιο (Ολυμπίας) 192,27m

6) το στάδιο (Επιδαύρου) 181,08 m

7) το στάδιο (Δελφών) 177,55m

8) το στάδιο (Αλεξανδρινό) 157,5m

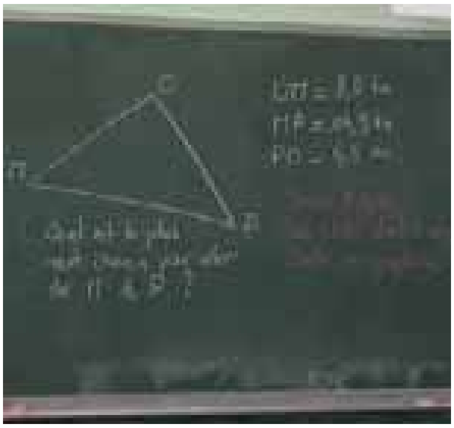
9) ο παρασάγγης 30 στάδια (30*185,15μ=5555m)



Τα οφέλη της Τεχνολογίας στην διδασκαλία

Όλγα Τζελέτα

Το δια ζώσης μάθημα δεν μπορεί να αντικατασταθεί και δεν θα αντικατασταθεί όσο και να εξελιχθεί η τεχνητή νοημοσύνη. Η παρουσία του καθηγητή δίπλα στο μαθητή και του μαθητή δίπλα στον καθηγητή είναι η ζωή, η ενέργεια, η ψυχική μετάγγιση και το πνευματικό δέσιμο που υπάρχει μεταξύ μαθητών και καθηγητών. Μήπως όμως τα οφέλη της τεχνολογίας τα είχαμε υποτιμήσει τόσο καιρό στον κλάδο της εκπαίδευσης;



ONLINE ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ! ΓΙΝΕΤΑΙ ΤΕΛΙΚΑ;

Τα προηγούμενα χρόνια υπήρξε ανάγκη για ONLINE διδασκαλία, αλλά πλήθος ερωτημάτων από γονείς και μαθητές που έφταναν καθημερινά σε εμένα και στους συναδέλφους μου: Μήπως δεν θα καταλαβαίνω; Πώς θα κάνουμε νέα παράδοση μέσω του υπολογιστή; Εάν δεν ακούω καθαρά ή εάν δεν βλέπω; Πώς θα εκφράσω τις απορίες μου ; Μήπως θα χάσω το ενδιαφέρον μου;

Πήρα λοιπόν την πρωτοβουλία να τις απαντήσω με ερωτήσεις αντίστοιχα!

Βρισκόμαστε στην εποχή της τεχνολογίας και μόλις μας ζητήθηκε να το δείξουμε, φοβισμένοι προσπαθήσαμε να το αρνηθούμε με κάθε τρόπο! Χιλιάδες οι τρόποι που ένας εκπαιδευτικός μπορεί να ανταπεξέλθει. Το μάθημα μπορεί να προσαρμοστεί σαν να είναι δια ζώσης και φυσικά στον κλάδο των μαθηματικών συνδέεται απόλυτα με μερικές εφαρμογές .

Σχήματα, συναρτήσεις, μετατοπίσεις, γεωμετρικές έννοιες, διαδραματίζονται επιτέλους ζωντανά μπροστά στους μαθητές! Το μάθημα μαγνητοφωνείται και βιντεοσκοπείται από τον καθηγητή, ώστε να αναρτηθεί και να μπορεί να παρακολουθηθεί και δεύτερη φορά σε περίπτωση προβλήματος με την σύνδεση, την εικόνα ή τον ήχο από τους μαθητές.

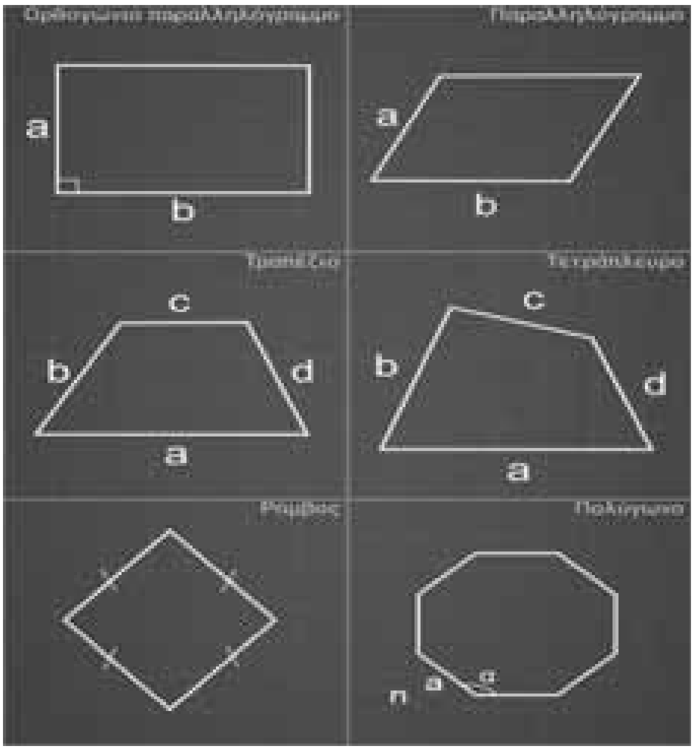
Μήπως τελικά αποκτά περισσότερο ενδιαφέρον έτσι ;

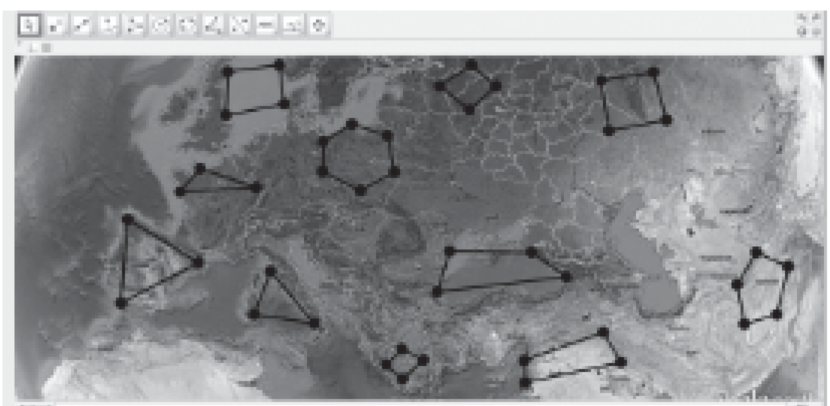
Όλα δείχνουν πως τα μαθηματικά και η τεχνολογία είναι απόλυτα συνδεδεμένα. Στην τεχνολογία άλλωστε όλα είναι δομημένα στη μαθηματική γλώσσα. Δειλά- δειλά το μάθημα ξεκίνησε. Η ευχαρίστηση και το ενδιαφέρον των μαθητών δείχνει να είναι ιδιαίτερα ανεβασμένο. Προφανώς, το δια ζώσης μάθημα έχει οφέλη που ποτέ και με τίποτα δεν θα αντικατασταθούν, ωστόσο είναι τώρα η ευκαιρία μας να δείξουμε πώς η μαθηματική επιστήμη είναι ένας κλάδος που μπορεί να επιβιώσει και να αναδειχθεί κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες .

Μία επιστήμη η οποία είναι τόσο εμπλουτισμένη με σχήματα, γραφήματα και τον σχεδιασμό αυτών, ίσως να είχε υποτιμηθεί όταν όλα αυτά ήταν σχεδιασμένα με το χέρι σε έναν λευκό πίνακα. Βέβαια η δια ζώσης διδασκαλία σήμερα απαιτεί την χρήση διαδραστικού πίνακα στα σχολεία, με σύνδεση στο διαδίκτυο ώστε να έχει ο καθηγητής όλα τα μέσα για ένα τέλειο μάθημα. Η απάντηση λοιπόν, στο εάν τελικά γίνεται η διδασκαλία μαθηματικών online , είναι πως ναι, γίνεται. Υπάρχουν χρήσιμες εφαρμογές για τον καθηγητή των Μαθηματικών για την δια ζώσης ή την εξ΄ αποστάσεως διδασκαλία:

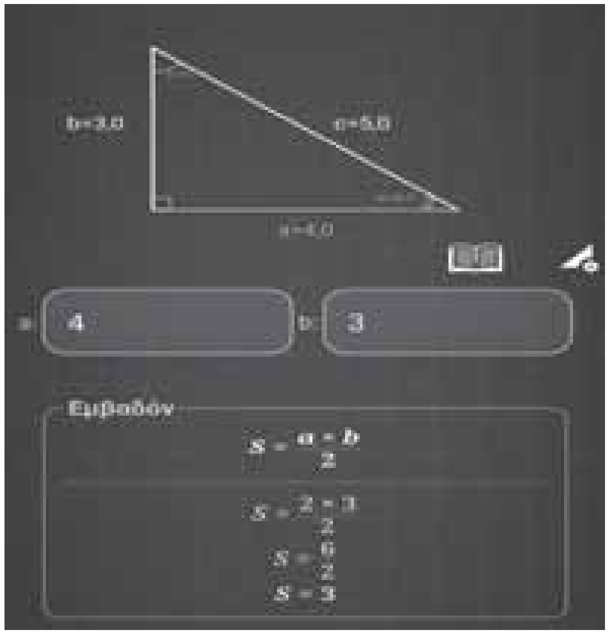
geogebra
γράφημα 3D
Desmos graphing calculator
MathAlly graphing calculator

<u>ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΑ ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ</u>





Επίλυση σχολικής άσκησης στην γεωμετρία (Β' Γυμνασίου)

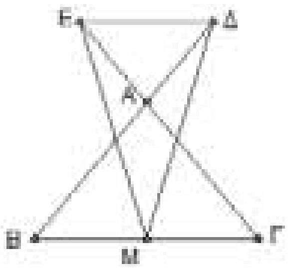


Υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου

Επίλυση σχολικής άσκησης στη γεωμετρία (Α' Λυκείου)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση

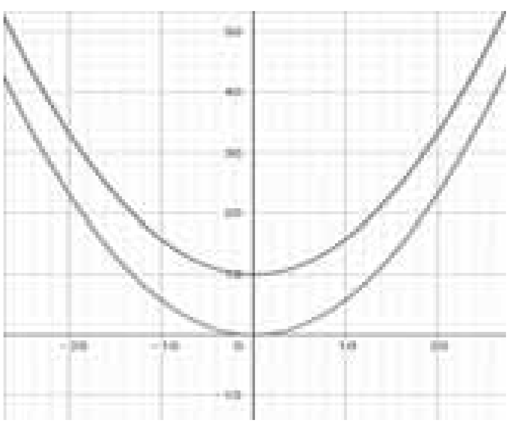


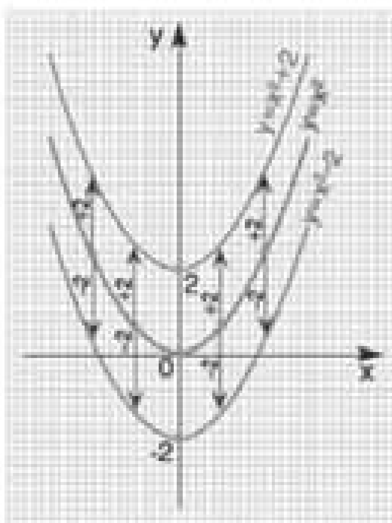
Συγκρίνω τα τρίγωνα : ΜΔΒ και ΜΕΓ

Έχουν:

1) ΜΒ = ΜΓ
2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς
3) ΒΔ = ΓΕ αθροίσματα ίσων πλευρών

Μετατόπιση της συνάρτησης f(x) =x ^{2}





Εξισώσεις

Χρήστος Κουστέρης

Πρόβλημα

Ο Γιάννης σκέφτηκε έναν αριθμό, στον οποίο πρόσθεσε το 5, διπλασίασε το αποτέλεσμα και στη συνέχεια πρόσθεσε το τριπλάσιο του αριθμού που σκέφτηκε. Το τελικό αποτέλεσμα ήταν το 45. Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό που σκέφτηκε ;

Λύση

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι δύσκολο να λυθεί με πρακτική αριθμητική.

Μια τεχνική είναι να μετατρέψουμε τις λέξεις σε πράξεις , ώστε να σχηματιστεί μία ισότητα που να περιέχει μέσα της τον αριθμό που ψάχνουμε. Το ερώτημα είναι πως θα γράψω αυτό που ψάχνω. Εδώ λοιπόν χρειαζόμαστε ένα ουδέτερο σύμβολο που θα παραστάνει τον αριθμό που ψάχνουμε ,ένα γράμμα, οποιοδήποτε ,έστω το x .

Με λόγια	Με σύμβολα
Ο Γιάννης σκέφτηκε έναν αριθμό.	x
πρόσθεσε το 5	$x+5$
διπλασίασε το αποτέλεσμα .	$2\cdot(x+5)=2x+10$
πρόσθεσε το τριπλάσιο του αριθμού που σκέφτηκε .	$2x+10 \quad +3x$
το τελικό αποτέλεσμα ήταν το 45 .	$2x+10+3x=45$
Άρα το πρόβλημα με σύμβολα είναι :	$2x+10+3x=45$
Επιμεριστική ιδιότητα $(2+3)\cdot x$	$5x+10=45$
Στο άθροισμα έχουμε άγνωστο τον έναν προσθετέο άρα	$5x=45-10$
Θέλουμε να βρούμε την τιμή του x ενώ ξέρουμε την τιμή του 5πλασιού του	$5x=35$
Βρήκαμε τον αριθμό	$x=7$

Είμαστε σίγουροι ότι είναι αυτός;

Μπορούμε να ελέγξουμε αν όντως είναι αυτός, κάνοντας τα βήματα του προβλήματος και βάζοντας στη θέση του αριθμού που σκέφτηκε τον αριθμό που βρήκαμε.

Με λόγια	Με πράξεις
Ο Γιάννης σκέφτηκε έναν αριθμό	7
πρόσθεσε το 5	$7+5=12$
διπλασίασε το αποτέλεσμα	$2\cdot 12=24$
πρόσθεσε το τριπλάσιο του αριθμού που σκέφτηκε	$24+3\cdot 7=24+21$
το τελικό αποτέλεσμα ήταν το 45 .	$24+21=45$

Άρα βρήκαμε τον σωστό αριθμό που σκέφτηκε ο Γιάννης.

Μία ισότητα που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και υπάρχει και ένας άγνωστος με την μορφή γράμματος του οποίου ψάχνουμε την τιμή για να ισχύει η ισότητα την ονομάζουμε εξίσωση.

Λύση ή **ρίζα** της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που την επαληθεύει .

Στις εξισώσεις ο άγνωστος παριστάνεται με κάποιο γράμμα και το συνηθέστερο είναι το γράμμα x χωρίς αυτό να είναι δεσμευτικό.

Μία εξίσωση που δεν επαληθεύεται για καμία τιμή της μεταβλητής λέγεται αδύνατη.

Για παράδειγμα η εξίσωση $x+2=x+3$ είναι αδύνατη ,διότι δεν υπάρχει αριθμός που να την επαληθεύει.

Ενώ μία εξίσωση που επαληθεύεται για όλες τις τιμές του αγνώστου λέγεται ταυτότητα .

Ένα πρόβλημα, με άπειρες λύσεις

- **Σκέψου έναν αριθμό**
- **Βρες το διπλάσιο του**
- **Πρόσθεσε 10**
- **Διαίρεσε το αποτέλεσμα με το 2**
- **Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες**
- **Το αποτέλεσμα είναι 5**

Μπορώ να βρω τον αριθμό που σκέφτηκες;

Με λόγια	Με σύμβολα
Σκέψου έναν αριθμό	x
Βρες το διπλάσιο του	$2x$
Πρόσθεσε 10	$2x+10$
Διαίρεσε το αποτέλεσμα με το 2	$x+5$
Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες	$x+5-x$
Το αποτέλεσμα είναι	$0x+5=5$
Δηλαδή	$0x=0$

Δεν μπορούμε να βρούμε τον αριθμό που σκέφτηκε γιατί μπορεί να είναι οποιοσδήποτε. Αυτό δε σημαίνει ότι δε μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αλλά ότι όλοι οι αριθμοί μπορούν να είναι λύση του.
Με αυτό το παιχνίδι μπορεί να γίνεις ένας μικρός μάγος .

Μια τέτοια εξίσωση που έχει άπειρες λύσεις λέγεται ταυτότητα.

Παρακάτω θα δούμε μερικές μορφές εξισώσεων στην τελική τους μορφή όπου με βάση τις ιδιότητες των πράξεων βρίσκουμε τον άγνωστο.

Εξισώσεις όπου ο άγνωστος είναι προσθετέος

- Η εξίσωση $\boxed{x+\alpha=\beta}$ έχει λύση την $\boxed{x=\beta-\alpha}$

Παράδειγμα 1

Εξίσωση	Τρόπος επίλυσης	Λύση
$x+12=12$	$x=12-12$	$x=0$
$x+\frac{1}{2}=4$	$x=4-\frac{1}{2}$	$x=\frac{7}{2}$
$x+2,23=4,34$	$x=4,34-2,23$	$x=2,11$

Παράδειγμα 2

Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα $34,53$, ο ένας από αυτούς είναι ο $21,12$, να βρείτε τον άλλον αριθμό .

Λύση

Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό που ψάχνουμε τότε είναι $x+21,12=34,53$ δηλαδή $x=34,53-21,12$ άρα $x=13,41$

Εξισώσεις όπου ο άγνωστος είναι ο μειωτέος (αυτός που αφαιρείται)

- Η εξίσωση $\boxed{x-\alpha=\beta}$ έχει λύση την $\boxed{x=\beta+\alpha}$

Παράδειγμα 3

Εξίσωση	Τρόπος επίλυσης	Λύση
$x-1=13$	$x=1+13$	$x=13$
$x-\frac{4}{3}=3$	$x=3+\frac{4}{3}$	$x=\frac{13}{3}$
$x-22,11=1,56$	$x=1,56+22,56$	$x=24,12$
$x-2,1=0$	$x=2,1+0$	$x=2,1$

Παράδειγμα 4

Δυο γωνίες έχουν διαφορά 200° και η μία από αυτές είναι 112°, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η άλλη γωνία .

Λύση

Αν x είναι σε μοίρες η ζητούμενη γωνία τότε $x-112^\circ=200^\circ$ δηλαδή $x=112^\circ+200^\circ$ άρα $x=312^\circ$

Εξισώσεις όπου ο άγνωστος είναι ο αφαιρετέος (αυτός που αφαιρεί)

- Η εξίσωση $\boxed{\alpha-x=\beta}$ έχει λύση την $\boxed{x=\alpha-\beta}$

Παράδειγμα 5

Εξίσωση	Τρόπος επίλυσης	Λύση
$10-x=2,7$	$x=10-2,7$	$x=7,3$
$\frac{1}{3}-x=\frac{1}{4}$	$x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$	$x=\frac{1}{12}$
$5,2-x=\frac{26}{5}$	$x=5,2-\frac{26}{5}$	$x=0$
$4-x=4$	$x=4-4$	$x=0$

Παράδειγμα 6

Σε μια παράσταση κόπηκαν 835 εισιτήρια ενώ το θέατρο είχε χωρητικότητα 1.500 θέσεις. Πόσοι θεατές παρακολούθησαν την παράσταση;

Λύση

Αν x ο αριθμός των θεατών τότε $1500-x=835$ δηλαδή $x=1500-835$ άρα $x=665$ θεατές

Εξισώσεις όπου ο άγνωστός είναι ο παράγοντας γινομένου .

- Η εξίσωση $\boxed{\alpha\cdot x=\beta}$ έχει λύση την $\boxed{x=\frac{\beta}{\alpha}}$

Παράδειγμα 7

Εξίσωση	Τρόπος επίλυσης	Λύση
$3x=33$	$x=\frac{33}{3}$	$x=11$
$\frac{4}{5}x=\frac{2}{9}$	$x=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{5}}$ ή $x=\frac{10}{36}$	$x=\frac{5}{18}$
$2,4x=12$	$x=\frac{12}{2,4}$	$x=5$
$0x=8$	Αφενός δε μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν και αφετέρου κανένας αριθμός αν πολλαπλασιαστεί με το μηδέν δε μπορεί να ισούται με το 8	Η εξίσωση είναι αδύνατη
$0x=0$	Όποιος αριθμός και αν τοποθετηθεί στην θέση του x η εξίσωση επαληθεύεται ,άρα όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.	Η εξίσωση είναι ταυτότητα

Παράδειγμα 8

Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 6cm να βρείτε το μήκος της πλευράς του.

Λύση

Αν x το μήκος της πλευράς του τετραγώνου σε cm τότε $4\cdot x=6$ άρα $x=\frac{6}{4}$ ή $x=1,5cm$

Εξισώσεις όπου ο άγνωστός είναι ο διαιρετέος

- Η εξίσωση $\boxed{x:\alpha=\beta}$ έχει λύση την $\boxed{x=\beta\cdot\alpha}$
- Την εξίσωση $x:\alpha=\beta$ είναι προτιμότερο να την γράφουμε $\frac{x}{\alpha}=\beta$ και να χρησιμοποιούμαι τη μέθοδο του χιαστί αφού τα κλάσματα $\frac{x}{\alpha}$ και $\frac{\beta}{1}$ είναι ισοδύναμα

Παράδειγμα 9

Εξίσωση	Τρόπος επίλυσης	Λύση
$\frac{x}{3}=6$	$x=6\cdot 3$	$x=18$
$\frac{2x}{5}=6$	$2x=5\cdot 6$ **ή** $2x=30$ **ή** $x=\frac{30}{2}$	$x=15$
$\frac{x}{4}=0$	**Ένα κλάσμα είναι μηδέν μόνο όταν ο αριθμητής είναι μηδέν**	$x=0$

Παράδειγμα 10

Η Νεφέλη ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων της που είχε στο πορτοφόλι της για να αγοράσει

πράγματα αξίας $47,3$ ευρώ. Πόσα χρήματα είχε αρχικά στο πορτοφόλι της ;

Λύση

Αν x είναι τα χρήματα που είχε η Νεφέλη τότε $\frac{x}{3}=47,3$ άρα $x=3\cdot 47,3$ ή $x=141,9$ ευρώ

Εξισώσεις όπου ο άγνωστος είναι ο διαιρέτης

- Η εξίσωση $\boxed{\alpha : x=\beta}$ έχει λύση την $\boxed{x=\frac{\alpha}{\beta}}$
- Την εξίσωση $\alpha : x=\beta$ είναι προτιμότερο να την γράφουμε $\frac{\alpha}{x}=\beta$ και να χρησιμοποιούμαι τη μέθοδο του χιαστί αφού τα κλάσματα $\frac{\alpha}{x}$ και $\frac{\beta}{1}$ είναι ισοδύναμα

Παράδειγμα 11

Εξίσωση	Τρόπος επίλυσης	Λύση
$\frac{4}{x}=12$	$x=\frac{4}{12}$	$x=\frac{1}{3}$
$\frac{8,4}{x}=2,1$	$x=\frac{8,4}{2,1}$	$x=4$
$\frac{2}{x}=\frac{6}{27}$	$6x=2\cdot 27$ $6x=54$ $x=\frac{54}{6}$	$x=9$
$\frac{32}{x}=0$	**Ένα κλάσμα είναι μηδέν μόνο όταν ο αριθμητής είναι μηδέν**	**Η εξίσωση είναι αδύνατη**

Παράδειγμα 12

Να βρείτε πόσα μπουκάλια $0,5$lt θα χρειαστούμε ώστε να εμφιαλώσουμε 3.000lt λεμονάδα

Λύση

Αν x ο αριθμός των μπουκαλιών που θα χρειαστούμε τότε $\frac{3000}{x}=0,5$

$\frac{3000}{x}=\frac{1}{2}$ ή $x=3000\cdot 2$ άρα $x=6000$ μπουκάλια.

Συνδυαστικά προβλήματα

Άσκηση 1

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το μήκος του είναι πενταπλάσιο από το πλάτος του. Αν η περίμετρός του είναι 120cm να βρείτε το εμβαδόν του.

Άσκηση 2

Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς φυσικούς που έχουν άθροισμα 1460

Άσκηση 3

Σε μια δεξίωση οι άντρες είναι διπλάσιοι από τις γυναίκες και τριπλάσιοι από τα παιδιά .Αν συνολικά είναι 120 άτομα να βρείτε πόσοι είναι οι άντρες , πόσες οι γυναίκες και πόσα τα παιδιά.

Άσκηση 4

Σε ένα διαγώνισμα που αποτελείται από 20 ερωτήσεις για κάθε σωστή ερώτηση παίρνεις 5 μονάδες ενώ για κάθε λάθος σου αφαιρούν 2 μονάδες. Ένας μαθητής μάζεψε 65 μονάδες , μπορείτε να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Άσκηση 5

Για ένα laptop και 4 smart watch πληρώσαμε 840 ευρώ. Το laptop κοστίζει όσο 3 tablet. Πόσο κοστίζει το ένα tablet πόσο θα πληρώσουμε συνολικά αν πάρουμε ακόμα δύο tablet.

Άσκηση 6

Σε ένα τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία του είναι τριπλάσια από την αμέσως μικρότερή του και εξαπλάσια από την μικρότερη γωνία του .Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Άσκηση 7

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο μία γωνία του είναι 40°. Μπορείτε να βρείτε τα μέτρα των άλλων δύο γωνιών του τριγώνου.

Πρόκληση -πρόσκληση

Καλούμε τους μαθητές μας να μας στείλουν από ένα πρόβλημα που να λύνεται κατασκευάζοντας μία εξίσωση

Α΄Τάξη

Συμμετρία

Λέοντας Κουτσούρης

Συμμετρίες

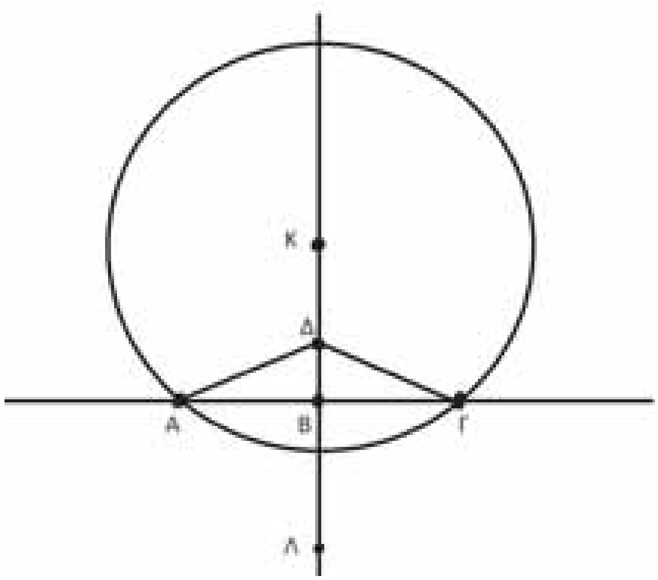
- **Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς μια ευθεία ε** είναι του σημείο Ά με το οποίο συμπίπτει το Α αν διπλώσουμε ένα φύλλο πάνω στην ευθεία ψηλών.
- **Άξονας συμμετρίας** ενός σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε 2 μέρη που συμπίπτουν αν διπλώσουμε το σχήμα πάνω στην ευθεία αυτή.
- **Μεσοκάθετος** ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη σ’αυτό και διέρχεται από το μέσο του.
- **Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς το κέντρο Ο** είναι το σημείο Ά με το οποίο συμπίπτει το Α αν περιστρέφει γύρο από το Ο κατά 180°.
- **Κέντρο συμμετρίας** ενός σχήματος ονομάζεται ένα σημείο γύρο από το οποίο αν περιστρέφει το σχήμα κατά 180° συμπίπτει με τον εαυτό του

Άσκηση 1

Πάνω σε μια ευθεία ε να πάρετε τα 2 αρχικά σημεία Α, Β, Γ ώστε ΑΒ=ΑΓ=12cm. Στο σημείο Β σχεδιάστε την ευθεία ζ κάθετη στην ε και πάνω σε αυτήν να πάρετε το σημείο Δ ώστε ΓΔ=1cm.

α) Να συγκρίνετε τα ΔΑ και ΔΓ.

β) Να σχεδιάσετε ένα κύκλο με ακτίνα 3cm που να περνάει από το Α και Γ.



Λύση

α) Το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΓ άρα ισαπέχει από τα άκρα του και συνεπώς ΔΑ=ΔΓ.

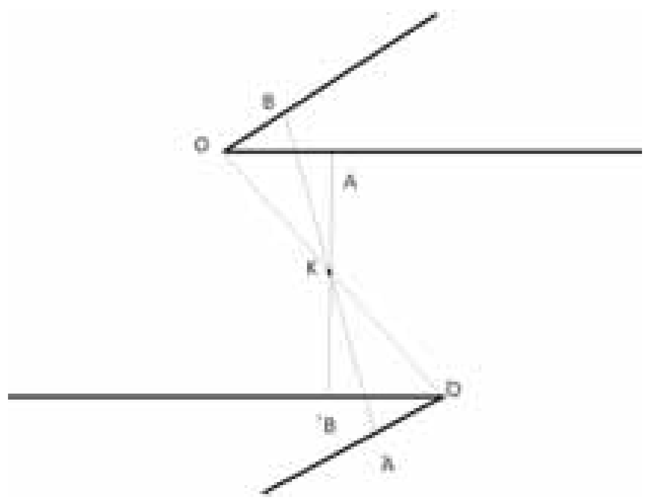
β) Το κέντρο του κύκλου που θα περνάει από τα Α και Β πρέπει να ισαπέχει από αυτά άρα θα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο. Για να βρούμε σχεδιάζουμε τόξο κύκλου με κέντρο το Α ή το Γ και ακτίνες 3cm που τέμνει την μεσοκάθετο σε δύο σημεία Κ και Λ. Ο ζητούμενος κύκλος είναι ο (Κ,ΚΑ) ή ο (Λ,ΛΑ).

Άσκηση 2

Να σχεδιάσετε μία γωνία $\chi\widehat{O}y$ και ένα σημείο Κ. Να κατασκευάσετε τη συμμετρική της $\chi\widehat{O}y$ ως προς το Κ και να την συγκρίνετε με αυτήν.

Λύση

Επειδή μια γωνία εκτός από την



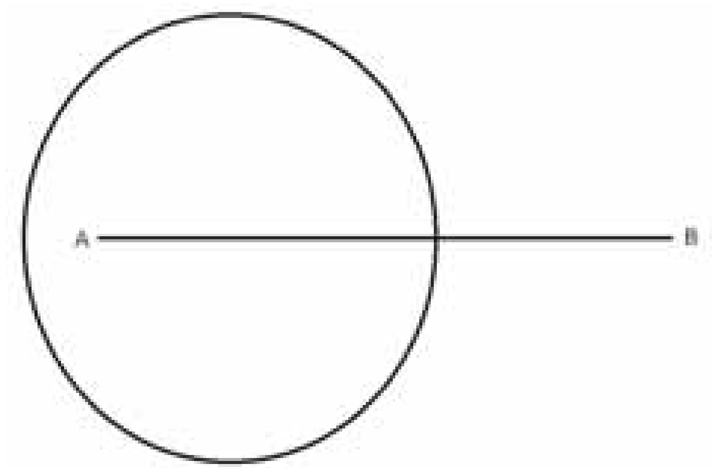
κορυφή δεν έχει άλλα χαρακτηριστικά σημεία επιλέγουμε 2 τυχαία σημεία Α και Β f πάνω στις πλευρές Οχ,Οy αντίστοιχα. Βρίσκουμε τα συμμετρικά των Ο,Α,Β ενώνοντας τα με το κ και προεκτείνοντας άλλο τόσο. F τέλος σχεδιάζουμε τις συμμετρικές γωνίες ενώνοντας κατάλληλα τα Ό , Ά ,’Β. Ισχύει $\acute{}\chi\hat{O}y' = \chi\hat{O}y$ γιατί τα συμμετρικά σχήματα είναι πάντα ίσα.

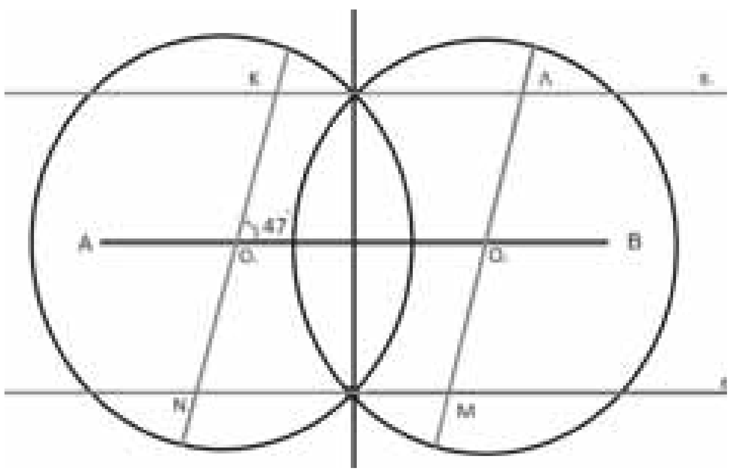
Άσκηση 3

α) Να σχεδιάσεις τον συμμετρικό του κύκλου ως προς την μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

β) Τι παρατηρώ για τα σημεία τομής τους ως προς τις άκρες του ευθυγράμμου τμήματος, να εξηγήσετε την απάντηση σας.

γ) Έστω O_1 και O_2 τα κέντρα των δύο κύκλων που βρίσκονται πάνω στην ΑΒ. Από τα σημεία τομής των κύκλων φέρω παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ως προς την ΑΒ και διαμέτρους των κύκλων ΚΝ , ΛΜ σχηματίζοντας γωνίες 47° με την ΑΒ, να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΚΛΜΝ.





Υπόδειξη:

Δίνω το σχήμα που βοηθά για την απάντηση του α) και γ) ερωτήματος.

Για το β) χρειάζεται ο ορισμός της μεσοκαθέτου (κεφ. Β.2.3) , για το γ) να βρώ ζευγάρια γωνιών (οξειών ή αμβλειών) που είναι ίσες (κεφ. Β.2.6) , καθώς και χρήση γνώσης παραπληρωματικών ή κατακόρυφων γωνιών (κεφ.Β.1.8).

Άσκηση 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παράλληλες μεταξύ τους ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$). Να βρω τις x.

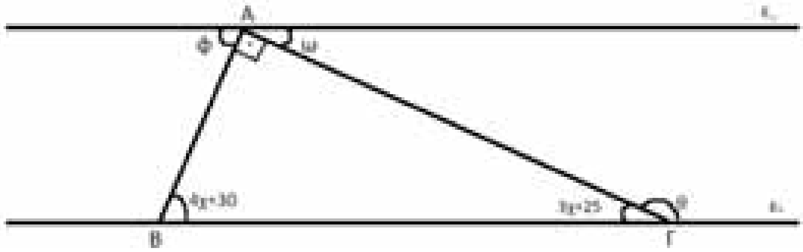
Λύση

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 180°.

Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ η ($\hat{A} = 90°$) και αντικαθιστώ.

$$90° + 4\chi + 30° + 3\chi + 25° = 180°$$
$$7\chi + 145° = 180°$$
$$7\chi = 35°$$
$$\chi = 5$$

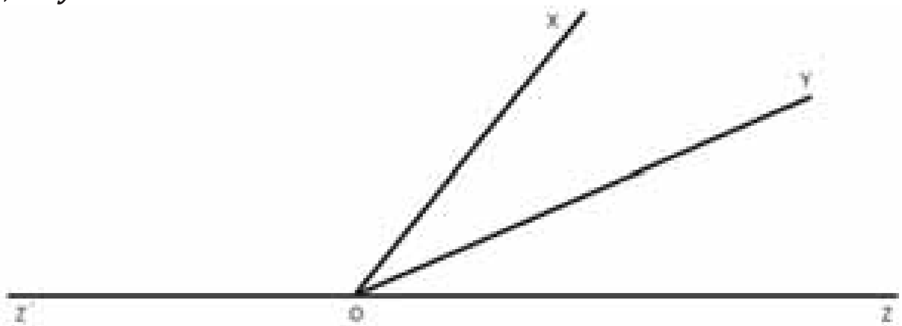
Επομένως $\hat{B} = 50°$ και η $\hat{\Gamma} = 40°$. Οι $\varphi = \hat{B} = 50°$ και $\omega = \hat{\Gamma} = 40°$ ως εντός εναλλάξ γωνίες. Η $\theta = 180° - 40° = 140°$ (θ,40 σχηματίζουν την ευθεία γωνία άρα παραπληρωματικές).



Άσκηση 5

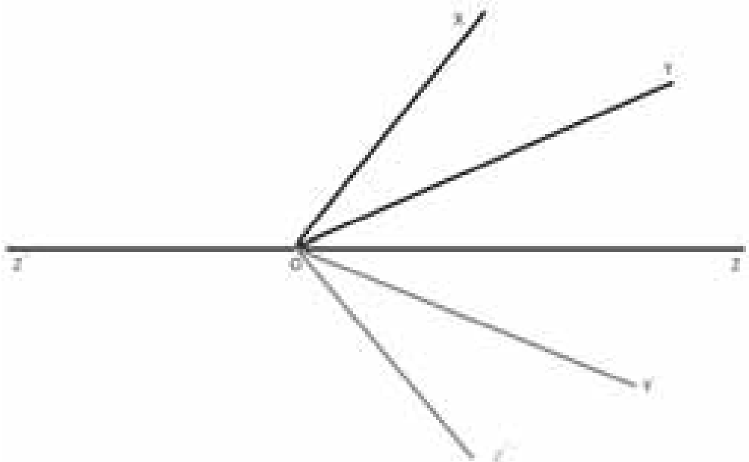
α) Να σχεδιάσεις τη συμμετρική $\chi\hat{O}y$ γωνία ως προς την ευθεία zz'

β) Η Oy διχοτόμος της γωνίας $\chi\hat{O}z$, αν η $\chi\hat{O}z'$ είναι τα $\frac{5}{3}$ των 90° να βρώ τα μέτρα των γωνιών $\chi\hat{O}z$, $x\hat{O}y$



Λύση

α)



β) Η $\chi\hat{O}z'$ είναι τα $\frac{5}{3}$ των 90° άρα $\chi\hat{O}z' = \frac{5}{3} \cdot 90° = 150°$, οι γωνίες $\chi\hat{O}z'$ και $\chi\hat{O}z$ είναι παραπληρωματικές άρα η $\chi\hat{O}z = 30°$, η Oy είναι διχοτόμος της $\chi\hat{O}z$ (την χωρίζει στη μέση) άρα $\chi\hat{O}y = 15°$

Διόρθωση αποτελέσματος στο προηγούμενο τεύχος σελίδα 16 άσκηση 6 το σωστό είναι:
Άρα οι Ασιάτες θα είναι το 1-(3/5+1/3)= 1-14/15=1/15 του συνόλου των τουριστών, δηλαδή 14850.1/15=990.
Το λάθος εντόπισε ο συνάδελφος Γιώργος Παπακυριακού από το Ναύπλιο και τον ευχαριστούμε. Επίσης τον ευχαριστούμε για τα καλά του λόγια για το περιοδικό.

Β΄ Τάξη

Η χρήση των συναρτήσεων για την επίλυση προβλημάτων

Στέργιος Τουρναβίτης

Εισαγωγικό σημείωμα: *Ο σημερινός μαθηματικός όρος συνάρτηση, χρονολογείται από τα τέλη του $17^{ου}$ αιώνα, όταν ο Απειροστικός Λογισμός (Calculus) βρισκόταν στα πρώτα στάδια ανάπτυξης. Σήμερα αυτή η σημαντική έννοια που είναι θα λέγαμε «ραχοκοκαλιά» των Μαθηματικών, είναι απαραίτητη σχεδόν σε όλες τις επιστήμες.*

Στην εργασία που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε αρχικά να αναδείξουμε τη σχέση των συναρτήσεων με τις εξισώσεις, στη συνέχεια τις αλληλένδετες εκφάνσεις της έννοιας αυτής δηλαδή του αλγεβρικού τύπου ή τα λόγια περιγραφής, του πίνακα τιμών, της γραφικής παράστασης και πως μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε όλα αυτά για να μεταβαίνουμε από το ένα στο άλλο για την επίλυση προβλημάτων.

Επίσης, θα περιοριστούμε στις πιο απλές συναρτήσεις, τις γραμμικές, τη συνάρτηση της υπερβολής, που όμως θα είναι συνάμα ένας γενικότερος τρόπος μελέτης και για τις περισσότερο πολύπλοκες συναρτήσεις που θα ακολουθήσουν σε επόμενες τάξεις.

Πρόβλημα 1 Έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους 8 cm χωρισμένο σε άλλα δύο. Το ένα έχει άγνωστο μήκος $x\ cm$ και το ακριβώς διπλανό του έχει μήκος $5\ cm$.

α) Αναζητούμε εκείνη την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται $48\ \text{cm}^2$.

β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $64\ \text{cm}^2$;

γ) Βρίσκουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου για $x = 4$ cm.

δ) Αναζητούμε έναν γενικό τύπο ο οποίος με αντικατάσταση των διαφόρων τιμών της μεταβλητής x να παίρνουμε τα αντίστοιχα $y = E(x)$ εμβαδά των ορθογωνίων, με άλλα λόγια να δούμε πως μεταβάλλεται η συνάρτηση του εμβαδού, όταν μεταβάλλεται το μήκος x.

ε) Κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για τιμές του x όπου $0 < x \le 6$.

Λύση:

α) Όπως γνωρίζουμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι το γινόμενο των διαστάσεών του.

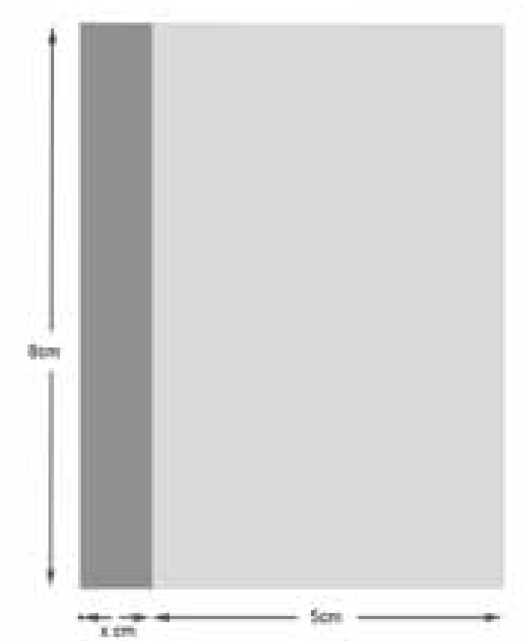
Επομένως έχουμε:

$$E = (x + 5) \cdot 8 \quad (1)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (1) όπου Ε = 48 και λύσουμε ως προς x την αντίστοιχη εξίσωση, θα έχουμε ισοδύναμα:

$$(x+5)\cdot 8 = 48 \Leftrightarrow x+5=\frac{48}{8} \Leftrightarrow x=6-5=1\text{cm}$$

β) Όμοια έχουμε:



γ) Σ’ αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται να λύσουμε κάποια εξίσωση. Απλά αντικαθιστούμε στον τύπο (1) όπου $x = 4cm$ και βρίσκουμε

$$E = (4 + 5) \cdot 8 = 72\ \text{cm}^2$$

δ)+ε) Στα παραπάνω ερωτήματα α), β), βρήκαμε ορισμένους αριθμούς για τη μεταβλητή x όταν γνωρίζαμε ότι το εμβαδόν έπαιρνε συγκεκριμένες τιμές, λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις. Στο δε ερώτημα γ) από τον έτοιμο τύπο (1) για το εμβαδόν, αντικαταστήσαμε όπου $x = 4$ cm και βρήκαμε $E = 72\ \text{cm}^2$.

Ας δώσουμε μερικές ακόμη ακέραιες τιμές από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ για να δούμε πως επιβεβαιώνεται ο τύπος (1) για το τυχαίο x, κατασκευάζοντας ταυτόχρονα και τον πίνακα τιμών της συνάρτησης E(x) «E του x» ή «το E σε συνάρτηση με το x».

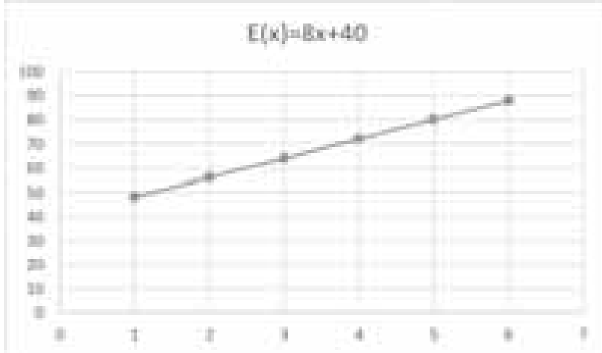
x	E(x)
1	$8 \cdot 1 + 40 = 48$
2	$8 \cdot 2 + 40 = 56$
3	$8 \cdot 3 + 40 = 64$
4	$8 \cdot 4 + 40 = 72$
5	$8 \cdot 5 + 40 = 80$
6	$8 \cdot 6 + 40 = 88$
x	$8 \cdot x + 40$

Όπως βλέπουμε από τον πίνακα τιμών και ίσως και από κάποιες παραπάνω ενδιάμεσες τιμές που θα θελήσουμε να δώσουμε, κάθε φορά αντικαθιστούμε στην (1) ή στον τύπο (της τελευταίας γραμμής του πίνακα τιμών) την εκάστοτε τιμή του x και βρίσκουμε τα αντίστοιχα εμβαδά. Αυτή η εξάρτηση, μονοσήμαντη αντιστοίχιση που υπάρχει, των Εμβαδών από τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x, μας επιτρέπει να συμβολίσουμε – αντικαταστήσουμε το E με το E(x) στον τύπο (1) και να γράψουμε:

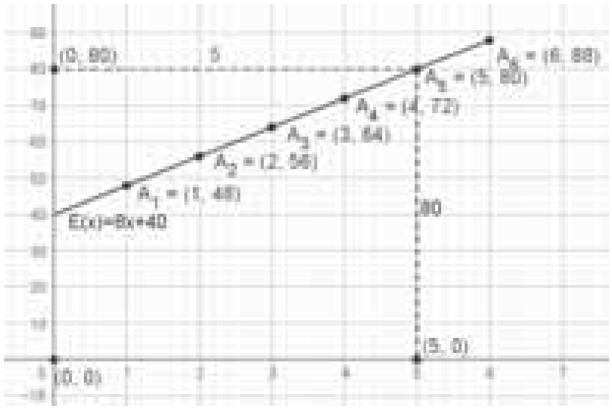
$$E(x) = (x + 5) \cdot 8$$

Αυτός είναι και ο ζητούμενος τύπος της συνάρτησης.

Από το γνωστό μας Excel, παίρνουμε το διάγραμμα αν ενώσουμε τα σημεία (1,48),…,(6,88) του πίνακα τιμών.



Το διάγραμμά μας στο Geogebra:



Το οποίο προκύπτει, αν γράψουμε απλά στο πεδίο εισαγωγή κάτω αριστερά του προγράμματος τον τύπο της συνάρτησης και για να φαίνεται η ευθεία – γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σύνολο που παίρνει τιμές η ανεξάρτητη μεταβλητή x – Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης, επιλέγουμε κλίμακα για τους άξονες 1:20. Πιο συγκεκριμένα στον οριζόντιο άξονα το $1\ \text{cm} \rightarrow\ 1\ \text{cm}$ του μήκους x και στον κατακόρυφο το $1\ \text{cm} \rightarrow\ 20\ \text{cm}^2$ εμβαδού του ορθογωνίου.

Επέκταση της δραστηριότητας: Με βάση τα προηγούμενα, θα χαρούμε πολύ αν είστε σε θέση να κατασκευάσετε τα δικά σας διαγράμματα σε χιλιοστομετρικό (μιλιμετρέ) χαρτί, στην προαναφερόμενη κλίμακα, για το Πρόβλημα 1.

Πρόβλημα 2 Δύο διαφορετικοί τρόποι πληρωμών στο κολυμβητήριο

(Ποιος μας συμφέρει περισσότερο;)

Ο Κώστας θέλει να διαθέσει ορισμένα χρήματα ώστε να

πηγαίνει στο κολυμβητήριο της περιοχής του μέχρι και 20 φορές για ένα μήνα.
Για τον πρώτο μήνα εγγραφής, έχει τις εξής δυνατότητες:

- να πληρώνει 5€ για κάθε φορά που χρησιμοποιεί την πισίνα,
- να πληρώσει 20€ στην αρχή του μήνα συνδρομή και 3€ για κάθε φορά που θα κολυμπάει.

Ερωτήματα:

1. Αν ονομάσουμε με y=f(x) την πρώτη συνάρτηση και y=g(x) την δεύτερη (που αντιστοιχούν στους δύο διαφορετικούς τρόπους πληρωμής), μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά των παρακάτω προτάσεων και στην συνέχεια τα «άδεια κουτάκια» των δύο πινάκων τιμών;

1^{ος} τρόπος πληρωμής:
για 1 φορά ο Κώστας πληρώνει ……….. €
για 2 φορές ο Κώστας πληρώνει ………. €
για 3 φορές ο Κώστας πληρώνει ………. €
για x φορές ο Κώστας πληρώνει
y = f(x) = ………. €

2^{ος} τρόπος πληρωμής:
για 0 (καμία φορά) ο Κώστας πληρώνει
………. €
για 1 φορά ο Κώστας πληρώνει ………. €
για 2 φορές ο Κώστας πληρώνει ……… €
για 3 φορές ο Κώστας πληρώνει ……… €
για x φορές ο Κώστας πληρώνει
y = g(x) = ………. €

x αριθμός φορών	0	1			16
f(x) σε ευρώ			20	40	

x αριθμός φορών	0		10	15	
g(x) σε ευρώ		26			80

2. Το επόμενο βήμα είναι ότι με βάση τους τύπους που βρήκατε από το προηγούμενο ερώτημα να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων σ' ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων επιλέγοντας κατάλληλη κλίμακα σαν και αυτό παρακάτω.

α) Σε ποια σημεία τέμνουν τον άξονα y΄y οι δύο ευθείες και ποια η σημασία τους σε σχέση με τον τύπο και τον πίνακα τιμών των δύο συναρτήσεων;
β) Ποια από τις δύο ευθείες διέρχεται από την αρχή των αξόνων;
γ) Σχετίζεται αυτή η ευθεία με τα ανάλογα ποσά;
δ) Ποιες είναι οι κλίσεις των δύο ευθειών;

3. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των δύο ευθειών, βρείτε (για λογαριασμό του Κώστα) πόσες φορές θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει την πισίνα σε έναν μήνα, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει και με τους δύο τρόπους να είναι ίδια; Πόσα είναι τα χρήματα αυτά;
4. Μπορείτε να προσδιορίσετε γραφικά πόσες φορές θα χρησιμοποιήσει την πισίνα σε κάθε περίπτωση, αν πληρώσει 80€;
5. Με την βοήθεια του 3δ) μπορείτε να δώσετε μία εξήγηση για το ότι, παρά το γεγονός πως η πρώτη ευθεία ξεκινά «από ένα σημείο πιο χαμηλά» στον άξονα των y΄y, τέμνει τελικά την δεύτερη, «που ξεκινάει πιο ψηλά» στον άξονα των y΄y κι' έπειτα την ξεπερνάει;

Λύση:

1. $1^{ος}$ τρόπος πληρωμής:

για **1** φορά ο Κώστας πληρώνει $\mathbf{1}\cdot 5=5€$

για **2** φορές ο Κώστας πληρώνει $\mathbf{2}\cdot 5=10€$

για **3** φορές ο Κώστας πληρώνει $\mathbf{3}\cdot 5=15€$

.

.

.

για **x** φορές ο Κώστας πληρώνει

$$y = f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot 5=5\cdot \mathbf{x}\ €$$

$2^{ος}$ τρόπος πληρωμής:

για 0 (καμία φορά) ο Κώστας πληρώνει

20 €

για **1** φορά ο Κώστας πληρώνει

$$20+\mathbf{1}\cdot 3=3\cdot \mathbf{1}+20\ €$$

για **2** φορές ο Κώστας πληρώνει

$$20+\mathbf{2}\cdot 3=3\cdot \mathbf{2}+20\ €$$

για **3** φορές ο Κώστας πληρώνει

$$20+\mathbf{3}\cdot 3=3\cdot \mathbf{3}+20\ €$$

.

.

.

για **x** φορές ο Κώστας πληρώνει

$$y = g(\mathbf{x}) = 20+\mathbf{x}\cdot 3=3\cdot \mathbf{x}+20€$$

Τα πινακάκια συμπληρώνονται με την βοήθεια των τύπων των συναρτήσεων.

Αν αναζητούμε τα χρήματα (y) που θα πληρώσουμε, αντικαθιστούμε την τιμή του x στον τύπο και το αποτέλεσμα προκύπτει από την εκτέλεση των πράξεων ενώ αν αναζητούμε τον αριθμό των φορών, αντικαθιστούμε το y πάλι στον τύπο και λύνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις.

Π.χ. αν θέλουμε να βρούμε πόσες φορές (x) μπορεί να έχει πάει στο κολυμβητήριο όταν έχει πληρώσει y=20 € με τον πρώτο τρόπο πληρωμής, λύνουμε την εξίσωση:

$$20=5\cdot x \Leftrightarrow 5\cdot x=20 \Leftrightarrow x=\frac{20}{5}=4,$$

ενώ αν θέλουμε να βρούμε τα χρήματα (y) που θα πληρώσει με τον $2^{ο}$ τρόπο πληρωμής, όταν έχει πάει 15 φορές, αντικαθιστούμε την τιμή του x =15 στον τύπο:

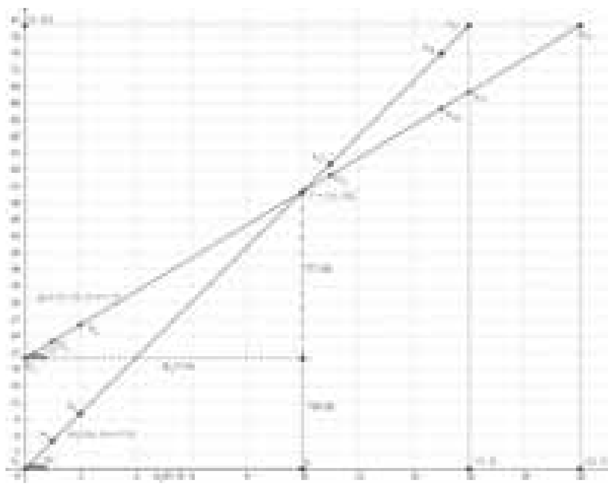
$$y = g(\mathbf{x}) = 3\cdot \mathbf{x}+20€$$

Έτσι για x =15, το αντίστοιχο y είναι:

$$y = g(\mathbf{15}) = =3\cdot \mathbf{15}+20=65€$$

x αριθμός φορών	0	1	**4**	**8**	16
f(x) σε ευρώ	0	**5**	20	40	**80**

x αριθμός φορών	0	**2**	10	15	**20**
g(x) σε ευρώ	**20**	26	**50**	**65**	80



2. Μία πρώτη παρατήρηση για το διάγραμμα είναι ότι αποτελείται από μεμονωμένα σημεία όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίρνει τις ακέραιες τιμές από το σύνολο {1, 2, 3… 20} και για τις δύο συναρτήσεις.

Κοιτάζοντας τα ζευγάρια τιμών (x,y) από τα πινακάκια, (ή και βρίσκοντας ακόμη περισσότερα με τη βοήθεια των δύο τύπων)τοποθετούμε προσεκτικά τα σημεία στο διάγραμμα, βλέπουμε ότι από αυτά διέρχονται δύο ευθείες που είναι και οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων.

α) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα και από τα προηγούμενα, όταν ο Κώστας δεν έχει πάει ακόμη να επισκεφθεί το Κολυμβητήριο, για μεν τον $1^{ο}$ τρόπο πληρωμής δεν έχει να πληρώσει κάτι, ενώ με τον $2^{ο}$ τρόπο πληρωμής θα έχει πληρώσει ήδη την εγγραφή των 20 €.

Αυτά «μεταφράζονται» στο διάγραμμα ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) ξεκινάει από το (0,0) και η g(x) από το (0,20), σημεία και τα δύο του κατακόρυφου άξονα y΄y.

Δεν είναι τυχαίο ότι αυτά τα σημεία στο διάγραμμα τα σημειώσαμε με ανοικτό κυκλάκι, γιατί στην εκφώνηση του προβλήματος αναζητούμε τον οικονομικότερο τρόπο από ένα ορισμένο αριθμό φορών (από 1 φορά και πάνω). Απλά τα βάζουμε στο διάγραμμα και στα πινακάκια (τις αριθμητικές συντεταγμένες τους) ως χαρακτηριστικά σημεία και για να απαντήσουμε πιο εύκολα σε επόμενα ερωτήματα, π.χ. στην κλίση κλπ.

β+γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)=5\cdot\mathbf{x}$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων και συνδέεται με τα ανάλογα ποσά, γιατί το πηλίκο $\frac{y}{x}=5$ σταθερό, ή αλλιώς όταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται το x, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. αντίστοιχα το y.

δ) Για την κλίση των δύο ευθειών, χρειαζόμαστε τον τύπο της εφαπτομένης που μπορούμε να τον εφαρμόσουμε στα ορθογώνια τρίγωνα A_1BT, $B_1\Gamma T$ για τις οξείες γωνίες TA_1B $TB_1\Gamma$, αντίστοιχα.

Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\hat{A}_1=\frac{50}{10}=5 \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\hat{B}_1=\frac{30}{10}=3$$

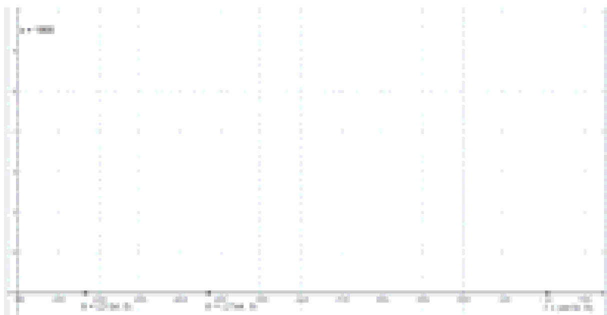
Αυτές οι κλίσεις συμπίπτουν με τους συντελεστές του x στους τύπους που προσδιορίζουν τις μοναδικές ευθείες-γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων.

3. Υπάρχει ένα σημείο που τέμνονται οι δύο ευθείες το οποίο για το ίδιο x αντιστοιχεί το ίδιο y. Αυτό δεν είναι άλλο από το Τ(10,50). Τα χρήματα που θα πληρώσει και με τους δύο τρόπους είναι η τεταγμένη 50 αυτού του σημείου και η τετμημένη του 10 είναι ο αριθμός των φορών που χρησιμοποιεί την πισίνα, για να πληρώσει τον ίδιο αριθμό χρημάτων 50 € και με τους δύο τρόπους.

4. Στον άξονα των y΄y και στη «θέση» 80, φέρνουμε μία κάθετη προς τα δεξιά. Αυτή συναντάει πρώτα (γιατί;) την γραφική παράσταση της f(x) στο A_{17} ενώ την άλλη στο B_{21}. Από τα σημεία αυτά ξανά κάθετες, αυτή τη φορά προς τον οριζόντιο άξονα και οι τετμημένες αυτών των σημείων, ταυτίζονται με τους αριθμούς των φορών του 1^{ου} και 2^{ου} τρόπου πληρωμής αντίστοιχα στα ίδια χρήματα των 80€.

(*Μπορείτε να τις βρείτε;*)

5. Η πρώτη ευθεία – γραφική παράσταση της f(x), αν και ξεκινάει από ένα σημείο πιο χαμηλά το (0,0) σε σχέση με την άλλη που αρχίζει από το (0,20), μέχρι και για x=10, την τετμημένη του σημείου τομής,



εξακολουθεί να είναι πιο χαμηλά από την δεύτερη.

Από το σημείο όμως αυτό και μετά ή αν ο Κώστας ξεπεράσει τις 10 φορές επίσκεψής του στο Κολυμβητήριο (και μέχρι και τις 20 φορές) τα χρήματα που θα πληρώσει με τον 1^{ο} τρόπο θα είναι περισσότερα.
Αυτό συμβαίνει γιατί η κλίση 5 της 1^{ης} ευθείας είναι μεγαλύτερη από τη κλίση 3 της 2^{ης} και αυξάνεται όπως λέμε με πιο γρήγορο ρυθμό. Αλλά αυτό το τελευταίο θα μας απασχολήσει σε μεγαλύτερες τάξεις.
Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι ο Κώστας αν σκοπεύει να πηγαίνει στο Κολυμβητήριο μέχρι και 9 φορές συμφέρει να χρησιμοποιήσει τον 1^{ο} τρόπο,

στις 10 φορές θα πληρώσει τα ίδια χρήματα 80€, ενώ από 11μέχρι 20 φορές, ο $2^{ος}$ τρόπος πληρωμής είναι οικονομικότερος.

Πρόβλημα 3

Οι σκιέρ, οι πεζοπόροι και οι ορειβάτες συχνά βιώνουν την λεγόμενη «ασθένεια του υψομέτρου» όταν φθάνουν σε υψόμετρο 2.438 m (8.000 ft) και πάνω. Ένας καλός εμπειρικός κανόνας προσαρμογής του ανθρώπινου οργανισμού για να εγκλιματιστεί σε υψηλά υψόμετρα είναι:

α) να παραμείνει 2 εβδομάδες για τα πρώτα 2.134 m (7.000 ft) και,

β) από το υψόμετρο αυτό και πάνω, να παραμένει 1 εβδομάδα παραπάνω για κάθε επιπλέον 610 m (2.000 ft).

Ερωτήματα:

1. Το όρος Whitney στην Καλιφόρνια είναι η υψηλότερη κορυφή στην Ανατολική Σιέρα

Νεβάδα, στα σύνορα μεταξύ του πάρκου Sequoia και του Δάσους Inyo. Πόσες εβδομάδες περίπου θα χρειαζόταν ένα άτομο για να εγκλιματιστεί στο υψόμετρο των 4.418 m (14.494 ft) του όρους Whitney;

2. Στο παραπάνω σχήμα, έχουμε σχεδιάσει μία ευθεία παράλληλη στον κατακόρυφο άξονα στη θέση (1.800,0), με τετμημένη 1.800 ώστε τα σημεία που αναφέρονται στην εκφώνηση του προβλήματος που οι τετμημένες τους είναι μεγαλύτερες από αυτό το υψόμετρο, θα βρίσκονται δεξιότερα αυτής της ευθείας στη γραφική παράσταση. Αυτή έχει μονάδες μέτρησης τις εβδομάδες (η $1^η$ εβδομάδα είναι στο 1, η $2^η$ εβδομάδα στο 2 κλπ). Επίσης υπάρχουν τα σημεία στον x΄x με υψόμετρα που αντιστοιχούν στα 2.134, 2.744 και 4.418 μέτρα.

Σε κατάλληλη κλίμακα σαν αυτή του παραπάνω σχεδίου, και με την βοήθεια του πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης στην οποία να απεικονίζεται και το σημείο του προηγούμενου ερωτήματος.

3. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΔΕ έχουν κοινή την οξεία γωνία φ, το δε τυχαίο σημείο Ε(x,y) βρίσκεται πάνω στην γραφική παράσταση της μοναδικής ευθείας της οποίας αναζητούμε τον τύπο που είναι από την θεωρία και ο τύπος της συνάρτησης.

Με την βοήθεια του τύπου της εφαπτομένης (εφφ) που θα τον εφαρμόσετε δύο φορές μία για να βρείτε την κλίση στο ΑΗΖ και μία στο $2^ο$ ορθογώνιο ΑΔΕ, και αφού εξισώσετε τους δύο λόγους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που δείχνει πως μεταβάλλεται ο χρόνος εγκλιματισμού σε σχέση με το υψόμετρο.

Λύση:

1.

h	2.13 4	2.134+**1**·610=2 .744	2.134+**x**·610
t(h)	<u>2</u>	<u>2+**1**=3</u>	2+**x**

Για το τελευταίο κάτω δεξιά κουτάκι, μένει να βρούμε ποιος είναι (ο κατά προσέγγιση ενδεχομένως δεκαδικός) αριθμός που πολλαπλασιάζεται με το 610 για να δώσει το υψόμετρο των 4.418 μέτρων.

Έχουμε: $\underline{2.134+\mathbf{x}\cdot 610=4.418}$ (1)$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \cong \mathbf{3{,}7}$

Επομένως για το υψόμετρο του όρους Whitney, ο χρόνος εγκλιματισμού είναι περίπου 2+**3,7**=5,7 εβδομάδες

2. Ενώνουμε με μία ευθεία τα σημεία Α(2.134,2) και Ζ(2.744,3). Αυτή την ευθεία αν την προεκτείνουμε προς τα δεξιά, θα δούμε ότι συναντά την κάθετη στο σημείο Ι σ' ένα σημείο έστω Κ. Η τεταγμένη αυτού του σημείου είναι ο χρόνος εγκλιματισμού για το όρος Whitney (γιατί;)

3. Από το ΑΗΖ, έχουμε: $\varepsilon\varphi\hat{\varphi}=\frac{1}{610}$ (1)

ενώ από το ΑΔΕ $\varepsilon\varphi\hat{\varphi}=\frac{y-2}{x-2134}$ (2)

Από τις δύο σχέσεις, $\frac{y-2}{x-2134}=\frac{1}{610}\Leftrightarrow$

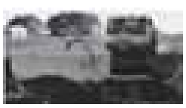
$$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=\frac{1}{610}x-1.5$$

Τέλος αντικαθιστούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x με το h και την y με το t(h) και έχουμε τον τύπο της συνάρτησης:

$$t(h)=\frac{1}{610}h-1.5$$

Πως επαληθεύουμε με τον παραπάνω τύπο τον χρόνο εγκλιματισμού για το όρος της Καλιφόρνιας;

Πρόβλημα 4



Με έναν σωλήνα παροχής νερού γεμίζουμε μία δεξαμενή χωρητικότητας 360 λίτρων. Αν υποθέσουμε ότι από τον σωλήνα διοχετεύονται στη δεξαμενή x λίτρα το δευτερόλεπτο,

α) να εκφράσετε το χρόνο y (σε sec) που χρειάζεται για να γεμίσει η δεξαμενή, ως συνάρτηση του x.

β) Ποιες είναι οι ποσότητες που λείπουν στον πίνακα τιμών της συνάρτησης;

x (lt/s)	1		2		X
f(x)=y (s)		200		90	

γ) Μπορείτε να σχεδιάσετε το διάγραμμα αυτής της συνάρτησης επιλέγοντας την κατάλληλη κλίμακα;

Λύση:

α) Με ταχύτητα $1\frac{lt}{s}$ για να γεμίσει η δεξαμενή χρειάζεται χρόνος 360 s.

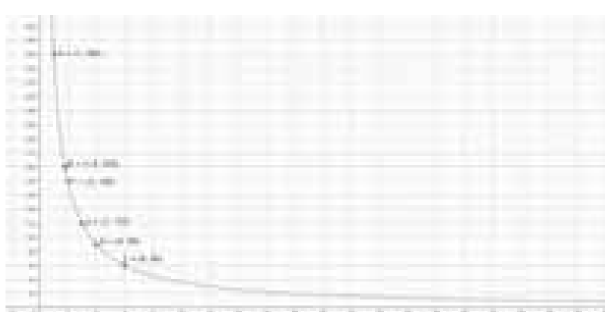
Με ταχύτητα $x\frac{lt}{s}$ για να γεμίσει η δεξαμενή θα χρειαστεί χρόνος $\frac{360}{x}$ s.

Άρα $y=f(x)=\frac{360}{x}$ είναι ο τύπος της συνάρτησης που δείχνει πως μεταβάλλεται ο χρόνος y σε σχέση με την ταχύτητα γεμίσματος σε δεξαμενή σταθερής χωρητικότητας 360 λίτρων.

β) Με βάση τον τύπο της συνάρτησης $y=\frac{360}{x}$, ανάλογα με το τι θα υπολογίσουμε, αντικαθιστούμε το x ή το y και λύνουμε ως προς y ή x αντίστοιχα.

x (lt/s)	1	**1,8**	2	**4**	x
f(x)=y (s)	**360**	200	**180**	90	$\mathbf{\frac{360}{x}}$

γ) Σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων και με την κατάλληλη κλίμακα, θέτουμε τα παραπάνω σημεία, αλλά και άλλα όσα είναι εύκολο να υπολογίσουμε και παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θέμις Καψή

Το πυθαγόρειο θεώρημα

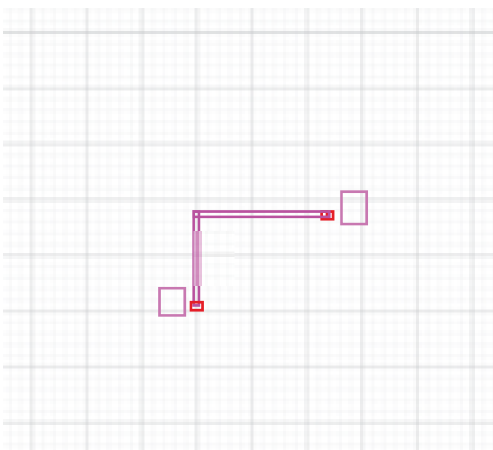
Ένα μικρό πρόβλημα για ρομπότ με περιορισμένη κίνηση

Πριν από δεκαετίες τα ρομπότ δεν κινούνταν όπως τα σημερινά.

Είχαν έναν βασικό περιορισμό.

Μπορούσαν να κινηθούν μόνο μπροστά – πίσω και δεξιά – αριστερά.

Δηλαδή ήταν σαν να περπατάνε σε ένα επίπεδο όπως αυτό της εικόνας:

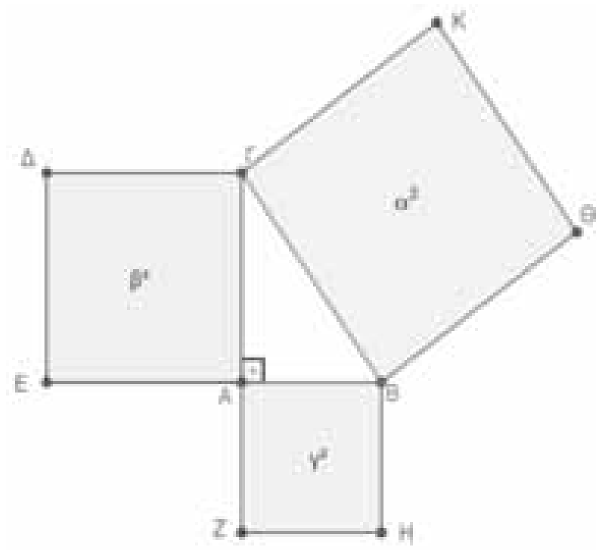


Για παράδειγμα ένα ρομπότ ξεκινάει από το Α, κάνει μπροστά δύο βήματα (μονάδες μήκους) και τρία βήματα δεξιά, οπότε φθάνει στο Β.

Κατέγραφε τον αριθμό βημάτων που έκανε αλλά δεν μπορούσε να μετρήσει ακριβώς την απόσταση αρχικής θέσης Α και τελικής θέσης Β.

Πώς θα μετρούσατε την απόσταση αυτή;

Φυσικά η απάντηση βρίσκεται στο πυθαγόρειο θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο ‘σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας’.



Αυτό φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

Ενώνοντας τα σημεία Α και Β, αρχικό και τελικό προορισμό, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και να γράψουμε τη σχέση

$$x^2 = 2^2 + 3^2$$

ή

$$x^2 = 4 + 9$$

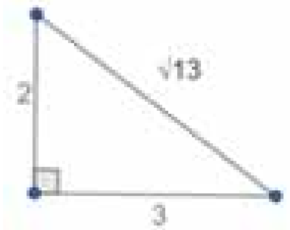
ή

$$x^2 = 13$$

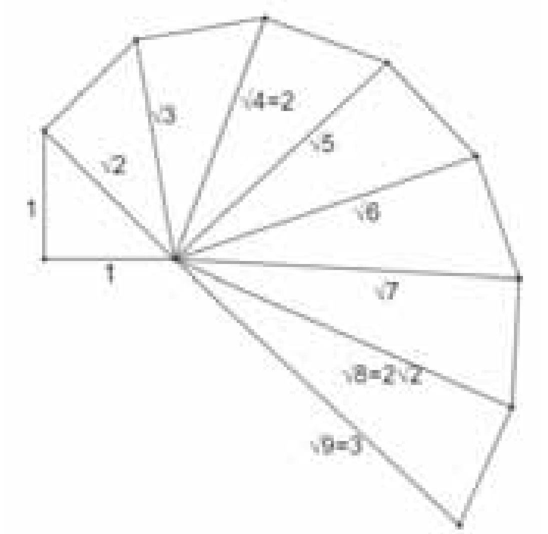
ώστε να υπολογίσουμε την τιμή του x.

Με βάση λοιπόν το πυθαγόρειο θεώρημα, βρίσκουμε ότι το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι ίσο με $\sqrt{13}$.

Μπορούμε επίσης και να κατασκευάσουμε ένα τμήμα μήκους $\sqrt{13}$, αξιοποιώντας τη σχέση του πυθαγορείου θεωρήματος, με ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές με μήκος 2 και 3 μονάδες αντίστοιχα.



Μάλιστα ξεκινώντας από ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με ίσες πλευρές μήκους 1 η κάθε μία, μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ και ούτω καθ' εξής, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα :



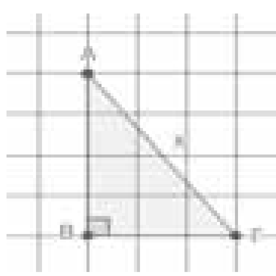
Άσκηση 1η

Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\sqrt{13}$

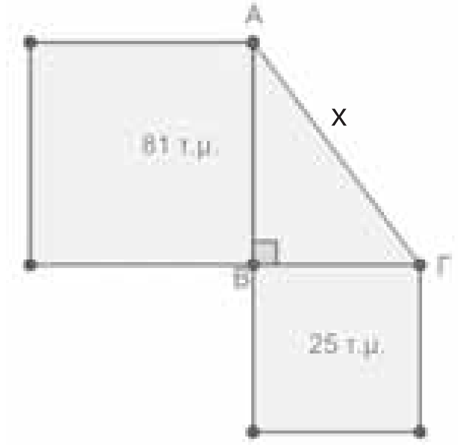
Άσκηση 2η

Να υπολογίσετε τις σημειωμένες με x πλευρές στα παρακάτω σχήματα:

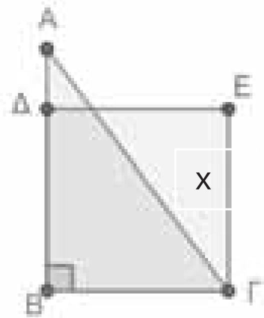
Α.



Β.

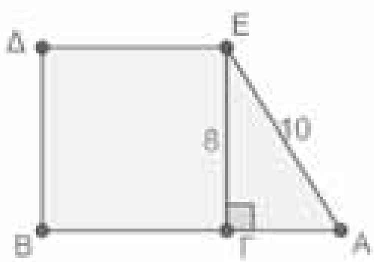


Γ. ΑΒ = 7 cm, ΑΓ = 10 cm και ΒΓΕΔ τετράγωνο



Άσκηση 3η

Να βρείτε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΔΕ, αν γνωρίζετε ότι ΕΓ = 8 cm, ΕΑ = 10 cm και ΒΓΕΔ τετράγωνο.



Ήξερες ότι το πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί και σε τρισδιάστατα σχήματα, όπου σχηματίζονται ορθογώνια ;

Στις παρακάτω ασκήσεις θα βρεις εφαρμογές

Άσκηση 4η

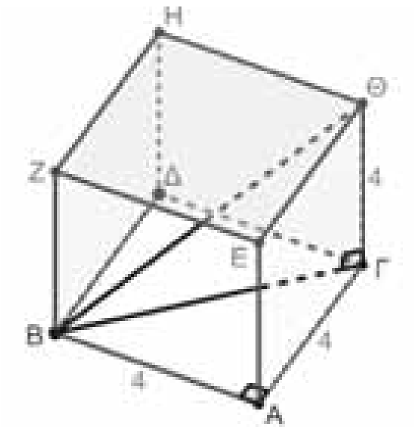
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύβος με ακμή ίση με 4 cm.

Α. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου της βάσης ΒΓ.

Β. Να υπολογίστε το μήκος της ΒΘ.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά τη ΒΘ.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΔΑΕ.



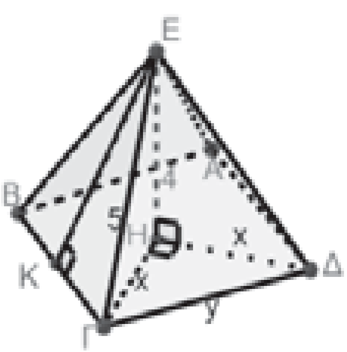
Άσκηση 5η

Στο παρακάτω σχήμα η πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Το ύψος ΕΗ είναι ίσο με 4 cm και η ακμή ΓΕ ίση με 5 cm.

Α. Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΓΗ.

Β. Να υπολογίσετε το μήκος y της πλευράς της ΓΔ της βάσης.



Γ. Να υπολογίσετε το μήκος της ΚΓ και το μήκος της ΚΕ.

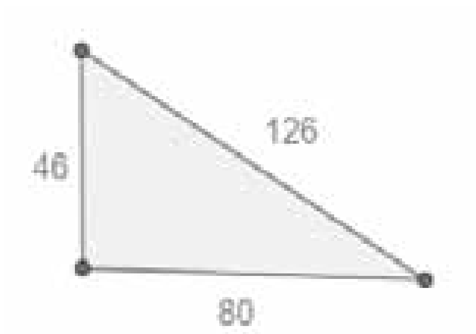
Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΒΓΕ και το εμβαδό της βάσης ΑΒΓΔ.

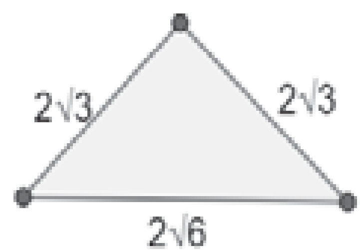
Αντίστροφο πυθαγορείου θεωρήματος:

Σύμφωνα με το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος, αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και η γωνία απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

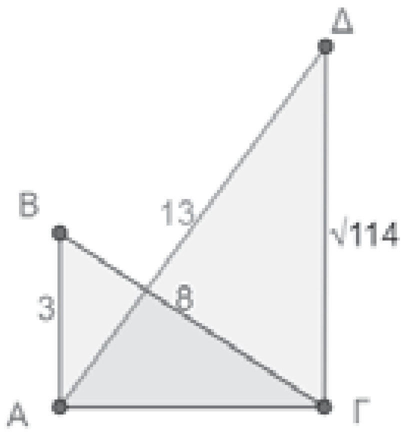
Εφαρμογές :

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια:
2.





2. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 8 cm και Α = 90 ^{o} . Να αποδείξετε ότι ΔΓ ⊥ ΑΓ, δεδομένου ότι τα τμήματα ΑΔ και ΔΓ έχουν μήκος ίσο με 13 cm και $\sqrt{114}$ cm αντίστοιχα.



Ιστορικά στοιχεία και άλλα σχόλια

Ήξερες ότι ο Πυθαγόρας ήταν διάσημος στην αρχαιότητα και του αποδίδονταν μαγικές ιδιότητες;

Για παράδειγμα ότι μπορούσε να ίπταται ή να βρίσκεται σε δύο μέρη ταυτόχρονα.

Η καταγωγή του Πυθαγόρα ήταν η Σάμος, όπου σήμερα βρίσκεται η κωμόπολη Πυθαγόρειο, στην οποία δεσπόζει το άγαλμα του Πυθαγόρα με το ορθογώνιο τρίγωνο

- Ήξερες ότι το πυθαγόρειο θεώρημα αποτέλεσε μέρος της πρώτης τεράστιας κρίσης των μαθηματικών;

Οι Πυθαγόρειοι ήταν σχολή στον Κρότωνα της Ιταλίας, όπου δίδασκε ο Πυθαγόρας και άλλοι μεγάλοι δάσκαλοι σε μαθητές και των δύο φύλων.

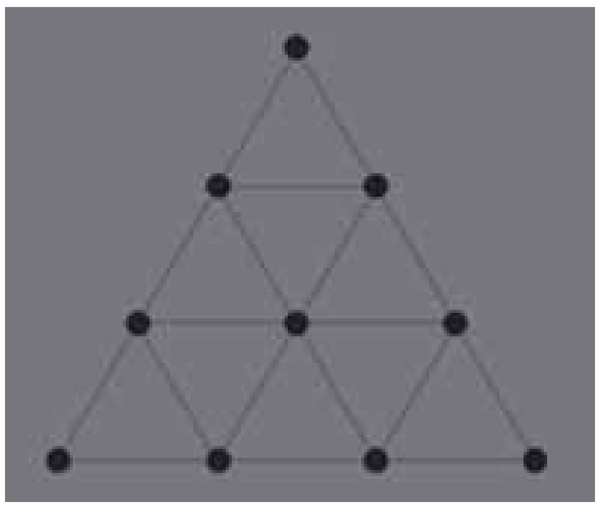
Οι Πυθαγόρειοι είχαν στηρίξει την κοσμοθεωρία τους και τη φιλοσοφία τους στους ρητούς αριθμούς.

Με το πυθαγόρειο θεώρημα κατασκευάστηκαν και οι άρρητοι αριθμοί, οπότε το πλήγμα για τη θεωρία των πυθαγορείων ήταν μεγάλο.

Στην αρχή λέγεται ότι δεν το δέχονταν και το έκρυβαν από τους άλλους μαθηματικούς, για να μην παραδεχθούν ότι η θεωρία τους έχει ελλείψεις.

- Ήξερες ότι το πυθαγόρειο θεώρημα γενικεύεται και σε τρεις ή και περισσότερες διαστάσεις, αποτελώντας ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για τη μέτρηση ;

- Ήξερες ότι το σύμβολο των Πυθαγορείων ήταν η τετρακτύς ;



- Ήξερες ότι το πυθαγόρειο θεώρημα αποδεικνύεται με περισσότερους από 370 τρόπους ;

Γ΄ Τάξη

Εξισώσεις δευτέρου βαθμού - Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Αρδαβάνη Καλλιόπη - Μάλλιαρης Χρήστος

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με άγνωστο x είναι:

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (1),\ \text{με } \alpha\neq 0}$$

Ας δούμε με ποιους τρόπους μπορούμε να λύσουμε μια δευτέρου βαθμού εξίσωση.

Θυμόμαστε: Οι λύσεις μιας εξίσωσης ονομάζονται και ρίζες της εξίσωσης.

- Να λυθεί η εξίσωση: $3x^2-75x=0$ Παρατηρούμε ότι λείπει ένας όρος από τη γενική μορφή της εξίσωσης (1), συγκεκριμένα λείπει ο σταθερός όρος, στη περίπτωση αυτή παραγοντοποιούμε και έχουμε γινόμενο παραγόντων ίσο με μηδέν.

$$3x^2-75x=0 \text{ ή } 3x(x-25)=0 \text{ ή } \begin{cases}3x=0\\ x-25=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=0\\ x=25\end{cases}$$

- Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-9=0$ Παρατηρούμε ότι λείπει ένας όρος από τη γενική μορφή της εξίσωσης (1), συγκεκριμένα λείπει ο πρωτοβάθμιος όρος βx, στη περίπτωση αυτή παραγοντοποιούμε και έχουμε γινόμενο παραγόντων ίσο με μηδέν.

$$x^2-9=0 \text{ ή } (x-3)(x+3)=0 \text{ ή } \begin{cases}x-3=0\\ x+3=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=3\\ x=-3\end{cases}$$

- Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-25=0$ Είναι ίδια περίπτωση με την προηγούμενη αλλά αυτή τη φορά θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση ρίζες.

$$x^2-25=0 \text{ ή } x^2=25 \text{ ή } \begin{cases}x=\sqrt{25}\\ x=-\sqrt{25}\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=5\\ x=-5\end{cases}$$

- Να λυθεί η εξίσωση: $x^2+36=0$ ή $x^2=-36$ που είναι αδύνατη
- Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{(x-1)^2}{2}=8 \text{ ή } (x-1)^2=16 \text{ ή } \begin{cases}x-1=\sqrt{16}\\ x-1=-\sqrt{16}\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x-1=4\\ x-1=-4\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=5\\ x=-3\end{cases}$$

- Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-4x+4=0$ εδώ βλέπουμε ότι δεν λείπει κάποιος όρος, αλλά παρατηρούμε ότι έχουμε το ανάπτυγμα μιας ταυτότητας, συγκεκριμένα έχουμε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(x-2)^2=0$ ή $x-2=0$ ή $x=2$, διπλή ρίζα.
- Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-4x+3=0$ εδώ βλέπουμε ότι δεν λείπει κάποιος όρος, θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου».

$$x^2-4x+3=0 \text{ ή } x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2-1=0 \text{ ή } (x-2)^2-1=0 \text{ ή } (x-2)^2=1$$

$$\text{ή } \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Αυτή η διαδικασία είναι αρκετά χρονοβόρα για το λόγο αυτό έχουμε και έναν ακόμα τρόπο επίλυσης, τον επόμενο.

Β. Επίλυση με τη βοήθεια τύπου…

Σε κάθε εξίσωση της μορφής (1) ορίζουμε την παράσταση $\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma$, την οποία ονομάζουμε **διακρίνουσα** και τη συμβολίζουμε με το γράμμα Δ. Έχουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις:

- Αν **Δ>0**, τότε η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Αν **Δ=0**, τότε η εξίσωση (1) έχει μια διπλή λύση την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν **Δ<0**, τότε η (1) δεν έχει λύση, είναι αδύνατη

Ας λύσουμε μερικές εξισώσεις με εφαρμογή των παραπάνω:

- Να λυθεί η εξίσωση: $4x^2+10x+6=0$. (Βέβαια μπορούμε πρώτα να απλοποιήσουμε την εξίσωση, εδώ όλοι οι όροι διαιρούνται με το 2 και γίνεται $2x^2+5x+3=0$, το αποτέλεσμα δεν θα αλλάξει). Υπολογίζουμε αρχικά τη διακρίνουσα και έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=10^2-4\cdot4\cdot6=100-96=4>0$, συνεπώς η εξίσωση έχει 2 άνισες λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-10\pm\sqrt{4}}{2\cdot4}=\frac{-10\pm2}{8}=\begin{cases} x=\dfrac{-10-2}{8}=\dfrac{-12}{8}=-\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{-10+2}{8}=\dfrac{-8}{8}=-1 \end{cases}$$

- Να λυθεί η εξίσωση: $x^2+10x+25=0$. Υπολογίζουμε αρχικά τη διακρίνουσα και έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=10^2-4\cdot1\cdot25=100-100=0$, συνεπώς η εξίσωση έχει μια διπλή λύση που δίνεται από τον τύπο:

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-10}{2\cdot1}=\frac{-10}{2}=-5$$

- Να λυθεί η εξίσωση: $x^2+x+2=0$. Υπολογίζουμε αρχικά τη διακρίνουσα και έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=1^2-4\cdot1\cdot2=1-8=-7<0$, συνεπώς η εξίσωση δεν έχει λύσεις, είναι αδύνατη.
- Να λυθεί η εξίσωση: $3(x-1)^2-4(x+1)=(x-2)^2-9$. Θα κάνουμε πράξεις για να φέρουμε την εξίσωση στην μορφή (1), έχουμε:

$$3\left(x^2-2x+1\right)-4x-4=x^2-4x+4-9 \quad \text{ή} \quad 3x^2-6x+3-x^2+1=0$$

$$\text{ή} \quad 2x^2-6x+4=0 \quad \text{ή} \quad x^2-3x+2=0.$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα και έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1>0$, συνεπώς η εξίσωση έχει 2 άνισες λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x=\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$$

Γ. Εξάσκηση…

- Να λύσετε τις εξισώσεις:

i.	$2x^2-3x-2=0$	**ii.**	$4x^2=-9+12x$	**iii.**	$2x=-5-x^2$
iv.	$4x^2-25=0$	**v.**	$x^3-2x^2-x=-2$	**vi.**	$x^4-x=0$
vii.	$x^3-3x^2-2x+6=0$	**viii.**	$4(x-1)+(x+3)^2=5(x+1)$		

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Α. Ένα πρόβλημα διαφορετικό…

Ένας αγρότης ενοικιάζει ένα αγροτικό μηχάνημα με τον μήνα. Πήρε προσφορά από δύο εταιρείες την Α και την Β. Η **εταιρεία Α** ζητά 7 ευρώ πάγια χρέωση και 0,2 ευρώ για κάθε ώρα χρήσης του μηχανήματος. Η **εταιρεία Β** ζητά 4 ευρώ πάγια χρέωση και 0,4 ευρώ για κάθε ώρα χρήσης του μηχανήματος. Ο αγρότης σκέφτεται ποια από τις δύο εταιρείες του δίνει την καλύτερη προσφορά. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να αποφασίσει; Ποια συμβουλή θα μπορούσατε να του δώσετε;

- *Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω τιμές είναι ενδεικτικές και ίσως διαφέρουν από τις πραγματικές.*

Λύση

Θα βρούμε τον τύπο χρέωσης στην κάθε μία εταιρεία για χρήση του μηχανήματος x ώρες.

Η χρέωση στην εταιρεία Α: $y_{\rm A}=7+0,2x$

Η χρέωση στην εταιρεία Β: $y_{\rm B}=4+0,4x$

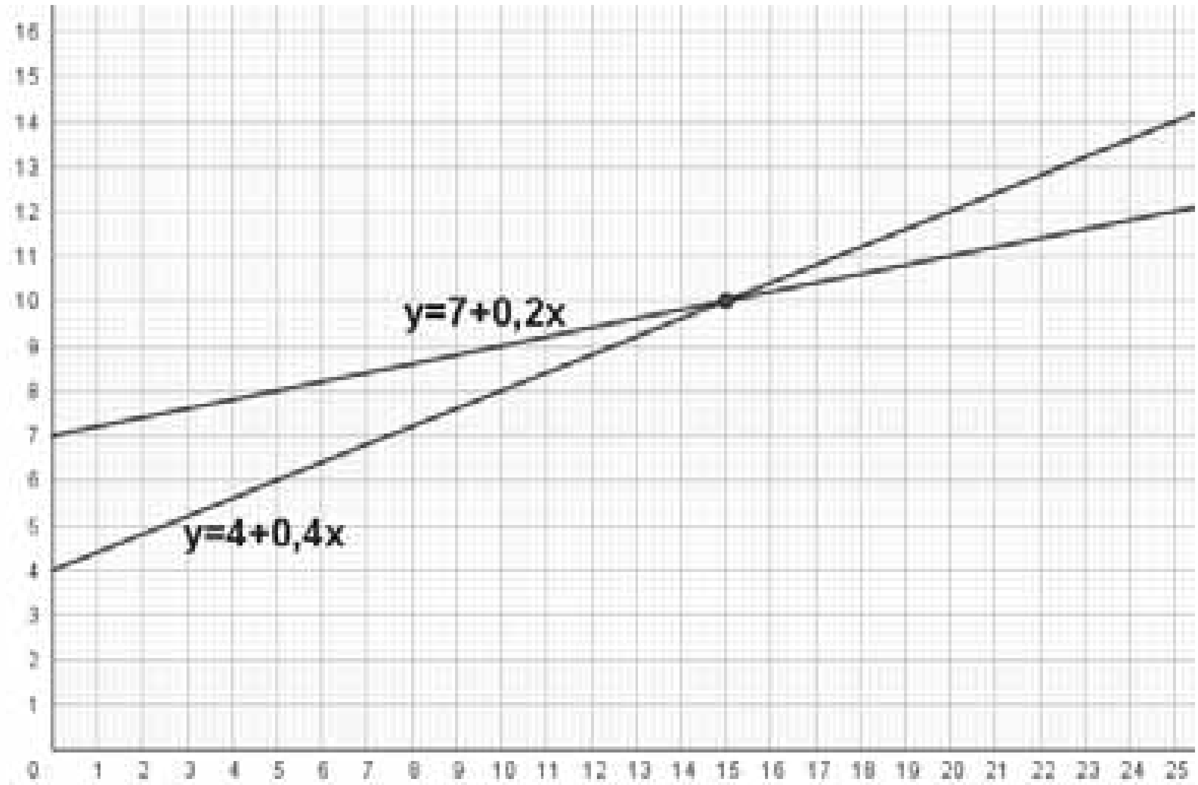
1$^{\eta}$ ιδέα: Δημιουργούμε πίνακα τιμών με τη χρήση του μηχανήματος από 1 έως 100 ώρες χρήσης και το αντίστοιχο κόστος για την ενοικίασή του.

Κόστος χρήσης του μηχανήματος της εταιρείας Α										
Ώρες χρήσης	1	5	10	**15**	20	25	…	50	…	100
Κόστος χρήσης	7,2	8	9	**10**	11	12	…	17	…	27

Κόστος χρήσης του μηχανήματος της εταιρείας Β										
Ώρες χρήσης	1	5	10	**15**	20	25	…	50	…	100
Κόστος χρήσης	4,4	6	8	**10**	12	14	…	24	…	44

2$^{\eta}$ ιδέα: Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y_{\rm A}=7+0,2x$ και $y_{\rm B}=4+0,4x$, όπου $y_{\rm A}$ και $y_{\rm B}$ το κόστος χρήσης του μηχανήματος της εταιρείας Α και Β αντίστοιχα και x οι ώρες χρήσης του με $x\geq 0$.

Γραφικά η προσφορά των εταιρειών Α και Β



3η ιδέα: Λύνουμε αλγεβρικά το σύστημα των εξισώσεων, που σημαίνει ότι θα αναζητήσουμε το x (ώρες χρήσης του μηχανήματος) ώστε η χρέωση και στις δύο εταιρείες να είναι η ίδια.

$$\begin{cases} y=7+0,2x \\ y=4+0,4x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=7+0,2x \\ 7+0,2x=4+0,4x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=7+0,2x \\ 7-4=0,4x-0,2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=7+0,2x \\ 0,2x=3 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} y=7+0,2x \\ x=\dfrac{3}{0,2}=15 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=7+0,2\cdot 15 \\ x=15 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=7+3=10 \\ x=15 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=10 \\ x=15 \end{cases}$$

Συμπληρωματικά: Θα λύσουμε την ανίσωση $y_A < y_B$ για να βρούμε τις τιμές του x, για τις οποίες η χρέωση στην εταιρεία Α είναι μικρότερη από την εταιρεία Β ή την $y_A > y_B$ για να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες η χρέωση στην εταιρεία Α είναι μεγαλύτερη από την εταιρεία Β .

$$y_A > y_B \text{ ή } 7+0,2x > 4+0,4x \quad \text{ή} \quad 7-4 > 0,4x-0,2x \quad \text{ή} \quad 3 > 0,2x \quad \text{ή} \quad x < \frac{3}{0,2} = 15 \, .$$

Από όλα τα παραπάνω παρατηρούμε ότι αν ο αγρότης χρησιμοποιήσει το μηχάνημα 15 ώρες το κόστος ενοικίασης θα είναι το ίδιο και στις δύο εταιρείες. Πράγματι το κόστος ενοικίασης από την εταιρεία Α θα είναι: $y_A = 7+0,2\cdot 15 = 7+3 = 10$ ευρώ και αντίστοιχα το κόστος ενοικίασης από την εταιρεία Β θα είναι: $y_B = 4+0,4\cdot 15 = 4+6 = 10$ ευρώ.

Αν οι ώρες χρήσης είναι λιγότερες των 15 ωρών βρήκαμε ότι συμφέρουσα είναι η προσφορά της εταιρείας Β, ενώ αν οι ώρες χρήσης είναι περισσότερες των 15 ωρών τότε συμφέρουσα είναι η προσφορά της εταιρείας Α.

Β. Τρόποι επίλυσης γραμμικού συστήματος 2 εξισώσεων…

$1^η$ μέθοδος. Γραφική επίλυση. Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση μιας γραμμικής εξίσωσης είναι ευθεία, συνεπώς θα έχουμε στο σχήμα μας δύο ευθείες, η σχετική θέση των οποίων θα είναι μια από τις επόμενες περιπτώσεις:

- **Να τέμνονται**, άρα υπάρχει ένα κοινό σημείο, οι συντεταγμένες του οποίου αποτελούν τη **μοναδική λύση** του συστήματος.

  Σχεδίασε τις ευθείες με εξισώσεις: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$

- **Να είναι παράλληλες,** άρα δεν υπάρχει κοινό σημείο των δύο ευθειών, συνεπώς το σύστημα είναι **αδύνατο**.

  Σχεδίασε τις ευθείες με εξισώσεις: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$

- **Να ταυτίζονται,** άρα υπάρχουν άπειρα κοινά σημεία που δηλώνουν τις άπειρες λύσεις του συστήματος, συνεπώς το σύστημα είναι **αόριστο.**

  Σχεδίασε τις ευθείες με εξισώσεις: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$

$2^η$ μέθοδος, με **αντικατάσταση**. Λύνουμε την μια εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Για να δούμε ένα παράδειγμα:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1+y \\ x+2y=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1+y \\ 1+y+2y=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1+y \\ 1+3y-4=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1+y \\ 3y=3 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} x=1+y \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1+1 \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι: ή $(x,y)=(1,2)$

$3^η$ μέθοδος, με **αντίθετους συντελεστές**. Επιλέγουμε να εμφανίσουμε (όταν δεν υπάρχουν) αντίθετους συντελεστές στον ίδιο άγνωστο και στις δύο εξισώσεις και στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις. Για να δούμε ένα παράδειγμα:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x-y=-6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3\cdot 4x-3\cdot y=3\cdot(-6) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 12x-3y=-18 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 12x+2x-3y+3y=-18+4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 14x=-14 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2\cdot(-1)+3y=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} -2+3y=4 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3y=6 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι: ή $(x, y) = (-1, 2)$

Γ. Προβλήματα που ανάγονται σε γραμμικό σύστημα …

- Η Ελένη και η Σωτηρία έχουν μαζί 195 ευρώ. Η Σωτηρία έχει τα διπλάσια χρήματα από αυτά που έχει η Ελένη. Πόσα χρήματα έχει η καθεμία;

  Έστω x τα χρήματα που έχει η Ελένη και y τα χρήματα που έχει η Σωτηρία, από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε 2 εξισώσεις:

$$\begin{cases} x + y = 195 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x + 2x = 195 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x = 195 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \dfrac{195}{3} \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 65 \\ y = 2x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 65 \\ y = 130 \end{cases}$$

  Η Ελένη έχει 65 ευρώ και η Σωτηρία 130 ευρώ.

Δ. Εξάσκηση…

- Να λύσετε τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}, (\Sigma_2) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}, (\Sigma_3) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}, (\Sigma_4) \begin{cases} 2x = 5y + 1 \\ 24 - 7x = 3y \end{cases}$$

- Δίνονται οι εξισώσεις $x = 3y$ **(ε₁)** και $2x - 5y = 3$ **(ε₂)**.

  Να εξετάσετε ποια από τα ζεύγη τιμών του πίνακα που ακολουθεί είναι λύσεις της εξίσωσης **(ε₁)** και ποια της εξίσωσης **(ε₂)**.

(x , y)	**(3 , 1)**	**(4 , 1)**	**(-1 , -1)**	**(9 , 3)**	**(15 , 5)**	**(-21 , -7)**

Ποιο ζεύγος είναι η κοινή λύση του συστήματος των εξισώσεων **(ε_1)** και **(ε_2)**;

- Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 63 και διαφορά 12.
- Να λύσετε τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y-2}{4} = 1 \\ \dfrac{x-3}{3} - \dfrac{y+2}{2} = -2 \end{cases}, \quad (\Sigma_2) \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

- Στο σχήμα που βλέπετε σβήστηκε ένα μέρος του συστήματος δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού.

  Η μοναδική λύση του συστήματος είναι (1,3).

  Μπορείτε να συμπληρώσετε το μέρος που σβήστηκε στην 2^{η} εξίσωση;

  Είναι μοναδική αυτή η απάντηση;

Γ΄ Τάξη — Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^o \leq \omega \leq 90^o$

Λέοντας Κουτσούρης

Άσκηση 1η

Να αποδείξετε τις ισότητες

α) $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\chi})(\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\chi})+\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^4\chi}=\boldsymbol{\eta\mu^4\chi}+(\mathbf{1}+\boldsymbol{\eta\mu^2\chi})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta\mu^2\chi})$

β) $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\chi})\boldsymbol{\varepsilon\varphi^{-1}\chi\cdot\eta\mu^{-1}\chi}=\boldsymbol{\sigma\varphi^2\chi\cdot\varepsilon\varphi\chi\cdot\eta\mu\chi}$

γ) $(\mathbf{4}\boldsymbol{\eta\mu\chi}+\mathbf{6}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\chi})^2+(\mathbf{6}\boldsymbol{\eta\mu\chi}-\mathbf{4}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\chi})^2=\mathbf{52}$

δ) $\frac{1+\varepsilon\varphi\chi}{\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

$0^o \leq \omega \leq 90^o$

Λύση

Κάνω πράξεις σε κάθε μέλος της ισότητας για να ελέγξω αν έχουν κοινό αποτέλεσμα.

α) $1-\sigma\upsilon\nu^4\chi+\sigma\upsilon\nu^4\chi=\eta\mu^4\chi+1-\eta\mu^4\chi$

$1=1$ άρα ισχύει η ισότητα

β) $\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\varphi\chi\cdot\frac{1}{\eta\mu\chi}=\sigma\varphi\chi\cdot\varepsilon\varphi\chi\cdot\sigma\varphi\chi\cdot\eta\mu\chi$

$\eta\mu^2\chi\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}\cdot\frac{1}{\eta\mu\chi}=1\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}\cdot\eta\mu\chi$

$\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\chi$ άρα ισχύει η ισότητα

γ) $16\eta\mu^2\chi+36\sigma\upsilon\nu^2\chi+48\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+36\eta\mu^2\chi+16\sigma\upsilon\nu^2\chi-48\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=52$

$52\eta\mu^2\chi+52\sigma\upsilon\nu^2\chi=52$

$52(\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi)=52$

$52=52$ άρα ισχύει η ισότητα ?

δ) $(1+\varepsilon\varphi\chi)\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$

$\sigma\upsilon\nu\chi+\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$

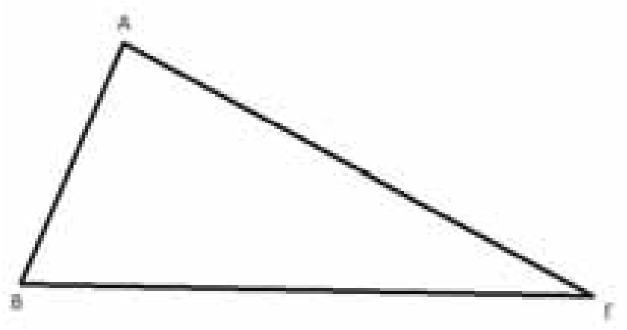
$\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$ άρα ισχύει η ισότητα

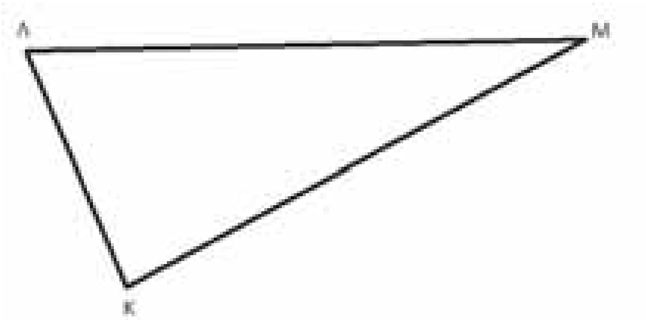
Άσκηση 2

Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ όπου

$$AB = \eta\mu^2 32^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 148^\circ\,, A\Gamma = 3\eta\mu^2\omega - 2\,, B\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$$

$$K\Lambda = \eta\mu^2 2024 + \sigma\upsilon\nu^2 2024,\ \ KM = \eta\mu^2\omega - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega,\ \ \Lambda M = \eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$$





Λύση

Το κριτήριο ισότητας τριγώνων είναι (Π-Π-Π), ελέγχουμε αν υπάρχουν στα τρίγωνα αντίστοιχες πλευρές ίσες.

$AB = K\Lambda$ (1)

AB= $\eta\mu^2 32^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 148^\circ =$

$\eta\mu^2 32^\circ + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 32^\circ)^2 =$

$\eta\mu^2 32^\circ + (-\sigma\upsilon\nu 32^\circ)^2 =$

$\eta\mu^2 32^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 32^\circ = 1$

ΚΛ= $\eta\mu^2 2024^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 2024^\circ$=1

άρα οι πλευρές ΑΒ, ΚΛ είναι ίσες.

Επίσης

ΒΓ= $\frac{\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi} =$

$$\frac{\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{1+\left(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)^2} = \frac{\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{1+\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}+\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$$

Με πράξεις στη ΒΓ καταλήγω στο $\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$ που είναι η πλευρά ΛΜ. Άρα ΒΓ=ΛΜ (2)

Τώρα δε μένει παρά να ελέγξω αν ισχύει η ισότητα και των πλευρών ΑΓ, ΚΜ.

$A\Gamma = KM \ (3)$

$3\eta\mu^2\omega - 2 = \eta\mu^2\omega - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega$

$3\eta\mu^2\omega - 2 - \eta\mu^2\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$

$2\eta\mu^2\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 2 = 0$

$2(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) - 2 = 0$

$2 - 2 = 0$ άρα οι πλευρές ΑΓ, ΚΜ είναι ίσες.

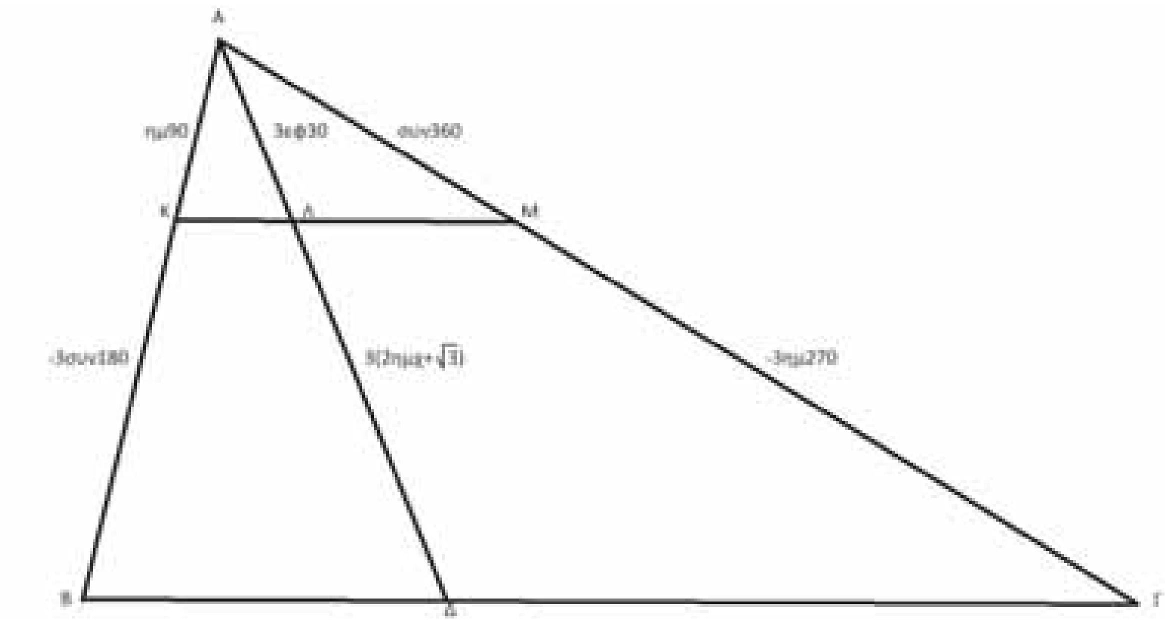
Από τις σχέσεις (1),(2),(3) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν αντίστοιχα τις τρείς πλευρές τους ίσες άρα από το κριτήριο (Π-Π-Π) είναι ίσα.

Άσκηση 3

Στο παρακάτω σχήμα οι διαστάσεις είναι σε m.

α) Να αποδείξετε ότι ΚΜ//ΒΓ

β) Να βρείτε την τιμή του x, όπου x<90°



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ υπολογίζουμε τους λόγους:

$\frac{AK}{KB}, \frac{AM}{M\Gamma}$ και παρατηρώ αν είναι ίσες.

$\frac{AK}{KB} = \frac{\eta\mu 90^\circ}{-3\sigma\upsilon\nu 180^\circ} = \frac{1}{3}$

$\frac{AM}{M\Gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu 360^\circ}{-3\eta\mu 270^\circ} = \frac{1}{3}$

Οι λόγοι είναι ίσοι άρα ΚΜ//ΒΓ

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΚΛ//ΒΔ άρα ισχύει ότι:

$\frac{AK}{KB} = \frac{A\Lambda}{\Lambda\Delta}$

$\frac{1}{3} = \frac{3\varepsilon\varphi 30^\circ}{3(2\eta\mu\chi+\sqrt{3})}$

$2\eta\mu\chi + \sqrt{3} = 3\frac{\sqrt{3}}{3}$

$2\eta\mu\chi = \sqrt{3} - \sqrt{3}$

$\eta\mu\chi = 0\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \chi = 0^\circ$

Άσκηση 4

Α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $\boldsymbol{-3\eta\mu^2\chi + 6\eta\mu\chi + 24}$

ii) $\boldsymbol{\eta\mu^4\chi - 6\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi + 9}$

Β) Να βρω τις τιμές των παραγοντοποιημένων παραστάσεων για χ=30°

Λύση

Α) i) $-3(\eta\mu^2\chi - 2\eta\mu\chi - 8) = -3(\eta\mu\chi - 4)(\eta\mu\chi + 2)$

ii) $\eta\mu^4\chi - 6\eta\mu^2\chi + 9 - \sigma\upsilon\nu^2\chi = (\eta\mu^2\chi - 3)^2 - \sigma\upsilon\nu^2\chi =$

$(\eta\mu\chi - 3 - \sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu\chi - 3 + \sigma\upsilon\nu\chi)$

Β) i) $-3(\eta\mu 30^\circ - 4)(\eta\mu 30^\circ + 2) = -3\left(\frac{1}{2} - 4\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{105}{4}$

ii) $(\eta\mu 30^\circ - 3 - \sigma\upsilon\nu 30^\circ)(\eta\mu 30^\circ - 3 + \sigma\upsilon\nu 30^\circ) = \left(\frac{1}{2} - 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \left(\frac{-5-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-5+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{(-5)^2 - \sqrt{3}^2}{4} = \frac{25-3}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

Άσκηση 5

Δίνονται τα πολυώνυμα $\boldsymbol{P(\chi) = \eta\mu^3\chi - 2\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi + 2,\ \ Q(\chi) = -\eta\mu\chi + 2}$

Να αποδείξετε ότι αν χ=90° είναι: $\boldsymbol{P(90^\circ) + 3Q(90^\circ) = 11}$

Λύση

Υπολογίζω τις αριθμητικές τους τιμές αν χ=90°.

$P(90^\circ) = (\eta\mu 90^\circ)^3 - 2(\eta\mu 90^\circ)^2 + \eta\mu 90^\circ + 2 = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 2$

$Q(90^\circ) = \eta\mu 90^\circ + 2 = 1 + 2 = 3$

επομένως

$P(90^\circ) + 3Q(90^\circ) = 2 + 3 \cdot 3 = 11$

Σημείωση ***Στις ασκήσεις που αναφέρονται σε Γεωμετρικά μεγέθη, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημχ, συνχ, εφχ (το χ έχει τους ίδιους περιορισμούς με το ω) θεωρούμε ότι έχουν μια αριθμητική τιμή όσο το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος.***

84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

4 Νοεμβρίου 2023

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathbf{A}=\left(\frac{-(-5)^2+(-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023}+\frac{22}{23}\quad\text{και}\quad \mathbf{B}=-[(3-7)^2+(-2)^3-9]^2+\frac{23}{24}.$$

Λύση

Υπολογίζουμε τις δύο αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{-(-5)^2+(-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023}+\frac{22}{23}=\left(\frac{-25+9}{16}\right)^{2023}+\frac{22}{23}=$$

$$=(-1)^{2023}+\frac{22}{23}=-1+\frac{22}{23}=-\frac{1}{23}.$$

$$\mathrm{B}=-[(3-7)^2+(-2)^3-9]^2+\frac{23}{24}=-[(-4)^2+(-2)^3-9]^2+\frac{23}{24}=$$

$$=-(16-8-9)^2+\frac{23}{24}=-(-1)^2+\frac{23}{24}=-1+\frac{23}{24}=-\frac{1}{24}.$$

Επειδή είναι

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=-\frac{1}{23}-\left(-\frac{1}{24}\right)=-\frac{1}{23}+\frac{1}{24}=-\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{24}\right)=-\frac{1}{23\cdot 24}<0,$$

έπεται ότι: $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2. **Δίνεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x είναι ίσος με 3, όπου x θετικός ακέραιος μικρότερος του 50. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και x.**

Λύση

Επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x είναι το 3, έπεται ότι πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή οι πιθανές τιμές του x, $0<x<50$ είναι οι εξής:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48.$$

Όμως, όταν ο x είναι πολλαπλάσιο του 6 ή πολλαπλάσιο του 9, τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x θα είναι μεγαλύτερος του 3, οπότε πρέπει να αποκλείσουμε όλα τα πολλαπλάσια αυτών των δύο αριθμών.

Άρα οι δυνατές τιμές του x είναι οι: $3, 15, 21, 33, 39$, για τις οποίες εύκολα επαληθεύουμε ότι ΜΚΔ$(18, x) = 3$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και x είναι ΕΚΠ$(18, 3) = 18$, ΕΚΠ$(18, 15) = 90$, ΕΚΠ$(18, 21) = 126$, ΕΚΠ$(18, 33) = 198$, και ΕΚΠ$(18, 39) = 234$.

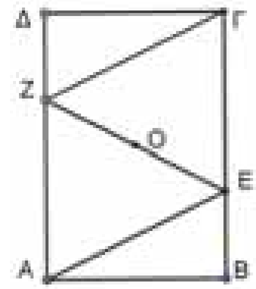
Πρόβλημα 3. **Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλα και το σημείο Ο είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ. Να αποδείξετε ότι:**

(α) ΑΕ = ΓΖ.

(β) ΒΕ = ΔΖ.

(γ) Τα σημεία Β, Ο και Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ.

Σημείωση: *Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Επειδή από την υπόθεση είναι ΑΕ ∥ ΓΖ και ΑΖ ∥ ΕΓ το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Άρα έχουμε: ΑΕ = ΓΖ.

(β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ προκύπτει ότι:

$$\text{ΑΖ} = \text{ΕΓ} \qquad (1)$$

Επίσης το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, οπότε

$$\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ} \qquad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη της ισότητας (1) από την ισότητα (2), έχουμε:

$$\text{ΑΔ} - \text{ΑΖ} = \text{ΒΓ} - \text{ΕΓ} \Rightarrow \text{ΔΖ} = \text{ΒΕ}.$$

(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ είναι κοινή διαγώνιος στα παραλληλόγραμμα ΑΕΓΖ και ΑΒΓΔ. Επομένως το μέσο Ο της διαγωνίου ΕΖ είναι και μέσο της ΑΓ και επίσης από το Ο περνάει η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επιπλέον αυτό είναι το μέσο της.

Πρόβλημα 4. **Η δασκάλα μιας τάξης 20 παιδιών θέλει να επιλέξει τυχαία κάποια από αυτά για να την εκπροσωπήσουν στη Βουλή. Τοποθετεί τα παιδιά σε έναν κύκλο και τους μοιράζει από ένα φάκελο που μέσα γράφει έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 20. Κάθε αριθμός εμφανίζεται μόνο μία φορά. Αφού ανοίξουν τους φακέλους, ένα παιδί επιλέγεται μόνο αν έχει δίπλα του (δεξιά και αριστερά του) ένα παιδί με μικρότερο αριθμό και ένα παιδί με μεγαλύτερο αριθμό. Τελικά επιλέχθηκαν 7 παιδιά. Είναι δυνατόν το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113;**

Λύση

Παρατηρούμε ότι το παιδί που έχει το φάκελο με τον αριθμό 20 δεν μπορεί να επιλεγεί, αφού εκατέρωθεν αυτού στον κύκλο έχει παιδιά με μικρότερους αριθμούς. Συνεπώς το μέγιστο το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν είναι το πολύ

$$19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 = 112.$$

Επομένως δεν υπάρχει καμιά διάταξη των παιδιών ώστε το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Δίνεται η αριθμητική παράσταση**

$$\mathbf{A} = \left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5}\right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300}$$

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης Α ως δύναμη με βάση το 2.

Λύση

$$\mathrm{A} = \left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5}\right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300} = \left[\left(\frac{-8}{-2}\right)^{10} + 3 \cdot \frac{(2^5)^6}{(2^2)^5}\right]^{100} : (144 - 16)^{300}$$

$$= \left[4^{10} + 3 \cdot \frac{2^{30}}{2^{10}}\right]^{100} : 128^{300} = [(2^2)^{10} + 3 \cdot 2^{20}]^{100} : (2^7)^{300}$$

$$= [2^{20} + 3 \cdot 2^{20}]^{100} : (2^7)^{300} = (4 \cdot 2^{20})^{100} : (2^7)^{300}$$

$$= (2^2 \cdot 2^{20})^{100} : (2^7)^{300}$$

$$= (2^{22})^{100} : (2^7)^{300} = 2^{2200} \cdot 2^{2100} = 2^{100}.$$

Πρόβλημα 2. **Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{2023}xy}$, όπου x, y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.**
Να προσδιορίσετε τα ψηφία x, y έτσι ώστε ο αριθμός Α να διαιρείται με τον αριθμό 17.

Λύση
Έχουμε:

$$\mathrm{A} = 2023xy = 202300 + 10x + y = 17 \cdot 11900 + 10x + y,$$

οπότε για να διαιρείται ο αριθμός Α με το 17 αρκεί ο αριθμός $\overline{xy} = 10x + y$ να διαιρείται με το 17, δηλαδή αρκεί $\overline{xy} = 10x + y \in \{17, 34, 51, 68, 85\}$.
Άρα οι λύσεις είναι τα ζεύγη:

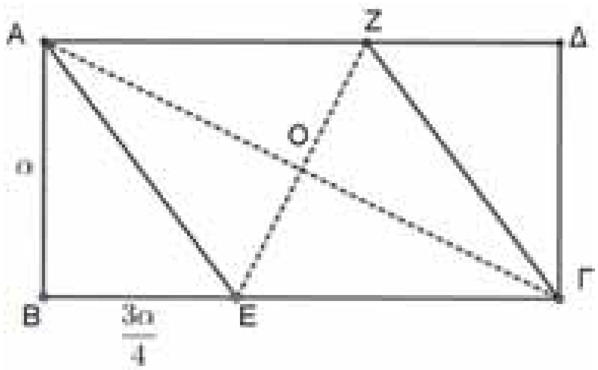
$$(x, y) \in \{(0,0), (1,7), (3,4), (5,1), (6,8), (8,5)\}.$$

Πρόβλημα 3. **Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουσδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενό τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός (από τους αρχικούς 7) που διαιρείται με το 10.**

Λύση. Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν 4 περιττοί αριθμοί, γιατί τότε το 10 δεν θα διαιρούσε το γινόμενό τους. Επομένως οι περιττοί αριθμοί είναι το πολύ τρεις. Άρα οι άρτιοι είναι τουλάχιστον τέσσερεις. Ομοίως, δεν μπορεί να υπάρχουν 4 αριθμοί που να μην διαιρούνται με το 5, γιατί τότε το γινόμενό τους δεν διαιρείται με το 10. Συνεπώς υπάρχουν το πολύ 3 αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 5, άρα τα πολλαπλάσια του 5 είναι τουλάχιστον 4. Τελικά εφόσον υπάρχουν 7 αριθμοί, υπάρχει κάποιος που είναι πολλαπλάσιο και του 2 και του 5, άρα πολλαπλάσιο του 10.

Πρόβλημα 4.
Στο σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\mathbf{AB} = \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{B\Gamma} = 2\boldsymbol{\alpha}$. Οι ευθείες ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλες και $\mathbf{BE} = \frac{3\alpha}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $AE = AZ$.
(β) Η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ περνάει από το Ο που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΖΕ.
(γ) **$A\Gamma = 2 \cdot EZ$.**



Σημείωση: *Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) Επειδή ΑΒΓΔ ορθογώνιο έπεται ότι $B\Gamma \parallel A\Delta$, οπότε θα είναι και $E\Gamma \parallel AZ$.
Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι $AE \parallel \Gamma Z$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Από την υπόθεση έχουμε:

$$E\Gamma = 2\alpha - \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\alpha}{4}. \qquad (1)$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ προκύπτει:

$$AE^2 = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{16}} = \sqrt{\frac{25\alpha^2}{16}} \Rightarrow AE = \frac{5\alpha}{4}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $AE = E\Gamma$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και άρα είναι ρόμβος.

(β) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ έχουν κοινή τη διαγώνιο ΑΓ. Επομένως η άλλη διαγώνιος εκάστου από αυτά θα περνάει από το μέσο της ΑΓ.

(γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = \sqrt{AB^2 + B\Gamma^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2} \Rightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{5}. \qquad (3)$$

Για το εμβαδό του ρόμβου έχουμε:

$$E_{AE\Gamma Z} = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot EZ = AB \cdot E\Gamma \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \cdot EZ = \alpha \cdot \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $A\Gamma = 2 \cdot EZ$

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 128Α

N49. **Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο ν που είναι τέτοιος ώστε οι ακέραιοι $10 + \nu$ και 10ν να είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα.** ΜΟ Ιαπωνίας 2023

Λύση

Έστω ότι $10\nu = \kappa^2$, όπου κ θετικός ακέραιος. Τότε, αφού 2 και 5 είναι πρώτοι, έχουμε:

$$10 = 2 \cdot 5 | \kappa^2 \Rightarrow 2|\kappa^2 \text{ και } 5|\kappa^2 \Rightarrow 2|\kappa \text{ και } 5|\kappa \Rightarrow 10|\kappa \Rightarrow \kappa = 10\alpha,$$

όπου α θετικός ακέραιος. Τότε θα είναι $10\nu = (10\alpha)^2 = 100\alpha^2$ και $\nu = 10\alpha^2$.

Για $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$, προκύπτει ότι $10 + \nu = 20$ *και* $10 + \nu = 50$, αντίστοιχα, που δεν είναι τέλεια τετράγωνα. Άρα πρέπει $\alpha \geq 3$.
Παρατηρούμε ότι για $\alpha = 3$ έχουμε $10 + \nu = 10 + 10 \cdot 3^2 = 10 + 90 = 100 = 10^2$, οπότε ο ζητούμενος θετικός ακέραιος είναι ο $\nu = 90$.

Ν50. **Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2012}$ περιττοί θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός**

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{2012}^2 - 1}$$

είναι άρρητος. ΜΟ Ρουμανίας 2012

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{2012}^2 - 1$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή οι θετικοί ακέραιοι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2012}$ είναι περιττοί, το τετράγωνό τους είναι της μορφής $4\kappa + 1$, όπου κ θετικός ακέραιος. Επομένως το άθροισμα των 2012 θετικών ακεραίων $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{2012}^2$ θα είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε ο θετικός ακέραιος $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{2012}^2 - 1$ θα είναι της μορφής $4\lambda + 3$, όπου λ θετικός ακέραιος και επομένως δεν είναι δυνατόν να είναι τέλειο τετράγωνο.

Α76. **Οι αριθμοί α, β και γ είναι θετικοί πραγματικοί τέτοιοι ώστε $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι:**
(α) Αν δύο από τους αριθμούς α, β και γ είναι ίσοι, τότε ένας τουλάχιστον από τους α, β και γ είναι άρρητος.
(β) Υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων (μ, ν, ρ) έτσι ώστε:

$$\mu^2 + \mu\nu + \mu\rho - \nu\rho = 0.$$

ΜΟ Ρουμανίας 2012

Λύση

(α) Αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = \gamma$ έχουμε $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma = 2\alpha^2 = 0$, που είναι άτοπο.
Αν $\beta = \gamma$ έχουμε

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = 2\beta^2$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \beta\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \beta\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Αν β άρρητος, τότε ισχύει το ζητούμενο. Αν β ρητός, τότε $\alpha = \beta\left(\sqrt{2} - 1\right)$ άρρητος, οπότε πάλι ένας τουλάχιστον από τους α, β και γ είναι άρρητος.
(β) Αρκεί να βρούμε τριάδες θετικών ακεραίων $(\mu, \mu\kappa, \mu\lambda)$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι, τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τη δεδομένη ισότητα, η οποία τότε παίρνει τη μορφή

$$1 + \kappa + \lambda - \kappa\lambda = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)(\lambda - 1) = 2.$$

Παρατηρούμε ότι για $\kappa = 2, \lambda = 3$, προκύπτουν οι τριάδες $(\mu, 2\mu, 3\mu)$, όπου μ θετικός ακέραιος, που ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση.

Ασκήσεις για λύση

Ν51. Δίνεται ο αριθμός $A = 3\nu^2 + \nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$.
(α) Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος A είναι περιττός, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
(β) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος των ψηφίων του A.

Γ63. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ > ΑΓ. Το σημείο Ρ ανήκει στην πλευρά ΑΒ και είναι τέτοιο ώστε $\mathrm{A\hat{\Gamma}P} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma}$. Έστω Δ το συμμετρικό του Ρ ως προς την ευθεία ΑΓ και έστω Ε το σημείο στο οποίο ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΑΓ.

Ο Γκάρι Κασπάροφ και η Εύα

Επιμέλεια: **Παναγιώτης Χριστόπουλος**

Ο Ρώσος σκακιστής Κασπάροφ, ο κορυφαίος του κόσμου, το καλοκαίρι στη Θεσσαλονίκη αντιμετώπισε ταυτόχρονα τέσσερες Ελληνίδες πρωταθλήτριες στο σκάκι και φυσικά τις νίκησε. Έστεκε όρθιος απέναντί τους παρακολουθώντας τις κινήσεις τους και έπαιζε στους κανονικούς χρόνους. Ο θρύλος στο σκάκι ήταν προσκεκλημένος από την Ένωση Σκακιστών Θεσσαλονίκης και το Δήμο Θεσσαλονίκης και προσέλκυσε μεγάλο κοινό που έσπευσε να τον θαυμάσει από κοντά. Οι πρωταθλήτριες ήταν η Σταυρούλα Τσολακίδου, η Ελισάβετ Παπαθανασίου, η Κατερίνα Πάσογλου και η Ευαγγελία Μαστρακούλη.

Το 1996 ο Κασπάροφ έπαιξε με αντίπαλο έναν υπολογιστή της IBM και τον νίκησε, την επόμενη χρονιά η IBM έκανε τον Deep Blue που μπορούσε να ελέγχει 200 εκατομμύρια θέσεις ο οποίος στον τελευταίο αγώνα νίκησε τον Κασπαροφ. Ο Κασπάροφ δεν δέχτηκε την ήτα γιατί θεώρησε ότι έγινε ανθρώπινη παρέμβαση. Η IBM δεν δέχτηκε έλεγχο και διέλυσε τον υπολογιστή.

Το καλοκαίρι η συνάδελφος **Χριστίνα Πούλιου** από το Γυμνάσιο της Άνοιξης συνάντησε την μικρή 11χρονη μαθήτρια της έκτης Δημοτικού **Ευαγγελία Σίσκου** που έχει το ταλέντο να παίζει καλό σκάκι. Η Ευαγγελία είναι σκακίστρια του Γαλαξία Θεσσαλονίκης, αγωνίστηκε στο Παγκόσμιο Πρωτάθλημα που διεξήχθη στη Ρόδο κατακτώντας την πρώτη θέση στην κατηγορία των κοριτσιών μέχρι 13 ετών. Πέτυχε 7,5 βαθμούς σε 9 αγώνες (7 νίκες, μία ήττα και μία ισοπαλία), με αποτέλεσμα να είναι μπροστά από 34 άλλες μικρές σκακίστριες και να κερδίσει χρυσό μετάλλιο. Οκτώ μήνες νωρίτερα στο Μπατούμι της Γεωργίας, μεταξύ 101 σκακιστριών από 50 χώρες είχε αναδειχθεί Τρίτη.

Η συνάδελφος **Χριστίνα Πούλιου** έθεσε μερικές ερωτήσεις στην Ευαγγελία για το σχολείο της, την ενασχόλησή της με το σκάκι, τα βραβεία και πολλά άλλα στις οποίες απάντησε και έχουν ενδιαφέρον.

Ερώτηση: Ευαγγελία πες μου για σένα , το σκάκι, το σχολείο και πως νοιώθεις που είσαι πρωταθλήτρια στο σκάκι;

- ***Με λένε Ευαγγελία, πάω έκτη δημοτικού στη Θεσσαλονίκη. Ξεκίνησα το σκάκι όταν ήμουν τεσσάρων ετών με την βοήθεια της δασκάλας μου κυρίας Μαριάννας Μαυρίδου. Μου αρέσει το σκάκι γιατί χρειάζεται στρατηγική και δεν βασίζεται στην τύχη. Επίσης έχω γνωρίσει παιδιά από όλο τον κόσμο και διατηρώ μια επικοινωνία μαζί τους. Νιώθω χαρά όταν κερδίζω αλλά μαθαίνω και από τα λάθη μου όταν χάνω. Δεν εγκαταλείπω τα μαθήματά μου, έχω χρόνο και για τα δύο, το ίδιο και οι πιο πολλοί συμμαθητές μου ασχολούνται με το δικό τους αγαπημένο άθλημα στον ελεύθερο χρόνο τους και δεν ασχολούνται πολλή ώρα με*** *video games.*

Ερώτηση: Σε σχέση με το μέλλον, ποιες είναι οι φιλοδοξίες σου και τα όνειρά σου, πως φαντάζεσαι τον εαυτό σου σε 10 χρόνια από τώρα;

- ***Φαντάζομαι ότι σε 10 χρόνια από τώρα θα είμαι φοιτήτρια και θα συνεχίζω να παίζω σκάκι. Θα ήθελα να γίνονται περισσότερα διεθνή τουρνουά.***

Ερώτηση: Από ποιες πηγές αντλείς δύναμη και προχωράς την προσπάθεια σου και τι ρόλο παίζει η οικογένεια σου σε αυτήν;

- ***Αντλώ δύναμη από τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές μου οι οποίοι πραγματικά μου συμπαραστέκονται και από τους γονείς και τον αδερφό μου που είναι εκεί όταν τους χρειάζομαι.***

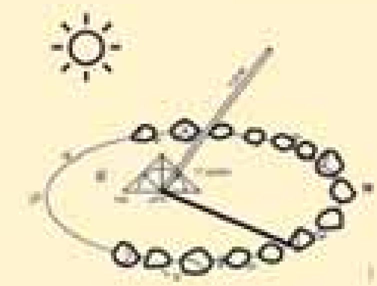
Σε ευχαριστώ Ευαγγελία καλή πρόοδο.

2024

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

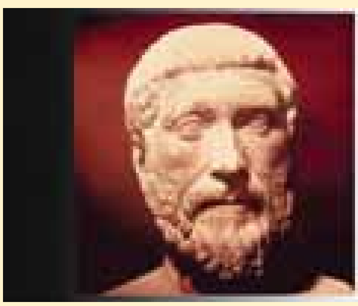
Πέρασαν ήδη 23 χρόνια από την $3^{η}$ χιλιετία. Πήγαμε στο $24^{ο}$ της $3^{ης}$ χιλιετίας. Είμαστε δηλαδή στον $21^{ο}$ αιώνα μετά την γέννηση του Χριστού.

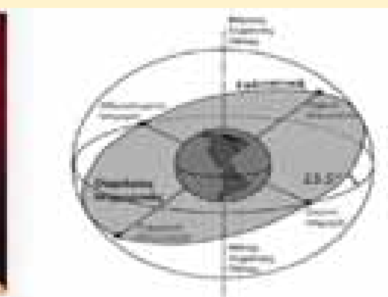
Πόσα χρόνια πέρασαν πριν την γέννηση του χριστού; Άγνωστο. Ξέρουμε όμως ότι ο άνθρωπος με την εμφάνισή του στη Γη βλέποντας να εναλλάσσετε η μέρα με την νύχτα και να εναλλάσσονται οι εποχές συνειδητοποίησε την έννοια του χρόνου.



Χώρισαν την διάρκεια μιας πλήρους περιστροφής της Γης σε 24 μέρη (τις ώρες) και έτσι αφού κατασκεύασαν το ηλιακό ρολόι είχαν ένα σημείο αναφοράς για πια στιγμή της ημέρας θα έκαναν κάτι. Η αρχαία ονομασία του ρολογιού ήταν σκιοθηρικὸν. Μετρά το χρόνο με βάση τη θέση της σκιάς που ρίχνει ένα αντικείμενο από τον ήλιο. Επινοήθηκε πρώτα από τους Χαλδαίους περίπου πριν 3700 χρόνια. Υπάρχουν πολλά είδη ηλιακών ρολογιών, όπως τα οριζόντια, τα κατακόρυφα, τα ισημερινά, τα πολικά κ.α.

Ακολούθως έδωσαν όνομα στις ημέρες. Τα χρόνια εκείνα ο αριθμός επτά ήταν γι' αυτούς ιερός. Έτσι δημιούργησαν την εβδομάδα ονομάζοντας τις ημέρες πρώτη, δεύτερη, τρίτη, τέταρτη, κλπ μέχρι που κατέληξαν στα σημερινά ονόματα. Τις εποχές ήταν δύσκολο να τις ξεχωρίσουν μέχρι που ο Θαλής ο Μηλίσιος τον $6^{ο}$ π.Χ. αιώνα πρώτος κατάλαβε και προσδιόρισε τις εποχές, ενώ τον $5^{ο}$ π. Χ. αιώνα ο Μέτωνας έκανε ακριβείς μαθηματικές μετρήσεις.



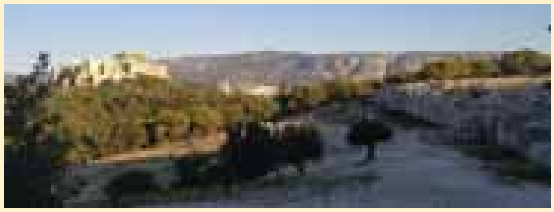


Ο Μέτωνας το 432 π.Χ. δημιούργησε το Αττικό Ημερολόγιο. Το ημερολόγιο του Μέτωνα είναι σεληνιακό ημερολόγιο, το οποίο χρησιμοποιεί και σήμερα η Ορθόδοξη Χριστιανική εκκλησία για τον εορτασμό του Πάσχα.

Ο Μέτων βρήκε ότι 19 έτη είναι ίσα με 235 Σεληνιακούς μήνες ή 6940 ημέρες (κύκλος του Μέτωνα), δηλαδή η Νέα Σελήνη κάθε 19 έτη γίνεται την ίδια μέρα του έτους. Το έργο του Μέτωνα συνέχισαν ο Αρίσταρχος και ο Κάλλιπος.

$$19 \text{ έτη} = 19 \times \frac{365.2425 \text{ ημέρες}}{\text{έτος}} \times \frac{\text{σεληνιακός μήνας}}{29.53059 \text{ ημέρες}} = 234.997 \text{ σεληνιακοί μήνες}$$

Ο Μέτωνας εγκατέστησε στην Πνύκα το πρώτο ηλιοτρόπιο ή ηλιοσκόπιο ακριβώς πίσω από το βήμα της Πνύκας (βουλή των αρχαίων Ελλήνων). Με βάση τη συγκεκριμένη θέση του ηλιοσκοπίου ο Μέτωνας προσδιόρισε τις ημερομηνίες των ισημεριών και τα ηλιοστάσια. Από τη θέση αυτή η ανατολή του ήλιου κατά το θερινό ηλιοστάσιο φαίνεται από την κορυφή του Λυκαβηττού και κατά το χειμερινό ηλιοστάσιο, ο ήλιος ανατέλλει από την κορυφή του Υμηττού, στο 6μηνο ο ήλιος διαγράφει τόξο περίπου 60°. Ο ακριβής προσδιορισμός του θερινού ηλιοστασίου για τους αρχαίους Αθηναίους ήταν σημαντικός γιατί η πρώτη σελήνη μετά το θερινό ηλιοστάσιο όριζε την αρχή του νέου έτους και την έναρξη του Εκατομβαιώνος. Κανένα από τα έργα του Μέτωνα δε διασώθηκε. Τον $1^{ο}$ αιώνα μ.Χ. κατασκεύασαν και ειδικό μηχανισμό για τις μετρήσεις αυτές ο οποίος βρέθηκε τον προηγούμενο αιώνα σε ναυάγιο στα Κήθυρα.



Το επόμενο βήμα για τον άνθρωπο ήταν να μετρήσει τα έτη, δηλαδή μια πλήρη περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο. Στην αρχή με βάση ένα σημαντικό γεγονός έλεγαν τόσα χρόνια πέρασαν από τότε. Παράδειγμα από τους πρώτους Ολυμπιακούς Αγώνες ή όταν χτίστηκε η Ρώμη έλεγαν τόσα χρόνια πέρασαν «από κτίσεως Ρώμης». Οργάνωναν μάλιστα και διάφορες εορτές για την αρχή της Άνοιξης, του Χειμώνα, του έτους κλπ. Τότε πίστευαν ότι οι τροχιές των ουρανίων σωμάτων ήταν κυκλικές, έτσι οι Βαβυλώνιοι χώρισαν τον κύκλο σε 360 μοίρες και υπέθεσαν ότι ο Ήλιος κάθε μέρα προχωρά κατά μια μοίρα δηλαδή ότι το έτος έχει 360 μέρες και πιο μετά 365 μέρες.

Οι Αρχαίοι Έλληνες και οι Αιγύπτιοι υπολόγισαν το έτος σε 365 μέρες και 6 ώρες. Γι' αυτό το 45 π.Χ. ή το 709 από κτίσεως Ρώμης, καθιερώθηκε το λεγόμενο **«Ιουλιανό Ημερολόγιο».** Το ημερολόγιο αυτό έφτιαξε ο Έλληνας αστρονόμος **Σωσιγένης** με εντολή του Ρωμαίου αυτοκράτορα **Ιουλίου καίσαρα**.

Ο Σωσιγένης πρόσθεσε στο ημερολόγιο μια μέρα (6ώρες χ 4 =1 μέρα) κάθε 4 χρόνια, την $29^{η}$ Φεβρουαρίου, τα έτη αυτά ονομάστηκαν **δίσεκτα.**[1]

Όμως η γέννηση του Χριστού ως μεγαλύτερο γεγονός (αφού είχε επικρατήσει ο Χριστιανισμός) άλλαξε πάλι την αρχή για το μέτρημα των χρόνων.

Το έτος ***754 από κτίσεως Ρώμης*** ορίστηκε ως **Primo Anno Domini** δηλαδή **πρώτο έτος του Κυρίου 1 μ.Χ.** . Αυτό έγινε το 1287 *από κτίσεως Ρώμης* από το Σκύθη μοναχό και βιβλιοθηκάριο στο Βατικανό, Διονύσιο Μικρό. Ο Διονύσιος Μικρός το έτος 1287 *από κτίσεως Ρώμης* με υπολογισμούς του το ονόμασε 533 μ.Χ.

Ακόμη ο Διονύσιος ο Μικρός θεώρησε πως ο Χριστός γεννήθηκε ημέρα Κυριακή (μέρα 0) και η επόμενη μέρα μετρήθηκε ως Δευτέρα $1^{η}$ Ιανουαρίου του έτους 1 μ.Χ..

Φυσικά ότι δεν χρησιμοποίησε το έτος μηδέν (0) δεν ήταν λάθος του, αφού ο αριθμός μηδέν δεν είχε χρησιμοποιηθεί ακόμα. Το μηδέν ως αριθμός άρχισε να χρησιμοποιείται για πρώτη φορά περίπου το 1200 μ.Χ. .

[1] Κάτι ανάλογο γινόταν και παλαιότερα με την προσθήκη δύο ημερών στις 6 Φεβρουαρίου (δις έξι).

Ο Αστρονόμος **Ίππαρχος** όμως υπολόγισε το έτος σε 365,242 μέρες δηλαδή 365 μέρες, 5 ώρες, 48 λεπτά και 47 δευτερόλεπτα. Οπότε ο πάπας **Γρηγόριος** ο 13ος το 1582 μ.Χ. ανέθεσε στον αστρονόμο **Lilio** (Λίλιο) να φτιάξει σύμφωνα με τον Ίππαρχο νέο ημερολόγιο[2] διότι ο Σωσιγένης υπολόγισε το έτος 11 λεπτά και 13 δευτερόλεπτα μεγαλύτερο του πραγματικού. Ο Λίλιο διαπίστωσε ότι κάθε 400 χρόνια μετρούσαν 3 ημέρες περισσότερες και κάνει τη διόρθωση αυτή με τον εξής τρόπο:

α) αφαιρεί κάθε 400 χρόνια 3 μέρες. *Ορίζει να μην είναι δίσεκτα τα έτη των αιώνων που ο αιώνας δεν διαιρείται με 4*. Δηλαδή τα έτη 1700,1800,1900,δεν ήταν δίσεκτα όπως δεν θα είναι και τα 2100,2200,2300.

β) αφαιρεί μία ακόμη ημέρα κάθε 4.000 χρόνια δηλαδή τα έτη 4.000,8.000,12.000,16.000 που σύμφωνα με το α) θα ήταν δίσεκτα, δεν θα είναι δίσεκτα και

γ) αφαιρεί μία ακόμη ημέρα κάθε 20.000 χρόνια, από τα έτη 20.000,40.000, …, μ.Χ. **.**

Ακόμη πρέπει να σημειώσουμε ότι οι ημέρες του έτους δεν ήταν δυνατόν να μοιραστούν εξ ίσου στους **12** μήνες διότι ο αριθμός 365 δεν είναι πολλαπλάσιο του **12**. Επίσης το 365 δεν είναι πολλαπλάσιο του **7** γι' αυτό στις ίδιες ημερομηνίες από έτος σε έτος δεν αντιστοιχεί ίδια μέρα.

Ένα παιχνίδι με τους αριθμούς

$2024=45^2-1^2=(45-1)(45+1)=44x46$

Ερώτηση: πιο έτος θα είναι πάλι διαφορά τετραγώνων;

$2024=(20+24)^2+(20+24)x2$

$2024=2^3.11.23$ σε πρώτους παράγοντες

$2024=(2^{0+2+4})^2:2-24$

$2024=253x(2+0+2+4)$

$2024=5x20^2+24$

$2024=(2+0+2+4)^2x(2^4+0^2+2^0+4^2)-2x(20+24)$

$2024=(20^2\ x24^2)x2+3x24$

$2024=2x3x6x7x8+2x4$

$2024=8^4/2-8^2/2+8$

$2024=2(36^2-17^2)+10$

$2024=2^6\ x\ 2^5-2^3x3$

$2024=2^3+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}$

$2024=2x2x2x2x2x3x3x7+2x4$

$2024=6+6+6+6+666+666+666+2$

$2024=8+8x8+88+88+888+888$

$2024=9+9+9+999+999-1$

$2024=2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$

Ουδέν ούτω δύναμιν έχει παίδειον μάθημα μεγάλην ως η περί τους αριθμούς διατριβή. Το δε μέγιστον ότι τον νυστάζοντα και αμαθή φύσει εγείρει και ευμαθή και αγχίνουν απεργάζεται. Πλάτων, Νόμος 747b.

Σε μετάφραση: Κανένα μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο η ενασχόληση με τους αριθμούς. Το πιο σημαντικό απ' όλα είναι ότι τον κοιμισμένο στο μυαλό, τον χωρίς κλίση για μάθηση τον διεγείρει και τον κάνει να μαθαίνει και του αυξάνει την αντιληπτική ικανότητα.

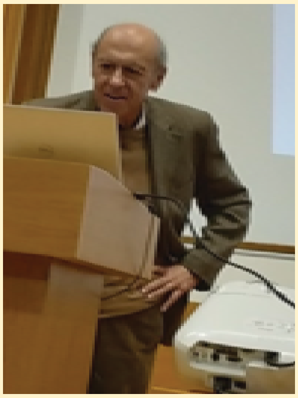
[2] Το Γρηγοριανό Ημερολόγιο εφαρμόστηκε στην Ελλάδα το **1923 την 16η Φεβρουαρίου** που ονομάστηκε 1η Μάρτη γιατί είχαν μέχρι τότε χαθεί 13 ημέρες. Ένα χρόνο μετά εφαρμόστηκε και στην εκκλησία. Κάποιοι κληρικοί που δεν ακολουθούν το νέο ημερολόγιο ονομάζονται **παλαιοημερολογίτες**.

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Παναγιώτης Χριστόπουλος

Το Σάββατο 11 Νοεμβρίου 2023 στο **ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ "ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ" ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑ,** έγινε ημερίδα από την ΕΜΕ για τα 150 χρόνια από τη γέννηση του **κορυφαίου Έλληνα μαθηματικού του 20ου αιώνα Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή**. Στο κατάμεστο από μαθηματικούς αμφιθέατρο ομιλητές ήταν οι επιστήμονες: Δημήτριος Χριστοδούλου, Ευρωπαϊκή Ακαδημία Επιστημών και ΕΤΗ, Αθανάσιος Φωκάς, Ακαδημία Αθηνών και University of Cambridge, η Χριστίνα Φίλη, Καθηγήτρια ΕΜΠ και η Μαρίνα Ηλιοπούλου, Καθηγήτρια ΕΚΠΑ.

Κ. Καραθεοδωρή



Δ. Χριστοδούλου

Αθ. Φωκάς

Το 2001 κυκλοφόρησε από τις εκδόσεις ΚΑΚΤΟΣ βιβλίο με το έργο και τη ζωή του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή από την Δέσποινα Βλαχοστέργιου-Βασβατέκη η οποία αναφέρει: Ευγνωμονώ τη νονά μου κα Δέσποινα Καραθεοδωρή-Ροδοπούλου, για τη μεγάλη τιμή που μου έκανε να μου εμπιστευτεί την επιμέλεια αυτού του λευκώματος, δίδοντάς μου την ευκαιρία να έχω άμεση πρόσβαση στο προσωπικό αρχείο του διάσημου πατέρα της.

Από το βιβλίο αυτό διαβάζουμε:

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή υπήρξε μορφή με υπολογίσιμη συμβολή στα Μαθηματικά και τη Φυσική, με συγγραφική δράση και ωριμότητα ενός αδαμάντινου χαρακτήρα. Ξεχώρισε για την αποτελεσματική του συμβολή στην ανασυγκρότηση των πανεπιστημίων της Ελλάδας. Μέχρι το θάνατό του, υπηρέτησε πιστά με πλήρη ανιδιοτέλεια τις εθνικές ανάγκες και απαιτήσεις.

Με τον πατέρα του Στέφανο Καραθεοδωρή, πρεσβευτή της Υψηλής Πύλης στις Βρυξέλλες (1896)

Υπηρέτησε το έθνος με την υψηλοφροσύνη του αγνού και άδολου οραματιστή, γράφοντας την πιο πλούσια σελίδα της ιστορίας της αγάπης του για την πατρίδα. Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννήθηκε τον Σεπτέμβριο του 1873 στο Βερολίνο. Πέρασε τα παιδικά του χρόνια στις Βρυξέλλες, όπου ο πατέρας του Στέφανος υπηρετούσε ως πρεσβευτής.

Νωρίς φανέρωσε το μαθηματικό του τάλαντο, πρωτεύοντας σε δύο διαγωνισμούς Μαθηματικών μεταξύ όλων των μαθητών του Βελγίου. Το 1879 έχασε τη μητέρα του σε ηλικία 6 ετών. Η μητέρα του Δέσποινα ήταν από την οικογένεια Πετροκόκκινου της Χίου και την ανατροφή του ανέλαβε η μητέρα της Ευθαλία, αρχόντισσα της Χίου. Ο πατέρας του ο Στέφανος ήταν από την Ανδριανούπολη και καταγόταν από Φαναριώτικη οικογένεια της Κωνσταντινούπολης, πέθανε το 1908.

Ο Κωνσταντίνος φοίτησε στη Στρατιωτική Σχολή του Βελγίου και εργάσθηκε ως μηχανικός στην Αίγυπτο.

Πορτρέτο του Καραθεοδωρή από τον Γιάννη Μόραλη

Οι μελέτες του στην πυραμίδα του Χέοπος παρήγαγαν την απόφασή του να ασχοληθεί με τη μαθηματική επιστήμη. Φοίτησε κατ' αρχάς στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου και εν συνεχεία μεταγράφηκε στη Γοτίγγη, όπου παρακολούθησε τους κορυφαίους μαθηματικούς Klein και Hilbert. Τότε δημοσίευσε τις πρώτες του εργασίες, οι οποίες έκαναν αίσθηση. Το 1904

Ο Καραθεοδωρή στην είσοδο του πανεπιστημίου της Σμύρνης που δεν έμελλε να λειτουργήσει… με την ιδιόγραφη χαρακτηριστική φράση «ουδείς αγεωμέτρητος εισίτω»

Γραμματόσημο των Ελληνικών Ταχυδρομείων (1994) για τον Καραθεοδωρή

παρουσίασε τη διδακτορική του διατριβή, και τον Μάρτιο του 1905, σε χρόνο ρεκόρ, αναγορεύθηκε υφηγητής. Το 1908 νυμφεύθηκε την Ευφροσύνη Αλ. Καραθεοδωρή. Απέκτησαν δύο παιδιά, τον Στέφανο και τη Δέσποινα.

Τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Ανοβέρου, επεκτείνει τις μελέτες του στον χώρο της Φυσικής και διατυπώνει τα δύο αξιώματά του επί της Θερμοδυναμικής. Το κύρος του αναγνωρίζεται ευρύτατα και αναλαμβάνει θέση τακτικού καθηγητή στο Πολυτεχνείο του Μπρεσλάου, ενώ το 1913 ο Klein τον προτείνει ως διάδοχό του στην έδρα των Μαθηματικών στη Γοτίγγη. Το ίδιο θα συμβεί και με την έδρα που κατείχε ο Hilbert στο Βερολίνο. Μέλος της Πρωσικής Ακαδημίας Επιστημών το 1919, θα κληθεί τον επόμενο χρόνο από τον Ελ. Βενιζέλο να αναλάβει την οργάνωση του Πανεπιστημίου Σμύρνης, σχέδιο που ματαιώνει η καταστροφή του 1922.

Δίδαξε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και στο ΕΜΠ από το 1922 έως το 1924 οπότε διορίστηκε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου. Το 1927 εξελέγει μέλος της Ακαδημίας Αθηνών και το 1930 ο Βενιζέλος του ανέθεσε την αναδιοργάνωση των ελληνικών Πανεπιστημίων. Δίδαξε σε περισσότερα από 20 πανεπιστήμια στην Ευρώπη και την Αμερική.

Μέλος πολλών διεθνών Ακαδημιών, τιμήθηκε με επιστημονικές διακρίσεις και βραβεία.Έχοντας κατακτήσει τη γενική αναγνώριση και τον θαυμασμό, τόσο για την επιστημονική του ιδιοφυία όσο και για τις ανθρώπινες αρετές του. Ο Κ. Καραθεοδωρή πέθανε στο Μόναχο τον Φεβρουάριο του 1950.

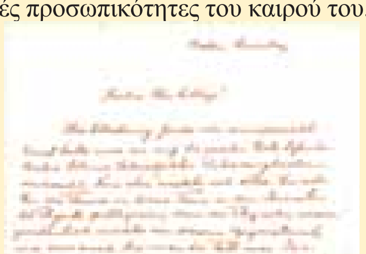
Οι εργασίες του στη θεωρία των Πραγματικών Συναρτήσεων, στον Λογισμό των Μεταβολών, στις Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξεως. στη Θερμοδυναμική και σε πλήθος άλλων γνωστικών περιοχών από τα Μαθηματικά και τη Φυσική του προσέδωσαν παγκόσμια φήμη και τον ανέδειξαν ως ένα των κορυφαίων επιστημόνων του 20ού αιώνα. 0 ίδιος ο Αϊνστάιν αποκάλεσε τον Καραθεοδωρή δάσκαλό του και αναγνώρισε τη συμβολή του στην ειδική θεωρία της Σχετικότητας.

Το 1954 η Βαυαρική Ακαδημία Επιστημών δημοσίευσε το σύνολο του Έργου του σε 5 τόμους. Το 2004 σε ημερίδα για τον Καραθεοδωρή στο Πανεπιστήμιο Αθηνών ήμουν ομιλητής και αναφέρθηκα στη ζωή και το σπουδαίο έργο του στην Επιστήμη. Στην ημερίδα αυτή μας τίμησε με την παρουσία της και η κόρη του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή η κυρία Δέσποινα Καραθεοδωρή-Ροδοπούλου.

Η αγροικία της Χίου τα καλοκαίρια ήταν τόπος συνάντησης των πολυάριθμων συγγενών που ήταν διασπαρμένοι σ' όλο τον κόσμο, με αποτέλεσμα ο Κωνσταντίνος για πολλά χρόνια να έχει την ευκαιρία να παίζει με μικρούς εξαδέλφους ή εξαδέλφες, που η μόνιμη κατοικία τους ήταν στην Αλεξάνδρεια, στο Λίβερπουλ, στην Οδησσό, στην Τεργέστη, στη Σμύρνη, στο Λονδίνο, στο Παρίσι, στη Βιέννη ή στην Κωνσταντινούπολη και κάθε καλοκαίρι έρχονταν με τους γονείς τους στη θερινή εκείνη διαμονή. Οι συγγενείς της μητέρας του ήταν σχεδόν όλοι έμποροι και πραματευτές. Αντίθετα, η οικογένεια του πατέρα του ανέδειξε αξιολογότατους άνδρες, οι οποίοι ανέπτυξαν δράση σε υψηλές θέσεις της διπλωματίας και της διοίκησης, εκφράζοντας με την προσωπικότητά τους την πλούσια κληρονομιά αρχαιοελληνικής πνευματικής καλλιέργειας.

9

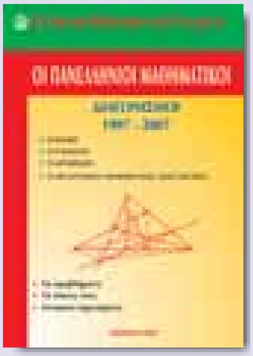
Οι γνωριμίες και οι συναναστροφές του πατέρα του με διεθνείς προσωπικότητες της Διπλωματίας, των Επιστημών και της Τέχνης επέδρασσαν σημαντικά στην πνευματική καλλιέργεια του νεαρού Κωνσταντίνου. Από την πρώτη του νεότητα, είχε την ευκαιρία επαφών με υψηλής στάθμης πνευματικό περιβάλλον, καθώς και με τις πιο μεγάλες καλλιτεχνικές προσωπικότητες του καιρού του.



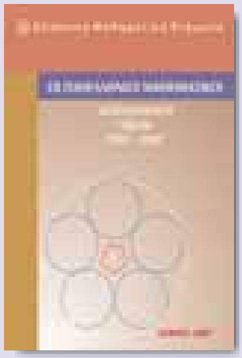
Επιστολή του Αϊνστάιν προς τον Καραθεοδωρή το 1916 στην οποία αναφέρει: «Βρίσκω την απόδειξή σας θαυμάσια. … Θα έπρεπε να δημοσιεύσετε τη θεωρία σ' αυτή τη μορφή στο Annalen der Physik, διότι οι φυσικοί συνήθως δε γνωρίζουν αυτό το αντικείμενο, όπως ήταν και η δική μου περίπτωση….»

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες – Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

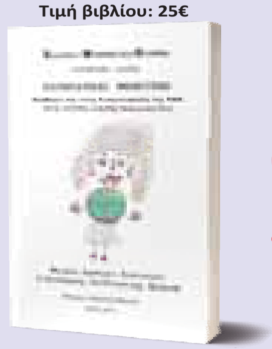
Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

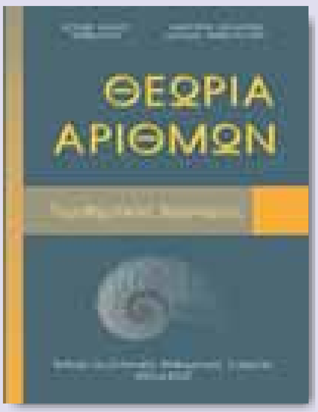


2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο

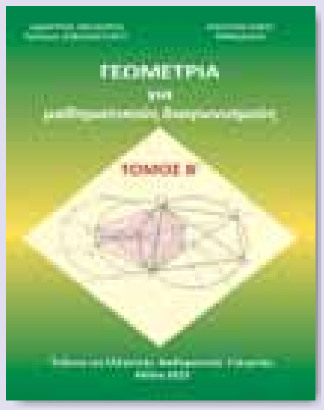


Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 25€

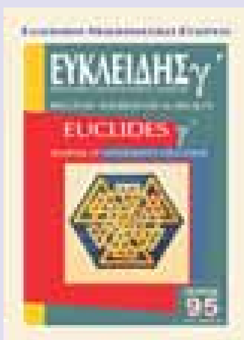
Νέο Βιβλίο



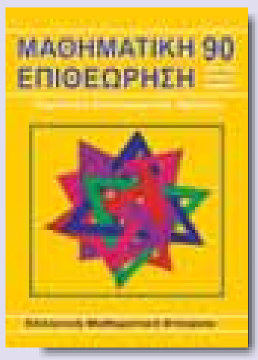
Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr