ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

122

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

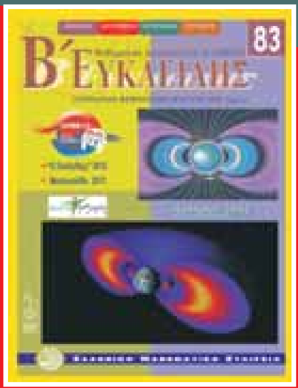
Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

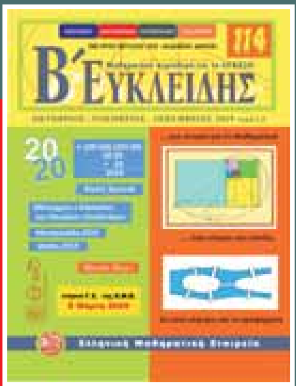
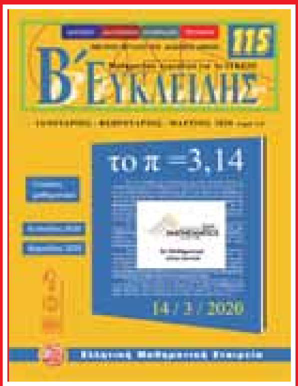
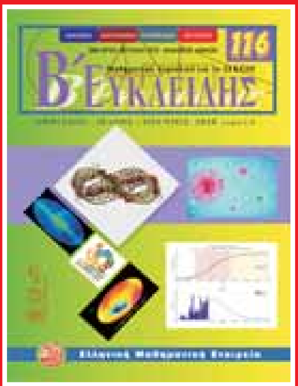
Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021 ευρώ 3,5

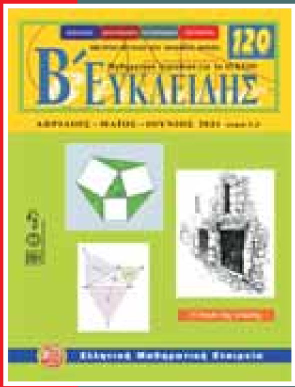
104 χρόνια Ε.Μ.Ε.

Ετήσια Γενική Συνέλευση της Ε.Μ.Ε. - 13 Μαρτίου 2022







ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156

ΕΛΤΑ Hellenic Post

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 122 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2021 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εξώφυλλο: Σύνθεση βασισμένη σε προηγούμενα εξώφυλλα του περιοδικού

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής: 5 Νοεμβρίου 2021
Ευκλείδης: Δεν έγινε
Αρχιμήδης: 26 Φεβρουαρίου 2022

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
πολλές ευχές για μια καλή χρονιά,
πεισματικά αισιόδοξη
και χαρούμενη παντού,
που θάχει περιεχόμενο ζωής,
με ελευθερία ψυχής και μυαλού ...
κόντρα στους δύσκολους καιρούς
της εποχής μας ...,
με προσπάθεια, επιμονή, αισιοδοξία,
ελπίδα, όνειρο, χιούμορ ...
και όπως λέει και ο "ποιητής" ...
... δεν έχουμε τίποτα,
μας μένουν τα χέρια μας,
ας γίνουν δείκτες
στους δρόμους του μέλλοντος ...

Νικηφόρος Βρεττάκος [1911-1991]
ποιητής, συγγραφέας, ακαδημαϊκός,
Κροκεές Λακωνίας

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, η **επικαιρότητα**, μαζί με τις **δυσκολίες** της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται όλο και πιο μακρινή ...

Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

$$2022 = 20^2+(2\cdot 20)^2+22$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΡΟΣΚΛΗΣΗ

Αθήνα, 21–1–2022

Καλούνται όλα τα τακτικά και αντεπιστέλλοντα μέλη της Ε.Μ.Ε. σε τακτική Γενική Συνέλευση, την **Κυριακή *27 Φεβρουαρίου 2022***, ώρα **10.00** το πρωί, **στην αίθουσα διαλέξεων της ΕΜΕ (Πανεπιστημίου 34, Αθήνα, 1ος όροφος).**

ΘΕΜΑΤΑ

1. Απολογισμός του Δ.Σ. για το έτος 2021
2. Ισολογισμός και απολογισμός της διαχείρισης για το 2021
3. Έκθεση της Εξελεγκτικής Επιτροπής
4. Έγκριση του ισολογισμού, απολογισμού και πεπραγμένων του Δ.Σ.
5. Έγκριση του προϋπολογισμού για το 2022
6. Εξουσιοδότηση για την αγορά αποθηκευτικού χώρου ή γραφείου ή και πώληση αυτών
7. Προτάσεις μελών

Σε περίπτωση που δεν υπάρξει απαρτία (πρέπει να παρίσταται τουλάχιστον το 1/3 των μελών της Ε.Μ.Ε., που έχουν εκπληρώσει τις **ταμειακές** τους υποχρεώσεις τουλάχιστον και για το 2021 ή έχουν εγγραφεί στα μητρώα της ΕΜΕ το 2022), η Γενική Συνέλευση θα γίνει την

Κυριακή 13 ΜΑΡΤΙΟΥ 2022

στις 10 το πρωί σε χώρο που θα ανακοινωθεί σύντομα και με τα ίδια θέματα, οπότε, σύμφωνα με το καταστατικό, θεωρείται σε απαρτία με όσα μέλη κι αν παρίστανται, υπό την προϋπόθεση ότι δεν θα υφίστανται περιοριστικά μέτρα για την ανάσχεση της πανδημίας.

Στην περίπτωση που ισχύουν περιορισμοί λόγω της υγειονομικής κρίσης, οποιαδήποτε αλλαγή θα ανακοινωθεί στην ιστοσελίδα της ΕΜΕ.

Τα πλήρη στοιχεία του απολογισμού δράσης του Δ. Σ., ο ισολογισμός και απολογισμός της **διαχείρισης 2021**, **ο προϋπολογισμός** για το **2022** και η έκθεση της **Εξελεγκτικής Επιστροπής** θα ανακοινωθούν στο δικτυακό τόπο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, www.hms.gr.

Με συναδελφικούς χαιρετισμούς

Ο Πρόεδρος	Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Π. Εμμανουήλ	**Ιωάννης Τυρλής**

Πυθαγόρας: Μαθηματικά και Μουσική

Βασίλης Τσιάντος Πρόεδρος Παραρτήματος **Ε.Μ.Ε Καβάλας**
ΔΙΠΑΕ – τμήμα Φυσικής

Η πατρίδα μας, όπως και όλος ο κόσμος, βρίσκεται πλέον σε ένα **μεγάλο σταυροδρόμι**. Οι παλιές, αλλά και οι νέες, προκλήσεις είναι πολλές. Ο κορονοϊός, η κλιματική αλλαγή, η μόλυνση του περιβάλλοντος, **η απαξίωση του ανθρώπου** σε πολλές περιοχές της γης, **η απαξίωση της ζωής** (είδαμε πρόσφατα στην χώρα μας μερικές αποτρόπαιες γυναικοκτονίες, αλλά και γενικότερα δολοφονίες), η ψυχική και ψυχολογική κατάπτωση μεγάλου μέρους του πληθυσμού, η εξουσιομανία που καθοδηγείται από ένα υπέρμετρο εγωισμό, και τέλος οι παράλογες αποφάσεις και **γενικά η έλλειψη λογικής,** δημιουργούν μία εκρηκτική ατμόσφαιρα. Πολλοί έχουν παραδεχθεί ότι η χώρα μας βρίσκεται σε μία συνεχή νευρικότητα (δεν πέρασε ούτε μία ώρα για να επιβεβαιωθούμε, διότι διαβάσαμε στον ηλεκτρονικό τύπο, https://www.proininews.gr/kaygas-metaxy-odigon-sto-kentro-tis-polis/, ότι δύο συμπολίτες μας διαπληκτίσθηκαν άσχημα για μία θέση πάρκινγκ, δίπλα στο κτίριο της αστυνομίας!). Γιατί; Αυτό δεν θα το εξετάσουμε στο κείμενο αυτό, θα το πάρουμε σαν δεδομένο. Αυτό που θα αναρωτηθούμε είναι αν υπάρχει τρόπος διαφυγής. Υπάρχει/ουν τρόπος/οι για να βρούμε την ψυχική γαλήνη και ηρεμία μας; Ναι, υπάρχει/ουν. Ποιος/οί είναι αυτός/οί; Ένας δρόμος είναι μέσα από τη μάθηση, την μουσική, την γυμναστική, την αρετή. Στο παρόν κείμενο δεν θα αναφερθούμε στην γυμναστική και την αρετή, αλλά θα αναφερθούμε επιγραμματικά στα Μαθηματικά και στη μουσική. Για την σχέση αυτή το μυαλό μας πηγαίνει σίγουρα στον Πυθαγόρα.

Πυθαγόρας και Μαθηματικά

Ο Διογένης Λαέρτιος γράφει ότι ο Πυθαγόρας **τελειοποίησε την γεωμετρία** και μάλιστα περισσότερο από όλα ασχολήθηκε με την αριθμητική πλευρά της. Επιπλέον, βρήκε και τα μουσικά διαστήματα πάνω σε ένα μονόχορδο (Diogenes Laertius & Mensch, 2018). Κατά τον Απολλόδωρο τον λογιστικό προσέφερε μία θυσία εκατό βοδιών όταν ανακάλυψε ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων καθέτων πλευρών. Υπάρχει μάλιστα, όπως καταγράφει ο Διογένης Λαέρτιος, και σχετικό επίγραμμα. Ο Αλέξανδρος ο Πολυίστωρ (έζησε περίπου το 70 π.Χ) στο έργο του «Φιλοσόφων Διαδοχαί» γράφει ότι ο Πυθαγόρας θεωρούσε ότι **η μονάδα** ήταν η **αρχή όλων των όντων**. Από την μονάδα γίνεται η αόριστος δυάδα, με την εκδήλωση της μονάδας και σαν ύλη. Από την μονάδα και την αόριστη δυάδα γίνονται οι αριθμοί. Από τους αριθμούς γίνονται τα σημεία και από τα σημεία οι γραμμές. Από **τις γραμμές** γίνονται **τα επίπεδα** σχήματα, από τα οποία προέρχονται τα στερεά σχήματα και από αυτά τα **αισθητά σώματα**. Τα στοιχεία των αισθητών σωμάτων είναι τέσσερα, **το πυρ** (φωτιά), **το ύδωρ, ο αέρας και η γη.** Τα στοιχεία αυτά μεταβάλλονται και δια της αλοιώσεως αυτών γίνεται ο κόσμος, ο οποίος είναι έμψυχος, νοερός (νοητικός), σφαιροειδής, περιέχων στην μέση την γη, η οποία είναι επίσης σφαιρική και κατοικείται γύρω-γύρω (Diogenes Laertius & Mensch, 2018). Ο Πυθαγόρας υποστήριζε ότι από όλες τις μορφές η ωραιότερη είναι η σφαίρα μεταξύ των στερεών και **ο κύκλος** μεταξύ των επιπέδων.

Πυθαγόρας και Μαθηματικά [Ορισμοί]

Ο Διογένης Λαέρτιος γράφει ότι ο Φαβωρίνος έλεγε ότι ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε ορισμούς μέσα από την **μαθηματική ύλη** και ότι αυτό το συνέχισε ο Σωκράτης και οι μαθητές του, αργότερα δε ο Αριστοτέλης και **οι Στωικοί.** Οι ορισμοί είναι ένα σημαντικό σημείο στα Μαθηματικά, αλλά και στην Λογική, καθώς και στην καθημερινή ζωή.

Πυθαγόρας, Μαθηματικά και Μουσική

Ο Πυθαγόρας πίστευε ότι η πρώτη **εποπτεία** στους ανθρώπους προέρχεται από **τις αισθήσεις** και ότι αν βλέπει κάποιος ωραία σχήματα και μορφές και επίσης ακούει ωραίους ρυθμούς και μελωδίες προσδιόρισε σαν πρώτη μόρφωση την εκπαίδευση με μουσική. Με ειδικές **μελωδίες** και **ρυθμούς** οι συνήθειες και τα πάθη **θεραπεύονται** καθώς και οι αρμονίες των **δυνάμεων της ψυχής** έρχονται στο αρχικό σημείο, όπως ήταν δηλαδή στην αρχή, και επίσης μπορούσε να καταστείλει σωματικές και ψυχικές ασθένειες με κατάλληλες μελωδίες (ίαση ασθενειών). Με μίξεις διατονικών, χρωματικών και αρμονικών κλιμάκων κατόρθωνε εύκολα να μεταστρέφει στην αντίθετη πλευρά τα πάθη της ψυχής και να τα περιστρέφει, όταν αυτά (τα πάθη) με παράλογο και μυστικό τρόπο είχαν δημιουργηθεί και εδραιωθεί βαθιά στην ψυχή του ανθρώπου. Έτσι **μετέστρεφε** τις λύπες, τις οργές, τους αλλόκοτους οίκτους, τους φθόνους, τους φόβους, τις επιθυμίες κάθε είδους, τους θυμούς, τις ορέξεις, τις μαλθακότητες, και άλλα, **προς την αρετή** με κατάλληλες και αρμόζουσες μελωδίες, σαν να ήταν κατάλληλα αναμεμειγμένα φάρμακα (Iamblichus & Clark, 1989).

Πυθαγόρας, Μαθηματικά, Αστρονομία και Μουσική

Επιπλέον, ο Ιάμβλιχος γράφει ότι ο Πυθαγόρας δεν συνέθετε για τον ίδιο μουσική, ούτε άκουγε μουσική με όργανα, αλλά είχε μία παράξενη συμπεριφορά. Τέντωνε τα αυτιά του και **προσήλωνε τον νου του** στις υπερκόσμιες συμφωνίες, ακούγοντας βαθιά και καταλαβαίνοντας την «*παγκόσμια αρμονία των σφαιρών και των αστεριών*», που κινούνταν γύρω από τις σφαίρες. Η κίνηση αυτή δημιουργούσε μία μελωδία πληρέστατη και τελειότερη από όλους τους παραγόμενους ήχους. Η συμφωνία αυτή ήταν αποτέλεσμα ανόμοιων και ποικίλων ήχων, σε ταχύτητα, μέγεθος και διαλλείματα, διατεταγμένων αρμονικά μεταξύ τους με κάποιο πολύ ωραίο μουσικό τρόπο, ο οποίος **αποτελείτο από κίνηση**, περιστροφή πολύ **μελωδική** και ταυτόχρονα πάρα πολύ ωραία.

Από την Wikipedia: Εξώφυλλο από το άλμπουμ του βρετανικού ροκ συγκροτήματος Coldplay (https://en.wikipedia.org/wiki/Music_of_the_Spheres_(Coldplay_album))

Εδώ μπορεί να αναρωτηθεί κάποιος: «Μα καλά, είναι δυνατόν να πιστεύει κανείς τέτοια πράγματα;».

Όσο και να φαίνεται παράξενο, η επιστήμη σήμερα αποδέχεται την «μουσική των σφαιρών (sounds of the stars)». Έτσι, ο Πυθαγόρας πρωτοπορεί. Πώς, όμως, είχε την ικανότητα να αντιλαμβάνεται ότι οι ουράνιες σφαίρες παράγουν ήχο; Μήπως με την απλή λογική; Θεωρώντας ότι κάθε σώμα που κινείται παράγει ήχο, τον οποίο άλλοτε μπορούμε να τον ακούσουμε και άλλοτε όχι; Μήπως εξαρτάται και από το πόσο εκπαιδευμένο είναι το «αυτί» μας; Μήπως μερικές φορές την **θέση των αισθήσεων** την παίρνει **ο νους**; Ο Ιάμβλιχος γράφει ότι ο Πυθαγόρας «γνώριζε πολλά», «είχε την ενόραση κάθε πράγματος», είχε «διανοητικό πλούτο», στοιχεία που δήλωναν ότι είχε ιδιαίτερη, εξαίρετη και ακριβέστερη από τους άλλους **διαμόρφωση του σώματος** και του πνεύματός του, ώστε να βλέπει, να ακούει και να αντιλαμβάνεται. Ή μήπως η παρατήρησή του έχει συμβολικό χαρακτήρα και συνδέεται και με κάτι άλλο;

Αφού αναφερθήκαμε στην «μουσική των σφαιρών», ας δούμε και γενικότερα ποια είναι η γνώμη σύγχρονων επιστημόνων για την σχέση **της μουσικής** και **της αστρονομίας** και τον Πυθαγόρα. Ο Ντομινίκ Προυστ είναι Γάλλος αστροφυσικός και οργανίστας. Εργάζεται ως ερευνητής στο CNRS (Centre national de la recherche scientifique), Observatoire de Paris-Meudon. Μετά την διδακτορική διατριβή του, η οποία ήταν αφιερωμένη στην αστρική φυσική, το έργο του κατευθύνθηκε προς την κοσμολογία: τον σχηματισμό και την εξέλιξη μεγάλων δομών στο σύμπαν, τους γαλαξίες, **τα κβάζαρ** (“Dominique Proust,” n.d.). Στο άρθρο του “*The Harmony of the Spheres from Pythagoras to Voyager*” γράφει ότι «*ο Πυθαγόρας (532-497; π.Χ.), ήταν ίσως το* ***πρώτο άτομο*** *που συνέδεσε* ***αυστηρά*** *τη μουσική και την* ***αστρονομία****. Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που έθεσαν την* *υπόθεση της* ***σφαιρικότητας της γης*** *λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική ομορφιά (geometric beauty). Η γοητεία που είχαν οι αριθμητικές σχέσεις στις μουσικές αρμονίες οδήγησαν τον Πυθαγόρα στο να προσπαθήσει να εξηγήσει με τον ίδιο τρόπο* ***τον κόσμο****, τον οποίο θεωρούσε ως ένα γιγαντιαίο αρμονικό όργανο* ***θεϊκής προέλευσης****. Σύμφωνα με τον Πυθαγόρα, όλοι οι πλανήτες κινιόταν γύρω από τη γη με σταθερές ταχύτητες ακολουθώντας τροχιές που υπάκουαν στις ίδιες αριθμητικές σχέσεις με την μουσική κλίμακα και εκπέμποντας έναν ήχο*:

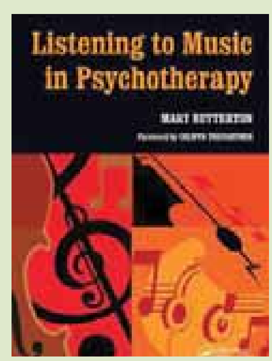
Κρόνος	**Δίας**	**Άρης**	**Ήλιος**	**Ερμής**	**Αφροδίτη**	**Σελήνη**
B (Si)	C (Nto)	D (Re)	E (Mi)	F (Fa)	G (Sol)	A (La)

Η αναλογία που φαινόταν να υπάρχει ανάμεσα στα μουσικά διαστήματα και την απόσταση των πλανητών αντιπροσώπευε ***για τον Πυθαγόρα το μυστικό του κόσμου***» (Proust, 2009). Ο Προύστ γράφει ότι η ουράνια αρμονία θα μπορούσε να γενικευτεί στο σύνολο των αντικειμένων στο σύμπαν, αλλά επίσης ίσως όχι ως μια σχέση αρμονίας όσο ως μία σχέση **ιεραρχίας**, στην οποία κάθε **ουράνιο σώμα** ήταν μέρος μιας δομής που επικαλύπτεται στη δομή μιας **ανώτερης τάξης**. Οι ρομαντικοί μουσικοί συνέχισαν να δείχνουν ενδιαφέρον για τον κόσμο, και έτσι έχουμε πάλι ένα συνδυασμό μουσικής και αστρονομίας.

Θα κλείσουμε λέγοντας ότι κεντρικός είναι ο ρόλος που παίζει η μουσική αρμονία και η αστρονομία στην ενιαία άποψη του Kepler για το σύμπαν. Και επίσης κεντρικοί είναι οι ρόλοι που παίζει η **γεωμετρία** γενικά και **ο κύκλος** ειδικότερα στην κατανόηση της **μουσικής αρμονίας** (Brackenridge, 1982). Εάν υπάρχει δυσκολία στο να δούμε έναν ενοποιημένο Κέπλερ, αυτό πηγάζει κυρίως από την ίδια την καθολικότητα της κυκλικότητάς του. Υπάρχουν αρκετές εξαιρετικές εργασίες στις οποίες αναπτύσσεται λεπτομερώς ο καθένας από αυτούς τους ρόλους. Αλλά σε κανένα άρθρο δεν παρουσιάζονται τα τρία βασικά αντικείμενα **της γεωμετρίας**, **της μουσικής** και **της αστρονομίας** και **ο κύκλος** χρησιμοποιείται για να αλληλοσυνδέει κάθε αντικείμενο ώστε να καταστεί σαφής ο τελικός ρόλος του κύκλου στην αστρονομία για τον Κέπλερ (Brackenridge, 1982). Για να αντιληφθούμε την εκτίμηση του Κέπλερ προς τον Πυθαγόρα να αναφέρουμε ότι ο Μπράκενριντζ (J. Bruce Brackenridge) έγραψε «*πόσο δύσκολο πρέπει να ήταν για τον Κέπλερ, έναν Πυθαγόρειο μέχρι το μυελό των οστών του, να εγκαταλείψει τους κύκλους για την έλλειψη* (elipsi)! ... *Αυτή ήταν ίσως μία από τις μεγαλύτερες πράξεις θυσίας της σύγχρονης επιστήμης, ισοδύναμη στην πρόσφατη επιστημονική ιστορία με την αγωνία του Μαξ Πλάνκ*» (Brackenridge, 1982).

Μουσική και ψυχοθεραπεία

Ας ξεκινήσουμε με τον Πυθαγόρα, ο οποίος κατά τον **Ιάμβλιχο**, «*θεωρούσε ότι η μουσική* ***συντελούσε*** *πολύ* ***στην υγεία****, αν κανείς την χρησιμοποιεί σύμφωνα με τους τρόπους που αρμόζει. Συνήθιζε να κάνει χρήση αυτού του καθαρμού όχι κατά τρόπο πάρεργο. Αυτό το ονόμαζε «γιατρειά δια της μουσικής». Έκανε χρήση της μελωδίας αυτής (της θεραπευτικής) κατά την άνοιξη. Τοποθετούσε, λοιπόν στο μέσο ένα λυράρη και κυκλικά κάθονταν, όσοι μπορούσαν να τραγουδούν και έτσι, ενώ εκείνος έκρουε την λύρα, τραγουδούσαν μαζί μερικούς παιάνες, με τους οποίους θεωρούσαν ότι ευφραίνονταν (τέρπονταν) και ότι γίνονταν μελωδικοί και ρυθμικοί. Χρησιμοποιούσαν, όμως, αυτοί και κατά τον υπόλοιπο χρόνο τη μουσική σαν είδος γιατρικού*» (Iamblichus & Clark, 1989, 110). Επομένως, ο Πυθαγόρας θεωρούσε ότι υπάρχει μεγάλη **σχέση μουσικής και γιατρειάς**. Ποιας γιατρειάς; Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι η **ψυχική υγεία**. Στην φωτογραφία παραπλεύρως υπάρχει το εξώφυλλο του βιβλίου της Μαίρης Μπάτερτον με τίτλο «*Ακούγοντας την Μουσική στην Ψυχοθεραπεία (Listening to Music in Psychotherapy)*» (Butterton, 2008). Έτσι, προκύπτουν τα παρακάτω ερωτήματα.



Η σχέση μουσικής και η θεραπεία της ψυχής

Ο Πάρτζετερ, ένας Άγγλος ψυχίατρος του δέκατου όγδοου αιώνα, φαίνεται ότι ήταν ο επόμενος που χρησιμοποίησε τη μουσική σε επιστημονική θεραπευτική βάση γράφουν οι Μίτσελ και Ζάνκερ το 1948 (Mitchell & Zanker, 1948). Πιο συγκεκριμένα αναφέρουν ότι «*μελετούσε συστηματικά τα αποτελέσματά του σε περιπτώσεις μανίας και τόνιζε ότι απαιτείται* ***σημαντική γνώση της μουσικής*** *για την επιλογή αυτών των συνθέσεων και οργάνων και της διάταξης των οργάνων. Το τελευταίο πρέπει να ρυθμίζεται από* *τα συναισθήματα του ασθενούς, τα οποία μπορούν εύκολα να διαπιστωθούν με προσεκτική παρατήρηση των διαμορφώσεων και του ύφους της σύνθεσης. Σε αυτό ο Πάρτζετερ* ***παρακολουθεί*** *και επεξεργάζεται στενά την παράκληση του* ***Πυθαγόρα*** *για μια συγκεκριμένη μουσική θεραπεία»* καταλήγουν οι Μίτσελ και Ζάνκερ (Mitchell & Zanker, 1948).

Η χρήση της μουσικής μέσα από τα Μαθηματικά για θεραπευτικούς σκοπούς

Μία ερευνητική ομάδα από το Καζακστάν, που αποτελείται από μουσικούς και παιδαγωγούς, σε επιστημονικό της άρθρο με τίτλο «***Psychotherapeutic Function of the Kazakh Traditional Music***» γράφει ότι «*βρίσκουμε πληροφορίες για τις ψυχοθεραπευτικές λειτουργίες της μουσικής στα έργα αρχαίων στοχαστών όπως ο Πυθαγόρας, ο Πλάτωνας (1971), ο Αριστοτέλης (1976) και ο Πλούταρχος*» (Shakerimova, Z.S. et al., 2016). Γράφουν οι συγγραφείς ότι «*αυτό το άρθρο εξετάζει τις ψυχοθεραπευτικές παραμέτρους της* ***παραδοσιακής μουσικής*** *του Καζακστάν, τις καλύτερες πρακτικές που επιτεύχθηκαν στην πρακτική ψυχολογία. Από τη μία πλευρά, μας επιτρέπει να δούμε τα μουσικά χαρακτηριστικά υπό ένα νέο πρίσμα, και από την άλλη πλευρά να προσδιορίσουμε την* ***εθνική ψυχολογία του Καζακστάν****. Ένα σημαντικό βήμα στη μελέτη της ψυχοθεραπευτικής φύσης της παραδοσιακής μουσικής του Καζακστάν ήταν η ανάλυση των συγκριτικών τελετουργικών πράξεων των σαμάνων. Θεωρήσαμε τις δραστηριότητες των ακίν και των σαμάνων ως μια δημιουργική κατανόηση του κόσμου, η οποία* ***καταγράφει και αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα****, καθώς και ως μία δημιουργική αρχή, αναπτύσσοντας και αντανακλώντας την ποικιλία του πολιτισμού και την πραγματικότητα που μεσολαβεί από αυτόν*[1]*. Διαπιστώθηκε ότι η μουσική χαλάρωση δεν είχε μόνο συναισθηματικό, αλλά είχε και* ***διανοητικό χαρακτήρα****. Εκτός από τις αισθητικές ανάγκες, η τελετουργική σαμανική μουσική εξασφάλισε μια αίσθηση γαλήνης, βοήθησε να αντιμετωπιστεί ο πόνος και ανέβηκε πάνω από το επίπεδο της καθημερινής ζωής στις υψηλότερες σφαίρες*» (Shakerimova, Z.S. et al., 2016).

Ασφαλώς και μια ακόμα πλουσιότερη επιχειρηματολογία, που θα δούμε παρακάτω, θα έπειθε και τον πιο δύσπιστο. Είναι φανερό ότι η γνώση του Πυθαγόρα, για το γεγονός ότι η μουσική παίζει σημαντικό ρόλο στην ψυχική υγεία του ανθρώπου είναι πάρα πολύ σημαντική. Θα αναφέρουμε παρακάτω τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα που δείχνουν ακόμα περισσότερο την εξέλιξη της σημερινής πραγματικότητας.

1. Τι είναι η Αμερικανική Ένωση Μουσικοθεραπείας;

Η Αμερικανική Ένωση Μουσικοθεραπείας (American Music Therapy Association, AMTA) ιδρύθηκε το 1998 μετά την συγχώνευση της Εθνικής Ένωσης Μουσικοθεραπείας (που ιδρύθηκε το 1950) και της Αμερικανικής Ένωσης Μουσικοθεραπείας (που ιδρύθηκε το 1971), και είναι ένας μη κερδοσκοπικός οργανισμός. Αποστολή της Ένωσης είναι να προωθήσει **την ευαισθητοποίηση του κοινού** για τα οφέλη της μουσικοθεραπείας και να αυξήσει την πρόσβαση σε ποιοτικές υπηρεσίες μουσικοθεραπείας **σε έναν κόσμο που αλλάζει ταχέως** (*American Music Therapy Association, n.d.*). Η μουσικοθεραπεία είναι η κλινική και τεκμηριωμένη χρήση μουσικών παρεμβάσεων για την επίτευξη **εξατομικευμένων στόχων** για άτομα όλων των ηλικιών και επιπέδων **ικανοτήτων** μέσα σε μια θεραπευτική σχέση. Οι μουσικοθεραπευτικές παρεμβάσεις μπορούν να **ανταποκριθούν** σε ποικίλους υγειονομικούς και **εκπαιδευτικούς** στόχους κυρίως στην:

AMERICAN MUSIC THERAPY ASSOCIATION

- ✓ Προώθηση της ευεξίας
- ✓ Διαχείριση του άγχους
- ✓ Ανακούφιση από τον πόνο
- ✓ Έκφραση συναισθημάτων
- ✓ Βελτίωση της μνήμης
- ✓ Βελτίωση της επικοινωνίας
- ✓ Προώθηση της φυσικής αποκατάστασης.

[1] Οι **Akyns** ή aqyns είναι αυτοσχεδιαστικοί ποιητές και τραγουδιστές στους πολιτισμούς του Καζακστάν και του Κιργιζιστάν. Οι Akyns διαφέρουν από το **zhirau** ή το **manaschi**, που είναι ερμηνευτές τραγουδιών ή **επικοί αφηγητές.**

2. Τι είναι η Παγκόσμια Ομοσπονδία Μουσικοθεραπείας;

Η Παγκόσμια Ομοσπονδία Μουσικοθεραπείας (World Federation of Music Therapy, WFMT) είναι ένας διεθνής μη κερδοσκοπικός οργανισμός που συγκεντρώνει ενώσεις μουσικοθεραπείας και άτομα που ενδιαφέρονται για την ανάπτυξη και προώθηση της μουσικοθεραπείας σε παγκόσμιο επίπεδο μέσω της ανταλλαγής πληροφοριών, της συνεργασίας μεταξύ επαγγελματιών και δράσεων. Ιδρύθηκε το 1985 στη Γένοβα της Ιταλίας και είναι ο μόνος παγκόσμιος επαγγελματικός οργανισμός που εκπροσωπεί τη μουσικοθεραπεία σε πολλές περιοχές του κόσμου. Η Παγκόσμια Ομοσπονδία Μουσικοθεραπείας γράφει στην σελίδα της στο διαδίκτυο (“World Federation of Music Therapy,” n.d.) ότι «*η μουσικοθεραπεία είναι η επαγγελματική χρήση της μουσικής και των στοιχείων της ως παρέμβαση σε ιατρικά, εκπαιδευτικά και καθημερινά περιβάλλοντα με άτομα, ομάδες, οικογένειες ή κοινότητες που επιδιώκουν να* ***βελτιστοποιήσουν την ποιότητα της ζωής*** *τους και να βελτιώσουν τη σωματική, κοινωνική, επικοινωνιακή, συναισθηματική, πνευματική υγεία και ευημερία. Η έρευνα, η πρακτική, η εκπαίδευση και η κλινική κατάρτιση στη μουσική θεραπεία βασίζονται σε επαγγελματικά πρότυπα σύμφωνα με τα πολιτισμικά, κοινωνικά και πολιτικά πλαίσια* (WFMT, 2011)».

3. Επιστημονικά περιοδικά για Μουσικοθεραπεία

Υπάρχουν αρκετά επιστημονικά περιοδικά για μουσικοθεραπεία, κάτι που τεκμηριώνει την άποψη για την σημασία της. Στην σελίδα στο διαδίκτυο της Πανεπιστημιακής Βιβλιοθήκης του Louisville, USA https://library.louisville.edu/music/therapy/journals, υπάρχει μία αρκετά μεγάλη λίστα επιστημονικών περιοδικών που ασχολούνται με την μουσικοθεραπεία (*Music Therapy Journals*, n.d.). Υπάρχουν στην λίστα αυτή 40 διεθνή επιστημονικά περιοδικά! Όπως καταλαβαίνει εύκολα ο αναγνώστης είναι λογικό να υπάρχουν πάρα πολλά άρθρα στα περιοδικά αυτά που αναφέρονται σε διάφορες πτυχές της μουσικοθεραπείας. Για παράδειγμα, η Μπάρμπαρα Γουίλερ σε άρθρο της στο περιοδικό *Music Therapy* (Wheeler, 1981) προσπαθεί να συνδέσει την μουσικοθεραπεία με τις διάφορες θεωρίες της ψυχοθεραπείας. Μάλιστα, όπως τονίζει η ίδια, σκοπός της εργασίας της ήταν να καταδείξει τα οφέλη για τους μουσικοθεραπευτές από τη χρήση μιας ή περισσότερων ψυχοθεραπευτικών θεωριών ως πλαισίου αναφοράς για την εργασία τους (Wheeler, 1981).

Επίλογος: Στο κείμενο αυτό προσπαθήσαμε να συνδέσουμε την **άποψη του Πυθαγόρα** σχετικά με την «**θεραπεία της ψυχής**» και την **μουσική**. Η μουσική, μαζί με την αριθμητική (**θεωρία αριθμών**), την **γεωμετρία** και την αστρονομία αποτελούσαν για περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια την βάση της εγκυκλίου εκπαίδευσης. Επιπλέον, η μουσική, κατά τον Πυθαγόρα **θεράπευε/θεραπεύει** την ψυχή. Πολλές σύγχρονες μελέτες έχουν δείξει ότι **ο Πυθαγόρας** είχε απόλυτο **δίκαιο** στην πεποίθησή του ότι η κατάλληλη μουσική «θεραπεύει την ψυχή».

Βιβλιογραφικές Αναφορές:

American Music Therapy Association. (n.d.). https://www.musictherapy.org/

Brackenridge, J. B. (1982). Kepler, elliptical orbits, and celestial circularity: A study in the persistence of metaphysical commitment: Part I. *Annals of Science*, *39*(2), 117–143. https://doi.org/10.1080/00033798200200151

Butterton, M. (2008). *Listening to music in psychotherapy*. Radcliffe publ.

Diogenes Laertius, & Mensch, P. (2018). *Lives of the eminent philosophers*. Oxford University Press.

Dominique Proust. (n.d.). *Wikipedia, the Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/French_National_Centre_for_Scientific_Research

Iamblichus, & Clark, G. (1989). *On the Pythagorean life*. Liverpool University Press.

Mitchell, S. D., & Zanker, A. (1948). The use of Music in Group Therapy. *Journal of Mental Science*, *94*(397), 737–748. https://doi.org/10.1192/bjp.94.397.737

Music Therapy Journals. (n.d.). https://library.louisville.edu/music/therapy/journals

Proust, D. (2009). The Harmony of the Spheres from Pythagoras to Voyager. *Proceedings of the International Astronomical Union*, *5*(S260), 358–367. https://doi.org/10.1017/S1743921311002535

Shakerimova, Z.S., Nussupova, A.S., Burambaeva, M.N., Yermanov, Z.R., Emreyeva, A.E., & Janseitova, S.S. (2016). Psychotherapeutic Function of the Kazakh Traditional Music. *International Journal of Environmental and Science Education*, *11*(17), 10321–10335.

Wheeler, B. (1981). The relationship between music therapy and theories of psychotherapy. *Music Therapy*, *1*(1), 9–16.

World Federation of Music Therapy. (n.d.). *About WFMT*. https://wfmt.info/wfmt-new-home/about-wfmt/

Κουρλετάκη Ειρήνη, Κώστα Λεονόρα – Θεοδώρα, & Κυρρητόπουλος Γιάννης. (2018). *Η μουσικοθεραπεία ως μη φαρμακευτική θεραπευτική παρέμβαση στη διαχείριση του άμεσου μετεγχειρητικού πόνου στην ανάνηψη*. ΤΕΙ Κρήτης.

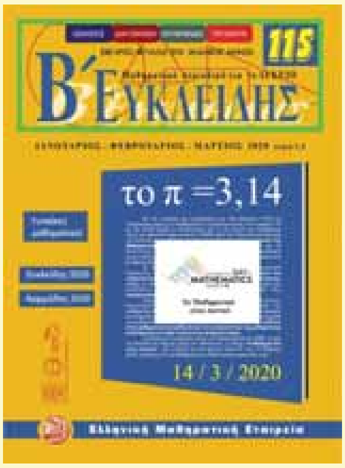
Μανώλης Παργεντάκης, Μουσικό Σχολείο Καβάλας, δάσκαλος Παραδοσιακών Μουσικών Οργάνων, ιδιωτικές συζητήσεις.

Νέο ρεκόρ για τα ψηφία του π

Ο αριθμός **π** είναι μια **μαθηματική σταθερά** οριζόμενη ως ο **λόγος** της **περιφέρειας** προς τη **διάμετρο** ενός **κύκλου**, ενώ με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων είναι ίσος με 3,14159265. Εκφράζεται με το ελληνικό γράμμα π από τα μέσα του 18ου αιώνα.

Ο π είναι ένας **άρρητος αριθμός,** κάτι που σημαίνει ότι δεν μπορεί να εκφραστεί ακριβώς ως **λόγος** δύο **ακεραίων** (όπως 22/7 ή άλλα κλάσματα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την προσέγγιση του π). Κατά συνέπεια, η **δεκαδική απεικόνιση** δεν τελειώνει ποτέ και ποτέ δεν καθίσταται μια μόνιμη και επαναλαμβανόμενη παράσταση. Τα ψηφία φαίνεται να εμφανίζονται με τυχαία σειρά, αν και δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμη κάποια απόδειξη για αυτό. Ο π είναι ένας **υπερβατικός αριθμός**, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι είναι αδύνατο να λυθεί το αρχαίο πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου** με κανόνα και **διαβήτη**.

Για χιλιάδες χρόνια, μαθηματικοί προσπάθησαν να επεκτείνουν την κατανόησή τους πάνω στο π, κάποιες φορές με τον υπολογισμό της τιμής του, με υψηλό βαθμό ακρίβειας. Πριν από τον 15ο αιώνα, μαθηματικοί όπως ο **Αρχιμήδης** και ο **Liu Hui** χρησιμοποίησαν γεωμετρικές τεχνικές βασιζόμενες σε πολύγωνα, για να υπολογίσουν την αξία του **π**. Περί τον 15ο αιώνα νέοι αλγόριθμοι βασιζόμενοι σε άπειρες σειρές υπολογίζουν τον αριθμό **π** με μεγαλύτερη ακρίβεια και χρησιμοποιούνται από μαθηματικούς όπως ο Madhava της Sangamagrama, ο Ισαάκ Νιούτον, ο Λέοναρντ Όιλερ, ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους, και ο Σρινιβάσα Ραμανούτζαν.



Τον 20ό και 21ο αιώνα, **μαθηματικοί** και **πληροφορικοί** ανακάλυψαν νέες προσεγγίσεις που, όταν συνδυάζονται με την αυξημένη υπολογιστική ισχύ, επεκτείνουν τη δεκαδική απεικόνιση του π πάνω από 10 τρισεκατομμύρια (10^{13}) ψηφία (2011). Οι επιστημονικές εφαρμογές δεν απαιτούν γενικά περισσότερα από 40 ψηφία του π και έτσι το πρωταρχικό κίνητρο για αυτούς τους υπολογισμούς είναι η ανθρώπινη επιθυμία να σπάει ρεκόρ. Οι πολύπλοκοι υπολογισμοί που εμπλέκονται στον υπολογισμό των ψηφίων του π έχουν χρησιμοποιηθεί για τη δοκιμή **υπερυπολογιστών,** καθώς και **αλγορίθμων** πολλαπλασιασμού υψηλής ακρίβειας.

Το **π** βρίσκεται σε πολλούς τύπους της τριγωνομετρίας και της γεωμετρίας, ειδικά όσον αφορά κύκλους, ελλείψεις ή σφαίρες. Βρίσκεται επίσης και σε διάφορους τύπους από άλλους κλάδους της επιστήμης, όπως η Κοσμολογία, η Θεωρία των αριθμών, η Στατιστική, τα fractals, η Θερμοδυναμική, η Μηχανική, και ο Ηλεκτρομαγνητισμός.

Πρόσφατα Ελβετοί ερευνητές (Αυγ. 2021) υπολόγισαν τη μαθηματική σταθερά **π** με ένα νέο παγκόσμιο **ρεκόρ** ακρίβειας, βρίσκοντας 62,8 τρισεκατομμύρια **ψηφία,** χρησιμοποιώντας έναν υπερυπολογιστή.

«Ο υπολογισμός διήρκεσε 108 ημέρες και 9 ώρες», **είπε** σε **δήλωσή** του, το **Πανεπιστήμιο** Εφαρμοσμένων Επιστημών του Graubünden. Οι προσπάθειες ήταν *«σχεδόν* **δυο** φορές πιο γρήγορες **από** το ρεκόρ που έσπασε η **Google** χρησιμοποιώντας το **cloud** της το 2019 και **33** φορές πιο γρήγορες από το προηγούμενο παγκόσμιο ρεκόρ το 2020», *σύμφωνα* με το Κέντρο Ανάλυσης Δεδομένων Οπτικοποίησης και Προσομοίωσης του Πανεπιστημίου. Μέχρι τώρα οι ερευνητές έχουν αποκαλύψει μόνο τα τελευταία 10 υπολογισμένα ψηφία του **π:** 7817924264.

Το προηγούμενο παγκόσμιο ρεκόρ υπολογισμού του **π** έφτανε έως τα 50 τρισεκατομμύρια ψηφία.

Η Ελβετική ομάδα είπε, ότι η εμπειρία που έχτισαν υπολογίζοντας το **π,** μπορεί να εφαρμοστεί σε άλλους τομείς όπως «η ανάλυση RNA, προσομοιώσεις της δυναμικής των ρευστών και η κειμενική ανάλυση. Από την αρχαία βαβυλωνιακή εποχή, οι άνθρωποι προσπαθούν να προσεγγίσουν τη σταθερά **π**, που ξεκινάει με **π ≃ 3,14159** με διάφορα επίπεδα επιτυχίας.

Ο Jan de Gier, καθηγητής Μαθηματικών και στατιστικής στο Πανεπιστήμιο της Μελβούρνης, λέει ότι μπορούμε να προσεγγίσουν το **π,** με κάποια ακρίβεια και αυτό είναι πολύ σημαντικό, γιατί η μαθηματική σταθερά έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές.

«Η γνώση του **π** με κάποια προσέγγιση είναι ασύλληπτα χρήσιμη, επειδή εμφανίζεται παντού, από τη γενική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, ως τις διορθώσεις στο GPS μας και ως κάθε είδους προβλήματος μηχανικής που περιλαμβάνει ηλεκτρονικά», λέει **ο** de Gier.

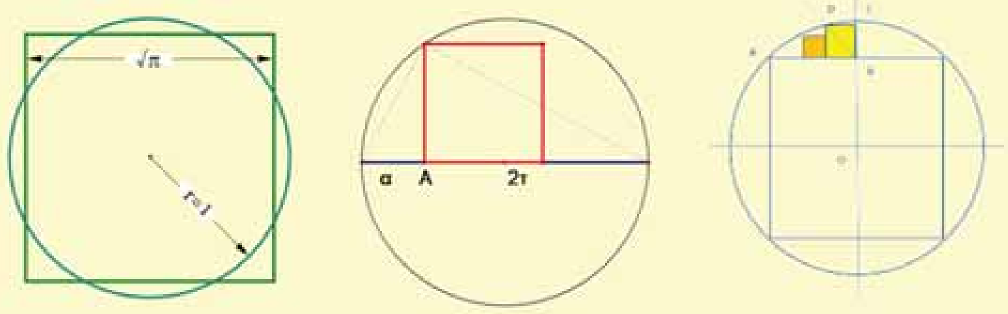
$$\pi \simeq \sqrt{29-\sqrt{366}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4} \qquad \pi \simeq \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}$$

Στα Μαθηματικά, το **π** ξεπροβάλλει παντού. «Δεν μπορείς να ξεφύγεις από αυτό», λέει ο David Harvey, αναπληρωτής καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Νέας Νότιας Ουαλίας.

«Όμως», λέει ο Harvey, «υπάρχει μια μεγάλη διαφορά μεταξύ του υπολογισμού του **π** έως τα 10 πρώτα δεκαδικά ψηφία και της προσέγγισης σε 62,8 τρισεκατομμύρια ψηφία».

«Δεν μπορώ να σκεφτώ κάποια φυσική εφαρμογή του πραγματικού κόσμου, που θα χρειαζόμασταν πάνω από 15 δεκαδικά ψηφία», αναφέρει σχετικά.

Οι μαθηματικοί έχουν εκτιμήσει ότι μία προσέγγιση του **π** έως τα πρώτα 39 ψηφία επαρκεί για τους περισσότερους **κοσμολογικούς** υπολογισμούς – είναι αρκετά ακριβής - ώστε να υπολογιστεί η περιφέρεια του παρατηρήσιμου σύμπαντος, αλλά και η διάμετρος ενός ατόμου υδρογόνου.



Ο De Gier συγκρίνει το επίτευγμα με τους αθλητές των Ολυμπιακών Αγώνων. «Τα *παγκόσμια ρεκόρ δεν είναι χρήσιμα για τους ίδιους, αλλά θέτουν ένα **ορόσημο** και μας μαθαίνουν τι μπορούμε να **πετύχουμε** και παρακινούν άλλους*».

«*Είναι μία άσκηση ορόσημου για **υπολογιστικό** υλικό και **λογισμικό***», λέει ο ίδιος.

Ο Harvey συμφωνεί: «*Είναι μια υπολογιστική πρόκληση - είναι πραγματικά ένα σοβαρά, δύσκολο πράγμα, να εκτελεστεί και περιλαμβάνει πολλά Μαθηματικά στην επιστήμη των υπολογιστών*».

«*Υπάρχουν πολλές ακόμα ενδιαφέρουσες σταθερές στα Μαθηματικά*». Έτσι για παράδειγμα, εάν είμαστε στη θεωρία του χάους, υπάρχουν οι σταθεράς του Feigenbaum ενώ εάν είμαστε στην αναλυτική θεωρία των αριθμών, υπάρχει σταθερά γάμμα του Euler.

«*Υπάρχουν και διάφοροι άλλοι αριθμοί που μπορείς να προσπαθήσεις να υπολογίσεις το **e** η βάση του φυσικού λογαρίθμου ή η τετραγωνική ρίζα του **2**. Γιατί να ασχοληθείς με το **π**; Ασχολείσαι με το **π**, επειδή όλοι οι υπόλοιποι ασχολούνται με το **π***», και συμπληρώνει «Αυτό είναι το συγκεκριμένο βουνό, που όλοι αποφασίζουν να ανέβουν».

Πηγές:

- The Guardian [1] [2], Αυγ. 2021,
- Wikipedia, AFP, Ευκλείδης Β΄, τεύχος 115, 119

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
5 Νοεμβρίου 2021
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να λύσετε το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} \mathbf{5x-2y+\frac{3}{2x-6y}=\frac{13}{2}} \\ \mathbf{(5x-2y)(x-3y)+2=6(x-3y)} \end{matrix}\right\}$

Λύση

Για $x \neq 3y$ διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης (2) με $(x-3y)$ οπότε το σύστημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\left.\begin{matrix} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)+\dfrac{2}{x-3y}=6 \end{matrix}\right\}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου $5x-2y=\alpha$ και $\dfrac{1}{x-3y}=\beta$,

το τελευταίο σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix} \alpha+\frac{3\beta}{2}=\frac{13}{2} \\ \alpha+2\beta=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2\alpha+3\beta=13 \\ \alpha+2\beta=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha=8 \\ \beta=-1 \end{matrix}$.

Άρα έχουμε: $\left.\begin{matrix} 5x-2y=8 \\ \frac{1}{x-3y}=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5x-2y=8 \\ x-3y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους ακέραιους $\boldsymbol{N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta, 0<\alpha<\beta}$, που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\boldsymbol{\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)}$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον α μέχρι και τον $\beta+1$.

Λύση Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta=8[\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)] \leq 8(1+2+\ldots+10)=440,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 4$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha=4$. Τότε $415 \leq N \leq 419$, Nπολλαπλάσιο του $8 \Rightarrow \mathrm{N}=416$. Παρατηρούμε όμως ότι $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=4+5+6+7=22$ και $22\cdot 8=176 \neq 416$.
- $\alpha=3$. Τότε $314 \leq N \leq 319$, N πολλαπλάσιο του 8, άτοπο.
- $\alpha=2$. Τότε $213 \leq N \leq 219$, N πολλαπλάσιο του $8 \Rightarrow \mathrm{N}=216$. Παρατηρούμε ότι: $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=2+3+4+5+6+7=27$και $27\cdot 8=216$.
- $\alpha=1$. Τότε $112 \leq N \leq 119$, N πολλαπλάσιο του $8 \Rightarrow \mathrm{N}=112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=1+2+3=6$ και $6\cdot 8=48 \neq 112$.

Επομένως η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός $\mathrm{N}=216$.

2^{ος} τρόπος: Επειδή ο αριθμός διαιρείται με το 8, θα διαιρείται και με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα διαιρείται με το 4. Επομένως ο αριθμός $\overline{1\beta}$ θα διαιρείται με το 4. Συνεπώς $\beta=2$ ή $\beta=6$.

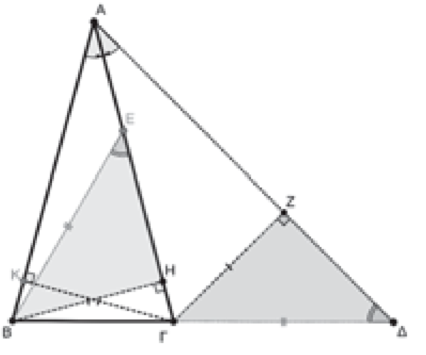
- Αν $\beta=2$, τότε από τη σχέση $\alpha<\beta$, παίρνουμε ότι $\alpha=1$, οπότε $\mathrm{N}=112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=1+2+3=6$ και $6\cdot 8=48 \neq 112$.

- Αν $\beta = 6$, τότε από τη σχέση $\alpha < \beta$ παίρνουμε $\alpha \in \{1,2,3,4,5\}$. Όμως $N = 100\alpha + 16$, άρα για να διαιρείται με το 8, πρέπει α άρτιος. Επομένως, $\alpha = 2$ ή $\alpha = 4$. Για $\alpha = 2$, παίρνουμε $N = 216$, που ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος, ενώ για $\alpha = 4$, παίρνουμε $N = 416$, που δεν την ικανοποιεί.
  Επομένως η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός $\mathrm{N} = 216$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta}$. Πάνω στην ευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A}$.

Λύση



Από το σημείο Β θεωρούμε ΒΗ κάθετη στην ΑΓ, από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΚ κάθετη στην ΑΒ και από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΖ κάθετη στην ΑΔ.

Επειδή $\mathrm{B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta}$, η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{\Gamma Z = \Gamma K} \qquad (1).$$

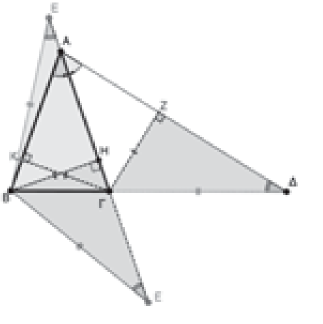
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα τα τμήματα ΓΚ και ΒΗ είναι ίσα μεταξύ τους (διότι είναι τα ύψη του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του). Άρα:

$$\mathrm{BH = \Gamma K} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $\mathrm{BH = \Gamma Z}$ (3).

Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΖΔΓ, ισχύουν οι ισότητες πλευρών: ΒΕ = ΓΔ (δεδομένο) και ΒΗ = ΓΖ (από την ισότητα (3)). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε:

$$\mathrm{B\hat{E}H = \Gamma\hat{\Delta}Z \Leftrightarrow B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A}.$$



Παρατήρηση

Το σημείο Ε θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός του τμήματος ΑΓ (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα). Τότε και στις δύο περιπτώσεις ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία με την προηγούμενη, συγκρίνοντας τα κατάλληλα σκιασμένα ορθογώνια τρίγωνα.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{gathered} 2x^3 - 7y^2 + 4z = -4 \\ 2y^3 - 7z^2 + 4x = -4 \\ 2z^3 - 7x^2 + 4y = -4 \end{gathered}$$

Λύση

Προσθέτοντας τις τρείς σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(2x^3 - 7y^2 + 4z + 4) + (2y^3 - 7z^2 + 4x + 4) + (2z^3 - 7x^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x^3 - 7x^2 + 4x + 4) + (2y^3 - 7y^2 + 4y + 4) + (2z^3 - 7z^2 + 4z + 4) = 0.$$

Παραγοντοποιούμε την παράσταση της πρώτης παρένθεσης:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 &= 2x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 4x + 4 = \\ &= 2x^2(x-2) - 2x^2 + 4x - x^2 + 4 = \\ &= 2x^2(x-2) - 2x(x-2) - (x-2)(x+2) = \\ &= (x-2)(2x^2 - 3x - 2) = (x-2)^2(2x+1). \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο παραγοντοποιούμε και τις άλλες παρενθέσεις, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται: $(x-2)^2(2x+1) + (y-2)^2(2y+1) + (z-2)^2(2z+1) = 0$.

Επειδή όμως $x, y, z > 0$, θα πρέπει $x = y = z = 2$, οπότε $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Παρατήρηση

Η παραγοντοποίηση των παρενθέσεων μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του σχήματος Horner (αναζητώντας λύσεις μεταξύ των διαιρετών του 4).

2ος τρόπος: Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο x είναι ο μικρότερος από τους τρεις αριθμούς. Επομένως, $x \leq y$ και $x \leq z$. Επομένως, η τρίτη εξίσωση δίνει

$$2x^3 - 7x^2 + 4x \leq 2z^3 - 7x^2 + 4y = -4 \quad (1)$$

Όπως και στον 1ο τρόπο, έχουμε ότι $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = (x-2)^2(2x+1)$, επομένως η (1) δίνει ότι $(x-2)^2(2x+1) \leq 0$ (2).

Πρέπει λοιπόν να ισχύει η ισότητα στη (2), άρα και στην (1), επομένως, $x = y = z = 2$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$\boldsymbol{N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta, 0 < \alpha < \gamma,}$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2$, στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha - 1$ μέχρι και τον $\gamma + 1$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta = 8[(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2]$$
$$\leq 8(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) = 3080,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 3$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις: Αν $\alpha = 3$, και $\gamma \leq 8$ έχουμε $8[2^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2] \leq 8[2^2 + \cdots + 8^2 + 9^2] < 3000$, αδύνατο. Άρα πρέπει $\gamma = 9$. Για $\gamma = 9$, δεν έχουμε επίσης λύση γιατί $8(2^2 + \cdots + 8^2 + 9^2 + 10^2) = 3072$, άτοπο.

Αν $\alpha = 2$, τότε αν $\gamma \leq 7$ έχουμε: $8[1^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2] \leq 8[1^2 + \cdots + 8^2] < 2000$, αδύνατο. Άρα $\gamma = 8$ ή $\gamma = 9$.

Για $\gamma = 8$ έχουμε $8[1^2 + \cdots + 8^2 + 9^2] = 2280$, δεκτή.

Για $\gamma = 9$ έχουμε $8[1^2 + \cdots + 8^2 + 9^2 + 10^2] > 3000$, αδύνατο.

Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε ότι για $\gamma \geq 8$ ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από $8[1^2 + \cdots + 8^2 + 9^2] = 2280$, αδύνατο.

Επίσης για $\gamma \leq 5$ έχουμε ότι ο αριθμός είναι μικρότερος από $8[1^2 + \cdots + 6^2] = 728$, άτοπο. Επομένως $\gamma = 6$ ή $\gamma = 7$. Όμως και οι δύο περιπτώσεις δεν οδηγούν σε λύση, αφού για $\gamma = 6$ ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \cdots + 7^2] = 1120$, αδύνατο. Τέλος για $\gamma = 7$ έχουμε ότι ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \cdots + 8^2] = 1632$, επίσης αδύνατο. Επομένως, μοναδική λύση είναι ο αριθμός 2280.

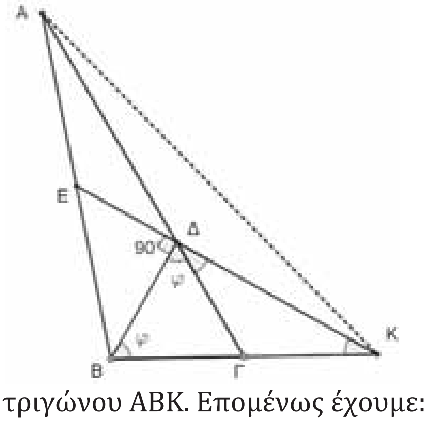
Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{ΑΓ} > \mathrm{ΒΓ}$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{ΓΔ} = \mathrm{ΓΒ}$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $\mathrm{ΑΓ} = 3 \cdot \mathrm{ΒΓ}$.

Λύση

Έστω Ε το μέσον της ΑΒ. Έστω ότι η κάθετη ευθεία προς την ευθεία ΔΒ στο σημείο Δ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ. Επειδή είναι $\mathrm{ΓΒ} = \mathrm{ΓΔ}$, έπεται ότι $\mathrm{Δ}\hat{\mathrm{Β}}\mathrm{Γ} = \mathrm{Β}\hat{\mathrm{Δ}}\mathrm{Γ} = \varphi$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΚ έχουμε ότι

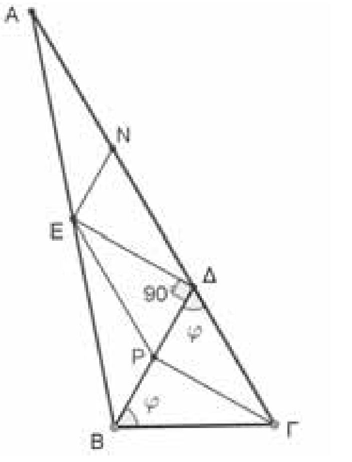
$$\mathrm{Γ}\hat{\mathrm{Δ}}\mathrm{Κ} = \mathrm{Γ}\hat{\mathrm{Κ}}\mathrm{Δ} = 90^0 - \varphi .$$



Επομένως. το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ισοσκελές με συνέπεια $\mathrm{ΓΚ} = \mathrm{ΓΔ} = \mathrm{ΓΒ}$, δηλαδή το Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ και η ευθεία ΑΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΚ.

Επειδή η ευθεία ΚΔ περνάει από το μέσο της πλευράς ΑΒ, έπεται ότι το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΚ. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{ΑΔ} = 2 \cdot \mathrm{ΔΓ} \quad \text{και} \quad \mathrm{ΑΓ} = \mathrm{ΑΔ} + \mathrm{ΔΓ} = 2 \cdot \mathrm{ΔΓ} + \mathrm{ΔΓ} = 3 \cdot \mathrm{ΔΓ} = 3 \cdot \mathrm{ΒΓ}.$$



2ος τρόπος: Ονομάζουμε Ε το μέσον της ΑΒ. Θεωρούμε τα μέσα Ν, Ρ των τμημάτων ΑΔ και ΔΒ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ΝΔ=ΔΓ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ, η ΕΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα

$$\mathrm{EN}//=\frac{\Delta\mathrm{B}}{2}=\Delta\mathrm{P}\ (1)$$

Από την παραλληλία προκύπτει ότι

$$\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{EN} \text{ και } \angle\mathrm{EN}\Delta=\angle\mathrm{B}\Delta\Gamma\ (2).$$

Από τις (1), (2) έπεται ότι τα τρίγωνα ΕΝΔ και ΓΔΡ είναι ίσα, άρα ΓΔ=ΔΝ, που είναι το ζητούμενο.

3ος τρόπος: Ονομάζουμε Ε το μέσον της ΑΒ. Θεωρούμε το μέσο Ρ του τμήματος ΔΒ. Τότε $\mathrm{PE}\parallel\mathrm{A}\Gamma$ και $\mathrm{EP}=\dfrac{\mathrm{A}\Delta}{2}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ έπεται ότι ΓΡ διάμεσος και ύψος, οπότε $\Gamma\mathrm{P}\parallel\Delta\mathrm{E}$ και επομένως το τετράπλευρο ΕΡΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\mathrm{EP}=\Delta\Gamma$ και συνεπώς $\mathrm{A}\Delta=2\cdot\Delta\Gamma$ κλπ.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:

$$\boldsymbol{4\alpha^2=6\beta^2+5\gamma^2+25}$$
$$\boldsymbol{13\alpha=3\beta+2\gamma+34}.$$

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι ο γ πρέπει να είναι περιττός ακέραιος, αφού διαφορετικά θα προέκυπτε ότι ο ακέραιος $4\alpha^2-6\beta^2-5\gamma^2=25$ είναι άρτιος.
Επίσης από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\alpha>\beta$ και $\alpha>\gamma$.
Πράγματι, αν ήταν $\alpha\le\beta$ ή $\alpha\le\gamma$, τότε θα είχαμε $4\alpha^2<6\beta^2+5\gamma^2+25$.
Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$13\alpha=3\beta+2\gamma+34<5\alpha+34\Rightarrow 8\alpha<34\Rightarrow\alpha\in\{1,2,3,4\}.$$

Η περίπτωση $\alpha=1$ αποκλείεται, αφού $\alpha>\beta$ και $\alpha>\gamma$.

Ομοίως για $\alpha=2$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2+5\gamma^2=-9, 3\beta+2\gamma=-8$, (αδύνατο).

Για $\alpha=3$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2+5\gamma^2=11, 3\beta+2\gamma=5$ με μοναδική λύση στους θετικούς ακέραιους $\beta=\gamma=1$.

Για $\alpha=4$ προκύπτει το σύστημα $6\beta^2+5\gamma^2=39{,}3\beta+2\gamma=18$, το οποίο δεν έχει ακέραιες λύσεις.
Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(\alpha,\ \beta,\gamma)=(3,1,1)$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Θεωρούμε συνάρτηση $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\boldsymbol{f(2f(x)+y)=f(f(y)+x)+x.}\ (*)$$

(α) **Να αποδείξετε ότι για κάθε $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$ υπάρχει $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{f(z)=\alpha}$ και ότι η $\boldsymbol{f}$ είναι 1-1.**
(β) **Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$ που ικανοποιούν την (*).**

Λύση

(α) Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου y το $-2f(x)$ παίρνουμε

$$f(0)-x=f(f(-2f(x))+x)\qquad(1)$$

Επομένως, αν θέσουμε όπου x το $-\alpha + f(0)$ στην (1), βρίσκουμε z ώστε $f(z) = \alpha$.
Για το 1⍰1, παίρνουμε y_0 ώστε $f(y_0) = 0$. Για y το y_0 η (1) δίνει

$$f(2f(x) + y_0) = f(x) + x \qquad (2).$$

Επομένως, αν x_1, x_2 με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε $f(2f(x_1) + y_0) = f(2f(x_2) + y_0)$, άρα από την (3) $f(x_1) + x_1 = f(x_2) + x_2$, άρα $x_1 = x_2$.

(β) Αν θέσουμε όπου x το 0 στην (*), παίρνουμε $f(2f(0) + y) = f(f(y))$ και αφού η f είναι 1-1 θα ισχύει $f(y) = 2f(0) + y$, δηλαδή $f(y) = y + c$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Αντικαθιστώντας στη σχέση (*) παίρνουμε

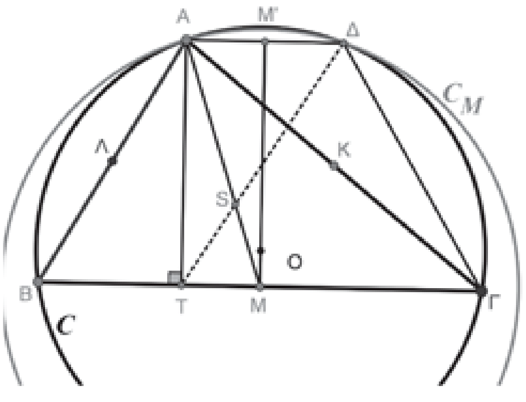
$$f(2(x + c) + y) = f(x + y + c) + x \Rightarrow 2x + y + 3c = 2x + y + 2c, \text{ οπότε } c = 0.$$

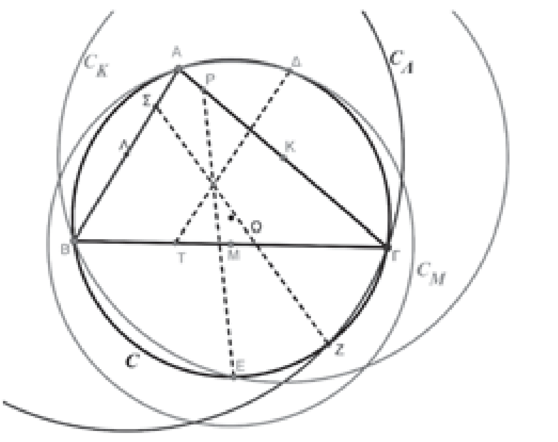
Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο C με κέντρο O και ακτίνα R. Θεωρούμε τα μέσα M, K, Λ των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ (αντίστοιχα) καθώς και τους κύκλους $C_M(M, MA)$, $C_K K, KB)$, $C_\Lambda(\Lambda, \Lambda\Gamma)$ με κέντρα τα σημεία M, K, Λ και ακτίνες $MA, KB, \Lambda\Gamma$, αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο C στα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα. Αν T, P, Σ είναι οι προβολές των κορυφών A, B, Γ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔT, EP και $Z\Sigma$ συντρέχουν.

Λύση





Έστω ότι ο κύκλος με κέντρο το μέσο M της ΒΓ και ακτίνα MA (C_M), τέμνει το κύκλο C στο σημείο Δ. Έστω ακόμη Τ η προβολή της κορυφής Α στη πλευρά. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΔΤ περνάει από σταθερό σημείο.
Η ΟΜ είναι διάκεντρος των κύκλων C και C_M. Άρα η ΟΜ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΔ των δύο κύκλων. Η ΟΜ είναι (επίσης) μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ του κύκλου C. Οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, εγγεγραμμένο στον κύκλο C. Έστω ότι η προέκταση της ΟΜ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Μ′. Τότε το Μ′ θα είναι το μέσο της ΑΔ, οπότε θα ισχύει:

$$MT = AM' = \frac{A\Delta}{2} \qquad (1).$$

Αν τώρα οι ΑΜ και ΔΤ τέμνονται στο σημείο S. Τότε τα τρίγωνα ΑΔS και MTS είναι όμοια και κατά συνέπεια:

$$\frac{SA}{SM} = \frac{A\Delta}{MT} \overset{(1)}{=} 2.$$

Άρα το σημείο S είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι οι ΕΡ και ΖΣ διέρχονται από το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 121

N52. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν για τους οποίους ο αριθμός $\nu!+\nu+1$ είναι διαιρέτης του αριθμού $(\nu+1)!-\nu$. (*Μαθηματική Ολυμπιάδα Ουκρανίας 2014*)

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός $(\nu+1)!-\nu$ διαιρείται με τον αριθμό $\nu!+\nu+1$. Επειδή και ο αριθμός $(\nu!+\nu+1)(\nu+1)$ διαιρείται με τον $\nu!+\nu+1$, έπεται ότι και η διαφορά

$$(\nu!+\nu+1)(\nu+1)-((\nu+1)!-\nu)=(\nu+1)^2+\nu=\nu^2+3\nu+1$$

θα διαιρείται με τον αριθμό $\nu!+\nu+1$. Επειδή οι $\nu^2+3\nu+1$, $\nu!+\nu+1$ είναι θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι

$$\nu^2+3\nu+1\ge \nu!+\nu+1 \Leftrightarrow \nu^2+2\nu\ge \nu!.$$

Όμως, για $\nu\ge 5$ έχουμε $\nu!=\nu(\nu-1)!\ge \nu\cdot 2(\nu-1)=2\nu^2-2\nu>\nu^2-2\nu$,

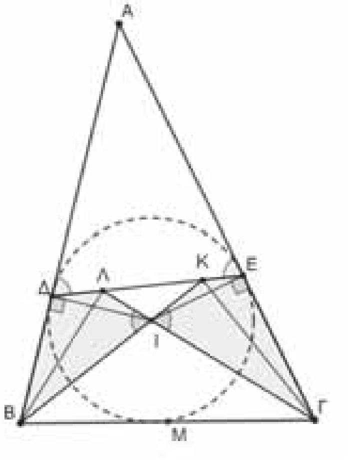
οπότε πρέπει $1\le \nu\le 4$. Με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι η μοναδική λύση είναι ο αριθμός $\nu=4$.

Γ58. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ι το έκκεντρό του. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΙ και ΓΙ τέμνουν την ευθεία ΔΕ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, Β, Γ είναι ομοκυκλικά και να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου που τα περιέχει.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$B\hat{I}\Lambda=\Gamma\hat{I}K=I\hat{B}\Gamma+I\hat{\Gamma}B=\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=90^0-\frac{\hat{A}}{2}. \qquad (1)$$



Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ με $A\Delta=AE$ (εφαπτόμενα τμήματα από το Α στον εγγεγραμμένο κύκλο), έπεται ότι:

$$A\hat{\Delta}E=A\hat{E}\Delta=90^0-\frac{\hat{A}}{2} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $B\hat{I}\Lambda=A\hat{\Delta}E$ και $\Gamma\hat{I}K=A\hat{E}\Delta$, οπότε τα τετράπλευρα ΒΙΛΔ και ΓΙΚΕ είναι εγγράψιμα. Επομένως έχουμε ότι $B\hat{\Lambda}\Gamma=B\hat{K}\Gamma=90^0$, οπότε τα σημεία Β, Γ, Κ, Λ είναι ομοκυκλικά και το κέντρο του κύκλου που τα περιέχει είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Ασκήσεις για λύση

N53. Για τους πρώτους θετικούς ακέραιους p,q,r δίνεται ότι οι αριθμοί $pq+1, pr+1$ και $qr-p$ είναι τέλεια τετράγωνα. Να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $p+qr+2$ είναι επίσης τέλειο τετράγωνο.

Δ23. Η Άντα και ο Βύρωνας παίζουν ένα παιγνίδι. Πρώτα η Άντα επιλέγει έναν πραγματικό αριθμό a διάφορο του 0 και τον ανακοινώνει. Τότε ο Βύρωνας επιλέγει έναν πραγματικό αριθμό b διάφορο του 0 και τον ανακοινώνει. Τότε η Άντα επιλέγει έναν πραγματικό αριθμό c διάφορο του 0 και τον ανακοινώνει. Τελικά ο Βύρωνας επιλέγει ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού του οποίου οι τρεις συντελεστές είναι οι α, b, c με κάποια σειρά.

(α) Με την υπόθεση ότι ο Βύρωνας κερδίζει όταν το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα και η Άντα κερδίζει σε κάθε άλλη περίπτωση, να προσδιορίσετε ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης,

(β) Με την υπόθεση ότι η Άντα κερδίζει όταν το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα και ο Βύρωνας κερδίζει σε κάθε άλλη περίπτωση, να προσδιορίσετε ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

European Girls' Mathematical Olympiad

EGMO 2021 GEORGIA KUTAISI

Η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών 2021

Η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών διοργανώθηκε διαδικτυακά από τη **Γεωργία** με έδρα το **Κουταΐσι** από **9 έως 15 Απριλίου 2021**. Συμμετείχαν **213** κορίτσια από **55 χώρες**. Η Ελλάδα **δεν** συμμετείχε λόγω αδυναμίας διεξαγωγής της Ελληνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας «ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» από την οποία επιλέγεται η ομάδα κοριτσιών που μας εκπροσωπεί.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1. Σύμφωνα με την Άννα ο αριθμός 2021 είναι *φανταστικός*. Αυτή δηλώνει ότι αν οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου $\{m, 2m+1, 3m\}$ είναι φανταστικός αριθμός για κάποιον θετικό ακέραιο m, τότε και οι υπόλοιποι είναι φανταστικοί αριθμοί. Είναι ο αριθμός 2021^{2021} φανταστικός;

Λύση. Η απάντηση είναι ναι.

1ος τρόπος. Θεωρούμε την ακολουθία θετικών ακεραίων: $m, 3m, 6m+1, 12m+3, 4m+1, 2m.$ Επειδή κάθε αριθμός της ακολουθίας αυτής είναι φανταστικός, αν και μόνον αν, ο επόμενός τους είναι φανταστικός, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός m είναι φανταστικός, αν και μόνον αν, ο αριθμός $2m$ είναι φανταστικός.

Επειδή m φανταστικός $\Leftrightarrow 2m+1$ φανταστικός, έπεται ότι $m>1$ φανταστικός $\Leftrightarrow f(m)=\left[\frac{m}{2}\right]$ φανταστικός. Με εφαρμογή της f κατάλληλο αριθμό φορών σε οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n συμπεραίνουμε ότι: n φανταστικός $\Leftrightarrow 1$ φανταστικός. Επομένως, από την υπόθεση ότι ο 2021 είναι φανταστικός έπεται ότι ο 1 είναι φανταστικός και στη συνέχεια έπεται ότι ο 2021^{2021} είναι φανταστικός.

2ος τρόπος. Ο ακόλουθος μετασχηματισμός:

$$\alpha \to 3\alpha$$
$$\alpha \to 2\alpha+1 \to 6\alpha+3 \to 3\alpha+1$$
$$\alpha \to 2\alpha+1 \to 4\alpha+3 \to 12\alpha+9 \to 36\alpha+27 \to 18\alpha+13 \to 9\alpha+6 \to 3\alpha+2$$

μας δίνει ότι: $\alpha \geq 3$ φανταστικός $\Leftrightarrow 3\alpha,\ 3\alpha+1$ ή $3\alpha+2$ φανταστικός. Επομένως έχουμε ότι:

$\alpha \geq 3$ φανταστικός.. φανταστικός.

Δεδομένου ότι ο αριθμός 2021 είναι φανταστικός, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι αριθμοί 2 και 1 είναι φανταστικοί ως εξής:

$$2021 \to 673 \to 224 \to 74 \to 24 \to 8 \to 2 \to 5 \to 1.$$

Επίσης μπορούμε να εφαρμόσουμε τη συνάρτηση $f(\alpha)=\left[\frac{\alpha}{3}\right]$ κατάλληλα για να συμπεράνουμε ότι οι αριθμοί 1 και 2 είναι φανταστικοί, οπότε κάθε θετικός ακέραιος είναι φανταστικός, άρα και ο 2021^{2021} είναι φανταστικός.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα

$$f\big(xf(x)+y\big)=f(y)+x^2, \qquad (1)$$

για όλους τους ρητούς αριθμούς x και y

Λύση. Έστω $xf(x)=A$ και $x^2=B$. Τότε η εξίσωση (1) γίνεται: $f(A+y)=f(y)+B$.
Επίσης, αν θέσουμε $y\to -A+y$ προκύπτει ότι $f(A-A+y)=f(-A+y)+B,$ οπότε

$$f(-A+y)=f(y)-B.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n ισχύει ότι:

$$f(nA+y)=f(y)+nB. \qquad (2)$$

Πράγματι, η σχέση (2) ισχύει προφανώς για $n=0$ και αν υποθέσουμε ότι ισχύει για κάποιο θετικό ακέραιο n, τότε έχουμε τις σχέσεις

$$f((n+1)A+y)=f(A+y+nA)=f(nA+y)+B=f(y)+nB+B=f(y)+(n+1)B$$

$$f((n-1)A+y)=f(-A+y+nA)=f(nA+y)-B=f(y)+nB-B=f(y)+(n-1)B,$$

από τις οποίες με επαγωγή προκύπτει ότι η σχέση (2) αληθεύει για κάθε ακέραιο n.
Από τη σχέση (2) με χρήση των ισοτήτων $xf(x)=A$ και $x^2=B$ έπεται ότι για κάθε ακέραιο n ισχύει ότι:

$$f(nxf(x)+y)=f(y)+nx^2. \qquad (3)$$

Για δεδομένο y, ο αριθμός $f(y)+nx^2$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ρητός, αφού ο nx^2 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ρητός $\frac{p}{q}, q\neq 0$. Το τελευταίο προκύπτει, αν πάρουμε $n=pq$ και $x=\frac{1}{q},\ q\neq 0$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι «*επί*» του $\mathbb{Q}$, οπότε υπάρχει ρητός c τέτοιος ώστε $f(c)=0$. Έτσι, αν θέσουμε $x=c$ στην (1) παίρνουμε $f(cf(c)+y)=f(y)+c^2$, από την οποία προκύπτει ότι .., δηλαδή $f(0)=0$.
Επομένως, έχουμε: $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.
Για κάθε ακέραιο n και για όλους τους ρητούς x,y έπεται ότι:

$$f(n^2xf(x)+y)=f(y)+n^2x^2=f(y)+(nx)^2\overset{(1)}{=}f(nxf(nx)+y). \qquad (4)$$

Αν θέσουμε στην (4) $y=-nxf(nx)$, τότε έχουμε $n^2xf(x)-nxf(nx)=0$, από την οποία για $x\neq 0$, προκύπτει ότι $nf(x)=f(nx)$. Η τελευταία σχέση ισχύει και για ... Επομένως, για κάθε ρητό $x=\frac{p}{q}$ έχουμε: $f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=p\cdot f\left(\frac{1}{q}\right)=p\cdot\frac{f\left(q\cdot\frac{1}{q}\right)}{q}=\frac{p}{q}\cdot f(1)=xf(1)$, δηλαδή για το ρητό αριθμό $k=f(1)$ ισχύει ότι $f(x)=kx$. Με αντικατάσταση στη σχέση λαμβάνουμε

$$k(xkx+y)=ky+x^2\Leftrightarrow k^2=1\Leftrightarrow k=1 \text{ ή } k=-1,$$

οπότε οι λύσεις είναι οι συναρτήσεις $f(x)=x$ και $f(x)=-x$.

Πρόβλημα 3. Έστω ABC τρίγωνο με τη γωνία $\hat{A}$ αμβλεία. Έστω E και F οι τομές της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ με τα ύψη του τριγώνου ABC από τις κορυφές B και C, αντίστοιχα. Θεωρούμε σημεία M και N πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα EC και FB, αντίστοιχα, έτσι ώστε $E\hat{M}A=B\hat{C}A$ και $A\hat{N}F=A\hat{B}C$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, F, N, M είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Έστω X και Y οι ορθές προβολές του σημείου B στην AC και του σημείου C πάνω στην AB, αντίστοιχα. Τότε το τετράπλευρο BXYC είναι εγγράψιμο και έστω ω ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Έστω ακόμη ότι η ευθεία EC τέμνει τον κύκλο ω στο σημείο Z και έστω D η προβολή του E πάνω στην ευθεία AB. Τότε ισχύουν οι ισότητες:

$$M\hat{A}C=A\hat{M}E-M\hat{C}A=X\hat{C}B-X\hat{C}E=Z\hat{C}B=Z\hat{X}B. \qquad (1)$$

Επειδή τα τετράπλευρα BXYC και DEXA είναι εγγράψιμα, έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$A\hat{C}Y = X\hat{B}A = X\hat{B}Y, \quad E\hat{X}D = E\hat{A}D = F\hat{A}C, \tag{2}$$

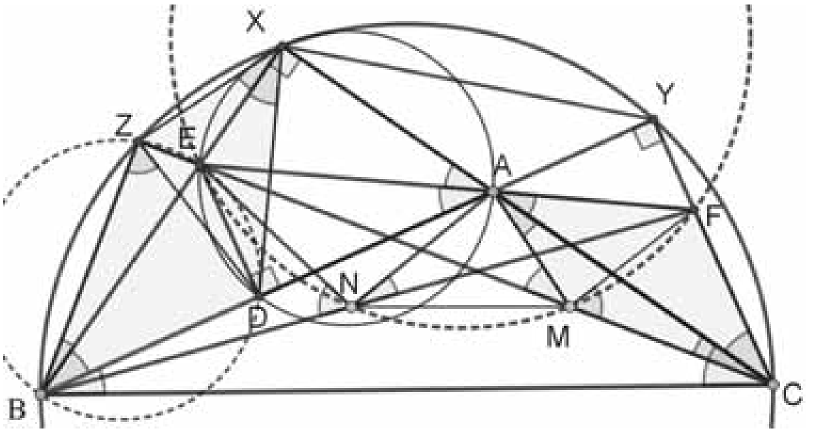
$$Z\hat{C}X = Z\hat{B}X \text{ και } C\hat{A}F = X\hat{A}E = E\hat{A}D = E\hat{X}D = B\hat{X}D \tag{3}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι τα τετράπλευρα BZXD και AMCF είναι όμοια. Άρα έχουμε

$$F\hat{M}C = D\hat{Z}B. \tag{4}$$

Επειδή το τετράπλευρο ZEDB είναι εγγράψιμο, έχουμε τις ισότητες

$$D\hat{Z}B = D\hat{E}B = X\hat{A}B \tag{5}$$



Σχήμα 1

Από τις σχέσεις (4) και (5) έπεται ότι: $F\hat{M}C = X\hat{A}B$.
Ομοίως, προκύπτει ότι : $E\hat{N}B = Y\hat{A}C$ και αφού $X\hat{A}B = Y\hat{A}C$ (ως κατά κορυφή), έπεται ότι

$$F\hat{M}C = E\hat{N}B \Rightarrow 180^0 - F\hat{M}C = 180^0 - E\hat{N}B \Rightarrow E\hat{M}F = E\hat{N}F,$$

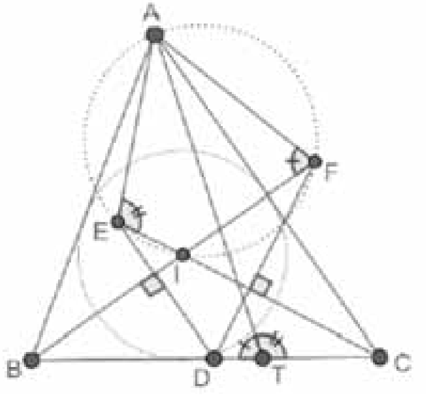
οπότε και τα σημεία E, F, N, M είναι ομοκυκλικά

Πρόβλημα 4. Έστω ABC τρίγωνο με έκκεντρο I και D τυχόν σημείο πάνω στην πλευρά BC. Έστω ότι η κάθετη ευθεία από το D προς την ευθεία BI τέμνει την ευθεία CI στο E. Έστω ότι η κάθετη ευθεία από το D προς την ευθεία CI τέμνει την ευθεία BI στο F. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο του A ως προς την ευθεία EF βρίσκεται πάνω στην ευθεία BC.

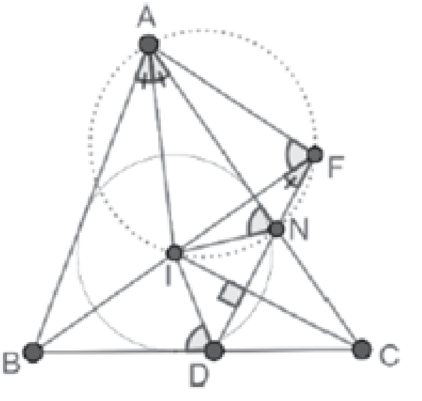
Λύση

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που το σημείο I βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου EFD. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται σχεδόν με τον ίδιο τρόπο.

Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων AEC και AFB. Θα αποδείξουμε ότι το T βρίσκεται πάνω στην ευθεία BC και ότι αυτό είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία EF.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Πρώτα μπορούμε να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο AEIF είναι εγγράψιμο. Πράγματι, έστω N το σημείο τομής της ευθείας DF με την πλευρά AC. Επειδή CI διχοτόμος και $DF \perp CI$ το σημείο N είναι το συμμετρικό του D ως προς τη διχοτόμο CI. Επομένως, $I\hat{N}A = I\hat{D}B$ και από το τρίγωνο BDF έχουμε:

$$I\hat{F}D = N\hat{D}C - I\hat{B}C = 90^0 - I\hat{C}B - I\hat{B}C = 90^0 - \frac{\hat{C}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} = I\hat{A}N.$$

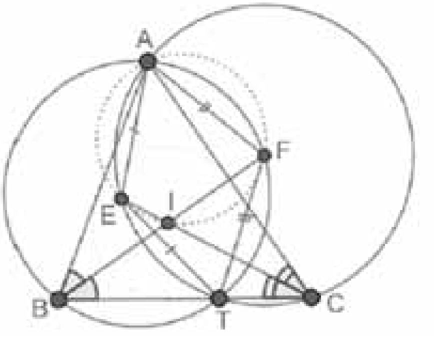
Επομένως τα σημεία A, I, N και F είναι ομοκυκλικά, οπότε: $A\hat{F}I = I\hat{N}A = I\hat{D}B$.

Ανάλογα προκύπτει ότι $A\hat{E}I = I\hat{D}C$ και έχουμε: $A\hat{F}I + A\hat{E}I = I\hat{D}B + I\hat{D}C = 180^0$, οπότε AEIF είναι εγγράψιμο τετράπλευρο. Τότε έχουμε

$$A\hat{T}B + A\hat{T}C = A\hat{F}B + A\hat{E}C = A\hat{F}I + A\hat{E}I = 180^0,$$

οπότε τα σημεία B, T και C είναι συνευθειακά.

Επειδή CI διχοτόμος της γωνίας $A\hat{C}B$ και AETC εγγράψιμο, έπεται ότι $EA = ET$. Ανάλογα προκύπτει ότι $FA = FT$. Επομένως το T είναι το συμμετρικό σημείο του A ως προς την ευθεία EF.



Σχήμα 4

Πρόβλημα 5. Ένα επίπεδο έχει ένα ειδικό σημείο O που ονομάζεται αρχή. Έστω P ένα σύνολο 2021 σημείων του επιπέδου τέτοιο ώστε:

(α) δεν υπάρχουν τρία σημεία του συνόλου P που είναι συνευθειακά και

(β) δεν υπάρχουν δύο σημεία του συνόλου P συνευθειακά με την αρχή O.

Ένα τρίγωνο με κορυφές σημεία του συνόλου P είναι *παχύ*, αν η αρχή O βρίσκεται στο εσωτερικό του. Να προσδιορίσετε τον μέγιστο αριθμό παχιών τριγώνων.

Λύση

Μια ιδέα είναι να προσδιορίσουμε τον ελάχιστο αριθμό των τριγώνων που δεν είναι παχιά. Έστω F το σύνολο των παχιών τριγώνων και S το σύνολο των τριγώνων που δεν είναι παχιά. Αν $XYZ \in S$, καλούμε τις κορυφές X και Z *καλές*, αν η ευθεία OY βρίσκεται μεταξύ των ευθειών OX και OZ. Για $A \in P$, έστω $S_A \subseteq S$ το σύνολο των τριγώνων του συνόλου Σ των οποίων η κορυφή A είναι *καλή*. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$2|S| = \sum_{A \in P} |S_A| \qquad (1)$$

Για $A \in P$, έστω $R_A \subset P$ και $L_A \subset P$ τα δύο κομμάτια που διαιρείται το σύνολο $P - \{A\}$ από την ευθεία AO. Αν υποθέσουμε ότι για το $AXY \in S$ η κορυφή του A είναι καλή, τότε προφανώς $X, Y \in R_A$ ή $X, Y \in L_A$. Επιπροσθέτως, αν $X, Y \in R_A$ ή $X, Y \in L_A$, τότε προφανώς $AXY \in S$ και η κορυφή του A είναι καλή. Επομένως,

$$|S_A| = \binom{|R_A|}{2} + \binom{|L_A|}{2}. \qquad (2)$$

Με χρήση της σχέσης (2) και της ταυτότητας

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} - 2 \cdot \frac{\frac{x+y}{2}\left(\frac{x+y}{2} - 1\right)}{2} = \frac{(x-y)^2}{4} \qquad (3)$$

παίρνουμε ότι

$$|S_A| \geq \binom{\frac{|R_A| + |L_A|}{2}}{2} = 2 \cdot \binom{1010}{2} = 1010 \cdot 1009 \qquad (4)$$

και η ισότητα ισχύει όταν $\left|R_A\right| = \left|L_A\right| = 1010$. Επομένως, έχουμε

$$|S| = \frac{1}{2}\sum_{A\in P}\left|S_A\right| \geq \frac{2021\cdot 1010\cdot 1009}{2} = 2021\cdot 505\cdot 337. \qquad (5)$$

Για σχηματισμό σημείων πάνω σε κανονικό 2021-γωνο κέντρου O οι ανισότητες (4), (5) και (6) γίνονται ισότητες. Επομένως η απάντηση είναι $2021\cdot 505\cdot 337$.

Πρόβλημα 6. Να εξετάσετε αν υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος α για τον οποίο η εξίσωση

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \ldots \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a \qquad (1)$$

έχει περισσότερες από ένα εκατομμύριο διαφορετικές λύσεις (m,n), όπου m και n θετικοί ακέραιοι. (*Η έκφραση* $[x]$ *ορίζεται ως το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού* x *Έτσι* .$\left[\sqrt{2}\right] = 1$,

$[\pi] = \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor = 3$, $[42] = 42$ και $[0] = 0$.)

Λύση

Στη συνέχεια συμβολίζουμε με $L(m)$ το πρώτο μέλος της (1). Θεωρούμε ένα ακέραιο $q > 10^7$ και σημειώνουμε ότι για $m = q^3$ έχουμε:

$$L\left(q^3\right) = \sum_{k=1}^{q^3}\left\lfloor \frac{q^3}{k} \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^{q^3}\frac{q^3}{k} \leq q^3\cdot\sum_{k=1}^{q^3}\frac{1}{k} \leq q^3\cdot q = q^4. \qquad (2)$$

Πράγματι, μετά την πρώτη ανισότητα μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: Διαιρούμε τους όρους του αθροίσματος $\sum_{k=1}^{q^3}\frac{1}{k}$ σε μερικές ομάδες. Για $j \geq 0$, η $j-$ομάδα περιέχει τους 2^j διαδοχικούς όρους $\frac{1}{2^j}, \ldots, \frac{1}{2^{j+1}-1}$. Επειδή κάθε όρος στην $j-$ομάδα φράσσεται από τον όρο $\frac{1}{2^j}$, η συνολική συνεισφορά της $j-$ομάδας στο άθροισμα είναι το πολύ ίση με 1. Επειδή οι πρώτες q ομάδες μαζί θα περιέχουν . $2^q - 1 > q^3$. όρους, ο αριθμός των ομάδων δεν υπερβαίνει το q και επομένως η τιμή του αθροίσματος είναι μικρότερη ή ίση από το q.

Ονομάζουμε έναν ακέραιο m ειδικό, αν ισχύει ότι: $1 \leq L(m) \leq q^4$. Συμβολίζουμε με $g(m) \geq 1$ το μέγιστο δυνατό ακέραιο του οποίου το τετράγωνο φράσσεται από την τιμή $L(m)$, δηλαδή ισχύει ότι: $(g(m))^2 \leq L(m) < (g(m)+1)^2$.

Επειδή $g(m) \leq q^2$ για όλους τους ειδικούς αριθμούς m, ισχύει ότι:

$$0 \leq L(m) - \left(g(m)^2\right) < \left(g(m)+1\right)^2 - (g(m))^2 = 2g(m) + 1 \leq 2q^2 + 1. \qquad (3)$$

Από την ανισότητα (2) και την μονοτονία της συνάρτησης $L(m)$ διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον q^3 ειδικοί αριθμοί. Λόγω της σχέσης (3) κάθε ειδικός αριθμός ικανοποιεί τη σχέση

$$0 \leq L(m) - \left(g(m)^2\right) \leq 2q^2 + 1.$$

Με το μέσο όρο, τουλάχιστον $\frac{q^3}{2q^2+2} > 10^6$ ειδικοί αριθμοί πρέπει να παράγουν την ίδια τιμή $L(m) - \left(g(m)^2\right)$. Αυτή την συχνά εμφανιζόμενη τιμή επιλέγουμε για τον αριθμό α, ο οποίος παράγει περισσότερες από 10^6 λύσεις $\left(m, g(m)\right)$ της εξίσωσης (1), οπότε η απάντηση στο ερώτημα του προβλήματος είναι ναι.

Μαθηματικά και Σύγχρονη Επιστημονική Σκέψη

Επέστρεψαν δυναμικά οι **«Συναντήσεις Επιστήμης[1]»** που διοργανώνει φέτος –για δεύτερη συνεχόμενη χρονιά– το **Ίδρυμα Ευγενίδου**. Η αρχή έγινε όπως πάντα διαδικτυακά, **την Τετάρτη 13 Οκτωβρίου 2021** με θέμα: **«Μαθηματικά και Σύγχρονη Επιστημονική Σκέψη»**.

Η έναρξη της συνάντησης έγινε με τον **κ. Γεώργιο Δάσιο** με την ομιλία του: **«Μαθηματικά: Ένα δυναμικό ανθρώπινο κατασκεύασμα»**. Ακολούθως **ο κ. Ιωάννης Εμμανουήλ** μίλησε για τον **«Ρόλο της Μαθηματικής Παιδείας για την ανάπτυξη και την κοινωνική συνοχή»** και ο **κ. Ευστράτιος Γαλλόπουλος**, για την **«Συναρπαστική αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Πληροφορικής».**

Ενδιαφέροντα ερωτήματα έγιναν αφορμή για συζήτηση, όπως:

- Τι ακριβώς είναι τα Μαθηματικά; Γιατί τα κατασκευάσαμε;
- Πού τα χρησιμοποιούμε και τι επιτυγχάνουμε με αυτά;
- Με ποιο τρόπο αντιμετωπίζει τα Μαθηματικά η σύγχρονη κοινωνία;
- Ποια είναι η σημασία της ποιοτικής αναβάθμισης της Μαθηματικής εκπαίδευσης;
- Πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος των Θεωρητικών Μαθηματικών για την ανάπτυξη των Επιστημών και της Τεχνολογίας;
- Ποια είναι εν τέλει, η συναρπαστική σχέση ανάμεσα στα Μαθηματικά, την Τεχνολογία των Υπολογιστών και την Πληροφορική;

Περιληπτικές αναφορές από τις ομιλίες

Μαθηματικά: Ένα δυναμικό ανθρώπινο κατασκεύασμα. Γεώργιος Δάσιος

Σήμερα όλο και περισσότερο ακούμε για τα επιτεύγματα των Μαθηματικών και τα χρησιμοποιούμενα μαθηματικά μοντέλα σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα. Επιπλέον, σε παγκόσμια κλίμακα, η εκπαίδευση δίνει **όλο και περισσότερη έμφαση στα Μαθηματικά.** Αλλά τι ακριβώς είναι τα Μαθηματικά; Γιατί τα κατασκευάσαμε; Πού τα χρησιμοποιούμε; Τι επιτυγχάνουμε με αυτά; Σε αυτά τα ερωτήματα θα εστιαστεί η παρουσίαση, στην οποία θα γίνει προσπάθεια να οριοθετηθεί μεταξύ άλλων, και ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζει τα Μαθηματικά η σύγχρονη κοινωνία.

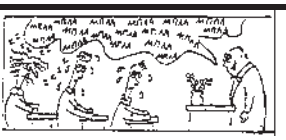
Ο ρόλος της Μαθηματικής Παιδείας για την ανάπτυξη και την κοινωνική συνοχή. Ιωάννης Εμμανουήλ

Τα Μαθηματικά έχουν ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών στην επιστήμη και την τεχνολογία. Ο ρόλος των Θεωρητικών Μαθηματικών είναι πολύ σημαντικός για την ανάπτυξή τους. Η ποιοτική αναβάθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης **θα αποτρέψει την αποξένωση** και την απομάκρυνση των μαθητών/πολιτών από πολλές εξελίξεις που λαμβάνουν χώρα **ταχύτατα** στον σύγχρονο κόσμο.

Η συναρπαστική αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Πληροφορικής. Ευστράτιος Γαλλόπουλος

Λέγεται ότι «το μέλλον τρέχει ταχύτερα απ' όσο νομίζουμε». Χρειάζεται μαθηματική παιδεία για να το παρακολουθήσουμε και υπολογιστική σκέψη και υποδομές για να συμμετάσχουμε. Τα Μαθηματικά, η Πληροφορική και η Τεχνολογία των Υπολογιστών εμπλέκονται άμεσα. Θα γίνει αναφορά σε στιγμιότυπα από τη συναρπαστική αλληλεπίδρασή τους.

[1] Συναντήσεις Επιστήμης – Ευγενίδειο Ίδρυμα



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

Στο βιβλίο με τίτλο «***Η χαρά του x***», του Steven Strogatz, διαβάζουμε:

«Το βιβλίο αποτελεί μια ξενάγηση στα Μαθηματικά, από τα προσχολικά μέχρι τα μεταπτυχιακά έτη, για οποιονδήποτε θα επιθυμούσε μια δεύτερη ευκαιρία στο αντικείμενο. Η πρόθεσή μου δεν είναι να καλύψω κενά. Σκοπό έχω να σας δώσω μια καλύτερη αίσθηση για το τι είναι τα Μαθηματικά και γιατί καθηλώνουν όσους τα κατακτήσουν. [...] Ελπίζω ότι όλες οι ιδέες με τις οποίες θα καταπιαστούμε θα σας προσφέρουν χαρά, και αρκετές στιγμές θα λειτουργήσουν ως πηγή έμπνευσής σας», και συνεχίζει:

«Τα Μαθηματικά συνδέονται στενά με όλες τις πτυχές της ζωής: Πώς θα έπρεπε να γυρίζετε το στρώμα σας προκειμένου να το αξιοποιήσετε όσο περισσότερο γίνεται και να φθαρεί το λιγότερο δυνατόν; Με πόσα άτομα θα έπρεπε να συνάψετε ερωτικό δεσμό μέχρι να κατασταλάξετε στο μόνιμο ταίρι σας; Πώς ακριβώς η Google διεξάγει τις αναζητήσεις στο Διαδίκτυο; Γιατί ορισμένα άπειρα σύνολα είναι μεγαλύτερα από κάποια άλλα; Υπάρχουν ημιτονοειδή κύματα στις ραβδώσεις της ζέβρας; Τι ρόλο έπαιξε η αριθμητική των αρνητικών αριθμών στις παραμονές του Α' Παγκοσμίου Πολέμου; Πώς τα νέα μαθηματικά επηρεάζουν την καθημερινή μας ζωή, καθώς ψάχνουμε εστιατόρια στο Διαδίκτυο και προσπαθούμε να κατανοήσουμε τις διακυμάνσεις του χρηματιστηρίου; Τα μαθηματικά βρίσκονται παντού αν ξέρεις πού να κοιτάξεις».

Ο Steven Strogatz, περιλαμβάνοντας στην πραγμάτευση του θέματός του την ποπ κουλτούρα, την ιατρική, τα νομικά, τη φιλοσοφία, την τέχνη και τις επιχειρήσεις, γίνεται ο καθηγητής Μαθηματικών που όλοι θα ευχόμασταν να είχαμε στο σχολείο.

II. Γεωμετρία αγάπη μου

προλεγόμενα. Στο προηγούμενο τεύχος υποσχεθήκαμε ότι θα σας παρουσιάσουμε κάποιες σύντομες αναφορές στη «Γεωμετρία του τριγώνου» του Emil Lemoine (κατά κύριο λόγο ορισμικά στοιχεία).

επτά βασικές έννοιες

- ***ευθείες αντιπαράλληλες*** Δύο ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται: α) μεταξύ τους στο Ο, β) από ευθεία (σ_1) στα Α,Β αντίστοιχα και γ) από ευθεία (σ_2) στα Γ,Δ αντίστοιχα. Αν γων.ΑΓΔ=γων.ΟΒΑ, τότε λέμε ότι οι ευθείες $(\sigma_1),(\sigma_2)$ είναι αντιπαράλληλες ως προς τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ [αντίστοιχα οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι αντιπαράλληλες ως προς τις$(\sigma_1),(\sigma_2)$]
- ***συζυγείς ισογώνιες τριγώνου [κατά Neuberg]*** Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η διχοτόμος ΑΔ αυτού και τα σημεία Μ,Ν της πλευράς ΒΓ. Αν γων.ΑΓΔ=γων.ΟΒΑ,, τότε οι ΑΜ,ΑΝ λέγονται συζυγείς ισογώνιες
- ***συμμετροδιάμεσοι τριγώνου [κατά Maurice D' Ocagne]*** Συμμετροδιάμεσος τριγώνου, από μια κορυφή του, λέγεται η συζυγής ισογώνιος της διαμέσου του τριγώνου, απ' την ίδια κορυφή
- ***σημείο Lemoine τριγώνου [Emil Lemoine]*** Είναι τα σημείο τομής των εσωτερικών συμμετροδιάμεσων του τριγώνου [συνηθίζεται να το συμβολίζουμε με L]
- ***πρώτος κύκλος Lemoine*** Οι τομές των πλευρών τριγώνου από τις παράλληλες, που διέρχονται από το σημείο Lemoine αυτού, είναι σημεία ομοκυκλικά. Τον κύκλο αυτό τον ονομάζουμε "πρώτο κύκλο του Lemoine" [συνήθως τον σημειώνουμε C_{L1}]
- ***δεύτερος κύκλος Lemoine*** Οι τομές των πλευρών τριγώνου από τις αντιπαράλληλες προς αυτές, που διέρχονται από το σημείο Lemoine αυτού, είναι σημεία ομοκυκλικά. Τον κύκλο αυτό τον ονομάζουμε "δεύτερο κύκλο του Lemoine" [συνήθως τον σημειώνουμε με C_{L2}.
- ***σημείο Gergonne*** Είναι το κοινό σημείο των ευθ. τμημάτων που έχουν σαν άκρα τις κορυφές του τριγώνου και τα σημεία επαφής του εγγεγρ. κύκλου με τις πλευρές του τριγώνου

παρατηρήσεις στις συμμετροδιάμεσες και στο σημείο Lemoine

- η εξωτερική συμμετροδιάμεσος κάθε τριγώνου είναι εφαπτόμενη του περίκυκλου αυτού του τριγώνου
- οι εσωτερικές συμμετροδιάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- κάθε εσωτερική συμμετροδιάμεσος τριγώνου, διέρχεται από το κοινό σημείο των δύο εξωτερικών συμμετροδιάμεσων οι οποίες αντιστοιχούν στις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου.
- το σημείο Lemoine κάθε τριγώνου απέχει από τις πλευρές του τριγώνου αποστάσεις ανάλογες των αντίστοιχων πλευρών.
- το σημείο Lemoine τριγώνου είναι το σημείο του επιπέδου του τριγώνου, του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τις πλευρές του είναι ελάχιστο.
- το σημείο Lemoine κάθε τριγώνου είναι βαρύκεντρο του ποδικού τριγώνου του σημείου αυτού, ως προς το αρχικό τρίγωνο και αντίστροφα.
- οι αντιπαράλληλες ευθείες προς τις πλευρές τριγώνου που διέρχονται από το σημείο Lemoine αυτού, τέμνουν τις πλευρές του τριγώνου σε έξι σημεία ομοκυκλικά.

ΙΙΙ. Αυτό το ξέρατε;

ποιος είναι ο συγγραφέας του ιστορικού πονήματος με τίτλο: *«Αρχιμήδεια θεωρήματα, επίπεδος τριγωνομετρία και τομές κώνου»* Το ερώτημα θέτουμε σαν ελάχιστη υπόμνηση σε συντελεστές της ωρίμανσης της ιδέας της Εθνεγερσίας.

(*η απάντηση στο τέλος της στήλης*)

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. Ο αντιστασιακός δασκαλάκος του χωριού, Χρήστος Παπακυριακόπουλος, που θα γινόταν ο περιβόητος «Πάπα» του Πρίνστον! (α΄ μέρος)

Προλεγόμενα. Όταν ρώτησαν κάποτε τον πατέρα της Θεωρίας των Κατηγοριών, τον σπουδαίο Πολωνο-αμερικανό μαθηματικό Samuel Eilenberg, αν υπάρχει σύγχρονος Έλληνας μαθηματικός στο μέγεθος ενός Ευκλείδη ή Αρχιμήδη, εκείνος απάντησε αμέσως χωρίς να το σκεφτεί: «Φυσικά, ο ‘‘Πάπα’’!».

"Τον «Πάπα» τον ήξεραν όλοι στις ΗΠΑ, καθώς εκεί θα περνούσε πάνω από 25 χρόνια κλεισμένος στο γραφειάκι του στο Πρίνστον ψάχνοντας να λύσει το μεγαλύτερο και πιο επίμονο μαθηματικό πρόβλημα όλων των εποχών, τη σπαζοκεφαλιά που έβαλε ο Πουανκαρέ στις διάνοιες του μέλλοντος.

Αυτό έκανε ο σιωπηλός μετανάστης Χρήστος Παπακυριακόπουλος στον Νέο Κόσμο, ένας σωστός ερημίτης που αφιέρωσε ζωή και καριέρα στη μεγάλη του αγάπη, την **τοπολογία**. Την Εικασία του Πουανκαρέ δεν θα την έλυνε, άνοιξε ωστόσο διάπλατα τον δρόμο για την καλύτερη προσέγγισή του κορυφαίου μαθηματικού προβλήματος, αν και μικρή σημασία έχει όλο αυτό για το μέγεθός του

Ξένος σε όλους και ειδικά στον τόπο του, ο μεγάλος Παπακυριακόπουλος ήταν άλλο ένα πραγματικό μυστήριο του κόσμου των μαθηματικών. Εσωστρεφής, σωστός ερημίτης, ήταν ένας άνθρωπος που ζούσε και ανέπνεε αποκλειστικά για τα Μαθηματικά. Η ζωή του παρέμεινε μάλιστα κλασικό ανέκδοτο του Πρίνστον, του κορυφαίου αμερικανικού πανεπιστημίου στο οποίο θα περνούσε ο Παπακυριακόπουλος τα τελευταία 25 χρόνια της ζωής του, καθώς τέτοιον εκκεντρικό τύπο δεν είχαν ματαδεί εκεί στις ΗΠΑ.

«Πάπα» και Edwin Moise ήταν οι δυο μεταπτυχιακοί φοιτητές του Πρίνστον που έβαλαν στόχο ζωής να λύσουν την Εικασία. Ο Moise φάνταζε ο άνθρωπος που θα έκανε τη δουλειά: αλαζόνας και εξωστρεφής, είχε ήδη στο ενεργητικό του δυο ξακουστές επιτυχίες στην τοπολογία και όλα έδειχναν πως θα έκανε σκόνη και τον Πουανκαρέ.

Ο θρύλος έλεγε μάλιστα πως όταν έφτασε στο Πρίνστον, έπιασε ένα δωματιάκι σε ένα μοτέλ και δεν ξαναβγήκε ποτέ. Ούτε τις βαλίτσες του έλεγαν πως δεν άδειασε, υιοθετώντας απλώς μια ρουτίνα που θα τηρούσε ευλαβικά κάθε μέρα: **δουλειά** μέχρι το **τελευταίο λεπτό**, με εξαίρεση εκείνον τον σύντομο μεσημεριανό υπνάκο πάνω στο γραφείο του.

Μη γελιέστε όμως, όλοι ήξεραν ποιος ήταν ο μεγαλοφυής Έλληνας μαθηματικός που μαχόταν λυσσαλέα με τον Moise καθ’ όλη τη δεκαετία του 1950 για τον Πουανκαρέ. Σκάρωνε ο «Πάπα» μια απόδειξη; Του την κατέρριπτε ο Moise. Ανακοίνωνε μια λύση ο Moise; Την ισοπέδωνε ο «Πάπα». Αυτό συνέβαινε για χρόνια και χρόνια και αμφότεροι δεν εργάζονταν πια πάνω σε οτιδήποτε άλλο!

Ο Moise «έσπασε» τελικά, για **νευρικό κλονισμό** μίλησαν οι ψυχίατροι. Δεν ξανάκανε ποτέ σοβαρή μαθηματική δουλειά και πέρασε τα λιγοστά τελευταία του χρόνια κρίνοντας ποιήματα. Ο Παπακυριακόπουλος συνέχισε να δουλεύει στην Εικασία για 25 ολόκληρα χρόνια, παίρνοντας μάλιστα τον όρκο κάποια στιγμή πως αν δεν την έλυνε, δεν θα παντρευόταν. Πέθανε πρόωρα το 1976 από καρκίνο του στομάχου, εργένης ακόμα.

Και άγνωστος φυσικά εκτός μαθηματικής κοινότητας, άγνωστος όμως και στον τόπο του, παρά το γεγονός ότι πλάι στον άλλο ογκόλιθο των Μαθηματικών, Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή, ήταν σωστό ορόσημο των Μαθηματικών.

Οι μαθηματικές εξισώσεις είναι εξάλλου δυσνόητες και εν πολλοίς τρομακτικές για το ευρύ κοινό, πόσο μάλλον που ο εσωστρεφής Παπακυριακόπουλος δεν ήθελε ποτέ να γίνει αστέρας της επιστήμης και να παίζει το όνομά του παντού.

Έζησε μια ζωή απομονωμένος, «**ερημίτη του Πρίνστον**» τον έλεγαν χαρακτηριστικά, περνώντας το μεγαλύτερο κομμάτι της ημέρας του κλεισμένος στο γραφείο. Ούτε διαλέξεις έδινε, ούτε άρθρα έγραφε, ούτε ακαδημαϊκή δουλειά έκανε, κι έτσι η κοινωνία δεν θα τον γνώριζε, παρά μόνο η μαθηματική κοινότητα, η οποία του επεφύλαξε μια αξιοσέβαστη θέση στο πάνθεο των κορυφαίων σύγχρονων μαθηματικών.

Και έχασε φυσικά η ίδια η Ελλάδα, μιας και ο ψυχαναγκαστικός με τον Πουανκαρέ μαθηματικός δεν ασχολήθηκε αποκλειστικά με την Εικασία του, αλλά απέδειξε το περίφημο **Λήμμα του Ντεν**, άφησε σπουδαία κληρονομιά στη γεωμετρική τοπολογία και ανακάλυψε τέλος και δυο σημαντικότατα θεωρήματα που άνοιξαν τον δρόμο για την **απόδειξη της Εικασίας του Πουανκαρέ** από τον Ρώσο μαθηματικό Γκριγκόρι Πέρελμαν. Θέτοντας ταυτοχρόνως τις βάσεις της γεωμετρικής τοπολογίας!

Ο Χρήστος Παπακυριακόπουλος γεννιέται στις 29 Ιουνίου 1914 στο Χαλάνδρι της Αθήνας ως ο μεγαλύτερος από τους δύο γιους ενός ευκατάστατου υφασματέμπορου

Όταν τέλειωσε το Γυμνάσιο, ο πατέρας τού είπε να κάνει ό,τι θέλει, φτάνει να μην καταλήξει δασκαλάκος. Εκείνος περνά με διάκριση τις ομολογουμένως πανδύσκολες εξετάσεις εισαγωγής στη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, αριστεύοντας στην άλγεβρα, τη γεωμετρία και την τριγωνομετρία, και αρχίζει τα πανεπιστημιακά του χρόνια.

Ο φοιτητής έχει όμως πάθος με τα Μαθηματικά! Τα ενδιαφέροντά του εντοπίζονται στην τοπολογία, έναν κλάδο των Μαθηματικών που στην εποχή του βρισκόταν κυριολεκτικά στα σπάργανα. Ο Παπακυριακόπουλος μελετά μόνος τα συγγράμματα των πρωτοπόρων της τοπολογίας, μιας και κανείς δεν μπορούσε να του τα διδάξει, γι’ αυτό και το Πρίνστον τον θεωρούσε εν πολλοίς «αυτοδίδακτο» στα Μαθηματικά.

Δεν ήταν όμως. Ο νεαρός σπουδαστής θα έχει την τύχη να συναντήσει στο Μετσόβιο τον φωτισμένο καθηγητή μαθηματικών Νικόλαο Κρητικό, ο οποίος αναγνώρισε τη μαθηματική του ιδιοφυΐα και τον έπεισε να μετεγγραφεί στη Φυσικομαθηματική Σχολή του Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, παρά το γεγονός ότι έχει ήδη ολοκληρώσει δύο χρόνια φοίτησης.

Με πτυχίο μαθηματικού βγήκε ο Χρήστος από το πανεπιστήμιο το 1938 και ο Κρητικός τον παίρνει αμέσως βοηθό του.

Όσο αυτός μελετούσε και έπαιρνε τελικά το διδακτορικό του το 1943 με μια διατριβή που του άνοιξε διάπλατα την πόρτα για το εξωτερικό («Μία μέθοδος αποδείξεως του αναλλοίωτου των ομολογικών συμπλεγμάτων ενός σύμπλοκου»),

Ο Παπακυριακόπουλος επέστρεψε στην Αθήνα το 1945, Ο συνεσταλμένος νεαρός μαθηματικός είχε στείλει μια φιλόδοξη λύση για ένα μεγάλο μαθηματικό πρόβλημα (Λήμμα του Ντεν) στον σημαντικό Αμερικανό μαθηματικό Ραλφ Φοξ.

***θέμα.* Eliabeth Smith Friedman (1892-1980), η Αμερικανίδα κρυπτογράφος**

προλεγόμενα. ο φίλος της στήλης Δ. Ματίνης μας έστειλε ένα σύντομο βιογραφικό μιας σημαντικής Αμερικανίδας κρυπτογράφου της Elizebeth Smith Friedman (1892 – 1980). Όπως μας διευκρίνισε, το βιογραφικό αυτό δανείστηκε από την έγκυρη ιστοσελίδα "Θαλής+Φίλοι", και είναι δημοσίευμα του Γιώργου Καρουζάκη

«Δεν ήταν μόνο ο **Alan Turing** (1912-1954), ο ιδιοφυής Βρετανός επιστήμονας, που κατάφερε μαζί με την ομάδα του να σπάσει τους κώδικες επικοινωνίας των Ναζί, και να αποκωδικοποιήσει τη διαβόητη μηχανή *Enigma* στη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου.

Υπήρξε επίσης και η Elizebeth Smith Friedman (1892 – 1980), η Αμερικανίδα κρυπτογράφος από την Ιντιάνα που, όσο ζούσε, ελάχιστοι αναγνώριζαν την προσφορά της στην αποκρυπτογράφηση. Οι εκπρόσωποι του Τύπου, αν και ήξεραν τις ικανότητές της, όταν αναφέρονταν σε εκείνη έδιναν έμφασή στο φύλο της, στο ότι «ήταν γυναίκα, νοικοκυρά, όμορφη», και όχι στο γεγονός ότι ξεχώρισε ως μιαν ικανότατη και πρωτοπόρος κρυπτογράφος.

Στη διάρκεια της ποτοαπαγόρευσης, οι αποκρυπτογραφήσεις της συνέβαλαν στην αποκάλυψη των διεθνών κυκλωμάτων που συνδέονταν με τα ναρκωτικά και το λαθρεμπόριο ποτών. Για ένα μικρό διάστημα υπήρξε πάντως περισσότερο αναγνωρίσιμη από τον σύζυγό της, τον σημαντικό επίσης κρυπτογράφο **William Friedman**, ο οποίος διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στην ίδρυση της Αμερικανικής Εθνικής Υπηρεσίας Ασφαλείας την περίοδο του Ψυχρού Πολέμου. Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, η μονάδα του Friedman μεταφέρθηκε στο Πολεμικό Ναυτικό, αποτελώντας την κύρια πηγή πληροφόρησης των ΗΠΑ για την Επιχείρηση Μπολίβαρ, το παράνομο γερμανικό δίκτυο στη Νότια Αμερική. Πριν από την ιαπωνική επίθεση στο Περλ Χάρμπορ, οι Αμερικανοί φοβούνταν ότι η Γερμανία θα μπορούσε να τους επιτεθεί μέσω της Λατινικής Αμερικής. Εκείνη την εποχή, η μόνη αμερικανική υπηρεσία με προσωπικό που μπορούσε να εντοπίσει και να παρακολουθήσει τις κωδικοποιημένες μεταδόσεις των Ναζί ήταν η Ακτοφυλακή. Και ειδικότερα η ομάδα κρυπτογράφησης του Friedman λόγω της πρότερης εμπλοκής της στην εξάρθρωση της λαθρεμπορίας.

Οι Γερμανοί πράκτορες αξιοποιούσαν τους κώδικες και τις ραδιοφωνικές τεχνικές που χρησιμοποιούσε η Consolidated Exporters Corporation, η επιχείρηση διακίνησης ρουμιού που υποστηριζόταν από τη μαφία. Η Elizebeth Friedman είχε μάθει καλά τη «γραμματική» και τους κώδικες αυτής της επιχείρησης ως επικεφαλής κρυπτολόγος του Υπουργείου Οικονομικών των ΗΠΑ κατά τη διάρκεια της ποτοαπαγόρευσης.

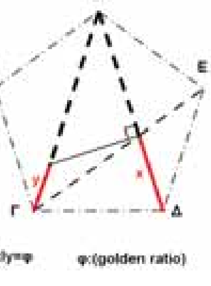
Η γυναίκα που έψαχνε με τόσο πάθος τα κρυφά μηνύματα πίσω από τις ονομασίες και τις γραμματοσειρές στα μπουκάλια ουίσκι στην εποχή της ποτοαπαγόρευσης εξελίχθηκε αναπάντεχα σε ηρωίδα. Έστω και αν αυτό αναγνωρίστηκε μετά τον θάνατό της.

Το ενδιαφέρον της για την κρυπτογραφία ήταν πάντως έμφυτο και ζωηρό από τα φοιτητικά της χρόνια, όταν σπούδαζε αγγλική φιλολογία στο κολέγιο Wooster, στο Οχάιο.

«Εκείνα τα χρόνια μού είχε κινήσει την περιέργεια η διαμάχη για το αν ο σερ **Φράνσις Μπέικον** έγραψε ή όχι τα έργα του Σαίξπηρ και αν είχε βρει τρόπο να κρύψει την απάτη του με κρυπτογράφηση. Έτσι αποφάσισα να δοκιμάσω την τύχη μου για να λύσω το μυστήριο. Αυτή η αφορμή με οδήγησε στη μελέτη και στην ανάλυση των κρυπτογραφημένων κείμενων», έλεγε η ίδια το 1934 σε ραδιοφωνική συνέντευξή της στο NBC.»

3ο θέμα. ***χρυσή αναλογία ή χρυσή τομή ή χρυσός μέσος όρος ή θεϊκή αναλογία*** *(golden ratio)*

προλεγόμενα. ο Παρμενίδης (κατά κόσμον, Παναγιώτης Χρονόπουλος), κατόρθωσε το "ακατόρθωτο": συγκέντρωσε όλη την ελληνική **γεωμετρική βιβλιογραφία** των τελευταίων **120 ετών**. Και επειδή ποτέ δεν σταμάτησε να μας στέλλει ασκήσεις από όλα τα σημεία της Υδρογείου, προ ημερών μας έστειλε και την δική του οπτική για την κατασκευή της *χρυσής αναλογίας ή χρυσής τομής ή χρυσός μέσος όρος ή θεϊκής αναλογία* (κοίτα διπλανό σχήμα).



4ο θέμα. ***Ποια είναι η "εικασία του Collatz";***

προλεγόμενα.

Lothar Collatz Γερμανός μαθηματικός, (6/07/1910 1910 – 26/09/1990). Η ***"εικασία του Κόλατζ"*** (*Collatz conjecture*) είναι μια εικασία στα Μαθηματικά η οποία πήρε την ονομασία της από τον Λόθαρ Κόλατζ (*Lothar Collatz*), ο οποίος την πρότεινε για πρώτη φορά το1937 Η εικασία είναι επίσης γνωστή ως: ***"εικασία 3n+1"***, ***"εικασία Ούλαμ"*** (από τον Στάνισλαβ Ούλαμ, *Stanislaw Ulam*), ή ***"πρόβλημα Κακουτάνι"*** (από τον Σιζούο Κακουτάνι, *Shizuo Kakutani*), ή ***"εικασία Θουέιτς"*** (από τον Μπράϊαν Θουέϊτς, *Bryan Thwaites*), ή ***"αλγόριθμος του Χάσε"*** (από τον Χέλμουτ Χάσε, *Helmut Hasse*), ή ***"πρόβλημα των Συρακουσών"***. Η ακολουθία των αριθμών που εμπλέκονται αναφέρεται ως ***"ακολουθία χαλαζιού"*** (επειδή οι τιμές συνήθως υπόκεινται σε πολλαπλές καταβάσεις και αναβάσεις σαν τους κόκκους του χαλαζιού σε ένα σύννεφο, είτε ως ***"θαυμαστοί αριθμοί"***.

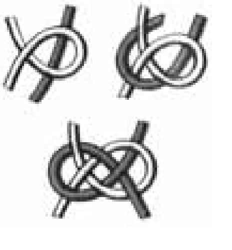
«Η εικασία συνοψίζεται ως εξής. Πάρτε οποιοδήποτε θετικό ακέραιο *n*. Αν ο *n* είναι άρτιος, διαιρέστε τον δια το 2, για να πάρετε το *n*/2. Εάν ο *n* είναι περιττός, πολλαπλασιάστε τον επί 3 και προσθέστε 1 για να πάρετε το 3*n*+1. Επαναλάβετε τη διαδικασία αυτή, επ' αόριστον (η διαδικασία έχει χαρακτηριστεί ως *"μισό" ή "τριπλό συν ένα"*, "Half Or Triple Plus One),. Κατά την εικασία, από όποιο αριθμό κι αν ξεκινήσετε, θα καταλήξετε πάντα στον αριθμό 1.

5ο θέμα. ***Μαθηματικά και Τεχνητή Νοημοσύνη (του Λάκη Ιγνατιάδη)***

προλεγόμενα. ο σημαντικός φίλος Λάκης Ιγνατιάδης, διευθυντής της έγκυρης ιστοσελίδας "Επιστολή Νέων της ΣΤΑΓΟΝΑ", δημοσίευσε ένα σημείωμα με τίτλο: ***«Για πρώτη φορά μαθηματικοί χρησιμοποίησαν τεχνητή νοημοσύνη για να αποδείξουν θεωρήματα»*** Για πρώτη φορά στην ιστορία των Μαθηματικών επιστήμονες των υπολογιστών και μαθηματικοί, από τη Βρετανία και την Αυστραλία, χρησιμοποίησαν την Τεχνητή Νοημοσύνη για να τους βοηθήσει να αποδείξουν ή να προτείνουν νέα μαθηματικά θεωρήματα στα πολύπλοκα πεδία της θεωρίας κόμβων και της θεωρίας αναπαραστάσεων.

«Προς έκπληξη των μαθηματικών, η Τεχνητή Νοημοσύνη έκανε προτάσεις που μετά οι ίδιοι εξέτασαν και επιβεβαίωσαν. Αυτό δείχνει ότι η μηχανική μάθηση μπορεί να δώσει χείρα βοηθείας ακόμη και σε **θέματα αιχμής** της μαθηματικής έρευνας. Ερευνητές των πανεπιστημίων του Σίδνεϊ και της Οξφόρδης, καθώς και της θυγατρικής τεχνητής νοημοσύνης **DeepMind** της Google, οι οποίοι έκαναν τη σχετική δημοσίευση στο περιοδικό "Nature", εξέφρασαν την αισιοδοξία τους ότι ανοίγει πλέον ο δρόμος για μια σε βάθος συνεργασία ανάμεσα στα πεδία των «καθαρών» Μαθηματικών και της Τεχνητής Νοημοσύνης, κάτι που αναμένεται να φέρει εντυπωσιακά αποτελέσματα. Η Τεχνητή Νοημοσύνη, όπως δείχνει η νέα έρευνα, έχει ωριμάσει τόσο, ώστε μπορεί πλέον να αξιοποιηθεί για να βοηθήσει στη μαθηματική έρευνα εκείνη που - όπως η τέχνη - βασίζεται συνήθως **στη διαίσθηση** και **στη δημιουργικότητα.** Όπως ανέφερε ο καθηγητής Τζόρντι Ουίλιαμσον του Ινστιτούτου Μαθηματικής Έρευνας του Σίδνεϊ, ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς στον κόσμο, «τα προβλήματα στα Μαθηματικά θεωρούνται ευρέως από τα πιο δύσκολα που υπάρχουν γενικά. Ενώ οι μαθηματικοί έχουν χρησιμοποιήσει τη **μηχανική μάθηση** για να τους βοηθήσει στην ανάλυση πολύπλοκων δεδομένων, είναι η πρώτη φορά που έχουμε χρησιμοποιήσει τους υπολογιστές για να μας βοηθήσουν να κάνουμε μαθηματικές εικασίες ή να προτείνουμε πιθανές "γραμμές επίθεσης" σε αναπόδεικτες έως τώρα ιδέες στα Μαθηματικά».

Ο Ουίλιαμσον, ο οποίος θεωρείται κορυφή διεθνώς στη θεωρία των αναπαραστάσεων, που διερευνά τους χώρους ανώτερων διαστάσεων με τη χρήση **γραμμικής άλγεβρας**, χρησιμοποίησε την τεχνητή νοημοσύνη της **DeepMind** για να φθάσει κοντά στην απόδειξη μιας παλαιάς εικασίας σχετικά με τα πολυώνυμα **Kazhdan-Lusztig**, που έχει μείνει άλυτη εδώ και 40 χρόνια και η οποία αφορά τη βαθιά συμμετρία στην άλγεβρα των ανώτερων διαστάσεων.



Οι καθηγητές της Οξφόρδης Μαρκ Λάκεμπι και Άντρας Γιούχαστς, με τη βοήθεια της Τεχνητής Νοημοσύνης, ανακάλυψαν μια απρόσμενη σύνδεση ανάμεσα στις αλγεβρικές και γεωμετρικές σταθερές κόμβων, ανακαλύπτοντας έτσι ένα τελείως νέο μαθηματικό θεώρημα. Η **θεωρία των κόμβων** έχει πολλαπλές εφαρμογές στις φυσικές και άλλες επιστήμες. Όπως είπε ο Λάκεμπι, «είναι γοητευτικό να χρησιμοποιεί κανείς τη μηχανική μάθηση για να ανακαλύπτει νέες και αναπάντεχες διασυνδέσεις ανάμεσα σε διαφορές περιοχές των Μαθηματικών. Η εργασία που έγινε στην Οξφόρδη και στο Σίδνεϊ, σε συνεργασία με τη DeepMind, αποδεικνύει ότι η μηχανική μάθηση μπορεί να αποτελέσει ένα πραγματικά χρήσιμο εργαλείο στη μαθηματική έρευνα».

(πληροφορίες από Nature και ΑΠΕ-ΜΠΕ)

Μια σημαντική είδηση

Και μια ακόμα εξαιρετικά ενδιαφέρουσα είδηση από τον κόσμο των υπολογιστών και της τεχνητής νοημοσύνης, από αυτές τις ειδήσεις που είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα αλλάξουν βαθιά τον κόσμο μας τις επόμενες δεκαετίες: Τα πρώτα ζωντανά ρομπότ στον κόσμο μπορούν πλέον να αναπαράγονται. Τα xenobots, έχουν δημιουργηθεί από τα βλαστοκύτταρα του αφρικανικού βατράχου Xenopus laevis»

V. ειδήσεις και...ειδήσεις

1. *Το μεγαλύτερο μουσείο Αστρονομίας στον κόσμο «δεν έχει ευθείες γραμμές ούτε ορθές γωνίες»*

Η Ennead Architects ολοκλήρωσε την κατασκευή του μεγαλύτερου μουσείου Αστρονομίας στον κόσμο, μέσα στην «πράσινη ζώνη» της Σαγκάης στην Κίνα, όπως μεταδίδουν οι Global Times.

Το εμβληματικό κτηριακό συγκρότημα «χωρίς ευθείες γραμμές ή ορθές γωνίες» θα ανοίξει τις πύλες του στις 18 Ιουλίου, απηχώντας την γεωμετρία του Σύμπαντος και τη δυναμική ενεργειών των ουράνιων κινήσεων.

«Δημιουργώντας αυτό το κτήριο, θέλαμε να οικοδομήσουμε έναν χώρο του οποίου η ιδρυματική αποστολή θα ήταν πλήρως ενσωματωμένη στην αρχιτεκτονική του, ακολουθώντας την φόρμα ορισμένων εκ των θεμελιωδών αρχών που διαμορφώνουν το Σύμπαν», λέει ο Thomas J. Wong, της Ennead Architects.

«Η μεγάλη ιδέα του μουσείου αστρονομίας της Σαγκάης ήταν να ενσωματώσει μια δομική εμπειρία του αντικειμένου στο σχεδιασμό, και να την αποδώσει πριν καν μπείτε στο κτίριο. Και στο τέλος της επίσκεψής σας, υπάρχει αυτή η στιγμή κλιμάκωσης απευθείας με τον ουρανό» καθώς πλαισιώνεται από το μουσείο.

2. *Λύση του προβλήματος προσομοίωσης*

Από τον φίλο της στήλης Χρήστο Κυριαζή, δανειζόμαστε μια ευφυέστατη ιδέα για να...λύσουμε το πρόβλημα της *προσομοίωσης διαγωνίσματος.*

Ο καλός μας φίλος, μας δάνεισε ένα στιγμιότυπο από την κινηματογραφική κωμωδία «*Ο μπακαλόγατος*», με τον μεγάλο Έλληνα κωμικό, τον αείμνηστο Κώστα Χατζηχρήστο. Σ' αυτό το στιγμιότυπο ο Χρ. Κυριαζής, παράφρασε τα λόγια του Χατζηχρήστου, για να εξυπηρετείτε ο σκοπός του σημειώματός μας

3. *Αθάνατη Εθνεγερσία (αυτό, το ξέρατε;)*

Η πρώτη χώρα που αναγνώρισε επίσημα την επανάσταση των Ελλήνων και τη διεκδίκηση της ελευθερίας τους, ήταν η Αϊτή**,** που τότε ονομαζόταν στα ελληνικά Χαΐτιον. Συμβολικά, η Αϊτή έστειλε στους Έλληνες 45 τόνους καφέ προς πώληση, για να αγοραστούν καριοφίλια και άλλα πολεμοφόδια, αλλά και 100 Αϊτινούς εθελοντές, που πέθαναν όλοι κατά τη διάρκεια του ταξιδιού προς την Ελλάδα

4. *Μια σοφή συμβουλή*

«*Πρέπει πάντα να κάνουμε αντιστροφή των πραγμάτων. Αν η λύση ενός προβλήματος φαίνεται να είναι απελπιστικά περίπλοκη, δοκιμάστε να αντιστρέψετε το πρόβλημα, βάζοντας το ζητούμενο στη θέση του δεδομένου και αντίστροφα*». Αυτά τα λόγια, ως συμβουλή, από τον μεγάλο Γερμανό μαθηματικό, Καρλ Γκούσταβ Γιάκομπ Γιακόμπι (Karl Gustav Jacob Jacobi, 10/12/1804 – 18/2/1851), όταν του ζήτησαν να αποκαλύψει το μυστικό των ανακαλύψεων του. (το δανειστήκαμε από τον φίλο της στήλης, Θανάση Κοπάδη)

5. *Η ΕΜΕ διοργάνωσε διαδικτυακή ημερίδα*

Στις 27/11/2021 η ΕΜΕ διοργάνωσε διαδικτυακή ημερίδα με ομιλητές:

• Χριστίνα Φίλη, Καθηγήτρια ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ:«Η Βιέννη ως προεπαναστατικό εκδοτικό κέντρο μαθηματικών πραγματειών», • Πέτρος Στεφανέας, Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ: «Αυγούστα Άντα: η μαθηματικός κόρη του λόρδου Βύρωνα», • Μιχάλης Λάμπρου, Καθηγητής Πανεπιστημίου Κρήτης: «Οι λόγιοι και τα βιβλία Μαθηματικών την εποχή της Τουρκοκρατίας», • Μαθητές 14ου ΓΕΛ Λάρισας: «Τα μαθηματικά κατά τους προεπαναστατικούς χρόνους, Το έργο του Λαρισαίου διδασκάλου Κωνσταντίνου Κούμα»

VI. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε";

από τον σημαντικό ερευνητή Γεωμέτρη Ανδρέα Χατζηπολάκη, λάβαμε (2019-12-15), ένα σημείωμα του Γιώργου Λεκάκη, με φωτοτυπία του εξώφυλλου, του βιβλίου του Νικηφόρου Θεοτόκη, από το οποίο πληροφορούμαστε ότι:

«*Το βιβλίο του Κερκυραίου φυσικού, λόγιου και θεολόγου, αρχιεπισκόπου τ. Αστραχάν (και νοτίων επαρχιών της Ρωσικής Αυτοκρατορίας), και Διδάσκαλου του Γένους,* ***Νικηφόρου ΘΕΟΤΟΚΗ*** *(Κέρκυρα 1731 - Μόσχα 1800) με τον γενικό τίτλο* ***«Στοιχείων μαθηματικῶν, ἐκ παλαιῶν καί νεωτέρων συνερανισθέντων ὑπό τοῦ Πανιερωτάτου Ἀρχιεπισκόπου πρώην Ἀστραχανίου κυρίου Νικηφόρου, [...] περιέχων τήν γεωμετρίαν καί τήν ἀριθμητικήν [– περιέχων τά ἀρχιμήδια θεωρήματα, τήν ἐπίπεδον τριγωνομετρίαν καί τάς τοῦ κώνου τομάς]»***, *εξεδόθη στην* ***Μόσχα****, από τους Riediger & Claudius, το 1798-1799*».

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Γ. Τσαπακίδης- Αγρίνιο

«Είναι δυνατόν εσύ, ένα Έλληνας, να μην κατέχεις τέλεια τη Γεωμετρία;» ρώτησε ο Shing-Tung You (καθηγητής του Harvard), τον τότε φοιτητή, Δ.Χριστοδούλου.
…«Και από τότε άρχισα να βλέπω διαφορετικά τη δομή του Κόσμου»…

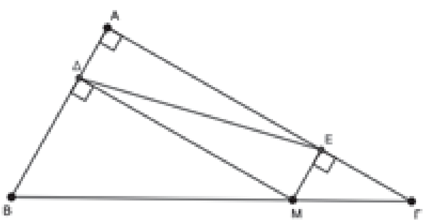
Δ. Χριστοδούλου

Τα προβλήματα που θα μελετήσουμε στο άρθρο αυτό, αναφέρονται στις ιδιότητες των ευθύγραμμων σχημάτων που, ουσιαστικά, μέσω των σχέσεων μεταξύ στοιχείων των τριγώνων καταλήγουν στη σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών.

Έτσι, μαζί με την ανάλυση της πορείας προς τη λύση κάθε προβλήματος, θα γίνει **επανάληψη** και **εμβάθυνση** της αντίστοιχης θεωρίας, όχι με τον καθιερωμένο **γραμμικό τρόπο** των διδακτικών βιβλίων, αλλά μέσα από την **αναγκαιότητα** που επιβάλλουν οι λύσεις των προβλημάτων.

Πρόβλημα 1: Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Αν $Μ\Delta \perp AB$ και $ΜΕ \perp ΑΓ$, τότε για ποια θέση του Μ πάνω στη ΒΓ το τμήμα ΔΕ γίνεται ελάχιστο;

Σκέψεις: Πότε ένα μεταβλητό μέγεθος x έχει ελάχιστο;



- Όταν $x \geq \alpha$, όπου α σταθερά και για κάποια τιμή του x ισχύει $x=\alpha$.

Επομένως τί αρκεί να δείξουμε;

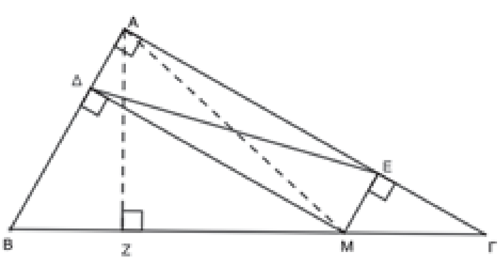
- Ότι ΔΕ ≥ γνωστό τμήμα του σχήματος.

Ποια ιδιότητα έχει το ΔΕ;

- Είναι διαγώνιος του ορθογωνίου ΑΔΜΕ.

Ποιες είναι οι ιδιότητες των διαγώνιων του ορθογωνίου;

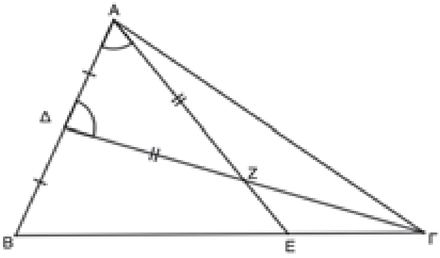
- Είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα ΔΕ=ΑΜ.



Έτσι το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο: Ποιο είναι το μικρότερο από τα τμήματα που συνδέουν την κορυφή Α του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με τα σημεία της υποτείνουσας ΒΓ; - Μα το $ΑΖ \perp ΒΓ$.

Λύση: Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΔΜΕ είναι ΔΕ=ΑΜ (1). Φέρνουμε $ΑΖ \perp ΒΓ$, οπότε $ΑΜ \geq ΑΖ$ (2) (πλάγια - κάθετη στη ΒΓ).
$(1), (2) \Rightarrow \Delta E \geq AZ \Rightarrow min\Delta E = AZ$, που ισχύει όταν το Μ ταυτιστεί με την προβολή του Α στη ΒΓ.

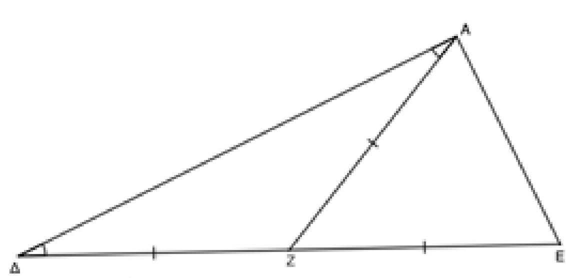
Πρόβλημα 2: Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, Ε το σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $ΒΕ=\frac{2}{3}ΒΓ$ και έστω Ζ το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΔ. Αν $\widehat{Α\DeltaΓ}=\widehat{\DeltaΑΕ}$, τότε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$;



Σκέψεις: Επειδή δεν δίνεται το μέτρο κάποιας γωνίας του σχήματος, ώστε να συγκριθεί με τη γωνία $\hat{A}$, πόσες μοίρες θα περιμέναμε να είναι η $\hat{A}$;

- 90° ή 60° ή 45° ή 30°.

Στο τρίγωνο ΑΔΓ, προφανώς, είναι ΑΖ=ΖΔ. Τί μας θυμίζει;



$\hat{A}=90^\circ \Leftrightarrow AZ=\Delta Z=ZE$

- Τη διάμεσο ορθογωνίου τριγώνου, που χωρίζει την υποτείνουσα σε δύο τμήματα ίσα με αυτήν.

Επομένως, τί πρέπει να δείξουμε; - Ότι το Ζ είναι το μέσο του ΔΓ.

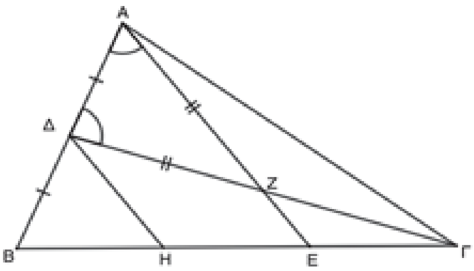
Πώς θα δείξουμε ότι το Μ είναι μέσο του ΔΓ; Χρησιμοποιήσαμε όλα τα δεδομένα του προβλήματος;

- Όχι. Πρώτα απ' όλα το ότι το Δ είναι μέσο της ΑΔ και μετά ότι $\mathrm{BE}=\frac{2}{3}\mathrm{B\Gamma}$.

Πώς θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα αυτά; - Για να είναι το Ζ μέσο του ΔΓ, θα έπρεπε το Ε να είναι μέσο πλευράς τριγώνου του οποίου η τρίτη πλευρά να είναι παράλληλη στη ΖΕ.

Με δεδομένο ότι $\mathrm{E\Gamma}=\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}$, ποια είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου, του οποίου οι δύο άλλες είναι τα σημεία Δ και Γ; - Το μέσο του ΒΕ.

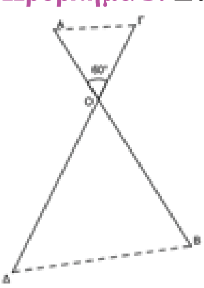
Λύση: Έστω Η το μέσο του τμήματος ΒΕ. Είναι $\mathrm{BH}=\mathrm{HE}=\mathrm{E\Gamma}=\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}$, έτσι:



- Στο τρίγωνο ΑΒΕ το ΔΗ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, άρα ΔΗ// ΑΕ,
- Στο τρίγωνο ΔΗΓ το ΕΖ περνάει από το μέσο Ε της πλευράς ΓΗ και είναι παράλληλο προς τη ΔΗ, άρα περνάει και από το μέσο Ζ της ΓΔ.

Το τρίγωνο ΖΑΔ είναι ισοσκελές από την υπόθεση, έτσι ΑΖ=ΖΔ=ΖΓ, επομένως στο τρίγωνο ΑΔΓ το ΑΖ είναι διάμεσος, που ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς του, γι' αυτό το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Α, άρα $\hat{\mathrm{A}}=90^{\circ}$.

Πρόβλημα 3: Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ=ΓΔ=α και $\widehat{\mathrm{AO\Gamma}}=60^{\circ}$. Δείξτε ότι $A\Gamma+B\Delta\geq\alpha$.



Σκέψεις: Τί είναι το ζητούμενο;

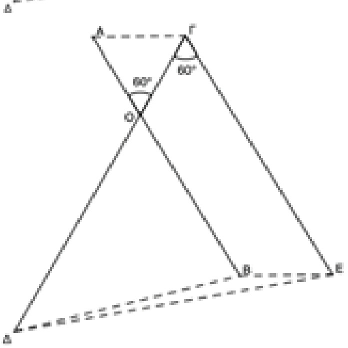
- Ανισότητα μεταξύ τριών ευθύγραμμων τμημάτων.

Τί μας θυμίζει;

- Την τριγωνική ανισότητα.

Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ και α=ΑΒ (ή α=ΓΔ) δεν είναι πλευρές τριγώνου. Μπορούν να γίνουν; Αν ναι, πώς;

- Δύο από αυτά, τα ΑΓ και ΔΒ να γίνουν διαδοχικά και τα δύο άλλα άκρα τους να ορίζουν τμήμα ίσο με το α. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με παράλληλη μεταφορά.



Λύση: Φέρνουμε τμήμα $BE \overset{\parallel}{=} A\Gamma$, οπότε σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ, άρα ΓΕ=ΑΒ=ΓΔ=α. Είναι $\widehat{\Delta\Gamma\mathrm{E}}=\widehat{\mathrm{AO\Gamma}}=60^{\circ}$, επομένως το ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισόπλευρο, άρα ΔΕ=ΓΕ=α.

- Στην περίπτωση που τα Δ, Β, Ε δεν είναι συνευθειακά, από το τρίγωνο ΒΔΕ έχουμε: $\mathrm{BE}+\mathrm{B\Delta}>\Delta\mathrm{E}\Leftrightarrow\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}>\alpha$
- Αν τα Δ, Β, Ε είναι συνευθειακά είναι: ΑΓ+ΒΔ=ΒΕ+ΒΔ=ΔΕ=α.

Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει: $A\Gamma+B\Delta\geq\alpha$.

Πρόβλημα 4: Αν ΑΔ και ΑΕ είναι οι αποστάσεις της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ από τις διχοτόμους των εξωτερικών του γωνιών $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, δείξτε ότι ΔΕ//ΒΓ και ΔΕ=ημιπερίμετρος ΑΒΓ.

Σκέψεις: Το πρόβλημα αναφέρεται σε διχοτόμους γωνιών. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα της διχοτόμου γωνίας;

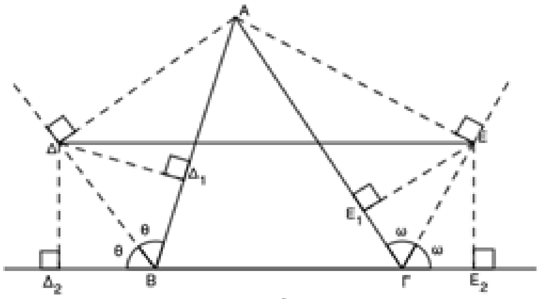
- Κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Η ιδιότητα αυτή οδηγεί στη λύση του προβλήματος;

- Ας το δοκιμάσουμε. Έστω $\Delta\Delta_1$, $\Delta\Delta_2$ οι αποστάσεις του Δ από τις ευθείες ΑΒ και ΒΓ και $\mathrm{EE_1}$, $\mathrm{EE_2}$ οι αποστάσεις του Ε από τις ΑΓ και ΒΓ. Για να είναι η ΔΕ παράλληλη στη ΒΓ θα πρέπει $\Delta\Delta_2=\mathrm{EE_2}\Leftrightarrow\Delta\Delta_1=\mathrm{EE_1}$, αλλά δεν υπάρχουν ίσα τρίγωνα, ούτε παραλληλόγραμμα από τα οποία να προκύπτει μια από τις προηγούμενες ισότητες.

Με ποιον άλλο τρόπο θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι ΔΕ//ΒΓ;

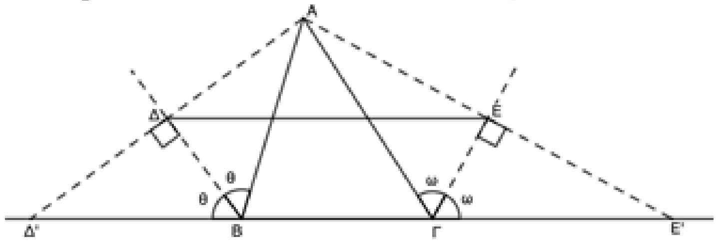
- Αν δείχναμε ότι το ΔΕ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου, θα ήταν παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης του πλευράς.



Τα Δ και Ε στο σχήμα δεν είναι μέσα πλευρών τριγώνου. Πώς θα μπορούσαν να γίνουν;

- Παρατηρούμε ότι το ΒΔ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{Β}$ και κάθετη στην ΑΔ, οπότε θα είναι και διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ΄, όπου Δ΄ η τομή των ευθειών ΑΔ και ΒΓ.

Λύση: Ονομάζουμε Δ΄ και Ε΄ τα σημεία τομής των ΑΔ και ΑΕ με τη ΒΓ αντίστοιχα. Το τρίγωνο ΒΑΔ΄ είναι ισοσκελές, γιατί έχει το ΒΔ ύψος και διχοτόμο, γι' αυτό ΒΑ=ΒΔ΄ (1) και το Δ είναι μέσο του ΑΔ΄. Όμοια, ΓΑ=ΓΕ΄ (2) και το Ε είναι μέσο του ΑΕ΄. Στο τρίγωνο ΑΔ΄Ε΄ το ΔΕ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, άρα:

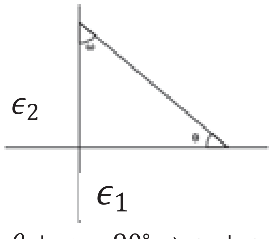


- $ΔΕ//Δ'Ε' \Rightarrow ΔΕ//ΒΓ$
- $ΔΕ = \dfrac{Δ'Ε'}{2} = \dfrac{Δ'Β + ΒΓ + ΓΕ'}{2} = \dfrac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ}{2}$ (από τις (1) και (2))=ημιπερίμετρος ΑΒΓ.

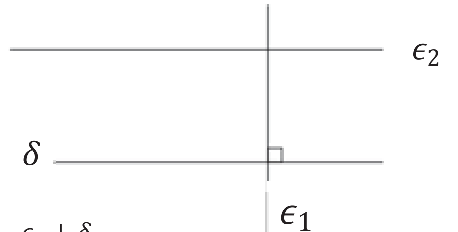
Πρόβλημα 5: Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ και ΑΔ το ύψος του. Αν Ε είναι το συμμετρικό του Α ως προς το Β και Ζ το μέσο του ΔΓ, δείξτε ότι οι ευθείες ΕΔ και ΑΖ είναι κάθετες.

Σκέψεις: Πώς αποδεικνύουμε ότι δύο ευθείες είναι κάθετες με τη μέχρι τώρα γνωστή ύλη (μέχρι και τα παραλληλόγραμμα) της Α΄ Λυκείου;

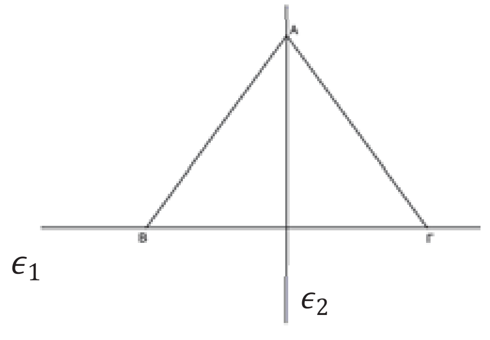
- Με μία από τις παρακάτω μεθόδους:



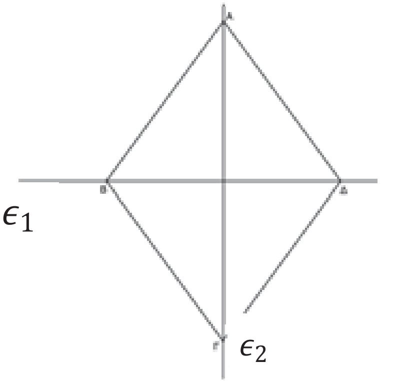
$\theta + \omega = 90^\circ \Rightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$



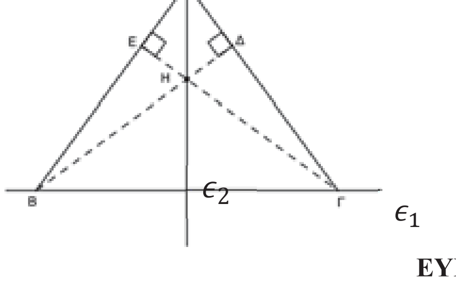
$\begin{cases} \epsilon_1 \perp \delta \\ \epsilon_2 // \delta \end{cases} \Rightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$



ϵ_2 φορέας διχοτόμου και διαμέσου τριγώνου ΑΒΓ$\Rightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$.

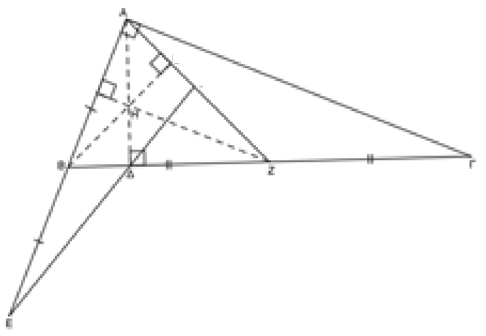


ΑΒΓΔ ρόμβος$\Rightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$.



Αν Η το σημείο τομής των υψών ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε η ευθεία ϵ_2 που περιέχει τα Α και Η είναι κάθετη στην ϵ_1. Ταιριάζει κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους στο πρόβλημα μας;

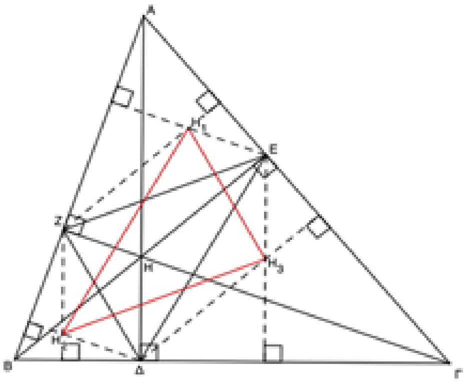
- Στα δεδομένα του προβλήματος υπάρχουν:



- δύο μέσα ευθύγραμμων τμημάτων (ΑΒ=ΒΕ και ΔΖ=ΖΓ), αλλά μέσα που συνδέονται με μέσα οδηγούν σε παράλληλες
- δύο ζεύγη κάθετων ευθειών ($AB \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$), έτσι φαίνεται να ταιριάζει η δεύτερη μέθοδος.

Λύση: Έστω Η το μέσο του ύψους ΑΔ. Στο τρίγωνο ΑΔΓ το ΖΗ συνδέει μέσα δύο πλευρών, άρα ΖΗ//ΑΓ, αλλά $A\Gamma \perp AB$, επομένως $ZH \perp AB$, έτσι το Η είναι η τομή δύο υψών του τριγώνου ΑΒΖ (των ΑΔ και ΖΗ), γι' αυτό είναι το ορθόκεντρό του, άρα το ΒΗ είναι το τρίτο ύψος του ΑΒΖ, γι' αυτό $BH \perp AZ$ (1). Στο τρίγωνο ΑΕΔ το ΒΗ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, άρα ΒΗ//ΕΔ και λόγω της (1) έχουμε $E\Delta \perp AZ$.

Πρόβλημα 6: Έστω ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Αν H_1, H_2, H_3 είναι τα ορθόκεντρα των τριγώνων ΑΕΖ, ΒΖΔ και ΓΔΕ, δείξτε ότι τα τρίγωνα ΔΕΖ και $H_1H_2H_3$ είναι ίσα.



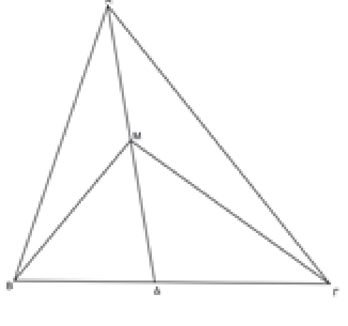
Σκέψεις: Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;

- Όταν ισχύει κάποιο από τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων.

Όποιο κριτήριο ισότητας και αν ισχύει, τουλάχιστον μια πλευρά του ενός τριγώνου πρέπει να είναι ίση με μια πλευρά του άλλου τριγώνου, πώς μπορούμε να το αποδείξουμε;

- Στο σχήμα κυριαρχούν οι κάθετες στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως υπάρχουν παράλληλες ευθείες, άρα παραλληλόγραμμα και άρα ίσα τμήματα.

Λύση: Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Είναι $\begin{cases} H\Delta \perp B\Gamma \\ EH_3 \perp B\Gamma \end{cases} \Rightarrow H\Delta // EH_3$ και $\begin{cases} HE \perp A\Gamma \\ \Delta H_3 \perp A\Gamma \end{cases} \Rightarrow HE // \Delta H_3$, άρα το $H\Delta H_3E$ είναι παραλληλόγραμμο, γι' αυτό $EH_3 \overset{//}{=} H\Delta$ (1). Όμοια, $ZH_2 \overset{//}{=} H\Delta$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε ότι το EH_3H_2Z είναι παραλληλόγραμμο, άρα $H_2H_3 = ZE$. Για τους ίδιους λόγους είναι και $H_1H_3 = Z\Delta$ και $H_2H_1 = \Delta E$, οπότε τα τρίγωνα $H_1H_2H_3$ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, γι' αυτό είναι ίσα.



Πρόβλημα 7: Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ<ΑΓ και το Μ είναι σημείο της διχοτόμου του ΑΔ. Δείξτε ότι ΜΒ<ΜΓ.

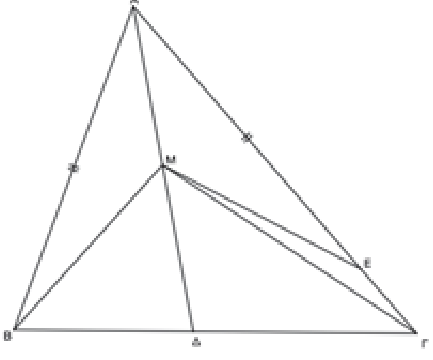
Σκέψεις: Πώς συγκρίνουμε δύο πλευρές τριγώνου;

- Συγκρίνουμε τις απέναντι των πλευρών γωνίες του τριγώνου, έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{MB\Gamma} > \widehat{M\Gamma B}$.

Ποια πρόταση έχει ως συμπέρασμα ανισότητα μεταξύ γωνιών τριγώνου;

- Μία εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική γωνία του τριγώνου.

Πώς μία από τις γωνίες $\widehat{MB\Gamma}$ και $\widehat{M\Gamma B}$ μπορεί να γίνει εξωτερική γωνία τριγώνου του οποίου μία γωνία να είναι η άλλη;



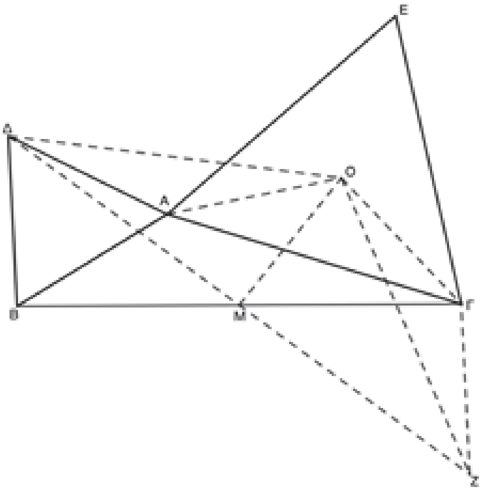
- Δεν χρησιμοποιήσαμε όλα τα δεδομένα του προβλήματος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι άξονας συμμετρίας της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$, έτσι αν θεωρήσουμε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΜ ως προς την ΑΔ, θα έχουμε το ζητούμενο.

Λύση: Επειδή ΑΒ<ΑΓ, υπάρχει σημείο Ε της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε ΑΕ=ΑΒ, οπότε τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΕ είναι ίσα (έχουν ΑΒ=ΑΕ, ΑΜ κοινή και $\widehat{BAM} = \widehat{MAE}$), άρα $\widehat{AMB} = \widehat{AME}$ (1) και ΜΒ=ΜΕ (2). Η $\widehat{ME\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΜΕ, έτσι $\widehat{ME\Gamma} > \widehat{AME} = \widehat{AMB}$ (από την (1))$>\widehat{M\Delta B}$ (η $\widehat{AMB}$

είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΜΒΔ)> $\widehat{ΔΓΑ}$ (η $\widehat{ΑΔΒ}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΔΓ)> $\widehat{ΕΓΜ}$ (η $\widehat{ΕΓΜ}$ είναι εσωτερική της $\widehat{ΔΓΑ}$), έτσι στο τρίγωνο ΜΕΓ έχουμε $\widehat{ΜΕΓ} > \widehat{ΕΓΜ}$, άρα ΜΓ>ΜΕ (απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του) = ΜΒ (από τη (2)).

Πρόβλημα 8: Έξω από το τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ. Αν Ο είναι το κέντρο του ΑΕΓ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ, δείξτε ότι το τρίγωνο ΔΜΟ είναι ορθογώνιο στο Μ.

Σκέψεις: Το κομβικό σημείο του προβλήματος είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, γιατί πρέπει να είναι η κορυφή της ορθής γωνίας. Όπως είδαμε σε προηγούμενο πρόβλημα, μέσο τμήματος συνδέεται με μέσο άλλου ευθύγραμμου τμήματος, για να εμφανιστούν ιδιότητες του σχήματος, που ενδεχομένως να οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Όμως δεν υπάρχει άλλο μέσο στο σχήμα.



Τί κάνουμε στην περίπτωση αυτή;

- Προφανώς βασικά σημεία του προβλήματος μας είναι τα Δ και Ο (αφού θέλουμε να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΔΜΟ είναι ορθογώνιο στο Μ). Μια κλασική μέθοδος είναι να συνδέσουμε ένα βασικό σημείο του προβλήματος με δεδομένο μέσο τμήματος και να προεκτείνουμε κατά τμήμα ίσο, δημιουργώντας έτσι ένα παραλληλόγραμμο, για να εκμεταλλευτούμε τις ίσες πλευρές και γωνίες του.

Λύση: Στην προέκταση του ΔΜ παίρνουμε ΜΖ=ΔΜ, οπότε σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΔΒΖΓ, έτσι ΓΖ=ΔΒ=ΔΑ(1) και $\widehat{ΒΓΖ} = \widehat{ΓΒΔ} = 60^o + \hat{Β}$ (2). Το Ο είναι το κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου ΕΑΣ, άρα ΟΑ=ΟΓ (3) και $\widehat{ΟΑΓ} = \widehat{ΟΓΑ} = 30^o$ (4). Είναι $\widehat{ΟΓΖ} = \widehat{ΟΓΑ} + \widehat{ΑΓΒ} + \widehat{ΒΓΖ} = 30^\circ + \hat{Γ} + 60^o + \hat{Β}$ (από (2), (4)) $=90^o + \hat{Β} + \hat{Γ}$ (5).

$$\widehat{ΔΑΟ} = 360^o - \widehat{ΔΑΒ} - \hat{Α} - \widehat{ΟΑΓ} = 360^o - 60^o - \hat{Α} - 30^o = 270^o - \hat{Α} = 90^o + 180^o - \hat{Α} = 90^o + \hat{Β} + \hat{Γ} \quad (6)$$

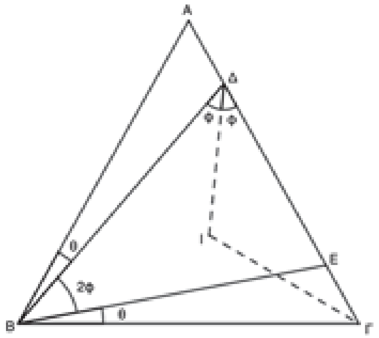
Από τις (5) και (6) παίρνουμε $\widehat{ΟΓΖ} = \widehat{ΔΑΟ}$, ΓΖ=ΔΑ (είναι η (1)) και ΟΓ=ΟΑ (είναι η (3)), άρα τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΟΓΖ είναι ίσα, έτσι ΟΔ=ΟΖ, δηλαδή το τρίγωνο ΟΔΖ είναι ισοσκελές και η διάμεσός του ΟΜ θα είνα και ύψος, άρα $\widehat{ΟΜΔ} = 90^o$.

Πρόβλημα 9: Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα σημεία Δ, Ε της πλευράς ΑΓ με τη σειρά Α, Δ, Ε, Γ τέτοια, ώστε ΕΒ=ΕΔ και $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΓΒΕ}$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΔΒΓ, τότε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{ΔΙΓ}$;

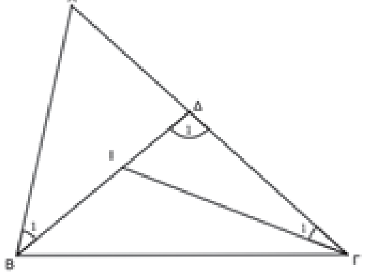
Σκέψεις: Γνωρίζουμε κάποια σχέση μεταξύ των γωνιών τριγώνου και της γωνίας που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο γωνιών του;

- Έστω ΙΒ και ΙΓ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}, \hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ (Σχήμα 2) και έστω ότι η **ευθεία ΒΙ τέμνει την ΑΓ** στο Δ. Η $\widehat{ΒΙΓ}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΙΔΓ,
 Άρα $\widehat{ΒΙΓ} = \hat{Δ}_1 + \hat{Γ}_1 = \hat{Α}_1 + \hat{Β}_1 + \hat{Γ}_1$ (γιατί η $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική γωνία του ΑΒΔ)=

$$\frac{\hat{Α}}{2} + \frac{\hat{Β}}{2} + \frac{\hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{Α}}{2} = \frac{\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{Α}}{2} = \frac{180^o}{2} + \frac{\hat{Α}}{2} = 90^o + \frac{\hat{Α}}{2}.$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Έτσι στο Σχήμα 1: $\widehat{ΔΙΓ} = \dfrac{\widehat{ΔΒΓ}}{2} = \dfrac{\widehat{ΔΒΕ} + θ}{2}$.

Υπολογίζεται η $\widehat{ΔΒΕ}$;

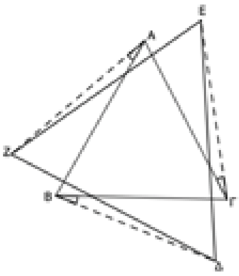
- Είναι γωνία του ισοσκελούς τριγώνου ΕΔΒ και $\widehat{ΔΒΕ} = \hat{Β} - 2θ$.

Λύση: Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΔ είναι $\widehat{ΕΒΔ} = \widehat{ΕΔΒ} = 2φ$. Η γωνία $\widehat{ΒΔΕ}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔΑΒ, άρα $\widehat{ΒΔΕ} = \hat{Α} + \widehat{ΔΒΑ} \Leftrightarrow 2φ = \hat{Α} + θ$

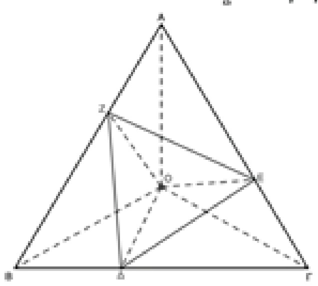
(1). Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^{o} \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{B}=180^{o}$ (αφού $\hat{B}=\hat{\Gamma}$) $\Leftrightarrow \hat{A}=180^{o}-2\hat{B}$ (2). Από (1), (2) έχουμε $2\phi=180^{o}-2\hat{B}+\theta=180^{o}-2(2\phi+2\theta)+\theta=180^{o}-4\phi-3\theta$, $2\phi=180^{o}-4\phi-3\theta \Leftrightarrow 6\phi+3\theta=180^{o} \Leftrightarrow 2\phi+\theta=60^{o} \Leftrightarrow \widehat{\Delta B\Gamma}=60^{o}$ (3).

ΙΔ και ΙΓ διχοτόμοι του τριγώνου ΒΔΓ άρα $\widehat{\Delta I\Gamma}=90^{o}+\dfrac{\widehat{\Delta B\Gamma}}{2}=90^{o}+\dfrac{60^{o}}{2}$ (από την (3))=120°.

Πρόβλημα 10: Αν κάθε μία από τις κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου ΔΕΖ είναι σημεία μίας πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ (δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ), δείξτε ότι τα ισόπλευρα τρίγωνα έχουν το ίδιο κέντρο (κέντρο ενός ισόπλευρου τριγώνου λέμε το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του, που είναι συγχρόνως ύψη, διάμεσοι και διχοτόμοι του ισόπλευρου τριγώνου).



Εφαρμογή: Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, όπως στο διπλανό σχήμα. Αν $\widehat{BAZ}=\widehat{\Gamma B\Delta}=\widehat{A\Gamma E}$, δείξτε ότι τα κέντρα των δύο ισόπλευρων τριγώνων συμπίπτουν.



Σκέψεις: Είναι προφανές ότι για να δείξουμε ότι τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν το ίδιο κέντρο, θα θεωρήσουμε το κέντρο Ο του ΑΒΓ και θα δείξουμε ότι είναι και κέντρο του ΔΕΖ.

Τί πρέπει να συμβαίνει για να είναι το Ο κέντρο του τριγώνου ΔΕΖ;

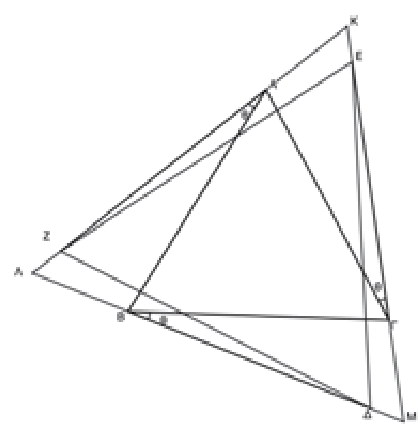
- ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ

Πώς αποδεικνύουμε ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων;

- Με ίσα τρίγωνα.

Λύση: Η γωνία $\widehat{AZ\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΖΔ, άρα $\widehat{AZ\Delta}=\hat{B}+\widehat{Z\Delta B} \Leftrightarrow \widehat{AZE}+60^{o}=60^{o}+\widehat{Z\Delta B}$ (αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισόπλευρα είναι $\hat{B}=60^{o}=\widehat{EZ\Delta}$) $\Leftrightarrow \widehat{AZE}=\widehat{Z\Delta B}$, είναι και ΖΕ=ΖΔ, $\hat{A}=\hat{B}=60^{o}$ άρα τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΖΔ είναι ίσα. Όμοια ίσα είναι και τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΓΔΕ έτσι, ΑΖ=ΒΔ=ΓΕ, είναι και ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ και $\widehat{OAZ}=\widehat{OB\Delta}=\widehat{O\Gamma E}=30^{o}$ (αφού το κέντρο Ο του ΑΒΓ είναι το σημείο τομής των μεσοκάθετων των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και το σημείο τομής των διχοτόμων του), άρα τα τρίγωνα ΟΑΖ, ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ίσα, οπότε ΟΖ=ΟΔ=ΟΕ, άρα το κέντρο Ο του ΑΒΓ είναι και κέντρο του ΔΕΖ.

Εφαρμογή: Όπως είδαμε όταν ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε άλλο ισόπλευρο τρίγωνο, τα κέντρα τους συμπίπτουν. Έτσι, αν δείξουμε ότι κάθε ένα από τα ισόπλευρα τρίγωνα της εφαρμογής είναι εγγεγραμμένο στο ίδιο ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ, το κέντρο του ΚΛΜ θα είναι και κέντρο κάθε ενός από τα ΑΒΓ και ΔΕΖ, όποτε τα κέντρα τους θα συμπίπτουν.



Λύση: Ονομάζουμε Κ, Λ και Μ τα σημεία τομής των ΑΖ, ΓΕ και ΒΔ ανά δύο. Η γωνία $\widehat{\Lambda A\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΓ, άρα $\widehat{\Lambda A\Gamma}=\hat{K}+\widehat{K\Gamma A} \Leftrightarrow \theta+60^{o}=\hat{K}+\theta \Leftrightarrow \hat{K}=60^{o}$, όμοια $\hat{\Lambda}=60^{o}=\hat{M}$, άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο στο ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ, άρα το κέντρο του ΑΒΓ είναι το κέντρο του ΚΛΜ. Το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο στο ισόπλευρο ΚΛΜ, άρα το κέντρο του ΔΕΖ είναι το κέντρο του ΚΛΜ. Επομένως, τα κέντρα ΑΒΓ και ΔΕΖ συμπίπτουν.

Βιβλιογραφία:

1. T. Andreescu - Z. Feng, Mathematical Olympiads 1998 - 199, MAA, USA 2000.
2. R. Honsberger, More Mathematical Morsels, MAA, USA 1991.
3. R. Honsberger, From Erdos to Kiev, MAA, USA, 1996.
4. R. Honsberger, In Polya's Footsteps, MAA, USA 1997.
5. R. Honsberger, Mathematical Chestnuts from Around the World, MAA, USA 2001.
6. S. Rubinowitz, Index to Mathematical Problems 1980 - 1984, Math Pro Press, USA 1992.
7. Μ.Γ. Μαραγκάκη - Μ. Ν. Μεταξά, Ουσιώδη Μαθηματικά, Τόμος ΙΙ Dynamic Ideas, Belmont Massachusetts, 2013.

Τάξη: Α΄

Εξισώσεις και προβλήματα

Λαζαρίδης Χρήστος

Το σύντομο αυτό άρθρο περιέχει στοιχεία από την ενότητα των **εξισώσεων πρώτου βαθμού** και αντίστοιχα **προβλήματα**. Για την καλύτερη κατανόηση, θα βοηθούσε να είχε υπάρξει προηγουμένως η σχετική μελέτη **των αντίστοιχων παραγράφων** του σχολικού βιβλίου.

Άσκηση 1: Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}\ (1).$$

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}-\{2,3,5,6\}$.

$(1)\Leftrightarrow \frac{x-2+1}{x-2}-\frac{x-3+1}{x-3}=\frac{x-5+1}{x-5}-\frac{x-6+1}{x-6}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x-2}-1-\frac{1}{x-3}=1+\frac{1}{x-5}-1-\frac{1}{x-6}$

$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}\Leftrightarrow$

$\frac{x-3-x+2}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-6-x+5}{(x-5)(x-6)}\Leftrightarrow$

$\frac{-1}{(x-3)(x-2)}=\frac{-1}{(x-5)(x-6)}\Leftrightarrow$

$(x-2)(x-3)=(x-5)(x-6)\Leftrightarrow$

$x^2-5x+6=x^2-11x+30\Leftrightarrow$

$6x=24\Leftrightarrow x=4.$

Άσκηση 2: Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2+4x+5}=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2\ (1)$$

Λύση: Επειδή,

$x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1\neq 0$, η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Επίσης παρατηρούμε, ότι

$x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1$, άρα:

$(1)\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2+1}{(x+2)^2+1}=\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}\Leftrightarrow$

$(x-1)^2(x+2)^2+(x+2)^2=(x-1)^2(x+2)^2+(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2=(x-1)^2\Leftrightarrow x^2+4x+4=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 6x=-3\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$

Σημείωση: Στις ασκήσεις 1,2 αν ακολουθούσαμε την μέθοδο της απαλοιφής παρονομαστών οι πράξεις θα ήταν περισσότερες.

Άσκηση 3: α) Αν $\alpha>0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha+1}+(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}-\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(\frac{1}{1\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{99\sqrt{100}+100\sqrt{99}}\right)x=\frac{9}{10}.$$

Λύση: α) $\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha+1}+(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}=$

$\frac{\alpha\sqrt{\alpha+1}-(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}{\left(\alpha\sqrt{\alpha+1}+(\alpha+1)\sqrt{\alpha}\right)\left(\alpha\sqrt{\alpha+1}-(\alpha+1)\sqrt{\alpha}\right)}=$

$\frac{\alpha\sqrt{\alpha+1}-(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}{\alpha^2(\alpha+1)-\alpha(\alpha^2+2\alpha+1)}=$

$\frac{\alpha\sqrt{\alpha+1}-(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}{\alpha^3+\alpha^2-\alpha^3-2\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{\alpha+1}-(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}{-\alpha(\alpha+1)}=$

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}-\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1}.$

β) Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Από το α ερώτημα έχουμε:

Για $\alpha=1$, $\frac{1}{1\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 1}=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Για $\alpha=2$, $\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

…….

Για $\frac{1}{99\sqrt{100}+100\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}-\frac{\sqrt{100}}{100}$

προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει,

$\frac{1}{1\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 1}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{99\sqrt{100}+100\sqrt{99}}=$

$\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{100}}{100}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$\frac{9}{10}x=\frac{9}{10}\Leftrightarrow x=1.$

Άσκηση 4: α) Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}.$$

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=0.$$

Λύση: α) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}=\frac{\alpha+1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)}=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$

β) Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{0,-1,-2,-3\}$. Από το α ερώτημα,

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, το πρώτο μέλος της εξίσωσης ισούται με $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}$,οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x+3=x\Leftrightarrow 0x=-3$,

η οποία είναι αδύνατη.

Άσκηση 5: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x-2021}{1}+\frac{x-2020}{2}+\frac{x-2019}{3}=$$

$$\frac{x-2018}{4}+\frac{x-2017}{5}+\frac{x-2016}{6}\quad(1).$$

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x-2022+1}{1}+\frac{x-2022+2}{2}+\frac{x-2022+3}{3}=$$

$$\frac{x-2022+4}{4}+\frac{x-2022+5}{5}+\frac{x-2022+6}{6}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x-2022}{1}+1+\frac{x-2022}{2}+1+\frac{x-2022}{3}+1=$$

$$\frac{x-2022}{4}+1+\frac{x-2022}{5}+1+\frac{x-2022}{6}+1\Leftrightarrow$$

$$(x-2022)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=0\Leftrightarrow$$

$x=2022$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Άσκηση 6: Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x-1|-1=x^2-2x$

β) $|x-1|+1=x$

γ) $|x-1|-1=x$

δ) $\sqrt{x^2-2x+1}=1-x$

Λύση: Οι εξισώσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) $|x-1|=x^2-2x+1\Leftrightarrow|x-1|=(x-1)^2\Leftrightarrow$

$x-1=(x-1)^2$ ή $x-1=-(x-1)^2\Leftrightarrow$

$x-1=x^2-2x+1$ ή $x-1=-x^2+2x-1\Leftrightarrow$

$x^2-3x+2=0$ ή $x^2-x=0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x-2)=0$ ή $x(x-1)=0\Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=1$ ή $x=2$.

β) $|x-1|+1=x\Leftrightarrow|x-1|=x-1\Leftrightarrow$

$x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

γ) $|x-1|-1=x\Leftrightarrow|x-1|=x+1(1)$

Αν $x+1<0$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $x+1\geq 0$, δηλαδή $x\geq -1$, έχουμε:

$x-1=-x-1$ή$x-1=x+1\Leftrightarrow x=0$.

δ) $\sqrt{x^2-2x+1}=1-x\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2}=1-x\Leftrightarrow$

$|x-1|=-(x-1)\Leftrightarrow x-1\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1$.

Σημείωση. Στα **(β), (δ)** χρησιμοποιήθηκαν αντίστοιχα οι προτάσεις: $|\alpha|=\alpha\Leftrightarrow\alpha\geq 0$ και $|\alpha|=-\alpha\Leftrightarrow\alpha\leq 0$.

Άσκηση 7: Να λυθεί η εξίσωση:

$$|x^2+x+1|+|6x-3|=|x^2+7x-2|.$$

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε ότι: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|\Leftrightarrow\alpha\beta\geq 0$.

Εφαρμόζουμε την παραπάνω ιδιότητα, θεωρώντας $\alpha=x^2+x+1,\beta=6x-3$,οπότε:

$(x^2+x+1)(6x-3)\geq 0(1)$

Επειδή,

$$x^2+x+1=x^2+2\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

συμπεραίνουμε ότι $6x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$.

Άσκηση 8: Να λυθεί η εξίσωση:

$$|x-1|+|x-2|=3(1).$$

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x<1,(1)\Leftrightarrow -x+1-x+2=3\Leftrightarrow x=0$
- $1\leq x\leq 2,(1)\Leftrightarrow x-1-x+2=3\Leftrightarrow 0x=4$, αδύνατη.
- $x>2,(1)\Leftrightarrow x-1+x-2=3\Leftrightarrow x=3$.
- Τελικά, $x=0$ ή $x=3$.

Άσκηση 9: Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση: $|x-1|+|2x-2|+|3-3x|+6\alpha^{2022}=0,\alpha\in\mathbb{R}$ έχει λύση, να λυθεί η εξίσωση.

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

$|x-1|+|2x-2|+|3-3x|+6\alpha^{2022}=0\Leftrightarrow$

$|x-1|+2|x-1|+3|1-x|=-6\alpha^{2022}\Leftrightarrow$

$6|x-1|=-6\alpha^{2022}\Leftrightarrow|x-1|=-\alpha^{2022}(1)$

Επειδή $|x-1|\geq 0$ έπεται ότι $-\alpha^{2022}\geq 0\Leftrightarrow\alpha=0$.

$(1)\Leftrightarrow|x-1|=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^{\nu}=\alpha$.

Άσκηση 10: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(x^3+3\right)\left(x^6-128\right)=0(1)$$

Λύση: Η εξίσωση έχει πε $x=2$ήx $=-2$. δίο ορισμού $\mathbb{R}$. $(1)\Leftrightarrow x^3+3=0$ ή $x^6-128=0\Leftrightarrow$ $x^3=-3$ ή $x^6=128\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{3}$ ή $x=\pm\sqrt[6]{128}\Leftrightarrow$ $x=-\sqrt[3]{3}$ ή $x=2$ ή $x=-2$.

Άσκηση 11: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[5]{x^2-4}+\sqrt[7]{2x-4}=0(1)$$

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $[2,+\infty)$, οι υπόριζες ποσότητες πρέπει να είναι θετικές.

Επειδή, $\sqrt[3]{x-2}\geq 0, \sqrt[5]{x^2-4}\geq 0, \sqrt[7]{2x-4}\geq 0$, η εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα εξίσωσεων:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=0\\ \sqrt[5]{x^2-4}=0\\ \sqrt[7]{2x-4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=0\\ x^2-4=0\\ 2x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Άσκηση 12: Να λυθεί η εξίσωση

$$x^6=\lambda^3,\ \lambda\in\mathbb{R}\ (1).$$

Λύση: Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\lambda^3<0\Leftrightarrow\lambda<0$. Η (1) είναι αδύνατη.
- $\lambda^3\geq 0\Leftrightarrow\lambda\geq 0$.

$$(1)\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[6]{\lambda^3}=\pm\lambda^{\frac{3}{6}}=\pm\lambda^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\lambda}.$$

Άσκηση 13: Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha+\beta+\gamma=0$, να λυθεί η $\dfrac{x+\alpha}{1}+\dfrac{x+2\beta}{2}+\dfrac{x+3\gamma}{3}=11(1)$.

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

$$(1)\Leftrightarrow x+\alpha+\frac{x}{2}+\beta+\frac{x}{3}+\gamma=11\Leftrightarrow$$

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+(\alpha+\beta+\gamma)=11\Leftrightarrow\frac{11x}{6}=11\Leftrightarrow x=6.$$

Άσκηση 14: Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ και η εξίσωση $\alpha x=\beta(1)$. Να λυθεί η εξίσωση, αν:

α) Οι α,β είναι αντίθετοι

β) Οι α,β είναι αντίστροφοι.

Λύση: α) $\alpha+\beta=0$, οπότε:

$$(1)\Leftrightarrow\alpha x=-\alpha\overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}x=-1.$$

β) $\alpha\beta=1$, οπότε: $(1)\Leftrightarrow\alpha x=\dfrac{1}{\alpha}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\alpha^2}$.

Άσκηση 15: Αν α,β,γ τα μηκη των πλευρών ενός τριγώνου και η εξίσωση $x\alpha^2=\gamma^2-x\beta^2(1)$ έχει ρίζα $x=1$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Το . $x=1$, είναι ρίζα της εξίσωσης αρα θα την επαληθευει,δηλαδή, $\alpha^2=\gamma^2-\beta^2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, επομένως είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 16: Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x+\lambda}{x-\lambda}=\frac{x^2}{x^2-\lambda^2},\lambda\in\mathbb{R}.$$

Λύση:

$$\frac{x+\lambda}{x-\lambda}=\frac{x^2}{x^2-\lambda^2}\Leftrightarrow\frac{x+\lambda}{x-\lambda}=\frac{x^2}{(x-\lambda)(x+\lambda)}(1)$$

Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}-\{-\lambda,\lambda\}$.

$$(1)\Leftrightarrow(x+\lambda)^2=x^2\Leftrightarrow x^2+2\lambda x+\lambda^2=x^2\Leftrightarrow$$

$2\lambda x=-\lambda^2$ Αν $\lambda\neq 0$, τότε $x=-\dfrac{\lambda}{2}$

Αν $\lambda=0$, τότε η εξίσωση έχει λύση κάθε πραγματικό διαφορο του 0

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Άσκηση 17: Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψηφίου αριθμού ισούται με 15. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος του αρχικού κατά 27. Να βρείτε τον αριθμό.

Λύση: Έστω x, τοψηφίο των μονάδων τότε το ψηφίο των δεκάδων θα ισούται με $15-x$, επομένως ο αριθμός είναι: $(15-x)10+x$. Η ενναλαγή των ψηφίων δίνει τον αριθμο $x10+(15-x)$. Συμπεραίνουμε ότι,

$$x10+(15-x)=(15-x)10+x+27\Leftrightarrow$$

$$10x+15-x=150-10x+x-27\Leftrightarrow$$

$$18x=162\Leftrightarrow x=27.$$

Τελικά ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 69. Επαλήθευση. Πράγματι, $6+9=15, 96-69=27$.

Άσκηση 18: Το μήκος ενός οθογωνίου παραλληλογάμμου είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Αν οι διαστάσεις του αυξηθούν κατά 1m, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά $13m^2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση: Αν x το πλάτος του ορθογωνίου τότε το μήκος είναι $2x$. Οι νέες διαστάσεις είναι $x+1, 2x+1$ Το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου είναι $x\cdot 2x$ ενώ του επόμενου $(x+1)(2x+1)$.

'Εχουμε, $(x+1)(2x+1)=2x\cdot x+13\Leftrightarrow$

$$2x^2+x+2x+1=2x^2+13\Leftrightarrow x=4.$$

Τάξη: Β΄

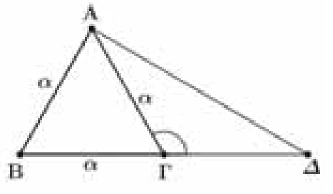
Εμβαδά ευθυγράμμων σχημάτων

Καρδαμίτσης Σπύρος

*Από την **αρχαιότητα** η έννοια του **εμβαδού** αποτελούσε αντικείμενο μελέτης και έρευνας. Πολλοί Έλληνες μαθηματικοί ανέπτυξαν σημαντικές θεωρίες και **τεχνικές μεθόδους** στην προσπάθεια τους να υπολογίσουν το εμβαδό ενός επιπέδου σχήματος. Στην προσπάθεια τους αυτή, αρχικά **όρισαν τα αξιώματα** που διέπουν τα εμβαδά και στην συνέχεια επινόησαν τα εργαλεία για τον υπολογισμό τους. Αλλά ως δαιμόνιοι δεν αρκέστηκαν μονάχα στον αριθμητικό υπολογισμό ενός εμβαδού, θεωρητικοποίησαν την έννοια του, δηλαδή στόχευσαν στην καρδιά της έννοιας θεωρώντας ότι ο υπολογισμός ενός εμβαδού δεν είναι κατ΄ ανάγκη αριθμητικός. Μπορεί να είναι και αλγοριθμικός. Με άλλα λόγια οι **αρχαίοι Έλληνες** θεώρησαν το εμβαδό ως **θεωρητική έννοια**. Για παράδειγμα το εμβαδό ενός τριγώνου δεν είναι κατ΄ ανάγκη ο τύπος ένα δεύτερο, βάση επί ύψος αλλά μια ολόκληρη **διαδικασία**, που μπορεί να συγκρίνει σχήματα κομματιάζοντάς τα και συγκρίνοντας τα κομμάτια αυτά.*

ΑΣΚΗΣΗ 1η : Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ = α ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ορίζουμε σημείο Δ ώστε (ΑΒΓ) = (ΑΓΔ). Να αποδείξετε ότι: α) ΓΔ = α β) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο στο Α. γ) $ΑΔ = α\sqrt{3}$

Λύση: α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο έχουμε: $Α\hat{Β}Γ = 60^o$ και $Α\hat{Γ}Δ = 120^o$, τότε:



$$(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot α\cdot α\cdot ημ60^o = \frac{1}{2}\cdot α\cdot ΓΔ\cdot ημ120^o \Rightarrow ΓΔ = α$$

αφού είναι: $ημ120^o = ημ(180^o - 60^o) = ημ60^o$

β) Αφού $ΓΔ = α = ΑΓ$, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και οι ίσες γωνίες της βάσης του είναι:

$$Δ\hat{Α}Γ = Α\hat{Δ}Γ = \frac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$$

άρα $Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Δ = 60^o + 30^o = 90^o$ δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο στο Α.

γ) Στο ορθογώνιο ΑΒΔ έχουμε:

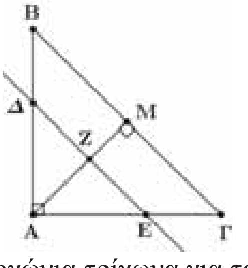
$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow 4α^2 = α^2 + ΑΔ^2$ άρα $ΑΔ = α\sqrt{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2η : Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^o$). Ευθεία παράλληλη της ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Αν το ύψος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΖ = \frac{ΔΕ}{2}$, β) $ΑΜ\cdot ΔΕ = ΑΖ\cdot ΒΓ$

γ) $(ΒΔΕΓ) = \frac{1}{4}(ΒΓ^2 - ΔΕ^2)$

Λύση: α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι επίσης ορθογώνιο και ισοσκελές αφού η γωνία Α είναι ορθή και $Α\hat{Δ}Ε = \hat{Β} = 45^o$. Αφού η ΑΜ είναι κάθετη στην ΒΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔΕ, επομένως το ΑΖ είναι ύψος του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, άρα $ΑΖ = \frac{ΔΕ}{2}$



β) Στα δύο ορθογώνια τρίγωνα για τα ύψη τους ΑΖ και ΑΜ ισχύουν $ΑΖ = \frac{ΔΕ}{2}$ και $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$,

επομένως $\frac{ΑΖ}{ΑΜ} = \frac{\frac{ΔΕ}{2}}{\frac{ΒΓ}{2}} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \Rightarrow ΑΖ\cdot ΒΓ = ΑΜ\cdot ΔΕ$.

γ) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι τραπέζιο και το εμβαδό του είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων και ισοσκελών τριγώνων, επομένως

$$(ΒΔΕΓ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) =$$

$$= \frac{1}{2}ΒΓ\cdot ΑΜ - \frac{1}{2}ΔΕ\cdot ΑΖ =$$

$$= \frac{1}{2}ΒΓ\cdot\frac{ΒΓ}{2} - \frac{1}{2}ΔΕ\cdot\frac{ΔΕ}{2} = \frac{1}{4}(ΒΓ^2 - ΔΕ^2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3η : Το τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκεται εσωτερικά του τριγώνου ΚΛΜ ώστε ΑΒ//ΚΛ, ΑΓ//ΚΜ, ΒΓ//ΛΜ και οι αποστάσεις των παραλλήλων πλευρών είναι ίσες με α. Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι τα 2/3 της περιμέτρου του τριγώνου ΚΛΜ.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια και βρεθεί ο λόγος ομοιότητας τους.

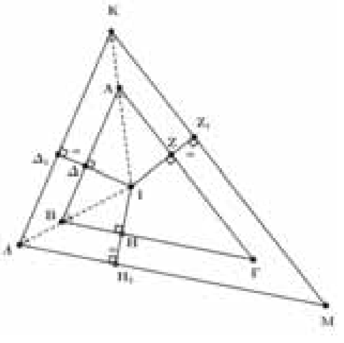
β) Να υπολογισθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων.

γ) Να αποδείξετε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο έκκεντρο.

Λύση: α) Λόγω της παραλληλίας των πλευρών των τριγώνων αυτά έχουν τις πλευρές τους ίσες, συνεπώς είναι όμοια. Αν λ είναι ο λόγος ομοιότητας τους τότε:

$$\lambda = \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{A\Gamma}{KM} = \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{K\Lambda+\Lambda M+KM} =$$

$$= \frac{\tau_{AB\Gamma}}{\tau_{K\Lambda M}} = \frac{\frac{2}{3}\tau_{K\Lambda M}}{\tau_{K\Lambda M}} = \frac{2}{3}$$



β) Αν $E_{AB\Gamma}$ και $E_{K\Lambda M}$ τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΛΜ αντίστοιχα τότε:

$$\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{K\Lambda M}} = \lambda^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

γ) Αν Ι είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε αυτό ισαπέχει από τις πλευρές του, επομένως

$$I\Delta = IZ = IH$$

Επειδή οι αποστάσεις των πλευρών των δύο τριγώνων είναι ίσες με α τότε

$$I\Delta + \alpha = IZ + \alpha = IH + \alpha \Rightarrow I\Delta_1 = IZ_1 = IH_1$$

επομένως το Ι είναι και έκκεντρο του ΚΛΜ.

ΑΣΚΗΣΗ 4η : Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε: ΒΔ= κ · ΔΓ, με $\kappa \in \mathbb{N}^*$. Αν Μ τυχαίο σημείο της ΑΔ να δειχθεί ότι: α) $(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{\kappa+1}(AB\Gamma)$ β) $\frac{(AMB)}{(BM\Delta)} = \frac{(AM\Gamma)}{(M\Delta\Gamma)}$

Λύση: α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ έχουν κοινό ύψος, εστω υ, τότε ισχύει:

$$\frac{(A\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Delta+\Delta\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\kappa\cdot\Delta\Gamma+\Delta\Gamma} =$$

$\frac{\Delta\Gamma}{(\kappa+1)\Delta\Gamma}$. Επομένως $(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{\kappa+1}(AB\Gamma)$.

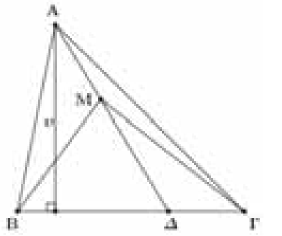
***Παρατήρηση:** Αν κ = 1 τότε η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και (ΑΔΓ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), που είναι η γνωστή πρόταση.*

β) Επειδή ισχύει ότι: $A\hat{M}B + B\hat{M}\Delta = 180^0$ τότε:

$$\frac{(AMB)}{(BM\Delta)} = \frac{AM\cdot BM}{BM\cdot M\Delta} = \frac{AM}{M\Delta}. \quad (1)$$

Επίσης παραπληρωματικές είναι και οι γωνίες $A\hat{M}\Gamma$ και $\Gamma\hat{M}\Delta$. Οπότε:

$$\frac{(AM\Gamma)}{(\Gamma M\Delta)} = \frac{AM\cdot M\Gamma}{M\Gamma\cdot M\Delta} = \frac{AM}{M\Delta}. \quad (2)$$



Από (1), (2) έχουμε: $\frac{(AMB)}{(BM\Delta)} = \frac{(AM\Gamma)}{(M\Delta\Gamma)}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5η : Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με μεγάλη βάση την ΓΔ και μικρή την ΑΒ, η διάμεσός του ΕΖ τέμνει τις διαγώνιες του ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Θ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΑΓΘ) = (ΓΔΕΖ) – (ΑΒΖΕ)

β) (ΑΒΓ) = (ΑΘΔ) + (ΒΗΓ)

γ) (ΑΘΔ) = (ΑΒΗ) + (ΒΗΓ)

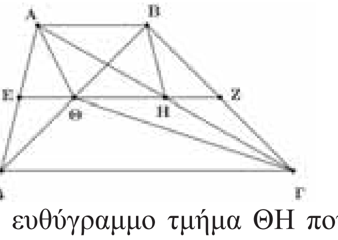
Λύση: α) Είναι $(A\Gamma\Theta) = (AH\Theta) + (\Gamma H\Theta) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Theta H\cdot\upsilon + \frac{1}{2}\cdot\Theta H\cdot\upsilon = \Theta H\cdot\upsilon \quad (1)$$

όπου υ η απόσταση της ΘΗ από τις βάσεις του τραπεζίου. Επίσης: $(\Gamma\Delta EZ) - (ABZE) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot(EZ+\Gamma\Delta)\cdot\upsilon - \frac{1}{2}\cdot(EZ+AB)\cdot\upsilon =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\Gamma\Delta - AB)\cdot\upsilon = \Theta H\cdot\upsilon \quad (2)$$



Αφού για το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ που συνδέει τα μέσα των διαμέσων ενός τραπεζίου ισχύει:

$$\frac{1}{2}\cdot(\Gamma\Delta - AB) = \Theta H$$

Από (1), (2) έχουμε: $(A\Gamma\Theta) = (\Gamma\Delta EZ) - (ABZE)$.

β) Είναι: $(A\Theta\Delta) = (A\Theta E) + (\Theta E\Delta) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Theta E\cdot\upsilon + \frac{1}{2}\cdot\Theta E\cdot\upsilon = \Theta E\cdot\upsilon.$$

Αντίστοιχα ισχύει ότι: $(BH\Gamma) = (BHZ) + (HZ\Gamma) =$

$= \frac{1}{2}\cdot ZH\cdot\upsilon + \frac{1}{2}\cdot ZH\cdot\upsilon = ZH\cdot\upsilon$. Προσθέτοντας κατά μέλη είναι: $(A\Theta\Delta) + (BH\Gamma) = (\Theta E + HZ)\cdot\upsilon =$

$(EZ - \Theta H)\cdot\upsilon = \frac{1}{2}\cdot(AB + \Gamma\Delta - \Gamma\Delta + AB)\cdot\upsilon =$

$= AB \cdot \upsilon$. Όμως $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 2\upsilon = AB \cdot \upsilon$.

Άρα $(A\Theta\Delta) + (BH\Gamma) = (AB\Gamma)$.

γ) Από το ερώτημα (β) ισχύει:

$$(A\Theta\Delta) + (BH\Gamma) = (AB\Gamma)$$

επομένως είναι: $(A\Theta\Delta) = (AB\Gamma) - (BH\Gamma) = (ABH)$

Το ευθύγραμμο τμήμα BH είναι διάμεσος του τριγώνου $BA\Gamma$ οπότε: $(ABH) = (BH\Gamma)$.

Επομένως $(A\Theta\Delta) = (BH\Gamma) = (ABH)$.

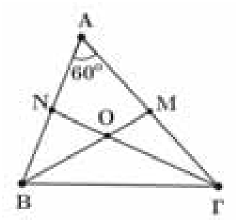
ΑΣΚΗΣΗ 6η : Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και γωνία Α ίση με 60^0. Αν οι διάμεσοι ΒΜ , ΓΝ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma) = 12\sqrt{3}$, β) $(B\Gamma M) = (B\Gamma N) = 6\sqrt{3}$

γ) $(OBN) = (O\Gamma N)$

Λύση: α) Έχουμε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$



β) Επειδή η διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, είναι:

$$(B\Gamma M) = \frac{(AB\Gamma)}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

γ) Όμοια για το εμβαδό του τριγώνου ΒΓΝ έχουμε: $(B\Gamma N) = 6\sqrt{3}$ άρα $(B\Gamma M) = (B\Gamma N) = 6\sqrt{3}$

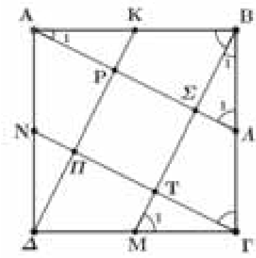
ΑΣΚΗΣΗ 7η : Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Κ,Λ,Μ,Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, και ΔΑ αντίστοιχα. Οι ημιευθείες ΑΛ, ΒΜ, ΓΝ, ΔΤ τεμνόμενες ανά δύο σχηματίζουν τετράπλευρο ΠΡΣΤ. Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΠΡΣΤ είναι τετράγωνο.

β) $\Sigma\Lambda = \frac{1}{5} A\Lambda$, γ) (ΑΒΓΔ)=20 (ΑΚΡ)

δ) $(\Pi P\Sigma T) = \frac{1}{5}(AB\Gamma\Delta)$

Λύση: α) Το τετράπλευρο ΑΛΓΝ είναι παραλληλόγραμμο αφού $AN // = \Lambda\Gamma$, άρα και $A\Lambda // N\Gamma$. Ομοίως $BM // \Delta K$. Είναι επομένως και το ΡΣΤΠ παραλληλόγραμμο. Τα τρίγωνα ΑΒΛ και ΒΓΜ είναι ίσα (ορθογώνια με τις κάθετες πλευρές ίσες) άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (1) και $\widehat{\Lambda}_1 = \widehat{M}_1$ (2).



Από την σχέση (2) έχουμε: $\widehat{\Lambda}_1 + \widehat{B}_1 = \widehat{M}_1 + \widehat{B}_1 = 90^o$, επομένως το τρίγωνο ΒΣΛ είναι ορθογώνιο στο Σ και $\widehat{\Sigma} = 90^o$ (3). Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\widehat{P} = \widehat{\Sigma} = \widehat{T} = \widehat{\Pi} = 90^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΣ και ΒΓΤ είναι επίσης ίσα αφού έχουν $AB = B\Gamma$, $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ και ορθογώνια, άρα $A\Sigma = BT$ (4). Στο τρίγωνο ΑΒΣ έχουμε: Κ μέσον της ΑΒ, $KP // B\Sigma$, άρα Ρ είναι μέσον της ΑΣ και $P\Sigma = \frac{1}{2} A\Sigma$. Παρόμοια το Σ είναι μέσον της ΒΤ και $\Sigma T = \frac{1}{2} BT$, άρα τελικά $P\Sigma = \Sigma T$ (5). Από (3) και (5) προκύπτει ότι το ΠΡΣΤ είναι ορθογώνιο με δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα τετράγωνο.

β) Τα τρίγωνα ΑΚΡ και ΑΒΣ είναι όμοια γιατί $\widehat{A}_1$ κοινή και είναι ορθογώνια ($\widehat{P} = \widehat{\Sigma} = 90^o$), και ο λόγος ομοιότητας τους είναι: $\lambda = \frac{AP}{A\Sigma} = \frac{AK}{AB} = \frac{1}{2}$.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι

$$\frac{(AKP)}{(AB\Sigma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (AB\Sigma) = 4(AKP) \quad (6).$$

Εξ άλλου τα τρίγωνα ΑΚΡ και ΒΣΛ προφανώς είναι ίσα, άρα $(AB\Lambda) = 5(B\Sigma\Lambda) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} A\Lambda \cdot B\Sigma = 5 \cdot \frac{1}{2} \Sigma\Lambda \cdot B\Sigma \Leftrightarrow A\Lambda = 5\Sigma\Lambda.$$

γ) Αν α είναι η πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ τότε από το (β) ερώτημα θα έχουμε:

$$(AB\Lambda) = 5(AKP) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} = 5(AKP) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = 5(AKP) \Leftrightarrow (AKP) = \frac{1}{20}\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$(AB\Gamma\Delta) = 20(AKP) \quad (7).$$

δ) Από (α) ερώτημα $(AB\Sigma) = (B\Gamma T) = (\Gamma\Pi\Delta) = (\Delta PA)$, άρα έχουμε: $(AB\Gamma\Delta) = 4(AB\Sigma) + (\Pi P\Sigma T)$ και από τις σχέσεις (6) και (7) η τελευταία γίνεται:

$$(AB\Gamma\Delta) = 4 \cdot 4(AKP) + (\Pi P\Sigma T) =$$

$$= 16 \cdot \frac{1}{20}(AB\Gamma\Delta) + (\Pi P\Sigma T) \Leftrightarrow (\Pi P\Sigma T) = \frac{1}{5}(AB\Gamma\Delta).$$

Τάξη: Β΄

Πολυώνυμα μιας μεταβλητής

Θανάσης Χριστόπουλος

Συνηθίσαμε μέχρι τώρα ένα πολυώνυμο με τρείς όρους (τριώνυμο) και μεταβλητή x, να το συμβολίζουμε $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ χρησιμοποιήσαμε δηλαδή τα γράμματα α,β,γ και τις δυνάμεις του x. Η γενική μορφή ενός πολυωνύμου μιας μεταβλητής x νιοστού βαθμού (με $\nu+1$ όρους) είναι: $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_o$ και το συμβολίζουμε συνήθως $P(x)$ ή $Q(x)$ ή $\Pi(x)$ ή ότι άλλο προσφορότερο.

Τα θέματα που θα διαπραγματευτούμε είναι:

1) Η έννοια του βαθμού του πολυωνύμου: «*βαθμός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης του* x, *που ο συντελεστής του μονωνύμου αυτού δεν είναι μηδέν*»

2) Η έννοια της ρίζας: «*ο αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου* $P(x)$ *όταν* $P(\rho)=0$»

3) Η ισότητα δύο πολυωνύμων: «*δύο πολυώνυμα είναι ίσα, όταν όλοι οι αντίστοιχοι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων είναι ίσοι*»

4) Η ταυτότητα διαίρεσης πολυωνύμων και ειδικά με διαιρέτη το διώνυμο $x-\rho$ για την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το υπόλοιπο χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση: «$\upsilon=P(\rho)$» και

$$«P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)»$$

5) Η ισοδυναμία « το ρ *ρίζα του* $P(x)\Leftrightarrow x-\rho$ *παράγοντας του* $P(x)$»

6) το Θεώρημα: «Αν ρ, ακεραία ρίζα πολυωνύμου, με ακεραίους συντελεστές, τότε ο ρ διαιρεί τον σταθερό όρο α_o» του οποίου χρησιμοποιούμε το:

«Αν $P(x)$ πολυώνυμο, με ακεραίους συντελεστές, τότε οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου α_o»

7) το σχήμα Horner που με εύκολο τρόπο μας δίνει το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με $x-\rho$

8) λύση εξισώσεων ανωτέρων του $2^{ου}$ βαθμού με έλεγχο των πιθανών ριζών με τη βοήθεια του σχήματος Horner και κατ' επέκταση τη λύση των αντίστοιχων ανισώσεων.

Άσκηση 1η. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x):(x^2-3x+5)$ με $\pi(2)=2$ και μια ρίζα του $P(x)$ είναι το 1, να βρεθεί το υπόλοιπο της $P(x):(x^2-3x+2)$.

Λύση: Από την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-3x+5)$ είναι $P(x)=(x^2-3x+5)\cdot\pi(x)$.

Για $x=2$ προκύπτει $P(2)=3\cdot\pi(2)=6$.

Αφού το $x=1$ είναι ρίζα του $P(x)\Leftrightarrow P(1)=0$.

Στη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ αφού ο διαιρέτης είναι $2^{ου}$ βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι πρώτου βαθμού με μορφή $\upsilon(x)=\alpha x+\beta$ οπότε

$P(x)=(x^2-3x+2)\cdot Q(x)+\alpha x+\beta$

- για $x=1$ είναι $P(1)=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$ (1)
- για $x=2$ είναι $P(2)=6\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=6$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει $\alpha=6$, $\beta=-6$, άρα $\upsilon(x)=6x-6$.

Άσκηση 2η. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha^3-\alpha)x^3-(\alpha^2+\alpha)x^2+3(\alpha+1)x+\alpha+1$

i) Να βρεθεί ο βαθμός του $P(x)$ για όλες τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$

ii) Για $\alpha=2$ να λυθεί η $P(x+1)\geq 18(x+1)$

Λύση: i) Αν $\alpha^3-\alpha\neq 0\Leftrightarrow\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)\neq 0$, δηλαδή για $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 1$ και $\alpha\neq -1$, τότε το πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού. Αν $\alpha=0$ τότε $P(x)=3x+1$, οπότε είναι $1^{ου}$ βαθμού. Αν $\alpha=1$ τότε $P(x)=-2x^2+6x+2$, είναι $2^{ου}$ βαθμού. Αν $\alpha=-1$ τότε $P(x)=0$, οπότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο για το οποίο δεν ορίζεται βαθμός.

ii) Για α=2, $P(x)=6x^3-6x^2+9x+3$ οπότε

$P(x+1)=6(x+1)^3-6(x+1)^2+9(x+1)+3\Leftrightarrow$

$P(x+1)=6x^3+12x^2+15x+12$

$P(x+1)\geq 18(x+1)\Leftrightarrow$

$6x^3+12x^2+15x+12\geq 18x+18\Leftrightarrow$

$6x^3+12x^2-3x-6\geq 0\Leftrightarrow 2x^3+4x^2-x-2\geq 0\Leftrightarrow$

$2x^2(x+2)-(x+2)\geq 0\Leftrightarrow (x+2)(2x^2-1)\geq 0$

x	$-\infty$ $\quad -2$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$x+2$	−	+	+	+
$2x^2-1$	+	+	−	+
$P(x)$	−	+	−	+

Άρα $x\in[-2,-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty]$

Άσκηση 3η. Δίνεται $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0$ με $\alpha_0=2$, και μια ρίζα του $P(x)$ το 2.

Αν $Q(x)=P(P(x-2))$ να βρεθεί το $Q(P(Q(2)))$

Λύση: Το 2 είναι ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow P(2)=0$ και $P(0)=\alpha_0=2$, αφού $Q(x)=P(P(x-2))$, για $x=2$ είναι $Q(2)=P(P(0))=P(2)=0$ και τελικά $Q(P(Q(2)))=Q(P(0))=Q(2)=0$.

Άσκηση 4η. Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $P(x)=x^4-(\alpha+2)x^3-2x^2+3(\beta+1)x-8$ να έχει ως παράγοντες τα διώνυμα $x-1$ και $x-2$. Στη συνέχεια να λυθεί η $P(x)=0$.

Λύση: Αφού το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x) \Leftrightarrow P(1)=0 \Leftrightarrow 1-(\alpha+2)-2+3(\beta+1)-8=0 \Leftrightarrow$ $\alpha-3\beta=-8$ (1).

Αφού το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x) \Leftrightarrow$ $P(2)=0 \Leftrightarrow 16-(\alpha+2)\cdot 8-8+6(\beta+1)-8=0$ $\Leftrightarrow -4\alpha+3\beta=5$ (2).

Από (1),(2) προκύπτει $\alpha=1$, $\beta=3$, άρα $P(x)=x^4-3x^3-2x^2+12x-8$

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι ±1, ±2, ±4, ±8

1	-3	-2	12	-8	1
	1	-2	-4	8	
1	-2	-4	8	**0**	

Άρα $P(x)=(x-1)(x^3-2x^2-4x+8)$

1	-2	-4	8	2
	2	0	-8	
1	0	-4	**0**	

Οπότε $P(x)=(x-1)(x-2)(x^2-4)$ δηλαδή $P(x)=(x-1)(x-2)^2(x+2)$. Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι: $x=1, x=2$ (διπλή ρίζα) και $x=-2$

Άσκηση 5η. Δείξετε ότι η $5x^{2\cdot\nu}+9\kappa x-1=0$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Λύση: Έστω ρ, ακεραία ρίζα, Αφού οι συντελεστές είναι όλοι ακέραιοι πρέπει ο ρ να διαιρεί το -1 οπότε ρ=1 ή ρ=-1. Αν ρ=1 τότε $5\cdot 1^{2\cdot\nu}+9\kappa\cdot 1-1=0 \Leftrightarrow 5+9\kappa-1=0 \Leftrightarrow$ $\kappa=-\frac{4}{9}\notin\mathbb{Z}$ άρα η ρ=1 απορρίπτεται

Αν $\rho=-1$ τότε $5\cdot(-1)^{2\cdot\nu}+9\kappa\cdot(-1)-1=0$ $\Leftrightarrow 5-9\kappa-1=0 \Leftrightarrow \kappa=\frac{4}{9}\notin\mathbb{Z}$ άρα η $\rho=-1$ απορρίπτεται. Τελικά η $5x^{2\cdot\nu}+9\kappa x-1=0$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Άσκηση 6η. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa+2)x^3+(\kappa^2-2)x^2+\kappa x+2$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

i. δεν έχει ρίζα το 2 ii. δεν έχει ρίζα το 3

iii. δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$

Λύση: i. Για να είναι το 2, ρίζα του $P(x)$ πρέπει $P(2)=0 \Leftrightarrow 8(\kappa+2)+4(\kappa^2-2)+2\kappa+2=0 \Leftrightarrow$ $8\kappa+16+4\kappa^2-8+2\kappa+2=0 \Leftrightarrow$ $4\kappa^2+10\kappa+10=0$, $\Delta=-60<0$, επομένως δεν υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ που να την αληθεύει, άρα το 2 δεν είναι ρίζα.

ii. Όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι ακέραιοι οπότε για να είναι ρίζα το 3 θα πρέπει να διαιρεί το α_0 δηλαδή το 2, που δεν συμβαίνει άρα το 3 δεν είναι ρίζα.

iii. Για να είναι το $\frac{1}{2}$, ρίζα του $P(x)$ πρέπει

$P(\frac{1}{2})=0 \Leftrightarrow (\kappa+2)\frac{1}{8}+(\kappa^2-2)\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{2}+2=0 \Leftrightarrow$

$(\kappa+2)+2(\kappa^2-2)+4\kappa+16=0 \Leftrightarrow$

$2\kappa^2+5\kappa+14=0$, $\Delta=25-112<0$, επομένως δεν υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ που να την αληθεύει, άρα το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ρίζα του $P(x)$.

Άσκηση 7η. Να βρεθεί το $P(x)$ καθώς και οι $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε: $(x^2+1)P(x)=2x^4+3x^3+\kappa x+\lambda$

Λύση: Ισχύει ότι ο βαθμός (x^2+1) + βαθμός $P(x)=4$. Το $P(x)$ θα είναι 2ου βαθμού δηλαδή θα έχει μορφή $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq0$.

Άρα $(x^2+1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^4+3x^3+\kappa x+\lambda \Leftrightarrow$

$\alpha x^4+\beta x^3+(\alpha+\gamma)x^2+\beta x+\gamma=$

$=2x^4+3x^3+\kappa x+\lambda$ οπότε

$$\begin{Bmatrix}\alpha=2\\ \beta=3\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta=\kappa\\ \gamma=\lambda\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\alpha=2\\ \beta=3\\ \gamma=-2\\ \kappa=3\\ \lambda=-2\end{Bmatrix}$$

Επομένως $P(x)=2x^2+3x-2$ και $\kappa=3, \lambda=-2$

Άσκηση 8η. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=2\alpha x^4-3\alpha x^3-3\alpha x^2+2\alpha x+\alpha-2,$$

$\alpha\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει παράγοντα το $x+1$

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\neq0$

β) Για $\alpha=2$

i) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)\leq0$

ii) Αν υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεση του $P(x)$ με το $x-1$, να λύσετε την εξίσωση:

$$2-2\eta\mu^2\theta+\upsilon\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{4}=0,\ \theta\in\mathbb{R}$$

Λύση: α) Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+1$ $\Leftrightarrow P(-1)=0 \Leftrightarrow 2\alpha+3\alpha-3\alpha-2\alpha+\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$

β) για $\alpha=2$, έχουμε

i) $P(x)=4x^4-6x^3-6x^2+4x$. Αρχικά θα βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου για να το παραγοντοποιήσουμε και στη συνέχεια θα λύσουμε την ανίσωση $P(x)\le 0$

$P(x)=2x(2x^3-3x^2-3x+2)$

$P(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $2x^3-3x^2-3x+2=0$

πιθανές ακέραιες ρίζες: ±1, ±2

2	-3	-3	2	2
	4	2	-2	
2	1	-1	**0**	

Άρα $P(x)=2x(x-2)(2x^2+x-1)$

$2x^2+x-1=0$, $\Delta=9>0$ οπότε $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm3}{4}$,

άρα $x=-1$ ή $x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$ -1	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
x	−	−	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
$2x^2+x-1$	+	−	−	+	+
$P(x)$	+	−	+	−	+

Άρα $x\in[-1,0]\cup\left[\dfrac{1}{2},2\right]$

ii) $\upsilon=P(1)=-4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$2-2\eta\mu^2\theta-(1+\sigma\upsilon\nu\theta)=0 \overset{\eta\mu^2\theta=1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\Leftrightarrow}$$

$2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\sigma\upsilon\nu\theta-1=0$. Θέτουμε $\omega=\sigma\upsilon\nu\theta$ με $|\omega|\le1$ οπότε έχουμε: $\left.\begin{array}{r}2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\sigma\upsilon\nu\theta-1=0\\ \omega=\sigma\upsilon\nu\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{r}2\omega^2-\omega-1=0\\ \omega=\sigma\upsilon\nu\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=-\dfrac{1}{2}$. Άρα

$\sigma\upsilon\nu\theta=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu0\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pi$, $\kappa\in Z$

ή $\sigma\upsilon\nu\theta=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 9η. Δίνεται το πολυώνυμο: $\mathbf{P(x)=(\alpha-3)x^5+x^4+\beta x^3+\gamma x^2-22x+6\beta}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$**, το οποίο είναι τετάρτου βαθμού και έχει παράγοντα το** x^2-3x+2

i) Να βρεθούν οι τιμές των α,β,γ

ii) Αν $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=-7$ **να λυθεί η εξίσωση** $P(x)=0$ **και να γραφεί το** $P(x)$ **σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.**

Λύση: i) Το $P(x)$ είναι $4^{ου}$ βαθμού άρα ο συντελεστής του x^5 είναι 0 δηλαδή $\alpha-3=0\Leftrightarrow\alpha=3$. Αφού έχει παράγοντα το $x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2)$ θα είναι:

$x^4+\beta x^3+\gamma x^2-22x+6\beta=(x^2-3x+2)\cdot Q(x)$ Για $x=1$ έχουμε: $1+\beta+\gamma-22+6\beta=0\Leftrightarrow7\beta+\gamma=21$ (1)

Για $x=2$ έχουμε:

$16+8\beta+4\gamma-44+6\beta=0\Leftrightarrow7\beta+2\gamma=14$ (2)

από (1),(2) προκύπτει $\beta=4$ και $\gamma=-7$

ii) $P(x)=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι

$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$

το άθροισμα των συντελεστών είναι μηδέν επομένως το 1 είναι ρίζα, πράγματι

1	4	-7	-22	24	1
	1	5	-2	-24	
1	5	-2	-24	**0**	

1	5	-2	-24	2
	2	14	24	
1	7	12	**0**	

$P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+7x+12)$, $x^2+7x+12=0$,

$\Delta=1>0$, άρα $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm1}{2}$ άρα $x_1=-4$ ή $x_2=-3$.

Τελικά $P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

Άσκηση 10η. Δίνεται το πολυώνυμο: $\mathbf{P(x)=(x+1)^{2021}+(\kappa+x)^{2022}}$. **Να βρείτε τις τιμές του** κ **ώστε το** $P(x)$ **να διαιρείται με το** $x+2$**. Στη συνέχεια για** $\kappa=3$ **να δείξετε ότι για το** $Q(x)=P(x-1)$ **ισχύει** $Q(0)+Q(-2)=2^{2021}$

Λύση: Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το $x+2\Leftrightarrow$ $P(-2)=0\Leftrightarrow(-1)^{2021}+(\kappa-2)^{2022}=0\Leftrightarrow$ $(\kappa-2)^{2022}=1$, οπότε $\kappa-2=\pm1$ άρα $\kappa=3$ ή $\kappa=1$. Για $\kappa=3$ είναι

$Q(x)=P(x-1)=x^{2021}+(2+x)^{2022}$ άρα

$Q(0)=2^{2022}$ και $Q(-2)=(-2)^{2021}=-2^{2021}$

οπότε $Q(0)+Q(-2)=2^{2022}-2^{2021}=2^{2021}$

Άσκηση 11η. Δίνεται

$\mathbf{P(x)=(\lambda^3-\lambda)x^3-(\lambda^2+\lambda)x+\lambda^3+\lambda}$, $\lambda\in R$

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ **ώστε**

i) να είναι μηδενικού βαθμού

ii) να είναι το μηδενικό πολυώνυμο

Λύση: i) Ο συντελεστής του x^3 μηδενίζεται όταν $\lambda^3-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ οπότε $\lambda=0$ ή $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$. Ενώ ο συντελεστής του x^2 μηδενίζεται όταν $\lambda^2+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=-1$. Για $\lambda=-1$ είναι $P(x)=-2$, δηλαδή είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

ii) Για $\lambda=0$ είναι $P(x)=0$, δηλαδή είναι το μηδενικό πολυώνυμο (για το οποίο δεν ορίζεται βαθμός).

Άσκηση 12η. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί A, B ώστε να ισχύει:

$$\frac{10}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

Λύση: Έχουμε

$$\frac{10}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Άρα $\dfrac{10}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{(A+B)x+2A-3B}{(x-3)(x+2)}$

$$(A+B)x+2A-3B=10 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} A+B=0 \\ 2A-3B=10 \end{matrix}\right\}$$

$A=2$ και $B=-2$, τελικά

$$\frac{10}{x^2-x-6}=\frac{10}{(x-3)(x+2)}=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+2}$$

Άσκηση 13η. Δίνεται το πολυώνυμο 3ου βαθμού $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha,\delta\neq 0$

i) Αν $(\beta+\delta)^2-(\alpha+\gamma)^2\neq 0$ τότε το P(x) δεν διαιρείται με το $x-1$ ούτε με το $x+1$

ii) Αν $P(P(0))-P(0)\neq 0$ τότε ο δ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

Λύση: i) Για να διαιρείται με το $x-1$ πρέπει $P(1)=0$ δηλαδή $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=-(\beta+\delta)$

Για να διαιρείται με το $x+1$ πρέπει $P(-1)=0$ δηλαδή $-\alpha+\beta-\gamma+\delta=0 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$

Αλλά δίνεται ότι $(\beta+\delta)^2-(\alpha+\gamma)^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta+\delta\neq\pm(\alpha+\gamma)$ οπότε ούτε ο ένας παράγοντας ούτε ο άλλος είναι μηδέν.

ii) $P(0)=\delta$ και $P(P(0))=P(\delta)=\alpha\delta^3+\beta\delta^2+\gamma\delta+\delta$, οπότε $P(P(0))-P(0)=\delta(\alpha\delta^2+\beta\delta+\gamma)$ και αφού $P(P(0))-P(0)\neq 0$ θα είναι $\delta(\alpha\delta^2+\beta\delta+\gamma)\neq 0$, δίνεται $\delta\neq 0$ επομένως και $\alpha\delta^2+\beta\delta+\gamma\neq 0$, άρα ο δ, δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Άσκηση 14η. Δίνεται το πολυώνυμο 3ου βαθμού $P(x)=x^3+(\alpha-1)x^2-(\beta+2)x+3$,

i) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι 5 να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$

ii) Αν $\alpha=2$ και $\beta=3$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $P(x)<0$.

Λύσηq i) Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1 \Leftrightarrow P(1)=0$, άρα $1+\alpha-1-\beta-2+3=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-1$ (1) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι $\upsilon=5 \Leftrightarrow P(2)=5$, οπότε $8+(\alpha-1)\cdot 4-(\beta+2)\cdot 2+3=5 \Leftrightarrow 2\alpha-\beta=1 (2)$ από (2)-(1) προκύπτει $\alpha=2$ οπότε $\beta=\alpha+1 \Leftrightarrow \beta=3$

ii) Για $\alpha=2$ και $\beta=3$ έχουμε $P(x)=x^3+x^2-5x+3$. Αρχικά θα λύσουμε την εξίσωση P(x)=0, το άθροισμα των συντελεστών είναι 0 οπότε το 1 είναι ρίζα του P(x) , θα βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ με σχήμα Horner

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -5 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & -3 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & |0 & \end{array}$$

Άρα $P(x)=(x-1)(x^2+2x-3)$ οπότε $P(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+2x-3=0$ από αυτή προκύπτουν ακόμα δύο ρίζες: $x=\dfrac{-2-4}{2}=-3$ και $x=\dfrac{-2+4}{2}=1$, επομένως $P(x)=(x-1)^2(x+3)$ και αφού $(x-1)^2\geq 0$ θα είναι $P(x)<0 \Leftrightarrow x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$

Ασκήσεις για Λύση

1). Δίνεται ότι το της διαίρεσης P(x): (x-1) είναι 2
Ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x-2) είναι 1
Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:
P(x): (x^2-3x+2)

2). Να λυθεί η $4\eta\mu^3 x+8\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x-6=0$

3). Δείξτε ότι η $(\lambda-1)x^3+(\lambda^2+1)x^2+\lambda x+2=0$ με λ ακέραιο και λ>1 δεν έχει ακέραιες ρίζες.

4). Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $2x^3-3x^2-3x+2=0$

ii) $6x^4+x^3-16x^2+11x-2=0$

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις στην ευθεία

Λουμπαρδιά Αγγελική

ΑΣΚΗΣΗ 1 Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): \sqrt{3}x+y+2=0$. Να βρείτε:

i) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $\lambda_{(\varepsilon)}$.

ii) Τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον x΄x άξονα.

iii) Τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.

iv) Την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία (ε).

v) Την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι κάθετη με την ευθεία (ε).

Λύση:

i) Ο τύπος της ευθείας (ε) λύνεται ως προς y και γίνεται $y=-\sqrt{3}x-2$ οπότε $\lambda_\varepsilon=-\sqrt{3}$.

ii) Γνωρίζουμε ότι $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\hat{\varphi}=-\sqrt{3}$ οπότε $\hat{\varphi}=120^\circ$ όπου φ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x΄x άξονα.

iii) Για $x=0$ ο τύπος της ευθείας ε δίνει $\mathbf{y=-2}$, άρα η ευθεία τέμνει τον y΄y στο σημείο $K(0,-2)$.

Για $y=0$ ο τύπος της ευθείας δίνει $x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, άρα η ευθεία τέμνει τον x΄x στο $\Lambda\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$.

iv) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία (ε), θα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης λ με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε), δηλαδή $\lambda_\delta=\lambda_\varepsilon=-\sqrt{3}$ και η εξίσωση της είναι $y-2=-\sqrt{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x+2+\sqrt{3}$

v) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι κάθετη με την ευθεία (ε) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης που θα δίνεται από τον τύπο $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1$ δηλαδή $\lambda=\dfrac{-1}{\lambda_\varepsilon}=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τον τύπο $y-2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

ΑΣΚΗΣΗ 2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(0, 1), Β(3, –2) και Γ(5, 4). Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των μέσων Δ και Ζ των πλευρών ΑΓ και ΓΒ.

ii) τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τα Α και Β (ε_1) και από τα Δ και Ζ (ε_2). Ποια η σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2; $\overrightarrow{\Gamma Z}$

iii) το είδος του τετραπλεύρου ΔΒΓΖ και το εμβαδόν του;

Λύση:

i) Οι συντεταγμένες των μέσων Δ και Ζ των πλευρών ΑΓ και ΓΒ αντίστοιχα, είναι $\Delta\left(\dfrac{0+5}{2},\dfrac{1+4}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)$ και

ii) $\lambda_{\varepsilon_1}=\dfrac{-2-1}{3-0}=-1$, οπότε η εξίσωση της ευθείας ε_1 θα είναι ε_1: $y-1=-x\Leftrightarrow y=-x+1$

και $\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{1-\frac{5}{2}}{4-\frac{5}{2}}=-1$, οπότε η εξίσωση της ευθείας ε_2 θα είναι $y=-x+5$ και άρα $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$

iii) Το τετράπλευρο ΔΒΓΖ είναι τραπέζιο (αφού έχει δυο πλευρές παράλληλες ΔΖ // ΑΒ, ενώ οι άλλες δυο πλευρές ΑΔ και ΖΒ τέμνονται στο Γ). Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου (ένας τρόπος), από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ αφαιρούμε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΖ.

Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$ $\overrightarrow{A\Gamma}=(5,3)$ αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, είναι $\overrightarrow{\Gamma Z}=(-1,-3)$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ αντίστοιχα.

Τα εμβαδά των δυο τριγώνων δίνονται από τους τύπους:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}3 & -3\\ 5 & 3\end{matrix}\right\|=12\tau.\mu \text{ και}$$

$$(\Gamma\Delta Z)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\Gamma Z},\overrightarrow{\Gamma\Delta})\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-1 & -3\\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-6|=3\tau.\mu$$

Οπότε $(\Delta ABZ)=(AB\Gamma)-(\Gamma\Delta Z)=9$ τ.μ

ΑΣΚΗΣΗ 3 Δίνεται η εξίσωση (1) με $\lambda \in R$.

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) κάθετες μεταξύ τους.

ii) Αν Μ το σημείο τομής αυτών των ευθειών, να βρείτε τις συντεταγμένες του και τη γραμμή πάνω στον οποίο κινείται το σημείο αυτό.

iii) Αν Α και Β τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον άξονα x΄x αντίστοιχα, να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΜΒ .

Λύση:

i) Η εξίσωση (1) γράφεται $-x^2+3\lambda x+y^2-\lambda y-2\lambda^2=0$ (2) και είναι μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς x. Η διακρίνουσα δίνεται από τον τύπο $\Delta=9\lambda^2+4\left(y^2-\lambda y-2\lambda^2\right)=\left(2y-\lambda\right)^2\geq 0$ και οι λύσεις δίνονται από τον τύπο $x_{1,2}=\frac{-3\lambda\pm(2y-\lambda)}{-2}=\begin{cases}-y+2\lambda\\ y+\lambda\end{cases}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτουν δυο ευθείες οι $\left(\varepsilon_1\right):y=-x+2\lambda$ και $\left(\varepsilon_2\right):y=x-\lambda$ που είναι κάθετες μεταξύ τους αφού $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1$.

ii) το σημείο τομής Μ των δυο ευθειών δίνεται από την λύση του συστήματος που ορίζουν οι δυο ευθείες ε_1 και ε_2, και έχουμε $M(\frac{3\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})$. Θέτουμε $x_M=3\frac{\lambda}{2}$ και $y_M=\frac{\lambda}{2}$ και με απαλοιφή του λ βρίσκουμε $y_M=\frac{1}{3}x_M$, δηλαδή το σημείο Μ κινείται πάνω στην ευθεία $y=\frac{1}{3}x$.

iii) Το σημείο τομής της (ε_1) με τον άξονα x΄x είναι $A\left(2\lambda,0\right)$ και το σημείο τομής της (ε_2) με τον άξονα x΄x είναι $B\left(\lambda,0\right)$. Αφού το σημείο Μ έχει συντεταγμένες, $M(\frac{3\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})$, το μήκος του ΜΑ θα είναι:

$$(MA)=\sqrt{(2\lambda-\frac{3\lambda}{2})^2+(0-\frac{\lambda}{2})^2}=\sqrt{2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}|\lambda|$$

(2). Ομοίως το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΒ θα είναι: $(MB)=\sqrt{\left(\lambda-\frac{3\lambda}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\lambda}{2}\right)^2}=$ $\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}|\lambda|$ (3). Από (2),(3) προκύπτει ότι $\left(MA\right)=\left(MB\right)$. Επομένως το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

ΑΣΚΗΣΗ 4 Δίνονται τα σημεία $A\left(\alpha+1,2\alpha-1\right)$ και $B\left(\alpha+3,1\right)$. Αν το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ ανήκει στην ευθεία $\left(\varepsilon\right):x+y-4=0$. Να βρείτε:

i) το α.

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και την οξεία γωνία που σχηματίζει με την ε.

iii) την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε, καθώς και το σημείο τομής τους Κ.

iv) την εξίσωση της ευθείας (ε_2) που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε, καθώς και το σημείο τομής τους Λ.

v) το είδος του τετραπλεύρου ΑΚΒΛ.

Λύση:

i) Το μέσο Μ του ΑΒ θα έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{\alpha+1+\alpha+3}{2},\frac{2\alpha-1+1}{2}\right)=(\alpha+2,\alpha)$. Επειδή το $M\in\left(\varepsilon\right)$ θα την επαληθεύει και έτσι θα έχουμε $\alpha+2+\alpha-4=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

ii) Για $\alpha=1$ τα σημεία γίνονται $A\left(2,1\right)$, $B\left(4,1\right)$ και $M\left(3,1\right)$ και η ευθεία που θα διέρχεται από τα δυο σημεία αυτά επειδή έχουν την ίδια τεταγμένη θα έχει εξίσωση $y=1$. Θεωρώ το διάνυσμα $\vec{v}=(1,-1)$ παράλληλο στην ευθεία ε και το διάνυσμα $\vec{u}=(1,0)$ παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση $y=1$ οπότε η οξεία γωνία φ των δυο ευθειών θα είναι η ίδια με τη οξεία γωνία που σχηματίζουν αυτά τα δυο διανύσματα και θα έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1\cdot1+(-1)\cdot0}{\sqrt{2}\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \varphi=45^o.$$

iii) Είναι $\left(\varepsilon\right)\perp\left(\varepsilon_1\right)\Leftrightarrow\lambda_{(\varepsilon)}\cdot\lambda_{(\varepsilon_1)}=-1\Leftrightarrow\lambda_{(\varepsilon_1)}=1$.

Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το Α(2,1) άρα δίνεται από τον τύπο $\left(\varepsilon_1\right):y-1=1\left(x-2\right)$, δηλαδή $\left(\varepsilon_1\right):y=x-1$ και το σημείο τομής της με την ε είναι το σημείο $K\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

iv) Είναι $(\varepsilon)\perp(\varepsilon_2)\Leftrightarrow\lambda_{(\varepsilon)}\cdot\lambda_{(\varepsilon_2)}=-1\Leftrightarrow\lambda_{(\varepsilon_2)}=1$

Η ευθεία (ε_2) διέρχεται από το $B(4,1)$ και είναι κάθετη στην ε οπότε $(\varepsilon_2): y-1=1(x-4)$, δηλαδή $(\varepsilon_2): y=x-3$ και το σημείο τομής της με την ε είναι το σημείο Λ με συντεταγμένες $\Lambda\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$.

v) Επειδή το Μ είναι και μέσο του ΚΛ το τετράπλευρο ΑΚΒΛ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται.

ΑΣΚΗΣΗ 5 Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): x-y+3=0$ και $(\varepsilon_2): x-y-9=0$.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία $\frac{d(M,(\varepsilon_1))}{d(M,(\varepsilon_2))}=\frac{1}{3}$.

Λύση:

Έστω $M(x,y)$ τα ζητούμενα σημεία. Η απόσταση του Μ από την από την ε_1 είναι $d(M,(\varepsilon_1))=\frac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}$ (1) και η απόσταση του Μ από την ε_2 $d(M,(\varepsilon_2))=\frac{|x-y-9|}{\sqrt{2}}$ (2).

Έχουμε $\frac{d(M,(\varepsilon_1))}{d(M,(\varepsilon_2))}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{|x-y+3|}{|x-y-9|}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$3|x-y+3|=|x-y-9|\Leftrightarrow$

$x-y-9=\pm(3x-3y+9)\Leftrightarrow y=x+9$ ή $y=x$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία που ανήκουν στην ευθεία $(\delta_1): y=x+9$ και τα σημεία που ανήκουν στην ευθεία $(\delta_2): y=x$.

ΑΣΚΗΣΗ 6 Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $(\varepsilon_1): (\alpha-1)x+\alpha y=\alpha$ και $(\varepsilon_2): 2x-\alpha y=1$, για τις διάφορες τιμές του α.

Λύση:

Θεωρούμε το παρακάτω γραμμικό 2x2 σύστημα με εξισώσεις τις εξισώσεις των δυο ευθειών (ε_1), (ε_2). $\left.\begin{array}{r}(\alpha-1)x+\alpha y=\alpha\\ 2x-\alpha y=1\end{array}\right\}$.

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x και D_y του συστήματος ως εξής:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha-1 & \alpha\\ 2 & -\alpha\end{vmatrix}=-\alpha^2+\alpha-2\alpha=-\alpha(\alpha+1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\\ 1 & -\alpha\end{vmatrix}=-\alpha^2-\alpha=-\alpha(\alpha+1)\text{ και}$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\alpha-1 & \alpha\\ 2 & 1\end{vmatrix}=\alpha-1-2\alpha=-(\alpha+1)$$

Εάν $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq -1$ η ορίζουσα $D\neq 0$ οπότε το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση και οι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 θα τέμνονται σε ένα σημείο.

Για $\alpha=0$ έχουμε: $\left.\begin{array}{r}-x=0\\ 2x=1\end{array}\right\}$, αδύνατο και άρα δεν έχει λύση οπότε οι δυο ευθείες ε_1 και ε_2 δεν θα έχουν κοινό σημείο και άρα θα είναι παράλληλες.

Για $\alpha=-1$ έχουμε: $\left.\begin{array}{r}-2x-y=-1\\ 2x+y=1\end{array}\right\}\Rightarrow 2x+y=1$

οπότε το παραπάνω σύστημα είναι αόριστο και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται.

ΑΣΚΗΣΗ 7 Δίνεται η εξίσωση:

$(\lambda^2-4)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y+\lambda^2-2\lambda=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in R$ η εξίσωση (1) :

i) Παριστάνει ευθεία

ii) Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον x΄x άξονα

iii) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον y΄y άξονα

iv) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων

v) Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται οι ευθείες που προκύπτουν από την εξίσωση (1) για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ.

Λύση:

i) Η εξίσωση (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^2-4=0\\ \lambda^2-3\lambda+2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\lambda=\pm 2\\ \lambda=1\text{ ή }\lambda=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lambda=2$$

οπότε για να είναι ευθεία η (1) θα πρέπει $\lambda\neq 2$.

ii) Για να παριστάνει η (1) ευθεία παράλληλη στον x΄x θα πρέπει

$$\left.\begin{array}{r}\lambda\neq 2\\ \lambda^2-4=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}\lambda\neq 2\\ \lambda=\pm 2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lambda=-2.$$

iii) Για να παριστάνει η (1) ευθεία παράλληλη στον y΄y θα πρέπει

$$\left.\begin{array}{c}\lambda\neq 2\\ \lambda^2-3\lambda+2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\lambda\neq 2\\ \lambda=1\text{ ή }\lambda=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lambda=1.$$

iv) Η (1) παριστάνει ευθεία και διέρχεται από το $O(0,0)$ όταν

$$\left.\begin{matrix}\lambda\neq 2\\ \lambda^2-2\lambda=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda\neq 2\\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\lambda=0$$

v) Η εξίσωση γίνεται:

$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y+\lambda=0\Leftrightarrow$

$\lambda x+2x+\lambda y-y+\lambda=0\Leftrightarrow$

$\lambda(x+y+1)+(2x-y)=0\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}x+y+1=0\\ 2x-y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{2}{3}\end{matrix}\right\}$. Άρα διέρχονται από το σταθερό σημείο $K\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 8 Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{4x^2+y^2-4xy-10\lambda x+5\lambda y+4\lambda^2=0}$ **(1) με** $\lambda\in\mathbf{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες μεταξύ τους.

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των παραπάνω ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι $\frac{3|\lambda|}{\sqrt{5}}$

iii) Αν θεωρήσουμε ένα τετράγωνο με πλευρά $6\sqrt{5}$**, ότι έχει δυο πλευρές του πάνω στις προηγούμενες ευθείες (ε_1) και (ε_2) να βρείτε το λ.**

Λύση:

i) Η εξίσωση (1) γράφεται ως εξής:

$(2x-y)^2-5\lambda(2x-y)+4\lambda^2=0$, (2)

και είναι δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το $(2x-y)$ και διακρίνουσα $\Delta=9\lambda^2\geq 0$. Οι ρίζες της εξίσωσης δίνονται $x-y=\frac{5\lambda\pm 3\lambda}{2}=\begin{cases}4\lambda\\ \lambda\end{cases}$.

Οπότε έχουμε $2x-y=4\lambda\Leftrightarrow(\varepsilon_1):y=2x-4\lambda$ ή $2x-y=\lambda\Leftrightarrow(\varepsilon_2):y=2x-\lambda$.

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1=\lambda_2=2$ άρα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες μεταξύ τους.

ii) Έστω σημείο $M(2\lambda,0)$ που ανήκει στην ευθεία

(ε_1). Η απόσταση του M από την ε_2 δίνεται από τον τύπο $d(M,(\varepsilon_2))=\frac{|4\lambda-\lambda|}{\sqrt{5}}=\frac{|3\lambda|}{\sqrt{5}}=\frac{3|\lambda|}{\sqrt{5}}$

iii) Η απόσταση του M από την ε_2 θα ισούται με την πλευρά του τετραγώνου και έτσι θα έχουμε

$d(M,(\varepsilon_2))=6\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{3|\lambda|}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}\Leftrightarrow|\lambda|=10\Leftrightarrow$ $\lambda=\pm 10$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(6,2)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(6,-4)$. Να βρείτε: **i)** τις εξισώσεις των ευθειών που ορίζουν οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ.

ii) Την γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου.

iii) Την εξίσωση του ύψους από την κορυφή Β, καθώς και το μήκους αυτού.

iv) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

[**Απάντηση:** i) ε_{AB}: x+y=8 $\varepsilon_{A\Gamma}$: x=6 ii) $\hat{A}=135^0$ iii) $\varepsilon_{υ}$: y=4, μήκος υψους= 4 μ.μ iv) (ΑΒΓ)=6 τ.μ]

ΑΣΚΗΣΗ 2 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και οι εξισώσεις ευθείας των δυο πλευρών του είναι $\varepsilon_1:2x+3y=10$ και $\varepsilon_2:3x-2y=2$. Αν το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο $K\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$, να βρείτε: **i)** τις εξισώσεις των ευθειών των άλλων δυο πλευρών

ii) τις εξισώσεις των ευθειών των δυο διαγωνίων του καθώς επίσης και

iii) τις συντεταγμένες των τεσσάρων κορυφών του Α, Β, Γ, Δ.

[**Απάντηση:** i). 3x–2y= 15, 2x+3y= –3 ii). 5x+y=12, –x+5y= –5 iii). A(2, 2) B(5, 0) Γ(3, –3) Δ(0, –1)]

ΑΣΚΗΣΗ 3 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(1,2)$ και $B(-2,7)$. Οι διαγώνιες του με εξισώσεις $x+y-5=0$ και $2x+y-4=0$ διχοτομούνται στο σημείο $K(-1,6)$. Να βρείτε: **i)** τις συντεταγμένες των άλλων δυο κορυφών Γ και Δ ,

ii) το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και **iii)** το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

[**Απάντηση:** I. Γ(–3, 10), Δ(0,5) II. Παραλληλόγραμμο III. 4 τ.μ].

Τάξη: Β΄

Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος με Αναλυτική Γεωμετρία

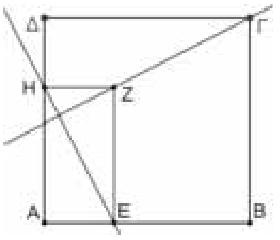
Λυγάτσικας Ζήνων

Για να λύσουμε ένα **γεωμετρικό πρόβλημα** με αναλυτική γεωμετρία πρέπει να κάνουμε τρείς βασικές ενέργειες:

- Να επιλέξουμε **τη θέση του συστήματος συντεταγμένων**, δηλαδή ποιο σημείο του γεωμετρικού σχήματος θα βάλουμε στην αρχή του συστήματος και ποια σημεία θα ανήκουν ή όχι στους δύο άξονες, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα. Στόχος μας είναι να έχουμε το μικρότερο δυνατό αριθμό μεταβλητών στο πρόβλημα. Μια κακή επιλογή συντεταγμένων μπορεί να οδηγήσει σε δαιδαλώδεις υπολογισμούς και σπαζοκεφαλιές.
- Να μεταφέρουμε **το σχήμα στο σύστημά μας** και δηλώνουμε τις συντεταγμένες των σημείων που εμπλέκονται στο πρόβλημα.
- Να **εκτελέσουμε** τους υπολογισμούς υποδεικνύοντας τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε.

Για να δούμε ένα παράδειγμα.

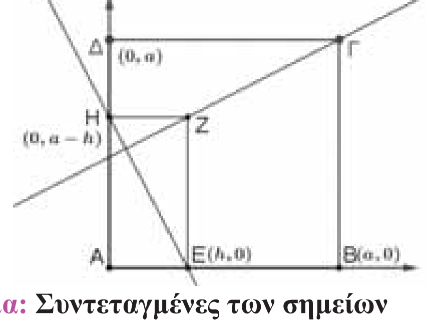
Δίδεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με μήκος πλευράς α. Στο εσωτερικό του τετραγώνου κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΕΖΗ ως εξής:



Επιλέγουμε δύο σημεία Ε και Η στο εσωτερικό των πλευρών ΑΒ και ΑΔ έτσι ώστε ΑΕ = ΔΗ. Δείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ και ΖΓ είναι κάθετες

1^o Βήμα: **Επιλογή συστήματος αναφοράς**

Στη περίπτωσή μας, η επιλογή του συστήματος αναφοράς, εξ αιτίας της ορθής γωνίας στη κορυφή Α, μπορεί να είναι το σημείο Α και οι δύο κάθετοι άξονες να είναι οι φορείς των πλευρών ΑΒ και ΑΔ. Έτσι στο πρόβλημα θα έχουμε δύο μόνο μεταβλητές όπως θα δούμε στη συνέχεια.



2^o Βήμα: **Συντεταγμένες των σημείων**

Το σημείο $A(0,0)$, το $B(\alpha,0)$, το $\Gamma(\alpha,\alpha)$ και το $\Delta(0,\alpha)$. Έστω $0<h<\alpha$, επιλέγω το σημείο Ε να έχει συντεταγμένες $E(h,0)$. Τότε το $Z(h,\alpha-h)$ και $H(0,\alpha-h)$. Οι μεταβλητές α και h μπορούν να περιγράψουν το πρόβλημα.

3^o Βήμα: **Υπολογισμοί**

Θα δείξουμε ότι οι ευθείες ΖΓ και ΗΕ είναι κάθετες. Αρκεί να επαληθεύσουμε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών είναι ίσο με -1.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΖΓ είναι ($\alpha \neq h$ και $h \neq 0$):

$$\lambda_{Z\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_z}{x_\Gamma-x_z}=\frac{\alpha-(\alpha-h)}{\alpha-h}=\frac{h}{\alpha-h}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΕΗ είναι:

$$\lambda_{EH}=\frac{y_H-y_E}{x_H-x_E}=\frac{(\alpha-h)-0}{0-h}=\frac{\alpha-h}{-h}$$

Τότε, $\lambda_{Z\Gamma}\cdot\lambda_{EH}=\dfrac{h}{\alpha-h}\cdot\dfrac{\alpha-h}{-h}=-1$.

Συμπέρασμα: Οι ευθείες ΖΓ και ΕΗ είναι κάθετες μεταξύ τους.

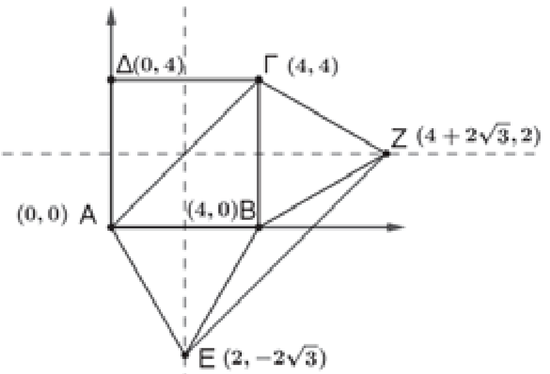
ΆΣΚΗΣΗ $1^η$. **Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς 4, κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΖ. Δείξτε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.**

Λύση: Επιλέγουμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Α και άξονες πάνω στις πλευρές του τετραγώνου ΑΒ και ΑΔ. Τότε οι συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι αντίστοιχα: $A(0,0)$, $B(4,0)$, $\Gamma(4,4)$ και $\Delta(0,4)$. Η κορυφή Ε έχει τετμημένη στο μέσο της ΑΒ και τεταγμένη ίση με το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΕ που είναι ίσο με $2\sqrt{3}$ (από το πυθαγόρειο θεώρημα). Άρα, οι συντεταγμένες του Ε είναι $\left(2,-2\sqrt{3}\right)$. Η τετμημένη της κορυφής Ζ είναι το μήκος 4 της ΑΒ συν το ύψος $2\sqrt{3}$ του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΖΓ, ενώ η τεταγμένη του είναι 2.

Άρα, οι συντεταγμένες του Ζ είναι $\left(4+2\sqrt{3},2\right)$.

Για να δείξουμε ότι ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες, πρέπει να συγκρίνουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΓ και ΕΖ. Πράγματι:

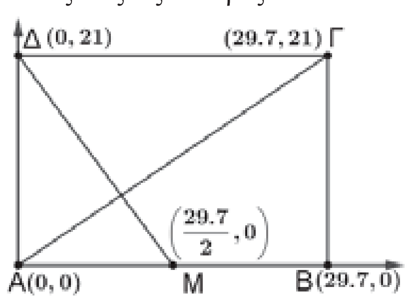
$$\lambda_{ΑΓ}=\frac{4-0}{4-0}=1 \text{ και } \lambda_{ΕΖ}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}=1.$$



Επομένως, οι συντελεστές είναι ίσοι και συνεπώς οι δύο ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

ΆΣΚΗΣΗ 2η. Το πηλίκο μήκος/πλάτος ενός χαρτιού τύπου Α4 είναι $\sqrt{2}$. Οι διαστάσεις ενός Α4 είναι περίπου 29,7 cm x 21 cm. Ένα τέτοιου είδους χαρτί ορίζει ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Να δείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΜ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΑΓ.

Λύση: Επιλέγουμε ορθοκανονικό σύστημα με αρχή το Α και άξονες τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ.



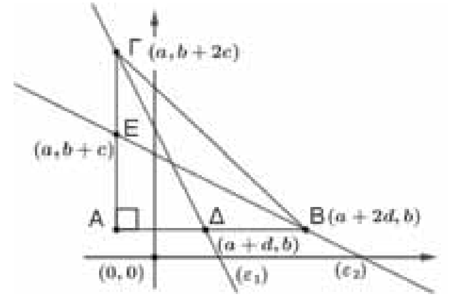
Ας κάνουμε το συμβιβασμό ότι το πηλίκο $\frac{29,7}{21}\approx\sqrt{2}$, αυτό θα διευκολύνει αισθητικά τους υπολογισμούς. Τότε: $\lambda_{ΑΓ}=\frac{21-0}{29,7-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

επίσης, $\lambda_{ΔΜ}=\frac{-21}{\frac{29,7}{2}-0}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

ΆΣΚΗΣΗ 3η. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι παράλληλες στους δύο άξονες ενός ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς. Να βρείτε τη τιμή που πρέπει να πάρει η παράμετρος k έτσι ώστε οι ευθείες $2y=-x+8$ και $y=kx+5$ να είναι οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις κάθετες πλευρές του τριγώνου.

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει το τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε να είναι ορθογώνιο στο Α με δύο κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ παράλληλες στους δύο άξονες όπως φαίνεται στο σχήμα. Το τρίγωνο υποθέτουμε ότι έχει διάμεσους ΒΕ και ΓΔ πάνω στις δύο ευθείες $(\varepsilon_1):2y=-x+8$ και $(\varepsilon_2):y=kx+5$, αντίστοιχα. Για να τέμνονται οι δύο ευθείες πρέπει $k\neq-\frac{1}{2}$.

Οι συντεταγμένες των σημείων στο σύστημά μας είναι: $Α(\alpha,b)$, $Ε(\alpha,b+c)$, $Γ(\alpha,b+2c)$, $Δ(\alpha+d,b)$ και $Β(\alpha+2d,b)$, με α,b,c και d πραγματικούς και c, d διάφορους του μηδενός.



Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $(\varepsilon_1):2y=-x+8$ είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και είναι ίσος με τον συντελεστή της ευθείας ΒΕ ο οποίος είναι

$$\lambda_{ΒΕ}=\frac{b+c-b}{\alpha-(\alpha+2d)}=-\frac{c}{2d}$$

Άρα, $-\frac{1}{2}=-\frac{c}{2d}\Leftrightarrow c=d \quad (1)$

Επίσης, ο συντελεστής της ευθείας $(\varepsilon_2):y=kx+5$ είναι $\lambda_2=k$ και είναι ίσος με τον συντελεστή της ευθείας ΓΔ:

$\lambda_{ΓΔ}=\frac{b-(b+2c)}{\alpha+d-\alpha}=-2$, επομένως, $k=-2$.

Άρα, το γινόμενο $\lambda_{ΑΓ}\cdot\lambda_{ΔΜ}=-1$ και συνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα είναι κάθετα.

ΆΣΚΗΣΗ 4η. Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ. Εξωτερικά κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΗΖ και ΑΓΔΕ. Να αποδειχθεί ότι:

α) Η ΒΕ είναι κάθετη στη ΓΖ

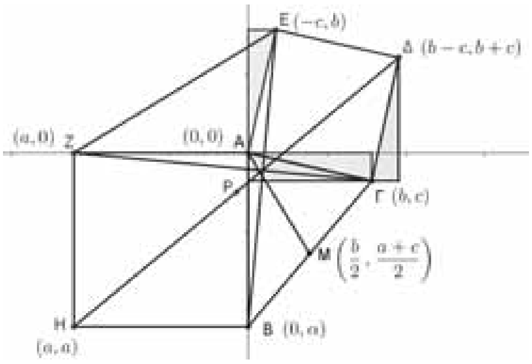
β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε η ΑΜ είναι κάθετη στην ΖΕ.

γ) Αν Ρ είναι το μέσο της ΗΔ, τότε ΒΡ είναι κάθετη στη ΓΡ.

Λύση: *Για να εκτιμήσετε το κέρδος (αν υπάρχει) της απόδειξης της γεωμετρικού προβλήματος με αναλυτική γεωμετρία της συνιστώ να κάνετε πρώτα τη γεωμετρική απόδειξη της άσκησης.*

Εδώ θα μεταφέρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το σημείο Α να συμπέσει με την αρχή των αξόνων $(0,0)$, η κορυφή Β να βρεθεί πάνω στον άξονα $y'y$ και η κορυφή Γ να είναι ελεύθερη σε κάποιο τεταρτημόριο το πρώτο ή το τέταρτο. Τότε οι συντεταγμένες των σημείων που μας ενδιαφέρουν μπορεί να είναι: $A(0,0)$, $B(\alpha,0)$ όπου $\alpha<0$, $\Gamma(b,c)$, $b>0$ και $c<0$, $H(\alpha,\alpha)$, $Z(\alpha,0)$, $E(-c,b)$ και $\Delta(b-c,b+c)$ *(απόδειξη)*.

Τα ζεύγη των ορθογωνίων τριγώνων, μπλε και κόκκινα, που φαίνονται στο σχήμα μας διευκολύνουν να βρούμε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ.



Τα δύο επιπρόσθετα σημεία Μ και Ρ τα οποία είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΓ και ΗΔ, έχουν αντίστοιχα συντεταγμένες:

$M\left(\frac{b}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)$ και $P\left(\frac{\alpha+b-c}{2},\frac{\alpha+b+c}{2}\right)$

α) Για να δείξουμε ότι το ΒΕ είναι κάθετο στο ΓΖ, αρκεί να δείξουμε είτε ότι $\lambda_{BE}\cdot\lambda_{\Gamma Z}=-1$, είτε ότι $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{\Gamma Z}=0$. Πράγματι: $\overrightarrow{BE}=(-c,b-\alpha)$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}=(\alpha-b,-c)$ οπότε $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{\Gamma Z}=0$.

β) Για να δείξουμε ότι το ΑΜ είναι κάθετο στο ΖΕ, αρκεί να δείξουμε είτε ότι $\lambda_{AM}\cdot\lambda_{ZE}=-1$ είτε ότι $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{ZE}=0$. Πράγματι: $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{b}{2},\frac{\alpha+c}{2}\right)$ και $\overrightarrow{ZE}=(-c-\alpha,b)$ οπότε $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{ZE}=0$.

γ) Όμοια $\overrightarrow{BP}=\left(\frac{\alpha+b-c}{2},\frac{-\alpha+b+c}{2}\right)$ και $\overrightarrow{\Gamma P}=\left(\frac{\alpha-b-c}{2},\frac{\alpha+b-c}{2}\right)$ με

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{\Gamma P}=0\Leftrightarrow BP\perp\Gamma P$

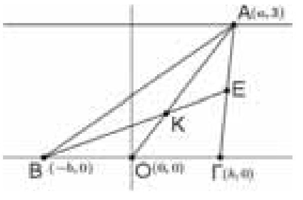
Μπορείτε να κάνετε το ίδιο αλλάζοντας το σύστημα συντεταγμένων. Τοποθετήστε το σημείο Α πάνω στον άξονα των τεταγμένων και τη πλευρά ΒΓ πάνω στο άξονα των τετμημένων.

ΆΣΚΗΣΗ 5η. Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ. Η πλευρά ΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα των τετμημένων και η κορυφή Γ κινείται πάνω στην ευθεία $y=3$, να βρείτε:

α) το γεωμ. τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου

β) το γεωμ. τόπο του ορθοκέντρου του τριγώνου.

Λύση: α) Θέτω την αρχή των αξόνων στο μέσο Ο της ΒΓ έτσι ώστε $\Gamma(b,0)$ και $B(-b,0)$, $b>0$. Το Α ανήκει στην ευθεία $y=3$ και συνεπώς έχει συντεταγμένες $A(\alpha,3)$ όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

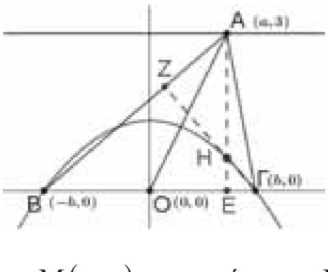


Τότε, οι συντεταγμένες του σημείο Ε είναι: $E\left(\frac{b+\alpha}{2},\frac{3}{2}\right)$. Το κέντρο βάρους Κ είναι η τομή των διαμέσων ΟΑ και ΒΕ, με εξισώσεις:

$(OA):\alpha y-3x=0$ και $(BE):y=\frac{3}{3b+\alpha}(x+b)$

Το κοινό σημείο Κ των δύο διαμέσων θα βρεθεί λύνοντας το σύστημα ως προς x και y. Τότε προκύπτει $(x,y)=\left(\frac{\alpha}{3},1\right)$ με $\alpha\in R$, δηλαδή η τετμημένη x μεταβάλλεται αλλά η τεταγμένη y παραμένει σταθερή και ίση με 1. Άρα το σημείο Κ κινείται πάνω στην ευθεία $y=1$.

β) Όπως προηγουμένως θα βρούμε τις συντεταγμένες του ορθοκέντρου Η που είναι το σημείο τομής των υψών ΑΕ και ΓΖ. Το ύψος ΑΕ έχει εξίσωση $x=\alpha$.



Έστω σημείο $M(x,y)$ του ύψους ΓΖ. Τότε $\overrightarrow{\Gamma M}=(x-b,y)$ και $\overrightarrow{AB}=(-b-\alpha,-3)$.

Αφού $\overrightarrow{\Gamma M}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow$

$(x-b)\cdot(-b-\alpha)-3y=0$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση του ύψους ΓΖ. Λύνοντας το σύστημα

$\left.\begin{matrix}(x-b)\cdot(-b-\alpha)-3y=0\\ x=\alpha\end{matrix}\right\}$ βρίσκουμε τις συντεταγμένες του ορθοκέντρου $H\left(\alpha,\dfrac{b^2-\alpha^2}{3}\right)$.

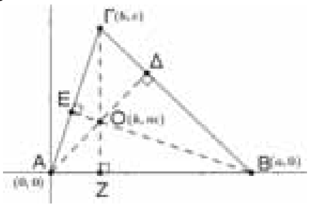
Επομένως το Η κινείται σε μια παραβολή με εξίσωση $y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{b^2}{3}$.

ΆΣΚΗΣΗ 6η . Δείξτε ότι τα ύψη σε ένα τρίγωνο συντρέχουν.

Λύση: Στο σχήμα έχουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ.

Τοποθετώ το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε $A(0,0)$, $B(\alpha,0)$ και $\Gamma(b,c)$ με α, c διαφορετικά του μηδενός.

Για να βρούμε τις εξισώσεις των υψών ΑΔ και ΒΕ, κάνουμε το εξής:



Ας υποθέσουμε ότι το σημείο $M(x,y)$ είναι ένα σημείο του ύψους ΑΔ, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι κάθετα, άρα το εσωτερικό γινόμενό τους είναι 0: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0 \Leftrightarrow (b-\alpha)\cdot x+cy=0$

Ομοίως, αν $N(x,y)$ είναι ένα σημείο του ύψους ΒΕ, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{BN}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα, άρα το εσωτερικό γινόμενό τους είναι 0:

$\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{BN}=0 \Leftrightarrow bx+cy-\alpha b=0$

Συνεπώς οι εξισώσεις των υψών είναι:

$$\begin{cases}(A\Delta):(\beta-\alpha)x+cy=0\\(BE):bx+cy-\alpha b=0\\(\Gamma Z):x=b\end{cases}$$

Επειδή α, c είναι διαφορετικά του μηδενός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σημείο $O(k,m)$ με $k,m\in R$, είναι το κοινό σημείο των υψών ΑΔ και ΒΕ (γιατί;). Τότε: $(b-\alpha)k+cm=0 \Leftrightarrow$

$(b-\alpha)k+cm+\alpha b-\alpha b=0 \Leftrightarrow$

$(bk+cm-\alpha b)+\alpha(k-b)=0$

Αλλά, το Η είναι σημείο του ύψους ΒΕ άρα: $bk+cm-\alpha b=0$. Καταλήγουμε λοιπόν από τη τελευταία ισότητα ότι $k=b$.

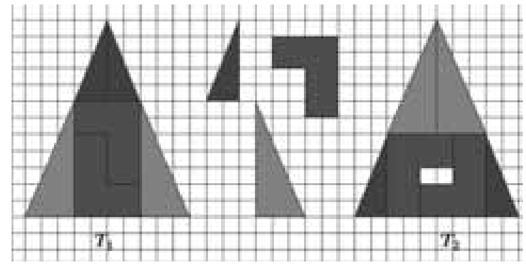
Η σχέση αυτή λέει ότι το ύψος από τη κορυφή Α διέρχεται από το σημείο Ο.

Άρα, τα τρία ύψη συντρέχουν.

Τι θα γινόταν αν επιλέγατε να τοποθετήσετε το Ζ (το ίχνος του ύψους από τη κορυφή Α στην αρχή των αξόνων;)

Δύο ερωτήσεις: Θα μπορούσατε να κάνετε την αντίστροφη διαδικασία δηλαδή, να βρείτε το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έτσι ώστε η ευθεία να έχει εξίσωση $x+2y=4$;

(Το τρίγωνο του Curry) Στο σχήμα βλέπετε μια διαμέριση T_1 ενός τριγώνου 60 τ μ. Τα ευθύγραμμα σχήματα που συμμετέχουν στη διαμέριση φαίνονται στο κέντρο του σχήματος. Το σχήμα T_2 προέκυψε από μια επανασύνθεση των ευθυγράμμων σχημάτων της προηγούμενης διαμέρισης με μια άλλη διάταξη, αλλά το εμβαδόν του τελικού σχήματος T_2 δεν φαίνεται να είναι το ίδιο με αυτό του T_1 παρά το ότι χρησιμοποιήσαμε τον ίδιο αριθμό και τα ίδια σχήματα της διαμέρισης του T_1. Προέκυψε ένα κενό 2 τετραγωνικών μονάδων (τα λευκά τετράγωνα) στο κέντρο του T_2.



Τι νομίζετε ότι έγινε τελικά; **Υπόδειξη:** Μερικά σημεία που φαίνονται συνευθειακά στο δεύτερο σχήμα δεν είναι!

Έφυγε από κοντά μας

† Βασίλειος Δουγαλής

Ο Βασίλειος Δουγαλής, Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, έφυγε από κοντά μας την **1/1/2022.** Γεννήθηκε το 1949 και σπούδασε στα Πανεπιστήμια Princeton και Harvard, από όπου έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα το 1976. Στη συνέχεια, εργάστηκε στο Πανεπιστήμιο του Tennessee έως το 1983, οπότε εξελέγη Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Το 1991 εκλέχθηκε Καθηγητής στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και το 1995 εκλέχθηκε Καθηγητής στο Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, όπου υπηρέτησε μέχρι το 2016.

Επιστήμονας διεθνούς κύρους και εργάστηκε στην ευρύτερη περιοχή των Εφαρμοσμένων και Υπολογιστικών Μαθηματικών. Τιμήθηκε το 2000 με το «Βραβείο **Εξαίρετης Πανεπιστημιακής Διδασκαλίας** εις μνήμην Ξανθόπουλου – Πνευματικού». Υπηρέτησε στο Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας στην Κρήτη ως Αντιπρόεδρος (2009-2010), ως Πρόεδρος (2010-11) και μέλος του Δ.Σ. (2011-16). Διευθυντής του Ινστιτούτου Υπολογιστικών Μαθηματικών (2004-16). Ήταν μέλος του Ελληνικού Ιδρύματος Έρευνας και Καινοτομίας. Ήταν κεντρικός ομιλητής στο **18ο** και το **28ο** Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ το 2001 και το 2011 αντίστοιχα. Επίσης, ήταν ο Πρόεδρος της Επιστημονικής Επιτροπής του 1ου Συνεδρίου των απανταχού Ελλήνων μαθηματικών που οργανώθηκε από την ΕΜΕ το 2018. Υπήρξε ηθικός, έντιμος, διακριτικός και χαμηλών τόνων. Αφήνει πίσω του ένα σημαντικό ακαδημαϊκό αποτύπωμα. Το Δ. Σ. της Ε. Μ. Ε. εκφράζει τη βαθύτατη θλίψη του, για τον θάνατο του και τα ειλικρινή του συλλυπητήρια στους οικείους του.

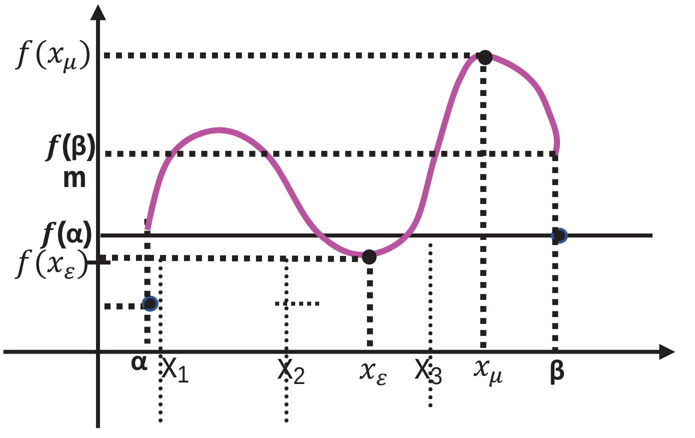
Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών συνεχών συναρτήσεων

Ένα σπουδαίο Θεώρημα

Σ. Σκοτίδας - $2^{ο}$ ΓΕΛ **Καρδίτσας**

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε οποιοσδήποτε αριθμός, έστω m, μεταξύ των f(α) και f(b) θα ισούται με f(ξ) για τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$. Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν τρία τέτοια ξ για την συγκεκριμένη τιμή του m. Επομένως όλοι οι αριθμοί m που βρίσκονται ανάμεσα στους f(α) και f(b) είναι τιμές της συνάρτησης (όλες οι ενδιάμεσες τιμές). Γεωμετρικά, το Θεώρημα εξασφαλίζει ότι η ευθεία με εξίσωση y = m, τέμνει τουλάχιστον μία φορά την γραφική παράσταση της f. Αυτό απλά σημαίνει ότι κάθε τέτοιος αριθμός m θα ανήκει στο σύνολο τιμών της f για τα $x\in(\alpha,b)$ που στο παραπάνω σχήμα είναι το διάστημα $\left[f(x_\varepsilon), f(x_\mu)\right]=f\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$ και το οποίο δεν ταυτίζεται με το $[f(\alpha), f(\beta)]$. Με βάση τα παραπάνω έχουμε $[f(\alpha), f(\beta)] \subseteq [f(x_\varepsilon), f(x_\mu)] = f([\alpha,\beta])$. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το διάστημα $f([\alpha,\beta])$ δεν έχει σίγουρα για άκρα τους αριθμούς f(α) και f(b). Για **παράδειγμα** για τη συνάρτηση $f:[-2,3]$ με $f(x)=x^2$, έχουμε $f([-2,3])=[0,9]$ (το διαπιστώνουμε εύκολα γεωμετρικά), ένα διάστημα που όμως δεν ταυτίζεται με το $[f(-2), f(3)]=[4,9]$. Μια άλλη **ανάγνωση** του Θεωρήματος, λέει ότι αν I είναι ένα διάστημα πραγματικών αριθμών και $f: I\to R$ μια συνεχής συνάρτηση, τότε το σύνολο $f(I)=\{f(x): x\in I\}$ είναι επίσης ένα διάστημα. Ενώ όμως η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ένα κλειστό διάστημα, δεν συμβαίνει το ίδιο και για ανοικτά διαστήματα. Έτσι, για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f:(-1,1)\to R$ με έχουμε

$f((-1,1))=(\frac{1}{2},\ 1]$, ενώ για τη συνάρτηση $g:(0,1)\to R$ με $g(x)=x^2-x$, έχουμε $g((0,1))=[-\frac{1}{4},\ 0)$.

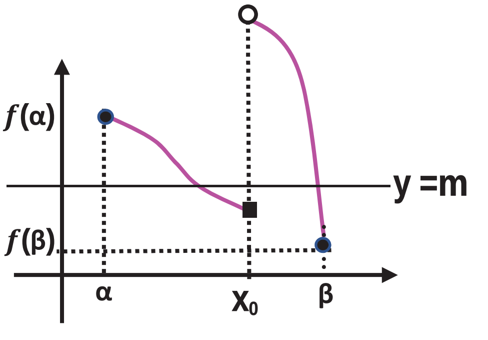


Φυσικά, την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών δεν την έχουν μόνον οι συνεχείς συναρτήσεις, κάτι που δείχνει το διπλανό σχήμα. Απλά οι συνεχείς έχουν σίγουρα αυτή την ιδιότητα. Έτσι, για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}-3, & x\in[0,1]\\ 3, & x\in(1,2]\end{cases}$$

είναι ασυνεχής στο [0, 2] και ισχύει

$-3=f(0)<\frac{1}{2}<f(2)=3$, αλλά δεν υπάρχει $\xi\in(0,2)$ ώστε $f(\xi)=\frac{1}{2}$.



Παρατηρούμε ότι αν m = 0, δηλαδή αν οι αριθμοί f(α) και f(b) είναι ετερόσημοι, τότε η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f τέμνει τουλάχιστον μία φορά τον άξονα x΄x (**Θεώρημα Bolzano**).

Μια **πρώτη ($1^η$)** άμεση συνέπεια του Θ.Ε.Τ. είναι ότι αν για μια συνεχή συνάρτηση σε διάστημα Δ, ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε όλοι οι αριθμοί f(x) οφείλουν να είναι ομόσημοι. Αν αυτό δεν συνέβαινε, τότε θα υπήρχαν $\alpha, b\in\Delta$ με $\alpha\neq b$, ώστε f(α)<0=m<f(b), έτσι άμεσα έχουμε ότι $f(\xi)=0=m$ για κάποιο $\xi\in(\alpha,b)$ ή (b,α) κάτι που δεν είναι αποδεκτό.

Μια **δεύτερη ($2^η$)** πολύ σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος των Ενδιαμέσων Τιμών, είναι το παρακάτω Θεώρημα: «Κάθε συνεχής και 1-1 συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, είναι γνησίως μονότονη στο Δ». Ας ονομάσουμε **L – Θεώρημα**, αυτή την πρόταση.

Έστω $\alpha, b, c\in\Delta$ με α < b < c. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ. Έτσι αποκλείεται να ισχύει κάποια από τις σχέσεις f(a) < f(b) < f(c) ή f(a) > f(b) < f(c). Ας είναι f(a) < f(c) < f(b). Τότε από Θ.Ε.Τ. θα έχουμε ότι ο αριθμός m = f(ξ) θα ισούται με f(ξ) για κάποιο $\xi\in(\alpha,b)$. Αλλά η f είναι 1-1, οπότε αναγκαστικά c=ξ, κάτι που δεν μπορεί να αληθεύει αφού ο αριθμός c δεν ανήκει στο διάστημα (α, b). Ώστε f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Λυμένα Θέματα

1) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός αριθμός M ώστε να ισχύει $|f(x)-f(y)| \geq M|x-y|$ (1) για κάθε $x, y \in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση *f* είναι «1-1» και έχει σύνολο τιμών το R.

Λύση: Έστω $x, y \in R$ με $x = y$, άρα από τη σχέση (1) παίρνουμε $M|x-y| \leq 0 \Rightarrow x = y$, άρα η f είναι «ένα προς ένα». Από το L - Θεώρημα θα έχουμε ότι η *f* θα είναι γνησίως μονότονη, ας είναι γνησίως αύξουσα. Για $y = 0 < x$, παίρνουμε από την (1) ότι $f(x) - f(0) \geq M \cdot x \Rightarrow f(x) \geq M \cdot x + f(0)$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Ανάλογα για $y = 0 > x$ παίρνουμε από την (1) ότι $f(0) - f(x) \geq -M \cdot x \Rightarrow f(x) \leq M \cdot x + f(0)$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Αλλά $f\left((-\infty,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\right) = R$, καθώς f γνησίως αύξουσα. Ανάλογα εργαζόμαστε αν f γνησίως αύξουσα.

2) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία υποθέτουμε ότι $f\left(\left(\left(f(x)\right)\right)\right) = x$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in R$. ***[Ολυμπιάδα Ιράν, 2003]***

Λύση: Έστω $x, y \in R$ με f(x)=f(y) οπότε $f\left(f(x)\right) = f\left(f(y)\right)$ και $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f\left(f\left(f(y)\right)\right) \Rightarrow x = y$. Από το L – Θεώρημα θα έχουμε ότι η f θα είναι γνησίως μονότονη. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα (αυτό είναι αλήθεια προφανώς και στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα), οπότε η συνάρτηση $f \circ f \circ f$ θα είναι γνησίως φθίνουσα. Όμως η συνάρτηση $g(x) = x$ είναι γνησίως αύξουσα. Αντίφαση. Ώστε η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω τώρα ότι υπάρχει κάποιο $\alpha \in R$, ώστε $f(\alpha) \neq \alpha$, ας είναι f(α)>α. Τότε θα είναι $f\left(f(\alpha)\right) > f(\alpha) > \alpha$ και $f\left(f\left(f(\alpha)\right)\right) > f(\alpha) > \alpha = f\left(f\left(f(\alpha)\right)\right)$. Αντίφαση.

3) Έστω $m = 144^{\eta\mu^2 x} + 144^{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x \in R$. Πόσοι από τους αριθμούς m είναι ακέραιοι;

Λύση: Θέτοντας $t = \eta\mu^2 x$ με $x \in R$, έχουμε ότι $0 \leq t \leq 1$. Έτσι, $m = 144^t + 144^{1-t} = f(t)$.

Προσπαθούμε να εντοπίσουμε βασικά γνωρίσματα της f. Είναι $f'(t) = \ln 144\left(144^t - 144^{1-t}\right) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2}$. Καθώς η f είναι συνεχής στο [0, 1] έχει σίγουρα ολικά ακρότατα, τα οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι max=f(0)=f(1)=145 και $\min = f\left(\frac{1}{2}\right) = 24$. Αλλά από το Θ.Ε.Τ. η f θα παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές (εκτός αυτών των δύο) από τις οποίες όμως εμάς ενδιαφέρουν μόνον οι ακέραιες. Συνολικά οι ακέραιες τιμές *m* σε πλήθος είναι 145–24+1=122.

4) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,1] \to R$ με συνεχή παράγωγο ώστε f(0) = f(1) = 0 και $f(\alpha) = \sqrt{3}$ για κάποιο $\alpha \in (0, 1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f οι οποίες σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο με τον άξονα x΄x .

[14th Annual International «Vojtech Jarnik» Mathematical Competition, Ostrava 31/3/2004]

Λύση: Προφανώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν x_1, x_2 ώστε $f'(x_1) = -f'(x_2) = \sqrt{3}$, αφού τότε οι δύο εφαπτόμενες θα σχηματίζουν γωνίες 60^0 και 120^0αντίστοιχα με τον άξονα $x'x$, άρα το σημείο τομής των εφαπτομένων θα είναι η κορυφή μιας γωνίας επίσης 60^0. Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε το σημαντικότερο Θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού, το Θεώρημα Μέσης Τιμής, το οποίο αποδεικνύει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, \alpha)$ και ενός τουλάχιστον $\xi_2 \in (\alpha, 1)$, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$, $f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(\alpha)}{1 - \alpha} = \frac{-\sqrt{3}}{1 - \alpha}$. Εύκολα τώρα διαπιστώνουμε ότι $f'(\xi_2) < m = \sqrt{3} < f'(\xi_1)$ οπότε από ΘΕΤ (f΄ συνεχής) θα έχουμε $m = \sqrt{3} = f'(x_1)$ για κάποιο . $x_1 \in (\xi_1, \xi_2)$. Ανάλογα ισχύει $f'(\xi_2) < n = -\sqrt{3} < f'(\xi_1)$, έτσι $n = -\sqrt{3} = f'(x_2)$ για κάποιο $x_2 \in (\xi_1, \xi_2)$.

5) Ένας αθλητής τρέχει μια διαδρομή έξι μιλίων σε 30 λεπτά. Να αποδείξτε ότι κάπου κατά μήκος της διαδρομής ο αθλητής έτρεξε ένα μίλι σε ακριβώς 5 λεπτά. Θεωρούμε ότι ο αθλητής δεν σταμάτησε πουθενά και έτρεχε συνέχεια αυτά τα 30 λεπτά.

[L.C. Larson, Problem-Solving Through Problems, Springer-Verlag, 1990]

Λύση: Έστω x (μίλια) η απόσταση του αθλητή από την αφετηρία κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και f(x) ο χρόνος που κάνει ο αθλητής για να πάει από το σημείο x στο σημείο x + 1 και προφανώς αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής. Επομένως ισχύει η σχέση $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=30, x\in[0,5]$. Είναι φανερό ότι αποκλείεται να είναι όλοι οι αριθμοί *f*(i) μικρότεροι του 5 ή όλοι μεγαλύτεροι του 5 $(i=0,1,2,3,4,5)$. Άρα θα υπάρχουν $\alpha, b\in\{0,1,2,3,4,5\}$ ώστε $f(\alpha)\le 5\le f(b)$. Αν είναι f(a) = 5 ή f(b) = 5 το θέμα λήγει. Αν όμως f(α)<5<f(b) τότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ ώστε $f(\xi)=5$, που σημαίνει ότι ο αθλητής έτρεξε την απόσταση από το σημείο ξ στο σημείο ξ+1 (ένα μίλι) σε ακριβώς 5 λεπτά.

6) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(f(x))=x^2$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αποδείξτε ότι $x^2<f(x)<x$ για κάθε $x\in(0,1)$. ***[Ολυμπιάδα Μόσχας 1990]***

Λύση: Πρώτα αποδεικνύουμε ότι $f(x)\ne x$ και $f(x)\ne x^2$ για κάθε . $x\in(0,1)$. Έστω αντίθετα ότι υπάρχει κάποιο x ώστε f(x) = x. Τότε προφανώς $f(f(x))=f(x)=x$. Αλλά από την υπόθεση $f(f(x))=x^2$. Έτσι, $x^2=x$, άτοπο. Έστω τώρα ότι υπάρχει κάποιο x ώστε $f(x)=x^2$. Σύμφωνα με αυτό που ήδη έχουμε αποδείξει θα είναι $f(x^2)\ne x^2$. Από την άλλη όμως έχουμε $x^2=f(f(x))=f(x^2)$. Αντίφαση. Άρα, σύμφωνα με την $1^η$ συνέπεια του Θ.Ε.Τ. οι συναρτήσεις g(x) = f (x) – x και $h(x)=f(x)-x^2$ θα διατηρούν σταθερό πρόσημο στο διάστημα (0,1).Έστω τώρα ότι είναι g(x) > 0 και h(x) < 0 για κάθε $x\in(0,1)$. Τότε f(x) > x άρα και $f(f(x))>f(x)>x$, άρα $x^2>x$, αδύνατο για $x\in(0,1)$. Επίσης $f(x)<x^2$ άρα και $f(f(x))<(f(x))^2$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε $x^2=f(f(x))<(f(x))^2<x^4$, άτοπο για $x\in(0,1)$. Ώστε g(x) < 0 και h(x) > 0 για κάθε $x\in(0,1)$.

Θέματα εξάσκησης

1) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς στο $(0,+\infty)$ συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει $f^2(x)=(\ln x-x+1)^2$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Υπόδειξη: Αν g(x) = lnx – x+1 τότε $g(x)\le 0$ κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσον να ισχύει αν και μόνον αν x = 1 (αρκεί να σχεδιάσετε την lnx και την y = x-1 η αλγεβρική δικαιολόγηση υπάρχει στο σχολ. βιβλίο). Άρα η f έχει μοναδική ρίζα την x=1και καθώς $|f(x)|=|g(x)|=-g(x)$, σύμφωνα με την $1^η$ συνέπεια θα υπάρχουν 4 συναρτήσεις f. (Ποιες;)

2) Αν η συνάρτηση $g:R\to R$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει ακριβώς μία φορά την ευθεία y = x.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση h(x) = g(x) - x έχει το πολύ μία ρίζα. (Γιατί;) Τι θα συνέβαινε αν δεν είχε καμία ρίζα με χρήση της $1^{ης}$ συνέπειας του Θ.Ε.Τ.; Γιατί δεν μπορεί να είναι $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$;

3) Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο R. Αποδείξτε ότι το σύστημα $x=f(y)$, $y=f(z)$, $z=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση στο R. ***[«Putnam and Beyond», Celca – Andreescu, 2007]***

Υπόδειξη: *χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για* $g(x)=f(f(f(x)))$. (Γιατί;)

4) Δίνεται η συνάρτηση $P(x) = x^3 – 2nx + n$ όπου $n\in N^*$, $n\ge 2$

(α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση P(x) = 0 έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\alpha_n < b_n < c_n$

(β) Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty}b_n$

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι P(0) > 0, P(1) < 0 ενώ $\lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$, άρα υπάρχουν $k\le 0\le m$ ώστε P(k)<0<P(m). Οι ρίζες είναι προφανώς συναρτήσεις του n, δηλ. ακολουθίες. Είναι $P(b_n)=0$ και $0<b_n^3<1$ άρα $\frac{1}{2}<b_n<\frac{n-1}{2n}$ (Γιατί;)

5) Έστω α ≠ 0, b, c πραγματικοί αριθμοί. Αν x_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ και x_2 ρίζα της εξίσωσης $- ax^2 + bx + c = 0$, να αποδείξτε ότι υπάρχει ρίζα x_3 της εξίσωσης $\frac{\alpha}{2}\cdot x^2 + bx + c = 0$ μεταξύ των x_1 και x_2. ***[Croatia, Math Olympiad 2005]***

Υπόδειξη: Αρκεί $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$, με $g(x)=\frac{\alpha}{2}x^2+bx+c$. Αλλά $\alpha x_1^2+bx_1+c=0$ και $-ax_2^2+bx_2+c=0$.

6) Δίνονται οι αριθμοί $x_1, x_2, \ldots x_n$ του διαστήματος [0,1]. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει αριθμός $\xi\in[0,1]$ ώστε $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\xi-x_i|=\frac{1}{2}$. ***[Προτεινόμενη από Αυστραλία για ΔΜΟ 1985]***

Υπόδειξη: Θεωρούμε την $f(x)=\frac{1}{n}\{|x-x_1|+|x-x_2|+....|x-x_n|\}-\frac{1}{2}$ και αποδεικνύουμε ότι $f(0)\bullet f(1)\le 0$.

7) Να αποδείξετε ότι $ημ10^0>\frac{1}{7}$.

Υπόδειξη: Από τον γνωστό τύπο $ημ(3x)=3ημx-4ημ^3x$ για $x=10^0$, παρατηρούμε ότι ο αριθμός $ημ10^0$ είναι ρίζα της $f(x)=4x^3-3x+\frac{1}{2}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $f(-1)<0$, $f(0)>0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $f(1)>0$, άρα η f έχει μοναδική ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},1)$. Αλλά $ημ10^0<\frac{1}{2}$ (γιατί;) και $f\left(\frac{1}{7}\right)>0$.

8) Για τη συνεχή συνάρτηση f:R→R ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση g: R→R με g(x)=f(x)+x έχει σύνολο τιμών το R. ***[Analiza Matematica, Romania 2016]***

Υπόδειξη: Εύκολα δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ (πως;). Αν δεχθούμε ότι το σύνολο τιμών δεν είναι το R, θα υπάρχει πραγματικός k ώστε $g(x)\neq k$ για κάθε $x\in R$. Σύμφωνα με την $1^η$ συνέπεια, η συνάρτηση g(x) = k θα διατηρεί σταθερό πρόσημο, ας είναι g(x) > k για κάθε $x\in R$, άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\ge k$, Αντίφαση. Ανάλογα αν υποθέταμε ότι $g(x)<k$ για κάθε $x\in R$.

Βιβλιογραφία: *1.G.Andrei,N.Chichirim,A.Velicu,2016.AnalizaMatematica, Culegere de probleme-Continuitate*
2.Math magazine Crux, Canada *3. Γ. Μπαϊλάκης,1990. Παγκόσμια Θεματογραφία Ολυμπιάδων Μαθηματικής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ανικούλα.* *4. Σ. Νεγρεπόντης, Σ.Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας,1995. Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι, εκδόσεις Αίθρα.*

Το βραβείο Norbert Wiener για το 2021 στον Σέργιο Θεοδωρίδη

Ο κ. **Σέργιος Θεοδωρίδης** είναι Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών και υπεύθυνος των Εκδόσεων του ΕΚΠΑ. Του απονεμήθηκε το Norbert Wiener βραβείο για το έτος 2021 από το τμήμα Επεξεργασίας Σήματος του Ινστιτούτου Ηλεκτρονικών και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών (IEEE) για «***θεμελιώδεις συνεισφορές στην ηγεσία, έρευνα και εκπαίδευση στον τομέα της επεξεργασίας σήματος***». Το βραβείο Norbert Wiener είναι η ύψιστη διάκριση στον τομέα της επεξεργασίας σήματος του επιστημονικού οργανισμού IEEE, που είναι ο πλέον έγκριτος και πολυπληθής διεθνήςεπιστημονικός οργανισμός, στον τομέα των μηχανικών (engineering) και της επεξεργασίας σήματος. Το βραβείο Norbert Wiener απονέμεται, ως αναγνώριση εξαίρετων συνεισφορών τόσο στην **έρευνα** και την **εκπαίδευση** όσο και για τον ηγετικό ρόλο στις εξελίξεις στο επιστημονικό πεδίο της επεξεργασίας σήματος. Ο βραβευόμενος θα δώσει την Norbert Wiener διάλεξη στο κύριο συνέδριο του αντίστοιχου επιστημονικού πεδίου, ICASSP (International Conference on Acoustics, Speech, & Signal Processing), που θα λάβει χώρα στη Σιγκαπούρη το **2022**.

Ο κ. **Σέργιος Θεοδωρίδης** είναι συγγραφέας του βιβλίου "***Machine Learning****: A Bayesian and Optimization Perspective*", Academic Press, (2η έκδοση), 2020, που μεταφράζεται στα Ιαπωνικά και συν-συγγραφέας του βιβλίου "*Pattern Recognition*", Academic Press, 2009 (4η έκδοση). Το βιβλίο αυτό ανήκει στους ευπώλητους (best selling) τίτλους διεθνώς και έχει ήδη μεταφραστεί στα Κινέζικα και τα Ελληνικά. Είναι συν-συγγραφέας του βιβλίου "*Introduction to Pattern Recognition: A* ***Matlab Approach***", Academic Press, 2010, που έχει μεταφραστεί στα Κορεάτικα και στα Ελληνικά. Είναι συν-εκδότης του βιβλίου "*Adaptive System Identification and Signal Processing Algorithms*", Prentice Hall, 1993, και είναι συν-συγγραφέας τριών βιβλίων στα Ελληνικά, δύο από τα οποία για το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Έχει δημοσιεύσει εκτενώς στα σημαντικότερα περιοδικά και συνέδρια της επιστημονικής του περιοχής. Επτά από τις δημοσιεύσεις του έχουν τιμηθεί με βραβείο καλύτερης δημοσίευσης (best paper award) συμπεριλαμβανομένων και των υψηλού κύρους 2014 *IEEE Signal Processing Magazine Best Paper Award*, και 2009 *IEEE Computational Intelligence Society Transactions on Neural Networks Outstanding Paper Award*.

Έχει, επίσης, τιμηθεί με ένα αριθμό υψηλού κύρους διεθνών βραβείων όπως το 2017 European Association of Signal and Image Processing (EURASIP), το 2014 Institute of Electronics and Electrical Engineers (IEEE) Signal Processing Society *Education Award*, και το 2014 EURASIP *Meritorious Service Award*. Είναι Distinguished Καθηγητής μερικής απασχόλησης στο Πανεπιστήμιο Aalborg της Δανίας, και είναι συνεργαζόμενος ερευνητής του Chinese University of Hong-Kong, Shenzhen, Κίνα. Έχει υπηρετήσει ως *Distinguished Lecturer* της IEEE για την περιοχή της επεξεργασίας σήματος και την περιοχή των συστημάτων και ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Έχει υπηρετήσει ως *Otto Monstead* επισκέπτης καθηγητής στο Τεχνικό Πανεπιστήμιο της Δανίας και ήταν κάτοχος της έδρας Αριστείας του Πανεπιστημίου Carlos III της Ισπανίας. Έχει υπηρετήσει σαν εκδότης του σημαντικότερου περιοδικού της περιοχής, IEEE *Transactions on Signal Processing*, ως Αντιπρόεδρος της IEEE Signal Processing Society, και ως πρόεδρος της EURASIP. Είναι Ακόλουθος (Fellow) του Institute of Engineering and Technology (IET), αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας της Σκωτίας RSE, Ακόλουθος του EURASIP και δια βίου Ακόλουθος του IEEE.

Πηγή: Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του ΕΚΠΑ (www.di.uoa.gr)

Τάξη: Γ΄

Παράγωγος

Γιάννης Λουριδάς

Γενικό θέμα στο 2ο κεφάλαιο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{xf(x+h)+(h-x)f(x)}{h}=\eta\mu(2022\pi-x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

β. Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτη.

γ. Να βρείτε την $f'(x)$.

δ. Αν $g(x)=-\dfrac{2}{x}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$, τότε να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν άπειρα κοινά σημεία και κοινή εφαπτομένη σε καθένα από αυτά.

ε. **ε₁.** Να αποδείξετε ότι όλες οι ρίζες της f, εκτός από μία, είναι κρίσιμα σημεία της.

ε₂. Να εξετάσετε αν η f έχει και άλλα κρίσιμα σημεία, εκτός από αυτά που αποδείξατε στο ερώτημα (ε₁).

στ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+2f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2\pi)$.

ζ. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο ρ στο διάστημα $(0,\pi)$, και να βρείτε το σύνολο τιμών της στο διάστημα $\Delta=[-\rho,\rho]$.

Αν ρ είναι το κρίσιμο σημείο της f στο διάστημα $(0,\pi)$, τότε:

η. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2021(\sigma\upsilon\nu x-1)=-x\eta\mu\rho$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $[-\rho,\rho]$.

θ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2-1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,\rho)$

ι. Αν $A(x,f(x))$ και $\Delta(\rho,f(x))$ με $x\in(0,\rho)$, τότε:

ι₁. Να βρείτε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, όπου Β, Γ οι προβολές των Α, Δ αντίστοιχα στον άξονα x΄x.

ι₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,\rho)$, στο οποίο το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται.

ι₃. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1,x_2\in(0,\rho)$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $x_0E'(x_1)=(x_0-\rho)E'(x_2)$, όπου $E(x)$ η συνάρτηση του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και x_0 η θέση μεγίστου αυτής.

ια. Να αποδείξετε ότι:

$$|f(x)-f(y)|\geq -f'(\sqrt{\rho})|x-y|$$

για κάθε $x,y\in(0,\sqrt{\rho})$

ιβ. Ένα σημείο $M(x,f(x)), x>0$ κινείται πάνω στην C_f με $x'(t)>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του να είναι $-\dfrac{3}{\pi^2}x'(t_0)$ μ/s, όπου $x'(t_0)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ τη χρονική στιγμή t_0.

Απαντήσεις

α. Είναι: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{xf(x+h)+(h-x)f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x(f(x+h)-f(x))+hf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(x\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\right)=xf'(x)+f(x),$$

διότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης: $\eta\mu(2022\pi-x)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$.

Η ισότητα (1) γίνεται:

$xf'(x)+f(x)=-\eta\mu x\Rightarrow xf'(x)+(x)'f(x)=-\eta\mu x$

$\Rightarrow(xf(x))'=(\sigma\upsilon\nu x)'\Rightarrow xf(x)=\sigma\upsilon\nu x+c, c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε: $0=\sigma\upsilon\nu 0+c$, δηλαδή $c=-1$.

Άρα, $xf(x)=\sigma\upsilon\nu x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x\neq 0$ έχουμε: $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$.

Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ως παραγωγίσιμη, οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$$

Επομένως, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$.

β. Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$|f(x)|=\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu x-1|}{|x|}\leq\frac{|\sigma\upsilon\nu x|+1}{|x|}\leq\frac{2}{|x|}.$$

Δηλαδή: $|f(x)|\leq\dfrac{2}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{|x|}\leq|f(x)|\leq\dfrac{2}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$, και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{2}{|x|}\right)=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{|x|}$.

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Επομένως η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ. Για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)'=\ldots=\frac{-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2}.$$

Για $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}\overset{\substack{\text{ΜΟΡΦΗ}\\ \left(\frac{0}{0}\right)}}{\underset{\text{DL΄H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}.$$

Δηλαδή, $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα, $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2}, x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, x=0\end{cases}$

δ. Για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=-\frac{2}{x}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-1=-2$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$$

Δηλαδή, οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι $x_\kappa=(2\kappa+1)\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$.

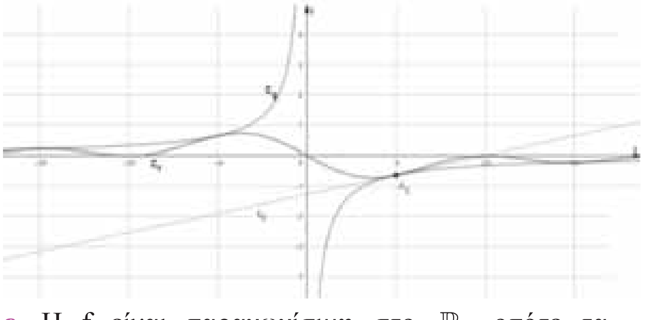
Άρα, οι C_f και C_g έχουν άπειρα κοινά σημεία τα $A_\kappa\left(x_\kappa,-\dfrac{2}{x_\kappa}\right)$ με $x_\kappa=(2\kappa+1)\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$.

Είναι: $g'(x)=\left(-\dfrac{2}{x}\right)'=\dfrac{2}{x^2}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και

$$f'(x_\kappa)\overset{(\gamma)}{=}\frac{-x_\kappa\eta\mu x_\kappa-\sigma\upsilon\nu x_\kappa+1}{x_\kappa^{\,2}}=\frac{-x_\kappa\cdot 0-(-1)+1}{x_\kappa^{\,2}}$$

$$=\frac{2}{x_\kappa^{\,2}}=g'(x_\kappa)\text{ για κάθε }\kappa\in\mathbb{Z}.$$

Άρα, οι C_f και C_g σε καθένα από τα κοινά τους σημεία $A_\kappa\left(x_\kappa,-\dfrac{2}{x_\kappa}\right)$ έχουν κοινή εφαπτομένη.



ε. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε τα κρίσιμα σημεία της είναι οι ρίζες της f'.

ε₁. Το μηδέν είναι ρίζα της f, αφού $f(0)=0$.

Όμως $f'(0)\overset{(\gamma)}{=}-\dfrac{1}{2}\neq 0$, οπότε το μηδέν δεν είναι κρίσιμο σημείο της f.

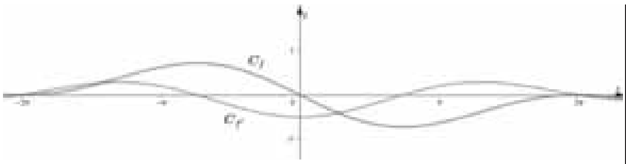
Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=1$$

$\Leftrightarrow x_\lambda=2\lambda\pi,\lambda\in\mathbb{Z}-\{0\}$, και

$$f'(x_\lambda)\overset{(\gamma)}{=}\frac{-x_\lambda\eta\mu x_\lambda-\sigma\upsilon\nu x_\lambda+1}{x_\lambda^{\,2}}=\frac{-x_\lambda\cdot 0-1+1}{x_\lambda^{\,2}}=0.$$

Άρα, όλες οι ρίζες της f, εκτός από το μηδέν, είναι κρίσιμα σημεία της.



ε₂. Οι άπειρες ρίζες $x_\lambda = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$ της f, ορίζουν τα άπειρα διαδοχικά διαστήματα $[x_\lambda, x_{\lambda+1}], \lambda \in \mathbb{Z}$, στα οποία η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Οπότε, σε καθένα από αυτά η f΄ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Δηλαδή, σε καθένα από αυτά η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο. Επομένως, η f έχει και άλλα άπειρα κρίσιμα σημεία εκτός από αυτά που βρήκαμε στο ερώτημα (ε_1).

στ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x)e^{2x}, x \in [0,2\pi].$$

Η h είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2\pi)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x) = \left(f(x)e^{2x}\right)' = f'(x)e^{2x} + f(x)\left(e^{2x}\right)'$$

$$= f'(x)e^{2x} + 2f(x)e^{2x} = \left(f'(x) + 2f(x)\right)e^{2x}.$$

Επίσης: $h(0) = h(2\pi) = 0$, αφού $f(0) = f(2\pi) = 0$

Δηλαδή, η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[0,2\pi]$.

Άρα, η εξίσωση $h'(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση:

$$\left(f'(x) + 2f(x)\right)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2\pi)$.

ζ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f΄ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

Για $x \in (0,\pi)$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$\varphi(x) = -x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1,\ x \in (0,\pi)$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη με

$\varphi'(x) = (-x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1)' = ... = -x\sigma\upsilon\nu x$,

$x \in (0,\pi)$. Η ρίζα και το πρόσημο της φ΄ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$0 \searrow$	Ο.Ε. $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$	$\nearrow 2$

Είναι: $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και φ συνεχής στο $A_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε φ γνησίως φθίνουσα στο A_1.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε

$$\varphi(A_1) = \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x\to 0^+}\varphi(x)\right) = \left[1 - \frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Το μηδέν **δεν** ανήκει στο $\varphi(A_1)$, οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ είναι **αδύνατη** στο $A_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι: $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in A_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ και φ συνεχής σε αυτό, οπότε φ γνησίως αύξουσα στο A_2.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, οπότε

$$\varphi(A_2) = \left(\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\varphi(x), \lim_{x\to\pi^-}\varphi(x)\right) = \left(1 - \frac{\pi}{2}, 2\right).$$

Το μηδέν ανήκει στο $\varphi(A_2)$ και η φ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο A_2, οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα ρ στο $A_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Δηλαδή, η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, οπότε και η ισοδύναμή της εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα ρ στο διάστημα $(0,\pi)$.

Άρα, η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο ρ στο διάστημα $(0,\pi)$.

Σημείωση: Η ύπαρξη της ρίζας ρ της f΄ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ προκύπτει και με το θεώρημα του Bolzano για την φ στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, ή με το θεώρημα του Rolle για την f στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

- Σύνολο τιμών της f στο διάστημα $\Delta=[-\rho,\rho]$:

Αν $\Delta_1=[-\rho,0]$ και $\Delta_2=[0,\rho]$, τότε $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$.
Η f είναι συνεχής στο $\Delta_2=[0,\rho]$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και από την παραπάνω μελέτη της φ προκύπτει ότι $\varphi(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$, οπότε και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[0,\rho]$.
Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[0,\rho]$, οπότε

$$f(\Delta_2)=[f(\rho),f(0)]=\left[\frac{\text{συν}\rho-1}{\rho},0\right].$$

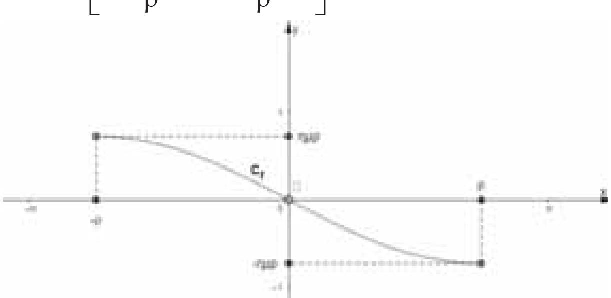
Η f είναι περιττή, διότι $f(0)=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ισχύει $-x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και

$$f(-x)=\frac{\text{συν}(-x)-1}{-x}=-\frac{\text{συν}x-1}{x}=-f(x).$$

Οπότε, $f(\Delta_1)=\left[0,\frac{1-\text{συν}\rho}{\rho}\right]$, αφού τα Δ_1,Δ_2 είναι συμμετρικά ως προς το μηδέν.
Άρα,

$$f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[0,\frac{1-\text{συν}\rho}{\rho}\right]\cup\left[\frac{\text{συν}\rho-1}{\rho},0\right]$$

$$=\left[\frac{\text{συν}\rho-1}{\rho},\frac{1-\text{συν}\rho}{\rho}\right].$$



η. Το ρ είναι ρίζα της f΄ αλλά και της φ, οπότε ισχύει:

$$-\rho\text{ημ}\rho-\text{συν}\rho+1=0\overset{\rho\neq0}{\Leftrightarrow}\frac{\text{συν}\rho-1}{\rho}=-\text{ημ}\rho$$

Άρα, $f(\Delta)=[-\text{ημ}\rho,\text{ημ}\rho]$

Πλήθος ριζών της εξίσωσης:

$$2021(\text{συν}x-1)=-x\text{ημ}\rho,\ x\in\Delta=[-\rho,\rho]$$

Το μηδέν είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $2021(\text{συν}x-1)=-x\text{ημ}\rho$ στο διάστημα $\Delta=[-\rho,\rho]$

Για $x\in[-\rho,0)\cup(0,\rho]$ η εξίσωση $2021(\text{συν}x-1)=-x\text{ημ}\rho$ ισοδύναμα γίνεται:

$$2021(\text{συν}x-1)=-x\text{ημ}\rho\Leftrightarrow\frac{\text{συν}x-1}{x}=-\frac{1}{2021}\text{ημ}\rho$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2021}\text{ημ}\rho\quad(E)$$

Το $-\frac{1}{2021}\text{ημ}\rho\in f(\Delta_4)\overset{(\zeta)}{=}[-\text{ημ}\rho,0)$,

όπου $\Delta_4=(0,\rho]$ και η f είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_4=(0,\rho]$.

Άρα, η εξίσωση (Ε), οπότε και η ισοδύναμή της εξίσωση $2021(\text{συν}x-1)=-x\text{ημ}\rho$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ_4.

Το $-\frac{1}{2021}\text{ημ}\rho\notin f(\Delta_3)\overset{(\zeta)}{=}(0,\text{ημ}\rho]$,

όπου $\Delta_3=[-\rho,0)$.

Άρα, η εξίσωση (Ε), οπότε και η ισοδύναμή της εξίσωση $2021(\text{συν}x-1)=-x\text{ημ}\rho$ είναι αδύνατη στο διάστημα Δ_3.

Επομένως, η εξίσωση $2021(\text{συν}x-1)=-x\text{ημ}\rho$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $\Delta=[-\rho,\rho]$.

θ. Υπόδειξη: Από το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $p(x)=f(x)-x^2+1$ στο διάστημα $[0,\rho]$, η εξίσωση $p(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\rho)$, η οποία είναι και μοναδική, διότι η p είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

ι. Αν $A(x,f(x))$ και $\Delta(\rho,f(x))$ με $x\in(0,\rho)$, τότε:

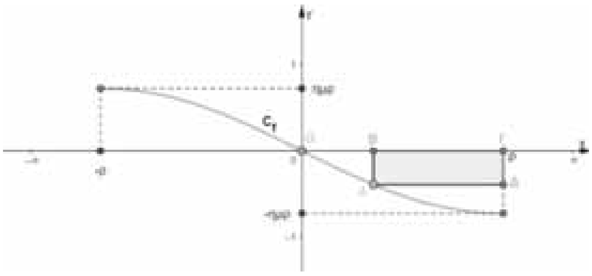
ι₁. Τα Β, Γ είναι οι προβολές των Α, Δ αντίστοιχα στον άξονα x΄x, οπότε $B(x,0)$ και $\Gamma(\rho,0)$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x είναι:

$$E(x)=(AB)(B\Gamma)=|f(x)||\rho-x|=-f(x)(\rho-x)$$

$$=(x-\rho)f(x)\ x\in(0,\rho),$$

διότι για κάθε $x\in(0,\rho)$ ισχύει $f(x)<0$, από το ερώτημα (ζ), και $\rho-x>0$.

Δηλαδή, $E(x)=(x-\rho)f(x)$, $x\in(0,\rho)$.



ι₂. Η συνάρτηση $E(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$E'(x)=((x-\rho)f(x))'=f(x)+(x-\rho)f'(x)$, $x\in(0,\rho)$, και

$E''(x)=(f(x)+(x-\rho)f'(x))'=2f'(x)+(x-\rho)f''(x)$, $x\in(0,\rho)$

Για $x\in(0,\rho)$ έχουμε:

$f'(x)=\dfrac{-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2}<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$,

από το ερώτημα (ζ), και

$$f''(x)=\left(\frac{-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2}\right)'=\ldots=$$

$$=\frac{-x^2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x-2}{x^3}>0$$

για κάθε $x\in(0,\rho)$.

Πράγματι:

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$t(x)=-x^2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x-2, x\in[0,\rho)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$t'(x)=(-x^2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x-2)'=\ldots=x^2\eta\mu x$.

Είναι $t'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$ και η t συνεχής στο $[0,\rho)$, οπότε η συνάρτηση t είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\rho)$. Οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει $t(x)>t(0)=0$.

Άρα, για κάθε $x\in(0,\rho)$ ισχύει $f''(x)>0$.

Από το πρόσημο των $f'(x)$, $x-\rho$ και $f''(x)$ στο διάστημα $\Delta_5=(0,\rho)$, έχουμε ότι:

$E''(x)=2f'(x)+(x-\rho)f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$, οπότε η $E'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_5=(0,\rho)$.

Η συνάρτηση $E'(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_5=(0,\rho)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$$E'(\Delta_5)=\left(\lim_{x\to\rho}E'(x),\ \lim_{x\to0^+}E'(x)\right)=\left(-\eta\mu\rho,\frac{\rho}{2}\right).$$

Το $0\in E'(\Delta_5)$ και η $E'(x)$ είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα σε αυτό, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,\rho)$ τέτοιο, ώστε $E'(x_0)=0$.

Ισχύει: $0<x<x_0\overset{E'\downarrow}{\Rightarrow}E'(x)>E'(x_0)=0$, και

$$x_0<x<\rho\overset{E'\downarrow}{\Rightarrow}E'(x_0)>E'(x)\Rightarrow E'(x)<0$$

Η ρίζα και το πρόσημο της παραγώγου $E'(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	0	x_0	ρ
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	↗	Ο.Μ.	↘

Άρα, υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,\rho)$ τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να μεγιστοποιείται σε αυτό.

$2^{ος}$ τρόπος: (Υπόδειξη) Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x)$ του εμβαδού στο $[0,\rho]$ με $E(0)=\lim\limits_{x\to0^+}E(x)=0$ και $E(\rho)=\lim\limits_{x\to\rho^-}E(x)=0$.

Δηλαδή, $E(x)=(x-\rho)f(x), x\in[0,\rho]$. Η $E(x)$ ως συνεχής στο $[0,\rho]$ παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο σε αυτό. Το ελάχιστο το παρουσιάζει στα άκρα, όπου $E(0)=E(\rho)=0$ και το μέγιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του $(0,\rho)$. Το x_0 λόγω του θεωρήματος του Fermat είναι ρίζα της $E'(x)$, που υπάρχει λόγω του θεωρήματος του Rolle, και είναι και μοναδικό, διότι η $E'(x)$ είναι 1-1 στο $(0,\rho)$.

ι₃. Η συνάρτηση $E(x)=(x-\rho)f(x), x\in[0,\rho]$ με $E(0)=E(\rho)=0$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,\rho]$, όπου x_0 η θέση μεγίστου αυτής, οπότε υπάρχουν:

- $x_1\in(\rho,x_0)$ τέτοιο, ώστε

$$E'(x_1)=\frac{E(x_0)-E(0)}{x_0-0}=\frac{E(x_0)}{x_0},$$

οπότε $x_0E'(x_1)=E(x_0)$ (1), και

- $x_2 \in (x_0,\rho)$ τέτοιο, ώστε

$$E'(x_2)=\frac{E(\rho)-E(x_0)}{\rho-x_0}=\frac{-E(x_0)}{\rho-x_0},$$

οπότε $(\rho-x_0)E'(x_2)=-E(x_0)$ (2)

Από (1), (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$x_0E'(x_1)+(\rho-x_0)E'(x_2)=0$$
$$\Rightarrow x_0E'(x_1)=(x_0-\rho)E'(x_2)$$

Επίσης, επειδή η Ε΄ είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα στο $(0,\rho)$, από το ερώτημα (**ι₂**), τα x_1,x_2 είναι μοναδικά στα διαστήματα $(0,x_0)$, (x_0,ρ) αντίστοιχα.

Άρα, υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1,x_2 \in (0,\rho)$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $x_0E'(x_1)=(x_0-\rho)E'(x_2)$, όπου $E(x)$ η συνάρτηση του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και x_0 η θέση μεγίστου αυτής.

ια. $|f(x)-f(y)|\geq -f'(\sqrt{\rho})|x-y|$

για κάθε $x,y\in(0,\sqrt{\rho})$ (1)

Για $x=y$ η (1) ισχύει ως ισότητα. (2)

Για $x\neq y$ υποθέτουμε ότι $x<y$. Η f είναι συνεχής στο $[x,y]\subset(0,\sqrt{\rho})\subset(0,\rho)$ και παραγωγίσιμη στο $(x,y)\subset(0,\sqrt{\rho})\subset(0,\rho)$, οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x,y)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)$.

Ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(\xi)|$$

$$\Rightarrow\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=-f'(\xi),\text{ διότι } f'(x)<0 \text{ για}$$

κάθε $x\in(0,\rho)$ (3)

Επίσης:

$$0<x<\xi<y<\sqrt{\rho}<\rho\overset{f'\uparrow(0,\rho)}{\underset{(\iota_2)}{\Rightarrow}}f'(\xi)<f'(y)<f'(\sqrt{\rho})$$

$$\Rightarrow -f'(\xi)>-f'(y)>-f'(\sqrt{\rho})\quad(4)$$

Από (3), (4) έχουμε:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}>-f'(\sqrt{\rho})$$

$$\Rightarrow|f(x)-f(y)|>-f'(\sqrt{\rho})|x-y|\quad(5)$$

Από (2), (5) έχουμε ότι:

$|f(x)-f(y)|\geq -f'(\sqrt{\rho})|x-y|$ για κάθε $x,y\in(0,\sqrt{\rho})$.

ιβ. Η τεταγμένη του Μ είναι $y=f(x)$ και ως συνάρτηση του χρόνου $y(t)=f(x(t))$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι $y'(t)=(f(x(t)))'=f'(x(t))\cdot x'(t)$.

Για $t=t_0$ έχουμε: $y'(t_0)=f'(x(t_0))\cdot x'(t_0)$. (1)

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ ισχύουν:

$$x(t_0)=\xi \text{ και } y'(t_0)=-\frac{3}{\pi^2}\cdot x'(t_0)\quad(2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$f'(\xi)\cdot x'(t_0)=-\frac{3}{\pi^2}\cdot x'(t_0)\overset{x'(t_0)>0}{\Rightarrow}f'(\xi)=-\frac{3}{\pi^2}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=-\frac{3}{\pi^2}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο, ώστε $$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}=\frac{-\frac{1}{2\pi}}{\frac{\pi}{6}}=-\frac{3}{\pi^2}.$$

Η συνάρτηση f' όμως είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\subset(0,\rho)$, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Άρα, υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=-\frac{3}{\pi^2}$.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 366 (ΤΕΥΧΟΣ 118)

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2^{x+1}-7}{x-1}-\frac{10}{3-2x}<0$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

ΛΥΣΗ (Αποστολόπουλος Γιώργος- Μεσολόγγι)

Αρχικά θα αναζητήσουμε λύσεις της ανίσωσης στο διάστημα $(-\infty, 1)$. Στο διάστημα αυτό είναι ισοδύναμη με την $2^{x+1}-7>\dfrac{10(x-1)}{3-2x}$ που γράφεται

$$2^{x+1}>\frac{11-4x}{3-2x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{11-4x}{3-2x}$, $x\neq\dfrac{3}{2}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=\dfrac{10}{(3-2x)^2}>0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty\ \dfrac{3}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

Αν $x\leq 0$, τότε $2^{x+1}\leq 2<f(x)$ και $f(x)>\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ οπότε η ανίσωση δεν έχει λύση στο διάστημα αυτό.

Αν $x\in\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, τότε $2^{x+1}<2^{\frac{5}{4}}<3<\dfrac{11}{3}=f(0)<f(x)$, οπότε η ανίσωση δεν έχει λύση ούτε σ' αυτό το διάστημα.

Αν $x\in\left[\dfrac{1}{4}, 1\right)$, τότε $2^{x+1}<2^2=4=f\left(\dfrac{1}{4}\right)\leq f(x)$.

Επομένως η ανίσωση δεν έχει λύση μικρότερη της μονάδας.

Αν $x>1$,τότε η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $2^{x+1}<f(x)$.

Αν $x\in\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$, τότε $f(x)>7$ και $2^{x+1}<2^{\frac{5}{2}}<7$, οπότε ισχύει $2^{x+1}<f(x)$.

Αν $x\in\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{11}{4}\right]$ τότε $f(x)\leq f\left(\dfrac{11}{4}\right)=0$ οπότε η ανίσωση δεν έχει λύση.

Τέλος, αν $x>\dfrac{11}{4}$, τότε $2^{x+1}>2^{\frac{15}{4}}>2>f(x)$, οπότε η ανίσωση δεν έχει λύση.

Άρα οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης είναι όλοι οι αριθμοί του διαστήματος $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Λύση έστειλε επίσης και ο συνάδελφος Γιάνναρος Διονύσης- Πύργος

ΑΣΚΗΣΗ 367 (ΤΕΥΧΟΣ 119)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\neq 0$ και $\alpha\neq\beta$. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του φ, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2\eta\mu^2\varphi+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}}+\frac{1}{\sqrt{\beta^2\eta\mu^2\varphi+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}}$$

Γεώργιος Τσιώλης - Τρίπολη

ΛΥΣΗ (Γιάνναρος Διονύσης- Πύργος)

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για $\alpha, \beta>0$ ισχύει:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq A\geq\frac{4}{\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}}$$

Είναι:

$$\sqrt{\beta^2\eta\mu^2\varphi+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}=\sqrt{\alpha^2\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\varphi}{2}+\beta^2\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\varphi}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\sigma\upsilon\nu2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)\sigma\upsilon\nu2\varphi}$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\sqrt{1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\sigma\upsilon\nu2\varphi}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\sqrt{1+\lambda\sigma\upsilon\nu2\varphi}$$

όπου $\lambda=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$. Προφανώς είναι $-1<\lambda<1$.

Ομοίως βρίσκουμε:

$$\sqrt{\alpha^2\eta\mu^2\varphi+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\sqrt{1-\lambda\sigma\upsilon\nu2\varphi}$$

Αν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu2\varphi=x\in[-1, 1]$, τότε η παράσταση Α μπορεί να αποδοθεί σαν μια συνάρτηση f μεταβλητής x. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}}\left[(1+\lambda x)^{-\frac{1}{2}}+(1-\lambda x)^{-\frac{1}{2}}\right],\ x\in[-1,1]$$

Η f είναι άρτια, οπότε μπορούμε να την μελετήσουμε στο διάστημα $[0, 1]$. Είναι:

$$f'(x)=\sqrt{\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}}\left[-\frac{1}{2}\lambda(1+\lambda x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda x)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{\lambda}{2}\left[(1-\lambda x)^{-\frac{3}{2}}-(1+\lambda x)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

Είναι $f'(0)=0$ και για κάθε $x\in(0, 1]$, $f'(x)>0$, διότι όπως εύκολα βρίσκουμε οι αριθμοί λ και $(1-\lambda x)^{-\frac{3}{2}}-(1+\lambda x)^{-\frac{3}{2}}$ με $x\in(0, 1]$ είναι ομόσημοι.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$ οπότε $f_{min}=f(0)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ και

$f\max=f(1)=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=f(-1)$, αφού η f είναι άρτια.

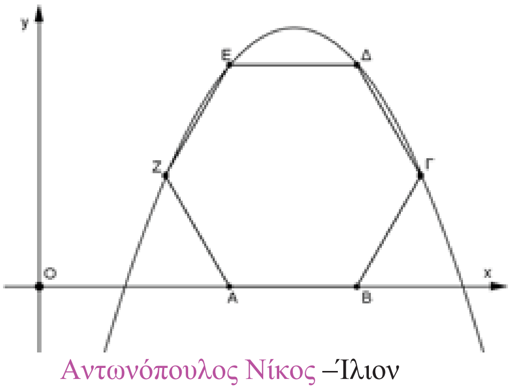
Επισημαίνουμε ότι αφού $\alpha\neq\beta$ ισχύει $\lambda\neq 0$.

Στην περίπτωση που οι αριθμοί α, β ικανοποιούν τις υποθέσεις του προβλήματος η σχέση που αποδείξαμε γράφεται: $\dfrac{4}{\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}}\leq A\leq\dfrac{1}{|\alpha|}+\dfrac{1}{|\beta|}$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι, Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Τσόπελας Γιάννης – Αμαλιάδα Ιωαννίδης Αντώνης - Λάρισα.

ΑΣΚΗΣΗ 368 (ΤΕΥΧΟΣ 119)

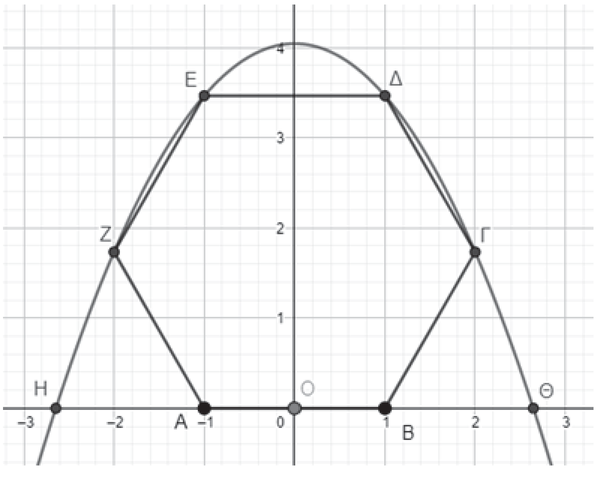
Θεωρούμε μια παραβολή στην οποία εγγράφουμε το κανονικό εξάγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η πλευρά του εξάγωνου είναι ίση με 2, να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων τομής της παραβολής με τον άξονα x′x



Αντωνόπουλος Νίκος –Ίλιον

ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο)

Η παραβολή παραμένει αναλλοίωτη αν την μεταφέρουμε ώστε η αρχή O να ταυτισθεί με το μέσο της πλευράς ΒΓ, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Με τον τρόπο αυτό, η παραβολή είναι της μορφής

$$f(x)=\alpha x^2+\beta.$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές α, β. Σύμφωνα με το νέο σχήμα, από τα γνωστά σχετικά με τα κανονικά πολύγωνα, έχουμε:

$$x_\Delta=\frac{AB}{2}=\frac{E\Delta}{2}=1 \text{ και } y_\Delta=B\Delta=AB\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$$x_\Gamma=R=B\Gamma=2 \text{ και } y_\Gamma=B\Gamma\cdot\eta\mu 60^{o}=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

οπότε από τον τύπο της παραβολής προκύπτουν ότι:

$$\alpha\cdot 1^2+\beta=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\alpha+\beta=2\sqrt{3}$$

και $\alpha\cdot 2^2+\beta=\sqrt{3}\Leftrightarrow 4\alpha+\beta=\sqrt{3}$.

Η λύση του συστήματος $\begin{cases}\alpha+\beta=2\sqrt{3}\\ 4\alpha+\beta=\sqrt{3}\end{cases}$ δίνει

$\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και $\beta=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$, οπότε $f(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x^2-7\right)$.

Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $-\sqrt{7}$ και $\sqrt{7}$, οπότε $(H\Theta)=\sqrt{7}-\left(-\sqrt{7}\right)=2\sqrt{7}$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι, Τσόπελας Γιάννης – Αμαλιάδα Ιωαννίδης Αντώνης- Λάρισα, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα.

ΑΣΚΗΣΗ 369 (ΤΕΥΧΟΣ 119)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ισχύει

$$e^{e^{\eta\mu\beta-1}} \geq \eta\mu\beta \cdot (\eta\mu\alpha)^{\frac{1}{\eta\mu\alpha}-1}$$

Ντόρβας Νίκος - Αγ. Ανάργυροι

ΛΥΣΗ (Τσόπελα Αγγελική- Απόφοιτη Γ΄Λυκείου Αμαλιάδα)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$e^{\eta\mu\beta-1} - \ln\eta\mu\beta \geq \left(\frac{1}{\eta\mu\alpha} - 1\right)\ln(\eta\mu\alpha)$$

Θεωρούμε τα συναρτήσεις

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x,\ x \in (0, 1)$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln x,\ x \in (0, 1)$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\eta\mu\alpha) \geq g(\eta\mu\alpha)$.

Οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες με

$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και

$$f'((0, 1)) = \left(\lim_{x\to 0^+} f'(x),\ \lim_{x\to 1^-} f'(x)\right) = (-\infty, 0)$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$, οπότε $f(x) > \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow f(x) > 1$ που σημαίνει ότι $f(\eta\mu\alpha) > 1$, (1).

Επιπλέον, $g'(x) = -\frac{\ln x + x - 1}{x^2},\ x \in (0, 1)$. Στο $(0, 1)$ εύκολα βρίσκουμε ότι $g'(x) > 0$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

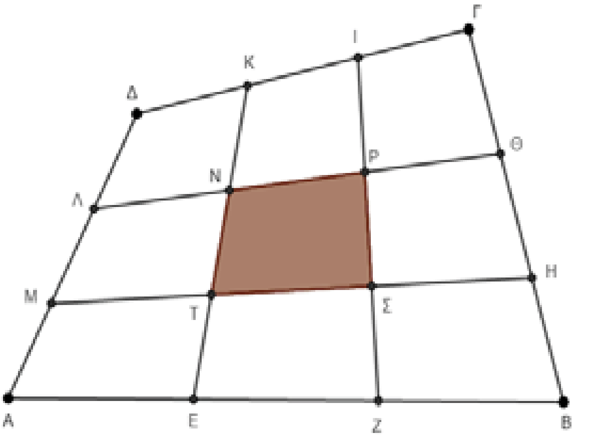
Επομένως $g(x) < \lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$ που σημαίνει ότι $g(\eta\mu\beta) < 0$, (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f(\eta\mu\alpha) \geq g(\eta\mu\alpha)$ που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι, Ιωαννίδης Αντώνης- Λάρισα, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα, Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

ΑΣΚΗΣΗ 370 (ΤΕΥΧΟΣ 119)

Θεωρούμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε κατά σειρά τα σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε: $AE = EZ = ZB$. Όμοια, στη ΒΓ τα σημεία Η και Θ έτσι ώστε: $BH = H\Theta = \Theta\Gamma$ στη ΓΔ τα σημεία Ι και Κ έτσι ώστε: $\Gamma I = IK = K\Delta$ και στη ΔΑ τα σημεία Λ και Μ έτσι ώστε: $\Delta\Lambda = \Lambda M = MA$. Φέρουμε τα τμήματα: ΚΕ, ΙΖ, ΛΘ και ΜΗ. Έτσι σχηματίζονται εννέα τετράπλευρα, εκ των οποίων το μεσαίο το ονομάζουμε: ΝΡΣΤ (βλέπε σχήμα). Να αποδείξετε ότι: $(N P \Sigma T) = \frac{1}{9}(AB\Gamma\Delta)$



Σταματιάδης Ευάγγελος - Ν. Ιωνία

ΛΥΣΗ

Από το θεώρημα των ίσων λόγων προκύπτει ότι και τα τμήματα: ΚΕ,ΙΖ,ΛΘ και ΜΗ τριχοτομούνται. Δηλαδή έχουμε: $KN = NT = TE$, $I P = P\Sigma = \Sigma Z$, $\Lambda N = NP = P\Theta$ και $MT = T\Sigma = \Sigma H$

Έτσι από το λήμμα, στα τετράπλευρα ΑΒΗΜ, ΜΗΘΛ, ΛΘΓΔ, ΕΖΙΚ βρίσκουμε:

$$(MTEA) + (\Sigma HBZ) = 2(T\Sigma ZE)$$

$$\Rightarrow (MTEA) + (T\Sigma ZE) + (\Sigma HBZ) = 3(T\Sigma ZE)\ (1)$$

$$(\Lambda NTM) + (P\Theta H\Sigma) = 2(NP\Sigma T)$$

$$\Rightarrow (\Lambda NTM) + (NP\Sigma T) + (P\Theta H\Sigma) = 3(NP\Sigma T)\ (2)$$

$$(\Delta K N\Lambda) + (I\Gamma\Theta P) = 2(KIPN)$$

$$\Rightarrow (\Delta KN\Lambda) + (KIPN) + (I\Gamma\Theta P) = 3(KIPN)\ (3)$$

και

$$(KIPN) + (T\Sigma ZE) = 2(NP\Sigma T)$$

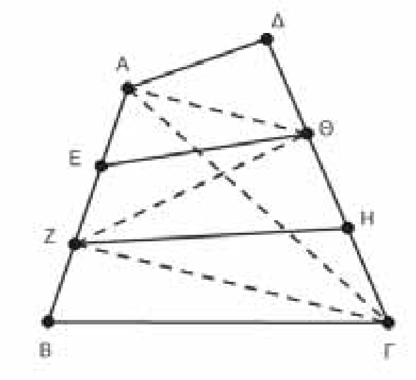
$$\Rightarrow (KIPN) + (T\Sigma ZE) + (NP\Sigma T) = 3(NP\Sigma T)\ (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) βρίσκουμε: $(AB\Gamma\Delta) = 3\left[(KIPN) + (T\Sigma ZE) + (NP\Sigma T)\right]$

$$\overset{(4)}{=} 3\left[3(NP\Sigma T)\right] = 9(NP\Sigma T)$$

Λήμμα. Θεωρούμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε κατά σειρά τα σημεία Ε, Ζ έτσι ώστε: $ΑΕ = ΕΖ = ΖΒ$ και στην πλευρά ΓΔ τα σημεία Η, Θ έτσι ώστε: $ΓΗ = ΗΘ = ΘΔ$ (βλέπε σχήμα). Να αποδείξετε ότι:

$$(ΑΕΘΔ)+(ΖΒΓΗ)=2(ΕΖΗΘ)\ (1)$$



Λύση.

$$(ΑΔΘ)+(ΓΒΖ)+(ΑΘΖ)+(ΖΘΓ)=(ΑΒΓΔ)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}(ΑΔΓ)+\frac{1}{3}(ΑΒΓ)+2(ΘΕΖ)+2(ΘΗΖ)=(ΑΒΓΔ)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\left[(ΑΔΓ)+(ΑΒΓ)\right]+2\left[(ΘΕΖ)+(ΘΗΖ)\right]=(ΑΒΓΔ)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ)+2(ΕΖΗΘ)=(ΑΒΓΔ)\Rightarrow 2(ΕΖΗΘ)=\frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)\Rightarrow$$

$$(ΕΖΗΘ)=\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ)(2)$$

$$(ΑΕΘΔ)+(ΖΒΓΗ)+(ΕΖΗΘ)=(ΑΒΓΔ)\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$(ΑΕΘΔ)+(ΖΒΓΗ)+\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓΔ)\Rightarrow$$

$$(ΑΕΘΔ)+(ΖΒΓΗ)=\frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)\ (3)$$

οπότε από τις (2) και (3) προκύπτει η (1).

Θεώρημα των ίσων λόγων

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ,ΓΔ παίρνουμε αντιστοίχως τα εσωτερικά σημεία Ε, Ζ έτσι ώστε: $\frac{ΑΕ}{ΕΒ}=\frac{ΔΖ}{ΖΓ}=μ$ και στις ΒΓ, ΑΔ παίρνουμε αντιστοίχως τα εσωτερικά σημεία Η,Θ έτσι ώστε: $\frac{ΒΗ}{ΗΓ}=\frac{ΑΘ}{ΘΔ}=ν$.

Έστω Ι το σημείο τομής των ΕΖ και ΗΘ, τότε ισχύει: $\frac{ΘΙ}{ΙΗ}=μ$ και $\frac{ΕΙ}{ΙΖ}=ν$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος και Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι.

Προτεινόμενα Θέματα

382. Αν για τους θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύει $xyz=1$, να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

β. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\ge 3\sqrt{2}$

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

383. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω G το βαρύκεντρο του. Αν $GK\perp ΒΓ$, $GΛ\perp ΑΓ$, $GM\perp ΑΒ$, να αποδείξετε ότι:

α. $(ΚΛΜ)=\frac{4(ΑΒΓ)^3(α^2+β^2+γ^2)}{9α^2β^2γ^2}$

β. $\frac{(ΚΛΜ)}{(ΑΒΓ)}\le\frac{1}{4}$

Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια

384. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β}=2\hat{Γ}$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $ΓΔ=\frac{1}{3}ΒΓ$.

Να αποδείξετε ότι αν $θ=Β\hat{Α}Δ$, τότε

$$(ΑΒΓ)=\frac{1}{4}ΒΓ^2\cdot σφ\frac{θ}{2}$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

385. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα ΒΔ. Από το Α φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΒΔ που τέμνει τον κύκλο στο Ε. Να υπολογίσετε την γωνία $Α\hat{Β}Ε$.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

386. Να βρείτε το πλήθος των ζευγών (x,y) με $x,y\in\mathbb{R}$ που είναι λύσεις της εξίσωσης $(εφ(πx))(εφ(πy))=1$ ώστε τα σημεία $M(x,y)$ να είναι πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=2022$

Αντωνόπουλος Νίκος –Ίλιον

Το βήμα του Ευκλείδη

ORDER

Μανώλης Πετράκης *μαθητής Β' Λυκείου* – ***Αγρίνιο***

Με το άρθρο αυτό συμπληρώνονται τα δύο προηγούμενα άρθρα: **«Θεώρημα Zsigmondy»** και **«Lifting the exponent Lemma»** για τα προβλήματα των μαθηματικών διαγωνισμών που αναφέρονται σε δυνάμεις ακεραίων.

Ορισμός: **Αν a, m θετικοί ακέραιοι με $(a,m)=1$, τότε order του a ως προς $mod m$ λέμε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο x για τον οποίο ισχύει $a^x \equiv 1(mod m)$ και γράφουμε $ord_m(a)$. Έτσι: $ord_m(a)=x \Leftrightarrow a^x \equiv 1(mod m)$ και αν $a^y \equiv 1(mod m)$, τότε $x \le y$.**

Παραδείγματα:

1. $ord_9(2)=6$ γιατί: $2^1 \equiv 2(mod 9)$, $2^4 \equiv 7(\bmod 9)$, $2^2 \equiv 4(\bmod 9)$, $2^5 \equiv 5(\bmod 9)$, $2^3 \equiv 8(\bmod 9)$, $2^6 \equiv 1(\bmod 9)$.
2. $ord_5(8)=2$ γιατί: $5^1 \equiv 5(mod 8)$ και $5^2 \equiv 1(mod 8)$.

Στα προβλήματα που ακολουθούν θα γίνει χρήση και των πολύ γνωστών θεωρημάτων:

- Το μικρό θεώρημα του Fermat: $a^{p-1} \equiv 1(mod p)$ όπου $(a,p)=1$ με p πρώτο.
- Θεώρημα του Euler (γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος): $a^{\varphi(n)} \equiv 1(mod n)$ με $(a,n)=1$ (όπου φ η συνάρτηση του Euler, η οποία σε κάθε θετικό ακέραιο n αντιστοιχεί το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι του n και πρώτοι προς τον n).

Πρόταση: $ord_m(a) \le \varphi(m)$. Γιατί, αν $ord_m(a)=x$, τότε $a^x \equiv 1(mod m)$ και $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod m)$, άρα $x \le \varphi(m) \Leftrightarrow ord_m(a) \le \varphi(m)$.

Προβλήματα

1) Αν $a \ge 1$ ακέραιος, τότε $\mathrm{ord}_{a^n-1}(a)=$;

2) Αν n θετικός ακέραιος και $a>1$ ακέραιος να δείξετε ότι $n|\varphi(a^n-1)$.

3) Αν p πρώτος, να δείξετε ότι κάθε διαιρέτης του 2^p-1, εκτός από το 1, είναι μεγαλύτερος του p.

4) Έστω $n \ge 2$ ακέραιος, να δείξετε ότι $n \nmid 2^n-1$.

5) Αν α, n θετικοί ακέραιοι με $\alpha>1$ και $p \ne 2$ πρώτος διαιρέτης του $\alpha^{2^n}+1$ να δείξετε ότι $2^n+1|p-1$.

6) Εάν οι a, b είναι θετικοί ακέραιοι σχετικά πρώτοι με τον m με $a^x \equiv b^x(\mathrm{mod} m)$ και $a^y \equiv b^y(\mathrm{mod} m)$, να δείξετε ότι $a^{(x,y)} \equiv b^{(x,y)}(\mathrm{mod} m)$.

7) Έστω a, n θετικοί ακέραιοι τέτοιοι, ώστε $n|a^{n-1}-1$ και $n \nmid a^x-1$ για κάθε θετικό διαιρέτη του $n-1$, διάφορο του $n-1$. Να δείξετε ότι ο n είναι πρώτος.

8) Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους m, n τέτοιους, ώστε $n|1+m^{3^n}+m^{2\cdot3^n}$.

$n|1+m^{3^n}+m^{2\cdot3^n} \Rightarrow n|\left(1+m^{3^n}+m^{2\cdot3^n}\right)\left(m^{3^n}-1\right)=m^{3^{n+1}}-1$.

9) Να βρείτε όλα τα ζεύγη p, q τέτοιους, ώστε $pq|5^p+5^q$.

10) Να δείξετε ότι $n \nmid 3^n-2^n$ για κάθε ακέραιο $n \ge 2$.

11) Έστω a, b πρώτοι μεταξύ τους θετικοί ακέραιοι. Να δείξετε ότι κάθε περιττός διαιρέτης του $a^{2^n}+b^{2^n}$ είναι της μορφής $2^{n+1}m+1$.

12) Να βρείτε όλα τα ζεύγη πρώτων (p,q) τέτοια, ώστε $pq|2^q+2^p$.

13) Να βρείτε όλες τις διατεταγμένες τριάδες πρώτων θετικών ακεραίων (p,q,r) για τις οποίες: $p|q^r+1,\ q|r^p+1,\ r|p^q+1$.

14) Να βρείτε όλα τα ζεύγη πρώτων (p,q) τέτοια, ώστε $pq|(5^p-2^p)(5^q-2^q)$.

15) Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,p) έτσι ώστε ο p να είναι πρώτος, $x \le 2p$ και $x^{p-1}|(p-1)^x+1$.

Λύσεις

1) Θέτουμε $\mathrm{ord}_{a^n-1}(a)=x$ τότε: $a^x\equiv 1(\bmod(a^n-1))\Rightarrow a^x\geq 1+(a^n-1)=a^n\Leftrightarrow x\geq n$.
Αν $\mathrm{ord}_{a^n-1}(a)=n$ τότε $\alpha^n\equiv 1(\bmod\,(a^n-1))$, που ισχύει, άρα $\mathrm{ord}_{a^n-1}(a)=n$ διότι $\mathrm{ord}_{a^n-1}(a)=x_{\min}$ για το οποίο $\alpha^x\equiv 1(\bmod(a^n-1))$.

2) Είναι $a^{\varphi(a^n-1)}\equiv 1(\bmod(a^n-1))\Rightarrow \mathrm{ord}_{a^n-1}(a)|\,\varphi(a^n-1)$.
Όμως από την προηγούμενη άσκηση είναι $\mathrm{ord}_{a^n-1}(a)=n$ άρα $n|\,\varphi(a^n-1)$.

3) Έστω q ένας πρώτος διαιρέτης του 2^p-1.
Επομένως $2^p\equiv 1(\bmod q)\Rightarrow \mathrm{ord}_q(p)|\,p$ όπου p πρώτος επομένως $\mathrm{ord}_q(p)\in\{1,p\}$.
Αν $\mathrm{ord}_q(p)=1$ τότε $2\equiv 1(\bmod q)\Leftrightarrow 1\equiv 0(\bmod q)\Leftrightarrow q=1$ άτοπο διότι ο q είναι πρώτος.
Αν $\mathrm{ord}_q(p)=p$ τότε $\mathrm{ord}_q(p)=p\leq\varphi(q)=q-1\Rightarrow p<q$.
Άρα κάθε πρώτος διαιρέτης του 2^p-1 είναι μεγαλύτερος του p, επομένως και κάθε διαιρέτης του 2^p-1, εκτός από το 1, είναι μεγαλύτερος του p.

4) Έστω p ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του n και ότι $n|2^n-1$ επομένως $p|2^n-1$.
Είναι $2^n\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow \mathrm{ord}_p(2)|n$ και $\mathrm{ord}_p(2)\leq\varphi(p)=p-1<p$.
Επομένως ο n έχει διαιρέτη μικρότερο του p. Για να μην καταλήξουμε σε αντίφαση, ο διαιρέτης αυτός, θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι το 1.
Άρα $\mathrm{ord}_p(2)=1\Rightarrow 2\equiv 1(\bmod p)\Leftrightarrow 1\equiv 0(\bmod p)\Rightarrow p=1$ άτοπο διότι ο p είναι πρώτος.
Άρα $n\nmid 2^n-1$.

5) $p|\alpha^{2^n}+1\Rightarrow p\big|(\alpha^{2^n}+1)(\alpha^{2^n}-1)\Leftrightarrow p|\alpha^{2^{n+1}}-1$. Άρα $\alpha^{2^{n+1}}\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow$ $\mathrm{ord}_p(a)|2^{n+1}$. Επομένως $\mathrm{ord}_p(a)=2^k$ όπου $k\in\mathbb{N}$ και $k\leq n+1$. Αν ήταν $k\leq n$ τότε θα είχαμε $p|\alpha^{2^k}-1\Rightarrow p|\alpha^{2^n}-1$. Όμως $p|\alpha^{2^n}+1\Rightarrow p|(\alpha^{2^n}+1)-(\alpha^{2^n}-1)=2\Rightarrow p=2$, άτοπο.
Άρα $k=n+1$ και $\mathrm{ord}_p(a)=2^{n+1}$. Αλλά $\mathrm{ord}_p(a)|\varphi(p)\Leftrightarrow 2^{n+1}|p-1$.

6) Είναι $a^x\equiv b^x(\bmod m)$
$b^{-x}\equiv b^x\Leftrightarrow a^xb^{-x}(\bmod m)\Leftrightarrow(ab^{-1})^x\equiv 1(\bmod m)$.
Θέτουμε $z\equiv ab^{-1}(\bmod m)$. Έτσι $z^x\equiv 1(\bmod m)$.
Άρα $\mathrm{ord}_m(z)|x$ και ομοίως $\mathrm{ord}_m(z)|y$. Από τις 2 αυτές σχέσεις παίρνουμε ότι
$\mathrm{ord}_m(z)|(x,y)$ (1). Επομένως $z^{\mathrm{ord}_m(z)}\equiv 1(\bmod m)\overset{(1)}{\Rightarrow} z^{(x,y)}\equiv 1(\bmod m)$
$\Leftrightarrow(ab^{-1})^{(x,y)}\equiv 1(\bmod m)\Leftrightarrow a^{(x,y)}\equiv b^{(x,y)}(\bmod m)$.

7) Θέτουμε $d=\mathrm{ord}_n(a)$. Είναι $n|a^{n-1}-1\Rightarrow d|n-1$ (1).
Αν $d<n-1$ τότε $n|a^d-1$ άτοπο από την υπόθεση. Έτσι $d\geq n-1\overset{(1)}{\Rightarrow} d=n-1$.
Όμως $d|\varphi(n)\Leftrightarrow n-1|\varphi(n)$. Αλλά $\varphi(n)\leq n-1$ με το = να ισχύει όταν ο n είναι πρώτος.
Έπεται ότι ο n είναι υποχρεωτικά πρώτος.

8) Θέτουμε $d=ord_n(m)$. Αλλά $m^{3^{n+1}}\equiv 1(mod n)\Rightarrow d|3^{n+1}\Rightarrow d=3^c$ για κάποιον θετικό ακέραιο $c\leq n+1$.

- Αν $c=n+1$ τότε $3^{n+1}=d=ord_n(m)|\varphi(n)\leq n-1\Rightarrow 3^{n+1}\leq n-1$, αδύνατο.
- Αν $c\leq n$ τότε $3^c|3^n\Rightarrow m^{3^n}\equiv 1(mod n)\Rightarrow m^{2\cdot 3^n}\equiv 1(mod n)$

$\Rightarrow 0\equiv m^{2\cdot 3^n}+m^{3^n}+1\equiv 3(mod n)\Rightarrow n=1$ ή $n=3$.
Αν $n=1$ τότε ισχύει για κάθε $m\in\mathbb{N}^*$.
Αν $n=3$ τότε $3\big|1+m^{27}+m^{54}\Rightarrow m^{27}(m^{27}+1)\equiv 2(mod 3)\Leftrightarrow m^{27}\equiv 1(mod 3)\big)$
$\Leftrightarrow m\equiv 1(mod 3)$. Επομένως $(m,n)=(k,1),(3k-2,3)$ για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$.

9) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- 1η περίπτωση: $p=q$. Τότε $p^2|2\cdot 5^p\Rightarrow p=q=5$.
- 2η περίπτωση: $p\neq q$. Όταν $q=5$ έχουμε $5p|5^p+5^5\Rightarrow p|5^{p-1}+5^4$.

$\Rightarrow 0\equiv 5^{p-1}+5^4\equiv 1+5^4\equiv 626(mod p)$ από το μικρό θεώρημα του Fermat.
Επομένως $p=2$ ή $p=313$. Ομοίως όταν $p=5$ τότε $q=2$ ή $q=313$.

Όταν $p, q \neq 5$ έχουμε λόγω του μικρού θεωρήματος του Fermat:
$0 \equiv 5^p + 5^q \equiv 5 + 5^q \equiv 5(5^{q-1}+1)(modp) \Leftrightarrow 5^{q-1} \equiv -1(modp)$ (1)
$\Rightarrow 5^{2(q-1)} \equiv 1(modp)$(2). Όμοια προκύπτει ότι $5^{p-1} \equiv -1(modq)$ (3) και
$5^{2(p-1)} \equiv 1(modq)$ (4).
1η υποπερίπτωση: $p = 2 \Rightarrow 2q|25 + 5^q \Rightarrow 0 \equiv 5^q + 25 \equiv 5 + 25 \equiv 30(modq)$
$\xRightarrow{q\neq 2,5} q = 3$. Ομοίως $q = 2 \xRightarrow{p\neq 2,5} p = 3$.
2η υποπερίπτωση: $p, q \neq 2$. Λόγω των (2) και (4) είναι:

$$\begin{cases} ord_p(5)|2(q-1) \\ ord_q(5)|2(p-1) \end{cases} \text{και} \quad \begin{matrix} ord_p(5)|\varphi(p) = p-1 \\ ord_q(5)|\varphi(q) = q-1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ord_p(5)|(2(q-1), p-1) \\ ord_q(5)|(2(p-1), q-1) \end{cases} (5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2\left(ord_p(5)\right) \leq u_2(p-1) \\ u_2\left(ord_q(5)\right) \leq u_2(q-1) \end{cases} (6)$$

Ακόμη λόγω των (1), (3):

$$\begin{cases} ord_p(5) \nmid q-1 \\ ord_q(5) \nmid p-1 \end{cases} \xRightarrow{(5),(6)} \begin{cases} u_2(p-1) \geq u_2\left(ord_p(5)\right) = u_2\big(2(q-1)\big) = 1 + u_2(q-1) \\ u_2(q-1) \geq u_2\left(ord_q(5)\right) = u_2\big(2(p-1)\big) = 1 + u_2(p-1) \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $0 \geq 2$, άτοπο.
Επομένως $(p, q) = (5,5), (2,5), (5,2), (5,313), (313,5), (2,3), (3,2)$.

10) Υποθέτουμε ότι $n|3^n - 2^n$ για κάποιον ακέραιο $n \geq 2$. Έστω ότι ο p είναι ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του n. Αν $p = 2$ τότε $2|3^n - 2^n$, άτοπο. Αν $p = 3$ τότε $3|3^n - 2^n$, άτοπο. Άρα $p \geq 5$. Έστω a θετικός ακέραιος τέτοιος, ώστε $a \equiv \frac{p+1}{2}(modp) \Leftrightarrow 2a \equiv 1(modp)$ (1).
Είναι $p|3^n - 2^n \Rightarrow 3^n \equiv 2^n(modp) \Leftrightarrow 3^n a^n \equiv 2^n a^n \equiv (2a)^n \equiv 1(modp) \Leftrightarrow (3a)^n \equiv 1(modp)$.
Επομένως $ord_p(3a)|n$. Ακόμη $ord_p(3a)|\varphi(p) = p - 1 \Rightarrow ord_p(3a) < p$.
Άρα ο $ord_p(3a)$ είναι διαιρέτης του n μικρότερος του p. Για να μην οδηγηθούμε σε αντίφαση πρέπει $ord_p(3a) = 1 \Rightarrow 3a \equiv 1(modp) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{3(p+1)}{2} \equiv 1(modp)$
$\Leftrightarrow 3p + 3 \equiv 2(modp) \Leftrightarrow 1 \equiv 0(modp) \Leftrightarrow p = 1$, άτοπο.

11) Αρκεί να δείξουμε ότι όλοι οι πρώτοι περιττοί διαιρέτες του $a^{2^n} + b^{2^n}$ είναι $1(mod2^{n+1})$.
Έτσι αν d ένας διαιρέτης του τότε $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \equiv 1 \cdot 1 \cdots 1 \equiv 1(mod2^{n+1})$ αφού οι $p_1, p_2, \dots, p_k$ είναι περιττοί πρώτοι διαιρέτες του $a^{2^n} + b^{2^n}$.
Ας είναι q ένας περιττός πρώτος διαιρέτης του $a^{2^n} + b^{2^n}$.
Είναι $(a, b) = 1 \Rightarrow (a, q) = (b, q) = 1$ (1).
$q|a^{2^n} + b^{2^n} \Leftrightarrow q|a^{2^n}[1 + (ba^{-1})^{2^n}] \overset{(1)}{\Leftrightarrow} q|(ba^{-1})^{2^n} + 1$ (2)
$\Rightarrow q\Big|[(ba^{-1})^{2^n} + 1]\Big[(ba^{-1})^{2^n} - 1\Big] = (ba^{-1})^{2^{n+1}} - 1$ (3).
Θέτουμε $z \equiv ba^{-1}(modq)$. Λόγω της (3) έχουμε $ord_q(z)|2^{n+1} \Rightarrow ord_q(z) = 2^c$ για κάποιο $c \leq n + 1$. Αν ήταν $c \leq n$ τότε $z^{2^c} \equiv 1(modq) \Rightarrow z^{2^n} \equiv 1(modq)$, άτοπο λόγω της σχέσης (2) και διότι $q \neq 2$. Άρα $c = n + 1 \Rightarrow ord_q(z) = 2^{n+1}$.
Αλλά $2^{n+1} = ord_q(z)|\varphi(q) = q - 1 \Rightarrow q \equiv 1(mod2^{n+1})$.

12) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- 1η περίπτωση: $p = q$.

Η δοθείσα γράφεται $p^2|2^{p+1} \Rightarrow p = q = 2$.

- 2η περίπτωση: $p = 2$ και $q \neq 2$.

Η δοθείσα γράφεται $2q|2^q + 4 \Rightarrow q|2^{q-1} + 2$ (1).
Από το μικρό θεώρημα του Fermat $2^{q-1} + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 3(modq) \overset{(1)}{\Rightarrow} q = 3$.
Ομοίως αν $q = 2$ και $p \neq 2$, τότε $p = 3$.

- 3^{η} περίπτωση: $p \neq 2$ και $q \neq 2$.

Θέτουμε $p-1=2^x n$ και $q-1=2^y m$ όπου οι n, m είναι περιττοί θετικοί ακέραιοι.
Είναι $0 \equiv 2^p+2^q \equiv 2+2^q (modp) \overset{p\neq 2}{\Longleftrightarrow} 2^{q-1} \equiv -1(modp) \Rightarrow 2^{2(q-1)} \equiv 1(modp)$.
Ομοίως $2^{2(p-1)} \equiv 1(modq)$.
Άρα $ord_p(2)|2(q-1)$ και $ord_q(2)|2(p-1)$.
Αλλά $2^{q-1} \not\equiv 1(modp)$ και $2^{p-1} \not\equiv 1(modq)$.
Άρα $u_2\left(ord_p(2)\right)=u_2\big(2(q-1)\big)$ και $u_2\left(ord_q(2)\right)=u_2\big(2(p-1)\big)$
$\Leftrightarrow u_2\left(ord_p(2)\right)=u_2(2^{y+1}m)$ και $u_2\left(ord_q(2)\right)=u_2(2^{x+1}n)$
$\Leftrightarrow u_2\left(ord_p(2)\right)=y+1$ (2) και $u_2\left(ord_q(2)\right)=x+1$ (3).
Αλλά $ord_p(2)|\varphi(p)=p-1=2^x n \overset{(3)}{\Rightarrow} y+1=u_2\left(ord_p(2)\right) \leq u_2(2^x n)=x$ (4).
Ομοίως από τη σχέση (2)έχουμε: $x+1 \leq y$ (5).
Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) καταλήγουμε σε άτοπο.
Επομένως $(p,q)=(2,2),(2,3),(3,2)$.

13) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- 1^{η} περίπτωση: $p,q,r \neq 2$.

Τότε $\begin{cases} p|(q^r+1)(q^r-1)=q^{2r}-1 \\ q|(r^p+1)(r^p-1)=r^{2p}-1 \\ r|(p^q+1)(p^q-1)=p^{2q}-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ord_p(q)\epsilon\{1,2,2r\}|p-1 \\ ord_q(r)\epsilon\{1,2,2p\}|q-1 \\ ord_r(p)\epsilon\{1,2,2q\}|r-1 \end{cases}$
διότι $ord_p(q)|\varphi(q)=q-1$ και $ord_p(q) \neq r$ κυκλικά.
Υποθέτουμε ότι $ord_p(q), ord_q(r), ord_r(p)\epsilon\{1,2\}$.
Αν $ord_p(q)=1$ τότε $q \equiv 1(modp) \Rightarrow q^r \equiv 1(modp) \Rightarrow p|q^r-1$. Αλλά $p|q^r+1$
$\Rightarrow p|(q^r+1)-(q^r-1)=2 \Rightarrow p=2$, άτοπο. Όμοια αν $ord_q(r)=1$ ή $ord_r(p)=1$.
Άρα $ord_p(q)=ord_q(r)=ord_r(p)=2$. Επομένως:

$$\begin{cases} q^2 \equiv 1(modp) \\ r^2 \equiv 1(modq) \\ p^2 \equiv 1(modr) \end{cases} \text{και} \begin{matrix} q \not\equiv 1(modp) \\ r \not\equiv 1(modq) \\ p \not\equiv 1(modr) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} q \equiv -1(modp) \\ r \equiv -1(modq) \\ p \equiv -1(modr) \end{cases}$$

Άρα $q+1=ap$. Αν ήταν $a=1$ τότε $q+1=p$ άτοπο διότι ο ένας θα ήταν άρτιος και ο άλλος περιττός. Επομένως $a \geq 2$ και $q+1 \geq 2p$.
Ομοίως $\begin{cases} q+1 \geq 2p \\ r+1 \geq 2q \\ p+1 \geq 2r \end{cases} \Rightarrow 3 \geq p+q+r$. Αλλά $p,q,r \geq 3$, άτοπο.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $ord_p(q)=2r$.
Άρα $2r|\varphi(p)=p-1 \Rightarrow r|p-1 \Rightarrow r|p^q-1$.
Όμως $r|p^q+1 \Rightarrow r|(p^q+1)-(p^q-1)=2 \Rightarrow r=2$, άτοπο.

- 2^{η} περίπτωση: Τουλάχιστον ένας εκ των p,q,r ισούται με το 2.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $p=2$. Τότε $2|q^r+1$, $q|r^2+1$, $r|2^q+1$.
Αν $q=2$ τότε $2|2^r+1$, άτοπο. Ακόμη αν $r=2$ τότε $2|2^q+1$, άτοπο. Άρα οι q,r είναι περιττοί.
Άρα πρέπει: $r|2^q+1 \Rightarrow r|(2^q+1)(2^q-1)$ και $r \nmid 2^q-1 \Rightarrow r|2^{2q}-1$ και $r \nmid 2^q-1$
$\Rightarrow ord_r(2)\epsilon\{1,2,2q\}|\varphi(r)=r-1$. Αν $ord_r(2)=1$ τότε $2 \equiv 1(modr) \Rightarrow r=1$, άτοπο.
Αν $ord_r(2)=2$ τότε $2^2 \equiv 1(modr) \Rightarrow r=3$.
Άρα $q|r^2+1=10 \overset{q\neq 2}{\Longrightarrow} q=5$ που επαληθεύει την αρχική.
Αν $ord_r(2)=2q \Rightarrow 2q|r-1 \Rightarrow q|r-1 \Leftrightarrow r \equiv 1(modq)$.
Αλλά $q|r^2+1 \Rightarrow 0 \equiv r^2+1 \equiv 1^2+1 \equiv 2(modq) \Rightarrow q=2$, άτοπο.
Επομένως $(p,q,r)=(2,5,3),(5,3,2),(3,2,5)$.

14) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1^{η}$ περίπτωση: $p|5^p-2^p$. Από το μικρό θεώρημα του Fermat έχουμε:

$5^p-2^p\equiv 5-2\equiv 3(modp)\Rightarrow p=3$. Άρα $3q|(5^3-2^3)(5^q-2^q)\Leftrightarrow q|39(5^q-2^q)$
$\Rightarrow q=3$ ή $q=13$. Κυκλικά καταλήγουμε στις λύσεις $(p,q)=(3,3),(3,13),(13,3)$.

- $2^{η}$ περίπτωση: $p\nmid 5^p-2^p$ και $q\nmid 5^q-2^q\Leftrightarrow p,q\neq 3$.

Άρα $5^q-2^q\equiv 0(modp)\Leftrightarrow 2^q[(5\cdot 2^{-1})^q-1]\equiv 0(modp)\Leftrightarrow (5\cdot 2^{-1})^q-1\equiv 0(modp)$
διότι $p\neq 2$. Ομοίως $(5\cdot 2^{-1})^p-1\equiv 0(modq)$. Θέτουμε $a\equiv 5\cdot 2^{-1}(modpq)$.

Άρα $\begin{cases} ord_p(a)|q \\ ord_q(a)|p \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} ord_p(a)\epsilon\{1,q\}|\varphi(p)=p-1 \\ ord_q(a)\epsilon\{1,p\}|\varphi(q)=q-1 \end{cases}$

Αν $ord_p(a)=q$ και $ord_p(a)=q$ τότε: $\begin{cases} q|p-1 \\ p|q-1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} q\leq p-1 \\ p\leq q-1 \end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow} p+q\leq p+q-2$, άτοπο.

Άρα $ord_p(a)=1$ ή $ord_q(a)=1$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $ord_p(a)=1$
Τότε $a\equiv 1(modp)\Leftrightarrow 5\cdot 2^{-1}\equiv 1(modp)\Leftrightarrow 5\equiv 2(modp)\Leftrightarrow p=3$, άτοπο.
Επομένως $(p,q)=(3,3),(3,13),(13,3)$.

15) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1^{η}$ περίπτωση: $p=2$. Είναι $x|2\Longrightarrow x=1$ ή $x=2$.
- $2^{η}$ περίπτωση: $p\neq 2$.

Για $x=1$ η $x^{p-1}|(p-1)^x+1$ αληθεύει για κάθε p πρώτο.
Για $x\geq 2$ υποθέτουμε ότι ο q είναι ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του x.
Τότε $q|(p-1)^x+1\Rightarrow q|[(p-1)^x+1][(p-1)^x-1]\Leftrightarrow q|[(p-1)^2]^x$
$\Rightarrow ord_q((p-1)^2)|x$ (1). Ακόμη $ord_q((p-1)^2)|\varphi(q)=q-1$.
Από τις 2 παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι $ord_q((p-1)^2)|(q-1,x)=1$ διότι ο q είναι ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του x και $q>q-1$.
Επομένως $(p-1)^2\equiv 1(modq)\Leftrightarrow p(p-2)\equiv 0(modq)$.

i. $1^{η}$ υποπερίπτωση: $\mathrm{p}\equiv 2(\mathrm{modq})\Rightarrow (\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1\equiv (2-1)^{\mathrm{x}}+1\equiv 2(\mathrm{modq})$ (1).
Όμως $\mathrm{q}|(\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1\Rightarrow (\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1\equiv 0(\mathrm{modq})$ (2).
Από τις σχέσεις (1), (2) πρέπει $\mathrm{q}=2$. Αλλά $2=\mathrm{q}|(\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1$, άτοπο, διότι $\mathrm{p}\neq 2$ και επομένως ο $(\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1$ είναι περιττός.

ii. $2^{η}$ υποπερίπτωση: $\mathrm{p}\equiv 0(\mathrm{modq})\Leftrightarrow \mathrm{p}=\mathrm{q}$.
Έχουμε $\mathrm{x}^{\mathrm{p}-1}|(\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1\Rightarrow \mathrm{p}^{\mathrm{p}-1}|(\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1\Rightarrow \mathrm{u_p}(\mathrm{p}^{\mathrm{p}-1})\leq \mathrm{u_P}((\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1)$ (3).
Αν ο x είναι άρτιος τότε $(\mathrm{p}-1)^{\mathrm{x}}+1\equiv (-1)^2+1\equiv 2(\mathrm{modp})\not\equiv 0(\mathrm{modp})$ διότι $\mathrm{p}\neq 2$, άτοπο. Έπεται ότι ο x είναι υποχρεωτικά περιττός. Από το Λήμμα Lifting the Exponent η (3) γράφεται: $\mathrm{p}-1\leq \mathrm{u_p}(\mathrm{x})+\mathrm{u_p}\big((\mathrm{p}-1)+1\big)=\mathrm{u_p}(\mathrm{x})+\mathrm{u_p}(\mathrm{p})=\mathrm{u_p}(\mathrm{x})+1$

$\Leftrightarrow \mathrm{u_p}(\mathrm{x})\geq \mathrm{p}-2\Rightarrow \mathrm{x}\geq \mathrm{p}^{\mathrm{p}-2}$ (4). Όμως $2\mathrm{p}\geq \mathrm{x}\overset{(4)}{\Rightarrow} 2\mathrm{p}\geq \mathrm{p}^{\mathrm{p}-2}\Leftrightarrow 2\geq \mathrm{p}^{\mathrm{p}-3}\Leftrightarrow \mathrm{p}\leq 3$.
Από την υπόθεση ξέρουμε ότι $\mathrm{p}\neq 2$. Αφού όμως $\mathrm{p}\leq 3$ πρέπει $\mathrm{p}=3$. Αντικαθιστώντας στη δοθείσα έχουμε $\mathrm{x}^2|\,2^{\mathrm{x}}+1$. Εξετάζουμε τις περιπτώσεις όπου $\mathrm{x}\leq 2\mathrm{p}=6$ και βρίσκουμε ότι αληθεύει για $\mathrm{x}=1$ ή $\mathrm{x}=3$. Επομένως $(\mathrm{p},\mathrm{q})=(1,\mathrm{p}),(2,2),(3,3)$

Βιβλιογραφία

1. *A. Adler, J. Coury, The Theory of Numbers, Jones and Bartlett Publishers, USA 1995.*
2. *T. Andreescu, D. Andrica, Number Theory, Birkhäuser, Boston 2009.*
3. *D.M. Burton, Elementary Number Theory, Allyn and Bacon, Inc., Boston 1980.*
4. *P. Hackman, Elementary Number Theory, HHH Productions, 2007.*
5. *G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, London 1975.*
6. *T. Koshy, Elementary Number Theory, Academic Press, USA 2007.*
7. *I. Niven, H.A.S. Zuckermann, H.L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New York 1991.*

Επικαιρότητα και Μαθηματικά

Βραβείο Médaille Koyré στην Χριστίνα Φίλη

Στην πρόσφατη συνεδρία της, η Διεθνής Ακαδημία Επιστημών[1] που εδρεύει στο Παρίσι, **ομόφωνα** απένειμε το **μετάλλιο Alexandre Koyré**, το οποίο θεσπίστηκε το 1968 και το οποίο αποτελεί την ύψιστη διάκριση για τους **ιστορικούς των θετικών επιστημών**, στην κυρία **Χριστίνα Π. Φίλη**, τ. καθηγήτρια του Ε.Μ.Π. και τακτικού μέλους της εν λόγω Ακαδημίας για το σύνολο του επιστημονικού της έργου. Είναι η τρίτη γυναίκα που τιμάται με αυτή την διεθνή διάκριση και **η πρώτη Ελληνίδα** η οποία κατακτά αυτό τον τίτλο. Υπότροφος της Γαλλικής Κυβέρνησης (1971-1975) η Χριστίνα Φίλη μαθήτευσε δίπλα σ' έναν από τους μεγαλύτερους ιστορικούς των Μαθηματικών του 20ου αιώνα, τον **Rene Taton**. Το 1993 εξελέγη αντεπιστέλλον μέλος της Διεθνούς Ακαδημίας της Ιστορίας των Επιστημών. Τον Ιούνιο του 1994, το Διεθνές Βιογραφικό Κέντρο του Cambridge την ανακήρυξε **Διεθνή Γυναίκα** (International Woman) για το έτος 1993-94.

Με τις πολυετείς έρευνές της για τον Ιωάννη Καραντινό, τον Β. Λάκωνα, τον Ν. Νικολαΐδη, τον Κυπ. Στέφανο, Γ. Ρεμούνδο κ.α. ανέδειξε την επίδραση των Γαλλικών Μαθηματικών στην διαμόρφωση τόσο των Ελλήνων μαθηματικών όσο και της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Από την Γαλλική Κυβέρνηση έχει τιμηθεί με το **παράσημο των Ακαδημαϊκών Δαφνών** (Chevalier des Palmes Aca demiques).

1. Η Διεθνής Ακαδημία της **Ιστορίας των Επιστημών** ιδρύθηκε το 1928 από τους Α. Μιέλι, Α. Ρέυ, Τζ. Σάρτον, Λ. Θορντάικ κ. α. Ο ρωσικής καταγωγής **Alexandre Koyré (1892- 1964),** σπούδασε αρχικά **φιλοσοφία** με τον Χούσερλ και **Μαθηματικά** με τον Χίλμπερτ, στο πανεπιστήμιο της Γκαίτινγκεν και αργότερα στην Σορβόννη με τον Μπερξόν και τον Μπρούνσβιγκ. Κατά την διάρκεια του Α΄ Παγκοσμίου Πολέμου κατετάγη στην λεγεώνα των Ξένων και πολέμησε ως εθελοντής. Μετά τον πόλεμο, δίδαξε στο Ινστιτούτο Προχωρημένων Σπουδών του Πρίνσετον, στα πανεπιστήμια Γέιλ, Χάρβαρντ και Τζων Χόπκινς. Πολυπρισματική μορφή κατέλειπε σημαντικό συγγραφικό έργο όπως: Σπουδές για τον Γαλιλαίο (1939). Από τον **κλειστό κόσμο στο άπειρο σύμπαν** (1957) το οποίο κυκλοφορεί και στα ελληνικά. Η αστρονομική Επανάσταση: Κοπέρνικος, Κέπλερ, Μπορέλλι (1961), Νευτώνειες Σπουδές (1965), Μεταφυσική και Μέτρηση: Δοκίμια για την Επιστημονική Επανάσταση (1968). Η Αστρονομική Επανάσταση (1973). Εισαγωγή στην ανάγνωση του Πλάτωνος(1994) κ. α.

Βραβεία Ακαδημίας Αθηνών 2021: Θετικών Επιστημών

- **Βραβείο Νικολάου Κ. Αρτεμιάδη**, αθλοθετούμενο από τη σύζυγό του Ζαφειρία, απονέμεται στον αριστούχο πτυχιούχο του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Πατρών, Νικόλαο Τσικούρα.
- **Βραβείο της Ακαδημίας**, απονέμεται στους Γεώργιο Ζάκκα (προϊστάμενο), Σπυρίδωνα Πετράκο, Κωνσταντίνο Σαμαρτζή, Νικόλαο Σουρλή και Κωνσταντίνο Τσαγκαρούλη, για την προσφορά τους στα ερευνητικά προγράμματα του Κέντρου Ερευνών **Αστρονομίας** και Εφηρμοσμένων **Μαθηματικών**.
- **Νέο Βραβείο Αριστείας 2022, στα Μαθηματικά «Παναγιώτη Μέγα»,** παλιού δραστήριου μέλους του ΔΣ της ΕΜΕ, στη δεκαετία του 1960, με καταγωγή από την Ήπειρο, με μεγάλη συμβολή στα Μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το βραβείο το **αθλοθέτησε** η κόρη του Παρασκευή Μέγα και τα αδέλφια της, επ' ευκαιρίας της συμπληρώσεως, για τα 100 χρόνια από την **γέννησή του**, το έτος 2022, με χρηματικό έπαθλο **3.000** ευρώ, για την **βράβευση** του μαθητή ή της μαθήτριας με την καλύτερη επίδοση στην **Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών** για το έτος **2022**. Στην αναζήτηση των στοιχείων αυτών, η Ακαδημία Αθηνών θα έχει την συνδρομή και συνεργασία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Το βραβείο θα απονεμηθεί τον Δεκέμβριο του έτους 2022.

Women of mathematics throughout Europe

Κοινό τόπο αποτελεί το γεγονός ότι ο κόσμος των Μαθηματικών είναι πολύ **απαιτητικός**, ιδίως για τις γυναίκες μαθηματικούς που συχνά αντιμετωπίζουν επιπρόσθετες δυσκολίες λόγω των επιπλέον κοινωνικών και οικογενειακών αρμοδιοτήτων και υποχρεώσεών τους. Υπό το πρίσμα αυτό η πρωτοβουλία της έκθεσης *Women of mathematics throughout Europe* αναγνωρίζει τις προκλήσεις αυτές και επιδιώκει να προσφέρει μια ματιά στον κόσμο των Μαθηματικών μέσα από τη σκοπιά γυναικών μαθηματικών, αποσκοπώντας στο να δημιουργήσει ένα πλαίσιο **ενθάρρυνσης** για τις νεότερες γυναίκες μαθηματικούς και ένα στιβαρό πόλο αναφοράς για αυτές. Πρόκειται για μια διεθνή περιοδεύουσα έκθεση, κύριοι στόχοι της οποίας αποτελούν η ενίσχυση της συνεργασίας και της επικοινωνίας, αλλά και η ανάδειξη σπουδαίων γυναικών μαθηματικών. Η έκθεση είχε ως αφετηρία το 7^{ο} Ευρωπαϊκό Κογκρέσο Μαθηματικών **(7ECM)** που διεξήχθη τον Ιούλιο του 2016 στο Βερολίνο, όπου επιλέχθηκαν και παρουσιάστηκαν μέσω φωτογραφικών πορτραίτων (από την Noel Tovia Matoff) και αποσπασμάτων συνεντεύξεων (με την επιμέλεια της Sylvie Paycha) 13 σπουδαίες μαθηματικοί, εκπροσωπώντας 13 χώρες της Ευρώπης.

Εν συνεχεία με αφορμή το 8^{ο} Ευρωπαϊκό Κογκρέσο Μαθηματικών **(8ECM)** η παραπάνω έκθεση συμπληρώθηκε με τη συλλογή *Women of mathematics on the Mediterranean shores*, που είχε ως γεωγραφικό άξονα τις χώρες της Ευρωπαϊκής Μεσογείου και περιλαμβάνει 7 πορτραίτα γυναικών μαθηματικών. Η πλήρης έκθεση των 20 πορτραίτων εγκαινιάσθηκε στο 8ECM που διεξήχθη τον Ιούνιο του 2021 στο Πορτορόζ της Σλοβενίας, ενώ παράλληλα εκδόθηκε και κατάλογος με τις φωτογραφίες και τις πλήρεις συνεντεύξεις.

Η έκθεση *Women of mathematics throughout Europe* αποτελεί, μαζί με 120 άλλα μαθηματικά δρώμενα παγκόσμιου βεληνεκούς, μέρος του **κινήματος May12,** το οποίο ιδρύθηκε μετά από πρόταση της Επιτροπής Γυναικών της Ιρανικής Μαθηματικής Εταιρείας στο World Meeting for Women in Mathematics – $(WM)^2$ τον Ιούλιο του 2018 στο Ρίο ντε Τζανέιρο. Η ονομασία της πρωτοβουλίας, May12, έχει ως αφορμή την ημερομηνία γέννησης της μόνης μέχρι σήμερα γυναίκας μαθηματικού που βραβεύτηκε με το **μετάλλιο Fields** (2014), **Μαριάμ Μιρζαχανί,** για την κορυφαία συμβολή της **δυναμικής και γεωμετρίας** επιφανειών Riemann και των παραμετρικών χώρων τους (the dynamics and geometry of Riemann surfaces and their moduli spaces). Η Μιρζαχανί έχασε τη ζωή της στην μάχη κατά του καρκίνου του μαστού στην ηλικία των 40 ετών. Πλέον η ημερομηνία *12 Μαΐου* σηματοδοτεί τη μέρα εορτασμού της **συμμετοχής** των **γυναικών** στα **Μαθηματικά**, και έχει ως στόχο να εμπνεύσει γυναίκες να προβάλλουν τα μαθηματικά τους επιτεύγματα, και να ενθαρρύνει τη διαμόρφωση ενός ανοικτού, οικείου και υποστηρικτικού περιβάλλοντος για όλους.

Η Καθηγήτρια του ΕΜΠ **κ. Σοφία Λαμπροπούλου** επελέγη να αποτελέσει ένα από τα **7 νέα πορτραίτα** γυναικών μαθηματικών που συμπεριλήφθηκαν στη σύνθεση της έκθεσης *Women of mathematics throughout Europe και **έτυχε της διεθνούς αυτής διάκρισης.***

Η κα Λαμπροπούλου **σπούδασε Μαθηματικά** στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και στη συνέχεια έκανε μεταπτυχιακές σπουδές και εκπόνησε διδακτορικό στο Πανεπιστήμιο του Warwick της Μ. Βρετανίας, ως υπότροφος του Ι. Ωνάση και του Ι.Κ.Υ., και ακολούθως μεταδιδακτορικό στο Παν/μιο του Cambridge, ως υπότροφος της Ε.Ε. Έχει εργαστεί στο Παν/μιο του Göttingen της Γερμανίας και στο Παν/μιο της Caen της Γαλλίας. Από το 2000 εργάζεται, πρώτα ως Αναπληρώτρια Καθηγήτρια και στη συνέχεια ως Καθηγήτρια, στον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π.,του οποίου και διετέλεσε διευθύντρια κατά τα 2 τελευταία έτη.

Τα ερευνητικά της ενδιαφέροντα βρίσκονται στην Τοπολογία, την Άλγεβρα και τα Συνδυαστικά Μαθηματικά, ιδιαιτέρως στην Τοπολογία Χαμηλών Διαστάσεων, Θεωρία Κόμβων και Πλεξίδων, και σε εφαρμογές στη Βιολογία, στη Φυσική και στη Χημεία. Έχει (συν-) συγγράψει πάνω από 75 επιστημονικές δημοσιεύσεις και έχει υπάρξει Επιστημονικός Υπεύθυνος πολλών ερευνητικών έργων, συμπεριλαμβανομένου του ερευνητικού προγράμματος αριστείας Θαλής `*Αλγεβρική Μοντελοποίηση Τοπολογικών και Υπολογιστικών Δομών και Εφαρμογών*', στο οποίο συμμετείχαν 56 ερευνητές από την Ελλάδα και το εξωτερικό. Επιβλέπουσα δεκάδων διπλωματικών εργασιών, διδακτορικών διατριβών και μεταδιδακτόρων και μέλος των συντακτικών επιτροπών τριών επιστημονικών περιοδικών και πολλών ειδικών τευχών και τόμων. Έχει στο ενεργητικό της **αναρίθμητες ερευνητικές επισκέψεις** σε πανεπιστήμια και ερευνητικά κέντρα του εξωτερικού και προσκεκλημένες εισηγήσεις σε διεθνή συνέδρια σε όλον τον κόσμο.

Έχει (συν-) διοργανώσει πολλά συνέδρια, συμπεριλαμβανομένων των πιο πρόσφατων γεγονότων-ορόσημων *Knots in Hellas 2016*', στην Διεθνή Ολυμπιακή Ακαδημία, και `*First Congress of Greek Mathematicians*' το 2018 (ως μέλος της Κεντρικής Οργανωτικής Επιτροπής). Έχει συνεργαστεί σε επιστημονικές δράσεις με εμβληματικές προσωπικότητες της επιστημονικής της περιοχής, όπως με τον διάσημο Καθηγητή **VaughanF.R. Jones**, ο οποίος έχει τιμηθεί με το **Βραβείο Fields** -το αντίστοιχο του Βραβείου Nobel για μαθηματικούς-, και τον διάσημο Καθηγητή Colin Adams του Williams College των Η.Π.Α., ενώ έχει σταθερή, πολυετή συνεργασία με τον διάσημο Καθηγητή Louis H. Kauffman του Παν/μίου του Illinois στο Chicago.

Είναι διευθύντρια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Ε.Μ.Π. **`***Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και τη Χρηματοοικονομική*' και Αντιπρόεδρος της Συγκλητικής Επιτροπής Βασικής Έρευνας του Ε.Μ.Π. Είναι επίσης Αντιπρόεδρος του Τομεακού Επιστημονικού Συμβουλίου Φυσικών Επιστημών και Μαθηματικών του Εθνικού Συμβουλίου Έρευνας, Τεχνολογίας και Καινοτομίας και μέλος της Συμβουλευτικής Επιτροπής του Ελληνικού Ιδρύματος Έρευνας και Καινοτομίας. Τέλος, είναι ιδρυτικό μέλος και μέλος της Εκτελεστικής Επιτροπής της ένωσης *Ελληνίδες Γυναίκες στα Μαθηματικά / Greek Women in Mathematics (GWM)*, καθώς και εκπρόσωπος της Ελλάδας στην ένωση *European Women in Mathematics.*

Η επιλογή της κας Σοφίας Λαμπροπούλου στην ομάδα των επτά διακεκριμένων γυναικών μαθηματικών της Μεσογείου αποτελεί μια **ξεχωριστή τιμή για την Ελλάδα**, το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και την **Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία** (ΕΜΕ) της οποίας υπήρξε μέλος του ΔΣ τη διετία 2017-19.

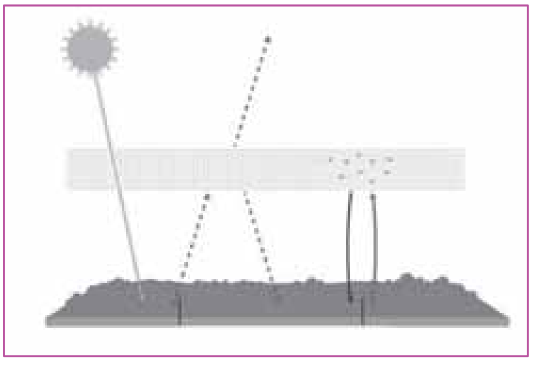
Τα Nobel 2021

Αν παρατηρήσει κανείς κάθε χρόνο τα Nobel, θα δεί ότι σε πολλά απ' αυτά, υπάρχουν **μαθηματικές συμπεριφορές**, κυρίως όμως στα Nobel φυσικής, χημείας και οικονομίας έτσι θα δεί για φέτος, ειδικά στο Nobel φυσικής και συγκεκριμένα στις έρευνες του **Giorgio Parisi,** αφορούν τη **μαθηματική περιγραφή** των αλληλεπιδράσεων που γεννούν τις χαώδεις δυναμικές σε όλα τα **πολύπλοκα συστήματα:** από την ατμόσφαιρα και το κλίμα του πλανήτη μας μέχρι τα ανθρώπινα **νευρωνικά** και **κοινωνικά** δίκτυα και από τις μικροσκοπικές ατομικές αλληλεπιδράσεις μέχρι τις μακροσκοπικές αλληλεπιδράσεις των πλανητών και των γαλαξιών.

Ας τα δούμε όμως πιο αναλυτικά...

Nobel Φυσικής 2021

Δόθηκε στους **Syukuto Manabe** [Ιαπωνία-ΗΠΑ], **Klaous Hasselmamm** [Γερμανία], (Ειδικοί στην **μοντελοποίηση** στη Φυσική για την κλιματική αλλαγή, την ποσοτική μεταβλητότητα και την αξιόπιστη **πρόβλεψη** της παγκόσμιας υπερθέρμανσης, καθώς επίσης και στο ότι τα επίπεδα του CO_2 στην ατμόσφαιρα, είναι αντίστοιχη με την αύξηση της θερμοκρασίας στη Γη) και στον **Giorgio Parisi** [Ιταλία] (Θεωρητικός των συνθετικών φυσικών συστημάτων) , που βραβεύονται για την πρωτοποριακή συμβολή στην κατανόηση μας, περίπλοκων φυσικών συστημάτων, που χαρακτηρίζονται από **τυχαιότητα** και **αταξία** και είναι δύσκολο να **κατανοήσει** κανείς. Το φετινό βραβείο αναγνωρίζει νέες μεθόδους για την περιγραφή τους και για την **πρόβλεψη** της **συμπεριφοράς** τους μακροπρόθεσμα.



Nobel Χημείας 2021

Δόθηκε στους **Behjamin List** [Γερμανία] και **David Macmillan** [ΗΠΑ] το φετινό Nobel Χημείας, για την ανάπτυξη της **ασύμμετρης** οργανοκατάλυσης. Πρόκειται για μια καινοτόμο, οικονομική τεχνική σύνθεση νέων χημικών προϊόντων, που είναι φιλικά στο περιβάλλον (Πράσινη χημεία) και έχει υιοθετηθεί ευρέως από της χημικής βιομηχανίας τη **δημιουργία** πολλών **νέων προϊόντων**. Ανακάλυψαν μεταξύ άλλων τις δυνατότητες της **προλίνης**, ενός αμινοξέος, που δρώντας ως καταλύτης, παίζει αποφασιστικό **ρόλο** στη **σύνθεση** ορισμένων προϊόντων.

Nobel Λογοτεχνίας 2021

Ο **Αμ. Γκούρνα** [Τανζανία] τιμήθηκε φέτος για «...την ασυμβίβαστη και με τη **ενσυναίσθητη** γραφή του, για τα αποτελέσματα της αποικιοκρατίας και τη μοίρα των προσφύγων, που βρέθηκαν μεταξύ διαφορετικών πολιτισμών και ηπείρων. Ανοίγει το βλέμμα μας, σε μια πολυπολιτισμική Ανατολική Αφρική που δεν είναι πολύ γνωστή σε διάφορα μέρη του κόσμου ...»

Nobel Οικονομίας 2021

Δόθηκε στους **David Card** [Καναδάς], **J.D. Agrist** [ΗΠΑ], και **Guido Imbens** [ΗΠΑ], το Nobel οικονομίας 2021, για τις **μεθολογικές** συνεισφορές τους στην ανάλυση των αιτιατών σχέσεων. Μας έφεραν **νέες ιδέες** σχετικά με την αγορά εργασίας και την πολυπλοκότητα της οικονομικής πραγματικότητας.

Nobel Ιατρικής 2021

Δόθηκε στους **David Julius** [ΗΠΑ] και ο **Ardem Patapoutian** [ΗΠΑ], νευροεπιστήμονες στο Ινστιτούτο Έρευνας της Καλιφόρνιας, για τη συμβολή τους στις έρευνες για την **αποκρυπτογράφηση** των μηχανισμών που διέπουν την αίσθηση της **αφής**.

Με τις σχετικές τους έρευνες τους ανακάλυψαν τους **αισθητήρες** που διαθέτουμε στο δέρμα, χάρη στους οποίους έχουμε την **ικανότητα αντίληψης** της θερμότητας, του ψύχους, αλλά και του αγγίγματος, που έχουν κομβική σημασία για την επιβίωσή μας.

Για παράδειγμα, οι νευροφυσιολόγοι **Joseph Erlangen** και **Herbert Gasser** κέρδισαν το Νόμπελ Ιατρικής το 1944 επειδή κατάφεραν να **εξηγήσουν το πώς**, κάποιες εξειδικευμένες περιφεριακές νευρικές ίνες είναι σε θέση **να διακρίνουν** μεταξύ ευχάριστων και οδυνηρών απτικών επαφών. Επιπλέον, ανακάλυψαν ότι αυτοί οι υποδοχείς **απτικών** ερεθισμάτων παίζουν αποφασιστικό ρόλο στη σωματική «**αυτοαντίληψη**», δηλαδή την ικανότητα να αντιλαμβανόμαστε τις θέσεις και τις κινήσεις των μελών του σώματός μας, ενώ συμμετέχουν και στη ρύθμιση της πίεσης του αίματος και της αναπνοής.

Nobel Ειρήνης 2021

Δόθηκε στους μάχιμους δημοσιογράφους **Maria Ressa** [Φιλιππίνες], ιδρύτρια και αρχισυντάκτρια του ειδησεογραφικού ιστότοπου Rappler, και στον **Dmitry Muratov** [Ρωσία], συνιδρυτή και αρχισυντάκτη της εφημερίδας Νόβαγια Γκαζέτα (Новая газета) το Nobel Ειρήνης για *«τον θαρραλέο αγώνα τους για **ελευθερία στην έκφραση**»*. Ελευθερία που, όπως όλοι ξέρουμε, δεν είναι δεδομένη σε πολλά μέρη της παγκόσμιας κοινότητας.

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ξέρετε ότι:

> Όταν δεν αμφιβάλεις …
> …ποτέ δεν είσαι σίγουρος   **Kepler**

- Στην Πλάκα είναι αυτό το 8γωνο κτίριο με το όνομα **ρολόι** ή **αέρηδες.** Είναι ο μετεωρολογικός σταθμός των αρχαίων Ελλήνων.
- «Περί άτακτων αλόγων» είναι έργο του **Απολλώνιου** για τους άρρητους.
- Αρίσταρχος ο Σάμιος διατύπωσε πρώτος το **ηλιοκεντρικό** σύστημα.
- Ο Θαλής ο Μιλήσιος, ο Ευκλείδης ο Αλεξανδρινός, Απολλώνιος ο Περγαίος και ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος ήταν οι πρώτοι θεμελιωτές της επιστήμης.
- Η λέξη **«Κόσμος»** ειπώθηκε για πρώτη φορά από τον Πυθαγόρα.
- Το συνολικό βάρος που έχει η ατμόσφαιρα της Γης, είναι ίσο με το βάρος που έχει ένας κύβος από χαλκό με πλευρά 82 χιλιόμετρα.
- Το 2020, ο ήλιος δεν είχε καθόλου κηλίδες.
- Το **ρόδι** έχει 365 **σπόρια**. Ο χυμός του λέγεται Γρεναδίνη εξ ου και η Γρανάδα στην Ανδαλουσία.
- 101^2-100^2 είναι ίσο με $101+100=201$
- 1000^2-999^2 είναι ίσο με $1000+999=1999$

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

- **Ο Γρίφος της ΕΜΕ:** Στην ΕΜΕ υπάρχει ένα μαγικό κουτί μέσα στο οποίο είναι κλειδωμένα τα μυστικά της επιστήμης των Μαθηματικών. Ο συνδυασμός για να ανοίξει είναι **3** γράμματα και **4** αριθμοί. Ένας υποψήφιος μαθηματικός βρήκε τη λύση και κράτησε σημειώσεις.

  Έγραψε: ΑΒΓ 3578 κανένας δεν είναι στο κλειδί.
  3079 δύο αριθμοί είναι στη θέση τους
  1523 δύο αριθμοί έχουν αλλάξει θέση
  2468 ένας είναι στη θέση του

  Ποιο είναι το μυστικό κλειδί;
- **Η πιθανότητα:** Γιώργος: Είμαι σίγουρος ότι 99,99% θα κερδίσει αύριο η ομάδα μας, Κώστας: Εγώ πιστεύω 99,100% ότι θα χάσει. Ποιος λέτε ότι έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα;
- **Ο 3ψήφιος:** Εάν σε ένα 3ψήφιο αριθμό επαναλάβουμε τα ψηφία του ώστε να γίνει 6ψήφιος και τον διαιρέσουμε διαδοχικά με τους 11 και 13 ποιος αριθμός θα προκύψει;
- **Το χαρτί:** Έχω ένα χαρτί Α4 (300x200 χιλιοστά και πάχος ένα χιλιοστό) και το διπλώνω. Βλέπω ότι το χαρτί μικραίνει σε διαστάσεις πολύ γρήγορα και αυξάνει σε πάχος γεωμετρικά, όπως λέγεται. Αν το διπλώσετε 8 φορές, τι επιφάνεια θα έχει και τι πάχος;
- **Η ηλικία:** Η Αθηνά γεννήθηκε το 1980. Ποιο έτος του αιώνα μας, αν το διαιρέσει με την ηλικία που θα έχει τότε, θα προκύψει πάλι η ηλικία της;

λάβαμε: Τον Αύγουστο του 2021, πήραμε **ένα γράμμα** από τον συνάδελφο και μέλος της ΕΜΕ, Αποστόλη Χατζηδήμο που αναφέρεται στο τεύχος **119** και στη στήλη «οι Γρίφοι και τα Μαθηματικά» και μας στέλνει μια γενική λύση του Γρίφου που του έστειλε ο φίλος του, Σπύρος Δημόπουλος.

" … Αγαπητοί συνάδελφοι, γεια σας και Καλές Γιορτές με Υγεία!

Πριν από τρεις μέρες που μου ήρθε το περιοδικό, ο Ευκλείδης Β΄ και είδα υπό τον τίτλο «Οι ΓΡΊΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ" ότι το **3ο** στη σειρά πρόβλημα, μου θύμισε κάτι που μου έστειλε ο φίλος και συνάδελφός Μανόλης Βάβαλης από το **Forbes**, πριν 17 μήνες κατά τη διάρκεια του πρώτου εγκλεισμού. Το σχετικό link είναι:

https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2020/03/06/the-bizarre-math-of-why-10^2-11^2-12^2-13^2-14^2/

Με βάση ό,τι διάβασα, γενίκευσα (και περιόρισα λίγο το πρόβλημα). Το έστειλα στους φίλους μου κι ο συνάδελφος Σπύρος Δημόπουλος μου έστειλε μια λίγο διαφορετική λύση.

Με αγάπη, ειρήνη και αγωνιστικούς χαιρετισμούς, Αποστόλης Χατζηδήμος – μαθηματικός…"

Παραθέτουμε το σχετικό πρόβλημα:

Το άθροισμα τετραγώνων k + 1 διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των επόμενων k διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Η λύση: Ας είναι n ο μεσαίος από τους 2k + 1 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Τότε θα έχουμε:

$$(n-k)^2 + (n-(k-1))^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 =$$
$$=(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+(k-1))^2 + (n+k)^2 . \ (1)$$

Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα και ανάγοντας όμοιους όρους έχουμε

$$kn^2 - 2n\,(1 + 2 + \cdots + (k-1) + k) + (1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2) + n^2 =$$
$$kn^2 + 2n\,(1 + 2 + \cdots + (k-1) + k) + (1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2). \ (2)$$

Απαλείφοντας το kn^2 και το $(1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2)$ από τα δύο μέλη και μεταφέροντας το $-2n\,(1 + 2 + \cdots + (k-1) + k)$ στο δεύτερο μέλος παίρνουμε $n^2 = 4n\,(1 + 2 + \cdots + (k-1) + k)$. (3)

Οπότε, διαιρώντας δια **n** και βρίσκοντας το εντός των παρενθέσεων άθροισμα (απλή αριθμητική πρόοδος) καταλήγουμε στο $n = 4\,k(k+1)/2 \Leftrightarrow n = 2k(k+1)$ (4)

Επομένως το πρόβλημα έχει ΠΑΝΤΑ ΜΙΑ και ΜΟΝΟ λύση για το **n** για κάθε φυσικό **k**.

Στο τελευταίο αποτέλεσμα (4), θέτοντας διαδοχικά k = 1, 2, 3, 4, βρίσκουμε:

Για k = 1, n = 4 και $3^2 + 4^2 = 5^2$, Για k = 2, n = 12 και $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

Για k = 3, n = 24 και $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$,

Για k = 4, n = 40 και $36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$, κλπ.

Ίσως το πρόβλημα να είχε μεγαλύτερο ενδιαφέρον αν το θέταμε ως εξής: "Να αποδειχτεί ότι η **κύρια διαγώνιος** (συνδέει αντικείμενες κορυφές) ενός (k + 1)-διάστατου ορθογώνιου υπερπαραλληλεπιπέδου με μήκη ακμών k + 1 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς είναι ίση με τη διαγώνιο του k-διάστατου ορθογώνιου υπερπαραλληλεπιπέδου με μήκη ακμών τους επόμενους k διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς." (Σημείωση: Για k = 1 το υπερπαραλληλεπίπεδο είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου η διαγώνιος συμπίπτει με αυτό ενώ για k = 2 το υπερπαραλληλεπίπεδο είναι ένα διδιάστατο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.)

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 121

Οι σκίουροι: Ο σκίουρος στα $\frac{2}{3}$ του χρόνου δηλαδή $\frac{2}{3}.2\frac{1}{4}=\frac{2}{3}.\frac{135}{60}=\frac{90}{60}$=1,5 λεπτό έφαγε **15 φουντούκια** αφού τα τρώει με ταχύτητα 10 στο λεπτό. Ύστερα βοήθησε το σκιουράκι να φάνε τα στραγάλια. Άρα από τον υπόλοιπο χρόνο που είχε στη διάθεσή του των 45 δευτερολέπτων έφαγε στραγάλια για 40 δεύτερα, αφού πρόλαβαν να φύγουν στο παρά πέντε. Δηλαδή έφαγε $\frac{40}{60}.20=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$ επειδή όμως τα φουντούκια και τα στραγάλια που συγκέντρωσαν ήταν ισάριθμα $15-13\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}$ στραγάλια έφαγε το σκιουράκι σε $\frac{130}{60}$ λεπτά άρα η ταχύτητα που τα έτρωγε ήταν $1\frac{2}{3}:\frac{130}{60}=\frac{10}{13}$ στραγάλια το λεπτό.

Τα μαλλιά της δασκάλας: Η κοπέλα που είπε ότι έχει μαύρα μαλλιά δεν μπορεί να είναι η **Μαύρου**, αφού της απάντησε η Σοφία **Λευκού,** ότι αυτό που είπε είναι σωστό. Επομένως η πρώτη που είπε ότι έχει μαύρα μαλλιά ήταν η δασκάλα Νίνα **Κόκκινου**.

Οι αδελφές: Η Μαίρη είναι: Χ ετών και Χ+9=3.(Χ-9) ή Χ=18. Η Εύα είναι Ψ ετών και 3.(Ψ+3)-3.(Ψ-3)=Ψ ή Ψ=18. Άρα δίδυμες.

Τα δώρα: Από τα 16 ανίψια αγόρια είναι τα 9 ώστε τα 4/9 να είναι ακέραιος. Έτσι τα κορίτσια είναι 7 και τα μικρά αγόρια 5. Άρα ο θείος θα αγοράσει 7 κούκλες και 5 τρενάκια.

Οι πίτες: Ψήνει τις δύο πίτες $1^η$ και $2^η$ από την μια μεριά (2 λεπτά) στη συνέχεια μια από αυτές π.χ. την $1^η$ από την άλλη πλευρά μαζί με την $3^η$ (2 λεπτά). Τέλος την $3^η$ και την $2^η$ από την άλλη πλευρά (2 λεπτά). Σύνολο 6 λεπτά.

Ο Λαγός και η Αλεπού: Όταν ο Λαγός θα έχει τρέξει 100 μέτρα, η Αλεπού θα έχει τρέξει 90. Άρα θα συναντηθούν 10 μέτρα πριν τον τερματισμό. Επειδή όμως ο Λαγός είναι πιο γρήγορος, θα διανύσει τα τελευταία αυτά μέτρα ταχύτερα και θα τερματίσει και πάλι πρώτος.

Το ζύγισμα: Αριθμούμε τα μπουκάλια 1,2,3,4,5 και ζυγίζουμε τα 4 μαζί. Αν βρεθεί βάρος 4014gr τότε το $5^ο$ είναι 1000gr αφού όλα μαζί είναι 5014gr. Αν το βάρος είναι διαφορετικό π.χ. 4012gr τότε το $5^ο$ είναι 1002gr, οπότε ζυγίζουμε το $1^ο$ και $2^ο$ μαζί, αν προκύψει βάρος 2011gr τα άλλα δυο είναι τα 1001gr και 1000gr έτσι αφού ζυγίσουμε ένα από τα δυο έχουμε τη λύση.

Το 2 είναι ίσο με το 3: Ξέρουμε ότι αν $X^2 = α^2$ τότε $X= + α$ ή $X= - α$, για την περίπτωσή μας είναι $(2-\frac{5}{2}) = -(3-\frac{5}{2})$ δηλαδή $2-\frac{5}{2} = \frac{5}{2}-3$ και $2+3 = 2.\frac{5}{2}$.

Βραβείο Poincaré στον Δημήτρη Χριστοδούλου

" ... Το παιδί θαύμα έγραφαν οι εφημερίδες το **1968**, για το μαθητή της Β΄ Λυκείου που «έπαιζε τα πανεπιστημιακά Μαθηματικά στα δάκτυλα». Αυτό το παιδί θαύμα είναι σήμερα ο πολυβραβευμένος κορυφαίος Έλληνας μαθηματικός και φυσικός **Δημήτρης Χριστοδούλου**..."

Μεγάλη τιμή για τον Δημήτρη Χριστοδούλου, το βραβείο Poincaré, που έλαβε πρόσφατα τον Αύγουστο του 2021, σε παγκόσμιο συνέδριο στη Γενεύη, τιμήθηκε από την Διεθνή Ένωση Μαθηματικής Φυσικής με το βραβείο «Henri Poincaré Prize". Την προσφώνηση έκανε ο Ρώσος καθηγητής Μαθηματικών του Princeton, **Igor Rodnianski** που εξήγησε το έργο του και το συσχέτισε με εκείνο του **Penrose**. Ο Igor μεταξύ των άλλων αναφέρθηκε[1] για το έργο του, με προσωπική προσφώνηση στον Δημήτρη Χριστοδούλου και εξήγησε σε γενικές γραμμές την όλη του εργασία, στο χώρο της γενικής σχετικότητας, των διαφορικών εξισώσεων και της δυναμικής των ρευστών. Το βραβείο Poincaré απονέμεται κάθε τρία χρόνια από 1997.

" ... Είναι μεγάλη μου τιμή να σας συστήσω τη Δημήτρη Χριστοδούλου. Του απονέμεται για το 2021, το **βραβείο Poincaré** –«για πρωτοποριακή συμβολή στη μαθηματική κατανόηση των εξισώσεων του Einstein, συμπεριλαμβανομενων των θεμελιωδών αποτελεσμάτων για το σχηματισμό **μαύρης τρύπας** και την ανακάλυψη, ενός φαινομένου μη γραμμικής **μνήμης** στη θεωρία της **βαρυτικής ακτινοβολίας** και για το ότι εισάγει μια ισχυρή **γεωμετρική άποψη** για το πρόβλημα του σχηματισμού κραδασμών για συμπιεστά υγρά». Ο Δημήτρης Χριστοδούλου είναι ένας μοναδικός μαθηματικός του οποίου το έργο είχε βαθιά επίδραση στα **πεδία της γενικής σχετικότητας**, των υπερβολικών μερικών **διαφορικών εξισώσεων** και τη **δυναμική των ρευστών.**

Παρόλο που τον περιέγραψα ως μαθηματικό, ο Δημήτρης ξεκίνησε το ταξίδι του ως φυσικός. Έλαβε το διδακτορικό του στη φυσική στο Princeton σε ηλικία 19 ετών, υπό τη διεύθυνση του **Johny Wheeler**. Η διατριβή του έδειξε την ύπαρξη μιας μη αναγώγιμης μάζας, μιας μαύρης τρύπας και έπαιξε βασικό ρόλο στην ανάπτυξη της θερμοδυναμικής της μαύρης τρύπας. Έχει αναφερθεί ότι το πρόβλημα της αρχικής διατριβής του Δημήτρη, το οποίο δεν μπόρεσε να λύσει εκείνη τη στιγμή, ήταν λίγο πιο προκλητικό και η επίλυσή του απαιτούσε, μια παράκαμψη 40 ετών. Αυτή η παράκαμψη οδήγησε τον Δημήτρη, πρώτα στα Μαθηματικά και μετά στην άποψή του, άποψη η οποία βλέπει τη γενική σχετικότητα ως το πεδίο των μερικών **διαφορικών εξισώσεων** και της **γεωμετρίας.**

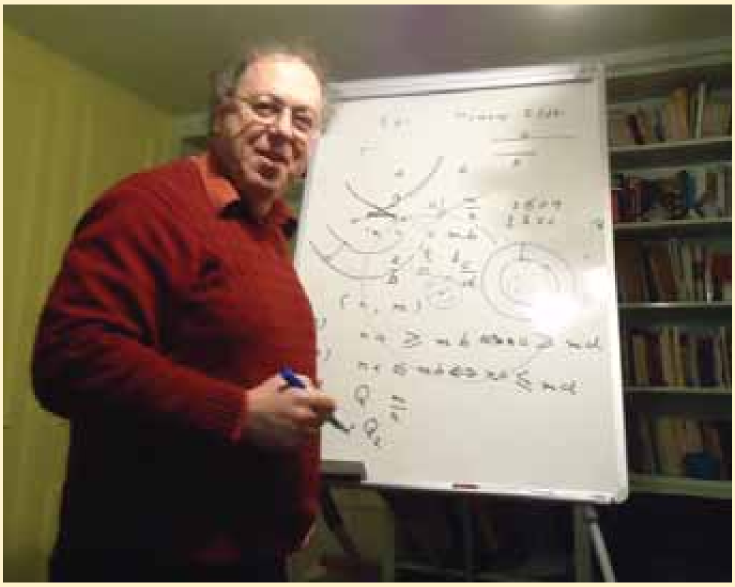
Μία από τις πρώτες επιτυχίες αυτής της φιλοσοφίας ήταν το έργο του κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του '80 και τις αρχές της δεκαετίας του '90 στο σφαιρικά **συμμετρικό** μοντέλο βαθμωτών πεδίου του Einstein. Εδώ απέδειξε ο Δημήτρης μια σειρά από αξιοσημείωτα αποτελέσματα, δίνοντας μια σχεδόν πλήρη περιγραφή της δυναμικής μεγάλων δεδομένων και καθιερώνοντας μια πολύ ικανοποιητική **διχοτομία**: για γενικά αρχικά δεδομένα, βαρυτικά και τα βαθμωτά κύματα, είτε αυτά, διασκορπίζονται και ο χωροχρόνος συγκλίνει στον επίπεδο χώρο Minkowski, είτε η μαύρη τρύπα με το εξωτερικό που συγκλίνει, με τις μορφές **Schwarzschild**. Η γενική προειδοποίηση είναι ζωτικής σημασίας, γιατί βρήκε επίσης εξωτικές λύσεις που περιέχουν τις λεγόμενες γυμνές ιδιομορφίες που, ευσπλαχνικά, αποδείχτηκε ασταθής. Αυτός ο κύκλος ιδεών ήταν επίσης μια έμπνευση πίσω η ανακάλυψη και η

---

[1] Είναι μια ελεύθερη περιληπτική απόδοση της προσφώνησης, του Igor Rodnianski. Η πλήρης συνέντευξη βρίσκεται στο http://iamp.org/page.php?page=page_prize_poincare της International Association of Mathematical Physics.

μελέτη των λεγόμενων κρίσιμων φαινομένων στην αριθμητική σχετικότητα, στο που εξετάζει κανείς την καθολικότητα της συμπεριφοράς στο όριο, κατά τη μετάβαση από το «κανονικό» σε «ενικό» καθεστώς. Μια πραγματικά καθοριστική στιγμή ήταν η απόδειξη, το **1993**, από κοινού με τον Klainerman, για τη σταθερότητα του χώρου Minkowski. Αυτό δεν ήταν απλώς ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα αλλά γέννησε τη σύνθεση της Lorentzian γεωμετρίας και των υπερβολικών PDE's. Η διαρκής επίδρασή του είναι αισθητή ακόμα και σήμερα. Αυτό το έργο, μεταξύ άλλων, καθιέρωσε τους νόμους της βαρυτικής ακτινοβολίας και οδήγησε τον Δημήτρη στην ανακάλυψη του φαινομένου **της μη γραμμικής** βαρυτικής μνήμης – ένα μετρήσιμο φαινόμενο - στην οποία ένα συρμό κυμάτων προκαλεί μόνιμες σχετικές μετατοπίσεις των μαζών δοκιμής. Αυτό είναι τώρα γνωστό ως **φαινόμενο μνήμης Χριστοδούλου**.

Το 2009 ο Δημήτρης επέστρεψε στο αρχικό του πρόβλημα της διατριβής, το pièce de résistance – the problem σχηματισμού μαύρης τρύπας. Εδώ, η ιστορία ξεκινά με το θεώρημα της **μη πληρότητας του Penrose** από το 1965, το οποίο εγγυάται τη γεωδαιτική ατελότητα οποιουδήποτε χωροχρόνου που ικανοποιεί μια μηδενική ενεργειακή κατάσταση, που διαθέτει μια μη συμπαγή **υπερεπιφάνεια Cauchy**, και επίσης, πολύ σημαντικό, μια **2-d** παγιδευμένη επιφάνεια. Παρά την απίστευτη σημασία και επιρροή αυτού του αποτελέσματος, δεν τα καταφέρνει να καθοριστεί εάν αυτός ο τύπος γεωδαιτικής ατέλειας (στην καθομιλουμένη αναφέρεται ως μοναδικότητα) μπορεί αναπτύσσεται στην εξέλιξη. Ωστόσο, αυτό το αποτέλεσμα βρίσκεται στο θεμέλιο όλης της τρέχουσας κατανόησής μας της προβλεπόμενης θεωρίας της βαρυτικής κατάρρευσης και, ειδικότερα, του μηχανισμού του μαύρου (σχηματισμός οπών). Με τις παγιδευμένες επιφάνειες να είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαύρων οπών, αυτό καταλήγει στο ζήτημα του εξελικτικού σχηματισμού παγιδευμένων επιφανειών.



Το πρόβλημα παρέμενε αδρανές για **40 χρόνια** μέχρι να λυθεί, το 2009 από τον Χριστοδούλου για το πρόβλημα χωρίς ύλη (Να σημειωθεί ότι η **ύλη** διευκολύνει τον σχηματισμό μαύρης τρύπας) και χωρίς συμμετρία. Ήταν μια αξιοσημείωτη περιπλάνηση. Η βάση του, ήταν μια εκπληκτική διορατικότητα, προσδιορίζοντας μια ολόκληρη κατηγορία αρχικών δεδομένων τα οποία, αφενός, είναι αρκετά μεγάλα, δεδομένου ότι αυτό το φαινόμενο, απαιτεί ένα **ισχυρό καθεστώς** βαρυτικού πεδίου, ενώ, από την άλλη, εξακολουθεί να επιτρέπει ένα έλεγχο της δυναμικής, μέχρι τον τελικό σχηματισμό μιας παγιδευμένης επιφάνειας. Τα κατάλληλα δεδομένα αποδείχθηκε ότι αντιστοιχούν σε απότομες κατευθυντικές εκρήξεις **καμπυλότητας.** Αυτό σημαίνει μια επίπονη ανάλυση και μια βαθιά κατανόηση της αλγεβρικής δομής του **Einstein** και εξισώσεις για την κατασκευή του απαραίτητου, αρκετά μεγάλου τμήματος του χωροχρόνου. Αποδείχθηκε ότι ήταν μια ακόμη πιο ισχυρή ιδέα, όταν την δούμε σε ένα γενικότερο πλαίσιο PDE. Μετά από αυτό, ή στην πραγματικότητα, λίγο πριν, ο Δημήτρης στράφηκε σε ένα ακόμα παλαιότερο θέμα – στη **δυναμική** των τρισδιάστατων συμπιεστών **ρευστών,** που διέπεται από τις εξισώσεις **Eüler**. Ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό αυτών των εξισώσεων είναι ότι οι λύσεις τους αναπτύσσουν μοναδικότητες κλονισμού, ακόμη και όταν δημιουργούνται από ομαλά και ακόμη πιο αξιοσημείωτα, μικρά δεδομένα (...)".

αφορμές ... και στιγμιότυπα

... στο δρόμο με τα γραφήματα ...

William Timothy Gowers: Βρετανός μαθηματικός, βραβείο **Fields** (1998), βραβείο **Morgan Medal** (για εξαιρετική συνεισφορά στα Μαθηματικά), βραβείο **Nature's 10** (2012) (από το περιοδικό nature για τους 10 ανθρώπους στον κόσμο που έχουν επηρεάσει σημαντικά την επιστήμη) και **knight bachelor** (τίτλος τιμής στη Βρετανία). Ο **Gowers** ισχυρίζεται ότι τα Μαθηματικά είναι ένα διανοητικό παιχνίδι **υψηλής δεξιοτεχνίας**, που οι μαθηματικοί εμπλέκονται σε πράξεις **ανακάλυψης** και γιατί αυτός, ο φαινομενικά, αφηρημένης επιστήμης κλάδος, παρέχει το κλειδί, που ξεκλειδώνει τα **βαθιά μυστικά** του σύμπαντος. Αυτά ειπώθηκαν μεταξύ άλλων, πρόσφατα σε ένα **διεπιστημονικό** συμπόσιο, που έγινε στο Cambridge και στο Kastel σε δυο συναντήσεις με θέμα τα Μαθηματικά και η σύγχρονη εποχή. Η αλήθεια είναι ότι είχε αναφερθεί, με τον ίδιο τρόπο, σ' ένα συνέδριο πριν κάμποσα χρόνια στην Ελλάδα και είχε προσεγγίσει παρόμοια θέματα, αλλά κυρίως είχε μιλήσει για την **αφηγηματική** δομή των **μαθηματικών αποδείξεων** και είχε αναφερθεί στις ίδιες εκδοχές της εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης, με αρκετό χιούμορ και αρκετές επεξηγήσεις. Ο Timothy Gowers είναι ακριβώς αυτό: αληθινός και **σπουδαίος μαθηματικός**, ερευνητής, καθηγητής στο Cambridge. Τον ενοχλεί όταν οι μαθηματικοί περιγράφονται ως «τραγικοί ήρωες», θέλει να πιστεύει ότι: «…οι μαθηματικοί είναι συνηθισμένοι άνθρωποι». Πολλές φορές λέει ότι: «..αν αναμείξεις 30 μαθηματικούς με ένα πλήθος, **τυχαία επιλεγμένο** από το δρόμο, κανείς δεν θα μπορεί να τους ξεχωρίσει – ίσως – με μία ή δύο εξαιρέσεις. Τον πειράζει επίσης που «οι μαθηματικοί θεωρούνται βαρετοί τύποι, **δεν είναι έτσι**». Στο συνέδριο που έγινε τότε, στην Ελλάδα, και συγκεκριμένα στη Μύκονο, ο Timothy Gowers μίλησε *για* την αφηγηματική δομή στις ίδιες τις_μαθηματικές αποδείξεις και στην ίδια τη γλώσσα των αριθμών. Σε συνεντεύξεις εκείνης της εποχής, είχε μιλήσει και είχε πει προβλεπτικά για το σήμερα, για τις «**κοινωνικές απαγορεύσεις**» και για τη **μοναξιά** των ανθρώπων στη σύγχρονη εποχή. Εντύπωση είχε κάνει τότε και οι αναφορές του στην **ιδιότητα** του μαθηματικού. Έλεγε χαρακτηριστικά, στις διηγήσεις του: «… συναντάς, κάποιον, συστήνεσαι, του λες «είμαι μαθηματικός», είτε θα σου απαντήσει, ότι σιχαινόταν τα Μαθηματικά, όταν ήταν μαθητής και η συζήτηση θα λήξει εκεί, είτε θα προσπαθήσει να δείξει ενδιαφέρον και θα ρωτήσει «**τι ακριβώς κάνεις;**» «… η πιο ειλικρινής απάντηση, που μπορώ να δώσω, είναι «**να του δείξω**». Αν πάμε στο διπλανό τραπέζι, που θα έχουμε… και καθήσουμε, **για μια ώρα ακόμα** και συγκεντρωθούμε πάνω στο **χαρτί** και με το **μολύβι** … τότε θαναι πιο εύκολο … (κοινωνικά όμως, αυτό είναι αδύνατον να γίνει …)» Δεν έχω βρεί τον τρόπο να κρατήσω ζωντανό το **ενδιαφέρον** κάποιου για περισσότερα από τρία λεπτά, εκτός αν ο συνομιλητής μου γνωρίζει ή έχει σπουδάσει Μαθηματικά. Στη συζήτηση ο Timothy Gowers ψάχνει για παραδείγματα. Θέλει να είναι ακριβής. Η εκπαίδευση και η διδασκαλία των Μαθηματικών είναι ένας τομέας, όπου μπορείς να αφιερώσεις **ενέργεια**. «Όσο περισσότερα Μαθηματικά γνωρίζεις, τόσο περισσότερα εργαλεία έχεις διαθέσιμα, για να αντιληφθείς μοντέλα και πρότυπα στην **καθημερινότητα**. Τα Μαθηματικά αφορούν τις δομές, πολύ περισσότερες, από αυτές των αριθμών και της γεωμετρίας».

SEEMOUS 2021:

Ο διαγωνισμός SEEMOUS (South-Eastern European Mathematics Olympiad for University Students) είναι ένας μαθηματικός διαγωνισμός, που αφορά **πρωτοετείς** και **δευτεροετείς** φοιτητές. Ξεκίνησε για πρώτη φορά το ακαδημαϊκό έτος 2006-07. Οι φοιτητές διαγωνίζονται για 5 ώρες σε τέσσερα προβλήματα από την ύλη των μαθημάτων: Απειροστικός Λογισμός, Γραμμική Άλγεβρα, Βασική Άλγεβρα, Πραγματική Ανάλυση, Συνδυαστική, Θεωρία Αριθμών. Πρέπει να αναφέρουμε ότι η χώρα μας, έχει παράδοση σε επιτυχίες, σε αυτούς τους φοιτητικούς διαγωνισμούς από την αρχή του θεσμού, ενώ από το **2010** και μετά είχε συνεχή παρουσία με χρυσά μετάλλια και πρώτες θέσεις. Τα μαθηματικά τμήματα κυρίως (ΕΚΠΑ, ΑΠΘ) και το ΕΜΠ προσελκύουν, κάθε χρόνο, έναν σημαντικό αριθμό από φοιτητές, που συμμετέχουν σ' αυτούς τους διαγωνισμούς, οι οποίοι έχουν πάθος, αγάπη και ικανότητες και για περαιτέρω μαθηματική έρευνα. Αξιοσημείωτο είναι ότι οι φοιτητές που διακρίνονται στο SEEMOUS έχουν συμμετάσχει στους **διαγωνισμούς της ΕΜΕ** και έχουν πάρει μετάλλια στις Βαλκανικές και Διεθνείς Ολυμπιάδες. Σημαντικό είναι ότι οι περισσότεροι από αυτούς συνεχίζουν τις σπουδές τους με πλήρη υποτροφία στα καλύτερα πανεπιστήμια της Ευρώπης και της Αμερικής.

Ο φετινός SEEMOUS 2021 που έγινε στον Αγρό της Κύπρου από 19 έως 24 Ιουλίου 2021, η χώρα μας είχε τις εξής διακρίσεις σε μετάλλια.

Στιγμιότυπο από την Ελληνική ομάδα

Πηγές: Seemous, ΚΥΜΕ, ΕΚΠΑ, Εφημερίδες

- Μαργαρίτης Μηνάς, χρυσό (ΕΚΠΑ).
- Πράττης Κωνσταντίνος, αργυρό (ΑΠΘ)
- Μηλιώρη Ειρήνη, αργυρό (ΕΜΠ)
- Θεοδωρόπουλος Παναγιώτης, χάλκινο (ΕΚΠΑ).
- Τσίρκας Κωνσταντίνος, χάλκινο (ΕΚΠΑ).
- Μελισσάρης Χρήστος, χάλκινο (ΑΠΘ)
- Νάκος Ιωάννης, χάλκινο (ΑΠΘ)
- Ρίζου Βασιλική, χάλκινο (ΑΠΘ)
- Ντζιαχρήστας Ιωάννης, χάλκινο (ΕΜΠ)
- Χαραλαμπόπουλος Παναγιώτης, χάλκινο (ΕΜΠ)

Βιβλία που λάβαμε:

Ιωάννης Χαΐνης, ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, **πρόσφερε** για τη βιβλιοθήκη της **ΕΜΕ** τα παρακάτω **βιβλία του**: Εφαρμογές της Μιγαδικής Ανάλυσης στη Θεωρία Πεδίων, Εντροπία και ο δεύτερος νόμος της Θερμοδυναμικής, Επίλεκτα θέματα Μιγαδικής Ανάλυσης, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Οι μαύρες τρύπες στο σύμπαν κατά τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, Επίλεκτα θέματα Τοπολογικών Διανυσματικών Χώρων, Μαθήματα Μαθηματικής Ανάλυσης, Τόμος Β΄, Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων, Εισαγωγή Συναρτησιακής Αρμονικής και Στοχαστικής Ανάλυσης, Σειρές Αριθμών και Σειρές Συναρτήσεων, Οι χώροι των Συναρτήσεων, Σύμμορφη απεικόνιση, Επίλεκτα θέματα επί των Διανυσματικών τοπολογικών χώρων-Συνεχών συναρτήσεων επί του R^n και ενδομορφισμών σε χώρους Banach & Hilbert.

Βασίλης Βαλασσόπουλος, μαθηματικός **πρόσφερε** για τη βιβλιοθήκη της **ΕΜΕ** τα παρακάτω **βιβλία** του **Ευάγγελου Σταμάτη**: Απολλωνίου Κωνικά Τόμος Α΄, Μαρτυρίαι Ελληνικαί – Λατινικαί, Βιβλίον Α΄, Απολλωνίου Κωνικά Τόμος Β΄, Βιβλία Β΄και Γ΄, Απολλωνίου Κωνικά Τόμος Β΄, Βιβλία Δ΄και Ε΄και ΣΤ΄, Απολλωνίου Κωνικά Τόμος Δ΄, Βιβλίον Ζ΄- Αποσπάσματα – Λήμματα Πάππου_Σχόλια Ευτόκιου

Ένα συναρπαστικό Μουσείο Γρίφων στο Καστελόριζο
Μια «κατάθεση ψυχής» του δημιουργού του Πανταζή Χούλη

Στο ανατολικότερο άκρο της Ελλάδας και της Ευρώπης, στο αρχοντικό ενός νησιού, που **η πλούσια** ιστορία του και η απαράμιλλη ομορφιά του το φέρνουν **στο επίκεντρο** πολλών γεωπολιτικών γεγονότων, φιλοξενείται τα δυο τελευταία χρόνια ένα νέο πρωτότυπο **διαδραστικό** μουσείο, που όχι άδικα συγκεντρώνει τα βλέμματα μικρών και μεγάλων. Στο ακριτικό και πανέμορφο Καστελλόριζο λειτουργεί το μοναδικό στην Ελλάδα Μουσείο Γρίφων, ενώ το νησί φιλοξενεί και την έδρα της Ένωσης Ιδεών Γρίφων Μαθηματικών (ΕΝ.Ι.Γ.ΜΑ.).

Εμπνευστής και ιδρυτής τους ένας - γέννημα θρέμμα - Καστελλοριζιός, που η μεγάλη αγάπη του για το νησί, τον έφτασε στο σημείο να εγκαταλείψει μια **πανεπιστημιακή καριέρα** στην **Αυστραλία** και να εγκατασταθεί μόνιμα στον τόπο των προγόνων του. Ο λόγος για τον μαθηματικό Πανταζή Χούλη, έναν άνθρωπο που γνωρίζει σπιθαμή προς σπιθαμή το Καστελλόριζο, αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της τοπικής κοινωνίας και με την εμπνευσμένη φράση του «το Καστελλόριζο γράφεται **με δυο λάμδα**, όπως η Ελλάδα», έστειλε το μήνυμα πως αυτή η μικρή νησίδα γης, αξίζει να έχει και μια σωστά ορθογραφημένη γραφή, πέρα από την προσοχή μας, όπως λέει.

Το Μουσείο Γρίφων στεγάζεται στο πατρογονικό του σπίτι, που σύμφωνα με την επιγραφή πάνω από την κεντρική είσοδο κατασκευάστηκε το **1887**. Είναι ένα διώροφο αρχοντικό με όλα τα χαρακτηριστικά της αρχιτεκτονικής των σπιτιών του Καστελλόριζου, που όπως εξηγεί στο διεθνές πρακτορείο ΑΠΕ-ΜΠΕ ο κ. Χούλης, «**κρατήθηκε όρθιο** παρά τους δύο παγκόσμιους πολέμους, το σεισμό των 8 Ρίχτερ του **1926**, τους βομβαρδισμούς και τη μεγάλη πυρκαγιά του **1944,** που κατέστρεψε το νησί».

Βρίσκεται στην περιοχή Χωράφια, πίσω από την γνωστή ταβέρνα όπου το **1991** γυρίστηκε το «**Mediterraneo**» και έκανε το νησί διεθνώς γνωστό. Σε αυτή την ιστορική γωνιά του νησιού βρίσκεται το νέο Μουσείο Γρίφων, που αποτέλεσε για τον **ίδιο όνειρο και σκοπό ζωής** από την πρώτη στιγμή που εγκατέλειψε την Αυστραλία και αποφάσισε να ζήσει μόνιμα στο νησί.

Στους δυο ορόφους του αρχοντικού που φιλοξενεί το μουσείο, ο επισκέπτης θα βρει περισσότερους από **4.000** γρίφους από κάθε γωνιά της γης. Οι **700** απ’ αυτούς αποτελούν έμπνευση, σχεδιασμό και κατασκευή του ίδιου, που με όρεξη και μεράκι συνεχίζει να εμπλουτίζει τη συλλογή του κατασκευάζοντας συνεχώς καινούργιους, από διάφορα υλικά, όπως πλαστικό, ξύλο, μέταλλο αλλά και ύφασμα. Ξεκίνησε από παιδί να συλλέγει γρίφους που αποτελούσαν μια πρόσκληση γι αυτόν. Αναζητούσε, έβρισκε και **αγόραζε γρίφους** από παντού κι όταν ήρθε η ώρα να μεταφερθούν από την Αυστραλία στον Καστελλόριζο χώρεσαν μέσα σε εβδομήντα πέντε μεγάλες κούτες!

Εκείνο που διαφοροποιεί το συγκεκριμένο μουσείο από τα υπόλοιπα είναι ότι εδώ ο επισκέπτης μπορεί να περιεργαστεί όλα τα εκθέματα- γρίφους, να προσπαθήσει να τα λύσει και να μάθει την ιστορία τους μέσα από την ξενάγηση που του γίνεται. Το μουσείο αυτό είναι η χαρά των παιδιών. Τα συνολικά **πενήντα πέντε παιδιά** του νησιού που φοιτούν σε όλες τις τάξεις (νηπιαγωγείο, δημοτικό, γυμνάσιο, λύκειο) είναι οι συχνότεροι θαμώνες του μουσείου. Ο Πανταζής Χούλης δεν κρύβει τη χαρά και την ικανοποίησή του γι’ αυτό, αφού έτσι επιτυγχάνεται ένας από τους βασικούς σκοπούς του Μουσείου Γρίφων που όπως τονίζει είναι «η **ενδυνάμωση** του πολιτιστικού επιπέδου παιδιών και ενηλίκων κυρίως μέσω νέων ιδεών, γρίφων και Μαθηματικών. Η πνευματική άσκηση, **η απόκτηση μηχανικών εμπειριών και η ομαδική συνεργασία** που επιτυγχάνεται παράλληλα με την ψυχαγωγία και την ανάπτυξη δημιουργικών ικανοτήτων».

Με μια πρώτη ματιά, το Μουσείο Γρίφων φαντάζει σαν ένα playroom. Στην πραγματικότητα είναι πολλά περισσότερα. Είναι ένας **χώρος σκέψης**, εκδηλώσεων, προβληματισμού, αναζήτησης και ιστορίας. Είναι ένας ιδιαίτερος χώρος, όπως και ο ιδρυτής του, ένας ιδιαίτερος άνθρωπος.

Αν τα Μαθηματικά διδάσκονταν με γρίφους…

Η συζήτηση μαζί του είναι συζήτηση με έναν άνθρωπο, που σου ανοίγει νέους ορίζοντες, τους οποίους δεν είχες σκεφτεί πως υπάρχουν και το πιο εντυπωσιακό, κρύβουν μέσα τους την ιστορία ενός γρίφου. «Κάθε γρίφος», τονίζει με έμφαση, μιλώντας στο **ΑΠΕ-ΜΠΕ,** «είναι ένα **διαφορετικό άθλημα για το μυαλό,** και συνήθως αναφέρομαι σε τρισδιάστατα λογικά και εκπαιδευτικά παιχνίδια. Υπάρχουν γρίφοι που είναι ταιριαστικοί, ακολουθιακοί, αναδιπλώμενοι, εμπλεκόμενοι, διασυνδεδεμένοι, ανοιγόμενοι, εκλειπόμενοι κ.ά. Παράλληλα, οι Έλληνες έχουμε μια τεράστια παράδοση στους γρίφους, με επιτομή το **Οστομάχιον** (μάχη των οστών) του **Αρχιμήδη,** που αποτελεί τον πρώτο καταγεγραμμένο γρίφο στην ιστορία της ανθρωπότητας. Αυτό το γνωρίζουν οι ξένοι, όμως δυστυχώς δεν διδάσκεται στο σχολείο. Και δεν είναι τυχαίο που πολλά ονόματα σημερινών γρίφων παραπέμπουν στον **Λαβύρινθο,** στο **Κουτί της Πανδώρας** και στον **Γόρδιο Δεσμό.** Να προσθέσω δε πως αν τα Μαθηματικά διδάσκονταν με γρίφους, θα αποτελούσαν το πιο εύκολο και αγαπημένο μάθημα για όλα τα παιδιά!».

Ο Πανταζής Χούλης ανακάλυψε την αγάπη του για τους γρίφους το **1978** βλέποντας μια τηλεοπτική εκπομπή στην τότε ΥΕΝΕΔ, με θέμα την επίλυση του **μαγικού τετραγώνου**. Από εκείνη τη στιγμή και μετά ανακάλυψε ένα νέο κόσμο… «Αμέσως λάτρεψα αυτόν τον γρίφο, ειδικά αφού μπορούσα να τον λύσω εύκολα, σε σύγκριση με άλλα παιδιά και ενήλικες. Γενικά, είχα μια ανεξήγητη τάση να δημιουργώ γρίφους διαφόρων ειδών», σημειώνει με έμφαση.

Γεννήθηκε στην **Αυστραλία**, όπου σήμερα διαβιώνει η μεγαλύτερη κοινότητα Καστελλοριζιών στον κόσμο. Έζησε ως παιδί στο προγονικό του νησί αλλά και στη Ρόδο. Φοίτησε στο μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης και πήρε υποτροφία στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Αυστραλίας, όπου απέκτησε master στην **Αλγεβρική Θεωρία Γραφημάτων.** Επίσης, απέκτησε διδακτορικό στην Ηλεκτρονική Μηχανολογία (Συστήματα Ελέγχου), με εφαρμογή στα μαχητικά F16. Στην Αυστραλία -κι έως ότου επιστρέψει μόνιμα στο νησί του- εργάστηκε για μεγάλο διάστημα ως καθηγητής κερδίζοντας μάλιστα και βραβεία χρησιμοποιώντας γρίφους. Όπως εξομολογείται ο ίδιος, «τότε συνειδητοποίησα τη **δυναμική** των γρίφων στην εκπαίδευση και πόσο βοηθούσαν στην εκμάθηση των παιδιών».

Το πρώτο festival γρίφων στο ανατολικότερο άκρο της Ευρώπης

Στο μυαλό του Πανταζή Χούλη προτεραιότητα είναι το νησί, η εξέλιξη και η ανάπτυξή του σε όλους τους τομείς. Αυτό επιχειρεί και αυτό επιδιώκει μέσα από τις δράσεις που υλοποιεί και τις πρωτοβουλίες που παίρνει. Στο πλαίσιο αυτό πραγματοποιήθηκε στο νησί το πρώτο festival γρίφων, από **24 έως 26 Σεπτεμβρίου 2021.** Η θεματική του festival επικεντρώθηκε κυρίως, στους τομείς: Μηχανική Μάθηση, AI, Ψηφιακός Μετασχηματισμός, Ρομποτική, Εκπαίδευση STEM, Υγεία, Περιβάλλον, Τέχνη. Η όλη οργάνωση πραγματοποιήθηκε από το Μουσείο Γρίφων Μεγίστης, το οποίο αποτελεί την κύρια δράση του Σωματείου ΕΝ.Ι.Γ.ΜΑ (Ένωση Ιδεών, Γρίφων, Μαθηματικών). Τελεί υπό την αιγίδα της Γενικής Γραμματείας Έρευνας και Καινοτομίας, του υπουργείου Ανάπτυξης και Επενδύσεων, ενώ υπάρχει έκδηλο ενδιαφέρον από τον Δήμο Μεγίστης και την Περιφέρεια Ν. Αιγαίου.

Γιατί αυτό το Μουσείο είναι διαφορετικό …;

Ο πιο σημαντικός λόγος είναι, ότι το μουσείο καλύπτει **όλα τα είδη** των γρίφων που υπάρχουν στον Κόσμο. Στην Αθήνα φερ' ειπείν υπάρχει το **Μουσείο** με τα **Illusions** που καλύπτει μόνον αυτά, στη **Μαλαισία** υπάρχει το μουσείο μόνο για συνδεδεμένους κύβους.

Υπάρχουν περίπου **15 είδη γρίφων,** οι λαβύρινθοι, τα illusions, οι ανοιγόμενοι, οι διασυνδεδεμένοι, τα ανεξήγητα αντικείμενα, οι εκλειπόμενοι, που χρησιμοποιούν πλασματική εξαφάνιση, οι εκπαιδευτικοί, οι κούπες, μία ειδική κατηγορία, όπως **η κούπα του Πυθαγόρα**. Ο δεύτερος λόγος που διαφοροποιεί το συγκεκριμένο μουσείο από τα υπόλοιπα είναι ότι εδώ ο επισκέπτης μπορεί να περιεργαστεί όλα τα εκθέματα - γρίφους, να προσπαθήσει να τα λύσει και να μάθει την ιστορία τους μέσα από την ξενάγηση που του γίνεται. Είναι δηλαδή μουσείο **διαδραστικό.** Το μουσείο αυτό είναι η χαρά των παιδιών. Τα συνολικά πενήντα πέντε παιδιά του νησιού που φοιτούν σε όλες τις τάξεις (νηπιαγωγείο, δημοτικό, γυμνάσιο, λύκειο) είναι οι συχνότεροι θαμώνες του μουσείου.

Πηγές: ΑΠΕ-ΜΠΕ, in.gr, epixeiro.gr, kathimerini.gr, Athens voice, ekirikas.com,
kastellorizo.gr, esquire.com.gr, allaboutfestivals, rodiaki.

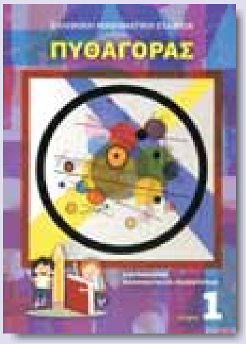
Διεθνείς μαθητικές Ολυμπιάδες 2021

- **53^{η} Ολυμπιάδα Χημείας** [Τόκιο Ιαπωνίας] **Virtual** <icho2021.org
  Καραγεωργίου Ιωάννης Αργυρό μετάλλιο (Ξάνθη)
  Φειδάκης Αθανάσιος Εύφημη μνεία (Αίγιο)
- **51^{η} Ολυμπιάδα Φυσικής** [Vilnius Λιθουανίας, 17-25 Ιουλίου 2021] **Virtual** <ipho2021.org
  Πετράκης Μάριος – Γαβριήλ Εύφημη μνεία
  Συμμετείχαν 370 μαθητές από **76 χώρες**, που διαγωνίστηκαν σε πολύ απαιτητικά θέματα, αλλά και στην εκτέλεση πραγματικών πειραματικών ασκήσεων με σύνθετες διατάξεις και πολύπλοκες μετρήσεις και με επιπλέον ύλη Φυσικής (οπτική, σχετικότητα, κβαντομηχανική κ.λ.π.) και με Μαθηματικά (ολοκληρώματα, διαφορικές εξισώσεις κ.λ.π)
- **14^{η} Αστρονομίας - Αστροφυσικής** [Μπογκοτά Κολομβίας] **Virtual** < uth.gr
  Λιάμπας Παναγιώτης Χάλκινο μετάλλιο (Θεσσαλονίκη)
  Μάλιαρης Κωνσταντίνος Εύφημη μνεία (Ναύπακτος)
  Φειδάκης Αθανάσιος Εύφημη μνεία (Αίγιο)
  Συμμετείχαν 298 **από 48 χώρες**, σε θέματα Αστρονομίας – Αστροφυσικής, σε ανάλυση δεδομένων και σε σύνθετες αστρονομικές παρατηρήσεις.

Δεν είχαμε σχετικές πληροφορίες για τις επιδόσεις της χώρας μας, στη χρονική στιγμή της έκδοσης του περιοδικού, για την **33^{η} Ολυμπιάδα Πληροφορικής,** που έγινε στη [Σιγκαπούρη] με 381 μαθητές από **88 χώρες Virtual** < IOI 2021.sg και στην **Ολυμπιάδα Βιολογίας** που πιθανά, λόγω πανδημίας, η εκπροσώπηση της χώρας μας, να μην ήταν εφικτή.

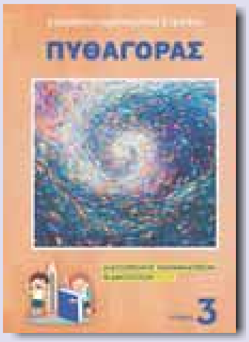
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



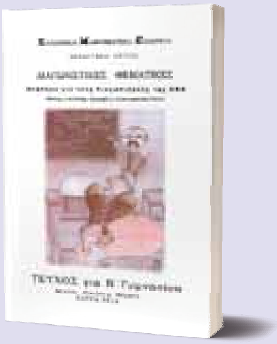
Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

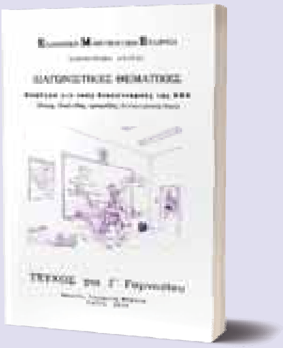


Τιμή τεύχους: 10€

Διαγωνισμοί



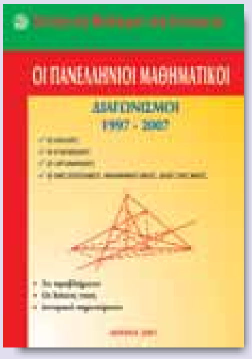
Τιμή βιβλίου: 12€



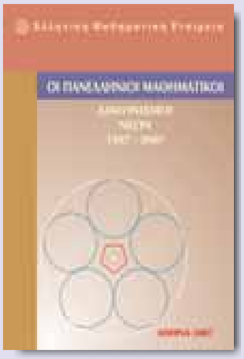
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

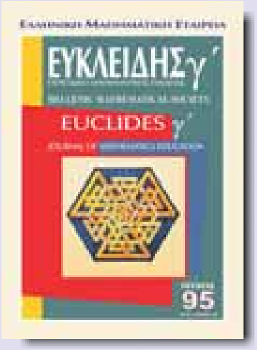


Τιμή βιβλίου: 20€

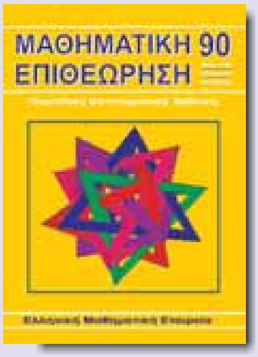
Τιμή βιβλίου: 25€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr