ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

127

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2023 ευρώ 3,5

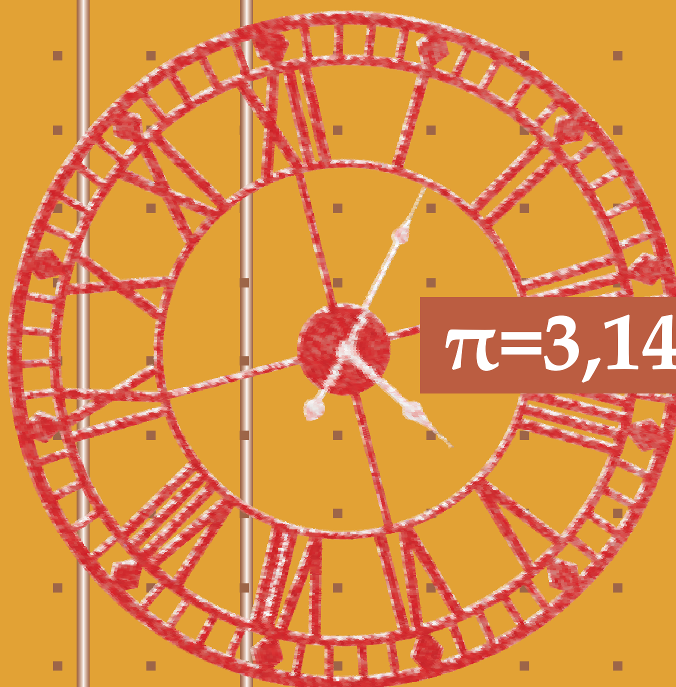
105 χρόνια Ε.Μ.Ε.

1918-2023

Θεωρία παιγνίων ή

... Η ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΤΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Αρχιμήδης 2023



π=3,14

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 127 - Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2023 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

.... με αίσθηση καθημερινότητας
και θετικής ενέργειας,
μένουμε στην πραγματικότητα
και την αντιμετωπίζουμε.
τις ατυχίες, τις αναποδιές,
τους διαγωνισμούς, τις εξετάσεις ...
με το επόμενο βήμα, την επόμενη στιγμή
με όνειρα, φιλοδοξίες, στόχους
αλλά και επιθυμίες
και ευχάριστες στιγμές έμπνευσης,
Η λογική της ζωής υπαγορεύει την εξέλιξη,
στην αντιμετώπιση καταστάσεων
και θετικής ενόρασης του κόσμου.
Προχωράμε,
με τη ζωή κάθε φορά να δείχνει το δρόμο ...
της καλής κίνησης προς τα εμπρός ....

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα του π

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής: 11 Νοεμβρίου 2022
Ευκλείδης: Δεν θα γίνει
Αρχιμήδης: 18 Φεβρουαρίου 2023

$$2023 = 20^2+(2\cdot 20)^2+23$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Εμμανουήλ Ιωάννης
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δε επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

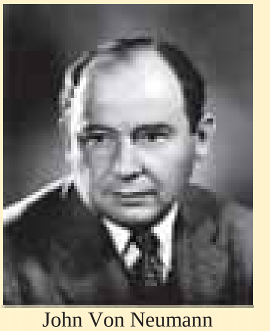
Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Θεωρία παιγνίων … ή … η στρατηγική της απόφασης

Νικόλαος Ντόρβας

Ένα χαρακτηριστικό που παρατηρείται ευρέως σε πλήθος οικονομικών, βιολογικών, κοινωνικο-πολιτικών φαινομένων στη σημερινή πραγματικότητα είναι η διαδικασία **λήψεως αποφάσεων**. Οντότητες όπως επιχειρήσεις, κυβερνήσεις, στρατιωτικά επιτελεία, βιολογικοί οργανισμοί κτλ, συχνά καλούνται να **επιλέξουν** κάποια **ενέργεια** με γνώμονα τη μεγιστοποίηση του ατομικού τους οφέλους, εντός ενός πλαισίου αλληλεπίδρασης όπου άλλα άτομα ή ομάδες ατόμων επιλέγουν ενέργειες προς το ίδιον όφελος. Κάθε άτομο συνεπώς θα πρέπει προτού επιλέξει από ένα πλήθος δυνατών επιλογών μια ορισμένη ενέργεια, να αναλύσει τις παραπάνω αλληλεπιδράσεις, καθιστώντας τη λήψη αποφάσεων ένα μη τετριμμένο και ταυτόχρονα ενδιαφέρον πρόβλημα. Η **Θεωρία Παιγνίων** (Game Theory) ανήκει στους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (όπως ο Γραμμικός / Μη Γραμμικός Προγραμματισμός, η Στατιστική Θεωρία Αποφάσεων, η Πολυκριτήρια Ανάλυση κ.ά) που γνώρισαν την ανάπτυξή τους κυρίως **μετά τον β' παγκόσμιο πόλεμο** και που έχουν ως αντικείμενό τους την ανάλυση διαφόρων «δυνατοτήτων αποφάσεων» και την αξιολόγησή τους σύμφωνα με κάποιο κριτήριο. Η Θεωρία Παιγνίων επιχειρεί λοιπόν να αντιμετωπίσει με μαθηματικές μεθόδους **μοντέλα σύγκρουσης και συνεργασίας** προσφέροντας μια ενιαία γλώσσα, με την οποία μπορούμε να μορφοποιήσουμε, να κατανοήσουμε και να αναλύσουμε με συστηματικό τρόπο τη διαδικασία λήψεως αποφάσεων σε περιπτώσεις όπου υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των ληπτών αποφάσεων.

Κύριος εκφραστής της Θεωρίας Παιγνίων θεωρείται ο **John Von Neumann** (1903-1957)[1] ο οποίος με άρθρο του το **1928** στο γερμανικό περιοδικό *Mathematische Annalen* παρουσίασε για πρώτη φορά (μέσω του αρκετά ιδιαίτερου τοπολογικού θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer) την απόδειξη του **Θεωρήματος Minimax**[2] που αφορούσε την γενική ύπαρξη λύσης σε μια ειδική κατηγορία παιγνίων, τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Δεκαέξι χρόνια έπειτα, το έτος **1944**, δημοσίευσε (σε συνεργασία με τον οικονομολόγο Oskar Morgenstern) το μνημειώδες βιβλίο ***“Theory of Games and Economic Behavior”*** με τη δημοσίευση του οποίου να θεωρείται ότι σημαδεύει τη μετάβαση της Θεωρίας Παιγνίων από την «προϊστορία στην ιστορία». Ο V.Neumann παρόλο που επιχείρησε να διαμορφώσει μια ενιαία θεωρία, δεν την προέβαλε ως τη βάση μιας μελλοντικής Θεωρίας των Πάντων που ενοποιεί τις κοινωνικές επιστήμες και παρέχει κάποια παιγνιο-θεωρητική έννοια που λύνει το ζήτημα της ανάλυσης αποφάσεων.



John Von Neumann (1903-1957)

Την παρουσίασε ως μια **θεωρία χρήσιμη σε ανταγωνιστικές καταστάσεις** όπου το «κέρδος» του ενός είναι η «ζημία» του άλλου -αυτό που ονομάζουμε **παίγνια μηδενικού αθροίσματος** (δεδομένου ότι εάν αθροίσουμε τα κέρδη του νικητή και τις ζημίες του ηττημένου το άθροισμα είναι μηδενικό).

[1] Η πρώτη συστηματική παιγνιο-θεωρητική μελέτη παρουσιάστηκε στα οικονομικά το 1838 από τον Cournot (αναλύοντας τη λειτουργία μιας αγοράς με δύο επιχειρήσεις-ολιγοπώλιο κατά Cournot) και ακολούθησε ο Emil Borel που σε δημοσίευσή του το 1921 ανέλυσε πρώτος παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Ωστόσο η έρευνά τους εστίαζε στη μελέτη ειδικών περιπτώσεων παιγνίων και όχι στην εύρεση απόδειξης γενικών λύσεων.

[2] Η δημοσίευση της απόδειξης του Minimax που παρουσίασε ο Von Neumann δεν παρείχε κάποια μέθοδο επίλυσης στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος (ήταν, όπως λέγεται, «υπαρξιακή») και χρειάστηκε να περάσουν περίπου 25 χρόνια μέχρις ότου γίνει αριθμητική επίλυση μέσω της μεθόδου Simplex του G.Dantzig (1914-2005).

Παραδείγματα τέτοιων παιγνίων είναι το **πόκερ**[3], το **σκάκι**[4], το **blackjack**, η διαδικασία εκτέλεσης **πέναλτι**, το δικαίωμα προαίρεσης μετοχών κ.ά

Ο Neumann προσέγγισε αυτές τις συγκρούσεις, μεταξύ δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, ως μαθηματικά προβλήματα που έπρεπε να επιλυθούν. Αυτό και έκανε: βρήκε τη «λύση» τους! Τι σημαίνει όμως η φράση «**λύση του παιγνίου**»; Μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως μια **πρόβλεψη** για το πώς θα συμπεριφερθούν οι παίκτες εφόσον η **συμπεριφορά τους είναι ορθολογική**, εφόσον δηλαδή πράττουν με τρόπο που μεγιστοποιεί τις πιθανότητές τους να κερδίσουν (ή αντίστοιχα ελαχιστοποιεί τις πιθανότητες να ηττηθούν).

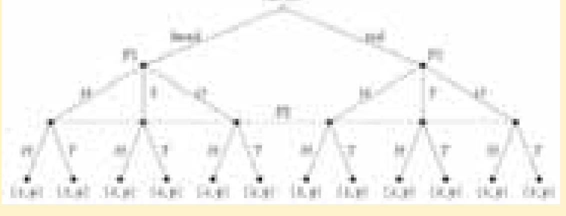
Χαρακτηριστικό παράδειγμα

John Von Neumann

Ας πάρουμε για αρχή ένα απλό παίγνιο μηδενικού αθροίσματος όπου δύο παίκτες (Α και Β) επιλέγουν ταυτόχρονα (και χωρίς να επικοινωνούν μεταξύ τους) μεταξύ του αριθμού 1 και του αριθμού 2. Αν επιλέξουν διαφορετικό αριθμό, κανείς τους δεν κερδίζει, ούτε χάνει τίποτα. Αν όμως επιλέξουν τον ίδιο αριθμό τότε, σε περίπτωση που επέλεξαν το 1, ο Β δίνει 1 ευρώ στον Α. Στην αντίθετη περίπτωση (που οι Α και Β επιλέγουν τον αριθμό 2) ο Α δίνει 2 ευρώ στον Β. Αναλογιζόμενοι τους **κανόνες** του **συγκεκριμένου παιχνιδιού**, είναι φανερό ότι παρόλη την απλότητά του δεν είναι προφανής η επιλογή που θα οδηγήσει καθέναν από τους παίκτες Α, Β στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Δημιουργείται επομένως η ανάγκη για την εύρεση και χρήση μιας **θεωρίας ικανής** να οδηγήσει τον εκάστοτε παίκτη στην απόφαση που θα του αποφέρει το **καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα**.

Ανάλογος πρέπει να ήταν και ο προβληματισμός που οδήγησε τον V. Neumann στην απόδειξη του θεωρήματος Minimax, σύμφωνα με το οποίο κάθε παίκτης πρέπει να προσδιορίσει το πιο δυσμενές αποτέλεσμα που μπορεί να του δώσει κάθε στρατηγική και στη συνέχεια να επιλέξει από αυτά τα αποτελέσματα τη λιγότερο «βλαπτική» στρατηγική. Συνεπώς το θεώρημα Minimax κατευθύνει τους παίκτες στην επίτευξη ενός «ελάχιστου» επιπέδου ασφαλείας κέρδους, προτρέποντας τους ταυτόχρονα στη λήψη αποφάσεων ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε **υποκειμενικές προσδοκίες** των **επιλογών** των αντιπάλων. Τι θα συνιστούσε λοιπόν ο V. Neumann στους παίκτες μας με βάση το Minimax; Απάντηση: στον Α συνιστά να επιλέξει το 1 και στον Β το 2, οδηγώντας τους παίκτες σε μηδενικά κέρδη.

Ας εξετάσουμε όμως πώς κατέληξε σε αυτή τη «λύση»: Ο Α πρέπει να σκεφτεί ότι εάν επιλέξει τον αριθμό 1, τότε είτε θα κερδίσει 1 ευρώ (στην περίπτωση που ο Β επιλέξει και αυτός τον αριθμό 1) είτε δεν θα κερδίσει (ούτε θα χάσει) τίποτα (στην περίπτωση που ο Β επιλέξει το 2). Εάν λοιπόν ο Α επιλέξει το 1, στη χειρότερη περίπτωση τα κέρδη του θα είναι μηδενικά. Αν όμως επιλέξει τον αριθμό 2, τότε είτε



θα έχει μηδενικά κέρδη (στην περίπτωση που ο Β επιλέξει το 1) είτε θα χάσει 2 ευρώ (στην περίπτωση που και ο Β επιλέξει το 2). Άρα εφόσον επιλέξει το 2, στη χειρότερη περίπτωση ο Α θα χάσει 2 ευρώ. Μεταξύ των δύο χειρότερων περιπτώσεων, είναι προφανές ότι βέλτιστη είναι η πρώτη (η περίπτωση όπου Α και Β επιλέγουν το 1). Η **ορθολογική στρατηγική** επομένως που μεγιστοποιεί το ελάχιστο κέρδος (ή ελαχιστοποιεί τη μέγιστη ζημία) για τον Α είναι ο αριθμός 1. Από την σκοπιά του Β, έχουμε τα εξής: η επιλογή 1 θα του αποφέρει είτε ζημία ενός ευρώ (στην περίπτωση που και ο Α επιλέξει 1) είτε μηδενικό κέρδος/ζημία (στην περίπτωση που ο Α επιλέξει το 2). Το χειρότερο αποτέλεσμα για τον Β από την επιλογή 1 είναι, συνεπώς, ζημία ενός ευρώ. Αν όμως επιλέξει το 2, στη χειρότερη περίπτωση θα έχει μηδενικό κέρδος/ζημία (αν ο Α επιλέξει το 1 και κέρδος 2 ευρώ στην περίπτωση που ο Α επιλέξει το 2). Από τις δύο χειρότερες πιθανές καταστάσεις η χείριστη

[3] Ο Von Neumann επιχειρώντας να απλοποιήσει τις συγκρουσιακές καταστάσεις της καθημερινότητας χρησιμοποίησε ως πρότυπο για τη μελέτη του ένα παιχνίδι πόκερ. Αν και θεωρητικά απλό, το πόκερ **διαθέτει** πολλές **ομοιότητες** με τις **πραγματικές καταστάσεις** σύγκρουσης και μπορεί να θεωρηθεί ένα κατάλληλο μοντέλο προσομοίωσης (Baumgarten, 1961).

[4] Ο αλγόριθμος MiniMax είναι ένας από τους βασικότερους αλγορίθμους που εφαρμόζεται με τη βοήθεια των Η/Υ στις εμπειρικές αξιολογήσεις των σκακιστικών κινήσεων, επιδιώκοντας την ελαχιστοποίηση της «ζημίας» και την εύρεση του **βέλτιστου** path κινήσεων και θέσεων των σκακιστικών κομματιών.

αντιστοιχεί στην στρατηγική επιλογή του αριθμού 1. Για αυτό σύμφωνα με το Θεώρημα Minimax ζημιών (ή αντίστοιχα το Maximin των κερδών)[5] ο Β ενδείκνυται να επιλέξει τον αριθμό 2.

Ας αποτυπώσουμε το **παίγνιο** με το συνηθισμένο τρόπο των παιγνιοθεωρητικών. Στον πίνακα που ακολουθεί, ο Α επιλέγει μεταξύ των αριθμών 1 και 2 οι οποίοι αντιστοιχούν στις σειρές Α1 και Α2. Ταυτόχρονα ο Β επιλέγει μεταξύ των δικών του 1 και 2 που στον πίνακα παίρνουν τη μορφή των στηλών Β1 και Β2.

Σχεδιασμός επιλογών		**Στρατηγικές παίκτη Β** Επιλογή αριθμού 1 (Β1)	**Στρατηγικές παίκτη Β** Επιλογή αριθμού 2 (Β2)	Minimum B
Στρατηγικές παίκτη Α	Επιλογή αριθμού 1 (Α1)	(1,-1)	**(0,0)**	**0** ***(maximin)***
	Επιλογή αριθμού 2 (Α2)	(0,0)	(-2,2)	-2
Minimum A		-1	**0** ***(maximin)***	

Σχ.1 Παίγνιο 1: Πίνακας Αποδόσεων

Τα κέρδη τους εκφράζονται σε ευρώ με το κέρδος του Α να αναγράφεται πρώτο και του Β δεύτερο (οι ζημίες δίδονται ως αρνητικά κέρδη) σε κάθε κελί του πίνακα. Η ανάγνωση του πίνακα δεν είναι κάτι που θα μας δυσκολέψει. Έστω ότι ο Α επιλέγει τον αριθμό 2, δηλαδή τη στρατηγική Α2, και ο Β τον 1 (δηλαδή τη στήλη Β1). Από αυτές τις επιλογές προκύπτει το αποτέλεσμα της δεύτερης σειράς και της πρώτης στήλης, δηλαδή το (0,0), όπου κανείς δεν χάνει και ούτε κερδίζει (οι κανόνες του παιχνιδιού ορίζουν μηδενικά κέρδη όταν οι παίκτες επιλέγουν διαφορετικούς αριθμούς). Αν όμως για παράδειγμα ο Α επιλέξει τον αριθμό 2 (τη σειρά Α2) και ο Β τον αριθμό 2 (στήλη Β2), τότε έχουμε το αποτέλεσμα (-2,2) το οποίο σημαίνει ότι η Α εξαναγκάζεται να δώσει 2 ευρώ στον Β (ο οποίος κερδίζει 2 ευρώ).

Τέλος, για να γίνει εμφανές το σκεπτικό του Von Neumann, ο πίνακας έχει μια τρίτη σειρά και μια τρίτη στήλη. Η τρίτη στήλη καταγράφει τα ελάχιστα κέρδη του Α για κάθε μια στρατηγική που έχει στη διάθεσή του. Π.χ. εάν επιλέξει τον αριθμό 1 ουσιαστικά επιλέγει τη σειρά Α1. Ποιο είναι το χειρότερο δυνατό κέρδος του σε αυτή τη σειρά; Το 0, το οποίο προκύπτει εάν ο Β επιλέξει τη στήλη Β2 (δηλαδή τον αριθμό 2). Σημειώνουμε αυτό το χειρότερο κέρδος του Α το οποίο αντιστοιχεί στην επιλογή της Α1 ως ένα 0 στη στήλη minA. Το ίδιο κάνουμε και με το χειρότερο κέρδος της Α2: σημειώνουμε το -2 στην τρίτη στήλη (την minA) που αντιστοιχεί στη στρατηγική Α2 του Α. Ποιο από τα δύο αυτά «χειρότερα» αποτελέσματα των στρατηγικών του Α είναι το καλύτερο; Το 0 βέβαια, το οποίο αποτελεί τη maximin στρατηγική του Α, σύμφωνα με το οποίο ο Α ωφελείται επιλέγοντας την στρατηγική Α1. Με τον ίδιο τρόπο συμπληρώνουμε και την τρίτη σειρά, την minB η οποία δίνει τα χειρότερα κέρδη του Β, από τα οποία επιλέγουμε το λιγότερα ζημιογόνο (όπου είναι το 0 στο οποίο οδηγείται ο Β από την στρατηγική Β2). Όταν οι παίκτες Α και Β ακολουθήσουν τις συμβουλές του V.Neumann, τότε το αποτέλεσμα που αποτελεί τη λύση του παιγνίου και αποτελεί την ασφαλέστερη επιλογή των παικτών Α και Β είναι το (0,0) που προκύπτει από το συνδυασμό των στρατηγικών (Α1, Β2).

[5] Στα παίγνια 2-παικτών μηδενικού αθροίσματος που το άθροισμα των αποδόσεων στις επιμέρους επιλογές των παικτών είναι μηδέν, όταν ο ένας **παίκτης επιδιώκει τη μεγιστοποίηση** των κερδών του, ο άλλος επιζητά την ελαχιστοποίηση των ζημιών του. Αυτό για τον παίκτη Α για παράδειγμα, ερμηνεύεται ως εντοπισμός του μεγαλύτερου από τα ελάχιστα (από κάθε στρατηγική), δηλαδή maximin, ενώ για τον παίκτη Β ερμηνεύεται ως επιλογή του μικρότερου από τα μέγιστα, δηλαδή minimax. Στο παραπάνω παίγνιο ωστόσο αναλύσαμε τις επιλογές των Α, Β εντοπίζοντας την maximin στρατηγική ξεχωριστά για κάθε παίκτη.

Παράδειγμα ρεαλιστικού πλαισίου με μοντελοποίηση

Με σκοπό να αντιληφθούμε την σπουδαιότητα και την εφαρμοσιμότητα του θεωρήματος Minimax σε ένα πρόβλημα ρεαλιστικού πλαισίου, παραθέτουμε ακολούθως τον τρόπο σύμφωνα με τον οποίο **η Μάχη της Θάλασσας του Μπίσμαρκ** (Bismarck Sea Battle)[6] μπορεί να μοντελοποιηθεί και να «λυθεί» ως ένα παίγνιο-μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών.

Γενικώς οι διακρατικές σχέσεις και κατ’ επέκταση οι εμπόλεμες συρράξεις μεταξύ δύο αντιπάλων κατατάσσονται στα παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος (αφού πρόκειται για καταστάσεις όπου υπάρχουν μόνο δύο αντίπαλοι και τα κέρδη για τον έναν αποτελούν ζημίες για τον άλλον).

Η Θεωρία Παιγνίων λοιπόν μπορεί να συμβάλλει κατά ουσιαστικό τρόπο στην εκτίμηση των προθέσεων του αντιπάλου, όπου μέσω της διεξοδικής ανάλυσης των επιλογών και των δυνατοτήτων κάθε παίκτη να οδηγήσει στη λήψη της ορθότερης (ή τουλάχιστον της λιγότερο ζημιογόνας) απόφασης[7].

Η μάχη-ορόσημο της Θάλασσας του Μπίσμαρκ διεξήχθη στις 2-4/3/1943 κατά τη διάρκεια του **β' παγκοσμίου πολέμου** ανάμεσα σε δυνάμεις του πολεμικού ναυτικού της Ιαπωνίας και της πολεμικής αεροπορίας των Συμμαχικών Δυνάμεων (Σ.Δ.).

Σχ.2 Επιλογές διαδρομών Ιαπωνικών πλοίων

Η Ιαπωνία θέλοντας να ενισχύσει τη θέση της στη Νέα Γουινέα αποφασίζει να μεταφέρει (δια θαλάσσης) στρατιώτες από τη νήσο Rabaul (Νέα Βρετανία) στη Lae (Νέα Γουινέα), ακολουθώντας **διαδρομή διάρκειας 3 ημερών** από τα **νότια ή βόρεια της Νέας Βρετανίας** (Σχ.2).

Η Υπηρεσία Πληροφοριών υποκλέπτοντας την πληροφορία για τους σκοπούς των Ιαπώνων αναθέτει στον τότε στρατηγό Kenney (διοικητή των Συμμαχικών Δυνάμεων της περιοχής του Νοτιοδυτικού Ειρηνικού) να εντοπίσει και να πλήξει με πολεμικά αεροσκάφη τα Ιαπωνικά πλοία, αποτρέποντας έτσι τη μεταφορά στρατευμάτων στο Lae.

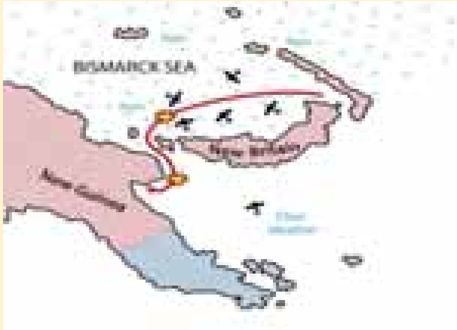
Παράλληλα η Μετεωρολογική Υπηρεσία Στρατού ενημερώνει τον Kenney ότι προβλέπεται **βροχή και χαμηλή ορατότητα** (άρα δυσκολία εντοπισμού των Ιαπωνικών πλοίων) **βόρεια της Νέας Βρετανίας**, ενώ στα **νότια καλή ορατότητα και αίθριος καιρός.**

Γίνεται σαφές ότι το ζητούμενο του στρατηγού Kenney είναι η λήψη στρατηγικής απόφασης που θα τον οδηγήσει σε επιθέσεις μεγαλύτερης χρονικής διάρκειας (αντίθετα η επιλογή των Ιαπώνων αποβλέπει στη λήψη απόφασης που δεν θα τους οδηγήσει σε πολυήμερη εμπλοκή με τις Σ.Δ). Δεδομένου ότι τόσο οι Ιάπωνες όσο και Συμμαχικές Δυνάμεις θα καθόριζαν τις αποφάσεις τους αγνοώντας την τελική απόφαση του αντιπάλου, προκύπτουν οι ακόλουθες τέσσερις δυνατές περιπτώσεις:

---

[6] Η παιγνιο-θεωρητική ανάλυση της μάχης δημοσιεύτηκε στο άρθρο με τίτλο *“Military Decision and Game Theory”* (1954) από τον ταξίαρχο της Πολεμικής Αεροπορίας των Η.Π.Α O.G.Haywood.

[7] Σύμφωνα με το κλασικό στρατιωτικό εγχειρίδιο του O.G.Haywood *“Στρατιωτικό Δόγμα Αποφάσεων και η **Θεωρία Παιγνίων του V.Neumann**”* (1951), οι ένοπλες δυνάμεις λαμβάνουν (μέχρι και σήμερα) αποφάσεις σύμφωνα με το Δόγμα πέντε σταδίων που ονομάζεται “**Εκτίμηση Κατάστασης**”. Ο εκάστοτε υπεύθυνος για τη λήψη της απόφασης, αφού προσδιορίσει τον στόχο της αποστολής (1ο Στάδιο), προχωρά στην **εκτίμηση της κατάστασης** και των δυνατών επιλογών του (2ο Στάδιο). Σειρά έχει η ανάλυση των κινήσεων του αντιπάλου (3ο Στάδιο) και η σύγκριση με τις ίδιες επιλογές (4ο Στάδιο). Ακολούθως λαμβάνονται οι τελικές αποφάσεις (5ο Στάδιο).

 **<u>Στρατηγική Kenney</u>**: Αναγνωριστικά αεροσκάφη Βόρεια της Ν.Βρετανίας. **<u>Στρατηγική Ιαπωνίας:</u>** Πλεύση Βόρεια της Ν.Βρετανίας. **<u>Εκτιμώμενο Αποτέλεσμα:</u>** Δυσκολία αναγνώρισης εξαιτίας της χαμηλής ορατότητας. Επιθέσεις διάρκειας 2 ημερών.	 **<u>Στρατηγική Kenney</u>**: Αναγνωριστικά αεροσκάφη Βόρεια της Ν.Βρετανίας. **<u>Στρατηγική Ιαπωνίας:</u>** Πλεύση Νότια της Ν.Βρετανίας. **<u>Εκτιμώμενο Αποτέλεσμα:</u>** Αποτυχία εντοπισμού Ιαπωνικών πλοίων την πρώτη μέρα. Αναμενόμενη αναγνώριση κατά την δεύτερη μέρα και επιθέσεις διάρκειας 2 ημερών.
 **<u>Στρατηγική Kenney</u>**: Αναγνωριστικά αεροσκάφη Νότια της Ν.Βρετανίας. **<u>Στρατηγική Ιαπωνίας:</u>** Πλεύση Βόρεια της Ν.Βρετανίας. **<u>Εκτιμώμενο Αποτέλεσμα:</u>** Εντοπισμός Ιαπωνικών πλοίων κατά την τρίτη ημέρα πλεύσης τους στο τελικό τμήμα της διαδρομής νότια της Ν.Βρετανίας. Επιθέσεις διάρκειας 1 ημέρας.	 **<u>Στρατηγική Kenney</u>**: Αναγνωριστικά αεροσκάφη Νότια της Ν.Βρετανίας. **<u>Στρατηγική Ιαπωνίας:</u>** Πλεύση Νότια της Ν.Βρετανίας. **<u>Εκτιμώμενο Αποτέλεσμα:</u>** Άμεσος εντοπισμός Ιαπωνικών πλοίων (λόγω αίθριου καιρού) από την πρώτη ημέρα του απόπλου των Ιαπώνων. Επιθέσεις διάρκειας 3 ημερών.

Σχ.3 Μάχη Μπίσμαρκ: Πίνακας αναφοράς πιθανών επιλογών δράσης

Το συγκεκριμένο συγκρουσιακό παίγνιο της μάχης μπορεί εύκολα να αναπαρασταθεί μέσω ενός πίνακα πληρωμών των δύο παικτών (Σχ.4). Οι στρατηγικές του στρατηγού Kenney και των Ιαπώνων εντοπίζονται στις γραμμές και τις στήλες του πίνακα αντιστοίχως, ενώ οι αποδόσεις ανά στρατηγική αναγράφονται στα αντίστοιχα κελιά. Ακολουθώντας τον τρόπο ανάγνωσης και ερμηνείας του πίνακα όπως και στο προηγούμενο παίγνιο, μπορούμε να βρούμε σύμφωνα με το θεώρημα Minimax τη βέλτιστη απόφαση των Συμμαχικών Δυνάμεων και των Ιαπώνων.

Σχεδιασμός επιλογών		**Στρατηγικές Ιαπώνων**		Minimum B
		Βόρεια Διαδρομή (B2)	Νότια Διαδρομή (N2)	
Στρατηγικές Kenney (Συμμαχικές Δυνάμεις)	Βόρεια Διαδρομή (B1)	(2,-2)	**(2,-2)**	**2** ***(maximin)***
	Νότια Διαδρομή (N1)	(1,-1)	(3,-3)	1
Minimum A		**-2** ***(maximin)***	-3	

Σχ.4 Μάχη Μπίσμαρκ: Πίνακας Αποδόσεων

Εντοπίζοντας τη maximin στρατηγική για καθέναν από τους δύο παίκτες η λύση του παιγνίου προκύπτει να είναι ο **συνδυασμός στρατηγικών** (Βόρεια Διαδρομή, Βόρεια Διαδρομή), λύση η οποίο υποδεικνύει στους παίκτες να επιλέξουν διαδρομή βόρεια της Νέας Βρετανίας. Η στήλη minA μας πληροφορεί ότι η στρατηγική B1 μεγιστοποιεί το ελάχιστο κέρδος του Kenney, ενώ η στήλη B2 μεγιστοποιεί το ελάχιστο κέρδος των Ιαπώνων. Εντοπίζοντας δηλαδή την maximin στρατηγική για καθέναν από τους δύο παίκτες οδηγούμαστε στη «λύση» (B1,B2) με τα αντίστοιχα κέρδη 2 ημερών επιτυχών επιθέσεων για τον Kenney (και 2 ημερών επιθέσεις εις βάρος τους οι Ιάπωνες). Ο αναγνώστης καλείται να προσέξει μια πραγματικότητα **η οποία δεν είναι εμφανής**: και στα δύο παίγνια το άθροισμα των maximin κερδών των δύο παικτών ισούται με το μηδέν. Για να το δούμε αυτό, ας επανεξετάσουμε τις προτεινόμενες στρατηγικές (B1,B2) της Μάχης του Μπίσμαρκ με βάση το θεώρημα Minimax. Σημειώνουμε ότι το ελάχιστο κέρδος του Kenney από την στρατηγική B1 (δηλαδή του να αναζητήσει Ιαπωνικά πλοία στα βόρεια) είναι 2 ημέρες βομβαρδιστικών επιθέσεων. Ο λόγος βέβαια που προκύπτει η συγκεκριμένη στρατηγική ως βέλτιστη είναι ότι αποδίδει το μέγιστο από τις χειρότερες επιλογές (1 ημέρα επιθέσεων αν οι Ιάπωνες κινηθούν βόρεια και οι Συμμαχικές Δυνάμεις νότια) και παράλληλα επειδή οι Ιάπωνες έχουν κάθε λόγο να θέλουν να επιλέξουν πλεύση βόρεια της Νέας Βρετανίας (καθότι στα νότια αυτής ελοχεύει ο κίνδυνος να δεχθούν επιθέσεις από 2 έως 3 ημέρες). Καθώς προκύπτει ότι η maximin στρατηγική του Kenney είναι +2, την ίδια στιγμή το ελάχιστο κέρδος των Ιαπώνων από την προτεινόμενη στρατηγική (B2) ισούται με -2 (δεδομένου ότι είναι προτιμότερο να δεχθούν επιθέσεις 2 ημερών κινούμενοι βόρεια, έναντι επιθέσεις 3 ημερών στα νότια)[8]. Εάν αθροίσουμε τα maximin των δύο παικτών προκύπτει $(-2)+(+2)=0$ (το ίδιο συνέβη και στο προηγούμενο παίγνιο, όπου $0+0=0$).

Εύλογα λοιπόν μπορούμε να αναρωτηθούμε αν αυτό **το αποτέλεσμα ήταν τυχαίο**. Η απάντηση δίνεται από τον Von Neumann, ο οποίος απέδειξε με αριστουργηματικό τρόπο ότι για όλα τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες, υπάρχουν πάντα maximin στρατηγικές[9] (μια για κάθε παίκτη) που οδηγούν στο προηγούμενο αποτέλεσμα. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως το Θεώρημα Minimax. Πέραν όμως **της εφαρμοσιμότητας** και αισθητικής αξίας του θεωρήματος Minimax που αποτέλεσε το θεμέλιο λίθο της Θεωρίας Παιγνίων, ο Von Neumann έπρεπε να εξηγήσει γιατί η προτεινόμενη «λύση» αποτελεί ταυτόχρονα έναν καλό οδηγό προς τους παίκτες και επιπλέον **μια καλή πρόβλεψη** για το αποτέλεσμα της «σύγκρουσης». Καταρχάς, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η συμβουλή του Neumann (που στηρίζεται στην αρχή του Maximin) είναι ιδιαίτερα συντηρητική: «Υπολογίστε την ελάχιστη απόδοση που σας αποφέρει κάθε μια από τις επιλογές σας και κατόπιν επιλέξτε εκείνη την στρατηγική που σας επιφέρει τη μέγιστη από αυτές τις ελάχιστες αποδόσεις». Προφανώς η πρόταση του Minimax βασίζεται **στη μέγιστη αποστροφή στο ρίσκο** και την αβεβαιότητα δεδομένου ότι στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική που του επιφέρει την καλύτερη δυνατή έκβαση από το σύνολο των χειρότερων αποτελεσμάτων. Στο πλαίσιο όμως συγκρουσιακών καταστάσεων που ο αντίπαλος αποβλέπει στην «καταστροφή» σου η μεγιστοποίηση των κερδών πάντοτε ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση των ζημιών σου.

8 Προκύπτει ότι οι Ιάπωνες έχουν «κυρίαρχη» στρατηγική την B2 δεδομένου ότι το άθροισμα των αποδόσεων της B2 είναι μεγαλύτερο από τις αποδόσεις της N2 ($-2-1>-2-3$).

9 Η «λύση» του παιγνίου προκύπτει ως ένα ζεύγος ***αμιγών*** ή ***μικτών*** στρατηγικών. Η μέχρι τώρα ανάλυση βασίστηκε στην υπόθεση ότι οι παίκτες επιλέγουν αμιγείς στρατηγικές κατά ντετερμινιστικό τρόπο. Ωστόσο η έννοια της στρατηγικής επεκτείνεται και στον πιθανοτικό (τυχαίο) τρόπο επιλογής στρατηγικών (:μικτές στρατηγικές). Με βάση αυτή την προσέγγιση, μια μικτή στρατηγική ενός παίκτη προκύπτει τυχαία (ως μια κατανομή πιθανότητας) επί του συνόλου των αμιγών του στρατηγικών.

John Forbes Nash Jr.
(1928-2015)

Παρόλη όμως τη συμβολή του V.Neumann, το πρόβλημα με τη θεωρία που κληροδότησε ήταν ότι τα παίγνια που διαπραγματευόταν δεν είχαν **σημαντική απήχηση** ούτε στους κοινωνικούς επιστήμονες ούτε στα κέντρα εξουσίας της εποχής.

Το *"Theory of Games and Economic Behavior"* δημοσιεύτηκε την εποχή που η σκόνη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου δεν είχε ακόμα καταλαγιάσει. Ήταν τότε που ο κόσμος πέρναγε από τον εφιάλτη της μεγαλύτερης σφαγής του $20^{\text{ου}}$ αιώνα στην συνεχώς κλιμακούμενη απειλή ενός πυρηνικού ολοκαυτώματος. Τα μείζονα ζητήματα ήταν, από τη μια μεριά, η ειρηνική συνύπαρξη και συνεργασία μεταξύ ατόμων και κρατών, έτσι ώστε να επουλωθούν οι πληγές της οικουμένης, ενώ παράλληλα οι «υπεύθυνοι» του Πενταγώνου σχεδίαζαν τον επικείμενο πυρηνικό πόλεμο[10].

Η θεωρία που είχε αναπτυχθεί λοιπόν από τον Neumann **δεν έδινε «λύσεις»** στον νέο συσχετισμό δυνάμεων επί των σχέσεων των «παικτών της γεωστρατηγικής σκακιέρας». Ο λόγος είναι απλός: ούτε **η συνεργασία λαών και ατόμων**, αλλά ούτε και η πυρηνική αντιπαράθεση, θυμίζουν παίγνια μηδενικού αθροίσματος.

Σχετική αναφορά στο κρίσιμο σημείο ισορροπίας του Nash

Ας σκεφτούμε τις τραγικές επιπτώσεις στη περίπτωση που ένας πυρηνικός πόλεμος προσεγγιζόταν ως ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος! Αντίθετα εάν δύο ή περισσότερα άτομα (παίκτες) επιτύχουν να συνεργαστούν, ξεπερνώντας τις μεταξύ τους αντιπαραθέσεις, τότε προφανώς το αποτέλεσμα ωφελεί όλους τους συμμετέχοντες. Πρόκειται δηλαδή για ένα παίγνιο εν δυνάμει **θετικού αθροίσματος** (το άθροισμα των πληρωμών των παικτών είναι θετικό). Για αυτούς τους βασικούς λόγους, η εφαρμοσιμότητα της κατά Neumann θεωρίας παιγνίων άρχισε να περιορίζεται έως ότου ο μεταπτυχιακός φοιτητής του Princeton **John Forbes Nash Jr.** (1928-2015) να **επαναθεμελιώσει** τη Θεωρία Παιγνίων. Ουσιαστικά ο John Nash με τρία άρθρα του μεταξύ του 1950 και του 1953 ενίσχυσε τα **θεωρητικά εργαλεία** της Θεωρίας Παιγνίων, μέσω των οποίων ήτο δυνατό να αναλυθούν και να λυθούν τα παίγνια

[10] Στην αντιπολεμική **ταινία του S. Kubrick** *Strangelove* εικάζεται ότι ο μανιακός επιστήμονας με τη γερμανική προφορά και το αναπηρικό αμαξίδιο, τον οποίο υποδύεται ο Peter Sellers, είναι ένα αμάγαλμα του John Von Neumann και του Von Braun. Πράγματι ο Von Neumann, προς το τέλος της ζωής του, έπασχε από καρκίνο και ήταν καθηλωμένος σε αναπηρικό αμαξίδιο. Παρόλα αυτά, συμμετείχε σε συναντήσεις στο Πεντάγωνο (ΗΠΑ) με θέμα τον πυρηνικό σχεδιασμό.

που αποτυπώνουν όλα τα κοινωνικά φαινόμενα. Η συνεισφορά του βασίζεται στην παρουσίαση **νέας μορφής λύσης σε παίγνια** μηδενικού αλλά και **μη-μηδενικού** αθροίσματος και παράλληλα στην **επέκταση της προσέγγισης στον τομέα των διαπραγματεύσεων** από τη Θεωρία Παιγνίων. Έκτοτε, η Θεωρία Παιγνίων δύναται να αναλύει καταστάσεις όπου τα εμπλεκόμενα μέρη μπορούν να αποφύγουν τη μεταξύ τους σύγκρουση και να καταλήξουν σε **αμοιβαία επικερδείς συμφωνίες**. Αυτές οι δύο κύριες συνεισφορές του Nash ενέπνευσαν τον κύκλο των παιγνιοθεωρητικών να ασχοληθούν συστηματικά με «συγκρούσεις» μη-μηδενικού αθροίσματος (από προβλήματα ψυχροπολεμικής στρατηγικής, αντιπαραθέσεων μεταξύ ανταγωνιστικών εταιρειών, τις στρατηγικές επιλογές αντιμαχόμενων πλευρών στα δικαστήρια, εκλογικές στρατηγικές κομματικών σχηματισμών κ.ά) και με διαπραγματευτικά προβλήματα επιλύσιμα στο πλαίσιο συμφωνιών όπου τα συμβαλλόμενα μέρη δέχονται την επιβολή και επιτήρηση των συμφωνημένων από το Κράτος, το Διεθνές Δίκαιο κτλ (πχ. Συλλογικές συμβάσεις μεταξύ συνδικάτων και εργοδοτών, διακρατικές συμφωνίες, ανάλυση συστημάτων ψηφοφορίας και κατανομή ισχύος διοικητικών επιτροπών[11]). Σήμερα η Θεωρία Παιγνίων αποτελεί βασικό εργαλείο των Κοινωνικών Επιστημών, της **Τεχνητής Νοημοσύνης**, της Βιολογίας, **του Management** κ.ά. αποτελώντας μια ενοποιητική βάση, μιας εν δυνάμει ***Θεωρίας του Κοινωνικού Γίγνεσθαι*** μέσω της οποίας μπορούν να αναλυθούν ποικίλα φαινόμενα της φύσης και της ανθρώπινης δραστηριότητας. Αποτελέσματα της δημοσιεύονται συνεχώς σε όλα τα σημαντικά διεθνή επιστημονικά περιοδικά των Οικονομικών, της Επιχειρησιακής Έρευνας, της Διοίκησης Επιχειρήσεων, των Πιθανοτήτων, της Μαθηματικής Λογικής, της Θεωρητικής Πληροφορικής κ.ά. ενώ εξαιρετικά δημοφιλής φαίνεται να είναι και στους κύκλους της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών, η οποία έχει απονείμει **10 Βραβεία Νόμπελ Οικονομικών** σε ερευνητές της **Θεωρίας Παιγνίων**[12]. Στις μέρες μας η Θεωρία Παιγνίων διδάσκεται σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο σε αντίστοιχα τμήματα (Μαθηματικών, Πολυτεχνεία, Οικονομικών, Διεθνών Σχέσεων, Βιολογίας, Αναλογισμού κτλ) και ανάμεσα στις διάφορες περιοχές των σύγχρονων Μαθηματικών, είναι μάλλον εκείνη, που έχει τραβήξει το ενδιαφέρον των άλλων επιστημών περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Bellman, Richard, and David Blackwell, (1949). *"Some two-person games involving bluffing,"* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 35, pp. 600-605.

Haywood, Col. O. G., Jr. (1950). *"Military decision and the mathematical theory of games,"* Air University Q., Rev. 4 pp. 67.

Βαρβαρούσης, Π. (1998). *Στρατηγική των παιγνίων, συνεργασία και σύγκρουση στις Διεθνείς Σχέσεις*. Αθήνα, Εκδ. Παπαζήση.

Βαρουφάκης Γ. (2007). *Θεωρία Παιγνίων, η θεωρία που φιλοδοξεί να ενοποιήσει τις κοινωνικές επιστήμες*. Αθήνα, Gutenberg.

Μηλολιδάκης, Κ. (2009). *Θεωρία Παιγνίων, Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας*. Εκδόσεις Σοφία, Θεσσαλονίκη.

Σταματόπουλος, Γ. (2015). *Θεωρία παιγνίων*. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών ΕΜΠ.

[11] Παράδειγμα αποτελεί η εργασία του μαθηματικού L.S.Shapley (1981) που μελέτησε την εξισορρόπηση στην εκλογή Συμβουλίων αντιπροσώπων από δήμους της Νέας Υόρκης που είχαν άνισους αριθμητικά πληθυσμούς.

[12] **Βραβευμένοι με Νόμπελ Οικονομικών:** Ken Arrow (1972), John Nash, Reinhard Selter & John Harsanyi (**1994**), Tom Schelling & Robert Aumann (**2005**), Leonid Hurwicz, Eric Maskin & Roger Myerson (**2007**), Lin Ostrom (**2009**), Al Roth & Lloyd Shapley (**2012**), Jean Tirole (**2014**), Oliver Hart & Bengt Holomström(**2016**), Richard Thaler (**2017**), Paul R. Milgrom & Robert B. Wilson (**2020**)

$40^η$ Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
18 Φεβρουαρίου 2023

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1: Να λύσετε στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{xyz+1}{x+1}=\dfrac{yzw+1}{y+1}=\dfrac{zwx+1}{z+1}=\dfrac{wxy+1}{w+1}\\ x+y+z+w=48\end{array}\right\}.$$

(*Σ. Μπραζιτίκος – Α. Φελλούρης*)

Λύση (1ος τρόπος): Από τις παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουμε τις εξισώσεις:

$$xy^2z+xyz+y=xyzw+yzw+x$$
$$z^2yw+yzw+z=xyzw+y+zwx$$
$$w^2xz+zwx+w=xyzw+wxy+z.$$
$$x^2wy+wxy+x=xyzw+xyz+w.$$

Με πρόσθεση των τεσσάρων εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$xy^2z+x^2wy+yz^2w+w^2xy=4xyzw \Leftrightarrow \frac{y}{w}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{w}{y}=4.$$

Όμως, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε: $\frac{y}{w}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{w}{y}\geq 4$.

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, $\frac{y}{w}=\frac{x}{z}=\frac{z}{x}=\frac{w}{y}\Leftrightarrow x^2=z^2$ και $y^2=w^2 \Leftrightarrow x=z$ και $y=w$.

Τότε έχουμε: $$\frac{xyz+1}{x+1}=\frac{yzw+1}{y+1}\Leftrightarrow\frac{x^2y+1}{x+1}=\frac{y^2x+1}{y+1}=\frac{x^2y-y^2x}{x-y}=xy$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2y+1+y=x^2y^2+y^2x+1+x$$
$$\Leftrightarrow xy(x-y)=x-y \Leftrightarrow (x-y)(xy-1)=0\Leftrightarrow x=y \text{ ή } xy=1.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $x=y=z=w$. Τότε, από $x+y+z+w=48$, προκύπτει η λύση $(x,y,z,w)=(12,12,12,12)$.
2. $x=z$ και $y=w$ και $xy=1$. Τότε
$$x+y=24\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=24\Leftrightarrow x^2-24x+1=0\Leftrightarrow x=12\pm\sqrt{143},$$
οπότε προκύπτουν οι λύσεις
$$(x,y,z,w)=\left(12+\sqrt{143},12-\sqrt{143},12+\sqrt{143},12-\sqrt{143}\right) \text{ ή}$$
$$(x,y,z,w)=\left(12-\sqrt{143},12+\sqrt{143},12-\sqrt{143},12+\sqrt{143}\right).$$

2ος τρόπος (Α. Συνεφακόπουλος). Έστω $k=\frac{xyz+1}{x+1}=\frac{yzw+1}{y+1}=\frac{zwx+1}{z+1}=\frac{wxy+1}{w+1}$.
Αν $k=1$, τότε αφού $x,y,z,w>0$, έχουμε $xy=yz=zw=wx=1$. Έτσι $x=z$ και $y=w$, και η

δεύτερη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x+\frac{1}{x}=24$ με αποδεκτές λύσεις $x = 12 \pm \sqrt{143} > 0$.

Έστω $k \neq 1$. Λύνοντας ως προς x την $k=\frac{xyz+1}{x+1}$ παίρνουμε $x(yz-k) = k-1 \neq 0$. Άρα

$$x = \frac{k-1}{yz-k}.$$

Ομοίως παίρνουμε $y=\frac{k-1}{zw-k}$, $z=\frac{k-1}{wx-k}$, και $w=\frac{k-1}{xy-k}$.

Έτσι $\quad x-y=\frac{k-1}{yz-k}-\frac{k-1}{zw-k}=-\frac{(k-1)(yz-zw)}{(yz-k)(zw-k)}=-\frac{xyz}{k-1}(y-w), \quad (1)$

και $\quad z-w=-\frac{(k-1)(wx-xy)}{(wx-k)(xy-k)}=-\frac{zwx}{k-1}(w-y) \quad (2)$

Από (1) και (2) παίρνουμε $\frac{x-y}{y}=-\frac{z-w}{w} \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{z}{w}=2$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) παίρνουμε $(x-y)(z-w) = \frac{x^2yz^2w}{(k-1)^2}(y-w)^2 \geq 0$.

Αν έχουμε γνήσια ανισότητα στην τελευταία σχέση, δηλ. αν $y-w \neq 0$, τότε, θα έχουμε είτε $x > y$ και $z > w$ είτε $x < y$ και $z < w$. Τότε, όμως, παίρνουμε είτε $\frac{x}{y}+\frac{z}{w} > 1+1 = 2$ είτε $\frac{x}{y}+\frac{z}{w} >< 1+1 = 2$, αντίστοιχα, οι οποίες αντιβαίνουν στην τελευταία παραπάνω ισότητα.
Άρα $y = w$, $x = y$ από την (1), και $z = w$ από την (2). Δηλ. $x = y = z = w = 12$.
Συνεπώς, οι λύσεις είναι: $(12,12,12,12)$, $(12+\sqrt{143}, 12-\sqrt{143}, 12+\sqrt{143}, 12-\sqrt{143})$, και $(12-\sqrt{143}, 12+\sqrt{143}, 12-\sqrt{143}, 12+\sqrt{143})$.

Σχόλιο: Αποδεικνύεται επίσης ότι αν $k \neq 1$, τότε ισχύει $\frac{y-z}{z} = -\frac{w-x}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{z}+\frac{w}{x} = 2$. Συνεπώς, παίρνουμε $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}=4$, και η απόδειξη στην περίπτωση που $k \neq 1$ μπορεί να ολοκληρωθεί εναλλακτικά με την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου-Γεωμετρικού Μέσου, όπως στον πρώτο τρόπο.

3ος τρόπος: Επειδή οι εξισώσεις του συστήματος **παρουσιάζουν κυκλική συμμετρία, μπορούμε** χωρίς βλάβη της γενικότητας **να υποθέσουμε** $\boldsymbol{x \geq max\{x,y,z,w\}}$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις εξισώσεις του συστήματος προκύπτουν οι ισότητες: $x = z$ και $y = w$, οπότε συνεχίζουμε, όπως στον 1ο τρόπο.

Πρόβλημα 2: Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου n, να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους N που είναι τέλεια τετράγωνα και στη δεκαδική τους αναπαράσταση εμφανίζεται n φορές το ψηφίο 2 και μία φορά το 5. (*Α. Συνεφακόπουλος*)

Λύση: Θα αποδείξουμε ότι τέτοια τέλεια τετράγωνα είναι μόνο το $5^2 = 25$ και το $25^2 = 225$.
Έστω N ένα τέτοιο τέλειο τετράγωνο. Επειδή ένα τέλειο τετράγωνο δεν μπορεί να έχει τελευταίο ψηφίο το 2, πρέπει το N να έχει τη μορφή

$$N = 22\ldots225 = 22\ldots200+25 = 100\cdot 2\cdot 11\ldots 1+25 = 100\cdot 2\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+25,$$

όπου το ψηφίο 2 υπάρχει $n-$ φορές, $n \geq 1$.
Θεωρώντας τις πιθανές μορφές mod10, δηλαδή $N = (10k+\upsilon)^2, 0 \leq \upsilon < 10$, όπου k θετικός ακέραιος, διαπιστώνουμε ότι μόνο στην περίπτωση $N = (10k+5)^2$ προκύπτει θετικός ακέραιος που λήγει σε 25. Τότε έχουμε: $100\cdot 2\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+25 = (10k+5)^2$, (1)
η οποία γράφεται ισοδύναμα $9k^2+9k-2(10^{n-1}-1) = 0$. (2)
Επειδή k θετικός ακέραιος, η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή πρέπει $\Delta = 9(8\cdot 10^{n-1}+1)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ή πρέπει $8\cdot 10^{n-1}+1 = x^2$, για κάποιο περιττό ακέραιο $x > 1$. Αν $x = 2m+1, m \geq 1$, τότε έχουμε:

$$8\cdot 10^{n-1} = x^2-1 = (x-1)(x+1) = 4m(m+1) \Rightarrow 2^n\cdot 5^{n-1} = m(m+1), \quad (3)$$

με $(m, m+1) = 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το n:

- Αν $n = 1$, τότε $m = 1, k = 0$ και $N = 25$.
- Αν $n = 2$, τότε $m = 4, k = 1$ και $N = 225$.
- Αν $n \geq 3$, επειδή $5^{n-1} > 4^{n-1} = 2^{2n-2} > 2^n$,

από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι: $2^n = m$ και $5^{n-1} = m + 1$,
από τις οποίες προκύπτει ότι: $m = 5^{n-1} - 1 = 4 \cdot (5^{n-2} + \cdots + 1) > 4 \cdot 4^{n-2} = 4^{n-1} > 2^n = m$, άτοπο.

Πρόβλημα 3: **Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB > AC$, η διχοτόμος του AD, όπου D είναι σημείο της πλευράς BC, και το σημείο I τομής των διχοτόμων του. Αν M είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AD και F είναι το σημείο τομής της MB με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BIC, να αποδείξετε ότι: $AF \perp FC$.** ***(Μ. Ψαρράς)***

Λύση: **1ος τρόπος.** Το παράκεντρο I_a ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BIC, αφού $I\hat{C}I_a = I\hat{B}I_a = 90°$. Επιπλέον, στο τρίγωνο CDA, οι CI, CI_a είναι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος, αντίστοιχα, επομένως τα σημεία A, D είναι τα συζυγή αρμονικά των I, I_a. Αφού το M είναι μέσον του τμήματος AD, από τη σχέση του Newton για την αρμονική σημειοσειρά έχουμε:

$$MA^2 = MI \cdot MI_a. \qquad (1)$$

Όμως από τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο έχουμε:

$$MI \cdot MI_a = MF \cdot MB. \qquad (2)$$

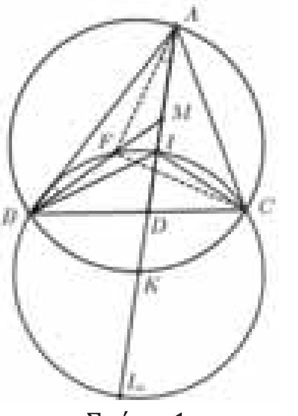
Από τις (1) και (2) έπεται ότι: $MA^2 = MF \cdot MB$,
δηλαδή η ΜΑ εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AFB. Από την τελευταία έχουμε ότι

$$M\hat{B}A = F\hat{A}M. \qquad (3)$$

Τέλος, με τη βοήθεια της (3) έχουμε

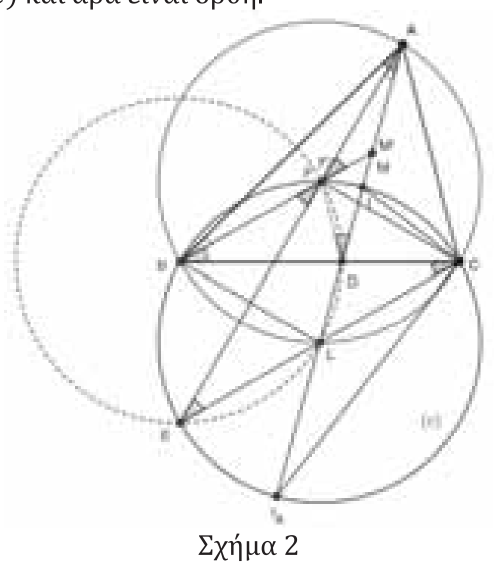
$$F\hat{A}C + F\hat{C}A = F\hat{A}M + \frac{\hat{A}}{2} + F\hat{C}I + \frac{\hat{C}}{2} =$$

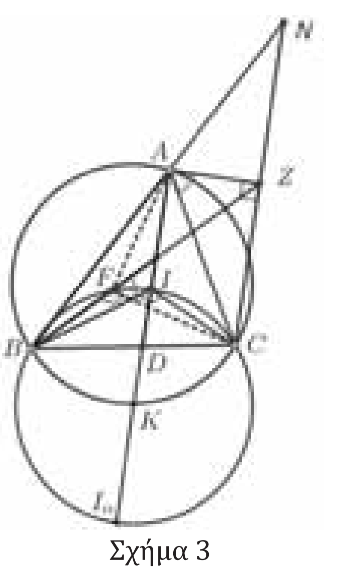
$\overset{(3)}{=} M\hat{B}A + \frac{\hat{A}}{2} + F\hat{B}I + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90°$. Άρα $AF \perp FC$.



Σχήμα 1

2ος τρόπος (Α. Συνεφακόπουλος): Έστω L το μέσο του τόξου BC του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC που δεν περιέχει το A, και έστω I_A παράκεντρο του τριγώνου ABC. Είναι γνωστό ότι τα σημεία A, I, L, I_A είναι συνευθειακά και ότι το L είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (c) του τριγώνου BIC. Έστω E το αντιδιαμετρικό σημείο του C στον (c), έστω F' το σημείο τομής της ευθείας AE με τον (c) και έστω M' το σημείο τομής της BF' με την AD. Η $E\widehat{F'}C$ βαίνει σε ημικύκλιο του (c) και άρα είναι ορθή.


Σχήμα 2



Σχήμα 3

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το M' ταυτίζεται με το μέσο M της AD για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη. Με κυνήγι γωνιών παίρνουμε $B\hat{A}M' = B\hat{C}L = B\widehat{F'}E = B\widehat{F'}M'$,

οπότε $A\hat{B}M' = M'\hat{A}F'$, δηλ. η AM' εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $BF'A$ στο A, και άρα $M'F' \cdot M'B = M'A^2$. Αρκεί να αποδείξουμε επίσης, ότι $M'F' \cdot M'B = M'D^2$, ή ισοδύναμα, ότι η AM' εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $BF'D$ στο D.

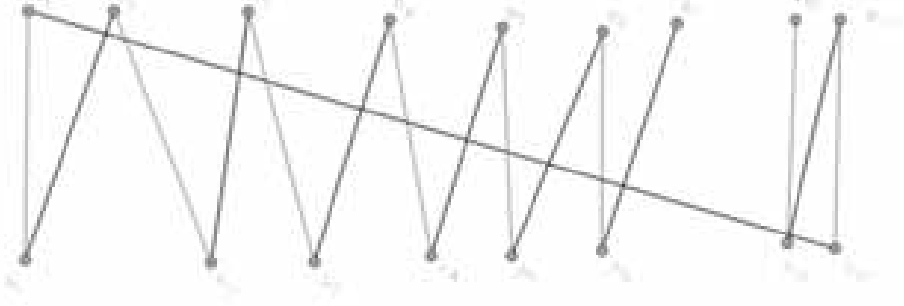
Για το σκοπό αυτό, αφού $F'\hat{B}D = F'\hat{E}L$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\hat{D}F' = F'\hat{E}L$ ή, ισοδύναμα, ότι τα σημεία F', D, L, E είναι ομοκυκλικά.
Πράγματι, αφού τα $E,\ F',\ I,\ I_A$ είναι ομοκυκλικά, έχουμε $AF' \cdot AE = AI \cdot AI_A$. Αφού $ID \cdot I_AD = BD \cdot DC$, από τα θεωρήματα εσωτερικής διχοτόμου στα τρίγωνα ABC, ACD και εξωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ABD έπεται ότι $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$. Τέλος, από την ομοιότητα των τριγώνων ABL και ADC ισχύει $AB \cdot AC = AD \cdot AL$. Συνεπώς $AF' \cdot AE = AD \cdot AL$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε

3ος τρόπος (Α. Βαρβεράκης): Από την κορυφή C φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διχοτόμο AD η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ν και την ευθεία AM στο σημείο Z.
Από τις ισότητες των γωνιών $A\hat{C}N = D\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{2}, A\hat{N}C = B\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{2}$
έπεται ότι το τρίγωνο ACN είναι ισοσκελές. Επειδή το M είναι το μέσο της AD έπεται ότι το Z είναι το μέσο της πλευράς CN, οπότε $AZ \perp CN \Rightarrow A\hat{Z}C = 90^0$. Επομένως, για να είναι $A\hat{F}C = 90^0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CFAZ$ είναι εγγράψιμο. Πράγματι, έχουμε:

$$C\hat{F}Z = 180^0 - B\hat{F}C = 180^0 - B\hat{I}C = 180^0 - \left(90^0 + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = C\hat{A}Z.$$

Πρόβλημα 4: **Ένα τμήμα της Β΄ Λυκείου έχει 26 μαθητές, που κάθονται ανά δύο στα θρανία. Στο δεύτερο τετράμηνο έχουν αποφασίσει να αλλάξουν θέσεις ώστε κάθε δύο μαθητές που καθόταν μαζί στο πρώτο τετράμηνο, να μην κάθονται μαζί και στο δεύτερο. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του N, ώστε ανεξαρτήτως από το πώς κάθισαν οι μαθητές στα δύο τετράμηνα, να υπάρχει στο τέλος της χρονιάς ένα σύνολο S από N μαθητές, στο οποίο δεν υπάρχουν δύο μαθητές οι οποίοι κάθισαν μαζί σε κάποιο από τα δύο τετράμηνα.** (***Σ. Μπραζιτίκος***)

Λύση: Θα αποδείξουμε ότι η μέγιστη τιμή είναι 13. Πράγματι, αν το σύνολο περιέχει 14 μαθητές, επειδή αυτοί κάθονται σε 13 θρανία, από την αρχή της περιστεροφωλιάς, θα υπάρχουν δύο μαθητές που κάθισαν στο ίδιο θρανίο. Επομένως η μέγιστη τιμή είναι το πολύ 13.

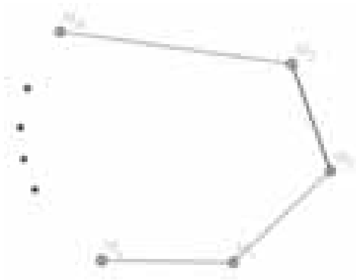


Σχήμα 4

(Με κόκκινο έχουμε σημειώσει τους μαθητές που καθόταν μαζί στο πρώτο τετράμηνο και με μαύρο αυτούς που κάθισαν μαζί στο δεύτερο τετράμηνο)
Για την άλλη κατεύθυνση, θα αποδείξουμε ότι όπως και να κάθισαν οι μαθητές στα δύο τετράμηνα, μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο από 13 μαθητές, ώστε να μην υπάρχουν δύο που κάθισαν μαζί κατά την διάρκεια της χρονιάς. Πράγματι, παριστάνουμε τους μαθητές σαν σημεία στο επίπεδο και τους ενώνουμε με κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα, αν κάθισαν μαζί στο πρώτο τετράμηνο και με μαύρο, αν κάθισαν μαζί στο δεύτερο τετράμηνο. Έστω ότι υπάρχει κύκλος που αποτελείται από περιττό πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων. Τότε κάθε κορυφή συνδέεται με ένα μαύρο και ένα κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα (με τους δύο γείτονες στον κύκλο). Επομένως, αν ξεκινήσουμε με

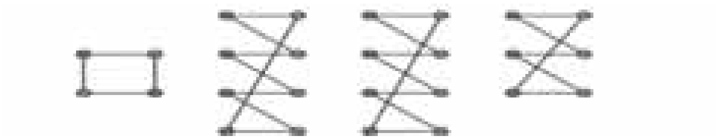
κόκκινο, επειδή το πλήθος των τμημάτων είναι περιττό, θα καταλήξουμε πάλι με κόκκινο.
Αυτό είναι άτοπο, αφού κάθε κορυφή έχει σύνδεση με ένα κόκκινο (για το πρώτο τετράμηνο) και ένα μαύρο (για το δεύτερο τετράμηνο) ευθύγραμμο τμήμα.

Εφόσον δεν υπάρχει περιττός κύκλος, αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των κορυφών μπορεί να χωριστεί σε δύο υποσύνολα A, B, ώστε να μην υπάρχουν τμήματα μεταξύ των κορυφών στο σύνολο A και να μην υπάρχουν τμήματα μεταξύ των κορυφών στο σύνολο B.
Αφού οι μαθητές είναι 26, υπάρχει ένα από αυτά με πληθάριθμό τουλάχιστον 13, και το ζητούμενο έπεται.



Σχήμα 5

2ος τρόπος (Α. Συνεφακόπουλος): Όπως στον πρώτο τρόπο, ισχύει $N \leq 13$ από την αρχή της περιστεροφωλιάς. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα.
Θεωρούμε γράφημα είκοσι έξι κορυφών, οι οποίες αντιστοιχούν στους μαθητές του τμήματος, και με μια ακμή μεταξύ δύο κορυφών αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι μαθητές έχουν καθίσει μαζί στο πρώτο ή το δεύτερο τετράμηνο. Κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει άρτιο αριθμό κορυφών, αφού οι μαθητές κάθονται ανά δύο σε κάθε τετράμηνο. Αλλιώς, θα υπήρχε κάποιος μαθητής που καθόταν μόνος του σε κάποιο τετράμηνο, άτοπο. Αφού οι μαθητές κάθονται με δύο διαφορετικούς συμμαθητές τους όλη τη χρονιά, έναν σε κάθε τετράμηνο, κάθε κορυφή είναι βαθμού 2. Άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κύκλος του Euler. Πράγματι, αν ξεκινήσουμε να κινούμαστε από μια κορυφή περνώντας από κάθε ακμή μόνο μια φορά, λόγω του ότι ο βαθμός κάθε κορυφής είναι 2, θα πρέπει να καταλήξουμε στην κορυφή από την οποία ξεκινήσαμε.Αρκεί, λοιπόν, να θεωρήσουμε κάθε συνεκτική συνιστώσα ως ένα κατευθυνόμενο κύκλο $v_1, v_2,..., v_{2k}$ και να θεωρήσουμε τις μισές κορυφές εναλλάξ, δηλ. τις $v_2, v_4, \dots, v_{2k}$, οι οποίες δε συνδέονται με ακμή. Αφού από καθεμιά συνιστώσα παίρνουμε τις μισές κορυφές, $N = 13$. Στο παρακάτω παράδειγμα, το γράφημα μας έχει τέσσερις συνεκτικές συνιστώσες. Μπορούμε να επιλέξουμε απλώς όλες τις πράσινες ή όλες τις κίτρινες κορυφές.



Σχήμα 6

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 126.

N54. **Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $n \geq 2$, οι οποίοι έχουν ένα θετικό διαιρέτη m έτσι ώστε να ισχύει: $n = d^3 + m^3$, όπου d είναι ο μικρότερος διαιρέτης του n που είναι μεγαλύτερος του 1.** [ΜΟ Ολλανδίας, 2021]

Λύση: Ο μικρότερος διαιρέτης του n μεγαλύτερος του 1 είναι ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του n, οπότε ο d είναι πρώτος. Επειδή $d|n$ έπεται ότι: $d|d^3 + m^3 \Rightarrow d|m^3 \Rightarrow m > 1$.
Επίσης, έχουμε: $m|n = d^3 + m^3 \Rightarrow m|d^3 \Rightarrow m \in \{d, d^2, d^3\}$, αφού ο d είναι πρώτος και $m > 1$. Σε κάθε περίπτωση οι ακέραιοι d^3, m^3 είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί, οπότε ο ακέραιος $n = d^3 + m^3$ είναι άρτιος. Επομένως, ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του είναι ο 2, δηλαδή $d = 2$. Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις:
• $m = d$. Τότε $n = 2^3 + 2^3 = 16$. • $m = d^2$. Τότε $n = 2^3 + 2^6 = 72$. • $m = d^3$. Τότε $n = 2^3 + 2^9 = 520$.
Εύκολα ελέγχουμε ότι και οι τρεις αριθμοί 16, 72, 520 ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος.

A71. **Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ορίζουμε ως $M(x, y)$ τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς xy, $(x-1)(y-1)$, $x + y - 2xy$. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του $M(x, y)$, αν $0 \leq x, y \leq 1$.** [ΜΟ Ολλανδίας, 2021]

Λύση: Έστω $a = xy$, $b = (x-1)(y-1)$, $c = x + y - 2xy$. Παρατηρούμε ότι, αν αντικαταστήσουμε το x με το $1 - x$ και το y με το $1 - y$, τότε $a \to b$, $b \to a$, $c \to c \Rightarrow M(1 - x, 1 - y) = M(x, y)$.

Επιπλέον, έχουμε $x+y=2-(1-x)-(1-y)$, οπότε τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $x+y$ και $(1-x)+(1-y)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x+y\geq 1$ και έστω $x+y=1+t,\ t\geq 0$. Έχουμε, επίσης $t\leq 1$, αφού $0\leq x,y\leq 1 \Rightarrow x+y\leq 2$.

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου προκύπτει: $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{(1+t)^2}{4}$.

Τότε, θα είναι $b=(x-1)(y-1)=xy-x-y+1=xy-(1+t)+1=xy-t=a-t$, οπότε $b\leq a$. Επιπλέον, έχουμε: $c=x+y-2xy\geq(1+t)-2\cdot\frac{t^2+2t+1}{4.}=\frac{2+2t}{2}-\frac{t^2+2t+1}{2}=\frac{1-t^2}{2}$.

Επειδή $\frac{(1+t)^2}{4}\leq\frac{1-t^2}{2}\Leftrightarrow t\leq\frac{1}{3}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $0\leq t\leq\frac{1}{3}$. Τότε $c\geq\frac{1-t^2}{2}\geq\frac{1-\frac{1}{9}}{2}=\frac{4}{9}\Rightarrow M(x,y)\geq\frac{4}{9}$.

(β) $1\geq t>\frac{1}{3}$. Τότε $c=1+t-2a>\frac{4}{3}-2a$. Όμως, έχουμε:

$$M(x,y)\geq max\left\{a,\quad \frac{4}{3}-2a\right\}\Rightarrow 3M(x,y)\geq a+a+\left(\frac{4}{3}-2a\right)=\frac{4}{3}\Rightarrow M(x,y)\geq\frac{4}{9}.$$

Επομένως, η ελάχιστη δυνατή τιμή του $M(x,y)$ είναι $\frac{4}{9}$.

A72. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ η οποία ικανοποιεί, για κάθε $x,y\in\mathbb{N}^*$ τη σχέση:

$$\frac{x^3+3x^2f(y)}{x+f(y)}+\frac{y^3+3y^2f(x)}{y+f(x)}=\frac{(x+y)^3}{f(x+y)}\qquad(1)$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(1)=1$, (β) Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση (1).

[ΜΟ Ρουμανίας, 2022]

Λύση: **(α)** Για $x=y=1$ στη σχέση (1) λαμβάνουμε: $f(2)=\frac{4+4f(1)}{1+3f(1)}$.

Θέτουμε $f(1)=a\in\mathbb{N}^*$. Επειδή $f(2)\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\big(1+3f(1)\big)\big|\big(4+4f(1)\big)$, οπότε:

$$\big(1+3f(1)\big)\big|3\big(4+4f(1)\big)-4\big(1+3f(1)\big)=8.$$

Επομένως, η μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι $1+3f(1)=4$, οπότε $f(1)=1$.

(β) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in\mathbb{N}^*$, ικανοποιεί τη σχέση (1), αφού

$$\frac{x^3+3x^2y}{x+f(y)}+\frac{y^3+3y^2x}{y+f(x)}=\frac{(x+y)^3}{f(x+y)}.$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $f(n)=n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Πράγματι, για $n=1$, ισχύει: $f(1)=1$. Έστω ότι $f(k)=k$, για κάποιο $k\in\mathbb{N}^*$. Τότε θέτοντας $x=1,y=k$ στην (1), έχουμε $\frac{1+3k}{1+k}+\frac{k^3+3k^2}{k+1}=\frac{(k+1)^3}{f(k+1)}\Leftrightarrow\frac{(k+1)^3}{k+1}=\frac{(k+1)^3}{f(k+1)}\Rightarrow f(k+1)=k+1$.

Ασκήσεις για λύση

A73. (α) Να λύσετε στους μη αρνητικούς ακέραιους την εξίσωση: $3^x=x+2$.

(β) Βρείτε όλα τα ζεύγη (x,y) μη αρνητικών ακέραιων, για τα οποία οι αριθμοί $x+3^y$, $y+3^x$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι.

A74. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ισότητα:

$$f\big(f(y-x)-xf(y)+f(x)\big)=y\big(1-f(x)\big),\text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

A74. Δίνεται η ακολουθία $x_n:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, με $x_1=1$ και

$$x_{n+1}=\frac{x_1}{n+1}+\frac{x_2}{n+2}+\cdots+\frac{x_n}{2n},\text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}^*.$$

Θεωρούμε και την ακολουθία $y_n:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, με $y_n=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Να αποδείξετε ότι: (α) $2x_{n+1}^2<y_n$ και $y_{n+1}<\frac{2n+1}{2n+2}y_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

(β) $0<y_n<\sqrt{\frac{3}{2n+1}}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

ΙΙ. Αυτό το ξέρατε;

Σικελική-Δωρική διάλεκτος; και η **Ευκλείδεια Γεωμετρία**

[η απάντηση στο τέλος της στήλης]

ΙΙΙ. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα: Η "παραγωγική ηλικία" των μαθηματικών

προλεγόμενα δημοσιεύουμε αποσπάσματα από έργα δύο σημαντικών μαθηματικών:

α. του C.H. Hardy «Σκέψεις για τα Μαθηματικά», από το βιβλίο του «Η ΑΠΟΛΟΓΙΑ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ» (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1993).

β. του Moshè Flato «Η ισχύς των Μαθηματικών», (εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ, Αθήνα, 1993)

Αυτοί οι δύο συγγραφείς προσπαθούν να απαντήσουν στο ερώτημα: *"ποιά είναι η πιο παραγωγική ηλικία του μαθηματικού ";*

● Να τι γράφει ο C.H. Hardy:

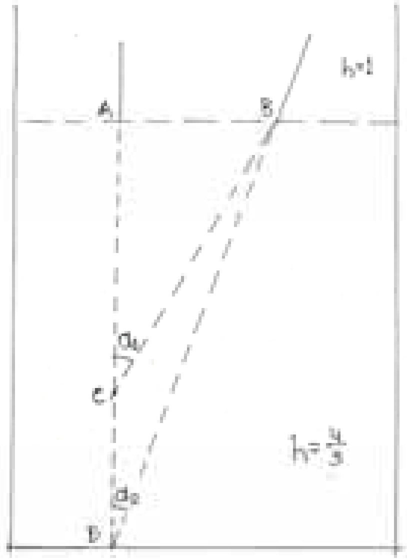
«Όταν νοιώθω **κατάθλιψη** και είμαι αναγκασμένος να ακούω υπερφίαλους και κουραστικούς ανθρώπους, ακόμη λέω στον εαυτό μου «Λοιπόν, μπόρεσα να κάνω κάτι που εσύ ποτέ δεν θα μπορούσες να κάνεις, δηλ. μα συνεργαστώ με τον Littlwood και τον RamanuJan σχεδόν επί ίσοις όροις». Σ’ αυτούς οφείλω μια ασυνήθιστα αργοπορημένη ωριμότητα: *ήμουν στην **καλύτερή** μου **απόδοση**, με λίγο περασμένα τα σαράντα όταν έγινα καθηγητής στην Οξφόρδη*. Από τότε υπέστην εκείνη την σταθερά φθίνουσα πορεία, που είναι η κοινή μοίρα των ηλικιωμένων , και ειδικότερα των ηλικιωμένων μαθηματικών. Ένας μαθηματικός μπορεί να είναι αρκετά ανταγωνιστικός μέχρι τα εξήντα του, αλλά δεν ωφελεί να περιμένουμε από αυτόν να έχει αυθεντικές ιδέες »

● Να τι γράφει ο Moshè Flato

«Αναμφισβήτητα, η ιστορία των Μαθηματικών είναι πλούσια σε πρώιμες ιδιοφυΐες. Ο Evarist Galois, που το θαυμάσιο έργο του (το οποίο συνιστά **αποφασιστική καμπή** για τα σύγχρονα Μαθηματικά) διακόπηκε τραγικά και ανόητα σε ηλικία είκοσι ετών, αποτελεί σίγουρα το πιο εξέχον παράδειγμα. Όσο συναρπαστικές και αν φαίνονται όμως παρόμοιες περιπτώσεις, δεν θα πρέπει να μας κάνουν να λησμονούμε ότι υπάρχουν επίσης και αντίστροφα παραδείγματα. Έχουμε δει μαθηματικούς που η δραστηριότητά τους αναπτύχθηκε με σχετική χρονική καθυστέρηση, ενώ σε άλλους η δημιουργικότητα της νιότης τους προεκτάθηκε και στην ωριμότητα. Εντούτοις, ισχύει στατιστικά η παρατήρηση πως οι μεγάλες ανακαλύψεις επιτεύχθηκαν ή διαμορφώθηκαν ως επί το πλείστον προ της ηλικίας των τριάντα ετών. Η παρατήρηση ισχύει μάλιστα ακόμη περισσότερο για τη Φυσική, σε αντίθεση με αυτό που πιστεύεται γενικώς. Εξάλλου από καταστατική δέσμευση, το μετάλλιο ***Fields*** μπορεί να δοθεί μόνο σε μαθηματικό ηλικίας κάτω των σαράντα ετών (που αναμένονται μόνο δύο έως τέσσερα σε κάθε Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών, που πραγματοποιείται κάθε τέσσερα χρόνια)»

2ο θέμα: ***Η μαθηματική κατανόηση της Φύσης (του Vladimir Igorevich Arnold)***
[Μετάφραση: Ανδρομάχη Σπανού, Επιστημονική επιμέλεια: Γιώργος Λ. Ευαγγελόπουλος, Αντώνης Δ. Μελάς, Ελευθ. Ν.Οικονόμου] ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, 2019

«Βάθος νερού και καρτεσιανή επιστήμη»



«Κατά ποιο ποσοστό στο βάθος ενός δοχείου γεμάτου με νερό πάνω σε ένα τραπέζι φαίνεται σε έναν παρατηρητή που το κοιτάζει από ψηλά μικρότερο από πραγματικά είναι;»

απάντηση

υπόμνηση: $\tan\alpha_1$, εφαπτομένη της γωνίας α_1
Τα τρίγωνα BAC και BAD είναι ορθογώνια, οπότε

$$|AB|=|AC|\tan\alpha_1 = |AD|\tan\alpha_2$$

Για μικρή γωνία πρόσπτωσης α_1, έχουμε:

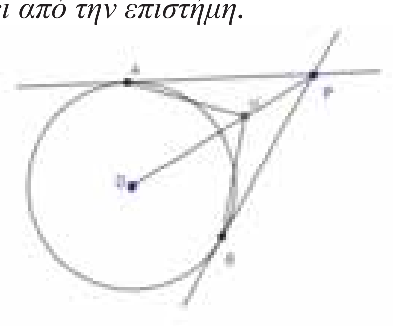
$$|AD| \,/\, |AC| = (\tan\alpha_1)/(\tan\alpha_2) \approx (\sin\alpha_1)/(\sin\alpha_2) = n = 4/3$$

και συνεπώς το φαινόμενο βάθος |AC| *είναι κατά ένα τέταρτο μικρότερο από το πραγματικό βάθος* |AD|.

Σχόλια: *Ο Καρτέσιος θα έπρεπε να είχε ρίξει μια ματιά σε αυτό το δοχείο προτού ισχυριστεί ότι το φως διαδίδεται στο νερό κατά 30% ταχύτερα από ότι στον αέρα.*

Κατέληξε σ΄ αυτό το συμπέρασμα επειδή γνώριζε ότι ο ***ήχος διαδίδεται*** *στο νερό* ***ταχύτερα*** *απ' ότι στον αέρα(περίπου 5 φορές ταχύτερα)*
Τα συμπεράσματα που εξάγονται με βάση τέτοιες επαγωγικές αναλογίες είναι πολύ επισφαλή και θα πρέπει πάντοτε να ελέγχονται πειραματικά. Ο ***Καρτέσιος****, όμως, δήλωσε με κάθε επισημότητα ότι η επιστήμη είναι μια ακολουθία επαγωγικών συμπερασμάτων από αυθαίρετα αξιώματα, και η πειραματική επαλήθευση αυτών των αξιωμάτων δεν ανήκει στην επιστήμη(αν και θα μπορούσε να είναι χρήσιμη για την οικονομία της αγοράς).*
Από τις αρκετές δεκάδες παρόμοιες «αρχές» του Καρτέσιου η πιο επικίνδυνη είναι η ακόλουθη: ***«το κράτος θα έπρεπε αμέσως να απαγορεύσει όλες τις άλλες μεθόδους διδασκαλίας εκτός από τη δική μου, επειδή μόνο αυτή η μέθοδος είναι πολιτικά ορθή παρακολουθώντας τα μαθήματά μου, οποιοσδήποτε ολιγόνους θα προχωρήσει τόσο γρήγορα όσο και μια τέτοια ιδιοφυΐα, ενώ με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο διδασκαλίας το ταλέντο ωφελεί τον μαθητή»***

Σύμφωνος προς τις αρχές του ο Καρτέσιος εξοβέλισε από τη γεωμετρία τα σχήματα τα οποία, από τη μία,είναι ίχνη πειραμάτων που περιλαμβάνουν σχεδίαση ευθειών και κύκλων, ενώ από την άλλη, είναι χώρος για φαντασία, την οποία ο Καρτέσιος προσπαθούσε να εξαλείψει από την επιστήμη.



Ο πρώην Γάλλος πρόεδρος Ζακ Σιράκ σε μια ομιλία του είπε: [στις 12 Ιούνη 2008] ότι ***«λόγω αυτών των χαρακτηριστικών της καρτεσιανής επιστήμης μίσησε τα Μαθηματικά από την παιδική του ηλικία»****.*

Όμως στη συνέχεια πρόσθεσε: ***«αν και μάλλον, ισχύει για τα γαλλικά Μαθηματικά, αυτά των Bourkaki»****.*

Στη Ρωσία κανείς δεν πιστεύει στη θεωρία του Καρτέσιου, σύμφωνα με την οποία το φως διαδίδεται το νερό ταχύτερα απ' ότι στον αέρα. Σε αντάλλαγμα η εκπληκτική θεωρία του για το ουράνιο τόξο, είναι στη Ρωσία πιο γνωστή απ' ότι στη Γαλλία».

3ο θέμα: *ένα πρωτότυπο έμμετρο πρόβλημα Αριθμητικής των παππούδων σας και το μαθηματικό βάθος που κρύβει η λύση του (του Πέτρου Σοφιανού)*:

το πρόβλημα: ***Αν πρέπει με 100 ευρώ, 100 πουλιά να πάρω, με 5 ευρώ τον κόκορα , με 3 την κοτούλα και με 1 ευρώ παίρνω μαζί τα τρία κλωσοπούλια. Πόσα πουλιά απ' τρία αυτά είδη θα αγοράσω;***

σημείωση Π. Σοφιανού: Το πρόβλημα αυτό μου το έθεσε κάποιος **τυφλός** συμπατριώτης μου (Σάμος), που μάλιστα για να μην ξενυχτίσω να βρω την απάντησή του, όπως μου είπε ότι έκαμε ο ίδιος, μου έδωσε και τη λύση που ήταν ... 8 κοκόρια, 11 κότες και 81 κλωσοπούλια.

Τούτη η λύση ήταν σωστή αφού 8+11+81=100 και 5x8+3x11+81 / 3 = 100 αλλά ήταν η μόνη λύση; Πως πρέπει να λύσω το πρόβλημα αυτό γενικά;

Το παραπάνω πρόβλημα , όπως το συζήτησα με συναδέλφους μαθηματικούς και θυμήθηκα ότι είναι γνωστό στους ερευνητές της Ιστορίας των Μαθηματικών και είναι ένα **Πρόβλημα Διοφαντικής Ανάλυσης ...**

Για να να βρω λοιπόν τις λύσεις με την διατύπωση συστήματος εξισώσεων θα το διατυπώσω ως εξής :

$$5x + 3y + z / 3 = 100 \quad (1)$$
$$x + y + z = 100 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα 2 μέλη της (1) επί 3 και αφαιρώντας από αυτήν κατα μέλη την δεύτερη εξίσωση , θα προκύψει την εξίσωση :

$14x + 8y = 200$ ή $y = 25 – 14 x / 8$ ή $y = 25 – 7 x / 4$

Οι ακέραιες (φυσικές) λύσεις αυτής είναι: x=4, y=18 και από την (2) βρίσκω z=78 και x=8, y=11 οπότε πάλι από την (2) βρίσκω z=81.

Οι επαληθεύσεις είναι εύκολες και άλλες ακέραιες λύσεις δεν υπάρχουν !

Σύμφωνα με την παραπάνω αυτή λύση ας προσπαθήσουμε να λύσουμε και να δώσουμε σε μαθητές Γ΄ γυμνασίου η Α΄ Λυκείου το παρακάτω διαφοροποιημένο πρόβλημα:

Αν πρέπει με 40 ευρώ, πουλιά 40 πάλι να πάρω, με 5 ευρώ τον κόκορα , με 3 την κότα και πάλι με το 1 ευρώ τα τρία κλωσοπούλια ... πόσα πουλιά απ' τρία αυτά είδη θα αγοράσω ;

Αν τέλος αντί των αριθμών 40 η 100 διατυπώναμε το πρόβλημα με 1000 ευρώ και 1000 κοτόπουλα , πόσες και ποιες λύσεις θα είχαμε ; Πως εντέλει γενικεύεται ένα τέτοιο πρόβλημα; Την απάντηση μπορεί να βρει κανείς πέρα από την σχολική η ιστορική βιβλιογραφία , ακόμη και με αναζήτηση στην google γράφοντας **Διοφαντική Ανάλυση!** Καλή συνέχεια και καλή έμπνευση!»

σημείωση σύνταξης: εμείς αυτού του είδους τα προβλήματα τα ονομάζουμε ***«λαϊκά προβλήματα»,*** αφού εμπνευστής είναι η ανώνυμη λαϊκή θυμοσοφία. Ο γράφων (στις αρχές της δεκαετίας του 1950) είχε την τύχη, να γνωρίσει ένα τέτοιο γεροντάκι που γνώριζε πολλά τέτοια προβλήματα.

4ο θέμα *Σκέψεις για τα Μαθηματικά*
από το βιβλίο του «Η ΑΠΟΛΟΓΙΑ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ»
(Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1993)

1. Μαθηματικά και Μουσική

Είναι γεγονός ότι υπάρχουν λίγα μόνο αντικείμενα μελέτης πιο δημοφιλή από τα Μαθηματικά. Οι περισσότεροι άνθρωποι τρέφουν κάποια εκτίμηση γι΄ αυτά, όπως ακριβώς οι περισσότεροι απολαμβάνουν έναν ευχάριστο μουσικό σκοπό. Και πιθανόν να υπάρχουν περισσότεροι που να ενδιαφέρονται πραγματικά για τα Μαθηματικά απ΄ ότι για τη μουσική. Τα φαινόμενα ίσως δείχνουν το αντίθετο, αλλά αυτό μπορεί εύκολα να εξηγηθεί. Η μουσική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ενεργοποιήσει το αίσθημα των μαζών, ενώ τα Μαθηματικά δεν μπορούν. Και ενώ η μουσική ανικανότητα αναγνωρίζεται (σωστά, χωρίς αμφιβολία) ως ελαφρώς επικριτέα, οι περισσότεροι φοβούνται τόσο πολύ το όνομα των Μαθηματικών ώστε είναι διατεθειμένοι, χωρίς να τους υποχρεώνει κανείς να υπερβάλουν τη μαθηματική τους ανοησία

2. *Μαθηματικά και σκάκι*

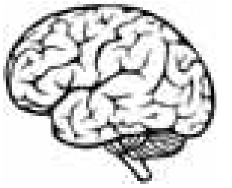
Υπάρχει μεγάλος αριθμός σκακιστών σε κάθε πολιτισμένη χώρα, στη Ρωσία σχεδόν όλος ο μορφωμένος πληθυσμός. Και κάθε σκακιστής μπορεί να αναγνωρίσει και να εκτιμήσει ένα «όμορφο»παιχνίδι ή πρόβλημα. Κι όμως, ένα σκακιστικά πρόβλημα είναι *απλούστατα* μια άσκηση πάνω στα καθαρά Μαθηματικά, (μια παρτίδα δεν αποτελεί εξ ολοκλήρου τέτοια άσκηση, αφού η ψυχολογία παίζει επίσης έναν ρόλο), και ο καθένας που αποκαλεί ένα σκακιστικό πρόβλημα «όμορφο» επικροτεί τη **μαθηματική ομορφιά**, ακόμη κι αν είναι ομορφιά ενός συγκριτικά χαμηλότερου επιπέδου. Με τα σκακιστικά προβλήματα εξυμνούνται τα Μαθηματικά.

3. *Μαθηματικά και παζλ*

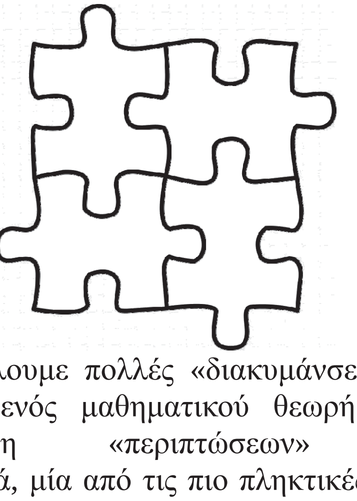
Μπορούμε να διδαχθούμε το ίδιο πράγμα – σ΄ ένα χαμηλότερο επίπεδο, αλλά για το ευρύτερο κοινό – από το **μπριτζ** ή ακόμη πιο χαμηλά, από τις στήλες με «σπαζοκεφαλιές» των εφημερίδων. Σχεδόν όλη η τόσο μεγάλη δημοτικότητά τους είναι ένας φόρος τιμής στην ελκυστική δύναμη των των στοιχειωδέστερων Μαθηματικών και οι καλύτεροι κατασκευαστές των παζλ, όπως Dudeney ή ο Caliban, ελάχιστα χρησιμοποιούν κάτι άλλο. Ξέρουν τη δουλειά τους, αυτό που θέλει το κοινό είναι ένα μικρό διανοητικό ερέθισμα, και τίποτε άλλο δεν παρέχει αυτό το ερέθισμα όσο τα Μαθηματικά...

4. *Η Αισθητική στα Μαθηματικά*

Μπορούμε να δεχτούμε ότι ως προς την ουσία, την σοβαρότητα, την σπουδαιότητα, το μαθηματικό θεώρημα έχει πράγματι συντριπτικό προβάδισμα. Είναι σχεδόν εξίσου προφανές για ένα εκπαιδευμένο μυαλό, ότι έχει επίσης μεγάλο **προβάδισμα** και ως προς την **ομορφιά**. Αλλά το προβάδισμα αυτό είναι πολύ πιο δύσκολο να ορισθεί ή να εντοπισθεί, μια και το κύριο μειονέκτημα του σκακιστικού προβλήματος είναι εμφανώς το «τετριμμένο» του χαρακτήρα του, ενώ η αντίθεση απ' αυτή την άποψη, με το μαθηματικό πρόβλημα, παρεμβάλλεται και διαταράσσει την περαιτέρω κρίση από καθαρά αισθητική πλευρά. Τί «**καθαρά αισθητικά**» ποιοτικά χαρακτηριστικά μπορούμε να διακρίνουμε σε θεωρήματα παρόμοια με του **Ευκλείδη** και του **Πυθαγόρα**; Δεν θα διακινδυνεύσω τίποτα περισσότερο από μερικές σκόρπιες παρατηρήσεις.



Και στα δύο θεωρήματα (και σ' αυτά φυσικά περιλαμβάνονται και οι αποδείξεις) υπάρχει ένας πολύ ψηλός **βαθμός απροσδόκητου** σε συνδυασμό με στοιχεία αναπόφευκτου και εξοικονόμησης. Η επιχειρηματολογία τους παίρνει μια παράξενη και εκπληκτική μορφή: τα όπλα που χρησιμοποιούνται φαίνονται απλώς παιδικά εν συγκρίσει με τ' αποτελέσματα που είναι μεγάλου βεληνεκούς. Αλλά δεν υπάρχει τρόπος διαφυγής από τα συμπεράσματα. Δεν υπάρχουν επιπλοκές εξ αιτίας λεπτομερειών – μια γραμμή επίθεσης είναι αρκετή σε κάθε περίπτωση. Και αυτό ισχύει επίσης και για τις αποδείξεις πολύ πιο δύσκολων θεωρημάτων, που για εκτιμηθούν πλήρως απαιτείται ένας αρκετά υψηλός βαθμός επαγγελματικής ικανότητας στην πράξη.



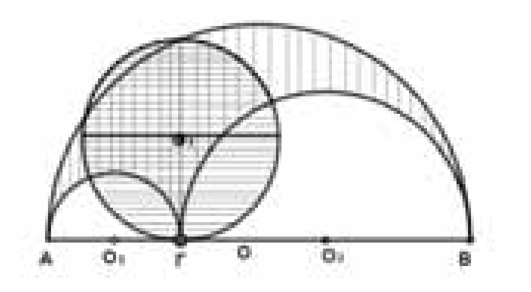
Δεν θέλουμε πολλές «διακυμάνσεις» στην απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος η απαρίθμηση «περιπτώσεων» είναι, πραγματικά, μία από τις πιο πληκτικές μορφές μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Μια μαθηματική απόδειξη πρέπει να μοιάζει με έναν απλό και ευδιάκριτο αστερισμό και με ένα νεφέλωμα διασκορπισμένο στον Γαλαξία μας.

5ο θέμα: *Δεκαπέντε θεωρήματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας, διατυπωμένα στην Σικελική Δωρική*

Το παρακάτω σημείωμα ακολουθεί το γλωσσικό ιδίωμα του Ε. Σ. Σταμάτη. Το έτος 1965 εκδόθηκε, από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, ένα βιβλίο του Ευάγγελου Σ. Σταμάτη [μεγάλος ερευνητής-σχολιαστής της αρχαίας Ελληνικής Μαθηματικής Γραμματείας] με τίτλο «Ανακατασκευή του αρχαίου μαθηματικού κειμένου εις την σικελικήν **δωρικήν διάλεκτον**, δεκαπέντε θεωρημάτων του **Αρχιμήδους**, τα οποία σώζονται εις την Αραβικήν».

Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει δεκαπέντε θεωρήματα του Αρχιμήδους που δεν σώθηκαν στα ελληνικά, αλλά στα αραβικά, από τα οποία μεταφράστηκαν στα λατινικά και πρωτοεκδόθηκαν στο Λονδίνο το 1659. Στον πρόλογο του βιβλίου αναφέρεται η συγκεκριμένη έκδοση: «Εις τον δεύτερον τόμον της δευτέρας εκδόσεως των έργων του Αρχιμήδους περιέχονται 15 θεωρήματα εις την λατινικήν γλώσσαν υπό τον τίτλον Liber Assumptorum (Ββλίον Λημμάτων)».

ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ ΣΤΗΝ:



α. Σικελική Δωρική (πολυτονική)

Εἴ κα ὲν ἁμικυκλίῳ σημείον τι επί τας διαμέτρου ᾖ, γραφέων τι δε από των τμαμάτων τας διαμέτρου δύο ἁμικύκλια εντός, αναστακῇ δε από του ληφθέντος σαμείου ευθεία ποτί τᾷ περιφερείᾳ τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, σχάμα το υπό των τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, ἲσον ἐστι κὺκλῳ, οὗ διάμετρο ἁ αναστακεῖσα κάθετος.

β. Πολυτονική Καθαρεύουσα

Ἐὰν ἐπί τῆς διαμὲτρου ἡμικυκλίου ληφθῆ σημεῖον τι γραφῶσι δὲ από τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ημικύκλια εντός, και ἀπό τοῦ ληφθέντος σημείου ὑψωθεῖ κάθετος ἐπί τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς περιφερείας, το σχῆμα το περιεχόμενον ὑπό τῶν τριῶν τόξων, ισοῦται με κύκλον τοῦ οποίου διάμετρος εἶναι ἡ ὑψωθεῖσα κάθετος.

γ. Μονοτονική Καθομιλουμένη

Εὰν πάνω στη διάμετρο ενός ημικυκλίου ληφθή σημείον τι, γραφώσι δε από τών τμημάτων της διαμέτρου δύο ημικύκλια εντός, και από του ληφθέντος σημείου υψωθεί κάθετος επί της διαμέτρου μέχρι της περιφέρειας, το σχήμα το περιεχόμενο από τα τρία τόξα, ισούται με κύκλο του οποίου διάμετρος είναι η υψωθείσα κάθετος.

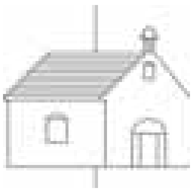
Η ΔΩΡΙΚΗ (Σικελική) ΠΟΛΥΤΟΝΙΚΗ

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω
Ά Έ Ή Ί Ϊ Ό Ύ Ϋ Ώ
Ἀ Ἁ Ἄ Ἅ Ἇ Ᾰ Ὰ ᾼ ᾈ ᾌ ᾍ
ᾏ ᾉ ᾍ ᾋ ᾎ
Ἀ Ἄ Ἂ Ἆ Ᾱ
Ἐ Ἑ Ἕ Ἓ Ὲ Ἐ Ἔ Ἒ
Ἠ Ἡ Ἥ Ἣ Ἧ Ὴ ῌ ᾙ ᾝ ᾛ ᾟ ᾘ ᾜ
ᾚ ᾞ Ἠ Ἤ Ἢ Ἦ
Ἰ Ἱ Ἵ Ἳ Ἷ Ῐ Ὶ Ἰ Ἴ Ἲ Ἶ Ῑ
Ὀ Ὁ Ὅ Ὃ Ὸ Ὀ Ὄ Ὂ Ῥ
Ύ Ὑ Ὕ Ὓ Ὗ Ῠ Ὺ Ῡ
Ὠ Ὡ Ὥ Ὣ Ὧ Ὼ ῼ ᾩ ᾭ ᾫ ᾯ ᾨ ᾬ
ᾪ ᾮ Ὠ Ὤ Ὢ Ὦ
α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ τ υ φ χ ψ ω ς

ά έ ή ί ϊ ΐ ό ύ ΰ ϋ ώ
ὰ ά ἀ ἁ ἂ ἃ ἄ ἅ ἆ ἇ ᾀ ᾁ ᾂ ᾃ ᾄ ᾅ ᾆ ᾇ ᾰ ᾱ ᾲ ᾳ ᾴ ᾶ ᾷ
ὲ έ ἐ ἑ ἒ ἓ ἔ ἕ
ὴ ή ᾐ ᾑ ᾒ ᾓ ᾔ ᾕ ᾖ ᾗ ῂ ῃ ῄ ῆ ῇἁ ἠ ἡ ἢ ἣ ἤ ἥ ἦ ἧ
ὶ ί ῐ ῑ ῒ ΐ ῆ ῗ ἰ ἱ ἲ ἳ ἴ ἵ ἶ ἷ
ὸ ό ὀ ὁ ὂ ὃ ὄ ὅ ῤ ῥ
ὺ ύ ὐ ὑ ὒ ὓ ὔ ὕ ὖ ὗ ῠ ῡ ῢ ΰ ῦ ῧ
ὼ ώ ὠ ὡ ὢ ὣ ὤ ὥ ὦ ὧ ᾠ ᾡ ᾢ ᾣ ᾤ ᾥ ᾦ ᾧ ῲ ῳ ῴ ῶ ῷ
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
% ϡ (*) - [] «» {} ‘ ' “ . , : ; ! ? ”
…- — † <=> + Ϛ

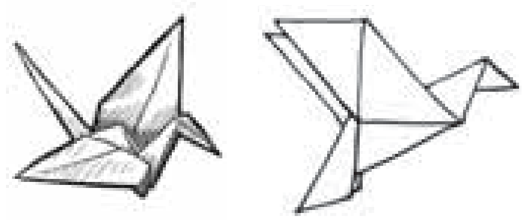
6ο θέμα. *διπλώνοντας χαρτί με την ιαπωνική τέχνη Ori Gami, (Όριγκάμι)*

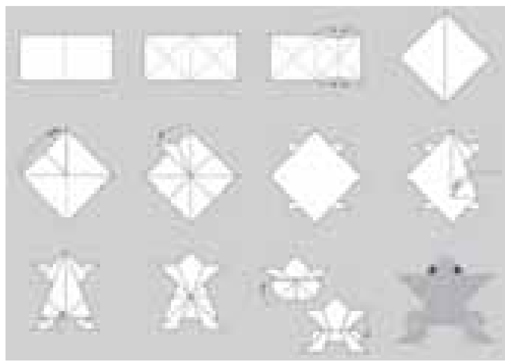
Το **οριγκάμι** (**origami** από τις ιαπωνικές λέξεις ***όρι*** και ***γκάμι***, που σημαίνουν δίπλωμα χαρτιού), είναι η καλλιτεχνία του διπλώματος χαρτιού, ενώ απαγορεύεται το κόψιμό του. Είναι επινόηση των Ιαπώνων. Το οριγκάμι χρησιμοποιεί το δίπλωμα για την κατασκευή πολλών θεμάτων.



Στο οριγκάμι εξασκούνταν ήδη από την εποχή Edo (1603-1867). Στο οριγκάμι το κόψιμο του χαρτιού ***απαγορεύεται***. Σε μία άλλη τέχνη διπλώματος χαρτιού, με το όνομα ***κιριγκάμι***, το κόψιμο του χαρτιού επιτρέπεται.

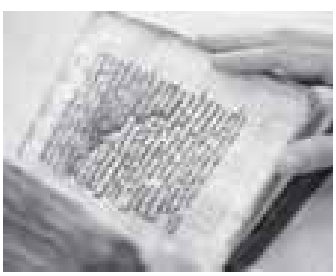
Το Οριγκάμι δεν χρησιμοποιείται ως εικαστική ***τέχνη*** και τρόπος διασκέδασης, αλλά έχει εφαρμογές και σε τομείς όπως τα Μαθηματικά, η Αρχιτεκτονική, η Ιατρική (ως μέθοδος θεραπείας) κ.ά. Το χαρτί που χρησιμοποιείται για το ΟΡΙΓΚΑΜΙ μπορεί να είναι οποιοδήποτε τετράγωνο χαρτί. Υπάρχουν όμως και ειδικά χαρτιά, τα οποία είναι πιο ανθεκτικά, αφού δεν σκίζονται κι έτσι παίρνουν εύκολα την επιθυμητή φόρμα.





V. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε";

Το βιβλίο «Ανακατασκευή του αρχαίου



κειμένου εις την σικελικήν δωρικήν διάλεκτον δεκαπέντε θεωρημάτων του Αρχιμήδους, τα οποία σώζονται εις την Αραβικήν» του Ευάγγελου Σ. Σταμάτη, που εκδόθηκε το 1965, περιλαμβάνονται δεκαπέντε θεωρήματα του Αρχιμήδη, που δεν σώθηκαν στα ελληνικά, αλλά στα αραβικά, από τα οποία μεταφράστηκαν στα λατινικά και πρωτοεκδόθηκαν στο Λονδίνο το 1659.

[Archimedis opera omnia vol. II. p. 510-525, J. L. Heiberg, 1913, B. G. Teubner]

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις εξισώσεων και προόδων

Γιοβάνης Γεώργιος – Κακαφλικας Κωνσταντίνος – Καρδασης Θανάσης

Άσκηση 1: Να λύθουν οι εξισώ σεις

α) $x^2-4x+3=0$.

β) $x^2-4|x|+3=0$.

γ) $x^4-4x^2+3=0$

δ) $(x-1)^2-4|x-1|+3=0$.

ε) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+3=0$.

στ) $x-1-4\sqrt{x-1}+3=0$.

ζ) $\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$.

Λύση: α) Η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού $x^2-4x+3=0$. Έχουμε $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4>0$. Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις: $x_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$,

$x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$.

β) $x^2-4|x|+3=0$. Ισχύει $x^2=|x|^2$, άρα η εξίσωση γίνεται $|x|^2-4|x|+3=0$. Θέτουμε $|x|=y\geq0$, άρα $y^2-4y+3=0\Leftrightarrow y=3$ ή $y=1$. Για $y=3$: $|x|=3\Leftrightarrow x=\pm3$, για $y=1$: $|x|=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

γ) $x^4-4x^2+3=0$. Ισχύει $x^4=\left(x^2\right)^2$, άρα $\left(x^2\right)^2-4x^2+3=0$. Θέτουμε $x^2=\omega\geq0$, άρα $\omega^2-4\omega+3=0\Leftrightarrow\omega=3$ ή $\omega=1$.
Για $\omega=3: x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$, για $\omega=1: x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

δ) $(x-1)^2-4|x-1|+3=0$.

Ισχύει $(x-1)^2=|x-1|^2$, άρα $|x-1|^2-4|x-1|+3=0$. Θέτουμε $|x-1|=\alpha\geq0$, άρα $\alpha^2-4\alpha+3=0\Leftrightarrow\alpha=3$ ή $\alpha=1$.

Για $\alpha=3: |x-1|=3\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=3\\ \text{ή}\\ x-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ \text{ή}\\ x=-2\end{cases}$,

για $\alpha=1: |x-1|=1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=1\\ \text{ή}\\ x-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ \text{ή}\\ x=0\end{cases}$.

ε) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+3=0$. Πρέπει $x\neq0$.

Θέτουμε $x-\frac{1}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$, άρα $\lambda^2-4\lambda+3=0\Leftrightarrow\lambda=3$ ή $\lambda=1$.

Για $\lambda=3: x-\frac{1}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x-1=0$.

Έχουμε $\Delta=13>0$. Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις: $\lambda_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ δεκτή, $\lambda_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ δεκτή.

Για $\lambda=1: x-\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0$. Έχουμε $\Delta=5>0$. Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις: $\lambda_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ δεκτές.

στ) $x-1-4\sqrt{x-1}+3=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}\right)^2-4\sqrt{x-1}+3=0$, με $x-1\geq0\Leftrightarrow x\geq1$. Θέτουμε $\sqrt{x-1}=\kappa\geq0$, άρα $\kappa^2-4\kappa+3=0\Leftrightarrow\kappa=3$ ή $\kappa=1$.
Για $\kappa=3: \sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow x-1=9\Leftrightarrow x=10$ δεκτή, για $\kappa=1: \sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$ δεκτή.

ζ) $\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-x}\Leftrightarrow\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x\cdot(x-1)}$.

Ε.Κ.Π: $x\cdot(x-1)\neq0\Leftrightarrow x\neq0$ και $x\neq1$. Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε:
$3x^2-x-2x+2=2x^2+x-1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, άρα $x_1=1$ απορρίπτεται, $x_2=3$ δεκτή.

Άσκηση 2: Δίνονται οι εξισώσεις:

$\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^6+1\right)=0$ **(1) και** $2x^2-x-1=0$ **(2).**

α) Να λυθεί η εξίσωση (1).

β) Να λυθεί η εξίσωση (2).

Έστω α η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης (1) και β η ακέραια ρίζα της εξίσωσης (2). Δίνεται επιπλέον ότι οι αριθμοί x_1,α,x_2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί x_2,β,x_1 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

γ) Να βρείτε την εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ως ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2.

Λύση

α) Έχουμε $\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^6+1\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4\\ \text{ή}\\ x^6=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm2\\ \text{ή}\\ \text{αδύνατη}\end{cases}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $x\pm2$.

β) Βρίσκουμε την διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-1)=9>0.$$

Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$x_1=\frac{1-\sqrt{9}}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1+\sqrt{9}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

γ) Από υπόθεση οι αριθμοί x_1,α,x_2. Είναι $\alpha=-2$, ως η μικρότερη λύση της εξίσωσης και $\beta=1\in\mathbb{Z}$. Οι αριθμοί $x_1,-2,x_2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου άρα ισχύει

$$-2=\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow x_1+x_2=-4\Leftrightarrow S=-4.$$

Επίσης οι αριθμοί x_2,β,x_1 ή $x_2,1,x_1$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου άρα ισχύει

$$1^2=x_1\cdot x_2\Leftrightarrow x_1\cdot x_2=1\Leftrightarrow P=1.$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$x^2-S\cdot x+P=0\Leftrightarrow x^2+4x+1=0.$$

Άσκηση 3: α) Να λυθεί η εξίσωση

$$\left(x^2-x\right)\cdot(x-3)-5\cdot(x-1)\cdot(x-3)=0.$$

Δίνεται επιπλέον ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προόδου.

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.

γ) Να βρεθεί ποιος όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με 2023.

δ) Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό πλήθος των πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου ώστε το άθροισμα τους να μην υπερβαίνει τον αριθμό 626.

Λύση: α) Έχουμε

$$\left(x^2-x\right)\cdot(x-3)-5\cdot(x-1)\cdot(x-3)=0\Leftrightarrow$$

$$x\cdot(x-1)\cdot(x-3)-5\cdot(x-1)\cdot(x-3)=0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)=0\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=5.$$

Επειδή οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προόδου προκύπτει ότι $\alpha_1=1,\ \alpha_2=3,\ \alpha_3=5$ με τη διαφορά $\omega=2$.

β) Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S_{20}=\frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]=\frac{20}{2}\cdot(2\cdot1+19\cdot2)=400.$$

γ) Θέλουμε να ισχύει η ισότητα

$$\alpha_\nu=2023\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=2023\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow1+(\nu-1)\cdot2=2023\Leftrightarrow2\nu-2=2022\Leftrightarrow\nu=1012.$$

δ) Πρέπει $S_\nu\le626\Leftrightarrow\frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]\le626\Leftrightarrow$

$$\frac{\nu}{2}\cdot2\cdot\left(1+(\nu-1)\right)\le626\Leftrightarrow\nu^2\le626\Leftrightarrow|\nu|\le25{,}019$$

με $\nu\in\mathbb{N}$. Άρα οι 25 πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα που δεν υπερβαίνει τον αριθμό 626 .

Άσκηση 4: Δίνονται οι αριθμοί $\frac{\alpha^2}{\beta},\alpha^2,\alpha^2\cdot\beta$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $\beta\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των τριών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\alpha^2}{\beta},\alpha^2\cdot\beta$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $\beta\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $x^2-32x+256=0$.

Λύση: α) Οι αριθμοί $\frac{\alpha^2}{\beta},\alpha^2,\alpha^2\cdot\beta$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\left(\alpha^2\right)^2=\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\alpha^2\cdot\beta\Leftrightarrow\alpha^4=\alpha^4$, που ισχύει.

β) Είναι $\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\alpha^2\cdot\alpha^2\cdot\beta=\alpha^6>0$, αφού $\alpha\neq0$.

γ) Έστω ότι οι αριθμοί $\frac{\alpha^2}{\beta},\alpha^2\cdot\beta$ αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $x^2-32x+256=0$. Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta θα ισχύει:

$S=32\Leftrightarrow x_1+x_2=32\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha^2\cdot\beta=32$ (1) και

$P=256\Leftrightarrow x_1\cdot x_2=256\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\alpha^2\cdot\beta=256\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha^4=256\Leftrightarrow\alpha^2=16$ (2). Από (1), (2) έχουμε

$$\frac{16}{\beta}+16\cdot\beta=32\Leftrightarrow16+16\beta^2=32\beta\Leftrightarrow\beta^2-2\beta+1=0$$

$\Leftrightarrow(\beta-1)^2=0$ οπότε β=1, που είναι άτοπο αφού $\beta\neq1$ από υπόθεση. Άρα οι $\frac{\alpha^2}{\beta},\alpha^2\cdot\beta$ δεν αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $x^2-32x+256=0$.

Άσκηση 5: α) Δίνεται η $A=\frac{1-2x^2}{x-x^2}-\frac{1}{x-1}$.

Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Α.

β) Να λυθεί η εξίσωση $|A|=0$.

γ) Αν $\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{4x^2},\ \gamma=\frac{-x}{x+1}$ με $x\neq-1,\ x\neq0$. Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του x ώστε οι παραπάνω αριθμοί με τη σειρά που δίνονται να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Λύση: α) Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει:

$x-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\cdot(1-x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και
$1-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.
Επίσης $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Άρα $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$

β) Για $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ ισοδύναμα έχω

$$|A|=0 \Leftrightarrow A=0 \Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{x-x^2}-\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{x(1-x)}-\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{x(1-x)}+\frac{1}{1-x}=0.$$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών με Ε.Κ.Π τη παράσταση $x\cdot(1-x)\neq 0$ προκύπτει η εξίσωση $-2x^2+x+1=0$. Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot(-2)\cdot 1=9>0$, οπότε οι δύο πραγματικές και άνισες ρίζες της εξίσωσης είναι: $x_1=\frac{-1-3}{-4}=1$ δεκτή, $x_2=\frac{-1+3}{-4}=-\frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

γ) Οι αριθμοί α,β,γ διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{4x^2}=1+\frac{-x}{x+1}$.

Για $x\neq 0$ και $x\neq -1$ έχουμε

$$2\cdot\frac{1}{4x^2}=1+\frac{-x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2}=\frac{x+1-x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x^2}=\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow 2x^2=x+1 \Leftrightarrow -2x^2+x+1=0,$$

που σύμφωνα με το **ερώτημα β** έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1=-\frac{1}{2}$ και $x_2=1$. Για $x=1$ οι αριθμοί $\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{4},\ \gamma=-\frac{1}{2}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega=-\frac{3}{4}$.

Για $x=-\frac{1}{2}$ οι αριθμοί $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1$ προφανώς δεν αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, άρα $x=1$.

Άσκηση 6: Έστω α,β τα μήκη των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου και Ε το εμβαδόν του. Επίσης δίνεται ότι οι αριθμοί α, Ε ,β με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι Ε=2.

Επιπλέον για επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι για τους αριθμούς α, β ισχύει β–α=1:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\alpha-4=0$.

γ) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\mathbf{A=\frac{E}{x_1}+\frac{E}{x_2},\quad B=|x_1-x_2|,\quad \Gamma=\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}},$$ **όπου x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος β και Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου.**

Λύση: α) Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E=\frac{\alpha\cdot\beta}{2} \Leftrightarrow 2E=\alpha\cdot\beta$ (1). Επειδή οι αριθμοί α, Ε, β με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι $E^2=\alpha\beta$ (2). Από (1),(2) $E^2=2E \Leftrightarrow E=0$ απορρίπτεται ή $E=2$ δεκτή.

β) $E=2 \Leftrightarrow \frac{\alpha\cdot\beta}{2}=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=4$ και $\beta-\alpha=1 \Leftrightarrow \beta=\alpha+1$.
Οπότε $\alpha\cdot(\alpha+1)=4 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-4=0$.

γ) Επειδή x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha^2+\alpha-4=0$ σύμφωνα με τους τύπους του Vieta ισχύουν οι σχέσεις $x_1+x_2=-1\ldots(3)$ και $x_1\cdot x_2=-4\ldots(4)$.

$$A=\frac{E}{x_1}+\frac{E}{x_2}=\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}=\frac{2\cdot(x_1+x_2)}{x_1\cdot x_2}=\frac{2\cdot(-1)}{-4}=\frac{1}{2},$$

λόγω των (3) και (4).

$$B^2=|x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1\cdot x_2=$$
$$=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2-2x_1\cdot x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=$$
$$=1+16=17 \Leftrightarrow B=\sqrt{17}$$

$$\Gamma=\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)\cdot(x_1^2+x_2^2-x_1\cdot x_2)}{(x_1\cdot x_2)^2}=$$
$$=\frac{(-1)\cdot\left[(-1)^2-3(-4)\right]}{(-4)^2}=-\frac{13}{16}$$

Άσκηση 7: Σε μία αριθμητική πρόοδο α_ν ο τέταρτος όρος της ισούται με 14 και ο ένατος όρος της ισούται με 34.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1=2$ και ω=4.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου α_ν.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\mathbf{A=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+4)+\ldots+(\alpha_{20}+2^{19})}.$$

δ) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $x-8\sqrt{x-2}+10=0$, με $x\geq 2$ αποτελούν όρους της αριθμητικής προόδου α_ν.

Λύση: α) Ισχύουν

$$\begin{cases}\alpha_4=14\\ \alpha_9=34\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+3\omega=14\\ \alpha_1+8\omega=34\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=14-3\omega\\ 14-3\omega+8\omega=34\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=14-3\omega\\ 5\omega=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=2\\ \omega=4\end{cases}$$

β) Είναι $S_{20}=\frac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega]=\frac{20}{2}\cdot(2\cdot 2+19\cdot 4)=800$.

γ) $A=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+4)+...+(\alpha_{20}+2^{19})$

$A=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{20}+1+2+4+...+2^{19}$

$A=S_{20}+1+2^1+2^2+...+2^{19}=S_{20}+S'$,

όπου $S'=1+2^1+2^2+...+2^{19}$ άθροισμα 20 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=1$, λόγο $\lambda=2$ και πλήθος $\nu=20$.

Άρα $S'=\alpha_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}=1\cdot\frac{2^{20}-1}{2-1}=2^{20}-1$. Οπότε το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$A=S_{20}+S'=800+2^{20}-1=799+2^{20}.$$

δ) Η $x-8\sqrt{x-2}+10=0$, με $x\geq 2$ γράφεται $x-2-8\sqrt{x-2}+12=0\Leftrightarrow\sqrt{x-2}^2-8\sqrt{x-2}+12=0$.

Θέτουμε $\sqrt{x-2}=y\geq 0$, οπότε

$x-2-8\sqrt{x-2}+12=0\Leftrightarrow y^2-8y+12=0$.

Είναι $\Delta=16>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις:

$y_1=6$ και $y_2=2$, που είναι δεκτές. Άρα

$\sqrt{x-2}=6\Leftrightarrow x-2=36\Leftrightarrow x=38$,

$\sqrt{x-2}=2\Leftrightarrow x-2=4\Leftrightarrow x=6$.

Για να αποτελούν οι παραπάνω ρίζες όρους της αριθμητικής προόδου αρκεί να βρούμε ποιος όρος της ισούται με 6 και ποιος με 38. Λύνουμε τις:

$\alpha_\nu=6\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=6\Leftrightarrow 2+(\nu-1)\cdot 4=6\Leftrightarrow\nu=2$,

$\alpha_\nu=38\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=38\Leftrightarrow 2+(\nu-1)\cdot 4=38\Leftrightarrow\nu=10$.

Οπότε $\alpha_2=6$ και $\alpha_{10}=38$.

Άσκηση 8: Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-16x+\frac{4\alpha^2+4}{\alpha}=0 \ (1), \text{ όπου } \alpha>0.$$

α) Δείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E=\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $E\geq 4$**, για κάθε α>0.**

γ) Για ποια τιμή του α>0 το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου τριγώνου γίνεται ελάχιστο;

δ) Για ποια τιμή του α>0 οι αριθμοί με τη σειρά που δίνονται $S,\sqrt{2^7},P$ **είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1).**

Λύση: α) Έστω x_1,x_2 οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Επειδή x_1,x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1) ισχύει $x_1\cdot x_2=\frac{4\alpha^2+4}{\alpha}$ (2).

Είναι $E=\frac{x_1\cdot x_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(\alpha^2+1)}{\alpha}=\frac{2\cdot(\alpha^2+1)}{\alpha}$, α>0.

β) Για α>0 έχουμε $E\geq 4\Leftrightarrow\frac{2\cdot(\alpha^2+1)}{\alpha}\geq 4\Leftrightarrow 2\cdot(\alpha^2+1)\geq 4\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1\geq 0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2\geq 0$, που ισχύει.

γ) Η ελάχιστη τιμή του εμβαδού Ε είναι 4 άρα

$\frac{2\cdot(\alpha^2+1)}{\alpha}=4\Leftrightarrow\alpha^2+1=2\alpha\Leftrightarrow(\alpha-1)^2=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

δ) Έχουμε S=16 και $P=\frac{4\alpha^2+4}{\alpha}$.

Αφού οι αριθμοί με τη σειρά που δίνονται $S,\sqrt{2^7},P$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει $S\cdot P=\left(\sqrt{2^7}\right)^2\Leftrightarrow 16\cdot\frac{4\cdot(\alpha^2+1)}{\alpha}=2^7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^6\cdot(\alpha^2+1)=2^7\cdot\alpha\Leftrightarrow\alpha^2+1=2\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$.

Άσκηση 9: Δίνονται οι εξισώσεις $x^3=\alpha$ **,α>0 (1) και** $x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$ **(2), α>0.**

α) Να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2). Έστω ρ_1 **η ρίζα της εξίσωσης (1),** ρ_2 **η μικρότερη ρίζα και** ρ_3 **η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης (2).**

β) Αν οι αριθμοί ρ_1,ρ_2,ρ_3 **με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να βρείτε την τιμή του α>0.**

γ) Για $\alpha=2\sqrt{2}$**, να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου** β_1,β_2,β_3 **,... .όπου** $\beta_1=\rho_1^2$, $\beta_2=\rho_2^2$, $\beta_3=\rho_3^2$.

Λύση: α) Είναι $x^3=\alpha\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\alpha}$. Η εξίσωση $x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2>0$, άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις:

$x_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\alpha-\alpha}{2}=\alpha$,

$x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\alpha+\alpha}{2}=2\alpha$.

β) Από υπόθεση οι αριθμοί $\rho_1=\sqrt[3]{\alpha}$, $\rho_2=\alpha$, $\rho_3=2\alpha$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου , οπότε για α>0 ισχύει ότι $\rho_2^2=\rho_1\cdot\rho_3\Leftrightarrow\alpha^2=\sqrt[3]{\alpha}\cdot 2\alpha\Leftrightarrow\alpha=2\sqrt[3]{\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha^3=8\alpha\Leftrightarrow\alpha^2=8\Leftrightarrow\alpha=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

γ) $\beta_1=\rho_1^2=\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2=\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)^2=\left(\sqrt[6]{2^3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$,

$\beta_2=\rho_2^2=\alpha^2=8$, $\beta_3=\rho_3^2=(2\alpha)^2=4\alpha^2=4\cdot 8=32$.

Η γεωμετρική πρόοδος β_1, β_2, β_3,... έχει πρώτο όρο $\beta_1=2$ και λόγο $\lambda=\frac{\beta_2}{\beta_1}=4$.

Οπότε $S_{10}=\beta_1\cdot\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=2\cdot\frac{4^{10}-1}{4-1}=\frac{2}{3}\cdot(2^{20}-1)$.

Παραλληλόγραμμα και Τραπέζια

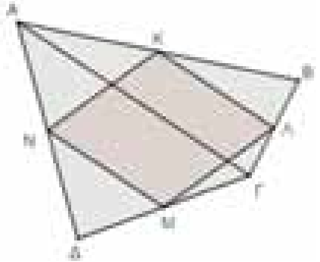
Κανάβης Χρήστος

Βασική Άσκηση

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών κάθε κυρτού τετράπλευρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

Προτεινόμενη διδακτική λύση

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Φέρουμε τη διαγώνιο του ΑΓ.



Επειδή Κ και Λ είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $ΚΛ//=\frac{ΑΓ}{2}$ (1).

Ομοίως επειδή Ν και Μ είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΓΔ ισχύει ότι $ΝΜ//=\frac{ΑΓ}{2}$ (2).

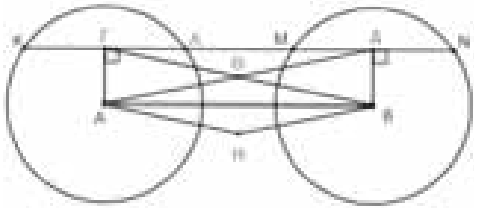
Από (1),(2) έχουμε $ΚΛ//=ΝΜ$, άρα το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Δραστηριότητα 1: Με χρήση του δυναμικού λογισμικού GeoGebra και με διάφορες δοκιμές, να ανακαλύψουν οι μαθητές/τριες πως το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει και όταν το τετράπλευρο δεν είναι κυρτό.

Δραστηριότητα 2: Με χρήση του δυναμικού λογισμικού Geogebra και με διάφορες δοκιμές, να ανακαλύψουν οι μαθητές/τριες, τι πρέπει να ισχύει για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ ώστε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ να είναι α) ορθογώνιο β) ρόμβος γ) τετράγωνο δ) τραπέζιο. Έπειτα να αποδείξουν τις εικασίες τους.

Υπόδειξη: Θα πρέπει οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ να είναι αντίστοιχα: α) κάθετες, β) ίσες, γ) κάθετες και ίσες, δ) δεν μπορεί να είναι τραπέζιο αφού αποδείξαμε πως είναι παραλληλόγραμμο.

Εφαρμογή 1. Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται δύο μη τεμνόμενοι ίσοι κύκλοι με ΚΛ=ΜΝ όπου τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι συνευθειακά σημεία.



Αν ΑΓ και ΒΔ τα αποστήματα των κύκλων και ΘΔΒΗ παραλληλόγραμμο να δείξετε ότι,

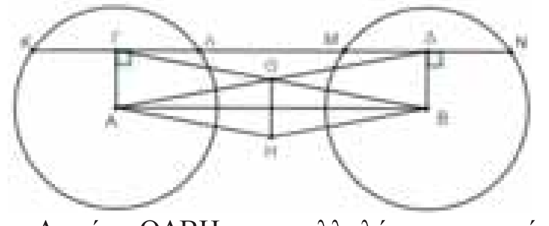
Α) Το τετράπλευρο ΓΘΗΑ είναι παραλληλόγραμμο.

Β) Το τετράπλευρο ΓΔΒΑ είναι ορθογώνιο.

Γ) Το τετράπλευρο ΑΘΒΗ είναι ρόμβος.

Δ) Αν Ε, Ζ, Π, Ρ είναι τα μέσα των ΑΘ, ΘΒ, ΒΗ και ΑΗ αντίστοιχα, να δείξετε πως το τετράπλευρο ΕΖΠΡ είναι ορθογώνιο.

Προτεινόμενη διδακτική λύση

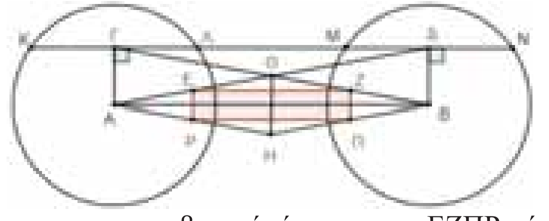


Α) Αφού ΘΔΒΗ παραλληλόγραμμο είναι $ΘΗ//=ΔΒ$. Εφόσον $ΑΓ\perp ΚΛ$ και $ΔΒ\perp ΜΝ$ ως αποστήματα θα είναι $ΑΓ//ΔΒ$ και $ΑΓ=ΔΒ$ ως αποστήματα ίσων χορδών ίσων κύκλων. Άρα $ΘΗ//=ΑΓ$, συνεπώς το ΓΘΗΑ είναι παραλληλόγραμμο.

Β) Είναι $ΑΓ//=ΔΒ$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΓΔΒΑ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $\hat{Γ}=90^o$ είναι ορθογώνιο.

Γ) Αφού ΓΘΗΑ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $ΑΗ=ΓΘ$. Όμως $ΓΘ=ΑΘ=ΘΔ=ΘΒ$ ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου ΓΔΒΑ. Επίσης έχουμε, $ΘΔ=ΗΒ$ άρα $ΑΘ=ΘΒ=ΒΗ=ΑΗ$ και συνεπώς το ΑΘΒΗ είναι ρόμβος αφού έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Δ)

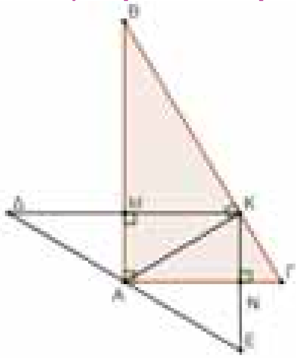


Σύμφωνα με τη βασική άσκηση το ΕΖΠΡ είναι παραλληλόγραμμο και αφού οι διαγώνιοι του ΑΘΒΗ είναι κάθετες το ΕΖΠΡ είναι ορθογώνιο.

Εφαρμογή 2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με την πλευρά ΒΓ να είναι η μεγαλύτερη. Φέρουμε το ύψος ΑΚ. Από το Κ φέρουμε ΚΝ και ΚΜ παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΚΜ παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΚΜ=ΜΔ και στην προέκταση της ΚΝ σημείο Ε ώστε ΚΝ=ΝΕ. Δίνεται ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά και ότι τα σημεία Δ, Κ και Ε είναι ομοκυκλικά.

Α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^0$.
Β) Να δείξετε ότι το ΕΓΒΔ είναι τραπέζιο.
Γ) Από το Κ φέρουμε παράλληλη στην ΒΔ και από το Δ παράλληλη στην ΒΚ που τέμνονται στο Θ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΒΚΘ είναι ρόμβος και ότι τα σημεία Β, Μ, Θ είναι συνευθειακά.

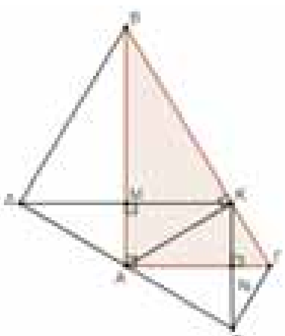
Προτεινόμενη διδακτική λύση



Α) Αφού τα σημεία Δ,Κ και Ε είναι ομοκυκλικά, είναι $AK = A\Delta = AE$ ως ακτίνες και συνεπώς $AK = \frac{\Delta E}{2}$, άρα το τρίγωνο ΔΚΕ είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{K}E = M\hat{K}N = 90^0$. Αφού $KM // A\Gamma$ και $KN // AB$ τότε θα είναι και $\hat{M} = \hat{N} = 90^0$. Άρα το ΜΚΝΑ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις γωνίες ορθές και επομένως είναι και $\hat{A} = 90^0$ άρα ΑΒΓ ορθογώνιο.

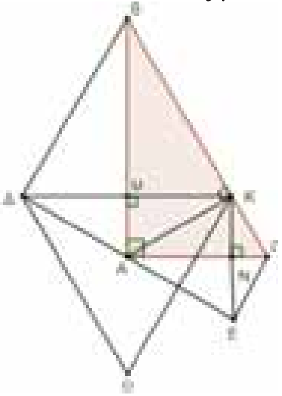
Β) Είναι $KE // AB$ άρα $A\hat{B}\Gamma = N\hat{K}\Gamma$ και $K\hat{E}A = M\hat{A}\Delta$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Επίσης η ΓΝ μεσοκάθετος της ΚΕ άρα το ΚΓΕ ισοσκελές και συνεπώς $N\hat{K}\Gamma = N\hat{E}\Gamma$. Επίσης ισχύει $\Delta\hat{B}A = \Delta\hat{B}M = M\hat{B}K = A\hat{B}K$. Συνεπώς στο τρίγωνο ΒΔΑ ισχύει

$$B\hat{\Delta}A = 180^o - \Delta\hat{B}A - B\hat{A}\Delta \Leftrightarrow$$
$$B\hat{\Delta}A = 180^o - N\hat{E}\Gamma - N\hat{E}A \Leftrightarrow \Gamma\hat{E}A + B\hat{\Delta}A = 180^o$$



Επομένως οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες $\Gamma\hat{E}A, B\hat{\Delta}A$, είναι παραπληρωματικές άρα ΓΕ // ΒΔ ενώ $\Delta E \nparallel B\Gamma$ (γιατί;) και επομένως τετράπλευρο ΕΓΒΔ είναι τραπέζιο.

Γ) Αφού $K\Theta // B\Delta$ και $\Delta\Theta // BK$ το τετράπλευρο ΔΒΚΘ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΚ η ΒΜ είναι διάμεσος και ύψος της ΔΚ. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $B\Delta = BK$.



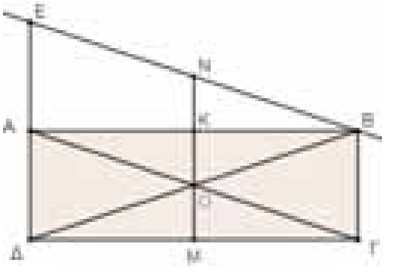
Επομένως το ΔΒΚΘ είναι παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Οπότε είναι ρόμβος. Είναι ΒΜ μεσοκάθετος της ΔΚ. Επίσης ΘΚ = ΘΔ άρα και το σημείο Θ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΔΚ, επομένως τα σημεία Β, Μ, Θ είναι συνευθειακά.

Εφαρμογή 3

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε παράλληλη ΒΕ στη διαγώνιο του ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ε.
Α) Να δείξετε ότι ΔΒΕ ισοσκελές.
Β) Να δείξετε ότι το ΕΒΓΑ είναι παραλληλόγραμμο.
Γ) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο και ότι η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{2}M\Gamma$.
Δ) Να δείξετε ότι το ΕΝΟΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Προτεινόμενη διδακτική λύση

Α) Αφού οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται άρα $\Gamma\hat{A}B = \Delta\hat{B}A$. Αφού επίσης είναι ΒΕ//ΑΓ είναι $\Gamma\hat{A}B = A\hat{B}E$ ως εντός εναλλάξ. Επομένως $\Delta\hat{B}A = A\hat{B}E$ και άρα ΑΒ διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}E$. Επίσης είναι $AB \perp E\Delta$. Συνεπώς αφού ΑΒ διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΔΒΕ, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



Β) Επίσης η ΒΑ είναι και διάμεσος του ΔΒΕ. Άρα Α μέσο της ΕΔ. Οπότε ΒΓ = ΑΔ = ΑΕ. Επίσης αφού ΕΔΒ ισοσκελές και οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, ισχύει ότι

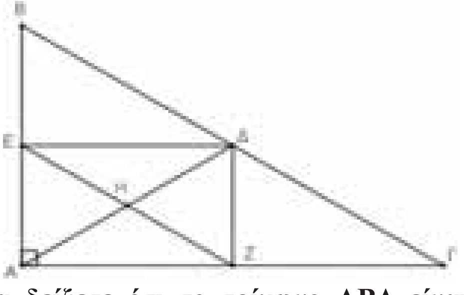
$EB = \Delta B = A\Gamma$. Συνεπώς το ΕΒΓΑ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
Γ) Το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι τραπέζιο διότι έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες τις ΒΓ, ΔΕ αφού ΒΓ // ΑΔ άρα και ΒΓ // ΕΔ και επίσης η ΓΔ δεν είναι παράλληλη της ΕΒ διότι, τότε το Ε θα ταυτιζόταν με το Α και άρα η ΒΕ δεν θα ήταν παράλληλη με την ΑΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΜΝ του τραπεζίου η οποία θα διέρχεται από το Ο. Τότε,

$$MN = \frac{B\Gamma + E\Delta}{2} = \frac{A\Delta + 2A\Delta}{2} = \frac{3A\Delta}{2}$$

Δ) Το τετράπλευρο ΕΝΟΔ είναι τραπέζιο αφού είναι ΝΜ // ΑΔ οπότε ΝΟ // ΕΔ και αφού ΕΒΔ είναι τρίγωνο η ΟΔ δεν είναι παράλληλη στην ΝΕ.

Επίσης έχουμε, $\Delta O = \frac{\Delta B}{2} = \frac{EB}{2} = EN$ άρα το ΕΝΟΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Εφαρμογή 4 . Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 60^0$, Δ μέσο της υποτείνουσας του ΑΒΓ και Ε και Ζ σημεία των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε ΕΗ = ΗΖ και ΑΗ = ΗΔ όπου Η το σημείο τομής των ΑΔ και ΕΖ σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.

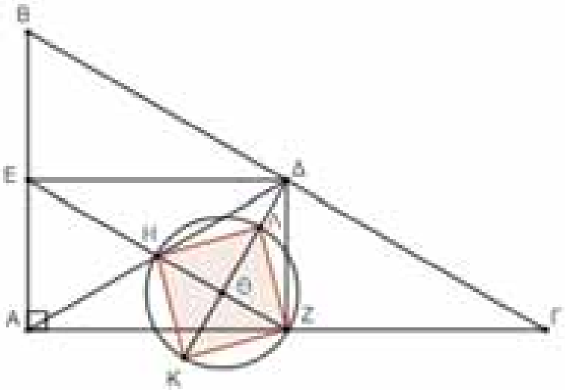


Α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.
Β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΔΖΑ είναι ορθογώνιο.
Γ) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.
Δ) Φέρουμε κύκλο με κέντρο το μέσο Θ του ΗΖ και ακτίνα ΘΖ. Από το Δ φέρουμε ευθεία που διέρχεται από το Θ και τέμνει τον κύκλο στα σημεία Λ και Κ με ΔΛ < ΔΚ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΗΛΖΚ είναι τετράγωνο.
Ε) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΗΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Προτεινόμενη διδακτική λύση

Α) Είναι ΑΒΓ ορθογώνιο και ΑΔ διάμεσος επομένως ΑΔ = ΒΔ = ΔΓ. Επίσης αφού είναι $\hat{B} = 60^o \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$.
Επομένως είναι ΑΒ = ΒΔ = ΔΓ, άρα
ΑΔ = ΔΒ = ΑΒ και άρα το ΒΔΑ ισόπλευρο.

Β) Αφού οι διαγώνιοι του ΕΔΖΑ διχοτομούνται (ΕΗ = ΗΖ = ΑΗ = ΗΔ) είναι παραλληλόγραμμο και εφόσον $\hat{A} = 90^o$ είναι ορθογώνιο.
Γ) Είναι Δ μέσο της ΒΓ και $E\Delta // AZ$ άρα Ε μέσο της ΑΒ. Ομοίως Ζ μέσο της ΑΓ. Επίσης αφού Δ μέσο της ΒΓ και Ζ μέσο της ΑΓ είναι ΔΖ // = ΒΕ άρα το ΒΔΖΕ παραλληλόγραμμο.
Δ) Είναι ΗΘ = ΘΖ αφού Θ μέσο του ΗΖ. Επίσης ΛΘ = ΘΚ ως ακτίνες του κύκλου άρα το ΗΛΖΚ παραλληλόγραμμο. Η γωνία $\Lambda\hat{H}K$ είναι εγγεγραμένη που βαίνει σε ημικύκλιο άρα $\Lambda\hat{H}K = 90^o$. Επομένως το ΗΛΖΚ είναι ορθογώνιο. Επίσης το τρίγωνο ΕΗΑ είναι ισόπλευρο διότι $A\hat{E}H = \hat{B} = 60^o$ ως εντός εκτός και επι ταυτά και αφού ΕΗ = ΑΗ είναι $A\hat{E}H = E\hat{A}H = 60^o$. Επομένως, ΑΗ = ΕΗ = ΕΑ.



Τέλος είναι ΔΗ = ΔΖ αφού ΔΗ = ΕΗ = ΕΑ = ΕΒ = ΔΖ άρα ΔΘ μεσοκάθετος του ΗΖ άρα οι διαγώνιοι του ΗΛΖΚ τέμνονται κάθετα άρα είναι τετράγωνο.
Ε) Το ΒΔΗΕ είναι τραπέζιο διότι αφού ΕΖ // ΒΔ άρα και ΕΗ // ΒΔ και η ΕΒ δεν είναι παράλληλη στη ΔΗ αφού τέμνονται στο Α. Επίσης είναι ΔΗ = ΕΒ άρα ισοσκελές τραπέζιο.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Βάζουμε το σχήμα βάζεις την άσκηση;

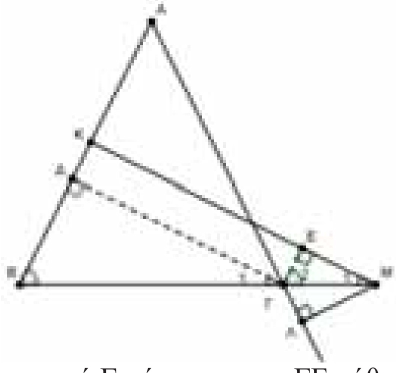
Τάξη: Α΄

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Χρήστος Τσιφάκης

ΑΣΚΗΣΗ 1η. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε σημείο Μ και φέρνουμε τις ΜΚ, ΜΛ κάθετες στις πλευρές ΑΒ , ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η διαφορά ΜΚ – ΜΛ = σταθερή.

ΛΥΣΗ.



Από την κορυφή Γ φέρνουμε την ΓΕ κάθετη στην ΜΚ και το ύψος ΓΔ του τριγώνου. Τότε έχουμε ότι το ΓΔΚΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε ΚΕ = ΓΔ. Αφού ΜΚ // ΓΔ

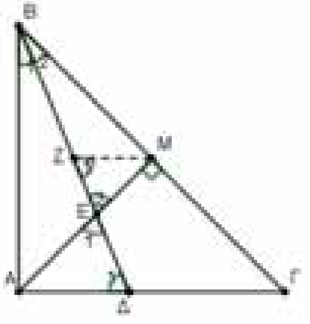
τότε $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = M\hat{\Gamma}\Lambda$

Άρα τα τρίγωνα ΜΛΓ , ΜΕΓ είναι ίσα, οπότε ΜΕ = ΜΛ. Έτσι έχουμε :

ΜΚ – ΜΛ = ΜΚ – ΜΕ = ΕΚ = ΓΔ = σταθερό.

ΑΣΚΗΣΗ 2η. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρνουμε την διάμεσό του ΑΜ και την διχοτόμο ΒΔ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι ΔΓ = 2 ΕΜ.

ΛΥΣΗ



Από το σημείο Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΓΑ που τέμνει την ΒΔ στο Ζ (μέσο του ΒΔ). Έτσι έχουμε $ZM = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\cdot ZM$ (1). Όμως

$\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1 = 90 - \frac{\hat{B}}{2} = 90 - 22{,}5 = 67{,}5^o$ και ομοίως

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90 - \frac{\hat{B}}{2} = 67{,}5^o$, άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{E}_2$

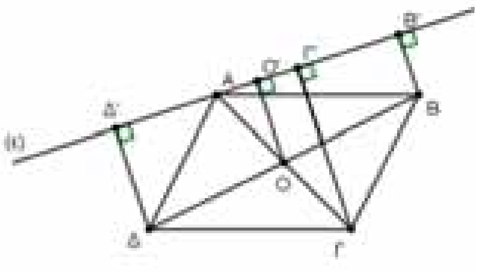
οπότε το τρίγωνο ΜΖΕ είναι ισοσκελές δηλαδή ΜΖ = ΜΕ και συνεπώς $\Delta\Gamma = 2\cdot EM$.

ΑΣΚΗΣΗ 3η. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και μια ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή Α. Φέρνουμε τις αποστάσεις ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ των κορυφών Β, Γ, Δ αντίστοιχα από την (ε). Να δείξετε ότι:

i) Αν οι κορυφές Β, Γ, Δ είναι από το ίδιο μέρος της (ε), τότε $\Gamma\Gamma' = BB' + \Delta\Delta'$

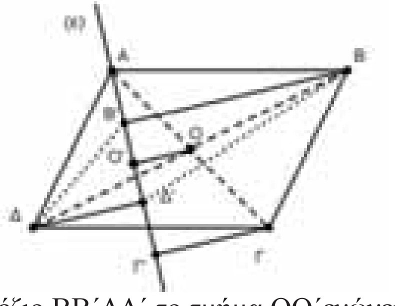
ii) Αν οι κορυφές Β, Δ είναι εκατέρωθεν της (ε), τότε $\Gamma\Gamma' = |BB' - \Delta\Delta'|$

ΛΥΣΗ.



i) Από το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου φέρνουμε την ΟΟ΄ κάθετη στην (ε). Εύκολα βρίσκουμε ότι ΒΒ΄Δ΄Δ είναι τραπέζιο με βάσεις ΒΒ΄, ΔΔ΄ και διάμεσο το τμήμα ΟΟ΄. Έτσι έχουμε $OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2}$ (1). Στο τρίγωνο ΑΓΓ΄ το τμήμα ΟΟ΄ ενώνει μέσα πλευρών (γιατί ;) άρα $OO' = \frac{\Gamma\Gamma'}{2}$ και με βάση την (1) προκύπτει το ζητούμενο.

ii) Έστω ότι οι κορυφές Β, Δ βρίσκονται εκατέρωθεν της (ε).



Στο τραπέζιο ΒΒ΄ΔΔ΄ το τμήμα ΟΟ΄ενώνει τα μεσα των διαγωνίων του, οπότε $OO' = \frac{|BB' - \Delta\Delta'|}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΓΓ΄ το τμήμα ΟΟ΄ ενώνει μέσα πλευρών (γιατί ;) άρα $OO' = \frac{\Gamma\Gamma'}{2}$ και με βάση την (1) προκύπτει το ζητούμενο.

Για τα παιδιά που ονειρεύονται…
για τα παιδιά που προσπαθούν

Μπακούρος Β. – Τσαβαρής Γ. – Τσιφάκης Χ

Ασκήσεις πολλαπλής επιλογής

1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$$

και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) 1 β) $6^{-\sqrt{5}}$ γ) 18 δ) 9

2) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=3^{2x-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}+9^{x+1}$$

αν γνωρίζετε ότι $3^x=2$ και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) $\frac{81}{2}$ β) 37 γ) $\frac{45}{2}$ δ) 25

3) Δίνεται η παράσταση

$$A=\frac{\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\beta}+\beta^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\alpha}}{\sqrt[6]{\alpha}+\sqrt[6]{\beta}}\quad \text{με } \alpha,\beta>0.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) $\sqrt[6]{\alpha\beta}$ β) $\sqrt[3]{\alpha\beta}$ γ) $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha\beta}}$ δ) $\frac{1}{\sqrt[6]{\alpha\beta}}$

4) Να βρεθούν οι τιμές του m ώστε να ισχύει

$$(m-1)^{-2\sqrt{3}}>(m-1)^{-3\sqrt{2}}$$

και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) $0<m<1$ β) $m>1$

γ) $1<m<2$ δ) $m>2$

5) Εάν $2^x+2^{-x}=m\geq 2$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$K=4^x+4^{-x}$$

και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) $m-2$ β) m^2+2 γ) m^2-2 δ) $m+2$

6) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$K=\log_\alpha\left(\alpha\sqrt[5]{\alpha\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}}}\right)\quad \text{με } 0<\alpha\neq 1$$

και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) $\frac{7}{10}$ β) $\frac{10}{7}$ γ) $\frac{13}{10}$ δ) $\frac{10}{13}$

7) Δίνονται $\alpha=\ln 3$ και $\beta=\ln 5$. Η παράσταση

$$K=\ln\frac{3}{4}+\ln\frac{4}{5}+\ln\frac{5}{6}+\ldots+\ln\frac{124}{125},$$

ισούται με

α) $\alpha-2\beta$ β) $\alpha+3\beta$ γ) $\alpha+2\beta$ δ) $\alpha-3\beta$

8) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$K=\ln(\varepsilon\varphi 1^\circ)+\ln(\varepsilon\varphi 2^\circ)+\ln(\varepsilon\varphi 3^\circ)+\ldots$$
$$+\ln(\varepsilon\varphi 87^\circ)+\ln(\varepsilon\varphi 88^\circ)+\ln(\varepsilon\varphi 89^\circ)$$

και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) $\frac{1}{2}$ β) $1+\sqrt{3}$ γ) 2 δ) 0

9) Δίνονται $\alpha,\beta>0$ για τους οποίους ισχύει $\alpha^2+\beta^2=98\alpha\beta$. Η παράσταση

$$K=\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{10}\right),$$

ισούται με α) $2\ln(\alpha\beta)$ β) $2\ln(10\alpha\beta)$

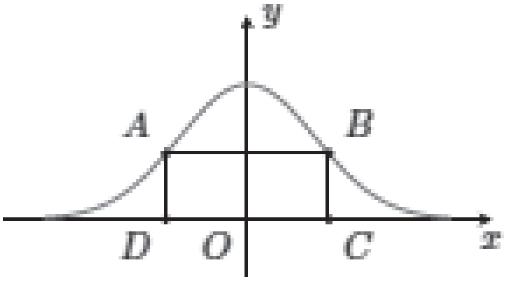
γ) $\frac{1}{2}\ln(10\alpha\beta)$ δ) $\frac{1}{2}\ln(\alpha\beta)$

10) Να βρεθούν οι τιμές του $m\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x^2-2x+m+1\right)$$

να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

α) $m=0$ β) $0<m<3$ γ) $m<-1$ ή $m>0$
δ) $m>0$



11) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{-2x^2}$. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABCD είναι εγγεγραμμένο στη γραφική παράσταση της f έτσι ώστε οι κορυφές A, B να είναι συμμετρικά σημεία ως προς τον y΄y και οι κορυφές C, D πάνω στον x΄x.

Το εμβαδόν του ABCD για $x=\frac{1}{2}$ είναι:

α) $\sqrt{e}$ β) $e^{\sqrt{2}}$ γ) $\frac{1}{e^{\sqrt{2}}}$ δ) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

12) Η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)$$

έχει πεδίο ορισμού το

α) $[-2,2)$ β) $(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$

γ) $(-\infty,-2]$ δ) $(1,+\infty)$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{-5^{\alpha\cdot x-1}+6\cdot 5^{x-1}-1}$$

για την οποία επιπλέον ισχύει ότι:

$$f(\eta\mu\frac{9\pi}{2})=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}-\eta\mu\frac{7\pi}{3}.$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha=2$.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{5}\cdot f(x)=\sqrt{3}$$

Λύση

α. Αφού

$$f(\eta\mu\frac{9\pi}{2})=f(\eta\mu(4\pi+\frac{\pi}{2}))=f(\eta\mu\frac{\pi}{2})=f(1) \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ενώ}$$

$$\eta\mu\frac{7\pi}{3}=\eta\mu\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

είναι $f(1)=0$ και με αντικατάσταση στον αρχικό τύπο

$$-5^{\alpha-1}+6-1=0\Leftrightarrow 5^{\alpha-1}=5\Leftrightarrow \alpha=2$$

β. Έχουμε:

$$-5^{2x-1}+6\cdot 5^{x-1}-1\geq 0\Leftrightarrow -5^{2x}+6\cdot 5^{x}-5\geq 0.$$

Το αντίστοιχο τριώνυμο έχει ρίζες τους 1 και 5, συνεπώς πρέπει

$$1\leq 5^{x}\leq 5\Leftrightarrow x\in[0,1].$$

γ. Έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{-5^{2x}+6\cdot 5^{x}-1}{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}\Leftrightarrow$$

$$-5^{2x}+6\cdot 5^{x}-1=3\Leftrightarrow 5^{2x}-6\cdot 5^{x}+4=0\Leftrightarrow$$

$$5^{x}=3-\sqrt{5} \quad \text{ή} \quad 5^{x}=3+\sqrt{5}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\ln(3-\sqrt{5})}{\ln 5} \quad ή \quad x=\frac{\ln(3+\sqrt{5})}{\ln 5},\ δεκτές.$$

Άσκηση 2η. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$\mathbf{f(x)=\alpha\cdot 3^x+\beta x-2,\ a\neq 0}.$$

Η γραφική της παράσταση περνά από την αρχή των αξόνων και τέμνει την $y=x+4$ στο σημείο με τετμημένη 1.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$.

β. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x+16$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\mathbf{f(\ln^2 x+\ln x)<18}$$

Λύση

α. Έχουμε:

$$f(x)=\alpha\cdot 3^x+\beta x-2 \text{ με } f(0)=0 \text{ και } f(1)=5,$$

άρα

$$\alpha-2=0 \text{ και } 3\alpha+\beta-2=5 \Leftrightarrow \alpha=2,\ \beta=1$$

β. Για $\alpha=2,\ \beta=1$ είναι:

$$f(x)=2\cdot 3^x+x-2.$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3^{x_1}<3^{x_2}\\ x_1<x_2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot 3^{x_1}<2\cdot 3^{x_2}\\ x_1-2<x_2-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$2\cdot 3^{x_1}+x_1-2<2\cdot 3^{x_2}+x_2-2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ. Πρέπει

$$f(x)<y\Leftrightarrow f(x)<x+16\Leftrightarrow$$

$$2\cdot 3^x+x-2<x+16\Leftrightarrow 3^x<9\Leftrightarrow x<2.$$

δ. $f(\ln^2 x+\ln x)<18=f(2)\xleftrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}}$

$$\ln^2 x+\ln x<2\Leftrightarrow \ln^2 x+\ln x-2<0\Leftrightarrow$$

$$\ln x<-2 \text{ ή } \ln x>1\Leftrightarrow$$

$$x<\frac{1}{e^2} \text{ ή } x>e \text{ και } x>0\Leftrightarrow$$

$$x\in(0,\frac{1}{e^2})\cup(e,+\infty).$$

Άσκηση 3η. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$\mathbf{f(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x},\ x\in\mathbb{R}.}$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
β. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f.
γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\mathbf{f(\ln^2 x)-f(\ln x^2)>f(2\sqrt{2}+3)+f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}-3}\right)}$$

Λύση

α. $$f(-x)=\frac{1-3^{-x}}{1+3^{-x}}=\frac{1-\frac{1}{3^x}}{1+\frac{1}{3^x}}=\frac{3^x-1}{3^x+1}=$$

$$-\frac{1-3^x}{1+3^x}=-f(x),\ \text{άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

β. Έχουμε:

$$f(x)=-\frac{3^x-1}{3^x+1}=-\frac{3^x+1-2}{3^x+1}=-1+\frac{2}{3^x+1}$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2\Rightarrow 3^{x_1}+1<3^{x_2}+1\Rightarrow$$

$$\frac{2}{3^{x_1}+1}>\frac{2}{3^{x_2}+1}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Επειδή

$$(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)=-1\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2}+3=-\frac{1}{2\sqrt{2}-3}\Leftrightarrow$$

$$f(2\sqrt{2}+3)=f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}-3}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(2\sqrt{2}+3)=-f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}-3}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(2\sqrt{2}+3)+f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}-3}\right)=0,$$

η ανίσωση γράφεται:

$$f(\ln^2 x)>f(2\ln x),\ \ x>0$$

και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα

$$\ln^2 x-2\ln x<0\Leftrightarrow 0<\ln x<2\Leftrightarrow x\in(1,e^2).$$

Άσκηση 4η. Δίνεται η το πολυώνυμο:

$$\mathbf{P(x)=x^3-4x^2-x\cdot\ln\alpha+6,\ \alpha>0.}$$

α. Να βρείτε το α ώστε το πολυώνυμο

$$\mathbf{g(x)=x^2+x\cdot\ln\alpha+\ln\alpha^2}$$

να είναι παράγοντας του $P(x)$.

β. Για $\alpha=\frac{1}{e}$, να λύσετε την ανίσωση:

$$\mathbf{P(1-e^x)<0.}$$

γ. Να βρείτε τις τιμές του $\omega\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right)$, ώστε η ποσότητα $(\eta\mu\omega-1)$ να είναι ρίζα του $P(x)$.

Λύση

α. Έχουμε:

$$P(x)=x^3-4x^2-x\cdot\ln\alpha+6=(x+p)g(x)=$$
$$(x+p)(x^2+x\cdot\ln\alpha+2\ln\alpha)=$$

$$x^3+x^2\cdot\ln\alpha+x\cdot 2\ln\alpha+px^2+px\cdot\ln\alpha+p\cdot 2\ln\alpha=$$

$$x^3+(p+\ln\alpha)\cdot x^2+(2\ln\alpha+p\ln\alpha)\cdot x+p\cdot 2\ln\alpha$$

Από την ισότητα των πολυωνύμων έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}p+\ln\alpha=-4\\ 2\ln\alpha+p\cdot\ln\alpha=-\ln\alpha\\ p\cdot 2\ln\alpha=6\end{array}\right\}\overset{\ln\alpha\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l}\ln\alpha=-1\\ p=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{e}\\ p=-3\end{array}\right\}$$

β. Για $\alpha=\frac{1}{e}$, έχουμε

$$P(x)=x^3-4x^2+x+6.$$

Λύνουμε την ανίσωση

$$P(x)<0\Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6<0\Leftrightarrow$$

$$(x-3)(x^2-x-2)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,3)$$

Άρα

$$P(1-e^x)<0\Leftrightarrow 1-e^x\in(-\infty,-1)\cup(2,3)\Leftrightarrow$$

$$1-e^x<-1\ \text{ή}\ 2<1-e^x<3\Leftrightarrow$$

$$e^x>2\ \text{ή}\ -2<e^x<-1\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2.$$

γ. $P(x)=0\Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6=0\Leftrightarrow$

$$x=-1,x=2,x=3.$$

- Αν $x=-1$ τότε $\eta\mu\omega-1=-1\Leftrightarrow$ $\eta\mu\omega=0\Leftrightarrow\omega=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$, και επειδή $\omega\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right)$, $\omega=2\pi$ ή $\omega=3\pi$.
- Αν $x=2$ τότε $\eta\mu\omega-1=2\Leftrightarrow\eta\mu\omega=3$, Αδύνατη.
- Αν $x=3$ τότε $\eta\mu\omega-1=3\Leftrightarrow\eta\mu\omega=4$, Αδύνατη.

Άσκηση 5η. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\mathbf{5^{3-3x^2}+5^{x^2+x-1}=5+5^{1+x-2x^2}}$$

Λύση

Θέτουμε $5^{3-3x^2}=\alpha>0$ και $5^{x^2+x-1}=\beta>0$, τότε

$$\alpha\cdot\beta=5^{2+x-2x^2}=5\cdot 5^{1+x-2x^2}$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$5^{3-3x^2}+5^{x^2+x-1}=5+5^{1+x-2x^2}\Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta=5+\frac{\alpha\beta}{5}\Leftrightarrow 5\alpha+5\beta-\alpha\beta-25=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-5)(5-\beta)=0\Leftrightarrow\alpha=5\ \text{ή}\ \beta=5.$$

Άρα

$$5^{3-3x^2}=5\Leftrightarrow 3-3x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ή $5^{x^2+x-1}=5\Leftrightarrow x^2+x-1=1\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow$

$$x=1 \text{ ή } x=-2$$

Άσκηση 6η. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\mathbf{2\cdot συν^2\left(\frac{x^2-x}{2}\right)=3^x+3^{-x}}$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$, για κάθε $\alpha>0$.

Άρα $2\cdot συν^2\left(\frac{x^2-x}{2}\right)=3^x+3^{-x}\geq 2\Leftrightarrow$

$$2\cdot συν^2\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\geq 2\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} συν^2\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\geq 1\\ συν^2\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\leq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$συν^2\left(\frac{x^2-x}{2}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$συν\left(\frac{x^2-x}{2}\right)=1 \text{ ή } συν\left(\frac{x^2-x}{2}\right)=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-x}{2}=2κπ \text{ ή } \frac{x^2-x}{2}=2κπ\pm π, κ\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-x}{2}=κπ, κ\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x^2-x-2κπ=0\overset{κ\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8κπ}}{2}, κ\in\mathbb{N}.$$

Άσκηση 7η. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\mathbf{3^{2x}-8\cdot 3^{x+\sqrt{x+4}}-9\cdot 9^{\sqrt{x+4}}>0}$$

Λύση

Πρέπει και αρκεί $x+4\geq 0\Leftrightarrow x\geq -4$.

Διαιρούμε με $9^{\sqrt{x+4}}>0$ και έχουμε:

$$3^{2\left(x-\sqrt{x+4}\right)}-8\cdot 3^{x-\sqrt{x+4}}-9>0$$

Αν θέσουμε $y=3^{x-\sqrt{x+4}}>0$, προκύπτει:

$$y^2-8y-9>0\Leftrightarrow y>9.$$

Άρα

$$3^{x-\sqrt{x+4}}>9\Leftrightarrow 3^{x-\sqrt{x+4}}>3^2\Leftrightarrow x-\sqrt{x+4}>2\Leftrightarrow$$

$$x-2>\sqrt{x+4}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-2>0\\ (x-2)^2>x+4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x-2>0\\ x^2-4x+4>x+4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-2>0\\ x^2-5x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x>5$$

Άσκηση 8η. Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=\frac{2^x}{2^x+2}}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι:

$$\mathbf{f(x)+f(2-x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}}$$

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράσταση:

$$\mathbf{K=f(0)+f\left(\frac{1}{10}\right)+...+f\left(\frac{19}{10}\right)}$$

Λύση

α) Πρέπει και αρκεί $2^x+2\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $A_f=\mathbb{R}$.

β) Έχουμε $f(x)+f(2-x)=\frac{2^x}{2^x+2}+\frac{2^{2-x}}{2^{2-x}+2}=$

$$\frac{2^x}{2^x+2}+\frac{\frac{2^2}{2^x}}{\frac{2^2}{2^x}+2}=\frac{2^x}{2^x+2}+\frac{2}{2^x+2}=\frac{2^x+2}{2^x+2}=1$$

γ) Η παράσταση γίνεται:

$$K=f(0)+f\left(\frac{1}{10}\right)+...+f\left(\frac{19}{10}\right)=$$

$$f(0)+\left(f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{19}{10}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{10}\right)+f\left(\frac{18}{10}\right)\right)+...$$

$$...+\left(f\left(\frac{9}{10}\right)+f\left(\frac{11}{10}\right)\right)+f(1)=\frac{1}{3}+9\cdot 1+\frac{1}{2}=\frac{59}{6}$$

Άσκηση 9η. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x-2\left(\sqrt{2}-1\right)^x=3$$

Λύση

Αν θέσουμε $\left(\sqrt{2}-1\right)^x=y>0$, έχουμε:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=2-1=1 \text{ και}$$

$$3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^2.$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{y^2}-2y=3\Leftrightarrow 2y^3+3y^2-1=0\overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$$(y+1)\left(2y^2+y-1\right)=0\Leftrightarrow (y+1)^2(2y-1)=0\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\ln 2}{\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

Άσκηση 10η. Να λύσετε την εξίσωση:

$$4^{\eta\mu^2 x}+2^{\sigma\upsilon\nu^2 x}-2-\sqrt{2}=0.$$

Λύση

Η εξίσωση γίνεται:

$$4^{\eta\mu^2 x}+2^{\sigma\upsilon\nu^2 x}-2-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow$$
$$\left(2^{\eta\mu^2 x}\right)^2+2^{1-\eta\mu^2 x}-2-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow$$
$$\left(2^{\eta\mu^2 x}\right)^2+\frac{2}{2^{\eta\mu^2 x}}-2-\sqrt{2}=0$$

Αν θέσουμε $2^{\eta\mu^2 x}=t$ με $1\le t\le 2$, έχουμε:

$$t^3-\left(2+\sqrt{2}\right)t+2=0\overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(t-\sqrt{2}\right)\left(\underbrace{t^2+\sqrt{2}t-\sqrt{2}}_{>0}\right)=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$$

Άρα $2^{\eta\mu^2 x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{\eta\mu^2 x}=2^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow \eta\mu^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\eta\mu x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \eta\mu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$
- $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}$

με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Άσκηση 11η. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=1\\2^x-2^y&=2\end{aligned}\right\}$$

Λύση

Το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=1\\2^x-2^y&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2^{x+y}&=2^1\\2^x-2^y&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}2^x\cdot 2^y&=2\\2^x-2^y&=2\end{aligned}\right\}\underset{2^y=\beta>0}{\overset{2^x=\alpha>0}{\Leftrightarrow}}\left.\begin{aligned}\alpha\cdot\beta&=2\\\alpha-\beta&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\beta^2+2\beta-2&=0\\\alpha&=\beta+2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\beta&=-1+\sqrt{3}\\\alpha&=1+\sqrt{3}\end{aligned}\right\}$$

Άρα

$$\left.\begin{aligned}2^x&=1+\sqrt{3}\\2^y&=-1+\sqrt{3}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{3}\right)}{\ln 2}\\y&=\frac{\ln\left(-1+\sqrt{3}\right)}{\ln 2}\end{aligned}\right\}$$

Άσκηση 12η. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(2^x-2\right)^2<\left(2^x+2\right)\cdot\left(1-\sqrt{2^x-1}\right)^2$$

Λύση

Πρέπει και αρκεί

$$2^x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$$

Αν θέσουμε

$$\sqrt{2^x-1}=t\ge 0\Leftrightarrow 2^x=t^2+1$$

η ανίσωση γίνεται:

$$\left(t^2-1\right)^2<\left(t^2+3\right)\cdot(t-1)^2\Leftrightarrow$$

$$(t-1)^2\cdot\left[(t+1)^2-\left(t^2+3\right)\right]<0\Leftrightarrow$$

$$(t-1)^2\cdot(2t-2)<0\Leftrightarrow 2(t-1)^3<0\Leftrightarrow$$

$$t-1<0\Leftrightarrow t<1.$$

Άρα $t\in[0,1)$.

Τελικά έχουμε: $0\le\sqrt{2^x-1}<1\Leftrightarrow 0\le x<1$.

Τάξη: Β΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Μέτρηση Κύκλου

Καρδαμίτσης Σπύρος

Ο αριθμός π και η μέτρηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων του.

287-212 *π. Χ Αρχιμήδης με τη βοήθεια κανονικών πολυγώνων και τη μέθοδο της εξάντλησης και το προσέγγισε με το 22/7 που είναι περίπου 3,14285.*
1590 *Francois Viete υπολόγισε το π με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας κανονικά πολύγωνα με 393.216 πλευρές.*
1595 *Ludolph van Ceulen υπολόγισαν το π με 35 δεκαδικά ψηφία.*
1820 *Jurij Vega υπολόγισε το π με 140 δεκαδικά ψηφία.*
1841 *William Ratherford υπολόγισε το π με 208 δεκαδικά ψηφία και το 1853 με 440*
1874 *William Shanks με 527 δεκαδικά ψηφία.*
1946 *Tomas Ferguson με 810 δεκαδικά ψηφία.*
2010 *Οι Alexander J. Yee και Shigeru Kondo υπολόγισαν με προσωπικό υπολογιστή περίπου 5 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία. Ο υπολογισμός των ψηφίων διάρκεσε 90 μέρες.*
2016 *ο Peter Trueb υπολόγισε 22 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία.*
2019 *η γιαπωνέζα Emma Harouka Iwao υπολογίσε 31,4 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία. Ο υπολογισμός διήρκεσε 121 μέρες.*
2021 *Ελβετοί ερευνητές του πανεπιστημίου Graubuenden υπολόγισαν 62,8 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία. Ο υπολογισμός διάρκεσε 108 μέρες και εννέα ώρες.*
2022 *Alexander J. Yee έσπασε ξανά το ρεκόρ του που είχε από το 2010, υπολόγισε 100 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία σε χρόνο 158 ημέρες. Η προσωρινή αποθήκευση του αριθμού έγινε από την Google Cloud σε χώρο 554 TB.*

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Η γωνία κανονικού δεκαγώνου είναι
Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 120° **Δ.** 144° **Ε.** 150°

2. Εάν η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι 60^o, τότε η πλευρά του (συναρτήσει του R) είναι
Α. $\frac{R}{2}$ **Β.** $R\sqrt{3}$ **Γ.** $2R$ **Δ.** $R\sqrt{2}$ **Ε.** R

3. Το κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R με κεντρική γωνία 24° είναι
Α. εξάγωνο **Β.** οκτάγωνο **Γ.** δεκάγωνο **Δ.** δωδεκάγωνο **Ε.** 15γωνο

4. Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ η πλευρά του είναι:
Α. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ **Β.** $2R$ **Γ.** $R\sqrt{2}$ **Δ.** R **Ε.** $\frac{R}{2}$

5. Αν $P_ν$ η περίμετρος ενός κανονικού ν-γώνου, τότε το εμβαδό του $E_ν$ είναι
Α. $\frac{1}{2}λ_ν\cdot α_ν$ **Β.** $\frac{1}{2}P_ν\cdot α_ν$ **Γ.** $\frac{1}{2}P_ν\cdot λ_ν$ **Δ.** $\frac{1}{2}P_ν\cdot λ_ν^2$ **Ε.** $\frac{1}{2}νP_ν\cdot λ_ν$

6. Το μήκος ℓ τόξου μ μοιρών που ανήκει σε κύκλο ακτίνας R είναι
Α. $\frac{2πRμ}{180}$ **Β.** $\frac{πR^2μ}{180}$ **Γ.** $\frac{πRμ}{360}$ **Δ.** $\frac{πRμ}{180}$ **Ε.** $\frac{πR^2μ}{360}$

7. Το εμβαδόν $E_μ$ ενός κυκλικού τομέα μ μοιρών είναι
Α. $\frac{πRμ}{360}$ **Β.** $\frac{πR^2μ}{360}$ **Γ.** $\frac{πR^2μ}{180}$ **Δ.** $\frac{πRμ}{180}$ **Ε.** $\frac{πRμ^2}{360}$

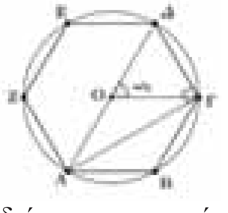
8. Σε ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο (2μ) πλήθος πλευρών η κεντρική του γωνία ω είναι
Α. $\frac{360^o}{2}$ **Β.** $\frac{360^o}{μ+2}$ **Γ.** $\frac{360^o}{2μ+2}$ **Δ.** $\frac{180^o}{μ}$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

Απαντήσεις **Δ – Ε – Ε – Δ – Β – Δ – Β – Δ**

Άσκηση 1η: Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και ΑΔ η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν φέρουμε τα τμήματα ΑΓ και ΟΓ να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο.
β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.
γ) $ΑΓ = R\sqrt{3}$

Λύση: α) Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου $Γ\hat{O}Δ$ είναι: $Γ\hat{O}Δ = \hat{ω}_6 = \frac{360^o}{6} = 60^o$

Και για τις πλευρές του τριγώνου ΓΟΔ έχουμε: $ΟΓ = ΟΔ = R$, δηλαδή είναι ισοσκελές με την γωνία της κορυφής του ίση με 60^o, συνεπώς είναι ισόπλευρο.



β) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R) και ισχύει $ΑΔ = 2R$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΔ, αφού η γωνία $Α\hat{Γ}Δ$ είναι εγγεγραμμένη και «βαίνει» σε ημικύκλιο.

γ) Η κάθετη πλευρά ΓΔ του ορθογωνίου τριγώνου

ΑΓΔ και πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΟΓΔ επομένως είναι $\Gamma\Delta = O\Gamma = O\Delta = R$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε: $A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$ ή $(2R)^2 = A\Gamma^2 + R^2$ ή $4R^2 - R^2 = A\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 3R^2$ ή $A\Gamma = R\sqrt{3}$

Β΄ τρόπος: Αν φέρουμε τις ΑΕ και ΕΓ το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, άρα η πλευρά $A\Gamma = R\sqrt{3}$.

Άσκηση 2η: Σε κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΓΒΔ τέτοιο ώστε το τόξο ΒΓ να είναι 120ο.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΒΟΓ.

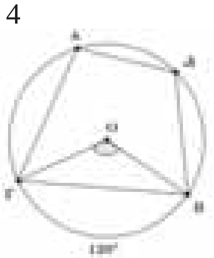
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$.

γ) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΒΔ, αν γνωρίζετε ότι το μήκος του τόξου ΑΔ είναι 60^0.

Λύση: α) Επειδή είναι το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120^o$ η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma = 120^o$, επιπλέον έχουμε $OB = O\Gamma = \rho$, επομένως το εμβαδό του τριγώνου ΒΟΓ είναι:

$$(BO\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot O\Gamma\cdot \eta\mu B\hat{O}\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\rho\cdot\eta\mu 120^o =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\rho^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$$



β) Το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$ είναι ίσο με το εμβαδό του κυκλικού τομέα $(O\overset{\frown}{B\Gamma})$ αφαιρέσουμε το εμβαδό του τριγώνου (ΒΟΓ), επομένως:

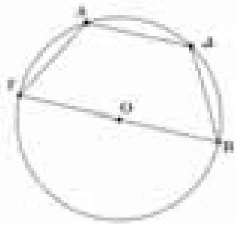
$$(\tau) = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (BO\Gamma) = \frac{\pi\cdot\rho^2\cdot 120^o}{360^o} - \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \rho^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

γ) Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο, τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ.

Τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{B\Delta}$ θα είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών.

$$\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{\Delta A} + \overset{\frown}{A\Gamma} = 180^o \text{ ή } 2\cdot\overset{\frown}{B\Delta} + 60^o = 180^o$$



ή $\overset{\frown}{B\Delta} = \dfrac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$. Άρα το μήκος του τόξου ΒΔ θα είναι: $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \pi\rho\dfrac{\mu}{180^o} = \pi\rho\dfrac{60^o}{180^o} = \dfrac{\pi\rho}{3}$.

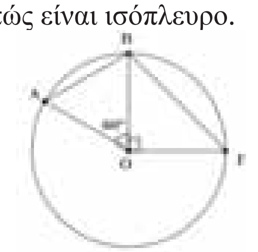
Άσκηση 3η: Δίνεται ο κύκλος (Ο,R) και τα σημεία του Α, Β, Γ τέτοια ώστε να είναι ΑΒ = R και ΒΓ= $R\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο και το τρίγωνο ΒΟΓ ορθογώνιο ισοσκελές.

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

γ) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(O\overset{\frown}{A\Gamma})$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $A\hat{O}\Gamma$.

Λύση: α) Επειδή είναι $AB = R$ και $OA = OB = R$ ως ακτίνες του ίδιο κύκλου έχουμε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ έχει τρεις πλευρές ίσες με την ακτίνα του κύκλου, συνεπώς είναι ισόπλευρο.



Επιπλέον στο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε από την υπόθεση ότι $B\Gamma = R\sqrt{2}$ και $OB = O\Gamma = R$ ως ακτίνες του ίδιο κύκλο. Είναι $B\Gamma^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$ και $OB^2 + O\Gamma^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$. Τότε $B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2$, δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΟΓ, συνεπώς είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΒΓ.

β) Το μήκος ℓ_1 του τόξου ΑΒ, ισούται με $\ell_1 = \dfrac{\pi R\mu}{180}$, όπου $\mu = 60^o$ αφού το τρίγωνο ΑΟΒ από το (α) ερώτημα είναι ισόπλευρο. Άρα

$$\ell_1 = \frac{\pi R\cdot 60}{180} = \frac{\pi R}{3}.$$

Επίσης, το μήκος ℓ_2 του τόξου ΒΓ, ισούται με $\ell_2 = \dfrac{\pi R\mu}{180}$, όπου $\mu = 90^o$ αφού το τρίγωνο ΟΒΓ ορθογώνιο στο Β. Άρα: $\ell_2 = \dfrac{\pi R \cdot 90}{180} = \dfrac{\pi R}{2}$.

γ) Λόγω του του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΟΒ και του ορθογωνίου ΒΟΓ έχουμε:

$$A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 60^0 + 90^0 = 150^0.$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$\left(\widehat{O A\Gamma}\right) = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$, όπου $\mu = 150^o$. Άρα

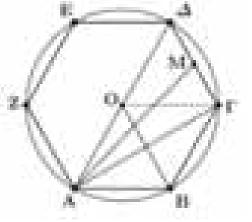
$$(\widehat{OA\Gamma}) = \frac{\pi R^2 \cdot 150^o}{360} = \frac{5\pi R^2}{12}.$$

Άσκηση 4$^{\eta}$: Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΑΒΓΔΕΖ) = $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ β) (ΑΜΓ) = $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ) (ΑΜΔΕΖ) = $R^2\sqrt{3}$

Λύση: α) Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ είναι $A\hat{O}B = \hat{\omega}_6 = \dfrac{360^o}{6} = 60^o$



Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές (ΟΑ=ΟΒ=R) με γωνία κορυφής 60^o, άρα είναι ισόπλευρο και έχει εμβαδό $(AOB) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Το κανονικό εξάγωνο αποτελείται από έξι ισόπλευρα τρίγωνα που είναι ίσα με το τρίγωνο ΑΟΒ, επομένως το εμβαδό του θα είναι: $(AB\Gamma\Delta EZ) = 6 \cdot (AOB) = 6 \cdot \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Β΄ τρόπος: Το εμβαδόν κανονικού πολυγώνου είναι $E_\nu = \dfrac{1}{2} P_\nu \cdot \alpha_\nu$ Άρα $E_6 = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \lambda_6 \cdot \alpha_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

β) Η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma = 30^o$ είναι εγγεγραμμένη με αντίστοιχη επίκεντρη την γωνία

$$\Delta\hat{O}\Gamma = \hat{\omega}_6 = \frac{360^o}{6} = 60^o$$

Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο στο Γ αφού η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $A\hat{\Delta}\Gamma = 60^o$ και $\Delta\Gamma = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{2R}{2} = R$

Το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΓ είναι

$$(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Στο τρίγωνο αυτό η ΑΜ είναι διάμεσος και το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα

$$(AM\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

γ) Είναι $(AM\Gamma) = (AM\Delta) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$ και

$$(A\Delta EZ) = \frac{1}{2} \cdot (AB\Gamma\Delta EZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Επομένως το εμβαδό του πολυγώνου (ΑΜΔΕΖ) είναι: $(AM\Delta EZ) = (AM\Delta) + (A\Delta EZ) =$

$$= \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

Άσκηση 6$^{\eta}$: Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια χορδή του ΑΒ. Φέρνουμε μια διάμετρο του κύκλου κάθετη στην χορδή ΑΒ που τέμνει την χορδή στο Μ και το κύκλο στα σημεία Κ και Λ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν είναι $M\Lambda = \dfrac{3R}{2}$ τότε:

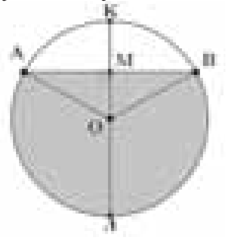
α) Να αποδείξετε ότι: $AB = R\sqrt{3}$.

β) Το εμβαδό του τριγώνου (ΑΟΜ) και το μέτρο της γωνίας $\widehat{AOM}$.

γ) Αν η ακτίνα του κύκλου είναι R = 10, να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου μέρους του τμήματος που περικλείεται από την χορδή ΑΒ και το τόξο $\widehat{A\Lambda B}$.

ii. Το μήκος του τόξου $\widehat{A\Lambda B}$.



Λύση: α) Έχουμε $OM = M\Lambda - O\Lambda = \dfrac{3R}{2} - R = \dfrac{R}{2}$

Επειδή η διάμετρος ΚΛ είναι κάθετη στη χορδή ΑΒ, το τρίγωνο ΑΜΟ είναι ορθογώνιο στο Μ και με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε: $OA^2 = AM^2 + OM^2$ ή $R^2 = AM^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2$

ή $AM^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$ άρα $AM = \sqrt{\dfrac{3R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή η ΟΜ είναι η απόσταση του κέντρου Ο από τη χορδή ΑΒ το Μ είναι το μέσο του ΑΒ, τότε: $AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

β) Από το (α) ερώτημα είναι $AM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ και

$OM=\frac{R}{2}$, επομένως το εμβαδό του τριγώνου (AOM) είναι: $(AOM)=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot OM=\frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{8}$ επιπλέον το εμβαδό του τριγώνου (AOM) δίνεται και από την σχέση: $(AOM)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OM\cdot ημA\hat{O}M=$ $=\frac{1}{2}\cdot R\cdot\frac{R}{2}\cdot ημA\hat{O}M=\frac{R^2}{4}\cdot ημA\hat{O}M$ απ' όπου προκύπτει ότι: $\frac{R^2}{4}\cdot ημA\hat{O}M=\frac{R^2\sqrt{3}}{8}$ ή $ημA\hat{O}M=\frac{\sqrt{3}}{2}$, τότε είναι $A\hat{O}M=60^o$.

γi) Επειδή το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές (OA = OB = R = 10) η OM είναι και διχοτόμος του, συνεπώς $A\hat{O}B=2\cdot A\hat{O}M=2\cdot 60^o=120^o$, τότε το εμβαδό του κυκλικού τομέα $(O\overset{\frown}{AKB})$ είναι:

$(O\overset{\frown}{AKB})=\frac{\pi\cdot R^2\cdot\mu^o}{360^o}=\frac{\pi\cdot 10^2\cdot 120^o}{360^o}=\frac{100\pi}{3}$ και το εμβαδό (ε) του κυκλικού τμήματος AKB είναι:

$(\varepsilon)=(O\overset{\frown}{AKB})-(AOB)=\frac{100\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OM=$

$=\frac{100\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2}=\frac{100\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\frac{10}{2}=$

$=\frac{100\pi}{3}-25\sqrt{3}$. Τέλος, το εμβαδό E του σκιασμένου μέρους του τμήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο $\overset{\frown}{AΛB}$ είναι:

$E=E_{κύκλου}-(\varepsilon)=\pi\cdot 10^2-\left(\frac{100\pi}{3}-25\sqrt{3}\right)==\frac{200\pi}{3}-25\sqrt{3}$ τ.μ.

γii) Το τόξο $\overset{\frown}{AΛB}$ είναι τόξο $\mu^o=360^o-120^o=240^o$ οπότε το μήκος του ℓ είναι: $\ell=\frac{\pi\cdot R\cdot\mu^o}{180^o}=\frac{\pi\cdot 10\cdot 240^o}{180^o}=\frac{40\pi}{3}$

Άσκηση 7η: Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα ρ = 2. Οι αποστάσεις των K και Λ από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι KO = $\sqrt{3}$ και ΛO = 1.

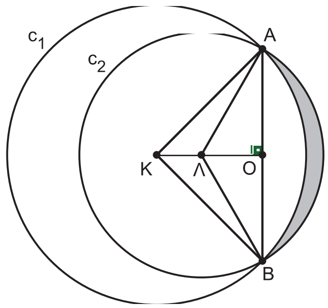
α) Να αποδείξετε ότι OA = $\sqrt{3}$ και R = $\sqrt{6}$

β) Να υπολογίστε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $K\overset{\frown}{AB}$ και $Λ\overset{\frown}{AB}$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος.

Λύση: α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAΛ είναι $AΛ=\rho=2$ και $ΛO=1$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι: $OA^2=AΛ^2-ΛO^2=2^2-1^2=3$ άρα $OA=\sqrt{3}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAK είναι $AK=R$ και $KO=\sqrt{3}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα και λόγω του ερωτήματος (i) είναι:

$AK^2=KO^2+OA^2 \Leftrightarrow R^2=\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2=6$. Άρα $R=\sqrt{6}$



β

χορδής, άρα το O είναι το μέσο της AB, οπότε $AB=2\cdot OA=2\sqrt{3}$. Είναι $OK=OA=\sqrt{3}$, άρα το ορθογώνιο τρίγωνο OAK είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{K}O=45^o$. Επειδή η KO διχοτομεί την $A\hat{K}B$ είναι $A\hat{K}B=2\cdot A\hat{K}O=2\cdot 45^o=90^o$.

O κυκλικός τομέας $K\overset{\frown}{AB}$ είναι γωνίας $\mu=90^o$ και ακτίνας $R=\sqrt{6}$, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$(K\overset{\frown}{AB})=\frac{\pi R^2\mu}{360^o}=\frac{\pi\left(\sqrt{6}\right)^2\cdot 90^o}{360^o}=\frac{3\pi}{2}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAΛ η υποτείνουσα $AΛ=2$ και η $ΛO=1=\frac{AΛ}{2}$, άρα $O\hat{A}Λ=30^o$, οπότε $A\hat{Λ}O=60^o$. Επειδή η ΛO διχοτομεί την $A\hat{Λ}B$ είναι $A\hat{Λ}B=120^o$. O κυκλικός τομέας $Λ\overset{\frown}{AB}$ είναι γωνίας $\mu=A\hat{Λ}B=120^o$ και ακτίνας $\rho=1$, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$(Λ\overset{\frown}{AB})=\frac{\pi R^2\mu}{360^o}=\frac{\pi\cdot 2^2\cdot 120^o}{360^o}=\frac{4\pi}{3}$$

γ) Αν (KAB) και (ΛAB) είναι τα εμβαδά των τριγώνων KAB και ΛAB τότε το εμβαδόν E του σκιασμένου μηνίσκου θα είναι:

$$E=\left(Λ\overset{\frown}{AB}\right)-\left(K\overset{\frown}{AB}\right)+(KAB)-(ΛAB).$$

Είναι $\left(KAB\right)=\frac{KA\cdot KB}{2}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{2}=3$ και

$\left(ΛAB\right)=\frac{AB\cdot ΛO}{2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\sqrt{3}.$

Επίσης από το (β) ερώτημα έχουμε $\left(K\overset{\frown}{AB}\right)=\frac{3\pi}{2}$ και $\left(Λ\overset{\frown}{AB}\right)=\frac{4\pi}{3}$, επομένως

$$E=\frac{4\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}+3-\sqrt{3} \quad ή \quad E=3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}.$$

Τάξη: Β΄

Κωνικές τομές

Λαζαρίδης Χρήστος

Το παρακάτω άρθρο αναφέρεται στην ενότητα των κωνικών τομών και είναι γραμμένο σύμφωνα με την ύλη που προτείνεται από το ΙΕΠ. Επίσης έχουν ληφθεί υπόψη οι ασκήσεις της τράπεζας θεμάτων. Για την ***κατανόηση*** *είναι απαραίτητη η θεωρητική γνώση του αντιστοίχου κεφαλαίου της Β΄ Λυκείου.*

Άσκηση 1.

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0,$$
$$C_2: x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$$

με ακτίνες R_1, R_2, αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, αν και μόνο αν,

$$(A_1-A_2)^2+(B_1-B_2)^2=4(R_1+R_2)^2\ (1).$$

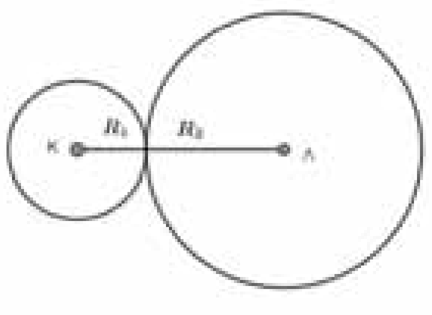
β) Πώς γίνεται η (1) αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά;

γ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι

$$(C_3):\ x^2+y^2+4x-6y-3=0,$$
$$(C_4):\ x^2+y^2-12x-18y+81=0$$

εφάπτονται εξωτερικά.

Λύση



α) Τα κέντρα των κύκλων είναι:

$$K\left(-\frac{A_1}{2},-\frac{B_1}{2}\right),\ \Lambda\left(-\frac{A_2}{2},-\frac{B_2}{2}\right).$$

Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, αν και μόνο αν, $(K\Lambda)=R_1+R_2$. Έχουμε,

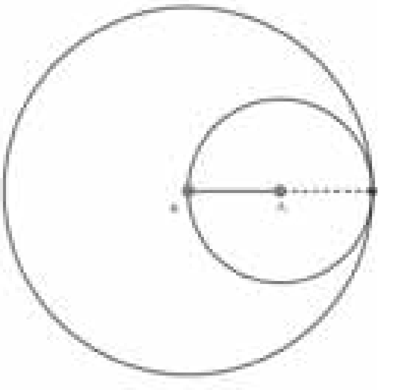
$$(K\Lambda)^2=\left(-\frac{B_2}{2}+\frac{B_1}{2}\right)^2+\left(-\frac{A_2}{2}+\frac{A_1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)^2+\left(\frac{A_2-A_1}{2}\right)^2=(R_1+R_2)^2,$$

οπότε,

$$(A_1-A_2)^2+(B_1-B_2)^2=4(R_1+R_2)^2.$$

β)



Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, αν και μόνο αν,

$$(K\Lambda)=|R_1-R_2|.$$

Εργαζόμενοι ανάλογα καταλήγουμε,

$$(A_1-A_2)^2+(B_1-B_2)^2=4(R_1-R_2)^2.$$

γ) Οι ακτίνες των κύκλων είναι:

$$R_1=\frac{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2-4\Gamma_1}}{2}=\frac{\sqrt{64}}{2}=4.$$

$$R_2=\frac{\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2-4\Gamma_2}}{2}=\frac{\sqrt{144}}{2}=6.$$

Η σχέση

$$(A_1-A_2)^2+(B_1-B_2)^2=4(R_1+R_2)^2\ (1),$$

αν αντικαταστήσουμε τα R_1, R_2, επαληθεύεται, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Άσκηση 2.

Δίνονται οι τεμνόμενοι κύκλοι

$$C_1: x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0,$$
$$C_2: x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$$

με ακτίνες R_1, R_2, αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κοινής τους χορδής είναι

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+\Gamma_1-\Gamma_2=0.$$

β) Να αποδείξετε ότι η κοινή χορδή είναι κάθετη στην διάκεντρο.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των κύκλων:

$$\left(C_3\right):\ x^2+y^2-52=0,$$
$$\left(C_4\right):\ x^2+y^2+12x+18y+104=0$$

Λύση

α) Αν $A\left(x_0,y_0\right)$ είναι ένα κοινό σημείο των κύκλων τότε:

$$x_0{}^2+y_0{}^2+A_1x_0+B_1y_0+\Gamma_1=0,$$
$$x_0{}^2+y_0{}^2+A_2x_0+B_2y_0+\Gamma_2=0.$$

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\left(A_1-A_2\right)x_0+\left(B_1-B_2\right)y_0+\Gamma_1-\Gamma_2=0.$$

Το τυχαίο κοινό σημείο επαληθεύει την εξίσωση:

$$\left(A_1-A_2\right)x+\left(B_1-B_2\right)y+\Gamma_1-\Gamma_2=0 \quad (1).$$

Συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση της κοινής τους χορδής είναι η (1).

β) Είναι γνωστό από την Γεωμετρία, αλλά εύκολα αποδεικνύεται αφού οι συντελεστές είναι αντίστοιχα

$$\frac{B_1-B_2}{A_1-A_2},-\frac{A_1-A_2}{B_1-B_2}$$

και έχουν γινόμενο -1.

γ) Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά όπως φαίνεται από την συνθήκη (1) της πρώτης άσκησης. Η κοινή χορδή συμπίπτει με την μοναδική κοινή εφαπτομένη. Εφαρμόζουμε το ερώτημα α και βρίσκουμε ότι η εξίσωση της κοινής τους χορδής είναι

$$12x+18y+156=0 \Leftrightarrow 2x+3y+26=0.$$

Άσκηση 3.

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1: x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0,$$
$$C_2: x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$$

με ακτίνες R_1,R_2, αντίστοιχα.

α) Αν οι εφαπτόμενες των κύκλων στα σημεία τομής τους είναι κάθετες (δηλαδή οι κύκλοι είναι ορθογώνιοι), να αποδείξετε ότι

$$A_1A_2+B_1B_2=2\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right).$$

β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι

$$\left(C_3\right):\ x^2+y^2=1,\ \left(C_4\right): x^2+\left(y+2\right)^2=3$$

είναι ορθογώνιοι.

Λύση

α) Έστω

$$K\left(-\frac{A_1}{2},-\frac{B_1}{2}\right),\Lambda\left(-\frac{A_2}{2},-\frac{B_2}{2}\right)$$

τα κέντρα των κύκλων και Α ένα κοινό τους σημείο. Η εφαπτομένη του C_1 στο Α είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο Α του C_2. Το τρίγωνο ΚΛΑ είναι ορθογώνιο. Από Πυθαγόρειο προκύπτει

$$K\Lambda^2=KA^2+\Lambda A^2,$$

οπότε

$$\left(\frac{A_1-A_2}{2}\right)^2+\left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)^2=$$
$$\frac{A_1{}^2+B_1{}^2-4\Gamma_1}{4}+\frac{A_2{}^2+B_2{}^2-4\Gamma_2}{4}$$

και μετά τις πράξεις

$$A_1A_2+B_1B_2=2\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right).$$

β) Οι εξισώσεις των κύκλων γράφονται,

$$\left(C_3\right):\ x^2+y^2-1=0$$
$$\text{και } \left(C_4\right):\ x^2+y^2-2x+1=0$$

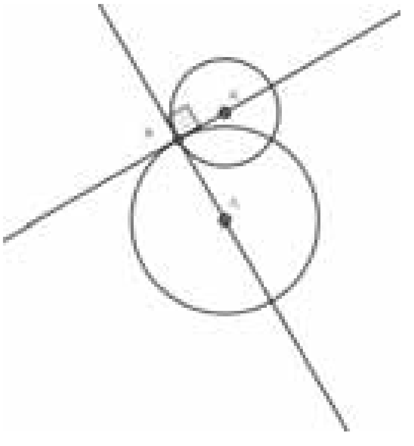
Η σχέση

$$A_1A_2+B_1B_2=2\left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)$$

για

$$A_1=A_2=0,\ B_1=0,\ B_2=4,\ \Gamma_1=-1,\ \Gamma_2=1$$

εύκολα επαληθεύεται.



Άσκηση 4.

Δίνονται τα σημεία

$$A\left(-\kappa,0\right),B\left(\kappa,0\right),\kappa\in\mathbb{R}^*.$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ έτσι ώστε:

α) $MA^2+MB^2=4\kappa^2$**.**

β) $\dfrac{MA}{MB}=\sqrt{2}$**.**

Λύση

Έστω $M\left(x,y\right)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου, τότε:

α) $MA^2+MB^2=4\kappa^2 \Leftrightarrow$

$$(x+\kappa)^2+y^2+(x-\kappa)^2+y^2=4\kappa^2 \Leftrightarrow$$
$$2x^2+2y^2+2\kappa^2=4\kappa^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=\kappa^2.$$

Ο γ.τ είναι ο κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας $|\kappa|$.

β) Έχουμε ότι:

$$\frac{MA}{MB}=\sqrt{2} \Leftrightarrow MA^2=2MB^2 \Leftrightarrow$$
$$(x+\kappa)^2+y^2=2\left((x-\kappa)^2+y^2\right) \Leftrightarrow$$
$$2x^2-4\kappa x+2\kappa^2+2y^2=x^2+2\kappa x+\kappa^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-6\kappa x+y^2+\kappa^2=0.$$

Η τελευταία παριστάνει κύκλο αφού

$$A^2+B^2-4\Gamma=32\kappa^2>0$$

με κέντρο $K(-3\kappa,0)$ και ακτίνα $R=2|\kappa|\sqrt{2}$

Άσκηση 5.

α) Έστω η παραβολή $C: y^2=2\rho x$ και το σημείο $P(x_0,y_0)$. Να αποδείξετε ότι το $P(x_0,y_0)$ είναι εσωτερικό της σημείο αν και μόνο αν

$$y_0{}^2-2\rho x_0<0.$$

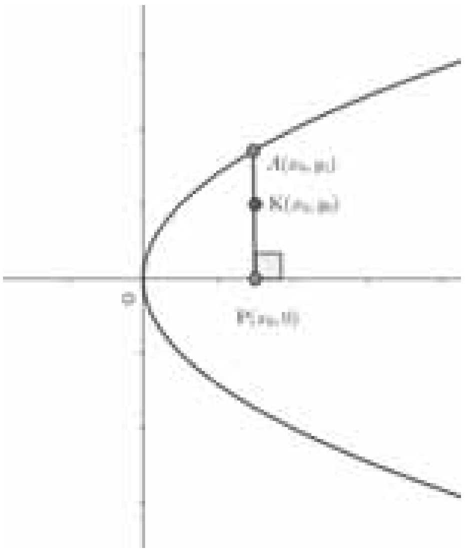
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ τα οποία είναι τέτοια ώστε:

$$y^2-4x<0.$$

Λύση

α) Φέρνουμε ΚΡ κάθετη στον άξονα xx΄ η οποία τέμνει C στο $A(x_0,y_1)$, ισχύει $y_1{}^2=2\rho x_0$. Το $K(x_0,y_0)$ είναι εσωτερικό της σημείο αν και μόνο αν,

$$KP<AP \Leftrightarrow KP^2<AP^2$$
$$y_0{}^2<y_1{}^2 \Leftrightarrow y_0{}^2<2\rho x_0$$



β) Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου, τότε από α)

$$y^2<4x \Leftrightarrow y^2-4x<0$$

επομένως ο γ.τ είναι το εσωτερικό της παραβολής με εξίσωση $y^2=4x$.

Άσκηση 6.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x+y+1=0$.

β) Να σχεδιάσετε την γραμμή που παριστάνει η εξίσωση: $x^4=16y^2$.

Λύση

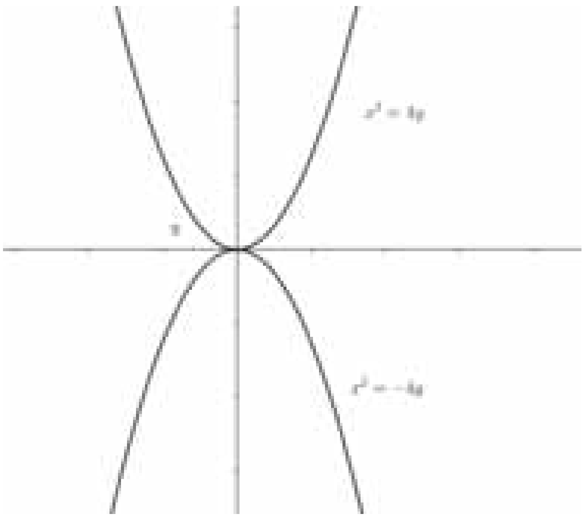
α) Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής, τότε σύμφωνα με τον ορισμό της:

$$(ME)=d(M,\delta)\,(1).$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=\left(\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-2xy-6x-2y+1=0.$$

β) Η σχέση γίνεται

$$x^4=16y^2 \Leftrightarrow x^4-16y^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(x^2-4y)(x^2+4y)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2=4y \text{ ή } x^2=-4y.$$



Πρόκειται για την ένωση των παραβολών $x^2=4y$ και $x^2=-4y$.

Άσκηση 7.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία

$$A(\kappa,\kappa),\ B(\kappa,-\kappa),\ \Gamma(-\kappa,-\kappa),\ \Delta(-\kappa,\kappa)$$

είναι ομοκυκλικά.

β) Τα σημεία τομής των ελλείψεων

$$(C_1): \alpha^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2\beta^2,$$
$$(C_2): \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$$

είναι κορυφές τετραγώνου .

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι

$$(OA)=\sqrt{\kappa^2+\kappa^2}=\sqrt{2\kappa^2}=|\kappa|\sqrt{2}.$$

Όμοια

$$(OB)=(O\Gamma)=(O\Delta)=|\kappa|\sqrt{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα σημεία είναι ομοκυκλικά του κύκλου

$$(C): x^2+y^2=2\kappa^2$$

και μάλιστα σχηματίζουν τετράγωνο.

β) Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων των ελλείψεων με αγνώστους $\left(x^2,y^2\right)$ και βρίσκουμε

$$\left(x^2,y^2\right)=\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right),$$

οπότε αν θέσουμε $\kappa=\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ τα σημεία τομής είναι

$$A(\kappa,\kappa),\ B(\kappa,-\kappa),\ \Gamma(-\kappa,-\kappa),\ \Delta(-\kappa,\kappa)$$

τα οποία από α, σχηματίζουν τετράγωνο.

Άσκηση 8.

Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $C: x^2-y^2=1$.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση κάθε εστίας από κάθε ασύμπτωτη.

β) Η ευθεία $y=\lambda$ τέμνει την υπερβολή στα A,B και τις ασύμπτωτες στα Γ,Δ να αποδείξετε ότι $A\Gamma=B\Delta$.

Λύση

α) Οι εστίες είναι $E\left(\pm\sqrt{2},0\right)$ ενώ οι ασύμπτωτες $\varepsilon: y=\pm x \Leftrightarrow \pm x-y=0$. Αν d είναι η απόσταση μιας τυχαίας εστίας από μια τυχαία ασύμπτωτη τότε: $d=\dfrac{\left|\pm\sqrt{2}-0\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=1.$

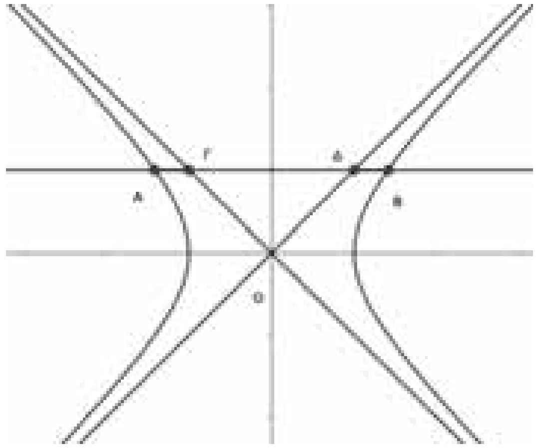
β) Επιλύουμε τα αντίστοιχα συστήματα και έχουμε:

$$A\left(\sqrt{\lambda^2+1},\lambda\right),\ B\left(-\sqrt{\lambda^2+1},\lambda\right),\ \Gamma(\lambda,\lambda),\Delta(-\lambda,\lambda).$$

Στη συνέχεια

$$(A\Gamma)^2=\lambda-\sqrt{\lambda^2+1},\ (B\Delta)^2=\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}$$

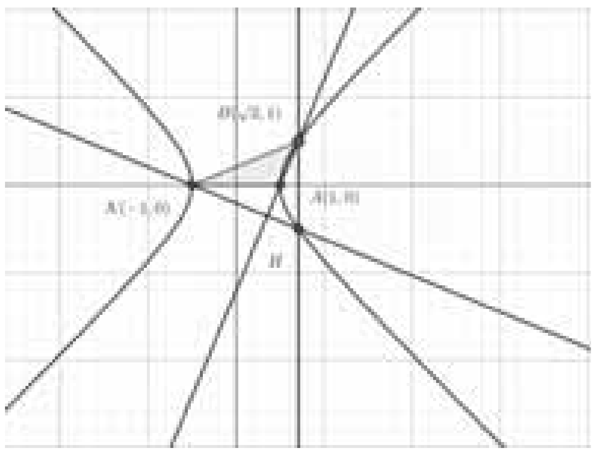
επομένως $A\Gamma=B\Delta$.



Άσκηση 9.

Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $C: x^2-y^2=1$. Θεωρούμε τα σημεία $A'(-1,0), A(1,0)$ και $B\left(\sqrt{2},1\right)$. Να αποδείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου $A'AB$ είναι σημείο της υπερβολής.

Λύση



Το ύψος από την κορυφή $B\left(\sqrt{2},1\right)$ έχει εξίσωση $x=\sqrt{2}$. Η πλευρά AB έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{1-0}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

επομένως το αντίστοιχο ύψος θα έχει συντελεστή $1-\sqrt{2}$ και εξίσωση $y=\left(1-\sqrt{2}\right)(x+1)$.

Τα δύο ύψη τέμνονται στο ορθόκεντρο που είναι το σημείο $H\left(\sqrt{2},-1\right)$. Προφανώς το ορθόκεντρο ανήκει στην υπερβολή αφού επαληθεύει την εξίσωσή της.

ΤΑΞΗ: Β΄

Οι Κωνικές Τομές και οι εφαρμογές τους

Στέργιος Τουρναβίτης

*Μία ενότητα των Μαθηματικών που συνδέει την Άλγεβρα με την Γεωμετρία είναι σίγουρα οι Κωνικές Τομές. Λέγονται έτσι γιατί μπορεί να προκύψουν ως τομές ενός επιπέδου με έναν κώνο. Ο πρώτος που τις ανακάλυψε ήταν **ο Μέναιχμος**, ενώ ένας άλλος αρχαίος Έλληνας Μαθηματικος ο **Απολλώνιος** από την **Πέργα** έλυσε το **Δήλιο πρόβλημα** με διαφορετικό τρόπο απ' ότι ο Μέναιχμος, χρησιμοποιώντας όμως και οι δύο μερικές από τις ιδιότητες αυτών των καμπυλών. Στον **Απολλώνιο** μάλιστα οφείλονται τα μέχρι σήμερα ονόματα των τριών από αυτές της παραβολής, έλλειψης και υπερβολής. Οι κωνικές τομές βρίσκουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην Αστρονομία, κατασκευή τηλεσκοπίων, κεραιών, Διαστημική, Αρχιτεκτονική, Γεωδαισία, Ιατρική κ.ά.*

*Σκοπός της εργασίας που ακολουθεί είναι **να αναδείξουμε** μέσω των ασκήσεων και των οπτικών αναπαραστάσεων, εκείνες τις ιδιότητες των κωνικών τομών που βρίσκουν εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα, αλλά και παράλληλα να κατανοήσουμε βαθύτερα τη φύση αυτών των καμπυλών.*

Ο κύκλος είναι η τομή του κώνου μ' ένα επίπεδο παράλληλο προς την βάση του.

Το επίπεδο τέμνει τον κώνο διαγώνια και η τομή τους είναι μία έλλειψη.

Αν το επίπεδο περιστραφεί κατάλληλα ώστε να γίνει παράλληλο προς μία γενέτειρα του κώνου, τότε η τομή τους είναι μία παραβολή.

Στην περίπτωση αυτή το επίπεδο στρέφεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να τέμνει και τις δύο χοάνες του κώνου και η τομή του με αυτόν είναι μία υπερβολή.

Άσκηση 1. Παριστάνει η εξίσωση $x^2+y^2-6x+4y+7=0$ κύκλο;

Στη συνέχεια να προσδιοριστεί

α) Το κέντρο και η ακτίνα του,

β) Να κατασκευαστεί γραφικά.

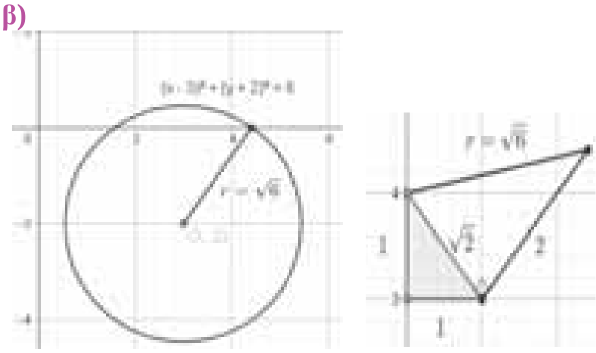
Λύση:

α) Με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-6x+4y+7=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2\cdot 3x+3^2+y^2+2\cdot 2y+2^2+7-13=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$$

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $(3,-2)$ και ακτίνα $\sqrt{6}$.

β)



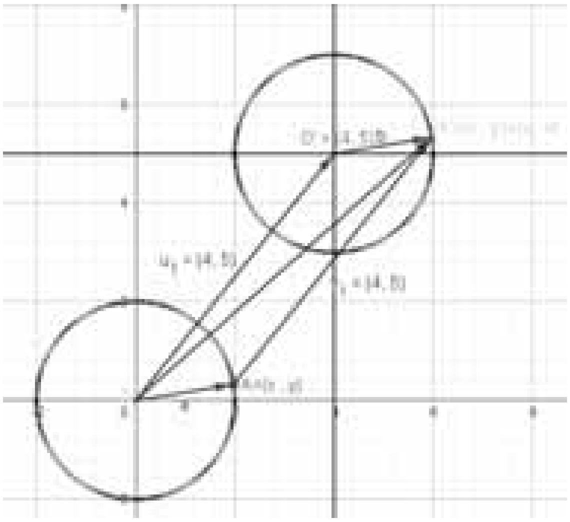
Γεωμετρική κατασκευή της ακτίνας $r=\sqrt{6}$

Άσκηση 2. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που προκύπτει από την μετακίνηση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2 κατά 4 μονάδες δεξιά και 5 πάνω;

Λύση:

Οι συντεταγμένες Ο΄ του κέντρου του νέου κύκλου προκύπτουν αν προσθέσουμε το διάνυσμα της αρχής των αξόνων $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ με το διάνυσμα της μεταφοράς $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. Άρα το κέντρο του νέου κύκλου έχει συντεταγμένες $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

Το διάνυσμα των συντεταγμένων του τυχαίου σημείου $A'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ προκύπτει και αυτό από την πρόσθεση του διανύσματος $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ με το διάνυσμα της μεταφοράς $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.



Από την ισότητα των δύο διανυσμάτων έχουμε:

$$x' = x + 4$$
$$y' = y + 5$$

Όμως το σημείο Α περιστρέφεται σε σταθερή απόσταση γύρω από το Ο. Άρα οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow (x' - 4)^2 + (y' - 5)^2 = 4$$

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει την εξίσωση της κίνησης του σημείου $A' = (x', y')$ γύρω από το σημείο $(4,5)$ και με ακτίνα 2. Μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες x', y' με τις περισσότερο γνωστές μας x, y και να έχουμε τη ζητούμενη εξίσωση: $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$.

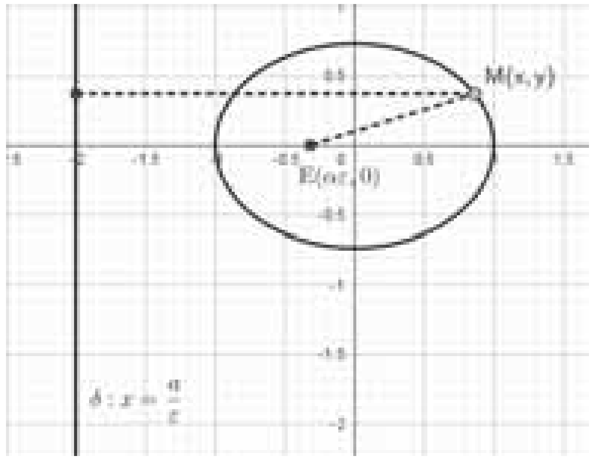
Οι κωνικές τομές ως γεωμετρικοί τόποι με κοινές ιδιότητες

Ένα άλλο κοινό σημείο των κωνικών τομών είναι ότι για τα σημεία που βρίσκονται σ' αυτές, **ο λόγος *ε* των αποστάσεών τους από ένα σημείο (εστία) και από μία ευθεία (διευθετούσα) είναι σταθερός και ονομάζεται εκκεντρότητα** (eccentricity).

Διαφορετικές τιμές του ε, αντιστοιχούν σε διαφορετικές κωνικές τομές.

(i) Αν ε = 1, η κωνική τομή είναι παραβολή.

Αν έχουμε ένα σημείο $E(\alpha\varepsilon, 0)$ ως εστία και την ευθεία $\delta: x = \dfrac{\alpha}{\varepsilon}$ να είναι η διευθετούσα, τότε:

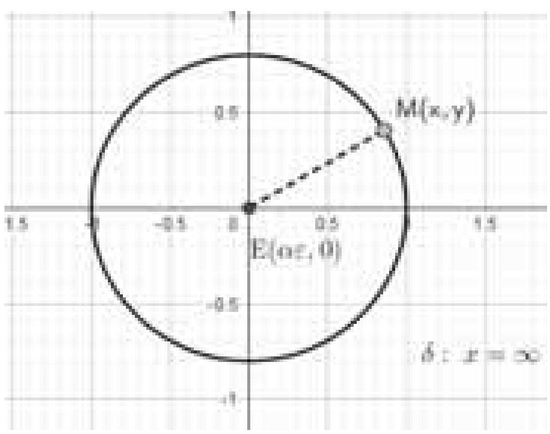


$$\frac{(ME)}{d(M,\delta)} = \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{(x - \alpha\varepsilon)^2 + y^2}}{\left|x - \dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right|} = \varepsilon \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2(1-\varepsilon^2)} = 1 \quad (1)$$

ii) Αν $0 < \varepsilon < 1 \Leftrightarrow \alpha^2(1-\varepsilon^2) > 0$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ποσότητα $\alpha^2(1-\varepsilon^2)$ με το β^2. Ο τύπος (1) γίνεται: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ που δεν είναι άλλος από την εξίσωση της έλλειψης.

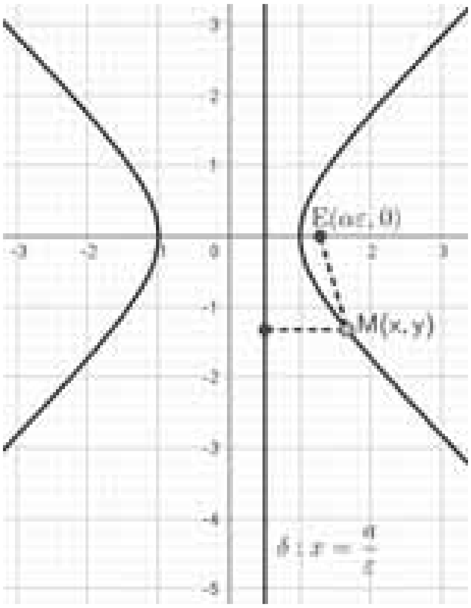
iii) Αν $\varepsilon = 0$, από τον τύπο (1) παίρνουμε: $x^2 + y^2 = \alpha^2$, την εξίσωση του κύκλου. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση αυτή το ρόλο της εστίας τον παίζει το κέντρο του κύκλου, ενώ η διευθετούσα δεν ορίζεται.

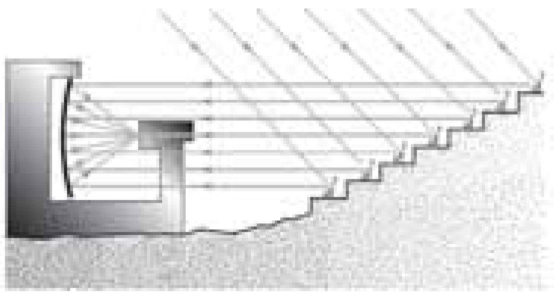


iv) Αν $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \alpha^2(1-\varepsilon^2) < 0$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ποσότητα $\alpha^2(1-\varepsilon^2)$ με το $-\beta^2$

. Ο τύπος (1) γίνεται: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

που δεν είναι άλλος από την εξίσωση της υπερβολής.



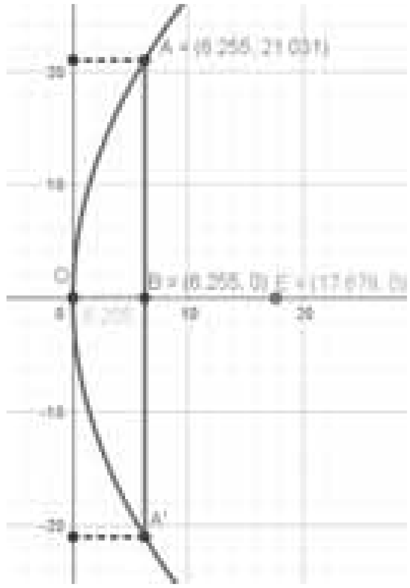


Άσκηση 3. Στο χωριό Odeillo που βρίσκεται στη Νότια Γαλλία στα Πυρηναία και στα Γαλλοϊσπανικά σύνορα, υπάρχει μία διάταξη με 63 επίπεδα κάτοπτρα τα οποία αντανακλούν τις ακτίνες του ηλίου σ' ένα μεγάλο παραβολικό κάτοπτρο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ακτίνες να εστιάζονται σ΄ένα σημείο στο οποίο βρίσκεται μία υψικάμινος. Εκεί λόγω της συγκέντρωσης της ακτινοβολίας, αναπτύσσονται θερμοκρασίες πάνω από $3.800^0 C$. Αν το πλάτος του παραβολικού κατόπτρου είναι 42,062 μέτρα και η υψικάμινος απέχει 17,678 μέτρα από το κέντρο του κατόπτρου, πόσο βαθύ είναι το κάτοπτρο;

Λύση:

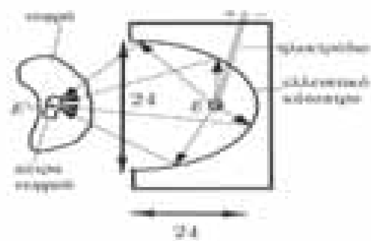
Σύμφωνα με τα στοιχεία του προβλήματος, το πάνω ακριανό σημείο Α του κατόπτρου απέχει από τον άξονα της παραβολής:

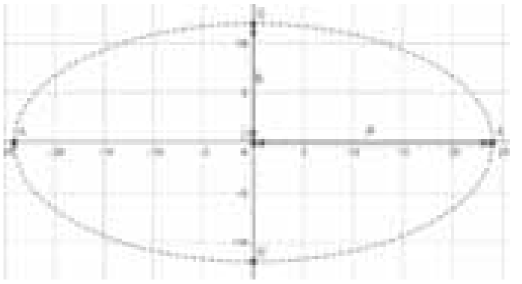
$$\frac{42{,}062}{2}=21{,}031\text{m}\,.$$

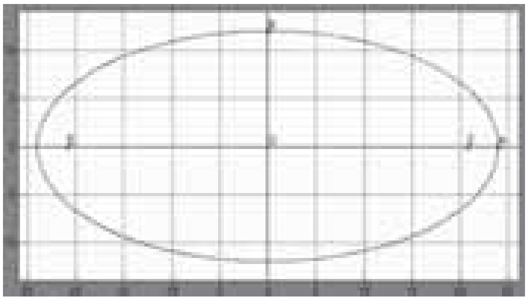


Στη συνέχεια αν στο γενικό τύπο της παραβολής $y^2=4\alpha x$ (Ο τύπος αυτός προκύπτει εύκολα από την γενική θεώρηση που έγινε προηγουμένως και ιδιαίτερα ως προς την εκκεντρότητα $\varepsilon=1$ των παραβολών, και με την παραδοχή ότι $\left.\begin{matrix}E(\alpha\varepsilon,0)\\ \varepsilon=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow E(\alpha,0)$ όπως επίσης και ότι η εξίσωση της διευθετούσας θα είναι $x=-\alpha$) θέσουμε $\alpha=17{,}678$, και $y=21{,}031$ (την τεταγμένη του Α) και λύσουμε ως προς x, θα βρούμε την τετμημένη του Α άρα και το βάθος του κατόπτρου, περίπου ίσο με 6,255 m.

Άσκηση 4. Στην ιατρική χρησιμοποιείται μία μέθοδος που λέγεται λιθοθρυψία για να «σπάσουν» τις πέτρες από τα νεφρά των ασθενών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, στη μία εστία του οργάνου τοποθετείται ένα ηλεκτρόδιο εκπομπής υπερήχων, ενώ στην άλλη εστία βρίσκεται το νεφρό του ασθενή. Εξ' αιτίας της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης, οι πέτρες του νεφρού κονιορτοποιούνται από τους ανακλώμενους υπερήχους. Το πλάτος ενός ελλειψοειδούς οργάνου που χρησιμοποιείται για την λιθοθρυψία, είναι 24 cm ενώ το βάθος του επίσης 24 cm. Με τα παραπάνω στοιχεία πόση είναι η απόσταση ανάμεσα στο ηλεκτρόδιο εκπομπής υπερήχων και της πέτρας στο νεφρό του ασθενή;







Λύση:

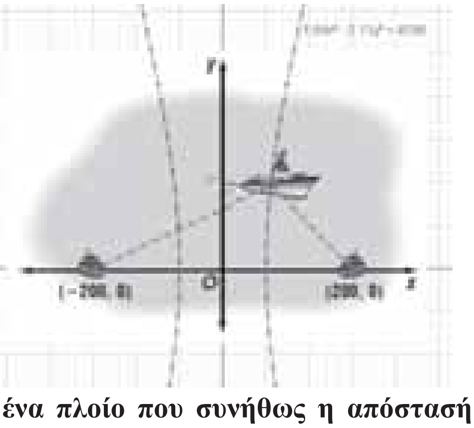
$\alpha = 24,\ \beta = 12$ και από τον προηγούμενο τύπο:

$$\beta^2 = \alpha^2(1-\varepsilon^2) \Rightarrow \ldots \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Το ηλεκτρόδιο απέχει από το νεφρό όσο οι δύο εστίες του οργάνου. Αυτή είναι:

$$EZ = 2\alpha\varepsilon \cong 41{,}6\,\text{cm}.$$

Άσκηση 5. Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός πλοίου, ήδη από την εποχή του 2ου Παγκοσμίου πολέμου χρησιμοποιείται ένα σύστημα LORAN (Long Range Navigation). Σύμφωνα με αυτό, 2 σταθμοί εκπομπής ραδιοκυμάτων ευρισκόμενοι σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, εκπέμπουν ταυτόχρονα ραδιοκύματα προς πλοία στη θάλασσα.

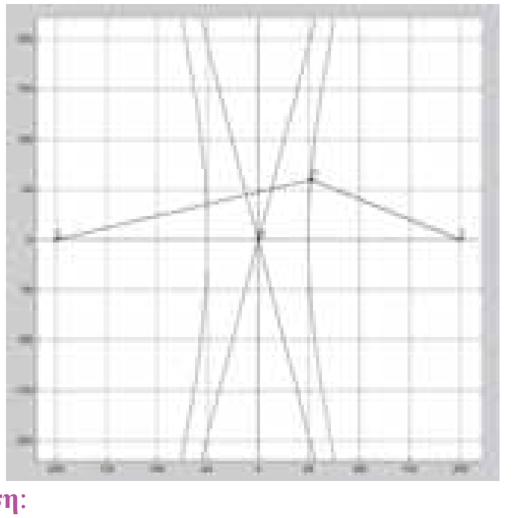


Όταν ένα πλοίο που συνήθως η απόστασή του από τον ένα σταθμό είναι πιο μικρή σε σχέση με τον άλλο, δέχεται τα σήματα αυτά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Μετρώντας αυτή τη διαφορά χρόνου και γνωρίζοντας την ταχύτητα των ραδιοκυμάτων, μπορούμε να προσδιορίσουμε την θέση του πλοίου πάνω σε μία υπερβολή, της οποίας οι εστίες είναι οι θέσεις των 2 σταθμών εκπομπής.

Έχουμε 2 σταθμούς εκπομπής ραδιοκυμάτων οι οποίοι βρίσκονται σε ευθύγραμμη απόσταση 400 km κατά μήκος μιας ακτογραμμής, με τον Α να βρίσκεται δυτικότερα σε σχέση με τον Β. Ένα πλοίο το οποίο πλησιάζει προς την ακτή, δέχεται τα ραδιοκύματα από τους 2 σταθμούς και το πλήρωμά του μπορεί να συμπεράνει ότι η διαφορά της απόστασης του σταθμού Β από τον σταθμό Α είναι 100 km.

Α) Ποια είναι η εξίσωση της υπερβολής που με την βοήθειά της μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του πλοίου τη δεδομένη χρονική στιγμή;

Β) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του, αν αυτό απέχει 60 km από την στεριά;



Λύση:

Α) Όπως φαίνεται και από τα δύο σχήματα, θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με οριζόντιο άξονα την ευθεία που ενώνει τους δύο σταθμούς των οποίων οι θέσεις τους ταυτίζονται με τις εστίες της υπερβολής και κατακόρυφο άξονα την μεσοκάθετη του τμήματος με αυτά τα άκρα. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι $2\alpha = 100$ km, $\gamma = 200$ km. Επειδή για κάθε υπερβολή ισχύει ότι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta^2 = 200^2 - 50^2 \Rightarrow \beta^2 = 37.500.$$

Επομένως η υπερβολή πάνω στην οποία βρίσκεται το πλοίο, έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{2.500} - \frac{y^2}{37.500} = 1$$

Β) Αν θέσουμε στην παραπάνω εξίσωση $y = 60$, βρίσκουμε $x \cong 52{,}3$ km και οι συντεταγμένες του πλοίου Π είναι $\Pi(52{,}3, 60)$.

Τάξη: Γ΄ Επαναληπτικά Θέματα - Διαφορικού Λογισμού

Κώστα Βακαλόπουλου

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Α) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν) και το σύνολο τιμών της f

Γ) i) Να βρείτε το πλήθος και το πρόσημο των λύσεων της εξίσωσης: $f(x)=2023$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(x\alpha-1)=\alpha$ για $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις.

Δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f

Ε) Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$ και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^{x-2}+1924}{9f(x)+5x-16}$

ΣΤ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ ισχύει: $2f(x)>f(2x)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}-\{-1,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Α) Έχουμε: $f'(x)=\ldots=-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής, η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα: $A_1=(-\infty,-1)$, $A_2=(-1,1)$, $A_3=(1,+\infty)$

Η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Επίσης έχουμε: $f''(x)=\ldots=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

Το πρόσημο της $f''(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
f	∩	‖	∪	Σ.Κ.	∩	‖	∪

Επομένως η f είναι κοίλη στα διαστήματα: $(-\infty,-1)$, $[0,1)$ και κυρτή στα διαστήματα: $(-1,0]$, $(1,+\infty)$ ενώ το σημείο $(0,f(0)=0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της f.

Β) Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$.

Όμοια

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$.

Άρα η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη C_f. Επίσης:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}\right)=-\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

Όμοια

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη C_f.

Οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στη C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ Οπότε δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $A_1=(-\infty,-1)$ και συνεχής οπότε,

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-1^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,0)$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα κα συνεχής στο διάστημα $A_2=(-1,1)$ και συνεχής οπότε,

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to-1^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3=(1,+\infty)$ και συνεχής οπότε,

$$f(A_3)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Γ) i)

- $2023\notin f(A_1)=(-\infty,0)$, άρα δεν υπάρχει $x\in(-\infty,-1)$ τέτοιος, ώστε $f(x)=2023$
- $2023\in f(A_2)=(-\infty,+\infty)$, άρα υπάρχει ένα $x_1\in(-1,1)$ και μάλιστα μοναδικό τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2023$. (Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ άρα και «1-1»). Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ και $f(0)=0$, οπότε $x_1<0$
- $2023\in f(A_3)=(0,+\infty)$, άρα υπάρχει και μάλιστα ακριβώς ένα $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=2023$. Προφανώς $x_2>0$. (Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ άρα και «1-1»).

ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}$ και $\alpha<0$ ισχύει:

$$x(x\alpha-1)=\alpha\Leftrightarrow \alpha x^2-\alpha=x\Leftrightarrow \alpha(x^2-1)=x\Leftrightarrow$$

$\alpha=\dfrac{x}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)=\alpha$, (1). Επειδή το σύνολο ορισμού της εξίσωσης $x(x\alpha-1)=\alpha$ είναι το $\mathbb{R}$ εξετάζουμε πρώτα αν έχει ρίζες τους αριθμούς 1 ή -1. Όμως: $-1(-\alpha-1)=\alpha\Rightarrow1=0$, άτοπο και $1(\alpha-1)=\alpha\Rightarrow-1=0$, άτοπο. Άρα δεν έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -1. Οπότε λόγω της ισοδυναμίας (1) αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$ με $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις. Για κάθε $\alpha<0$ ισχύει ότι:

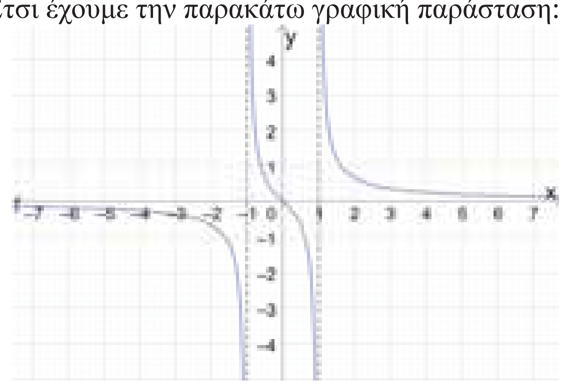
- $\alpha\in f(A_1)=(-\infty,0)$, άρα υπάρχει και μάλιστα ακριβώς ένα $x_1\in(-\infty,-1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\alpha$. Προφανώς $x_1<0$.
(Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ άρα και «1-1»).
- $\alpha\in f(A_2)=(-\infty,+\infty)$ άρα υπάρχει και μάλιστα ακριβώς ένα $x_2\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\alpha$. (Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ άρα και «1-1»). Για να διαπιστώσουμε το πρόσημο του x_2 θα βρούμε το σύνολο τιμών σε καθένα από τα διαστήματα $A=(-1,0]$ και $B=[0,1)$. Πράγματι, $f(A)=[0,+\infty)$ και $f(B)=(-\infty,0]$ οπότε επειδή $\alpha<0$ έχουμε $x_2>0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ με $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις. Οπότε και η εξίσωση $x(x\alpha-1)=\alpha$ για $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις.

Δ) Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώνουμε τα συμπεράσματα από τα προηγούμενα ερωτήματα:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
f	8	7 Σ.Κ.	8	7	

Έτσι έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



Ε) Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=-\frac{5}{9}x+\frac{16}{9}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$, κοντά στο 2 θα ισχύει: $f(x)\geq-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{16}{9}$. Άρα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(2-\delta,2)\cup(2,2+\delta)$ να ισχύει: $9f(x)+5x-16>0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\left(9f(x)+5x-16\right)=0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{9f(x)+5x-16}=+\infty .$$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 2}\left(e^{x-2}+1924\right)=1925>0$

Άρα: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}+1924}{9f(x)+5x-16}=$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{9f(x)+5x-16}\cdot\left(e^{x-2}+1924\right)\right]=+\infty$$

ΣΤ) Έστω $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα: $[0,x]$ και $[x,2x]$ αφού $[0,x]\subseteq(0,1)$ και $[x,2x]\subseteq(0,1)$

- Από το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,x]$ στη συνάρτηση f προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$
- Από το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x,2x]$ στη συνάρτηση f προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(x,2x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{2x-x}=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$

Όμως η f κοίλη στο $[0,1)$ οπότε η f' γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Άρα ισχύει:

$$0<\xi_1<x<\xi_2<1\Rightarrow f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{f(2x)-f(x)}{x}\Rightarrow f(x)>f(2x)-f(x)\Rightarrow$$

$$2f(x)>f(2x)\ .$$

Άσκηση 2

Έστω f μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ και η εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης στο A είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Αν $f''(x)+3f(x)>4f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

Α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\left(f'(x)-f(x)\right)\cdot e^{-3x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Να δείξετε ότι για κάθε $x<0$ ισχύει $f'(x)<f(x)-3e^{3x}$.

Γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-x}+\frac{3}{2}e^{2x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Δ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\cdot e^{-3x}\right)$

Λύση

Α) Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h'(x)=\left(f''(x)-f'(x)\right)e^{-3x}-3\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-3x}=$$
$$=e^{-3x}\left[f''(x)-4f'(x)+3f(x)\right]>0 .$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Β) Από τα δεδομένα προκύπτουν ότι: $f(0)=3$ και $f'(0)=0$. Έχουμε:

$$x<0\overset{h\uparrow}{\Rightarrow}h(x)<h(0)\Rightarrow\left(f'(x)-f(x)\right)\cdot e^{-3x}<-3$$

$$\overset{\cdot e^{3x}}{\Rightarrow}f'(x)-f(x)<-3e^{3x}\Rightarrow f'(x)<f(x)-3e^{3x}$$

Γ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-\infty,0]\subseteq\mathbb{R}$. Για κάθε $x<0$ ισχύει:

$$f'(x)<f(x)-3e^{3x}\Rightarrow f'(x)-f(x)<-3e^{3x}$$

$$\overset{\cdot e^{-x}}{\Rightarrow}f'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot f(x)<-3e^{3x}\cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow\left(f(x)\cdot e^{-x}\right)'<-3e^{2x}\Rightarrow\left(f(x)\cdot e^{-x}\right)'<\left(-\frac{3}{2}e^{2x}\right)'$$

$$\Rightarrow\left(f(x)\cdot e^{-x}+\frac{3}{2}e^{2x}\right)'<0\Rightarrow g'(x)<0 .$$ Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Έτσι έχουμε:

$$x<0\overset{g\downarrow}{\Rightarrow}g(x)>g(0)\Rightarrow f(x)\cdot e^{-x}+\frac{3}{2}e^{2x}>\frac{9}{2}\overset{\cdot e^{-2x}}{\Rightarrow}$$

$$f(x)\cdot e^{-3x}+\frac{3}{2}>\frac{9}{2}\cdot e^{-2x}\Rightarrow f(x)\cdot e^{-3x}>\frac{9}{2}\cdot e^{-2x}-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{9}{2}\cdot e^{-2x}-\frac{3}{2}<f(x)\cdot e^{-3x}$$ Όμως

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{9}{2}\cdot e^{-2x}-\frac{3}{2}\right)=+\infty .$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\cdot e^{-3x}\right)=+\infty$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\ln x+e^x$, $x>0$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

Β) Να δείξετε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0\in(0,1)$

Γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $|f(x)|=f(x)$ επαληθεύεται για κάθε $x>0$, ενώ

ii) η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $(0,+\infty)$

Δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x-\ln x=(e-1)x+1$ έχει ακριβώς μία λύση.

Λύση

Α) Ως γνωστόν για κάθε $x>0$ ισχύει: $\ln x\le x-1$. Όμως $x>x-1\ge \ln x\Rightarrow x-\ln x>0$ και $e^x>0$ για κάθε $x>0$. Επομένως για κάθε $x>0$ ισχύει: $x-\ln x+e^x>0\Rightarrow f(x)>0$.

Β) Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(x-\ln x+e^x\right)'=1-\frac{1}{x}+e^x=\frac{x-1+xe^x}{x}$$

και $f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}+e^x\right)'=\frac{1}{x^2}+e^x>0$, άρα η συνάρτηση f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x-1+xe^x$, $[0,1]$. Η g συνεχής $[0,1]$ και $g(0)=-1<0$, $g(1)=e>0$ οπότε από το θ. Bolzano στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε
$g(x_0)=0\Rightarrow f'(x_0)=0$. Άρα:

- $0<x<x_0\overset{f'\,1}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0$, οπότε η συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,x_0]$
- $x>x_0\overset{f'\,1}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0$. Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[x_0,+\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0\in(0,1)$

Γ) Είναι:

- $f(A_1)\overset{f\,2}{=}[f(x_0),+\infty)$, αφού
  $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\ln x+e^x\right)=+\infty$
- $f(A_2)=[f(x_0),+\infty)$, αφού
  $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x+e^x\right)=$
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x+e^x\right)\left(1-\frac{\ln x}{x+e^x}\right)\right]=+\infty$
  διότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)=+\infty$,
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x+e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(1+e^x\right)}=0$$
  και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x+e^x}\right)=1>0$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι:
$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[f(x_0),+\infty)\subseteq(0,+\infty)$, αφού $f(x_0)>0$. Επίσης ισχύει:
$x_0<1\Rightarrow f(x_0)<f(1)=1+e<2023$.

Έτσι έχουμε:

i) $|f(x)|=f(x)\Leftrightarrow f(x)\ge0$ που ισχύει για κάθε $x>0$

ii)

- $2023\in f(A_1)=[f(x_0),+\infty)$.
  Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,x_0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2023$. Το x_1 είναι μοναδικό στο $(0,x_0)$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$ άρα και «1-1».
- $2023\in f(A_2)=[f(x_0),+\infty)$.
  Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(x_0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=2023$. Το x_2 είναι μοναδικό στο $(x_0,+\infty)$ γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ άρα και «1-1».

Άρα η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $(0,+\infty)$.

Δ) Έχουμε αποδείξει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
Επίσης η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ δηλαδή:

$y-(1+e)=e(x-1)$, δηλαδή $y=ex+1$.

Άρα η εξίσωση: $f(x)=ex+1$, δηλαδή η εξίσωση: $x-\ln x+e^x=ex+1$, δηλαδή η εξίσωση: $e^x-\ln x=e(x-1)+1$, έχει μοναδική λύση την τετμημένη $x_0=1$ του σημείου επαφής.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$

Α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_1: y=x+\frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της f στο $+\infty$ και η ευθεία $\varepsilon_2: y=-x-\frac{1}{2}$ ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της f στο $-\infty$

Β) Να αποδείξετε ότι: $x^2+x+3>\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε_1 στο $+\infty$ και πάνω από την ευθεία ε_2 στο $-\infty$

Γ) Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης και να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{2f(x)-\sqrt{11}}$

Δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6f(x)=5x+8$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ αφού $x^2+x+3\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και είναι συνεχής.

Α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)\right)=0$$

Πράγματι, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+3}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}+3-\cancel{x^2}-\cancel{x}-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+3}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+3}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)=0$$

αφού, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=+\infty$

Όμοια, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)\right)=0$

Β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2+x+3=x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+x+3}>\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{1}{2}\right|$. Οπότε:

- $x>-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)>\left|x+\frac{1}{2}\right|=x+\frac{1}{2}$ και
- $x<-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)>\left|x+\frac{1}{2}\right|=-x-\frac{1}{2}$

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία ε_1 στο $+\infty$ και επίσης πάνω από την ευθεία ε_2 στο $-\infty$.

Γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x)=\frac{2x+1}{2f(x)}$. Είναι:

- $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

Άρα παρουσιάζει στο $x_0=-\frac{1}{2}$ (ολικό) ελάχιστο το $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$. Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)\geq f\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f(x)\geq\frac{\sqrt{11}}{2}\Rightarrow 2f(x)-\sqrt{11}\geq 0$$

Επίσης η ισότητα ισχύει μόνο για $x=-\frac{1}{2}$ αφού

- $x<-\frac{1}{2}\overset{2}{\Rightarrow}f(x)>f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{11}}{2}$, ενώ
- $x>-\frac{1}{2}\overset{1}{\Rightarrow}f(x)>f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{11}}{2}$

Επομένως, $2f(x)-\sqrt{11}>0$ κοντά στο $-\frac{1}{2}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(2f(x)-\sqrt{11}\right)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2f(x)-\sqrt{11}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}(2x-1)=-2<0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{2f(x)-\sqrt{11}}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left((2x-1)\cdot\dfrac{1}{2f(x)-\sqrt{11}}\right)=-\infty$

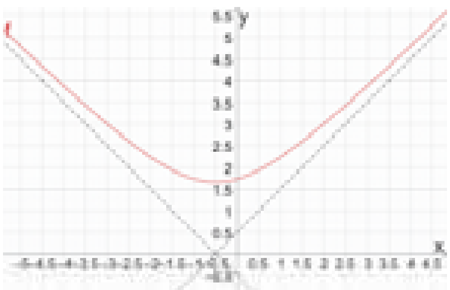
Δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}\right)'=...=\frac{11}{4\left(x^2+x+3\right)f(x)}>0.$$

Άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημείο καμπής. Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα στον πίνακα μεταβολών της f που ακολουθεί:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$
f	↘	Ο.Ε.	↗

Με βάση τον πίνακα έχουμε τη γραφική παράσταση της f:



Ε) $6f(x)=5x+8\Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$. Παρατηρούμε ότι: $f'(x)=\frac{5}{6}\Rightarrow\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}=\frac{5}{6}\Rightarrow x=2$

Η εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A\left(2,f(2)=3\right)$ έχει εξίσωση: $y-f(2)=f'(2)(x-2)$ ή $y-3=\frac{5}{6}(x-2)$ ή $y=\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $f(x)=\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$ δηλαδή η $6f(x)=5x+8$ έχει μοναδική λύση, την τετμημένη του σημείου επαφής δηλαδή την $x=2$.

Έφυγαν από κοντά μας

† Νίκος Ανδρουλακάκης

Με μεγάλη θλίψη, πληροφορηθήκαμε, ότι έφυγε από τη ζωή, ένας **δικός μας άνθρωπος**, πρόωρα και άδικα, ο αγαπημένος μας μουσικο - μαθηματικός Νίκος Ανδρουλακάκης. Ο άνθρωπος με το **χαμόγελο**, το χιούμορ αλλά και τη μεγάλη του αγάπη για τα Μαθηματικά και τη Μουσική.

Ήταν ενεργό μέλος της συντακτικής επιτροπής του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄. Είχε δώσει στην εταιρεία μας και όχι μόνο, διαλέξεις για τη σχέση της Μουσικής με τα Μαθηματικά, αφού ήταν πολύ καλός γνώστης και των δύο αντικειμένων.

Νίκο μας, θα μας μείνεις αξέχαστος για τις μουσικές βραδιές που **μας χάρισες**, πολλά βράδια, στις μπουάτ που έπαιζες πιάνο, ακορντεόν και τραγουδούσες, στις εκδρομές μας, αλλά και σε όλες τις εκδηλώσεις μας.

Η συντακτική επιτροπή του περιοδικού μας και το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. εκφράζει θερμά συλλυπητήρια στην πολυαγαπημένη του σύζυγο Βάσω (οδοντίατρο) που με την αγγελική της φωνή, τον συντρόφευε στο τραγούδι και τον εξαίρετο και μονάκριβο γιο του Αντρέα που τον καμάρωνε, ιδιαίτερα, για τις επιχειρηματικές του επιτυχίες.

Νίκο, να είναι ελαφρύ το χώμα που σε σκεπάζει!

† Θανάσης Λιπορδέζης

Με μεγάλη θλίψη και βαθιά συγκίνηση, πληροφορηθήκαμε την απώλεια του εκλεκτού συναδέλφου Θανάση Λιπορδέζη.

Ήταν ιδρυτικό μέλος του **Παραρτήματος Ροδόπης** της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και **ενεργό μέλος** της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Υπήρξε επί σειρά ετών Πρόεδρος του παραρτήματος Ροδόπης και κατά τη διάρκεια της προεδρίας του, το 2002 διοργάνωσε το **19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας** στην Κομοτηνή, την έναρξη του οποίου κήρυξε η κόρη του Κ. Καραθεοδωρή, Δέσποινα Ροδοπούλου - Καραθεοδωρή. Επίσης ήταν βασικός ιδρυτής του Μουσείου Καραθεοδωρή μαζί με τον Δήμο Κομοτηνής.

Ήταν εκδότης της Εφημερίδας του Παραρτήματος Ροδόπης "Κ. Καραθεοδωρή"

Ήταν ο Ιδρυτής και Πρόεδρος του Συνδέσμου Φίλων Καραθεοδωρή και εκδότης της ομώνυμης εφημερίδας

Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ εκφράζει τα **θερμά** του συλλυπητήρια στην οικογένειά του, στην αγαπημένη σύζυγο του Δώρα και στις κόρες του Μαρία και Μάρθα.

Τάξη: Γ΄

Θέματα Ανάλυσης

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Η έννοια της παραγώγου και του ορισμένου ολοκληρώματος αρχικά είχαν εισαχθεί ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Η εμφάνιση των **Newton και Leibniz** περί το **1675** χαρακτηρίζεται από την ταυτόχρονη περίπου απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του **Απειροστικού Λογισμού** (συνδέει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και την έννοια της παραγώγου) μέσω του οποίου έχουμε τόσο τη θεωρητική όσο και την υπολογιστική σύνδεση του Ολοκληρωτικού Λογισμού με τον Διαφορικό Λογισμό.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος παρουσιάστηκε αρχικά σαν μία **μέθοδος υπολογισμού εμβαδού επίπεδου** σχήματος με προσέγγιση από εμβαδά απλών σχημάτων. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου, παραβολικού χωρίου κ.τ.λ. και είναι γνωστή ως «**μέθοδος της εξάντλησης**». Αυστηρή εισαγωγή στην έννοια του ολοκληρώματος έγινε πρώτα από τον **Riemann** στα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα και μετά ακολούθησαν γενικεύσεις της έννοιας αυτής από τον **Lebesgue**.

Σήμερα η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος δεν περιορίζεται μόνο για την έκφραση εμβαδών αλλά επεκτείνεται στην έκφραση εννοιών της φυσικής, της θεωρίας των πιθανοτήτων, της στατιστικής κ.τ.λ.

Θέμα $1^{ο}$: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)+x$.

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ οι τιμές $f(\alpha),f(\beta)$ είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2+\kappa x+\frac{1}{4}\kappa^2=0\ (1),\kappa\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Δείξτε ότι: i. Υπάρχει σημείο της C_g στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη της C_g παράλληλη στη διχοτόμο της $1^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\rho)=\ln f(\alpha)+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

iii. Για το ρ του ερωτήματος ii, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)>-\frac{f(\xi)}{2}$$

Λύση: i. Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα της (1) είναι $\Delta=\kappa^2-\kappa^2=0$ που σημαίνει ότι η (1) έχει διπλή ρίζα. Άρα $f(\alpha)=f(\beta)$.

Εφαρμόζεται για την f στο $[\alpha,\beta]$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g=\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}+1.$$

Έχουμε $g'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}+1=1$.

Άρα στο σημείο $A(x_0,g(x_0))\in C_g$ ορίζεται εφαπτομένη της C_g παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=x$, που είναι η διχοτόμος της $1^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

ii. Είναι $g(\alpha)=\ln f(\alpha)+\alpha$ και $g(\beta)=\ln f(\beta)+\beta$ $\Leftrightarrow g(\beta)=\ln f(\alpha)+\beta$, αφού $f(\alpha)=f(\beta)$.

$\alpha<\beta\Leftrightarrow \ln f(\alpha)+\alpha<\ln f(\alpha)+\beta\Leftrightarrow g(\alpha)<g(\beta)$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως παραγωγίσιμη. Εφαρμόζεται για την g στο $[\alpha,\beta]$ το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών. Είναι:

$$g(\alpha)<\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}<g(\beta)\Leftrightarrow$$

$$g(\alpha)<\ln f(\alpha)+\frac{\alpha+\beta}{2}<g(\beta).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\rho)=\ln f(\alpha)+\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

iii. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (α,ρ), οπότε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\rho)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(\rho)-g(\alpha)}{\rho-\alpha}\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+1=\frac{\beta-\alpha}{2(\rho-\alpha)}\quad(2).$$

Είναι: $\dfrac{\beta-\alpha}{2(\rho-\alpha)}>\dfrac{1}{2}\overset{\rho-\alpha>0}{\Leftrightarrow}\beta-\alpha>\rho-\alpha\Leftrightarrow\beta>\rho$, που ισχύει. Άρα, $(2)\Rightarrow\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+1>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} > -\frac{1}{2} \overset{f(\xi)>0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) > -\frac{f(\xi)}{2}.$$

Θέμα 2ο: Θεωρούμε την $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x^2+1}$ με $\lambda \in R$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως μονότονη στο R.

β. Αν λ=1.

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x = \alpha(x^2+1)$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α.

iii. Αν x_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης $e^x = \alpha(x^2+1)$ με α>1, δείξτε ότι $x_0 > 0$ και υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ με $0<\xi\neq 1$ για τον οποίο ισχύει $(\alpha-1)(\xi^2+1)^2 = x_0 e^{\xi}(\xi-1)^2$.

Λύση: α. Είναι $D_f = R$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{\lambda e^{\lambda x}(x^2+1)-2xe^{\lambda x}}{(x^2+1)^2}=\frac{e^{\lambda x}}{(x^2+1)^2}(\lambda x^2-2x+\lambda)$$

Επειδή $\dfrac{e^{\lambda x}}{(x^2+1)}>0$ για κάθε $x\in R$, το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης

$$\lambda x^2-2x+\lambda.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η. Αν $\lambda=0$, τότε $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Στην περίπτωση αυτή η $f'(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, οπότε δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη στο R.

2η. Αν $\lambda\neq 0$, η παράσταση $\lambda x^2-2x+\lambda$ είναι τριώνυμο του x με διακρίνουσα $\Delta=4(1-\lambda^2)$.

Στον παρακάτω πίνακα έχουμε το πρόσημο της διακρίνουσας Δ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Δ		−	0	+	‖	+	0	−	

- Αν $\lambda\in(-\infty,-1)$ είναι $\Delta<0$, οπότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in R$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.
- Αν $\lambda=-1$, τότε:

$$f'(x)=\frac{e^{-x}}{(x^2+1)^2}(-x^2-2x-1)=$$

$$-\frac{e^{-x}}{(x^2+1)^2}(x+1)^2<0$$

για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο −1, (αφού είναι συνεχής στο R) είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

- Αν $\lambda\in(-1,0)\cup(0,1)$, τότε $\Delta>0$ και το τριώνυμο $\lambda x^2-2x+\lambda$ έχει δύο ρίζες άνισες, οπότε η $f'(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, επομένως η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο R.
- Αν $\lambda=1$, τότε $f'(x)=\dfrac{e^x}{(x^2+1)^2}(x-1)^2>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1+\infty)$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο 1 είναι γνησίως αύξουσα στο R.
- Αν $\lambda\in(1,+\infty)$ είναι $\Delta<0$, οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο R όταν $\lambda\in(-\infty,-1]$ που είναι γνησίως φθίνουσα και όταν $\lambda\in[1,+\infty)$ που είναι γνησίως αύξουσα.

β. Αν $\lambda=1$ είναι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

i. Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι "1-1", επομένως είναι αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}e^x\right)=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε:

$f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$, που είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.

ii. Είναι:

$$e^x=\alpha(x^2+1)\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2+1}=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha.$$

- Αν $\alpha\leq 0$, τότε $\alpha\notin f(R)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha>0$, τότε $\alpha\in f(R)$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζα στο R, ακριβώς μία, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

iii. Αν δεχτούμε ότι $x_0 \le 0$, τότε έχουμε:

$$x_0 \le 0 \overset{f\ \text{γν.αύξ}}{\Rightarrow} f(x_0) \le f(0) \Rightarrow \alpha \le 1.$$ Άτοπο.

Άρα $x_0 > 0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x_0)$. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0} \Leftrightarrow$$

$$x_0 f'(\xi) = \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 = x_0 \frac{e^{\xi}}{(\xi^2+1)^2}(\xi-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)(\xi^2+1)^2 = x_0 e^{\xi}(\xi-1)^2.$$

Είναι $(\alpha-1)(\xi^2+1)^2 > 0 \Rightarrow x_0 e^{\xi}(\xi-1)^2 > 0 \Rightarrow \xi \ne 1$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x_0)$ με $0 < \xi \ne 1$ ώστε να ισχύει $(\alpha-1)(\xi^2+1)^2 = x_0 e^{\xi}(\xi-1)^2$.

Θέμα 3ο: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x\ln x + \alpha e^x,\ \alpha > 0.$$

α. Δείξτε ότι η f παρουσιάζει ακριβώς ένα ολικό ελάχιστο.

β. Έστω x_0 η θέση του ολικού ελαχίστου της f, τότε να αποδείξετε ότι:

i. Αν $M(x_0, f(x_0))$, το σημείο M για τις διάφορες τιμές του $\alpha > 0$ βρίσκεται και στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g την οποία να βρείτε.

ii. Το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$$\alpha e^x + 1 = -\ln x \quad (1).$$

iii. Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha e^x + \ln x + 1}{x - x_0} = 2 + \frac{1}{x_0}$, τότε

$$\alpha \in \left(2e^{-\frac{1}{e}}, 2\right).$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (0,+\infty)$.

α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \ln x + 1 + \alpha e^x.$$

Έχουμε $f'\left(\frac{1}{e}\right) = \alpha e^{\frac{1}{e}} > 0$ και $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$, οπότε υπάρχει κ με $0 < \kappa < \frac{1}{e}$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa) < 0$.

Στο διάστημα $\left[\kappa, \frac{1}{e}\right]$ εφαρμόζεται για την f' το θεώρημα του Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\kappa, \frac{1}{e}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{1}{x} + \alpha e^x > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το x_0 είναι μοναδικό σημείο μηδενισμού της f' στο $(0,+\infty)$. Ισχύουν:

$$0 < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0.$$

Επίσης, $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Άρα η f παρουσιάζει στο $(0,+\infty)$ ακριβώς ένα ολικό ελάχιστο που η θέση του είναι το x_0.

β. i. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x) - f'(x) = (x-1)\ln x - 1 \quad (2).$$

Για $x = x_0$: $(2) \Rightarrow f(x_0) - f'(x_0) = (x_0 - 1)\ln x_0 - 1$.

$$\Rightarrow f(x_0) = (x_0 - 1)\ln x_0 - 1$$

Άρα το σημείο M είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης f και της συνάρτησης g με $g(x) = (x-1)\ln x - 1,\ x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται στο $(0,+\infty)$.

Έχουμε: $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 + \alpha e^{x_0} =$

$$(x_0 - 1)\ln x_0 - 1 \Leftrightarrow \alpha e^{x_0} + 1 = -\ln x_0.$$

Άρα η θέση του ολικού ελαχίστου της f είναι ρίζα της (1). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \alpha e^x + \ln x + 1, x > 0,$$

έχουμε $h'(x) = \alpha e^x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

iii. Από το ερώτημα ii έχουμε $\alpha e^{x_0} + \ln x_0 + 1 = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha e^x + \ln x + 1}{x - x_0} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha e^x + \ln x + 1)'}{(x - x_0)'} =$$

$$\lim_{x \to x_0}\left(\alpha e^x + \frac{1}{x}\right) = \alpha e^{x_0} + \frac{1}{x_0}.$$

Άρα, $\alpha e^{x_0} + \frac{1}{x_0} = 2 + \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \alpha e^{x_0} = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2e^{-x_0}$.

Είναι: $0 < x_0 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{1}{e} < -x_0 < 0 \Leftrightarrow$

$$e^{-\frac{1}{e}} < e^{-x_0} < 1 \Leftrightarrow 2e^{-\frac{1}{e}} < 2e^{-x_0} < 2 \Leftrightarrow 2e^{-\frac{1}{e}} < \alpha < 2$$

Άρα $\alpha \in \left(2e^{-\frac{1}{e}}, 2\right)$.

Θέμα 4^{o}: α. Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{e^x}{x}=\kappa-e$ (1) με $\kappa\le 2e$. Αν δεχτούμε ότι η (1) έχει ρίζα στο $(0,+\infty)$, στο διάστημα αυτό να λύσετε την (1).

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=e^x-\frac{1}{6}ex^3+x+2, x>0.$$

i. Να μελετήσετε την g ως προς τα κοίλα και να βρείτε αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της C_g.

ii. Να δείξετε ότι $e^{x-1}-\frac{1}{6}x^3\ge\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Λύση: α. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{e^x}{x}, x\in(0,+\infty).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ και

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ και } f'(x)>0\Leftrightarrow x>1.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$			>	$f(1)$ ολ.ελαχ.	<	

Άρα στο 1 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=e$.

Συνεπώς για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$$f(x)\ge e\Leftrightarrow\frac{e^x}{x}\ge e \quad (2).$$

Το “=” στη (2) ισχύει για $x=1$.

Έστω $x_0\in(0,+\infty)$ ρίζα της (1), τότε

$$\frac{e^{x_0}}{x_0}=\kappa-e\Leftrightarrow\kappa-e\ge e\Leftrightarrow\kappa\ge 2e$$

Έχουμε επίσης $\kappa\le 2e$, οπότε $\kappa=2e$.

Η (1) γράφεται:

$$\frac{e^x}{x}=e\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1.$$

β. i. Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2+1 \text{ και}$$

$$g''(x)=e^x-ex=x\left(\frac{e^x}{x}-e\right).$$

θ	$-\infty$	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(\theta)$			$-$	0	$+$		
$f(\theta)$			>	$f(\theta_0)$ ολ.ελαχ.	<		

Από το ερώτημα (α) έχουμε

$$\frac{e^x}{x}\ge e\Leftrightarrow\frac{e^x}{x}-e\ge 0$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με το “=” να ισχύει για $x=1$.

Έτσι έχουμε $g''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και η g' είναι συνεχής στο 1. Άρα στο $(0,+\infty)$ η g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Αφού η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ η C_g δεν έχει σημεία καμπής.

ii. Έστω ε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1,g(1))$, τότε

$$\varepsilon: y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow$$

$$y-\left(\frac{5}{6}e+3\right)=\left(\frac{1}{2}e+1\right)(x-1)\Leftrightarrow$$

$$y=\left(\frac{1}{2}e+1\right)x+\frac{1}{3}e+2.$$

Επειδή η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ τα σημεία της C_g είναι πάνω από τα σημεία της εφαπτομένης ε που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο, εκτός του σημείου επαφής.

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g(x)\ge y$

$$\Leftrightarrow e^x-\frac{1}{6}ex^3+x+2\ge\left(\frac{1}{2}e+1\right)x+\frac{1}{3}e+2\Leftrightarrow$$

$$e^x-\frac{1}{6}ex^3+x+2\ge\frac{1}{2}ex+x+\frac{1}{3}e+2\Leftrightarrow$$

$$e^x-\frac{1}{6}ex^3\ge\frac{1}{2}ex+\frac{1}{3}e\Leftrightarrow e^{x-1}-\frac{1}{6}x^3\ge\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}.$$

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

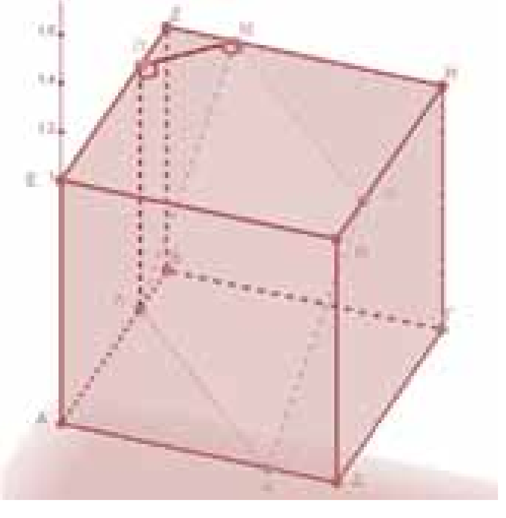
Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 393 (ΤΕΥΧΟΣ 124)

Δίνεται κύβος ΑΒΓΔΕΖΗΘ με ακμή $\alpha=1$, απέναντι έδρες τις ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ και με κατακόρυφες ακμές τις ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ και ΔΘ. Στην ακμή ΑΔ θεωρούμε τμήμα $\Delta K=\frac{1}{4}$, στην ΒΑ τμήμα $B\Lambda=\frac{1}{4}$, στη ΖΗ τμήμα $ZM=\frac{1}{4}$ και στην ΘΗ τμήμα $\Theta N=\frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ.

Φρουντζής Βασίλης - Αγρίνιο

ΛΥΣΗ Σαμουηλίδης Χρήστος - Θεσσαλονίκη



Από την ισότητα $\frac{AK}{A\Delta}=\frac{A\Lambda}{AB}=\frac{3}{4}$ συμπεραίνουμε ότι $K\Lambda//B\Delta$. Ομοίως $MN//\Theta Z$ και από την προφανή παραλληλία των διαγωνίων ΒΔ, ΘΖ προκύπτει ότι $K\Lambda//MN$.

Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΛ, ΗΜΝ έχουμε

$$K\Lambda=MN\left(=\sqrt{2}\frac{3}{4}\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

οπότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Από το Λ φέρουμε κάθετη ΛΠ στο επίπεδο της άνω βάσης ΕΖΗΘ, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΜΛ έχουμε:

$$M\Lambda^2=\Pi M^2+\Pi\Lambda^2=\Pi Z^2+ZM^2+\alpha^2$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+1=\frac{9}{8}$$

Άρα $M\Lambda=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}=K\Lambda$.

Επιπλέον,

$\Pi\hat{M}N=180^o-Z\hat{M}\Pi-H\hat{M}N=180^o-45^o-45^o=90^o$ άρα, $\Pi M\perp MN$. Τέλος, $M\Pi\perp\Pi\Lambda$, οπότε $MN\perp M\Lambda$. Επομένως το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο με εμβαδόν $(K\Lambda MN)=M\Lambda^2=\frac{9}{8}$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Καραβότας Δημήτριος - Κ. Αχαΐα, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι. Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

ΑΣΚΗΣΗ 394 (ΤΕΥΧΟΣ 124)

Να βρείτε όλους τους ακέραιους κ ώστε ο αριθμός $A=\frac{3\kappa+17}{7\kappa-31}$ να είναι ακέραιος.

Τσιλιακός Λευτέρης - Γαλάτσι

ΛΥΣΗ Καραβότας Δημήτριος - Κ. Αχαΐα.

Έστω ότι ο αριθμός Α είναι ακέραιος. Τότε ο αριθμός $7\kappa-31$ είναι διαιρέτης του $3\kappa+17$, δηλαδή

$$7\kappa-31/3\kappa+17\Rightarrow 7\kappa-31/7(3\kappa+17)$$
$$7\kappa-31/21\kappa+119\Rightarrow 7\kappa-31/21\kappa-93+212$$
$$\Rightarrow 7\kappa-31/[3(7\kappa-31)+212]$$

και επειδή $7\kappa-31/3(7\kappa-31)$, πρέπει:

$$7\kappa-31/212$$

Άρα ο αριθμός $7\kappa-31$ είναι κάποιος από τους αριθμούς $\pm1, \pm2, \pm4, \pm53, \pm106, \pm212$. Εύκολα πλέον διαπιστώνουμε ότι οι μόνες αποδεκτές τιμές του κ είναι οι: $\kappa=5$ και $\kappa=12$.

2η ΛΥΣΗ Ανδρής Ιωάννης (Πολ. Μηχανικός ΕΜΠ) - Αθήνα

Αν υποθέσουμε ότι $A\leq 0$, τότε έχουμε:

$$(3\kappa+17)(7\kappa-31)\leq 0\Rightarrow 21\kappa^2+26\kappa-527\leq 0$$

και επειδή ο κ είναι ακέραιος, ισχύει $-5\le\kappa\le4$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι καμία από τις επιτρεπόμενες τιμές δεν δίνει αποδεκτή λύση.
Αν υποθέσουμε ότι $A>0$ τότε οι όροι του κλάσματος είναι ομόσημοι.

- Αν είναι και οι δυο αρνητικοί, τότε πρέπει $\kappa<-5,66$ και $\kappa<4,43$ δηλαδή $\kappa<-5,66$ και συγχρόνως $3\kappa+17\le7\kappa-31\Rightarrow\kappa\ge12$, άτοπο.
- Αν είναι και οι δυο θετικοί, τότε πρέπει $3\kappa+17>0,\ 7\kappa-31>0$ και $3\kappa+17\ge7\kappa-31$ απ' όπου τελικά βρίσκουμε ότι $4<\kappa\le12$.

Εύκολα πλέον, με δοκιμές, διαπιστώνουμε ότι η μόνες αποδεκτές τιμές για το κ είναι οι: $\kappa=5,\ \kappa=12$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Καραβότας Δημήτριος - Κ. Αχαΐα, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι. Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

ΑΣΚΗΣΗ 395 (ΤΕΥΧΟΣ 124)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$(y^2+xz)(z^2+xy)(x^2+yz)\ge4xyz(x^2z+z^2y+y^2x-xyz)$$

και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=y=z$.

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Η αποδεικτέα γράφεται ισοδύναμα:

$$(y^2+xz)(z^2+xy)(x^2+yz)\ge4x^2y^2z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2+xz}{yz}\cdot\frac{z^2+xy}{zx}\cdot\frac{x^2+yz}{xy}\ge4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)\ge4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1\right)$$

Αν θέσουμε

$$\alpha=\frac{x}{y},\ \beta=\frac{y}{z},\ \gamma=\frac{z}{x}$$

αρκεί να δείξουμε ότι αν $\alpha\beta\gamma=1$, τότε

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\ge4(\alpha+\beta+\gamma-1)$$

Ισχύει:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-1$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-1\ge4(\alpha+\beta+\gamma)-4$$

δηλαδή,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}\ge4 \text{ ή}$$

$$3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{9}{\alpha+\beta+\gamma}\ge12,\ (1)$$

Αλλά,

$$3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{9}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{9}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\ge4\sqrt[4]{\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3\cdot9}{\alpha+\beta+\gamma}},\quad(2)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\frac{9}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\Leftrightarrow(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)=9$$

$$\overset{\alpha\beta\gamma=1}{\Leftrightarrow}(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=4\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma$$

Επειδή $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ge3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=3$ και

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$\ge\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

Έτσι, από την (2) έχουμε

$$4\sqrt[4]{\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3\cdot9}{\alpha+\beta+\gamma}}\ge4\sqrt[4]{\frac{9\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\cdot9}{\alpha+\beta+\gamma}}=4\sqrt[4]{81}=12$$

Από την τελευταία και την (2) προκύπτει η (1).

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

ΑΣΚΗΣΗ 396 (ΤΕΥΧΟΣ 124)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν $\alpha>0$ και $\beta^2\le\alpha(\gamma-\alpha)$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3+2\alpha\beta+\gamma\ge\alpha$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

1η ΛΥΣΗ Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

Θεωρούμε το τριώνυμο

$$f(t)=\alpha t^2+2\beta t+\gamma-\alpha,\ \alpha>0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\beta^2-4\alpha(\gamma-\alpha)=4[\beta^2-\alpha(\gamma-\alpha)]\le0$$

από την δοσμένη υπόθεση.

Επομένως, για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(t)\geq 0$. Συνεπώς για $t=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)\geq 0$ δηλαδή

$$\alpha^3+2\alpha\beta+\gamma-\alpha\geq 0\Rightarrow \alpha^3+2\alpha\beta+\gamma\geq\alpha$$

που είναι το ζητούμενο.

2η ΛΥΣΗ Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια

Είναι:

$$\beta^2\leq\alpha(\gamma-\alpha)\Rightarrow\beta^2\leq\alpha\gamma-\alpha^2\Rightarrow\alpha\gamma\geq\alpha^2+\beta^2$$

και αφού $\alpha>0$, παίρνουμε $\gamma\geq\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}>0$.

Έτσι, για την απόδειξη του ζητούμενου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\alpha^3+2\alpha\beta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}\geq\alpha$$

ή, αφού $\alpha>0$, αρκεί $\alpha^4+2\alpha^2\beta+\alpha^2+\beta^2\geq\alpha^2$,

που ισχύει, αφού απορρέει από την προφανή

$$(\alpha^2+\beta)^2\geq 0$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, Τζαφέρης Σωτήρης – Πετρούπολη.

ΑΣΚΗΣΗ 397 (ΤΕΥΧΟΣ 125)

Θεωρούμε την έλλειψη

$$(c):\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta>0$$

και τις εφαπτόμενες Ax, By στα σημεία τομής της A, B με τον άξονα $x'x$. Η εφαπτομένη της άνω ημιέλλειψης σε τυχαίο σημείο της M τέμνει τις Ax, By στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το γινόμενο $A\Gamma\cdot B\Delta$ είναι σταθερό.

β. Αν P είναι η προβολή του M στην AB, τότε η PM είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{P}\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $PM\cdot\Gamma\Delta$ είναι σταθερό, αν και μόνο αν η (c) είναι κύκλος και να το υπολογίσετε.

Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια

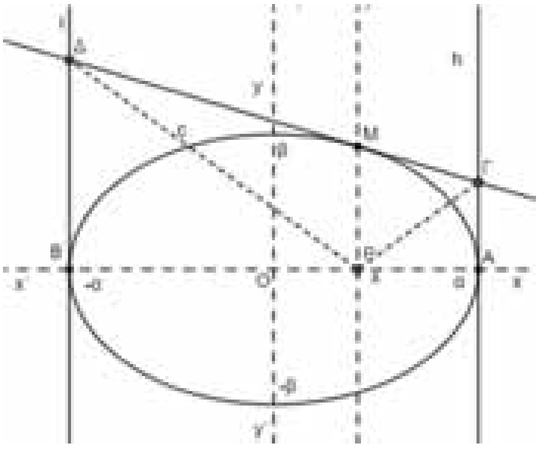
ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

α. Η άνω ημιέλλειψη εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$y(x)=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2},\ (1)$$

οπότε θεωρώντας στο σχήμα $OP=x$, η κλίση εφω της ΓΔ εκφράζεται από την παράγωγο της $y(x)$ για το σημείο M, δηλαδή:

$$\text{εφω}=y'(x)=\frac{-\beta x}{\alpha\sqrt{\alpha^2-x^2}},\ (2)$$



Αλλά:

$$\text{εφω}=\frac{y_M-y_\Gamma}{x_M-x_\Gamma}=\frac{y(x)-\Gamma A}{x-\alpha}$$

$$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}\frac{-\beta x}{\alpha\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}-\Gamma A}{x-\alpha}$$

$$\Rightarrow\Gamma A=\beta\sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}},\quad(3)$$

Επίσης, έχουμε:

$$\text{εφω}=\frac{y_M-y_\Delta}{x_M-x_\Delta}=\frac{y(x)-B\Delta}{x-(-\alpha)}$$

$$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}\frac{-\beta x}{\alpha\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}-B\Delta}{x+\alpha}$$

$$\Rightarrow B\Delta=\beta\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}},\quad(4)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την (3) με την (4) έχουμε $A\Gamma\cdot B\Delta=\beta^2$ (σταθερό γινόμενο).

β. Επειδή $PA=\alpha-x$ και $PB=\alpha+x$ ισχύει

$$\frac{PA}{PB}=\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\ (5).$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (3) με την (4) έχουμε

$$\frac{\Gamma A}{\Delta B}=\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\overset{(5)}{\Rightarrow}\frac{PA}{PB}=\frac{\Gamma A}{\Delta B}$$

οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΡΓ και ΒΡΔ είναι όμοια. Άρα $\Delta\hat{P}B=\Gamma\hat{P}A$ οπότε και οι αντίστοιχες συμπληρωματικές τους γωνίες είναι ίσες , δηλαδή

$\Delta\hat{P}M = \Gamma\hat{P}M$ οπότε η PM διχοτομεί την γωνία $\Gamma\hat{P}\Delta$.

γ. Καταρχήν ισχύει

$$PM = y(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2},\ (1)\ \text{και}$$

$$\Gamma\Delta = \sqrt{(B\Delta - \Gamma A)^2 + (AB)^2}$$

$$\overset{(3),(4)}{\underset{AB=2\alpha}{\Rightarrow}} \Gamma\Delta = \sqrt{\left(\beta\sqrt{\frac{\alpha + x}{\alpha - x}} - \beta\sqrt{\frac{\alpha - x}{\alpha + x}}\right)^2 + (2\alpha)^2},\ (6)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (6) καταλήγουμε μετά από πράξεις στη σχέση

$$PM \cdot \Gamma\Delta = \frac{2\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^4 + x^2(\beta^2 - \alpha^2)},\ (7).$$

Η σχέση (7) είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή x αν και μόνο αν $\alpha = \beta$, δηλαδή μόνο όταν η (c) είναι κύκλος. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (7) $\alpha = \beta = R$, καταλήγουμε στο σταθερό γινόμενο:

$$PM \cdot \Gamma\Delta = 2R^2$$

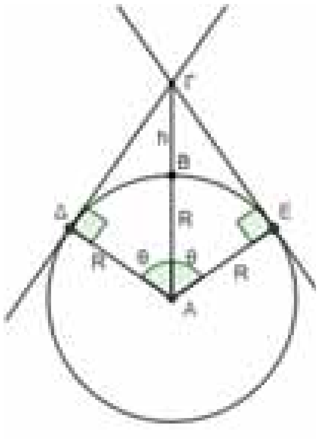
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο, Χωματάς Θεόδωρος – Νίκαια.

ΑΣΚΗΣΗ 398 (ΤΕΥΧΟΣ 125)

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γήινης επιφάνειας που φαίνεται από ύψος h πάνω από την επιφάνειά της. Θεωρήστε ότι η ακτίνα της γης είναι $R = 6370\,\text{km}$.

Λευτέρης και Νίκος Τσιλιακός – Γαλάτσι

ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.



Έστω Γ το σημείο παρατήρησης και θεωρούμε εγκάρσια τομή της γης από επίπεδο που διέρχεται από το Γ και το κέντρο Α της, όπως στο παράπλευρο σχήμα. Το εμβαδό του σφαιρικού τμήματος ΔΒΕ ισούται με

$$E = 2\pi R^2(1 - \text{συν}\theta),$$

(1), όπου

$$\text{συν}\theta = \frac{\Delta A}{A\Gamma} = \frac{R}{R + h},\ (2).$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε

$$E = 2\pi R^2 \frac{h}{R + h},\ (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) $R = 6370$ θα έχουμε

$$E = \frac{254952181{,}9h}{6370 + h}\text{Km}^2$$

όπου η απόσταση h εκφράζεται σε χιλιόμετρα.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη και Χωματάς Θεόδωρος – Νίκαια.

***

Εκ παραδρομής στο προηγούμενο τεύχος, δεν αναφέρθηκαν στους λύτες των ασκήσεων 388, 391, 392 ο συνάδελφος Καρτσακλής Δημήτριος και στην 392 ο συνάδελφος Τσιώλης Γεώργιος.

Προτεινόμενα Θέματα

406. Δίνεται σφαίρα με κέντρο Κ και ακτίνα R. Στην σφαίρα αυτή εγγράφεται ορθός κώνος με κορυφή Α και κέντρο βάσης Λ. Αν ο παραπάνω εγγεγραμμένος κώνος στη δεδομένη σφαίρα (K,R) έχει το μέγιστο δυνατό συνολικό εμβαδό (άθροισμα εμβαδών κωνικής επιφάνειας και βάσης) , να υπολογιστούν σε συνάρτηση με την R:

α. Το ύψος ΑΛ=h του κώνου.

β. Το συνολικό εμβαδό Ε του κώνου.

Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο

407. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 3$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \frac{1}{32}\left[(3 - \alpha)^6 + (3 - \beta)^6 + (3 - \gamma)^6\right] \geq 9$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

408. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A \geq 90^o$ και τα σημεία M_1, M_2 στην ΒΓ ώστε $BM_1 = M_1M_2 = M_2\Gamma$. Αν R, R' είναι οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΑΒΓ και AM_1M_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\dfrac{B\Gamma^2}{AB \cdot A\Gamma} \geq \dfrac{18R'}{5R}$.

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

409. Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha\beta\gamma = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^2\gamma + \gamma^2\beta + \beta^2\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma$

β. $(\alpha + \beta + \gamma)\left(\dfrac{1}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} - \dfrac{1}{6}\right) \leq \dfrac{1}{2}$

Νικητάκης Γεώργιος – Σητεία.

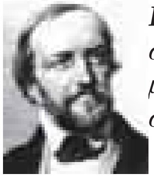
Το Βήμα του Ευκλείδη

Οι αριθμητικές πρόοδοι στη θεωρία αριθμών

Γιώργος Τσαπακίδης **Εμμανουήλ Πετράκης –** μαθητής Γ' Λυκείου

Πολλά ερωτήματα, τα οποία αφορούν αριθμητικές προόδους με όρους φυσικούς αριθμούς, απασχόλησαν κατά καιρούς αρκετούς μαθηματικούς. Τα κυριότερα από τα ερωτήματα αυτά είναι:

1. **Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί που είναι όροι αριθμητικής προόδου διαφοράς ω;**
Το 1837 ο Dirichlet απάντησε στο παραπάνω ερώτημα αποδεικνύοντας την εξής πρόταση:
Αν α, ω θετικοί ακέραιοι με $(\alpha, \omega) = 1$, τότε η αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο το α και διαφορά ω περιέχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών.



Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859): *Γερμανός μαθηματικός, ο οποίος συνέβαλε βαθιά στη θεωρία αριθμών, στη θεωρία των σειρών Φουριέ και στη μαθηματική ανάλυση. Διαδέχθηκε τον Gauss στο πανεπιστήμιο του Göttingen. Στα στοιχειώδη μαθηματικά είναι γνωστός κυρίως από την "αρχή της περιστεροφωλιάς".*

2. **Υπάρχει αριθμητική πρόοδος της οποίας όλοι οι όροι να είναι πρώτοι αριθμοί;**
Προφανώς και όχι. Έστω ότι $\alpha_1 = p$ όπου p πρώτος. Τότε $\alpha_{p+1} = \omega p + p = (\omega + 1)p$ ο οποίος είναι σύνθετος.
3. **Υπάρχει αριθμητική πρόοδος οποιουδήποτε μήκους, της οποίας όλοι οι όροι να είναι πρώτοι;**
Η απάντηση δόθηκε το 2004 από τους Ben Green και Terence Tao, η οποία ήταν καταφατική. Μάλιστα το θεώρημα αναφέρει:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν άπειρες αριθμητικές πρόοδοι με n διαδοχικούς όρους που να είναι πρώτοι.
Το παραπάνω θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας τέτοιας αριθμητικής προόδου, ενώ δεν την προσδιορίζει. Η απόδειξη του είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Έχει βρεθεί (με υπολογιστή) αριθμητική πρόοδος με έως 27 διαδοχικούς όρους που είναι πρώτοι αριθμοί.

Ben Green (1977-): *Σύγχρονος Βρετανός μαθηματικός, καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Εργάζεται κυρίως στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών και τη Συνδυαστική. Έχει λάβει πλήθος βραβείων για τη μέχρι τώρα συνεισφορά του.*

Terence Tao (1975-): *Αυστραλοαμερικανός μαθηματικός Κινεζικής καταγωγής, καθηγητής μαθηματικών στο UCLA. Είναι ο νεότερος που έχει κατακτήσει χάλκινο, ασημένιο και χρυσό μετάλλιο στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα στην ηλικία των 11, 12 και 13 ετών αντίστοιχα, γι' αυτό και ονομάστηκε "ο Μότσαρτ των Μαθηματικών". Ασχολείται με την Αναλυτική Θεωρία Αριθμών, τις μερικές διαφορικές εξισώσεις και τη Συνδυαστική. Του έχουν απονεμηθεί πολλά βραβεία, με κορυφαίο το βραβείο Fields το 2006.*

4. **Αν χωρίσουμε το $\mathbb{N}$ σε υποσύνολα που ανά δύο δεν έχουν κοινά στοιχεία τότε περιέχει κάποιο από αυτά αριθμητική πρόοδο;**
Στο ερώτημα αυτό απάντησε το 1927 ο Van der Waerden με το θεώρημα:
Για δεδομένους θετικούς ακεραίους r, k υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε αν το σύνολο $\{1,2,\ldots,n\}$ χωριστεί σε r υποσύνολα που ανά δύο δεν έχουν κοινά στοιχεία, τότε ένα τουλάχιστον από τα υποσύνολα αυτά θα περιέχει k στοιχεία που να είναι όροι αριθμητικής προόδου.

Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996): *Ολλανδός μαθηματικός, καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Ζυρίχης. Ασχολήθηκε με την αφηρημένη άλγεβρα, την αλγεβρική γεωμετρία, την τοπολογία, τη θεωρία αριθμών, τη συνδυαστική, την ανάλυση, τις πιθανότητες, τη στατιστική και την κβαντική μηχανική.*

Τώρα ήρθε η ώρα να μελετήσουμε μία ποικιλία προβλημάτων, ανάλογων των προηγούμενων θεωρημάτων με στοιχειώδη μέσα.

Προβλήματα

1. **Πόσοι το πολύ πρώτοι περιέχονται ως διαδοχικοί όροι σε μία αριθμητική πρόοδο με διαφορά 12;**
2. **Από τους διαδοχικούς όρους της αριθμητικής προόδου $\{1,4,7,\dots,100\}$ επιλέγουμε 19 αριθμούς. Δείξτε ότι ανάμεσα στους 19 αυτούς αριθμούς υπάρχουν 2 των οποίων το άθροισμα είναι 104.**
3. **Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = 4\nu + 3$ περιέχει άπειρους πρώτους.**
4. **Αν μία αριθμητική πρόοδος με όρους θετικούς ακεραίους περιέχει ως όρο ένα τέλειο τετράγωνο, να δείξετε ότι άπειροι όροι της είναι τέλεια τετράγωνα.**
5. **Αν το σύνολο $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ διαμεριστεί στα υποσύνολα A, B, δείξτε ότι ένα τουλάχιστον από αυτά περιέχει τρία στοιχεία που να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.**
6. **Είναι δυνατόν το να διαμεριστεί το $\mathbb{N}$ σε δύο υποσύνολα έτσι, ώστε κανένα να μην περιέχει άπειρη αριθμητική πρόοδο;**
7. **Αν $n \geq 3$ όροι της αριθμητικής προόδου $p, p+\omega, p+2\omega, \dots, p+(n-1)\omega$ είναι πρώτοι αριθμοί, δείξτε ότι ο ω διαιρείται από κάθε πρώτο $q < n$.**
8. **Δείξτε ότι υπάρχει αριθμητική πρόοδος θετικών ακεραίων στην οποία $m \geq 2$ το πλήθος διαδοχικοί όροι να είναι πρώτοι ανά δύο μεταξύ τους.**
9. **Αν $\alpha, \beta, \kappa, \nu$ θετικοί ακέραιοι και $(\kappa, \nu) = 1$ δείξτε ότι οι κοινοί όροι των αριθμητικών προόδων $\alpha, \alpha+\kappa, \alpha+2\kappa, \alpha+3\kappa, \dots$ και $\beta, \beta+\nu, \beta+2\nu, \beta+3\nu, \dots$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = \kappa\nu$.**
10. **Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = 8\nu + 7$ περιέχει άπειρους πρώτους.**

Ακολουθούν οι λύσεις των προβλημάτων

1) Έστω οι ν διαδοχικοί πρώτοι $\alpha, \alpha+12, \alpha+24, \dots, \alpha+12(\nu-1)$. Προφανώς ο α είναι πρώτος.

1. Αν $\alpha = 2$ τότε $\alpha + 12 = 14$ (σύνθετος), δηλαδή $\nu = 1$.
2. Αν $\alpha = 3$ τότε $\alpha + 12 = 15$ (σύνθετος), δηλαδή $\nu = 1$.
3. Αν $\alpha \geq 5$ παίρνουμε τις υποπεριπτώσεις:
   - 3.1 Αν $\alpha = 5\kappa$ τότε $5\kappa + 5 \cdot 12 = 5(\kappa + 12)$ (σύνθετος), άρα $\nu \leq 5$. Για $\kappa = 1$ έχουμε την αριθμητική πρόοδο 5,17,29,41,53 που επαληθεύει την ισότητα, δηλαδή $\nu = 5$.
   - 3.2 Αν $\alpha = 5\kappa + 1$ τότε $(5\kappa + 1) + 2 \cdot 12 = 5(\kappa + 5)$ (σύνθετος), άρα $\nu \leq 2$.
   - 3.3 Αν $\alpha = 5\kappa + 2$ τότε $(5\kappa + 2) + 4 \cdot 12 = 5(\kappa + 10)$ (σύνθετος), άρα $\nu \leq 4$.
   - 3.4 Αν $\alpha = 5\kappa + 3$ τότε $(5\kappa + 3) + 12 = 5(\kappa + 3)$ (σύνθετος), άρα $\nu \leq 1$.
   - 3.5 Αν $\alpha = 5\kappa + 4$ τότε $(5\kappa + 4) + 3 \cdot 12 = 5(\kappa + 8)$ (σύνθετος), άρα $\nu \leq 3$.

Από τα παραπάνω $\nu_{max} = 5$ (πχ. 5,17,29,41,53).

2) Παρατηρούμε ότι $4 + 100 = 7 + 97 = 10 + 94 = \dots = 46 + 58 = 49 + 55 = 104$ και ότι οι 1,52 δεν μπορούν σε συνδυασμό με κάποιον άλλο αριθμό να δώσουν άθροισμα 104.

Χωρίζουμε το $\{1,4,7,\dots,100\}$ στα υποσύνολα:

$A_1 = \{4,100\}, A_2 = \{7,97\}, A_3 = \{10,94\}, \dots, A_{15} = \{46,58\}, A_{16} = \{49,55\}, A_{17} = \{1\}, A_{18} = \{52\}$.

Το άθροισμα των στοιχείων στα $A_1, A_2, \dots, A_{16}$ είναι 104, ενώ τα A_{17}, A_{18} περιέχουν από μόνο ένα στοιχείο. Από την αρχή της περιστεροφωλιάς, 2 από τους 19 αριθμούς που επιλέγουμε θα ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο (ένα εκ των $A_1, A_2, \dots, A_{16}$) άρα οι 2 αυτοί αριθμοί έχουν άθροισμα 104.

3) Μία άμεση απόδειξη προκύπτει από το θεώρημα Dirichlet, καθώς $(3,4) = 1$. Ας δούμε όμως και μία απόδειξη με θεμελιώδη μέσα.

Έστω ότι οι πρώτοι της μορφής $4\nu + 3$ είναι πεπερασμένοι (έστω οι $p_1, p_2, \dots, p_k$) τότε ο $A = 4p_1p_2 \dots \cdot p_k - 1$ είναι της μορφής $4\nu + 3$.

Όμως κανένας από τους $p_1, p_2, \ldots, p_k$ δεν διαιρεί το A διότι θα έπρεπε να διαιρεί και το 1, άτοπο. Ακόμη, αν ο A δεν είχε πρώτο διαιρέτη της μορφής $4\nu+3$, καθώς είναι περιττός, θα έπρεπε όλοι οι διαιρέτες του να είναι της μορφής $4\nu+1$.

Όμως, με αυτόν τον τρόπο θα είχαμε $A=(4\nu_1+1)(4\nu_2+2)\cdots\left(4\nu_\mu+1\right)\equiv 1(mod4)$, άτοπο.

Επομένως ο A έχει πρώτο διαιρέτη της μορφής $4\nu+3$, διαφορετικό από τους $p_1, p_2, \ldots, p_k$, άτοπο. Άρα οι πρώτοι της μορφής $4\nu+3$ είναι άπειροι.

4) Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu=\kappa\nu+\omega$.

Για κάποιο ν, έστω για $\nu=\alpha$, θα είναι $\beta^2=\kappa\alpha+\omega$. Πρέπει να βρούμε άπειρα ν ώστε ο $\kappa\nu+\omega$ να είναι τέλειο τετράγωνο. Θέτουμε $\nu=\alpha+x$, έτσι:

$\alpha_\nu=\kappa(\alpha+x)+\omega=(\kappa\alpha+\omega)+x\kappa=\beta^2+x\kappa.$

Επιλέγουμε x ώστε να συμπληρώσουμε το τετράγωνο, δηλαδή $x\kappa=2\beta\cdot\lambda\kappa+(\lambda\kappa)^2 \Leftrightarrow x=2\beta\lambda+\lambda^2\kappa$, για κάθε φυσικό λ.

Άρα $\alpha_\nu=\beta^2+2\beta\lambda\kappa+\lambda^2\kappa^2=(\beta+\kappa\lambda)^2$ για άπειρα λ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

5) Έστω ότι γίνεται να χωρίσουμε το S σε δύο υποσύνολα, ώστε κανένα από τα 2 να μην περιέχει 3 διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $5\in A$.

- Αν $3\in A$ τότε $3{,}5\in A \Rightarrow 1{,}4{,}7\in B$ διότι οι $(1{,}3{,}5), (3{,}4{,}5), (3{,}5{,}7)$ αποτελούν αριθμητικές προόδους. Όμως $1{,}4{,}7\in B$ με $(1{,}4{,}7)$: αριθμητική πρόοδος. Άρα $3\in B$. Όμοια $7\in B$. Με το ίδιο σκεπτικό θα συνεχίσουμε την υπόλοιπη απόδειξη.
- Αν $1\in A$ τότε $1{,}5\in A \Rightarrow 9\in B$

$3{,}9\in B \Rightarrow 6\in A$	$2{,}5{,}8\in A$, άτοπο. Άρα $1\in B$. Όμοια $9\in B$.
$7{,}9\in B \Rightarrow 8\in A$	$1{,}3\in B \Rightarrow 2\in A$
$6{,}8\in A \Rightarrow 4\in B$	$7{,}9\in B \Rightarrow 8\in A$
$3{,}4\in B \Rightarrow 2\in A$	$2{,}5{,}8\in A$, άτοπο και η απόδειξη ολοκληρώθηκε

6) Πρόκειται για ένα καθαρά κατασκευαστικό πρόβλημα. Έστω ότι υπήρχε μία τέτοια αριθμητική πρόοδος. Τότε θα είχε μία σταθερή διαφορά ω. Χωρίζουμε το $\mathbb{N}$ στα

$A=\{1,3,4,9,10,11,12,13,14,15,16,33,\ldots\}$

$B=\{2,5,6,7,8,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,65,\ldots\}$

Δηλαδή στα $A=\{\kappa: 2^{2\lambda-1}<\kappa\le 2^{2\lambda}, \kappa,\lambda\in\mathbb{N}\}$, $B=\{\kappa: 2^{2\lambda}<\kappa\le 2^{2\lambda+1}, \kappa,\lambda\in\mathbb{N}\}$.

Έστω ότι το A περιέχει μία άπειρη αριθμητική πρόοδο, την α_ν. Είναι $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$, όμως για κάποιο ν θα έπρεπε $2^{2\lambda-1}<\alpha_\nu\le 2^{2\lambda}$, και $2^{2\lambda+1}<\alpha_{\nu+1}\le 2^{2\lambda+2}$. Άρα $\omega=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu>2^{2\lambda+1}-2^{2\lambda}=2^{2\lambda}$. Είναι φανερό πως για μεγάλα λ καταλήγουμε σε άτοπο. Όμοια αν το B περιέχει μία άπειρη αριθμητική πρόοδο.

Ο παραπάνω διαχωρισμός δεν είναι μοναδικός. Θα μπορούσαμε πχ. να θεωρήσουμε:

$A=\{1,3,4,7,8,9,13,14,15,16,21,22,23,24,25,31,32,33,34,35,36,43,\ldots\}$

$B=\{2,5,6,10,11,12,17,18,19,20,26,27,28,29,30,37,38,39,40,41,42,50,\ldots\}$.

Η ουσία του διαχωρισμού είναι τα "συνεχόμενα" στοιχεία σε ένα υποσύνολο να αυξάνονται συνεχώς κάτι που οδηγεί σε άτοπο, διότι η αριθμητική πρόοδος έχει σταθερή διαφορά.

7) Κατ' αρχάς ορίζουμε την ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\kappa=p+\omega\kappa$. Αν $p<n$ τότε $p\le n-1$ και $\alpha_p=p+\omega p=(p+1)\omega$ (σύνθετος), άρα $p\ge n$. Έστω q πρώτος μικρότερος του n. Τότε οι $p, p+\omega, p+2\omega, \ldots, p+(q-1)\omega$ είναι πρώτοι. Έστω προς άτοπο ότι $q\nmid\omega$.

Αν κάποιος από τους παραπάνω αριθμούς διαιρείται με το q, τότε είναι σύνθετος διότι $p\ge n>q$ άρα είναι διάφορος του q, άτοπο. Άρα οι αριθμοί αυτοί αφήνουν υπόλοιπα $1,2,3,\ldots,q-1$ $modulo$ q. Οι αριθμοί όμως είναι q το πλήθος, άρα δύο από αυτούς αφήνουν ίδιο υπόλοιπο $modulo\ q$, έστω οι $\alpha_\mu, \alpha_\lambda$ με $1\le\mu<\lambda\le q-1$.

$\alpha_\mu\equiv\alpha_\lambda(modq)\Leftrightarrow p+\mu\omega\equiv p+\lambda\omega(modq)\Leftrightarrow\omega(\mu-\lambda)\equiv 0(modq)\overset{q\nmid\omega}{\Leftrightarrow}\mu-\lambda\equiv 0(modq)\Leftrightarrow\mu\equiv\lambda(modq)$, το οποίο είναι άτοπο διότι $1\le\mu<\lambda\le q-1$. Άρα $q|\omega$ για κάθε πρώτο q μικρότερο του n.

8) Πρόκειται για άλλο ένα πρόβλημα που απαιτεί κατασκευή, ενώ αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος των Tao και Green. Παίρνοντας αφορμή από το προηγούμενο παράδειγμα θα μελετήσουμε m όρους μίας αριθμητικής προόδου με διαφορά $m!$. Παίρνουμε την ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu=\nu m!+1$. Θα δείξουμε ότι οι m πρώτοι της όροι είναι πρώτοι ανά 2.

Πράγματι για $m\ge\kappa>\lambda\ge 1$ είναι: $(\alpha_\kappa,\alpha_\lambda)=(\kappa m!+1,\lambda m!+1)=\left((\kappa-\lambda)m!,\lambda m!+1\right)$.

Έστω p ένας πρώτος διαιρέτης του $(\kappa-\lambda)m!$. Αν $p|m!$ τότε $p\le m$, ενώ αν $p|\kappa-\lambda$ τότε $p\le\kappa-\lambda<m$. Σε

κάθε περίπτωση $p \leq m$. Όμως, αν $p \leq m$ τότε $p|m! \Rightarrow p|\lambda m! \Rightarrow p \nmid \lambda m! + 1$. Άρα δεν υπάρχει πρώτος p που να διαιρεί και τον α_κ και τον α_λ, άρα οι $\alpha_\kappa, \alpha_\lambda$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

9) Ορίζουμε τις ακολουθίες με γενικούς όρους $\alpha_\lambda = \alpha + \kappa\lambda$ και $\beta_\lambda = \beta + \nu\lambda$ στους φυσικούς με $(\kappa, \nu) = 1$. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\beta \geq \alpha$. Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι οι δύο ακολουθίες έχουν κάποιον κοινό όρο. Πράγματι $\alpha_x - \beta_y = 0 \Leftrightarrow \alpha + \kappa x - \beta - \nu y = 0 \Leftrightarrow \kappa x - \nu y = \beta - \alpha$. Η τελευταία έχει λύση (x, y). Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε θέτοντας πχ. $x = (\beta - \alpha)\gamma$ και $y = (\beta - \alpha)\delta$, άρα η παραπάνω σχέση γράφεται $\kappa(\alpha - \beta)\gamma - \nu(\alpha - \beta)\delta = (\alpha - \beta)$. Για $\alpha = \beta$ ισχύει, ενώ για $\alpha \neq \beta$ η σχέση γράφεται $\kappa\gamma - \nu\delta = 1$, που έχει λύση διότι $(\kappa, \nu) = 1$. Ακόμη πρέπει $\kappa x \equiv \beta - \alpha (mod \nu)$ και $\nu y \equiv \alpha - \beta (mod \kappa)$. Οι δύο αυτές σχέσεις έχουν μία λύση $mod \nu$ και $mod \kappa$ αντίστοιχα, διότι $(\kappa, \nu) = 1$.

Έστω (x_0, y_0)η ελάχιστη λύση της $\alpha_x - \beta_y = 0$. Από τη στιγμή που οι λύσεις (x, y) είναι μοναδικές $mod \nu$ και $mod \kappa$, πρέπει $(x, y) = (x_0 + p\nu, y_0 + q\kappa)$, με p, q θετικούς ακεραίους. Άρα:

$$\begin{aligned} 0 = \alpha_x - \beta_y = \alpha_{x_0 + p\nu} - \beta_{y_0 + q\kappa} &= \alpha + \kappa(x_0 + p\nu) - \beta - \nu(y_0 + q\kappa) \\ &= (\alpha + \kappa x_0 - \beta - \nu y_0) + \kappa\nu(p - q) = \kappa\nu(p - q) \Leftrightarrow p = q. \end{aligned}$$

Άρα $(x, y) = (x_0 + p\nu, y_0 + p\kappa)$.

Τέλος $\alpha_{x_0 + (p+1)\nu} - \alpha_x \ = \alpha + \kappa[x_0 + (p + 1)\nu] - \alpha - \kappa[x_0 + p\nu] = \kappa\nu$, ο οποίος είναι σταθερός. Άρα οι κοινοί όροι των δύο αριθμητικών προόδων αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = \kappa\nu$.

10) Πρόκειται για μία γενίκευση του 1ου προβλήματος. Έστω ότι οι πρώτοι της μορφής $8\nu + 7$ είναι πεπερασμένοι (έστω οι $p_1, p_2, \dots, p_k$). Θεωρούμε τον $A = (p_1 p_2 \dots \cdot p_k)^2 - 2 \equiv 7 (mod 8)$. Έστω p ένας πρώτος διαιρέτης του A. Κανένας από τους $p_1, p_2, \dots, p_k$ δεν διαιρεί το A διότι θα έπρεπε να διαιρεί και το 2, άτοπο.

Άρα ο p δεν είναι της μορφής $8\nu + 7$ (1).

$p|(p_1 p_2 \dots \cdot p_k)^2 - 2 \Leftrightarrow (p_1 p_2 \dots \cdot p_k)^2 \equiv 2 (mod p) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow 2|\frac{p^2-1}{8} \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 (mod 8) \overset{(1)}{\Rightarrow} p \equiv 1 (mod 8)$. Όμως αν όλοι οι πρώτοι διαιρέτες του A ήταν της μορφής $8\nu + 1$, τότε και ο A θα ήταν της μορφής $8\nu + 1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα οι πρώτοι της μορφής $8\nu + 7$ είναι άπειροι.

*Χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο **Legendre** δηλαδή το $\left(\frac{\alpha}{p}\right)$, και η ιδιότητα $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Για το σύμβολο Legendre ισχύει: $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1$, αν το α είναι τετραγωνικό κατάλοιπο $mod p$ και $p \nmid \alpha$

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = 0, \text{ αν } p|\alpha, \qquad \left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1, \text{ αλλιώς.}$$

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε προβλήματα ανάλογα των προηγουμένων, αλλά είναι αμφίβολο αν οι λύσεις τους είναι εξίσου εύκολες όπως φαίνεται για παράδειγμα στα επόμενα προβλήματα:

i. Έστω η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 3$. Πόσοι από τους 1000 πρώτους όρους είναι πρώτοι αριθμοί;
ii. Σχηματίζουμε την αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 7$ με 1000 όρους. Ποιος από τους όρους αυτούς είναι σχετικά πρώτος με τους περισσότερους όρους της αριθμητικής προόδου;
iii. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 6$ και $\omega = 5$. Πόσοι από τους 2000 πρώτους όρους της διαιρούνται με το 8; Πόσοι με το 13;
iv. Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 4$ είναι τέλειοι κύβοι;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. Adler, J. E. Coury, The Theory of Numbers, Jones and Barlett Publishers, Boston 1995.
2. J. Hunter, Αριθμοθεωρία (μετάφραση Ν. Κριτικού), Σύλλογος προς διάδοσιν ωφέλιμων βιβλίων, Αθήνα, 1974.
3. A. Hurwitz, Μαθήματα Αριθμοθεωρίας (μετάφραση Ν. Κριτικού), Έκδοση Γ.Α. Πνευματικός, Αθήνα, 1981.
4. Δ. Κοντογιάννης, Βασικά θέματα Μαθηματικών Διαγωνισμών, Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, Λευκωσία, 2012.
5. W. Sierpinski, 250 Προβλήματα της στοιχειώδους θεωρίας αριθμών (μετάφραση Σ. Μακράς), Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα, 1970.
6. Ιστότοπος mathematica.gr

Προσέγγιση των σημείων BROCARD και του σημείου LEMOINE

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Στο τέλος του 19ου αιώνα άρχισε μία συστηματική μελέτη στο **επίπεδο του τριγώνου**. Πρωτοστάτες της κίνησης αυτής θεωρούνται οι **Brocard, Lemoine και Neuberg**. Μελετήθηκαν αξιόλογα σημεία, ευθείες, κύκλοι και σχέσεις μεταξύ τους. Το σύνολο των αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκαν πήρε το όνομα Γεωμετρία του τριγώνου. Μετά το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα η Γεωμετρία του τριγώνου είχε ολοκληρώσει τον κύκλο της ανάπτυξής της.

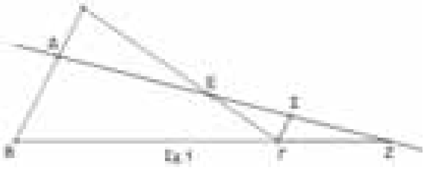
Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε τα σημεία Brocard, Lemoine καθώς και μερικές από τις πιο σημαντικές τους ιδιότητες. Οι έννοιες που θα διαπραγματευτούμε είναι απαραίτητες σε διαγωνισμούς Μαθηματικών.

1. Εισαγωγή: Το θεώρημα του **Μενελάου** και το θεώρημα του **Ceva** είναι δύο αξιοσημείωτα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Δεν είναι βέβαιο, ποιος ανακάλυψε το θεώρημα που αναφέρουμε ως θεώρημα του Μενελάου, πάντως η πρώτη εμφάνισή του γίνεται στα *Σφαιρικά* του Μενελάου. Με το θεώρημα του **Μενελάου** μπορούμε να αποδείξουμε ότι τρία σημεία που βρίσκονται πάνω στις ευθείες των πλευρών ενός τριγώνου **είναι συνευθειακά**. Με το θεώρημα του **Ceva** μπορούμε να αποδείξουμε ότι τρείς ευθείες από τις κορυφές τριγώνου **συντρέχουν.**

1.1. Θεώρημα Μενελάου

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε,Ζ των ευθειών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, διαφορετικά των κορυφών του τριγώνου, (ένα από τα τρία σημεία ή και τα τρία είναι στις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου). Τότε τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν ισχύει: $\frac{ΖΓ}{ΖΒ}\cdot\frac{ΔΒ}{ΔΑ}\cdot\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\mathbf{1}$.

Υπόδειξη: • **Ευθύ:** $(\Rightarrow)$ Έστω ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά (Σχ.1).



Φέρουμε την $ΓΣ//ΑΒ$,τότε:

— $Ζ\overset{\Delta}{Γ}Σ \approx Ζ\overset{\Delta}{Β}Δ \Rightarrow \frac{ΖΓ}{ΖΒ}=\frac{ΓΣ}{ΔΒ}$ (1).

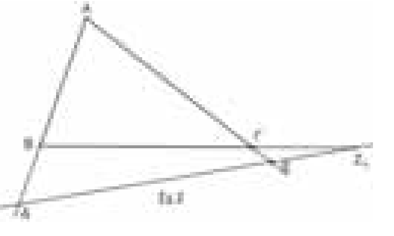
— $Ε\overset{\Delta}{Δ}Α \approx Ε\overset{\Delta}{Γ}Σ \Rightarrow \frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{ΔΑ}{ΓΣ}$ (2).

Πολλαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και παίρνουμε: $\frac{ΖΓ}{ΖΒ}\cdot\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{ΔΑ}{ΔΒ} \Leftrightarrow \frac{ΖΓ}{ΖΒ}\cdot\frac{ΔΒ}{ΔΑ}\cdot\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=1$.

• $(\Leftarrow)$ **Αντίστροφα:** Έστω ότι το σημείο Ζ είναι στην προέκταση του ΒΓ. Τότε τα σημεία Δ,Ε είναι είτε εσωτερικά είτε στην προέκταση των πλευρών ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα και ισχύει:

$$\frac{ΖΓ}{ΖΒ}\cdot\frac{ΔΒ}{ΔΑ}\cdot\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=1 \ (3).$$

Έστω ότι τα σημεία Δ,Ε είναι στην προέκταση των πλευρών ΑΒ,ΑΓ. Τότε η ΔΕ θα τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Z_1 (Σχ.2), οπότε με βάση το πρώτο σκέλος της υπόδειξης θα έχουμε: $\frac{Z_1Γ}{Z_1Β}\cdot\frac{ΔΒ}{ΔΑ}\cdot\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=1$ (4).



Από τις (3), (4) παίρνουμε: $\frac{ΖΓ}{ΖΒ}=\frac{Z_1Γ}{Z_1Β}$, δηλαδή τα σημεία $Ζ, Z_1$ χωρίζουν εξωτερικά την πλευρά ΒΓ στον ίδιο λόγο, οπότε συμπίπτουν.

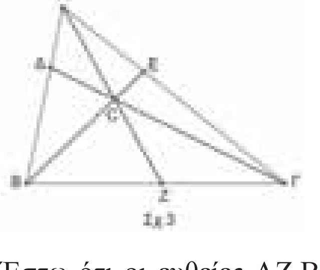
Σημείωση: Μία ευθεία που τέμνει τις ευθείες των πλευρών ενός τριγώνου ονομάζεται **διατέμνουσα** του τριγώνου.

1.2. Θεώρημα CEVA

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε,Ζ των ευθειών ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ αντίστοιχα διαφορετικά των κορυφών του τριγώνου. Τότε οι ευθείες ΑΖ,ΒΕ,ΓΔ συντρέχουν αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{ΔΒ}{ΔΑ}\cdot\frac{ΕΑ}{ΕΓ}\cdot\frac{ΖΓ}{ΖΒ}=\mathbf{1}$$

Υπόδειξη:



• **Ευθύ:** $(\Rightarrow)$ Έστω ότι οι ευθείες ΑΖ,ΒΕ,ΓΔ συντρέχουν στο σημείο C (Σχ.3). Η ΓCΔ είναι διατέμνουσα του τριγώνου ΑΒΖ, οπότε από το θεώρημα

Μενελάου έχουμε: $\frac{\Gamma Z}{\Gamma B}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta A}\cdot\frac{CA}{CZ}=1$ (1).

Όμοια η BCE είναι διατέμνουσα του τριγώνου ΑΖΓ, οπότε $\frac{BZ}{B\Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}\cdot\frac{CA}{CZ}=1\Leftrightarrow\frac{B\Gamma}{BZ}\cdot\frac{EA}{E\Gamma}\cdot\frac{CZ}{CA}=1$ (2).

Πολλαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και έχουμε $\frac{\Delta B}{\Delta A}\cdot\frac{EA}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZB}=1$.

- $(\Leftarrow)$ **Αντίστροφα:** Έστω ότι ισχύει:

$\frac{\Delta B}{\Delta A}\cdot\frac{EA}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZB}=1$ (3) και C το σημείο τομής των ΒΕ,ΓΔ. Αν Z_1 είναι το σημείο τομής της AC με την πλευρά ΒΓ. Τότε έχουμε $\frac{\Delta B}{\Delta A}\cdot\frac{EA}{E\Gamma}\cdot\frac{Z_1\Gamma}{Z_1B}=1$ (4). Από τις (3),(4) παίρνουμε $\frac{Z\Gamma}{ZB}=\frac{Z_1\Gamma}{Z_1B}$, δηλαδή τα σημείο Z,Z_1 χωρίζουν την ΒΓ εσωτερικά η εξωτερικά στον ίδιο λόγο, οπότε συμπίπτουν.

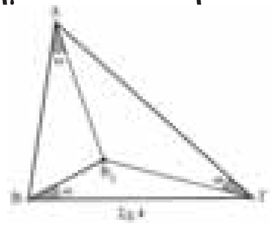
Σημείωση: Αν από τα σημεία Δ, E, Z το ένα είναι εσωτερικό και τα άλλα δύο στις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου, τότε οι ευθείες $AZ, BE, \Gamma\Delta$ συντρέχουν ή είναι παράλληλες.

2. σημεία BROCARD[1]

2.1. Πρόταση: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχει ακριβώς ένα εσωτερικό του σημείο B_1 έτσι ώστε να ισχύει: $B_1\hat{A}B=B_1\hat{B}\Gamma=B_1\hat{\Gamma}A=\omega$.

- Το σημείο B_1 ονομάζεται **πρώτο σημείο Brocard του τριγώνου ΑΒΓ**.
- Η γωνία ω ονομάζεται **γωνία Brocard του τριγώνου ΑΒΓ**.

Απόδειξη: Βήμα 1ο: Ανάλυση

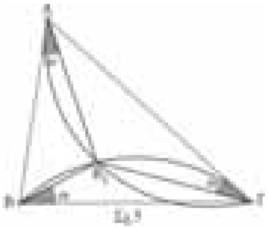


Υποθέτουμε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο B_1 του τριγώνου ΑΒΓ έτσι ώστε να ισχύει:

$B_1\hat{A}B=B_1\hat{B}\Gamma=B_1\hat{\Gamma}A=\omega$. Στο τρίγωνο $BB_1\Gamma$ έχουμε: $B\hat{B_1}\Gamma=180^0-\omega-B_1\hat{\Gamma}B\Leftrightarrow$

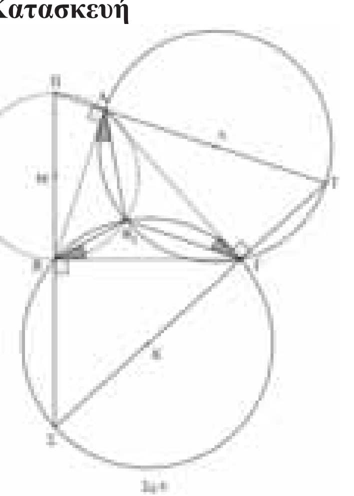
$B\hat{B_1}\Gamma=180^0-\omega-\left(\hat{\Gamma}-\omega\right)\Leftrightarrow B\hat{B_1}\Gamma=180^0-\hat{\Gamma}$.

Όμοια $A\hat{B_1}\Gamma=180^0-\hat{A}$. Άρα το σημείο B_1 είναι η τομή δύο σταθερών κυκλικών τόξων με χορδές ΒΓ, ΑΓ που δέχονται γωνίες $180^0-\hat{\Gamma}$ και $180^0-\hat{A}$ αντίστοιχα.



Αφού $B_1\hat{\Gamma}A=B_1\hat{B}\Gamma$, η ΑΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου που χορδή του είναι η ΒΓ και από το σημείο του B_1 η ΒΓ φαίνεται υπό γωνία $180^0-\hat{\Gamma}$. Όμοια η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου που χορδή του είναι η ΑΓ και από το σημείο B_1 η ΑΓ φαίνεται υπό γωνία $180^0-\hat{A}$.

Βήμα 2ο: Κατασκευή



Φέρουμε καθέτους, στη πλευρά ΑΓ στο Γ, στη πλευρά ΒΓ στο Β και στη πλευρά ΑΒ στο Α οι οποίες τέμνονται στα σημεία Σ, T, Π (Σχ.6).

Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των ορθογωνίων τριγώνων ΒΣΓ και ΓΤΑ κέντρων K,Λ εφάπτονται των πλευρών $A\Gamma, AB$ αντίστοιχα στα σημεία Γ, A και έστω B_1 το δεύτερο σημείο τομής τους (σχ.6). Το B_1 είναι το ζητούμενο σημείο.

Βήμα 3ο: Απόδειξη

Τα τετράπλευρα $B\Sigma\Gamma B_1, AT\Gamma B_1$ είναι εγγεγραμμένα στους περιγεγραμμένους κύκλους των ορθογωνίων τριγώνων ΒΣΓ, ΓΑΤ οπότε

$\Pi\hat{B}B_1=\Sigma\hat{\Gamma}B_1$ και $\Pi\hat{A}B_1=T\hat{\Gamma}B_1$ και

$\Pi\hat{B}B_1+\Pi\hat{A}B_1=\Sigma\hat{\Gamma}B_1+T\hat{\Gamma}B_1=180^0$ Άρα το τετράπλευρο $AB_1B\Pi$ είναι εγγράψιμο. Συνεπώς ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΠΒ κέντρου Μ διέρχεται από το σημείο B_1 και εφάπτεται της ΒΓ στο σημείο Β.

[1] https://www.geogebra.org/m/s9n2tzxn

Έχουμε $\Gamma\hat{B}B_1 = B\hat{A}B_1$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης). Όμοια $B\hat{A}B_1 = A\hat{\Gamma}B_1$.

Τελικά $B\hat{A}B_1 = \Gamma\hat{B}B_1 = A\hat{\Gamma}B_1 = \omega$.

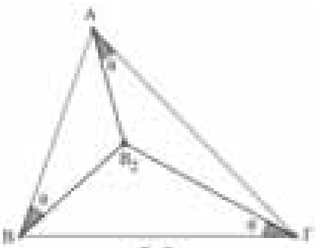
Βήμα 4ο: Διερεύνηση

Το τόξο χορδής $B\Gamma$ που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$ και το τόξο χορδής $A\Gamma$ που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $(A\Gamma, B)$ έχουν κοινό σημείο το Γ και το άλλο άκρο τους είναι εκατέρωθεν του άλλου τόξου. Άρα τα παραπάνω τόξα θα έχουν και δεύτερο κοινό σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Συνεπώς το πρόβλημα έχει πάντα λύση.

Σημείωση: Στις ίσες γωνίες για το 1ο σημείο Brocard η μία πλευρά τους είναι πλευρά του τριγώνου που προκύπτει αν από μία κορυφή του στραφούμε κατά τη θετική φορά καταλήγοντας στην ίδια κορυφή. Αν στραφούμε κατά την αρνητική φορά έχουμε αντίστοιχη πρόταση με την παραπάνω.

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ υπάρχει ακριβώς ένα εσωτερικό του σημείο B_2 έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{B_2\hat{A}\Gamma = B_2\hat{\Gamma}B = B_2\hat{B}A = \theta}.$$

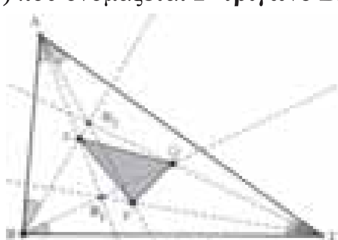


Σχ.7

- Το σημείο B_2 ονομάζεται **2ο σημείο Brocard του τριγώνου $AB\Gamma$.** Η απόδειξη γίνεται όπως και στην πρόταση 2.1.

Σχόλιο 1[2]: Το τρίγωνο $K\Lambda M$ (Σχ.6), είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και έχουν το ίδιο πρώτο σημείο Brocard. Το δεύτερο σημείο Brocard του τριγώνου $K\Lambda M$ είναι το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Σχόλιο 2[3]: Οι ευθείες AB_1, BB_2 - $BB_1, \Gamma B_2$ και ΓB_1, AB_2 που ορίζονται από τις κορυφές του τριγώνου και τα σημεία Brocard B_1, B_2 τεμνόμενες ορίζουν τρίγωνο SQP (σχ. 8) που ονομάζεται **1ο τρίγωνο Brocard**.



Σχ.8

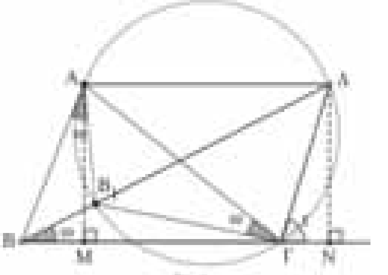
[2] http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Brocard2.html

[3] http://users.math.uoc.gr/pamfilos/gGallery/problems/BrocardFirst.html

2.2. Βασική ιδιότητα

Αν B_1 είναι το πρώτο σημείο Brocard του τριγώνου $AB\Gamma$ και ω η αντίστοιχη γωνία Brocard, τότε είναι: $\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma$

Απόδειξη



Σχ.9

Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB_1\Gamma$ (Σχ.9) εφάπτεται της πλευράς AB στο A (βλέπε κατασκευή του σημείου B_1, πρόταση 2.1) και η BB_1 τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Έστω M, N οι προβολές των A, Δ αντίστοιχα πάνω στη $B\Gamma$. $A\hat{\Delta}B_1 = \omega \Rightarrow A\hat{\Delta}B_1 = \Gamma\hat{B}B_1 \Rightarrow A\Delta // B\Gamma$

$B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma$ (χορδής και εφαπτομένης) $= \tau \Rightarrow B\hat{A}\Gamma = \tau$. Το τετράπλευρο $AMN\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε $AM = \Delta N$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $N\Delta B$ έχουμε:

$$\sigma\varphi\omega = \frac{BN}{\Delta N} = \frac{BM + M\Gamma + \Gamma N}{\Delta N} = \frac{BM}{\Delta N} + \frac{M\Gamma}{\Delta N} + \frac{\Gamma N}{\Delta N} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{BM}{AM} + \frac{M\Gamma}{AM} + \frac{\Gamma N}{\Delta N} = \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi\tau \Leftrightarrow$$

$$\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma.$$

Σημείωση[4]: Αποδεικνύεται ότι στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi\omega \geq \sigma\varphi\frac{\pi}{6}$ (1), όπου ω η γωνία Brocard από το 1ο σημείο Brocard του τριγώνου $AB\Gamma$. Η συνάρτηση συνεφαπτομένη στο $(0,\pi)$ είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή $\omega \in (0,\pi)$, $(1) \Leftrightarrow \omega \leq \frac{\pi}{6}$. Άρα $0 < \omega \leq \frac{\pi}{6}$. Η γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Για τη γωνία θ από το 2ο σημείο Brocard του τριγώνου $AB\Gamma$ όμοια θα είναι $\sigma\varphi\theta = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma$, οπότε $\omega = \theta$.

Στο ισόπλευρο τρίγωνο τα δύο σημεία **Brocard** ταυτίζονται με το **κέντρο βάρους** του τριγώνου.

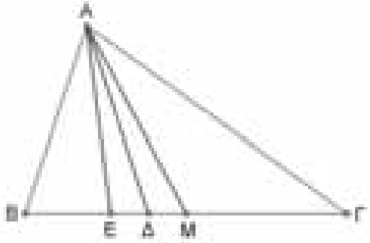
Σχόλιο[5]: Έστω R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AB_1\Gamma$, $BB_1\Gamma, AB_1B$ (σχ.6) και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Ισχύει $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = R^3$.

[4] http://users.sch.gr/giannakopulos/site/images/Ανισοτική_σχέση.pdf

[5] http://users.sch.gr/giannakopulos/site/images/Πρόταση.pdf

3. σημείο LEMOINE: 3.1 Συμμετροδιάμεσος

Ορισμός: *Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο την ΑΜ και διχοτόμο την ΑΔ. Αν Ε είναι το συμμετρικό σημείο του σημείου Μ ως προς το σημείο Δ, τότε το τμήμα ΑΕ ονομάζεται συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ από το Α (Σχ.10).*



Σχ.10

- Κάθε τρίγωνο έχει τρείς συμμετροδιαμέσους.
- Τα τμήματα AM, AE είναι συμμετρικά ως προς το τμήμα $A\Delta$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της $E\hat{A}M$. Συνέπεια αυτού είναι $B\hat{A}E = M\hat{A}\Gamma$ και $B\hat{A}M = E\hat{A}\Gamma$.
- Τα τμήματα AE, AM λέμε ότι είναι ισογώνια ως προς τις πλευρές $AB, A\Gamma$.

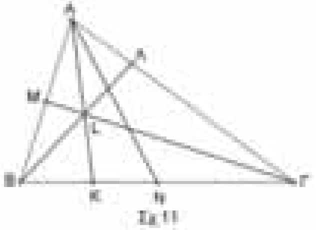
3.2. Πρόταση: Οι συμμετροδιάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Lemoine του τριγώνου.

Απόδειξη: Έστω $AK, B\Lambda, \Gamma M$ οι συμμετροδιάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ και ΑΝ η διάμεσός του.Έχουμε $B\hat{A}K = N\hat{A}\Gamma \Rightarrow$

$$\frac{(ABK)}{(AN\Gamma)} = \frac{AB\cdot AK}{AN\cdot A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{BK}{N\Gamma} = \frac{AB\cdot AK}{AN\cdot A\Gamma} \quad (1)$$

$$B\hat{A}N = K\hat{A}\Gamma \Rightarrow \frac{(BAN)}{(KA\Gamma)} = \frac{AB\cdot AN}{AK\cdot A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{BN}{K\Gamma} = \dfrac{AB\cdot AN}{AK\cdot A\Gamma}$ (2). Πολλαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και παίρνουμε: $\dfrac{BK}{K\Gamma} = \dfrac{AB^2}{A\Gamma^2}$. Όμοια έχουμε $\dfrac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A} = \dfrac{B\Gamma^2}{AB^2}$ και $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2}$.



Σχ.11

Άρα $\dfrac{BK}{K\Gamma}\cdot\dfrac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A}\cdot\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AB^2}{A\Gamma^2}\cdot\dfrac{B\Gamma^2}{AB^2}\cdot\dfrac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2} = 1$.

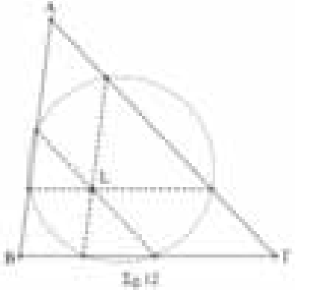
Σύμφωνα με το θεώρημα του Ceva οι συμμετροδιάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο L.

Παρατήρηση: Από την παραπάνω απόδειξη έχουμε: $\boxed{\dfrac{BK}{K\Gamma} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}} \Leftrightarrow \dfrac{BK}{K\Gamma + BK} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{BK}{\alpha} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow \boxed{BK = \dfrac{\alpha.\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}}$, οπότε

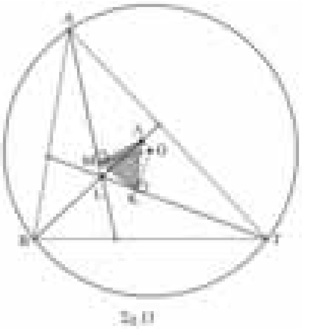
$\boxed{K\Gamma = \dfrac{\alpha.\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}}$. Όμοια συμπεράσματα έχουμε και για τις άλλες συμμετροδιαμέσους.

Σημείωση: Αν L είναι το σημείο Lemoine ενός τριγώνου, αποδεικνύεται ότι οι παράλλη-λες ευθείες από το L προς τις πλευρές του τριγώνου τέμνουν τις πλευρές σε σημεία που βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **κύκλος Lemoine** του τριγώνου (Σχ.12).



Σχ.12

- Τα σημεία τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου με τις παράλληλες από το σημείο Lemoine προς τις πλευρές είναι οι κορυφές του 1[ου] σημείου Brocard.
- Οι προβολές του περίκεντρου του τριγώνου πάνω στις συμμετροδιαμέσους ορίζουν το τρίγωνο ΚΛΜ (Σχ.13) που ονομάζεται **2[ο] τρίγωνο Brocard**.



Σχ.13

3.3. Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του σημείου LEMOINE

3.3.1. Πρόταση: *Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και x, y, z είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις ενός εσωτερικού σημείου L του τριγώνου από τις πλευρές του α, β, γ.*

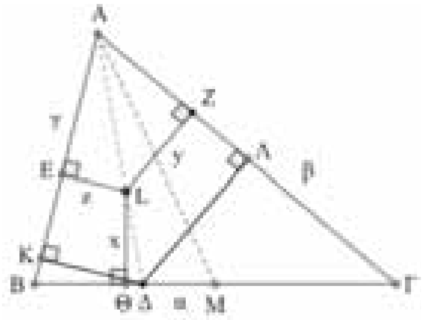
a. Αν το L είναι το σημείο Lemoine του τριγώνου, τότε ισχύει: $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma}$.

b. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\gamma}^2\right)\left(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2\right)-\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{y}+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}\right)^2=$$

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}\right)^2+\left(\boldsymbol{\beta}\mathbf{z}-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{y}\right)^2+\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{z}-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{x}\right)^2$$ **(ταυτότητα Lagrange) και να δείξετε ότι η παράσταση $\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2$ ελαχιστοποιείται όταν το L είναι το σημείο Lemoine του τριγώνου.**

Απόδειξη: a. Έστω AM διάμεσος, ΑΔ συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ από το Α και L το σημείο Lemoine. $L\Theta=x$, $LZ=y$ και $LE=z$ οι αποστάσεις του L από τις πλευρές του τριγώνου (Σχ.14). $\Delta K\perp AB$ και $\Delta\Lambda\perp A\Gamma$.



Σχ.14

$$B\hat{A}\Delta=M\hat{A}\Gamma\Rightarrow\frac{(AB\Delta)}{(AM\Gamma)}=\frac{\gamma\cdot A\Delta}{\beta\cdot AM}\ (1).$$

Επίσης $$B\hat{A}M=\Delta\hat{A}\Gamma\Rightarrow\frac{(ABM)}{(\Delta A\Gamma)}=\frac{\gamma\cdot AM}{\beta\cdot A\Delta}\ (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2) κατά μέλη και δεδομένου ότι $(ABM)=(AM\Gamma)$ παίρνουμε:

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta A\Gamma)}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}\gamma\cdot\Delta K}{\frac{1}{2}\beta\cdot\Delta\Lambda}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}\Leftrightarrow\frac{\Delta K}{\Delta\Lambda}=\frac{\gamma}{\beta}\ (3).$$

Από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων $K A\Delta, EAL$ και $\Lambda\Delta A, ZLA$ έχουμε:

$$\frac{\Delta K}{z}=\frac{A\Delta}{AL}=\frac{\Delta\Lambda}{y}\Rightarrow\frac{\Delta K}{z}=\frac{\Delta\Lambda}{y}\Leftrightarrow\frac{\Delta K}{\Delta\Lambda}=\frac{z}{y}\ (4).$$

Από τις (3), (4) προκύπτει $\frac{z}{y}=\frac{\gamma}{\beta}\Leftrightarrow\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$. Όμοια προκύπτει $\frac{y}{\beta}=\frac{x}{\alpha}$. Άρα $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$.

Σημείωση: Ισχύει και το αντίστροφο του α, δηλαδή αν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, τότε το L είναι το σημείο Lemoine του τριγώνου ΑΒΓ.

b. Η απόδειξη της ταυτότητας αφήνεται ως άσκηση. Θέτουμε $(AB\Gamma)=E$.

Είναι $E=(LB\Gamma)+(LA\Gamma)+(LAB)\Leftrightarrow$

$\alpha x+\beta y+\gamma z=2E$. Για τις τριάδες $\begin{cases}\alpha,\beta,\gamma\\ x,y,z\end{cases}$ από την ταυτότητα του Lagrange έχουμε:

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(\alpha x+\beta y+\gamma z\right)^2=$$

$$\left(\alpha y-\beta x\right)^2+\left(\beta z-\gamma y\right)^2+\left(\alpha z-\gamma x\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-4E^2=$$

$$\left(\alpha y-\beta x\right)^2+\left(\beta z-\gamma y\right)^2+\left(\alpha z-\gamma x\right)^2\geq 0\Rightarrow$$

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-4E^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$x^2+y^2+z^2\geq\frac{4E^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Άρα η παράσταση $x^2+y^2+z^2$ έχει ελάχιστη τιμή την $\frac{4E^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, όταν είναι $\left(\alpha y-\beta x\right)^2+\left(\beta z-\gamma y\right)^2+\left(\alpha z-\gamma x\right)^2=0\Leftrightarrow$ $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, που ισχύει μόνο όταν το L είναι το σημείο Lemoine του τριγώνου ΑΒΓ.

Σημείωση: Το σημείο Lemoine L του τριγώνου ΑΒΓ είναι κέντρο βάρους του τριγώνου ΘΕΖ[6] (Σχ.14).

Παρατήρηση: Θέτουμε $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=t$ και έχουμε $x=\alpha t,\ y=\beta t,\ z=\gamma t$.

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4E^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow t=\frac{2E}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

οπότε: $\boxed{\mathbf{x}=\frac{2\boldsymbol{\alpha}E}{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\gamma}^2}}$, $\boxed{\mathbf{y}=\frac{2\boldsymbol{\beta}E}{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\gamma}^2}}$ και

$$\boxed{\mathbf{z}=\frac{2\boldsymbol{\gamma}E}{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\gamma}^2}}.$$

3.3.2. Πρόταση: Αν L είναι το σημείο Lemoine του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το L χωρίζει την κάθε μία από τις συμμετροδιαμέσους εσωτερικά σε λόγο ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν τη συμμετροδιάμεσο προς το τετράγωνο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Έστω ΑΔ συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και L το σημείο Lemoine του τριγώνου. Έστω ακόμα το ύψος ΑΕ του τριγώνου και LZ=x η απόσταση του L από την πλευρά ΒΓ. Από την

[6] Χ. Ταβανλή: Επίπεδος Γεωμετρία 1 Β' έκδοση σελ. 265.

παρατήρηση της παραγράφου 3.3.1 έχουμε:

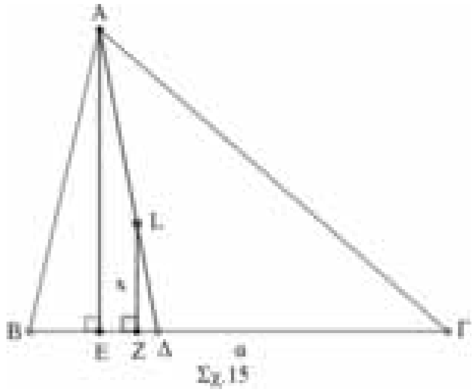
$$x=\frac{2\alpha E}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},\ \ E=(AB\Gamma).$$

Από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων $ZL\Delta$, $EA\Delta$ έχουμε:

$$\frac{AE}{x}=\frac{A\Delta}{L\Delta}\Leftrightarrow\frac{\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\cdot AE}{2\alpha E}=\frac{A\Delta}{L\Delta}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\cdot AE}{\alpha^2 AE}=\frac{A\Delta}{L\Delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{A\Delta}{L\Delta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{A\Delta-L\Delta}{L\Delta}\Leftrightarrow\boxed{\frac{LA}{L\Delta}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}}.$$



Σχ.15

Όμοια και για τις άλλες συμμετροδιαμέσους.

3.3.3. Πρόταση: Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το μέσο ενός ύψους μη ισοσκελούς τριγώνου με το μέσο της πλευράς που αντιστοιχεί το ύψος αυτό, διέρχεται από το σημείο Lemoine.

Απόδειξη

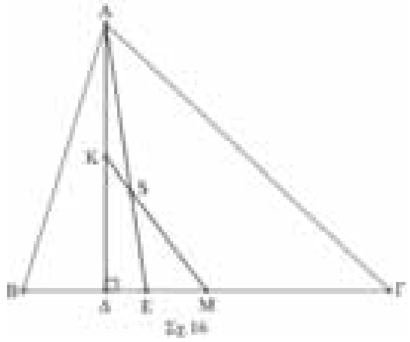
Έστω ότι $AB<A\Gamma$, K το μέσο του ύψους $A\Delta$ και M το μέσο του $B\Gamma$ και AE η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ από το A Το τμήμα KM τέμνει τη συμμετροδιάμεσο στο σημείο S.

Από την παρατήρηση της παραγράφου 3.2 έχουμε

$$EB=\frac{\alpha\cdot\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}.$$

Στο τρίγωνο ΔAE η MSK είναι διατέμνουσα, οπότε από το θεώρημα του Μενελάου έχουμε:

$$\frac{ME}{M\Delta}\cdot\frac{K\Delta}{KA}\cdot\frac{SA}{SE}=1\Leftrightarrow\frac{SA}{SE}=\frac{M\Delta}{ME}\ (1).$$



Σχ.16

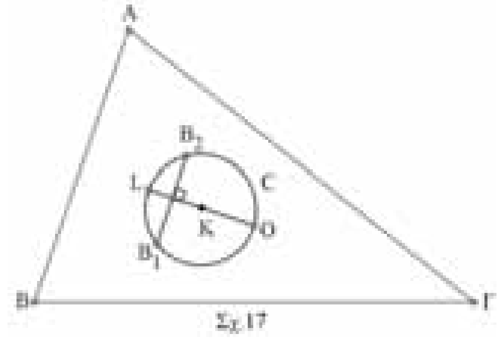
$$ME=MB-EB=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha.\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\Leftrightarrow$$

$$ME=\frac{\alpha\cdot\left(\beta^2-\gamma^2\right)}{2\left(\beta^2+\gamma^2\right)}\ (2).$$ Από το 2^o θεώρημα διαμέσων[7] στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\beta^2-\gamma^2=2\alpha\cdot M\Delta\Leftrightarrow M\Delta=\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}\ \ (3).$$

Με βάση τις (2), (3) από την (1) παίρνουμε: $\frac{SA}{SE}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$. Άρα το σημείο S χωρίζει τη συμμετροδιάμεσο AE εσωτερικά σε λόγο $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$, οπότε το S με βάση την πρόταση 3.3.2, είναι το σημείο Lemoine του τριγώνου $AB\Gamma$.

3.3.4. Πρόταση[8]: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από το σημείο Lemoine ενός τριγώνου και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι διάμετρος ενός κύκλου C που διέρχεται από τα σημεία Brocard του τριγώνου, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τη διάμετρο του κύκλου αυτού (Σχ.17).



Σχ.17

- B_1, B_2: 1^o και 2^o σημείο Brocard του τριγώνου $AB\Gamma$.
- L : Το σημείο Lemoine του τριγώνου.
- O: Το περίκεντρο του τριγώνου.
- Ο κύκλος C ονομάζεται **κύκλος Brocard** του τριγώνου ΑΒΓ.

Βιβλιογραφία

1. Ι. Ντάνη: Γεωμετρία 1 (εκδ. Gutenberg).
2. Ι. Γ. Παπαχρίστου: Επιπεδομετρία .
3. Π. Πάμφιλος: "Γεωμετρικόν" (online Εγκυκλοπαίδεια Γεωμετρίας).
4. F, G. - M Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών. Τόμοι I,II,III (εκδ. Καραβία 1952).
5. Χ.Ταβανλή: Επίπεδος Γεωμετρία 1 Β΄ έκδοση (εκδ.Χιωτέλλη).

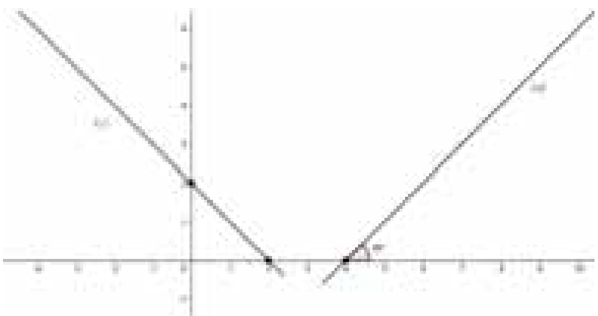
[7] Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.
[8] Επιπεδομετρία Ι.Γ. Παπαχρίστου σελ.434.

διδακτική αξιοποίηση της Τράπεζας Θεμάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας 2022

Χασάπης Σωτήρης

Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε ***διδακτικά,*** *σε βάθος, κάποια από τα θέματα που έχουν ενταχθεί στην Τράπεζα Θεμάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας (ΤΘΔΔ), για τα Μαθηματικά του Λυκείου. Είναι προφανές ότι κάποια από τα θέματα της ΤΘΔΔ μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία* ***στην τάξη ως ασκήσεις*** *ή επαναληπτικά θέματα, παρόλα αυτά, προφανώς δεν είναι ποτέ δυνατόν και, ούτε αυτός είναι ο σκοπός της ΤΘΔΔ, να λυθούν όλα τα θέματα μέσα στην τάξη. Ίσως, όμως να είναι χρήσιμο κάποια από τα θέματα να ενταχθούν σε μεγαλύτερο βάθος στη διδασκαλία, είτε αυτούσια, είτε μετατρέποντάς τα κατάλληλα. Μερικές πιθανές τέτοιες σκέψεις παρουσιάζονται στα επόμενα. Θα πει κάποιος και* ***γιατί μας είναι αναγκαία*** *τα θέματα της ΤΘΔΔ για να το κάνουμε αυτό; Δεν αρκούν άλλα κατάλληλα επιλεγμένα θέματα; Μία απάντηση είναι ότι ενδεχομένως και να αρκούν. Όμως τα θέματα της ΤΘΔΔ είναι «εξωτερικά», τιθέμενα από μία επιτροπή ανεξάρτητη της τάξης μας και με, ενδεχομένως, διαφορετικές οπτικές από του εκάστοτε διδάσκοντα. Επιπλέον, η ενασχόληση με κάποια από αυτά στην τάξη και η, σε βάθος, εξέτασή τους μπορεί* ***να απεμπλέξει*** *τους μαθητές* ***από το σχετικό άγχος*** *εξετάσεων που μπορεί να προκαλούν.*

Άσκηση 1η (Θέμα 14235 Άλγεβρα Β΄ λυκείου)
α) Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



β) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η).

Λύση – συζήτηση: Σε αυτήν την άσκηση παρουσιάζεται μία ευκαιρία συζήτησης, σχετικά με τη γεωμετρική και την αλγεβρική αντιμετώπισή της και το συνδυασμό τους στην επίλυση μίας άσκησης που οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Αλγεβρικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξισώ-σεις των ευθειών χρησιμοποιώντας τα αλγεβρικά δεδομένα του σχήματος:
Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία Α(0,2) και Β(2,0), οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{0-2}{2-0} = -1$. Οπότε η εξίσωσή της είναι

$$(\varepsilon)\colon y-2=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x+2.$$

Γεωμετρικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ευθεία (ε) σχηματίζει με τους άξονες το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ, οπότε η γωνία ΟΒΑ είναι 45 μοίρες, άρα η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ είναι 135 μοίρες, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσής της θα είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 135 = -1$. Αντίστοιχα, αλγεβρικά και με γνωστή τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (η) με τον άξονα $x'x$ να είναι 45 μοίρες έχουμε ότι $\lambda_\eta = \varepsilon\varphi 45 = 1$, οπότε η εξίσωσή της είναι $(\eta)\colon y = x-4$.

Για το σημείο τομής των ευθειών που ζητείται στο δεύτερο ερώτημα, οι θεματοδότες έχουν προβλέψει ότι θα προκύψει από τη λύση του συστήματος των δύο ευθειών $\begin{cases} y= & -x+2 \\ y= & x-4 \end{cases}$, που αποτελεί και μέρος τη εξεταστέας ύλης του μαθήματος Άλγεβρα Β΄ λυκείου. Από τις δύο εξισώσεις με εξίσωση των δεύτερων μελών τους προκύπτει η εξίσωση:

$$-x+2=x-4 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow y=-1.$$

Εναλλακτικά, πάλι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γεωμετρική εποπτεία. Αν υποθέσουμε ότι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) είναι το Γ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές, αφού οι γωνίες Α και Β είναι 45 μοίρες, ως κατακορυφή των αντιστοίχων γωνιών με τον άξονα $x'x$.Οπότε, η κορυφή Γ θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με τα σημεία Α(2,0) και Β(4,0), οπότε η μεσοκάθετος θα έχει εξίσωση $x=3$, άρα το Γ θα έχει τετμημένη 3 και, χρησιμοποιώντας μία από τις δύο εξισώσεις προκύπτει Γ(3, -1).

Ο συνδυασμός της αλγεβρικής – αναλυτικής οπτικής και της γεωμετρικής αντιμετώπισης ενός προβλήματος παράλληλα αποτελεί διαχρονικά σημαντικό στόχο των προγραμμάτων σπουδών.

Άσκηση 2η (Θέμα 14978 Προσανατολισμός Β΄)
Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(3,3).
α) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.
β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.
γ) Να βρεθεί την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.
δ) Να βρεθεί σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

Λύση – συζήτηση: Αυτό το θέμα είναι ήδη δομημένο, ως προς τα ερωτήματά του, αλλά και την προτεινόμενη λύση των θεματοδοτών, για τη διασύνδεση άλγεβρας και γεωμετρίας, αφού εξετάζει ήδη μέρος της αναλυτικής γεωμετρίας που διδάσκεται στο μάθημα των Μαθηματικών προσανατολισμού Β΄ λυκείου. Έτσι, στο γ) ερώτημα ζητά τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με γνωστά τα σημεία Α(1,1) και Β(3,3). Η αλγεβρική αντιμετώπιση θα μπορούσε να αποτελείται από την εύρεση πρώτα της εξίσωσης της ευθείας ΑΒ, από τα γνωστά σημεία, η οποία είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{3-1} = 1.$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας (ΑΒ) γίνεται:

$$(AB)\colon y - 1 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x.$$

Η μεσοκάθετος (ε), ως κάθετη στην ευθεία ΑΒ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -1$. Η (ε) διέρχεται επίσης από το μέσο Μ του ΑΒ, το οποίο θα έχει συντεταγμένες:

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Οπότε, η εξίσωση της (ε) γίνεται:

$$y - 2 = -1(x-2) \Leftrightarrow y - 2 = -x + 2$$
$$\Leftrightarrow y = -x + 4.$$

Η παραπάνω λύση είναι απλή και οι «**διευκολύνσεις**» που παρέχει η αναλυτική γεωμετρία προφανείς. Παρόλα αυτά, οι θεματοδότες καθοδηγούν με τα ερωτήματα α) και β) του θέματος σε μία περισσότερο γεωμετρική αντιμετώπιση, η οποία αναπαριστά την γεωμετρική κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος με χρήση κύκλων και των σημείων τομής τους.

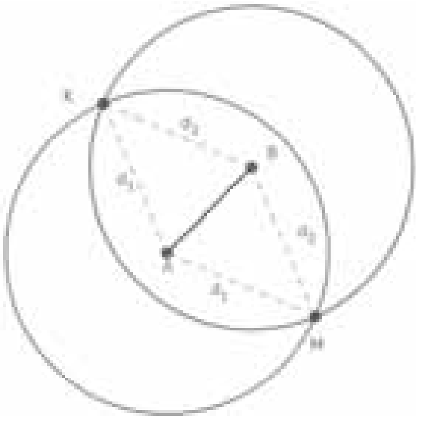
Συγκεκριμένα στο ερώτημα α) ζητείται η απόσταση τυχόντος σημείου Μ(x, y) του επιπέδου από τα σημεία Α, Β και στο ερώτημα β) μεταφέρεται η γεωμετρική ιδιότητα της μεσοκαθέτου, σύμφωνα με την οποία Ένα σημείο Μ του επιπέδου, είναι σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του Α,Β.

Η επίλυση των δύο ερωτημάτων, όπως εξάλλου δίνεται και στην προτεινόμενη λύση των θεματοδοτών, οδηγεί στις σχέσεις:

$$(MA) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2},$$
$$(MB) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}.$$

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2.$$

Η τελευταία εξίσωση «εκφράζει» την εύρεση των σημείων τομής δύο κύκλων με κέντρα τα Α(1,1) και Β(3,3) και ίσες ακτίνες αντίστοιχα. Καθώς, η ισότητα αυτή δε δίνεται για κύκλους συγκεκριμένων ακτίνων αλλά για όλες τις δυνατές τιμές των ακτίνων τους, οπότε και για όλες τις τιμές ακτίνων ρ, μεγαλύτερες από το $\frac{(AB)}{2}$, όλα τα σημεία τομής που θα βρεθούν θα είναι αυτά της μεσοκαθέτου του ΑΒ, όπως ακριβώς προκύπτει από την αντίστοιχη γεωμετρική κατασκευή.



Η απλοποίηση της τελευταίας εξίσωσης δίνει:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 = x^2 - 6x + y^2 - 6y + 18 \Leftrightarrow$$
$$-2x - 2y + 2 = -6x - 6y + 18 \Leftrightarrow$$
$$x + y - 4 = 0.$$

Δηλαδή, όλα τα σημεία Μ(x,y), τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, ισοδύναμα ικανοποιούν τη σχέση x+y-4=0, η οποία, επομένως, είναι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

Αυτό το θέμα μπορεί να δοθεί στην τάξη για συζήτηση με το ερώτημα γ) μόνο. Ενδεχομένως να εμφανιστούν από τους μαθητές και οι δύο λύσεις ή μόνο η πρώτη. Σε κάθε περίπτωση είναι ενδιαφέρουσα μία συζήτηση σχετική με την εμπλοκή της Ευκλείδειας γεωμετρίας στο πρόβλημα, η οποία εξάλλου συνεπικουρείται και από το ερώτημα δ), όπως βλέπουμε στη συνέχεια.

Το ζητούμενο σημείο Σ, εφόσον θα ανήκει σε ισόπλευρο τρίγωνο ΣΑΒ, θα έχει την ιδιότητα (ΣΑ)=(ΣΒ), άρα θα ανήκει στη μεσοκάθετο που βρήκαμε και επιπλέον θα είναι (ΣΑ)=(ΣΒ)=(ΑΒ), ώστε να γίνει το τρίγωνο ισόπλευρο. Ισχύει ότι: $(\mathrm{AB})=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

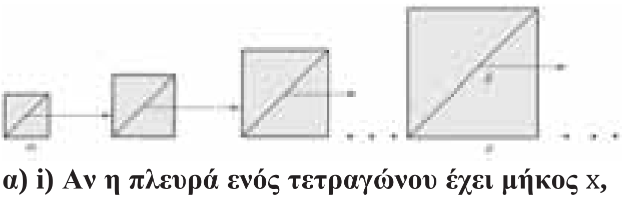
Βρίσκουμε τα σημεία τομής του κύκλου με ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$ κέντρου Α με τη μεσοκάθετο, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=8\\ x+y-4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(4-x-1)^2=8\\ y=4-x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1+9-6x+x^2=8\\ y=4-x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-8x+2=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x^2-4x+1=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}\\ y=4-x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\pm\sqrt{3}\\ y=4-\left(2\pm\sqrt{3}\right)\end{cases}$$
$$(x,y)=\left(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right)\text{ ή }(x,y)=\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$$

Δηλαδή βρήκαμε δύο σημεία Σ, το οποίο ήταν αναμενόμενο, αφού πρόκειται για τα δύο σημεία συμμετρικά του ΑΒ.

Άσκηση 3η (Θέμα 14645 Άλγεβρα Α΄ λυκείου)

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα, παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i) Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, **να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του** δ **έχει μήκος** $\delta=\sqrt{2}\cdot x$. **ii) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου** (α_ν) **με λόγο** $\lambda=2$ **και γενικό όρο** $\alpha_\nu=\alpha^2 2^{\nu-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8τ.μ., **να βρείτε: i)την πλευρά** α **του αρχικού τετραγώνου, ii) το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.**

Λύση – συζήτηση:

Αυτό το θέμα μπορεί να δοθεί στην τάξη για συζήτηση χωρίς τα συγκεκριμένα ερωτήματα για αρχή. Είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν γενικότερα ερώτημα προς διερεύνηση, ανάλογα με την τάξη και όπως κρίνει ο διδάσκοντας, όπως κάποια από τα επόμενα:

α) Διακρίνετε κάποια άλλη σχέση μεταξύ των διαδοχικών σχημάτων;

β) Εφόσον κάθε σχήμα έχει πλευρά τη διαγώνιο του προηγουμένου του, μήπως οι διαγώνιοι σχετίζονται μεταξύ τους και αν ναι πώς;

γ) Μπορείτε να παρατηρήσετε άλλα στοιχεία των σχημάτων που συνδέονται σε αυτήν τη διαδοχή; (πχ εμβαδόν, περίμετρος, κλπ).

δ) Ακολουθεί κάποιο από αυτά τα στοιχεία έναν συγκεκριμένο ειρμό; (πχ αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος, άλλη ακολουθία κλπ).

Μετά τη διερεύνηση ή σε κάθε βήμα αυτής μπορεί να δίνεται και το αντίστοιχο συγκεκριμένο ερώτημα των θεματοδοτών προς επίλυση.

Τέλος, ενδιαφέροντα μπορούν να είναι και κάποια θέματα **μοντελοποίησης** που τίθενται στην ΤΘδδ, ειδικά, αν προσαρμοστούν στις διαδικασίες διερεύνησης και συζήτησης, στο πλαίσιο της διδασκαλίας μίας ενότητας, ακόμα και της εισαγωγής μίας έννοιας. Ένα παράδειγμα αποτελεί το επόμενο θέμα.

Άσκηση 4η (Θέμα 14238 Άλγεβρα Β΄ λυκείου)

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t **sec δίνεται από τη συνάρτηση:**

$$\mathbf{h(t)=8+6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right),\ 0\le t\le 180}$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

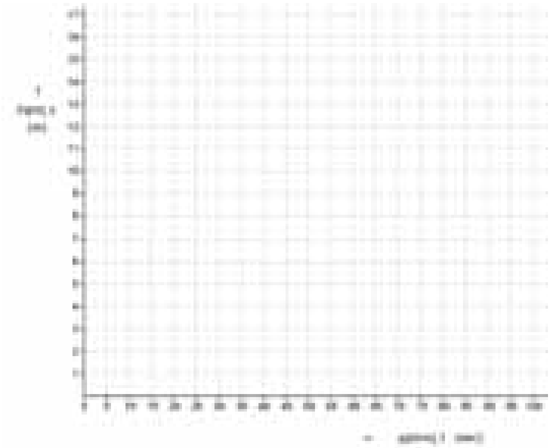
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

δ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t).

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{h(t)}$ με $\mathbf{0 \leq t \leq 90}$.



Λύση – συζήτηση:

Σε αυτό το θέμα οι θεματοδότες παρουσιάζουν έτοιμο το **μοντέλο**, δίνοντας τη συνάρτηση από την αρχή. Οι ενημερωμένοι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν γνωστούς τύπους και να απαντήσουν στα ερωτήματα που τίθενται. Για παράδειγμα λαμβάνοντας υπόψη ότι η περίοδος μίας ημιτονοειδούς συνάρτησης της μορφής $f(x) = ημ(ax)$ δίνεται από τον τύπο $T = \frac{2π}{a}$, οπότε για τη συγκεκριμένη περίπτωση λαμβάνεται $T = \frac{2π}{\frac{π}{30}} = 60$. Παρόμοια, η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή μπορούν να υπολογιστούν για $t = 45sec$ είναι $h(45) = 2m$ και η μέγιστη για $t = 15sec$ είναι $h(15) = 14m$ αντίστοιχα. Παρόμοια, η ακτίνα της ρόδας μπορεί να υπολογιστεί από το ήμισυ της διαμέτρου της, η οποία είναι ίση με την απόσταση δύο αντιδιαμετρικών σημείων της ή θέσεών της στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπως για παράδειγμα η απόσταση του υψηλότερου από το χαμηλότερο σημείο 14m -2m = 12m, άρα η ακτίνα της ρόδας θα είναι 6m. Και τα υπόλοιπα ερωτήματα μπορούν να υπολογιστούν με βάση τον γνωστό τύπο της συνάρτησης.

Μία ενδιαφέρουσα αναδιάταξη του προβλήματος θα ήταν να δοθούν **τα χαρακτηριστικά της κίνησης,** χωρίς να δίνεται έτοιμος ο τύπος της συνάρτησης, ο οποίος να ζητείται. Δηλαδή, μία διατύπωση για συζήτηση στην τάξη, με τα επόμενα χαρακτηριστικά.

«Βρίσκεστε στη ρόδα ενός λούνα παρκ, στην οποία εισήλθατε από το κατώτατο σημείο της που βρίσκεται σε ύψος 2m από το έδαφος και η οποία στη συνέχεια κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (σταθερό ρυθμό). Μετά από τρεις πλήρεις γύρους της ρόδας, οι οποίοι διήρκησαν 180sec, διαπιστώσατε ότι το gps στο κινητό σας κατέγραψε συνολική διανυθείσα απόσταση σε ύψος ίση με 72m.»

Μία **διατύπωση** όπως αυτή, συνοδευόμενη ενδεχομένως και με **μία εικόνα του προβλήματος**, ώστε να δίνεται και οπτικοποιημένο, η συζήτηση μπορεί να γίνει με κύριο ερώτημα την εύρεση μίας συνάρτησης που να περιγράφει το ύψος που βρίσκεται το άτομο σε σχέση με το έδαφος. Ποια μπορεί να είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Τι είδους μεταβολή έχει το ύψος σε σχέση με το χρόνο. Τι είδους συνάρτησης, από τις γνωστές των μαθητών, μπορεί να περιγράψει το ύψος ενός ατόμου στη ρόδα. Ποια ημιτονοειδής συνάρτηση μπορεί να περιγράφει το ύψος που βρίσκεται κάθε φορά ο αναβάτης της ρόδας σε σχέση με το χρόνο. Δηλαδή, οι μαθητές να οδηγηθούν, ανάλογα και με την τάξη, σε μία σχεδόν **κανονική μοντελοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος**, με βάση πάντα τις εμπειρίες που διαθέτουν και τις γνώσεις συναρτήσεων που έχουν. Στη συνέχεια είναι δυνατό να ζητηθούν ως υπόλοιπα ερωτήματα, αυτά που ήδη υπάρχουν στο θέμα ή να διαμορφωθούν κατάλληλα.

Στην ΤΘΔΔ υπάρχουν πολλά παρόμοια προβλήματα, τα οποία μπορούν να διαμορφωθούν κατάλληλα σε όμορφα προβλήματα μοντελοποίησης, είτε για εισαγωγή αντίστοιχων συναρτήσεων, είτε για εφαρμογή των ιδιοτήτων τους, είτε ακόμα και ως επαναληπτικές ασκήσεις σε κατάλληλα, χρονικά σημεία, της διδασκαλίας. Ενδεικτικά, μερικά θέματα μοντελοποίησης από την ΤΘΔΔ της άλγεβρας της Β΄ Λυκείου είναι: 21470, 18434, 18437, 20657, 21447, 21448, 21474, 21678, 21679 για εκθετική συνάρτηση, 14241, 20715 για πολυωνυμική, 14975, 20712, 20870 για τριγωνομετρική, 15694, 18429, 20847 για λογαριθμική.

Η διδασκαλία κάποιων τέτοιων θεμάτων, με παρόμοιες σκέψεις ή/και τρόπους, μπορεί **να έχει υψηλή προστιθέμενη αξία** στη διδασκαλία, καθώς, εκτός από την προσέγγιση θεμάτων της ΤΘδδ, που αποτελούν **πιθανά θέματα εξετάσεων** με ό,τι αυτό μπορεί να σημαίνει για τους μαθητές, δύναται να ωφελήσει παιδαγωγικά και διδακτικά σε μεγάλο εύρος την τάξη, εφόσον ενταχθούν κατάλληλα από το διδάσκοντα.

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Οι πρώτοι αριθμοί και τα πολλαπλάσια του αριθμού <6>.

Ο **Αργύρης Καντεμίρης,** μαθηματικός, έδειξε ενδιαφέρον για τους πρώτους αριθμούς και διάβασε ότι οι πρώτοι αριθμοί γειτονεύουν με τα πολλαπλάσια του αριθμού < 6 >. Αναφέρει: «**Δεν βρήκα κάποια πληροφορία που να δίνει μία εξήγηση ή να αποδεικνύει ό,τι όλοι οι πρώτοι αριθμοί γειτονεύουν με ένα πολλαπλάσιο του αριθμού <6>. Ξεκίνησα την έρευνα προς αυτή τη κατεύθυνση και τελικά διατύπωσα μία απόδειξη η οποία βεβαιώνει ό,τι όλοι οι πρώτοι αριθμοί γειτονεύουν με ένα πολλαπλάσιο του αριθμού <6>**.» Μας έστειλε την δική του απόδειξη που δημοσιεύουμε, αλλά και πέντε αλγόριθμους σε ηλεκτρονική μορφή, **exel**. Αξιόλογη είναι η προσπάθειά του, αλλά οι αριθμοί **Mersenne** είναι πολύ περισσότεροι από αυτούς που δίνει με τον αλγόριθμό του Καντεμίρης. Το ζητούμενο στους πρώτους αριθμούς **δεν είναι αν γειτονεύουν με τον αριθμό 6**, αυτό είναι μια **διαπίστωση**, αλλά να βρεθεί ένας αλγόριθμος που να μας δίνει πρώτους αριθμούς ή να μας λέει αν κάποιος αριθμός είναι **πρώτος ή όχι**. Σχετικά με το θέμα αυτό έχουμε γράψει και στα τεύχη τ. 91 και τ. 124. Εμείς παραθέτουμε τη σχετική απόδειξη και μελέτη του **Αργύρη Καντεμίρη**:

Απόδειξη: Το σύνολο των φυσικών αριθμών το χωρίζω σε δύο υποσύνολα. Τα στοιχεία του ενός υποσυνόλου είναι όλα τα διαδοχικά πολλαπλάσια του αριθμού <3> τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους κατά έξι μονάδες και δεν είναι πρώτοι αριθμοί, εκτός του <3>. Το σύνολο αυτό είναι:

[3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, ………]

Τα στοιχεία του δευτέρου υποσυνόλου των φυσικών αριθμών είναι όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί, **πρώτοι** και **σύνθετοι**. Το σύνολο των φυσικών αριθμών από το <3> και μετά το χωρίζω σε συνεχόμενα διαδοχικά διαστήματα τα οποία περιέχουν <7> διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Στα άκρα κάθε διαδοχικού διαστήματος ευρίσκονται πάντα δύο διαδοχικοί αριθμοί πολλαπλάσιοι του < 3 > και η διαφορά τους είναι έξι μονάδες. Οι εσωτερικοί αριθμοί του κάθε διαστήματος είναι πάντα < 3 > ζυγοί και < 2 > μονοί. Ο αριθμός στο κέντρο κάθε διαστήματος είναι πάντα ένα πολλαπλάσιο του αριθμού < 6 > το οποίο ευρίσκεται ανάμεσα στους δύο μοναδικούς μονούς αριθμούς στο εσωτερικό του διαστήματος. Παραθέτω τα πέντε πρώτα διαστήματα. Ο αριθμός στο κέντρο κάθε διαστήματος είναι πάντα ένα πολλαπλάσιο του αριθμού < 6 > το οποίο ευρίσκεται ανάμεσα στους δύο μοναδικούς μονούς αριθμούς στο εσωτερικό του διαστήματος.

Παραθέτω τα έξι πρώτα διαστήματα.

[3, 4,5, <6>, 7, 8 ,9]
[9, 10, 11, <12>, 13, 14, 15]
[15, 16, 17, <18>, 19, 20, 21]
[21, 22, 23, <24>, 25, 26, 27]
[27, 28, 29, <30>, 31, 32, 33]
[33, 34, 35, <36>, 37, 38, 39]
[,,]

Οι δύο αριθμοί στα άκρα του διαστήματος, όπως ανέφερα, είναι πολλαπλάσιοι του αριθμού < 3 >, δεν είναι πρώτοι (εκτός του 3) και η διαφορά τους είναι έξι μονάδες. Στο κέντρο κάθε διαστήματος υπάρχει πάντα αριθμός πολλαπλάσιος του <6> ο οποίος περιέχεται μεταξύ των δύο μονών αριθμών του διαστήματος.

Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις για το είδος αυτών των δύο μονών αριθμών.

α) Να είναι και οι δύο πρώτοι.
β) Να είναι μόνο ο ένας πρώτος και ο άλλος σύνθετος.
γ) Να είναι και οι δύο σύνθετοι αριθμοί.

Εξ' όλων αυτών αποδεικνύεται ότι όλοι οι πρώτοι αριθμοί πάντα ευρίσκονται δίπλα σ' ένα πολλαπλάσιο του < 6 > !!!

Τύπος Mersenne: Ένα δεύτερο θέμα που μου έκανε εντύπωση και με απασχόλησε είναι ο τύπος Mersenne 2^n-1, όπου < n > φυσικός αριθμός, με τον οποίο βρίσκουμε πρώτους αριθμούς. Στο Internet στην ιστοσελίδα physicsgg διάβασα ότι ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός Mersenne είναι ο $2^{82589933}$-1, ο οποίος έχει 24.862.048 ψηφία, όπως ανακοίνωσε στις 22/12/2018 το πρόγραμμα Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). Βέβαια όλοι οι αριθμοί Mersenne, όπως γνωρίζουμε, δεν είναι πρώτοι αριθμοί. Ο αριθμός 2^6-1= 63 δεν είναι πρώτος αριθμός.

Οι ερευνητές του προγράμματος GIMPS πιστεύω ότι θα έχουν κάποιον αλγόριθμο με τον οποίον θα διαπιστώνουν αν ένας αριθμός Mersenne είναι ή δεν είναι πρώτος αριθμός. Ο τύπος Mersenne δίνει πρώτους αριθμούς μόνο όταν ο αριθμός <2^n> είναι ένα πολλαπλάσιο του αριθμού <6>. Κάποια στιγμή κοιτάζοντας τον τύπο Mersenne μου ήρθε μία ιδέα. Στη θέση του αριθμού <2> να βάλω κάποιους άλλους αριθμούς με στόχο να βρίσκω πρώτους αριθμούς. Ερεύνησα το θέμα αυτό και τελικά βρήκα και παρουσιάζω τύπους που δίνουν πρώτους αριθμούς.

1). A^K±1, όπου Α ζυγός φυσικός αριθμός και κ φυσικός αριθμός.

2). A^K±2, όπου Α μονός φυσικός αριθμός και κ φυσικός αριθμός.

Θα αναφερθώ σε παραδείγματα όπου θα φανούν τα πλεονεκτήματα των τύπων που προτείνονται.

Mersenne		**Kantemiris**	
2^n-1		**A^K-1**	
n: φυσικός αριθμός		κ=n	
n=1	2^1-1=1	4^1-1=3	8^1-1=7
n=2	2^2-1=3	4^2-1=15	8^2-1=63
n=3	2^3-1=7	4^3-1=63	8^3-1=511
n=4	2^4-1=15	4^4-1=255	8^4-1=4095
n=5	2^5-1=31	4^5-1=1023	8^5-1=32767

για την ίδια τιμή του < n > οι τύποι Kantemiris δίνουν πολύ μεγαλύτερους αριθμούς από τους αριθμούς Mersenne. Όπως απέδειξα όλοι οι πρώτοι αριθμοί γειτονεύουν με αριθμούς που είναι πολλαπλάσιοι του αριθμού < 6 >. Με αυτό το δεδομένο έφτιαξα έναν **αλγόριθμο** με τον οποίο μελετάμε τους πρώτους αριθμούς και βρίσκουμε τη **διάταξη** τους από το ένα έως το άπειρο.

Απαντήσεις στους γρίφους στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν του τεύχους 126

Αινίγματα:
- Είναι ο αριθμός 26. Ο 26 είναι ο μοναδικός αριθμός που είναι μεταξύ δυο δυνάμεων ενός τετραγώνου του 25=5^2 και ενός κύβου 27=3^3.
- Γαμπρός της Ισαβέλλας

Ο Ψαράς: Άρα στην παραλία έχουμε τα Τ1, Τ2, Τ3, Τ4, . . . Τ12 και το Τ13 στο πλοίο. Τότε έχουμε: Τ1+2Τ2=39, Τ2+2Τ3=39, Τ3+2Τ4=39, . . . Τ 11+2Τ12=39, και Τ12+2Τ13=51. Αφού έχουν βάρος ακέραιο αριθμό, οι εξισώσεις αυτές δείχνουν ότι τα τελάρα Τ1, . . . Τ13 έχουν βάρος περιττό αριθμό. Το Τ1 μπορεί να είναι Τ1=1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37. Αλλά αν Τ1=1 τότε από την πρώτη εξίσωση το Τ2=19 , Τ3=10 αλλά το Τ4=14,5 μη δεκτό. Το ίδιο ισχύει για όλες τις τιμές εκτός από την περίπτωση που έχουν όλα ίδιο βάρος Τ1=Τ2=Τ3= . . . =Τ12=13 κιλά, οπότε το Τ13 που κράτησε στο πλοίο 19 κιλά. Άρα 13x6=78€.

Τα ξενοδοχεία: Ο 15885=5.3.3.353=45.353. Τα ξενοδοχεία ήταν 45 και σε καθένα φιλοξενήθηκαν 353 τουρίστες(που χωράνε σε επτά λεωφορεία).

Τα Τρίγωνα: Όχι δεν είναι ίσα, αν η κοινή πλευρά είναι η υποτείνουσα από το ένα τρίγωνο και η κάθετη από το άλλο.

Μαντέψτε 3 μονοψήφιους ή ένα 3ψήφιο: Για να βρείτε τους 3 αριθμούς που σκέφτηκε ο φίλος σας, να αφαιρέσετε από το τελικό αποτέλεσμα που σας έδωσε 350. Αν π.χ. πήρε 7,2,5 έχουμε (7.2+5)5+10+2=107, 107.10+5=1075, θα σας πει 1075, τότε εσείς θα έχετε 1075-350=725, άρα αυτά είναι τα ψηφία.

Ο χωρισμός του ορθογωνίου τριγώνου: Ο χωρισμός του ορθογωνίου τριγώνου είναι αυτός που φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Οι τρείς αριθμοί: Ο δάσκαλος έγραψε τους αριθμούς (Η λύση του Διόφαντου): Οι αριθμοί είναι οι 80, 320, 41. Πράγματι 80+320+41=441=21^2, 80+320=20^2, με 320+41=361=19^2 και 80+41=121=11^2.

Η διαφορά είναι κύβος: Η λύση του Διόφαντου για τις πλευρές στο ορθογώνιο τρίγωνο είναι: 40, 96, 104 αφού 104-96=8=2^3 και 104-40=64=4^3.

αφορμές ... και στιγμιότυπα

Το 2023 ... και οι αριθμοί του ...

Το 2023 **παίζει** με τους αριθμούς. Οι **ιδιαιτερότητες**, το **απροόπτο** και η τυχαιότητα της συγκυρίας. Αρκετές φορές οι αριθμοί, δίνουν το **δικό** τους **τόνο,** στην ιδιομορφία της συμπεριφοράς τους και των **συνδυασμών** που δημιουργούνται. Ξεχωρίσαμε μερικές από τις πολλές, που κυκλοφορούν και καταγράφουμε κάποιες από αυτές. Έτσι έχουμε:

The Higgs Enigma από το Cern/Courier July/August2022

- $$\begin{array}{r|l} 2023 & 7 \\ \hline 289 & 17 \\ \hline 17 & \end{array}$$ Άρα $2023 = 7\cdot 17^2$
- $2023 = (2+0+2+3)\cdot(2^2+0^2+2^2+3^2)^2$

  $= 7\cdot 17^2 = 2023$
- $\sqrt{2022\cdot 2024+1} = 2023$
- $9^3+8^3+7^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3-1^3 = 2023$
  $= 729+512+343+216+125+64+27+8-1 = 2023$
- $\dfrac{2024!-2023!}{2023!} = \dfrac{2024\cdot 2023!-2023!}{2023!} = \dfrac{2023!(2024-1)}{2023!} = 2023\cdot\dfrac{2023!}{2023!} = 2023$
- $2023 = 20^2 + (2.20)^2 + 23 = 2023$

Το βραβείο Abel 2023

Στον **Luis Caffarelli**, από την **Αργεντινή,** απονεμήθηκε από τη Νορβηγική Ακαδημία Επιστημών και Γραμμάτων, το βραβείο Abel. Κατέκτησε το βραβείο Abel, την ύψιστη διάκριση των μαθηματικών επιστημών για την εργασία του, στις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ο 74χρονος Caffarelli έλαβε το βραβείο Abel, ένα βραβείο που του δόθηκε, για την εργασία του στις **μερικές διαφορικές εξισώσεις**, οι οποίες είναι εξισώσεις, που αφορούν τα **ποσοστά μεταβολής** σε σχέση με τις **συνεχείς μεταβλητές**. Το βραβείο Abel, το οποίο συνοδεύεται από ανταμοιβή **7,5** εκατομμυρίων νορβηγικών κορωνών [περίπου 681.000 ευρώ], συχνά περιγράφεται ως ισοδύναμο του βραβείου **Nobel**, το οποίο δεν υπάρχει αντίστοιχη κατηγορία **Nobel** Μαθηματικών. Γεννήθηκε και μεγάλωσε στο Μπουένος Άιρες, γεγονός, που τον καθιστά **πρώτο κάτοχο** του βραβείου Abel από τη **Νότια Αμερική**. Σήμερα είναι καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Τέξας στο Όστιν και ζει στις ΗΠΑ, από τότε που απέκτησε το διδακτορικό του, από το Πανεπιστήμιο του Μπουένος Άιρες το 1972.

Για πέντε δεκαετίες ο Caffarelli είναι **ηγετική** φυσιογνωμία στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων, ενός μεγάλου πεδίου που βασίζεται σε μεθόδους που επινόησαν οι Ισαάκ Νεύτων και Gottfried Leibniz, τον 17ο αιώνα για να περιγράψουν **πράγματα** που **αλλάζουν συνεχώς** μεταξύ τους.

Σχεδόν κάθε γνωστή εξίσωση, που μοντελοποιεί τη **φυσική** ή **ανθρώπινη συμπεριφορά,** είναι μια μερική διαφορική εξίσωση, από τις εξισώσεις **Navier - Stokes** στη δυναμική των **ρευστών**, έως την εξίσωση **Black - Scholes** στα **οικονομικά**.

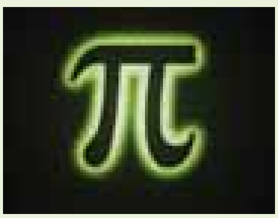
Έχει κάνει μέχρι τώρα «πρωτοποριακές συνεισφορές», που έχουν αλλάξει ριζικά την κατανόησή μας για τις κατηγορίες **μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων,** με ευρείες εφαρμογές. Τα αποτελέσματα είναι τεχνικά ενάρετα, καλύπτοντας πολλούς διαφορετικούς τομείς των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους, συνδυάζοντας τη λαμπρή **γεωμετρική διορατικότητα,** με έξυπνα αναλυτικά εργαλεία και μεθόδους. **Είχε** και συνεχίζει **να έχει** τεράστιο αντίκτυπο στο πεδίο ερευνάς του.

Μελετά τη μαθηματική συνέπεια αυτών των εξισώσεων, προσπαθώντας ουσιαστικά να βρει εάν είναι ουσιαστικές **αναπαραστάσεις** της **πραγματικότητας**. Ο H. **Holden**, πρόεδρος της επιτροπής Abel, δήλωσε: «Τα Μαθηματικά είναι σαν ένα ελβετικό μαχαίρι: το ίδιο εργαλείο μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά διαφορετικά προβλήματα. Τα εργαλεία που έχει βρει ο Caffarelli έχουν εφαρμοστεί σε πολλά διαφορετικά προβλήματα, από εξισώσεις που περιγράφουν τη φύση μέχρι τα οικονομικά Μαθηματικά».

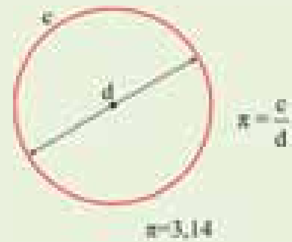
Ο Caffarelli δήλωνε πρόσφατα: «Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι ένα σημαντικό μέρος της επιστήμης. Υπάρχει **συνεχής εξέλιξη** και εφαρμογή των **εξισώσεων**. Είμαι χαρούμενος που έχω κάνει πολύτιμες συνεισφορές». Ο Caffarelli είναι εξαιρετικά **παραγωγικός** – και εξαιρετικά **κοινωνικός.** Έχει δημοσιεύσει 320 εργασίες και συνεχίζει να δημοσιεύει αρκετές κάθε χρόνο. Έχει συγγράψει εργασίες με περισσότερα από 130 άτομα και έχει συμβουλεύσει περισσότερους από 30 διδακτορικούς φοιτητές. Το 2018 ένας από τους νεότερους συνεργάτες του, ο **Αλέσιο Φιγκάλι**, κέρδισε το μετάλλιο **Fields**, το πιο γνωστό βραβείο στα Μαθηματικά. Ο Caffarelli είναι παντρεμένος με την Αργεντινή μαθηματικό **Ir. Gamba**, η οποία είναι καθηγήτρια **υπολογιστικής μηχανικής** και επιστημών, στο Πανεπιστήμιο του Τέξας στο Όστιν. Το βραβείο Abel απονέμεται κάθε χρόνο από το **2003**.

Πηγές: Guardian, Quanta Magazine, Athens voice, nytimes.com, Abelprize.no

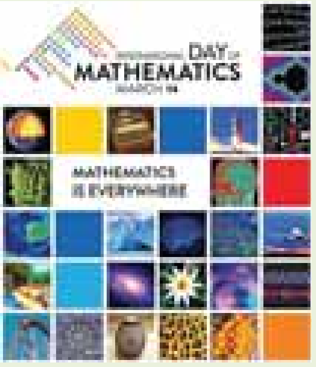
διεθνείς εορταστικές εκδηλώσεις για το π

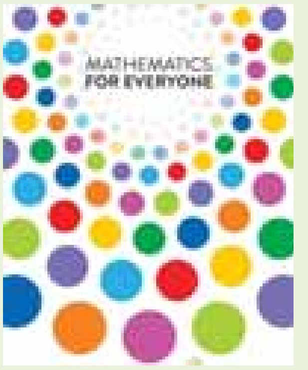


Οι άνθρωποι στη ζωή τους και οι κοινωνίες μας, έχουν θεσπίσει πολλές γιορτές. Οι μαθηματικοί εδώ και μερικά χρόνια έχουν ορίσει και μια άλλη παράξενη γιορτή για έναν αριθμό, τον αριθμό «π». Την 14η **Μαρτίου** κάθε χρόνο, γιορτάζουν «ημέρα του π» , δηλαδή γιορτή για τη μαθηματική σταθερά **«π»**, γνωστή ως **3,14.** … ή ακριβέστερα όταν γράψουμε έναν κύκλο και διαιρέσουμε το μήκος του με την διάμετρό του, για οποιονδήποτε κύκλο προκύπτει πάντα ο ίδιος αριθμός. Έκτοτε οι μαθηματικοί, για χιλιάδες χρόνια τώρα έχουν επιδοθεί σε έναν αγώνα, για να **βρουν** όσο γίνεται περισσότερα **ψηφία** του **π** και να τον κατανοήσουν. Οι μαθηματικοί πάντα στα προβλήματά τους, κάνουν χρήση του αριθμού με προσέγγιση, το ίδιο και οι άλλοι επιστήμονες. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν για το **π** το 22/7 = 3,14285 που έχει μικρή προσέγγιση. Οι παλαιότερες γραπτές προσεγγίσεις του **π** βρίσκονται στην **Αίγυπτο** και τη **Βαβυλώνα**. Στη Βαβυλώνα το 2000 π.Χ. χρησιμοποιούν τον **π** ως 25/8 = 3.125. Στην Αίγυπτο, ο **Πάπυρος Rhind** 1650 π.Χ., έχει ένα τύπο που αντιμετωπίζει το π ως (16/9)2 = 256/81 ≈3.1605.



Οι **Κινέζοι** χρησιμοποιούσαν το π=3,1547, οι Ινδοί στοShulba Sutras (σανσκριτικά κείμενα, 600 π.Χ.) έχουν το π=(9785/5568)2≈3.088. [πολλές ιστορικές αναφορές, υπάρχουν στο επετειακό **τεύχος 115** του περιοδικού Ευκλείδης Β΄ και πολλά πρόσφατα στοιχεία για το **π]**. Πολλές επίκαιρες εκδηλώσεις με τις σχετικές τους αφίσες από τη διεθνή Ένωση Μαθηματικών στην ιστοσελίδα: **www.mathunion.org**.





Ελληνικές διακρίσεις στον SEEMOUS 2023

Ο διαγωνισμός SEEMOUS (South-Eastern European Mathematics Olympiad for University Students) είναι ένας μαθηματικός διαγωνισμός, που αφορά πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτητές. Ξεκίνησε το 2006-07 και αποκτά σιγά σιγά, **όλο** και **μεγαλύτερο κύρος** στους μαθηματικούς κύκλους. Οι φοιτητές διαγωνίζονται μια ημέρα, σε τέσσερα προβλήματα, τα οποία είναι μεταφρασμένα στη γλώσσα του κάθε διαγωνιζόμενου και αφορούν την ύλη των μαθημάτων: Απειροστικός Λογισμός, Γραμμική Άλγεβρα, Βασική Άλγεβρα, Πραγματική Ανάλυση, Συνδυαστική και Θεωρία Αριθμών.

Κάθε χρόνο παραδίδονται **μαθήματα προετοιμασίας**, στους ενδιαφερόμενους φοιτητές, υπό την εποπτεία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας και των αντιστοίχων μαθηματικών τμημάτων των Πανεπιστημίων και των Πολυτεχνείων της χώρας.

17**ος** Seemous 2022-2023 [Struga, Β. Μακεδονία 7 – 12 Μαρτίου 2023]

ΕΚΠΑ

Γιαννακάρας Δημήτριος	αργυρό μετάλλιο
Εμμανουήλ Δημήτριος	αργυρό μετάλλιο
Χαραλάμπους Ιωάννης	αργυρό μετάλλιο
Παπανικολάου Νικόλαος	συμμετοχή

ΕΜΠ

Μπατατέγας Αναστάσιος	χάλκινο μετάλλιο
Κριθαρίδης Κωνσταντίνος	χάλκινο μετάλλιο
Μινάγιας Δημήτριος	χάλκινο μετάλλιο
Δημητρίου Κωνσταντίνος	συμμετοχή

ΑΠΘ

Παυλίδης Δημοσθένης	χρυσό μετάλλιο
Ιακωβάκης Ιωάννης	αργυρό μετάλλιο
Φωτιάδης Κωνσταντίνος	αργυρό μετάλλιο
Δημουλιός Ιωάννης	αργυρό μετάλλιο
Σταμπουλίδης Πλάτων	χάλκινο μετάλλιο
Δομπάζης Αθανάσιος	συμμετοχή

Αξίζει να σημειωθεί ότι **αρχηγός** της αποστολής του ΑΠΘ ήταν ο πολλαπλά διακριθείς σε μαθηματικούς διαγωνισμούς και Ολυμπιάδες ο πρωτοετής μεταπτυχιακός φοιτητής του Τμήματος Μαθηματικών, **Δημήτριος Τσιντσιλίδας**, ενώ συντονιστής και υπεύθυνος διαγωνισμών ήταν ο Καθηγητής **Ρωμανός Διογένης Μαλικιώσης**. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ομάδα του ΑΠΘ κατετάγη στην τρίτη θέση, από όλες τις ομάδες που συμμετείχαν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΑΣ

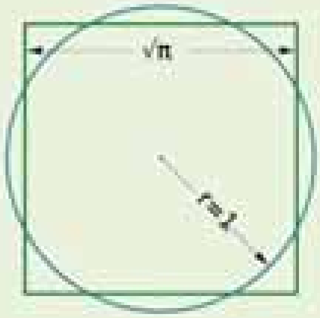
Σουράρας Γεώργιος	αργυρό μετάλλιο

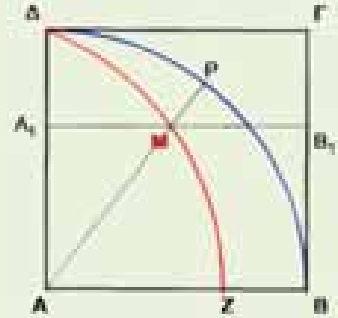
Πολλά συγχαρητήρια στους **φοιτητές** μας και ευχόμαστε πάντα τέτοιες διακρίσεις.

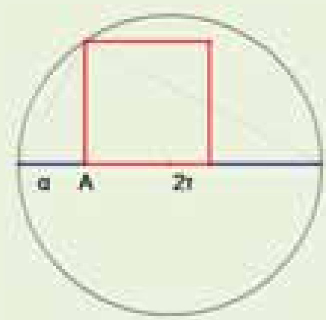
επικαιρότητα και διεθνείς εκδηλώσεις

Ο τετραγωνισμός του κύκλου και η τριχοτόμηση της γωνίας

Πολλές φορές, σε **τακτά χρονικά διαστήματα,** παίρνουμε εργασίες, που αφορούν τον τετραγωνισμό του κύκλου και την τριχοτόμηση της γωνίας. Άλλες είναι εντυπωσιακά **εμφανίσιμες,** με αρκετά στοιχεία και προσπάθειες απόδειξης και άλλες **καθόλου**. Μερικές απ' αυτές έχουν και αναφορές «τετραγωνισμού του κύκλου κατά προσέγγιση» που δίνουν έναν **τόνο** εντυπωσιακών κατασκευών προς αυτή την κατεύθυνση. Ένα τέτοιο δοκίμιο προσεγγιστικής αναφοράς του μήνα που πέρασε, είναι από τον **Ιωάννη Ευθυμιάδη**. Με την απόδειξη μιας σχέσης, που ισχύει και τη χρησιμοποίηση της **χρυσής τομής**, αρκετές φορές, φτάνει στο **εγγύτερο σημείο** του τετραγωνισμού. Επίσης αντίστοιχη εργασία πήραμε και από την **Ελένη Δήμιζα** περί του τετραγωνισμού του κύκλου. Επίσης πρόσφατα πήραμε μια άλλη εργασία από τον **Μαλάμη Βασίλειο.** Μια εμπεριστατωμένη ανάλυση της κατασκευής του τετραγωνισμού του κύκλου και της τριχοτόμησης της γωνίας (δια της προβολής τριών ίσων τόξων), που όμως δεν πληρούσε όλες τις προϋποθέσεις της χρήσης, αυτών των κατασκευών, **μόνο** με τον **κανόνα** και τον **διαβήτη**.

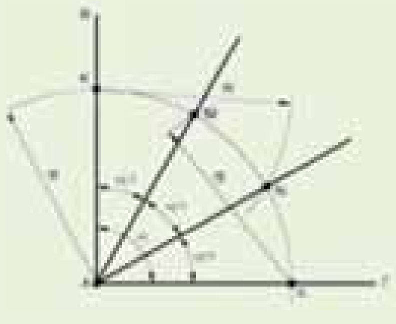


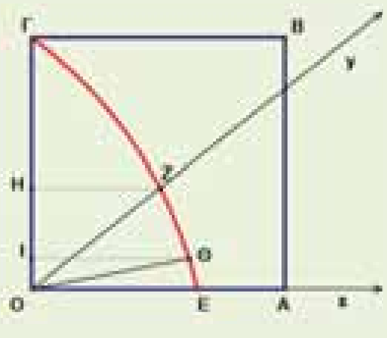


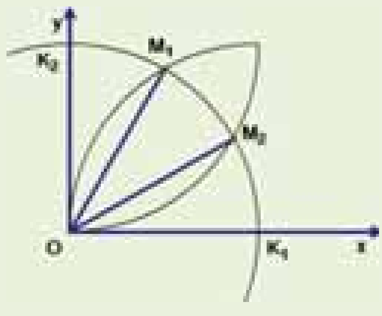


Με αποτέλεσμα όλες οι θεωρήσεις, με αρκετές σελίδες και πολυάριθμα σχήματα να μην είναι προς αυτή τη κατεύθυνση στο σύνολό τους, όπως χρειάζεται. Παρ' όλα αυτά, είναι όμορφες κατασκευαστικές εκφάνσεις αυτής της διαδικασίας, χωρίς όμως το μαθηματικό δεοντολογικό "φέρεσθαι" που απαιτείται.

Αυτές οι αναφορές είναι **ενδεικτικές**, για τις εργασίες που φτάνουν στο περιοδικό, τον τελευταίο καιρό. Θυμίζουμε πάλι ότι: Το **1882** ο μαθηματικός **Ferdinand von Lindemann** απέδειξε το αδύνατο της επίλυσης του προβλήματος δηλαδή « όταν δίνεται κύκλος. Να κατασκευαστεί, **με κανόνα και διαβήτη**, τετράγωνο που να εχει εμβαδό ίσο με το εμβαδό του κύκλου. Η επίλυση του προβλήματος συνδέεται άμεσα με τον αριθμό **π**. Αν κάποιος τα **κατάφερνε**, αυτό θα σήμαινε ότι είχε καταφέρει να υπολογίσει ακριβώς την αλγεβρική τιμή του **π**.



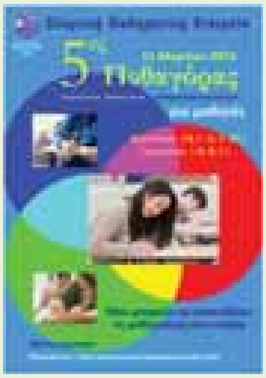




Ο **Lindemann** απέδειξε ότι ο αριθμός **π** είναι **υπερβατικός**, άρα δεν έχει συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή (**Υπερβατικός αριθμός** λέγεται κάθε αριθμός που **δεν είναι αλγεβρικός**. Αλγεβρικός λέγεται κάθε αριθμός που είναι ρίζα κάποιας μη μηδενικής πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Αν δεν λάβουμε υπόψη μας τους περιορισμούς, (**κανόνα και διαβήτη**) δεν υπάρχει επίλυση του προβλήματος. Έτσι από την αρχαιότητα θα δούμε και άλλους τρόπους λύσεις γι' αυτά τα προβλήματα που πρότειναν ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) με τη **μέθοδο του έλικα**, ο Δεινόστρατος, ο Νικομήδης με την **τετραγωνίζουσα καμπύλη**, ο Ιππίας (αναφορές από την επιτομή του Πάππου).

5ος διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 2023

Πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων



Έγινε με μεγάλη επιτυχία και συμμετοχή πολλών παιδιών και φέτος, στις **11 Μαρτίου 2023,** ο ετήσιος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων Πυθαγόρας της ΕΜΕ.

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων Πυθαγόρας της ΕΜΕ είναι στην **ουσία μία εκπαιδευτική έρευνα,** μεγάλης κλίμακας. Κεντρικός του στόχος, είναι η ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις **δυνατότητες να σκέπτεται** ο μαθητής με μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο διαγωνισμός αυτός, **δεν** ελέγχει άμεσα ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να **σκέφτεται** με τα **εφόδια** που τα Μαθηματικά, προσδίδουν στη **σκέψη**. Με βάση τις μαθηματικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων διακρίνουμε τις παρακάτω πτυχές της μαθηματικής ικανότητας: **αριθμητική** ικανότητα, **γεωμετρική** ικανότητα, ικανότητα **επαγωγικού** συλλογισμού, **συνδυαστική** ικανότητα, ικανότητα **μετάφρασης δεδομένων** από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. (π.χ. η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα ή από μία εικόνα), **αλγεβρική** ικανότητα, ικανότητα επίλυσης προβλήματος, **αλγοριθμική** ικανότητα. Ο επόμενος διαγωνισμός του Πυθαγόρα θα γίνει την **άνοιξη του 2024.** Περισσότερες πληροφορίες θα υπάρξουν στα επόμενα τεύχη του περιοδικού.

λάβαμε …

Οι θεοειδείς

Μια περιήγηση, αναφορα στους κορυφαίους μαθηματικούς. Μέσω αυτής της λογοτεχνικής περιήγησης, μπορεί ο αναγνώστης να **συμμετάσχει ενεργά** στην προσπάθεια της ανθρωπότητας να κατανοήσει τα μαθηματικά μυστήρια. Οι αναφορές στους μεγάλους μαθηματικούς, δεν είναι στείρες βιογραφίες, αλλά γλαφυρές ιστορίες, συνήθως με μορφή διαλόγου, που δίνουν μία ή κάποιες κορυφαίες στιγμές της δημιουργίας κάθε ήρωα.

Στις ιστορίες αυτές, αναφέρεται τουλάχιστον, μια μεγάλη στιγμή κάθε ενός από τους μαθηματικούς που περιγράφεται, σχετική με κάτι **μεγάλο,** που **ανακάλυψε.** Φυσικά δε διεκδικεί τη μεγάλη ιστορική ακρίβεια και αυστηρότητα, αφού έχει το χαρακτήρα **διήγησης** και όχι πραγματείας. Γι' αυτό το λόγο δεν αναφέρεται και σχετική βιβλιογραφία. Σκοπός του βιβλίου είναι να αναδείξει και να κάνει **προσιτό** στον καθένα το μεγαλείο της μαθηματικής **ανακάλυψης** με γλαφυρό και ευχάριστο τρόπο.

Παλίνδρομα Διηγήματα

Μια διεισδυτική ματιά με ευαισθησία και παράλληλες διαδρομές μαθηματικού περιεχομένου, με πολλά απρόοπτα.

Μια νέα και επίκαιρη συγγραφική δουλειά του **Φραγκίσκου Καλαβάση** με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και λογοτεχνική χροιά.

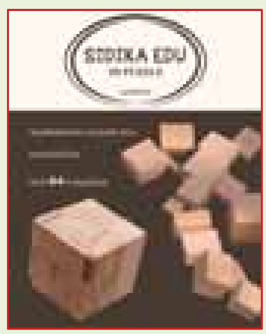
"… **Δεκαεννιά ιστορίες ανθρώπων** που πάλλονται ανάμεσα σε **συναισθηματικούς** δισταγμούς και **νοητικά** πείσματα …

… μπαινοβγαίνουν σε ιστορίες άλλων ανθρώπων και πηγαινοέρχονται σε επιθυμητές ή **απρόσμενες** καταστάσεις. Τα διηγήματα σέβονται την **αυθεντικότητα** των παλλινδρομικών καταστάσεων και δεν προδίδουν την **πραγματική** τους ταυτότητα …"

Τρισδιάστατο ξύλινο puzzle

Λάβαμε ένα τρισδιάστατο **puzzle** από τον μαθηματικό **Παναγιώτη Καλατζή** με ιδιαίτερο παιδαγωγικό ενδιαφέρον και πρόκληση παιχνιδιού. Μεταξύ των άλλων: βοηθάει στο «**μαθηματικό εργαστήριο**» κάθε σχολικής τάξης με τα **τρισδιάστατα σχήματα**

- διευκολύνει τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση του όγκου και του εμβαδού.



- εμπλέκει **άλγεβρα** και **γεωμετρία** με την απόδειξη αλγεβρικών ταυτοτήτων και σχέσεων με στερεομετρικό τρόπο.
- προάγει την **δημιουργική** και αποκλίνουσα σκέψη των μαθητών, αφού μαθαίνουν να επιλύουν μαθηματικές σχέσεις με παιγνιώδη τρόπο.

Αρκετά ενδιαφέρον puzzle,
με παιδαγωγική χρησιμότητα
βιωματικής μάθησης