ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

128

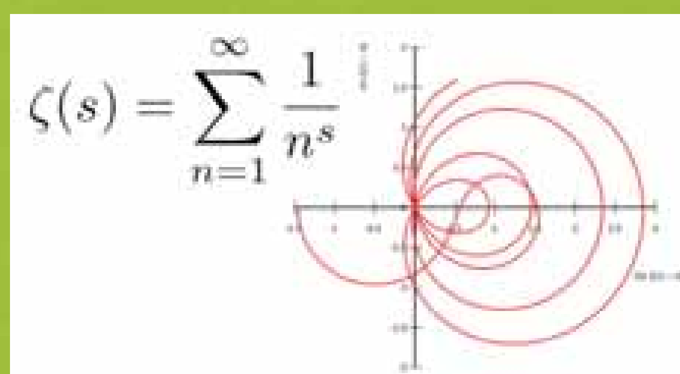
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2023 ευρώ 3,5

Ευγένιος Βούλγαρης
[1716-1806]



Η υπόθεση Riemann

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Οι εφαρμογές τα Μαθηματικά και το μέλλον

EGMO EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD 2023 SLOVENIA

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 128 - Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2023 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη

Γενικά Θέματα

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα της egmo

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	11 Νοεμβρίου	2022
Ευκλείδης:	Δεν θα γίνει	
Αρχιμήδης:	18 Φεβρουαρίου	2023

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

...πολλές ευχές
για επιτυχία
σε όλες τις δοκιμασίες,
που θα παρουσιαστούν,

με πείσμα,
με όνειρο,
με ελπίδα,

... και καλή δύναμη
στην τελική προσπάθεια

Καλό
Καλοκαίρι

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

$$2023 = 20^2+(2\cdot 20)^2+23$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης: Εμμανουήλ Ιωάννης
Διευθυντής: Τυρλής Ιωάννης
Επιμέλεια Έκδοσης: Ζώτος Ευάγγελος

Υπεύθυνοι για το Δ.Σ
Αντωνόπουλος Νίκος
Κερασαρίδης Γιάννης

Επιτροπή Έκδοσης
Αργυράκης Δημήτριος
Βακαλόπουλος Κώστας
Λουριδάς Γιάννης
Λουρίδας Σωτήρης
Τσίτος Χρήστος
Τσιφάκης Χρήστος
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

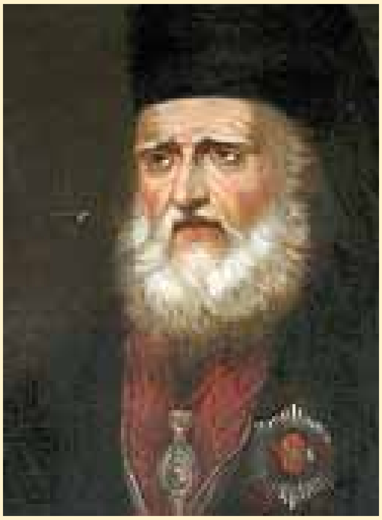
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Ευγένιος Βούλγαρης

Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα ΕΜΕ Ν. Ηλείας



Ο Ευγένιος Βούλγαρης

Ο Ευγένιος Βούλγαρης ή Βούλγαρις (11 Αυγούστου **1716** - 27 Μαΐου **1806**) ήταν Έλληνας κληρικός, παιδαγωγός, δάσκαλος του Γένους και **διαπρεπής στοχαστής** του **Νεοελληνικού Διαφωτισμού**. Μετέφρασε αλλά και υπέβαλε σε **κριτική** τον Βολταίρο[1]. Έγραψε πραγματείες επί παντός επιστητού: νομικές, ιστορικές, θεολογικές, γραμματικές, γλωσσικές, αστρονομικές, πολιτικές, μαθηματικές, αρχαιολογικές, περί μουσικής, περί ανεξιθρησκίας[2], περί ευθανασίας, περί παλιρροιών. Έγραψε ακόμα ποιήματα, λόγους, εκκλήσεις προς την Αικατερίνη Β΄ για την **απελευθέρωση** της Ελλάδος και εκατοντάδες επιστολές. Επιμελήθηκε πολύτιμες εκδόσεις βυζαντινών συγγραφέων και κλασικών συγγραμμάτων και μετέφρασε πλήθος κειμένων από τα λατινικά στα γαλλικά.

Γεννήθηκε το 1716 στην Κέρκυρα από οικογένεια η οποία καταγόταν από τη Ζάκυνθο και το όνομά του ήταν Ελευθέριος. Μετονομάστηκε σε Ευγένιος όταν χειροτονήθηκε διάκονος, το 1737 ή το 1738. Πρώτος του διδάσκαλος υπήρξε ο Αντώνιος Κατήφορος[3]. Διετέλεσε μαθητής και του **Μεθοδίου Ανθρακίτη**[4], καθόσον έχει επιβεβαιωθεί ότι νωρίτερα από το 1736 - 1738 σπούδαζε στα **Ιωάννινα**. Στο διάστημα 1738-1742 πιθανολογείται ότι ταξίδεψε στη βόρεια Ιταλία, όπου ήλθε σ' επαφή με τις νεωτερικές ιδέες του Διαφωτισμού. Τέλεσε χρέη ιεροκήρυκα στην εκκλησία του Αγίου Γεωργίου, που ήταν το κέντρο των δραστηριοτήτων της ελληνικής κοινότητας και δίδαξε στην ονομαστή Φλαγγίνειο Σχολή της Βενετίας. Δίδαξε στη Μαρουτσαία Σχολή στα Ιωάννινα (που ίδρυσαν οι αδελφοί Μαρούτση[5]) από το 1742 ως τις αρχές του 1746. Εκεί δίδαξε τη **φυσική** και τα **μαθηματικά** του Νιούτον και του Λάιμπνιτς, τον **εμπειρισμό** του Τζον Λοκ, τα φιλοσοφήματα των Τόμας Χομπς και Κρίστιαν φον Βολφ κ.ά. Αντιμετώπισε όμως την εχθρότητα του συντηρητικού δασκάλου της σχολής Γκιούμα Μπαλάνου Βασιλόπουλου και αναγκάστηκε τελικά να αφήσει τη θέση αυτή. Του προσφέρθηκε τότε η διεύθυνση του σχολείου της Κοζάνης, όπου ο Βούλγαρης δίδαξε ως τις αρχές του 1750. Επανήλθε στη Μαρουτσαία Σχολή και το 1753 ανεχώρησε για την Αθωνιάδα Ακαδημία.

Διευθυντής στην Αθωνιάδα Ακαδημία

Ερείπια της Αθωνιάδας Ακαδημίας

Το 1753 ανέλαβε τη διεύθυνση της Αθωνιάδας Ακαδημίας, της οποίας και έδωσε το όνομα, που είχε ιδρυθεί από τη Μονή Βατοπεδίου στο Άγιο Όρος τρία χρόνια νωρίτερα και στην οποία γίνονταν δεκτοί όχι μόνο μοναχοί αλλά και λαϊκοί. Εκεί δίδαξε Λογική, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία, Μεταφυσική, Αριθμητική, Γεωμετρία, Φυσική και Κοσμογραφία, χρησιμοποιώντας δικές του μεταφράσεις έργων δυτικοευρωπαίων φιλοσόφων, μαθηματικών και φυσικών. Στην πύλη της εισόδου της Σχολής μιμούμενος τον Πλάτωνα, έθεσε την ακόλουθη επιγραφή: *Γεωμετρήσων εισίτω, ού κωλύω. Τώ μη θέλοντι συζυγήσω τάς θύρας.*

Από τα θρανία της Αθωνιάδας Σχολής είχε περάσει και ο μοναχός **Κοσμάς ο Αιτωλός**, μια από τις

---

[1] Ψευδώνυμο του Φραγκίσκος Μαρία Αρουέ (1694 - 1778) Γάλλος φιλόσοφος, συγγραφέας και δοκιμιογράφος. Θεωρείται **κεντρική μορφή** και ενσάρκωση του Διαφωτισμού και σπουδαιότερος άνθρωπος του 18ου αιώνα.

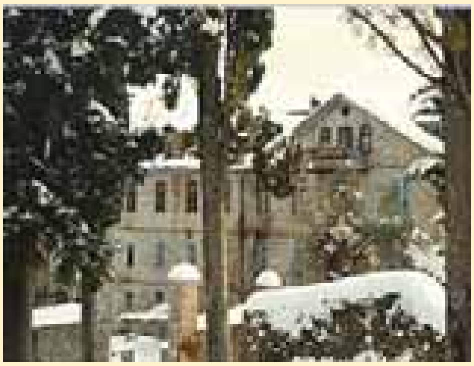
[2] Ο Βούλγαρης είναι ο πρώτος έπλασε τον ελληνικό όρο *ανεξιθρησκεία*.

[3] Αντώνιος Κατήφορος (Ζάκυνθος 1696 ή 1685–1763): Επίσκοπος, θεολόγος και ποιητής.

[4] Μεθόδιος Ανθρακίτης (Ιωάννινα 1660 – 1736) : Έλληνας κληρικός, θεολόγος, παιδαγωγός και **μαθηματικός**.

[5] Σίμος και Λάμπρος Μαρούτσης: Γιαννιώτες **έμποροι** που είχαν εγκατασταθεί στη Βενετία.

μεγαλύτερες πνευματικές και πολιτικές προσωπικότητες του 18ο αιώνα, καθώς και ο Άγιος της Εκκλησίας Αθανάσιος ο Πάριος. Έξι χρόνια όμως αργότερα αναγκάστηκε να αποχωρήσει, καθώς αντίθετοι κύκλοι στην Ακαδημία και ιδιαίτερα η αντιζηλία του Πατριάρχη Κυρίλλου Ε΄ προκαλούσαν δυσχέρειες στο έργο του. Αποσύρθηκε για μερικούς μήνες του **1759** στη Θεσσαλονίκη. Το φθινόπωρο του 1759 διορίστηκε με τη μεσολάβηση του Γρηγορίου του Γκίκα[6], δάσκαλος στην Πατριαρχική Ακαδημία (**Μεγάλη του Γένους Σχολή**[7]) της Κωνσταντινούπολης, όπου παρέμεινε για τρία χρόνια. Και από κει όμως αποχώρησε 1762 λόγω προστριβών με τον πατριάρχη Σαμουήλ τον Α', ο οποίος ήταν φανατικός οπαδός του Αριστοτέλη.


Η Αθωνιάδα Ακαδημία σήμερα

Στη Βλαχία και τη Γερμανία

Ο Βούλγαρης έφυγε απογοητευμένος από τις συνεχείς οπισθοδρομικές αντιδράσεις οριστικά από τον ελλαδικό χώρο το **1763** και τα υπόλοιπα χρόνια της ζωής του τα πέρασε σε ελληνικές κοινότητες του εξωτερικού, όπου ασχολήθηκε με εκκλησιαστικά καθήκοντα και με την έκδοση έργων του. Στην αρχή πήγε στη **Βλαχία**, στο **Βουκουρέστι**, όπου έμεινε περίπου ένα χρόνο. Εκεί συναντά τον ηγεμόνα της Βλαχίας Κωνσταντίνο Ρακοβίτζα και το διάδοχό του Στέφανο Ρακοβίτζα. Το 1764 πήγε κι έμεινε για ένα διάστημα στη γερμανική πόλη Χάλε και στη Λειψία, όπου έμεινε οκτώ χρόνια και μπόρεσε να **εκτυπώσει αρκετά σημαντικά έργα του**. Αντιμετώπισε όμως την αυξανόμενη επιρροή των Ουνιτών[8] και την απέκρουσε προασπίζοντας την **Ορθοδοξία** και την ελεύθερη άσκησή της.

Τελευταία χρόνια στη Ρωσία

Η φήμη του ως διανοούμενου έφερε **την πρόσκληση** από την αυτοκράτειρα Αικατερίνη Β' της Ρωσίας. Την αποδέχτηκε κι έφτασε στη **Μόσχα** το 1771, κατά τη διάρκεια του Ρωσοτουρκικού πολέμου (1768-1774) όπου και συναντήθηκε με τους αδελφούς Ορλώφ. Το 1775 χειροτονήθηκε ιερέας. Τον επόμενο χρόνο έγινε αρχιεπίσκοπος Σλαβωνίου και Χερσώνος στην Ουκρανία. Στα δώδεκα χρόνια που έμεινε στη θέση αυτή **ενίσχυσε** τους ολοένα και περισσότερους Έλληνες πού έφταναν από το Νότο κι επιδίωξε την επέμβαση της Ρωσίας στα εσωτερικά της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας, προς όφελος των Ορθοδόξων ελληνόφωνων πληθυσμών. Παραιτήθηκε από την αρχιεπισκοπή το **1787**, εξαιτίας των συγκρούσεών του με τη Σύνοδο για τα ζητήματα των **Ουνιτών**, αλλά και του προχωρημένου της ηλικίας του, της υγείας του και της διάθεσής του να επιδοθεί απερίσπαστος στις αγαπημένες του πνευματικές ενασχολήσεις, τη συγγραφή και τη μετάφραση, ορίζοντας διάδοχό του τον Νικηφόρο Θεοτόκη[9]. Την ίδια χρονιά έγινε μέλος της Αυτοκρατορικής Ακαδημίας Επιστημών της Ρωσίας. Συνέγραψε **έκκληση** προς την αυτοκράτειρα Αικατερίνη της Ρωσίας για την απελευθέρωση των υπόδουλων Ελλήνων, συμβάλλοντας στην έναρξη νέου **νικηφόρου πολέμου** (1787-1792). Αποσύρθηκε στην Πετρούπολη όπου επιδόθηκε στη συγγραφή. Είχε τη χαρά να μάθει το **1800** για την πρώτη μορφή αυτονομίας σε ελληνικό έδαφος που δόθηκε στην **Επτάνησο Πολιτεία**. Το 1802 αποσύρθηκε στη Μονή του Αγίου **Αλεξάνδρου Νιέφσκι**, όπου πέθανε το 1806 σε ηλικία 90 ετών, διατηρώντας ως το τέλος της ζωής του τη διαύγεια του πνεύματος και τη δυνατότητα να μελετά και να προσεύχεται.

Το μαθηματικό έργο του Ευγένιου Βούλγαρη

Το μαθηματικό έργο του Ευγένιου Βούλγαρη χαρακτηρίζεται από **έντονο** μεταρρυθμιστικό πνεύμα και επιδρά σημαντικά στη διαμόρφωση του περιεχομένου της νεοελληνικής παιδείας. Με τη διδασκαλία

[6] Γρηγόριος Γ' Γκίκας (1724-1777): Ηγεμόνας (Πρίγκιπας) της **Βλαχίας** και της **Μολδαβίας**.

[7] Είναι το αρχαιότερο σε λειτουργία εκπαιδευτικό ίδρυμα του Ελληνισμού, καθώς αποτελεί την ιστορική συνέχεια της Πατριαρχικής Ακαδημίας που ιδρύθηκε τον 9ο αιώνα.

[8] Καθολικοί Χριστιανοί που έχουν πλήρη κοινωνία με την Εκκλησία της Ρώμης και τον Πάπα, αλλά διατηρούν τις λειτουργικές παραδόσεις και το εορτολόγιο της Ορθόδοξης Εκκλησίας.

[9] Νικηφόρος Θεοτόκης (1731-1800): Έλληνας λόγιος και θεολόγος.

του, το συγγραφικό-μεταφραστικό του έργο αλλά και με **τη στάση της ζωής του**, προσέφερε και συμπλήρωσε απόψεις και μεθόδους των ευρωπαίων μαθηματικών της εποχής του. Στα μέσα του 18ου αιώνα, τα Μαθηματικά βρίσκονταν σε πάρα πολύ προηγμένο επίπεδο και είχαν την συναίνεση για τη διδασκαλία τους τόσο των νεωτεριστικών όσο και των συντηρητικών κύκλων. Δίδαξε πρώτος Descartes και Locke, ανώτερα Μαθηματικά και θεωρία του Σύμπαντος. Είχε γνώση των έργων των Μαθηματικών, Φυσικών και Αστρονόμων Κοπερνίκου, Κέπλερ, Γαλιλαίου, Νιούτον, Τακέ κ.α. Ορισμένα από τα έργα τους μετέφρασε και δίδαξε. Επίσης στη Λογική του, ο Ευγένιος Βούλγαρης αποδεικνύεται ένθερμος οπαδός της εμπειρικής μεθόδου στην έρευνα του φυσικού κόσμου. Πιο συγκεκριμένα εκφράζει την εμπιστοσύνη του στην παρατήρηση και στο πείραμα, δίνει παραδείγματα πειραματικής απόδειξης διαφόρων θεωριών και τονίζει ότι τα πειράματα πρέπει να πραγματοποιούνται με ακρίβεια Τρεις κυρίως ήταν οι βάσεις πάνω στις οποίες, ο Βούλγαρης στήριξε το μαθηματικό του έργο: **Η Αριθμητική του Christian Wolff** (1679-1754). **Τα Μαθηματικά του Janos Andrea Segner** (1704-1777) και **Η Ευκλείδεια Γεωμετρία του André Tacquèt** (1612-1660)

Η Αριθμητική του Christian Wolff

Ο Christian Wolff (1679-1754) υπήρξε πολυγραφότατος Γερμανός χριστιανός φιλόσοφος, γεννημένος στο Breslau τους σημερινής Πολωνίας, ο οποίος, χρονολογικά, τοποθετείται μεταξύ του Λάιμπνιτς και του Κάντ. Ο Βούλγαρης διαπνέονταν από τις ιδέες του Γερμανού αυτού φιλοσόφου και δίδασκε την Αριθμητική του την οποία μετέφρασε και η οποία αποτελείται από εβδομήντα σελίδες. Κατά το Βούλγαρη *Ἀριθμητική ἐστίν ἐπιστήμη περί τον διορισμένον ἀριθμόν καθ' αὐτό, ἤτοι περί τών ἀριθμών είναι ἀσχολουμένη τακτική.*

Ο Βούλγαρης διαιρεί την **Αριθμητική** σε Θεωρητική που ασχολείται με τις ιδιότητες των αριθμών, Πρακτική που ασχολείται με τις πράξεις μεταξύ αριθμών, Οργανική, Συμβολική που ασχολείται με τη χρήση μεταβλητών και συμβόλων, Λογιστική που ασχολείται με τη λύση προβλημάτων, Κοινή, Ολοσχερή που ασχολείται με τους ακέραιους αριθμούς και Κλασματική που ασχολείται με τα κλάσματα και τις πράξεις τους.

Εξώφυλλο βιβλίου του Βούλγαρη

Το βιβλίο αυτό, δίνει τους ορισμούς των εννοιών που διαπραγματεύεται χρησιμοποιώντας και παραδείγματα. Μεταξύ άλλων περιέχει πράξεις μεταξύ ακεραίων, πράξεις μεταξύ κλασμάτων, μετατροπή ετερωνύμων κλασμάτων σε ομώνυμα, απλοποίηση κλασμάτων, μετατροπή ακεραίων σε κλάσματα και αντιστρόφως, μεθόδους υπολογισμού τετραγώνων και κύβων ακεραίων αριθμών, μεθόδους για την εύρεση τετραγωνικών και κυβικών ριζών, ιδιότητες των πράξεων με τη χρήση μεταβλητών.

Των Μαθηματικών Στοιχείων αι Πραγματείαι αι Αρχοειδέσταται

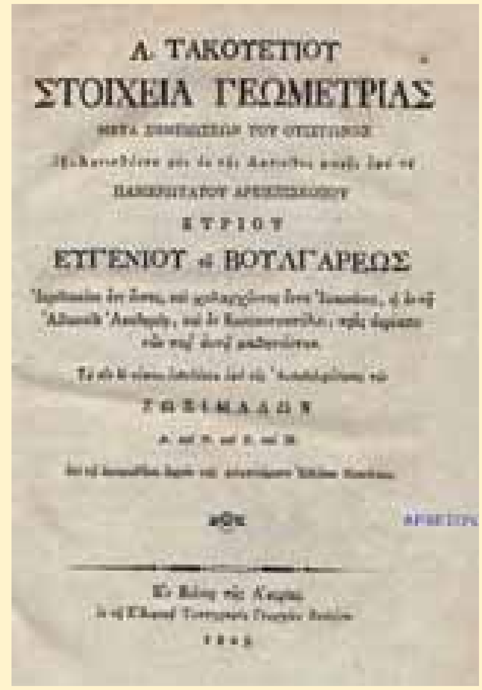
Το έργο αυτό, είναι επιλεκτική μετάφραση του Βούλγαρη από το μαθηματικό έργο του Johan Andreas von Segner. O Segner(1704-1777) ήταν Ούγγρος μαθηματικός, προσωπικός φίλος του Βούλγαρη. Έγραψε πολλά έργα υδραυλικής και Μαθηματικών. Ο Ευγένιος Βούλγαρης, επιλέγει για τη διδασκαλία του, ενότητες από το πεντάτομο έργο του Segner, *Cursus Mathematicus*, το οποίο εκδόθηκε στην ιστορική πόλη Halle της Γερμανίας. Στην επιλογή των κεφαλαίων που μεταφράζει περιλαμβάνονται:

Στοιχεία Αριθμητικής, Στοιχεία Γεωμετρίας, Στοιχεία του Γεωμετρικού Λογισμού, Εμβαδομετρία, Λογάριθμοι, Τριγωνομετρία.

Θεωρούσε πιο **αναγκαίο** το να διδαχθούν οι Έλληνες αυτά τα κεφάλαια από το να διδαχθούν τη θεωρία των εξισώσεων, την Αναλυτική Γεωμετρία και την Απειροστική Ανάλυση, που εκείνη την εποχή **αναπτύσσονταν** στον **ευρωπαϊκό** χώρο. Η διδασκαλία της συμβολικής αριθμητικής του Βούλγαρη, θεωρείται σημαντική, γιατί προωθούσε την ένταξη και την αποδοχή της **Άλγεβρας** ως βάση της υπολογιστικής σκέψης στη Νεοελληνική Μαθηματική Παιδεία.

Στοιχεία γεωμετρίας του Andre Tacquet (Τακουετιου)

Ο André Tacquet (Τακουέτιος) (1612 – 1660) ήταν Βέλγος Μαθηματικός. Το μαθηματικό του έργο είναι σημαντικό και θεωρείται ότι, προετοίμασε το έδαφος για τις μεγάλες κατακτήσεις του Νεύτωνα και του Λάϊμπνιτς. Έγραψε πολλά έργα για τα πανεπιστήμια και τις σχολές των Ιησουϊτών[10].


Α. ΤΑΚΟΥΕΤΙΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΚΥΡΙΟΥ
ΕΥΓΕΝΙΟΥ ΤΟΥ ΒΟΥΛΓΑΡΕΩΣ

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας διδασκόταν εκείνη την περίοδο, όχι μόνον στην Ελλάδα αλλά και στην Ευρώπη, με βάση το διαχρονικό και πάντα επίκαιρο έργο *Στοιχεία του Ευκλείδη*. Ο Βούλγαρης επέλεξε να μεταφράσει το εγχειρίδιο του Τακουέτιου με τίτλο: *Elementa Euclidea Geometriae* (Στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας), που ήταν ευρύτατα διαδεδομένο στον ευρωπαϊκό χώρο, το οποίο τυπώνεται στα **1805**, ένα χρόνο **πριν το θάνατό του**. Ο Βούλγαρης αξιοποιώντας την σύγχρονη επιστημονική σκέψη, δε μεταφράζει απλώς στην ελληνική γλώσσα τη Γεωμετρία του Τακουέτιου, αλλά σε πολλά σημεία **προσθέτει** τις απόψεις του. Στο βιβλίο αυτό πολλές προτάσεις της Γεωμετρίας αποδεικνύονται από το Βούλγαρη και με διαφορετικό τρόπο. Σε πολλές περιπτώσεις αναφέρει: *«Εγώ δε και άλλως δείξω»*. Αξίζει να αναφερθούμε ιδιαίτερα, στα χειρόγραφα, **καλαίσθητα**, αλλά και ακριβή σχήματα της Γεωμετρίας, καθώς και στα σχήματα των γραφικών παραστάσεων, τις ταξινομήσεις των πινάκων, τους ορισμούς, τις επεξηγήσεις, τα σχόλια.

Εν κατακλείδι ο Ευγένιος Βούλγαρης είναι μια **μεγάλη μορφή** με πολυεπίπεδη προσφορά στην παιδεία, την εκπαίδευση, την επιστήμη, την Εκκλησία αλλά και στην αναγέννηση του έθνους. Ήταν από τους πρώτους που συνέβαλε αποτελεσματικά στην **ηθική επανάσταση** μεταξύ των Ελλήνων. Κινούμενος μέσα στο **ανανεωτικό πνεύμα** της εποχής του εισήγαγε στην παιδεία του γένους το Διαφωτισμό. Διδάσκει παράλληλα με τα φιλολογικά μαθήματα και τη Θεολογία, Μαθηματικά, Λογική και Φυσική, αποτυπώνοντας στη διδασκαλία του την αποδοχή της αξίας όλων των κλάδων των Μαθηματικών. Εργάστηκε ως δάσκαλος, συγγραφέας, μεταφραστής και προσπάθησε να μεταφέρει τις ιδέες της σύγχρονής του επιστήμης στο Ελληνικό Γένος, **έχοντας συναίσθηση** της πνευματικής του καταστάσεως. Ο Βούλγαρης αντιλαμβάνεται τα Μαθηματικά περισσότερο ως **μέρος της ανθρωπιστικής παιδείας**, που οφείλει να διαθέτει ένας μορφωμένος άνθρωπος για την ολοκλήρωση της επιστημοσύνης του, παρά ως εργαλείο για την αναπαράσταση των σχέσεων που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα. Η γλώσσα που χρησιμοποιεί στα συγγράμματα του, είναι η **καθαρεύουσα**. Χρησιμοποι-


Ἐγὼ δὲ καὶ ἄλλως δείξω.

Πορίσματα.

Σελίδα από βιβλίο του Ευγένιου Βούλγαρη

[10] Θρησκευτικό καθολικό τάγμα, που συγκροτήθηκε τον 16ο αιώνα από τον Ισπανό Ιγνάτιο Λογιόλα.

εί **επίθετα, ρήματα** και **ουσιαστικά** άξια ιδιαίτερης **προσοχής**. Έτσι ο δάσκαλος, αλλά και ο μαθητής εκτός από μαθηματικές έννοιες γνωρίζει και τον πλούτο της Ελληνικής γλώσσας και παράδοσης. Το μεταφραστικό και συγγραφικό έργο του, καθώς και η γενικότερη δράση του καταδεικνύουν το έντονο ενδιαφέρον του για την **πνευματική πρόοδο** και τη διάδοση των επιστημονικών ιδεών στον ελλαδικό χώρο. Μελετά έργα εκπροσώπων του ευρωπαϊκού διαφωτισμού με πίστη στη δύναμη του ορθού λόγου και την παιδεία, ως μέσα για την ανάπτυξη των διανοητικών δυνάμεων του ανθρώπου. Κατά την πρώτη φάση της σταδιοδρομίας του, επιχειρεί να συγκροτήσει ένα νέο εκπαιδευτικό και φιλοσοφικό πρότυπο. Για το σκοπό αυτό συγγράφει πρωτότυπα έργα και επιδίδεται σε πληθώρα μεταφράσεων χάρη στις οποίες εμφανίστηκαν, για πρώτη φορά στον ελλαδικό χώρο, τα επιτεύγματα της νεότερης ευρωπαϊκής φιλοσοφίας και επιστήμης. Το έργο του έμελλε να σηματοδοτήσει τη **μετάβαση** στο νεότερο **φιλοσοφικό στοχασμό** που κυριάρχησε τις επόμενες δεκαετίες στην ελληνόφωνη παιδεία. Από την άλλη, ως ενεργός παράγοντας στα ζητήματα της Εκκλησίας, χρησιμοποίησε τη μετάφραση και τη συγγραφή για να **ενισχύσει** τις **θέσεις** της **Ορθοδοξίας** απέναντι στην ουνιτική πολιτική του Καθολικισμού. Τέλος, ως πολιτική προσωπικότητα χρησιμοποίησε τις μεταφράσεις προκειμένου να εκφράσει και να προπαγανδίσει το **πολιτικό όραμα** της μεγάλης Ορθόδοξης Αυτοκρατορίας. Προσβλέπει στην επεκτατική πολιτική της Αικατερίνης για την ευόδωση των προσδοκιών του περί αποκοπής εδαφών από την Οθωμανική Αυτοκρατορία και προσάρτησής τους στη μεγάλη Ορθόδοξη κοινότητα της ανατολικής Ευρώπης. Οι μελετητές της προσωπικότητας και του έργου του Ευγενίου Βούλγαρη αποτυπώνουν την αποτίμησή τους συμφωνώντας ότι: *Στη διδακτική του παρουσία ο Βούλγαρης θεωρήθηκε ως ένας* ***αναγνωρισμένος*** *θεολόγος, με διδακτικό πρόγραμμα που περιλάμβανε ένα νέο συνδυασμό Θεολογίας και Φιλοσοφίας, με τις Θετικές Επιστήμες.*

Υ.Γ.: *Θερμές ευχαριστίες στο συνάδελφο κ.* ***Κωνσταντίνο Νάκο*** *ΣΕΕ ΠΕ03 του ΠΕΚΕΣ Δυτικής Ελλάδος για την παραχώρηση της διπλωματικής του εργασίας [1] από την οποία αντλήθηκε το μεγαλύτερο μέρος των πληροφοριών που παρατίθενται στο παρόν κείμενο.*

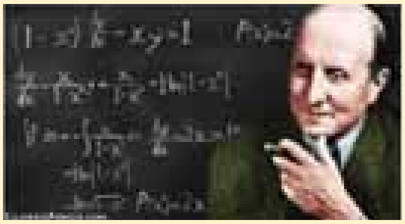
Πηγές

1. http://ikee.lib.auth.gr/record/320260/files/GRI-2020-27936.pdf
2. https://el.wikipedia.org/wiki/Ευγένιος_Βούλγαρης
3. https://el.wikipedia.org/wikiΜαρούτσιος_Σχολή
4. https://el.wikipedia.org/wiki/Αθωνιάδα_Ακαδημία
5. https://el.wikipedia.org/wiki/Μεγάλη_του_Γενους_Σχολή
6. https://el.wikipedia.org/wiki/Ανατολικές_Καθολικές_Εκκλησίες
7. http://www.kozlib.gr/collections/view.php?id=E0147307
8. http://history.math.uoc.gr/el/node/70
9. https://www.sansimera.gr/biographies/160
10. http://www.lib.uoa.gr/hellinomnimon/authors/Voulgaris.htm
11. https://www.corfu-museum.gr/index.php/en/21-2013-07-10-16-15-45/399-sta-ixni-tou-evgeniou-voylgari
12. https://el.wikipedia.org/wiki/Βολταίρος
13. http://history.math.uoc.gr/el/node/16
14. https://www.leonidion.gr/2016/11/blog-post_35.html

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

150 Χρόνια: [1873-1950]

Έχουν γραφεί, κατά καιρούς, από τα περιοδικά της ΕΜΕ και μάλιστα πρόσφατα, αρκετά σχετικά άρθρα από τον **Ευκλείδη Β΄**, όπως επίσης έχουν παρουσιαστεί ομιλίες για τον Καραθεοδωρή στα συνέδρια της ΕΜΕ και σε σχετικές ημερίδες. Με αφορμή την επετειακή ημερομηνία, **για τα** 150 **χρόνια** από την **γέννησή του**, θα γίνουν και **άλλες εκδηλώσεις** σε σχολεία, δήμους και από **παραρτήματα** της ΕΜΕ, όπως επίσης και από το Μουσείο Καραθεοδωρή που βρίσκεται στην **Κομοτηνή**. Μέσα στη χρονιά θα υπάρξουν και σχετικές εκδηλώσεις και στο εξωτερικό, στο Μόναχο και στο Βερολίνο της Γερμανίας ενώ αναμένεται και πιθανή επιμνημόσυνη δέηση στο Βαλντφρίνχοφ (Βαυαρία), στο κοιμητήριο όπου ενταφιάστηκε.



Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή υπήρξε μία **σημαντική μορφή** στην ιστορία της επιστήμης. Ήταν γόνος ενός ισχυρού μεγαλεπήβολου γενεαλογικού δέντρου με ρίζες στην Αδριανούπολη της Ανατολικής Θράκης.

Γενάρχης ήταν ο Στέφανος Καραθεοδωρή [1789-1867] ιατρός, λόγιος και **μαθηματικός**, ιδρυτής της αυτοκρατορικής ιατρικής σχολής της Κωνσταντινούπολης στην οποία δίδαξε ως καθηγητής επί σαράντα χρόνια. Υπήρξε προσωπικός ιατρός του σουλτάνου, σύμβουλος του υπουργείου εκπαίδευσης, όπου εισήγαγε και επέβαλε στην τουρκική γλώσσα πολλούς επιστημονικούς όρους με **ελληνική ρίζα**. Άλλωστε μιλούσε και έγραφε δεκαεπτά γλώσσες. **Γενικά οι Καραθεοδωρή** κατελάμβαναν ανώτατα αξιώματα στην Οθωμανική Αυτοκρατορία ως υπουργοί, πρεσβευτές, ηγεμόνες νήσων και διπλωματικοί υπάλληλοι. Μ' αυτήν τη δύναμη κατόρθωσαν να υπηρετήσουν τα εθνικά συμφέροντα παραδίδοντας το εμπόριο, τις τέχνες και τις επιστήμες σε ελληνικά χέρια, δίχως όμως να εκτίθενται απέναντι στην Οθωμανική Αυτοκρατορία.

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, ήταν δισέγγονο του Αντωνίου Καραθεοδωρή, αδερφού του Στέφανου, στον οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως, γεννιέται το 1873 στο Βερολίνο στις 13 **Σεπτεμβρίου**. Ο παππούς του ήταν ανεψιός του μαρτυρικού **Πατριάρχη Κύριλλου Στ΄**, ενώ η **μητέρα** του η Δέσποινα **Πετροκόκκινου** κατάγονταν από τη Χίο. Το γένος Πετροκόκκινου είναι επίσης σημαντικό στην νεότερη ελληνική ιστορία. Τέλος, ο πατέρας του Στέφανος που γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη το 1834 ήταν διπλωμάτης στο Βέλγιο, όπου υπήρξε και μέλος της Ακαδημίας Διεθνούς Δικαίου των Βρυξελλών.

Όλος ο βίος και η πολιτεία του Κ. Καραθεοδωρή διέπονται από διαρκή δράση με **σεμνότητα**, ταπείνωση, **ανιδιοτέλεια** και **μεγαλοψυχία** που εκπλήσσει κυριολεκτικά την επιστημονική κοινότητα.

Μέσα από αυτή τη λαμπρή επιστημονική καριέρα ξεχωρίζει και η σχέση του με τον Αϊνστάιν, όπου μέσα από την αλληλογραφία των δύο αυτών ανδρών που αρχίζει τον Σεπτέμβρη του 1916 προκύπτει η μεγάλη συμβολή του Κ. Καραθεοδωρή σε 3 δυσκολίες που συνάντησε στη διατύπωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Ο Αϊνστάιν αναγνώρισε την βοήθεια που δέχτηκε από τον Κ. Καραθεοδωρή, όπως προκύπτει από την αλληλογραφία των δύο επιστημόνων. Επιστολή αντίγραφο βρίσκεται στα αρχεία του μουσείου Κ. Καραθεοδωρή στην Κομοτηνή.

Έκδοση της ΕΜΕ - 1973

Πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι, το 1936 θεσπίζεται το **βραβείο** Fields για τα Μαθηματικά. Είναι διεθνώς αναγνωρισμένο το κύρος του βραβείου Fields στα Μαθηματικά και η συμβολή του στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης. Το βραβείο Fields απονέμεται κάθε τέσσερα χρόνια κατά τη διάρκεια διεθνούς συνεδρίου. Αποδέκτες είναι μαθηματικοί κάτω των σαράντα χρόνων, ενώ η επιτροπή αξιολόγησης απαρτίζεται από κορυφαίους μαθηματικούς αναγνωρισμένου κύρους.

Το πολύ σημαντικό για μας τους Έλληνες είναι ότι ο Κ. Καραθεοδωρή ήταν ο **πρόεδρος της κριτικής επιτροπής** στην πρώτη απονομή. Γενικά αναφέρουμε για το επιστημονικό του έργο, ότι οι μαθηματικές του αποδείξεις χαρακτηρίζονται από «κομψότητα και απλότητα», αλλά και αυστηρότητα που δίνει απόλυτη ασφάλεια στα συμπεράσματα που προκύπτουν. Με τη συμβολή του στον Λογισμό των Μεταβολών βοήθησε στην ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Η συμβολή του στη **Θεωρητική Φυσική** ήταν ουσιαστική, όπως επίσης και στη μαθηματική θεμελίωση τομέων της Φυσικής όπως η Θερμοδυναμική, η γεωμετρική οπτική, η μηχανική και η σχετικότητα.

Οι εφαρμογές των Μαθηματικών στη σύγχρονη κοινωνία*

Οι εφαρμογές των Μαθηματικών στη σύγχρονη κοινωνία.

Δάσιος Γεώργιος, Ομότιμος Καθηγητής Παν/μίου Πατρών, αντεπιστέλλον μέλος Ακαδημίας Αθηνών

Τα Μαθηματικά, που η σημερινή τους ηλικία ξεπερνάει τα 3.000 χρόνια, προσφέρουν την απόλυτη ανθρώπινη σκέψη και γλώσσα σε ό,τι αφορά στην αυστηρή ανθρώπινη επικοινωνία. Με την γλώσσα των Μαθηματικών μπορούμε να διαχειριζόμαστε αλλά και να ανταλλάσσουμε οσοδήποτε πολύπλοκες έννοιες και λογικά επιχειρήματα χωρίς κανένα απολύτως λάθος.

Με την πάροδο του χρόνου άρχισε να δημιουργείται μια διάκριση μεταξύ των επιστημόνων που παρήγαγαν νέα **μαθηματική γνώση** και αυτών που χρησιμοποιούσαν αυτήν την γνώση. Έτσι καταλήξαμε να μιλάμε για Θεωρητικά και για Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Όμως στη σύγχρονη εποχή, οι ανάγκες για μαθηματική σκέψη και τεχνικές διαχείρισης μεθόδων σχεδόν σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα, η διάκριση μεταξύ θεωρίας και εφαρμογής έχει πλέον εξαφανιστεί. Και αυτό για τον απλό λόγο ότι δεν υπάρχουν πια μαθηματικές θεωρίες που δεν έχουν εφαρμογή σε κάποια ανθρώπινη δραστηριότητα. Αντίθετα, οι απαιτούμενες σήμερα **μαθηματικές μέθοδοι** όχι απλά δεν περισσεύουν αλλά λείπουν από το σύνολο των αναγκών μας.

Στόχος της παρούσας συνάντησης είναι να προβληθούν μερικές από τις σύγχρονες επιστημονικές και τεχνολογικές περιοχές όπου τα Μαθηματικά αποτέλεσαν και αποτελούν το άλφα και το ωμέγα της ύπαρξής τους.

Από την παραγοντοποίηση ακεραίων στην κρυπτογραφία

Εμμανουήλ Ιωάννης, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών - Πρόεδρος Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Ήταν ήδη γνωστό στους Αρχαίους Έλληνες ότι κάθε θετικός ακέραιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών. Υπολογιστικά όμως, η διαδικασία αυτής της παραγοντοποίησης για πολύ μεγάλους αριθμούς ενέχει **μια πολυπλοκότητα** που αποτελεί πρόκληση ακόμα και για τα δεδομένα των σημερινών υπολογιστικών διατάξεων. Ακριβώς πάνω σε αυτή τη δυσκολία βασίζονται **τεχνικές κρυπτογράφησης**, που εφαρμόζονται ευρέως για την ασφαλή μετάδοση μηνυμάτων. Στην ομιλία, θα περιγράψουμε σύντομα δύο τέτοιες μεθόδους: τη μέθοδο RSA και τη μέθοδο κρυπτογράφησης μέσω ελλειπτικών καμπυλών.

Μαθηματική ανάλυση και Επιστήμη των Υλικών: Μερικά Παραδείγματα

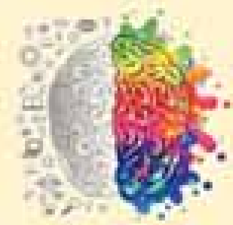
Αλικάκος Νικόλαος, Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Τα πειράματα, και στην εποχή μας οι αριθμητικές **προσομοιώσεις**, είναι τα κύρια εργαλεία για την κατανόηση της φύσης.Όμως αυτές οι τόσο καθιερωμένες προσεγγίσεις, έχουν δύο μειονεκτήματα:Αφ' ενός υπάρχουν φαινόμενα που είναι ιδιαίτερα δύσκολο να τα συλλάβουν τα πειράματα ή οι προσομοιώσεις, όπως προβλήματα στα οποία συνυπάρχουν πολλές διαφορετικές κλίμακες μεγάλης διαφοράς στις τάξεις μεγέθους.Αφετέρου, ακόμη και στις περιπτώσεις που ένα πρόβλημα μπορεί κανείς να το χειριστεί πειραματικά ή αριθμητικά, μπορεί να **υπάρχει** μια σοβαρή **έλλειψη κατανόησης** –εν γένει δεν ενδιαφέρει μόνον μια φαινομενολογική περιγραφή– αλλά και μια ικανοποιητική **εξήγηση** των

---

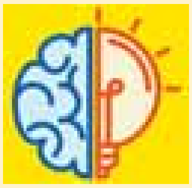
* Από τη σχετική εκδήλωση που έγινε στις **5 Απριλίου 2023** στο Ευγενίδειο ίδρυμα, σε κύκλο διαλέξεων για την Επιστήμη και Τεχνολογία στο σύγχρονο κόσμο.

μηχανισμών πίσω από την παρατήρηση. Αυτό είναι ακριβώς το σημείο όπου η πιο θεωρητική ανάλυση υπεισέρχεται: υπάρχουν πολλά μαθηματικά μοντέλα στις φυσικές επιστήμες όπου η **αλληλοεπίδραση** ενός μικρού αριθμού ποσοτήτων-παραμέτρων έχει ως αποτέλεσμα μια πληθώρα φαινομένων, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που λόγω της συνύπαρξης πολλών κλιμάκων δεν είναι δυνατή η κατανόησή τους πειραματικά ή μέσω προσομοίωσης. Με την βοήθεια της Μαθηματικής Ανάλυσης, μπορεί κανείς πολλές φορές αυστηρά να εξηγήσει τις παρατηρήσεις με το να τις συσχετίσει με μερικές από τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν το μοντέλο, και με αυτό τον τρόπο να **επιβεβαιώσει** (ή να διαψεύσει) την **εγκυρότητά του**. Σε αυτήν την ομιλία θα δοθούν κάποια παραδείγματα τέτοιων φαινομένων όπου συνυπάρχουν πολλές κλίμακες, και που προέρχονται από την περιοχή της επιστήμης των υλικών, και θα παρουσιαστεί η προσφορά της Μαθηματικής Ανάλυσης στην κατανόησή τους.



Μαθηματικά και επιδημίες

Σύψα Βάνα, Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Αθηνών



Η πανδημία COVID-19 ανέδειξε τον ρόλο των Μαθηματικών στη μελέτη επιδημιών. Ερωτήματα σχετικά με τη δυναμική της μετάδοσης ενός παθογόνου στον πληθυσμό, το ρόλο των δικτύων των επαφών μας στη μετάδοση, το ποσοστό ανοσίας που πρέπει **να επιτευχθεί για να ελεγχθεί η διασπορά**, τη βέλτιστη στρατηγική προτεραιοποίησης του εμβολιασμού –όταν τα εμβόλια δεν επαρκούν– και την αποτελεσματικότητα των μέτρων **κοινωνικής αποστασιοποίησης** είναι κάποια από αυτά που μπορούν να διερευνηθούν με τη βοήθεια των Μαθηματικών. Στη διάλεξη δόθηκαν τόσο από την πανδημία COVID-19 όσο και από άλλες επιδημίες.

Ευφυείς Υπολογιστικοί Αλγόριθμοι: Μαθηματικά αιχμής για ρεαλιστικές προσομοιώσεις

Γεωργούλης Εμμανουήλ, Καθηγητής ΕΜΠ – Καθηγητής Heriot-Watt University, UK, μέλος ΙΥΜ-ΙΤΕ

Η **προσομοίωση** φυσικών, βιολογικών, κ.ά. φαινομένων και διαδικασιών είναι κεντρικής σημασίας στη σημερινή τεχνολογική πρόοδο, καθώς ο σχεδιασμός και η εκτέλεση πειραμάτων είναι χρονικά και οικονομικά κοστοβόρα και, πολλές φορές, είναι αδύνατο να πραγματοποιήσουμε ακριβείς απαραίτητες μετρήσεις χωρίς να καταστρέψουμε τις πειραματικές διατάξεις. Η Υπολογιστική Επιστήμη στοχεύει στην κατασκευή και υλοποίηση προσομοιωτών τέτοιων φαινομένων/διαδικασιών. Οι μέθοδοι και αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται, όμως, απαιτούν **συνεχή βελτίωση** για να καταλήξουμε σε αρκούντως **ρεαλιστικές προσομοιώσεις**. Η συνεχής αυτή βελτίωση είναι απαραίτητη ακόμα κι αν λάβουμε υπόψη την επιτάχυνση των επιδόσεων των υπερυπολογιστών. Θα περιγραφούν παραδείγματα για το πώς μαθηματικά αιχμής χρησιμοποιούνται στον σχεδιασμό και την **κατασκευή ευφυών** νέων αλγορίθμων, ικανών να προσαρμόζουν αυτόματα τον υπολογιστικό φόρτο εκεί που απαιτείται, ώστε να γίνεται **βέλτιστη χρήση** των υπολογιστικών δυνατοτήτων των μοντέρνων υπερυπολογιστών.

Αλγοριθμικές πτυχές της Θεωρίας Παιγνίων

Φωτάκης Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αντικείμενο της ομιλίας ήταν η χρήση εννοιών και τεχνικών της Θεωρίας Παιγνίων για τη μοντελοποίηση και την **αλγοριθμική επίλυση προβλημάτων** ανάθεσης πόρων και αγαθών και συνάθροισης προτιμήσεων μεταξύ οντοτήτων (ή απλούστερα "χρηστών") που επιδεικνύουν ιδιοτελή και στρατηγική συμπεριφορά. Αρχικά θα εξηγήσουμε, μέσα από παραδείγματα, πως αν αγνοήσουμε τα κίνητρα των χρηστών κατά την αλγοριθμική επίλυση τέτοιων προβλημάτων, μπορεί να οδηγηθούμε σε εντελώς λανθασμένα συμπεράσματα ως προς τη συμπεριφορά της λύσης μας. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στο **παράδειγμα των δικτύων ιδιοτελούς δρομολόγησης**. Θα ορίσουμε τον λόγο συντονισμού, που ποσοτικοποιεί την υποβάθμιση της απόδοσης σε ένα τέτοιο δίκτυο λόγω της ιδιοτελούς συμπεριφοράς των χρηστών, και θα παρουσιάσουμε αλγοριθμικές μεθόδους για τη βελτίωσή του. Θα κλείσουμε με μια σύντομη αναφορά στις βασικές αρχές του αλγοριθμικού σχεδιασμού μηχανισμών και στην έννοια της φιλαλήθειας σε προβλήματα συνάθροισης προτιμήσεων και διαμοιρασμού αγαθών.

12η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια

13 - 19 Απριλίου 2023

Πορτορόζ - Σλοβενία

Η 12η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια πραγματοποιήθηκε από 13 έως 19 Απριλίου 2023 στην πόλη Πορτορόζ της Σλοβενίας. Συνολικά συμμετείχαν πενήντα πέντε χώρες από όλο τον κόσμο με διακόσιες δεκατρείς μαθήτριες. Από τις πενήντα πέντε χώρες, τριάντα οκτώ ήταν χώρες της Ευρώπης, οι οποίες συμμετείχαν με εκατό πενήντα μία μαθήτριες.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, μέσω των διαγωνισμών ΘΑΛΗΣ και ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ, μεταξύ των μαθητριών που συμμετείχαν και διακρίθηκαν, επέλεξε τα μέλη της ελληνικής αποστολής.

Από τις τρεις μαθήτριες μας, οι οποίες συμμετείχαν στην 12η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια, μία βραβεύτηκε με **εύφημη μνεία**. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει θερμά τις μαθήτριες της Ελληνικής ομάδας και εύχεται το καλύτερο για τη συνέχεια.

Σπάχου Στεφανία	Εκπαιδευτήρια Αθηνά, Τρίκαλα	Συμμετοχή
Νικολάου Μαρία Ελένη	Εκπαιδευτική Αναγέννηση	Εύφημη Μνεία
Κουλουριώτη Βαρβάρα	Εκπαιδευτήρια Ο ΠΛΑΤΩΝ	Συμμετοχή
Βασιλοπούλου Αλεξάνδρα	Ελληνικό Κολλέγιο Θεσσαλονικης	-

Τις μαθήτριες συνόδευσαν ως αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, στον οποίο οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν, και ως υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Κροατία). Εστω $n \geqslant 3$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ θέτουμε

$$b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$$

(εδώ ορίζουμε το a_0 να είναι το a_n και το a_{n+1} να είναι το a_1). Υποθέτουμε ότι για όλα τα i και j με $1 \leqslant i, j \leqslant n$, έχουμε $a_i \leqslant a_j$ αν και μόνο αν $b_i \leqslant b_j$. Να αποδείξετε ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Λύση (1ος τρόπος) Έστω $a_i = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και $a_j = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Τότε

$$b_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2} \leq \frac{2a_j}{a_j} = 2 = \frac{2a_i}{a_i} \leq \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} = b_i.$$

Άρα $a_j \leq a_i$ από τη συνθήκη του προβλήματος, και αφού $a_i \leq a_j$, είναι $a_i = a_j$. Αφού ο a_j είναι ο μέγιστος των αριθμών $a_1, a_2, \ldots, a_n$, και ο a_i ο ελάχιστος, έπεται ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(2ος τρόπος) Ας υποθέσουμε, με εις άτοπο απαγωγή, ότι δεν είναι όλα τα a_i ίσα μεταξύ τους. Θεωρούμε δείκτη i τέτοιο ώστε ο $a_i = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και $a_{i+1} < a_i$. Τότε

$$b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} < \frac{2a_i}{a_i} = 2.$$

Αφού $a_j \leq a_i$ για κάθε $1 \leq j \leq n$, έπεται ότι $b_j \leq b_i < 2$ για κάθε $1 \leq j \leq n$, και άρα

$$b_1 b_2 \cdots b_n < 2^n.$$

Αλλά, από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου - Γεωμετρικού Μέσου έχουμε

$$\begin{aligned} b_1 b_2 \cdots b_n &= \frac{a_n + a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1 + a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n} \\ &\geq 2^n \frac{\sqrt{a_n a_2}\sqrt{a_1 a_3} \cdots \sqrt{a_{n-1} a_1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} \\ &= 2^n, \end{aligned}$$

άτοπο. Συνεπώς, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(3ος τρόπος) Έχουμε $a_i b_i = a_{i-1} + a_{i+1}$ για όλα τα $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, οπότε

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 2 \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Αφού $a_i \leqslant a_j$ αν και μόνο αν $b_i \leqslant b_j$, από την ανισότητα Chebychev έπεται ότι

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 2n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

οπότε $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq 2n$. Από την άλλη, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{i-1}}{a_i} + \frac{a_i}{a_{i-1}}\right),$$

οπότε από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου - Γεωμετρικού Μέσου, έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{\frac{a_{i-1}}{a_i} \cdot \frac{a_i}{a_{i-1}}} = 2n.$$

Συνεπώς, ισχύουν οι ισότητες παντού, και άρα $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i-1}}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Συνεπώς, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Πρόβλημα 2 (Σλοβακία). Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC. Έστω D το σημείο στον περιγεγραμμένο κύκλο του, τέτοιο ώστε η AD να είναι διάμετρος. Έστω τα σημεία K και L στα τμήματα AB και AC, αντίστοιχα, τέτοια ώστε οι DK και DL να είναι εφαπτόμενες στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AKL.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία KL διέρχεται από το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.

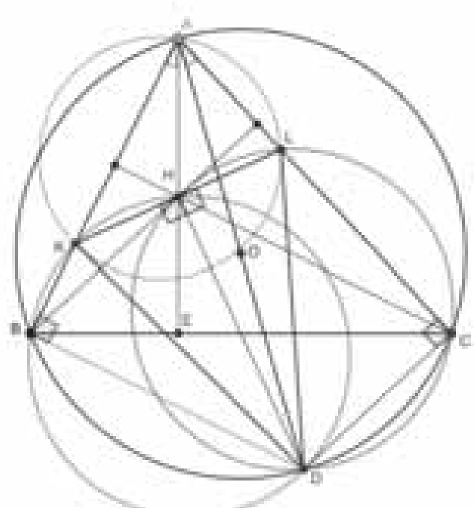
Λύση. Έστω H το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του ΔKBD με την $\overline{KL}$. Θα δείξουμε ότι το H είναι το ορθόκεντρο του ΔABC. Αφού $K\widehat{B}D = 90°$, έχουμε $K\widehat{H}D = 90°$, οπότε $L\widehat{H}D = 90° = L\widehat{C}D$. Επομένως το τετράπλευρο $CLHD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, ο οποίος τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του $BKHD$ στο H, το οποίο βρίσκεται στην $\overline{KL}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A\widehat{B}H &= K\widehat{D}H && \text{(βαίνουν στο ίδιο τόξο του περίκυκλου του } BKHD) \\ &= 90° - H\widehat{K}D && (\text{αφού } K\widehat{H}D = 90°) \\ &= 90° - B\widehat{A}C. && (\text{η ευθεία } DK \text{ εφάπτεται στον περίκυκλο του } \Delta AKL \text{ στο } K) \end{aligned}$$

Επομένως, $BH \perp AC$. Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned} A\widehat{C}H &= L\widehat{D}H && \text{(βαίνουν στο ίδιο τόξο του περίκυκλου του } CLHD) \\ &= 90° - H\widehat{L}D && (\text{αφού } L\widehat{H}D = 90°) \\ &= 90° - B\widehat{A}C. && (\text{η ευθεία } DL \text{ εφάπτεται στον περίκυκλο του } \Delta AKL \text{ στο } L) \end{aligned}$$

Επομένως, $CH \perp AB$. Συνεπώς, το H είναι το σημείο τομής των υψών του ΔABC, και άρα η ευθεία $\overline{KL}$ διέρχεται από το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.



Σχήμα 1: Πρόβλημα 2

Σχόλιο. Αφού η AD είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου AKL, έπεται εύκολα ότι το σημείο τομής του ύψους από το A και του KL είναι το μέσο του KL.

Πρόβλημα 3 (Αυστραλία). Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Η Αλεξία έχει ένα λεξικό $\mathcal{D}$ που αποτελείται από κάποιες σειρές k γραμμάτων που περιέχουν μόνο τα γράμματα A και B. Η Αλεξία θα επιθυμούσε να γράψει είτε το γράμμα A είτε το γράμμα B σε κάθε κελί ενός $k \times k$ πλέγματος έτσι ώστε κάθε στήλη να περιέχει μια σειρά του $\mathcal{D}$, όταν διαβαστεί από πάνω προς τα κάτω και κάθε γραμμή να περιέχει μια σειρά του $\mathcal{D}$, όταν διαβαστεί από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Ποιος είναι ο ελάχιστος ακέραιος m τέτοιος ώστε αν το $\mathcal{D}$ περιέχει τουλάχιστον m διαφορετικές σειρές, τότε η Αλεξία να μπορεί να συμπληρώσει το πλέγμα της με αυτό τον τρόπο, ανεξάρτητα από τις σειρές που υπάρχουν στο $\mathcal{D}$.

Λύση. Ισχυριζόμαστε ότι η ελάχιστη τιμή είναι 2^{k-1}.

Αρχικά, θα δώσουμε ένα σύνολο S για το οποίο η Αλεξία δεν μπορεί να συμπληρώσει το πλέγμα. Θεωρούμε το σύνολο όλων των σειρών k γραμμάτων που περιέχουν μόνο τα γράμματα A και B και τα οποία λήγουν σε B, και αφαιρούμε τη σειρά k γραμμάτων που αποτελείται μόνο από το γράμμα B. Προφανώς υπάρχουν δύο ανεξάρτητες επιλογές για καθένα από τα πρώτα $k-1$ γράμματα και μία για το τελευταίο γράμμα. Εφόσον έχουμε εξαιρέσει ακριβώς μια σειρά k γραμμάτων, το σύνολο αυτό έχει ακριβώς $2^{k-1}-1$ στοιχεία.

Ας υποθέσουμε ότι η Αλεξία προσπαθεί να συμπληρώσει το πλέγμα της. Τότε κάθε γραμμή του πλέγματος θα περιέχει μια σειρά k γραμμάτων που λήγουν σε B. Αλλά τότε η τελευταία στήλη περιέχει μια σειρά k γραμμάτων B, η οποία δεν ανήκει στο σύνολό μας. Έτσι, η Αλεξία δεν μπορεί να συμπληρώσει το πλέγμα της, και άρα $m \geq 2^{k-1}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα οποιοδήποτε σύνολο S με τουλάχιστον 2^{k-1} σειρές k γραμμάτων. Προφανώς, εάν το S περιέχει τη σειρά k γραμμάτων A ή τη σειρά k γραμμάτων B, τότε η Αλεξία θα μπορούσε να συμπληρώσει το πλέγμα της με όλα τα σχετικά γράμματα και κάθε γραμμή και στήλη να περιέχει αυτή τη σειρά.

Έστω ότι το S δεν περιέχει καμμιά από τις παραπάνω δύο σειρές. Ανάμεσα σε όλες τις 2^k σειρές k γραμμάτων A και B, καθεμιά από αυτές έχει το συμπλήρωμα της που αντιστοιχεί στη σειρά με το γράμμα B σε κάθε θέση που η αρχική σειρά έχει το A, και αντίστροφα. Προφανώς το συμπλήρωμα της σειράς k γραμμάτων A είναι η σειρά k γραμμάτων B. Υποθέτουμε ότι έχουμε εξαιρέσει τις δύο τελευταίες ομοιόμορφες σειρές k γραμμάτων, οπότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν δύο σειρές k γραμμάτων, ώστε η μία είναι το συμπλήρωμα της άλλης.

Έστω $\ell, \ell' \in S$ το ζευγάρι αυτών των σειρών. Έστω $\mathcal{J}$ το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν στο A στη σειρά ℓ, και επομένως στο B στη σειρά ℓ'. Όλοι οι άλλοι δείκτες που δεν ανήκουν στο $\mathcal{J}$ αντιστοιχούν στο B στη σειρά ℓ, και επομένως στο A στη σειρά ℓ'. Ισχυριζόμαστε τότε ότι η Αλεξία τοποθετεί το γράμμα A στο κελί της γραμμής r και της στήλης c, αν $r, s \in \mathcal{J}$ ή $r, s \notin \mathcal{J}$, και το γράμμα B αλλιώς, και κάθε γραμμή και στήλη περιέχει μια σειρά k γραμμάτων του S.

Το καταδεικνύουμε αυτό με ένα παράδειγμα: Αν $k=6$ και έχουμε τις σειρές $AAABAB$ και $BBBABA$ στο λεξικό, τότε η Αλεξία θα μπορούσε να συμπληρώσει το πλέγμα όπως στον παρακάτω Πίνακα 1.

Αν θεωρήσουμε τη γραμμή i ή τη στήλη i για $i \in \mathcal{J}$, τότε από την κατασκευή μας, η σειρά γραμμάτων σε αυτή τη γραμμή/στήλη περιέχει το γράμμα A στους δείκτες k με $k \in \mathcal{J}$ και το γράμμα B αλλού, οπότε είναι η σειρά ℓ. Αν θεωρήσουμε τη γραμμή i ή τη στήλη i για $i \notin \mathcal{J}$, τότε από την κατασκευή μας, η σειρά γραμμάτων σε αυτή τη γραμμή/στήλη περιέχει το γράμμα A στους δείκτες k με $k \notin \mathcal{J}$ και το γράμμα B αλλού, οπότε είναι η σειρά ℓ'. Άρα, κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πλέγματος περιέχει μια σειρά k γραμμάτων του S.

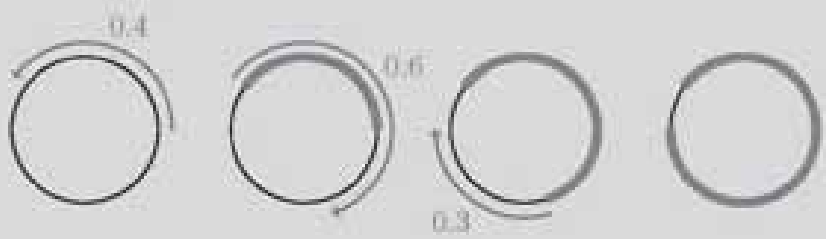
A	A	A	B	A	B
A	A	A	B	A	B
A	A	A	B	A	B
B	B	B	A	B	A
A	A	A	B	A	B
B	B	B	A	B	A

Πίνακας 1: Πρόβλημα 3

Συνεπώς, για κάθε S με $|S| \geq 2^{k-1}$, η Αλεξία μπορεί να συμπληρώσει το πλέγμα της κατάλληλα. Αφού $m \geq 2^{k-1}$, η τιμή 2^{k-1} είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του m.

Πρόβλημα 4 (Ολλανδία). Ο Turbo το σαλιγκάρι βρίσκεται σε ένα σημείο ενός κύκλου με μήκος περιφέρειας 1. Δοθείσας μιας άπειρης ακολουθίας θετικών πραγματικών αριθμών $c_1, c_2, c_3, \ldots$, ο Turbo σέρνεται διαδοχικά αποστάσεις $c_1, c_2, c_3, \ldots$ γύρω από τον κύκλο, κάθε φορά επιλέγοντας να σέρνεται είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα.

Για παράδειγμα, αν η ακολουθία $c_1, c_2, c_3, \ldots$ είναι η $0.4, 0.6, 0.3, \ldots$, τότε ο Turbo μπορεί να ξεκινήσει να σέρνεται ως ακολούθως:



Να προσδιορίσετε τη μέγιστη σταθερά $C > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα: για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $c_1, c_2, c_3, \ldots$ με $c_i < C$ για όλα τα i, ο Turbo (αφού μελετήσει την ακολουθία) μπορεί να εξασφαλίσει ότι υπάρχει κάποιο σημείο στον κύκλο το οποίο δε θα επισκεφτεί ποτέ ή δε θα συρθεί πάνω από αυτό.

Λύση. Η μέγιστη δυνατή τιμή της C είναι $C = \frac{1}{2}$. Πράγματι, για $0 < C \leq \frac{1}{2}$, ο Turbo μπορεί να επιλέξει οποιοδήποτε σημείο P διαφορετικό από το σημείο εκκίνησης για να το αποφύγει. Όταν ο Turbo βρίσκεται σε ένα οποιοδήποτε σημείο A διαφορετικό από το P, τότε τα δύο τόξα AP έχουν συνολικό μήκος 1. Άρα, το μεγαλύτερο από τα δύο τόξα (ή και τα δύο στην περίπτωση που το A είναι το αντιδιαμετρικό του P) πρέπει να έχει μήκος $\geq \frac{1}{2}$. Επιλέγοντας αυτό το τόξο (ή οποιοδήποτε τόξο στην περίπτωση που το A είναι το αντιδιαμετρικό του P) για να συρθεί, ο Turbo μπορεί να εξασφαλίσει ότι θα αποφύγει το P για πάντα.

Για $C > \frac{1}{2}$, γράφουμε $C = \frac{1}{2} + a$ με $a > 0$ και επιλέγουμε την ακολουθία

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1+a}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1+a}{2}, \quad \ldots$$

Δηλαδή, $c_i = \frac{1}{2}$ εάν ο i είναι περιττός, και $c_i = \frac{1+a}{2} < C$ εάν ο i είναι άρτιος. Ισχυριζόμαστε ότι ο Turbo τελικά θα επισκεφτεί όλα τα σημεία του κύκλου. Αυτό είναι προφανές όταν ο Turbo συρθεί προς την ίδια κατεύθυνση δύο φορές στη σειρά, διότι $c_i + c_{i+1} > 1$ για κάθε i. Επομένως, απέμεινε η περίπτωση όπου ο Turbo σέρνεται εναλλάξ αριστερόστροφα και δεξιόστροφα. Εάν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ξεκινήσει να σέρνεται δεξιόστροφα απόσταση $\frac{1}{2}$ και αμέσως μετά αριστερόστροφα απόσταση $\frac{1+a}{2}$, τότε θα έχει μετακινηθεί μια καθαρή απόσταση ίση με $\frac{a}{2}$ αριστερόστροφα. Έστω θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε $N > \frac{2}{a}$. Μετά από $2N$ διαδοχικές κινήσεις, ο Turbo θα έχει συρθεί μια συνολική απόσταση μήκους $\frac{a}{2} \cdot N > 1$, οπότε θα έχει συρθεί πάνω από οποιοδήποτε σημείο του κύκλου.

Σχόλιο. Οποιαδήποτε ακολουθία της μορφής $c_i = x$ εάν ο i είναι περιττός, και $c_i = y$ εάν ο i είναι άρτιος, όπου $0 < x, y < C$, με $x + y \geq 1$, και $x \neq y$ ικανοποιεί τις συνθήκες με το ίδιο επιχείρημα.

Πρόβλημα 5 (Τσεχία). Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $s \geqslant 2$. Για κάθε θετικό ακέραιο k, ορίζουμε τον *αντεστραμμένο* του k' ως ακολούθως: γράφουμε τον k ως $as + b$, όπου a, b είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $b < s$, οπότε $k' = bs + a$. Για το θετικό ακέραιο n, θεωρούμε την άπειρη ακολουθία $d_1, d_2, \ldots$ όπου $d_1 = n$ και d_{i+1} είναι ο αντεστραμμένος του d_i για κάθε θετικό ακέραιο i.

Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία περιέχει το 1 αν και μόνο αν ο n όταν διαιρεθεί με τον $s^2 - 1$ αφήνει υπόλοιπο 1 ή s.

Λύση. Θεωρούμε τη διαφορά $k - k''$. Εάν $k = as + b$, όπου a, b είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $b < s$, τότε $k' = bs + a$. Έστω $a = \ell s + m$, όπου ℓ, m είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $m < s$. Τότε $k' = (b + \ell)s + m$ με $m < s$, και έτσι $k'' = ms + (b + \ell)$. Άρα $k - k'' = (as + b) - (ms + b + \ell) = (a - m)s - \ell = \ell(s^2 - 1)$. Έχουμε, λοιπόν, τα εξής:

1. Ισχύει $k \geq k''$ για κάθε $k \geq 1$, και
2. η διαφορά $k - k''$ διαιρείται από το $s^2 - 1$.

Από το δεύτερο συμπέρασμα, έπεται ότι οι ακολουθίες $d_1, d_3, d_5, \ldots$ και $d_2, d_4, d_6, \ldots$ είναι σταθερές modulo $s^2 - 1$. Επιπλέον, από το πρώτο συμπέρασμα, οι ακολουθίες αυτές είναι φθίνουσες, και τελικώς σταθερές. Δηλαδή, η ακολουθία $d_1, d_3, d_5, \ldots$ είναι $2-$περιοδική modulo $s^2 - 1$ από την αρχή και τελικώς $2-$περιοδική.

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος όρος της ακολουθίας είναι ίσος με $1 = 0 \cdot s + 1$. Τότε ο επόμενος όρος είναι ίσος με $1' = s$, και αφού η ακολουθία είναι $2-$περιοδική από την αρχή modulo $s^2 - 1$, έπεται ότι ο d_1 είναι ίσος είτε με 1 είτε με $s^2 - 1$.

Αντίστροφα, έστω ότι ο d_1 όταν διαιρεθεί με τον $s^2 - 1$ αφήνει υπόλοιπο 1 ή s. Παρατηρούμε ότι άπαξ και μια από τις ακολουθίες $d_1, d_3, d_5, \ldots$ και $d_2, d_4, d_6, \ldots$ σταθεροποιηθεί, τότε η τιμή της είναι μικρότερη από s^2. Αυτή η παρατήρηση έπεται από το παρακάτω

3. Αν $k = k''$, τότε $k = k'' < s^2$.

Πράγματι, είναι $k - k'' = \ell(s^2 - 1)$, όπως παραπάνω. Εάν $k = k''$, τότε $\ell = 0$, οπότε $k'' = ms + b$. Αφού $b \leq s - 1$ και $m \leq s - 1$, παίρνουμε $k'' \leq (s - 1)s + s - 1 = s^2 - 1 < s^2$.

Από το δεύτερο συμπέρασμα μας παραπάνω, έπεται ότι η ακολουθία $d_1, d_3, d_5, \ldots$ είναι σταθερή και ισότιμη με 1 ή s modulo $s^2 - 1$, οπότε γίνεται σταθερή και ίση είτε με 1 είτε με s από το τρίτο συμπέρασμα μας παραπάνω. Αφού $s' = 1$, η ακολουθία αυτή περιέχει το 1.

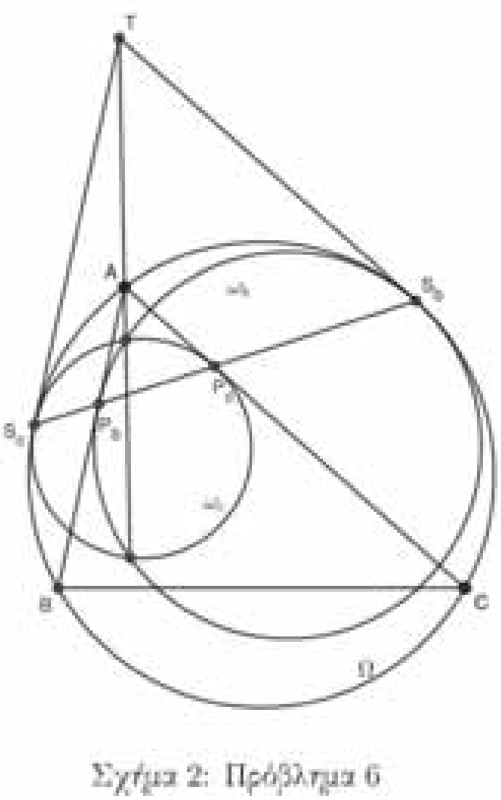
Πρόβλημα 6 (Ισραήλ). Έστω τρίγωνο ABC με περιγεγραμμένο κύκλο Ω. Έστω S_b και S_c, αντίστοιχα, τα μέσα των τόξων AC και AB τα οποία δεν περιέχουν την τρίτη κορυφή του τριγώνου. Έστω N_a το μέσο του τόξου BAC (το τόξο BC που περιέχει το A). Έστω I το έγκεντρο του τριγώνου ABC. Έστω ω_b ο κύκλος που εφάπτεται στο AB και εφάπτεται εσωτερικά στον Ω στο S_b, και έστω ω_c ο κύκλος που εφάπτεται στο AC και εφάπτεται εσωτερικά στον Ω στο S_c. Να αποδείξετε ότι η ευθεία IN_a, και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία τομής των ω_b και ω_c, τέμνονται πάνω στον Ω.

Το έγκεντρο ενός τριγώνου είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του, δηλαδή του κύκλου στο εσωτερικό του τριγώνου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του.

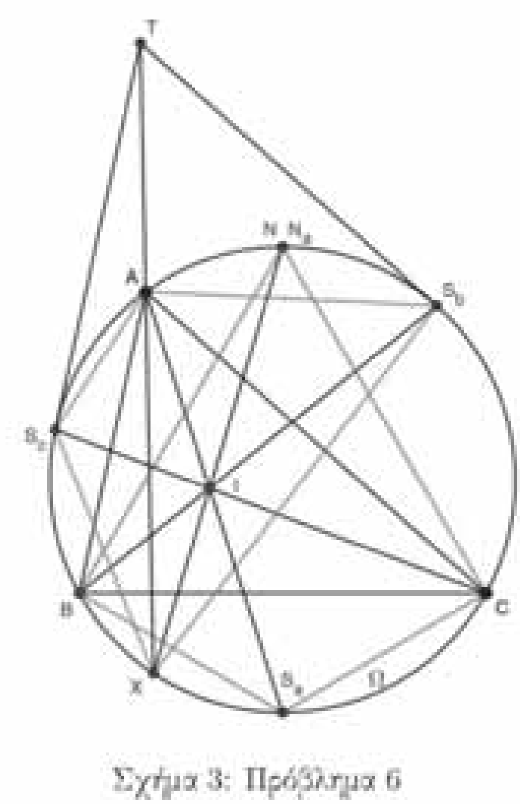
Λύση (1ος τρόπος) Θα δείξουμε πρώτα ότι το A βρίσκεται στον ριζικό άξονα των κύκλων ω_b και ω_c. Έστω T το ριζικό κέντρο των κύκλων ω_b και ω_c. Τότε οι TS_b και TS_c είναι κοινές εφαπτομένες των κύκλων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Έστω P_b και P_c τα σημεία τομής της S_bS_c με τις AB και AC, αντίστοιχα, και έστω O το κέντρο του Ω. Από την κατασκευή του S_c, είναι $OS_c \perp AB$, και από την κατασκευή της TS_c είναι $TS_c \perp OS_c$. Άρα $AB||TS_c$. Ομοίως, $AC||TS_b$. Αφού το τρίγωνο TS_cT_b είναι ισοσκελές έπεται ότι

$$A\widehat{P_b}P_c = T\widehat{S_c}S_b = S_c\widehat{S_b}T = P_b\widehat{P_c}A.$$

Από την ισότητα των παραπάνω γωνιών έπεται ότι ο κύκλος ω_b διέρχεται από το P_b, ο ω_c διέρχεται από το P_c, και τα τμήματα AP_b και AP_c είναι ίσα εφαπτόμενα τμήματα των κύκλων ω_b και ω_c, αντίστοιχα, από το A. Συνεπώς, το A βρίσκεται στον ριζικό άξονα των κύκλων ω_b και ω_c.



Σχήμα 2: Πρόβλημα 6



Σχήμα 3: Πρόβλημα 6

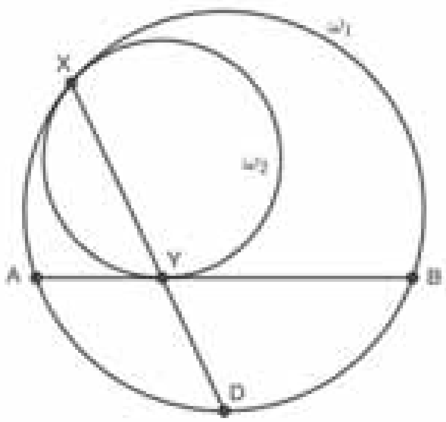
Έστω $X \neq A$ το δεύτερο σημείο τομής του ριζικού άξονα TA με τον Ω, και έστω S_a το μέσο του τόξου BC απέναντι από το A. Έστω $N \neq X$ το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας XI με τον Ω (βλ. Σχήμα 3). Θα δείξουμε ότι $N = N_a$.

Τα σημεία A, I, και S_a ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{A}C$ και άρα είναι συνευθειακά. Ομοίως, συνευθειακά είναι τα τρία σημεία B, I, S_b, καθώς και τα τρία σημεία C, I, S_c.

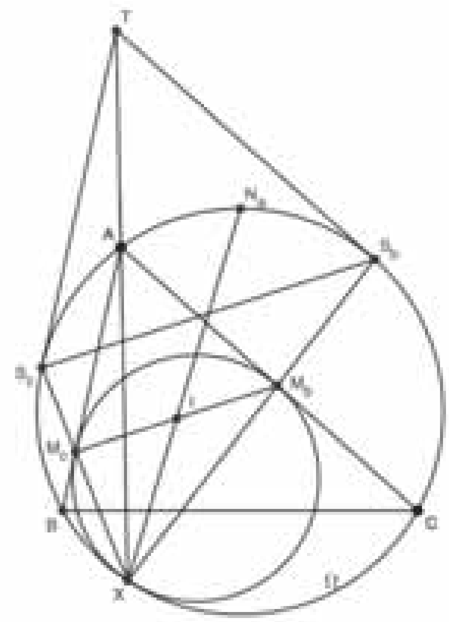
Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο AS_cXS_b είναι αρμονικό, επειδή οι εφαπτομένες στα σημεία S_b και S_c και η ευθεία AT συντρέχουν στο T. Άρα και το τετράπλευρο S_aCNB είναι αρμονικό, ως η προβολική (ή αντίστροφη) εικόνα του AS_cXS_b μέσω του I. Άρα $S_aB \cdot NC = S_aC \cdot NB$, και αφού $S_aB = S_aC$, έπεται ότι $NC = NB$. Συνεπώς, $N = N_a$, όπως θέλαμε.

(2ος τρόπος) Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα (βλ. Σημείωση 1):

Λήμμα: Δίνεται κύκλος ω_1 και μια χορδή του AB. Έστω κύκλος ω_2 ο οποίος εφάπτεται στην χορδή AB στο σημείο Y και εσωτερικά στον κύκλο ω_1 στο σημείο X. Έστω Z το μέσο του τόξου AB του ω_1 που δεν περιέχει το X. Τότε τα σημεία X, Y, Z είναι συνευθειακά.



Σχήμα 4: Πρόβλημα 6 - Λήμμα



Σχήμα 5: Πρόβλημα 6

Έστω P_b και P_c όπως στον 1ο τρόπο. Από το παραπάνω λήμμα, τα σημεία S_b, P_b και S_c είναι συνευθειακά, και ομοίως τα S_c, P_c και S_b είναι επίσης συνευθειακά. Άρα τα σημεία S_c, P_b, P_c και S_c είναι συνευθειακά, και αφού $A\hat{P}_bP_c = \frac{A\hat{B}C}{2} + \frac{A\hat{C}B}{2} = A\hat{P}_cP_b$, έπεται ότι $AP_b = AP_c$, και άρα το A βρίσκεται στο ριζικό άξονα των ω_b και ω_c. Έστω T το σημείο τομής των εφαπτομένων στον Ω στα σημεία S_c και S_b. Αφού $TS_c = TS_b$, η ευθεία AT είναι ο ριζικός άξονας των ω_b και ω_c.

Θα δείξουμε ότι οι ευθείες TA και N_aI τέμνονται στον Ω. Έστω ω_a ο κύκλος που εφάπτεται στην AB στο M_c, στην AC στο M_b και εσωτερικά στον κύκλο Ω στο σημείο X. Είναι γνωστό ότι τα σημεία N_a, I και X είναι συνευθειακά (βλ. Σημείωση 2).

Επίσης, από το λήμμα, τα σημεία X, M_c και S_c είναι συνευθειακά, καθώς επίσης και τα σημεία X, M_b, S_b. Βλέπουμε ότι τα τρίγωνα S_cTS_b και M_cAM_b είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το X. Συνεπώς, τα σημεία T, A, X είναι συνευθειακά.

Σημειώσεις

1. Το παραπάνω λήμμα το συναντάμε στη διεθνή βιβλιογραφία ως shooting lemma ή death star lemma και αποδεικνύεται εύκολα με ομοιοθεσία.

2. Δείτε το άρθρο του Khakimboy Egamberganov, "A Nice Theorem on Mixtilinear Incircles." *MATHEMATICAL REFLECTIONS*, **4**, (2016), και τις παραπομπές του.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 127

Α73. (α) Να λύσετε στους μη αρνητικούς ακέραιους την εξίσωση: $3^x = x + 2$.
(β) Βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) μη αρνητικών ακέραιων, για τα οποία οι αριθμοί $x + 3^y$, $y + 3^x$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι.

[ΜΟ Ρουμανίας 2022]

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι ο $x = 0$ είναι λύση, ενώ ο $x = 1$ είναι λύση της εξίσωσης.
Έστω $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Τότε, θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $3^x > x + 2$.
Πράγματι, για $x = 2$ ισχύει: $3^2 = 9 > 4 = 2 + 2$.
Υποθέτουμε ότι $3^x > x + 2, x \geq 2$. Τότε έχουμε: $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x > 3(x + 2) > (x + 1) + 2$.
Επομένως, ισχύει $3^x > x + 2$, για κάθε . $x \geq 2$, οπότε η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι ο $x = 1$.
(β) Αν $x = y$, τότε οι αριθμοί $x + 3^y$, $y + 3^x$ ταυτίζονται, οπότε δεν είναι διαδοχικοί.
Έστω $x > y$. Τότε έχουμε:

$$y + 3^x - (x + 3^y) = 3^x - 3^y - (x - y) = 3^y(3^{x-y} - 1) - (x - y) \geq 1 \cdot (x - y + 2) - (x - y) = 1.$$

Επομένως, η διαφορά των δύο αριθμών ισούται με 1, μόνον όταν όλες οι ανισοτικές σχέσεις ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή όταν $(x, y) = (1,0)$. Λόγω συμμετρίας έχουμε και τη λύση $(x, y) = (0,1)$.

Α74. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ισότητα:

$$f\big(f(y - x) - xf(y)\big) + f(x) = y\big(1 - f(x)\big), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

[ΜΟ Ρουμανίας 2022]

Λύση

Θέτοντας $x = 0$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$f\big(f(y)\big) = \big(1 - f(0)\big)y - f(0), \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Έστω ότι είναι $f(0) = 1$. Τότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

$$f\big(f(y)\big) = -1, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Η σχέση (1) γράφεται

$$\big(f(y - x) - xf(y)\big) = y - (y + 1)f(x) \qquad (4)$$

οπότε εφαρμόζοντας τη συνάρτηση f στα δύο μέλη της σχέσης (1), λόγω της (3), παίρνουμε:

$$f\big(y - (y + 1)f(x)\big) = -1, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) θέτοντας όπου x το $f(x)$ και $y = -\frac{1}{2}$, λαμβάνουμε $f(0) = -1$, άτοπο.
Άρα είναι $f(0) \neq 1$, οπότε η συνάρτηση $h \coloneqq f \circ f$ που ορίζεται από τη σχέση (2) είναι 1-1. Επομένως και η συνάρτηση f είναι 1-1.
Θέτοντας $y = -1$ στη σχέση (1) παίρνουμε $\big(f(-1 - x) - xf(-1)\big) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη τελευταία θέτουμε όπου x το $-(x + 1)$, οπότε λαμβάνουμε

$$f\big(f(x) + (x + 1)f(-1)\big) = -1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) για $x = -1$, προκύπτει ότι $f\big(f(-1)\big) = -1$, οπότε αυτή γράφεται:

$$f\big(f(x) + (x + 1)f(-1)\big) = f\big(f(-1)\big), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \qquad (7)$$

από την οποία, επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1, έπεται ότι:

$$f(x) + (x + 1)f(-1) = f(-1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (8)$$

Από τη σχέση (8), αν θέσουμε $f(-1) = -a$, προκύπτει ότι $f(x) = ax$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επειδή πρέπει να επαληθεύεται η σχέση (1), έχουμε:

$$(a^2 - a)xy + (a^2 - a)x - (a^2 - 1)y = 0, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow a^2 - a = a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Επομένως, η μοναδική λύση είναι η συνάρτηση $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

Α75. **Δίνεται η ακολουθία x_n: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, με $x_1 = 1$ και**

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + \cdots + \frac{x_n}{2n}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* .$$

Θεωρούμε και την ακολουθία y_n: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, με $y_n = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Να αποδείξετε ότι: (α) $2x_{n+1}^2 < y_n$ **και** $y_{n+1} < \frac{2n+1}{2n+2} y_n$, **για κάθε** $n \in \mathbb{N}^*$.

(β) $0 < y_n < \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$, **για κάθε** $n \in \mathbb{N}^*$.

[ΜΟ Ρουμανίας 2022]

Λύση

(α) Από την ανισότητα Cauchy – Schwarz λαμβάνουμε:

$$x_{n+1}^2 = \left(\frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + \cdots + \frac{x_n}{2n}\right)^2$$

$$\leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right]$$

$$< ny_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)(n=k-1)} = ny_n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = \frac{y_n}{2},$$

από την οποία προκύπτει ότι $2x_{n+1}^2 < y_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
Από τον ορισμό της ακολουθίας y_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, έχουμε:

$$(n+1)y_{n+1} - ny_n = x_{n+1}^2 < \frac{y_n}{2} \Rightarrow y_{n+1} < \frac{2n+1}{2n+2} y_n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

(β) Για κάθε $n > 1$. έχουμε:

$$0 < y_n = y_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{y_{k+1}}{y_k} < \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} < \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{2k+1}{2k+3}} = \sqrt{\frac{3}{2n+3}}.$$

Ασκήσεις για λύση

Α76. Έστω n φυσικός αριθμός, $n \geq 2$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots +, x_n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

υπό τη συνθήκη

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

Για ποιες τιμές των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή;

Α77. Να αποδείξετε ότι για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma} + 6 \geq \frac{9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}.$$

Γ63. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ. Έστω Δ σημείο του τόξου ΑΓ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχει την κορυφή Β. Θεωρούμε δύο σημεία Χ και Χ′ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $A\hat{B}X = \Gamma\hat{B}X'$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Χ, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΧΧ′ περνάει από σταθερό σημείο διαφορετικό του Δ.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. για τα Μαθηματικά

το "άπειρο" κατά τον Α.Ν. Κολμογκόροφ

προλεγόμενα.

Η στήλη μας αποτίοντας φόρο τιμής στον "ημίθεο" της μαθηματικής επιστήμης Α.Ν. Κολμογκόροφ, σας παρουσιάζει ένα σημείωμά του με θέμα το «***άπειρο σύνολο***»

“Η συνολοθεωρητική κατασκευή όλων των βασικών μαθηματικών θεωριών, αρχίζοντας από την κατασκευή της Αριθμητικής των φυσικών και πραγματικών αριθμών, απαιτεί **αναφορά** στην έννοια του "**απείρου συνόλου**". Η θεωρία του τελευταίου από μόνη της έχει ανάγκη από λογική θεμελίωση. Η ανεπάρκεια ή η αδυναμία μιας τέτοιας θεμελίωσης εκφράστηκε με το γεγονός ότι στους συνολοθεωρητικούς συλλογισμούς εμφανίστηκαν άλυτα παράδοξα. Σύμφωνα με τη γνώμη του Α,Ν. Κολμογκόροφ, την οποία ο συγγραφέας συμμερίζεται και την οποία βασικά ακολουθεί στο υπό εξέταση ζήτημα, η **εμφάνιση των παραδόξων** εξηγείται με το γεγονός ότι, στην έννοια του απείρου συνόλου, έχει νόημα μόνο κάτω από ισχύ συμπληρωματικών περιορισμών και συνθηκών, η εξακρίβωση των οποίων είναι άμεσο καθήκον της επιστήμης. Το **1977** ο Α.Ν. Κολμογκόροφ επανεξετάζει το πρόβλημα της φύσης των «απείρων συνόλων μαθηματικών αντικειμένων». Και έδειξε ότι «η μελέτη του συνόλου των φυσικών αριθμών, έχει ως αφετηρία τη διαδικασία σχηματισμού των στοιχείων του με το πέρασμα από το **n** στο **n+1**. Στην περίπτωση του συνεχούς των πραγματικών αριθμών η εξέταση ενός μόνο στοιχείου του – του πραγματικού αριθμού – οδηγεί στη μελέτη της **διαδικασίας διαμόρφωσης** των διαδοχικών προσεγγιστικών τιμών, ενώ η εξέταση όλου του συνόλου των πραγματικών αριθμών μας οδηγεί στη μελέτη των γενικών ιδιοτήτων αυτού του είδους των διαδικασιών διαμόρφωσης των στοιχείων του. Μ΄ αυτήν ακριβώς την έννοια, το άπειρο της σειράς των φυσικών αριθμών, ή του συστήματος όλων των πραγματικών αριθμών (του συνεχούς) μπορεί να χαρακτηριστεί μόνο ως "**δυνάμει**" άπειρο.

Στην άποψη του δυνάμει απείρου παρατίθεται η άποψη για τα άπειρα σύνολα ως "ενεργεία", δοσμένα ανεξάρτητα από τη διαδικασία τους”.

Η αποσαφήνιση του ζητήματος: *ως ποιό βαθμό και με ποιους όρους στη μελέτη των απείρων συνόλων είναι νόμιμη μια τέτοια αφαίρεση από τη διαδικασία σχηματισμού τους, δεν μπορεί να θεωρηθεί ακόμα ολοκληρωμένη»*

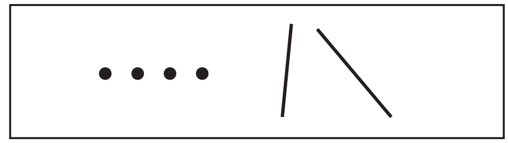
ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου

προλεγόμενα: Η στήλη μας, χρόνια ολόκληρα αλληλογραφεί με πλήθος συναδέλφων, των οποίων τουλάχιστον το ονοματεπώνυμο,, γνωρίζουμε. Ήδη έφτασε η ώρα να δεχτούμε μια ανώνυμη εργασία. θα παρακαλέσουμε τον συντάκτη της εργασίας αυτής να μας στείλει τα στοιχεία του, για λόγους επιστημονικής ευταξίας. Δημοσιεύουμε μια σελίδα της εργασίας του και… αναμένουμε

«Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και **των σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα. Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες**, τις **γραμμές** και τα **σημεία**. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις **προσεγγίσεις**, στη **Γεωμετρία** όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε **όρους** της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του **Αρχιμήδη** και του **Ήρωνα** μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.



Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο - οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις **θεμελιώνει**, δηλαδή τις **οργανώνει** σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; *Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι* ***σύνθετη έννοια****. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο»*

ΙΙΙ. αυτό το ξέρατε;

Γνωρίζετε με ποιο τρόπο η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα [Ε.Κ.Τ.]

θα τιμήσει τον Κων. Καραθεοδωρή και τη Μαρία Κάλλας; ***η απάντηση στο τέλος της στήλης***

IV. «οι συνεργάτες της στήλης γράφουν - ερωτούν»

1ο θέμα. πορεία του νομπελίστα Ιάπωνα Φυσικού Toshihide Maskawa

προλεγόμενα. κάποια μέρα έφτασε στα χέρια μας ένα σημείωμα από τον συνάδελφο Θανάση Κοπάδη, με θέμα την πορεία του νομπελίστα Ιάπωνα Φυσικού Toshihide Maskawa. Ευχαριστούμε τον καλό συνάδελφο.

«Κάθε μέρα όταν ήμουν στο δημοτικό, έπαιζα μέχρι αργά το βράδυ. Μια μέρα η μητέρα μου συνειδητοποίησε ότι δεν με είχε δει να διαβάζω ποτέ. Έτσι, σε μια συνάντηση του συλλόγου γονέων είπε στη δασκάλα: Ο γιος μας δεν μελετά καθόλου στο σπίτι. Μήπως θα έπρεπε, έστω και περιστασιακά, να του δίνετε κάποια εργασία;

Τότε η δασκάλα της απάντησε: Κάθε μέρα δίνω εργασίες για το σπίτι, αλλά ο γιος σας δεν τις κάνει. Εκείνο το βράδυ ήταν μια καταστροφή, αφού είχα

ένα δίωρο κήρυγμα από τους γονείς μου." Ο γεννημένος στις, 07 Φεβρουαρίου 1940, θεωρητικός φυσικός από την Ιαπωνία Toshihide Maskawa, αναφέρει μια ιστορία από την παιδική του ηλικία κατά τη διάρκεια της διάλεξης που έδωσε μετά την βράβευσή του με το Νόμπελ Φυσικής το 2008.
"Αυτό που με έκανε να ξεκινήσω να μελετώ ήταν όταν ανακάλυψα **το βιβλίο**. Κάποια στιγμή και ενώ υπήρχε κάτι για το οποίο έπρεπε να μάθω, επισκέφτηκα την τοπική βιβλιοθήκη και άνοιξα ένα βιβλίο. Δεν μπορώ να θυμηθώ τώρα τι βιβλίο ήταν, αλλά θυμάμαι ότι ένιωσα τρομερά **ενθουσιασμένος** για κάποιο λόγο. Από τότε όλος ο κόσμος μου περιστρέφεται γύρω από τα βιβλία»

2ο θέμα. Τεχνητή Νοημοσύνη

προλεγόμενα, ο γνωστός επιστημονικός σχολιαστής Σταύρος Ξενικουδάκης, μας έστειλε ένα μακροσκελές σημείωμα με θέμα την Τεχνητή Νοημοσύνη και τίτλο:"***ΔΙΑΛΟΓΙΚΟ ΓΛΩΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ CHATGPT, Ορόσημο στην ανάπτυξη της Τεχνητής Νοημοσύνης***"
Επειδή το σημείωμά του είναι μακροσκελές, θα το δημοσιεύσουμε σε δυο συνέχειες

Στο σημερινό Α' μέρος, αναλύει: Τι είναι, πώς κατασκευάστηκε και τι μπορεί να κάνει αυτό το είδος Τεχνητής Νοημοσύνης

Επιμέλεια: Σταύρος Ξενικουδάκης-http://openai.com, http://blog.google, «Scientific American»

«Η έρευνα γύρω από την Τεχνητή Νοημοσύνη (ΤΝ) παρουσιάζει ραγδαία πρόοδο τα τελευταία χρόνια, βασισμένη στην αυξημένη **υπολογιστική ισχύ**, λόγω της τεχνολογικής ανάπτυξης στον τομέα των ημιαγωγών, της αυξημένης συγκέντρωσης δεδομένων εύκολα προσβάσιμων, μέσω του διαδικτύου και της βελτίωσης των μοντέλων **ΤΝ**, ενσωματώνοντας νέες τεχνικές και μεθόδους. Δεν λείπουν ούτε και σήμερα αυτοί που επικεντρώνουν στις αδυναμίες της **ΤΝ** απέναντι στην ανθρώπινη νοημοσύνη, τονίζοντας ότι ακόμη απέχει πολύ από το να την πλησιάσει, ή επικεντρώνουν στην (επίσης προφανή και αναμενόμενη με δεδομένη τη μη βιολογική της βάση) διαφορετικότητα της **ΤΝ** από την ανθρώπινη νοημοσύνη. Ωστόσο, δύσκολα μπορεί να αγνοήσει κανείς την επίδραση που έχουν ήδη οι εφαρμογές **ΤΝ** στην παραγωγή και την καθημερινότητα και την επίδραση που θα έχουν αυτές που διαφαίνονται καθαρά πια στον ορίζοντα. Μέσα στους τρεις μήνες από την εμφάνισή του στο ευρύ κοινό την τελευταία μέρα του περασμένου Νοέμβρη, ένα νέο μοντέλο **ΤΝ** δείχνει ότι θα αποτελέσει ορόσημο, καθώς για πρώτη φορά εμφανίζεται μια μηχανή που μπορεί να αναλάβει με αξιώσεις μέρος της λεγόμενης πνευματικής εργασίας του ανθρώπου.

Πρόκειται για το ChatGPT, ένα γλωσσικό μοντέλο **ΤΝ** φτιαγμένο έτσι ώστε να αλληλεπιδρά με τον άνθρωπο με μορφή διαλόγου. Κατά την κατασκευάστρια «OpenAI» η διαλογική μορφή επικοινωνίας τού επιτρέπει να απαντά σε επακόλουθες ερωτήσεις, να παραδέχεται τα λάθη του, να αμφισβητεί λαθεμένα δεδομένα και να απορρίπτει ακατάλληλα αιτήματα.

Η «**OpenAI**» εμφανίζεται ως μη κερδοσκοπικός οργανισμός, που ελέγχει την «**OpenAI LP**», μια υβριδική εταιρεία «περιορισμένου κέρδους», όπως αυτοχαρακτηρίζεται. Κύριος χρηματοδότης της «**OpenAI**» είναι η «**Microsoft**», μονοπώλιο του χώρου της Πληροφορικής, που επιδιώκει να χρησιμοποιήσει το ChatGPT για να νικήσει έναν από τους μεγάλους ανταγωνιστές του στον βασικό τομέα δραστηριότητάς του (περισσότερα γι΄ αυτό στο Β' μέρος του δημοσιεύματος). Το ChatGPT λειτουργεί στο **υπολογιστικό νέφος (cloud),** πάνω σε υποδομή κέντρων δεδομένων (data centers) της «Microsoft». Λόγω των τεράστιων υπολογιστικών πόρων και των πόρων αποθήκευσης δεδομένων, που απαιτεί για τη λειτουργία του, δεν φαίνεται ότι θα είναι τουλάχιστον στο προσεχές μέλλον **εφικτή η αυτόνομη λειτουργία** έστω και μιας απλούστερης εκδοχής του σε μεμονωμένες και μη συνδεδεμένες με το διαδίκτυο υπολογιστικές συσκευές, όσο ισχυρές κι αν είναι αυτές.

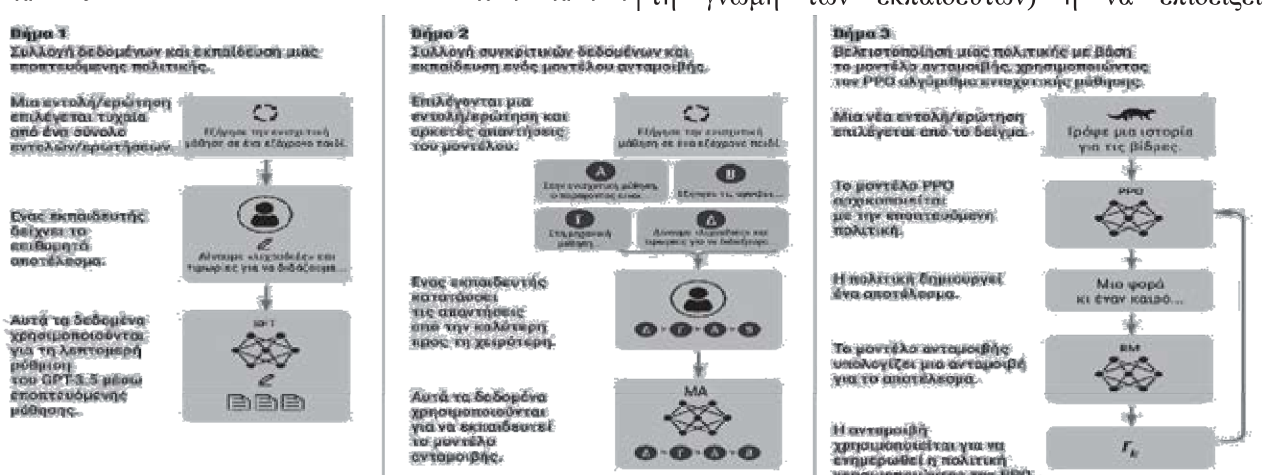
Εποπτεία, ανατροφοδότηση, ανταμοιβή, βελτιστοποίηση

Το ChatGPT χρησιμοποιεί την **τεχνική της Ενισχυτικής Μάθησης** από Ανθρώπινη Ανατροφοδότηση (Reinforcement Learning from Human Feedback ή RLHF), είναι μετεξέλιξη του μοντέλου GPT-3.5 και βασίζεται στο InstructGPT. Στην αρχική του εκδοχή το ChatGPT εκπαιδεύτηκε με εποπτευόμενη (από άνθρωπο) ρύθμιση, με τους εκπαιδευτές να του παρέχουν συζητήσεις στις οποίες έπαιζαν διπλό ρόλο, τόσο του ερωτώντα, όσο και του βοηθού της ΤΝ. Στους εκπαιδευτές δόθηκαν επιλογές απαντήσεων, που γράφτηκαν από το μοντέλο, ώστε να τους βοηθήσουν στις απαντήσεις τους. Αυτό το νέο σύνολο διαλόγων αναμείχθηκε με το σετ διαλόγων που είχε χρησιμοποιηθεί στο InstructGPT. Για να δημιουργήσουν ένα μοντέλο ανταμοιβής για την ενισχυτική μάθηση (όταν η ΤΝ παράγει αποδεκτή απάντηση «ανταμείβεται», με αποτέλεσμα να ενισχύονται οι σχετικές συνδέσεις που παρήγαγαν την απάντηση μέσα στο νευρωνικό της δίκτυο*), οι άνθρωποι της «OpenAI» συγκρότησαν συγκριτικά δεδομένα, που αποτελούνταν από δύο ή περισσότερες απαντήσεις, βαθμολογημένες ανάλογα με την ποιότητά τους. Για τη συλλογή αυτών των δεδομένων, χρησιμοποίησαν συζητήσεις που είχαν οι εκπαιδευτές με το ChatGPT. Επέλεξαν τυχαία μια απάντηση του μοντέλου, δοκίμασαν αρκετές διαφορετικές παραλλαγές και οι εκπαιδευτές τις αξιολόγησαν. Χρησιμοποιώντας τα **μοντέλα ανταμοιβής** και κάνοντας πολλαπλές διορθωτικές επαναλήψεις, ρύθμισαν τις λεπτομέρειες του μοντέλου χρησιμοποιώντας **Βελτιστοποίηση** Εγγύς Πολιτικής (Proximal Policy Optimization ή PPO). Κατά την «OpenAI» η PPO υπερέχει των καλύτερων μέχρι χτες ανάλογων τεχνικών ενισχυτικής μάθησης, λόγω της ευκολίας στη χρήση της και της καλής της απόδοσης.

Περιορισμοί

Οπως παραδέχεται η «OpenAI», το ChatGPT έχει ορισμένους περιορισμούς. Μερικές φορές γράφει φαινομενικά βάσιμες, αλλά λαθεμένες και τελικά χωρίς νόημα απαντήσεις. Είναι ευαίσθητο σε μικροαλλαγές στις διατυπώσεις των ερωτημάτων ή εντολών και την επανάληψή τους πολλές φορές. Ετσι, μπορεί να δηλώσει ότι δεν γνωρίζει την απάντηση, αλλά με μια μικρή τροποποίηση στο ερώτημα να δώσει τη σωστή απάντηση. Πολλές φορές χρησιμοποιεί περισσότερα λόγια απ' όσα χρειάζονται και κάνει πολύ συχνή χρήση ορισμένων φράσεων, όπως ότι είναι **γλωσσικό μοντέλο** που εκπαιδεύτηκε από την «OpenAI». Ενώ θα έπρεπε να ρωτάει διευκρινιστικές ερωτήσεις όταν υπάρχει κάποια ασάφεια στη διατύπωση της ερώτησης ή εντολής, συνήθως επιλέγει να μαντέψει τι εννοεί ο άνθρωπος χρήστης.

Μια από τις αδυναμίες που οι ερευνητές δεν μπόρεσαν να αντιμετωπίσουν μέσα από το ίδιο το μοντέλο είναι ότι ορισμένες φορές **δεν αρνείται** να αποκριθεί σε επιβλαβείς οδηγίες (επιβλαβείς κατά τη γνώμη των εκπαιδευτών) ή να επιδείξει



προκατειλημμένη συμπεριφορά. Γι΄ αυτό η «OpenAI» έχει βάλει **εξωτερικά φίλτρα** συμβατικού **λογισμικού** στην είσοδο του ChatGPT, ώστε να εμποδίζει ορισμένους τύπους «μη ασφαλούς» περιεχομένου. Παρ' όλ' αυτά, ακόμη κι έτσι το ChatGPT δίνει κάποιες απαντήσεις **που δεν** είναι αποδεκτές από τους κατασκευαστές του.

«Δωρεάν»

Το ChatGPT είναι η τρέχουσα εκδοχή στην «επαναληπτική ανάπτυξη όλο και πιο ασφαλών και χρήσιμων συστημάτων ΤΝ», όπως δηλώνει η OpenAI. Γι΄ αυτό η εταιρεία **αξιοποιεί την αλληλεπίδραση** των ήδη πάνω από εκατό εκατομμυρίων χρηστών του ChatGPT, ώστε να βελτιώσει το μοντέλο για να πετύχει «ουσιαστικές μειώσεις στα βλαβερά και αναληθή αποτελέσματα από τη χρήση της RLHF». Κάθε δωρεάν χρήση του ChatGPT αποτελεί ταυτόχρονα και δωρεάν εκπαίδευσή του από τον χρήστη. Προς το παρόν η χρήση του ChatGPT είναι ελεύθερη, αλλά η προοπτική σύμφωνα με την κατασκευάστρια είναι ότι κάποια στιγμή θα μετατραπεί σε συνδρομητικό επί πληρωμή. Ηδη ανακοίνωσε το ChatGPT Plus, μια βελτιωμένη συνδρομητική εκδοχή, με 20 δολάρια το μήνα, που σε αντίθεση με τη δωρεάν εκδοχή είναι πάντα διαθέσιμη και δίνει πιο γρήγορα απαντήσεις. Η OpenAI δίνει προς το παρόν ελεύθερα αρκετές πληροφορίες για την έρευνά της, αλλά δηλώνει ότι όσο προχωρά (τελειοποιώντας τις **ΤΝ** που αναπτύσσει) θα περιορίζει τη διασπορά των σχετικών πληροφοριών (για να «πατεντάρει» το κρίσιμο κομμάτι της τεχνολογίας). Στα άμεσα σχέδια της εταιρείας είναι η διάθεση του ChatGPT API, δηλαδή μιας **διασύνδεσης προγραμματισμού εφαρμογών**, που θα επιτρέπει με επιχειρησιακές συνδρομές τη χρήση του **γλωσσικού μοντέλου** από οποιοδήποτε λογισμικό, ενσωματωμένο σε κάποια συσκευή που μπορεί να συνδεθεί στο διαδίκτυο.

Πολυεργαλείο

Το γλωσσικό μοντέλο ChatGPT δεν διαθέτει μοντέλο του κόσμου και δεν έχει αντίληψη των εννοιών τις οποίες παραθέτει κάνοντας, είναι αλήθεια, πολύ καλή χρήση του λόγου, ούτε της ουσίας των σχέσεων των εννοιών μεταξύ τους. Απλουστευτικά μπορεί να πει κανείς ότι έχει αποτυπωμένο στο νευρωνικό του δίκτυο πως μετά την Α λέξη συνήθως πηγαίνει η Β. Γι' αυτό και μερικές φορές μπορεί να δώσει απίθανες ή αστείες απαντήσεις. Αν είχε εκπαιδευτεί ότι η λέξη σκύλος σημαίνει ένα ζώο με φτερά, ο σκύλος για το ChatGPT θα είχε φτερά.

Παρά τις αδυναμίες του ChatGPT, **δύσκολα** θα βρεθεί κάποιος που **να μην εντυπωσιάστηκε** από την αλληλεπίδραση που είχε με αυτή την ΤΝ. Μπορεί να απαντήσει σε ερωτήσεις πληροφοριακού περιεχομένου, να **συντάξει κείμενα κατά παραγγελία** για ένα θέμα, όπως εκθέσεις, αναφορές, δοκίμια, παραμύθια (!), να συντάξει περιλήψεις κειμένων, να κάνει αυτόματη μετάφραση, σύνταξη ειδήσεων. Τα κείμενα που παράγει μπορεί να τα γράψει μάλιστα στο στιλ γραφής κάποιου γνωστού συγγραφέα ή δημόσιου προσώπου, ή στο στιλ μιας εποχής, εφόσον του ζητηθεί. Μπορεί να γράψει ακόμη και ακαδημαϊκές εργασίες για φοιτητές, γεγονός που προκάλεσε μεγάλη ανησυχία στη διεθνή ακαδημαϊκή κοινότητα. Ο **δείκτης ενδεχόμενης λογοκλοπής** στα κείμενα που παράγει το ChatGPT είναι πολύ χαμηλός (δεν χρησιμοποιεί αυτούσια τα κείμενα με τα οποία εκπαιδεύτηκε), με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εντοπιστεί η λαθροχειρία της χρήσης του ChatGPT με τα διαθέσιμα στους ακαδημαϊκούς εργαλεία. Γι' αυτό η «**OpenAI**» έσπευσε να κατασκευάσει **λογισμικό** που όπως ισχυρίζεται μπορεί να αναγνωρίσει με μεγάλο ποσοστό επιτυχίας ποια κείμενα έχουν γραφτεί **από άνθρωπο** και ποια **από ΤΝ** (όχι μόνο από το δικό της ChatGPT, αλλά και από άλλες ΤΝ). Το ChatGPT μπορεί ακόμη και να φτιάξει σχετικά απλά προγράμματα υπολογιστών, με βάση οδηγίες που του δίνονται με γλωσσικές διατυπώσεις των απαιτήσεων (περισσότερα στο Β' μέρος). Το ChatGPT, *έστω και αν* ***δεν αρίστευσε***, *πέρασε πάντως τις* ***τελικές εξετάσεις*** *νομικής σχολής των ΗΠΑ, αφού* ***απάντησε σε όλα τα θέματα***, *από το Συνταγματικό Δίκαιο έως τη φορολογία και τις αδικοπραξίες!*

Από χτες...

Η αξιοποίηση του ChatGPT σε ευρεία κλίμακα δεν είναι κάτι μελλοντικό, ή έστω υπόθεση των επόμενων ετών. Ηδη, κάνοντας χρήση του σχεδόν έτοιμου ChatGPT API, διάφορες εταιρείες ενσωματώνουν τις δυνατότητες αυτού και άλλων λιγότερο γνωστών και αποτελεσματικών γλωσσικών μοντέλων σε μια σειρά από προϊόντα, από συσκευές καθημερινής χρήσης στο σπίτι, έως ειδικά εργαλεία για κάλυψη επαγγελματικών αναγκών σε διάφορους τομείς. Για παράδειγμα, εταιρεία ήδη διαφημίζει προϊόν της, που παράγει περιεχόμενο χωρίς λογοκλοπή, για χρήση σε διαφημίσεις, email, ιστοσελίδες και blog και ένα δεύτερο διαλογικό προϊόν, που υποστηρίζει ότι ξεπερνά τους περιορισμούς του ChatGPT. Οι έξυπνοι εικονικοί βοηθοί (τύπου Alexa, Siri κ.τ.λ.) μάλλον θα είναι από τις πρώτες συσκευές που θα αξιοποιήσουν **ΤΝ** σαν το **ChatGPT για διάλογο** με τους κατόχους τους. Ολα αυτά συμβαίνουν με βάση τους νόμους της καπιταλιστικής αγοράς και το κυνήγι του κέρδους, μακριά και ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε επιτροπές ηθικής και πλαίσια χρήσης της ΤΝ, είτε της ΕΕ, είτε άλλων κρατών και ενώσεων κρατών. Πριν παρουσιάσουν το ChatGPT, η «OpenAI» και η «Microsoft» δεν ρώτησαν την ΕΕ. Οχι ότι θα άλλαζε τίποτα...

* **Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα** *είναι δίκτυα* ***εμπνευσμένα*** *από τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα, που υλοποιούνται συνήθως σε* ***λογισμικό*** *ή υλισμικό ηλεκτρονικού υπολογιστή. Οι συνδέσεις μεταξύ των τεχνητών νευρώνων έχουν τη μορφή «βαρών». Αυξημένο βάρος μιας σύνδεσης* ***σημαίνει υψηλότερη διεγερτικότατα*** *ανάμεσα στους δύο νευρώνες, ενώ μειωμένο βάρος χαμηλότερη από τη μέση διεγερτικότητα μεταξύ τους»*

V. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε";

Η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα (Ε.Κ.Τ.) θα τιμήσει τον διάσημο Έλληνα Μαθηματικό Κων/νο Καραθεοδωρή και την ανεπανάληπτη βεντέτα της λυρικής σκηνής Μαρία Κάλλας, εκδίδοντας δύο κέρματα των δύο ευρώ το καθένα

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις Άλγεβρας

Λαζαρίδης Χρήστος

*Το άρθρο αυτό, κάνει μία επανάληψη στην ύλη Άλγεβρας Α λυκείου και είναι γραμμένο σύμφωνα και με την **νέα νοοτροπία** της τράπεζας θεμάτων*

Άσκηση 1.

Έστω $x,y,z\in\mathbb{R}$ ώστε $x+y+z=0(1)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{x^2}{y+z}=-x$.

β) $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}=0$.

γ) $\dfrac{x^3}{y+z}+\dfrac{y^3}{z+x}+\dfrac{z^3}{x+y}=2(xy+yz+zx)$.

Λύση.

α) $\dfrac{x^2}{y+z}\overset{(1)}{=}\dfrac{x^2}{-x}=-x$.

β) Από το α ερώτημα αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{y^2}{z+x}=-y \quad \text{και} \quad \frac{z^2}{x+y}=-z.$$

Έχουμε,

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=-x-y-z=-(x+y+z)=0$$

γ) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) όπως στο β προκύπτει: $\dfrac{x^3}{y+z}+\dfrac{y^3}{z+x}+\dfrac{z^3}{x+y}=-x^2-y^2-z^2\,(2)$

Αλλά $x+y+z=0\Rightarrow(x+y+z)^2=0\Rightarrow$

$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=0\Rightarrow$

$-x^2-y^2-z^2=2(xy+yz+zx)$.

Από τη σχέση (2) έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 2.

Έστω $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=x^2+y^2-2x-4y+5.$$

β) Να βρείτε τους $x,y\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

i) $x^2+y^2+5=2x+4y$.

ii) $(x-3)^2+(y-2)^2+19=2x+4y$.

Λύση.

α) $(x-1)^2+(y-2)^2=x^2-2x+1+y^2-4y+4=$
$=x^2+y^2-2x-4y+5$.

β) i) $x^2+y^2+5=2x+4y\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y+5=0$

$\overset{\alpha}{\Leftrightarrow}(x-1)^2+(y-2)^2=0\Leftrightarrow x=1, y=2$

ii) $(x-3)^2+(y-2)^2+19=2x+4y\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-2)^2+5=-14+2x+4y\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-2)^2+5=2(x-3)+6+4(y-2)+8-14$

$(x-3)^2+(y-2)^2+5=2(x-3)+4(y-2)\overset{\beta}{\Leftrightarrow}$

$x-3=1,\ y-2=2\Leftrightarrow x=4,\ y=4$.

Άσκηση 3.

Έστω $A=\alpha^2-2\alpha+4, B=(\beta-2)^2-3$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A=(\alpha-1)^2+3$.

β) Να αποδείξετε ότι: $A+B\geq 0$.

γ) Αν $A+B=0$ να βρείτε τους α β.

Λύση.

α) $A=\alpha^2-2\alpha+4=(\alpha^2-2\alpha+1)+3=(\alpha-1)^2+3$.

β) $A+B=(\alpha-1)^2+3+(\beta-2)^2-3=$
$=(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2\geq 0$.

γ) $A+B=0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-1=0\\ \beta-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}.$$

Άσκηση 4.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού x για τις οποίες ισχύουν οι ανισώσεις:

i) $x^2-3x+3>\dfrac{3}{4}$ **ii)** $x^2-\dfrac{4}{3}x+1\leq\dfrac{5}{9}$

β) Αν $\alpha^2-3\alpha+3=\dfrac{3}{4}$, $\beta^2-\dfrac{4}{3}\beta+1=\dfrac{5}{9}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι οι α,β είναι αντίστροφοι.

Λύση.

α) i) $x^2-3x+3>\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 4x^2-12x+12>3\Leftrightarrow$

$$4x^2-12x+9>0\Leftrightarrow(2x-3)^2>0\Leftrightarrow x\neq\frac{3}{2}.$$

ii) $x^2-\frac{4}{3}x+1\le\frac{5}{9}\Leftrightarrow 9x^2-12x+9\le 5\Leftrightarrow$

$9x^2-12x+4\le 0\Leftrightarrow(3x-2)^2\le 0\Leftrightarrow 3x-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

β) Από το προηγούμενο ερώτημα καταλήγουμε, $\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=\frac{2}{3}$ οπότε είναι αντίστροφοι.

Άσκηση 5.

α) Να αποδείξετε

ότι: $\mathbf{x^2-2|x|+1=(|x|-1)^2=\begin{cases}(x-1)^2, x\ge 0\\(x+1)^2, x<0\end{cases}}$

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $\mathbf{x^2+1=2|x|}$ **ii)** $\mathbf{\sqrt{x^2-2|x|+1}=\frac{1}{2}}$

Λύση.

α) $x^2-2|x|+1=|x|^2-2|x|+1=(|x|-1)^2=$

$=\begin{cases}(x-1)^2, x\ge 0\\(x+1)^2, x<0\end{cases}$

β) i) $x^2+1=2|x|\Leftrightarrow x^2-2|x|+1=0\overset{\alpha}{\Leftrightarrow}(|x|-1)^2=0$

$|x|-1=0\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

ii) Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$, αφού

$$x^2-2|x|+1=(|x|-1)^2\ge 0.$$

$$\sqrt{x^2-2|x|+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{(|x|-1)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$||x|-1|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow|x|-1=\frac{1}{2}\text{ ή }|x|-1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$|x|=\frac{3}{2}\text{ ή }|x|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\text{ ή }x=-\frac{3}{2}\text{ ή }x=-\frac{1}{2}\text{ ή }x=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 6.

Έστω $\mathbf{x,y\in\mathbb{R}}$ **έτσι ώστε:** $\mathbf{(x-1)(1-y)>0}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{x<1<y}$ **ή** $\mathbf{y<x<1}$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathbf{A=|x-1|+|y-1|}.$$

γ) Αν $\mathbf{A=y-x}$ **να αποδείξετε ότι** $\mathbf{x<1<y}$.

Λύση.

α) $(x-1)(1-y)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\1-y>0\end{cases}$ ή $\begin{cases}x-1<0\\1-y<0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x>1\\y<1\end{cases}$ ή $\begin{cases}x<1\\y>1\end{cases}\Leftrightarrow y<1<x$ ή $x<1<y$.

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

$y<1<x\Rightarrow x-1>0, y-1<0\Rightarrow$

$A=x-1-y+1=x-y$

$x<1<y\Rightarrow x-1<0, y-1>0\Rightarrow$

$A=-x+1+y-1=-x+y$.

Συνοψίζοντας, $A=|x-y|$.

γ) $A=y-x\Leftrightarrow|x-y|=-(x-y)\Leftrightarrow x-y\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y<0$ ή $x-y=0\Leftrightarrow x<y$ ή $x=y$

Από α, $x\ne y$ επομένως $x<1<y$.

Άσκηση 7.

Δίνονται οι αριθμοί $\mathbf{\alpha=1+\sqrt{2},\beta=1-\sqrt{2}}$.

α) Να υπολογίσετε το $\mathbf{\alpha^2}$

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\mathbf{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}}$

ii) $\mathbf{(1+\sqrt{2})\sqrt{3+2\sqrt{2}}+(1-\sqrt{2})\sqrt{3-2\sqrt{2}}=4\sqrt{2}}$

Λύση.

α) $\alpha^2=(1+\sqrt{2})^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$

β) i) Αντίστοιχα $\beta^2=3-2\sqrt{2}$

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=$

$|1+\sqrt{2}|+|1-\sqrt{2}|=1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

ii) $(1+\sqrt{2})\sqrt{3+2\sqrt{2}}+(1-\sqrt{2})\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$

$\alpha\sqrt{\alpha^2}+\beta\sqrt{\beta^2}=\alpha|\alpha|+\beta|\beta|=\alpha^2-\beta^2=$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

Άσκηση 8.

Δίνονται οι αριθμοί $\mathbf{\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\ \beta=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathbf{\alpha+\beta=2\sqrt{3}}$

β) i) $\mathbf{\alpha^2=5+2\sqrt{6}}$

ii) $\mathbf{\sqrt[3]{\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\frac{1}{\beta}}$

Λύση.

α) $\alpha+\beta=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{3-2}=2\sqrt{3}$$

β) i) $\alpha^2=\frac{1}{3-2\sqrt{6}+2}=\frac{1}{5-2\sqrt{6}}=$

$$\frac{5+2\sqrt{6}}{\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)}=\frac{5+2\sqrt{6}}{25-24}=5+2\sqrt{6}$$

ii) $\sqrt[3]{\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\sqrt[3]{\alpha^2\alpha}=\sqrt[3]{\alpha^3}=|\alpha|=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\frac{1}{\beta}.$$

Άσκηση 9.

Έστω οι παραστάσεις $K=\frac{2x}{|x|-x}$, $\Lambda=\frac{2x}{|x|+x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις $K,\Lambda,K+\Lambda$;

β) Να αποδείξετε ότι $\Lambda=1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $Kx^2+3x-2=0$.

Λύση.

α) Ισχύουν, $|x|=x\Leftrightarrow x\geq 0, |x|=-x\Leftrightarrow x\leq 0$. Η παράσταση Κ ορίζεται αν και μόνο αν $|x|-x\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq x\Leftrightarrow x<0$ δηλαδή ορίζεται στο σύνολο $(-\infty,0)$ ενώ η παράσταση Λ αν $|x|+x\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq -x\Leftrightarrow x>0$ δηλαδή στο $(0,+\infty)$. Η παράσταση $K+\Lambda$ δεν ορίζεται για καμιά τιμή του x αφού $(-\infty,0)\cap(0,+\infty)=\varnothing$.

β) Για $x>0$ έχουμε $\Lambda=\frac{2x}{|x|+x}=\frac{2x}{x+x}=\frac{2x}{2x}=1$.

γ) Για $x<0$ αντίστοιχα $K=\frac{2x}{|x|-x}=\frac{2x}{-x-x}=\frac{2x}{-2x}=-1$. Η εξίσωση ορίζεται στο $(-\infty,0)$ και είναι ισοδύναμη με την $-x^2+3x-2=0$ ή $x^2-3x+2=0$. Η τελευταία έχει τις λύσεις $x=1$ ή $x=2$ που δεν είναι δεκτές αφού δεν ανήκουν στο $(-\infty,0)$. Τελικά η εξίσωση είναι αδύνατη.

Άσκηση 10.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2+2\alpha x+2\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\alpha^2-\beta^2-4$

β) Αν ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=2\alpha^2-\beta^2-4$, τότε:

i) Να βρείτε τους α,β.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0\,(1)$.

iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της (1).

Λύση.

α) Αρκεί $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\alpha^2-\beta^2-4$ ή

$\alpha^2+2\alpha^2+2\beta+\beta^2+2\alpha\beta+2\beta\geq 2\alpha^2-\beta^2-4$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2+4\beta+4\geq 0\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2+(\beta+2)^2\geq 0$, που ισχύει.

β) i) $(\alpha+\beta)^2+(\beta+2)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \beta+2=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\beta\\ \beta=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-2\end{cases}.$

ii) $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-4=0$ η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=16+16=32=2\cdot 16$ και οι ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 4\sqrt{2}}{2}=-2\pm 2\sqrt{2}.$$

iii) Έχουμε, $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-4$, $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=-4$.

Τελικά, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_2x_1}=\frac{-4}{-4}=1$.

Άσκηση 11.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου,

$$x^2+x-6$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\pi+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi+1}{2}\right)-6>0,\pi\simeq 3{,}14$$

γ) Αν για τον πραγματικό α ισχύει $(|\alpha|+1)^2+|\alpha|-5<0$, να αποδείξετε ότι:

$$-1<\alpha<1.$$

Λύση.

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=1+24=25$ και ρίζες $x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}-3\\ 2\end{cases}$.

Ισχύει, $x^2+x-6>0\Leftrightarrow x<-3$ ή $x>2$ και

$x^2+x-6<0\Leftrightarrow -3<x<2$.

β) $\pi > 3 \Rightarrow \pi + 1 > 4 \Rightarrow \frac{\pi+1}{2} > 2$, δηλαδή ο αριθμός $\frac{\pi+1}{2}$, είναι μεγαλύτερος του 2 επομένως η τιμή του τριωνύμου για τη τιμή αυτή θα είναι θετική.

Άρα, $\left(\frac{\pi+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi+1}{2}\right) - 6 > 0$.

γ) $(|\alpha|+1)^2 + |\alpha| - 5 < 0 \Leftrightarrow (|\alpha|+1)^2 + (|\alpha|+1) - 6 < 0$.

Από το α, $-3 < |\alpha| + 1 < 2 \Leftrightarrow -4 < |\alpha| < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |\alpha| > -4 \\ |\alpha| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ -1 < \alpha < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1.$$

Άσκηση 12.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου,

$$\mathbf{f(x) = 2x^2 + x - 3}.$$

β) Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{f(-1)f\left(-\frac{1}{2}\right)f(0)f\left(\frac{1}{2}\right) > 0}$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\mathbf{g(x) = \sqrt{f(|x|)}}.$$

Λύση.

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 + 24 = 25$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$ $f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < 1$ και $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$ ή $x > 1$.

β) Οι αριθμοί -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ είναι μεταξύ $-\frac{3}{2}, 1$ άρα $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, και το γινόμενο των τεσσάρων αρνητικών θα είναι θετικός.

γ) Πρέπει και αρκεί, $f(|x|) \geq 0$. Από το α έχουμε:

$|x| \leq -\frac{3}{2}$ ή $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ ή $x \leq -1$ ή $x \geq 1 \Leftrightarrow$

$x \leq -1$ ή $x \geq 1$. Τελικά το πεδίο ορισμού είναι το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Άσκηση 13.

Δίνεται το τριώνυμο, $\mathbf{f(x) = x^2 + 3x - 4}$ και οι αριθμοί $\mathbf{\kappa = -\frac{8093}{2023}}$, $\mathbf{\lambda = \frac{2024}{2023}}$.

Να βρείτε τα πρόσημα:

α) Του τριωνύμου $\mathbf{f(x)}$.

β) Των $\mathbf{f(\kappa), f(\lambda)}$

γ) $\mathbf{f(|\alpha|)}$, αν επιπλέον $\mathbf{\alpha \in \mathbb{R}}$ με $\mathbf{-1 < \alpha < 1}$.

Λύση.

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 + 16 = 25$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 1$ και

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -4$ ή $x > 1$.

β) Θα αποδείξουμε ότι $\kappa < -4$ και $\lambda > 1$. Πράγματι: $-\frac{8093}{2023} < -4 \Leftrightarrow 8093 > 8092$, που ισχύει και $\frac{2024}{2023} > 1 \Leftrightarrow 2024 > 2023$, που επίσης ισχύει. Συμπεραίνουμε ότι $f(\kappa) > 0, f(\lambda) > 0$.

γ) $-1 < \alpha < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow 0 \leq |\alpha| < 1$, άρα $f(|\alpha|) < 0$.

Άσκηση 14.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\mathbf{x^2 - x - 6}$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\mathbf{|x^2 - x - 6| = 6 + x - x^2}$

ii) $\mathbf{\sqrt{-x^2 + x + 6} + \sqrt{-2 - x} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0}$.

Λύση.

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 + 24 = 25$ και ρίζες $x_{1,2} = -2, 3$

$x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$ και

$x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 3$.

β) i) Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ $|x^2 - x - 6| = -(x^2 - x - 6) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

ii) Επειδή $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 6 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \\ (x+2)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x + 2 \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Η τιμή $x = -2$, επαληθεύει την εξίσωση, άρα $x = -2$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις Γεωμετρίας

Κονόμης Άρτι

Άσκηση 1

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ κατασκευάζουμε τα ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ $(A\Delta = AB)$ και $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ $(AE = A\Gamma)$ με $\Delta\hat{A}B = \Gamma\hat{A}E$. Να αποδείξετε ότι:

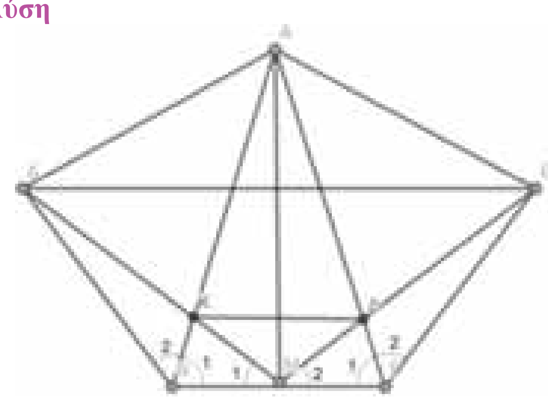
α) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ είναι ίσα.

β) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{M\Delta E}$ είναι ισοσκελές.

γ) $\Delta E \parallel B\Gamma$.

δ) Αν η ΔM τέμνει την AB στο σημείο K και η EM την $A\Gamma$ στο σημείο Λ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



α) Για τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ ισχύει $A\Delta = AB = A\Gamma = AE$. Άρα $A\Delta = AE$. Επίσης $\Delta\hat{A}B = \Gamma\hat{A}E$ και $AB = A\Gamma$ από την υπόθεση. Άρα τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$ είναι ίσα.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $M\Delta = ME$. Για τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{MB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{M\Gamma E}$ ισχύει $BM = M\Gamma$ (Μ μέσο της $B\Gamma$), $B\Delta = \Gamma E$ (από το α' ερώτημα) και $\Delta\hat{B}M = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = M\hat{\Gamma}E$ $(\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1,\ \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2)$.

Άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{MB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{M\Gamma E}$ είναι ίσα και $M\Delta = ME$.

γ) Η διάμεσος ΑΜ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι κα ύψος, Άρα $AM \perp B\Gamma$ (1). Τα σημεία Α και Μ ισαπέχουν από τα άκρα Δ και Ε της πλευράς ΔΕ. Άρα βρίσκονται στη μεσοκάθετο ΑΜ του ΔΕ. Δηλαδή $AM \perp \Delta E$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\Delta E \parallel B\Gamma$.

δ) Για τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{MKB}$ και $\overset{\triangle}{M\Lambda\Gamma}$ ισχύει $BM = M\Gamma$ (Μ μέσο της $B\Gamma$), $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ($AB = A\Gamma$) και $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (από το β΄ ερώτημα).Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Τότε έχουμε: $AK = AB - BK = A\Gamma - \Gamma\Lambda = A\Lambda$. Επίσης ισχύει $MK = M\Lambda$. Δηλαδή τα σημεία Α και Μ βρίσκονται στη μεσοκάθετο της ΚΛ. Άρα $AM \perp K\Lambda$ (1). Όμως $AM \perp B\Gamma$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $K\Lambda \parallel B\Gamma$ και $BK = \Gamma\Lambda$. Άρα το τετράπλευρο ΚΛΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Άσκηση 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}(AB = A\Gamma)$ και το ύψος του AM. Προεκτείνουμε την πλευρά AM κατά τμήμα $MN = AM$ και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $BN = A\Gamma$ και $A\Delta = N\Delta$.

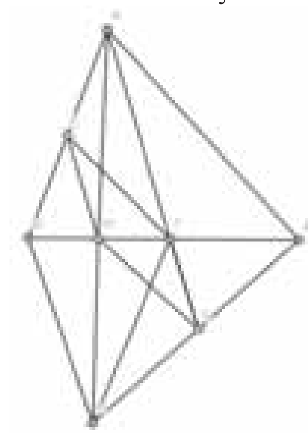
β) Αν η προέκταση της ΑΓ τέμνει την ΝΔ στο Ε να αποδείξετε ότι $\Gamma E = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

γ) Έστω Ζ το μέσο της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = Z\Gamma$

Λύση

α) Στο τετράπλευρο ΑΒΝΓ ισχύει $AM = MN$ και $BM = M\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι παραλληλόγραμμο και $BN = A\Gamma$. Επίσης στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta N}$ το ύψος ΔM είναι και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta N}$ είναι ισοσκελές και $A\Delta = NB$.



β) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{B\Delta N}$ το Γ είναι μέσο της ΒΔ και $\Gamma E \parallel BN$. Άρα η ΓΕ τέμνει την ΝΔ στο μέσο της Ε. Ισχύει $\Gamma E = \dfrac{BN}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

γ) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ τα σημεία Ζ και Γ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΔ. Άρα $Z\Gamma \parallel = \frac{A\Delta}{2}$ (1). Επίσης στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AN\Delta}$ τα σημεία Μ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΝ και ΔΝ. Άρα $ME \parallel = \frac{A\Delta}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) ισχύει $Z\Gamma = ME$ και $Z\Gamma \parallel ME$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΖΜΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta N}$ ισχύει: $\Delta E = \frac{\Delta N}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.

Όμως από το ερώτημα γ' ισχύει $Z\Gamma = \frac{A\Delta}{2}$. Άρα $\Delta E = Z\Gamma$.

Άσκηση 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με ορθή γωνία την $A = 90^\circ$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΒΕ που τέμνει την ΑΔ στο Ζ και επίσης φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\Delta A\Gamma}$ που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

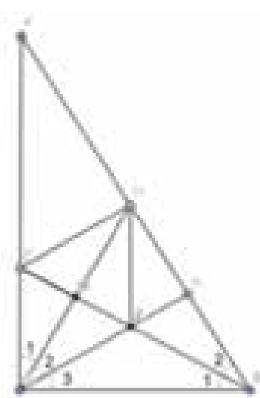
α) **Οι γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες και ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{BAH}$ είναι ισοσκελές.**

β) **Η πλευρά ΗΖ είναι κάθετη στην ΑΒ.**

γ) **Το τετράπλευρο ΑΕΗΒ είναι εγγράψιμο και ότι η γωνία $E\hat{H}B = 90^\circ$.**

δ) **Το τετράπλευρο ΑΕΗΖ είναι ρόμβος.**

Λύση



α) Επειδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ ισχύει: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (1). Ομοίως επειδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ είναι ορθογώνιο ισχύει: $\hat{A}_3 + \hat{B} = 90^\circ$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}_3 + \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{A}_3$. Επίσης το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta A\Gamma}$ είναι ορθογώνιο. Άρα ισχύει: $\Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (3) Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$. Για το τρίγωνο $\overset{\triangle}{HA\Gamma}$ ισχύει:

$A\hat{H}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = B\hat{A}H \Rightarrow A\hat{H}\Delta = B\hat{A}H$.

Άρα το τρίγωνο $B\hat{A}H$ είναι ισοσκελές.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{BAH}$ η διχοτόμος ΒΘ είναι και ύψος. Το σημείο Ζ είναι το σημείο τομής των υψών ΒΘ και ΑΔ. Άρα είναι το ορθόκεντρο και υποχρεωτικά θα άγεται από το Ζ και το τρίτο ύψος, δηλαδή το ΗΖ. Άρα $HZ \perp AB$.

γ) Στο τετράπλευρο ΑΕΗΒ η πλευρά ΕΗ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Β και Α υπό ίσες γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_2$. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΗΒ είναι εγγράψιμο και η γωνία $E\hat{H}B = 90^\circ$.

δ) Ισχύει: $EA \perp AB$ και $HZ \perp AB \Rightarrow EA \parallel AZ$ (1). Επίσης ισχύει: $EH \perp \Gamma\Delta$ και $AZ \perp \Gamma\Delta \Rightarrow EH \parallel AZ$ (2). Από τις σχέσεις (1) και(2) προκύπτει ότι το ΑΕΗΖ είναι παραλληλόγραμμο. Έχουμε ακόμα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Το ΑΕΗΖ είναι παραλληλόγραμμο και η διαγώνιος ΑΗ διχοτομεί την Α. Άρα το παραλληλόγραμμο ΑΕΗΖ είναι ρόμβος.

Άσκηση 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\Delta\Gamma = \frac{3}{2}AB$. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΒ, Ζ το μέσο της ΕΓ και Η το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι :

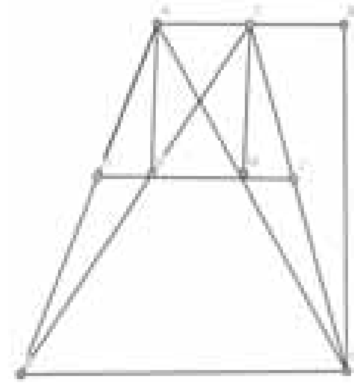
α) **Το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.**

β) **ΕΖ=ΑΗ και ΕΔ=ΑΓ.**

γ) **Αν η ΖΗ τέμνει την ΑΓ και ΔΕ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΑ είναι ορθογώνιο.**

Λύση

α) Στο τραπέζιο ΑΕΓΔ η ΗΖ είναι διάμεσος. Άρα ισχύει $HZ \parallel AE$ και $HZ = \frac{AE + \Delta\Gamma}{2} = \ldots = AB$. Ισχύει $HZ \parallel = AB$. Δηλαδή το τετράπλευρό ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Ισχύει : $ΑΗ = ΒΖ = \frac{ΕΓ}{2} = ΕΖ$. Άρα το τραπέζιο ΑΕΖΗ είναι ισοσκελές. Τα σημεία Η και Ζ είναι μέσα των ΑΔ και ΕΖ. Άρα έχουμε ότι $ΑΔ = ΕΖ$, αφού $ΑΔ = 2ΑΗ$ και $ΕΓ = 2ΕΖ$. Το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές. Δηλαδή ισχύει $ΕΔ = ΑΓ$.

γ) Ισχύει $ΑΕ \parallel ΝΜ$. Στο τραπέζιο ΑΕΓΔ τα σημεία Μ και Ν είναι σημεία τομής της διαμέσου ΗΖ με τις διαγώνιους ΕΔ και ΑΓ. Άρα: $ΜΝ = \frac{ΔΓ - ΑΕ}{2} = ... = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΕ$. Έχουμε $ΜΝ \parallel = ΑΕ$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΕΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Στο παραλληλόγραμμο ΑΕΜΝ ισχύει ακόμα

$$ΑΜ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΕΔ}{2} = ΕΝ \Leftrightarrow ΑΜ = ΕΝ.$$

Άρα το ΑΕΜΝ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιους , δηλαδή είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 5

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{ΑΒΓ}$ με τη γωνία $\hat{Α}$ ορθή και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν Κ, Μ και Ν είναι τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ και ΒΔ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι :

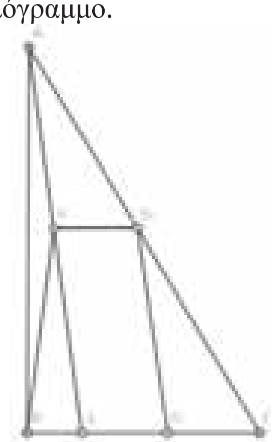
α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $\frac{ΑΒ}{2}$.

Λύση

α) Στο τρίγωνο $Γ\hat{Δ}Β$ τα σημεία Κ και Μ είναι μέσα των ΓΔ και ΓΒ. Άρα ισχύει $ΚΜ \parallel = \frac{ΔΒ}{2}$. Όμως το Ν είναι μέσο της ΔΒ. Τελικά έχουμε $ΚΜ \parallel = ΔΝ$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Έχουμε $ΚΜ \parallel ΑΝ$. Επίσης το ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ισχύει: $ΜΝ = ΑΚ$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Α\hat{Γ}Δ$ η ΑΚ είναι διάμεσος. Άρα ισχύει: $ΑΚ = \frac{ΓΔ}{2} = ΚΔ$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $ΜΝ = ΑΚ$. Δηλαδή το τραπέζιο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΚ και ΜΝ. Ισχύει : $ΕΖ = \frac{ΚΜ + ΑΜ}{2} = \frac{ΚΜ + ΑΔ + ΔΝ}{2} = \frac{ΑΔ + ΔΝ + ΝΒ}{2} \Leftrightarrow ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Άσκηση 6

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$, $ΔΓ = 2ΑΒ$ και $\hat{Β} = 3\hat{Γ}$. Αν $ΒΕ \perp ΔΓ$ να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο.

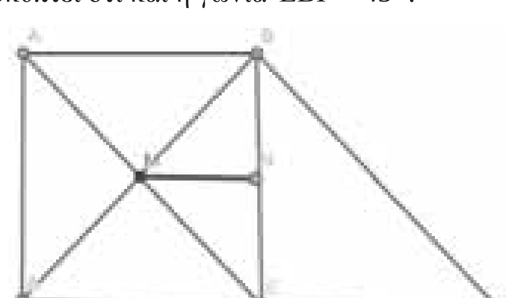
γ) Αν Μ το μέσο της ΒΔ και Ν είναι μέσο της ΑΓ, τότε να αποδείξετε ότι $ΜΝ = \frac{ΔΓ}{4}$.

Λύση

α) Στο τετράπλευρο ΑΒΓΕ ισχύει $ΑΒ \parallel ΕΓ$ και $ΑΒ = \frac{ΔΓ}{2} = ΕΓ$. Άρα $ΑΒ \parallel = ΕΓ$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Για το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχουμε ότι $ΑΒ \parallel = ΔΕ$ και $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$. Άρα είναι ορθογώνιο. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΕ ισχύει $\hat{Β} = 180° - \hat{Γ}$ (1). Επίσης ισχύει από την υπόθεση $\hat{Β} = 3\hat{Γ}$ (2). Άρα :

$\hat{Β} = 180° - \hat{Γ} \Rightarrow 3\hat{Γ} = 180° - \hat{Γ} \Rightarrow ... \Rightarrow \hat{Γ} = 45°$. Στο τρίγωνο $Β\hat{Γ}Ε$ έχουμε $\hat{Ε} = 90°$ και επειδή $\hat{Γ} = 45°$ προκύπτει ότι και η γωνία $Ε\hat{Β}Γ = 45°$.



Δηλαδή το τρίγωνο $Β\hat{Ε}Γ$ είναι ισοσκελές με

$BE = E\Gamma$. Το Ε είναι μέσο της ΔΓ. Άρα ισχύει $AE = E\Gamma = BE$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το ορθογώνιο ΑΒΕΔ έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες. Άρα είναι και ρόμβος και τελικά τετράγωνο.

γ) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ τα σημεία Μ και Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΓ. Άρα ισχύει $MN = \frac{E\Gamma}{2} = \frac{\frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{4}$.

Άσκηση 7

Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήματα ΔΕ = ΑΔ και ΜΝ = ΑΜ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta M \parallel = \frac{EN}{2}$

β) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AEN}$ είναι ορθογώνιο.

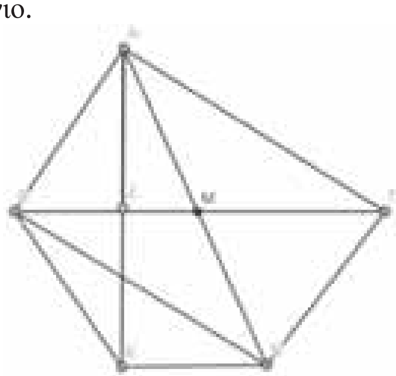
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΝΕ είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Το τετράπλευρο ΒΓΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AEN}$ τα σημεία Δ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΝ. Άρα ισχύει: $\Delta M \parallel = \frac{EN}{2}$.

β) Ισχύει ότι $N\hat{E}A = M\hat{\Delta}A = 90^\circ$ ως εντός εκτός επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $EN, \Delta N$ τεμνόμενα από την ΕΔ. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AEN}$ είναι ορθογώνιο.



γ) Στο τετράπλευρο ΑΓΝΒ το σημείο Μ είναι μέσο των διαγωνίων ΑΝ και ΒΓ. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΝΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

δ) Το τετράπλευρο ΒΓΝΕ είναι τραπέζιο επειδή $B\Gamma \parallel EN$. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABE}$ η ΒΔ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABE}$ είναι ισοσκελές. Έχουμε: $EB = AB = N\Gamma$. Τελικά $BE = N\Gamma$ και το τραπέζιο ΒΕΝΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Άσκηση 8

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το σημείο Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν,Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

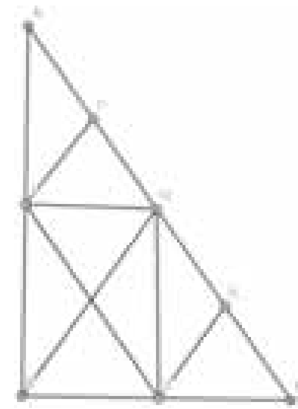
α) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AMB}$ και $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ είναι ισοσκελή.

β) $KN \parallel \Lambda P$ και $KN + \Lambda P = AM$.

γ) Το τετράπλευρο ΚΛΓΒ είναι τραπέζιο.

δ) $K\Lambda + AM = B\Gamma$.

Λύση



α) Για τη διάμεσο ΑΜ ισχύει $AM = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα $AM = M\Gamma$ και $AM = MB$. Δηλαδή τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{AMB}$ είναι ισοσκελή.

β) Στα ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{AMB}$ και $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ τα ύψη $MK, M\Lambda$ είναι ταυτόχρονα και διάμεσοι. Άρα τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABM}$ ισχύει: $KN \parallel = \frac{1}{2}AM$. Επίσης στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ ισχύει: $\Lambda P \parallel = \frac{1}{2}AM$. Άρα $KN \parallel \Lambda P$ και $KN + \Lambda P = AM$.

γ) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισχύει ότι τα σημεία K, Λ είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Άρα ισχύει $K\Lambda \parallel = \frac{1}{2}B\Gamma$. Δηλαδή το ΚΛΓΒ είναι τραπέζιο.

δ) Από το ερώτημα γ' έχουμε $K\Lambda = \frac{1}{2}B\Gamma$ (1). Όμως από το ερώτημα α' έχουμε επίσης $AM = \frac{1}{2}B\Gamma$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $K\Lambda + AM = B\Gamma$.

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Άλγεβρας

Για τα παιδιά που ονειρεύονται…
για τα παιδιά που προσπαθούν

Γεωργίου Μ. – Κωνσταντινίδης Δ. – Τσακιρτζής Σ. – Τσιφάκης Χ.

Άσκηση 1η: Δίνεται το πολυώνυμο:

$$\mathbf{P(x) = ημθ \cdot x^4 + (συνθ - ημθ) \cdot x^3 +}$$
$$\mathbf{+(συν^2θ - ημ^2θ)x^2 + x,\ με\ θ \in [0, \pi].}$$

α. Αν το x=1 είναι ρίζα του P(x) να βρεθεί το θ.

β. Για $θ = \frac{2\pi}{3}$, να λυθεί η εξίσωση: $P(x) = 0$.

γ. Για $θ = \frac{\pi}{2}$ να λυθεί η ανίσωση: $\frac{P(x)}{x-4} \geq 0$.

Λύση:

α. Αφού το $x = 1$ είναι ρίζα του $P(x)$ έχουμε: $P(1) = 0 \Leftrightarrow$

$ημθ + συνθ - ημθ + συν^2θ - ημ^2θ + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$συνθ + 2συν^2θ = 0 \Leftrightarrow συνθ(1 + 2συνθ) = 0 \Leftrightarrow$

$συνθ = 0$ ή $συνθ = -\frac{1}{2} \overset{θ\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} θ = \frac{\pi}{2}$ ή $θ = \frac{2\pi}{3}$.

β. Για $θ = \frac{2\pi}{3}$ το πολυώνυμο γίνεται:

$P(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^4 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.

$P(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x^4 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x = 0 \Leftrightarrow$

$x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0 \overset{\text{horner}}{\Leftrightarrow}$

$x = 0$ ή $x = 1$ ή $\sqrt{3}x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\sqrt{3}}}{2}$.

γ. Για $θ = \frac{\pi}{2}$ το πολυώνυμο γίνεται:

$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x = x(x^3 - x^2 - x + 1) =$

$x(x-1)(x^2-1) = x(x-1)^2(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		4		$+\infty$
x		−		−	0	+		+		+	
$(x-1)^2$		+		+		+	0	+		+	
$x+1$		−	0	+		+		+		+	
$x-4$		−		−		−		−	0	+	
τελικό		−	0	+	0	−	0	−		+	

$\frac{P(x)}{x-4} \geq 0 \overset{x\neq 4}{\Leftrightarrow} \frac{x(x-1)^2(x+1)}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow$

$x(x-1)^2(x+1)(x-4) \geq 0,\ x \neq 4$.

Άρα $x \in [-1, 0] \cup (4, +\infty) \cup \{1\}$.

Άσκηση 2η: Δίνεται το πολυώνυμο:

$$\mathbf{P(x) = -2x^3 - (4^λ + 1)x^2 + 2^λ x + 8^λ,\ λ \in R.}$$

α. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ να βρείτε τις τιμές του $λ \in R$.

β. Για $λ = 0$.

i) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$.

ii) Αν $π(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+2)$ να λυθεί η εξίσωση: $π(συνθ) = -3 \cdot συν^2θ$ με $θ \in R$.

Λύση:

α. Αφού το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ έχουμε: $P(-1) = 0 \Leftrightarrow$

$-2 \cdot (-1)^3 - (4^λ + 1) \cdot (-1)^2 + 2^λ \cdot (-1) + 8^λ = 0 \Leftrightarrow$

$8^λ - 4^λ - 2^λ + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^λ)^3 - (2^λ)^2 - 2^λ + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(2^λ - 1) \cdot (2^λ)^2 - (2^λ - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(2^λ - 1) \cdot \left[(2^λ)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow$

$\left(2^{\lambda}-1\right)^2\cdot\left(2^{\lambda}+1\right)=0\Leftrightarrow 2^{\lambda}-1=0\Leftrightarrow 2^{\lambda}=1\Leftrightarrow\lambda=0$.

β. Για $\lambda=0$ είναι: $P(x)=-2x^3-2x^2+x+1$.

i) $P(x)\le 0\Leftrightarrow -2x^3-2x^2+x+1\le 0\Leftrightarrow$

$-2x^2(x+1)+x+1\le 0\Leftrightarrow\left(-2x^2+1\right)(x+1)\le 0$

συνεπώς $x\in\left[-1,-\dfrac{\sqrt2}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt2}{2}$		$\frac{\sqrt2}{2}$		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+		+	
$-2x^2+1$		−		−	0	+	0	−	
$P(x)$		+		−		+		−	

ii) Από την διαίρεση του $P(x)=-2x^3-2x^2+x+1$ διά το $x+2$ προκύπτει ότι $\pi(x)=-2x^2+2x-3$.

Άρα η εξίσωση γίνεται: $\pi(\sigma\upsilon\nu\theta)=-3\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\Leftrightarrow$

$-2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta-3=-3\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta-3=0\overset{\Delta=16}{\Leftrightarrow}$

$\sigma\upsilon\nu\theta=1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=-3$ (απορρίπτεται) $\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Άσκηση 3η: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+\lambda x+3-\lambda$, με $\lambda\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x+\left(\sqrt{e}\right)^{\ln 4}$.

α. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση: $(x-1)P(x)\le 0$.

γ. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+2)$ να λυθεί η ανίσωση: $\pi(\ln\alpha)\le 1$, με $\alpha>0$.

Λύση:

α. $\left(\sqrt{e}\right)^{\ln 4}=\left(e^{\frac12}\right)^{\ln 4}=\left(e^{\ln 4}\right)^{\frac12}=4^{\frac12}=\sqrt4=2$, άρα το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$

$$P(-2)=0\Leftrightarrow -3\lambda-9=0\Leftrightarrow\lambda=-3.$$

β. Για $\lambda=-3$ έχουμε: $P(x)=x^3-x^2-3x+6$

$(x-1)P(x)\le 0\Leftrightarrow(x-1)(x+2)\left(x^2-3x+3\right)\le 0$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		−		−	0	+	
$x+2$		−	0	+		+	
x^2-3x+3		+		+		+	
$(x-1)P(x)$		+	0	−	0	+	

Άρα $x\in[-2,1]$.

γ. Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $P(x)=(x+2)\left(x^2-3x+3\right)$, άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi(x)=x^2-3x+3$.

Έτσι η ανίσωση γίνεται:

$\pi(\ln\alpha)\le 1\Leftrightarrow \ln^2\alpha-3\ln\alpha+3\le 1\Leftrightarrow$

$\ln^2\alpha-3\ln\alpha+2\le 0\Leftrightarrow 1\le\ln\alpha\le 2\overset{e^x\uparrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} e\le\alpha\le e^2$.

Άσκηση 4η: Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=\alpha^2x^4-3x^3+(\alpha-4)x^2-3x-4$,

το οποίο έχει παράγοντα το $x+1$.

1) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

2) Για $\alpha=1$.

i) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)\le 0$.

iii) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{2023\cdot\eta\mu x}{\sqrt{x^4-3x^3-3x^2-3x-4}}.$$

iv) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu^4x-3\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x-4=0.$$

Λύση:

1). Αφού το $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ έχουμε:

$P(-1)=0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+3+\alpha-4+3-4=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-2=0 \Leftrightarrow$

$\alpha=1$ ή $\alpha=-2$.

2). Για $\alpha=1$ έχουμε $P(x)=x^4-3x^3-3x^2-3x-4$.

i) $P(x)=0 \Leftrightarrow x^4-3x^3-3x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $x^3-4x^2+x-4=0 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $(x-4)x^2+x-4=0 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $(x-4)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $x=4$ ή $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=4$.

ii) $P(x)\le 0 \Leftrightarrow x^4-3x^3-3x^2-3x-4\le 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x-4)(x^2+1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 4$.

iii) Πρέπει και αρκεί $x^4-3x^3-3x^2-3x-4>0 \Leftrightarrow$

$P(x)>0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>4$.

iv) η εξίσωση γίνεται:

$P(\sigma\upsilon\nu x)=0 \overset{(2i)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x=-1$ ή $\sigma\upsilon\nu x=4 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi,\ \kappa=$ περιττός.

Άσκηση 5η: Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=1-x-\ln x,\ x>0}$$

α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(e^x)>1-e^{2x-5}-x$.

γ. Αν $0<x<1$ να δείξετε ότι $f(x)>0$.

δ. Να δείξετε ότι για κάθε $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\theta<\ln\left(\frac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$.

Λύση:

α. Για $x=1$ έχουμε: $f(1)=1-1-\ln 1=0$, άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.

β. $f(e^x)>1-e^{2x-5}-x \Leftrightarrow$

$\cancel{1}-e^x-\cancel{\ln e^x}>\cancel{1}-e^{2x-5}-\cancel{x} \Leftrightarrow -e^x>-e^{2x-5} \Leftrightarrow$

$e^x<e^{2x-5} \overset{e^x\ 1\ R}{\Leftrightarrow} x<2x-5 \Leftrightarrow x>5$.

γ. Με $0<x<1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}1-x>0\\ \ln x<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}1-x>0\\ -\ln x>0\end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$

$1-x-\ln x>0 \Rightarrow f(x)>0$.

δ. Αφού $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0<\sigma\upsilon\nu\theta<1$, άρα από γ. ερώτημα προκύπτει

$f(\sigma\upsilon\nu\theta)>0 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu\theta-\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)>0 \Leftrightarrow$

$1-\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)>\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \ln e-\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)>\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)>\sigma\upsilon\nu\theta$.

Άσκηση 6η: Δίνεται η $g(x)=-3\alpha\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}$.

Η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x=1$.

α) Να βρεθεί το $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Να εξετασθεί η μονοτονία της.

γ) Να βρεθούν οι ρίζες της g.

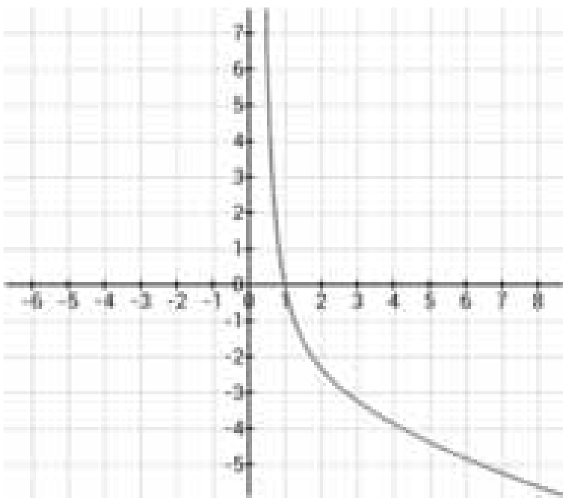
δ) Να λυθεί η ανίσωση $2-2x^2\sqrt{x}>0$.

Λύση:

α) Αρχικά, για να ορίζεται η g πρέπει και αρκεί $\left.\begin{matrix} x \ge 0 \\ x \ne 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x > 0$, άρα πεδίο ορισμού της g: $D_g = (0, +\infty)$. Η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x = 1$, άρα $g(1) = 0$ και τότε:

$g(1) = 0 \Leftrightarrow -3\alpha\sqrt{1} + \frac{2}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$.

Έτσι, για $\alpha = \frac{2}{3}$, έχουμε $g(x) = -2\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$.



β) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow -2\sqrt{x_1} > -2\sqrt{x_2}$ (1) και

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2} \Rightarrow \frac{2}{x_1^2} > \frac{2}{x_2^2}$ (2)

$(1) + (2) \Rightarrow -2\sqrt{x_1} + \frac{2}{x_1^2} > -2\sqrt{x_2} + \frac{2}{x_2^2} \Rightarrow$

$g(x_1) > g(x_2)$. Δηλαδή η g γνησίως φθίνουσα.

γ) Για κάθε $0 < x < 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0$, αφού g γνησίως φθίνουσα και για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0$, ενώ $g(1) = 0$. Επομένως, μοναδική ρίζα της $g(x) = 0$ η $x = 1$.

δ) Η ανίσωση $2 - 2x^2\sqrt{x} > 0$ ισοδύναμα γίνεται:

$2 - 2x^2\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow$ (πολ/ζω με $\frac{1}{x^2} > 0$)

$\frac{2}{x^2} - 2\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$ και από το (γ) έχουμε $g(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Άσκηση 7η: Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(\theta) = \frac{1 - 2 \cdot \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \frac{1 - 3\eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta}.$$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ii) Να δείξετε ότι: $f(\theta) = 3 \cdot \varepsilon\varphi^2\theta$ με $\theta \ne \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(\theta) = 1$.

Λύση:

i) Πρέπει και αρκεί: $\sigma\upsilon\nu\theta \ne 0$ και $1 - \eta\mu\theta \ne 0$.

Όμως:

$$\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu\theta \ne 0 \\ 1 - \eta\mu\theta \ne 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu\theta \ne 0 \\ \eta\mu\theta \ne 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \theta \ne 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \theta \ne 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$\theta \ne \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$.

ii) Με $\theta \ne \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$f(\theta) = \frac{1 - 2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \frac{1 - 3\eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta} = \frac{1 - 2\eta\mu\theta}{1 - \eta\mu^2\theta} - \frac{1 - 3\eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta} =$$

$$\frac{1 - 2\eta\mu\theta}{(1 - \eta\mu\theta)(1 + \eta\mu\theta)} - \frac{1 - 3\eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta} =$$

$$\frac{(1 - 2\eta\mu\theta) - (1 + \eta\mu\theta)(1 - 3\eta\mu\theta)}{(1 - \eta\mu\theta)(1 + \eta\mu\theta)} =$$

$$\frac{3\eta\mu^2\theta}{(1 - \eta\mu\theta)(1 + \eta\mu\theta)} = \frac{3\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 3\varepsilon\varphi^2\theta.$$

iii) $f(\theta) = 1 \Leftrightarrow 3\varepsilon\varphi^2\theta = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\theta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\varphi\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \theta = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 8η: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{\eta\mu x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{6}\right)+f\left(\frac{13\pi}{4}\right).$$

γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

δ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση:

α. Πρέπει και αρκεί: $\eta\mu x\neq 0$.

Όμως: $\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$.

β. Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=$

$\sigma\upsilon\nu\left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ και

$\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

Όμοια: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=$

$\sigma\upsilon\nu\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ και

$\eta\mu\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{12\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Έτσι η παράσταση Α γίνεται

$A=f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{6}\right)+f\left(\frac{13\pi}{4}\right)=$

$\frac{1}{-1}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1+2-\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=$

$=2-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι περιττή.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$ και το $-x\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$, οπότε:

$$f(-x)=\frac{\sigma\upsilon\nu(-x)+1}{\eta\mu(-x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x)+1}{-\eta\mu(x)}=-f(x)$$

δ. $f(x)=\eta\mu x\overset{x\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\}}{\Leftrightarrow}\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x}=\eta\mu x\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x+1=\eta\mu^2x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x+1=1-\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x+1=(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=-1(\alpha\pi o\rho.)$ ή $\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$

$x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{3\pi}{2}$.

Άσκηση 9η.: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2\cdot\ln\alpha-1)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε την μονοτονία της f για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in(\sqrt{e},+\infty)$

γ) Για $\alpha=e^2$ να λυθεί η εξίσωση:

$$f(2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1)+f(\sigma\upsilon\nu^2\theta)=\frac{4}{3}.$$

Λύση:

α) Πρέπει και αρκεί: $\alpha>0$ και $2\cdot\ln\alpha-1>0$.

Όμως: $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ 2\cdot\ln\alpha-1>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \ln\alpha>\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \alpha>e^{\frac{1}{2}}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\alpha>\sqrt{e}$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα όταν:

$0<2\cdot\ln\alpha-1<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\ln\alpha<1\Leftrightarrow$

$\ln e^{\frac{1}{2}}<\ln\alpha<\ln e\Leftrightarrow\sqrt{e}<\alpha<e$

ενώ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν:

$2\cdot\ln\alpha-1>1\Leftrightarrow\ln\alpha>1\Leftrightarrow\ln\alpha>\ln e\Leftrightarrow\alpha>e$.

γ) Για $\alpha=e^2$ η συνάρτηση γίνεται:

$f(x)=(2\cdot\ln e^2-1)^x=(4\cdot\ln e-1)^x=(4-1)^x=3^x$

και έτσι έχουμε:

$f(2συν^2θ-1)+f(συν^2θ)=\frac{4}{3}\Leftrightarrow$

$3^{2συν^2θ-1}+3^{συν^2θ}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\cdot 3^{2συν^2θ}+3^{συν^2θ}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow$

$\left(3^{συν^2θ}\right)^2+3\cdot 3^{συν^2θ}-4=0$.

Θεωρούμε: $y=3^{συν^2θ}$, $y>0$ και έτσι η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$y^2+3\cdot y-4=0\Leftrightarrow y=1$ ή $y=-4\Leftrightarrow y=1$.

Για $y=1$ παίρνουμε:

$3^{συν^2θ}=1\Leftrightarrow 3^{συν^2θ}=3^0\Leftrightarrow συν^2θ=0\Leftrightarrow$

$συνθ=0\Leftrightarrow θ=κ\cdot π+\frac{π}{2},\ κ\in\mathbb{Z}$.

Άσκηση 10^η: Δίνεται η συνάρτηση:

$$\mathbf{f(x)=\ln(e^{2\cdot x}-e^x)}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\ln(e^x-1)$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=x$.

δ) Να λυθεί η ανίσωση: $f(x)>x+2\cdot\ln 2$.

ε) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λυθεί η εξίσωση: $e^{2\cdot x-1}+\ln(e^{e^{2\cdot x-1}}-1)=e^x+\ln(e^{e^x}-1)$.

Λύση:

α) Πρέπει και αρκεί: $e^{2\cdot x}-e^x>0$. Όμως: $e^{2\cdot x}-e^x>0\Leftrightarrow e^{2\cdot x}>e^x\Leftrightarrow 2\cdot x>x\Leftrightarrow x>0$.

Συνεπώς $D_f=(0,+\infty)$.

β) Έχουμε: $f(x)=\ln(e^{2\cdot x}-e^x)=\ln[e^x\cdot(e^x-1)]=$

$=\ln e^x+\ln(e^x-1)=x+\ln(e^x-1)$.

γ) $f(x)=x\Leftrightarrow x+\ln(e^x-1)=x\Leftrightarrow$

$\ln(e^x-1)=0\Leftrightarrow\ln(e^x-1)=\ln 1\Leftrightarrow$

$e^x-1=1\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$.

δ) $f(x)>x+\ln 2\Leftrightarrow x+\ln(e^x-1)>x+\ln 2\Leftrightarrow$

$\ln(e^x-1)>\ln 2\Leftrightarrow e^x-1>2\Leftrightarrow$

$e^x>3\Leftrightarrow x>\ln 3$.

ε) Για κάθε $x_1,x_2\in D_f=(0,+\infty)$

$x_1<x_2\overset{e^x\ 1}{\Rightarrow}e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}-1<e^{x_2}-1\overset{\ln x\ 1}{\Rightarrow}$

$$\left.\begin{matrix}\ln(e^{x_1}-1)<\ln(e^{x_2}-1)\\ x_1<x_2\end{matrix}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2).$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως μονότονη, άρα είναι και 1-1, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$e^{2\cdot x-1}+\ln(e^{e^{2\cdot x-1}}-1)=e^x+\ln(e^{e^x}-1)\Leftrightarrow$

$f(e^{2\cdot x-1})=f(e^x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}e^{e^{2\cdot x-1}}=e^{e^x}\overset{e^x:1-1}{\Leftrightarrow}$

$e^{2\cdot x-1}=e^x\Leftrightarrow 2\cdot x-1=x\Leftrightarrow x=1$.

Άσκηση 11^η: Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\mathbf{e^{x^2}=συνx}.$$

Λύση:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

- $x^2\ge 0\Leftrightarrow e^{x^2}\ge e^0\Leftrightarrow e^{x^2}\ge 1$.
- $συνx\le 1$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ προκύπτει ότι: $συνx\le 1\le e^{x^2}$.

Έχουμε: $e^{x^2}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Το $x=0$ επαληθεύει την αρχική εξίσωση $e^{x^2}=συνx\overset{Για\ x=0}{\Leftrightarrow}e^0=συν0\Leftrightarrow 1=1$, που ισχύει.

Άρα η αρχική εξίσωση έχει ρίζα το 0 η οποία είναι και μοναδική αφού για κάθε άλλο $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε ότι $e^{x^2}>1$.

Άσκηση 12^η: Η ένταση ενός σεισμού συνήθως καταγράφεται στη λογαριθμική κλίμακα Richter. Ο σχετικός τύπος είναι: $R=\log\left(\frac{α}{T}\right)+B$, όπου α το πλάτος της ταλαντωτικής κίνησης του εδάφους στον σταθμό μέτρησης και μετριέται σε μικρά (μm) $(1μm=10^{-6}m)$, Τ η περίοδος του σεισμικού κύματος σε δευτερόλεπτα και Β ένας εμπειρικά

προσδιοριζόμενος παράγοντας που περιγράφει την εξασθένιση του σεισμικού κύματος καθώς η απόσταση από το επίκεντρο του σεισμού αυξάνεται. Για ένα σεισμό με επίκεντρο που απέχει 10.000 km από τον σταθμό μέτρησης είναι B=6,8.

i) Αν η καταγραφείσα κατακόρυφη κίνηση του εδάφους είναι α=15 μm και η περίοδος είναι T=0,5 sec, να βρεθεί το μέγεθος του σεισμού.

ii) Αν υποθέσουμε ότι η διαφορά σε δύο τέτοιες μετρήσεις είναι περίπου 0,7 της κλίμακας, να υπολογισθεί πόσο πιο “ισχυρός” είναι ο σεισμός.

Λύση:

i) Το μέγεθος του σεισμού είναι

$$R=\log\left(\frac{10}{1}\right)+6,8=1+6,8=7,8$$

που αντιστοιχεί σε σεισμό με καταστρεπτικές ενδεχομένως συνέπειες. Αρκετά συχνά, μετά την εκδήλωση ενός τέτοιου φαινομένου, ανακοινώνονται διαφορετικές μετρήσεις της σεισμικής έντασης και μάλιστα με σχετική ευκολία.

ii) Έστω R_1 και R_2 οι δύο μετρήσεις με $R_1-R_2=0,3$ και I_1, I_2 οι αντίστοιχες εντάσεις. Τότε είναι $R_1=\log(I_1)+6,8$ και $R_2=\log(I_2)+6,8$, οπότε:

$$R_1-R_2=\log(I_1)-\log(I_2)=0,3\Rightarrow$$

$$\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)=0,3\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}=10^{0,3}\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}\cong 1,995\Rightarrow I_1\cong 2I_2$$

Δηλαδή η πρώτη μέτρηση αντιστοιχεί σε σεισμό με σχεδόν διπλάσια ισχύ από το δεύτερο.

Άσκηση 13η: Το ραδιενεργό Ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Αν η αρχική ποσότητα είναι 15 γραμμάρια:

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση η οποία δίνει την ποσότητα Ραδίου μετά από t χρόνια είναι

$$Q(t)=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

ii) Να υπολογίσετε την ποσότητα που θα απομείνει μετά από 800 χρόνια.

iii) Μετά από πόσα χρόνια θα μείνει ποσότητα μικρότερη των 0,03 γραμμαρίων.

Λύση:

Η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική μεταβολή είναι $Q(t)=Q_o\cdot e^{kt}$.

i) Αφού ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι 1600 χρόνια, έχουμε:

$$Q(1600)=\frac{Q_o}{2}\Leftrightarrow Q_o\cdot e^{1600k}=\frac{Q_o}{2}\Leftrightarrow$$

$$e^k=\sqrt[1600]{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}.\ \text{Άρα}\ Q(t)=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

ii) $Q(800)=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{800}{1600}}=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$15\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 10,6$ γραμμάρια.

iii) $Q(t)<0,03\Leftrightarrow 15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}<0,03\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}<\frac{1}{500}\Leftrightarrow-\frac{t}{1600}\cdot\ln 2<-\ln 500\Leftrightarrow$$

$t>\frac{1600\cdot\ln 500}{\ln 2}\cong 14.345,2549$ χρόνια.

Άσκηση 14η: Ο φημισμένος πίνακας «Disciples at Emmaus», πιστοποιήθηκε από τον ιστορικό τέχνης A. Bredius ως αυθεντικός πίνακας του 17ου αιώνα ζωγραφισμένος από τον Vermeer. Έτσι αγοράστηκε από το σύλλογο με το όνομα «Rembrandt». Το 1945, ο παραχαράκτης έργων τέχνης Van Meegeran, ανακοίνωσε μέσα από φυλακή του Βελγίου ότι αυτός ήταν ο ζωγράφος του πίνακα (αυτό μάλλον το έκανε για να αποφύγει τυχόν τιμωρία, γιατί είχε ήδη πουλήσει

ως αυθεντικό πίνακα του Vermeer, έναν άλλο πίνακα στους Ναζί κατά τη διάρκεια του 2ου παγκοσμίου πολέμου).

Να δώσετε κριτήρια για την αυθεντικότητα του πίνακα αν γνωρίζετε ότι:

α) Μία χρωστική ουσία στη ζωγραφική είναι ο λευκός μόλυβδος ο οποίος περιέχει ραδιενεργό ισότοπο του μολύβδου Pb^{210}.

β) Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του Pb^{210} είναι 22 χρόνια.

γ) Αν η ποσότητα του μολύβδου Pb^{210} είναι 3.276,8 μg ανά Kg χρωστικής και μετά από εξέταση στον πίνακα βρέθηκε ότι η ποσότητα του μολύβδου Pb^{210} είναι 0,05 μg ανά Kg χρωστικής, να απαντήσετε αν είναι τελικά ο πίνακας αυθεντικός.

Λύση:

Έστω y_o η αρχική ποσότητα του λευκού μολύβδου στον πίνακα. Τότε η ποσότητα του εναπομείναντος μολύβδου μετά την πάροδο t ετών παριστάνεται από τη συνάρτηση: $y(t)=y_o\cdot e^{kt}$.

Αφού ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι 22 χρόνια, έχουμε: $y(22)=\frac{y_o}{2}\Leftrightarrow y_o\cdot e^{22k}=\frac{y_o}{2}\Leftrightarrow e^{22k}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$22k=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow k=-\frac{\ln 2}{22}\cong -0{,}0315$.

Άρα $y(t)=y_o\cdot e^{-0{,}0315t}$ και σύμφωνα με τα δεδομένα $y(t)=3276\cdot e^{-0{,}0315t}$. Επομένως έχουμε:

$0{,}05=3276{,}8\cdot e^{-0{,}0315t}\Leftrightarrow e^{-0{,}0315t}=1{,}526\cdot 10^{-5}\Leftrightarrow$

$-0{,}0315t=\ln\left(1{,}526\cdot 10^{-5}\right)\Leftrightarrow t\cong 352$.

Ο πίνακας φιλοτεχνήθηκε πριν από 352 έτη, δηλαδή περίπου το 17ο αιώνα. Επομένως είναι αυθεντικός.

Άσκηση 15^{η}: Έστω ότι $P(t)=P_o\cdot e^{k\cdot t}$, ο πληθυσμός μιας πόλης που αυξάνει με σταθερό ετήσιο ρυθμό r=0,03 ως συνάρτηση του χρόνου t. Ζητούνται:

i) Ποιος προβλέπεται να είναι ο πληθυσμός της πόλης το 2020, όταν ο πληθυσμός της το 2010 ήταν 100000;

ii) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός της πόλης αυτής θα διπλασιαστεί;

Λύση:

Η αύξηση του πληθυσμού είναι $0{,}03\cdot P_o$ άρα στο τέλος του πρώτου χρόνου ο πληθυσμός δίνεται από $P(1)=P_o\cdot(1{,}03)\Leftrightarrow P_o\cdot e^k=P_o\cdot(1{,}03)\Leftrightarrow e^k=1{,}03$.

Άρα $P(t)=P_o\cdot(1{,}03)^t=10^5\cdot(1{,}03)^t$.

i) Ο πληθυσμός το 2020 θα είναι $P(10)=10^5\cdot(1{,}03)^{10}$.

ii) Ο πληθυσμός θα διπλασιαστεί σε:

$P(t)=2P_o\Leftrightarrow P_o\cdot(1{,}03)^t=2P_o\Leftrightarrow$

$(1{,}03)^t=2\Leftrightarrow t\cdot\ln(1{,}03)=\ln 2\Leftrightarrow t\cong 23{,}45$.

Άσκηση 16^{η}: Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{3}$ δεν είναι ρητός.

Λύση:

Η εξίσωση $x^2-3=0$ είναι μία πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού με ακέραιους συντελεστές. Μία από τις ρίζες της είναι ο αριθμός $\sqrt{3}$. Σύμφωνα με το θεώρημα των ακεραίων ριζών, αυτές θα είναι οι αριθμοί $\pm1,\pm3$. Αυτές προφανώς δεν επαληθεύουν την εξίσωση. Άρα ο αριθμός $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Μπορείτε να βρείτε άλλους τρόπους λύσης;

Ερώτηση: Μπορείτε να παραστήσετε την θέση του αριθμού $\sqrt{3}$, με κανόνα και διαβήτη πάνω στην ευθεία των πραγματικών;

Βιβλιογραφία: Τα προβλήματα είναι από την Ομάδα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών – Προβλημάτων (Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελική; Σχολής).

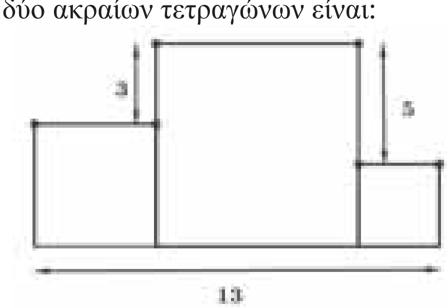
Τάξη: Β΄ Επαναληπτικά Θέματα Γεωμετρίας

Καρδαμίτσης Σπύρος

Είναι γνωστό ότι τα θεμέλια της γεωμετρίας τοποθετήθηκαν από τους Αρχαίους Έλληνες, όπου τα έργα τους αποτέλεσαν την βάση για την πιο πέρα εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών. Μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί όπως ο Ευκλείδης, ο Πυθαγόρας, ο Αρχιμήδης, ο Θαλής έγιναν αντικείμενο μελέτης της ιστορίας των μαθηματικών και σε πολλά βιβλία τους συναντάμε στοιχεία που τα μελετάμε σήμερα στο σχολείο. Για παράδειγμα στο βιβλίο Α του Ευκλείδη η πρόταση μζ (47) αναφέρει….
*«**Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευρές τετραγώνων ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις**» που φυσικά είναι το γνωστό σε όλους μας Πυθαγόρειο Θεώρημα.*

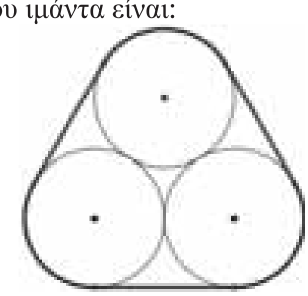
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από τετράγωνα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο ακραίων τετραγώνων είναι:



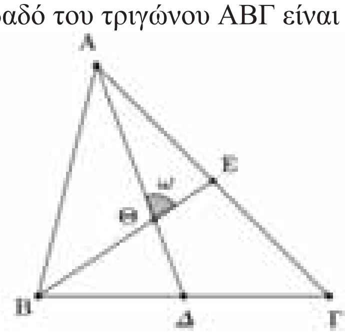
Α. 15 **Β.** 18 **Γ.** 20 **Δ.** 22 **Ε.** 25

2. Στο παρακάτω σχήμα ένας ιμάντας εφάπτεται σε τρεις ίσους κύκλους με ακτίνα ρ = 1. Το μήκος του ιμάντα είναι:



Α. 9 **Β.** 6+π **Γ.** 6π **Δ.** 12 **Ε.** 6π

3. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ οι ΑΔ και ΒΕ είναι διάμεσοί του που σχηματίζουν γωνία ω. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με:



Α. $ΑΔ \cdot ΒΕ \cdot ημω$ **Β.** $\frac{1}{2} \cdot ΑΔ \cdot ΒΕ \cdot ημω$

Γ. $\frac{1}{3} \cdot ΑΔ \cdot ΒΕ \cdot ημω$ **Δ.** $\frac{2}{3} \cdot ΑΔ \cdot ΒΕ \cdot ημω$

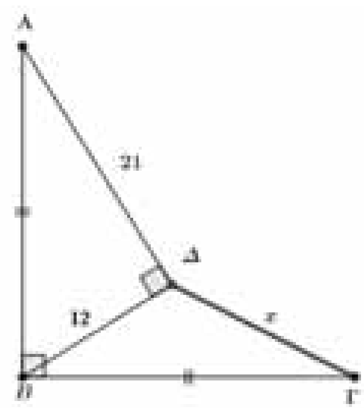
Ε. $\frac{3}{2} \cdot ΑΔ \cdot ΒΕ \cdot ημω$

4. Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ η πλευρά του είναι:

Α. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ **Β.** 2R **Γ.** $R\sqrt{2}$

Δ. R **Ε.** $\frac{R}{2}$

5. Στο παρακάτω σχήμα το μήκος x του τμήματος ΓΔ είναι:

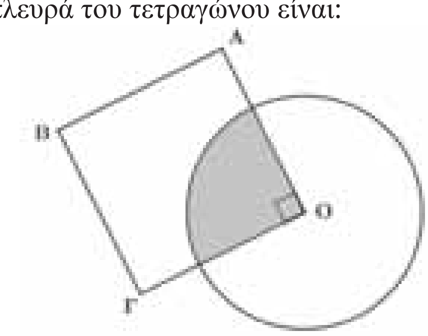


Α. 15 **Β.** 14 **Γ.** 13 **Δ.** 12 **Ε.** 11

(Υπόδειξη: Να προεκτείνετε την ΒΔ και να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΜ με υποτείνουσα την ΒΓ. Είναι ΔΜ = 9, ΜΓ = 12)

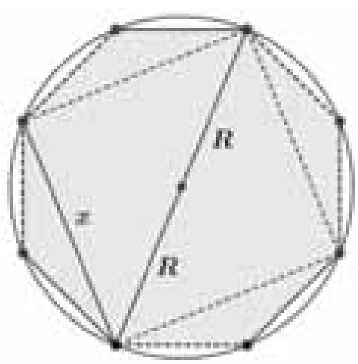
6. Το σημείο Ο είναι το κέντρο του κύκλου διαμέτρου 4 και η σκιασμένη περιοχή είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του τετραγώνου ΟΑΒΓ.

Η πλευρά του τετραγώνου είναι:



Α. $\pi\sqrt{3}$ **Β.** $3\sqrt{\pi}$ **Γ.** $\sqrt{3\pi}$ **Δ.** 3π **Ε.** $\frac{\pi}{3}$

7. Σε ένα κανονικό οκτάγωνο ο λόγος της μεγαλύτερης διαγώνιου του προς την μικρότερη είναι:



Α. $\sqrt{3}$ **Β.** 2 **Γ.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **Δ.** $\sqrt{2}$ **Ε.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

8. Σε ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο (2μ) πλήθος πλευρών η κεντρική του γωνία ω είναι

Α. $\frac{360°}{2}$ **Β.** $\frac{360°}{\mu+2}$ **Γ.** $\frac{360°}{2\mu+2}$

Δ. $\frac{180°}{\mu}$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

Απαντήσεις **Γ – Β – Δ – Δ – Α – Γ – Β – Δ**

Άσκηση 1η. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$ και με βάσεις ΑΒ = κ, ΓΔ = λ και ύψος υ. Αν οι διαγώνιες του τραπεζίου τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Gamma O\Delta)}{\lambda^2}=\frac{(AOB)}{\kappa^2}$

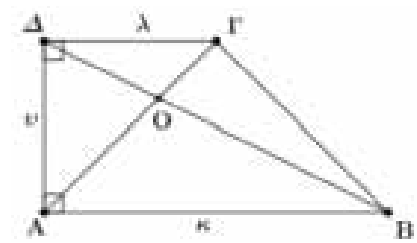
β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{(AO\Delta)}{(AOB)}=\frac{(BO\Gamma)}{(AOB)}=\frac{\lambda}{\kappa}$

Λύση: α) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια ($O\hat{A}B=O\hat{\Gamma}\Delta$ και $A\hat{O}B=\Gamma\hat{O}\Delta$) τότε:

$$\frac{O\Delta}{OB}=\frac{O\Gamma}{OA}=\frac{\lambda}{\kappa}$$

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους, άρα

$$\frac{(\Gamma O\Delta)}{(AOB)}=\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2=\frac{\lambda^2}{\kappa^2}. \quad \text{Άρα } \frac{(\Gamma O\Delta)}{\lambda^2}=\frac{(AOB)}{\kappa^2}$$



β) Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΟΒ έχουν τις γωνίες τους $A\hat{O}\Delta, A\hat{O}B$ παραπληρωματικές, τότε:

$$\frac{(AO\Delta)}{(AOB)}=\frac{OA\cdot O\Delta}{OA\cdot OB}=\frac{O\Delta}{OB}=\frac{\lambda}{\kappa}$$

Αντίστοιχα και τα τρίγωνα ΒΟΓ και ΑΟΒ έχουν τις γωνίες τους $A\hat{O}\Delta, B\hat{O}\Gamma$ παραπληρωματικές,

τότε: $$\frac{(BO\Gamma)}{(AOB)}=\frac{OB\cdot O\Gamma}{OB\cdot OA}=\frac{O\Gamma}{OA}=\frac{\lambda}{\kappa}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{(AO\Delta)}{(AOB)}=\frac{(BO\Gamma)}{(AOB)}=\frac{\lambda}{\kappa}$$

Άσκηση 2η. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Κ, Λ, Μ, και Ν είναι τα σημεία επαφής του κύκλου με τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές και το ΑΟΔ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι $ON^2=AN\cdot N\Delta$

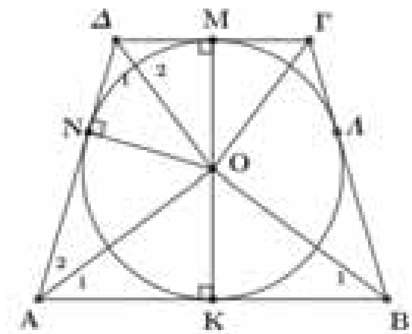
γ) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου ως συνάρτηση των βάσεων του τραπεζίου.

Λύση: α) Επειδή τα ΑΚ και ΑΝ είναι εφαπτόμενα τμήματα η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, άρα $\hat{A}_1=\frac{\hat{A}}{2}$, αντίστοιχα έχουμε την ΟΒ διχοτόμο της γωνίας Β και $\hat{B}_1=\frac{\hat{B}}{2}$. Αφού το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές είναι $\hat{A} = \hat{B}$, τότε θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, συνεπώς το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές. Ανάλογα η διακεντρική ευθεία ΔΟ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ και έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{\Delta}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{\Delta} + \hat{A}}{2} = 90^o \quad \text{άρα} \quad A\hat{O}\Delta = 90^o$$

Συνεπώς το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ η ΟΝ ως ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής Ν, άρα η ΟΝ είναι ύψος του, τότε: $ON^2 = AN \cdot N\Delta$



γ) Από το α) ερώτημα το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές και ανάλογα έχουμε ότι και το τρίγωνο ΓΟΔ είναι επίσης ισοσκελές, συνεπώς τα ύψη τους ΟΚ και ΟΜ είναι και διάμεσοι, επομένως ισχύουν:

$$AN = AK = \frac{AB}{2} \quad \text{και} \quad N\Delta = \Delta M = \frac{\Gamma\Delta}{2}$$

Αντικαθιστώντας στο **(β)** έχουμε:

$$ON^2 = AN \cdot N\Delta \Leftrightarrow R^2 = \frac{AB}{2} \cdot \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{4}$$

Άρα $$R = \frac{\sqrt{AB \cdot \Gamma\Delta}}{2}$$

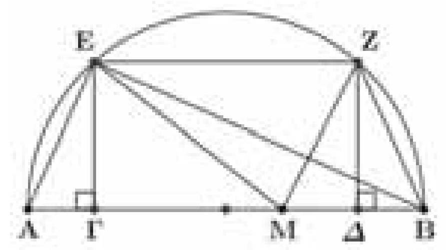
Άσκηση 3η. Σε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ φέρνουμε χορδή ΕΖ παράλληλη της διαμέτρου. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ = ΑΕ και ΑΓ = ΒΔ

β) $ME^2 + MZ^2 = MA^2 + MB^2 + 2AE^2 - 2A\Gamma \cdot AB$

γ) $MA^2 + MB^2 - ME^2 - MZ^2 = 0$

Λύση: α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΔΒΖ είναι ορθογώνια, έχουν ΕΓ = ΖΔ ως αποστάσεις των παραλλήλων ευθειών ΑΒ και ΕΖ, και είναι ΑΕ = ΒΖ ως χορδές ίσων τόξων, άρα είναι ίσα τότε ισχύουν ΒΖ = ΑΕ και ΑΓ = ΔΒ



β) Στο τρίγωνο ΑΜΕ είναι $\hat{A} < 90^o$, τότε από το θεώρημα της οξείας γωνίας έχουμε:

$$ME^2 = MA^2 + AE^2 - 2MA \cdot A\Gamma \qquad (1)$$

από το τρίγωνο ΒΜΖ επειδή είναι $\hat{B} < 90^o$ έχουμε:

$$MZ^2 = MB^2 + BZ^2 - 2MB \cdot \Delta B$$

και λόγω του α ερωτήματος αυτή γράφεται

$$MZ^2 = MB^2 + AE^2 - 2MB \cdot A\Gamma \qquad (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} ME^2 + MZ^2 &= MA^2 + MB^2 + 2AE^2 - \\ &\quad -2MA \cdot A\Gamma - 2MB \cdot A\Gamma \\ &= MA^2 + MB^2 + 2AE^2 - 2A\Gamma(MA + MB) \\ &= MA^2 + MB^2 + 2AE^2 - 2A\Gamma \cdot AB \end{aligned}$$

γ) Η γωνία $A\hat{E}B$ είναι εγγεγραμμένη στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΑΒ, άρα το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο στο Ε και για την κάθετη πλευρά του ΑΕ ισχύει: $AE^2 = AB \cdot A\Gamma$, τότε η σχέση του β ερωτήματος γράφεται:

$$ME^2 + MZ^2 = MA^2 + MB^2 + \cancel{2AE^2} - \cancel{2AE^2} \text{ ή}$$

$$MA^2 + MB^2 - ME^2 - MZ^2 = 0$$

Άσκηση 4η. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΖ και την διάμεσό του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AZ}^2 + 4\Delta\Gamma^2 + 4\Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{Z} + \Delta\mathrm{Z}^2$

β) $\mathrm{AE}^2 - \mathrm{AB}^2 = 3\Delta\Gamma(\Delta\Gamma + 2\Delta\mathrm{Z})$

γ) $\mathrm{AE}^2 - \mathrm{AB}^2 = 3\left[\mathrm{A}\Gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2\right]$

Λύση: Είναι ΑΒ < ΑΓ < ΑΕ αφού το Γ είναι εσωτερικό σημείο της ΔΕ και ΑΔ < ΑΓ αφού το Δ είναι εσωτερικό της ΒΓ. Συνεπώς όλες οι διαφορές στα ερωτήματα έχουν νόημα.

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ έχουμε:

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{EZ}^2 = \mathrm{AZ}^2 + (2\Delta\Gamma + \Delta\mathrm{Z})^2 =$$

$$= \mathrm{AZ}^2 + 4\Delta\Gamma^2 + 4\Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{Z} + \Delta\mathrm{Z}^2 \quad (1)$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε:

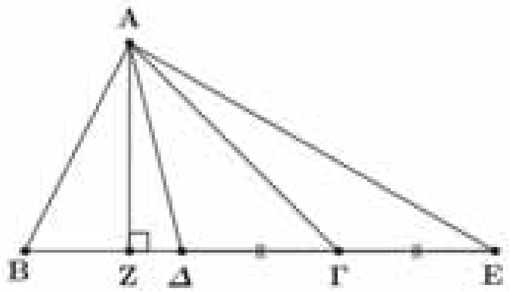
$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{EZ}^2 = \mathrm{AZ}^2 + (\mathrm{B}\Delta + \Delta\mathrm{Z})^2 =$$

$$= \mathrm{AZ}^2 + (\Delta\Gamma + \Delta\mathrm{Z})^2 =$$

$$\mathrm{AZ}^2 + \Delta\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{Z} + \Delta\mathrm{Z}^2 \quad (2)$$

Αφαιρώντας την σχέση (2) από την (1) έχουμε

$$\mathrm{AE}^2 - \mathrm{AB}^2 = 3\Delta\Gamma^2 + 6\Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{Z} = 3\Delta\Gamma(\Delta\Gamma + 2\Delta\mathrm{Z}) \quad (3)$$



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ έχουμε:

$$\mathrm{A}\Gamma^2 = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{Z}\Gamma^2 = \mathrm{AZ}^2 + (\Delta\mathrm{Z} + \Delta\Gamma)^2 =$$

$$= \mathrm{AZ}^2 + \Delta\mathrm{Z}^2 + 2\Delta\mathrm{Z}\cdot\Delta\Gamma + \Delta\Gamma^2 \quad (4)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ έχουμε:

$$\mathrm{A}\Delta^2 = \mathrm{AZ}^2 + \Delta\mathrm{Z}^2 \quad (5)$$

Αφαιρώντας την (5) από την (4) έχουμε:

$$\mathrm{A}\Gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + 2\Delta\mathrm{Z}\cdot\Delta\Gamma = \Delta\Gamma(\Delta\Gamma + 2\Delta\mathrm{Z}) \quad (6)$$

Τέλος από τις σχέσεις (3) και (6) έχουμε:

$$\mathrm{AE}^2 - \mathrm{AB}^2 = 3\left[\mathrm{A}\Gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2\right]$$

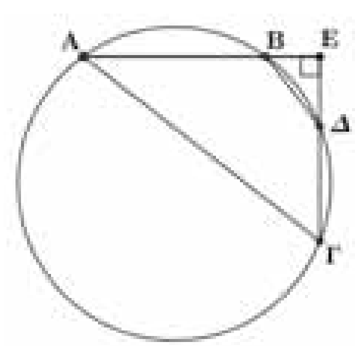
Άσκηση 5η. Δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε που είναι εξωτερικό του κύκλου.
Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{A}\Gamma^2 + \mathrm{B}\Delta^2 = \mathrm{AE}^2 + \Gamma\mathrm{E}^2 + \mathrm{BE}^2 + \Delta\mathrm{E}^2$

β) $\mathrm{A}\Gamma^2 + \mathrm{B}\Delta^2 - \mathrm{AB}^2 - \Gamma\Delta^2 = 2(\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AE} + \Delta\mathrm{E}\cdot\Gamma\mathrm{E})$

Λύση: α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΕ είναι: $\mathrm{A}\Gamma^2 = \mathrm{AE}^2 + \Gamma\mathrm{E}^2$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΔ είναι $\mathrm{B}\Delta^2 = \mathrm{BE}^2 + \Delta\mathrm{E}^2$
και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\mathrm{A}\Gamma^2 + \mathrm{B}\Delta^2 = \mathrm{AE}^2 + \Gamma\mathrm{E}^2 + \mathrm{BE}^2 + \Delta\mathrm{E}^2 \quad (1)$$



β) Είναι ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ επομένως έχουμε:

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BE} + \mathrm{BE}^2$$

αντίστοιχα έχουμε:

$$\Gamma\mathrm{E}^2 = \Gamma\Delta^2 + 2\Gamma\Delta\cdot\Delta\mathrm{E} + \Delta\mathrm{E}^2$$

Τότε η σχέση (1) του α ερωτήματος γράφεται:

$$\mathrm{A}\Gamma^2 + \mathrm{B}\Delta^2 = \mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BE} +$$

$$+\mathrm{BE}^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\Gamma\Delta\cdot\Delta\mathrm{E} + \Delta\mathrm{E}^2 + \mathrm{BE}^2 + \Delta\mathrm{E}^2$$

$$= \mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BE} + 2\mathrm{BE}^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\Gamma\Delta\cdot\Delta\mathrm{E} + 2\Delta\mathrm{E}^2$$

$$= \mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{BE}(\mathrm{AB} + \mathrm{BE}) + \Gamma\Delta^2 + 2\Delta\mathrm{E}(\Delta\mathrm{E} + \Gamma\Delta)$$

$$= \mathrm{AB}^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AE} + 2\Delta\mathrm{E}\cdot\Gamma\mathrm{E},$$

άρα $\mathrm{A}\Gamma^2 + \mathrm{B}\Delta^2 - \mathrm{AB}^2 - \Gamma\Delta^2 = 2(\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AE} + \Delta\mathrm{E}\cdot\Gamma\mathrm{E})$

Ασκήσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας

Για τα παιδιά που ονειρεύονται…
για τα παιδιά που προσπαθούν…

Μποζατζίδης Β. – Τσιφάκης Χ

Άσκηση 1η. Δίνεται η εξίσωση $\left(C_1\right): x^2+y^2-2x+2y=\alpha-2025$ και η έλλειψη $\left(C_2\right): 3x^2+4y^2=12$

α) Για ποιες τιμές του α, η $\left(C_1\right)$ παριστάνει κύκλο; Να βρεθούν επίσης τα στοιχεία του.
β) Για ποια τιμή του α ο κύκλος $\left(C_1\right)$ περνάει από την εστία $E'(-\gamma,0)$ της έλλειψης $\left(C_2\right)$;
γ) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της έλλειψης $\left(C_2\right)$ στο $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ να εφάπτεται του κύκλου $\left(C_1\right)$.

Λύση

α) Η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1=\alpha-2023 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=\alpha-2023.$$

Αυτή παριστάνει κύκλο όταν $\alpha>2023$ και θα έχει κέντρο το $K(1,-1)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\alpha-2023}$.

β) Η έλλειψη γράφεται

$$\frac{3x^2}{12}+\frac{4y^2}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \text{ με } \alpha^2=4 \;,\; \beta^2=3,$$
$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=1$. Άρα η εστία είναι το $E'(-1,0)$.

Ο κύκλος $\left(C_1\right)$ διέρχεται από την εστία όταν

$$4+1=\alpha-2023 \Leftrightarrow \alpha=2028.$$

γ) η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): \frac{x\cdot 1}{4}+\frac{y\cdot\frac{3}{2}}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow x+2y-4=0$$

για να εφάπτεται και στον κύκλο πρέπει

$$d(K,(\varepsilon))=\rho \Leftrightarrow \frac{|1-2-4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{\alpha-2023} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\alpha-2023}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \alpha=2028.$$

Άσκηση 2η. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $|3\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$

β) Να υπολογίσετε την γωνία $\theta=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$

γ) Αν είναι γνωστό ότι $\left(\vec{x}+2\vec{\alpha}\right)//\vec{\beta}$ και $\left(\vec{x}+\vec{\beta}\right)\perp\vec{\alpha}$ να αποδείξετε ότι $\vec{x}=-2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

δ) Να βρείτε το $|\vec{x}|$.

Λύση

α. $|3\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$

$$9\vec{\alpha}^2+6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

$$8\vec{\alpha}^2+8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1.$$

β. $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=-\frac{1}{2}$, άρα η $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$

γ. Αφού $\left(\vec{x}+2\vec{\alpha}\right)//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x}+2\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\left(\vec{x}+\vec{\beta}\right)\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow \left(\vec{x}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}=0 \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{\alpha}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=1 \Leftrightarrow \left(\lambda\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\alpha}=1 \Leftrightarrow -\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=-3$$

Άρα $\vec{x}+2\vec{\alpha}=-3\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x}=-2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

Άσκηση 3η. Δίνεται η εξίσωση

$$(C): \; x^2+y^2+2\alpha x-2\alpha y-4=0$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in R$ η εξίσωση (C) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθούν τα στοιχεία.
β) Να δείξετε ότι το κέντρο του κινείται σε σταθερή ευθεία όταν το α διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

γ) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2$ τέμνει τον κύκλο (C) στα σημεία Α και Β έτσι ώστε $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (Ο είναι η αρχή των αξόνων), να προσδιορίστε τον πραγματικό αριθμό α.

Λύση

α) Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γίνεται: $(x+\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2+4$ (Ι). Επειδή για κάθε α πραγματικό αριθμό είναι $2\alpha^2+4>0$ η σχέση (Ι) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\alpha,\alpha)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2\alpha^2+4}$.

β) Για το κέντρο $K(-\alpha,\alpha)$ του κύκλου έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_K&=-\alpha\\ y_K&=\alpha\end{aligned}\right\}\text{και απαλείφοντας το α έχουμε}$$

$x_K+y_K=0$. Συνεπώς όταν το α διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το κέντρο Κ του κύκλου κινείται στην ευθεία $y=-x$

γ) Τα σημεία Α και Β προσδιορίζονται από την λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned}(x+\alpha)^2+(y-\alpha)^2&=2\alpha^2+4\\ y&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$(x+\alpha)^2=\alpha^2+4\alpha \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει λύση όταν

$\alpha^2+4\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

επομένως: $x=-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\alpha}$ ή

$x=-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\alpha}$

Συνεπώς οι συντεταγμένες των σημείων είναι

$A\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\alpha},2\right)$ και $B\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\alpha},2\right)$.

Επειδή $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow \lambda_{\overrightarrow{OA}}\cdot\lambda_{\overrightarrow{OB}}=-1\Leftrightarrow\alpha=1$

Άσκηση 4η. Δίνεται ο κύκλος (C): $x^2+y^2+x+y-1=0$ (Ι) και η ευθεία $(\varepsilon): y=3x+\beta$, $\beta\in R$

α) Για ποια τιμή του $\beta\in R$ η ευθεία εφάπτεται του κύκλου;

β) Αν $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$ δύο σημεία που οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την (Ι) να προσδιορίσετε την μέγιστη τιμή της παράστασης: $A=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+y_1^{\,2}+y_2^{\,2}-2x_1x_2-2y_1y_2}$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων του κύκλου από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Ο κύκλος (C) έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{6}$. Αφού εφάπτεται στην ευθεία (ε) έχουμε:

$$d(K,(\varepsilon))=\rho\Leftrightarrow\frac{\left|3\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+\beta\right|}{\sqrt{10}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow$$

$|\beta-1|=\sqrt{60}\Leftrightarrow\beta=1\pm\sqrt{60}$

β) $A=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+y_1^{\,2}+y_2^{\,2}-2x_1x_2-2y_1y_2}=$

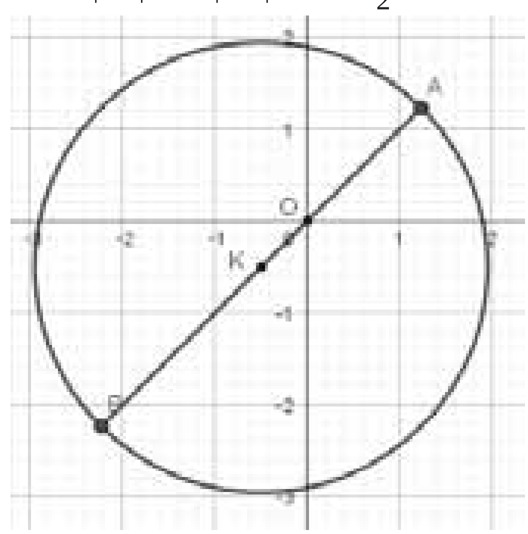
$\sqrt{x_1^{\,2}-2x_1x_2+x_2^{\,2}+y_1^{\,2}+y_2^{\,2}-2y_1y_2}=$

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

Αφού τα σημεία Μ, Ν ανήκουν στον κύκλο η μέγιστη χορδή είναι η διάμετρός του, άρα $A_{max}=2\sqrt{6}$.

γ) Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα $d_{min}=\left|\overrightarrow{OA}\right|=\rho-\left|\overrightarrow{OK}\right|=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

και $d_{max}=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\rho+\left|\overrightarrow{OK}\right|=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}$



Άσκηση 5η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή $A(2,1)$. Η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι $(B\Delta): x+y=1$ και η εξίσωση της διαμέσου ΒΜ είναι $(BM): 3x-2y=-2$. Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση της πλευράς ΑΓ

β) Οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ

γ) Αν $B(0,1)$ και $\Gamma(-10,-11)$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Λύση

α) Η πλευρά ΑΓ διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ΒΔ άρα $\lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{B\Delta}=-1\Leftrightarrow\lambda_{A\Gamma}=1$ και η εξίσωσή της είναι $(A\Gamma): y=x-1$.

β) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των $(B\Delta)$ και (BM) έχουμε: $(B\Delta)\cap(BM)=B(0,1)$

Όμοια λύνοντας το σύστημα των $(A\Gamma)$ και (BM) βρίσκουμε το μέσο $M(-4,-5)$ της πλευράς ΑΓ.

Από αυτές έχουμε

$$\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=x_M \Leftrightarrow \frac{2+x_\Gamma}{2}=-4 \Leftrightarrow x_\Gamma=-10, \quad \text{και}$$
$$\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=y_M \Leftrightarrow y_\Gamma=-11$$

Άρα η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(-10,-11)$

γ) $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot 24=12$ τ.μ.

Άσκηση 6η. **Κατά την διάρκεια του πρόσφατου ημιμαραθώνιου της Αθήνας, τρεις φίλοι από επαρχιακή πόλη, κινούμενοι σε μια άγνωστη γι'αυτούς περιοχή χάθηκαν. Από τους τουριστικούς χάρτες που είχαν, διαπίστωσαν ότι κινούνταν σε τρεις ευθύγραμμους δρόμους με εξισώσεις**
$(1+\kappa)x+(2-\kappa)\psi=2(4+\kappa)$ **με** $\kappa=1,2,3$.
α) Να δείξετε ότι οι τρεις αυτοί δρόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ.
β) Σε μια χρονική στιγμή διαπίστωσαν ότι και οι τρεις βρίσκονταν σε σημεία που είχαν την ίδια τεταγμένη ψ = 6. Ποιες είναι αυτή τη στιγμή οι μεταξύ τους αποστάσεις;
γ) Αν και οι τρείς κινούνται με την ίδια ταχύτητα, ποιος από αυτούς θα φτάσει πρώτος στο σημείο συνάντησης Κ; (ως στιγμή 0 θεωρούμε τη χρονική στιγμή του (β) ερωτήματος)

Λύση

α) $(1+\kappa)x+(2-\kappa)y=2(4+\kappa)$

Για $\kappa=1$ έχουμε την πορεία του $1^{ου}$ δρομέα, για $\kappa=2$ του $2^{ου}$ και για $\kappa=3$ του $3^{ου}$. Αυτές είναι:

(ε_1): $2x+y=10$, (ε_2): $x=4$, (ε_3): $4x-y=14$.

Και οι τρείς τέμνονται στο σημείο $K(4,2)$

β) για $y=6$ ο $1^{ος}$ δρομέας βρίσκεται στο σημείο $A(2,6)$, ο $2^{ος}$ στο σημείο $B(4,6)$ και ο $3^{ος}$ στο σημείο $\Gamma(5,6)$. Οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$, $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=1$ και $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=3$

γ) Αφού $(KA)=\sqrt{20}$, $(KB)=4$ και $(K\Gamma)=\sqrt{17}$. Ο $2^{ος}$ δρομέας βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο Κ, οπότε θα φτάσει πρώτος.

Άσκηση 7η. **Δίνεται η εξίσωση** $\varepsilon_\lambda: \lambda x+(2\lambda-5)y+8\lambda-15=0$.

α) Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ **και να βρείτε τις ευθείες που ισαπέχουν από τα σημεία** $A(0,1)$ **και** $B(-3,0)$.

β) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon_1: x-3y-7=0$ **με τους άξονες.**

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων με ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$ **που εφάπτονται στην ευθεία** $\varepsilon_2: 7x-y+11=0$ **και το κέντρο τους βρίσκεται στην ευθεία** $\varepsilon_1: x-3y-7=0$.

Λύση

α) Η εξίσωση παριστάνει ευθεία αν $\lambda\neq 0$ ή $2\lambda-5\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\frac{5}{2}$, οπότε αφού δεν υπάρχει κοινή τιμή του λ που μηδενίζει τους συντελεστές της εξίσωσης, παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Στη συνέχεια θα βρούμε τις ευθείες που ισαπέχουν από τα Α και Β.

Πρέπει: $d(A,\varepsilon_\lambda)=d(B,\varepsilon_\lambda)\Leftrightarrow$

$$\frac{|\lambda\cdot 0+(2\lambda-5)\cdot 1+8\lambda-15|}{\cancel{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda-5)^2}}}=$$

$$=\frac{|\lambda\cdot(-3)+(2\lambda-5)\cdot 0+8\lambda-15|}{\cancel{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda-5)^2}}}\Leftrightarrow$$

$$|10\lambda-20|=|5\lambda-15|\Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=\frac{7}{3}.$$

Οπότε, οι ζητούμενες ευθείες είναι οι $\varepsilon_1: x-3y-7=0$ και $\varepsilon_2: 7x-y+11=0$.

β) Αρχικά θα βρούμε τα σημεία τομής της ε_1 με τους άξονες. Τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(7,0)$ και τον $y'y$ στο $B\left(0,-\frac{7}{3}\right)$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\frac{|x_A|\cdot|y_B|}{2}=\frac{7\cdot\frac{7}{3}}{2}=\frac{49}{6}\text{ τ.μ.}.$$

γ) Οι ζητούμενοι κύκλοι είναι της μορφής $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=2$, με $K(x_0,y_0)$ το κέντρο και $\rho=\sqrt{2}$ η ακτίνα τους.

Αφού κάθε κύκλος εφάπτεται στην $\varepsilon_2:7x-y+11=0$ είναι: $d(K,\varepsilon_2)=\rho\Leftrightarrow$

$$\frac{|7x_0-y_0+11|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|7x_0-y_0+11|=10\quad(1)$$

Όμως $K\in\varepsilon_1$ επομένως είναι $x_0-3y_0-7=0\Leftrightarrow x_0=3y_0+7$ και η (1) γίνεται: $|7x_0-y_0+11|=10\Leftrightarrow$

$|7(3y_0+7)-y_0+11|=10\Leftrightarrow$

$|20y_0+60|=10\Leftrightarrow|2y_0+6|=1\Leftrightarrow$

$y_0=-\frac{7}{2}$ ή $y_0=-\frac{5}{2}$.

Για $y_0=-\frac{7}{2}$ η (1) γίνεται:

$$\left|7x_0+\frac{7}{2}+11\right|=10\Leftrightarrow\left|7x_0+\frac{29}{2}\right|=10\Leftrightarrow$$

$$|14x_0+29|=20\Leftrightarrow x_0=-\frac{7}{2}\text{ ή }x_0=-\frac{9}{14}$$

Ενώ για $y_0=-\frac{5}{2}$ η (1) γίνεται:

$$\left|7x_0+\frac{5}{2}+11\right|=10\Leftrightarrow\left|7x_0+\frac{27}{2}\right|=10\Leftrightarrow$$

$$|14x_0+27|=20\Leftrightarrow x_0=-\frac{47}{14}\text{ ή }x_0=-\frac{1}{2}$$

και οι ζητούμενοι κύκλοι είναι οι:

$$C_1:\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=2$$

$$C_2:\left(x+\frac{9}{14}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=2$$

$$C_3:\left(x+\frac{37}{14}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2$$

$$C_4:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2$$

Ασκηση 8η. Δίνονται οι κύκλοι $C_1:(x-3)^2+(y-1)^2=1$ και $C_2:(x-2)^2+(y-1)^2=4$, καθώς και η οικογένεια ευθειών $\varepsilon_\lambda:(\lambda-1)x+(\lambda-2)y-2\lambda=0$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και να βρείτε την κοινή τους εφαπτομένη.

β) Αν $(\eta):x=4$ η κοινή τους εφαπτομένη, να δείξετε ότι ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

γ) Να βρείτε ευθεία της ε_λ διαφορετική της (η) η οποία εφάπτεται στον κύκλο C_2.

Λύση

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(3,1)$ και ακτίνα $\rho=1$, ενώ ο C_2 έχει κέντρο $\Lambda(2,1)$ και ακτίνα $R=2$. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $(K\Lambda)=\sqrt{(3-2)^2+(1-1)^2}=1$ και η διαφορά των ακτίνων τους $R-\rho=2-1=1$.

Αφού $(K\Lambda)=R-\rho$ οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

Στη συνέχεια θα βρούμε το κοινό σημείο τους.

Οι κύκλοι γράφονται ως εξής:

$C_1:x^2+y^2-6x-2y+9=0$ και

$C_2:x^2+y^2-4x-2y+1=0$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις προκύπτει: $-2x+8=0\Leftrightarrow x=4$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του C_1 προκύπτει $y=1$, οπότε κοινό τους σημείο είναι το $M(4,1)$.

Αφού $\lambda_{\Lambda K}=\dfrac{1-1}{3-2}=0$, είναι $\Lambda K//x'x$, άρα συμπεραίνουμε ότι $(\eta)\perp x'x$ και αφού διέρχεται από το Μ είναι η $(\eta):x=4$.

β) Για $\lambda=2$ από την οικογένεια ευθειών προκύπτει η ευθεία $(\eta):x=4$, οπότε η (η) ανήκει στην οικογένεια.

γ) Αφού η ε_λ εφάπτεται στον C_2 ισχύει:

$$d(\Lambda,\varepsilon_\lambda)=2\Leftrightarrow$$
$$\frac{\left|(\lambda-1)\cdot 2+(\lambda-2)\cdot 1-2\lambda\right|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+(\lambda-2)^2}}=2\Leftrightarrow$$
$$|\lambda-4|=2\sqrt{2\lambda^2-6\lambda+5}\Leftrightarrow$$
$$\lambda^2-8\lambda+16=4\left(2\lambda^2-6\lambda+5\right)\Leftrightarrow$$
$$7\lambda^2-16\lambda+4=0\Leftrightarrow\lambda=2 \text{ ή } \lambda=\frac{2}{7}$$

Για $\lambda=2$ προκύπτει η (η), οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη προκύπτει για $\lambda=\dfrac{2}{7}$ και είναι η $(\varepsilon):5x+12y+4=0$.

Άσκηση 9η. Δίνεται ο κύκλος $C_1:(x-2)^2+y^2=3$ και η παραβολή $C_2:y^2=2x$.

α) Να δείξετε ότι στα κοινά τους σημεία έχουν κοινές εφαπτόμενες.

β) Αν Α, Β τα κοινά τους σημεία και Κ το κέντρο του κύκλου, να δείξετε ότι το ΟΑΚΒ είναι ρόμβος.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του ρόμβου.

Λύση

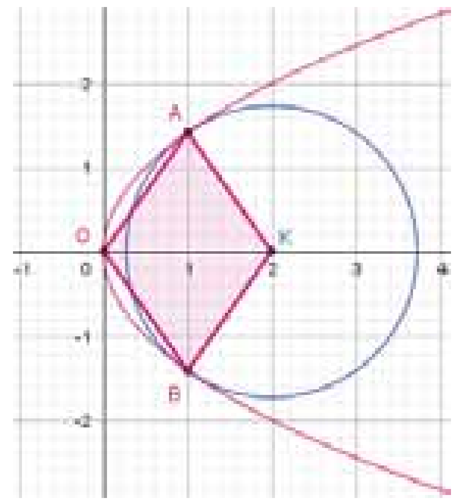
α) Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία τους.

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=3\\ y^2=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ y^2=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

Επομένως, τα κοινά σημεία τους είναι τα $A\left(1,-\sqrt{2}\right)$ και $B\left(1,\sqrt{2}\right)$.

Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα Α και Β είναι της μορφής $y_1y=p(x+x_1)$, με $p=1$. Οπότε: $\varepsilon_1:-\sqrt{2}y=x+1\Leftrightarrow x+\sqrt{2}y+1=0$

$\varepsilon_2:\sqrt{2}y=x+1\Leftrightarrow x-\sqrt{2}y+1=0$



Θα δείξουμε ότι οι εφαπτομένες εφάπτονται και στον κύκλο. Τα κοινά σημεία του κύκλου με την ε_1 είναι: $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=3\\ x+\sqrt{2}y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\sqrt{2}\\ x=1\end{cases}$

Αφού κύκλος και ευθεία έχουν μοναδικό κοινό σημείο το Α, η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο στο Α. Αντίστοιχα, μοναδικό κοινό σημείο του κύκλου με την ε_2 είναι το Β, η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο στο Β.

β) Θα βρούμε τα μήκη των πλευρών του τετραπλεύρου.

$$(OA)=\sqrt{(1-0)^2+\left(-\sqrt{2}-0\right)^2}=\sqrt{3}$$
$$(AK)=\sqrt{(2-1)^2+\left(0+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$
$$(KB)=\sqrt{(1-2)^2+\left(0-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$
$$(BO)=\sqrt{(0-1)^2+\left(0-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

Αφού το ΟΑΚΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες είναι ρόμβος.

γ) Ισχύει ότι:

$$(OAKB)=2\cdot(OAK)=2\cdot\frac{|x_K|\cdot|y_A|}{2}=2\sqrt{2}\ \text{τ.μ.}$$

Άσκηση 10η. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ του επιπέδου με $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}$ όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων. Αν ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=10$ και το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΟΒ ανήκει στην ευθεία $x+2y-1=0$, τότε

α) να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{\beta}$

β) Αν $\vec{\beta}=(6,-2)$ τότε

i) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τμήμα ΟΒ

ii) Να δείξετε ότι το σημείο $\Gamma(\kappa^2+7,-1)$ είναι εξωτερικό σημείο του παραπάνω κύκλου για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Έστω $\vec{\beta}=(x,y)$ τότε έχουμε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=10\Leftrightarrow 2x+y=10\ (1)$ και

$x_M+2y_M-1=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+2\frac{y}{2}-1=0\Leftrightarrow$

$x+2y=2\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x=6, y=-2$, άρα $\vec{\beta}=(6,-2)$.

β) i) Ο κύκλος έχει κέντρο το μέσο του ΟΒ και ακτίνα $\rho=\frac{(OB)}{2}$, άρα έχουμε $K(3,-1)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{10}$.

ii) $|\overrightarrow{K\Gamma}|=\sqrt{(\kappa^2+4)^2+4}>\sqrt{10}\Leftrightarrow(\kappa^2+4)^2>6\Leftrightarrow$

$\kappa^2>\sqrt{6}-4$ που ισχύει για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 11η. Έστω τα σημεία $A(-1,y)$ και $B(2x,y)$ με $x,y\in\mathbb{R}$ στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy.

α) Αν ισχύει $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου διαγράφουν την παραβολή $(C_1): y^2=2x$ της οποίας να βρείτε τα στοιχεία.

β) Αν ισχύει $3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2=15$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου διαγράφουν τον κύκλο $(C_2): x^2+y^2=3$ του οποίου να
βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) τα κοινά σημεία των $(C_1),(C_2)$ είναι τα $\Gamma(1,\sqrt{2})$ και $\Delta(1,-\sqrt{2})$

ii) Η εφαπτομένη της (C_1) στο Γ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της (C_2) στο Δ.

Λύση

α) έχουμε $\overrightarrow{OA}=(-1,y)$ και $\overrightarrow{OB}=(2x,y)$ οπότε $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow y^2=2x$ η οποία είναι εξίσωση παραβολής με $2\rho=2\Leftrightarrow\rho=1$, συνεπώς έχει εστία το $E\left(\frac{1}{2},0\right)$ και διευθετούσα $(\delta): x=-\frac{1}{2}$

β) $3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2=15\Leftrightarrow 3|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=15\Leftrightarrow$

$3\left(\sqrt{1+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{4x^2+y^2}\right)^2=15\Leftrightarrow$

$3+3y^2+4x^2+y^2=15\Leftrightarrow x^2+y^2=3$, η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{3}$

γ) i) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των $(C_1),(C_2)$ λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{matrix} y^2=2x \\ x^2+y^2=3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} y^2=2x \\ x^2+2x-3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y^2=2x \\ x=1 \text{ ή } x=-3\ (\text{απορρίπτεται})\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} y^2=2x \\ x=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y^2=2 \\ x=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} y=\pm\sqrt{2} \\ x=1\end{matrix}\right\}$$ άρα $\Gamma(1,\sqrt{2})$ και $\Delta(1,-\sqrt{2})$

ii) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Γ είναι:

$y\cdot\sqrt{2}=x+1$

και του κύκλου στο Δ: $x-\sqrt{2}y=3$.

Παρατηρούμε ότι έχουν $\lambda_1=\lambda_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$, συνεπώς είναι παράλληλες.

Θέματα Ανάλυσης

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Θέμα 1ο: Έστω $f,g:R\to R$ δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο R για τις οποίες ισχύει:

$$2g(x)+f(1)\geq xf(x)+2g(1) \quad (1)$$

για κάθε $x\in R$ και η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α. Να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(1,g(1))$ είναι παράλληλη της ε.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f(x^2)-g(x^2)+\frac{x^{2024}}{2024}, x\in[-1,1].$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Σε κάποιο $\xi\in(-1,1)$ η φ παρουσιάζει ελάχιστο.

ii. Η φ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $(-1,1)$.

Λύση: α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2g(x)-xf(x)+f(1)-2g(1)$, $x\in R$. Παρατηρούμε ότι $h(1)=0$ και λόγω της (1) έχουμε $h(x)\geq 0 \Leftrightarrow h(x)\geq h(1)$ για κάθε $x\in R$. Άρα το 1 είναι θέση ολικού ελαχίστου της h.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=2g'(x)-f(x)-xf'(x).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat πρέπει

$$h'(1)=0 \Leftrightarrow 2g'(1)=f(1)+f'(1) \quad (2).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο Α είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ (3). Αφού η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων οι συντεταγμένες του σημείου $O(0,0)$ επαληθεύουν την (3), οπότε έχουμε $f(1)=f'(1)$. Έτσι από τη (2) παίρνουμε $g'(1)=f'(1)$ που σημαίνει ότι η εφαπτομένη της C_g στο Β είναι παράλληλη στην ε.

β i. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε υπάρχει $\xi\in[-1,1]$ στο οποίο η φ παίρνει ελάχιστη τιμή.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με

$$\varphi'(x)=2xf'(x^2)-2xg'(x^2)+x^{2023}.$$

Από το ερώτημα α έχουμε $f'(1)=g'(1)$.

$$\varphi'(-1)=-2f'(1)+2g'(1)-1=-1.$$

$$\varphi'(-1)<0 \Rightarrow \lim_{x\to -1^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(-1)}{x+1}<0.$$

Άρα υπάρχει $\kappa\in(-1,0)$ έτσι ώστε

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(-1)}{x+1}<0 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow}$$

$\varphi(x)-\varphi(-1)<0 \Leftrightarrow \varphi(x)<\varphi(-1)$ για κάθε $x\in(-1,\kappa)$. Άρα το $\varphi(-1)$ δεν μπορεί να είναι ελάχιστη τιμή της φ στο $[-1,1]$, οπότε $\xi\neq -1$.

$$\varphi'(1)=2f'(1)-2g'(1)+1=1 \Rightarrow \varphi'(1)>0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}>0.$$

Άρα υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ έτσι ώστε

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}>0 \overset{x-1<0}{\Leftrightarrow} \varphi(x)-\varphi(1)<0 \Leftrightarrow \varphi(x)<\varphi(1)$$

για κάθε $x\in(\lambda,1)$. Άρα ούτε το $\varphi(1)$ είναι ελάχιστη τιμή της φ στο $[-1,1]$, οπότε $\xi\neq 1$. Τελικά $\xi\in(-1,1)$ στο οποίο η φ παίρνει ελάχιστη τιμή.

ii. Σύμφωνα με το ερώτημα (β, i) και το θεώρημα του Fermat έχουμε $\varphi'(\xi)=0$, δηλαδή η φ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $(-1,1)$.

Θέμα 2ο: Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο R. Να αποδείξτε ότι:

α. $\int_0^1 e^{-x}f(1-x)dx=\frac{1}{e}\int_0^1 e^{x}f(x)dx.$

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $\int_0^1 e^{-x}f(1-x)dx+\int_0^1 e^{x-1}f'(x)dx=$

$$e^{\xi-1}(f(\xi)+f'(\xi)).$$

Λύση: Έστω $I=\int_0^1 e^{-x}f(1-x)dx$. Θέτουμε $1-x=u$ (1) και έχουμε $du=(1-x)'dx \Leftrightarrow du=-dx \Leftrightarrow dx=-du$.

Για $x=0$ και $x=1$ από την (1) παίρνουμε αντίστοιχα $u=1$ και $u=0$.

$$I=\int_0^1 e^{-x}f(1-x)dx=\int_1^0 e^{u-1}f(u)(-du)=$$

$$\int_0^1\frac{e^u}{e}f(u)du=\frac{1}{e}\int_0^1 e^u f(u)du=\frac{1}{e}\int_0^1 e^x f(x)dx.$$

Άρα $\int_0^1 e^{-x}f(1-x)dx=\frac{1}{e}\int_0^1 e^x f(x)dx.$

β. Από το ερώτημα α έχουμε $\int_0^1 e^{-x} f(1-x)dx =$

$$\frac{1}{e}\int_0^1 e^x f(x)dx = \frac{1}{e}\int_0^1 (e^x)' f(x)dx =$$

$$\frac{1}{e}\left(\left[e^x f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x)dx\right) =$$

$$\frac{1}{e}\left(ef(1) - f(0) - \int_0^1 e^x f'(x)dx\right) =$$

$$\frac{1}{e}\left(ef(1) - f(0)\right) - \int_0^1 e^{x-1} f'(x)dx$$

Άρα $\int_0^1 e^{-x} f(1-x)dx + \int_0^1 e^{x-1} f'(x)dx =$

$$= \frac{1}{e}\left(ef(1) - f(0)\right) \quad (2).$$

Η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x), x \in [0,1]$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(1) - g(0)}{1-0} = ef(1) - f(0) \Leftrightarrow$$

$$e^{\xi} f(\xi) + e^{\xi} f'(\xi) = ef(1) - f(0) \ (3).$$

Η (2) με βάση την (3) γράφεται

$$\int_0^1 e^{-x} f(1-x)dx + \int_0^1 e^{x-1} f'(x)dx = e^{\xi-1}\left(f(\xi) + f'(\xi)\right).$$

Θέμα 3ο: Η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και $f(1) = \sqrt{e}$. Αν F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $xF(x) = f(x)$ (1) για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$.

ii. $f(e^x) > \sqrt{e}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

β. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, την C_f και τις ευθείες $x = \sqrt{2}$ και $x = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(e) - \sqrt{e}}{x-1} + \frac{E - 3e}{x-2} = 0$ (1) έχει ακριβώς μία ρίζα.

Λύση: α.i. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε

$$(1) \Leftrightarrow F(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow F'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \Rightarrow x^2 f(x) + f(x) =$$

$$xf'(x) \Rightarrow (x^2+1)f(x) = xf'(x) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow \left(\ln|f(x)|\right)' = x + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)' \Rightarrow \ln|f(x)| =$$

$\Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{x^2}{2} + \ln x + c$ (2), όπου $c \in R$ σταθερά. Για $x = 1$ $(2) \Rightarrow \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 0$.

Άρα η (2) γίνεται $\ln|f(x)| = \frac{x^2}{2} + \ln x \Rightarrow$

$$|f(x)| = e^{\frac{x^2}{2} + \ln x} = e^{\frac{x^2}{2}} e^{\ln x} \Rightarrow |f(x)| = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

Η f στο $(0,+\infty)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, οπότε στο $(0,+\infty)$ η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αφού $f(1) > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$, $x > 0$.

ii. Στο ερώτημα i είδαμε ότι για κάθε $x \in (0,+\infty)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x} > 0 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f'(x) > 0$$

που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι έχουμε $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow f(e^x) > f(1) \Leftrightarrow f(e^x) > \sqrt{e}$.

β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$, οπότε $E = \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} |f(x)|dx =$

$$\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)dx = \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} xe^{\frac{x^2}{2}}dx = \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{\frac{x^2}{2}}dx.$$

Θέτουμε $\frac{x^2}{2} = u \Rightarrow du = \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx$. Για $x = \sqrt{2}$ βρίσκουμε $u = 1$ και για $x = 2\sqrt{2}$ βρίσκουμε $u = 4$.

Άρα $E = \int_1^4 e^u du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$ τετρ. μονάδες.

Η (1) ορίζεται στο $R - \{1,2\}$ και γράφεται

$$\left(f(e) - \sqrt{e}\right)(x-2) + (E - 3e)(x-1) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x) = \left(f(e) - \sqrt{e}\right)(x-2) + (E-3e)(x-1), x \in R$

- Η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική οπότε είναι συνεχής και στο $[1,2]$.
- $g(1) = -\left(f(e) - \sqrt{e}\right) < 0$ λόγω του ερωτήματος

αii, $g(2)=E-3e=e^4-4e=e(e^3-4)>0$,οπότε $g(1)g(2)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x)=0$. Επειδή η συνάρτηση g είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Η εξίσωση $g(x)=0$ και η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμες στο $R-\{1,2\}$, οπότε η (1) έχει μοναδική ρίζα το x_0.

Θέμα 4ο: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x, x\ge 1$ και $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Ένα σημείο $M\in C_f$ κινείται στην C_f χωρίς να είναι ορατό από τον παρατηρητή και η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό $\int_2^3 g(x)dx$ cm/sec.

α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ όταν για πρώτη φορά γίνει ορατό από τον παρατηρητή.

β. Θέτουμε $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη ε της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x=\alpha$ με $\alpha>e$.

i. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha>e$ είναι:

$$E'(\alpha+1)<e^{\alpha-1}-\alpha$$

ii. Να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{E'(\alpha)}{\eta\mu\alpha+\alpha}$.

Λύση: α. $D_g=R-\{-1,1\}$. Θα υπολογίσουμε αρχικά το $\int_2^3 g(x)dx$.

Αναζητούμε σταθερούς πραγματικούς αριθμούς A,B έτσι ώστε $\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$ (1) για κάθε $x\in R-\{-1,1\}$.

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x+3}{x+1}=A+\frac{B(x-1)}{x+1}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x+1}=A\Rightarrow$$

$$A=2.$$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x+3}{x-1}=\frac{A(x+1)}{x-1}+B\Rightarrow\lim_{x\to-1}\frac{x+3}{x-1}=B\Rightarrow$$

$B=-1$.

Άρα $g(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}, x\in R-\{-1,1\}$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2,3]$, οπότε

$$\int_2^3 g(x)dx=2\int_2^3\frac{1}{x-1}dx-\int_2^3\frac{1}{x+1}dx=$$

$$2\big[\ln|x-1|\big]_2^3-\big[\ln|x+1|\big]_2^3=2\ln2-\ln4+\ln3\Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 g(x)dx=\ln3.$$

Ο παρατηρητής βλέπει τα σημεία της C_f μέχρι του σημείου Α στο οποίο η οπτική ακτίνα ε είναι εφαπτομένη της C_f (Σχ.2).

Σχ. 2

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Έστω $A(x_0,\ln x_0)\in C_f$ με $x_0>1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο Α είναι:

$$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

Όμως η ε διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, οπότε πρέπει $\ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e$.

Άρα $A(e,1)$ και $\varepsilon: y=\dfrac{1}{e}x$.

Έστω $M(x,y)\in C_f$ με $x\ge e$. Όταν $x>e$ το σημείο Μ δεν είναι ορατό από τον παρατηρητή. Την τυχαία χρονική στιγμή t είναι

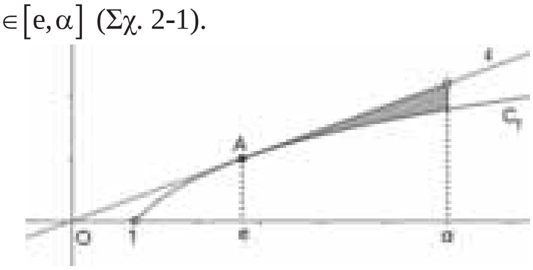
$$y(t)=\ln x(t)\Rightarrow y'(t)=\frac{x'(t)}{x(t)}\Leftrightarrow y'(t)=-\frac{\ln3}{x(t)}$$

Για πρώτη φορά το σημείο Μ θα είναι ορατό από τον παρατηρητή όταν φθάσει στο σημείο Α. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που $x(t_0)=e$. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι

$$y'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}=-\frac{\ln3}{e}\text{ cm/sec.}$$

β. Έχουμε από το ερώτημα α ότι η ευθεία $\varepsilon: y=\dfrac{1}{e}x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της $A(e,1)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η f είναι κοίλη οπότε $y_\varepsilon-f(x)\ge0$ για κάθε $x\in[e,\alpha]$ (Σχ. 2-1).



Σχ. 2-1

Είναι $E(\alpha)=\int_e^{\alpha}\left|y_\varepsilon - f(x)\right|dx=$

$$\int_e^{\alpha}\left(\frac{1}{e}x-\ln x\right)dx=\frac{1}{e}\int_e^{\alpha}xdx-\int_e^{\alpha}\ln xdx=$$

$$\frac{1}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^{\alpha}-\int_e^{\alpha}(x)'\ln xdx=$$

$$\frac{1}{2e}\left(\alpha^2-e^2\right)-\left[x\ln x\right]_e^{\alpha}+1(\alpha-e)=$$

$$\frac{1}{2e}\left(\alpha^2-e^2\right)-\left(\alpha\ln\alpha-e\ln e\right)+1(\alpha-e)=$$

$$\frac{1}{2e}\alpha^2-\frac{e}{2}-\alpha\ln\alpha+e+\alpha-e=\boxed{\frac{1}{2e}\alpha^2-\alpha\ln\alpha+\alpha-\frac{e}{2}}$$

i. $E'(\alpha)=\frac{1}{e}\alpha-\ln\alpha,\alpha\in(e,+\infty)$

Για κάθε $\alpha>e$ ισχύει $\ln\alpha<\alpha-1$ (2). Αντικαθιστούμε στη (2) το α με το e^{α} και έχουμε $\ln e^{\alpha}<e^{\alpha}-1\Leftrightarrow\alpha<e^{\alpha}-1\Leftrightarrow e^{\alpha}>\alpha+1$.

$E''(\alpha)=\frac{1}{e}-\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha-e}{e\alpha}>0$. Άρα η $E'(\alpha)$ γνησίως αύξουσα στο $(e,+\infty)$.

Άρα $E'\left(e^{\alpha}\right)>E'(\alpha+1)\Rightarrow E'(\alpha+1)<e^{\alpha-1}-\alpha$

ii. $A=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{e}\alpha-\ln\alpha}{\eta\mu\alpha+\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{e}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}}{\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}+1}=\dfrac{\frac{1}{e}-0}{0+1}=\dfrac{1}{e}$

Διότι: $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{(\ln\alpha)'}{(\alpha)'}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}=0$.

$$\left|\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}\right|=\frac{|\eta\mu\alpha|}{|\alpha|}\overset{\alpha>0}{=}\frac{|\eta\mu\alpha|}{\alpha}\leq\frac{1}{\alpha}\Leftrightarrow-\frac{1}{\alpha}\leq\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}\leq\frac{1}{\alpha}$$

και αφού $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}=0$. Άρα $A=\frac{1}{e}$.

Θέμα 5ο: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,3]$ με $f(2)\neq0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=5\left(\int_1^3 f^{2024}(x)dx\right)x^4+2x-1.$$

i. Δείξτε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ στο $(0,+\infty)$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

ii. Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_g, τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x=\rho$, όπου ρ η θετική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$, να δείξετε ότι:

$$-3\rho^2+4\rho>0\ \textbf{και}\ E(\Omega)<\frac{4}{15}.$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της g είναι το R.

i. Έχουμε $f^{2024}(x)\geq0$ για κάθε $x\in[1,3]$. Αφού $f(2)\neq0$ η f^{2024} δεν είναι παντού μηδέν στο $[1,3]$, επομένως $\int_1^3 f^{2024}(x)dx>0$.

Η g είναι συνεχής και $g(0)=-1<0$ και $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}\int_1^3 f^{2024}(x)dx>0$. Άρα $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$g'(x)=20\left(\int_1^3 f^{2024}(x)dx\right)x^3+2.$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g'(x)>0$, οπότε στο $(0,+\infty)$ η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα το ρ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο $(0,+\infty)$.

ii. Από το ερώτημα (i) είναι

$$g(\rho)=0\Leftrightarrow\ 5\left(\int_1^3 f^{2024}(x)dx\right)\rho^4+2\rho-1=0\Leftrightarrow$$

$$\int_1^3 f^{2024}(x)dx=\frac{1-2\rho}{5\rho^4}\quad(1).$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $-3x^2+4x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-3x^2+4x$	$-$	0 $+$	0	$-$

Είναι $0<\rho<\frac{1}{2}$, οπότε $-3\rho^2+4\rho>0$.

Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έχουμε:

$$0\leq x\leq\rho\Rightarrow g(0)\leq g(x)\leq g(\rho)\Rightarrow g(x)\leq0.$$

Είναι: $E(\Omega)=\int_0^{\rho}\left|g(x)\right|dx=-\int_0^{\rho}g(x)dx=$

$$-\int_0^{\rho}\left[5\left(\int_1^3 f^{2024}(x)dx\right)x^4+2x-1\right]dx=$$

$$-5\left(\int_1^3 f^{2008}(x)dx\right)\int_0^{\rho}x^4dx-\int_0^{\rho}(2x-1)dx=$$

$$-5\left(\int_1^3 f^{2024}(x)dx\right)\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\rho}-\left[x^2-x\right]_0^{\rho}=$$

$$-\left(\int_1^3 f^{2024}(x)dx\right)\rho^5-\rho^2+\rho\overset{(1)}{=}$$

$$-\frac{\rho-2\rho^2}{5}-\rho^2+\rho=\frac{-3\rho^2+4\rho}{5}$$ τετρ.μονάδες.

Επειδή $\alpha=-3<0$, το τριώνυμο $-3x^2+4x$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή για

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{2}{3} \text{ την } -\frac{\Delta}{4\alpha}=\frac{4}{3}.$$

Άρα $-3x^2+4x\le\frac{4}{3}$ (2) για κάθε $x\in R$.

Για $x=\rho$ ($\rho\ne\frac{2}{3}$) από την (2) παίρνουμε:

$$-3\rho^2+4\rho<\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{-3\rho^2+4\rho}{5}<\frac{4}{15}\Rightarrow E(\Omega)<\frac{4}{15}.$$

Θέμα 6^{o}: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

α. i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της C_f.

iii. Να βρείτε αν υπάρχουν τις ασύμπτωτες της C_f.

β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος α να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

γ. i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση $F(x)=\frac{\alpha\ln x+\beta}{x}$ να είναι παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ την C_f και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$, με $\alpha>1$.

iii. Όταν το α αυξάνεται με ρυθμό $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$ cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ii ερωτήματος τη χρονική στιγμή που $\alpha=2e$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(0,+\infty)$.

α. i. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

Είναι: $f'(x)\ge0\Leftrightarrow1-2\ln x\ge0\Leftrightarrow$

$$\ln x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow0<x\le\sqrt{e}.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ 0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(\sqrt{e})$ ολ. μεγ.	↘	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\sqrt{e}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{e},+\infty)$ και για $x=\sqrt{e}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$.

ii. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\cdots=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$ και $f''(x)\ge0\Leftrightarrow-5+6\ln x\ge0\Leftrightarrow$ $\ln x\ge\frac{5}{6}\Leftrightarrow x\ge\sqrt[6]{e^5}$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ 0		$\sqrt[6]{e^5}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$		∩	$f(\sqrt[6]{e^5})$ ΣΚ	∪	

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,\sqrt[6]{e^5}]$, κυρτή στο $[\sqrt[6]{e^5},+\infty)$ και το σημείο $B\left(\sqrt[6]{e^5},f\left(\sqrt[6]{e^5}\right)\right)=\left(\sqrt[6]{e^5},\frac{5}{6e\sqrt[3]{e^2}}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

iii. • $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)=-\infty$. Άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

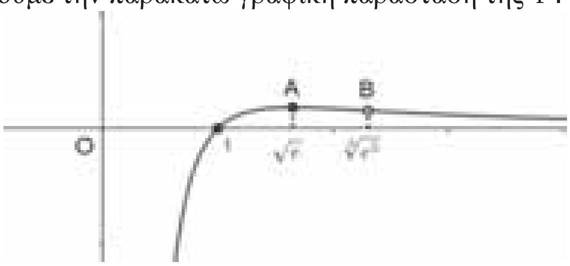
• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$.

Άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β. Με βάση το ερώτημα α έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της f.

x	$-\infty$ 0		$\sqrt{e}$		$\sqrt[6]{e^5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$-$		$+$	
$f(x)$		$0 \nearrow f(\sqrt[6]{e^5}) \searrow f(\sqrt{e}) \searrow 0$ ολ.μεγ. Σ.Κ					

Με τη βοήθεια του πίνακα μεταβολών της f έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση της f.



Σχ.5

γ. $D_F=(0,+\infty)$.

i. Η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x)=\frac{\alpha-\beta-\alpha\ln x}{x^2}.$$

Η F είναι παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ όταν για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$-\alpha\ln x+\alpha-\beta=\ln x\Leftrightarrow(\alpha+1)\ln x+\beta-\alpha=0$

Για $x=1$, $(\alpha+1)\ln 1+\beta-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$

Για $x=e$, $(\alpha+1)\ln e+\beta-\alpha=0\Leftrightarrow\beta=-1$

Άρα $\alpha=\beta=-1$. Άρα $F(x)=\dfrac{-\ln x-1}{x}$.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,\alpha]$ με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[1,\alpha]$, οπότε:

$$E(\alpha)=\int_1^\alpha|f(x)|dx=\int_1^\alpha f(x)dx\overset{(\gamma,i)}{=}\left[F(x)\right]_1^\alpha=$$

$$F(\alpha)-F(1)=\frac{-\ln\alpha-1}{\alpha}+1$$

Άρα, $E(\alpha)=\dfrac{-\ln\alpha+\alpha-1}{\alpha}$ τετρ. μονάδες.

iii. $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{(\ln\alpha)'}{(\alpha)'}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}=0$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1\right)=1.$$

Την τυχαία χρονική στιγμή t έχουμε

$$E(t)=\frac{-\ln\alpha(t)+\alpha(t)-1}{\alpha(t)}.$$

$$E'(t)=\frac{\left(-\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}+\alpha'(t)\right)\alpha(t)-\alpha'(t)\left(-\ln\alpha(t)+\alpha(t)-1\right)}{\alpha^2(t)}$$

$=\dfrac{\alpha'(t)\ln\alpha(t)}{\alpha^2(t)}$. Είναι $\alpha'(t)=1\,\dfrac{cm}{sec}$ και αν t_0 η χρονική στιγμή που είναι $\alpha(t_0)=2e\,cm$, τότε ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι

$$E'(t_0)=\frac{\alpha'(t_0)\ln\alpha(t_0)}{\alpha^2(t_0)}=\frac{\ln(2e)}{4e^2}\,\frac{cm^2}{sec}\Leftrightarrow$$

$$E'(t_0)=\frac{\ln 2+1}{4e^2}\,\frac{cm^2}{sec}.$$

Θέμα 7ο: Η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in[2,+\infty)$ ισχύει:

$$(x-2)f'(x)=f(x)+(x-2)^2e^{-x},\ (1).$$

Επιπλέον η ευθεία $\varepsilon: y=x-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(4,f(4))$ διαπερνά την C_f.

iii. Να βρείτε σημείο Μ της C_f που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την ευθεία ε και να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο Μ είναι παράλληλη της ε.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ε_1 του iii ερωτήματος και την ευθεία $x=4$.

Λύση: Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ έχουμε

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(x-2)f'(x)-f(x)}{(x-2)^2}=e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-2}\right)'=\left(-e^{-x}\right)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x-2}=-e^{-x}+c\Leftrightarrow$$

$$f(x)=-\frac{x-2}{e^x}+c(x-2)$$

όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Επειδή η ευθεία ε είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x-2}{e^x}+(c-1)(x-2)\right]=0\ \ (2).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, αν ήταν $c-1\neq 0$ θα είχαμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-2}{e^x}+(x-2)(c-1)\right]=\pm\infty$$

που είναι άτοπο λόγω της (2). Άρα $c=1$.
Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ είναι

$$f(x)=-(x-2)e^{-x}+x-2\Leftrightarrow f(x)=(x-2)\left(1-e^{-x}\right)$$

Επιπλέον, $f(2)=0$, οπότε

$$f(x)=(x-2)\left(1-e^{-x}\right),\ x\in[2,+\infty).$$

ii. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=e^{-x}(4-x) \text{ για κάθε } x\in[2,+\infty).$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x=4.\ f''(x)>0\Leftrightarrow 2\le x<4.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ 2	4	$+\infty$
$f''(x)$		+ 0 −	
$f(x)$		∪ $f(4)$ ∩ Σ.Κ	

Η f είναι κυρτή στο $[2,4]$ και κοίλη στο $[4,+\infty)$
Άρα στο 4 η f παρουσιάζει καμπή. Συνεπώς το Α είναι σημείο καμπής της C_f, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Α διαπερνά την C_f.

iii. Έχουμε $\varepsilon: x-y-2=0$.
Έστω $M\left(x,f(x)\right)=\left(x,(x-2)(1-e^{-x})\right)$ με $x>2$ σημείο της C_f (το σημείο $(2,0)$ βρίσκεται πάνω στην ε). Η απόσταση του σημείου Μ από την ε είναι $d=\dfrac{\left|x-(x-2)(1-e^{-x})-2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{(x-2)e^{-x}}{\sqrt{2}}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)e^{-x}, x>2$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=(3-x)e^{-x}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=3$. $g'(x)>0\Leftrightarrow 2<x<3$.

Η μονοτονία της g και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Η g παρουσιάζει μέγιστο για $x=3$.

x	$-\infty$ 2	3	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 −	
$g(x)$		↗ $g(3)$ ↘ ολ.μεγ.	

Άρα η απόσταση γίνεται μέγιστη όταν $x=3$, οπότε το σημείο $M(3,f(3))=\left(3,1-e^{-3}\right)$ είναι το σημείο της C_f που έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την ε. Τέλος,

$$f'(x)=1-e^{-x}+(x-2)e^{-x}\Rightarrow f'(3)=1=\lambda_\varepsilon.$$

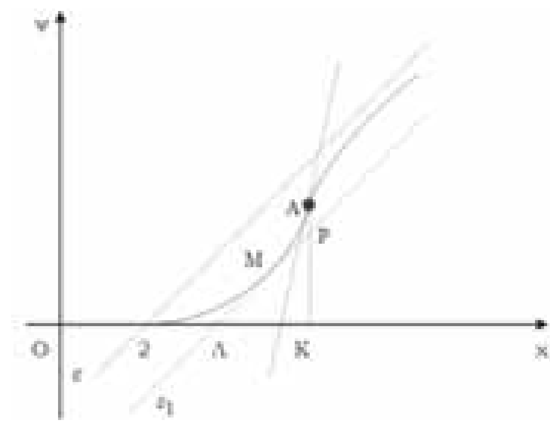
Άρα η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο Μ είναι παράλληλη στην ε.

iv. • Για κάθε $x\in[2,+\infty)$ είναι $f(x)\ge 0$ με $f(2)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>2$.

• Για κάθε $x>2$, $(x-2)>(x-2)\left(1-e^{-x}\right)\Leftrightarrow$

$1>1-e^{-x}$ που ισχύει.

Η C_f βρίσκεται κάτω από την ε εκτός του σημείου $(2,0)$ που είναι κοινό με την ε. Με βάση τα παραπάνω έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχ.6

Είναι $AK\perp x'x$ και Λ το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $x'x$. Έστω Ρ το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με το ΑΚ (Σχ.6) και E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=4$. Για κάθε $x\in[2,4]$ είναι $f(x)\ge 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=E_1-(PK\Lambda)=\int_2^4 f(x)dx-(PK\Lambda)\quad(3).$$

$$\varepsilon_1: y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=x-2-e^{-3}.$$

$$\begin{cases}y=x-2-e^{-3}\\ x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-e^{-3}\\ x=4\end{cases}\Rightarrow P\left(4,2-e^{-3}\right).$$

Για $y=0$ από την εξίσωση της ε_1 παίρνουμε $x=2+e^{-3}$, οπότε $\Lambda\left(2+e^{-3},0\right)$.

$$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4(x-2)(1-e^{-x})dx=$$

$$\int_2^4(x-2)\left(x+e^{-x}\right)'dx=\left[(x-2)\left(x+e^{-x}\right)\right]_2^4-$$

$$\int_2^4 \left(x+e^{-x}\right)dx = 2\left(4+e^{-4}\right)-\left[\frac{x^2}{2}-e^{-x}\right]_2^4 =$$

$$2\left(4+e^{-4}\right)-\left(8-e^{-4}\right)+\left(2-e^{-2}\right)=3e^{-4}-e^{-2}+2.$$

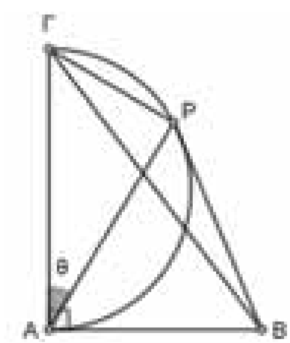
$$(\text{ΚΛ})=(\text{ΟΚ})-(\text{ΟΛ})=4-2-e^{-3}=2-e^{-3}.$$

$$(\text{ΡΚΛ})=\frac{1}{2}(\text{ΚΛ})(\text{ΡΚ})=\frac{1}{2}(2-e^{-3})^2.$$

Άρα $(3) \Leftrightarrow E = 3e^{-4}-e^{-2}+2-\frac{1}{2}(2-e^{-3})^2$ τετρ. μονάδες.

Θέμα 8ο: Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$ με $AB=3$ και $\eta\mu B=\frac{4}{5}$. Με διάμετρο την ΑΓ φτιάχνουμε ημικύκλιο που περιέχεται στη γωνία $\hat{A}$. Αν το Ρ είναι σημείο του ημικυκλίου, διαφορετικό των Α, Γ και $P\hat{A}\Gamma=\theta$, να βρείτε την εφθ για εκείνη τη γωνία θ που το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του σημείου Ρ από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ είναι ελάχιστο.

Λύση



Είναι:

$$\eta\mu B=\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow A\Gamma^2=\frac{16}{25}B\Gamma^2\Leftrightarrow$$

$$25A\Gamma^2=16\left(A\Gamma^2+AB^2\right)$$

$$\Leftrightarrow A\Gamma^2=16\Leftrightarrow A\Gamma=4$$

Είναι $A\hat{P}\Gamma=\frac{\pi}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΓ έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{PA}{A\Gamma}\Leftrightarrow PA=4\sigma\upsilon\nu\theta$ και $P\hat{A}B=\frac{\pi}{2}-\theta$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΡΑΒ έχουμε: $PB^2=PA^2+AB^2-2PA\cdot AB\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow PB^2=16\sigma\upsilon\nu^2\theta+9-24\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΓ είναι

$$P\Gamma^2=A\Gamma^2-PA^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\Gamma^2=16-16\sigma\upsilon\nu^2\theta=16\eta\mu^2\theta$$

Άρα $PA^2+PB^2+P\Gamma^2=16\sigma\upsilon\nu^2\theta+9+$
$+16\sigma\upsilon\nu^2\theta-24\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+16\eta\mu^2\theta=$
$=16\sigma\upsilon\nu^2\theta-24\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+25.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(\theta)=16\sigma\upsilon\nu^2\theta-24\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+25,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(\theta)=-32\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta-24\sigma\upsilon\nu^2\theta+24\eta\mu^2\theta=$$

$$-32\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\varepsilon\varphi\theta-24\sigma\upsilon\nu^2\theta+24\eta\mu^2\theta=$$

$$-32\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}\cdot\varepsilon\varphi\theta-24\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}+24\frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}\Leftrightarrow$$

$$f'(\theta)=\frac{8}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}\left(3\varepsilon\varphi^2\theta-4\varepsilon\varphi\theta-3\right).$$

Αφού $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta>0$.

$$f'(\theta)=0\Leftrightarrow 3\varepsilon\varphi^2\theta-4\varepsilon\varphi\theta-3=0\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{2+\sqrt{13}}{3}\quad(1).$$

Λόγω της (1) υπάρχει γωνία $\theta_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $\varepsilon\varphi\theta_0=\frac{2+\sqrt{13}}{3}$.

$$f'(\theta)=\frac{24}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}\left(\varepsilon\varphi\theta-\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)\left(\varepsilon\varphi\theta-\varepsilon\varphi\theta_0\right).$$

Είναι $\frac{24}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}\left(\varepsilon\varphi\theta-\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)>0$.

Στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση της εφαπτομένης είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων της f.

θ	−∞	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$	+∞
$f'(\theta)$			−	0	+		
$f(\theta)$			$>$	$f(\theta_0)$ ολ.ελαχ.	$<$		

Στη γωνία θ_0 η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$$\varepsilon\varphi\theta_0=\frac{2+\sqrt{13}}{3}.$$

Από παραδρομή, κατά τον διαχωρισμό του άρθρου σε δυο μέρη, ο τελευταίος πίνακας παρείσφρησε και στο προηγούμενο τεύχος, σελ. 56, τ. 3 χωρίς να επηρεάζει το κείμενο.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 399 (ΤΕΥΧΟΣ 125)

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί ώστε $\alpha+\beta+\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν οι αριθμοί είναι μη αρνητικοί, τότε

$$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha\le\frac{4}{27}$$

β. Αν οι αριθμοί είναι θετικοί, τότε

$$\frac{\alpha^2+\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha}{\alpha+\beta}\ge 2$$

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

ΛΥΣΗ Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

α. Έστω α ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς α, β, γ. Τότε, με τη βοήθεια της ανισότητας $A.M.\ge G.M.$ για τους αριθμούς α, $2\beta+\gamma$, $\alpha+\gamma$, έχουμε:

$$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha\le\alpha^2\beta+\alpha\beta\gamma+\frac{1}{2}\gamma^2\alpha+\frac{1}{2}\gamma^2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\alpha(2\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)\le\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+2\beta+\gamma+\alpha+\gamma}{3}\right)^3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

β. Με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha^2+\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left[(\alpha^2+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta^2+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma^2+\alpha)(\alpha+\beta)\right]$$

$$\ge(\alpha^2+\beta+\beta^2+\gamma+\gamma^2+\alpha)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1)^2$$

Επομένως, είναι:

$$\frac{\alpha^2+\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha}{\alpha+\beta}\ge\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1)^2}{(\alpha^2+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta^2+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma^2+\alpha)(\alpha+\beta)}$$

Για την απόδειξη της ζητούμενης σχέσης, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1)^2}{(\alpha^2+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta^2+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma^2+\alpha)(\alpha+\beta)}\ge 2,\text{ ή}$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1)^2\ge 2(\alpha^2+\beta)(\beta+\gamma)+2(\beta^2+\gamma)(\gamma+\alpha)+2(\gamma^2+\alpha)(\alpha+\beta)$$

Αλλά,

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2+2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+1$$

και $2(\alpha^2+\beta)(\beta+\gamma)+2(\beta^2+\gamma)(\gamma+\alpha)+2(\gamma^2+\alpha)(\alpha+\beta)$

$$\ge 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2\alpha^2(1-\alpha)+2\beta^2(1-\beta)+2\gamma^2(1-\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Είναι:

$$1=\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2+2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$\ge 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

δηλαδή αρκεί:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2+2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\ge\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\ (1)$$

Αν θεωρήσουμε $0<\alpha\le\beta\le\gamma$, τότε $\alpha^2\le\beta^2\le\gamma^2$ και από την ανισότητα Chebyshev λαμβάνουμε:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}\le\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}$$

$$\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$$

$$\Rightarrow 2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\ge\frac{2}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\ (2)$$

Τέλος, από την προφανή ανισότητα

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ge\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

εύκολα συμπεραίνουμε ότι αν $\alpha+\beta+\gamma=1$, τότε

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2\ge\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\ (3)$$

Αν προσθέσουμε τις (2) και (3), προκύπτει η (1) που είναι η ζητούμενη.

Σημείωση σύνταξης

Η ανισότητα του Chebyshev

Θεωρούμε δυο διατεταγμένες νιάδες αριθμών

$$x_1,x_2,\dots,x_\nu,\ y_1,y_2,\dots,y_\nu,\ \text{ με}$$

$$x_1\le x_2\le\dots\le x_\nu \text{ και } y_1\le y_2\le\dots\le y_\nu$$

Αν θέσουμε

$$S_{min}=x_1y_\nu+x_2y_{\nu-1}+\dots+x_\nu y_1$$

και $$S_{max}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_\nu y_\nu$$

τότε ισχύουν:

$$\nu S_{min}\le(x_1+x_2+\dots+x_\nu)(y_1+y_2+\dots+y_\nu)\le\nu S_{max}$$

Οι ισότητες ισχύουν ταυτόχρονα και μόνο όταν καθεμιά από τις νιάδες περιέχει αριθμούς ίσους μεταξύ τους.

Σχόλιο

Στην περίπτωση τριάδων (α,β,γ) και (x,y,z) ισχύει:

- Αν οι τριάδες έχουν την ίδια διάταξη, τότε

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\frac{x+y+z}{3}\le\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{3}$$

ή, $(\alpha+\beta+\gamma)(x+y+z)\le 3(\alpha x+\beta y+\gamma z)$

- Αν οι τριάδες έχουν αντίθετη διάταξη, τότε

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\frac{x+y+z}{3}\ge\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{3}$$

ή, $(\alpha+\beta+\gamma)(x+y+z)\ge 3(\alpha x+\beta y+\gamma z)$

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\le 3(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)$$

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι $0\le\alpha\le\beta\le\gamma$ τότε οι τριάδες

$$(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)\ \text{και}\ (\alpha^3,\beta^3,\gamma^3)$$

έχουν την ίδια διάταξη, οπότε από το δεξιό σκέλος της παραπάνω ανισότητας, παίρνουμε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\le 3(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, και Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι ο οποίος στο πρώτο ερώτημα παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση θεωρώντας τη συνάρτηση

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$$

και προσδιορίζοντας την μέγιστη τιμή της μέσω των πολλαπλασιαστών Lagrange.

ΑΣΚΗΣΗ 400 (ΤΕΥΧΟΣ 125)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη του. Ο εγγεγραμμένος κύκλος στο ορθικό τρίγωνο ΔΕΖ εφάπτεται στις πλευρές ΖΕ, ΔΕ και ΔΖ στα σημεία Α΄, Β΄ και Γ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ισχύει $(\text{ΔΕΖ})^2=(\text{ΑΒΓ})(\text{Α΄Β΄Γ΄})$

Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη

ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο

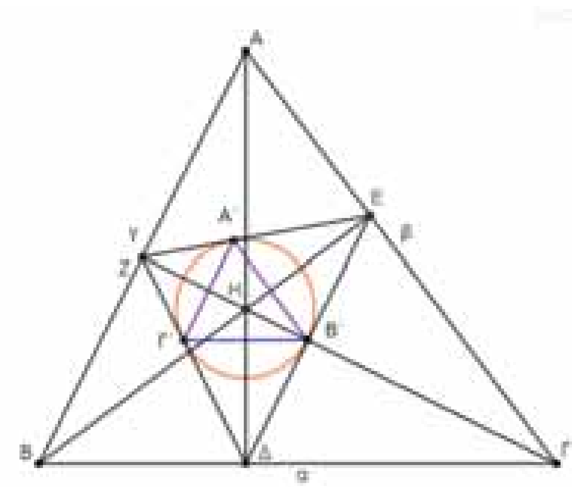
Δεδομένου ότι η γωνία Α είναι κοινή στα τρίγωνα ΑΖΕ και ΑΒΓ, ισχύει

$$\frac{(\text{ΑΖΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΑΖ}\cdot\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}$$

Αντικαθιστώντας στην ισότητα αυτή

$$\text{ΑΒ}=\gamma,\ \text{ΑΓ}=\beta,\ \text{ΑΖ}=\beta\,\text{συν}A\ \text{και}\ \text{ΑΕ}=\gamma\,\text{συν}A$$

έχουμε: $\dfrac{(\text{ΑΖΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\text{συν}^2A$.



Ομοίως βρίσκουμε

$$\frac{(\text{ΒΖΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\text{συν}^2B\quad\text{και}\quad\frac{(\text{ΓΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\text{συν}^2\Gamma$$

Με πρόσθεση των τριών ισοτήτων, παίρνουμε:

$$\frac{(\text{ΑΖΕ})+(\text{ΒΖΔ})+(\text{ΓΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\text{συν}^2A+\text{συν}^2B+\text{συν}^2\Gamma$$

$$\Rightarrow\frac{(\text{ΑΒΓ})-(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\text{συν}^2A+\text{συν}^2B+\text{συν}^2\Gamma$$

$$\Rightarrow\frac{(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=1-\text{συν}^2A-\text{συν}^2B-\text{συν}^2\Gamma\ ,\ (1)$$

Έστω R και ρ οι ακτίνες των περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου αντίστοιχα κύκλων του ορθικού τριγώνου ΔΕΖ. Συνεπώς, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του Α΄Β΄Γ΄ θα ισούται με ρ και θα ισχύουν για τα εμβαδά των δύο παραπάνω τριγώνων οι σχέσεις:

$$(\text{ΔΕΖ})=2R^2\text{ημ}\Delta\,\text{ημ}E\,\text{ημ}Z$$

$$\text{και}\ (\text{Α΄Β΄Γ΄})=2\rho^2\text{ημ}A'\text{ημ}B'\text{ημ}\Gamma'\ ,\ (2)$$

Για το ισοσκελές τρίγωνο ΖΓ΄Α΄ ισχύει $ZA'=Z\Gamma'$, οπότε $Z\hat{A}'\Gamma'=90^{\circ}-\dfrac{\hat{Z}}{2}$. Όμοια αποδεικνύεται για το ισοσκελές ΕΑ΄Β΄ ότι $E\hat{A}'B'=90^{\circ}-\dfrac{\hat{E}}{2}$. Έτσι, έχουμε:

$$\hat{A}'=180^{\circ}-Z\hat{A}'\Gamma'-E\hat{A}'B'=\frac{\hat{E}+\hat{Z}}{2}=90^{\circ}-\frac{\hat{\Delta}}{2}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\hat{B}'=90^{\circ}-\frac{\hat{Z}}{2}\quad\text{και}\quad\hat{\Gamma}'=90^{\circ}-\frac{\hat{E}}{2}$$

οπότε η (2) γράφεται:

$$(\mathrm{A'B'\Gamma'})=2\rho^2\sigma\upsilon\nu\frac{\Delta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{Z}{2}$$

και σε συνδυασμό με την (1) παίρνουμε:

$$\frac{(\mathrm{A'B'\Gamma'})}{(\Delta EZ)}=\frac{\rho^2\sigma\upsilon\nu\frac{\Delta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{Z}{2}}{R^2\eta\mu\Delta\eta\mu E\eta\mu Z}=\frac{\rho^2}{8R^2\eta\mu\frac{\Delta}{2}\eta\mu\frac{E}{2}\eta\mu\frac{Z}{2}}$$

Δεδομένου ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{\rho}{R}=4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$\frac{(\mathrm{A'B'\Gamma'})}{(\Delta EZ)}=\frac{\left(4\eta\mu\frac{\Delta}{2}\eta\mu\frac{E}{2}\eta\mu\frac{Z}{2}\right)^2}{8\eta\mu\frac{\Delta}{2}\eta\mu\frac{E}{2}\eta\mu\frac{Z}{2}}=2\eta\mu\frac{\Delta}{2}\eta\mu\frac{E}{2}\eta\mu\frac{Z}{2},\ (3)$$

Για τις γωνίες του ορθικού τριγώνου ισχύουν

$$\hat{\Delta}=180^\circ-2\hat{A},\ \hat{E}=180^\circ-2\hat{B},\ \hat{Z}=180^\circ-2\hat{\Gamma}$$

οπότε η (3) γράφεται:

$$\frac{(\mathrm{A'B'\Gamma'})}{(\Delta EZ)}=2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

Με τη βοήθεια των τύπων αποτετραγωνισμού και μετατροπής αθροίσματος τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο, αποδεικνύεται ότι

$$\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma,\ (4)$$

οπότε, τελικά ο συνδυασμός των (1) και (3) οδηγεί στην

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{(\mathrm{A'B'\Gamma'})}{(\Delta EZ)}\Rightarrow(\Delta EZ)^2=(AB\Gamma)(\mathrm{A'B'\Gamma'})$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι και Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα.

ΑΣΚΗΣΗ 401 (ΤΕΥΧΟΣ 125)

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\le 48$. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha^3+1}}+\sqrt{\frac{1}{\beta^3+1}}+\sqrt{\frac{1}{\gamma^3+1}}\ge 1$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Είναι:

$$4(\alpha^3+1)-(\alpha^2+2)^2=4\alpha^3-\alpha^4-4\alpha^2$$

$$=-\alpha^2(\alpha^2-4\alpha+4)=-\alpha^2(\alpha-2)^2\le 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=2$.
Έτσι, έχουμε:

$$4(\alpha^3+1)\le(\alpha^2+2)^2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\alpha^3+1}}\ge\frac{2}{\alpha^2+2}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^3+1}}\ge\frac{2}{\beta^2+2}\quad\text{και}\quad\frac{1}{\sqrt{\gamma^3+1}}\ge\frac{2}{\gamma^2+2}$$

και με πρόσθεση, παίρνουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{\beta^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma^3+1}}\ge 2\left(\frac{1}{\alpha^2+2}+\frac{1}{\beta^2+2}+\frac{1}{\gamma^2+2}\right)$$

Από την ανισότητα Cauchy – Schwarz έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha^2+2}+\frac{1}{\beta^2+2}+\frac{1}{\gamma^2+2}\ge\frac{(1+1+1)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+6}$$

Επίσης από την ανισότητα του Lagrange

$$(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)$$

έχουμε

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2\le 3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)\le 3\cdot 48$$

δηλαδή $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\le 12$, οπότε

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{\beta^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma^3+1}}\ge 2\cdot\frac{9}{12+6}=1$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha=\beta=\gamma=2$.

2η ΛΥΣΗ Ανδρής Ιωάννης - Αθήνα

Είναι:

$$\alpha^3+1=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)\le\left(\frac{\alpha+1+\alpha^2-\alpha+1}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2}{2}+1\right)^2$$

οπότε

$$\sqrt{\alpha^3+1}\le\frac{\alpha^2}{2}+1\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{\alpha^3+1}}\ge\frac{2}{\alpha^2+2}$$

Από αυτή και τις όμοιες της που προκύπτουν για τους άλλους όρους του αθροίσματος του α΄ μέλους, έχουμε:

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha^3+1}}+\sqrt{\frac{1}{\beta^3+1}}+\sqrt{\frac{1}{\gamma^3+1}}$$

$$\ge 2\left(\frac{1}{\alpha^2+2}+\frac{1}{\beta^2+2}+\frac{1}{\gamma^2+2}\right)\ge 2\frac{9}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+6}$$

Έτσι, για την απόδειξη της ζητούμενης, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\dfrac{18}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+6}\ge 1$ ή, αρκεί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\le 12$ ή,

αρκεί: $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\le 44$

που ισχύει αφού $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \le 48$ και

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \le (\alpha^2)^2+(\beta^2)^2+(\gamma^2)^2 \le 48$

Σημείωση σύνταξης

Η ανισότητα

$$\frac{1}{\alpha^2+2}+\frac{1}{\beta^2+2}+\frac{1}{\gamma^2+2} \ge \frac{9}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+6}$$

που χρησιμοποιήθηκε στη λύση, προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Adreescu

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma} \ge \frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

την οποία έχουμε αναφέρει στο τεύχος 117.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια

ΑΣΚΗΣΗ 402 (ΤΕΥΧΟΣ 126)

Να αποδείξετε ότι τα κοινά σημεία της καμπύλης

$$(C_1): x^4+\kappa x^3y-6x^2y^2-\kappa xy^3+y^4=0,\ \kappa\in\mathbb{R}$$

με τον κύκλο $(C_2): x^2+y^2=1$ είναι κορυφές κανονικού οκταγώνου.

Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια

ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

Έστω φ η γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία που ενώνει την αρχή των αξόνων με ένα κοινό σημείο των C_1 και C_2 και από τον άξονα των x.

Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, οι συντεταγμένες του παραπάνω σημείου μετασχηματίζονται στη μορφή

$$x=\text{συν}\varphi \text{ και } y=\text{ημ}\varphi$$

και το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης ως προς φ, αφού έχουμε:

$$x^4+\kappa x^3y-6x^2y^2-\kappa xy^3+y^4=0$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}^4\varphi+\kappa\text{συν}^3\varphi\text{ημ}\varphi-6\text{συν}^2\varphi\text{ημ}^2\varphi-\kappa\text{συν}\varphi\text{ημ}^3\varphi+\text{ημ}^4\varphi=0$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}^4\theta+\text{ημ}^4\theta+\kappa\text{συν}\theta\text{ημ}\theta(\text{συν}^2\theta-\text{ημ}^2\theta)-6\text{συν}^2\theta\text{ημ}^2\theta=0$$

$$\Leftrightarrow (\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta)^2-8\text{συν}^2\theta\text{ημ}^2\theta+\kappa\text{συν}\theta\text{ημ}\theta\text{συν}2\theta=0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\text{ημ}^2 2\theta+\frac{\kappa}{4}\cdot 2\text{ημ}2\theta\text{συν}2\theta=0$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}4\theta+\frac{\kappa}{4}\text{ημ}\theta=0 \Leftrightarrow \text{σφ}4\theta=-\frac{\kappa}{4}$$

$$\Leftrightarrow \varphi=\frac{\nu\pi}{4}+\frac{1}{4}\text{τοξσφ}\left(-\frac{\kappa}{4}\right),\ \nu\in\mathbb{Z}$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι οι ακτίνες που ενώνουν την αρχή των αξόνων με κάθε σημείο τομής των C_1 και C_2 σχηματίζουν με τον άξονα των x οκτώ (8) διακριτές γωνίες για τιμές του ν από 0 έως και 7, η καθεμία από τις οποίες ανήκει στο διάστημα (0, 2π) και σχηματίζει γωνία με την επόμενή της ίση με $\frac{\pi}{4}$. Συνεπώς τα σημεία τομής είναι κορυφές κανονικού οκταγώνου. Για $\nu>7$ ή $\nu<0$ θα έχουμε προφανώς σύμπτωση με ένα από τα προηγούμενα σημεία.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 403 (ΤΕΥΧΟΣ 126)

Έστω ΑΒΓ σκαληνό τρίγωνο ΑΔ, ΒΖ, ΓΚ οι διχοτόμοι και ΑΕ, ΒΗ, ΓΛ οι εξωτερικές διχοτόμοι του. Ο κύκλος C_α με διάμετρο ΔΕ ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος για την πλευρά ΒΓ, ο κύκλος C_β με διάμετρο ΖΗ ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος για την πλευρά ΑΓ και ο κύκλος C_γ με διάμετρο ΚΛ ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος για την πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $\hat{A}=60^o$, τότε οι κύκλοι $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$ τέμνονται στο Ε.

β. Αν $\hat{A}=120^o$, τότε οι κύκλοι $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$ τέμνονται στο Δ.

γ. Αν O_β, O_γ είναι τα κέντρα των κύκλων C_β, C_γ αντίστοιχα, τότε $A\hat{\Gamma}O_\gamma=\hat{B}$ και $A\hat{B}O_\beta=\hat{\Gamma}$.

δ. Αν $\hat{A}=90^o$ τότε η ευθεία ΒΓ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_β, C_γ.

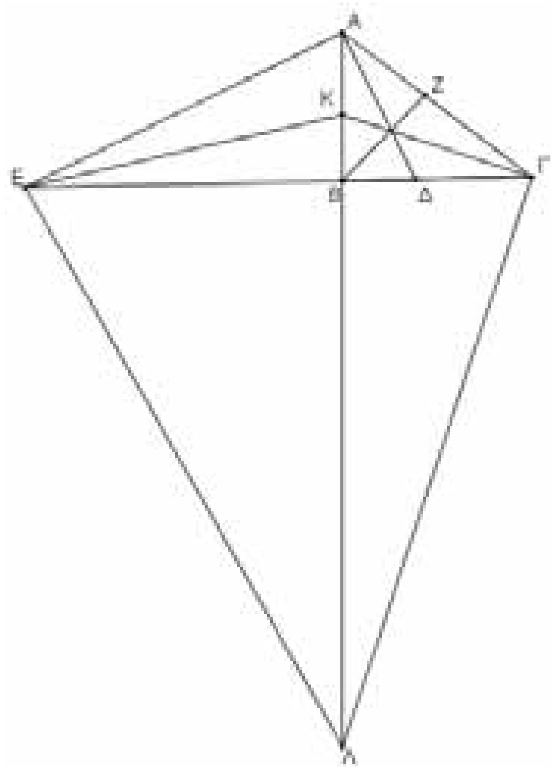
Κοντογιάννης Δ. Γιώργος – Αθήνα.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

α. Ισχύει $\Delta\hat{A}E=90^o$. Όμως $\hat{A}=60^o$, οπότε $B\hat{A}E=60^o$, άρα η ΑΒ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΕΑΓ και ισχύει

$$\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{BE}{B\Gamma}\Rightarrow\frac{AE}{BE}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}\Rightarrow\frac{AE}{BE}=\frac{AK}{BK}=\frac{A\Lambda}{B\Lambda}$$

Αυτό σημαίνει ότι στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΕΚ είναι διχοτόμος και η ΕΛ είναι εξωτερική διχοτόμος, οπότε $K\hat{E}\Lambda=90^o$. Άρα το Ε είναι σημείο του κύκλου $C_γ$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το Ε είναι σημείο του κύκλου $C_β$.



β. Η απόδειξη είναι ίδια με του ερωτήματος **α.**

Παρατηρήσεις

i. Τα σημεία τομής των κύκλων $C_α, C_β, C_γ$ ονομάζονται ισοδυναμικά σημεία του τριγώνου ΑΒΓ και έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

ii. Ισχύουν τα αντίστροφα των προηγούμενων ερωτημάτων, δηλαδή αν οι κύκλοι $C_α, C_β, C_γ$ τέμνονται στο Ε (αντ. στο Δ), τότε $\hat{Α}=60^o$ (αντ. $\hat{Α}=120^o$).

γ. Το $Ο_γ$ είναι το μέσο του ΚΛ. Στο τρίγωνο ΒΓΚ η γωνία ΑΚΓ είναι εξωτερική, άρα $Α\hat{Κ}Γ=\hat{Β}+\frac{\hat{Γ}}{2}$,

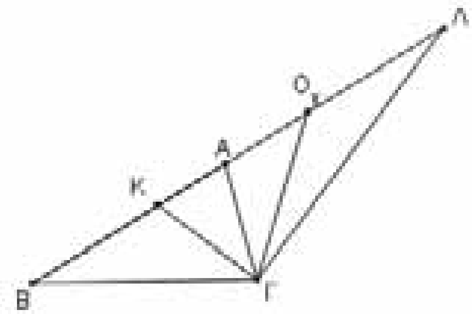
οπότε $Γ\hat{Κ}Ο_γ=\hat{Β}+\frac{\hat{Γ}}{2}$.

Επιπλέον, $Κ\hat{Γ}Λ=90^o$ οπότε $ΓΟ_γ=ΚΟ_γ$, άρα το τρίγωνο $Ο_γ$ΚΓ είναι ισοσκελές.

Έτσι, έχουμε $Κ\hat{Γ}Ο_γ=Γ\hat{Κ}Ο_γ=\hat{Β}+\frac{\hat{Γ}}{2}$, οπότε

$$Α\hat{Γ}Ο_γ=Κ\hat{Γ}Ο_γ-Κ\hat{Γ}Α=\hat{Β}+\frac{\hat{Γ}}{2}-\frac{\hat{Γ}}{2}=\hat{Β}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $Α\hat{Β}Ο_β=\hat{Γ}$



δ. Αν $\hat{Α}=90^o$, τότε $\hat{Β}+\hat{Γ}=90^o$, οπότε από το ερώτημα **β.** έχουμε:

$$Γ\hat{Β}Ο_β=Β\hat{Γ}Ο_γ=\hat{Β}+\hat{Γ}=90^o$$

οπότε η ΒΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου $C_β$ στο σημείο Β και του κύκλου $C_γ$ στο σημείο Γ.

Παρατήρηση

Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η ευθεία ΒΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου $C_β$ ή του $C_γ$, τότε $\hat{Α}=90^o$.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

ΑΣΚΗΣΗ 404 (ΤΕΥΧΟΣ 126)

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$συν\frac{Α-Β}{2}+συν\frac{Β-Γ}{2}+συν\frac{3(Α+Γ)}{2}=\frac{3}{2}$$

να βρείτε τις γωνίες του.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ Ανδρής Ιωάννης - Αθήνα

Η δοθείσα γράφεται:

$$συν\frac{Α-Β}{2}+συν\frac{Β-Γ}{2}=\frac{1}{2}+1-συν\frac{3(Α+Γ)}{2}$$

$$\Rightarrow 2συν\frac{Α-Γ}{4}συν\frac{Α+Γ-2Β}{4}=\frac{1}{2}+2ημ^2\frac{3(Α+Γ)}{4}$$

$$\Rightarrow 2συν\frac{Α-Γ}{4}συν\frac{π-3Β}{4}=\frac{1}{2}+2ημ^2\frac{3(π-Β)}{4}$$

$$\Rightarrow 2συν\frac{Α-Γ}{4}\left(συν\frac{π}{4}συν\frac{3Β}{4}+ημ\frac{π}{4}ημ\frac{3Β}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+2\left(ημ\frac{3π}{4}συν\frac{π}{4}-συν\frac{3π}{4}ημ\frac{π}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2συν\frac{Α-Γ}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(συν\frac{3Β}{4}+ημ\frac{3Β}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(συν\frac{3Β}{4}+ημ\frac{3Β}{4}\right)\right]^2$$

και αν θέσουμε

$$συν\frac{3Β}{4}+ημ\frac{3Β}{4}=x,\ x\in\mathbb{R}$$

παίρνουμε

$$x^2-\sqrt{2}\text{συν}\frac{A-\Gamma}{4}\cdot x+\frac{1}{2}=0$$

Για την διακρίνουσα Δ της τελευταίας εξίσωσης πρέπει $\Delta\geq 0$.

Είναι:

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow 2\text{συν}^2\frac{A-\Gamma}{4}-2\geq 0\Leftrightarrow \text{συν}^2\frac{A-\Gamma}{4}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}^2\frac{A-\Gamma}{4}=1\Leftrightarrow A-\Gamma=0\Leftrightarrow A=\Gamma$$

Με $A=\Gamma$ η δοσμένη ισότητα γράφεται

$$\text{συν}\frac{A-B}{2}+\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{3}{2}-\text{συν}3A$$

$$\overset{B=\pi-2A}{\Leftrightarrow} 2\text{συν}\frac{3A-\pi}{2}=\frac{3}{2}-\text{συν}3A\Leftrightarrow 2\text{ημ}\frac{3A}{2}+1-2\text{ημ}^2\frac{3A}{2}-\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\text{ημ}^2\frac{3A}{2}-4\text{ημ}\frac{3A}{2}+1=0\Leftrightarrow \text{ημ}\frac{3A}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{3\hat{A}}{2}=30^{\circ}$, οπότε $\hat{A}=20^{\circ}$ και $\hat{B}=140^{\circ}$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια και Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

Λύση στο θέμα 398 που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο τεύχος λάβαμε, μετά το «κλείσιμο» του περιοδικού και από τον συνάδελφο Νερούτσο Κωνσταντίνο – Γλυφάδα.

Προτεινόμενα Θέματα

410. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{R}{\rho}\geq\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\alpha\beta\gamma}$$

όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του.

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

411. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ Στην πλευρά του ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε να είναι $\hat{\Gamma}=2\cdot\Gamma\hat{A}\Delta$. Αν β και γ είναι τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$A\Delta=\frac{\beta}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma+2\gamma^2}$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

412. Έστω $x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε να ισχύει

$$2\text{ημ}^2x+2\text{ημ}^2y=1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$2\text{εφ}x\cdot\text{εφ}y+2\text{εφ}x+2\text{εφ}y<3$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο.

413. Στο επίπεδο θεωρούμε το κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και έστω A_1, A_2 σημεία της ΑΒ, B_1, B_2 σημεία της ΒΓ, Γ_1, Γ_2 σημεία της ΓΔ, Δ_1, Δ_2 σημεία της ΔΕ και E_1, E_2 σημεία της ΕΑ.

Αν καθεμιά από τις τετράδες σημείων (A_1,A_2,B_1,B_2), $(A_1,A_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$, $(B_1,B_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$, $(B_1,B_2,\Delta_1,\Delta_2)$, $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2)$, $(E_1,E_2,\Delta_1,\Delta_2)$ και $(E_1,E_2,\Delta_1,\Delta_2)$ περιέχει ομοκυκλικά σημεία, να αποδείξετε ότι τα σημεία

$$A_1,A_2,B_1,B_2,\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2,E_1,E_2$$

ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Καζακόπουλος Απόστολος – Θεσσαλονίκη.

414. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$\alpha(\alpha-12)\leq\beta(16-\beta)-99$$

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A=|3\alpha+4\beta-3|+\left|\frac{5}{3}\alpha-\beta-\frac{9}{5}\right|$$

Τζαφέρης Σωτήρης – Πετρούπολη.

415. Δίνεται η εξίσωση $x^3-\alpha x^2+\beta x-\alpha=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει πραγματικές ρίζες, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A=\frac{2\alpha^3-3\alpha\beta+3\alpha}{\beta+1}$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον.

Διόρθωση αβλεψίας. Στο Θέμα 405 από αβλεψία στην πληκτρολόγηση, έχει γραφεί $P(13)=4160$, αντί του ορθού $P(13)=41160$. Ευχαριστούμε τους συναδέλφους για την επισήμανση.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Τα διανύσματα στην υπηρεσία της άλγεβρας και της τριγωνομετρίας

Νίκος Ζέρβας - Λάρισα

1) Να λυθεί η εξίσωση $\left|\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-6x+10}\right|=\sqrt{5}$

Λύση

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x-1,2)$, $\vec{\beta}=(x-3,1)$, $x\in R$ και $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(2,1)$.

Παρατηρούμε ότι: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(x-1)^2+4}=\sqrt{x^2-2x+5}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{(x-3)^2+1}=\sqrt{x^2-6x+10}$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}$.

Τότε η εξίσωση γράφεται: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

Επειδή τα διανύσματα είναι ομόρροπα, θα ισχύει $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & 2\\ x-3 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x=5$. Η τιμή x=5 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης αφού εύκολα διαπιστώνουμε ότι επαληθεύει την εξίσωση.

2) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}|\sigma\upsilon\nu x|+|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\geq 1$**.**

Λύση

Θεωρούμε τα σημεία Α(συνx,0), Β(0,συνx), Γ(-ημx,0) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Τότε: $\overrightarrow{AB}=(-\sigma\upsilon\nu x,\sigma\upsilon\nu x)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(-\eta\mu x,-\sigma\upsilon\nu x)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x,0)$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$|\overrightarrow{B\Gamma}|\leq|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{A\Gamma}|\Leftrightarrow 1\leq\sqrt{2}\cdot|\sigma\upsilon\nu x|+|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|$$

Παρατηρήστε ότι η ισότητα ισχύει όταν συνx=0,δηλαδή όταν τα σημεία Α,Β,Γ δεν ορίζουν τρίγωνο.

3) Να λύσετε την εξίσωση $\left|\sqrt{3}\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x\right|=2\sqrt{3}$**.**

Λύση

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)$, $\vec{\beta}=(\sqrt{3},3)$, $x\in R$

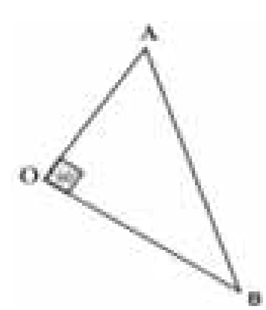
Για τα οποία είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\sqrt{3}\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x$, $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Η εξίσωση, τότε, ισοδύναμα γράφεται $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ η οποία ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, δηλαδή όταν

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\alpha})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x\\ \sqrt{3} & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=k\cdot\pi+\frac{\pi}{6},\kappa\in Z$$

4) Αν κμ+λν=0 αποδείξτε ότι $\sqrt{(\kappa-\mu)^2+(\mu-\nu)^2}>\dfrac{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}+\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{2}$ **με** $\kappa,\lambda,\mu,\nu\in R$**.**

Λύση



Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Ο(0,0) θεωρούμε τα σημεία Α(κ,λ) και Β(μ,ν).

Τότε είναι:

$\overrightarrow{OA}=(\kappa,\lambda)$ και $\overrightarrow{OB}=(\mu,\nu)$ τα οποία έχουν εσωτερικό γινόμενο

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\kappa\cdot\mu+\lambda\cdot\nu=0$, που σημαίνει πως τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.
Το τρίγωνο ΟΑΒ ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ και συνεπώς:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|>\left|\overrightarrow{OA}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(\kappa-\mu)^2+(\lambda-\nu)^2}>\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}\ \ (1)\ \text{και}\ \left|\overrightarrow{AB}\right|>\left|\overrightarrow{OB}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(\kappa-\mu)^2+(\lambda-\nu)^2}>\sqrt{\mu^2+\nu^2}\ \ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη.
Σχόλιο: Η προηγούμενη ανισότητα ισχύει και με την ισχυρότερη προϋπόθεση κμ+λν ≤ 0 (γιατί;).

5) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης Α= $\sqrt{x+6}+\sqrt{12-x}$, $x\in R$.

Λύση
Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{x+6},\sqrt{12-x}\right)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ για τα οποία είναι:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\sqrt{x+6}\cdot1+\sqrt{12-x}\cdot1=A,\quad \left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{\sqrt{x+6}^2+\sqrt{12-x}^2}=\sqrt{x+6+12-x}=\sqrt{18},\ \left|\vec{\beta}\right|=\sqrt{2}$$

Τότε είναι $A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leq\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|=\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{36}=6$, δηλαδή $A\leq6,\forall x\in R$.
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν η παράσταση Α μπορεί να πάρει την τιμή 6. Γι' αυτό θα λύσουμε την εξίσωση Α=6.

$$A=6\Leftrightarrow\sqrt{x+6}+\sqrt{12-x}=6\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=3$$

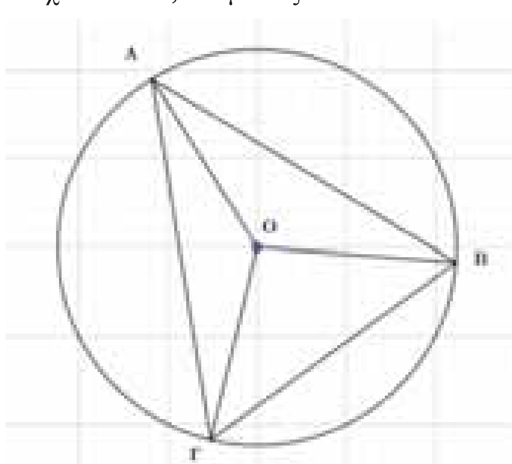
Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης Α είναι το 6 για x=3.

6) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι ισχύει συν2Α+συν2Β+συν2Γ $\geq-\frac{3}{2}$.

Λύση
Εστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρής που βαίνουν στο ίδιο τόξο,θα ισχύουν:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=2\hat{\Gamma},\quad\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}}\right)=2\hat{A},\quad\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma}}\right)=2\hat{B}$$

Η σχέση $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\right)^2\geq0$ ισχύει πάντα, επομένως:



$$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{O\Gamma}^2+2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}+2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}\geq0\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{O\Gamma}^2+2\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu2\Gamma+2\cdot\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu2A+2\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu2B\geq0\Leftrightarrow$$

$$R^2+R^2+R^2+2R^2\cdot\sigma\upsilon\nu2\Gamma+2R^2\cdot\sigma\upsilon\nu2A+2R^2\cdot\sigma\upsilon\nu2B\geq0\Leftrightarrow$$

$$2R^2\cdot\left(\sigma\upsilon\nu2A+\sigma\upsilon\nu2B+\sigma\upsilon\nu2\Gamma\right)\geq-3R^2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu2A+\sigma\upsilon\nu2B+\sigma\upsilon\nu2\Gamma\geq-\frac{3}{2}$$

Η τριγωνομετρική μέθοδος

Γιώργος Τσαπακίδης **Βαγγέλης Καζάζης,** μαθητής Β΄ Λυκείου, Θεσσαλονίκη

Η τριγωνομετρική μέθοδος λύνει αλγεβρικά προβλήματα με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται, όταν στο αλγεβρικό πρόβλημα εμφανίζεται κάποια από τις παραστάσεις:

α. $\sqrt{1-x^2}$, τότε πρέπει $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, οπότε υπάρχει $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x=\eta\mu\theta$

ή $\theta \in [0,\pi]$ με $x=\sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε:

$\cdot \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=|\sigma\upsilon\nu\theta|$
$\cdot \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\sqrt{\eta\mu^2\theta}=|\eta\mu\theta|$

β. $4x^3-3x$ και $|x| \leq 1$. Επειδή $\sigma\upsilon\nu 3\theta=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta$, θέτουμε $x=\sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε

$4x^3-3x=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu 3\theta$.

γ. $\frac{x}{1-x^2}$, επειδή $\varepsilon\varphi 2\theta=\frac{2\varepsilon\varphi\theta}{1-\varepsilon\varphi^2\theta}$, θέτουμε $x=\varepsilon\varphi\theta$ με $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε

$\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\frac{2\varepsilon\varphi\theta}{1-\varepsilon\varphi^2\theta}=\frac{1}{2}\varepsilon\varphi 2\theta$. Με αντιστροφή της προηγούμενης ισότητας παίρνουμε:

$$\frac{x^2-1}{x}=-\frac{2}{\varepsilon\varphi 2\theta}=-2\sigma\varphi 2\theta \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=-2\sigma\varphi 2\theta \text{ με } \theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$$

δ. $\frac{x}{1+x^2}$, επειδή $\frac{\varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}=\frac{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{1+\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}=\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta$, θέτουμε $x=\varepsilon\varphi\theta$ με

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta$. Με αντιστροφή της προηγούμενης ισότητας παίρνουμε:

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{2}{\eta\mu 2\theta} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{2}{\eta\mu 2\theta} \text{ με } \theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$$

ε. $x+y+z=xyz$ και $x,y,z>0$, θέτουμε $x=\varepsilon\varphi\alpha$, $y=\varepsilon\varphi\beta$ και $z=\varepsilon\varphi\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $x+y+z=xyz \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=$ $-\varepsilon\varphi\alpha(1-\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}=-\varepsilon\varphi\alpha$(γιατί $1-\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma \neq 0$, αφού αν ήταν

$1-\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma=0$ (1), τότε η $\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma=-\varepsilon\varphi\alpha(1-\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma)$ θα έδινε $\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma= \; =$ $0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\beta=-\varepsilon\varphi\gamma$, οπότε (1) $\Leftrightarrow 1+\varepsilon\varphi^2\gamma=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\gamma=-1$, άτοπο) $\Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\beta+\gamma)=$ $\varepsilon\varphi(-\alpha) \Leftrightarrow \beta+\gamma=\kappa\pi-\alpha \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\kappa\pi$ (2)

Όμως $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0<\kappa\pi<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0<\kappa<\frac{3}{2} \Leftrightarrow k=1$(αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$).

Επομένως: Αν $x+y+z=xyz$ με $x,y,z>0$, τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $x=$

$\varepsilon\varphi\alpha, y = \varepsilon\varphi\beta, z = \varepsilon\varphi\gamma$, τέτοιοι, ώστε $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $\mathbf{x, y, z \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$ και $\mathbf{x + y + z = xyz}$, δείξτε ότι:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

Απόδειξη

Δουλεύουμε με τις αντικαταστάσεις που είδαμε στα (γ),(ε):
θέτουμε $x = \varepsilon\varphi\alpha, y = \varepsilon\varphi\beta$ και $z = \varepsilon\varphi\gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Αφού $x + y + z = xyz$, θα είναι $\alpha + \beta + \gamma = \kappa\pi \Longrightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\kappa\pi \Longrightarrow 2\alpha + + 2\beta = 2\kappa\pi - 2\gamma \Longrightarrow \varepsilon\varphi(2\alpha + 2\beta) = \varepsilon\varphi(2\kappa\pi - 2\gamma) \Longrightarrow \frac{\varepsilon\varphi2\alpha+\varepsilon\varphi2\beta}{1-\varepsilon\varphi2\alpha\varepsilon\varphi2\beta} = -\varepsilon\varphi2\gamma \Longrightarrow \varepsilon\varphi2\alpha + \varepsilon\varphi2\beta = -\varepsilon\varphi2\gamma + \varepsilon\varphi2\alpha\varepsilon\varphi2\beta\varepsilon\varphi2\gamma \Longrightarrow \varepsilon\varphi2\alpha + \varepsilon\varphi2\beta + \varepsilon\varphi2\gamma = \varepsilon\varphi2\alpha\varepsilon\varphi2\beta\varepsilon\varphi2\gamma \Longrightarrow \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} + \frac{2\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\beta} + \frac{2\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi^2\gamma} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}\frac{2\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\beta}\frac{2\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi^2\gamma} \Longrightarrow \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} + + \frac{2\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\beta} + \frac{2\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi^2\gamma} = \frac{4\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}{(1-\varepsilon\varphi^2\alpha)(1-\varepsilon\varphi^2\beta)(1-\varepsilon\varphi^2\gamma)} \Longrightarrow \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$, που είναι το ζητούμενο.

2. Έστω $\mathbf{\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)}$, διαφορετικοί ανά δύο. Δείξτε ότι για δύο από τους $\mathbf{\alpha, \beta, \gamma}$, έστω τους $\mathbf{\alpha, \beta}$, ισχύει: $\mathbf{0 < \alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2} < \frac{1}{2}}$

Απόδειξη

Χωρίζουμε το (0,1) στα υποδιαστήματα $\left(0, \frac{1}{2}\right], \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Δύο, τουλάχιστον, απο τους α, β, γ, έστω οι α, β, ανήκουν σε ένα από τα δύο προηγούμενα υποδιαστήματα και χωρίς να βλάπτουμε την γενικότητα, υποθέτουμε ότι $\alpha > \beta$. Αν $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, τότε $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ και $0 < \beta < \frac{1}{2}$, επομένως θα υπάρχουν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ και $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ με $\alpha = \eta\mu\theta$ και $\beta = \eta\mu\omega$, οπότε η αποδεικτέα γράφεται: $0 < \eta\mu\theta\sqrt{1-\eta\mu^2\omega} - \eta\mu\omega\sqrt{1-\eta\mu^2\theta} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu(0) < \eta\mu(\theta - \omega) < \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < \theta - \omega < \frac{\pi}{6}$, που ισχύει. Όμοια είναι η απόδειξη αν $\alpha, \beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $\mathbf{\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x}$ (1).

Λύση

Για να ορίζεται η εξίσωση θα πρέπει $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Γιά $-1 \leq x \leq 1$ υπάρχει $\theta \in [0, \pi]$ με $x = \sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 4\sigma\upsilon\nu^3\theta - 3\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow |\eta\mu\theta| = \sigma\upsilon\nu3\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu3\theta$ (αφού $\eta\mu\theta \geq 0$, όταν $\theta \in [0, \pi]$)$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu3\theta = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Leftrightarrow 3\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \theta$ ή $3\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ή $\theta = \kappa\pi - -\frac{\pi}{4}$ (2).
Είναι $0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \leq \pi$ ή $0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{7}{8}$ ή $\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0{,}1$ ή $\kappa = 1$.
Άρα $\theta = \frac{\pi}{8}$ ή $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ή $\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$, οπότε $x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ ή $x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{8}$ ή $x =$

$-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Είναι $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1+\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\Longrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ και $\eta\mu^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(1--\frac{\sqrt{2}}{2})=$ $\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)\Longrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Επομένως οι λύσεις της (1) είναι οι $x=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ή $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ή $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ το σύστημα:

$$\begin{cases}\mathbf{2x+x^2y=y}\\ \mathbf{2y+y^2z=z}\\ \mathbf{2z+z^2x=x}\end{cases}$$

Λύση

Για $x=1$ η πρώτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $2+y=y\Leftrightarrow 2=0$, άτοπο, άρα $x\neq 1$.

Για $x=-1$ η πρώτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $-2+y=y\Leftrightarrow -2=0$, άτοπο, άρα $x\neq -1$. Όμοια είναι $y,z\neq \pm 1$. Έτσι, το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2}\\ z=\dfrac{2y}{1-y^2}\\ x=\dfrac{2z}{1-z^2}\end{cases}$$

Θέτουμε $x=\epsilon\phi\theta$ με $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $y=\frac{2\epsilon\phi\theta}{1-\epsilon\phi^2\theta}=\epsilon\phi 2\theta, z=\frac{2\epsilon\phi 2\theta}{1-\epsilon\phi^2 2\theta}=\epsilon\phi 4\theta$ και

$x=\frac{2\epsilon\phi 4\theta}{1-\epsilon\phi^2 4\theta}=\epsilon\phi 8\theta\Leftrightarrow \epsilon\phi\theta=\epsilon\phi 8\theta\Leftrightarrow 8\theta=\kappa\pi+\theta\Leftrightarrow\theta=\frac{\kappa\pi}{7},\kappa\in\mathbb{Z}$.
Είναι $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{\kappa\pi}{7}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{7}{2}<\kappa<\frac{7}{2}\Leftrightarrow \kappa=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x,y,z)=\left(\epsilon\phi\frac{\kappa\pi}{7},\epsilon\phi\frac{2\kappa\pi}{7},\epsilon\phi\frac{4\kappa\pi}{7}\right)$ με

$\kappa=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3$.

5. Αν $\mathbf{x,y,z>0}$ και $\mathbf{x+y+z=xyz}$, ποιά είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης:

$$\mathbf{f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}};$$

Λύση

Επειδή $x,y,z>0$ και $x+y+z=xyz$, υπάρχουν $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $x=\epsilon\Phi\alpha, y=\epsilon\phi B, z=\epsilon\phi C$ και $A+B+C=\pi$, οπότε:

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\phi^2 A}}+\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\phi^2 B}}+\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\phi^2 C}}=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu C$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $g'^{(\theta)}=-\eta\mu\theta$ και $g''^{(\theta)}=-\sigma\upsilon\nu\theta<0$

άρα η g είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Έτσι, από ανισότητα Jensen, ισχύει $g(A)+g(B)+g(C)\le 3g\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\Rightarrow \text{συν}A+\text{συν}B+\text{συν}C\le 3\text{συν}\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$, με ισότητα όταν $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

Άρα $f_{max}=\frac{3}{2}$ για $x=y=z=\text{εφ}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

6. Να δείξετε ότι για κάθε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{2}\le\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\le\frac{1}{2}$$

Απόδειξη

Επειδή $x,y\in\mathbb{R}$, θα υπάρχουν $\alpha,b\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $x=\text{εφ}\alpha$ και $y=\text{εφ}b$.

Είναι $x+y=\text{εφ}\alpha+\text{εφ}b=\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}+\frac{\text{ημ}b}{\text{συν}b}=\frac{\text{ημ}\alpha\text{συν}b+\text{ημ}b\text{συν}\alpha}{\text{συν}\alpha\text{συν}b}=\frac{\text{ημ}(\alpha+b)}{\text{συν}\alpha\text{συν}b}$

$1-xy=1-\text{εφ}\alpha\text{εφ}b=1-\frac{\text{ημ}\alpha\text{ημ}b}{\text{συν}\alpha\text{συν}b}=\frac{\text{συν}\alpha\text{συν}b-\text{ημ}\alpha\text{ημ}b}{\text{συν}\alpha\text{συν}b}=\frac{\text{συν}(\alpha+b)}{\text{συν}\alpha\text{συν}b}$

$1+x^2=1+\text{εφ}^2\alpha=\frac{1}{\text{συν}^2\alpha}$ και $1+y^2=1+\text{εφ}^2b=\frac{1}{\text{συν}^2b}$,

οπότε η αποδεικτέα γράφεται ισοδύναμα:

$$-\frac{1}{2}\le\frac{\frac{\text{ημ}(\alpha+b)}{\text{συν}\alpha\text{συν}b}\frac{\text{συν}(\alpha+b)}{\text{συν}\alpha\text{συν}b}}{\frac{1}{\text{συν}^2\alpha}\frac{1}{\text{συν}^2b}}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le\text{ημ}(\alpha+b)\text{συν}(\alpha+b)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$-1\le2\text{ημ}(\alpha+b)\text{συν}(\alpha+b)\le1\Leftrightarrow-1\le\text{ημ}2(\alpha+b)\le1$, που ισχύει.

7. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ το σύστημα:

$$\begin{cases}x-\frac{1}{x}=2y\\ y-\frac{1}{y}=2z\\ z-\frac{1}{z}=2x\end{cases}$$

Λύση

Για να ορίζεται το σύστημα θα πρέπει $x,y,z\neq0$.

Είναι $2\text{σφ}2\alpha=2\frac{\text{σφ}^2\alpha-1}{2\text{σφ}\alpha}=\frac{\text{σφ}^2\alpha-1}{\text{σφ}\alpha}=\text{σφ}\alpha-\frac{1}{\text{σφ}\alpha}$, οπότε θέτουμε

$x=\text{σφ}\alpha$, με $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, έτσι:

$$2y=\text{σφ}\alpha-\frac{1}{\text{σφ}\alpha}=2\text{σφ}2\alpha\Leftrightarrow y=\text{σφ}2\alpha$$

$$2z=\text{σφ}2\alpha-\frac{1}{\text{σφ}2\alpha}=2\text{σφ}4\alpha\Leftrightarrow z=\text{σφ}4\alpha$$

$2x = σφ4α - \frac{1}{σφ4a} = 2σφ8α \Leftrightarrow x = σφ8α$

Έχουμε $x = σφα = σφ8α \Leftrightarrow 8α = κπ + α \Leftrightarrow α = \frac{κπ}{7}$ (1).

Είναι $0 < α < π$ και $α \neq \frac{π}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{κπ}{7} < π$ και $\frac{κπ}{7} \neq \frac{π}{2} \Leftrightarrow 0 < κ < 7$ και $κ \neq \frac{7}{2} \Leftrightarrow κ = 1,2,\dots,6$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x, y, z) = \left(σφ\frac{κπ}{7}, σφ\frac{2κπ}{7}, σφ\frac{4κπ}{7}\right)$ με

$κ = 1,2,\dots,6$.

8. Αν $\mathbf{x, y, z, w > 0}$ και $\frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} + \frac{1}{1+w^4}$, τότε να δείξετε ότι $\mathbf{xyzw \geq 3}$

Απόδειξη

Επειδή $x^2, y^2, z^2, w^2 > 0$, θα υπάρχουν $α, b, c, d \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ με $x^2 = εφα, y^2 = εφb, z^2 == εφc$ και $w^2 = εφd$, οπότε:

$\sum_{cyc} \frac{1}{1+x^4} = 1 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{1+εφ^2α} = 1 \Leftrightarrow \sum_{cyc} συν^2α = 1$ (1).

Από ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου, παίρνουμε:

$ημ^2α = 1 - συν^2α \overset{(1)}{=} συν^2b + συν^2c + συν^2d \geq 3\sqrt[3]{συν^2bσυν^2cσυν^2d}$.
Όμοια έχουμε $ημ^2b \geq 3\sqrt[3]{συν^2ασυν^2cσυν^2d}$, $ημ^2c \geq 3\sqrt[3]{συν^2ασυν^2bσυν^2d}$ και $ημ^2d \geq 3\sqrt[3]{συν^2ασυν^2bσυν^2c}$
Άρα: $ημ^2αημ^2bημ^2cημ^2d \geq 81\sqrt[3]{συν^6ασυν^6bσυν^6cσυν^6d} = 81συν^2ασυν^2bσυν^2cσυν^2d \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (εφα\ εφb\ εφc\ εφd)^2 \geq 81 \Longrightarrow (xyzw)^4 \geq 81 \Longrightarrow xyzw \geq 3$.

9. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται όταν $1 - x \geq 0$ και $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ και $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.
Οπότε υπάρχει $θ \in [0, π]$ με $x = συνθ$ και έτσι $(1) \Leftrightarrow \sqrt{1 - συνθ} = 2συν^2θ - 1 + 2συνθ\sqrt{1 - συν^2θ} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \left(1 - 2ημ^2\frac{θ}{2}\right)} = 2\frac{1+συν2θ}{2} - 1 + 2συνθ\sqrt{ημ^2θ} \Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\frac{θ}{2} = συν2θ + 2συνθημθ \Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\frac{θ}{2} = συν2θ + ημ2θ \Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\frac{θ}{2} = ημ\left(\frac{π}{2} - 2θ\right) + ημ2θ \Leftrightarrow$
$\sqrt{2}ημ\frac{θ}{2} = 2ημ\frac{\frac{π}{2}-2θ+2θ}{2}συν\frac{\frac{π}{2}-2θ-2θ}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\frac{θ}{2} = 2ημ\frac{π}{4}συν\left(\frac{π}{4} - 2θ\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\frac{θ}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}συν\left(\frac{π}{4} - 2θ\right) \Leftrightarrow ημ\frac{θ}{2} = ημ\left(\frac{π}{2} - \left(\frac{π}{4} - 2θ\right)\right) \Leftrightarrow ημ\frac{θ}{2} = ημ\left(\frac{π}{4} + 2θ\right) \Leftrightarrow \frac{θ}{2} = 2kπ + \frac{π}{4} + 2θ$ ή $\frac{θ}{2} = 2kπ - \frac{π}{4} - 2θ \Leftrightarrow θ = \frac{4kπ}{3} - \frac{π}{6}$ ή $θ = \frac{4kπ}{5} + \frac{3π}{10}$ και επειδή $0 \leq x \leq π \Leftrightarrow 0 \leq \frac{4kπ}{3} - \frac{π}{6} \leq π$ ή
$0 \leq \frac{4kπ}{5} + \frac{3π}{10} \leq π \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{7}{8}$ (2)
ή $-\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{7}{8}$ (3).
Η (2) είναι αδύνατη ενώ η (3) δίνει $k = 0$, οπότε $θ = \frac{3π}{10}$ και $x = συν\frac{3π}{10} = συν54° = συν(90° - 36°) = ημ36°$.

Για τον υπολογισμό του ημ36°, θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ABC με $AB = AC = 1$ και $A = 36°$, οπότε $B = C = 72°$. Φέρνουμε την διχοτόμο BD της B και θέτουμε $BD = x$. Από θεώρημα διχοτόμων είναι:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{DC} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Longrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Επίσης, από θεώρημα συνημιτόνων στο ABC προκύπτει:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC\text{συν}36° \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\text{συν}36° \Rightarrow \text{συν}36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$ έτσι $x = \text{ημ}36° = \sqrt{1-\text{συν}^2 36°} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

10. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ το σύστημα $\begin{cases} \mathbf{y = 4x^3 - 3x} \\ \mathbf{z = 4y^3 - 3y} \\ \mathbf{x = 4z^3 - 3z} \end{cases}$

Λύση

Αν ήταν $|x| > 1$, τότε θα είχαμε $|y| = |4x^3 - 3x| = |x||4x^2 - 3| \quad (1)$ $|x| > 1 \Longrightarrow |x|^2 > 1 \Longrightarrow x^2 > 1 \Longrightarrow 4x^2 > 4 \Longrightarrow 4x^2 - 3 > 1 \Longrightarrow |4x^2 - 3| > 1 \Longrightarrow |x||4x^2 - 3| > |x| \quad (2)$.

$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} |y| > |x|$ και με όμοιο τρόπο έχουμε $|z| > |y|$ καθώς και $|x| > |z|$, ώστε $|x| > |z| > |y| > |x|$, το οποίο είναι άτοπο, και άρα $|x| \leq 1$, οπότε θα υπάρχει $\theta \in [0, \pi]$ με $x = \text{συν}\theta$ και έτσι:

$y = 4x^3 - 3x = 4\text{συν}^3\theta - 3\text{συν}\theta = \text{συν}3\theta$, $z = 4y^3 - 3y = 4\text{συν}^3 3\theta - 3\text{συν}3\theta = \text{συν}9\theta$ και $x = 4z^3 - 3z = 4\text{συν}^3 9\theta - 3\text{συν}9\theta = \text{συν}27\theta$.

Έχουμε $x = \text{συν}\theta = \text{συν}27\theta \Leftrightarrow 27\theta = 2k\pi + \theta$ ή $27\theta = 2k\pi - \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{13}$ ή $\theta = \frac{k\pi}{14}$.

Είναι $0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{13} \leq \pi$ ή $0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{14} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 13$ ή $0 \leq k \leq 14$.

Για τις τιμές αυτές προκύπτουν οι λύσεις:

$(x, y, z) = \left(\text{συν}\frac{k\pi}{13}, \text{συν}\frac{3k\pi}{13}, \text{συν}\frac{9k\pi}{13}\right)$ με $k = 0,1,2,\ldots,13$

ή $(x, y, z) = \left(\text{συν}\frac{k\pi}{14}, \text{συν}\frac{3k\pi}{14}, \text{συν}\frac{9k\pi}{14}\right)$ με $k = 0,1,2,\ldots,14$.

Σχόλια: Προφανώς τα θέματα του άρθρου αφορούν τα λεγόμενα "Διαγωνιστικά Μαθηματικά", αφού από τα σχολικά Μαθηματικά έχει εξωβελιστεί το κύριο μέρος της Τριγωνομετρίας, όπως προηγήθηκε το ίδιο και για τη Γεωμετρία.

Ερώτημα: Με αυτή τη διδακτέα ύλη Μαθηματικών, είναι δυνατόν ένας απόφοιτος Λυκείου να παρακολουθήσει πανεπιστημιακά μαθήματα Θετικών Σχολών;

Για να μπορέσει ένας μαθητής να κατανοήσει τη μέθοδο και τα θέματα του άρθρου, είναι αναγκαίο να μελετήσει τουλάχιστον το κεφάλαιο: Τριγωνομετρία, της Άλγεβρας της Β’ Λυκείου

Βιβλιογραφία:

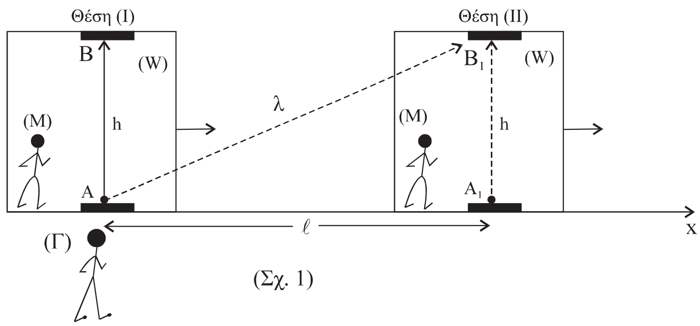
1. T. Andreescu, Z. Feng, 103 Trigonometry Problems, Birkhauser, USA 2005.
2. T. Andreescu, V. Crisam, 115 Trigonometry Problems, XYZ Press, USA 2017.
3. A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer–Verlag, New York 2006.
4. Lee Hojoo, Topics in Inequalities-Theorems and Techniques, Διαδύκτιο 2006.
5. Μ. Μαραγκάκη, Μ.Μεταξάς, Ουσιώδη Μαθηματικά, Τόμος ΙΙ, Dynamic Ideas, Belmant Massachusetts 2013.
6. Γ. Μπαϊλάκης, Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, Αυτοέκδοση, Αθήνα 1988.
7. Ι. Πανάκης, Επίπεδος Τριγωνομετρία, Τόμος Α΄, Αυτοέκδοση, Αθήνα 1974.

Νοητικό πείραμα του Albert Einstein, που οδηγεί στον τύπο του για τη διαστολή του χρόνου

Τσιλιακός Λευτέρης

Παρουσίαση

Ας φανταστούμε ένα φωτονικό βαγόνι (W) κινούμενο σε μια μαγνητική ημιευθεία Αx και με **σταθερή** ταχύτητα $\upsilon_\kappa = \frac{\mu}{\nu} \cdot c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός και $0 < \frac{\mu}{\nu} < 1$ με $\mu,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.



(Σχ. 1)

Έστω ότι στο δάπεδο και στην οροφή του (W) υπάρχουν δύο παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα κάτοπτρα Α και Β με $AB = h$ (Σχ. 1 στη Θέση (Ι)). Σε μια χρονική στιγμή T_0 ένας φωτεινός παλμός φεύγει από το Α και τερματίζει στο Β. Ο χρόνος t_1 που απαιτείται γι' αυτή μετάβαση και για τον **κινούμενο** παρατηρητή που βρίσκεται **μέσα** στο (W) είναι:

$$t_1 = \frac{h}{c} = \frac{h\ \text{m}}{3 \cdot 10^8\ \text{m/sec}} = \frac{h}{3} \cdot 10^{-8}\,\text{sec}.$$

Στο τέλος αυτού του χρόνου (του t_1) το (W) θα βρίσκεται στη θέση (ΙΙ).

Την ίδια χρονική στιγμή T_0 ο **ακίνητος** παρατηρητής (Γ), που βρίσκεται μπροστά στο (W) στη θέση (Ι) και στο σημείο Α θα "δει" την ακτίνα που ξεκινά από το Α να φθάνει στο B_1 διαγράφοντας το πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα $AB_1 = \lambda$ και συγχρόνως το (W) να βρίσκεται στη θέση (ΙΙ).

Έτσι το Β, λόγω της κίνησης του (W) μετατοπίζεται στο B_1 και το Α στο A_1 $(AA_1 = \ell)$.

Πράγματι, για τον (Γ) ισχύει: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$,

δηλαδή για τον (Γ) γίνεται αισθητή η συνισταμένη κίνηση $\overrightarrow{AB_1}$.

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο AA_1B_1 που έχει: $AA_1 = \ell$, $AB_1 = \lambda$ και $A_1B_1 = h$

Ο χρόνος t_2 που χρειάζεται το φως για να διανύσει την απόσταση AB_1 είναι ίσος με τον χρόνο t_3 του κινούμενου βαγονιού (W), που απαιτείται για να διανύσει την απόσταση AA_1. Είναι λοιπόν: $t_2 = t_3 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{c} = \frac{\ell}{\frac{\mu}{\nu} \cdot c} \Leftrightarrow \ell = \frac{\mu}{\nu} \cdot \lambda$ (1) (δείτε σχόλιο 1).

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AA_1B_1 και έχουμε:

$$\lambda^2 - \ell^2 = h^2 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - \frac{\mu^2}{\nu^2}\lambda^2 = h^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{h^2}{1 - \frac{\mu^2}{\nu^2}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\nu^2}}} \qquad (2).$$

Επειδή λ > h, συμπεραίνουμε ότι $t_2 > t_1$.

Υπολογισμός του t_2: $t_2 = \dfrac{\lambda}{c} \overset{(2)}{=\!=} \dfrac{\dfrac{h}{\sqrt{1-\dfrac{\mu^2}{\nu^2}}}}{c} = \dfrac{h}{c} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mu^2}{\nu^2}}} = t_1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mu^2}{\nu^2}}} = t_1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\left(\dfrac{\mu}{\nu}\cdot c\right)^2}{c^2}}}$, δηλαδή

$t_2 = t_1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon_\kappa^2}{c^2}}}$ (3), που είναι ο περίφημος τύπος του A. Einstein για τη διαστολή του χρόνου.

Και από τον (3) φαίνεται αμέσως ότι $t_2 > t_1$. Συγκεκριμένα, για τη μετάβαση του φωτός από το Α στο Β ο κινούμενος παρατηρητής (Μ), μετρά χρόνο t_1 με $t_2 > t_1$.

Για τις εφαρμογές μας αντί του τύπου (3) συμφέρει να χρησιμοποιούμε τον ισοδύναμό του τύπο: $t_2 = t_1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu}{\nu}\right)^2}}$ (4).

Εφαρμογές

Στον επόμενο πίνακα υπολογίζουμε τον χρόνο t_2 που μετρά ο ακίνητος παρατηρητής (Γ) (διαστελλόμενος χρόνος) συναρτήσει το χρόνου t_1, που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής (Μ) (με χρήση του τύπου (4)).

$\frac{\mu}{\nu}$	t_1	t_2
$\frac{1}{1000}$	1 ώρα	1,0000005 ώρες
$\frac{1}{10}$	1 ώρα	1,00504 ώρες
$\frac{4}{5}$	1 έτος	1,67 έτη
$\frac{19}{20}$	2 έτη	6,406 έτη
$\frac{99}{100}$	3 έτη	21,264 έτη
⋮	⋮	⋮

Σχόλιο 1

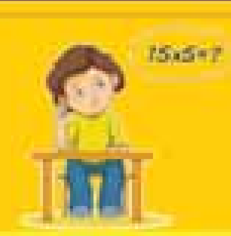
Η ταχύτητα $c = 300000\ \text{km}/\text{sec}$ του φωτός είναι σταθερή, οποιαδήποτε και αν είναι η ταχύτητα της φωτεινής πηγής που το εκπέμπει.

Σχόλιο 2

Ο τύπος (3) (άρα και ο (4)) είναι μία από τις πολλές συνέπειες της **ειδικής** θεωρίας της σχετικότητας, που παρουσίασε στην επιστημονική κοινότητα ο A. Einstein το 1905 σε ηλικία 26 ετών.

Με ό,τι προηγήθηκε, αποδείχτηκε ότι ο χρόνος (και ο χώρος όπως απέδειξε ο Einstein) είναι μεταβαλλόμενοι. Αυτή η ευελιξία οδήγησε τον Einstein στη θεώρηση μιας ενιαίας οντότητας: "το χωροχρόνο".

Η θεωρία της ειδικής σχετικότητας ονομάζεται **ειδική**, επειδή εφαρμόζεται μόνο σε αντικείμενα που κινούνται με σταθερή ταχύτητα. Η επέκταση της ειδικής θεωρίας σε καταστάσεις που έχουν να κάνουν με επιταχύνσεις ή επιβραδύνσεις και με τη βαρύτητα ονομάζεται **γενική** θεωρία της σχετικότητας και ο Einstein την παρουσίασε στην επιστημονική κοινότητα το 1915.



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ο μεγάλος γρίφος: Ο άνθρωπος είναι ένα ανήσυχο λογικό όν, που ουδέποτε θα σταματήσει την αναζήτηση και τη δημιουργία. Πέρασαν πολλές χιλιετίες για να βρεθεί στη σημερινή θέση η ανθρωπότητα δηλαδή στην εποχή του διαστήματος και της Τεχνητής Νοημοσύνης. Μάλιστα οι επιστήμονες διαπίστωσαν ότι οι υπολογιστές γίνονται πολύ **πιο γρήγοροι**, και η τεχνητή νοημοσύνη γρηγορότερη αν τους δώσουν την αρχιτεκτονική που έχει ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Βέβαια αυτό θα ενισχυθεί ακόμα περισσότερο όταν ολοκληρώσουν τον υπέρ-υπολογιστή, τον κβαντικό υπολογιστή. Ο μεγάλος γρίφος τώρα, είναι το εξής ερώτημα:

... **πως θα είναι η ζωή μας με την τεχνητή νοημοσύνη**;

Οι ειδικοί λένε η τεχνητή νοημοσύνη θα κάνει καλύτερη τη ζωή μας. Δεν θα χρειάζεται να οδηγούμε το αυτοκίνητό μας, το αεροπλάνο, το πλοίο, το τρένο, θα τους λέμε που θέλουμε να πάμε και θα μας πηγαίνουν. Θα κρατάμε την ηλεκτρονική μας συσκευή (**το κινητό**) και δεν θα γράφουμε εργασίες, λόγους προεκλογικούς, σχέδια και πίνακες ζωγραφικής θα τους λέμε το θέμα και έγινε, σε όποια γλώσσα θέλουμε. Δεν θα λύνουμε **μαθηματικά προβλήματα** ή άλλα προβλήματα, θα μας τα λύνει η τεχνητή νοημοσύνη. Στα ταξίδια μας σε κάθε τόπο που θα βρεθούμε θα έχουμε άμεση ενημέρωση για την ιστορία του, θα είναι οι ξεναγοί μας. Άρα δεν θα θέλουμε ξεναγούς, οδηγούς, συγγραφείς, ζωγράφους, μαθηματικούς, γιατρούς, όλα θα τα κάνουν τα ρομπότ της τεχνητής νοημοσύνης. Τα **ρομπότ** θα μπορούν ακόμα να κάνουν και άλλα ρομπότ όμοιά τους για όλες τις δουλειές, που θα κατοικούν άλλα στη Γη και άλλα στους πλανήτες. Χρήσιμος θα ήταν και ένας στρατός από ρομπότ της Τεχνητής Νοημοσύνης, που θα πήγαινε και στον πόλεμο, αλλά πόλεμος εναντίον ποιών; Βλέπουμε δηλαδή ότι η εφαρμογή της Τεχνητής Νοημοσύνης σε όλες σχεδόν τις δραστηριότητες του ανθρώπου, έχει πολλά ερωτηματικά και προβληματισμούς για το μέλλον του ανθρώπου. Δηλαδή ο άνθρωπος θα πάψει να παράγει, θα πάψει **να έχει δεξιότητες**, θα πάψει **να σκέφτεται**, θα πάψει να έχει **ελεύθερη βούληση**; Πάντα η ανάπτυξη της τεχνολογίας φόβιζε τον άνθρωπο, ίσως για μια ακόμα φορά να παραμείνουν ρητορικά τα παραπάνω ερωτήματα. Σήμερα διαπιστώνουμε ότι η τεχνολογία αλλάζει πολλές από τις πατροπαράδοτες συνήθειες και δραστηριότητες μας. Αυξάνει τις ικανότητες μας, κάνει ευκολότερη τη ζωή μας, **την επικοινωνία μας**, προσφέρει βοήθεια σε πολλούς τομείς, την μετακίνηση, την ασφάλεια, την διατροφή, κλπ. Τα «**έξυπνα**» **συστήματα**, που βασίζονται στην τεχνητή νοημοσύνη, έχουν ήδη εξαπλωθεί σήμερα σε όλο τον κόσμο και διευκολύνουν την ζωή μας σε πολλά πράγματα όπως στην υγειονομική περίθαλψη, την μετακίνηση, την ασφάλεια, κ.ά. Γιατί να την φοβόμαστε; Έργο του ανθρώπου είναι. Θυμάμαι στις αρχές της δεκαετίας του 1980 είχα μάθει να γράφω προγράμματα, αλλά δεν είχαμε ακόμα υπολογιστές. Όταν κυκλοφόρησαν τα πρώτα PC έδωσα όσα λεφτά είχα, να το αποκτήσω και ασχολήθηκα άπειρες ώρες προγραμματίζοντας τον. Έτσι μεγάλωσα μαζί με την τεχνολογία. Δεν έπαθα κανένα κακό από αυτά που και τότε έλεγαν οι άνθρωποι από άγνοια και φόβο για το καινούργιο. Βέβαια καθημερινά βλέπουμε και **ανεπιθύμητες πρακτικές** με την **παράνομη χρήση της τεχνολογίας**. Εκφράζονται ακόμα και ανησυχίες σχετικά με τις **μακροπρόθεσμες επιπτώσεις** που θα έχει στον άνθρωπο. «**Ουδέν καλόν αμιγές κακού**» έλεγαν οι αρχαίοι Έλληνες.

Απέναντι σε όλα αυτά η θεραπεία είναι **η κατάλληλη εκπαίδευση** των ανθρώπων. Εκπαίδευση που πάλι με την βοήθεια της τεχνολογίας θα γίνεται. Τα παιδιά σήμερα έχουν εξοικειωθεί με τις νέες τεχνολογίες, από μικρή ηλικία μαθαίνουν για την **ρομποτική**, αλλά πιστεύω ότι χρειάζονται περισσότερες ώρες διδασκαλίας στις νέες τεχνολογίες. Ακόμα οι σύγχρονες κοινωνίες έχουν κανόνες, έχουν νόμους. Αν οι νόμοι δεν είναι ισχυροί στο μέλλον τότε η Τεχνητή Νοημοσύνη μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα. Οι νομοθέτες να ενημερωθούν για να **δημιουργήσουν τους κατάλληλους νόμους** για τις νέες τεχνολογίες και το διάστημα. Η κοινωνία πρέπει να ακολουθήσει τους ρυθμούς της επιστήμης για να μην είναι «το μέλλον αόρατον». Αυτό χρειάζεται σύγχρονη Εκπαίδευση **κατάλληλους εκπαιδευτικούς** και όχι αφορισμούς.

...γρίφοι είναι και τα παρακάτω ερωτήματα...

Η Τεχνητή Νοημοσύνη μπορεί να ξεπεράσει τον ανθρώπινο εγκέφαλο; Ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι πεπερασμένος; Είναι λιγότερο έξυπνος; Ξέρουμε πως λειτουργεί; Υπάρχουν παράξενα έξυπνοι άνθρωποι; Στα ερωτήματα αυτά νομίζω η απάντηση είναι ότι αφού ο άνθρωπος κατόρθωσε να κάνει όλα αυτά που έκανε μέχρι σήμερα, μπορεί να μην είναι γρήγορος σε κάποια θέματα, αλλά σίγουρα είναι έξυπνος. Ο υπολογιστής είναι γρήγορος στους αριθμούς αλλά όχι στη Γεωμετρία.

...αλλά ας σταθούμε στους αριθμομνήμονες

Είναι παράξενα έξυπνοι ή συμβαίνει κάτι άλλο; Πως λειτουργεί ο εγκέφαλος τους;


Zerah Colburn


George P. Bidder

Το $19^{ο}$ και $20^{ο}$ αιώνα οι αριθμομνήμονες περιόδευαν και μάγευαν με τα κόλπα τους. Χωρίς χαρτί και μολύβι, έκαναν με το μυαλό τους πολύπλοκες πράξεις. Συνέρρεαν οι άνθρωποι να τους ακούσουν στις κινηματογραφικές αίθουσες. Τα κόλπα είναι: ταχυδακτυλουργικά ή μαθηματικά αλλά και **κάποια ανεξήγητα**. Τα ταχυδακτυλουργικά είναι έξυπνα κατασκευάσματα που μας εντυπωσιάζουν **αλλά εξηγούνται**.

Τα μαθηματικά κόλπα επίσης. Οι Zerah Colburn και G. Bidder ήταν μηχανικοί στο σχεδιασμό και την κατασκευή σιδηροδρόμων. Έκαναν δύσκολους υπολογισμούς αλλά με μαθηματικά κόλπα, όπως το **Τέχνασμα πολλαπλασιασμού**.

Ζητούσαν από το κοινό δύο 3ψήφιους αριθμούς, πολλαπλασίαζαν τον πρώτο με το δεύτερο αλλά τον πρώτο αριθμό τον πολλαπλασίαζε και με έναν ακόμη αριθμό που θα του έδινε επίσης το κοινό. Στη συνέχεια, σε λίγα δευτερόλεπτα έλεγαν το άθροισμα των δύο γινομένων. Πώς; π.χ. Αν για παράδειγμα το κοινό του έδινε τους 3ψήφιους 583 και 374 τον άλλο αριθμό τον έδινε κάποιος συνεργάτης τους που καθόταν μαζί με το κοινό. Ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ο 625 = δηλαδή (999 - 374). Έτσι έχουμε 583x374 + 583x625 = 582.417. Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα είναι ο 583 μείον ένα και συνέχεια ο συμπληρωματικός του ως προς το 999 που είναι ο 417 (δηλαδή αφαιρούμε κάθε ψηφίο από το 9 (999 - 582) =417). Η μαθηματική εξήγηση είναι: 583x374+583x625=583x(374+625)=
583x(999)=583x(1000-1)=583.000–583=582.000+1000-583= 582.000 + 417=582.417.

Όμως υπάρχουν και τα ανεξήγητα, εκείνα που δείχνουν ότι το μυαλό του ανθρώπου, είναι η πιο ισχυρή μηχανή νοημοσύνης. Γρίφος η λειτουργία του...

Σε κάποιο φίλο μου υπαγορεύουμε 100 λέξεις και στη συνέχεια μας απαντάει πια λέξη του είπαμε π.χ. η 5η, 23η , 69η.

Το 1892 Ιταλός λούστρος στη Γαλλία, αγράμματος. Του έδιναν το άθροισμα και το γινόμενο δύο 3ψήφιων αριθμών και σε 2 λεπτά έβρισκε τους αριθμούς. Του είπαν για την τετραγωνική και την κυβική ρίζα και σε λίγα λεπτά την υπολόγιζε από μνήμης. Το ίδιο και ο Αρμαντιέρ ένας τυφλός Γάλλος που σε δύο λεπτά έβρισκε την ρίζα 7ψήφιων αριθμών.

Ο Τζ. Μπάξτον αγράμματος εργάτης στο Λονδίνο άκουγε κάποιον να ομιλεί και στο τέλος ήξερε πόσες λέξεις είπε ή αν κάποιος χόρευε πόσα βήματα έκανε.

Ο Αντρέ Αμπέρ, γνωστός από την μονάδα για την ένταση του ηλεκτρισμού, και ο μαθηματικός Γιόχαν Γκάους και ο Feynman έκαναν πολύ γρήγορα δύσκολες αριθμητικές πράξεις από μνήμης, εντυπωσιάζεται τα ακροατήρια.

Τη δεκαετία του 60 ο Ρώσος Γιόσεφ Πριχόντικο έλυνε προβλήματα μαθηματικών από μνήμης σε δευτερόλεπτα.

Σε κάποιο **συνέδριο της ΕΜΕ** παρουσίασα εργασία για τα ημερολόγια, και ο τότε καθηγητής Αντώνης Παναγιωτόπουλος, από το Πανεπιστήμιο Πειραιά, είχε φέρει δύο μαθητές(αδέλφια αγόρι κορίτσι) από κάποιο Λύκειο που τους ρωτούσαμε, τη μέρα της εβδομάδας είχαμε σε κάποια ημερομηνία και απαντούσαν αμέσως.

αφορμές … και στιγμιότυπα

Γυναίκες και Μαθηματικά

May 12 : διεθνής ημέρα γυναικών στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

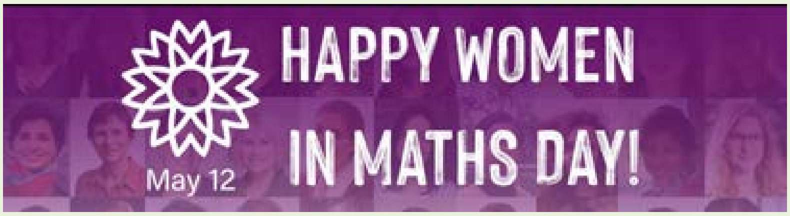
Η 12 Μαΐου έχει καθιερωθεί, ως η διεθνής Ημέρα εορτασμού των γυναικών στα Μαθηματικά και αυτό γιατί η 12 Μαΐου του 1977, είναι η μέρα που γεννήθηκε η Maryam Mirzakhani, Ιρανή μαθηματικός και Καθηγήτρια Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του **Στάνφορντ**[1]**.** Το **2014,** η Maryam Mirzakhani έλαβε το **Fields Medal** για την εξαιρετική συμβολή της στα **δυναμικά συστήματα** και **γεωμετρία των επιφανειών Riemann**. Έγινε έτσι, η πρώτη γυναίκα, και η πρώτη Ιρανή υπήκοος η οποία βραβεύτηκε με το ρυφαίο βραβείο Μαθηματικών. Πέθανε το 2017, στη νεαρή ηλικία των 40 ετών.

Στις 31 Ιουλίου του 2018, στο Rio de Janeiro, η Επιτροπή Γυναικών της Ιρανικής Μαθηματικής Εταιρείας πρότεινε στους συμμετέχοντες του **World Meeting for Women in Mathematics**, (**WM**)[2], ημέρα γενεθλίων της Maryam Mirzakhani να γιορτάζεται σαν παγκόσμια ημέρα γυναικών στα Μαθηματικά. Κάτι που έγινε δεκτό και από τότε γιορτάζεται, σαν η διεθνής **ημέρα γυναικών** στα Μαθηματικά, με πολλές εκδηλώσεις στο χώρο της εκπαίδευσης, σε όλο τον κόσμο. Με τη σκέψη ότι η συμμετοχή τους δεν θα είναι συγκυριακή, αλλά **ελπιδοφόρα** για το μέλλον, έτσι ώστε να υπάρχει μια **κοινωνική προοπτική** με θετικό πρόσημο.

---

[1] Το 1994 κέρδισε το χρυσό μετάλλιο στην **Παγκόσμια Μαθηματική Ολυμπιάδα,** η πρώτη Ιρανή μαθήτρια που το κατάφερε. Στην Παγκόσμια Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1995, έγινε η πρώτη Ιρανή μαθήτρια που κατέκτησε ένα τέλειο σκορ και κέρδισε δυο χρυσά μετάλλια.
Το 1999 έλαβε πτυχίο στα μαθηματικά από το Πανεπιστήμιο Τεχνολογίας του Σαρίφ στην Τεχεράνη (Sharif University of Technology) και συνέχισε τις σπουδές στις ΗΠΑ όπου το 2004 έλαβε το **διδακτορικό** της από το **Πανεπιστήμιο Χάρβαρντ,** με επιβλέποντα καθηγητή τον, επίσης βραβευμένο με μετάλλιο Fields, Κέρτις ΜακΜιούλεν (Curtis Tracy McMullen). Το 2004 ήταν επίσης ερευνήτρια στο Ινστιτούτο Μαθηματικών Clay (Clay Mathematics Institute) και καθηγήτρια στο **Πανεπιστήμιο Πρίνστον**.

Η ανάγκη προβολής της **γυναικείας ταυτότητας** στα **Μαθηματικά** και τη μαθηματική έρευνα, καθίσταται αναγκαία σε παγκόσμιο επίπεδο και η δυνατότητα να υπάρξει ένα πλαίσιο **ενθάρρυνσης** στο σχολείο με την **παράλληλη υποστήριξη** από τις μικρές ηλικίες στο γυναικείο πληθυσμό.



Egmo 2023

Έγινε πρόσφατα στο **Portoroz** της **Σλοβενίας** ή **12η μαθηματική ολυμπιάδα κοριτσιών** (**egmo 2023**). Η επόμενη που είναι προγραμματισμένη θα γίνει το 2024 στη Γεωργία. Η χώρα μας συμμετείχε με τις: Κουλουριώτη Βαρβάρα, Νικολάου Μαρία- Ελένη (**Εύφημη μνεία**) και με την Σπάχου Στεφανία.

Το πρόγραμμα, της **egmo 2023,** πέρα από τον διαγωνισμό των κοριτσιών στα Μαθηματικά, είχε και πολλές άλλες δραστηριότητες, όπου υπήρχαν διάφορες εκδηλώσεις και ομιλίες σε θέματα Μαθηματικών. Στο χώρο των εκδηλώσεων είχαν αναρτηθεί πορτραίτα επιτυχημένων γυναικών στα Μαθηματικά, από πολλές χώρες της Ευρώπης, ενώ παρευρέθηκε και η **Ουκρανή** μαθηματικός **Maryna Viazovska**, μετάλλιο **Fields** για το **2022.**

Η Viazovska έδωσε μια διάλεξη για τη γυναίκα και τα Μαθηματικά και τις μελλοντικές προοπτικές τους. Κυρίαρχο στοιχείο όλων των εκδηλώσεων και των ομιλιών, ήταν η ανάδειξη της **γυναικείας ταυτότητας** στο χώρο των Μαθηματικών. Μια σημαντική παρατήρηση, με κοινωνικό περιεχόμενο, ήταν να ενθαρρυνθούν οι γυναίκες στο χώρο της μαθηματικής επιστήμης. Με μια συμπεριφορά που **θα ανακαλύπτει** τη γυναικεία φυσιογνωμία, **θα την αναδεικνύει** και θα την **αξιοποιεί** πρώτα προς ίδιον όφελος, αλλά και με γενικότερη κοινωνική αντανάκλαση, χρήσιμου αποτελέσματος, προς όλες της κατευθύνσεις στους δύσκολους καιρούς. Να νιώθουν καλά, να περνούν καλά και **να διεκδικούν** το καλύτερο, σε ένα κόσμο απρόβλεπτο και ραγδαία εξελισσόμενο, με αισιοδοξία και ελπίδα

διακρίσεις με μαθηματικό περιεχόμενο

Χρυσό μετάλλιο στο σκάκι

Παγκόσμια πρωταθλήτρια, στο **σχολικό σκάκι** για κορίτσια μέχρι 13ετών αναδείχτηκε 11 χρονή **Ευαγγελία Σίσκου** [του ΑΜΟ «Γαλαξίας»- Θεσσαλονίκη] που έγινε **στη Ρόδο**, από **13-23 Απριλίου 2023,** με μεγάλη επιτυχία. Να θυμίσουμε ότι το 2022, η ίδια είχε πάρει **χάλκινο** μετάλλιο στην ίδια διοργάνωση που έγινε στη **Γεωργία**.

Η όλη διοργάνωση είχε ποικίλες εκδηλώσεις καθ' όλη την διάρκεια των αγώνων. Σημαντική θεωρείται η διάλεξη "Ξεκλειδώνοντας την **ψυχολογία των παιδιών**: Διαχείριση της **νίκης** και της **ήττας** στο σκάκι" από τη ψυχολόγο της επιτροπής γυναικών σκακιού και ισότητας Ήρα Λούτσιου με τη συμμετοχή παιδιών, γονιών και προπονητών.

Να θυμίσουμε επίσης ότι το σκάκι είναι **ένα πνευματικό παιχνίδι**, μεγάλου κύρους με **μαθηματικές προεκτάσεις**.

Σε πολλές χώρες του κόσμου, είναι σαν δραστηριότητα στο εκπαιδευτικό αναλυτικό πρόγραμμα και πολλές φορές και σχολικό μάθημα.

Επίσης αρκετές φορές, είναι το δύσκολο πρόβλημα Μαθηματικών θεμάτων, στις διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες.

Η επικαιρότητα του σκακιού όμως σε επίπεδο κορυφής, έχει αναδείξει και αναδεικνύει ισχυρούς παίκτες Κασπάροβ, Φίσερ, Αλιέχιν, Καρπόφ, Λάσκερ (επιστημονική διάνοια) και πρόσφατα τον Κινέζο **Ντινγκ Λιρεν**, άτομο της εποχής των υπερυπολογιστών που βλέπει **το σκάκι** σαν **μαθηματικό πρόβλημα,** που χαίρεται όταν βρίσκει τη λύση.

Η αλήθεια είναι ότι υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον για τους **μελλοντικούς** αγώνες στο σκάκι,

μια και ο ακατανίκητος Νορβηγός Μαγκνους Καρλσεν δεν συμμετείχε για προσωπικούς λόγους, στο έκτο μάτς, για το παγκόσμιο πρωτάθλημα …

Αλλά θα επανέλθουμε με το θέμα "**Μαθηματικά και σκάκι**" στην πρώτη ευκαιρία.

Η γεωμετρία των ανοικτών χώρων

Η αισθητική της γεωμετρίας των ανοιχτών χώρων με τον τίτλο «open house», ήταν μια αξιόλογη εκδήλωση, που έγινε πρόσφατα στην Αθήνα, **Απρίλης** 2023 και ήταν αρκετά εντυπωσιακή.

Ήταν μια ευκαιρία, να δει **κανείς**, μερικά από τα 63 **κτίρια και χώρους** ανοιχτά στο κοινό που **εμφανίζονται** στην πόλη, σαν μια **διαδρομή** πολιτιστική, ιστορική και καθημερινότητας, με κυρίαρχο στοιχείο το **ταξίδι** του **χωροχρόνου** σε πολύ **προσωπικές αναφορές** και διατηρητέες μνήμες της πόλης των Αθηνών.

Στις φωτογραφίες διακρίνονται κτίρια που παραπέμπουν σε **παλιές εποχές**. Η εικόνα του κάστρου με την **επαλληλία όγκων** αναφέρεται σε νεοκλασικά και αναγεννησιακά πλαίσια ανοιγμάτων, ενώ στο άλλο κτίριο, στα χρόνια του 1930 με θέα τον Παρθενώνα. Το κτίριο που είναι το δημοτικό θέατρο Πειραιά είναι ένα νεοκλασικό κτίριο της «ήρεμης **μνημειακότητας***» με στοιχεία της γαλλικής και γερμανικής αρχιτεκτονικής. Ενώ τα κτίρια κάτω από την Ακρόπολη δίνουν μια εικόνα της Αρχαίας αγοράς σε σχέση με την αγορά της σημερινής πραγματικότητας (παλαιό με νέο).

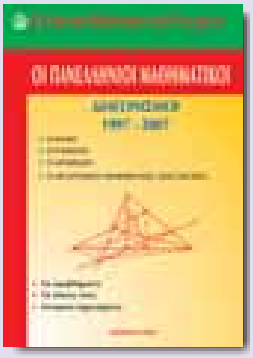
---

* **μνημειακότητα**: είναι η ιδιότητα πρόκλησης **μνημικού στοχασμού**, δηλαδή, ανάκλησης στη μνήμη εξωτερικής η εσωτερικής εμπειρίας σαν ανάμνηση συσχέτισης με ένα τουλάχιστον ακόμα άνθρωπο

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

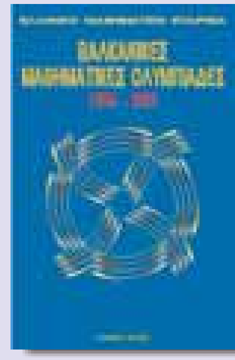
Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€

Νέα τιμή βιβλίου: 10€

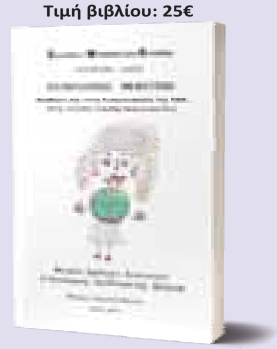


Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

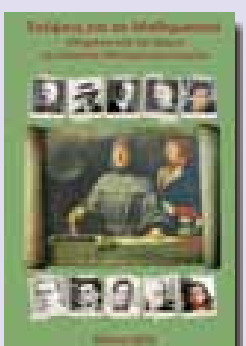
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€



Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ



Τιμή βιβλίου: 15€

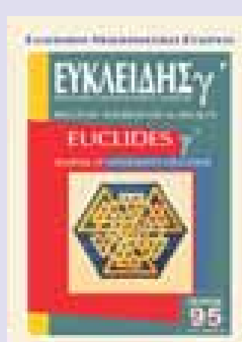
Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 25€

Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr