

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

199

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

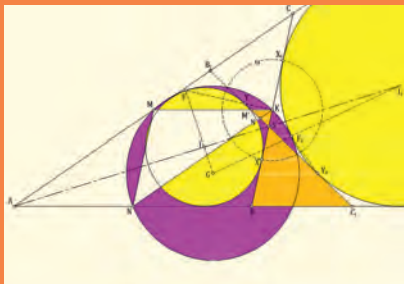
Β' ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2025 ευρώ 3,5

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D(f):$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Θέματα "Ευκλείδης" 2025



Η Επιβίωση και το "απρόοπτο"...

... Η αντιμετώπιση και τα Μαθηματικά



RENTING INFORMATION: 800-452-4524



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



Επίκαιρα Θέματα

H Επιβίωση και το απρόοπτο	1
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μαθηματικές Ολυμπιάδες,	9
Homot Mathematicus,	24

Α' Τάξη

Άλγεβρα: Πρόοδοι - Συναρτήσεις	30
Γεωμετρία: Παράλληλογραμμο και Τραπεζίδα	35

Β' Τάξη

Άλγεβρα: Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση,	38
Γεωμετρία: Επαναληπτικές Ασκήσεις	41
Αναλυτική Γεωμετρία: Παραβολή, Επαναληπτικές Ασκήσεις,	44

Γ' Τάξη

Ανάλυση: Ασκήσεις Ανάλυσης	52
Θέματα ΒΑΕ από τις Γαλλικές εξετάσεις	56

Γενικά Θέματα

Ο Ευκλείδης προτείνει... ..	64
Το Βήμα του Ευκλείδη: Τέλεια τετράγωνα στη Θεωρία Αριθμών	69
Επικαιρότητα	72
Ο κύκλος του Euler	73
Τα Μαθηματικά μας Διακελεύουν	77
Αφορμές και στιγμιότυπα,	79

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
με κερμονή, καλή διάθεση
και αισιοδοξία
ας προσπαθήσουμε
για το καλύτερο...



Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

ΥΓ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να ολοκληρώσουμε τις περισσότερες. Σε επόμενη τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά απρόοπτα, της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται όλο και πιο δύσκολη... Σας ευχαριστούμε πολύ για την κατανόηση

Υπεύθυνος για την επιμέλεια της ύλης των τευχών είναι οι συνάδελφοι:
Α' Λεοντίδης Γ. Κατσούλης, Α. Κουτσούρης, Κρ. Ασπράδης, Κρ. Τσιφάνης, Χ. Τσιτσός,
Β' Λεοντίδης Β. Καραγιάννης, Γ. Λευριδάς, Μ. Σίσιου, Κρ. Τσιφάνης,
Γ' Λεοντίδης Ν. Ανευθενταλός, Δ. Αργυράκης, Κ. Βασιλάτσου, Γ. Λευριδάς

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για
τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	8 Νοεμβρίου	2024
Ευκλείδης:	18 Ιανουαρίου	2025
Αρχιμήδης:	22 φεβρουαρίου	2025

$$[2000+25] = [5 \cdot 20^2 + 5^2] = 2025$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής**
βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
105 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3614025

Εκδόσεις
Φωτολитоφής Ανδραργός
Διευθυντής:
Τιμήλη Κωνσταντίνος

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζήσης Ευάγγελος

Υπεύθυνος για το Δ.Γ.

Αντωνόπουλος Νίκος
Βασιλάτσου Κίρα
Τσιφάνης Χρήστος

Επιτροπή Έκδοσης

Αργυράκης Δημήτρης
Βασιλάτσου Κίρα
Λευριδάς Γιάννης
Τσιτσός Χρήστος
Τσιφάνης Χρήστος
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Συντακτική Επιτροπή

Αντωνόπουλος Νίκος	Κουτσούρης Γιάννης	Ντιρίδης Δημήτριος
Αργυράκης Παναγιώτης	Κωτσούλης Κωνσταντίνος	Παναγιώτης Αφροδίτη
Αργυράκης Δημήτρης	Λαυριτάκης Σπύριδων	Σίσιου Μαρία
Βασιλάτσου Κίρα	Λαυριτάκης Χρήστος	Σταυρίδης Σπύριδων
Βλάχος Σπύριδων	Λαυριτάκης Αργυρώ	Τσιφάνης Παναγιώτης
Γαβριήλ Αργυράκης	Λαυριτάκης Γιάννης	Τσιφάνης Παναγιώτης
Γιάννης Γιάννης	Λαυριτάκης Σπύριδων	Τσιφάνης Παναγιώτης
Αροῦστης Παναγιώτης	Λαυριτάκης Σπύριδων	Τσιφάνης Παναγιώτης
Ελβίν Ναιρούζ	Μαλαφάκης Σπύριδων	Τσιφάνης Παναγιώτης
Ζήσης Νίκος	Μαυρογιάννης Λευριτάκης	Τσιφάνης Παναγιώτης
Ζήσης Ευάγγελος	Μηλιός Γιάννης	Τσιφάνης Παναγιώτης
Καράνης Χρήστος	Μπαλατσάκης Βενεδικτὸς	Τσιφάνης Παναγιώτης
Καραγιάννης Βασίλειος	Μπαλατσάκης Βενεδικτὸς	Τσιφάνης Παναγιώτης
Κατσούλης Γιάννης	Μπαλατσάκης Βενεδικτὸς	Τσιφάνης Παναγιώτης
Καραγιάννης Σπύριδων	Μπαλατσάκης Βενεδικτὸς	Τσιφάνης Παναγιώτης
Καραγιάννης Σπύριδων	Μπαλατσάκης Βενεδικτὸς	Τσιφάνης Παναγιώτης
Κονδύης Άρης	Μπαλατσάκης Βενεδικτὸς	Τσιφάνης Παναγιώτης
Κορρὴς Κωνσταντίνος	Μπαλατσάκης Βενεδικτὸς	Τσιφάνης Παναγιώτης

Σημείωση: Οι εργαλίες για το περιοδικό στέλνονται
και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι **συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται Έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη «Για τον Ευκλείδη Β'». Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. * όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

Με κατάθεση του αντίτιμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα [α λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.020157138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιστολή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Επιβίωση* και το “απρόοπτο”...

Η αντιμετώπιση και τα Μαθηματικά

Νίκος Ντόρβας

«**Προσέξτε αυτό που θα κάνω**» ανακοινώνει μόλις εισέρχεται στην αίθουσα.

Καρφώνει με το βλέμμα του όλα τα πρόσωπα που τον κοιτούν απορημένα, και με σταθερή φωνή συνεχίζει. «Θα σας πω κάτι που δεν το ακούτε συχνά από έναν καθηγητή: **Θα το κάνω λάθος**». Κάνει μια παύση, σχεδόν αμέσως, για να τονίσει τη σημαντικότητα της στιγμής της περιεργής αυτής εξομολόγησης. «**Είναι ο μόνος τρόπος να γίνει σωστά**» επανέρχεται. «Το να το κάνω λάθος. Και να ξέρετε: όλοι σας **θα το κάνετε λάθος**. Είναι γίνεται **σωστά!**» καταλήγει.

Η παραπάνω διήγηση δεν είναι μέρος μιας φανταστικής ιστορίας, αλλά το πρώτο μέρος της εισαγωγικής διάλεξης, στο μάθημα της δειγματοληψίας, του ομότιμου καθηγητή **James Lepkowski** (University of Michigan). Γίνεται όμως ο σωστός τρόπος να είναι κάθε φορά λάθος; Και πώς γίνεται αυτό το λάθος να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο ατόμων ή ακόμα και έναν ολόκληρο πληθυσμό¹; Η πιο συνηθισμένη κριτική που δέχονται οι στατιστικές έρευνες είναι το κατά πόσο μπορούμε, στηριζόμενοι σε ένα μικρό υποσύνολο ατόμων να **εξάγουμε συμπεράσματα** για το σύνολο του πληθυσμού. Τίθεται συνεπώς εύλογο το κατά πόσον είναι εφικτό από ένα δείγμα² να εξάγουμε συμπεράσματα για ένα χαρακτηριστικό του πληθυσμού.

Ιστορική Αναδρομή

Η ανάγκη για δειγματοληψία υπαγορεύεται από ποικίλους λόγους, όπως οικονομικούς, τεχνικούς, νομικούς ή περιορισμούς χρόνου. Σε τελική ανάλυση, η δειγματοληψία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της λειτουργίας του ανθρώπινου νου. Όλοι μαθαίνουμε να κατανοούμε διάφορες έννοιες και να τις ενσωματώνουμε στη σκέψη μας μέσω ενός μικρού δείγματος παρατηρήσεων που σχετίζονται με αυτές. Για παράδειγμα, την έννοια του **ηλιοβασιλέματος** την κατανοούμε μέσω ενός **περιορισμένου** αριθμού **εμπειριών**. Μετά από αυτή την περιορισμένη έκθεση, ζούμε με τη βεβαιότητα ότι όλα τα ηλιοβασιλέματα, παλιά και μελλοντικά, είναι ίδια, αντιπροσωπεύοντας την ίδια γενική έννοια. Ο ανθρώπινος νους, για να καταλήξει σε αυτό, βασίζεται σε μια μορφή δειγματοληψίας. Συνεπώς, η χρησιμότητα, η πρακτικότητα και, εντέλει, η αναγκαιότητα της δειγματοληψίας γίνονται απόλυτα κατανοητές. Αυτή η διαδικασία λάμβανε χώρα ανέκαθεν και συνεχίζεται αυτοματοποιημένα. Ιστορικά, ωστόσο, η σύγχρονη μορφή δειγματοληψίας αναπτύσσεται από το **1895**, όπως επισημαίνει ο **Leslie Kish** (1995). Ο ίδιος αποδίδει στον **A. N. Klier** δύο έργα από το 1895, τα οποία θεωρεί ως το θεμέλιο της δειγματοληψίας και της εφαρμογής της στη στατιστική ανάλυση. Έκτοτε, η δειγματοληψία έχει ενσωματωθεί πλήρως στη ζωή μας, αποτελώντας έναν θεμελιώδη τομέα οικονομικής και επιχειρηματικής δραστηριότητας από τη δεκαετία του **1930** και ύστερα. Μέχρι το **1895**, οι **στατιστικοί** εμπιστευόνταν αποκλειστικά την απογραφή για την καταγραφή δεδομένων και τις στατιστικές αναλύσεις. Μετά το **1895**, άρχισαν να εμπιστεύονται και τα δείγματα, εισάγοντας την έννοια του αντιπροσωπευτικού υποσυνόλου του πληθυσμού, που σταδιακά ταυτίστηκε με την έννοια του τυχαίου δείγματος. Το **1903**, στο συνέδριο του Διεθνούς Στατιστικού Ινστιτούτου (I.S.I.) στο Βερολίνο, συζητήθηκε εκτενώς η αξιοπιστία των δειγμάτων έναντι της απογραφής για στατιστική ανάλυση. Δημιουργήθηκαν επιτροπές για τη διερεύνηση του θέματος και προέκυψαν αντιρρήσεις ως προς τη χρήση της δειγματοληψίας. Για την εποχή εκείνη, η δειγματοληψία θεωρήθηκε κάτι καινοτόμο και αμφιλεγόμενο. Το I.S.I. ανέλαβε το **1924** στη Ρώμη να καθορίσει τις διαφορές μεταξύ των «**τυχαίας συλλογής**» και της «**σκόπιμης**



* Η επιβίωση η τέχνη του σωστού συμπεράσματος και η αποφυγή του λάθους. Πως επηρεάζει την καθημερινότητα, η αντιμετώπιση της τυχαότητας? Η μαθηματική ανάλυση και συμπεριφορά, μέσα από τα μαθηματικά μοντέλα.

¹Στη Στατιστική με τον όρο **πληθυσμός** εννοούμε όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει ένα κοινό χαρακτηριστικό μιας ομάδας υποκειμένων (ατόμων, αντικείμενων, τόπων και γενικότερα οποιονδήποτε οντοτήτων) το οποίο **μεταβάλλεται από υποκείμενο σε υποκείμενο** (ή και στο ίδιο υποκείμενο π.χ. ως προς το χρόνο) και ενδιαφερόμαστε να το μελετήσουμε. Κάθε υποκείμενο επί του οποίου μετράμε/παρατηρούμε το κοινό χαρακτηριστικό λέγεται **δειγματοληπτική/πείραματική μονάδα** και το κοινό χαρακτηριστικό τους, μεταβλητή.

²**Δείγμα** (Sample) είναι ένα μέρος του πληθυσμού.

συλλογής». Αυτές οι έννοιες παραμένουν επίκαιρες, καθώς περιλαμβάνουν τη δειγματοληψία πιθανότητας και σκοπιμότητας.

Η δεκαετία του 1920 ήταν καθοριστική για τη θεωρητική θεμελίωση της δειγματοληψίας, ενώ τη δεκαετία του 1930 άρχισαν οι πρώτες εμπορικές εφαρμογές της, κυρίως μέσω δημοσκοπήσεων για **εμπορικούς και πολιτικούς σκοπούς**. Στη Σοβιετική Ένωση, ο ερευνητής **A. A. Tchuprow** προώθησε τη δειγματοληψία, ενώ το **1924** εκδόθηκε από τον Α. Γ. Kovalensky το πρώτο βιβλίο για τη δειγματοληψία σε παγκόσμιο επίπεδο, γραμμένο στα Ρωσικά. Το **1933**, ο **Jerzy Neyman** εξέδωσε το «An Outline of the Theory of the Representative Method», το οποίο έθεσε τις βάσεις για τη θεωρία του αντιπροσωπευτικού δείγματος. Παράλληλα, σημαντική ώθηση στον τομέα έδωσαν οι ερευνητές R. A. Fisher, Mahalanobis, Yates, Cochran και Snedecor, οι οποίοι δίδασκαν και έγραψαν βιβλία για τη δειγματοληψία, ενώ εισήγαγαν σχετικά μαθήματα σε πανεπιστήμια, με τον Cochran να δίδασκε πρώτος στο Iowa State University το 1939. Η δεκαετία του 1930 σηματοδότησε επίσης την εμπλοκή του United States Bureau of Census, που είχε και έχει πρωταγωνιστικό ρόλο στην προώθηση της δειγματοληψίας. Στη διάρκεια αυτής της περιόδου, εμφανίστηκαν και οι πρώτες πολιτικές δημοσκοπήσεις, οι οποίες, αν και παραμένουν ένα μικρό τμήμα της δειγματοληψίας, προκάλεσαν το ενδιαφέρον του κοινού, με αποτέλεσμα η έννοια της δημοσκόπησης να ταυτίζεται συχνά με τις πολιτικές δημοσκοπήσεις. Από το 1895 έως το 1945, η ανάπτυξη της δειγματοληψίας ήταν σχετικά αργή, καθώς διανύαμε την αρχική φάση της. Μετά το **1946**, όμως, παρατηρείται μια εκρηκτική ανάπτυξη, τόσο ως επιστημονικού αντικειμένου όσο και ως εμπορικής πρακτικής. Ο L. Kish (1995) χαρακτηρίζει αυτή την περίοδο ως την **εποχή της απογείωσης** για τη δειγματοληψία.

Ντετερμινιστικά - Στοχαστικά Φαινόμενα

Τα διάφορα ζητήματα (επιστημονικά, κοινωνικά, πολιτικά, κ.λπ.) συνδέονται με φαινόμενα ή πειράματα που κατατάσσονται σε δύο κύριες κατηγορίες: στα αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά και στα τυχαία ή στοχαστικά. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε το κεφάλαιο, το χρόνο και το επιτόκιο, μπορούμε με ακρίβεια να υπολογίσουμε τον **τόκο** που θα εισπράξουμε στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Αντίστοιχα, αν γνωρίζουμε την κατανάλωση ρεύματος και το κόστος ανά kWh (κιλοβατώρα), μπορούμε με βεβαιότητα να προσδιορίσουμε **το συνολικό κόστος**. Οστόσο, μια ασφαλιστική εταιρεία **δεν μπορεί** να προσδιορίσει με ακρίβεια τον αριθμό και το μέγεθος των αποζημιώσεων που θα καταβάλει τον επόμενο μήνα. Ομοίως, δε γνωρίζουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που θα σημειωθούν σε έναν συγκεκριμένο δρόμο, το αποτέλεσμα μιας θεραπείας για ασθενείς ηλικίας 30-40 ετών, την απόδοση μιας καλλιέργειας ή τις πωλήσεις αυτοκινήτων σε ένα εξάμηνο κ.ά. **Ένα ντετερμινιστικό φαινόμενο** μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός **μαθηματικού μοντέλου**, δηλαδή ενός μαθηματικού αναλόγου που προσομοιώνει την πραγματικότητα. Για παράδειγμα, η σχέση Κεφάλαιο-Επιτόκιο-Χρόνος-Τόκος μπορεί να εκφραστεί με έναν τύπο που **επιτρέπει την πρόβλεψη** του αποτελέσματος (τόκος) όταν γνωρίζουμε τις μεταβλητές. Από την άλλη, ένα στοχαστικό φαινόμενο, όπως η σχέση Τιμής-Ζήτησης, **δεν περιγράφεται** πλήρως από έναν μαθηματικό τύπο, καθώς η ζήτηση επηρεάζεται και από ποικίλους άλλους παράγοντες, όπως οι τιμές ανταγωνιστικών προϊόντων, το εισόδημα των καταναλωτών, την εισοδο νέων προϊόντων/υπηρεσιών στην αγορά, από τον πληθωρισμό αλλά και από άλλους παράγοντες που δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν. Παρομοίως, η σχέση απόδοσης καλλιέργειας και ποσότητας λιπάσματος **είναι στοχαστική**, καθώς εξαρτάται από παράγοντες όπως οι καιρικές συνθήκες, το έδαφος, ο προσανατολισμός του αγρού και άλλες παραμέτρους που δε γνωρίζουμε πλήρως ή δε μπορούμε να προσδιορίσουμε επακριβώς. Επομένως, η πολυπλοκότητα και η «**περιορισμένη γνώση των αιτίων**» που χαρακτηρίζουν τα στοχαστικά φαινόμενα απαιτούν διαφορετικά επιστημονικά εργαλεία από τα συνηθ.



Δείγμα

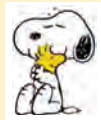
Ένα φαινόμενο ή πείραμα δε συμβαίνει/εκτελείται αφηρημένα αλλά σε ένα σύνολο υποκειμένων (ατόμων, αντικειμένων, τόπων ή άλλων οντοτήτων) που έχουν ένα ή περισσότερα κοινά χαρακτηριστικά. Μετρώντας ή παρατηρώντας τα χαρακτηριστικά των υποκειμένων στα οποία συμβαίνει ή εκτελείται το φαινόμενο ή το πείραμα, δηλαδή, αποδίδοντας τιμές σε αυτά, παίρνουμε ένα σύνολο δεδομένων παρατηρήσεων από τα οποία προσπαθούμε να κατανοήσουμε/εξηγήσουμε το φαινόμενο ή το πείραμα και να οδηγηθούμε στην κατασκευή ενός μοντέλου που θα το περιγράφει. Όμως, δεν είναι πάντοτε δυνατό να έχουμε στη διάθεσή μας όλες τις τιμές των χαρακτηριστικών του φαινομένου ή του πειράματος που μελετάμε. Συνήθως, μέρος μόνο των τιμών των χαρακτηριστικών έχουμε στη διάθεσή μας. Επίσης, λόγω του πολυσυνθετού της πραγματικότητας δεν έχουμε πλήρη εικόνα όλων των «χαρακτηριστικών». Στην αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών συνεισφέρουν η θεωρία Πιθανοτήτων και η Στατιστική.

Κάθε υποτιθέμενο μοντέλο για τον πληθυσμό συνεπάγεται, σύμφωνα με τη Θεωρία Πιθανοτήτων, ορισμένη συμπεριφορά για το δείγμα. Δηλαδή, η Θεωρία Πιθανοτήτων μας λέει τι πρέπει να περιμένουμε στο δείγμα. Η Στατιστική μας προσφέρει μεθόδους για να ελέγξουμε αν η συμπεριφορά του δείγματος διαφέρει σημαντικά από το αναμενόμενο με βάση τη Θεωρία Πιθανοτήτων³. Αν αυτή η διαφορά, μετάξι αναμενόμενου από τη θεωρία και παρατηρούμενου στο δείγμα, είναι σημαντική τότε πρέπει να αναζητηθεί άλλο μοντέλο για την περιγραφή του πληθυσμού.

Γενικά υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες μεθόδων συγκρότησης ενός δείγματος. Η μία βασίζεται στη θεωρία πιθανοτήτων (probability sampling) και η άλλη όχι (non – probability sampling). Συνήθως στην πρακτική απαντώνται ως μέθοδοι τυχαία και μη τυχαία δειγματοληψίας αντίστοιχα (Ο όρος ωστόσο ενδέχεται να μην είναι εξαιρετικά επιτυχημένος λόγω της παρανόησης της έννοιας του τυχαίου). Οι μέθοδοι επιλογής δείγματος που βασίζονται στη θεωρία πιθανοτήτων παρέχουν τη δυνατότητα γενίκευσης, βασίζονται σε μια ισχυρή θεωρητική βάση, ενώ προσφέρουν εργαλεία υπολογισμού των σφαλμάτων των περιήχουν, με στόχο τη διόρθωση ή την ελαχιστοποίηση τους σε μελλοντικές επαναλήψεις. Γενικά, η βασική αρχή στη δειγματοληψία πιθανοτήτων είναι πως κάθε δυνατικό μέλος του δείγματος το οποίο μπορεί να επιλεγεί από τον πληθυσμό (και το δειγματοληπτικό πλαίσιο⁴) έχει εκ των προτέρων μία γνωστή πιθανότητα επιλογής του, η οποία δεν μπορεί να είναι μηδέν (Kalton, 1983). Αντίθετα το βασικό χαρακτηριστικό των μεθόδων που δεν βασίζονται στη δειγματοληψία πιθανοτήτων είναι πως δεν γνωρίζουμε τον μηχανισμό επιλογής και συγκρότησης του δείγματος όπως και τον βαθμό αντικειμενικότητας και αμεροληψίας, καθιστώντας τις μεθόδους αυτές ακατάλληλες για την εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν τον γενικό πληθυσμό⁵.

Για την εφαρμογή μεθόδων της Στατιστικής Συμπερασματολογίας ο πληθυσμός πρέπει να είναι καλά ορισμένος. Πρέπει, δηλαδή, να μπορούμε να αποφανθούμε με σαφήνεια επί ποίων μονάδων μετράμε/παρατηρούμε το χαρακτηριστικό που μελετάμε. Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε την επίδοση των μαθητών Γυμνασίου, ο πληθυσμός είναι καλά ορισμένος μόνο αν μπορούμε να απαντήσουμε με σαφήνεια (μονοσήμαντα) σε ερωτήσεις όπως: πως ενδιαφέρει η μέτρηση της επίδοσης των μαθητών των ιδιωτικών ή των δημόσιων Γυμνασίων; της Β' τάξης Γυμνασίου; νυχτερινών Γυμνασίων; ειδικών σχολείων; κ.τλ. Η κλινική δοκιμή ενός φαρμάκου για τη θεραπεία του έλκους πρέπει, επίσης, να αφορά ένα καλά ορισμένο πληθυσμό (όλα τα άτομα που έχουν έλκος; θα περιορίζεται σε όσα άτομα έχουν ένα συγκεκριμένο τύπο έλκους; μόνο σε όσους χρειάζονται νοσηλεία; κ.τλ.).

Οι πληθυσμοί διακρίνονται σε πεπερασμένους και σε άπειρους. Με κριτήριο το πλήθος των μονάδων επί των οποίων μετράμε/παρατηρούμε το κοινό χαρακτηριστικό που μελετάμε, φυσικά, άπειροι πληθυσμοί δεν υπάρχουν. Όμως, επειδή ως πληθυσμό θεωρούμε όλες τις δυνατές τιμές της υπό μελέτη μεταβλητής και δεδομένου ότι η παρατήρηση ενός φαινομένου ή ένα πείραγμα μπορεί, θεωρητικά τουλάχιστον, να επαναληφθεί άπειρες φορές, τότε η έννοια «άπειρος πληθυσμός» έχει νόημα. Ένας τρόπος για να μελετήσουμε ένα φαινόμενο είναι να εξετάσουμε όλες τις μονάδες επί των οποίων συμβαίνει. Αυτή η μέθοδος συλλογής δεδομένων, η εξέταση δηλαδή όλων των μονάδων επί των οποίων συμβαίνει το φαινόμενο που μελετάμε, ονομάζεται ολική απογραφή ή απογραφή. Για παράδειγμα, η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία κάνει κάθε δέκα χρόνια απογραφή του πληθυσμού ως προς διάφορα χαρακτηριστικά. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις, η απογραφή είναι δύσκολη ή οικονομικά ασύμφορη ή και αδύνατη. Σε αυτές τις περιπτώσεις, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ο ερευνητής εξετάζει ένα μέρος των μονάδων που μελετάει, δηλαδή, παίρνει ένα δείγμα τιμών/μετρήσεων/παρατηρήσεων, και στη συνέχεια γενικεύει τα συμπεράσματά του για ολόκληρο τον πληθυσμό.



³ Αξίζει να επισημανθεί ότι κατά τη διαδικασία ελέγχου της συμφωνίας θεωρίας και εμπειρίας, εφαρμόζεται τόσο η παραγωγική όσο και η επαγωγική αποδεικτική μέθοδος. Σε πρώτη φάση εφαρμόζεται η παραγωγική μέθοδος, δηλαδή, γίνεται μετάβαση από το όλο στο μέρος: υποθέτουμε κάποιο μοντέλο για τον πληθυσμό (το όλο) και μέσω της θεωρίας πιθανοτήτων συμπεραίνουμε για το δείγμα (το μέρος). Σε δεύτερη φάση εφαρμόζεται η επαγωγική μέθοδος, δηλαδή, γίνεται μετάβαση από το μέρος στο όλο: από τη συμπεριφορά του δείγματος, μέσω της Στατιστικής, συμπεραίνουμε για τον πληθυσμό. Δηλαδή, στη στατιστική προσέγγιση των προβλημάτων, συνυπάρχει ο παραγωγικός χαρακτήρας της Μαθηματικής επιστήμης με τον επαγωγικό χαρακτήρα των άλλων επιστημών. Το γεγονός αυτό εξηγεί την εφαρμοσσιμότητα και τη χρησιμότητα της Στατιστικής σε διαδικασίες λήψης αποφάσεων επηρεάζοντας ένα ευρύτατο φάσμα της ανθρώπινης δραστηριότητας.

⁴ Πρόκειται για έναν κατάλογο ολόκληρου ή σχεδόν ολόκληρου του πληθυσμού της έρευνας. Μπορεί να είναι κάποιο αρχείο πολιτών, εκλογικός κατάλογος κ.ά. Το δειγματοληπτικό πλαίσιο δεν είναι πάντοτε διαθέσιμο. Ανάλογα με το να υπάρχει ή όχι, διαφοροποιείται η μέθοδος δειγματοληψίας.

⁵ Η δειγματοληψία χωρίς πιθανότητες είναι αρκετά διαδεδομένη με τις διαδικτυακές έρευνες να αποτελούν χαρακτηριστικό παράδειγμα. Πλέον μπορεί να εντοπιστεί πλήθος ερευνών που διενεργείται μέσω των social media. Σε αυτές τις έρευνες απουσιάζει συχνά το δειγματοληπτικό πλαίσιο και η επιλογή των αποκρινόμενων γίνεται ανεξέλεγκτα. Κάποιος συμμετέχοντας ενδέχεται να απαντήσει πολλές φορές, να προσκαλεί τους φίλους του ή ανθρώπους ιδίων απόψεων κλπ.

Πώς μπορούμε όμως να επιλέξουμε ένα δείγμα αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δεν είναι εύκολη ούτε μπορεί να είναι απόλυτη. Απαντήσεις σε ερωτήματα σχετικά με τη διαδικασία επιλογής του δείγματος ή με το μέγεθος του δείγματος⁶ δίνει η Θεωρία Δειγματοληψίας.

Όλοι έχουμε δοκιμάσει μια κουταλιά σούπα για να κρίνουμε ως προς τη γεύση της όλη τη σούπα που βρίσκεται σε ένα πιάτο. Η σούπα, όμως, είναι ομοιογενής. Η γεύση μιας κουταλιάς αντιπροσωπεύει όλη την υπόλοιπη. Αλλά όταν πρόκειται για τη λήτηση ενός προϊόντος, για τον αριθμό των ατυχημάτων, για το φόβο που αισθάνονται οι πολίτες απέναντι στο έγκλημα, για την επίδραση ενός φαρμάκου, για την απόδοση μιας καλλιέργειας ή για τη φορά που ίχνους της κίνησης των πάγων, υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επιδρούν στο αποτέλεσμα που ποικίλουν από άτομο σε άτομο ή από περιοχή σε περιοχή (γενικά, από υποκείμενο σε υποκείμενο).

Η αναζήτηση και η κατανόηση των αιτιών αυτής της διαφορετικότητας/μεταβλητότητας είναι η κεντρική λειτουργία και η ουσία της Στατιστικής.

Τυχαioτητα

Δεν είναι λίγες οι φορές που διενεργούνται έρευνες στις οποίες επισημαίνεται ότι βασίστηκαν σε τυχαίο δείγμα ενώ στην πραγματικότητα πρόκειται για δείγμα ευκολίας. Είναι δηλαδή δείγμα που επιλέγεται κατά τύχη, εννοώντας ότι διευκολύνει και όχι στην πραγματικότητα ότι επιλέχτηκε για να είναι τυχαίο. Για παράδειγμα, ένας φοιτητής χρειάζεται να εκπονήσει μια έρευνα σχετικά με την ικανοποίηση των φοιτητών του ιδρύματος στο οποίο και ο ίδιος φοιτά, σχετικά με την παρεχόμενη ποιότητα σπουδών του ιδρύματος. Αφού κατασκευάσει ένα ερωτηματολόγιο, αποφασίζει ότι θα πρέπει να το δώσει σε τυχαίο δείγμα 200 φοιτητών.



Αποφασίζει λοιπόν να σταθεί έξω από το κτίριο των διδασκاليών και να διανείμει 200 ερωτηματολόγια σε ισάριθμους φοιτητές. Επειδή οι φοιτητές δεν επιλέχτηκαν από τον ερευνητή-φοιτητή αλλά προέκυψαν «στην τύχη», λόγω του ότι, για παράδειγμα, εκείνη την ώρα πήγαιναν στο μάθημά τους, ο ερευνητής-φοιτητής θεωρεί ότι έχει χρησιμοποιήσει ένα τυχαίο δείγμα. Στην **πραγματικότητα** έχει χρησιμοποιήσει ένα **δείγμα ευχερείας ή ευκολίας** γιατί χρησιμοποιήσε τους υπάρχοντες φοιτητές «που βρήκε μπροστά του». Τι θα έπρεπε να είχε κάνει ο ερευνητής; Για να συλλέξει ένα τυχαίο δείγμα, θα έπρεπε να δώσει την ίδια πιθανότητα επιλογής σε κάθε φοιτητή του ιδρύματος ώστε αυτός να συμμετέχει στο δείγμα. Τούτο γίνεται με το να έχει ο ερευνητής μια πλήρη άποψη των φοιτητών του ιδρύματος. Θα πρέπει να δημιουργήσει ένα **δειγματοληπτικό πλαίσιο** –κατάσταση των εγγεγραμμένων φοιτητών του ιδρύματος– και μέσα από αυτό να επιλέξει με τυχαίο τρόπο διακόσιους. Έτσι κάθε φοιτητής είτε προσέρχεται είτε όχι στο ίδρυμα μπορεί να επιλεγεί στο δείγμα. Αλλιώς υπάρχει ο κίνδυνος να επιλεγούν μόνο οι φοιτητές που τη συγκεκριμένη στιγμή της διενέργειας της έρευνας έτυχε να βρίσκονται στο χώρο. Εναλλακτικά, ο ερευνητής μπορεί να λάβει το δείγμα του από τους φοιτητές που εγγραφονται στις Γραμματείες στην αρχή κάθε εξαμήνου. Αυτή η διαδικασία θα μπορούσε να δώσει ως αποτέλεσμα ένα τυχαίο δείγμα γιατί κάθε μέρα εγγράφονται και κάνουν δηλώσεις μαθημάτων φοιτητές από διαφορετικά εξάμηνα σπουδών και από όλα τα εξάμηνα σπουδών. Έτσι όλοι οι εν ενεργεία φοιτητές θα επισκεφτούν τις Γραμματείες των Τμημάτων τους.

Άλλα κριτήρια επιλογής δείγματος θα μπορούσαν να είναι η εθελοντική ανταπόκριση, η φιλικότητα, η ασφάλεια κ.λπ. Τέτοια όμως δείγματα **προκαλούν μεροληψίες**⁷ δηλαδή, συστηματικές διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων που παίρνουμε από το δείγμα και της πραγματικότητας στον πληθυσμό διότι σε τέτοια δείγματα κατά κανόνα περιλαμβάνονται μετρήσεις/παρατηρήσεις από άτομα συγκεκριμένων κατηγοριών και αποκλείονται μετρήσεις/παρατηρήσεις από άτομα όλων των άλλων. Για παράδειγμα, μπορεί να αισθανόμαστε πιο ασφαλείς να πλησιάσουμε καλοντυμένα, μεσαίου εισοδήματος άτομα αλλά έτσι οδηγούμαστε στο να αποκλείσουμε από το

⁶Το μέγεθος δεν χρειάζεται να είναι κάποιο συγκεκριμένο ποσοστό του μεγέθους του πληθυσμού. Αντίθετα, προσδιορίζεται σε σχέση με το μέγεθος του σφάλματος εκτίμησης που παράγεται εξαιτίας της χρήσης δειγματοληψίας, της **μεθόδου δειγματοληψίας**, της σχετικής ομοιογένειας ή ανομοιογένειας του πληθυσμού και του κόστους δειγματοληψίας.

⁷**Μεροληψίες ή συστηματικά σφάλματα**: Είναι συστηματικά σφάλματα προς την ίδια κατεύθυνση. Μαζί με τα μη συστηματικά ή τυχαία σφάλματα αποτελούν τα **μη δειγματοληπτικά σφάλματα**. Πηγές μη δειγματοληπτικών σφαλμάτων είναι, μεταξύ άλλων, η λάθος επιλογή δείγματος, τα λάθη στα ερωτηματολόγια, τα λάθη συνέντευξης, τα λάθη επεξεργασίας κ.ά. Τέτοιου είδους σφάλματα εμφανίζονται και στις απογραφές. Από αυτά, τα μη συστηματικά (τυχαία) αλληλοαναιρούνται (ιδιαίτερα στα μεγάλα δείγματα). Για τις μεροληψίες, δεν υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας εκτίμησης του μεγέθους τους.

δείγμα μετρήσεις/παρατηρήσεις από άτομα μη φυλικά. Επίσης, σε μια τηλεφωνική έρευνα που πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια μιας τηλεοπτικής εκπομπής, κατά κανόνα, ανταποκρίνονται άτομα με έντονα συναισθήματα, συνήθως αρνητικά. Έτσι, όταν ο εκφωνητής ρωτά τους τηλεθεατές αν φοβούνται να βγουν έξω τη νύχτα λόγω της εγκληματικότητας, κατά κανόνα θα τηλεφωνήσουν αυτοί που είναι εξαγριωμένοι με το έγκλημα παρά αυτοί που είναι πιο ψύχραιμοι. Η **προσωπική επιλογή** είναι μια συνηθισμένη **αιτία μεροληψίας**. Για να μειωθεί επομένως η μεροληψία **πρέπει να μειώσουμε την προσωπική επιλογή**.

Ο μηχανισμός που εγγυάται την αντικειμενικότητα είναι η τυχαότητα. Όχι η τυχαότητα υπό την έννοια της σύμπτωσης, αλλά ως επιλογή που δεν βασίζεται στον υποκειμενισμό αλλά στην τύχη. Για παράδειγμα, το «χρως συνάντησα τυχαία έναν φίλο μου στον δρόμο» υπονοεί την τυχαότητα ως σύμπτωση. Η τυχαότητα ως αντικειμενικό γεγονός είναι «Με ποιον τρόπο θα επιλέξω 3 αριθμούς από το 1 έως το 6;». «Με έναν αντικειμενικό μηχανισμό» είναι η απάντηση, όπως είναι ένας πίνακας τυχαίων αριθμών ή μία ρίψη δίκαιου ζαριού.



Καταλήγουμε συνεπώς στο συμπέρασμα ότι η τυχαία δειγματοληψία⁸ μπορεί να εξαλείψει τη μεροληψία που προκύπτει από τη λανθασμένη επιλογή δείγματος, αλλά δεν εξαλείφει τη μεταβλητότητα⁹. Η **μεταβλητότητα** μεταξύ διαφορετικών δειγμάτων σε επαναλαμβανόμενες τυχαίες δειγματοληψίες είναι μια αναπόφευκτη συνέπεια της **ετερογένειας** που υπάρχει στον πληθυσμό από τον οποίο προέρχονται τα δείγματα. Πώς, λοιπόν, μπορούμε να θεωρήσουμε αξιόπιστα τα αποτελέσματα ενός τυχαίου δείγματος, γνωρίζοντας ότι ένα δεύτερο δείγμα από τον ίδιο πληθυσμό θα μπορούσε να δώσει διαφορετικό αποτέλεσμα; Πώς μπορούμε να βασιστούμε κρίσιμες οικονομικές και πολιτικές αποφάσεις, όπως αυτές για την ανεργία, σε ένα ποσοστό ανεργίας που προέρχεται από ένα τυχαίο δείγμα, γνωρίζοντας ότι το ποσοστό αυτό μπορεί να αλλάξει αν η διαδικασία δειγματοληψίας επαναληφθεί; Παρόλα αυτά, στην πράξη μπορούμε να βασιστούμε στα αποτελέσματα των τυχαίων δειγμάτων.

Οι στατιστικές έρευνες όπως αναδείξαμε παραπάνω διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη διαμόρφωση της επιστημονικής γνώσης και της λήψης αποφάσεων με στόχο την καθοδήγηση πολιτικών αποφάσεων, διαμόρφωσης επιχειρηματικών πρακτικών, εντοπισμό αποτελεσματικών ιατρικών αγωγών και επηρεάζουν πολλές πτυχές της ζωής μας. Ωστόσο, ιστορικά παραδείγματα αποδεικνύουν ότι λάθος στο σχεδιασμό, την εκτέλεση ή την ερμηνεία των δεδομένων μπορούν να οδηγήσουν σε παραπλανητικά συμπεράσματα, με σοβαρές συνέπειες δημιουργώντας μια ψευδή και στρεβλή εικόνα για την πραγματικότητα.¹⁰ Τα σχετικά παραδείγματα είναι πολλά. Ας δούμε ορισμένα από τα “**διασημότερα**” λάθη στατιστικών ερευνών¹¹:

Η Πολιομυελίτιδα, τα Αναψυκτικά και η Πλάνη της Συσχέτισης: Πριν από την εισαγωγή του εμβολίου Salk κατά της πολιομυελίτιδας στις Ηνωμένες Πολιτείες¹², ερευνητές προσπάθησαν να εξετάσουν εάν υπάρχει σύνδεση μεταξύ της εμφάνισης της πολιομυελίτιδας και του αριθμού των πωλησιών αναψυκτικών. Κατά τη διάρκεια του έτους, κατέγραψαν σε πίνακες τον αριθμό των αναψυκτικών που καταναλώθηκαν κάθε εβδομάδα, καθώς και τον αριθμό των νέων κρουσμάτων πολιομυελίτιδας. Τα δεδομένα έδειξαν έντονη θετική συσχέτιση, καθώς τις εβδομάδες με αυξημένη κατανάλωση αναψυκτικών σημειώνονταν περισσότερα κρούσματα, ενώ σε περιόδους με μειωμένη κατανάλωση τα κρούσματα ήταν λιγότερα. Ωστόσο, η ιδέα ότι τα αναψυκτικά προκαλούν πολιομυελίτιδα

⁸Στο πλαίσιο της Θεωρίας Δειγματοληψίας έχουν αναπτυχθεί διάφορα σχέδια τυχαίας δειγματοληψίας, που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα περιπτώσεων. Ορισμένα από τα πιο γνωστά είναι η **στρωματοποιημένη δειγματοληψία** (*stratified sampling*), η **συστηματική δειγματοληψία** (*systematic sampling*), η **δειγματοληψία κατά συντάξεις** (*cluster sampling*) και η **διαστρωμάτωση δειγματοληψία κατά συντάξεις** (*two stages cluster sampling*). Παρά τις διαφορές τους, βασίζονται όλες στην απλή τυχαία δειγματοληψία, η οποία διασφαλίζει τη στατιστική εκτίμηση του μεγέθους των δειγματοληπτικών οφθαλμάτων και συμβάλλει στον περιορισμό τους.

⁹Η μεταβλητότητα μεταξύ των τυχαίων δειγμάτων, όπως ήδη έχει αναφερθεί, δεν μπορεί να εξαλειφθεί. Ωστόσο, η **θεωρία πιθανοτήτων** παρέχει τα μέσα για την περιγραφή της, μέσω του καθορισμού ενός **περιθωρίου σφάλματος με συγκεκριμένη πιθανότητα**. Για παράδειγμα, εάν ένα δείγμα δείχνει ότι το 45% των ατόμων φοβάται να βγει τη νύχτα και το περιθώριο σφάλματος είναι 2% με πιθανότητα 95%, τότε μπορούμε να πούμε ότι, με πιθανότητα (εμπιστοσύνη) 95%, το ποσοστό των ατόμων στον πληθυσμό που φοβάται να βγει τη νύχτα κυμαίνεται μεταξύ 43% και 47%.

¹⁰Είναι γνωστή εξάλλου η φράση “*figures do not lie, but liars figure*” (οι αριθμοί δεν ψεύδονται αλλά οι ψεύστες αριθμούς).

¹¹Μερικά από τα πιο **συνηθισμένα λάθη** που έχουν γίνει σε **στατιστικές έρευνες** περιλαμβάνουν: 1) Μη αντιπροσωπευτικό **δείγμα** 2) Λανθασμένος σχεδιασμός ερωτηματολογίου 3) Σφάλμα μη απόκρισης 4) Παραβίαση των στατιστικών υποθέσεων 5) Υπερβολική ελπίδα από μικρά δείγματα 6) Παραπλανητική παρουσίαση δεδομένων 7) Αγνόηση της μεροληψίας (bias) 8) Παρανόηση της συσχέτισης και της αιτιότητας

¹²Η έρευνα έγινε στις Ηνωμένες Πολιτείες στις δεκαετίες του 1940 και του 1950, πριν από την εισαγωγή του εμβολίου Salk κατά της πολιομυελίτιδας το 1955.

είναι λανθασμένη, καθώς αν ίσχυε, η απαγόρευση των αναψυκτικών θα μείωνε τη νόσο. Στην πραγματικότητα, οι εξάρσεις της πολιομυελίτιδας συνέυπταν με το καλοκαίρι, μια περίοδο που παρατηρείται αυξημένη κατανάλωση αναψυκτικών. Ο καθοριστικός παράγοντας ήταν η εποχή του έτους, η οποία επηρεάζει τόσο την κατανάλωση αναψυκτικών όσο και την εμφάνιση κρουσμάτων. Αν οι ερευνητές είχαν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα αναψυκτικά προκαλούν πολιομυελίτιδα, δεν θα έφταγε η Στατιστική αλλά η άγνοιά τους για βασικές αρχές της, όπως ότι η **συσχέτιση δεν συνεπάγεται αιτιότητα**. Τα αιτιολογικά συμπεράσματα απαιτούν πειραματικές αποδείξεις και όχι απλή παρατήρηση.

Όταν τα Μεγάλα Δείγματα Αποτυγχάνουν - Η Περίπτωση της Literary Digest: Η δημοσκόπηση της *Literary Digest* το 1936 αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα στατιστικής έρευνας λόγω μεθοδολογικών λαθών. Η εφημερίδα προσπάθησε να προβλέψει τις προεδρικές εκλογές των Ηνωμένων Πολιτειών, στέλνοντας **10 εκατομμύρια ερωτηματολόγια**, από τα οποία **απάντησαν περίπου 2,4 εκατομμύρια**. Παρόλο που το μέγεθος του δείγματος ήταν εντυπωσιακό, η έρευνα προέβλεψε λανθασμένα ότι ο υποψήφιος των Ρεπουμπλικανών Alf Landon θα κέρδιζε με μεγάλη διαφορά τον Franklin D. Roosevelt. Στην πραγματικότητα, ο Roosevelt κέρδισε με το 60,8% της ψήφου.

Το βασικό πρόβλημα ήταν η **μη αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος**, το οποίο προερχόταν κυρίως από εύπορα κοινωνικά στρώματα (κατόχους τηλεφώνων και αυτοκινήτων και συνδρομητές περιοδικών), αγνοώντας τις φτωχότερες τάξεις που υποστηρίζαν τον Roosevelt. Επιπλέον, η **μεροληψία συμμετοχής λόγω της αυτο-επιλογής (self selected)** των απαντητών και η **αγνόηση** του κοινωνικοοικονομικού πλαισίου της εποχής επιδείνωσαν τα προβλήματα της έρευνας. Το περιστατικό υπογράμμισε ότι **το μεγάλο μέγεθος δείγματος δεν αντισταθμίζει την κακή μεθοδολογία**. Η αποτυχία της *Literary Digest* κατέστησε σαφές ότι η αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος και η σωστή ανάλυση των δεδομένων είναι ζωτικής σημασίας για την ακρίβεια των στατιστικών προβλέψεων.

Μεροληψία και Πρόβλεψη: Τα Λάθη των Εκλογικών Δημοσκοπήσεων του 1948: Στις αμερικανικές προεδρικές εκλογές του 1948, οι δημοσκοπήσεις έμειναν στην ιστορία για το σημαντικό σφάλμα τους, καθώς προέβλεπαν λανθασμένα τη νίκη του Ρεπουμπλικανού υποψηφίου Τόμας Ντιούι έναντι του Δημοκρατικού Χάρι Τρούμαν. Το σφάλμα αυτό αποδόθηκε σε πολλαπλές ελλείψεις στη μεθοδολογία και την ανάλυση των δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, οι δημοσκοπήσεις σταμάτησαν τη συλλογή δεδομένων αρκετές εβδομάδες πριν από τις εκλογές, βασιζόμενες στην υπόθεση ότι οι τάξεις του εκλογικού σώματος είχαν σταθεροποιηθεί, γεγονός που οδήγησε στην **παράβλεψη μεταγενέστερων μεταβολών** στην πρόθεση ψήφου. Παράλληλα η δειγματοληψία ήταν μεροληπτική και μη αντιπροσωπευτική, με υπερβολική έμφαση σε πιο εύπορους και αστικούς ψηφοφόρους (οι οποίοι έκλιναν προς τον Ντιούι, αποκλείοντας ταυτόχρονα εργατικές και αγροτικές ομάδες που στήριζαν τον Τρούμαν), την ίδια στιγμή που η χρήση τηλεφωνικών δημοσκοπήσεων, σε μια εποχή που τα τηλέφωνα δεν ήταν διαδεδομένα σε όλο τον πληθυσμό, ενίσχυσε τη δειγματοληπτική μεροληψία. Τέλος, η υπερβολική εξάρτηση από τις στατιστικές συσχετίσεις χωρίς εκτενή ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων οδήγησε σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Το παράδειγμα αυτό αποτελεί σημείο καμπής στην ιστορία των δημοσκοπήσεων, υπογραμμίζοντας τη σημασία της συνεχούς παρακολούθησης των τάσεων, της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος και της προσεκτικής ερμηνείας των δεδομένων.



Η Μελέτη Wakefield για τα Εμβόλια και τον Αυτισμό: Η μελέτη του Andrew Wakefield που δημοσιεύθηκε το 1998 στο *The Lancet*²³ ισχυριζόταν ότι υπήρχε σύνδεση μεταξύ **του εμβολίου MMR** (λαράς, παρωτίτιδας, ερυθράς) και της **εμφάνισης αυτισμού**. Η έρευνα αυτή, αν και απέσυρε αργότερα το περιοδικό, έγινε σημείο αναφοράς για το αντιμεβολιαστικό κίνημα, παρά τα σοβαρά της μεθοδολογικά και ηθικά προβλήματα. Καταρχάς, το δείγμα της ήταν εξαιρετικά μικρό (μόλις 12 παιδιά), γεγονός που δεν επιτρέπει την εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων. Επιπλέον, η επιλογή του δείγματος δεν ήταν τυχαία αλλά βασίστηκε σε υποκειμενικά κριτήρια, δημιουργώντας μεροληψία. Ακόμη, ο Wakefield δεν αποκάλυψε ότι λάμβανε χρηματοδότηση από νομικούς που αναζητούσαν αποδείξεις κατά του εμβολίου MMR, κάτι που παραβιάζει τους κανόνες δεοντολογίας της επιστημονικής έρευνας. Στατιστικά λάθη, όπως η αποτυχία ελέγχου για συγχυτικούς παράγοντες, επιδείνωσαν τη συνολική αξιοπιστία της μελέτης. Τέλος, δεν υπήρξε σαφής αιτιώδης σύνδεση μεταξύ του εμβολίου και του αυτισμού, ενώ πολυάριθμες μεταγενέστερες, μεγάλης κλίμακας έρευνες δεν βρήκαν καμία τέτοια συσχέτιση. Το σκάνδαλο Wakefield

²³ Το *The Lancet* είναι ένα από τα πιο έγκριτα και γνωστά ιατρικά περιοδικά παγκοσμίως. Δημοσιεύει ερευνητικά άρθρα, κριτικές, και μελέτες που σχετίζονται με διάφορους τομείς της ιατρικής.

αποτελέσει παράδειγμα του πώς η κακή επιστήμη μπορεί να βλάψει τη δημόσια υγεία και την εμπιστοσύνη στους επιστημονικούς θεσμούς.

Το Σφάλμα του Facebook στις Προβολές Βίντεο: Το 2016, αποκαλύφθηκε ότι το Facebook είχε παρουσιάσει παραπλανητικά στατιστικά στοιχεία σχετικά με τον μέσο χρόνο προβολής των βίντεο στην πλατφόρμα του. Το πρόβλημα αφορούσε την εσφαλμένη μεθοδολογία υπολογισμού, η οποία είχε σημαντικές επιπτώσεις για τους διαφημιζόμενους και τις εταιρείες που βασίζονταν στα δεδομένα αυτά για τη στρατηγική τους. Συγκεκριμένα, ο **αλγόριθμος του Facebook** υπολόγιζε τον μέσο χρόνο προβολής εξαιρώντας από τον υπολογισμό όλες τις προβολές διάρκειας κάτω των τριών δευτερολέπτων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την τεχνητή διόγκωση του μέσου όρου, δίνοντας την εντύπωση ότι οι χρήστες παρακολουθούσαν βίντεο για μεγαλύτερο διάστημα από ότι στην πραγματικότητα.



Το βασικό σφάλμα ήταν η **μεροληπτική επιλογή δεδομένων (biased sampling)**, καθώς εξαιρέθηκαν οι μικρές διάρκειες προβολής που αντιπροσωπεύουν ένα σημαντικό μέρος της κατανάλωσης περιεχομένου. Η έλλειψη σαφούς ορισμού του τι συνιστά “προβολή” βίντεο παραβίασε τις αρχές διαφάνειας και αξιοπιστίας στις στατιστικές αναλύσεις. Επιπλέον, η έλλειψη επαρκούς ελέγχου και τεκμηρίωσης στα δεδομένα που δημοσιοποιήθηκαν δημιούργησε μια παραπλανητική εικόνα για την αποτελεσματικότητα του περιεχομένου βίντεο. Οι παραποιημένοι μέσοι όροι οδήγησαν διαφημιζόμενους να δαπανήσουν μεγάλα ποσά σε καμπάνιες βίντεο, θεωρώντας ότι το Facebook προσέφερε υψηλά επίπεδα αφοσίωσης των χρηστών. Η ανακάλυψη του σφάλματος προκάλεσε αγωγές εναντίον της εταιρείας, καθώς οι διαφημιζόμενοι υποστήριξαν ότι οι ανακριβείς μετρήσεις επηρέασαν αρνητικά τις επενδύσεις τους.

Η Παγίδα της Μεροληψίας Επιβίωσης - Τι Μπορεί να Μας Κρύβουν τα Δεδομένα: Η μεροληψία της επιβίωσης (*survivorship bias*) είναι μια κοινή αλλά επικίνδυνη λογική παγίδα που **παραβλέπει τις περιπτώσεις αποτυχίας** ή τις ανεπιτυχείς καταστάσεις όταν αναλύουμε τα δεδομένα. Αντί να εξετάζουμε το σύνολο των δεδομένων, εστιάζουμε παραπλανητικά συμπεράσματα. Μια από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπου εφαρμόστηκε η έννοια της **μεροληψίας της επιβίωσης** είναι η εργασία του Ούγγρου στατιστικού Abraham Wald¹⁴ κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου. Στην αρχή της δεκαετίας του 1940, οι Ηνωμένες Πολιτείες αντιμετώπιζαν την πρόκληση της προστασίας των αεροσκαφών τους κατά τη διάρκεια των στρατιωτικών αποστολών. Το πρόβλημα ήταν ασαφές: **πολλά από τα αεροπλάνα που συμμετείχαν στις αποστολές του Β' Παγκοσμίου Πολέμου επιστρέφοντας παρουσίαζαν μεγάλες ζημιές σε διάφορα σημεία, κυρίως στα φτερά και στην ουρά τους.** Η αρχική σκέψη των στρατηγών ήταν να ενισχυθούν αυτές οι περιοχές, πιστεύοντας ότι αυτές ήταν οι πιο ευάλωτες και απαιτούσαν περισσότερη προστασία. Ωστόσο, οι στρατηγοί δεν είχαν πλήρη εικόνα¹⁵ του προβλήματος, καθώς επικεντρώνονταν μόνο σε εκείνα τα αεροσκάφη που επέστρεφαν. Αυτό οδήγησε στη σύσταση να ενισχυθούν τα φτερά και οι ουρές, καθώς αυτά τα σημεία είχαν τις περισσότερες ζημιές στα επιστρέφοντα αεροσκάφη. Εδώ, όμως, υπήρχε μια σοβαρή παράλειψη: **τα αεροσκάφη που δεν επέστρεφαν δεν**



¹⁴Ο **Abraham Wald** ήταν Ουγγροαμερικανός μαθηματικός, γνωστός για τη συμβολή του στη στατιστική και τη θεωρία αποφάσεων. Γεννήθηκε το 1902 στην πόλη Cluj της Αυστροουγγαρίας (σημερινή Ρουμανία) σε οικογένεια Εβραίων. Σπούδασε Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης, όπου άριστευσε, παρά τις οικονομικές δυσκολίες της οικογένειάς του. Το 1938, λόγω της ανόδου του ναζισμού, μετανάστευσε στις Ηνωμένες Πολιτείες, όπου εργάστηκε αρχικά στο **Cowles Commission for Research in Economics** και στη συνέχεια στο **Columbia University**. Ο Wald συνέβαλε επίσης στην ανάπτυξη της θεωρίας της στατιστικής απόφασης και του διαδοχικού ελέγχου υποθέσεων. Έχασε τη ζωή του το 1950 σε αεροπορικό δυστύχημα στην Ινδία, ενώ βρισκόταν σε επιστημονική αποστολή. Το έργο του άφησε ισχυρή κληρονομιά στα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους.

¹⁵Η **μεροληψία της επιβεβαίωσης (confirmation bias)** είναι μια γνωστική προκατάληψη στην οποία τα άτομα τείνουν να αναζητούν, να ερμηνεύουν ή να θυμούνται πληροφορίες με τρόπο που επιβεβαιώνει τις προϋπάρχουσες πεποιθήσεις τους, ενώ αγνοούν ή υποτιμούν στοιχεία που τις αντικρούουν. Αυτή η προκατάληψη μπορεί να επηρεάσει τη λήψη αποφάσεων και την κρίση, περιορίζοντας την αντικειμενικότητα σε νέες πληροφορίες.

αναλύονταν καθόλου. Ο Abraham Wald, ένας εξαιρετικός στατιστολόγος που εργάστηκε για τον στρατό των ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, προσέγγισε το πρόβλημα με μια διαφορετική οπτική. Αναγνώρισε ότι τα αεροσκάφη που επιστρέφουν είναι τα επιβιώσαντα, και ότι, κατά συνέπεια, τα δεδομένα από αυτά τα αεροπλάνα δεν παρέχουν μια πλήρη εικόνα της πραγματικής επικινδυνότητας που αντιμετωπίζουν τα αεροσκάφη. Τα αεροπλάνα που καταρρίπτονται ή καταστρέφονται στη διάρκεια μιας αποστολής δεν καταγράφονται στις αναφορές, και ως εκ τούτου, οι περιοχές που παρουσιάζουν τις περισσότερες ζημιές στα επιστρεφόμενα αεροσκάφη δεν είναι απαραίτητα οι πιο επικίνδυνες. Η καινοτόμος σκέψη του Wald ήταν να επικεντρωθεί στα σημεία που δεν παρουσίαζαν ζημιές στα επιστρεφόμενα αεροσκάφη. Αυτά τα αεροσκάφη, επειδή είχαν επιβιώσει και είχαν επιστρέψει, δεν είχαν καταστραφεί από τα συγκεκριμένα σημεία. Αντίθετα, τα αεροσκάφη που καταστράφηκαν ή καταρρίφθηκαν κατά τη διάρκεια των αποστολών, πολύ πιθανό να είχαν υποστεί ζημιές σε άλλα κρίσιμα μέρη, όπως οι κινητήρες ή τα συστήματα καυσίμου. Με αυτή την παρατήρηση, ο



Wald πρότεινε την **αλλαγή της στρατηγικής**: αντί να ενισχυθούν τα σημεία των αεροσκαφών που ήδη παρουσίαζαν ζημιές, έπρεπε να ενισχυθούν τα μέρη που δεν είχαν ζημιές στα επιστρεφόμενα αεροσκάφη. Η αλλαγή αυτή είχε καταλυτική σημασία και είχε άμεσα αποτελέσματα στην αποτελεσματικότητα των αεροπορικών αποστολών, μειώνοντας σημαντικά τις απώλειες και **βελτιώνοντας την επιβίωση των αεροσκαφών**. Η ανάλυση του Wald αναγνώρισε τη μεροληψία της επιβίωσης, και έδωσε ένα παράδειγμα για το πώς η σωστή ανάλυση των δεδομένων μπορεί να οδηγήσει σε μια στρατηγική που βασίζεται στην πληρέστερη και αντικειμενικότερη εικόνα των κινδύνων.

Οι στατιστικές μέθοδοι εκφράζουν την ανθρώπινη προσπάθεια να κατανοήσει και να αποτυπώσει τη γενικότητα των φαινομένων που επηρεάζουν τη ζωή μας, προσφέροντας μια συστηματική προσέγγιση στην ανάλυση του χάους των μεμονωμένων γεγονότων και παρατηρήσεων. Μέσα από την ποικιλία των ατομικών χαρακτηριστικών αναζητούμε πρότυπα και μια καθολική εικόνα του πληθυσμού, η οποία ξεπερνά τη μελέτη των μεμονωμένων περιπτώσεων και αποκαλύπτει **βαθύτερες αλήθειες για τη μέση συμπεριφορά και τη ροή των πραγμάτων**.

Συμπληρωματικά, η δειγματοληψία, ως θεμελιώδης πυλώνας της στατιστικής επιστήμης, ενσαρκώνει αυτήν ακριβώς την αναζήτηση για κατανόηση και ανάλυση της πολυπλοκότητας των φαινομένων. Από τις πρώτες εφαρμογές της έως σήμερα, αποτελεί εργαλείο που συνδυάζει επιστημονική ακρίβεια με πρακτική εφαρμογή, υπογραμμίζοντας τη σημασία της τυχαιότητας και της αντιπροσωπευτικότητας. Σε έναν **κόσμο γεμάτο ποικιλομορφία και αβεβαιότητα**, η δειγματοληψία δεν είναι απλώς μια **μεθοδολογία** αλλά και ένας καθρέφτης της πολυπλοκότητας της πραγματικότητας, προσφέροντας τη βάση για τεκμηριωμένες αποφάσεις και έγκυρα συμπεράσματα.



Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Δαμιανού, Χ. (2006). *Μεθοδολογία Δειγματοληψίας, Τεχνικές και εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις «Σοφία».
- Έκδοση του Ελληνικού Στατιστικού Ινστιτούτου (2009). *ΛΕΞΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ*. Αθήνα.
- Σιάκας, Γ. (2017). *Η Μέτρηση της Κοινής Γνώμης*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαδόπουλος
- Παπαδόπουλος, Γ. (2007). *Στατιστική Προέγγιση Προβλημάτων: Μια Γενική Επισκόπηση*. Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών (www.aua.gr/gpapadopoulos)
- Φαρμάκης, Ν. (2001). *ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, Περιληπτική Θεωρία-Ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Α. και Π. Χριστοδουλίδη.
- Cochran, W. G. (1977). *Sampling techniques* (3rd Edition). New York: John Wiley and Sons.
- Thompson, S. (1992). *Sampling*. New York, Chichester, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons, Inc



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

85^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

18 Ιανουαρίου 2025

Οι λύσεις των προβλημάτων

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$A = \overline{a\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 30 και υπόλοιπο 16.

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε ότι τα α, β, γ είναι ψηφία με $\alpha \neq 0$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$A = \overline{a\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma = 30(\alpha + \beta + \gamma) + 16 \Leftrightarrow$$

$$70\alpha - 20\beta - 29\gamma = 16 \Leftrightarrow 70\alpha - 20\beta = 29\gamma + 16 \Leftrightarrow 10(7\alpha - 2\beta) = 29\gamma + 16.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος $29\gamma + 16$ είναι πολλαπλάσιο του 10. Αυτό συμβαίνει μόνο για την τιμή $\gamma = 6$.

Η τιμή $\gamma = 6$ μπορεί να προκύψει άμεσα από την εξίσωση $A = 30(\alpha + \beta + \gamma) + 16$, από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός A έχει τελευταίο ψηφίο το 6.

Άρα έχουμε την εξίσωση: $10(7\alpha - 2\beta) = 190 \Leftrightarrow 7\alpha - 2\beta = 19 \Leftrightarrow 7\alpha = 2\beta + 19$.

Επειδή το β είναι ψηφίο οι δυνατές τιμές του $7\alpha = 2\beta + 19$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 19 και μικρότερες ή ίσες του 37. Επομένως οι δυνατές τιμές του ψηφίου α είναι μεγαλύτερες του 2 και μικρότερες του 6. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να προκύψει και ως εξής:

Επειδή $0 \leq \beta \leq 9$, έχουμε $0 \leq 2\beta \leq 18 \Leftrightarrow 19 \leq 2\beta + 19 \leq 37 \Leftrightarrow 19 \leq 7\alpha \leq 37$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{7} \leq \alpha \leq \frac{37}{7} \Leftrightarrow \alpha \in \{3, 4, 5\}.$$

- Αν $\alpha = 3$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 2 \Rightarrow \beta = 1$ και $A = 316$, ο οποίος απορρίπτεται, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του είναι 10 και είναι μικρότερο από το υπόλοιπο της διαίρεσης.
- Αν $\alpha = 4$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 9$, απορρίπτεται.
- Αν $\alpha = 5$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 16 \Rightarrow \beta = 8$ και $A = 586$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $B\hat{A}Z = 3 \cdot Z\hat{A}\Gamma$ και $BZ = BA$. Έστω Θ σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Theta\hat{A}Z = Z\hat{A}\Gamma$ και έστω K το σημείο τομής της $A\Theta$ με την διχοτόμο της γωνίας B .

(α) Να εκφράσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει της γωνίας $Z\hat{A}\Gamma = \varphi$.

(β) Να αποδείξετε ότι $AZ = K\Gamma$.

(γ) Αν ισχύει $Z\hat{K}\Gamma = 20^\circ$, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$.

η οποία δίνει

$$\alpha\beta = 1.$$

Συνεπώς, μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β είναι η

$$x^2 + 45x + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της διαφοράς $\alpha - \beta$.

Λύση (1^{ος} τρόπος) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \\ &(\alpha - \beta)^3 - 1^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha - \beta - 1)((\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta) + 1) + 3\alpha\beta(\alpha - \beta - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha - \beta - 1)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha - 2\beta + 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + 1)^2 + (\beta - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 &\Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.\end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος. Έστω $x = \alpha - \beta$, οπότε θέτοντας $a = x + \beta$ στην $\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta - 1 = 0$ παίρνουμε

$$(x + \beta)^3 - \beta^3 - 3(x + \beta)\beta - 1 = 0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει $x^3 + 3\beta^2x + 3\beta x^2 - 3\beta x - 3\beta^2 - 1 = 0$.

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $x - 1$ παίρνουμε $(x - 1)(x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1) = 0$,

Οπότε $x = 1$ ή $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1 = 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$ είναι ίση με

$$\Delta = (3\beta + 1)^2 - 4(3\beta^2 + 1) = -3\beta^2 + 6\beta - 3 = -3(\beta - 1)^2.$$

Άρα το τριώνυμο $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$ μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta = 1 \text{ και } x = -\frac{3\beta + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της διαφοράς $x = \alpha - \beta$ είναι το 1 και το -2.

3^{ος} τρόπος. Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενο τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 &\Leftrightarrow \alpha^3 + (-\beta)^3 + (-1)^3 = 3\alpha(-\beta)(-1) \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 &\Leftrightarrow \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.\end{aligned}$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$|2x + 2| - |2x - 8| = a$$

(B)

με άγνωστο το $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρο.

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου a :

(α) Αν η εξίσωση (B) έχει άπειρες λύσεις.

(β) Αν η εξίσωση (B) έχει μοναδική λύση.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θα αναζητήσουμε λύσεις της εξίσωσης σε διάφορα διαστήματα που θα προκύψουν από την αλλαγή προσήμου των παραστάσεων $2x + 2$ και $2x - 8$ που βρίσκονται στην εξίσωση με την απόλυτη τιμή τους. Επειδή

$$2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1, 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ και } 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1,$$

$$2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x < 4, \quad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ και } 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 4,$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $x \leq -1$. Τότε $(E) \Leftrightarrow -2x - 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a + 10$,
η οποία έχει απειρία λύσεων, δηλαδή κάθε $x \leq -1$, αν $a = -10$, ενώ είναι αδύνατη για $a \neq -10$.

(β) $-1 < x < 4$. Τότε $(E) \Leftrightarrow 2x + 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 4 \cdot x = a + 6 \Leftrightarrow x = \frac{a+6}{4}$,

δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση για κάθε a τέτοιο ώστε

$$-1 < x = \frac{a+6}{4} < 4 \Leftrightarrow -4 < a + 6 < 16 \Leftrightarrow -10 < a < 10.$$

(γ) $x \geq 4$. Τότε $(E) \Leftrightarrow 2x + 2 - (2x - 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a - 10$,
η οποία έχει απειρία λύσεων, δηλαδή κάθε $x \geq 4$, αν $a = 10$, ενώ είναι αδύνατη για $a \neq 10$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε: Αν η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις, τότε
 $a = -10$ ή $a = 10$.

Αν η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση, τότε $-10 < a < 10$.

(2^{ος} τρόπος) Γραφική επίλυση

Παρατηρούμε ότι $|2x + 2| = 2|x + 1|$ και $|2x - 8| = 2|x - 4|$, οπότε η (E) γράφεται
ισοδύναμα $|x + 1| - |x - 4| = \frac{a}{2}$.

Έχουμε, λοιπόν, τις περιπτώσεις

- $x < -1$. Τότε $|x + 1| = -x - 1$, και $|x - 4| = -x + 4$, οπότε
 $|x + 1| - |x - 4| = (-x - 1) - (-x + 4) = -x - 1 + x - 4 = -5$.

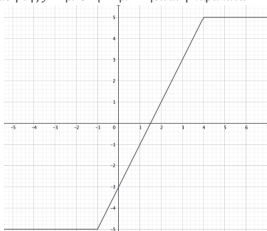
- $-1 \leq x < 4$. Τότε $|x + 1| = x + 1$, και $|x - 4| = -x + 4$,

Οπότε $|x + 1| - |x - 4| = (x + 1) - (-x + 4) = x + 1 + x - 4 = 2x - 3$.

- $4 \leq x$. Τότε $|x + 1| = x + 1$, και $|x - 4| = x - 4$, οπότε

$$|x + 1| - |x - 4| = (x + 1) - (x - 4) = 5.$$

Η γραφική παράσταση της $y = |x + 1| - |x - 4|$ είναι η παρακάτω:



(1) Η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις, αν, και μόνο αν, η οριζόντια ευθεία $y = \frac{a}{2}$ τέμνει την $y = |x + 1| - |x - 4|$ σε άπειρα το πλήθος σημεία. Από την παραπάνω γραφική παράσταση, αυτό συμβαίνει για την $y = 5$ η οποία προκύπτει όταν $a = 10$, και την $y = -5$ για $a = -10$, και μόνο για αυτές.

- (11) Η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν η οριζόντια ευθεία $y = \frac{\alpha}{2}$ τέμνει την $y = |x + 1| - |x - 4|$ σε ακριβώς ένα σημείο. Αυτό συμβαίνει, αν, και μόνο αν, $-5 < \frac{\alpha}{2} < 5$, δηλαδή, αν, και μόνο αν, $-10 < \alpha < 10$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ότι οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ότι οι αριθμοί

$$\frac{3\mu - 1}{\nu} \quad \text{και} \quad \frac{2\nu - 1}{\mu}$$

είναι θετικοί ακέραιοι. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του ζεύγους (μ, ν) .

Λύση

Έστω ότι $\frac{3\mu - 1}{\nu} = \kappa$ και $\frac{2\nu - 1}{\mu} = \lambda$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι

$$3\mu - 1 = \kappa\nu \quad \text{και} \quad 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow 6\mu - 2 = 2\kappa\nu \quad \text{και} \quad 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow$$

$$6\mu - 2 = \kappa(\lambda\mu + 1) \Rightarrow (6 - \kappa\lambda)\mu = \kappa + 2 \Rightarrow \mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda}.$$

Επειδή ο μ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $6 - \kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda < 6$. Επομένως είναι κ, λ θετικοί ακέραιοι και $0 < \kappa\lambda < 6$, $\mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda}$ και $\nu = \frac{3\mu - 1}{\kappa}$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa\lambda = 1 \Rightarrow \kappa = \lambda = 1 \Rightarrow \mu = \frac{3}{5}$, μη δεκτή τιμή
- $\kappa\lambda = 2 \Rightarrow \kappa = 2, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 2 \Rightarrow (\mu, \nu) = (1, 1)$ ή $(\mu, \nu) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$, μη δεκτή
- $\kappa\lambda = 3 \Rightarrow \kappa = 3, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 3 \Rightarrow (\mu, \nu) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, μη δεκτή ή $(\mu, \nu) = (1, 2)$.
- $\kappa\lambda = 4 \Rightarrow \kappa = 2, \lambda = 2$ ή $\kappa = 4, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 4$
 $\Rightarrow (\mu, \nu) =$ μη δεκτή, ή $(\mu, \nu) = (3, 2)$ ή $(\mu, \nu) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, μη δεκτή.
- $\kappa\lambda = 5 \Rightarrow \kappa = 5, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 5 \Rightarrow (\mu, \nu) = (7, 4)$ ή $(\mu, \nu) = (3, 8)$

Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (μ, ν) είναι: $(\mu, \nu) \in \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (7, 4), (3, 8)\}$.

2ος τρόπος. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. $\nu \leq \mu$. Τότε $0 < \frac{2\nu - 1}{\mu} < \frac{2\nu}{\mu} \leq 2$, οπότε αναγκαστικά $\frac{2\nu - 1}{\mu} = 1 \Rightarrow 2\nu - 1 = \mu$.

Τότε ο αριθμός $\frac{3\mu - 1}{\nu} = \frac{3(2\nu - 1) - 1}{\nu} = 6 - \frac{4}{\nu}$ είναι ακέραιος, αν, και μόνο αν, $\nu = 1, 2$ ή 4 .

Αφού $\mu = 2\nu - 1$, παίρνουμε $\mu = 1, 3$ ή 7 , αντίστοιχα, οπότε $\frac{2\nu - 1}{\mu} = 1$, για τα ζεύγη $(\mu, \nu) = (1, 1), (3, 2)$, και $(7, 4)$.

2. $\mu < \nu$. Τότε $0 < \frac{3\mu - 1}{\nu} < \frac{3\mu}{\nu} < 3$, οπότε $\frac{3\mu - 1}{\nu} = 1$ ή $2 \Rightarrow 3\mu - 1 = \nu$ ή $3\mu - 1 = 2\nu$.

Εξετάζουμε τις υποπεριπτώσεις:

- $3\mu - 1 = \nu$. Τότε $\frac{2\nu - 1}{\mu} = \frac{6\mu - 3}{\mu} = 6 - \frac{3}{\mu}$, οπότε $\mu = 1$ και $\nu = 2$ ή $\mu = 3$ και $\nu = 8$ που προφανώς γίνονται δεκτές.

- $3\mu - 1 = 2\nu$. Τότε $\frac{2\nu - 1}{\mu} = \frac{3\mu - 2}{\mu} = 3 - \frac{2}{\mu}$, οπότε $\mu = 1$ ή $\mu = 2$ που δεν δίνουν ακέραιες

λύσεις για τον ν με $\nu > \mu$.

Συνεπώς, οι λύσεις είναι τα εξής πέντε ζεύγη: $(\mu, \nu) = (1, 1), (3, 2), (7, 4), (1, 2)$ και $(3, 8)$.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma > B\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ προς το Γ τέτοιο ώστε $BA = AB$ και $B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot \Gamma\hat{A}\Delta$. Έστω σημείο E στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$ και έστω H το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος BE με το ύψος AZ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔH είναι κάθετη προς την ευθεία AB .

(γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.

Λύση

(α) Θέτουμε $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \varphi$, οπότε θα είναι $\widehat{A} = 2\varphi$.
Θέτουμε επίσης $\widehat{\Gamma\Delta E} = \omega = \widehat{E\Delta\Lambda}$ (αφού $\Gamma\Delta E$ ισοσκελές τρίγωνο από υπόθεση). Τότε θα είναι $\widehat{\Gamma} = 2\omega$ (ως εξωτερική στο τρίγωνο $\Gamma\Delta E$) και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 2\omega$.

Θέτουμε επίσης $\widehat{A\widehat{D}E} = \theta$.

Επειδή η γωνία $\widehat{E\Delta\Lambda}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\widehat{D}E$ έχουμε την ισότητα:

$$\omega = \varphi + \theta. \quad (1)$$

Επειδή $B\widehat{D} = A\widehat{D}$ το τρίγωνο $AB\widehat{D}$ είναι ισοσκελές με

$$B\widehat{\Delta\Lambda} = A\widehat{\Delta\Lambda} \Rightarrow 3\varphi = \omega + \theta. \quad (2)$$

Από το τρίγωνο $AB\widehat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \varphi + 2\omega = 90^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\omega = \varphi + \theta = 3\varphi - \theta \Rightarrow \varphi = \theta \quad (4)$$

οπότε από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$\omega = 2\varphi \text{ και } 5\varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 18^\circ, \theta = 18^\circ, \omega = 36^\circ \text{ και } \widehat{A} = 36^\circ, \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 72^\circ.$$

(β) Από την ισότητα $\varphi = \theta$ προκύπτει ότι $EA = ED$ και αφού $B\widehat{D} = A\widehat{D}$, έπεται ότι η ευθεία BE είναι μεσοκάθετη της πλευράς AD του ισοσκελούς τριγώνου $AB\widehat{D}$. Επομένως το σημείο H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\widehat{D}$, οπότε $DH \perp AB$.

(γ) Επιπλέον η ευθεία BE διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B}$, οπότε $\widehat{DBE} = \omega = 36^\circ = \widehat{E\Delta B}$, οπότε $EB = ED$ και αφού $EA = ED$, έπεται ότι το σημείο E είναι το περίκεντρο του τριγώνου $AB\widehat{D}$.

2ος τρόπος. Έστω $\varphi = \widehat{\Delta\Lambda\Gamma}$. Αφού το ύψος στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, και αφού $B\widehat{\Lambda\Gamma} = 2 \cdot \Delta\widehat{\Lambda\Gamma}$, έχουμε

$$B\widehat{\Lambda Z} = Z\widehat{\Lambda\Gamma} = \Delta\widehat{\Lambda\Gamma} = \varphi.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\widehat{D}$ είναι $B\widehat{\Delta\Lambda} = A\widehat{\Delta\Lambda} = 3\varphi$, οπότε η γωνία $B\widehat{\Gamma\Lambda}$ ως εξωτερική στο τρίγωνο $A\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίση με

$$B\widehat{\Gamma\Lambda} = \Gamma\widehat{\Delta\Lambda} + \Gamma\widehat{\Delta\Lambda} = \varphi + 3\varphi = 4\varphi.$$

Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $AB\widehat{\Gamma}$, βρίσκουμε

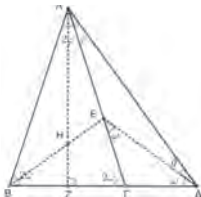
$$\frac{180^\circ - 2\varphi}{2} = B\widehat{\Gamma\Lambda} = 4\varphi$$

και άρα $\varphi = 18^\circ$. Εύκολα βρίσκουμε τις γωνίες του τριγώνου $AB\widehat{\Gamma}$:

$$\widehat{A} = 2\varphi = 36^\circ, \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 4\varphi = 72^\circ.$$

Επιπλέον, αφού η γωνία $B\widehat{\Gamma\Lambda}$ είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο $E\widehat{\Gamma\Delta}$, παίρνουμε $E\widehat{\Delta\Gamma} = \frac{B\widehat{\Gamma\Lambda}}{2} = 2\varphi$, και άρα

$$E\widehat{\Delta\Lambda} = \Gamma\widehat{\Delta\Lambda} - E\widehat{\Delta\Gamma} = 3\varphi - 2\varphi = \varphi = \Delta\widehat{\Lambda E}.$$



Έτσι, το τρίγωνο $\Delta E \Delta$ είναι ισοσκελές με $AE = E\Delta$. Αφού $AB = BD$, η ευθεία BE είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AD , οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΔBD , η BE διχοτομεί την γωνία ΔBD , δίνοντας

$$\angle ABE = \angle EBD = \frac{\angle ABD}{2} = \frac{B\hat{\Gamma}A}{2} = 2\varphi.$$

Συνεπώς, από τα ισοσκελή τρίγωνα ΔEB , ΔED και $\Delta E\Delta$ παίρνουμε $AE = BE = DE$, δηλ. το E είναι το περίκεντρο του ΔBD . Τέλος, αφού $AZ \perp BD$ και $BE \perp AD$, το σημείο H είναι το ορθόκεντρο του ΔBD , οπότε $DH \perp AB$.

Πρόβλημα 4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αθροίσματος $\alpha + \beta$.

Λύση, (1^{ος} τρόπος) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8 &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta = 8 \Leftrightarrow \\ &(\alpha + \beta)^3 - 2^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha + \beta - 2)((\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta) + 4) - 3\alpha\beta(\alpha + \beta - 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha + \beta - 2)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha + \beta - 2 = 0 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 &\Leftrightarrow \\ \alpha + \beta = 2 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta + 4\alpha + 4\beta + 8 &\Leftrightarrow \\ \alpha + \beta = 2 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + 2)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ \alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha = \beta = -2 &\Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha + \beta = -4. \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος. Έστω $x = \alpha + \beta$, οπότε θέτοντας $a = x - \beta$ στην $\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta - 8 = 0$ παίρνουμε

$$(x - \beta)^3 + \beta^3 + 6(x - \beta)\beta - 8 = 0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει $x^3 - 3\beta x^2 + 3\beta^2 x + 6\beta x - 6\beta^2 - 8 = 0$.

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $x - 2$ παίρνουμε

$$(x - 2)(x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4) = 0,$$

οπότε $x = 2$ ή $x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4 = 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4$ είναι ίση με

$$\Delta = (3\beta - 2)^2 - 4(3\beta^2 + 4) = -3\beta^2 - 12\beta - 12 = -3(\beta + 2)^2.$$

Άρα το τριώνυμο $x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4$ μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta = -2 \text{ και } x = \frac{3\beta - 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $x = \alpha + \beta$ είναι το 2 και το -4.

3^{ος} τρόπος. Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενο τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8 &\Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + (-2)^3 = 3\alpha\beta(-2) \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta - 2 = 0 \text{ ή } \alpha = \beta = -2 &\Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha + \beta = -4. \end{aligned}$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση $||2x - 4| - a| = 8$ (Ε)

με άγνωστο το x και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρο. Αν η εξίσωση (Ε) έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a και τις τρεις λύσεις της εξίσωσης.

Λύση. Έχουμε $||2x - 4| - a| = 8 \Leftrightarrow |2x - 4| - a = 8$ ή $|2x - 4| - a = -8 \Leftrightarrow$

$$|2x - 4| = a + 8 \quad (E_1) \quad \text{ή} \quad |2x - 4| = a - 8 \quad (E_2)$$

Η εξίσωση (E_1) είναι αδύνατη για $a < -8$, έχει μοναδική λύση $x = 2$ για $a = -8$ και έχει δύο λύσεις για $a > -8$, οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned} |2x - 4| = a + 8 &\Leftrightarrow 2x - 4 = a + 8 \quad \text{ή} \quad 2x - 4 = -a - 8 \\ &\Leftrightarrow 2x = a + 12 \quad \text{ή} \quad 2x = -a - 4 \Leftrightarrow x = \frac{a + 12}{2} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{a + 4}{2}. \end{aligned}$$

Η εξίσωση (E_2) είναι αδύνατη για $a < 8$, έχει μοναδική λύση $x = 2$ για $a = 8$ και έχει δύο λύσεις για $a > 8$.

Επομένως η εξίσωση (Ε) μπορεί να έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$, μόνον όταν $a = 8$. Τότε η εξίσωση (Ε) έχει τη λύση $x = 2$ από την εξίσωση (E_2) και άλλες δύο λύσεις από την εξίσωση (E_1) , οι οποίες είναι:

$$x = \frac{a+12}{2} = 10 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{a+4}{2} = -6.$$

Πρόβλημα 2.

Θεωρούμε την ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_v) , $v \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_1 = 1$ και

$$\alpha_{v+1} = \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1},$$

για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$$\Sigma = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{2024} \alpha_{2025}.$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha_{v+1} = \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{v+1}} = \frac{\alpha_v + 1}{\alpha_v} = 1 + \frac{1}{\alpha_v} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{v+1}} - \frac{1}{\alpha_v} = 1, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα η ακολουθία $\frac{1}{\alpha_v}$, $v \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 1, οπότε

$$\frac{1}{\alpha_v} = \frac{1}{\alpha_1} + (v - 1) = 1 + v - 1 = v \Rightarrow \alpha_v = \frac{1}{v}, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

Επιπλέον, από την ισότητα έχουμε

$$\alpha_{v+1} = \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1} \Rightarrow \alpha_v \alpha_{v+1} = \alpha_v - \alpha_{v+1}, v \in \mathbb{N}^*,$$

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned} \Sigma &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{2024} \alpha_{2025} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + (\alpha_{2024} - \alpha_{2025}) \\ &= \alpha_1 - \alpha_{2025} = 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}. \end{aligned}$$

Σημείωση. Η υπόθεση ότι $\alpha_v > 0$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$, αν δεν δίνεται, μπορεί να προκύψει εύκολα με επαγωγή.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Αν το Z είναι σημείο στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε η ευθεία AZ να είναι κάθετη στην ευθεία BA και να ισχύει $BZ = 2 \cdot Z\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω $AB = AG = \gamma$, οπότε $AD = \frac{\gamma}{2}$.

Φέρουμε από το σημείο Γ την κάθετη προς την ευθεία AZ που την τέμνει, έστω στο σημείο Θ . Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα BEZ και $\Gamma\Theta Z$ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{BE}{\Gamma\Theta} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = 2 \Rightarrow BE = 2 \cdot \Gamma\Theta \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $A\Theta\Gamma$ το τμήμα ED είναι μεσοπαράλληλο, οπότε

$$\Gamma\Theta = 2 \cdot DE \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$BE = 4 \cdot DE \quad (3)$$



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ABE και ADE έχουμε:

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = AD^2 - DE^2 \Leftrightarrow \gamma^2 - 16 \cdot DE^2 = \frac{\gamma^2}{4} - DE^2 \Leftrightarrow DE^2 = \frac{\gamma^2}{20}.$$

Άρα είναι $DE = \frac{\gamma\sqrt{5}}{10}$, $BE = \frac{4\gamma\sqrt{5}}{10}$ και $BD = BE + ED = \frac{\gamma\sqrt{5}}{2}$.

Στο τρίγωνο ABD έχουμε: $AB^2 + AD^2 = \gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{5\gamma^2}{4} = BD^2$,

οπότε από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει ότι $\widehat{B\hat{A}D} = 90^\circ$, οπότε είναι και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

2^{ος} τρόπος: Διανυσματική λύση

Έστω O το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με $O(0,0)$, $A(0,2\alpha)$, $B(-6\beta,0)$ και $\Gamma(6\beta,0)$. Τότε είναι $Z(2\beta,0)$ και $\Delta(3\beta,\alpha)$ και επειδή $\overrightarrow{AZ} \perp \overrightarrow{BD}$, έπεται ότι $\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Όμως είναι $\overrightarrow{AZ} = (2\beta, -2\alpha)$ και $\overrightarrow{BD} = (9\beta, \alpha)$, οπότε

$$0 = \overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{BD} = 2\beta \cdot 9\beta + (-2\alpha) \cdot \alpha = 2(9\beta^2 - \alpha^2),$$

και άρα $9\beta^2 - \alpha^2 = 0$. Επίσης, $\overrightarrow{AB} = (-6\beta, -2\alpha)$ και $\overrightarrow{AD} = (3\beta, -\alpha)$ με

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -6\beta \cdot 3\beta + (-2\alpha) \cdot (-\alpha) = -2(9\beta^2 - \alpha^2) = 0.$$

Συνεπώς $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, οπότε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

3^{ος} τρόπος: Λύση με Αναλυτική γεωμετρία.

Έστω O το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με $O(0,0)$, $A(0,2\alpha)$, $B(-6\beta,0)$ και $\Gamma(6\beta,0)$. Τότε είναι $Z(2\beta,0)$ και $\Delta(3\beta,\alpha)$.

O συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AZ είναι

$$\lambda_{AZ} = \frac{0 - 2\alpha}{2\beta - 0} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας BD είναι

$$\lambda_{BD} = \frac{\alpha - 0}{3\beta - (-6\beta)} = \frac{\alpha}{9\beta}.$$

Αφού $AZ \perp BD$, είναι $\lambda_{AZ} \cdot \lambda_{BD} = -1$, οπότε παίρνουμε

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{9\beta} = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 9\beta^2.$$

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{2\alpha - 0}{0 - (-6\beta)} = \frac{\alpha}{3\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας AD είναι

$$\lambda_{\Lambda\Delta} = \frac{\alpha - 2\alpha}{3\beta - 0} = -\frac{\alpha}{3\beta},$$

με το γινόμενο τους να είναι $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{\Lambda\Delta} = \frac{\alpha}{3\beta} \cdot \left(-\frac{\alpha}{3\beta}\right) = -\frac{\alpha^2}{9\beta^2} = -1$.

Συνεπώς $AB \perp \Lambda\Delta$, και άρα $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 90^\circ$.

4ος τρόπος (Η λύση του μαθητή Ανδρέα Καβαλάρη)

Θεωρούμε το μέσο N της πλευράς AB και από το σημείο Γ την παράλληλη προς την ευθεία AZ που τέμνει την ευθεία AB, έστω στο σημείο H. Από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες AZ και ΓH έχουμε:

$$\frac{AH}{Z\Gamma} = \frac{AB}{BZ} \xrightarrow{BZ=2 \cdot Z\Gamma} AB = 2 \cdot AH \xrightarrow{AB=AG} AH = AN = \Lambda\Delta,$$

οπότε το τρίγωνο HΔN είναι ορθογώνιο με $H\Delta \perp \Lambda\Delta$.

Επίσης, από την παραλληλία $AZ \parallel \Gamma H$ έχουμε $B\Delta \perp \Gamma H$, ενώ από την παραλληλία $\Lambda\Delta \parallel B\Gamma$ έπεται ότι $H\Delta \perp B\Gamma$. Άρα το σημείο Δ είναι το ορθόκentro του τριγώνου HBG, οπότε θα είναι και $\Gamma\Delta \perp AB$, δηλαδή $\Gamma\Delta \perp AB$ και $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 90^\circ$.

5ος τρόπος (Η λύση του μαθητή Σωκράτη Ηλιάδη)

Έστω Υ το σημείο τομής των ευθειών BΔ και AZ. Έστω Μ το μέσο BΓ. Τότε η ΑΜ είναι διάμεσος, ύψος και διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ. Έστω ακόμη Χ το σημείο τομής των ευθειών ΑΜ και ΒΔ. Τότε, από την ισότητα $BZ = 2 \cdot Z\Gamma$, έπεται ότι το σημείο Z βρίσκεται μεταξύ των σημείων N και Γ, οπότε έχουμε:

$$BM + MZ = Z\Gamma + (\Gamma M - MZ) \xrightarrow{BM=MG} MZ = Z\Gamma - MZ \Rightarrow Z\Gamma = 2 \cdot MZ. \quad (1)$$

Επειδή η ΑΜ και η ΒΔ είναι διάμεσοι στο τρίγωνο ABΓ, έπεται ότι το σημείο Χ είναι το βαρύκentro του τριγώνου ABΓ, οπότε προκύπτει η ισότητα:

$$AX = 2 \cdot XM. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), από το θεώρημα του Θαλή προκύπτει η παραλληλία

$$XZ \parallel \Lambda\Gamma. \quad (3)$$

Επιπλέον από τις υποθέσεις έχουμε $\widehat{X\hat{M}Z} = 90^\circ = \widehat{X\hat{Y}Z}$, οπότε το τετράπλευρο ΧΜΖΥ είναι εγγράψιμο. Επειδή $\widehat{A\hat{M}B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{Y}B}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ABMY είναι εγγράψιμο.

Από την παραλληλία $XZ \parallel \Lambda\Gamma$ και τα εγγράψιμα ΧΜΖΥ, ABMY, έχουμε τις ισότητες:

$$\Lambda\Gamma B = \Lambda\Gamma M = X\hat{Z}M = X\hat{Y}M = B\hat{Y}M = B\hat{\Lambda}M = \frac{B\hat{\Lambda}\Gamma}{2}.$$

Επομένως στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $\Lambda\Gamma B = \Lambda\hat{B}\Gamma$ έχουμε:

$$B\hat{\Lambda}M + B\hat{\Lambda}M + 2 \cdot B\hat{\Lambda}M = 180^\circ \Rightarrow 5 \cdot B\hat{\Lambda}M = 180^\circ \Rightarrow B\hat{\Lambda}M = 45^\circ \Rightarrow B\hat{\Lambda}\Gamma = 90^\circ.$$

6ος τρόπος (Η λύση του μαθητή Κυριάκου Τσουρέκα)

Έστω Μ το μέσο της BΓ, οπότε η ΑΜ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ABΓ. Έστω Τ το σημείο τομής των ευθειών ΒΔ, ΑΖ και Θ το σημείο τομής των ευθειών ΒΔ, ΑΜ. Τότε το Θ είναι το βαρύκentro του τριγώνου ABΓ και $\frac{M\Theta}{\Theta\Lambda} = \frac{1}{2}$.

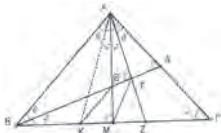
Θεωρούμε και το συμμετρικό του Z ως προς το σημείο Μ. Επειδή $A\hat{T}\Delta = 90^\circ = A\hat{M}B$, το τετράπλευρο BMTA είναι εγγράψιμο, οπότε $M\hat{B}T = M\hat{A}T$.



Όμως, λόγω συμμετρίας $M\hat{A}T = M\hat{A}K$, οπότε $M\hat{B}T = M\hat{A}K$. Άρα και το τετράπλευρο $BK\Theta A$ είναι εγγράψιμο.

Έχουμε ακόμη ότι

$$BZ = 2 \cdot Z\Gamma \Rightarrow \frac{B\Gamma}{2} + MZ = 2 \left(\frac{B\Gamma}{2} - MZ \right) \\ \Rightarrow MZ = \frac{B\Gamma}{6}$$



και επίσης

$$BZ = 2 \cdot Z\Gamma \Rightarrow B\Gamma - Z\Gamma = 2 \cdot Z\Gamma \Rightarrow Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{3}.$$

Επειδή έχουμε $MK = MZ$ και $KB = Z\Gamma$, έπεται ότι $\frac{MK}{KB} = \frac{MZ}{Z\Gamma} = \frac{1}{2} = \frac{M\Theta}{\Theta A} \xrightarrow{\text{θεώρ. θ. αλ.}} K\Theta \parallel AB$, οπότε το εγγράψιμο τετράπλευρο $BK\Theta A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με συνέντευα:

$$A\hat{B}\Theta = B\hat{A}K = Z\hat{A}\Gamma,$$

αφού λόγω συμμετρίας $B\hat{A}K = Z\hat{A}\Gamma$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ATB και $AT\Delta$ έχουν ένα ζευγάρι οξείες γωνίες τους ίσες, οπότε θα είναι όμοια και $B\hat{A}T = A\hat{\Delta}T$.

Επομένως, έχουμε τελικά $B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}T + T\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}T + T\hat{A}\Delta = 90^\circ$.

7ος τρόπος (Η λύση του μαθητή Δημητρίου Μπάλλση)

Έστω $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}A = \omega$, $A\hat{Z}\Gamma = \varphi_1$, $A\hat{Z}B = \varphi_2$, $B\hat{A}Z = \varphi$, $Z\hat{A}\Gamma = \theta$ με $\varphi > \theta$, όπως προκύπτει από τα τρίγωνα BAZ και ΓAZ με $BZ > Z\Gamma$.

Επιπλέον οι γωνίες φ και θ είναι οξείες γωνίες ορθογώνιων τριγώνων, οπότε $0 < \theta < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Όμως ισχύει ότι: $(ABZ) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AZ \cdot \eta\mu\varphi$

$$\text{και } (AZ\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot AZ \cdot \eta\mu\theta,$$

$$\frac{(ABZ)}{(AZ\Gamma)} = \frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\theta} \text{ και } \frac{(ABZ)}{(AZ\Gamma)} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = 2.$$

Επομένως, προκύπτει ότι: $\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\theta} = 2 \Rightarrow \eta\mu\varphi = 2 \cdot \eta\mu\theta$. (1)

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $AB\Delta$ έχουμε:

$$\text{συν}\theta = \frac{AE}{A\Delta}, \text{συν}\varphi = \frac{AE}{AB} \xrightarrow{AB=2 \cdot A\Delta} \text{συν}\theta = 2 \cdot \text{συν}\varphi. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε: $\eta\mu^2\varphi = 4\eta\mu^2\theta$ και $\text{συν}^2\theta = 4\text{συν}^2\varphi$,

οπότε από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\varphi + \text{συν}^2\varphi = 1$, λαμβάνουμε:

$$1 - \text{συν}^2\varphi = 4(1 - \text{συν}^2\theta) = 4(1 - 4\text{συν}^2\varphi) \Rightarrow \text{συν}^2\varphi = \frac{1}{5} \text{ και } \eta\mu^2\varphi = \frac{4}{5}.$$

Επειδή $0 < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}$, από τις προηγούμενες ισότητες έπεται ότι:

$$\eta\mu\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{συν}\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ και } \text{συν}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Τελικά από την ισότητα $B\hat{A}\Gamma = \varphi + \theta$, λαμβάνουμε:

$$\eta\mu B\hat{A}\Gamma = \eta\mu(\varphi + \theta) = \eta\mu\varphi\text{συν}\theta + \eta\mu\theta\text{συν}\varphi = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow B\hat{A}\Gamma = 90^\circ.$$

8ος τρόπος (Η λύση του μαθητή Γεώργιου-Διομήδη Βαρβαρέσου)

Θα αποδείξουμε πρώτα το παρακάτω βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα. Έστω ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Αν το Z είναι σημείο στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε η ευθεία AZ να είναι κάθετη στην ευθεία BD , τότε ισχύει $BZ = 2 \cdot Z\Gamma$.

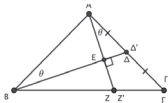
Απόδειξη. Έστω E το σημείο τομής της ευθείας AZ με την BD . Θέτουμε $\theta = \widehat{E\Delta D} = \widehat{Z\Delta\Gamma}$. Αφού δύο οξείες γωνίες που έχουν κάθετες τις πλευρές τους είναι ίσες, έχουμε $\widehat{ABD} = \widehat{E\Delta D} = \theta$. Από τον νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα $A\Gamma Z$ και AZB παίρνουμε, αντίστοιχα,

$$\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{AZ} = \frac{\eta\mu Z\hat{A}\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{\eta\mu\theta}{Z\Gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\eta\mu\hat{B}}{AZ} = \frac{\eta\mu B\hat{A}Z}{BZ} = \frac{\eta\mu(90^\circ - \theta)}{BZ} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{BZ}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, και αφού οι γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι ίσες, παίρνουμε

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{Z\Gamma}{BZ}. \quad \text{Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο } B\Delta D \text{ έχουμε}$$

$\epsilon\varphi\theta = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$, αφού $AB = A\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Συνεπώς, $BZ = 2 \cdot Z\Gamma$, όπως θέλαμε. Για το αρχικό πρόβλημα, θεωρούμε σημείο Δ' στην ευθεία BD , στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο Δ ως προς την ευθεία AB τέτοιο ώστε $B\hat{\Delta}\Delta' = 90^\circ$. Έστω Γ' το συμμετρικό του A ως προς το Δ' , και έστω Z' το σημείο τομής της ευθείας AZ με την $B\Gamma'$.



Από το θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο $AZ\Gamma$ με τέμνουσα την BD παίρνουμε $\frac{AE}{EZ} \cdot \frac{ZB}{B\Gamma} \cdot \frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = 1$.

Είναι $\Gamma\Delta = \Delta A$, $ZB = 2 \cdot Z\Gamma$ και $B\Gamma = BZ + Z\Gamma = 3 \cdot Z\Gamma$, οπότε παίρνουμε

$$\frac{AE}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZB} = \frac{3 \cdot Z\Gamma}{2 \cdot Z\Gamma} = \frac{3}{2}.$$

Ομοίως, αφού έχουμε $BZ' = 2 \cdot Z'\Gamma$ από το παραπάνω Λήμμα και $\Gamma'\Delta' = \Delta'A$, παίρνουμε

$$\frac{AE}{EZ'} = \frac{3}{2}. \quad \text{Συνεπώς, προκύπτει η ισότητα } EZ = EZ'.$$

Αφού τα σημεία Z, Z' βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία BE (η οποία είναι διαφορετική από την ευθεία EZ) και τα σημεία E, Z, Z' είναι συνευθειακά, τα σημεία Z και Z' ταυτίζονται.

Έτσι έχουμε: $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}Z = A\hat{B}Z' = A\hat{B}\Gamma' = 45^\circ$ και συνεπώς $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$.

Πρόβλημα 4. Έστω $P(x)$ πολώνυμο με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε $P(1) = 9$ και $P(9) = 1481$. Να βρεθεί η τιμή του $P(10)$.

Λύση. Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

όπου $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $a_n > 0$. Αφού

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = P(1) = 9,$$

έπεται ότι $0 \leq a_i \leq 9$ για κάθε $0 \leq i \leq n$. Επίσης, είναι

$$1481 = P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots + a_1 9 + a_0,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $1481 - a_0 = 164 \cdot 9 + (5 - a_0)$ διαιρείται με το 9, με

$-4 \leq 5 - a_0 \leq 5$, αφού το a_0 είναι ψηφίο. Άρα είναι $a_0 = 5$, οπότε

$$164 = a_n 9^{n-1} + a_{n-1} 9^{n-2} + \dots + a_1,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $164 - a_1 = 18 \cdot 9 + (2 - a_1)$ διαιρείται με το 9, με

$-7 \leq 2 - a_1 \leq 2$, αφού το a_1 είναι ψηφίο. Άρα $a_1 = 2$, οπότε $18 = a_n 9^{n-2} + \dots + a_2$.

Αφού $a_2 < 18$, έπεται ότι $n - 2 > 0$, δηλαδή $n > 2$. Αν $n \geq 4$, τότε

$$18 \geq a_n 9^{n-2} \geq 9^{n-2} \geq 9^2 = 81 > 18,$$

άτοπο. Άρα $n = 3$, οπότε $18 = a_3 9 + a_2$

με $0 \leq \alpha_2 + \alpha_3 \leq P(1) - \alpha_0 - \alpha_1 = 9 - 5 - 2 = 2$. Αφού το 9 διαιρεί το $a_2 = 18 - 9a_3$ έπεται ότι $a_2 = 0$ και άρα $a_3 = 2$. Συνεπώς, $P(x) = 2x^3 + 2x + 5$, οπότε $P(10) = 2025$.

Σχόλιο. Με διαδοχικές Ευκλείδειες διαιρέσεις με το 9, έχουμε

$$1481 = 164 \cdot 9 + 5, \quad 164 = 18 \cdot 9 + 2, \quad \text{και} \quad 18 = 2 \cdot 9 + 0.$$

Έτσι, είναι $164 = (2 \cdot 9) \cdot 9 + 2 = 2 \cdot 9^2 + 2$, και παίρνουμε την ισότητα

$$1481 = (2 \cdot 9^2 + 2) \cdot 9 + 5 = 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 + 5,$$

η οποία μας δίνει την μοναδική παράσταση του 1481 στο σύστημα αρίθμησης με βάση το 9. Ουσιαστικά στην παραπάνω λύση αποδεικνύουμε την μοναδικότητα αυτή.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 134

A86. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιούν και τις δύο συνθήκες:

(α) $f(x + y^{2n}) = f(f(x)) + y^{2n-1}f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

(Μ. Ο. Ρουμανίας 2024)

Λύση. Για $y = 0$, από τη συνθήκη (α) λαμβάνουμε: $f(x) = f(f(x))$, οπότε η συνθήκη (α) γίνεται: $f(x + y^{2n}) = f(x) + y^{2n-1}f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. (1)

Για $x = 0, y = 1$ στη σχέση (1) λαμβάνουμε $f(1) = f(0) + f(1) \Rightarrow f(0) = 0$ και επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση, από συνθήκη (β) προκύπτει η ισοδυναμία:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (2)$$

Για $x = 0$ στη σχέση (1) λαμβάνουμε $f(y^{2n}) = y^{2n-1}f(y)$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $f(x + y^{2n}) = f(x) + f(y^{2n})$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. (3)

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$y^{2n-1}f(y) = f(y^{2n}) = f((-y)^{2n}) = (-y)^{2n-1}f(-y) = -y^{2n-1}f(-y),$$

οπότε, για κάθε $y \in \mathbb{R} - \{0\}$, προκύπτει ότι $f(y) = -f(-y)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι περιττή, αφού και $f(0) = 0$.

Αν θέσουμε $t = \sqrt[2n]{y} \geq 0$, τότε η σχέση (3) γίνεται:

$$f(x + t) = f(x) + f(t), \text{ για κάθε } x, t \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι περιττή, για $t < 0$ έχουμε:

$$f(x + t) = -f(-x - t) = -(f(-x) + f(-t)) = -f(-x) - f(-t) = f(x) + f(t),$$

από την οποία, μαζί με τη σχέση (4), προκύπτει ότι

$$f(x + t) = f(x) + f(t), \text{ για κάθε } x, t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι

$$f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } f(x_1 - x_2) = f(0) = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Επομένως, από τη σχέση $f(f(x)) = f(x)$ προκύπτει ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ69. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\hat{A}\Gamma = 120^\circ$. Κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισοσκελή τρίγωνα PAB και $NA\Gamma$ με $A\hat{P}B = A\hat{N}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$. Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Theta P = \Theta N = \frac{AB+AG}{3}$.

(Μ. Ο. Ρουμανίας 2024)

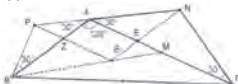
Λύση. Επειδή $A\hat{P}B = A\hat{N}\Gamma = B\hat{A}\Gamma = 120^\circ$ και τα τρίγωνα PAB και $NA\Gamma$ είναι ισοσκελή, έπεται ότι $P\hat{A}B = 30^\circ = N\hat{A}\Gamma$. Επομένως, έχουμε $P\hat{A}N = P\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}N = 180^\circ$, οπότε τα σημεία P, A, N είναι συνευθειακά. Από το σημείο P φέρουμε παράλληλη προς την ευθεία $A\Gamma$

η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z και από το σημείο N φέρουμε παράλληλη προς την ευθεία AB η οποία τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E. Τότε έχουμε

$$\angle PZ = \angle NAE = 30^\circ = \angle PZ \Rightarrow \triangle PZ \text{ ισοσκελές τρίγωνο με } PZ = ZA. \quad (1)$$

Επιπλέον, έχουμε $\angle BPZ = \angle BPA - \angle ZPA = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, δηλαδή το τρίγωνο BPZ είναι ορθογώνιο με την οξεία γωνία του $\angle PBZ = 30^\circ$. Επομένως, έχουμε: $BZ = 2 \cdot PZ$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι: $BZ = 2 \cdot ZA$ (3)



Έστω BM διάμεσος του τριγώνου ABG. Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ABG, τότε $BM = 2 \cdot \Theta M$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) και το αντιστρόφιο του θεωρήματος του Θαλή, προκύπτει ότι $Z\Theta \parallel AG$. Επομένως, αφού και $ZP \parallel AG$, έπεται ότι τα σημεία P, Z, Θ είναι συνευθειακά και $\angle PZA = 30^\circ$. Ομοίως προκύπτει ότι $\angle E = 2 \cdot \angle EA$ και ότι τα σημεία N, E, Θ είναι συνευθειακά και $\angle ENA = 30^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο PΘN είναι ισοσκελές με $\Theta P = \Theta N$.

Επειδή το τετράπλευρο AZΘE είναι παραλληλόγραμμο, έπεται ότι

$$\Theta P = \Theta Z + ZP = AE + AZ = \frac{AG}{3} + \frac{AB}{3} = \frac{AB + AG}{3}.$$

N58. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (p, q) πρώτων για τα οποία ο αριθμός

$p^2 + 5pq + 4q^2$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

(Μ. Ο. Ρουμανίας 2024)

Λύση. Έστω ότι $p^2 + 5pq + 4q^2 = n^2$, όπου n θετικός ακέραιος. Τότε έχουμε:

$$(p + 2q)^2 + pq = n^2 \Leftrightarrow pq = n^2 - (p + 2q)^2 \Leftrightarrow pq = (n - p - 2q)(n + p + 2q) \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι ο θετικός ακέραιος $n + p + 2q$ είναι διαιρέτης του γινομένου pq των δύο πρώτων αριθμών p, q . Επειδή ο $n + p + 2q$ είναι μεγαλύτερος από τον p και από τον q , επειδή γνωρίζουμε ότι οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του γινομένου pq είναι οι θετικοί ακέραιοι 1, p, q και pq συμπεραίνουμε ότι:

$$n + p + 2q = pq \text{ και } n - p - 2q = 1.$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο τελευταίων ισοτήτων, λαμβάνουμε:

$$pq - 1 = 2p + 4q \Leftrightarrow (p - 4)(q - 2) = 9.$$

Επομένως, έχουμε $q \geq 3$ και $p \geq 5$, οπότε προκύπτουν οι περιπτώσεις:

$$(p - 4, q - 2) = (1, 9) \text{ ή } (p - 4, q - 2) = (3, 3) \text{ ή } (p - 4, q - 2) = (9, 1)$$

$$\Leftrightarrow (p, q) = (5, 11) \text{ ή } (p, q) = (7, 5) \text{ ή } (p, q) = (13, 3).$$

Ασκήσεις για λύση

N59. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (α, β) για τα οποία ο αριθμός $\frac{7^\alpha - 5^\beta}{8}$ είναι πρώτος.

Γ70. Έστω M το μέσο της πλευρά AD τετραγώνου ABΓΔ. Θεωρούμε σημείο Z στο εσωτερικό του τετραγώνου ABΓΔ και σημείο E στο εξωτερικό του έτσι ώστε τα τρίγωνα ΔΜΖ και ΒΖΕ να είναι ισόπλευρα και η πλευρά ΖΕ να τέμνει την πλευρά ΒΓ. Αν P είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ME, να αποδείξετε ότι:

(α) το σημείο P ανήκει στην ευθεία ΑΓ και

(β) η ημιευθεία PM είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΡΖ.



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος

I. τι είναι τα Μαθηματικά;

ένας καλός, παλιός φίλος της στήλης μας ρωτά «αν τα **«Μαθηματικά παράδοξα»** βοηθούν στην κατανόηση στο ερώτημα **«τί είναι τα Μαθηματικά»**; Εμείς, αντί άλλου, του απαντούμε με ένα τέτοιο

«παράδοξο», με τίτλο **«Ο ψεύτης»**, παρμένο από το βιβλίο **«Τα παράδοξα από το Α έως το Ω»**, του **Michael Clark** [ΕΝΑΛΙΟΣ-2002]. (στην, ενότητα: «οι συνεργάτες της στήλης "γράφουν-ερωτούν"»)

τα "παράδοξα" στα Μαθηματικά

Το "Παράδοξο"

«Αν ποι τη φράση **«λέω ψέματα»**, λέω την αλήθεια; Αν λέω την αλήθεια, ψεύδομαι, και κατά συνέπεια η φράση μου είναι ψευδής αν όμως δεν λέω την αλήθεια

λέω ψέματα, κι έτσι λέω όντως την αλήθεια. Άρα λοιπόν, η φράση μου είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής»

Μερικές παραλλαγές του "παράδοξου"

1. Ο "απλός ψεύτης"

Το παραπάνω παράδειγμα αποτελεί την απλούστερη μορφή του παράδοξου. Πρέπει όμως να γίνει μια **σημαντική διάκριση**, ανάμεσα στις παραπάνω δύο περιπτώσεων, απ' τις οποίες μόνο η δεύτερη συνιστά παράδοξο:

A. το άτομο που λέει **«λέω ψέματα»** αναφέρεται σε κάποια άλλη ταυτόχρονη δήλωσή του και παραδέχεται μ' αυτό τον τρόπο ότι εκείνη η δήλωσή του είναι ψευδής για παράδειγμα: **«δεν την έκανα εγώ τη ζημιά!.. Καλά, συγνώμη. Λέω ψέματα»**. Εδώ δεν υπάρχει κανένα διφορούμενο και κανένα παράδοξο.

B. παράδοξο έχουμε όταν το άτομο λέγοντας **«λέω ψέματα»** αναφέρεται σε αυτή την ίδια τη δήλωσή του, δηλαδή τη χρησιμοποιεί αυτοαναφορικά. Σ' αυτή την περίπτωση δημιουργείται αντίφαση, δηλαδή η δήλωση **«λέω ψέματα»** είναι ταυτόχρονα και αληθής και ψευδής, αφού όταν είναι αληθής είναι ψευδής, και όταν είναι ψευδής είναι αληθής.

2. Ο "ενισχυμένος ψεύτης"

«αυτή η δήλωση είναι μη αληθής». Εδώ η αυτοαναφορική χρήση δημιουργεί την εξής

αντίφαση: η δήλωση είναι ταυτόχρονα αληθής και μη αληθής. Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι απαραίτητος ο έλεγχος της αληθοτιμής (αλήθειας ή ψευδούς) της δήλωσης προκειμένου να παραχθεί η αντίφαση, ενώ στην παραλλαγή του **«απλού ψεύτη»** όπου δεν είναι εμφανής η αντίφαση, δεν είναι δυνατόν να παραχθεί χωρίς έλεγχο της αληθοτιμής.

3. Ο "φιλαλήθης"

«Αυτή η δήλωση είναι αληθής». Αν και αυτή η παραλλαγή δεν δημιουργεί καμία αντίφαση, στερείται κάθε ουσίας. Αν είναι αληθής είναι αληθής, αν είναι ψευδής είναι ψευδής, αλλά δεν υπάρχει τίποτα που να την καθιστά είτε αληθή είτε ψευδή.

4. Ένας "κύκλος του ψεύτη"

Σωκράτης: (Σ) «Αυτό που λέει ο Πλάτων είναι ψευδές».

Πλάτων: (Π) «Αυτό που λέει ο Σωκράτης είναι αληθές».

Αν ο Σωκράτης αναφέρεται στην πρόταση **Π** του Πλάτωνα και ο Πλάτων αναφέρεται στην πρόταση **Σ** του Σωκράτη, τότε η **Σ** είναι αληθής μόνο και μόνο αν είναι ψευδής, και το ίδιο και η **Π**. Αν τις εκλάβουμε ως ένα τέτοιο σύστημα, παρ' όλο που καμία πρόταση δεν αναφέρεται άμεσα στον εαυτό της, αμφότερες είναι έμμεσα αυτοαναφορικές: η κάθε μια αναφέρεται στον εαυτό της έμμεσα μέσω της άλλης.

Τα **"δύο λάθη"**

(Π) αυτή η πρόταση, η Π, περιέχει **λέο λάθη**. (sic)

Αντί για «δύο» γράφει «λθθ». Αν η **Π** δεν έχει κανένα άλλο λάθος, είναι εσφαλμένη, και τελικά σε αυτή την περίπτωση έχει ακόμη ένα λάθος: το γεγονός ότι

είναι εσφαλμένη. Τότε όμως, αν είναι εσφαλμένη, έχει όντως ακριβώς δύο λάθη, και κατά συνέπεια πρέπει να είναι αληθής

Κάποιες λύσεις που προτάθηκαν

Έχουν αναπτυχθεί πολλές προσεγγίσεις, και κάποιες είναι λεπτομερέστερες. Στη συνέχεια αναφέρουμε μόνο τρεις απ' αυτές αναφέρονται στη συνέχεια.

(1) Μία απλή και εντυπωσιακή διέξοδος αναπτύχθηκε πρόσφατα, βαφτίστηκε «**διαληθισμός**»², και κατάφερε να νομιμοποιήσει ένα ευρύ φάσμα παραδόξων εναρμονίζοντας τις αντιφάσεις τους. Έτσι το κάθε παράδοξο έχασε την υπόστασή του ως τέτοιο, αφού οι αντιφάσεις του κατέστησαν λογικά αποδεκτές και τους επετράπη να είναι ταυτόχρονα αληθείς και ψευδείς³. Η προσέγγιση αυτή φαντάζει ακόμη πιο παραδοξολογική από τους ίδιους τους γρίφους που ισχυρίζεται ότι λύνει, και φαίνεται να καταργεί κάθε έννοια

αλήθειας και ψεύδους. Αν και ο διαληθισμός έτυχε πολύ επιδέξιας προώθησης, δεν είναι περίεργο ότι πολλοί επιστήμονες της λογικής μεταπέιστηκαν υπέρ του.

(2) Μια άλλη σημαντικότερη προσέγγιση απορρέει από τον ορισμό που έδωσε ο **Tarski** για την αλήθεια στις επιστημοποιημένες γλώσσες⁴. Ο **Tarski** θεωρούσε ότι ο ορισμός αυτός δεν μπορούσε να ισχύσει στις φυσικές γλώσσες, επειδή αυτές κατά τη γνώμη του ήταν εγγενώς αντιφατικές. Ωστόσο είναι δύσκολο να αποδεχτεί κανείς ότι είναι εσφαλμένο να μιλάμε για το αληθές ή το ψευδές σε γλώσσες όπως η αγγλική, ενώ άλλοι θεωρούν ότι η προσέγγιση του Tarski θα μπορούσε να υιοθετηθεί και για τις φυσικές γλώσσες.

Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται σε μια ιεράρχηση επιπέδων. Στο κατώτερο επίπεδο δεν υπάρχουν καθόλου προτάσεις που να περιέχουν το κατηγορήμα «αληθής» ή παρόμοιους όρους. Στο επίπεδο 1, ο όρος «αληθής» μπορεί να εφαρμόζεται μόνο σε προτάσεις του επιπέδου 0, αλλά όχι για προτάσεις του ίδιου επιπέδου, δηλ. Το 1. Σε κάθε διαδοχικό επίπεδο υπάρχει ένα **ευδιάκριτο αληθές κατηγορήμα**, το οποίο μπορεί να εφαρμόζεται μόνο σε προτάσεις του χαμηλότερου επιπέδου. Η πρόταση «το Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Γαλλίας» είναι αληθής¹ είναι αληθής² (και αληθής³) και ούτω καθεξής. Έτσι καμία πρόταση δεν μπορεί να αναφέρεται στον εαυτό της, κύκλοι όπως αυτός που παραπάνω παραδείγματος με τον Πλάτωνα και το Σωκράτη καθίστανται αδύνατοι και **από το παράδοξο του yablo*** δεν μπορεί να προκύψει καμία αντίφαση. Βάσει αυτής της προσέγγισης τα κατηγορήματα «αληθής» και «ψευδής» δεν είναι σε καμία περίπτωση μονοσήμαντα, αλλά εκλαμβάνονται ως πολλά ευδιάκριτα κατηγορήματα.

II. “Ευκλείδεια Γεωμετρία, αγάπη μου”

ΔΙΑΤΕΜΝΟΥΣΕΣ

Θεώρημα του Μενέλαου

Δίνεται τυχαίο n -γωνο $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ και μια ευθεία (ϵ), που τέμνει τις ευθείες των πλευρών A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 , στα M_1 , M_2 , M_3 , ..., M_{n-1} , M_n αντίστοιχα. Δείξτε ότι

$$\frac{M_1A_1}{M_1A_2} \cdot \frac{M_2A_2}{M_2A_3} \cdot \frac{M_3A_3}{M_3A_4} \cdot \dots \cdot \frac{M_{n-1}A_{n-1}}{M_{n-1}A_n} \cdot \frac{M_nA_n}{M_nA_1} = 1$$

παράτηρηση

Όταν έχουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και μια ευθεία (ϵ), που δεν περνά από καμιά κορυφή του, ούτε είναι παράλληλη καμιάς πλευράς του, τότε η ευθεία (ϵ) θα τέμνει α) δύο πλευρές και την προέκτασή της τρίτης ή β) τις προεκτάσεις όλων των πλευρών του. Οι παραπάνω θέσεις των σημείων τομής φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Στο εξής αυτές τις δύο διατάξεις των σημείων τομής, σε σχέση με τις πλευρές του τριγώνου, θα τις θα τις ονομάζουμε “**διατάξεις του Μενέλαου**”. Τη σχέση που βγαίνει από το θεώρημα του Μενέλαου θα την ονομάζουμε “**συνθήκη του Μενέλαου**”

αντίστροφο του θεωρήματος του Μενέλαου (για τρίγωνο)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και πάνω στις ευθείες των πλευρών του AB , $B\Gamma$, ΓA τα σημεία Γ_1 , A_1 , B_1 αντίστοιχα. Αν ικανοποιείται η συνθήκη του Μενέλαου, και μια από τις δύο "διατάξεις σημείων του Μενέλαου", τότε τα A_1 , B_1 , Γ_1 , είναι συνευθειακά

III. Αυτό το ξέρατε;

Πως ορίζεται ο προσανατολισμός στον χώρο; (η απάντηση στο τέλος της στήλης)

IV. "Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερευνούν"

(1) Τι είναι και πώς λειτουργεί ο κβαντικός υπολογιστής; Η κβαντική Τεχνολογία είναι καινούργια;

Πώς διαφέρει ένα **κβαντικό τηλέφωνο** από το συνηθισμένο; Και πόσο ασφαλής θα είναι ένας **κβαντικός τραπεζικός κωδικός**; Η εποχή της νέας τεχνολογικής επανάστασης έχει ήδη αρχίσει και αναμένεται εξίσου συναρπαστική με εκείνη του περάσματος από τη συμβατική, στην ψηφιακή.

Καταρχήν, τα **κβαντικά φαινόμενα στην επιστήμη είναι από καιρό γνωστά** – οι ανακαλύψεις του Μαξ Πλανκ έγιναν στις αρχές του περασμένου αιώνα. Οι πρώτες συσκευές που κατασκευάστηκαν εξ ολοκλήρου με βάση τις αρχές της κβαντικής μηχανικής είναι επίσης γνωστές εδώ και πολύ καιρό, με τον οδυνηρότερο τρόπο: **Η ατομική ή θερμοπυρηνική βόμβα είναι καθαρά εφαρμοσμένη κβαντική τεχνολογία**. Αλλά και τα πρότυπα

συχνότητων που υπάρχουν εδώ και αρκετές δεκαετίες.

Αυτό που τώρα γίνεται κατανοητό από τις κβαντικές τεχνολογίες στον σύγχρονο κόσμο είναι κάτι διαφορετικό. Αν, νωρίτερα, είχαμε ολόκληρα σύνολα κβαντικών σωματιδίων, όπως μια ατομική βόμβα, τώρα οι άνθρωποι έχουν μάθει να χειρίζονται **μεμονωμένα άτομα, φωτόνια και ιόντα**. Σήμερα ζούμε σε μια εποχή γρήγορης ανάπτυξης τεχνολογιών που εισάγονται και λειτουργούν **στα εργαστήρια φυσικής**. Πλέον είναι διαθέσιμα τέτοια μέσα και εργαλεία, τα οποία δεν μπορούσαμε να ονειρευόμαστε πριν από δέκα χρόνια. Χάρη σε αυτό το τεχνολογικό άλμα, προσεγγίσαμε τη δεύτερη κβαντική επανάσταση.

Τι είναι ένας κβαντικός υπολογιστής;

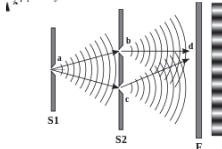
Ο κβαντικός υπολογιστής χρησιμοποιεί τις ιδιότητες της κβαντομηχανικής, όπως την **κβαντική διεμπλοκή**¹, για την επεξεργασία των δεδομένων.

Ο κβαντικός υπολογιστής δεν θα έχει καμία σχέση με τους σημερινούς υπολογιστές, ανεξαρτήτως μορφής (λάπτοπ, σταθερούς, τάμπλετ κλπ), αλλά, ταυτόχρονα, μπορεί και να μοιάζει – σε ορισμένες μορφές του – με τους σημερινούς, αφού, ουσιαστικά, **ένας κβαντικός υπολογιστής είναι ένας «συνεπεξεργαστής» στον υπολογιστικό πυρήνα ενός κλασικού υπολογιστή**.

Θα πρόκειται, δηλαδή, για μια **συνδυαστική επεξεργασία**, αφού, όπως εξηγεί, τα περισσότερα από τα στοιχεία που συγκροτούν έναν κβαντικό υπολογιστή είναι επίσης hardware (σσ. τα φυσικά εξαρτήματα ενός υπολογιστή), όπως τα τροφοδοτικά. Αυτός ο εξοπλισμός θα ελέγχεται από τον κλασικό υπολογιστή στον οποίο θα υπάρχουν τα δεδομένα που θα φορτώνονται στον κβαντικό υπολογιστή και θα ανακτώνται από αυτόν. Στη συνέχεια θα επεξεργάζονται από έναν υπερυπολογιστή. **Δηλαδή ο κβαντικός υπολογιστής δεν θα είναι για οικιακή χρήση, αλλά μόνο για τη λύση συνθέτων προβλημάτων**.

Είναι θέμα **βελτιστοποίησης**. Για παράδειγμα, υπάρχουν αλγόριθμοι που θα λυθούν πολύ πιο

αποτελεσματικά με τη βοήθεια κβαντικών υπολογιστικών συσκευών, αν και **ούτε οι επιστήμονες ακόμη δεν μπορούν να διατυπώσουν πολλά από αυτά τα προβλήματα σε μια μορφή που θα γίνει «κατανοητή»** από τους κβαντικούς επεξεργαστές.



Συνεπώς, θα απαιτηθούν αμοιβαίες προσπάθειες από την επιστημονική κοινότητα και τους πιθανούς πελάτες που χρειάζονται την υπολογιστική ισχύ των κβαντικών επεξεργαστών. Προφανώς, τέτοια ισχύ χρειάζεται σε τομείς όπως η ιατρική και η άμυνα.

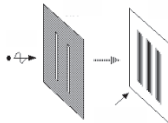
Αρα, το θέμα δεν είναι αν ένας κβαντικός υπολογιστής θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οικιακή χρήση. Το θέμα είναι *αν ο οικιακός χρήστης θα είναι σε θέση να υποβάλλει τις ανάγκες του στον κβαντικό υπολογιστή* με τρόπο που να μπορεί να τις

επεξεργαστεί και να δώσει λύσεις. Μοιάζει περίπου με την επανάσταση της τυπογραφίας: Στην αρχή, αφορούσε τους ελάχιστους που μπορούσαν να διαβάσουν.

Πώς μοιάζει ένας κβαντικός υπολογιστής στην πραγματικότητα; Πώς δομείται;

Μέχρι στιγμής υπάρχουν *περίπου δέκα εντελώς διαφορετικά, μεταξύ τους, φυσικά μοντέλα* που ισχυρίζονται ότι αποτελούν τη θεμελιώδη βάση για κβαντικούς υπολογισμούς. Μπορούν να δουλέψουν με βάση τα *φωτονικά τσιπ*, τα οποία επικοινωνούν ανταλλάσσοντας παλμούς λέιζερ αντί ηλεκτρικών σημάτων ανεβάζοντας τις ταχύτητες επεξεργασίας εντυπωσιακά. Αυτά μπορεί να είναι ουδέτερα άτομα, ιόντα, *υπεραγώγιο qubits²* (σ. τα μικρότερα στοιχεία για την αποθήκευση πληροφοριών σε έναν κβαντικό υπολογιστή).

Όλα αυτά είναι θεμελιώδεις διαφορετικά μοντέλα που απαιτούν διαφορετικό hardware και έλεγχο. Για παράδειγμα, ένας υπολογιστής που βασίζεται σε υπεραγώγιο qubits είναι, στην πραγματικότητα, ένα μεγάλο «ψυγείο». Χρησιμοποιεί *κρυογονική τεχνολογία σε όλα τα εξαρτήματα και τις συσκευές* που τον απαρτίζουν. Για να λειτουργήσει χρειάζεται εξοπλισμό συνθηκών κενού αέρος, καθώς και ένα τεράστιο «δοχείο» με ψυκτικό υλικό.



Ταυτόχρονα, τα φωτονικά τσιπ θα «τρέχουν» πάνω σε μία μητρική επί της οποίας θα σχεδιάζονται «οδηγοί» χρησιμοποιώντας διαφορετικές οπτικές τεχνολογίες, οι οποίες θα διασταυρώνονται και θα αποκλίνουν για να σχηματίσουν πολύπλοκες διεπαφές. Σαν ένα κενό ζωγραφικό τελάρο που θα φιλοξενεί συνεχείς αλλαγές σχημάτων.

Ουσιαστικά, *σήμερα, δεν υπάρχει μία «οπτικοποιημένη» εκδοχή ενός κβαντικού υπολογιστή.*

Ποια θα είναι τα πλεονεκτήματα μιας κβαντικής τηλεφωνικής επικοινωνίας σε σχέση με τη σημερινή συμβατική;

Κατ' αρχήν η *ασφάλεια*: Ένα κβαντικό τηλέφωνο *δεν μπορεί να παγιδευτεί*. Οι κβαντικές επικοινωνίες μπορούν να εξασφαλίσουν απόλυτη εμπιστευτικότητα. Τα σημερινά συστήματα επικοινωνίας χρησιμοποιούν ως επί το πλείστον

ασύμμετρη κρυπτογράφηση. Ένας κβαντικός υπολογιστής μπορεί να τα σπάσει. Για να αποφευχθεί αυτό πρέπει να χρησιμοποιηθεί *συμμετρική κρυπτογράφηση* και αυτό μας εισάγει στη σφαίρα της κβαντικής τεχνολογίας.

Πώς θα επηρεάσει την καθημερινή ζωή των ανθρώπων η εμφάνιση και η εξάπλωση κβαντικών επικοινωνιών και υπολογιστών;

Σε πρώτη φάση η διάδοσή τους *δεν θα γίνει πολύ αισθητή στην καθημερινότητα*. Ακόμη και το γεγονός ότι η κβαντική τεχνολογία θα καταστήσει τον κωδικό PIN μιας τραπεζικής κάρτας ουσιαστικά απρόσβλητο, δεν θα είναι κάτι το «απτό». Ωστόσο,

αυτές οι αλλαγές θα επηρεάσουν σε μεγάλο βαθμό τις υπηρεσίες ασφαλείας και το τραπεζικό σύστημα και, κατ' επέκταση, σημαντικό μέρος της ζωής μας, χωρίς να το αισθανόμαστε άμεσα.

Θα μπορεί ένα κβαντικό σύστημα να «σπάσει» από έναν κβαντικό υπολογιστή;

Όχι. Τα κβαντικά κρυπτογραφικά συστήματα *δεν θα μπορούν να «σπάσουν» από κβαντική τεχνολογία*. Η πληροφορία θα είναι απόλυτως προστατευμένη.

Μπορεί η κβαντική τεχνολογία να βοηθήσει στην εξέλιξη της τεχνητής νοημοσύνης;

Παρά τα φαινόμενα, το ζήτημα είναι αμφιλεγόμενο. Υπάρχει η άποψη ότι η τεχνητή νοημοσύνη βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στους κβαντικούς αλγόριθμους που χρησιμοποιούνται

στον κβαντικό υπολογισμό. Υπάρχουν φυσικοί που δεν συνδέουν άμεσα αυτές τις δύο τεχνολογίες, αλλά υπάρχουν πολλές τάσεις ή ενδείξεις που δείχνουν ότι πιθανόν να είναι κοντινές. Αν και είναι πολύ νωρίς για να μιλήσουμε πιο αντικειμενικά.

Το σίγουρο είναι, πως η κβαντική τεχνολογία είναι το επόμενο βήμα προς τον «θαυμαστό καινούργιο κόσμο». Αρκεί να μην πρόκειται για την ομώνυμη *δυστοπία του Χάξλεϊ...*

(1) **Κβαντική διεμπλοκή**, είναι το φαινόμενο, κατά το οποίο δύο σωματίδια ή ομάδες σωματιδίων που δημιουργούνται μαζί ή αλληλεπιδρούν συνεχώς, τις καταπονοσηφότητες τους και μένουν σε κατάσταση διεμπλοκής μεταξύ τους, ασχέτως του χώρου που μεσολαβεί πλέον από το ένα στο άλλο. Αν σταλεί το ένα από τα δύο στο άλλο άκρο του σύμπαντος και συμβεί κάτι σε οποιοδήποτε από τα δύο, το άλλο αντιδρά ακαριαία.

(2) **Κβαντικό bit**, ή συνηθέστερα **qubit**, είναι η στοιχειώδης μονάδα κβαντικής πληροφορίας. Η διαφορά από το «κλασικό» δυαδικό ψηφίο (bit) είναι ότι ενώ το bit μπορεί να πάρει μόνο μια από δύο δυνατές τιμές, (είτε μηδέν 0 είτε ένα 1) το qubit είναι μια υπέρθεση (άθροισμα) και των δύο καταστάσεων ταυτόχρονα. (Πηγή: physics4u.gr)

βιβλιογραφία

- * **Patrick Grim**, «The Incomplete Universe, Cambridge Mass., and London, MIT Press, 1991, κεφάλ. 1, σελίδες 25-8 περιέχουν μια κριτική του διαληθισμού».
- * **Susan Haack**, «Philosophy of Logics», Cambridge, Cambridge University Press, κεφάλαιο 8.
- * **Stephen Read**, «Thinking about Logic» Oxford, Oxford University Press, 1995, κεφάλαιο 6.
- * **R. M. Sainsbury**, «Paradoxes», Cambridge, Cambridge University Press, 2η έκδοση, 1995, κεφάλαια 5 και 6. Το κεφάλαιο 6 αποτελεί μια καλή σύντομη ανάλυση του διαληθισμού (πιο εύκολη από εκείνη του Grim).

(2) Έλυνε το πιο δύσκολο από τα 7 «επικηρυγμένα» προβλήματα. Η διάνοια που πέτυχε το ακατόρθωτο, (του Λάκη Ιγνατιάδη)

Ένα εκατομμύριο δολάρια. Αυτό είναι το έπαθλο που αποφάσισε να ορίσει το 2000 το Ινστιτούτο Μαθηματικών Clay για την επίλυση κάποιων από τα επτά «επικηρυγμένα» προβλήματα. Ανάμεσα σε όλα όσα ακόμα μένουν στην σκιά του ανεξερεύνητου κόσμου των Μαθηματικών, υπάρχουν επτά θρυλικά αναπόδεικτα θεωρήματα που συμβολίζουν το Έβερρεστ της γνώσης και ενσαρκώνουν την απόλυτη πρόκληση. Για δεκάδες χρόνια, ακόμα και αιώνες, αυτοί οι 6 πλέον, άλυτοι γρίφοι ταλανίζουν ορισμένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά μυαλά, παραμένοντας στο βυθό της μαθηματικής άγνοιας.

Τα εν λόγω προβλήματα ήταν επτά, από το 2002 όμως λιγόστεψαν κατά ένα. Ο πρώτος και μοναδικός έως σήμερα που κατάφερε να λύσει ένα από αυτά είναι ο Ρώσος Perelman. Έπειτα από οκτώ χρόνια προσπαθειών, ο Perelman αποκωδικοποίησε το περίφημο μαθηματικό πρόβλημα, γνωστό ως εικασία του Poincare. Έναν αιώνα παρά δύο χρόνια μετά τη διατύπωση της θεωρίας από τον Poincare (1904), ο Perelman δημοσίευσε σπαστά, εντός μια διετίας και

σε τρία διαφορετικά άρθρα μια απόδειξη 473 σελίδων, προκαλώντας φρενιτιδα στην παγκόσμια μαθηματική κοινότητα.

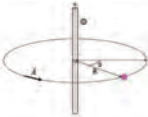


Μέσω της απόδειξης αυτής γνωρίζουμε πότε ένα **συμπαγές αντικείμενο** είναι **τοπολογικά ισοδύναμο** με μία σφαίρα. Για να αντιληφθεί κανείς πόσο περίπλοκη ήταν η εικασία του Poincare, αρκεί να αναφερθεί ότι ιδιοφυείς μαθηματικοί χρειάστηκε να εργαστούν επί τέσσερα χρόνια για να ελέγξουν την εγκυρότητα της απόδειξης του Perelman. Εκτιμάται ότι η επιβεβαίωση της λύσης του γρίφου έχει συμβάλει καθοριστικά στην κατανόηση που έχουμε για τον **χώρο**, ακόμη και στη γνώση μας για το «σχήμα» του **σύμπαντος**.

Ο Perelman είχε λάμψει στα Μαθηματικά από μικρό παιδί και σε ηλικία 16 ετών κέρδισε το χρυσό

μετάλλιο στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, της Βουδαπέστης το 1982. Αφότου ολοκλήρωσε το

διδασκτορικό του, εργάστηκε για λίγο στη Ρωσία και μετακόμισε στις ΗΠΑ. Στις αρχές της δεκαετίας του '90 κλήθηκε για διαλέξεις στις ΗΠΑ, και το 1993 πήρε διετή υποτροφία για έρευνα στο πανεπιστήμιο του Berkeley.



Απέριψε στη συνέχεια προτάσεις μόνιμης θέσης σε γνωστά Πανεπιστήμια, όπως το Princeton και γύρισε πίσω σ' ένα ερευνητικό κέντρο της Ρωσίας, σε μια θέση καθαρά ερευνητική. Νωρίτερα είχε φροντίσει να αποδείξει ένα άλλο θεώρημα – μελά, την «υπόθεση Soul». Απορρίπτοντας μια ένδοξη Ακαδημαϊκή καριέρα σε Πανεπιστήμια πρώτης γραμμής και επιστρέφοντας σε μια ρημαγμένη χώρα με μισθό κοντά στα 100 δολάρια το μήνα, για να ζήσει με τη μητέρα του σε ένα φτωχικό δωμάρι εργατικής πολυκατοικίας, έστειλε το πρώτο μήνυμα ότι η περίπτωση του ήταν εντελώς ξεχωριστή.

Το 2003 παραιτείται από την ερευνητική θέση που κατείχε στο Ίδρυμα Steklov, εγκαταλείποντας τη μόνη δουλειά που είχε τότε. Και το 2006 γίνεται ο πρώτος επιστήμονας **που αρνείται** να παραλάβει το Fields Medal, την υψηλότερη διάκριση στα Μαθηματικά, αντίστοιχο του βραβείου Νόμπελ, μιας και Νόμπελ Μαθηματικών δεν υπάρχει.

Επί δέκα ώρες ο πρόεδρος της Διεθνούς Ένωσης Μαθηματικών Sir John Ball προσπαθούσε να τον πείσει να παρευρεθεί τον Αύγουστο του 2006 στο Παγκόσμιο Συνέδριο Μαθηματικών στη Μαδρίτη, στην τελετή απονομής του μετάλλιου Fields. Μάταια. Ούτε η έσχατη λύση να μην πάει στη βράβευση αλλά να του σταλεί το μετάλλιο έπιασε τόπο. «Από την αρχή του διευκρίνισα ότι το βραβείο μου είναι εντελώς αδιάφορο. Δεν με ενδιαφέρουν τα **λεφτά ή η φήμη** και ούτε θέλω να παριστάνω το παράξενο ζώο σ' έναν ζωολογικό κήπο.

Αποκομμένος για χρόνια από τη μαθηματική κοινότητα και σε διάσταση με το επιστημονικό κατεστημένο, απαρνήθηκε ακόμα και τον πειρασμό της αποθέωσης του από τους κορυφαίους μαθηματικούς του κόσμου στην προγραμματισμένη απονομή του Fields medal στη Μαδρίτη.

[Πηγή: Wikipedia, geniuses.club, hea.edu.gr]

V. απάντηση στο αυτό το "Αυτό το ξέρατε;"

Για να κατανοήσουμε τι εννοούμε λέγοντας: "θετικά" ή "αρνητικά" προσανατολισμένος χώρος, δανειζόμαστε ένα χωρίο εμπνευσμένο από τη "ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ του ΧΩΡΟΥ":

Δίνονται τρεις ημιευθείες ox, oy, oz οι οποίες δεν είναι συνεπίπεδες. Ένας οφθαλμός παρατηρεί τις τρεις ημιευθείες βρισκόμενος "πάνω" από την κοινή αρχή "ο" των τριών ημιευθειών. Όταν διαβάζουμε $o.xyz$, ο παρατηρητής βλέπει να διαγράφονται οι

ημιευθείες ox, oy, oz με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ενώ αν τις διαβάσουμε $o.zxy$, ο παρατηρητής βλέπει να διαγράφονται οι ημιευθείες ox, oz, oy , ο παρατηρητής βλέπει να διαγράφονται οι ημιευθείες αυτές, με φορά σύμφωνη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι ο "ότι ο χώρος είναι **θετικά προσανατολισμένος**", ενώ στη δεύτερη ότι "ότι ο χώρος είναι **αρνητικά προσανατολισμένος**".

Απάντηση στο πρόβλημα μέτρησης του πλήθους ψαριών σε λίμνη από το προηγούμενο τεύχος



Έστω x ο αριθμός των ψαριών της λίμνης, που μπορούν να πιαστούν με ένα ορισμένο δίχτυ. Τότε ο λόγος του αριθμού των σημαδεμένων ψαριών προς τον αριθμό όλων των ψαριών θα είναι $(38:x)$.

Τη δεύτερη φορά ο ψαράς έπιασε 53 ψάρια – τα δύο σημαδεμένα. Συνεπώς ο λόγος του αριθμού των σημαδεμένων ψαριών προς τον αριθμό των πιασμένων είναι $(2/53)$. Ας υποθέσουμε ότι τα σημαδεμένα ψάρια κατανεμήθηκαν ισόμμεσα ανάμεσα σε όλα τα ψάρια της λίμνης.

Τότε οι δύο λόγοι θα είναι ίσοι: $(38:x) = (2/53)$, οπότε $x = 1007$.

Έτσι υπάρχουν στη λίμνη περίπου 1000 ψάρια που είναι δυνατό να πιαστούν με το δοσμένο δίχτυ

Το σύντομο αυτό άρθρο περιέχει στοιχεία από την ενότητα των προόδων και συναρτήσεων, που βρίσκονται στην αντίστοιχη ύλη της Α' Λυκείου. Είναι επαναληπτικό και απαιτεί καλή γνώση των προηγούμενων κεφαλαίων.

Άσκηση 1: Η ακολουθία α_n , $n \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_3 = 10$, $\alpha_{10} = 38$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω της πρόοδου.

β) Να εξετάσετε αν ο 398 είναι όρος της αριθμητικής πρόοδου.

γ) Ομοίως για τον αριθμό 500.

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων.

Λύση: α) Από υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_3 = 10 &\Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 10 \\ \alpha_{10} = 38 &\Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega = 38 \\ &\Leftrightarrow 7\omega = 28 \\ &\Leftrightarrow \omega = 4 \\ \alpha_1 + 2\omega = 10 &\Leftrightarrow \alpha_1 = 2 \end{aligned}$$

β) Ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$$

Έχουμε, $4n - 2 = 398 \Leftrightarrow 4n = 400 \Leftrightarrow n = 100$.

Άρα ο 398 είναι όρος της αριθμητικής πρόοδου και μάλιστα α_{100} .

$$\gamma) \text{ Όμοια } 4n - 2 = 500 \Leftrightarrow 4n = 502 \Leftrightarrow n = \frac{502}{4} = \frac{251}{2},$$

που ασφαλώς δεν ανήκει στους φυσικούς. Άρα ο 500 δεν είναι όρος της αριθμητικής πρόοδου.

$$\delta) S_{100} = \frac{100}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{100}) = 50 \cdot 400 = 20.000$$

Άσκηση 2: Οι α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}.$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\alpha x^2 + \beta\sqrt{2}x + \gamma = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$.

Σημείωση: Οι α , β , γ αφού είναι όροι γεωμετρικής πρόοδου είναι διάφοροι του 0.

Λύση: Αφού οι α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου, ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

α) Έχουμε, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) Έχουμε ότι

$$\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow 2\beta^2 = 2\alpha\gamma \Leftrightarrow (\sqrt{2}\beta)^2 = 2\alpha\gamma = (2\alpha)\gamma.$$

Άρα οι 2α , $\sqrt{2}\beta$, γ είναι διαδοχικοί όροι

γεωμετρικής πρόοδου.

Από το α) ερώτημα η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Η διακρίνουσα του τριωνύμου διαπιστώσαμε ότι είναι αρνητική, επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α , για κάθε πραγματικό x .

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: Αν $\alpha > 0$ η ανίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό x .

Αν $\alpha < 0$ η ανίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

$$\beta) \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x) = \begin{cases} x - 2, & x > 1 \\ -x + 2, & x < 1 \end{cases}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι οι $f(4)$, $f(6)$, $f(10)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου.

δ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

Λύση: α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $|x - 1| \neq 0$ ή ισοδύναμα $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$$\text{Άρα, } A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει ρίζες, τις 1, 2 συνεπώς γράφεται $x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$.

$$\text{Έχουμε: } f(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{|x - 1|} = \begin{cases} x - 2, & x > 1 \\ -x + 2, & x < 1 \end{cases}.$$

$$\gamma) f(4) = 4 - 2 = 2, f(6) = 4, f(10) = 8$$

Οι 2, 4, 8 προφανώς αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής πρόοδου αφού $4^2 = 2 \cdot 8$.

Ο λόγος της πρόοδου ισούται με 2.

δ) Η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες $y = x - 2$ με $x > 1$ και $y = -x + 2$ με $x < 1$. και παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα



Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης προκύπτει ότι $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$.

Άσκηση 4: Δίνεται η ευθεία (ε): $y = \alpha$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - \alpha|$, όπου $\alpha \neq 0$.

α) Για τις τιμές του α που η (ε) τέμνει την C_f , να δείξετε ότι τα κοινά σημεία τους είναι τα $A(0, \alpha)$ και $B(2\alpha, \alpha)$.

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου OAB ισούται με 4, να υπολογίσετε το α .

γ) Για την τιμή του α που βρήκατε στο β) ερώτημα να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση: α) Οι τετμημένες των σημείων τομής προκύπτουν από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \alpha \Leftrightarrow |x - \alpha| = \alpha$ (1).

- Αν $\alpha < 0$ η (1) είναι αδύνατη, άρα δεν έχουν σημεία τομής.
- Αν $\alpha > 0$, η (1) διαδοχικά ισοδυναμεί $x - \alpha = -\alpha$ ή $x - \alpha = \alpha \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2\alpha$.

Άρα, τα κοινά τους σημεία είναι τα $A(0, \alpha)$ και $B(2\alpha, \alpha)$ με $\alpha > 0$.



β) Το εμβαδόν του τριγώνου ισούται

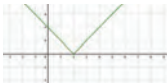
$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OA = \frac{1}{2} (2\alpha) \cdot \alpha = \alpha^2, \alpha > 0.$$

Έχουμε, $(OAB) = 4 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

γ) Για $\alpha = 2$, προκύπτει:

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -x + 2, & x < 2 \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες $y = x - 2$, με $x \geq 2$ και $y = -x + 2$, με $x < 2$. Η γραφική παράσταση παρουσιάζεται στο παρακάτω



Άσκηση 5: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της συνάρτησης.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = 2024 \cdot f(4) + 2025 \cdot f(5)$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες οι $f(5), f(8), f(x)$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

δ) Ομοίως αν οι αριθμοί $f(5), f(8), f(x)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Λύση: α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $x - 4 \geq 0$ ή ισοδύναμα $x \geq 4$. Άρα, $A_f = [4, +\infty)$.

β) Αρχικά, $f(4) = 0$ και $f(5) = 1$.

Άρα τελικά $K = 2024 \cdot 0 + 2025 \cdot 1 = 2025$.

γ) Οι αριθμοί $f(5), f(8), f(x)$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν,

$$2f(8) = f(5) + f(x) \Leftrightarrow 4 = 1 + \sqrt{x - 4} \Leftrightarrow \sqrt{x - 4} = 3 \Leftrightarrow x - 4 = 9 \Leftrightarrow x = 13.$$

δ) Οι αριθμοί $f(5), f(8), f(x)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$$f^2(8) = f(5) \cdot f(x) \Leftrightarrow 4 = 1 \cdot \sqrt{x - 4} \Leftrightarrow \sqrt{x - 4} = 4 \Leftrightarrow x - 4 = 16 \Leftrightarrow x = 20.$$

Άσκηση 6: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(v), f(v+1), f(v+2)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

β) i) Αν η συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης διέρχεται από το $K(0, -1)$, να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

ii) Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παράλληλη με την ευθεία (ε): $y = x + 2024$, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση: α) Έχουμε ότι:

$$f(v) = \alpha v + \beta$$

$$f(v+1) = \alpha(v+1) + \beta = \alpha v + \alpha + \beta = f(v) + \alpha$$

$$f(v+2) = \alpha(v+2) + \beta = \alpha v + 2\alpha + \beta = f(v+1) + \alpha$$

Άρα οι αριθμοί $f(v), f(v+1), f(v+2)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = \alpha$.

β) i) Η συμμετρική της f ως προς τον άξονα $x'x$ είναι η $-f$. Ισχύει,

$-f(x) = -\alpha x - \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $K(0, -1)$, έχουμε $-\alpha \cdot 0 - \beta = -1 \Leftrightarrow \beta = 1$.

ii) Οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα θα έχουν ίσες κλίσεις, επομένως $\alpha = 1$, άρα $f(x) = x + 1$.

Η γραφική της παράσταση είναι ευθεία και παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 7: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |x-1| + |x+1|.$$

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς απόλυτες τιμές.

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης i) να λύσετε την ανίσωση $2 \leq f(x) \leq 4$

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$, $y = 4$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου που σχηματίζουν τα σημεία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Λύση: Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\text{Αν } x \leq -1 \text{ τότε } f(x) = -x + 1 - x - 1 = -2x$$

$$\text{Αν } -1 < x < 1 \text{ τότε } f(x) = -x + 1 + x + 1 = 2$$

$$\text{Αν } x \geq 1 \text{ τότε } f(x) = x - 1 + x + 1 = 2x$$

$$\text{Συμπεραίνουμε, } f(x) = \begin{cases} -2x & , x \leq -1 \\ 2 & , -1 < x < 1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$$

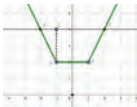
β) Η γραφική παράσταση αποτελείται από τρεις ημιευθείες:

$$(\varepsilon_1): y = -2x, x \leq -1$$

$$(\varepsilon_2): y = 2, -1 < x < 1$$

$$(\varepsilon_3): y = 2x, x > 1$$

Η γραφική παράσταση παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης διαπιστώνουμε ότι:

$$i) 2 \leq f(x) \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

ii) Τα σημεία τομής είναι τα $A(-1, 2)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(2, 4)$, $\Delta(-2, 4)$.

iii) Το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και το εμβαδόν του ισούται με

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} \cdot ΑΕ = \frac{2 + 4}{2} \cdot 2 = 6 \text{ τμ.}$$

Άσκηση 8: Έστω οι πραγματικοί α, β με $\alpha \neq \beta$ και η εξίσωση: $(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)(2x - \alpha - \beta) = 0$

i) Να λύσετε την εξίσωση.

ii) Να εντοπίσετε τρεις από τις λύσεις που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

iii) Να αποδείξετε ότι αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι ο α τότε ο γενικός όρος της είναι

$$\alpha_n = \frac{3\alpha - \beta + n(\beta - \alpha)}{2}$$

iv) Αν $\alpha = 1$ και $\omega = 1$, να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης

$f(x) = (x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)(2x - \alpha - \beta)$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση: i) Έχουμε ότι $(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)(2x - \alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \text{ ή } 2x - \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0 \text{ ή } x = \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \text{ ή } x = \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \alpha \text{ ή } x = \beta \text{ ή } x = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες: $\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta$.

ii) Οι δυνατές διατάξεις των ριζών είναι:

$$\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \text{ ή } \beta, \frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha.$$

Οι $\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής

προόδου αν και μόνο αν $2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha + \beta$, που

ισχύει. Ομοίως για τους $\beta, \frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha$.

III) Η διαφορά της προόδου είναι

$$\omega = \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega = \alpha + (v-1) \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} =$$

$$\frac{3\alpha - \beta + v(\beta - \alpha)}{2}.$$

iv) Για $\alpha = 1$ και $\omega = \frac{\beta - \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \beta = 3$.

Τα σημεία τομής της συνάρτησης με τον άξονα $x'x$ προκύπτουν από τις λύσεις της εξίσωσης,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha, x = \frac{\alpha + \beta}{2}, x = \beta \quad \text{και} \quad \mu\epsilon$$

αντικατάσταση των α, β έχουμε 1, 2, 3.

Άρα τα σημεία τομής με τον $x'x$ είναι τα $A(1,0)$,

$$B(2,0), \Gamma(3,0).$$

Για $x=0$ έχουμε: $f(0) = \alpha\beta(-\alpha-\beta) = -12$,
επομένως το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $\Delta(0, -12)$.

Άσκηση 9: Το άθροισμα των n πρώτων όρων

μιας ακολουθίας α_v είναι $S_n = \frac{2^n - 1}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε την διαφορά $S_n - S_{n-1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο.

γ) Να υπολογίσετε το γινόμενο των εννέα πρώτων όρων της προόδου.

Λύση: α) Έχουμε ότι: $S_n - S_{n-1} =$

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) = \alpha_n$$

β) Από α) ερωτήμα,

$$\alpha_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2^n - 1}{4} - \frac{2^{n-1} - 1}{4} = \frac{2^n - 2^{n-1}}{4} =$$

$$\frac{2^{n-1}(2-1)}{4} = 2^{n-3}$$

Έχουμε, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{2^{n+1}}{2^{n-3}} = 2$, άρα η ακολουθία α_v

είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και λόγο $\lambda = 2$.

γ) Συμβολίζουμε με P_9 το γινόμενο των εννέα πρώτων όρων. Έχουμε,

$$P_9 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_8 \cdot \alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^{18}.$$

Άσκηση 10: Δίνεται το σημείο $A(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$.

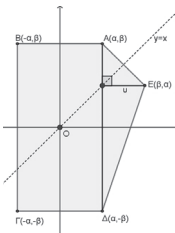
Έστω B, Γ, Δ, E αντίστοιχα είναι τα συμμετρικά του A ως προς τον $y'y$, ως προς την αρχή O , ως προς $x'x$ και E ως προς τη διχοτόμο της πρώτης - τρίτης γωνίας των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta E$ ισούται με $\beta^2 + 3\alpha\beta$.

β) Αν επιπλέον $\alpha = 2$, να εξετάσετε αν το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta E$ μπορεί να πάρει την τιμή 16.

Λύση: α) Για τα συμμετρικά του A έχουμε

$$B(-\alpha, \beta), \Gamma(-\alpha, -\beta), \Delta(\alpha, -\beta) \text{ και } E(\beta, \alpha).$$



Το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E$ αποτελείται από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και το τρίγωνο $AE\Delta$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB) \cdot (\Delta\Gamma) = 2|\alpha| \cdot 2|\beta| = 4|\alpha\beta|.$$

Το εμβαδόν του τριγώνου $AE\Delta$ είναι ίσο με

$$(AE\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta\Gamma) \cdot \nu = \frac{1}{2} \cdot 2|\beta| \cdot |\beta - \alpha| = |\beta| \cdot |\beta - \alpha|.$$

$$\text{Άρα, } E = 4|\alpha\beta| + |\beta| \cdot |\beta - \alpha|$$

$$\stackrel{0 < \alpha < \beta}{=} 4\alpha\beta + \beta \cdot (\beta - \alpha) = \beta^2 + 3\alpha\beta.$$

β) Είναι

$$E = 16 \Rightarrow \beta^2 + 3\alpha\beta = 16 \stackrel{\alpha=2}{\Rightarrow} \beta^2 + 6\beta - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\beta = 2 \text{ ή } \beta = -8.$$

Όμως $\beta > \alpha \Leftrightarrow \beta > 2$, άρα καμία από τις παραπάνω τιμές του β δεν είναι δεκτή. Οπότε το ΑΒΓΔΕ δεν μπορεί να έχει εμβαδό ίσο με 16.

Β' τρόπος:

Για το εμβαδό (ΑΒΓΔΕ) του ΑΒΓΔΕ ισχύει:

$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓΔ) + (ΑΔΕ) > (ΑΒΓΔ) \text{ και}$$

$$(ΑΒΓΔ) = 4|\alpha\beta| \stackrel{\alpha=2}{\underset{\beta>0}{}} = 8\beta > 16 \text{ άρα } (ΑΒΓΔΕ) > 16$$

Γ' τρόπος:

$$(ΑΒΓΔΕ) = \beta^2 + 3\alpha\beta \stackrel{\alpha=2}{=} \beta^2 + 6\beta = \beta^2 + 6\beta + 9 - 9 = (\beta + 3)^2 - 9 \text{ και}$$

$$\beta > \alpha \Rightarrow \beta > 2 \Rightarrow \beta + 3 > 5 \Rightarrow (\beta + 3)^2 > 25 \Rightarrow$$

$$(\beta + 3)^2 - 9 > 25 - 9 \Rightarrow (\beta + 3)^2 - 9 > 16.$$

Άρα (ΑΒΓΔΕ) > 16.

Άσκηση 11: Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = (x^2 + 1)f(1) + x - 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 1$.

β) Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο

$$\alpha_v = f(v), v \in \mathbb{N}^*.$$

Να εξετάσετε αν η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος ή γεωμετρική πρόοδος.

γ) Αν η γραφική παράσταση της g τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση: α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου $x = 1$, έχουμε

$$f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0.$$

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Ο τύπος της ακολουθίας είναι

$$\alpha_v = f(v) = v - 1, v \in \mathbb{N}^*.$$

Έχουμε, $\alpha_{v+1} - \alpha_v = (v+1) - 1 - v + 1 = 1$, άρα

η (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 0$ και $\omega = 1$.

Αντίστοιχα έχουμε $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{v+1-1}{v-1} = \frac{v}{v-1}$, άρα

η (α_v) δεν είναι γεωμετρική πρόοδος.

γ) Πρέπει και αρκεί $x^2 + x + 1 > 0$.

Η ανίσωση ισχύει για κάθε τιμή του x , αφού έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$.

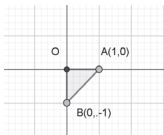
Για $x = 0$, έχουμε $g(0) = \frac{f(0)}{\sqrt{1}} = \frac{-1}{1} = -1$, άρα

τέμνει τον $y'y$ στο $B(0, -1)$. Για $y = 0$, έχουμε

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.



Για το εμβαδό έχουμε,

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |-1| = \frac{1}{2}.$$

δ) Η εξίσωση γίνεται:

$$|f(x)| = \lambda \Leftrightarrow |x - 1| = \lambda$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $\lambda < 0$, είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 0$, έχουμε $|x - 1| = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Αν $\lambda > 0$, τότε $|x - 1| = \lambda \Leftrightarrow x - 1 = -\lambda$
ή $x - 1 = \lambda \Leftrightarrow x = 1 - \lambda$ ή $x = 1 + \lambda$.

Τάξη: Α΄

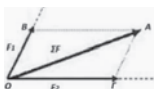
Παραλληλόγραμμα και τραπέζια: Δύο είδη τετραπλεύρων με ιδιαίτερη χρησιμότητα και ιδιότητες

Στέργιος Τουρναβίτης

Σκοπός αυτού του άρθρου είναι να αναδείξει την αξία των **ιδιοτήτων** και των **κριτηρίων**, των κάθε φύσης παραλληλογράμμων και τραπέζιων, μέσα από την εξάσκηση σε αποδεικτικές διαδικασίες στην επίλυση των παρατιθέμενων ασκήσεων, όπου απαιτούνται ιδιαίτερα, τα **κριτήρια** ιδιότητας τριγώνων και ορθογωνίων τριγώνων, από τις προηγούμενες σχετικές ενότητες. Οι ασκήσεις που ακολουθούν είναι και κοντά στη σχολική ύλη. Αρχίζουμε με μερικές ευκόνες παραλληλογράμμων και τραπέζιων που είναι ενσωματωμένα σε διάφορες κατασκευές, αποτελούν πηγή **έμφυσης** στη ζωγραφική κ.ά.:



Πίνακας ζωγραφικής

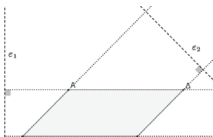


Σύνθεση δύο δυνάμεων



Κτίρια

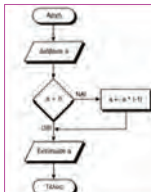
Το παραλληλόγραμμα είναι το σχήμα ΑΒΓΔ που ορίζεται από δύο ζεύγη παράλληλων ευθυγράμμων τμημάτων (ΑΒ, ΓΔ), (ΒΓ, ΔΑ).



Ένας τρόπος για να το κατασκευάσουμε είναι να πάρουμε αυτά τα παράλληλα τμήματα σε δύο ζεύγη παράλληλων ευθειών. Αυτά τα δύο ζεύγη των δύο απέναντι τμημάτων, βρίσκονται σε ευθείες που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, άρα μεταξύ τους ανά δύο είναι παράλληλα, αντίστοιχα.

Άσκηση 1

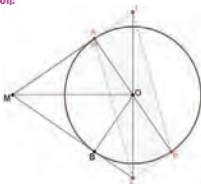
Από σημείο Μ εκτός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ αυτού. Η διάμετρος του κύκλου, που είναι κάθετη στην ΟΜ, τέμνει τις ευθείες ΜΑ και ΜΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.



Λογικό διάγραμμα

Η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Β. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ, Ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Λύση:



Στο σχήμα εντοπίζουμε ένα τετράπλευρο ΑΓΕΔ του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται. (γιατί;) Άρα είναι παραλληλόγραμμα. Όμως $ΑΓ \perp ΑΟ$ και επειδή $ΔΕ \parallel ΑΓ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, θα είναι και $ΔΕ \perp ΟΕ$ όπου η ΟΕ είναι στην προέκταση της

ΑΟ. Επειδή τώρα η ΔΕ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΕ του κύκλου στο σημείο Ε, η ΔΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,ΟΕ) με σημείο επαφής το Ε.

Άσκηση 6

Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Μ με ΒΜ=ΒΓ, ενώ στην προέκταση της ΔΑ παίρνουμε σημείο Ν με ΔΝ=ΔΓ. Είναι οι ευθείες ΜΓ, ΓΝ κάθετες;

Λύση:



Για την απάντηση στο ερώτημα, προχωράμε από αυτό που θέλουμε να διερευνήσουμε υποθέτοντας ότι ισχύει και με σχέσεις γωνιών που προκύπτουν από το σχήμα, τα δεδομένα της άσκησης και φυσικά τη θεωρία, καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει αντικειμενικά.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\widehat{N\Gamma M} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{\phi_1} + \widehat{\omega_2} = 90^\circ \text{ ή } \underbrace{2\widehat{\phi_1}}_{\widehat{\phi}} + \underbrace{2\widehat{\omega_2}}_{\widehat{\omega}} = 180^\circ$$

Όμως $\widehat{\phi} + \widehat{\Delta\Gamma B} = 180^\circ$ (γιατί). Προηγούμενως αντικαταστήσαμε τη $2\widehat{\phi_1}$ με την γωνία $\widehat{\phi}$ και την $2\widehat{\omega_2}$ με την γωνία $\widehat{\Delta\Gamma B}$ (γιατί). Άρα αφού η τελευταία ισότητα είναι αληθής, θα ισχύει και ότι, οι ευθείες ΓΜ και ΓΝ είναι κάθετες.

Άσκηση 7

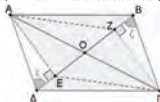
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τις προβολές Ε και Ζ των κορυφών Α και Γ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ.

Λύση:

Εκτός από το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, υπάρχει και ένα τετράπλευρο που έχει μία κοινή διαγώνιο με αυτό και η άλλη διαγώνιος του είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, για το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε ότι διχοτομείται από την ΑΓ.

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και θα συμβαίνει αυτό που είπαμε, δηλαδή ότι η διαγώνιος του ΑΓ να διχοτομεί την άλλη διαγώνιο του ΕΖ. Παρατηρούμε επίσης από το σχήμα σύμφωνα και με την υπόθεση της άσκησης, ότι ΑΕ//ΓΖ, ως κάθετες στην ΒΔ. Αρκεί επομένως να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια των παραλληλογράμμων (ποιο συγκεκριμένα;) ότι

εκτός από παράλληλες οι ΑΕ και ΓΖ είναι και ίσες. Αυτό προκύπτει εύκολα από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα, ΑΕΔ και ΓΖΒ τα οποία είναι ίσα. (γιατί).



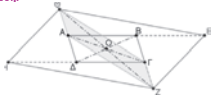
Ο τελικός επίλογος της άσκησης είναι να γράψουμε σύμφωνα με τα κριτήρια των παραλληλογράμμων, ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει δύο απέναντι πλευρές ΑΕ, ΓΖ παράλληλες και ίσες, επομένως είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΕΖ, διχοτομούνται.

Άσκηση 8

Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ=ΑΒ, ΓΖ=ΒΓ, ΔΗ=ΓΔ, ΑΘ=ΔΔ αντίστοιχα.

α) Είναι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο; β) Έχει το ίδιο κέντρο με το ΑΒΓΔ;

Λύση:



α) Από τα ίσα τρίγωνα ΘΑΕ και ΖΓΗ (γιατί;) έχουμε ΘΕ=ΖΗ. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ΘΗ=ΖΕ.

Άρα το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (γιατί.)

β) Αν φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΓ και ΑΖ, σχηματίζεται ένα τετράπλευρο ΑΘΓΖ που οι απέναντι πλευρές του ΑΘ και ΓΖ είναι από την υπόθεση ίσες προεκτάσεις των ίσων και παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αντίστοιχα. Άρα είναι και αυτό παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι δύο διαγώνιοι ΘΖ, ΑΓ αυτού του παραλληλογράμμου είναι ταυτόχρονα η μεν ΘΖ διαγώνιος και του ΘΕΖΗ, η δε ΑΓ διαγώνιος και του ΑΒΓΔ. Επομένως το μέσο Ο της ΑΓ, είναι ταυτόχρονα και κέντρο του ΑΒΓΔ, ενώ το ίδιο σημείο ως μέσο της ΘΖ, θα είναι και κέντρο του ΕΖΗΘ. Άρα τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν το ίδιο κέντρο.

Άσκηση 9

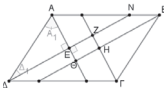
α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών του γωνιών είναι κάθετες ενώ οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών του είναι

παράλληλες.

α₂) Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζεται από τις διχοτόμους ενός παραλληλογράμμου οι οποίες τέμνονται ανά δύο σε διαφορετικά σημεία;

β) Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διχοτόμοι των γωνιών του τεμνόμενες ανά δύο σε διαφορετικά σημεία, σχηματίζουν τετράγωνο.

Λύση:



α₁) Για να δείξουμε ότι οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι κάθετες, αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΑΕΔ, είναι ορθή. Το ίδιο βέβαια θα συμβαίνει και με την κατακορυφή της Ε που είναι μία από τις τέσσερις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ.

Έχουμε ότι: $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ (γιατί);

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ, \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}, \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ$$

Επομένως από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΕΔ ισχύει ότι $\hat{E} = 90^\circ$.

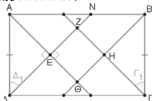
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι διχοτόμοι των επίσης διαδοχικών γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, είναι επίσης κάθετες. Και αφού οι διχοτόμοι των δύο απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία που δεν είναι άλλη από τη διχοτόμο της $\hat{A}$, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

α₂) Έχουμε αποδείξει για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΘΗΖ από το προηγούμενο ερώτημα ότι $\hat{E} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ από την καθετότητα των διχοτόμων των διαδοχικών γωνιών $\hat{A}$, $\hat{A}$ και $\hat{B}$, $\hat{B}$. Το ίδιο συμβαίνει και με τις διχοτόμους των επίσης διαδοχικών γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα και η γωνία $\hat{Z}$ είναι ορθή.

Επομένως το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (γιατί;)

β) Έχουμε αποδείξει από το προηγούμενο ερώτημα α₂, ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αφού και στην περίπτωση του προκειμένου ερωτήματος β), το ΑΒΓΔ ως ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο, ώστε να ισχύουν για αυτό οι υποθέσεις και το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Επομένως το μόνο που μένει να αποδείξουμε για το τετράπλευρο ΕΖΗΘ, ότι είναι και ρόμβος που σημαίνει «ορθογώνιο + ρόμβος = τετράγωνο». Αυτό μεταφράζεται στο να επιλέξουμε δύο διαδοχικές πλευρές π.χ. τις ΕΖ, ΖΗ και να επιβεβαιώσουμε την αλήθεια της αισθητικής μας αντίληψης, ότι είναι ίσες.



Παρατηρούμε από το σχήμα ότι:

$$EZ = DZ - DE \text{ και } HZ = \Gamma Z - \Gamma H$$

Όμως $DZ = \Gamma Z$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΔΖΓ (γιατί;) και $DE = \Gamma H$ από την ισότητα των ορθογώνιων και ισοσκελών τριγώνων ΑΕΔ και ΒΗΓ. (γιατί;)

Επομένως $EZ = HZ$ (ως διαφορές ίσων τμημάτων). Αυτό σημαίνει ότι το ΕΖΗΘ εκτός από ορθογώνιο είναι και ρόμβος, άρα τετράγωνο.

Άσκηση 10

Σ' ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ βρίσκεται το συμμετρικό Ε της κορυφής του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ. Τι είδους αποδεικτική διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε για το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ;

Λύση:



$\Delta E = \Delta A$ επειδή το ΑΔΕ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο. (γιατί;). Όμως $\Delta A = \Gamma B$, άρα και $\Delta E = \Gamma B$.

Στο τρίγωνο ΕΑΓ η ΜΟ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΕ, ΑΓ, Μ και Ο αντίστοιχα, άρα $ΜΟ // ΕΓ$ επομένως και $\Delta B // ΕΓ$. Έχουμε επομένως ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες $\Delta B // ΕΓ$ και τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες $\Delta E = \Gamma B$. Επομένως είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο.

Βιβλιογραφία: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιάιου Λυκείου ΟΕΔΒ 1999, Θωμαΐδης Γιάννης, Ξένος Θανάσης, Παντελίδης Γεώργιος, Πούλος Ανδρέας, Στάμου Γεώργιος.

Τάξη: Β'

ΕΚΘΕΤΙΚΗ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Καραμανώλης Γ. - Τσακartzής Σ. - Τσιφάκης Χ.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \log_{\beta} x$, όπου

$$\alpha > 0, 0 < \beta \neq 1. \text{ Εάν γνωρίζετε ότι: } f\left(\frac{16}{81}\right) = -2$$

$$\text{και } \alpha = \log_{\kappa} \beta, 0 < \kappa \neq 1, \text{ να δείξετε ότι } \kappa = \frac{9}{4}.$$

ΛΥΣΗ

Αφού $\log_{\kappa} \beta = \alpha \Leftrightarrow \beta = \kappa^{\alpha}$. Αν θέσουμε

$$\log_{\beta} x = \lambda \Leftrightarrow x = \beta^{\lambda} \text{ έχουμε } x = (\kappa^{\alpha})^{\lambda} = \kappa^{\alpha \lambda}$$

και τότε η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \alpha \lambda$.

$$\text{Αφού } f\left(\frac{16}{81}\right) = -2 \Leftrightarrow \kappa^{\alpha \lambda} = \frac{16}{81} \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{16}{81} \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2 = \frac{81}{16} \Leftrightarrow \kappa = \frac{9}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z για τους οποίους ισχύει ότι: $xyz = 10^{81}$ (1) και

$$\log(x) \cdot \log(yz) + \log(y) \cdot \log(z) = 468 \quad (2).$$

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \log^2(x) + \log^2(y) + \log^2(z)$$

ΛΥΣΗ

$$\text{Αφού } \log x \cdot \log(yz) + \log y \cdot \log z = 468 \Leftrightarrow$$

$$\log x \cdot \log y + \log y \cdot \log z + \log x \cdot \log z = 468$$

$$\text{και } xyz = 10^{81} \Leftrightarrow \log(xyz) = \log(10^{81}) \Leftrightarrow$$

$$\log x + \log y + \log z = 81.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$$\log^2 x + \log^2 y + \log^2 z + 2\log x \cdot \log y +$$

$$+ 2\log y \cdot \log z + 2\log x \cdot \log z = 81^2 \Leftrightarrow$$

$$\log^2 x + \log^2 y + \log^2 z =$$

$$6561 - 2(\log x \cdot \log y + \log y \cdot \log z + \log x \cdot \log z)$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x + \log^2 y + \log^2 z = 6561 - 936 = 5625.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = \log_2^2(x) - \log_2(x^2) + 3, x > 0.$$

Εάν $x \in [1, 8]$, να βρεθούν οι τιμές του m για τις οποίες ισχύει $f(x) = m$.

ΛΥΣΗ

Ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x) = \log_2^2(x) - \log_2(x^2) + 3 =$$

$$\log_2^2(x) - \log_2(x^2) + 3 =$$

$$\log_2^2(x) - 2\log_2(x) + 3 =$$

$$\log_2^2(x) - 2\log_2(x) + 1 + 2 = (\log_2(x) - 1)^2 + 2.$$

Προφανώς για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq 2$, άρα

και $m \geq 2$. Αφού

$$x \in [1, 8] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq \log_2 x \leq \log_2 8 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \log_2 x \leq \log_2 8 \Leftrightarrow 0 \leq \log_2 x \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq \log_2 x - 1 \leq 2. \text{ Άρα}$$

$$0 \leq (\log_2 x - 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq (\log_2 x - 1)^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$2 \leq f(x) \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση με τύπο } f(x) = \frac{x}{2025^x + 1},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$K = [f(1) + f(2) + \dots + f(100)] -$$

$$-[f(-1) + f(-2) + \dots + f(-100)]$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$f(-x) = \frac{-x}{2025^{-x} + 1} = \frac{-x}{\frac{1}{2025^x} + 1} = \frac{-x}{\frac{1 + 2025^x}{2025^x}} =$$

$$\frac{-x}{\frac{1 + 2025^x}{2025^x}} = \frac{-x}{1 + 2025^x} \cdot 2025^x = -2025^x \cdot f(x)$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) - f(-x) = f(x) + 2025^x \cdot f(x) =$$

$$(1 + 2025^x) \cdot f(x) = (1 + 2025^x) \cdot \frac{x}{2025^x + 1} = x.$$

Επομένως η παράσταση Κ γίνεται:

$$K = [f(1) - f(-1)] + [f(2) - f(-2)] + \dots + \\ + \dots + [f(100) - f(-100)] = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \\ \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{1-\log x} + \frac{2}{2+\log x} = 1$

ΛΥΣΗ

Πρέπει και αρκεί:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 1 - \log x \neq 0 \\ 2 + \log x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \log x \neq 1 \\ \log x \neq -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 10 \\ x \neq \frac{1}{100} \end{array} \right\}$$

Άρα $x \in \left(0, \frac{1}{100}\right) \cup \left(\frac{1}{100}, 10\right) \cup (10, +\infty)$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{1-\log x} + \frac{2}{2+\log x} = 1 \Leftrightarrow \\ \frac{2}{2+\log x} = 1 - \frac{1}{1-\log x} \Leftrightarrow \frac{2}{2+\log x} = \frac{-\log x}{1-\log x} \Leftrightarrow \\ 2-2\log x = -2\log x - \log^2 x \Leftrightarrow \log^2 x = -2, \\ \text{αδύνατη.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λυθεί το σύστημα: $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ 2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \end{array} \right\}$

ΛΥΣΗ

Πρέπει $x+y > 0$.

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \Leftrightarrow \frac{2^{\ln(x+y)}}{2^{\ln 2}} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \Leftrightarrow \\ 2^{\ln(x+y)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5 + \ln 2} \Leftrightarrow (2 \cdot 5)^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 10} \Leftrightarrow \\ 10^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 10} \Leftrightarrow \ln(x+y) \cdot \ln 10 = \ln 2 \cdot \ln 10 \Leftrightarrow \\ \ln(x+y) = \ln 2 \Leftrightarrow x+y = 2.$$

Άρα το σύστημα γίνεται:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (x+y)^2 = 7 + xy \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left. \begin{array}{l} xy = -3 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} xy = -3 \\ y = 2 - x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = 2 - x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ x = 3 \text{ ή } x = -1 \Leftrightarrow (x, y) = \{(-1, 3), (3, -1)\}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να λυθεί η εξίσωση στο $\mathbb{R}$:

$$4 \frac{(\sqrt{5}-2)^x}{9-4\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-2}$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση γίνεται:

$$4 \frac{(\sqrt{5}-2)^x}{9-4\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \\ 4 \frac{(\sqrt{5}-2)^x}{5-4\sqrt{5}+4} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \\ 4 \frac{(\sqrt{5}-2)^x}{(\sqrt{5}-2)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \\ 4(\sqrt{5}-2)^{x-2} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \\ \frac{(\sqrt{5}-2)^{x-2}}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-2}{\frac{2}{\sqrt{5}+2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=2$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt[4]{64\alpha^3\beta^2}}{\alpha\beta} \right) = 1 + x \log_2 \alpha + y \log_2 \beta \quad \mu\epsilon$$

$x, y \in \mathbb{Q}$. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $P = xy + 674$.

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε

$$\log_2 \beta = \kappa \Leftrightarrow \beta = 4^\kappa \Leftrightarrow \beta = 2^{2\kappa} \Leftrightarrow \log_2 \beta = 2\kappa$$

οπότε η παράσταση P γίνεται:

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt[4]{64 \cdot \alpha^3 \cdot \beta^2}}{\alpha\beta} \right) = \log_2 \left(\frac{\sqrt[4]{64 \cdot \alpha^3 \cdot \beta^2}}{\alpha\beta} \right) = \\ \log_2 \left(2 \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{2}{3}} \right) = 1 + \log_2 \left(\alpha^{\frac{1}{2}} \right) + \log_2 \left(\beta^{\frac{2}{3}} \right) = \\ 1 - \frac{1}{2} \log_2 \alpha - \frac{2}{3} \log_2 \beta = 1 - \frac{1}{2} \log_2 \alpha - \frac{4}{3} \log_2 \beta.$$

Άρα $x = -\frac{1}{2}$ και $y = -\frac{4}{3}$, οπότε η παράσταση

$$P = xy + 674 = \frac{2}{3} + 674 = \frac{2024}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^{x+1} - e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Εξετάστε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
 β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.
 γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f της γραφικής παράστασης της f , με τον άξονα $x'x$.
 δ) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.
 ε) Να λυθεί η ανίσωση:

$$x^2 \cdot \ln(f(x) + e^{1-x}) - \ln(e^2) > 0.$$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και
 $f(-x) = e^{-x+1} - e^{1-(-x)} = e^{1-x} - e^{x+1} =$
 $-(e^{x+1} - e^{1-x}) = -f(x).$

Άρα η f είναι περιττή.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 < x_2 + 1 \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 < x_2 + 1 \\ 1 - x_1 > 1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \\ e^{x_1+1} < e^{x_2+1} &\Rightarrow \begin{cases} e^{x_1+1} < e^{x_2+1} \\ e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \end{cases} \Rightarrow \\ e^{x_1+1} - e^{1-x_1} < e^{x_2+1} - e^{1-x_2} &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \text{ Άρα η} \\ f &\text{1 R.} \end{aligned}$$

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{x+1} - e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^{1-x} \Leftrightarrow \\ x+1 &= 1-x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Άρα το } O(0,0). \end{aligned}$$

δ) Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

$$\text{όταν } f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$$

ε) Πρέπει και αρκεί

$$f(x) + e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow e^{x+1} - e^{1-x} + e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow e^{x+1} > 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ανίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \ln(f(x) + e^{1-x}) - \ln(e^2) &> 0 \Leftrightarrow \\ x^2 \cdot \ln(e^{x+1}) - \ln(e^2) &> 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \\ x^3 + x - 2 > 0 &\Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ (x-1) \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{>0} \right) &> 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1, \text{ αφού} \end{aligned}$$

$$\text{το } x^2 + 2x + 2 \text{ έχει } \Delta = 4 - 8 = -4 < 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^{\ln x + 2x}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x) - 3e^{2x} = 2f(\sqrt{x}), \quad x > 0.$$

γ) Να λυθεί η ανίσωση:

$$2f(x^2) - 3f(x) - 3e^x - 2 > 0.$$

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί $x > 0$. Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = e^{\ln x + 2x} = e^{\ln x} \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot x, \quad x > 0.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow e^{2x_1} \cdot x_1 < e^{2x_2} \cdot x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ άρα η} \\ f &\text{1 } (0, +\infty). \end{aligned}$$

β) Η εξίσωση γίνεται για $x > 0$:

$$f(x) - 3e^{2x} = 2f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x \cdot e^{2x} - 3e^{2x} &= 2\sqrt{x} \cdot e^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} - 3 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ ή } \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9. \end{aligned}$$

γ) Η ανίσωση γίνεται για $x > 0$:

$$\begin{aligned} 2f(x^2) - 3f(x) - 3e^x - 2 > 0 &\Leftrightarrow \\ 2e^{2x^2} \cdot x^2 - 3e^{2x} \cdot x - 3e^x - 2 > 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3e^{2x})^2 - 4 \cdot 2e^{2x} \cdot (-3e^x - 2) = \\ &= 9e^{4x} + 24e^{3x} + 16e^{2x} = (3e^{2x} + 4e^x)^2 > 0 \end{aligned}$$

Άρα έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3e^{2x} - (3e^{2x} + 4e^x)}{2e^{2x}} = -\frac{4}{e^x}, \\ x_2 &= \frac{3e^{2x} + (3e^{2x} + 4e^x)}{2e^{2x}} = 3 + \frac{2}{e^x} \end{aligned}$$

και αληθεύει εκτός των ριζών, δηλαδή για κάθε

$$x < -\frac{2}{e^x} \text{ ή } x > 3 + \frac{2}{e^x} \text{ και τελικά για } x > 3 + \frac{2}{e^x},$$

αφού $x > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x - 1 + \ln x$, $x > 0$

A. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

B. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = x - 1 - \ln^2 x$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(e^x) > x + 2^{x+1} - 1$

Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει ότι:

$$\sin \theta < \ln \frac{e}{\sin \theta}.$$

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $0 < x < 1$ έχουμε ότι $x - 1 < 0$ και $x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$, προσθέτοντας

κατά μέλη: $x-1+\ln x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Β. Για κάθε $x > 0$, έχουμε

$$f(x) = x - 1 - \ln^2 x \Leftrightarrow$$

$$x - 1 + \ln x = x - 1 - \ln^2 x \Leftrightarrow$$

$$\ln^2 x + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x \cdot (\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = 0 \text{ ή } \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{e}.$$

Γ. Έχουμε: $f(e^x) > x + 2^{x+1} - 1 \Leftrightarrow$

$$e^x - 1 + x > x + 2^{x+1} - 1 \Leftrightarrow e^x > 2 \cdot 2^x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^x > 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e}{2}\right)^x > \ln 2 \Leftrightarrow x \cdot \ln\left(\frac{e}{2}\right) > \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (1 - \ln 2) > \ln 2 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 2}{1 - \ln 2}.$$

Δ. Αφού $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ τότε $0 < \sin \theta < 1$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\sin \theta < \ln \frac{e}{\sin \theta} \Leftrightarrow \sin \theta - \ln \frac{e}{\sin \theta} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin \theta - \ln e + \ln \sin \theta < 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin \theta - 1 + \ln \sin \theta < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0, \text{ που ισχύει}$$

από το Α. ερώτημα.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Αν το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 \cdot \ln \alpha + (2 - \ln \alpha) \cdot x^2 + \alpha^{\ln \beta} \cdot x + 1,$$

έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και ρίζα το $x = -1$, να βρείτε:

Ι. Τις τιμές των α, β

ΙΙ. Αν $\alpha = e$ και $\beta = 1$, να λυθεί η ανίσωση:

$$P(e^x) < e^x + 3.$$

ΛΥΣΗ

Ι. Πρέπει $\alpha, \beta > 0$. Τότε αφού το $P(x)$ έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και είναι $\alpha^{\ln \beta} > 0$, έχουμε:

$$\begin{cases} \ln \alpha > 0 \\ 2 - \ln \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \alpha > 0 \\ \ln \alpha < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e.$$

Οπότε το δοσμένο πολυώνυμο γίνεται:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 \cdot 1 + (2 - 1) \cdot x^2 + e^{\ln \beta} \cdot x + 1 = \\ &= x^3 + x^2 + \beta \cdot x + 1 \end{aligned}$$

και αφού έχει ρίζα το $x = -1$,

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 + (-1)^2 + \beta \cdot (-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$$

ΙΙ. Είναι $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, οπότε:

$$P(e^x) < e^x + 3 \Leftrightarrow e^{3x} + e^{2x} + e^x + 1 < e^x + 3 \Leftrightarrow$$

$$e^{3x} + e^{2x} - 2 < 0.$$

Θέτουμε $e^x = y, y > 0$ και παίρνουμε:

$$y^3 + y^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow (y-1) \cdot (y^2 + 2y + 2) < 0$$

$$y^2 + 2y + 2 > 0, (\Delta < 0)$$

$$\Leftrightarrow y - 1 < 0 \Leftrightarrow y < 1.$$

Τελικά λύνουμε την ανίσωση:

$$e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Η συνάρτηση που συνδέει το βάρος (σε εκατοντάδες κιλά) ενός παραγόμενου προϊόντος μια ποικιλίας από σπανάκι με το βάρος x (σε εκατοντάδες κιλά) λιπάσματος είναι: $\sigma(x) = 50 + \beta \cdot (1 - e^{-\mu x})$, $x \geq 0$, $\mu, \beta > 0$

Ι. Να βρείτε πόσα κιλά καθαρό βιολογικό σπανάκι μπορεί να συλλέξει (χωρίς καθόλου λίπασμα).

ΙΙ. Να προσδιοριστούν οι τιμές των β και μ όταν γνωρίζουμε ότι: ρίχνοντας 200 κιλά λίπασμα συλλέγει 8200 κιλά και όταν ρίχνει 400 κιλά συλλέγει 9800 κιλά.

ΙΙΙ. Δείξτε ότι, ανεξάρτητα από την ποσότητα λιπάσματος που θα χρησιμοποιηθεί, δεν είναι δυνατόν να συλλεχθούν περισσότερα από 11.400 κιλά.

ΛΥΣΗ

Ι. Για να συλλέξει βιολογικό σπανάκι, χωρίς καθόλου λίπασμα, δηλαδή για $x = 0$, έχουμε:

$$\sigma(0) = 50 + \beta \cdot (1 - e^0) = 50 \text{ (δηλαδή 5000 κιλά)}.$$

$$\text{ΙΙ. Έχουμε ότι: } \begin{cases} \sigma(2) = 82 \\ \sigma(4) = 98 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 50 + \beta \cdot (1 - e^{-2\mu}) = 82 \\ 50 + \beta \cdot (1 - e^{-4\mu}) = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \cdot (1 - e^{-2\mu}) = 32 \\ \beta \cdot (1 - e^{-4\mu}) = 48 \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{(1 - e^{-2\mu})}{(1 - e^{-4\mu})} = \frac{32}{48} \Leftrightarrow \frac{(1 - e^{-2\mu})}{(1 - e^{-2\mu}) \cdot (1 + e^{-2\mu})} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(1 + e^{-2\mu})} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2e^{-2\mu} = 1 \Leftrightarrow e^{-2\mu} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln e^{-2\mu} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\mu = -\ln 2 \Leftrightarrow \mu = \frac{\ln 2}{2}.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση για

$$e^{-2\mu} = \frac{1}{2}, \text{ προκύπτει } \beta = 64.$$

ΙΙΙ. Έστω ότι υπάρχει x τέτοιο ώστε:

$$\sigma(x) \geq 114 \Leftrightarrow 50 + 64 \cdot (1 - 2^{-\frac{x}{2}}) \geq 114 \Leftrightarrow$$

$$64 \cdot (1 - 2^{-\frac{x}{2}}) \geq 64 \Leftrightarrow 1 - 2^{-\frac{x}{2}} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$-2^{-\frac{x}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{-\frac{x}{2}} \leq 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα όσο λίπασμα και αν ρίξει, δεν πρόκειται να συλλέξει περισσότερα από 11.400 κιλά.

Τάξη: Β'

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Μπαλτασβιάς Βενέδικτος

Άσκηση 1

Το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι $E = 3\sqrt{3}$. Να βρείτε την πλευρά και το απόστημα ενός τετραγώνου το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.

Λύση

Ισχύει

$$E = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\lambda_3^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda_3^2 = 12 \Leftrightarrow \lambda_3 = 2\sqrt{3}.$$

Όμως $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ άρα $2\sqrt{3} = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 2$

$$\text{Επομένως } \lambda_4 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ και } \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Άσκηση 2

Ένα κανονικό δεκαεξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) έχει ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$ cm και εμβαδόν 64 cm^2 . Να βρείτε την πλευρά και το απόστημα του.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{cases} \frac{\lambda_{16}^2}{4} + \alpha_{16}^2 = R^2 \\ E_{16} = \frac{1}{2} P_{16} \alpha_{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_{16}^2}{4} + \alpha_{16}^2 = 8 \\ 64 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \lambda_{16} \alpha_{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda_{16}^2}{4} + \alpha_{16}^2 = 8 \\ 8 = \lambda_{16} \alpha_{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_{16}^2}{4} + \alpha_{16}^2 = 8 \\ \alpha_{16} = \frac{8}{\lambda_{16}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda_{16}^2}{4} + \left(\frac{8}{\lambda_{16}}\right)^2 = 8 \\ \alpha_{16} = \frac{8}{\lambda_{16}} \end{cases} \xrightarrow{\lambda_{16} \neq 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{64}{x^2} = 8 \\ \alpha_{16} = \frac{8}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{64}{x^2} = 8 \\ \alpha_{16} = \frac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 32x^2 + 256 = 0 \\ \alpha_{16} = \frac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2 - 16)^2 = 0 \\ \alpha_{16} = \frac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ \alpha_{16} = \frac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \alpha_{16} = 2 \end{cases}$$

Άρα η πλευρά του είναι $\lambda_{16} = 4$ cm και το απόστημα $\alpha_{16} = 2$ cm.

Άσκηση 3

Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $R = \sqrt{2}$ με $AB = 2$, $\widehat{B\Gamma} = \sqrt{6}$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta\epsilon} = \sqrt{2}$. Να βρείτε το εμβαδόν Ε του πενταγώνου.

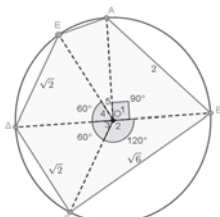
Λύση

Είναι $AB = R\sqrt{2}$, $B\Gamma = R\sqrt{3}$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta\epsilon} = R$.

Επομένως $\widehat{A\text{ΟΒ}} = 90^\circ$, $\widehat{B\text{ΟΓ}} = 120^\circ$, $\widehat{\Gamma\text{Ο}\Delta} = 60^\circ$

$\widehat{\Delta\text{Ο}\epsilon} = 60^\circ$ και

$$\widehat{E\text{ΟΑ}} = 360^\circ - \widehat{\text{Ο}_1} - \widehat{\text{Ο}_2} - \widehat{\text{Ο}_3} - \widehat{\text{Ο}_4} = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$$



Το ζητούμενο εμβαδό $E = (AB\Gamma\Delta\epsilon)$ είναι ίσο με

$E = (\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΒΟΓ}) + (\text{ΓΟΔ}) + (\text{ΔΟΕ}) + (\text{ΕΟΑ})$ με

$$(\text{ΑΟΒ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΟ} \cdot \text{ΟΒ} = \frac{1}{2} \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$(\text{ΒΟΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΟΒ} \cdot \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot R^2 \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(\text{ΓΟΔ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΟΔ} \cdot \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot R^2 \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

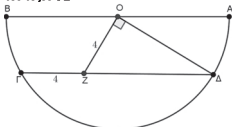
$$(\text{ΔΟΕ}) = (\text{ΓΟΔ}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και}$$

$$(\text{ΕΟΑ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΟΕ} \cdot \text{ΟΑ} \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot R^2 \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } E = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$$

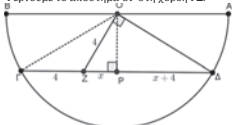
Άσκηση 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο AB κέντρου O και ακτίνας R και ΓΔ μια χορδή. Αν $OZ = ZΓ = 4$ και $\angle Z\hat{O}A = 90^\circ$, να βρείτε το μήκος του τόξου ΓΔ.



Λύση:

Φέρνουμε το απόστημα OP στη χορδή ΓΔ.



Έστω $x = ZP$. Είναι $PΓ = PD \Rightarrow PD = x + 4$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ZOD έχουμε:

$$OZ^2 = ZP \cdot ZD \Rightarrow 4^2 = x(2x+4) \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4 < 0$$

Δεκτή είναι η λύση $x = 2$.

Άρα $ZD = 8$ και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OZD έχουμε:

$$ZD^2 = OZ^2 + OD^2 \Rightarrow OD^2 = ZD^2 - OZ^2 \Rightarrow$$

$$0d^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow 0d^2 = 48 \Rightarrow OD = R = 4\sqrt{3}$$

$$\text{και } OZ = \frac{ZD}{2} \Rightarrow O\hat{D}Z = 30^\circ$$

Το τρίγωνο OΓΔ είναι ισοσκελές ($OG = OD = R$)

άρα $O\hat{G}D = 30^\circ$ οπότε

$$G\hat{O}A = 180^\circ - O\hat{D}G - O\hat{G}D = 120^\circ.$$

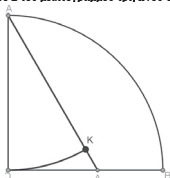
Το μήκος του τόξου ΓΔ είναι ίσο με

$$\ell_{\widehat{GD}} = \frac{\pi R \cdot 120}{180} = \frac{4\sqrt{3}\pi \cdot 2}{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$$

Άσκηση 5

Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\widehat{AOB}$ ακτίνας R και εμβαδού $3\pi \text{ cm}^2$. Στην OB παίρνουμε σημείο A τέτοιο ώστε $OA = 2 \text{ cm}$ και θεωρούμε τον κύκλο

(A, AO) ο οποίος τέμνει την AA στο K. Αν $AA = 4 \text{ cm}$ να βρείτε την περίμετρο P και το εμβαδό E του μεικτόγραμμου τριγώνου OKA.



Λύση

Το εμβαδόν του $\widehat{AOB}$ είναι ίσο με 3π άρα:

$$\left(\widehat{AOB}\right) = \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow 3\pi = \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow R^2 = 12 \Rightarrow R = \sqrt{12}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAA είναι $OA = \frac{AA}{2}$ άρα

$$A\hat{O}A = 30^\circ.$$

Ο κυκλικός τομέας $\widehat{AOK}$ έχει εμβαδό ίσο με

$$\left(\widehat{AOK}\right) = \frac{\pi R^2 30}{360} = \frac{\pi R^2}{12} = \frac{12\pi}{12} = \pi$$

και το τρίγωνο OAA έχει εμβαδό ίσο με

$$\left(OAA\right) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2 = R = \sqrt{12}$$

Οπότε

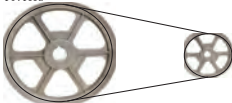
$$E = \left(OAA\right) - \left(\widehat{AOK}\right) = \sqrt{12} - \pi \text{ και}$$

$$P = \ell_{OK} + OA + OK = \frac{\pi R \cdot 30}{180} + 2 + (AA - AK) =$$

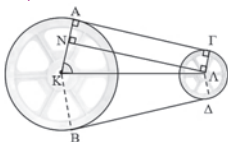
$$= \frac{\pi \sqrt{12} \cdot 30}{6} + 2 + (4 - \sqrt{12}) = \frac{\pi \sqrt{3}}{3} + 6 - 2\sqrt{3}$$

Άσκηση 6

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δυο κυκλικές τροχαλίες των οποίων τα κέντρα απέχουν 8 dm. Η μεγάλη τροχαλία έχει ακτίνα 5 dm ενώ η μικρή 1 dm. Να βρείτε το μήκος του ιμάντα που τις συνδέει.



Λύση



Οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ είναι κοινές εξωτερικές εφαπτομένες των δυο κύκλων. Από το Λ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΓ και έστω Ν το σημείο τομής της με την ΑΚ. Τότε το ΑΓΑΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (αφού έχει 3 ορθές) και $KN = AK - AN = 5 - 1 = 4 \text{ dm}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΝΚΛ είναι $KN = \frac{KL}{2}$ άρα

$$\hat{N} \hat{A} K = 30^\circ \text{ οπότε } \hat{N} \hat{K} L = 60^\circ \text{ και}$$

$$\hat{A} \hat{L} K = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΝΑΚ έχουμε:

$$NA^2 = KA^2 - NK^2 \Rightarrow NA^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow$$

$$NA = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

επομένως και $AG = NA = 4\sqrt{3}$.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το τραπέζιο ΚΛΔΒ (δηλαδή από το Λ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΔ...) έχουμε τελικά:

$$\bullet \hat{A} \hat{K} B = \hat{A} \hat{K} L + \hat{L} \hat{K} B = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \text{ άρα}$$

$$\hat{A} \hat{K} B_{\text{μείντα}} = 320^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

$$\bullet \hat{A} \hat{L} \Delta_{\text{μείντα}} = 360^\circ - (\hat{A} \hat{L} K + \hat{K} \hat{L} \Delta)$$

$$= 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$$

$$\bullet AG = BD = 4\sqrt{3}$$

Το ζητούμενο μήκος L του ιμάντα είναι ίσο με

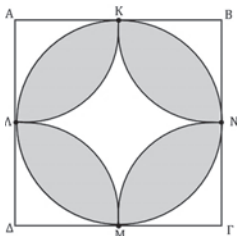
$$L = \ell_{AB} + BD + \ell_{\Delta\Gamma} + AG = \ell_{AB} + \ell_{\Delta\Gamma} + 2AG =$$

$$= \frac{\pi(AK)240}{180} + \frac{\pi(L\Delta)120}{180} + 2 \cdot 4\sqrt{3}$$

$$= \frac{20\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 8\sqrt{3} = \frac{22\pi}{3} + 8\sqrt{3}.$$

Άσκηση 7

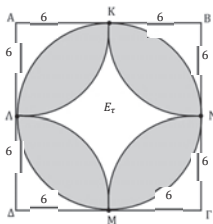
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12cm περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και Κ, Λ, Μ, Ν μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε της γραμμοσκιασμένης περιοχής του ακολουθούσ σχήματος.



Λύση

Το ζητούμενο εμβαδό θα υπολογιστεί αν από το εμβαδό του κύκλου αφαιρέσουμε το εμβαδό E_τ του καμπυλόγραμμου τετραπλεύρου ΚΛΜΝ.

Το εμβαδό E_τ θα υπολογιστεί αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των τεσσάρων ισεμβαδικών κυκλικών τομέων $\widehat{AKL}$, $\widehat{KBN}$, $\widehat{N\Gamma M}$ και $\widehat{L\Delta M}$.



$$\text{Είναι } (\widehat{AKL}) = \frac{\pi R^2 90}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 9\pi. \text{ Άρα}$$

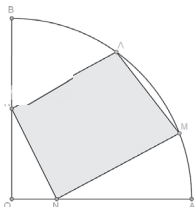
$$E_\tau = AB^2 - 4 \cdot (\widehat{AKL}) = 144 - 36\pi.$$

Για το ζητούμενο εμβαδό Ε έχουμε

$$E = E_{\text{κύκλου}} - E_\tau = \pi R^2 - E_\tau = 36\pi - (144 - 36\pi) = 72\pi - 144.$$

Άσκηση 8

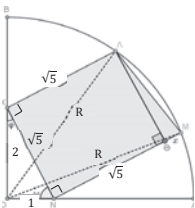
Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\widehat{AOB}$ ακτίνας R στο οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα ορθογώνιο τραπέζιο $KLMN$ ($\widehat{K} = \widehat{N} = 90^\circ$) με $KN=KL$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν $OK=2$ και $ON=1$, να βρεθεί το εμβαδόν E της "άσπρης" περιοχής του σχήματος μεταξύ του τραπεζίου και του κυκλικού τομέα $\widehat{AOB}$.

Λύση

Φέρνουμε τις ακτίνες OL και OM . Από το σημείο A φέρνουμε κάθετη στην πλευρά MN και έστω θ το σημείο τομής της με την MN .



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο KON έχουμε

$$KN^2 = ON^2 + OK^2 \Rightarrow KN^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow KN = \sqrt{5}$$

Το $KN\theta A$ είναι τετράγωνο (έχει τρεις ορθές γωνίες και δυο διαδοχικές πλευρές ίσες) οπότε

$$KL = N\theta = KN = \Lambda\theta = \sqrt{5}.$$

Στο τρίγωνο KLO σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$OL^2 = OK^2 + KL^2 - 2 \cdot OK \cdot KL \cdot \sin(\widehat{OKL}) \Rightarrow$$

$$R^2 = 4 + 5 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(90^\circ + \varphi) \Rightarrow$$

$$R^2 = 9 - 4 \cdot \sqrt{5} \cdot (-\eta\mu\varphi) \Rightarrow R^2 = 9 + 4\sqrt{5}\eta\mu\varphi$$

Στο τρίγωνο OKN είναι $\eta\mu\varphi = \frac{ON}{KN} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και

$$\eta\mu\omega = \frac{OK}{KN} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ άρα}$$

$$R^2 = 9 + 4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow R^2 = 13 \Rightarrow R = \sqrt{13}.$$

Αν $x = \theta M$ τότε από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OMN έχουμε:

$$OM^2 = ON^2 + NM^2 - 2 \cdot ON \cdot NM \cdot \sin(\widehat{ONM}) \Rightarrow$$

$$13 = 1 + (\sqrt{5} + x)^2 - 2 \cdot (\sqrt{5} + x) \cdot \sin(90^\circ + \omega) \Rightarrow$$

$$13 = 1 + (\sqrt{5} + x)^2 - 2 \cdot (\sqrt{5} + x) \cdot (-\eta\mu\omega) \Rightarrow$$

$$13 = 1 + (\sqrt{5} + x)^2 + 2 \cdot (\sqrt{5} + x) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}x - 3 = 0 \text{ με } \Delta = \frac{256}{5} \text{ και ρίζες}$$

$$x = \frac{-\frac{14}{\sqrt{5}} \pm \frac{16}{\sqrt{5}}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{30}{2\sqrt{5}} < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right.,$$

από τις οποίες δεκτή είναι η $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Είναι } MN = N\theta + \theta M = \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

και το τραπέζιο έχει εμβαδό ίσο με

$$(KLMN) = \frac{KL + MN}{2} \cdot KN = \frac{\sqrt{5} + \frac{6}{\sqrt{5}}}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{11}{2}.$$

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι ίσο με

$$E = (\widehat{AOB}) - (KLMN) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{11}{2} = \frac{13\pi}{4} - \frac{11}{2}.$$

Οκτώ βασικές ασκήσεις στην παραβολή της Β' Λυκείου Κατεύθυνσης με άρωμα ... Γ' Λυκείου!!

Μάκης Χατζόπουλος

Εισαγωγή

Οι παρακάτω ασκήσεις θα τις δούμε με διαφορετικό τρόπο προσέγγισης και απόδειξης του χρόνου στη Γ' Λυκείου. Έχουμε τη δυνατότητα με τις **βασικές γνώσεις** που λάβαμε στην παραβολή να αντιμετωπίσουμε **οκτώ** βασικές ασκήσεις στην παραβολή που έχουν αρκετό ενδιαφέρον.

Η δομή είναι απλή. Ξεκινάμε, όποτε απαιτείται, με μια απλή άσκηση – εφαρμογή και μετά γενικεύουμε το συμπέρασμα. Εύκολο; Καλή μελέτη!

Βασική άσκηση 1*

Δίνεται η παραβολή $x^2 = 2y$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της παραβολής που να διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.

Γενίκευση 1*: Δίνεται η παραβολή $x^2 = 2py$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της παραβολής που να διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha^2 < 2p\beta$.

Σημείωση: Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ που διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$. Αρχικά, $p=1$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι:

$$xx_1 = y + y_1 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1.$$

Επίσης, το σημείο A ανήκει στην παραβολή, άρα οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν, δηλαδή: $x_1^2 = 2y_1$ και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1^2 = 2y_1 \\ x_1 = 1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + y_1)^2 = 2y_1 \\ x_1 = 1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2y_1 + y_1^2 = 2y_1 \\ x_1 = 1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = -1 \\ x_1 = 1 + y_1 \end{cases}$$

άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει εφαπτομένη της παραβολής που να διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.

Γενίκευση

Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της παραβολής

στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι:

$$xx_1 = p(y + y_1) \Rightarrow x_1 = p(\beta + y_1).$$

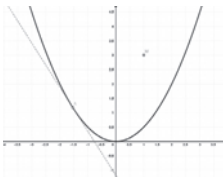
Επίσης, το σημείο A ανήκει στην παραβολή, άρα οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν, δηλαδή: $x_1^2 = 2py_1$ και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1^2 = 2py_1 \\ x_1 = p(\beta + y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 2py_1 \\ x_1 = p\beta + py_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 2(p\beta + py_1)y_1 \\ x_1 = p\beta + py_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2\alpha x_1 + 2p\beta = 0 \\ py_1 = \alpha x_1 - p\beta \end{cases}$$

όμως $\Delta = 4\alpha^2 - 8p\beta = 4(\alpha^2 - 2p\beta) < 0$, άρα άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχει εφαπτομένη της παραβολής που να διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$.

Γεωμετρική ερμηνεία: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, οι εφαπτόμενες της παραβολής δεν διέρχονται από το «εσωτερικό» της παραβολής.



Βασική άσκηση 2*

Δίνεται η παραβολή $y^2 = \frac{1}{2}x$. Να αποδείξετε ότι

δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής τα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

Γενίκευση: Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής τα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

Λύση

α) Αρχικά, η παραβολή γράφεται ως εξής: $y^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}x$, οπότε $p = \frac{1}{4}$. Έστω ότι υπάρχουν δύο

διαφορετικές εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$ αντίστοιχα στα οποία είναι παράλληλες, δηλαδή

$$yy_1 = \frac{1}{4}(x + x_1) \text{ και } yy_2 = \frac{1}{4}(x + x_2)$$

$$\text{άρα } (ε_1): y = \frac{x}{4y_1} + \frac{x_1}{4y_1} \text{ και } (ε_2): y = \frac{x}{4y_2} + \frac{x_2}{4y_2}$$

επομένως

$$\lambda_{ε_1} = \lambda_{ε_2} \Rightarrow \frac{1}{4y_1} = \frac{1}{4y_2} \Rightarrow y_1 = y_2 \quad (1)$$

όμως

$$y_1^2 = \frac{1}{2}x_1 \quad (2) \text{ και } y_2^2 = \frac{1}{2}x_2 \quad (3)$$

από τις σχέσεις (1), (2) και (3) καταλήγουμε $x_1 = x_2$, άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής τα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

β) Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$ αντίστοιχα στα οποία είναι παράλληλες, δηλαδή

$$yy_1 = p(x + x_1) \text{ και } yy_2 = p(x + x_2)$$

$$\text{άρα } (ε_1): y = \frac{px}{y_1} + \frac{px_1}{y_1} \text{ και } (ε_2): y = \frac{px}{y_2} + \frac{px_2}{y_2}$$

επομένως

$$\lambda_{ε_1} = \lambda_{ε_2} \Rightarrow \frac{p}{y_1} = \frac{p}{y_2} \Rightarrow y_1 = y_2 \quad (1)$$

όμως $y_1^2 = 2px_1$ (2) και $y_2^2 = 2px_2$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) καταλήγουμε ότι $x_1 = x_2$, άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής τα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

Βασική άσκηση 3^η

α) Να αποδείξετε ότι για την παραβολή $C_1: x^2 = 2py$ δεν υπάρχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα των y .

β) Να αποδείξετε ότι για την παραβολή $C_2: y^2 = 2px$ δεν υπάρχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα των x .

Λύση

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι:

$$xx_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow xx_1 = py + py_1 \Leftrightarrow x_1x - py - py_1 = 0,$$

που είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου

$$A = x_1, B = -p, \Gamma = -py_1, \text{ διότι,}$$

$$B = -p \neq 0 \Rightarrow \varepsilon \searrow \swarrow y'y.$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι:

$$yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow yy_1 = px + px_1 \Leftrightarrow px - y_1y + px_1 = 0,$$

που είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ όπου

$$A = p, B = -y_1, \Gamma = px_1, \text{ επειδή,}$$

$$A = p \neq 0 \Rightarrow \varepsilon \searrow \swarrow x'x.$$

Βασική άσκηση 4^η

α) Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα των x για την παραβολή $C_1: x^2 = 2py$ είναι ο άξονας $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα των y για την παραβολή $C_2: y^2 = 2px$ είναι ο άξονας $y'y$.

Λύση

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι:

$$xx_1 = p(y + y_1) \Rightarrow x_1x - py - py_1 = 0 \quad (1)$$

Η τελευταία ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα των x αν και μόνο αν:

$$\lambda = 0 \Rightarrow -\frac{A}{B} = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Όμως,

$$x_1^2 = 2py_1 \Rightarrow 0^2 = 2py_1 \Rightarrow y_1 = 0,$$

δηλαδή η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $M(0, 0)$ είναι:

$$0 \cdot x - py - p \cdot 0 = 0 \Rightarrow py = 0 \Rightarrow y = 0$$

δηλαδή ο άξονας $x'x$.

β) Ίδια απόδειξη απλά αλλάζουμε τις θέσεις των x και y κυκλικά!

Βασική άσκηση 5^η

α) Να αποδείξετε ότι για την παραβολή $C_1: x^2 = 2py$, από σημεία που ανήκουν στην διευθετούσα άγονται κάθετες εφαπτόμενες στην παραβολή.

β) Να αποδείξετε ότι για την παραβολή $C_2: y^2 = 2px$ από σημεία που ανήκουν στην διευθετούσα άγονται κάθετες εφαπτόμενες στην παραβολή.

Λύση

α) Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες της παραβολής C_1 που άγονται από την διευθετούσα

$$\delta: y = -\frac{p}{2}.$$

Αν $M(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο επαφής της εφαπτομένης και της παραβολής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης έχει εξίσωση:

$$xx_0 = p(y + y_0)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $\left(x, -\frac{p}{2}\right)$

έχουμε:

$$xx_0 = p\left(-\frac{p}{2} + y_0\right) \Rightarrow xx_0 = -\frac{p^2}{2} + py_0 \quad (1).$$

Όμως,

$$x_0^2 = 2py_0 \Rightarrow py_0 = \frac{x_0^2}{2} \quad (2).$$

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται λόγω της (2):

$$xx_0 = -\frac{p^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} \Leftrightarrow x_0^2 - 2xx_0 - p^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις ως προς x_0 τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της παραβολής με την παραβολή. Επειδή, $\Delta = 4x^2 + 4p^2 > 0$, οι λύσεις είναι άνισες έστω x_1, x_2 τέτοιες ώστε να ισχύουν από τους τύπους Vieta:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -p^2 \quad (3).$$

Όμως οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ είναι:

$$(\varepsilon_1): xx_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{p}x - y_1 \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2): xx_2 = p(y + y_2) \Leftrightarrow y = \frac{x_2}{p}x - y_2.$$

Τελικά,

$$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{x_1}{p} \cdot \frac{x_2}{p} = \frac{x_1 \cdot x_2}{p^2} = \frac{-p^2}{p^2} = -1$$

άρα $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$.

β) Ίδια απόδειξη απλά αλλάζουμε τις θέσεις των x και y κυκλικά!

Βασική άσκηση 6^η

Να αποδείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της παραβολής ως προς τη διευθετούσα είναι η κορυφή της παραβολής.

Λύση

Έστω $M(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο της παραβολής. Θα αποδείξουμε ότι:

$$d(M, (\delta)) \geq d(O, (\delta)).$$

Έχουμε ισοδύναμα:

$$d(M, (\delta)) \geq d(O, (\delta)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \geq \frac{\left|0 + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| \geq \left|\frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} \geq \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

που ισχύει.

Βασική άσκηση 7^η (σχετική θέση εφαπτομένης και παραβολής)

α) Έστω η εξίσωση της παραβολής $C: x^2 = 2py$, $p > 0$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της είναι «κάτω» από την παραβολή, με εξαίρεση το σημείο επαφής της.

β) Έστω η εξίσωση της παραβολής $C: x^2 = 2py$, $p < 0$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της είναι «πάνω» από την παραβολή, με εξαίρεση το σημείο επαφής της.

Λύση

α) Είναι:

$$x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \frac{1}{2p}x^2$$

και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1, y_1)$

$$(\varepsilon): xx_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{p}x - y_1$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{2p}x^2 \geq \frac{x_1}{p}x - y_1.$$

Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{1}{2p}x^2 \geq \frac{x_1}{p}x - y_1 \Leftrightarrow x^2 - 2x_1x + 2py_1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - x_1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει, διότι το σημείο (x_1, y_1) είναι σημείο της παραβολής, άρα $x_1^2 = 2py_1$.

β) Θα αποδείξουμε ότι $\frac{1}{2p}x^2 \leq \frac{x_1}{p}x - y_1$ και ε -πειδή $p < 0$ η απόδειξη είναι ανάλογη.

Βασική άσκηση 8^η

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής $C: x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $N\left(\frac{x_1}{2}, 0\right)$ και τον

άξονα $y'y$ στο σημείο $\Lambda(0, -y_1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $N(-x_1, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Lambda\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$.

Λύση

α) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $xx_1 = p(y + y_1)$.

Τέμνει τον άξονα x' για $y = 0$:

$$xx_1 = p(0 + y_1) \Leftrightarrow x = \frac{py_1}{x_1} = \frac{2py_1}{2x_1} = \frac{x_1^2}{2x_1} = \frac{x_1}{2}.$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο M με τον άξονα x' είναι το σημείο $N\left(\frac{x_1}{2}, 0\right)$.

Τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x = 0$:

$$0 \cdot x_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow y + y_1 = 0 \Leftrightarrow y = -y_1.$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο M με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $\Lambda(0, -y_1)$.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $yy_1 = p(x + x_1)$.

Τέμνει τον άξονα x' για $y = 0$:

$$0 \cdot y_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow x = -x_1.$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο M με τον άξονα x' είναι το σημείο $N(-x_1, 0)$.

Τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x = 0$:

$$yy_1 = p(0 + x_1) \Leftrightarrow y = \frac{px_1}{y_1} = \frac{2px_1}{2y_1} = \frac{y_1^2}{2y_1} = \frac{y_1}{2}.$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο M με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $\Lambda\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$.

Τάξη: Β'

Ασκήσεις στις Κωνικές τομές

Χρήστος Π. Τσιφάκης

Άσκηση 1.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (x+1, y+2)$ και $\vec{\beta} = (2-y, x-1)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου, αν ισχύει

ότι:

i) $\vec{a} // \vec{\beta}$ καιii) $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

Λύση

i) Αφού $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 \\ 2-y & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5.$$

Άρα ο γ.τ. είναι κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{5}$.ii) Αφού $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow$

$$(x+1) \cdot (2-y) + (y+2) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Άρα ο γ.τ. είναι μία ευθεία που διέρχεται από το $O(0, 0)$.

Άσκηση 2

Δίνονται οι κύκλοι $(C_1): x^2 + y^2 = 5$ και $(C_2): x^2 + y^2 = 10$. Να βρείτε:

α) Την εφαπτόμενη του κύκλου (C_1) στο σημείο του $A(2, 1)$.β) Τα σημεία τομής, έστω B, Γ της εφαπτομένης αυτής με τον κύκλο (C_2) .γ) Το μήκος της χορδής $B\Gamma$ που αποκόπτεται ο κύκλος (C_2) από την παραπάνω εφαπτόμενη.

Λύση

α) Η εφαπτομένη (ε) του κύκλου (C_1) στο σημείο του $A(2, 1)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): 2x + y = 5.$$

β) Η χορδή $B\Gamma$ είναι εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ακτίνα OA . Άρα έχει:

$$\lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{OA} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}.$$

και εξίσωση:

$$(B\Gamma): y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow (B\Gamma): x - 2y = 1.$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 = 10 \\ x - 2y = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} (2y + 1)^2 + y^2 = 10 \\ x - 2y = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} 5y^2 + 4y - 9 = 0 \\ x - 2y = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} y = 1 \text{ ή } y = -\frac{9}{5} \\ x - 2y = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$(x_1, y_1) = (3, 1), (x_2, y_2) = \left(-\frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right).$$

$$\text{Άρα έχουμε } B(3, 1) \text{ και } \Gamma\left(-\frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right).$$

γ) Το μήκος της χορδής $B\Gamma$ είναι

$$|B\Gamma| = \sqrt{\left(3 + \frac{13}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{9}{5}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2} = \sqrt{5 \cdot \left(\frac{14}{5}\right)^2} = \frac{14}{5} \sqrt{5}.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y - 1 = 0 \quad (1), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.β. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, το κέντρο του κύκλου ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): 2x - 5y - 8 = 0$.γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $2\sqrt{5}$.

Λύση

α. Με $A = \lambda, B = \lambda + 2, \Gamma = -1$, παρατηρούμε ότι

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + (\lambda + 2)^2 - 4(-1) =$$

$$\lambda^2 + (\lambda + 2)^2 + 4 > 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda+2}{2}\right) \text{ και ακτίνα } R = \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 8}}{2}.$$

$$\beta. \text{ Πρέπει } 2\left(-\frac{\lambda}{2}\right) - 5\left(-\frac{\lambda+2}{2}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

γ. Πρέπει

$$\frac{\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 8}}{2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 4\lambda - 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 36 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 37 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + 1 = \pm\sqrt{37} \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{37}.$$

Άσκηση 4

Δίνεται η παραβολή (C): $y^2 = 12x$ και το σημείο $A(4, 2)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και τέμνει την παραβολή στα B, Γ ώστε το A να είναι μέσον του BΓ.

Λύση

Έστω $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ με $x_B \neq x_\Gamma$, τα σημεία επαφής της ευθείας με την παραβολή. Τότε έχουμε:

Αφού το σημείο A είναι το μέσο του BΓ

$$x_A = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = 4 \text{ και } y_A = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = 2 \quad (1)$$

Αφού τα σημεία B, Γ ανήκουν στην παραβολή

$$\begin{cases} y_B^2 = 12x_B \\ y_\Gamma^2 = 12x_\Gamma \end{cases} \xrightarrow{(-)} y_B^2 - y_\Gamma^2 = 12(x_B - x_\Gamma) \Rightarrow$$

$$(y_B - y_\Gamma)(y_B + y_\Gamma) = 12(x_B - x_\Gamma) \xrightarrow{(1)}$$

$$\frac{y_B - y_\Gamma}{x_B - x_\Gamma} = 3 \Rightarrow \lambda_{B\Gamma} = 3.$$

Άρα η ευθεία BΓ έχει εξίσωση:

$$y - 2 = 3(x - 4) \Leftrightarrow y = 3x - 10.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η παραβολή (C): $y^2 = 4ax$ και το σημείο $A(a, 2a)$.

i) Να δείξετε ότι το A ανήκει στην παραβολή.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της στο A.

iii) Να βρείτε το α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ να ισούται με $\frac{3a}{2} - 1$.

Λύση

$$i) \text{ Έχουμε } y_A^2 = (2a)^2 = 4a^2 = 4a \cdot a = 4a \cdot x_A,$$

άρα το σημείο A ανήκει στην παραβολή.

ii) Η εφαπτομένη της παραβολής στο A είναι:

$$(\varepsilon): y \cdot 2a = 2a \cdot (x + a) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = x + a.$$

iii) Η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $K(-a, 0)$ και $\Lambda(0, a)$ αντίστοιχα. Το εμβαδόν του τριγώνου OKΛ είναι

$$(OK\Lambda) = \frac{1}{2}|a| \cdot |a| = \frac{1}{2}a^2.$$

Άρα

$$\frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a - 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = 2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι κωνικές τομές $(C_1): y^2 = 8x$ και $(C_2): 4x^2 + 2y^2 = 48$.

i) Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών K και Λ.

iii) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο K είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση

$$i) \text{ Η έλλειψη γράφεται: } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} = 1.$$

Άρα $a^2 = 24 > 12 = b^2$, έχει τις εστίες και τις κύριες κορυφές στον άξονα $y'y$. Τότε

$$y^2 = a^2 - b^2 = 24^2 - 12^2 = 3 \cdot 12^2 \Leftrightarrow y = 12\sqrt{3}.$$

Άρα οι εστίες είναι $E(0, 12\sqrt{3})$ και $E'(0, -12\sqrt{3})$

ii) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ 4x^2 + 2y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 8x \\ 2x^2 + y^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} y^2 = 8x \\ 2x^2 + 8x - 24 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} y^2 = 8x \\ x^2 + 4x - 12 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} y^2 = 8x \\ x = 2 \text{ ή } x = -6 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} y^2 = 8x \\ x = 2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$(x, y) = \{(2, 4), (2, -4)\}$. Άρα τα σημεία τομής είναι τα $K(2, 4)$ και $\Lambda(2, -4)$.

III) Οι εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) στο σημείο K των κωνικών έχουν $\lambda_1 = \frac{\rho}{y_K} = \frac{4}{4} = 1$ και

$$\lambda_2 = -\frac{24 \cdot 2}{12 \cdot 4} = -1. \text{ Έχουμε } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Άρα $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$.

Άσκηση 7

Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{1-k} + \frac{y^2}{4+k} = 1$ (1), με $k \in \mathbb{R} - \{-4, 1\}$. Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R} - \{-4, 1\}$, να βρείτε το είδος της γραμμής που παριστάνει η εξίσωση (1). Σε κάθε μία από αυτές, να βρείτε τα στοιχεία της.

Λύση

Έχουμε ότι:

• Αν $1-k = 4+k \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$, τότε η (1)

γίνεται: $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ και παριστάνει κύκλο με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

• Αν $-4 < k < -\frac{3}{2}$, τότε έχουμε:

$4+k > 0$ και $1-k > 0$ με $1-k > 4+k$, άρα η (1) παριστάνει έλλειψη με μεγάλο άξονα τον x'

και η (1) γίνεται: $\frac{x^2}{(\sqrt{1-k})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{4+k})^2} = 1$

και έχει κύριες κορυφές $A(\sqrt{1-k}, 0)$, $A'(-\sqrt{1-k}, 0)$ και εστίες $E(\sqrt{-3-2k}, 0)$ και $E'(-\sqrt{-3-2k}, 0)$.

• Αν $-\frac{3}{2} < k < 1$, τότε έχουμε:

$4+k > 0$ και $1-k > 0$ με $1-k < 4+k$, άρα η (1)

παριστάνει έλλειψη με μεγάλο άξονα τον y'

και η (1) γίνεται: $\frac{x^2}{(\sqrt{1-k})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{4+k})^2} = 1$

και έχει κύριες κορυφές $A(0, \sqrt{4+k})$,

$A'(0, -\sqrt{4+k})$ και εστίες $E(0, \sqrt{3+2k})$ και

$E'(0, -\sqrt{3+2k})$.

• Αν $k < -4$, τότε έχουμε:

$4+k < 0$ και $1-k > 0$, άρα η (1) γίνεται:

$$\frac{x^2}{1-k} + \frac{y^2}{4+k} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-k} - \frac{y^2}{-4-k} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{1-k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{-4-k})^2} = 1$$

άρα η (1) παριστάνει υπερβολή με μεγάλο άξονα τον x' και έχει κύριες κορυφές $A(\sqrt{1-k}, 0)$,

$A'(-\sqrt{1-k}, 0)$ και εστίες $E(\sqrt{-3-2k}, 0)$ και

$E'(-\sqrt{-3-2k}, 0)$.

• Αν $k > 1$, τότε έχουμε:

$4+k > 0$ και $1-k < 0$, άρα η (1) γίνεται:

$$\frac{x^2}{1-k} + \frac{y^2}{4+k} = 1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{-1+k} + \frac{y^2}{4+k} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{4+k})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{k-1})^2} = 1$$

άρα η (1) παριστάνει υπερβολή με μεγάλο άξονα τον y' και έχει κύριες κορυφές $A(0, \sqrt{4+k})$,

$A'(0, -\sqrt{4+k})$ και εστίες $E(0, \sqrt{3+2k})$ και

$E'(0, -\sqrt{3+2k})$.

Άσκηση 8

Δίνεται η έλλειψη (C): $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ (1), με $\alpha > \beta > 0$. Η ευθεία $x = \gamma$ τέμνει την έλλειψη στο σημείο M με $y_M > 0$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο M τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο P . Αν $E'(-\gamma, 0)$ είναι η άλλη εστία της να δείξετε ότι $EP \perp PM$.

Λύση

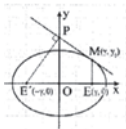
Για $x = \gamma$ έχουμε:

$$\beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 y_M^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 y_M^2 = \alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$y_M^2 = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2)\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow y_M^2 = \frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow y_M = \frac{\beta^2}{\alpha}. \text{ Άρα το σημείο } M \text{ είναι } M\left(\gamma, \frac{\beta^2}{\alpha}\right).$$

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M είναι:

$$\frac{x \cdot \gamma}{\alpha^2} + \frac{y \cdot \frac{\beta^2}{\alpha}}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x \cdot \gamma}{\alpha^2} + \frac{y}{\alpha} = 1 \text{ και τέμνει τον } y'y \text{ στο σημείο } P(0, \alpha).$$



Η ευθεία $E'P$ έχει $\lambda_{E'P} = \frac{\alpha}{\gamma}$ και η PM

$$\lambda_{PM} = \lambda_{MP} = -\frac{\gamma}{\alpha}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$\lambda_{E'P} \cdot \lambda_{PM} = -1 \text{ άρα } E'P \perp PM.$$

Άσκηση 9

Να βρείτε ποιο σημείο του κύκλου

$(C): x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0$ απέχει την μικρότερη και ποιο την μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων και να βρεθούν αυτές.

Λύση

Η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 10.$$

Άρα ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(6, 2)$ και ακτίνα $R = \sqrt{10}$. Γνωρίζουμε ότι τα σημεία του κύκλου που απέχουν την μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους είναι τα αντιδιαμετρικά, άρα τα σημεία που ζητάμε είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο. Η ευθεία OK έχει εξίσωση: $y = \lambda_{OK} \cdot x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x$

και λύνουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} (x-6)^2 + (y-2)^2 &= 10 \\ y &= \frac{1}{3}x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (3y-6)^2 + (y-2)^2 &= 10 \\ y &= \frac{1}{3}x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 10(y-2)^2 &= 10 \\ 3y &= x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} (y-2)^2 &= 1 \\ 3y &= x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 \text{ ή } y = 3 \\ 3y &= x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (x, y) = \{(3, 1), (9, 3)\}.$$

Άρα τα σημεία είναι $A(3, 1)$ και $B(9, 3)$, οπότε

$$|OM|_{\min} = |OA| = \sqrt{10} \text{ και}$$

$$|OM|_{\max} = |OB| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Άσκηση 10

Από το σημείο $A(6, 2)$ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB, AG στον κύκλο $(C): x^2 + y^2 = 5$. Να βρεθεί η απόσταση του A από την χορδή $B\Gamma$.

Λύση

Έστω $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τα σημεία επαφής των εφαπτομένων με τον κύκλο.

Οι εξισώσεις τους είναι:

$$(AB): x \cdot x_B + y \cdot y_B = 5 \text{ και } (AG): x \cdot x_\Gamma + y \cdot y_\Gamma = 5$$

Αφού διέρχονται από το σημείο A έχουμε:

$$6x_B + 2y_B = 5 \text{ και } 6x_\Gamma + 2y_\Gamma = 5.$$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας

$$6x + 2y = 5.$$

Άρα η χορδή $B\Gamma$ έχει εξίσωση

$$(B\Gamma): 6x + 2y = 5 \Leftrightarrow (B\Gamma): 6x + 2y - 5 = 0.$$

Η απόσταση του σημείου A από αυτήν είναι:

$$d(A, (B\Gamma)) = \frac{|6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{35}{\sqrt{40}} = \frac{7\sqrt{10}}{4}.$$

Η διαμόρφωση του ορισμού της σύγχρονης έννοιας της συνάρτησης οφείλεται κατά κύριο λόγο στο Γάλλο μαθηματικό **Joseph Fourier** (1768-1830) τον 18ο αιώνα.

Με τη δημιουργική εργασία πολλών μεγάλων μαθηματικών (όπως των Ευδόξου, Αρχιμήδη, Leibniz, Euler, Cauchy, Fourier, Riemann και άλλων) ο Απειροστικός Λογισμός, ιδιαίτερα ο Ολοκληρωτικός Λογισμός ανεδείχθη ως ένα μαθηματικό εργαλείο με τη χρήση του οποίου θεμελιώθηκαν οι Θετικές, Φυσικές και Μηχανικές επιστήμες.

Θέμα 1ο

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ που η γραφική της παράσταση δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

α. Δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y = f'(x_0)x + f^2(x_0)g'(x_0).$$

β. Αν $af(\beta) = \beta f(\alpha)$, δείξτε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$h(x) = f(x) + \frac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \frac{1}{x - \beta} \text{ είναι το } \mathbb{R}.$$

Λύση

α) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ορίζεται εφαπτομένη της C_f με εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$

$$y = f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0) \quad (1).$$

Επειδή η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε

ορίζεται η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{x}{f(x)}$,

$x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow$$

$$g'(x_0) = \frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f^2(x_0)} \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = f^2(x_0)g'(x_0) \quad (2).$$

Η (1) λόγω της (2) γράφεται

$$y = f'(x_0)x + f^2(x_0)g'(x_0).$$

β. Για τη συνάρτηση g με

$$g(x) = \frac{x}{f(x)}, x \in [\alpha, \beta] \text{ έχουμε ότι:}$$

- Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) .
- $af(\beta) = \beta f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{f(\alpha)} = \frac{\beta}{f(\beta)} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$.

Άρα για το σημείο $M(\xi, f(\xi)) \in C_f$ με βάση το ερώτημα α η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M έχει εξίσωση

$$y = f'(\xi)x + f^2(\xi)g'(\xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x, \quad (3).$$

Από την (3) εξασφαλίζεται ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι $D_h = (\alpha, \beta)$. Αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και η h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Η h είναι συνεχής και μη σταθερή, οπότε το $h((\alpha, \beta))$ θα είναι διάστημα.

Έστω τυχαίος $\kappa \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = h(x) - \kappa, x \in (\alpha, \beta)$.

- Η φ είναι συνεχής στο (α, β) .
- $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{x^2 + 1}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \left[\frac{1}{x - \alpha} (x^2 + 1) \right]$. Επειδή

$$\alpha^2 + 1 > 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{1}{x - \alpha} = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{x^2 + 1}{x - \alpha} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} h(x) = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \varphi(x) = +\infty. \text{ Άρα υπάρχει } \rho_1 \in (\alpha, \beta) \text{ κοντά}$$

στο α τέτοιο ώστε $\varphi(\rho_1) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{1}{x - \beta} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \beta^-} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x) = -\infty.$$

Άρα υπάρχει $\rho_2 \in (\rho_1, \beta)$ κοντά στο β τέτοιο ώστε $\varphi(\rho_2) < 0$. Εφαρμόζεται για τη συνάρτηση φ στο $[\rho_1, \rho_2]$ το θεώρημα του Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $r \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(r) = 0 \Leftrightarrow h(r) = \kappa.$$

Άρα κάθε πραγματικός αριθμός είναι τιμή της συνάρτησης h . Αυτό σημαίνει ότι $h((\alpha, \beta)) = \mathbb{R}$.

Θέμα 2ο

Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f(x) = 1 + xg(x) \quad (2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επιπλέον η}$$

g είναι συνεχής στο 0 με $g(0) = 1$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

β. i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x-1) - 2 = \ln x$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

iii. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος ii με $\rho_1 < \rho_2$, δείξτε ότι:

$$(\rho_2 - 1)(e^{\rho_2} - 2e) < (\rho_1 - 1)(e^{\rho_1} - 2e).$$

Λύση

α. Έστω τυχαίος $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)f(h) - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x_0) \frac{hg(h)}{h} \right) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0)g(h)) = f(x_0)g(0) = f(x_0),$$

αφού η g είναι συνεχής στο 0 .

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , επομένως είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x)$.

β. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Από τη (2) έχουμε $f(0) = 1$, οπότε $c = 1$.

Άρα $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται στο $(0, +\infty)$.

$$f(x-1) - 2 = \ln x \Leftrightarrow e^{x-1} - \ln x = 2 \quad (3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = e^{x-1} - \ln x, x > 0.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$.

Έχουμε $h'(1) = 0$ και $h''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα. Για $0 < x < 1 \Rightarrow h'(x) < h'(1) \Leftrightarrow h'(x) < 0$ και για $x > 1 \Rightarrow h'(x) > 0$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονotonίας της h .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$			• $h(1)$ • ολ. ελάχ.	

$$h(1) = 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} \left(1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^{x-1})'} =$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{x-1}} = 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Στο διάστημα $(0, 1]$ η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$h((0, 1]) = [h(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)) = [1, +\infty).$$

Έχουμε $2 \in h((0, 1])$ και άρα υπάρχει ακριβώς ένα (λόγω της μονotonίας) $\rho_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(\rho_1) = 2$. Δηλαδή το ρ_1 είναι ρίζα της (3).

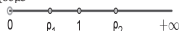
Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε

$$h([1, +\infty)) = [h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = [1, +\infty).$$

$2 \in h([1, +\infty))$, οπότε όπως πιο πάνω υπάρχει ακριβώς ένα $\rho_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(\rho_2) = 2$, δηλαδή το ρ_2 είναι ρίζα της (3).

Τελικά η εξίσωση $f(x-1) - 2 = \ln x$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες μία στο κάθε διάστημα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

iii. Έχουμε



Για τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x, x > 0$ εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα

$[\rho_1, 1]$ και $[1, \rho_2]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, 1)$ και $\xi_2 \in (1, \rho_2)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\varphi'(\xi_1) &= \frac{\varphi(1) - \varphi(\rho_1)}{1 - \rho_1} \Leftrightarrow \frac{\ln \rho_1}{\rho_1 - 1} = \frac{1}{\xi_1} \Leftrightarrow \\ \frac{f(\rho_1 - 1) - 2}{\rho_1 - 1} &= \frac{1}{\xi_1} \Leftrightarrow \frac{e^{\rho_1 - 1} - 2}{\rho_1 - 1} = \frac{1}{\xi_1} \Leftrightarrow \\ \frac{e^{\rho_1} - 2e}{e(\rho_1 - 1)} &= \frac{1}{\xi_1} \text{ και } \varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\rho_2) - \varphi(1)}{\rho_2 - 1} \Leftrightarrow \dots \\ \Leftrightarrow \frac{e^{\rho_2} - 2e}{e(\rho_2 - 1)} &= \frac{1}{\xi_2}. \text{ Είναι } (\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) < 0. \\ \xi_1 < \xi_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{\xi_1} > \frac{1}{\xi_2} \Leftrightarrow \frac{e^{\rho_1} - 2e}{e(\rho_1 - 1)} > \frac{e^{\rho_2} - 2e}{e(\rho_2 - 1)} \Leftrightarrow \\ (\rho_2 - 1)(e^{\rho_1} - 2e) &< (\rho_1 - 1)(e^{\rho_2} - 2e).\end{aligned}$$

Θέμα 3ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ και

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1].$$

α. i. Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f^{-1} .

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς τη μονotonία.

iii. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

β. i. Να βρείτε αν ορίζονται τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονotonία τη συνάρτηση $f \circ g$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (1 + \sqrt{1-x^2})(f \circ g)(x) + x\sqrt{1+x^2}.$$

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A = \int_0^1 h(x) dx$.

Λύση

α. i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f = \mathbb{R}$ και της g έχει δοθεί $D_g = [0, 1]$.

$$\text{Έχουμε } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Για } x < 0, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$

$$\bullet \text{ Για } x > 0, f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Συνεπώς

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ \text{και} \\ f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

f γνησίως αύξουσα, οπότε η f είναι "1-1" και

$$\text{άρα αντιστρέφεται. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών της είναι } f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, 1).$$

$$\triangleright f((-\infty, 0]) = (-1, 0].$$

$$\text{Για } x \leq 0 \text{ και } y \in (-1, 0],$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} \leq 0.$$

$$\triangleright f((0, +\infty)) = (0, 1).$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ και } y \in (0, 1),$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} > 0.$$

$$\text{Τελικά } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}, x \in (-1, 1).$$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow$

$$f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx.$$

$$\text{Θέτουμε } -x = u \Rightarrow du = -dx \Leftrightarrow dx = -du.$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = -1 \text{ είναι } u = 1 \text{ και για } x = 0 \text{ έχουμε } u = 0 \\ \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx = \int_1^0 \frac{-u}{1+u} (-du) = \int_1^0 \frac{u}{1+u} du = - \int_0^1 \frac{u}{1+u} du \\ = - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 0 \Leftrightarrow I = 0 \end{aligned}$$

β. i. Εξετάζουμε αν ορίζεται η σύνθεση της f με την g . Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma_1 = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ 0 \leq \frac{x}{1+|x|} \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{και} \\ x \leq 1+|x| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{και} \\ 0 \leq 1 \end{array} \right\} \text{ αδύνατο. Άρα } \Sigma_1 = \emptyset.$$

Συνεπώς δεν ορίζεται η σύνθεση της f με την g , δηλαδή δεν ορίζεται συνάρτηση $g \circ f$.

- Εξετάζουμε αν ορίζεται η σύνθεση της g με την f . Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma_2 = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0,1] \\ \text{και} \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [0,1].$$

Άρα $\Sigma_2 = [0,1]$. Συνεπώς ορίζεται η συνάρτηση $\text{fog} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $(\text{fog})(x) = f(g(x)) =$

$$\frac{g(x)}{1+|g(x)|} \Leftrightarrow (\text{fog})(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

II. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$

με $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Επιπλέον η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow (\text{fog})(x_1) > (\text{fog})(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση fog είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h , αφού $1+x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί

$$\left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 \geq 0 \\ \text{και} \\ x \in D_{\text{fog}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [0,1].$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι $D_h = [0,1]$.

$$\text{Είναι } h(x) = \sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1+x^2}, x \in [0,1].$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Η γραφική παράσταση της g είναι το τεταρτοκύκλιο του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r=1$

με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, που βρίσκεται στην $1^{\text{η}}$ γωνία των αξόνων.

Άρα το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

είναι το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που ορίζεται από το τεταρτοκύκλιο του Σχ.1.

Έτσι έχουμε

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi$$

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε το A γίνεται

$$A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{4} \pi + \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx.$$

$$\text{Θέτουμε } \sqrt{1+x^2} = u \Rightarrow du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \Rightarrow x dx = u du.$$

Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=\sqrt{2}$.

Άρα

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \int_1^{\sqrt{2}} u^2 du =$$

$$\left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}, \text{ οπότε } A = \frac{1}{4} \pi + \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

Σχόλια

1α. Έστω $\alpha > 0$ και μια συνεχής συνάρτηση

$$f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}. \text{ Για το ολοκλήρωμα } I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$$

- Αν η f είναι περιττή, τότε $I = 0$.
- Αν η f είναι άρτια, τότε $I = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$.

Στο παραπάνω θέμα παρατηρήστε ότι η f είναι περιττή.

2α. Έστω Δ ένα διάστημα. Αν η συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη και έχει στο $f(\Delta)$ το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

3α. Αν για τις συναρτήσεις $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ_1, Δ_2 διαστήματα, ορίζεται η συνάρτηση gof με πεδίο ορισμού το διάστημα D και οι f, g είναι γνησίως μονότονες, τότε:

- Αν οι f, g έχουν ίδιο είδος μονοτονίας η gof είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας η gof είναι γνησίως φθίνουσα.



ΘΕΜΑ 1.

Α. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\frac{f(3)-f(1)}{2} \leq f'(x) \leq \frac{f'(0)+f'(1)}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x^2}{2 \cdot (x+1)}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}.$$

1. Να αποδείξετε ότι:

(i) $f'(0) = f'(1)$

(ii) Η f' παρουσιάζει ολικά ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο) στο $\mathbb{R}$.

(iii) Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον τέσσερις πραγματικές ρίζες.

2. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

ii) Υπάρχει ακρότατο της g στο $(0, 1)$.

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$(\xi + 1) \cdot [(\xi + 1) \cdot f'(\xi) - 1] - \ln \xi = 0.$$

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η $g(x) = \ln x + x$, $x > 0$ για τις οποίες

ισχύει $f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x$, για κάθε $x > 0$.

(i) Έστω $0 < \alpha < 1$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τις ευθείες $y = x$, $x = \alpha$, $x = 1$ είναι

$$B(\alpha) = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1 \text{ τ.μ.}$$

(ii) Η κατακόρυφη ευθεία $x = \alpha$ του προηγούμενου ερωτήματος μετατοπίζεται οριζόντια με τη θέση του αριθμού $\alpha = \alpha(t)$, $t \geq 0$ στον άξονα xx' να μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/sec .

Αν για $t = 0$ ισχύει $0 < \alpha < x_0$, να αποδείξετε ότι την χρονική στιγμή στην οποία $\alpha = x_0 \text{ cm/sec}$, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $B(\alpha)$ είναι ίσος με $-x_0 \text{ cm}^2/\text{sec}$, όπου $x_0 \in (0, 1)$ είναι ρίζα της συνάρτησης g .

(iii) Να δείξετε ότι η γραφική της συνάρτησης f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο $-\infty$.

(iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ υπάρχουν $\xi_1 > 1$ και $\xi_2 > 1$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) - e^{\xi_2} = 1$.

Λύση

1. Ισχύει: $\frac{f(3)-f(1)}{2} \leq f'(x) \leq \frac{f'(0)+f'(1)}{2}$

(1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(i) Από την (1) για $x = 0$ έχουμε $2f'(0) \leq f'(0) + f'(1) \Leftrightarrow f'(0) \leq f'(1)$ και για $x = 1$ έχουμε $2f'(1) \leq f'(0) + f'(1) \Leftrightarrow f'(1) \leq f'(0)$. Άρα $f'(0) = f'(1)$.

(ii) Από την (1), αφού $f'(0) = f'(1)$ έχουμε:

$$\bullet 2f'(x) \leq f'(0) + f'(1) \Leftrightarrow 2f'(x) \leq 2f'(0) \Leftrightarrow f'(x) \leq f'(0),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης

$$\bullet 2f'(x) \leq f'(0) + f'(1) \Leftrightarrow 2f'(x) \leq 2f'(1) \Leftrightarrow f'(x) \leq f'(1),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Από το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει $x_3 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε $f(3) - f(1) = 2f'(x_3)$.

Από την (1) τώρα έχουμε:

$$2f'(x_3) \leq 2f'(x) \Leftrightarrow f'(x_3) \leq f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο x_3 .

(iii) Αφού η συνάρτηση f' παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία x_1 , x_2 , x_3 και είναι παραγωγίσιμη, από το θεώρημα του Fermat έχουμε

$$f''(x_1) = f''(x_2) = f''(x_3) = 0.$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$,

παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και

$f'(0) = f'(1)$. Από το θεώρημα του Rolle υπάρχει

$$x_4 \in (0, 1), \text{ τέτοιο ώστε } f''(x_4) = 0.$$

Άρα εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον τέσσερις πραγματικές ρίζες.

2. (i) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Στο σημείο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \ell n x^2}{2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \ell n x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ell n x) = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ell n x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\bullet g(0) = 0.$$

Οπότε η συνάρτηση g είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 0$, δηλαδή είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(ii) Η συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ell n x^2}{2(x+1)}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x \cdot \ell n x}{x+1}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $g(0) = g(1) = 0$. Από το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$g'(x) = \left(\frac{x \cdot \ell n x}{x+1} \right)' = \frac{(x \cdot \ell n x)' \cdot (x+1) - x \cdot \ell n x (x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{(\ell n x + 1) \cdot (x+1) - x \cdot \ell n x}{(x+1)^2} = \frac{x \cdot \ell n x + \ell n x + x + 1 - x \cdot \ell n x}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{\ell n x + x + 1}{(x+1)^2}. \quad (I).$$

Το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $\ell n x + x + 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ell n x + x + 1, x \in (0, +\infty)$. Τότε

$$h'(x) = (\ell n x + x + 1)' = \frac{1}{x} + 1 > 0, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty), \text{ άρα η } h \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

$$\text{Όμως } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell n \xi + \xi + 1}{(\xi + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \ell n \xi + \xi + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\xi) = 0, \text{ οπότε } h(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, \xi) \text{ και } h(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (\xi, +\infty).$$

$$x \in (0, \xi) \text{ και } h(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (\xi, +\infty).$$

Το πρόσημο της g' είναι το ίδιο με το πρόσημο της h , οπότε έχουμε: $g'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, \xi)$ και $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\xi, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει στο σημείο $\xi \in (0, 1)$ τοπικό ελάχιστο.

3. Το ζητούμενο $\xi \in (0, 1)$ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$(x+1) \cdot [(x+1) \cdot f'(x) - 1] - \ell n x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot f''(x) - (x+1) - \ell n x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 \cdot f''(x) = \ell n x + x + 1 \Leftrightarrow f''(x) = \frac{\ell n x + x + 1}{(x+1)^2} \stackrel{(I)}{=} f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f''(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (f'(x) - g(x))' = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) - g(x), x \in [0, 1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και έχουμε $h(0) = f'(0) - g(0) = f'(0)$ και $h(1) = f'(1) - g(1) = f'(1)$. Όμως $f'(0) = f'(1)$, οπότε είναι $h(0) = h(1)$.

Από το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε: $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$f''(\xi) - g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\xi + 1) \cdot [(\xi + 1) \cdot f''(\xi) - 1] = \ell n \xi.$$

B. Έχουμε $g(x) = \ln x + x, x > 0$ για τις οποίες ισχύει $f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x$, για κάθε $x > 0$.

(i) Είναι

$$E(a) = \int_a^1 |g(x) - x| dx = \int_a^1 |\ln x + x - x| dx = \int_a^1 |\ln x| dx$$

Όμως $x \in [a, 1]$, οπότε $\ell n x \leq 0$ και άρα:

$$E(a) = \int_a^1 (-\ell n x) dx = -\int_a^1 \ell n x dx = -\int_a^1 (x')' \ell n x dx =$$

$$-\left\{ [x \cdot \ell n x]_a^1 - \int_a^1 1 dx \right\} = -[x \cdot \ell n x]_a^1 + [x]_a^1 =$$

$$-(0 - a \ell n a) + (1 - a) = a \ell n a - a + 1 \text{ τ.μ.}$$

(ii) Δίνεται $E(t) = a(t) \cdot \ln a(t) - a(t) + 1$,
 $a'(t) = 1 \text{ cm/sec}$ και ζητείται το $E'(t_0)$ όταν
 $a(t_0) = x_0$. Επίσης γνωρίζουμε ότι
 $\ln x_0 + x_0 = 0$, αφού το x_0 είναι ρίζα της g .
 Έχουμε:

$$\begin{aligned} E'(t) &= [a(t) \cdot \ln a(t) - a(t) + 1]' = \\ a'(t) \cdot \ln a(t) + [a(t) \cdot \ln a(t)]' - a'(t) &= \\ a'(t) \cdot \ln a(t) + a(t) \cdot \frac{a'(t)}{a(t)} - a'(t) &= \\ a'(t) \cdot \ln a(t) + a'(t) - a'(t) &= a'(t) \cdot \ln a(t). \end{aligned}$$

Άρα $E'(t_0) = a'(t_0) \cdot \ln a(t_0) = 1 \cdot \ln x_0 =$
 $= \ln x_0 = -x_0 \text{ cm}^2 / \text{sec}$
 γιατί $\ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$.

(iii) Αφού $g(x) = \ln x + x$, $x > 0$, τότε
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + \lim_{x \rightarrow 0^+} x = -\infty$.
 Όμως $f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x$, $x > 0$,
 οπότε
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + e^x(x-1) + \ln x] \Leftrightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x(x-1) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \quad (*)$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x(x-1) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= \\ = f(0) + 1 \cdot 0 + (-\infty) &= -\infty. \end{aligned}$$

Από την $(*)$ τελικά έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x(x-1) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= \\ = f(0) + 1 \cdot 0 + (-\infty) &= -\infty, \\ \text{= τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Άρα η γραφική της συνάρτησης f δεν έχει
 οριζόντια ασύμπτωτο στο $-\infty$.

(iv) Για κάθε $x > 1$ ισχύει $\ln x > 0$, οπότε
 $\ln x + x > x \Leftrightarrow g(x) > x$.

Τότε

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x) + e^x(x-1) + \ln x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) &= e^x(x-1) + \ln x \Leftrightarrow \\ \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{e^x(x-1) + \ln x}{g(x) - x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{e^x(x-1) + \ln x}{\ln x} \Leftrightarrow \\ \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{e^x(x-1)}{\ln x} + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{x \cdot e^x - e^x}{\ln x} + 1 \Leftrightarrow \\ \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} &= \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + 1 \quad (1). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x, g(x)]$ και
 παραγωγίσιμη στο $(x, g(x))$.

Από το θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει ένα
 $\xi_1 \in (x, g(x))$, τέτοιο ώστε:

$$\bullet f'(\xi_1) = \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} \quad (2).$$

Επίσης η συνάρτηση $h(x) = e^x$ είναι συνεχής στο
 $[x, g(x)]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, g(x))$.

Από το θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει ένα
 $\xi_2 \in (x, g(x))$, τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi_2) = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} \Leftrightarrow e^{\xi_2} = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x}.$$

Άρα από (1) ισχύει

$$\frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + 1,$$

τότε έχουμε $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + 1$.

Αφού $\ln x + x > x > 1$, με

$\xi_1 \in (x, g(x)) = (x, \ln x + x) \Rightarrow 1 < x < \xi_1 < \ln x + x$
 και

$\xi_2 \in (x, g(x)) = (x, \ln x + x) \Rightarrow 1 < x < \xi_2 < \ln x + x$
 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 > 1$ και $\xi_2 > 1$

τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + 1$.

ΘΕΜΑ 2.

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g' για τις οποίες ισχύουν:

$$\int_0^x [f(t) - g'(t)] dt = 3x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \text{ότι η}$$

εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο διαδοχικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 1$. Επίσης η g στρέφει τα κοίλα κάτω και ισχύει η σχέση: $g(1) = g(0) + 2025$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα τη εξίσωσης $g''(x) + 6 = 0$ στο διάστημα (x_1, x_2) .

β) Να αποδείξετε ότι η g έχει ένα τοπικό μέγιστο στο $\mathbb{R}$, για τιμή του x που βρίσκεται στο διάστημα (x_1, x_2)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(\xi) = 6\xi + 2019$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία με εξίσωση $x = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α) Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g' για τις οποίες ισχύουν:

$$\int_0^x [f(t) - g'(t)] dt = 3x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$f(x) - g'(x) = 6x - 6, \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) + 6 = g'(x) + 6x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε την $h(x) = g'(x) + 6x$ με

$$h(x_1) = g'(x_1) + 6x_1 = f(x_1) + 6 \stackrel{f(x_1)=0}{=} 6$$

$$\text{και} \quad h(x_2) = g'(x_2) + 6x_2 = f(x_2) + 6 \stackrel{f(x_2)=0}{=} 6.$$

Από θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$, με $h'(\xi) = 0 \Rightarrow g''(\xi) + 6 = 0$.

β) Έχουμε $g'(x) = f(x) - 6x + 6$.

$$g'(x_1) = f(x_1) - 6x_1 + 6 = -6x_1 + 6 = 6(1 - x_1) > 0, \quad \text{αφού } x_1 < 0$$

$$g'(x_2) = f(x_2) - 6x_2 + 6 = -6x_2 + 6 = 6(1 - x_2) < 0, \quad \text{αφού } x_2 > 1.$$

Από Θ Bolzano στο $[x_1, x_2]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$, με $g'(x_0) = 0$. Έχουμε ότι η g στρέφει τα κοίλα κάτω, τότε η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο (x_1, x_2) και έτσι έχουμε:

Αν $x_1 < x < x_0 \Rightarrow g'(x) > g'(x_0) = 0$ και αν $x_2 > x > x_0 \Rightarrow g'(x) < g'(x_0) = 0$, άρα έχουμε τον πίνακα προσήμων:

x	x_1	x_0	x_2
$g'(x)$	+	0	-

Δηλαδή η συνάρτηση g έχει τοπικό μέγιστο το $g(x_0)$.

γ) Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις Θ.Μ.Τ στο $[0, 1]$ με $g(x) = f(x) - 6x + 6$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, με

$$g'(\xi) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = 2025 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) - 6\xi + 6 = 2025 \Leftrightarrow f(\xi) = 6\xi + 2019.$$

δ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία με εξίσωση $x = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι

$$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x)| dx. \quad \text{Όμως } [0, 1] \subseteq [x_1, x_2] \quad \text{και}$$

αφού οι x_1, x_2 είναι διαδοχικές ρίζες της f με την f συνεχή, τότε διατηρεί το πρόσημό της στο $[0, 1] \subseteq [x_1, x_2]$. Έχουμε όμως $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = 6\xi + 2012 > 0$, έτσι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Τότε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (g'(x) + 6x - 6) dx = \\ &= \int_0^1 g'(x) dx + \int_0^1 (6x - 6) dx = [g(x)]_0^1 + [3x^2 - 6x]_0^1 = \\ &= g(1) - g(0) + [3x^2 - 6x]_0^1 = \\ &2025 + 3 - 6 = 2022 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΓΑΛΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΒΑC

Τσαρπαλής Ιωάννης

ΑΣΚΗΣΗ 1

A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(1 - \ln x)^2$ με $x > 0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

iii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μοναδική λύση x_0 στο $(0, +\infty)$ και αυτή βρίσκεται στο (e, e^2) .

B) Έστω $g(x) = \ln x$ και $M(a, \ln a)$ σημείο της C_g με $a \in (0, 1]$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο M και τα σημεία τομής αυτής N, P με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

ii. Να βρεθεί το εμβαδόν $E(a)$ του τριγώνου ONP , συναρτήσει του a , όπου O η αρχή των αξόνων και N, P τα σημεία τομής της C_g με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και να βρεθεί η τιμή του a για την οποία το εμβαδόν $E(a)$ γίνεται μέγιστο. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(a)$. (BAC 2021, Sujet National)

ΛΥΣΗ

A) i. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f'(x) = (1 - \ln x)^2 + x \cdot 2(1 - \ln x) \left(-\frac{1}{x}\right) = (1 - \ln x)(-1 - \ln x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = e \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{e}$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ διότι είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και $f'(x) > 0$ για $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
Πρόσημο f'		+	-	+
Μονοτονία f		↗	↘	↗

Ομοίως:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$, έχει τοπικό μέγιστο για

$$x = \frac{1}{e} \text{ το } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{4}{e} \text{ και τοπικό ελάχιστο για } x = e \text{ το } f(e) = 0.$$

ii. $f'(x) = \ln^2 x - 1$ και $f''(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ για $x \in (0, +\infty)$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Είναι κοίλη στο $(0, 1]$ κυρτή στο $[1, +\infty)$ και για $x = 1$ έχει σημείο καμπής.

x	0	1	$+\infty$
Πρόσημο f''		-	+
Κυρτότητα f		Κοίλη	Κυρτή

iii. Θα βρούμε τα όρια στα άκρα του πεδίου ορισμού της f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x(1 - \ln x)^2] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \ln x)^2}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - \ln x) \left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - \ln x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0. \text{ Άρα για κάθε } x \in (0, e] \text{ τότε } f(x) \in \left[0, \frac{4}{e}\right].$$

Όμως $2 \notin \left[0, \frac{4}{e}\right]$ άρα η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη στο $(0, e]$.

Για $x \in [e, +\infty)$ τότε $f(x) \in [0, +\infty)$ και $2 \in [0, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_0 \in [e, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$ και είναι μοναδικό αφού η f στο $[e, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Το $x_0 \in (e, e^2)$ διότι $f(e) = 0$ και $f(e^2) = e^2$.

και $f(e) < 2 < f(e^2)$ άρα από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in (e, e^2)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 2$

B) i. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(a, \ln a)$ είναι $y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a) \Leftrightarrow y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$

Για $x = 0$ $y = \ln a - 1$ και για $y = 0$ $x = a(1 - \ln a)$. Άρα $N(a(1 - \ln a), 0)$ και $P(0, \ln a - 1)$

$$\text{ii. } E(a) = \frac{1}{2}|x||y| = \frac{1}{2}(1 - \ln a)a(1 - \ln a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a)^2 \text{ με } a \in (0, 1].$$

iii. Για $a \in (0, 1]$ είναι $E(a) = \frac{1}{2}f(a)$. Όπως είδαμε στο πρώτο ερώτημα η f έχει μέγιστο για $x = \frac{1}{e}$.

Άρα το $E(a)$ γίνεται μέγιστο για $a = \frac{1}{e}$ και $E\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{e} = \frac{2}{e}$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να αποδειχθεί ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow +\infty$.

β. Να μελετηθεί η f ως προς την μονotonία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ της C_f στο $x_0 = 0$ και να αποδείξετε ότι η C_f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2$

ε. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και τα σημεία $M(-a, f(a))$ και $N(a, f(a))$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(-x) = -x$

ii. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία M και N είναι παράλληλη στην ϵ .

(BAC 2022) France metropolitaine Exercice 4

ΛΥΣΗ

α) Όταν $x \rightarrow -\infty$ τότε $e^{-x} \rightarrow +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + e^{-x})] \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\text{DLH}} \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty$

Όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $e^{-x} \rightarrow 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^{-x})] \stackrel{u=1+e^{-x}}{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 1 \\ u \rightarrow 1}} \lim_{u \rightarrow 1} (\ln u) = \ln 1 = 0$
 Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow +\infty$.

$$\beta) f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{-\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = -\frac{1}{1+e^x} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Δεν έχει ακρότατα και έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$

$$\text{είναι } y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - \ln 2 = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

$$f''(x) = -\frac{(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η C_f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) Επειδή η C_f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\epsilon) f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x} = \ln \frac{e^x}{1 + e^x} = \ln \frac{1}{e^x} = \ln e^{-x} = -x$$

$$\lambda_{\xi} = -\frac{1}{2} \text{ και } \lambda_{MN} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η εφαπτομένη ϵ της C_f στο $x_0 = 0$ είναι παράλληλη με την ευθεία MN .

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - 1)$.

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονotonία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

iii. Να βρεθεί το κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y = -\ln 2$

iv. Αν η C_f είναι κοίλη να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας $y = -\ln 2$

και των αξόνων $x'x$ και $y'y$. Στην συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 f(x)dx$.

(BAC 2001, Sujet National)

ΛΥΣΗ

i. Για $x > 0$ έχουμε $1 + x > 1 \Rightarrow \sqrt{1+x} > 1 \Rightarrow \sqrt{1+x} - 1 > 0$

Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ για $x > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \sqrt{x+1} - 1) \stackrel{u=\sqrt{x+1}-1}{\substack{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln \sqrt{x+1} - 1) \stackrel{u=\sqrt{x+1}-1}{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty \text{ Άρα έχει σύνολο τιμών το } \mathbb{R}$$

ii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και επομένως υπάρχει η f^{-1} , η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f δηλαδή το $\mathbb{R}$.

$$y = \ln(\sqrt{x+1}-1) \Leftrightarrow e^y = \sqrt{x+1}-1 \Leftrightarrow e^y+1 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow e^{2y}+2e^y = x$$

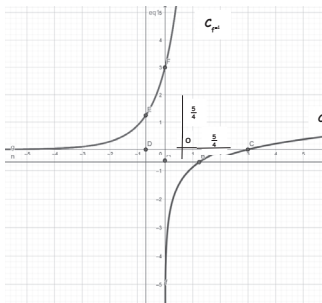
$$x > 0 \quad y \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow x > 0 \quad y \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow x > 0 \quad y \in \mathbb{R}$$

Άρα $f^{-1}(x) = e^{2x} + 2e^x$ με $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{iii. } f(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x+1}-1) = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

η οποία είναι δεκτή.

iv. Η γραφική παράσταση της f και της f^{-1}



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x+1}-1) = \ln 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Επειδή C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$ το εμβαδόν που θέλουμε (OABCO) να βρούμε είναι ίσο με (ODEFO)

$$E = \int_{-\ln 2}^0 f^{-1}(x) dx = \int_{-\ln 2}^0 (e^{2x} + 2e^x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x \right]_{-\ln 2}^0 = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} e^{-2\ln 2} + 2e^{-\ln 2} \right) =$$

$$= \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{8} + 1 \right) = \frac{20}{8} - \frac{9}{8} = \frac{11}{8} \text{ τ.μ}$$

Το $\int_{\frac{5}{4}}^3 f(x) dx$ λόγω της συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$

$$\text{είναι } \int_{\frac{5}{4}}^3 f(x) dx = - \left(\int_{\frac{5}{4}}^3 f^{-1}(x) dx - \frac{5}{4} \ln 2 \right) = \frac{5}{4} \ln 2 - \frac{11}{8}$$

Το $\int_{\frac{5}{4}}^3 f(x) dx$ είναι αρνητικός αριθμός διότι για $x \in \left[\frac{5}{4}, 3 \right]$ είναι $f(x) \leq 0$



Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 436 (ΤΕΥΧΟΣ 133)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$||\alpha\beta| - 3\alpha| \leq |\alpha - \beta| - 4, (1) \text{ και}$$

$$|1 - |\alpha|| > |7 - |\alpha| - |\beta|, (2)$$

Να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις ρίζες του τριωνύμου $f(x) = (1 - |\alpha|)x^2 - 2x - |\beta| + 4$ είναι αρνητική.

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο.

ΛΥΣΗ (Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι)

Είναι $f(0) = 4 - |\beta|$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $|\beta| < 4$ και $|\alpha| > 1$ τότε $f(0) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον αρνητική ρίζα.
- Αν $|\beta| > 4$ και $|\alpha| \leq 1$ τότε $f(0) < 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον αρνητική ρίζα.
- Αν $|\beta| < 4$ και $|\alpha| \leq 1$ τότε από την (2) παίρνουμε $7 - |\alpha| - |\beta| < 1 - |\alpha|$ δηλαδή $|\beta| > 6$ που είναι άτοπο.

- Αν $|\beta| > 4$ και $|\alpha| > 1$, τότε η (1) γράφεται

$$|\alpha\beta| - 3\alpha \leq |\alpha - \beta| - 4 < |\alpha| + |\beta| - 4$$

$$\Leftrightarrow |\beta|(|\alpha| - 1) \leq 3\alpha + |\alpha| - 4$$

Όμως, $|\alpha| - 1 > 0 \Rightarrow 3\alpha + |\alpha| - 4 > 0$, οπότε $\alpha > 1$ και η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$|\beta|(|\alpha| - 1) \leq 3\alpha + |\alpha| - 4 \Rightarrow |\beta| \leq 4$$

που είναι άτοπο.

- Αν $|\beta| = 4$, έχουμε

$$|4|\alpha| - 3\alpha| \leq |\alpha - \beta| - 4 = |\alpha - \beta| - |\beta| \leq |\alpha|$$

οπότε $\alpha \geq 0$. Επίσης έχουμε

$$|1 - \alpha| > |3 - \alpha| \Rightarrow \alpha > 2$$

Έτσι, έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha)x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{2}{\alpha - 1} < 0$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει αρνητική ρίζα.

2η ΛΥΣΗ (Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον)

Προφανώς $1 - |\alpha| \neq 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι αριθμοί $1 - |\alpha|$ και $4 - |\beta|$ είναι ετερόσημοι και την ύπαρξη αρνητικής ρίζας στην περίπτωση που ισχύει $|\beta| = 4$.

- Αν $1 - |\alpha| > 0$ δηλαδή $|\alpha| < 1$, τότε η (2) γράφεται

$$1 - |\alpha| > |7 - |\alpha| - |\beta|| \Rightarrow 1 - |\alpha| > 7 - |\alpha| - |\beta| \Rightarrow |\beta| > 6$$

οπότε $4 - |\beta| < 0$

- Αν $1 - |\alpha| < 0$ δηλαδή $|\alpha| > 1$, τότε

$$|\alpha\beta| - 3\alpha \leq |\alpha + \beta| - 4 \leq |\alpha| + |\beta| - 4$$

οπότε $|\beta|(|\alpha| - 1) \leq 3\alpha + |\alpha| - 4$ απ' όπου προκύπτει $3\alpha + |\alpha| - 4 \geq 0$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι $\alpha > 0$, άρα $4\alpha > 4 \Rightarrow \alpha > 1$.

Έτσι, η παραπάνω ανισότητα γράφεται:

$$|\beta|(|\alpha| - 1) \leq 3\alpha + |\alpha| - 4 \Rightarrow |\beta|(|\alpha| - 1) \leq 4(\alpha - 1) \Rightarrow |\beta| \leq 4$$

✓ Αν $|\beta| < 4$ προκύπτει το ζητούμενο.

- ✓ Αν $|\beta| = 4$, τότε η ρίζα $x = \frac{2}{1 - |\alpha|}$ είναι αρνητική.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος **Δεληστάθης Γεώργιος** – Κάτω Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 437 (ΤΕΥΧΟΣ 133)

Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma \geq 2$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K = \sin A + \sin B + \sin\Gamma$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο)

Είναι γνωστό ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$K = \sin A + \sin B + \sin\Gamma$$

$$= 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

και

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

Επιπλέον,

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = 2R \Rightarrow \frac{2\tau}{4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} = 2R$$

$$\Rightarrow \tau = 4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με την $E = \tau\rho$ και απλούς τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς, οδηγεί στην ισότητα

$$\rho = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$K = 1 + \frac{\rho}{R}$$

Επιπλέον, από το θεώρημα του Euler ισχύει

$$\frac{\rho}{R} \leq \frac{1}{2}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Στην περίπτωση αυτή προφανώς $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma \geq 2$ και $K_{\max} = \frac{3}{2}$.

Σχόλιο:

Ο λύτης επισημαίνει ότι θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον αν αντί της δοσμένης υπόθεσης $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma \geq 2$

είχε δοθεί η υπόθεση

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma \leq 2$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη θεωρία των πολωνυμικών εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού που αναπτύσσεται διεξοδικά στο βιβλίο του «Πολωνυμικές Εξισώσεις Τρίτου και Τετάρτου Βαθμού», αποδεικνύει ότι η μέγιστη τιμή του K προκύπτει όταν $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 2$ και είναι ίση με τον άρρητο αριθμό 1,2697689...

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος **Δεληστάθης Γεώργιος** – Κάτω Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 438 (ΤΕΥΧΟΣ 134)

Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ για τους οποίους ισχύουν:

- $\alpha + \beta + \gamma = 51$,
- $\alpha\beta\gamma = 4000$,
- $0 < \alpha \leq 10$ και $\gamma \geq 25$

Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον

ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια)

Οι αριθμοί α , γ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$t^2 - (\alpha + \gamma)t + \alpha\gamma = 0 \quad \eta$$

$$t^2 - (51 - \beta)t + \frac{4000}{\beta} = 0$$

Επιπλέον είναι προφανές ότι $\beta > 0$. Οι ρίζες t_1 , t_2 του τριωνύμου

$$f(t) = t^2 - (51 - \beta)t + \frac{4000}{\beta} = t^2 + (\beta - 51)t + \frac{4000}{\beta}$$

ικανοποιούν τις ανισότητες

$$t_1 = \alpha \leq 10 \quad \text{και} \quad t_2 = \gamma \geq 25$$

οπότε ισχύουν:

$$f(10) \leq 0 \quad \text{και} \quad f(25) \leq 0$$

Είναι:

$$f(10) \leq 0 \Leftrightarrow 10^2 + (\beta - 52)10 + \frac{4000}{\beta} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 10 + \beta - 51 + \frac{400}{\beta} \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 41\beta + 400 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 16 \leq \beta \leq 25, \quad (1)$$

$$f(25) \leq 0 \Leftrightarrow 25^2 + (\beta - 52)25 + \frac{4000}{\beta} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 25 + \beta - 51 + \frac{160}{\beta} \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 26\beta + 160 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq \beta \leq 16, \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\beta = 16$, οπότε

οι α , γ είναι οι λύσεις της

$$t^2 - 35t + 250 = 0.$$

Η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 10 και 25, οπότε $\alpha = 10$ και $\gamma = 25$

Λύση έστειλαν επίσης ο συνάδελφος **Λαγογιάννης Βασίλειος** - Ν. Ηράκλειο και **Καρτσακλής Δημήτριος** - Αγρίνιο.

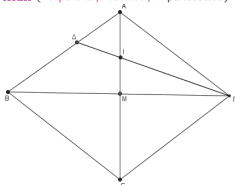
ΑΣΚΗΣΗ 439 (ΤΕΥΧΟΣ 134)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = \beta$ και έστω $AM = \upsilon$ το μήκος του ύ-

ψους – διαμέσου – διχοτόμου και $\Gamma\Delta = \delta$ το μήκος της διχοτόμου της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Αν ισχύει $\frac{v}{\delta} = \frac{1}{2}$ ζητούνται τα μέτρα των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

ΛΥΣΗ (Πετρολέκας Στυλιανός – Δραπετσώνα)



Προεκτείνουμε την AM και θεωρούμε σημείο E ώστε $ME = AM = v$, (1).

Προφανώς το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AB // \Gamma E$ (2).

Τα τρίγωνα ΔAI και $IE\Gamma$ είναι όμοια, οπότε

$$\begin{aligned} \frac{IE}{IA} = \frac{I\Gamma}{ID} &\Rightarrow \frac{IE}{IA + IE} = \frac{I\Gamma}{ID + I\Gamma} \\ &\Rightarrow \frac{IE}{AE} = \frac{I\Gamma}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \frac{IE}{2v} = \frac{I\Gamma}{\delta} \end{aligned}$$

και σε συνδυασμό με την δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$IE = ID \Rightarrow I\Gamma E = I\hat{E}\Gamma, (3)$$

Στο παραλληλόγραμμο $ABE\Gamma$ οι διαγώνιες είναι κάθετες, οπότε είναι ρόμβος. Έτσι, έχουμε:

$$A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}E = \varphi, (4) \text{ και}$$

$$I\hat{E}\Gamma = M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}, (5)$$

$$\text{Επιπλέον, } M\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}M = 90^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \varphi = 90^\circ, (6)$$

Από τις (3), (5) παίρνουμε:

$$I\hat{\Gamma}E = \frac{B\hat{E}\Gamma}{2} = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow I\hat{\Gamma}M + M\hat{\Gamma}E = \frac{\hat{A}}{2} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \varphi + \varphi = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 3\varphi$$

οπότε η (6) γράφεται:

$$\frac{3\varphi}{2} + \varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 36^\circ$$

$$\text{Άρα } \hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^\circ \text{ και } \hat{A} = 108^\circ$$

Λύση έσταιλαν επίσης ο συνάδελφος **Δεληστάθης Γεώργιος** – Κάτω Πατήσια, **Καρτασακλής Δημήτριος** – Αγγρίνιο, **Κτενιαδάκης Μιχαήλ** – Ηράκλειο Κρήτης και **Αποστολόπουλος Γεώργιος** – Μεσολόγγι.

ΑΣΚΗΣΗ 440 (ΤΕΥΧΟΣ 134)

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n για τους οποίους υπάρχουν πρώτοι p, q ώστε να ισχύει $p(p+1) + q(q+1) = n(n+1)$

Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια

ΛΥΣΗ (Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο Κρήτης)

Αρχικά διαπιστώνουμε ότι, λόγω της συμμετρίας της σχέσης ως προς p και q , οι τιμές τους μπορούν να εναλλάσσονται, χωρίς επίδραση στην τιμή του n .

Επίσης, αφού p, q, n είναι θετικοί, για να ισχύει δοθείσα σχέση θα είναι προφανώς:

$$n > p \text{ και } n > q, (1)$$

Η δοθείσα σχέση μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

$$p^2 + p + q^2 + q = n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow (p+q)^2 - 2pq + p + q = n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow (p+q)^2 + p + q = n(n+1) + 2pq$$

από την οποία παίρνουμε την ανισότητα:

$$(p+q)^2 + p + q > n(n+1)$$

$$\Rightarrow (p+q)(p+q+1) > n(n+1)$$

Η τελευταία ανισότητα θα ισχύει αν και μόνο αν $p+q > n$, (2)

Κυρίως λύση: Η δοθείσα σχέση γράφεται διαφορετικά:

$$p(p+1) = n(n+1) - q(q+1)$$

Το 2^ο μέλος, [προσθαφαίρωντας nq] παραγοντοποιείται και έχουμε:

$$p(p+1) = (n-q)(q+n+1), (3)$$

Λόγω της (2) θα είναι $p > n-q$, που σημαίνει ότι ο p δεν είναι διαιρέτης του $n-q$, άρα στην (3) είναι οπωσδήποτε: $p|(q+n+1)$ και επομένως και:

$$p|(p+q+n+1), (4)$$

Αντίστροφα, καταλήγουμε και ότι:

$$q|(p+q+n+1), (5)$$

• Άρα και:

$$pq|(p+q+n+1)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$pq \leq p+q+n+1, (6)$$

Λόγω της (2), αν αντικαταστήσουμε τον n στην

(6), θα έχουμε:

$$pq < p+q+p+q+1 \Leftrightarrow pq-2p-2q+4 < 5 \\ \Leftrightarrow (p-2)(q-2) < 5, \quad (7)$$

Διακρίνουμε:

1η περίπτωση: $p = 2$ (καλύπτεται και η περίπτωση $q=2$, λόγω της πρώτης διαπίστωσης)
Τότε η ανισότητα (7) ισχύει ενώ η (3) γίνεται:

$$2(2+1) = (n-q)(q+n+1) \\ \Leftrightarrow 6 = (n-q)(q+n+1), \quad (8)$$

οπότε έχουμε:

- $n-q=2$ και $q+n+1=3$
 $\Rightarrow n=2, q=0$ (αποκλείεται)
- $n-q=3$ και $q+n+1=2$
 $\Rightarrow n=2, q=-1$ (αποκλείεται)

Άρα η (8), δεδομένου ότι $q+n+1 \neq 1$, θα ισχύει αν και μόνο αν:

$$n-q=1 \text{ και } q+n+1=6 \\ \Rightarrow n=3, q=2 \text{ (δεκτή)}$$

Συνεπώς, ένας από τους ζητούμενους αριθμούς είναι ο **$n=3$ (και $p=q=2$)**

2η περίπτωση: $p \neq 2$, δηλ. $p > 2$

Τότε η ανισότητα (7) θα ισχύει προφανώς μόνο στις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- $p-2=1$ και $q-2=4$
 $\Rightarrow p=3, q=6$ ενώ η αρχική σχέση γίνεται:
 $3(3+1)+6(6+1)=n(n+1) \Rightarrow n^2+n-54=0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις. (Το ίδιο φυσικά ισχύει και αν $p-2=4$ και $q-2=1$)
- $p-2=2$ και $q-2=2$
 $\Rightarrow p=q=4$ ενώ η αρχική σχέση γίνεται:
 $4(4+1)+4(4+1)=n(n+1) \Rightarrow n^2+n-40=0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις.
- $p-2=1$ και $q-2=3$

$\Rightarrow p=3, q=5$ οπότε η αρχική σχέση γίνεται:
 $3(3+1)+5(5+1)=n(n+1) \Rightarrow n^2+n-42=0$, η οποία έχει τη θετική λύση $n=6$. (Η ίδια λύση προκύπτει και αν $p-2=3$ και $q-2=1$).

Συνεπώς, ένας από τους ζητούμενους αριθμούς είναι ο **$n=6$ (με $p=3$ και $q=5$)**.

- $p-2=1$ και $q-2=2$
 $\Rightarrow p=3, q=4$ ενώ η αρχική σχέση γίνεται:
 $3(3+1)+4(4+1)=n(n+1) \Rightarrow n^2+n-32=0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις. (Το ίδιο φυσικά ισχύει και αν $p-2=2$ και $q-2=1$)
- $p-2=1$ και $q-2=1$

$\Rightarrow p=q=3$ ενώ η αρχική σχέση γίνεται:

$$3(3+1)+3(3+1)=n(n+1) \Rightarrow n^2+n-24=0, \text{ η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις.}$$

Τελικά, οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι n είναι οι 3 και 6.

Σημείωμα σύνταξης.

Στα τελευταία τεύχη του περιοδικού, όπου κάποια από τα λυμένα θέματα έχουν προταθεί στο αμέσως προηγούμενο τεύχος παρατηρήθηκε το φαινόμενο να παραλειφθεί η αναφορά κάποιων συναδέλφων που έστειλαν λύσεις, λόγω μη έγκαιρης παραλαβής της.

«Θύματα» αυτής της ετεροχρονισμένης άφιξης έχουν πύξαι συνάδελφοι όπως οι: Καρτσακλής, Ηλιόπουλος, Δεληστάθης, ενώ στο θέμα 434 δεν περιλήφθηκαν έγκαιρα οι ωραίες λύσεις των **Στρατή Αντωνέα** – Σπάρτη και **Ιωάννη Ανδρή** – Αθήνα.

Παρακαλούμε τους συνάδελφους - συνεργάτες της στήλης, ενόψει του επαναληπτικού τεύχους (τ. 4) για την αποστολή προτεινόμενων θεμάτων.

Προτεινόμενα θέματα

443. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και έστω AD η διχοτόμος της γωνίας A . Αν E, Z είναι τα μέσα των τμημάτων AF, BD αντίστοιχα και τα σημεία A, E, D, Z είναι ομοκυκλικά, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

444. Δίνεται τρίγωνο $A B\Gamma$ και έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων BB_1 και $\Gamma\Gamma_1$. Να αποδεί-

ξετε ότι $B_1\Gamma_1 \cdot \Gamma_1 I < \frac{BB_1 \cdot \Gamma\Gamma_1}{4} < BI \cdot \Gamma I$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

445. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α , για τις οποίες, για κάθε τιμή της παραμέτρου β η εξίσωση $|x-2| + \beta|2x+1| = \alpha$ έχει τουλάχιστον μια λύση.

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

446. Να λύσετε την εξίσωση

$$\log_{2x}^2 x + (x+1)\log_{2x} x + 2x - 2 = 0$$

Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο Κρήτης.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Τέλεια τετράγωνα στη Θεωρία Αριθμών

Γεώργιος Τσαπακίδης

Αρκετά θέματα των μαθηματικών διαγωνισμών αναφέρονται σε τετράγωνα ακεραίων. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να χωριστούν σε δυο βασικές κατηγορίες:

1^η Για ποιες τιμές του **ακέрайου** n μια αλγεβρική **παράσταση** του n είναι τετράγωνο ακεραίου;

2^η Δείξτε ότι μια αλγεβρική **παράσταση** του n **είναι ή δεν είναι** τετράγωνο ακεραίου, για κάθε τιμή του n .

Σε αυτό το άρθρο θα μελετήσουμε **προβλήματα**, των οποίων οι **λύσεις** στηρίζονται σε απλές και προφανείς προτάσεις, για να μπορούν να τα κατανοήσουν όσο το δυνατόν **περισσότεροι** μαθητές.

Προβλήματα

1. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $5n+3$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $5n$ έχει ψηφίο μονάδων το 0 ή το 5, οπότε το τελευταίο ψηφίο του $5n+3$ είναι το 3 ή το 8, αλλά κανένα τετράγωνο ακεραίου δε λήγει σε 3 ή 8, άρα ο $5n+3$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

2. Δείξτε ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων αριθμών, αυξημένο κατά 1 είναι τετράγωνο ακεραίου.

Απόδειξη: Έστω k τυχαίος ακεραίος, τότε οι $k, k+1, k+2, k+3$ είναι διαδοχικοί ακεραίοι και

$$\begin{aligned} & k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= [(k+3)][(k+1)(k+2)] \\ &= (k^2+3k)(k^2+3k+2) = \\ &= [(k^2+3k)+1]-1][(k^2+3k+1)+1] = \\ &= (k^2+3k+1)^2-1, \text{ άρα} \\ & k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+3k+1)^2. \end{aligned}$$

3. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετικός ακεραίος $\overline{abc}$, τέτοιος ώστε ο $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ να είναι τετράγωνο ακεραίου. [Ουκρανία]

Απόδειξη: Έστω ότι είναι $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = k^2$ (k ακεραίος) $\Leftrightarrow (100a+10b+c) + (100b+10c+a) + (100c+10a+b) = k^2 \Leftrightarrow 111(a+b+c) = k^2 \Leftrightarrow 37 \cdot 3(a+b+c) = k^2(1) \Rightarrow 3|k$ και $37|k$, άρα $k = 3 \cdot 37\lambda$ (λ ακεραίος) και έτσι $(1) \Rightarrow 37 \cdot 3(a+b+c) = 3^2 \cdot 37^2 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow a+b+c = 3 \cdot 37 \cdot \lambda^2 \Rightarrow 37|a+b+c$, άποιο, γιατί $0 < a+b+c \leq 9+9+9 = 27$.

4. Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου n ο αριθμός $n^2 - 19n + 89$ είναι τετράγωνο ακεραίου;

Απάντηση: Έστω m θετικός ακεραίος, τέτοιος ώστε:

$$\begin{aligned} n^2 - 19n + 89 &= m^2 \Leftrightarrow \\ n^2 - 19n + 89 - m^2 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Για να έχει η (1) λύση ως προς n θετικό ακεραίο πρέπει η διακρίνουσα της να είναι τετράγωνο ακεραίου, άρα $19^2 - 4(89 - m^2) = k^2$ (k θετικός ακεραίος) $\Leftrightarrow 5 + 4m^2 = k^2$ $k^2 - 4m^2 = 5 \Leftrightarrow (k-2m)(k+2m) = 5 \Leftrightarrow k-2m = 1$ και $k+2m = 5 \Leftrightarrow k = 3$ και $m = 1$. Για $m = 1$, $(1) \Leftrightarrow n^2 - 19n + 88 = 0 \Leftrightarrow n = 11$ ή $n = 8$. Για $n=8$ είναι $n^2 - 19n + 89 = 1^2$ και για $n=11$ είναι $n^2 - 19n + 89 = 1^2$. Έτσι $n=8$ ή $n=11$.

5. Δείξτε ότι το άθροισμα των τετράγωνων πέντε διαδοχικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι τετράγωνο ακεραίου.

Απόδειξη: Έστω k τυχαίος ακεραίος, τότε οι $k, k+1, k+2, k+3, k+4$ είναι πέντε διαδοχικοί ακεραίοι. Τότε $A = k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 + (k+3)^2 + (k+4)^2 = 5k^2 + 20k + 30 = 5(k^2 + 4k + 6)$, έτσι $A =$ τέλειο τετράγωνο ακεραίου, όταν $k^2 + 4k + 6 = 5\lambda^2$, με λ ακεραίο, οπότε $k^2 + 4k + 6 - 5\lambda^2 = 0$, για να είναι ακεραίος ο k πρέπει η διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4(6 - 5\lambda^2) = -8 + 20\lambda^2$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλ.

$-8 + 20\lambda^2 = \mu^2(1)$, με μ ακεραίο και επειδή $2|-8 + 20\lambda^2 \Rightarrow 2|\mu \Rightarrow \mu = 2\nu$ με $\nu \in \mathbb{Z}$, οπότε η (1) γίνεται $-8 + 20\lambda^2 = 4\nu^2 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 2 = \nu^2$, αυτό είναι αδύνατο, γιατί ο $5\lambda^2$ λήγει σε 0 ή 5, οπότε ο $5\lambda^2 - 2$ λήγει στο 8 ή 3, αλλά κανένα τέλειο τετράγωνο ακεραίου δεν λήγει σε 8 ή 3. Άρα ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

6. Αν οι x, y είναι θετικοί ακεραίοι, τότε μπορούν και οι δύο αριθμοί $x^2 + 2y, y^2 + 2x$ να είναι συγγενόμενα τέλεια τετράγωνα;

Απάντηση: Επειδή οι παραστάσεις $x^2 + 2y, y^2 + 2x$ είναι συμμετρικές, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \geq y$, τότε:

$x^2 < x^2 + 2y \leq x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, έτσι για $x \geq y$ ο $y^2 + 2x$ μπορεί να είναι τέλειω τετράγωνο, ενώ ο $x^2 + 2y$ δεν είναι.
Άρα δεν μπορεί οι $x^2 + 2y$, $y^2 + 2x$ να είναι συγχρόνως τέλειω τετράγωνα, όταν οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι.

7. Δείξτε ότι ο $n^2 + 5n + 5$ δεν είναι τέλειω τετράγωνο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη 1^a Έστω ότι ο αριθμός είναι τετράγωνο ακεραίων, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με

$$n^2 + 5n + 5 = (n + k)^2 \Leftrightarrow n(5 - 2k) = k^2 - 5 \Leftrightarrow 4n = \frac{-4k^2 - 20}{2k - 5} = \frac{-(2k - 5)(2k + 5) + 5}{2k - 5} =$$

$$= -2k - 5 - \frac{5}{2k - 5} \Rightarrow 2k - 5 \mid 5 \Rightarrow$$

$$2k - 5 = -1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ή} \\ 2k - 5 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ή} \\ \text{ή} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k = 2 \\ k = 3 \end{array}$$

$$2k - 5 = -5 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ή} \\ 2k - 5 = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ή} \\ \text{ή} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k = 0 \\ k = 5 \end{array}$$

$$\bullet \text{ Για } k = 2 \Rightarrow 4n = -4 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ Για } k = 3 \Rightarrow 4n = -4 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ Για } k = 0 \Rightarrow 4n = -4 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ Για } k = 5 \Rightarrow 4n = -16 \Rightarrow n = -4 \notin \mathbb{N}.$$

Άρα δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για να είναι ο $n^2 + 5n + 5$ τετράγωνο ακεραίων.

Απόδειξη 2^a Έστω $n^2 + 5n + 5 = k^2$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow n^2 + 5n + 5 - k^2 = 0$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Delta = \mu^2 \quad (\mu \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 25 - 4(5 - k^2)$$

$$= \mu^2 \Rightarrow 5 + 4k^2 = \mu^2 \Rightarrow \mu^2 - 4k^2 = 5$$

$$\Rightarrow (\mu - 2k)(\mu + 2k) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu - 2k = -5 \text{ και } \mu + 2k = -1 \\ \text{ή} \\ \mu - 2k = 1 \text{ και } \mu + 2k = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \text{ή} \\ k = 1 \end{cases}$$

Για $k=1$ είναι $n^2 + 5n + 5 = 1 \Leftrightarrow n^2 + 5n + 4 = 0 \Leftrightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$ ή $n = -4 \notin \mathbb{N}$.

Απόδειξη 3^a Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε: $n^2 + 4n + 4 < n^2 + 5n + 5 < n^2 + 6n + 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n+2)^2 < n^2 + 5n + 5 < (n+3)^2 \Rightarrow n^2 + 5n + 5 \text{ δεν είναι τέλειω τετράγωνο.}$$

8. Αν οι n, d είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει $d \mid n^2$, δείξτε ότι ο $n^2 + d$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου. [Eötvös Kürschák Competitions]

Απόδειξη: Αφού $d \mid 2n^2$, υπάρχει θετικός ακέραιος k , τέτοιος ώστε $2n^2 = kd$ (1)

Αν ο $n^2 + d$ ήταν τετράγωνο ακεραίου, τότε και ο $k^2(n^2 + d) = k^2n^2 + k^2d = k^2n^2 + k \cdot kd$ (1)

$$k^2n^2 + k \cdot 2n^2 = n^2(k^2 + 2k) = n^2[(k+1)^2 - 1]$$

θα ήταν τετράγωνο ακεραίου, άρα και ο $(k+1)^2 - 1$ θα ήταν τετράγωνο ακεραίων, άτοπο γιατί ούτε ο προηγούμενος, ούτε ο επόμενος ενός τετραγώνου ακεραίου δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

9. Αν για τους ρητούς αριθμούς x, y ισχύει

$$x^5 + y^5 = 2x^2y^2, \text{ δείξτε ότι ο } 1 - xy \text{ είναι τετράγωνο ρητού αριθμού. [Ρωσία]}$$

Απόδειξη: Αν $xy = 0$, τότε $1 - xy = 1^2$.

Αν $xy \neq 0$, τότε $x^5 + y^5 = 2x^2y^2 \Rightarrow$

$$(x^5 + y^5)^2 = (2x^2y^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{10} + 2x^5y^5 + y^{10} = 4x^4y^4 \Rightarrow x^{10} +$$

$$2x^5y^5 - 4x^5y^5 + y^{10} = 4x^4y^4 - 4x^5y^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{10} - 2x^5y^5 + y^{10} = 4x^4y^4(1 - 4xy)$$

$$\Rightarrow (x^5 - y^5)^2 = 4x^4y^4(1 - 4xy) \Rightarrow$$

$$1 - xy = \left(\frac{x^5 - y^5}{2x^2y^2} \right)^2 = \text{τετράγωνο ρητού.}$$

10. Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους α, β έτσι ώστε οι αριθμοί $\alpha^2 + 4\beta$, $\beta^2 + 4\alpha$ να είναι τετράγωνα ακεραίων. [ΑΡΜΟ]

Λύση: Έστω $\alpha \leq \beta$. Είναι $\beta^2 < \beta^2 + 4\alpha \leq \beta^2 + 4\beta < (\beta + 2)^2$ το μόνο τέλειω τετράγωνο μεταξύ των β^2 και $(\beta + 2)^2$, είναι το $(\beta + 1)^2$, επομένως $\beta^2 + 4\alpha = (\beta + 1)^2 \Leftrightarrow \beta^2 + 4\alpha = \beta^2 + 2\beta + 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\beta + 1}{4}$ ΑΤΟΠΟ, γιατί ο περριτός $2\beta + 1$ δεν μπορεί να διαιρείται με τον άρτιο α .

Άρα δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β έτσι, ώστε οι $\alpha^2 + 4\beta$, $\beta^2 + 4\alpha$ να είναι τετράγωνα ακεραίων.

11. Να βρείτε τις ακέραιες και θετικές τιμές των x, y, z για τις οποίες η παράσταση:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 2x(z - 1) + 2y(z + 1)$$

είναι τετράγωνο ακεραίου.

Απάντηση: Είναι $\alpha = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy +$

$$2x(z - 1) + 2y(z + 1) =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2x + 2yz + 2y,$$

$$\text{έτσι: } (x + y + z - 1)^2 < \alpha < (x + y + z + 1)^2$$

Το μόνο τέλειω τετράγωνο μεταξύ των ακεραίων αριθμών $(x + y + z - 1)^2$, $(x + y + z + 1)^2$ είναι το $(x + y + z)^2$, άρα για να είναι ο α τέλειω τετράγωνο ακεραίου πρέπει: $\alpha = (x + y + z)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2x + 2yz +$$

$$2y = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = y, \text{ άρα } (x, y, z) = (n, n, m)$$

με $n, m \in \mathbb{N}^*$.

12. Αν $2x9y1$ είναι τετράγωνο θετικού ακεραίου, τότε να υπολογιστεί το $3x+7y$; [Κίνα]

Απάντηση: Έστω $n^2 = 2x9y1$. Επειδή $141^2 = 19881 < 2x9y1 = n^2 < 30625 = 175^2$, θα είναι $141 < n < 175(1)$. Το n^2 λήγει σε 1, άρα το n πρέπει να λήγει σε 1 ή 9, έτσι από την (1) έχουμε: $n=149, 151, 159, 161, 169, 171$. Ο μόνος αριθμός από τους προηγούμενους που το τετράγωνό του έχει ψηφίο εκατοντάδων το 9 είναι ο 161, πράγματι έχουμε: $n^2 = 161^2 = 25921$, άρα $x=5$ και $y=2$, οπότε: $3x+7y=29$.

13. Αν για τους θετικούς ακέραιους x, y ισχύει $2x^2 + x = 3y^2 + y$, δείξτε ότι οι αριθμοί $x-y$ και $2x+2y+1$ είναι τετράγωνα ακεραίων.

Απάντηση: $2x^2 + x = 3y^2 + y \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 + x - y = y^2 \Leftrightarrow 2(x-y)(x+y) + (x-y) = y^2 \Leftrightarrow (x-y)(2x+2y+1) = y^2$ (1)

Έστω δ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $x-y$, $2x+2y+1$ και p ένας πρώτος διαιρέτης του δ , τότε $p/\delta = (x-y, 2x+2y+1)/y^2$, έτσι $p/y^2 \Rightarrow p/y \Rightarrow p/x - y + y = x \Rightarrow p/x$ και p/y , άρα

$p/x + y \Rightarrow p/2(x+y)$ (3)
 $p/2x + 2y + 1 - 2(x+y) = 1$, άτοπο.
 Επομένως ο δ δεν έχει πρώτο διαιρέτη, για αυτό $\delta=1$, για αυτό από την (1) παίρνουμε υποχρεωτικά ότι $x-y, 2x+2y+1$ είναι τετράγωνα ακεραίων.

14. Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου n ο αριθμός $2^8 + 2^{11} + 2^n$ είναι τέλει τετράγωνο ακεραίου;

Απάντηση: Έστω $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)
 $2^8(1 + 2^3) + 2^n = k^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^8 + 2^n = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (3 \cdot 2^4)^2 = 2^n - 48^2 = 2^n \Leftrightarrow (k-48)(k+48) = 2^n \Leftrightarrow k-48 = 2^\mu$ και $k+48 = 2^\nu$, με $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\nu > \mu$ και $\nu + \mu = n$.
 Είναι $(k+48) - (k-48) = 2^\nu - 2^\mu \Leftrightarrow 2^\nu - 2^\mu = 96 = 3 \cdot 2^5 \Leftrightarrow 2^\mu(2^{\nu-\mu} - 1) = 2^5 \cdot 3 \Leftrightarrow \mu = 5$ και $\nu - \mu = 2 \Leftrightarrow \mu = 5$ και $\nu = 7$, άρα $n = \nu + \mu = 7 + 5 = 12$.

15. Για ποιες θετικές ακέραιες τιμές του n ο αριθμός $A = 3^{2n} + 3^{2n} + 7$ είναι τετράγωνο ακεραίου;

Απάντηση: Αν $n=1$, τότε $a=19$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου. Αν $n=2$, τότε $a=10^2$. Αν $n \geq 3$, υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος α με $3^{2n} + 3^{2n} + 7 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 > 3^{2n} \Rightarrow \alpha > 3^n \Rightarrow \alpha \geq 3^n + 1$, έτσι $3^{2n} + 3^{2n} + 7 = \alpha^2 \geq (3^n + 1)^2 = 3^{2n} + 2 \cdot 3^n + 1$, άρα $3^{2n} + 7 \geq 2 \cdot 3^n + 1 \Leftrightarrow 3^{2n} + 6 \geq 2 \cdot 3^n$ (1)

Είναι $2 \cdot 3^n = 2(1+2)^n = 2 \left(1 + n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^2 + \dots \right) > 2 + 4n + 4n^2 - 4n + \dots = 2 + 4n^2 = 3n^2 + n^2 + 2 \geq 3n^2 + 3^2 + 2 = 3n^2 + 11 > 3n^2 + 6$, άρα $2 \cdot 3^n > 3n^2 + 6$,

επομένως η (1) είναι άτοπη, για αυτό ο A για $n \geq 3$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

Συμπέρασμα: Ο A είναι τετράγωνο ακεραίου όταν και μόνο όταν $n=2$.

Προτεινόμενα Προβλήματα

16. Για ποιες τιμές του πρώτου αριθμού p ο αριθμός $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ είναι τετράγωνο ακεραίου;

(Αρχιμήδης) (Απάντηση: $p=3$)

17. Για πόσα ζεύγη (x, y) θετικών ακεραίων ο αριθμός $N=23x+92y$ είναι τετράγωνο ακεραίου μικρότερο ή ίσο του 2392; (Απάντηση: 27 ζεύγη)

18. Για ποια $n \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $4^n + 2007$ είναι τετράγωνο ακεραίου;

(Αρχιμήδης) (Απάντηση: δεν υπάρχουν)

19. Αν το άθροισμα 2009 διαδοχικών θετικών ακεραίων είναι τετράγωνο ακεραίου, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μεγαλύτερου από τους 2009 αυτούς ακεραίων. (Απάντηση: 1045)

20. Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακεραίοι, τέτοιοι ώστε ο $2xy$ να διαιρεί τον $x^2 + y^2 - x$, τότε δείξτε ότι ο x είναι τετράγωνο ακεραίου. (B.M.O)

21. Για ποιους θετικούς ακεραίους α $\alpha = n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 6n$ είναι τετράγωνο ακεραίου;

(Αρχιμήδης Μικρών) (Απάντηση: 1)

22. Αν $a > 0 > b > \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε για ποιες ακεραίες τιμές των α, β, γ ο αριθμός

$$N = 2017 - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \gamma^2\alpha,$$

είναι τετράγωνο ακεραίου.

(Αρχιμήδης) (Απάντηση: $\alpha=36, \beta=-12, \gamma=-24$)

23. Έστω ο θετικός ακέραιος $n > 1$ και ο πρώτος p $\text{An } n/p - 1 \text{ και } p/n^3 - 1$, δείξτε ότι ο $4p - 3$ είναι τετράγωνο ακεραίου.

24. Για ποιες θετικές ακέραιες τιμές του n ο αριθμός $\sqrt{n(n+182)}$ είναι ρητός;

(Ευκλείδης) (Απάντηση: 504, 4050)

25. Δείξτε ότι οι αριθμοί $x^2 + y + 2$ και $y^2 + 4x$ δεν είναι συγχρόνως τετράγωνα ακεραίων για τις ίδιες ακέραιες και θετικές τιμές των x, y .

Βιβλιογραφία

- Adler A., Coury J.B., The theory of numbers, James and Bartlett publishers, Inc., London, 1995.
- Andrescu T., Andrica D., Number Theory (Structures, Examples and Problems), Birkhäuser, Boston, 2009.
- Andrescu T., Andrica D., Feng Z. 104 Number Theory Problems Birkhäuser, Boston, 2007.
- Andrews G., Number Theory, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1971.
- Βλάχος Π., Ράπτος Ε., Παράκκος Π., Θεωρία Αριθμών, Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2000.
- Burton D. M., Elementary Number Theory, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1980.
- Καζαντζή Θ., Αριθμοθεωρία, Τυποκοδικτική, Θεσσαλονίκη, 1980.

Τα Ludi Mathematici του Alberti και η Αρχαιοελληνική κληρονομιά

Στο πλαίσιο των εκδηλώσεων της ΕΔΑΒuT (Εταιρεία Διερεύνησης Αρχαίο Ελληνικής και Βυζαντινής Τεχνολογίας), έγινε πρόσφατα στις **21-01-2025** η ομιλία της πρώην καθηγήτριας της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ, κας **Φίλη Χριστίνα**, με θέμα: **Τα Ludi Mathematici του Alberti και η Αρχαιοελληνική κληρονομιά, στο Αθηνάϊκό Μουσείο.**



Ο Leon Battista Alberti (1402-1472) χαρακτηριστική περίπτωση **homo universalis**, βαθύς γνώστης της αρχαιοελληνικής κληρονομιάς, αλλά και της ελληνικής γλώσσας, στην πραγματεία του *Ludi Mathematici* (c.1450 μ.Χ.), αφιερωμένη στον

μαρκήσιο Meliaduso d' Este, παρουσιάζει **πολλές μαθηματικές εφαρμογές** στην Αρχιτεκτονική, στη Μηχανική, στην Τοπογραφία και στη Ναυσιπλοΐα. Η ομιλία είχε επικεντρωθεί σε τρία προβλήματα: **της μέτρησης του χρόνου, της απόστασης**, καθώς και το γνωστό πρόβλημα του **στέμματος του Ιέρωνος**. Προβλήματα, τα οποία φανερά παραπέμπουν στο **υδραυλικό ρολόι** του Κτησιβίου, στο οδόμετρο του Ήρωνος και στην αποκάλυψη της απάτης του χρυσοχόου από τον Αρχιμήδη.

1^η Διεθνής Ολυμπιάδα Τεχνητής Νοημοσύνης

Η πρώτη διεθνής μαθητική Ολυμπιάδα στην Τεχνητή Νοημοσύνη, έγινε φέτος από την Βουλγαρία στις **9 έως 15 Αυγούστου 2024 στο Μπουρκάς**, με 27 ομάδες από περίπου **20** χώρες. Στόχος της Ολυμπιάδας ήταν τα παιδιά να κατανοήσουν πώς **λειτουργεί** η τεχνητή νοημοσύνη. Να λύσουν προβλήματα, να φτιάξουν προγράμματα και συστήματα και να πρέπει να εκπαιδεύσουν τα μοντέλα σε διάφορους τομείς – **μηχανική μάθηση**, επεξεργασία **φυσικής γλώσσας** και **υπολογιστική όραση**. Για την τελευταία, οι μαθητές θα πρέπει να ασχοληθούν με την ανάλυση φωτογραφικού υλικού, μετά την οποία, θα δημιουργήσουν εικόνες με τεχνητή νοημοσύνη, φροντίζοντας να είναι δεοντολογικά ορθές και να ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες. Οι διοργανωτές είχαν λάβει υπόψη ότι τα παιδιά **δεν μελετούν** οπουδήποτε την τεχνητή νοημοσύνη και παρέιχαν σε αυτούς, εκ των προτέρων, ένα δωρεάν διαδικτυακό μάθημα. Ορισμένες εργασίες δόθηκαν ναυρίτερα στους συμμετέχοντες ώστε να μπορέσουν να προετοιμαστούν. Η κριτική επιτροπή στο τέλος, αξιολόγησε και βαθμολόγησε τους διαγωνιζόμενους, που αποτελούνταν από καθηγητές και ειδικούς, από κορυφαία πανεπιστήμια του κόσμου.

Στόχος των διοργανωτών της Ολυμπιάδας ήταν να εξηγήσουν τι κάνει η **τεχνητή νοημοσύνη** και ότι οι άνθρωποι δεν πρέπει να τη **φοβούνται**, αλλά να τη χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή. Διευκρινίστηκε ότι τα **ηθικά ζητήματα** γύρω από την τεχνητή νοημοσύνη δεν θα εξεταστούν φέτος, καθώς η Ολυμπιάδα διοργανώνεται για πρώτη φορά, αλλά στο μέλλον θα ασχοληθούν και με αυτά. Μεταξύ των χωρών που

συμμετείχαν ήταν: ΗΠΑ, Κίνα, Καναδάς, Ρουμανία, Ουγγαρία, Χονγκ - Κονγκ, Πολωνία, Βουλγαρία, Βιετνάμ, Ολλανδία κλπ. Φέτος θα συμμετάσχει και η χώρα μας, στη **2^η Ολυμπιάδα** που θα γίνει στην **Κίνα** από **2-8 Αυγούστου 2025** (μετά από προκριματικό που θα διεξαχθεί στη χώρα μας διαδικτυακά, μέχρι 5 Μαρτίου 2025).

Το 2025 και οι ιδιορρυθμίες των αριθμών

Πολλές φορές οι αριθμοί μας **ξαφνάζουν** με τις **παραξένες** τους και τις εύστοχες συμπεριφορές τους μέσα από την τοποθέτησή τους, στο χώρο των Μαθηματικών. Πολλοί λένε ότι αυτές οι συμπτώσεις έχουν **συμβολική** αξία για την **ισορροπία**, την **συμμετρία** και την **πληρότητα** στις **ανθρώπινες προσπάθειες**, για τη ζωή στον πλανήτη. Στη συγκεκριμένη χρονιά έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- $44^2=1936$, $45^2=2025$, $46^2=2116$,
τέλεια τετράγωνα αριθμών.
- $2025=9^2 \cdot 5^2$ και $2025=40^2+20^2+5$.
- $2025=1^3+2^3+3^3+...+8^3+9^3$
- $2025=(1+2+3+...+8+9)^2$
- $2025:9=225=(15)^2$
- $2025=403+404+405+406+407$
- $2025=(20+25)^2$ και $2025=(27)^2+36^2$
- $2025=(11111101001)_2$
- Το 2025 δίνει άθροισμα $9=2+0+2+5$.
- $\frac{2024^2-1}{2024-1}=2025$.

Το Θεώρημα του Νικομάχου



Όταν αναλύεται Μαθηματικά, το έτος 2025 αποδεικνύει το Θεώρημα του Νικομάχου, του Αρχαίου Έλληνα φιλοσόφου, για τον τέλειους τετράγυνους αριθμούς. Για την ιστορία, η

τελευταία χρονιά που ήταν τέλειο τετράγωνο ήταν το 1936 (44²). Η επόμενη χρονιά με αυτό το χαρακτηριστικό θα είναι το 2116. Ακόμη πιο σπάνιο είναι ότι το 2025 είναι η πρώτη χρονιά που εκπληρώνει πλήρως τη θεωρία του Νικομάχου από το 1296, και δεν θα δούμε άλλη τέτοια χρονιά μέχρι το 3025. Πρόκειται για μια απλή αλλά κομψή θεωρία που αναδεικνύει τη μοναδική σχέση ανάμεσα στους αριθμούς. Το 2025 είναι ένας από τους λίγους αριθμούς που επαληθεύει όλες τις μαθηματικές σχέσεις που περιλαμβάνονται στη θεωρία.

Εκτός από το ότι είναι η πρώτη χρονιά που επαληθεύει το Θεώρημα του Νικομάχου μετά από μια χιλιετία, το 2025 έχει και άλλες μαθηματικές ιδιαιτερότητες. Είναι ένας περιττός αριθμός που μπορεί να διαφευθεί από όλους τους διαιρέτες του. Δηλαδή το 2025, με εννέα διαιρέτες (1, 5, 9, 25, 45, 81, 225, 405, 2025). Επιπλέον, το 45² είναι επίσης αριθμός Kaprekar. Ένας αριθμός **Kaprekar** μπορεί να διαχωριστεί σε δύο μέρη, και το άθροισμά τους να δίνει την τετραγωνική του ρίζα. Στην περίπτωση του 2025, $20+25=45$, επαληθεύοντας αυτή την **ιδιαιτερότητα**.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Ο ΚΥΚΛΟΣ του EULER

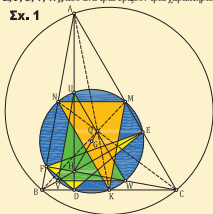
εφάπτεται σε 16 χαρακτηριστικούς κύκλους

Γεώργιος Α. Μιστριώτης

①: Θεωρώντας ένα τυχαίο τρίγωνο XYZ (οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο), χαράσσοντας τα τρία ύψη του δημιουργείται το ορθόκεντρό του Q και πλέον έχουμε την τετράδα των τριγώνων XYZ, QYZ, QZX, QXY. Ένα από αυτά είναι οξυγώνιο και τα άλλα τρία αμβλυγώνια. Αν λαμβάνονται και τα τέσσερα τρίγωνα ισότιμα δεν χάνεται η γενικότητα αν υποθέσουμε ότι το αρχικό τρίγωνο XYZ είναι το οξυγώνιο.

②: Άρα χωρίς χάσιμο της γενικότητας, έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC, με περίκυκλο $p(O, R)$, K, M, N τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB, αντίστοιχα, D, E, F τα ίχνη των υψών AD, BE, CF, που διέρχονται από το H ορθόκεντρο του τριγώνου ABC. Τέλος, έστω U, V, W τα μέσα των τριών ευθυγράμμων τμημάτων AH, BH, CH, που ενώνουν το ορθόκεντρο H με τις κορυφές του τριγώνου. Ήτοι, έχουμε το σύνολο τριών τριάδων χαρακτηριστικών σημείων του τριγώνου ABC, $S = \{K, M, N, D, E, F, U, V, W\}$, που ανά τρία ορίζουν τρία χαρακτηριστικά τρίγωνα:

Σχ. 1



Ορθικό τρίγωνο DEF του ABC. (βλ. Σχ. 1)

- **Μεσοτρίγωνο KMN** του ABC. Ο περίκυκλος $e(G, R_e)$ του μεσοτρίγωνου λέγεται “κύκλος Euler του τριγώνου ABC” και είναι το αντικείμενο αυτού του άρθρου. Το τρίγωνο KMN έχει πλευρές $KM = \frac{1}{2}AB$, $MN = \frac{1}{2}BC$, $NK = \frac{1}{2}AC$, παράλληλες προς τις αντίστοιχες πλευρές του τριγώνου ABC και ίσες με το μισό τους με άλλα λόγια, είναι **αντίρροπα ομόθετο** του ABC με κέντρο ομοθεσίας το Κέντρο Βάρους Q του τριγώνου ABC και λόγο ομοθεσίας $\lambda = \frac{QK}{QA} = \frac{QM}{QB} = \frac{QN}{QC} = \frac{1}{2}$, άρα $R_e = \frac{1}{2}R$. (βλ. Σχ. 1).

- **Μεσορθικό τρίγωνο UVW** (βλ. Σχ. 1), ονομασία που προτείνεται σε αυτό το άρθρο. Στο τρίγωνο UVW, όπως και στο μεσοτρίγωνο, έχουμε πλευρές παράλληλες προς τις αντίστοιχες πλευρές του τριγώνου ABC και ίσες με το μισό τους $UV = \frac{1}{2}AB$, $VW = \frac{1}{2}BC$, $UW = \frac{1}{2}AC$

και παρόμοια, είναι ομόθετο του ABC, αλλά **ομόρροπα**, με κέντρο ομοθεσίας το Ορθόκεντρο H τριγώνου ABC και λόγο ομοθεσίας $\lambda = \frac{HU}{HA} = \frac{HV}{HB} = \frac{HW}{HC} = \frac{1}{2}$.

③: Παρατηρούμε ότι το οξυγώνιο τρίγωνο ABC υποδιαιρείται σε τρία αμβλυγώνια τρίγωνα HBC, HCA και HAB. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά σημεία αυτών των τεσσάρων τριγώνων ABC, HBC, HCA και HAB, που το σύνολό τους είναι S το ίδιο και για τα τέσσερα τρίγωνα.

④: Τα ίχνη των υψών είναι κοινά και για τα τέσσερα τρίγωνα. Ήτοι, και τα τέσσερα τρίγωνα έχουν κοινό ορθικό τρίγωνο DEF. Εκτός των ιχνών D, E, F των υψών, τα άλλα έξι σημεία K, M, N, U, V, W είναι μεν κοινά και στα τέσσερα τρίγωνα, αλλά ρχεται το καθένα διαφορετική ιδιότητα από τρίγωνο σε τρίγωνο. Το ίδιο σημείο είναι κορυφή άλλοτε του μεσοτρίγωνου και άλλοτε του μεσορθικού.

⑤: Τελικά, αυτό που είναι σημαντικό και κρατάμε είναι ότι: Όλα και τα τέσσερα τρίγωνα ABC, HBC, HCA, HAB έχουν κοινό σύνολο S τριών τριάδων χαρακτηριστικών σημείων.

Τρίγωνο	Ορθόκεντρο	Κορυφές Χαρακτηριστικών τριγώνων		
		Ορθικού	Μεσοτρίγωνου	Μεσορθικού
ABC	H	D, E, F	K, M, N	U, V, W
HBC	A	D, F, E	V, K, W	U, N, M
HCA	B	E, D, F	W, M, U	V, K, N
HAB	C	F, E, D	U, N, V	W, M, K

⑥: Δύο σπουδαίοι Μαθηματικοί, **Leonhard Euler** (1707–1783) και **Karl W. Feuerbach** (1800–1834) μας κληροδότησαν δύο, κυριολεκτικά καταπληκτικά, θεωρήματα, που συσχετίζονται και φέρουν τα επώνυμά τους. Το άρθρο καταλήγει με την απόδειξη αυτών των θεωρημάτων

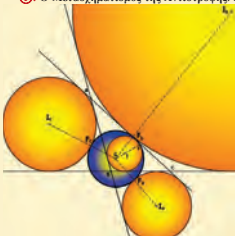
⑦: Το θεώρημα “Κύκλου των εννέα σημείων του Euler” αποδεικνύει ότι ο κύκλος Euler ενός τριγώνου (εξ ορισμού, ο περίκυκλος του μεσοτρι-γώνου) διέρχεται από τα εννέα σημεία του συνόλου S. (Βλ. σχ. 1).

⑧: Το θεώρημα **Feuerbach** αποδεικνύει ότι στον κύκλο του Euler ενός τριγώνου ABC, εφάπτονται ο **εγγεγραμμένος κύκλος** (εσωτερικά) και επίσης, οι τρεις **παρεγγεγραμμένοι κύκλοι** (εξωτερικά) του τριγώνου ABC. Η απόδειξη του θεωρήματος εν γένει είναι στριwnή και μακροσκελής. Όμως στο βιβλίο “Geometry Revisited”, 5ο κεφάλαιο των Coxeter–Greitzer, δίνεται μία σχετικά σύντομη, έξυπνη, κομψή, εποπτική, πειστική αλλά και καθαρά γεωμετρική απόδειξη, με χρήση του μετασχηματισμού της αντιστροφής. Οι συγγραφείς, τονίζοντας την εκπληκτική χρησιμότητα της αντιστροφής, αρχίζουν το 5ο κεφάλαιο με το σουρεαλιστικό ρητό: “Τοποθετούμε στην έρημο σφαιρικό μεταλλικό κλουβί, μπαίνουμε μέσα, κλειδώνουμε και εφαρμόζουμε αντιστροφή. Εμείς είμαστε έξω από το κλουβί και το λιοντάρι μέσα σε αυτό κλειδωμένο !”

⑨: Ο **Μετασχηματισμός της Αντιστροφής**: Στο επίπεδο δίνεται ένα σημείο P και ένα ευθύγραμμο τμήμα k. Ορίζουμε την συνάρτηση $f: R^2 \setminus \{P\} \rightarrow R^2 \setminus \{P\}$ σε όλο το επίπεδο, εξαιρουμένου του P, έ. 'ετσι ώστε για κάθε σημείο $A \in R^2, A \neq P$, το είδωλο $B = f(A)$ είναι σημείο της ημει-θείας PA και $PA \cdot PB = k^2$. Από αυτό τον ορισμό αν $B = f(A) \Leftrightarrow A = f(B)$, ήτοι $f(f(A)) = A$, δηλαδή πρόκειται για αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί) συνάρτηση που απεικονίζει όλο το επίπεδο στον εαυτό του. Συνεχείς καμπύλες έχουν είδωλα συνεχή, αλλά και είδωλα που είναι συνεχή προέρχονται από απεικόνιση συνεχούς γραμμής.

Η συνάρτηση είναι γνωστή σαν **Μετασχηματισμός Αντιστροφής με Κέντρο Αντιστροφής το σημείο P και Δύναμη Αντιστροφής k^2** .

Στην απόφραξη του θεωρήματος **Feuerbach** οι Coxeter–Greitzer χρησιμοποιούν την προφανή ιδιότητα της αντιστροφής ότι **Εφαπτόμενα σχήματα αντιστρέφονται σε εφαπτόμενα είδωλα και αντιστρόφως**.

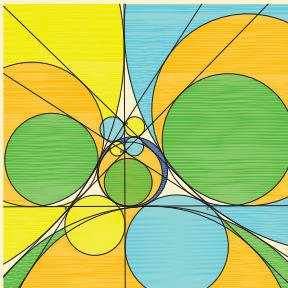


Σχήμα της επιφάνειας του κύκλου Euler με τους τέσσερις κύκλους

⑩: **Πόρισμα**: Είναι ξεκάθαρο ότι τέσσερα τρίγωνα ήτοι το αρχικά δεδομένο ABC αλλά και τα συναφή HBC, HCA και HAB, όπου H το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, έχουν κοινό κύκλο Euler. (Θεώρημα Hamilton).

Ενώ οι 16 σχετικοί κύκλοι, ένας εγγεγραμμένος και τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι για κάθε τρίγωνο, είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους.

⑪: Οπότε και η “επαφή του κύκλου Euler σε 4 κύκλους” αναβαθμίζεται σε “επαφή του κύκλου Euler σε 16 (=4x4) κύκλους”, όπως εύγλωττα δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Θεώρημα Κύκλου Euler των εννέα σημείων

Σε τρίγωνο ABC , έστω K, M, N τα μέσα των πλευρών BC, CA, AB , αντίστοιχα, D, E, F τα ίχνη των υψών AD, BE, CF , αντίστοιχα, με ορθόκεντρο H . Τέλος, έστω U, V, W τα μέσα των τμημάτων AH, BH, CH , που ενώνουν το ορθόκεντρο με κορυφές του τριγώνου.

Να αποδειχθεί ότι ο **κύκλος του Euler**, (περίκυκλος μεσοτρίγωνου KMN), διέρχεται από τα εννέα σημεία $K, M, N, D, E, F, U, V, W$.

Απόδειξη: Το μεσοτρίγωνο KMN είναι όμοιο προς το αρχικό τρίγωνο ABC , με λόγο ομοιότητας $1:2$, αφού κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ίσο με το μισό της, ήτοι $MN = \frac{1}{2}BC, NK = \frac{1}{2}AC, KM = \frac{1}{2}AB$

Θεωρούμε τον περίκυκλο $e(G, R_e = \frac{1}{2}R)$ του μεσοτρίγωνου KMN (βλ. Σχ. 2) που εξ ορισμού είναι ο “κύκλος Euler” με ακτίνα, προφανώς, $R_e = \frac{1}{2}R$, όπου R η ακτίνα του περίκυκλου του τριγώνου ABC .

Τα τρίγωνα AHB και CHB , έχουν κοινή πλευρά την $HB \perp BE \perp CA$. Επίσης, τα τρίγωνα ABC και AHC , έχουν κοινή πλευρά την $CA \perp BE$. Τα σημεία U, N, K, W είναι μέσα των AH, AB, CB, CH , αντίστοιχα, οπότε $UN = \frac{1}{2}BH$ και $KW = \frac{1}{2}BH$, άρα $UN = \frac{1}{2}KW = \frac{1}{2}BH \perp BE \perp CA \parallel NK$, άρα τετράπλευρο $UNKW$ είναι παραλληλόγραμμο ($UN \parallel KW$) και μάλιστα ορθογώνιο αφού $UN \perp NK$.

Παρόμοια, τα τρίγωνα AHC και BHC , έχουν κοινή πλευρά την $HC \perp CF \perp AB$. Επίσης, τα τρίγωνα ABC και ABH , έχουν κοινή πλευρά την $AB \perp CF$. Τα σημεία U, M, K, V είναι μέσα των AH, AC, BC, BH , αντίστοιχα, οπότε $UM = \frac{1}{2}CH$ και $KV = \frac{1}{2}CH$, άρα $UM = \frac{1}{2}KV = \frac{1}{2}CH \perp CF \perp AB \parallel KM$, οπότε το τετράπλευρο $UMKV$ είναι επίσης ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το τμήμα UK είναι κοινή διαγώνιος των ορθογωνίων $UNKW$ και $UMKV$.

Παρατηρούμε ότι τα τέσσερα σημεία N, W, M, V “βλέπουν” το τμήμα UK με ορθή γωνία. Άρα ο κύκλος με διάμετρο UK διέρχεται από τα έξι σημεία K, M, N, U, V, W και έχει άλλες δύο διαμέτρους. VM και WN που είναι διαγώνιοι των εγγράφων ορθογωνίων $UMKV$ και $UNKW$. Προφανώς, πρόκειται για τον “κύκλος Euler”, αφού εξ ορισμού είναι ο περίκυκλος του μεσοτρίγωνου KMN .

Επειδή AD, BE, CF είναι ύψη του τριγώνου ABC , $\widehat{ADK} = \widehat{UDK} = 1b$, $\widehat{BEM} = \widehat{VEM} = 1b$, $\widehat{CFN} = \widehat{WFN} = 1b$, άρα τα ίχνη D, E, F των υψών AD, BE, CF , αντίστοιχα “βλέπουν” με ορθή γωνία τις διαμέτρους UK, VM, WN του κύκλου Euler, που συνεπάγεται ότι διέρχεται και από αυτά τα σημεία D, E και F . ό.έ.δ.

Θεώρημα Feuerbach:

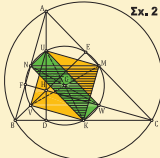
Στον κύκλο του Euler των εννέα σημείων ενός τριγώνου ABC εφάπτονται ο **εγγεγραμμένος κύκλος** (εσωτερικά) και επίσης, οι τρεις **παρεγεγραμμένοι κύκλοι** (εξωτερικά) του τριγώνου ABC .

Απόδειξη: Έστω τρίγωνο ABC , ον δείχνεται στο παρακάτω σχήμα 3, έχει πλευρές $BC=a, CA=b, AB=c$, ημiperίμετρο $\tau = \frac{1}{2}(a+b+c)$, το μεσοτρίγωνό του KMN , που ο περίκυκλός του $e(G, \frac{1}{2}R)$ είναι εξ ορισμού ο κύκλος Euler του τριγώνου ABC με ακτίνα $\frac{1}{2}R$, το μισό της ακτίνας R του περίκυκλου του τριγώνου ABC , επίσης δείχνεται τον εγγεγραμμένο κύκλο του $c(I, \rho)$, με κέντρο I και ακτίνα ρ , να εφάπτεται της πλευράς BC στο X , τον παρεγεγραμμένο κύκλο $c_a(I_a, \rho_a)$, με κέντρο I_a και ακτίνα ρ_a , να εφάπτεται της BC στο X_a και την δεύτερη κοινή (εσωτερική) εφαπτομένη B_1C_1 αυτών των δύο κύκλων $c(I, \rho)$ και $c_a(I_a, \rho_a)$, που εφάπτεται του κύκλου $c(I, \rho)$ στο Y και του $c_a(I_a, \rho_a)$ στο Y_a (βλ. σχήμα 3).

Παρατηρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο XX_a να έχει κέντρο το K μέσο της πλευράς $BC=a$, αφού $BK=CK=\frac{1}{2}a$ και $BX=CX_a=\tau-b$, άρα $BK-BX=KX$ είναι ίσο με $CK-CX_a=KX_a=KX=\frac{1}{2}a-(\tau-b)=\frac{1}{2}(a-b+c)=\frac{(b-c)}{2}$, οπότε έχουμε τον κύκλο $\omega(K, r=\frac{(b-c)}{2})$. Σημειώνουμε ότι KX και KX_a είναι τα εφαπτόμενα (ίσα) τμήματα που άγονται από το K προς τους δύο κύκλους εγγεγραμμένο $c(I, \rho)$ και παρεγεγραμμένο $c_a(I_a, \rho_a)$.

Επίσης, θεωρούμε τα σημεία τομής $S=B_1C_1 \cap BC, M'=B_1C_1 \cap KM, N'=B_1C_1 \cap KN$ στα οποία το B_1C_1 τέμνει τα τμήματα BC, KM και KN , αντίστοιχα. Σχηματίστηκε το τετράπλευρο $MM'N'N$ ενώ η διάκεντρος Π_a , που ενώνει τα κέντρα των κύκλων $c(I, \rho)$ και $c_a(I_a, \rho_a)$ είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος, διέρχεται από τα σημεία A και S και προφανώς είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}=\hat{BAC}$ του τριγώνου ABC στη κορυφή A .

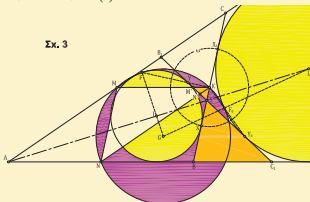
Επομένως, $1^{ου}$ λόγω συμμετρίας $B_1C_1 = BC = a$ και είναι ίσες οι γωνίες $B_1C_1A = B_1CA = \hat{C}$ και επειδή $KN = \frac{1}{2}AC$ και $MN = \frac{1}{2}BC$ το τετράπλευρο $KNMC$ είναι παραλληλόγραμμο και στο τετράπλευρο



Σχ. 2

$MM'N'N$, η γωνία (εσωτερική) $N'NM=K\widehat{NM}=\widehat{C}$ είναι ίση με $\widehat{C}=\widehat{B_1CA}=B_1\widehat{C_1B}=M'\widehat{C_1B}=K\widehat{M'C_1}=K\widehat{M'N'}$ (λόγω $KM=\frac{1}{2}AB$), εξωτερική γωνία $K\widehat{M'N'}$ του τετράπλευρου, άρα το τετράπλευρο $MM'N'N$ είναι εγγράψιμο, οπότε $KM.KM'=KN.KN'$ (1)

Σκ. 3



Λόγω του θεωρήματος “Διχοτόμουν Τριγώνου” η AS διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}=\widehat{BAC}$ του τριγώνου ABC υποδιαιρεί την πλευρά $BC=a$ στα τμήματα BS και SC ανάλογα των πλευρών $AB=c$ και $AC=b$, άρα $\frac{BS}{c}=\frac{SC}{b}=\frac{BC}{b+c}=\frac{a}{b+c}$, επομένως, πλευρές του τριγώνου SBC_1 : $SB=\frac{ac}{b+c}$, $SC_1=SC=\frac{ab}{b+c}$, ενώ $BC_1=AC_1-AB=b-c$. Επίσης, ευθύγραμμο τμήμα $SK=BK-SB=\frac{a}{2}-\frac{ac}{b+c}=\frac{ab+ac-2ac}{2(b+c)}=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}$. Τέλος, επειδή $KM=\frac{1}{2}AB$ άρα $KM' \parallel BC_1$ και τα τρίγωνα SBC_1 και SKM' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{SK}{SB}=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}=\frac{ac}{b+c}=\frac{b-c}{2c}$ οπότε πλευρά KM' του τριγώνου SKM' : $KM'=\lambda.BC_1=\lambda(b-c)=\frac{(b-c)^2}{2c}$.

Οπότε, αφού $KM=\frac{AB}{2}=\frac{c}{2}$ η σχέση (1) γίνεται: $KN.KN'=KM.KM'=\frac{c}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2c}=\frac{(b-c)^2}{4}=r^2$ (2)

Όπου $r=KX=KX_s=\frac{1}{2}XX_s=\frac{b-c}{2}$ είναι η ακτίνα του κύκλου ω . Προφανώς, τα δύο σημεία M' και N' είναι είδωλα μετασχηματισμού αντιστροφής $f:R^2\setminus\{K\} \rightarrow R^2\setminus\{K\}$ των σημείων M και N με κέντρο αντιστροφής το κέντρο K του κύκλου $\omega(K, r=\frac{b-c}{2})$, που είναι και μέσο της πλευράς BC του τριγώνου ABC και δύναμη αντιστροφής το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου ω $r^2=\frac{(b-c)^2}{4}$.

Με τον ίδιο μετασχηματισμό ο εγγεγραμμένος κύκλος $c(I, \rho)$ αντιστρέφεται πάνω στον εαυτό του, αφού για κάθε σημείο $U \in c(I, \rho)$ η ευθεία KU τέμνει τον κύκλο $c(I, \rho)$ σε δεύτερο σημείο $V \in c(I, \rho)$, τέτοιο ώστε $KU.KV=KX^2=r^2=\frac{(b-c)^2}{4}$. Άρα $V=f(U) \in c(I, \rho)$ πράγματι ο εγγεγραμμένος κύκλος $c(I, \rho)$ αντιστρέφεται στον εαυτό του, ήτοι, $f(c(I, \rho)) \equiv c(I, \rho)$. Για πανομοιότυπο λόγο $f(c_s(I_s, \rho_s)) \equiv c_s(I_s, \rho_s)$ και ο παρεγγεγραμμένος κύκλος $c_s(I_s, \rho_s)$ αντιστρέφεται στον εαυτό του.

Τέλος, ο κύκλος Euler $e(G, \frac{1}{2}R)$ του τριγώνου ABC , που είναι ο περίκυκλος του μεσοτριγώνου KMN , διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής K , άρα το είδωλο $f(e)$ αντιστροφής είναι μία ευθεία γραμμή, που δύο σημεία της αρκούν να την ορίσουν και αυτά είναι τα $M'=f(M) \in B_1C_1$ και $N'=f(N) \in B_1C_1$. Συνεπώς, B_1C_1 είναι η ευθεία $f(e)$ είδωλο του κύκλου Euler που είναι κοινή εφαπτόμενη των ειδώλων $f(c(I, \rho)) \equiv c(I, \rho)$ και $f(c_s(I_s, \rho_s)) \equiv c_s(I_s, \rho_s)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη με πρόσθετη ενισχυτική ιδιότητα $f(f(x))=x$, $\forall x \in R^2\setminus\{K\}$, “εφαπτόμενες συνεχείς καμπύλες έχουν εφαπτόμενα είδωλα αντιστροφής αλλά και αντιστροφής”. Επομένως, και το πρωταρχικό στοιχείο $e(G, \frac{1}{2}R)$ κύκλος Euler είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενος των $c(I, \rho)$ στο σημείο Feuerbach F και $c_s(I_s, \rho_s)$ στο σημείο Feuerbach F_s . Προφανώς $f(F)=F_s$ και $f(F_s)=F$. (βλ. σχήμα 3).

Για πανομοιότυπους λόγους ο κύκλος Euler εφάπτεται ταυτόχρονα στα ζευγάρια κύκλων $\{c(I, \rho), c_s(I_s, \rho_s)\}$ και $\{c(I, \rho), c_s(I_s, \rho_c)\}$, ήτοι εφάπτεται και στους τέσσερις κύκλους $c(I, \rho)$, $c_s(I_s, \rho_s)$, $c_s(I_s, \rho_b)$ και $c_s(I_s, \rho_c)$. ό.έ.δ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] H. S.M. Coxeter & S.L. Greitzer:: Geometry Revisited, 1967 Mathematical Association of America
- [2] Wikipedia: Johnson Circles.
- [3] Website: Johnson theorem, Wolfram MathWorld



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

ΓΡΙΦΟΙ

Τα άλογα:

Στον Ιππόδρομο περιμετρικά από τον στίβο είναι οι στάβλοι των αλόγων. Στους στάβλους κάθε πλευράς είναι συνολικά 10 άλογα όπως φαίνεται στην εικόνα (κάθε στάβλος χωράει περισσότερα από δύο άλογα). Την επόμενη μέρα ήρθαν 4 άλογα ακόμα, μπορείτε να τα βάλετε στους στάβλους ώστε πάλι σε κάθε πλευρά να είναι πάλι 10 άλογα;



Οι σοκολάτες: Ένας περπιτεράς πουλούσε σοκολάτες των 3€, 4€ και 5€. Ο περπιτεράς, που του αρέσουν τα Μαθηματικά, διαπίστωσε ότι οι 3 αριθμοί για τις ποσότητες στα τρία είδη σοκολάτας είναι πρώτοι. Αλλά και ο συνολικός αριθμός τους είναι επίσης πρώτος αριθμός με άθροισμα ψηφίων 11. Όταν πούλησε όλες τις σοκολάτες εισέπραξε 100€. Πόσες συνολικά σοκολάτες είχε; Πόσες από κάθε είδος;

Το χαρτζιλίκι: Ο πατέρας της Μαρίας, μαθήτριας της Β' Λυκείου, για να διαπιστώσει αν η κόρη του είναι καλή στα Μαθηματικά της είπε: «Κάθε μέρα θα σου δίνω χαρτζιλίκι 10 Ευρώ όλο το μήνα και εσύ θα μου επιστρέφεις μόνο για 15 ημέρες την 1^η μέρα 1 λεπτό, τη 2^η μέρα 2 λεπτά, την 3^η μέρα 4 λεπτά και κάθε μέρα διπλάσια λεπτά». Τι λέτε πρέπει να δεχθεί



η Μαρία ή όχι, αυτή την προσφορά;

Τα πετράδια: Έχουμε 33 πετράδια με βάρος το πρώτο 1gr, το δεύτερο 2gr, το τρίτο 3gr, κοκ. Θέλουμε να τα μοιράσουμε σε τρία παιδιά αλλά το καθένα να πάρει το ίδιο βάρος. Μπορεί να γίνει;



Απαντήσεις στους γρίφους του τεύχους 134

Οι μαθητές: Οι μαθητές γράφουν διαγώνισμα στα Μαθηματικά και ψάχνουν για την λύση στο πρόβλημα.

Μάντεψε την ηλικία μιας κοπέλας: Ο αριθμός που σας ανακοίνωσε, είναι η διαφορά των ηλικιών σας, αν εσείς είστε μικρότερος π.χ. 30 ετών και η φίλη σας μεγαλύτερη, της δίνετε τον αριθμό $99-30=69$. Αν είναι π.χ. 33 ετών θα έχει άθροισμα $69+33=102$ και θα σας πει 3 ($1+2=3$) άρα είναι 3 χρόνια μεγαλύτερή σας. Αν εσείς είστε μεγαλύτερος και αυτή είναι π.χ. 27 ετών τότε το άθροισμα που θα βρει θα είναι αριθμός 2ψήφιος ($69+27=96$), τότε πείτε να προσθέσει όποιον αριθμό θέλει για να γίνει μεγαλύτερος του 100 στη συνέχεια να σας πει και τον αριθμό που πρόσθεσε. Αν π.χ. πρόσθεσε 7 θα έχει $96+7=103$ θα σας πει 4 ($1+3=4$) αλλά και 7. Τώρα η ηλικία της είναι $30+4-7=27$ ετών.

Το προβλήματα των κρουνών: Έστω X τα λίτρα που χωράει η δεξαμενή. Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε: Α κρουνός: Ρίχνει X λίτρα σε 1 ημέρα. Β κρουνός: Ρίχνει X λίτρα σε 2 μέρες. Γ κρουνός: Ρίχνει X λίτρα σε 3 μέρες και ο Δ κρουνός: Ρίχνει X λίτρα σε 4 μέρες. Οπότε σε μία μέρα ο κάθε κρουνός ρίχνει X, $X/2$, $X/3$, $X/4$ λίτρα αντίστοιχα. Επομένως όλοι μαζί μέσα σε μία μέρα ρίχνουν $X + X/2 + X/3 + X/4 = 25X/12$ λίτρα. Άρα θα γεμίσουν τη δεξαμενή σε $12/25$ της ημέρας (11ώρες, 31' και 12'').

Με ένα ζώγισμα: Τα πέντε είδη είναι τα Α, Β, Γ, Δ και Ε. Από το Α είδος παίρνουμε 1 τεμάχιο, από το Β είδος παίρνουμε 10 τεμάχια, από το Γ 100, από το Δ 1000 και από το Ε 10.000. Τα βάζουμε όλα στη ζυγαριά και βλέπουμε την ένδειξη του βάρους. Αν π.χ. είναι 25127 γραμμάρια τότε κάθε τεμάχιο από το

Α είδος ζυγίζει 7 γραμμάρια, από το Β ζυγίζει 2 γραμμάρια, από το Γ ζυγίζει 1 γραμμάριο, από το Δ ζυγίζει 5 γραμμάρια, και από το Ε ζυγίζει 2 γραμμάρια.

Οι φίλοι: Ως ζευγάρι γνώρισαν $15+15-20=10$ φίλους.

Το λάδι: Α) Θα γεμίσει το δοχείο 3 λίτρα και θα το ρίξει στο 5 λίτρα, θα το γεμίσει άλλη μια φορά θα απογεμίσει τα 5 λίτρα και στο δοχείο 3 λίτρα θα περισσέψει ένα λίτρο.

Β) Για να πάρει ένα λίτρο λάδι θα πάρους περίπου 911 γραμμάρια που είναι το ειδικό βάρος του.

Η ανακύκλωση: Την πρώτη μέρα αγόρασε 4 την 5^η μέρα επέστρεψε τις φιάλες, πήρε μια γεμάτη δωρεάν και αγόρασε ακόμα τρεις. Το ίδιο έκανε την 9^η, 13^η και 17^η ημέρα. Την 21^η επέστρεψε τις άδειες και πήρε ένα ακόμα δώρο. Άρα συνολικά αγόρασε $4+3+3+3+3=16$.

Τα φρούτα: Χωρίς να δούμε το περιεχόμενο παίρνουμε από το κιβώτιο που γράφει «ΑΧΛΑΔΙΑ ΚΑΙ ΜΗΛΑ» ένα, αν είναι μήλο, αφού όλες οι επιγραφές είναι λάθος, σε αυτό το κιβώτιο θα βάλουμε την επιγραφή «ΜΗΛΑ» άρα σε αυτό που λέει ΜΗΛΑ θα βάλουμε την επιγραφή «ΑΧΛΑΔΙΑ» και σε αυτό που λέει ΑΧΛΑΔΙΑ θα βάλουμε «ΑΧΛΑΔΙΑ ΚΑΙ ΜΗΛΑ».

Το κόσμημα: Α) Χωρίζουμε τα δακτυλίδια σε τρεις τριάδες και βάζουμε τις δύο στους δίσκους της ζυγαριάς. Αν γέρνει π.χ. δεξιά τότε το ελαφρύ δακτυλίδι είναι στην αριστερή τριάδα. Αν ισορροπεί τότε είναι στην τριάδα που δεν βάλουμε στην ζυγαριά. Β) Παίρνουμε τώρα την τριάδα με το ελαφρύ δακτυλίδι, κρατάμε το ένα και βάζουμε τα άλλα στους δίσκους της ζυγαριάς αν ισορροπεί αυτό που κρατήσαμε είναι το ελαφρύ, αν γέρνει π.χ. αριστερά τότε στον άλλο δίσκο είναι το ελαφρύ.

Ο αριθμός: Η λύση είναι ο αριθμός $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$ που είναι ο αριθμός της «χρυσής τομής».

Ο ϕ είναι παράξενος αριθμός διότι $1+\frac{1}{\phi} = \phi$ άρα $\phi^2 = \phi + 1$ και $\phi^2 \cdot \phi = \phi^2 + \phi$.

Η δασκάλα: Α) Η δασκάλα γεννήθηκε το 1980 είναι 45 ετών $45^2=2025$. Τα έτη μετά το 2000 κρύβουν την ηλικία της Είναι: 2000 ήταν $20+00=20$ ετών, το 2001 ήταν $20+01=21$ ήταν 21 ετών, το 2025 είναι $20+25=45$ ετών.

Β) Ο Πέτρος είναι 11 ετών διότι $1111+2025=3136=56^2$, ο πατέρας του είναι 56 ετών και

Γ) Η Δήμητρα παρατήρησε $45+11=56$. Αναφέρονται στο έτος 2025.

«Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν», η στήλη που για πολλά χρόνια φιλοξενούμε στο περιοδικό, τώρα και σε βιβλίο. Η ΕΜΕ προχώρησε στην έκδοση ενός καταπληκτικού βιβλίου με τον τίτλο: «Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν». Το βιβλίο προλαγίζει ο διάσημος σε διεθνές επίπεδο (Βραβείο Shaw) καθηγητής κ. Δημήτρης Χριστοδούλου. Σχετικά αποσπάσματα από τον πρόλογο: «...Από την αρχαιότητα, οι μαθηματικοί γρίφοι έχουν προκαλέσει την περιέργεια και τη φαντασία των ανθρώπων, αποτελώντας μια γέφυρα μεταξύ της αναζήτησης γνώσης και της διασκέδασης. Η μαγεία των Μαθηματικών δεν είναι μόνο στην ικανότητα να λύσουμε προβλήματα, αλλά και στην δύναμη να ανακαλύπτουμε νέες ιδέες και να επεκτείνουμε τα όρια της γνώσης μας. Οι γρίφοι και τα πνευματικά παιχνίδια, αποτελούν έναν εξαιρετικό τρόπο για να ενθαρρύνουμε την κριτική σκέψη και την μαθηματική προσέγγιση, τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην καθημερινή ζωή.». Αυτά τα προβλήματα – γρίφοι εντάσσονται στη σύγχρονη παιδαγωγική, κάνουν την εμφάνισή τους και στα σχολικά προγράμματα σε όλο τον κόσμο, καθώς και σε διαγωνισμούς. Επίσης βοηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία γιατί έχουν τη δύναμη να τραβούν το ενδιαφέρον των μαθητών και αναπτύσσουν θετικά τη φαντασία τους που μέσω της περιέργειας τους βάζουν σε δημιουργική απασχόληση με ευχάριστο τρόπο. Είναι μια ευχάριστη και συναρπαστική εκπαιδευτική εμπειρία για μικρούς και μεγάλους. Τα Μαθηματικά, γνωστά και ως η γλώσσα του σύμπαντος, έχουν τη δύναμη να μας μεταφέρουν, σε έναν κόσμο όπου η λογική και η φαντασία συναντιούνται. Οι αρχαίοι Έλληνες, όπως ο Διόφαντος, ο Ζήνων και ο Αρχιμήδης, ανακάλυψαν την ομορφιά που κρύβεται πίσω από κάθε θεώρημα και απόδειξη. Μέσα από τα Διασκεδαστικά Μαθηματικά, η απλότητα και η ευφυΐα των μαθηματικών προβλημάτων γίνονται προσίτα σε όλους, αποκλύπτοντας πως η μαθηματική σκέψη δεν είναι μόνο για τους ειδικούς, αλλά μπορεί να είναι μια πηγή χαράς και έμπνευσης για τον καθένα.





αφορμές ... και στιγμιότυπα



Εκδηλώσεις και Βραβεύσεις της ΕΜΕ

Τη χρονιά που πέρασε έγιναν **πολλές** εκδηλώσεις* και αρκετές **δραστηριότητες** της ΕΜΕ σε όλη την Ελλάδα. Έγιναν σε διάφορες πόλεις, στα αστικά κέντρα μέχρι και σε μικρές επαρχιακές πόλεις και νησιά. Οι βραβεύσεις αυτές ήταν για τους Πανελλήνιους και τους διεθνείς διαγωνισμούς. Υπήρχε μεγάλη συγκέντρωση μαθητών, γονιών και εκπαιδευτικών, με παράλληλες δραστηριότητες Μαθηματικών, μέσα στα εκπαιδευτικά ιδρύματα της χώρας. Χαρακτηριστικό ήταν ότι υπήρχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον και χαρά από όλους τους φορείς της κάθε πόλης. Έβλεπες παντού **ευχάριστη διάθεση**, συγκίνηση και ελπίδα, για **ένα καλύτερο αύριο**, για **τους νέους** και το κοινωνικό σύνολο της χώρας μας. Με νέους που συμμετείχαν και διακρίθηκαν έχοντας φιλοδοξίες και όνειρα για τα **Μαθηματικά** και την εκπαίδευση. Η ΕΜΕ στα **108 χρόνια** της ιστορίας της, στέκεται αρωγός δίπλα τους και βοηθάει την κάθε προσπάθεια, με όλους τους τρόπους.

* Συγκινητικό της **συμμετοχής** ήταν ότι για φέτος στο διαγωνισμό «Ο Θαλής» πήραν μέρος **28.000** περίπου παιδιά **μέσα** στα σχολεία (όπου και προκρίθηκαν για τον Αρχιμήδη 1000 περίπου παιδιά). Με εξεταστικά κέντρα **1805** σχολεία, αριθμός **ρεκόρ**, αν σκεφτούμε για τις πανελλαδικές εξετάσεις από το Υπουργείο Παιδείας είναι πολύ λιγότερα. Μια ακόμα **επιτυχία** της ΕΜΕ για το **τρόπο οργάνωσης** και διεξαγωγής, ενός τέτοιου μεγάλου και δύσκολου εγχειρήματος και στην **αξιοπιστία** και στο **αποτέλεσμα**.



Βραβεία Θετικών Επιστημών 2024 της Ακαδημίας Αθηνών



Την Πέμπτη, **19 Δεκεμβρίου 2024**, πραγματοποιήθηκε η Πανηγυρική Συνεδρία της Ακαδημίας Αθηνών για την απονομή των βραβείων του 2024.

Ο Πρόεδρος της Ακαδημίας, κ. **Σταμάτιος Κριμζής**, εκφώνησε ομιλία με θέμα: «Αντιπαράθεση θεωρίας και παρατηρήσεων: Η περίπτωση του σχήματος της Ηλίοσφαιρας». Ο Γενικός Γραμματέας, κ. **Χρήστος Ζερεφός**, ανέγνωσε την Έκθεση με θέμα το έργο της Ακαδημίας Αθηνών **για το έτος 2024**. Για τα βραβεία Θετικών επιστημών είχαμε:

- Βραβείο εις μνήμην Ακαδημαϊκού **Ιωάννου Ν. Ξανθάκη**, με χρηματικό έπαθλο **1.500** ευρώ, στην κα Στέλλα Μπουλά και τον κ. Απόστολο Μαστιχιάδη για την εργασία τους με τίτλο: «Διαστελλόμενο μονοζωνικό μοντέλο για τη μελέτη της εκπομπής από ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες τύπου blazar» [*"Expanding one-zone model for blazar emission"*].
- Βραβείο **Νικολάου Κ. Αρτεμιάδη**, αθλοθετούμενο από την σύζυγό του **Ζαφειρία Ν. Αρτεμιάδη**, με χρηματικό έπαθλο **1.500** ευρώ, για την βράβευση πρωτότυπης επιστημονικής εργασίας, στον κ. Νικόλαο Αλικάκο με τίτλο: «Το πρόβλημα του τριπλού κόμβου για την Διανυσματική Allen-Cahn εξίσωση στο επίπεδο χωρίς υποθέσεις συμμετρίας» [*"On the triple junction problem without symmetry hypotheses"*].
- Βραβείο **Επαμεινώνδα Παπαστράτου**, με χρηματικό έπαθλο **1.500** ευρώ, στον κ. Ευθύμιο Σοφό για την εργασία του με τίτλο: «Υπόθεση Schinzel κατά μέσο όρο και Ρητά Σημεία» [*"Schinzel Hypothesis on average and rational points"*].

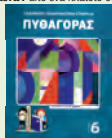
7^{ος} διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 2025

Πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων

Στις 15 Μαρτίου 2025 θα γίνει ο ετήσιος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ.

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ, είναι στην ουσία μία εκπαιδευτική έρευνα μεγάλης κλίμακας. Κεντρικός του στόχος, είναι η ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις δυνατότητες να σκέπτεται ο μαθητής με μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο διαγωνισμός αυτός, ο οποίος θα πραγματοποιηθεί ηλεκτρονικά εξ' αποστάσεως και φέτος, δεν ελέγχει άμεσα ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να σκέφτεται με τα εφόδια που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη σκέψη. Με βάση τις μαθηματικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων διακρίνουμε τις παρακάτω πτυχές της μαθηματικής ικανότητας: **αριθμητική** ικανότητα, **γεωμετρική** ικανότητα, ικανότητα **επαγωγικού συλλογισμού**, **συνδυαστική** ικανότητα, ικανότητα **μετάφρασης δεδομένων** από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. (π.χ. η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα ή από μία εικόνα), **αλγεβρική** ικανότητα, ικανότητα επίλυσης προβλήματος, **αλγοριθμική** ικανότητα. Βασικό χαρακτηριστικό του διαγωνισμού είναι ότι αποτελεί **εργαλείο**



βελτίωσης των μαθηματικών ικανοτήτων, αφενός σε επίπεδο σχολικής τάξης και αφετέρου σε επίπεδο μεμονωμένων μαθητών τονίζοντας τη σύνδεση των μαθηματικών ικανοτήτων με τις κατάλληλες **στρατηγικές** αντιμετώπισής τους. Επίσης χαρακτηριστικό του, είναι αφενός η **μη απογοήτευση** των μαθητών που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά, αλλά ταυτόχρονα και η **υπάρξη πρόκλησης** για μαθητές με **υψηλού** στόχους στα Μαθηματικά. Ακόμη επιτρέπει την εξάσκηση των μαθητών σε θέματα **τύπου PISA**, που είναι ένα πεδίο στο οποίο οι Έλληνες μαθητές υστερούν σε μεγάλο βαθμό. Ακόμη ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αποτελεί τη βάση και τον **συνδυαστικό κρίκο** της υποχρεωτικής εκπαίδευσης με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ (Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, προκριματικός) που καταλήγουν στη συγκρότηση της ελληνικής ομάδας που μετέχει σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, με **αποκορύφωμα** την Παγκόσμια **Ολυμπιάδα των Μαθηματικών**.

Τιμητική εκδήλωση της ΕΜΕ για τον Γεώργιο Δάσιο

Εκδήλωση προς τιμήν του διακεκριμένου **μαθηματικού Γεωργίου Δάσιου**, Ομότιμου Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών και Αντεπιστέλλοντος μέλους της Ακαδημίας Αθηνών, διοργάνωσε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (ΕΜΕ) την Παρασκευή 7 Φεβρουαρίου 2025, στην αίθουσα της ΕΣΗΕΑ.

Στην εκδήλωση παρευρέθηκαν μέλη της Ακαδημίας Αθηνών, πανεπιστημιακοί, καθώς και ο Πρύτανης του ΕΜΠ, Καθηγητής Ιωάννης Χατζηγεωργίου, ο οποίος απηύθυνε σύντομο

χαιρετισμό. Παρόντες ήταν, επίσης, μέλη του Διοικητικού Συμβουλίου και των Επιτροπών της ΕΜΕ, φίλοι, συνεργάτες και η οικογένεια του τιμώμενου καθηγητή. Ο Πρόεδρος της ΕΜΕ, Ομότιμος Καθηγητής του ΕΜΠ **Ανάργυρος Φελλούρης**, άνοιξε την εκδήλωση με χαιρετισμό, ενώ η Ομότιμη Καθηγήτρια



του ΕΜΠ Κυριακή Κυριάκη μίλησε για τη ζωή και το έργο του Γεωργίου Δάσιου, με θέμα: «Γεώργιος Δάσιος: Ο Μαθηματικός - Ο Άνθρωπος - Ο Φίλος».



Σύντομες παρεμβάσεις έγιναν, με αναλυτικό και μεστό λόγο, όπου αναφέρθηκαν, στην πορεία και στην δράση του κ. Γεωργίου Δάσιου, από την Καθηγήτρια του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου **Μαρία Χατζηνικολάου**, τον Καθηγητή του ΕΜΠ **Αντώνη Χαράλαμποπουλο**, τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών **Βασίλη Κωστόπουλο** και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του ίδιου Πανεπιστημίου **Παναγιώτη Βαφέα**.

Η εκδήλωση κορυφώθηκε με την απονομή τιμητικής πλακέτας από τον πρόεδρο της ΕΜΕ κ. Α. Φελλούρη στον Γεώργιο Δάσιο και την ομιλία του με τίτλο «Εξήντα χρόνια επαφής με τα Μαθηματικά», όπου αναφέρθηκε στη μακρά του πορεία στον χώρο των επιστημών και της εκπαίδευσης.



Ο κ. Γ. Δάσιος γεννήθηκε στη Πάτρα το 1946, με καταγωγή από την Ήπειρο. Έλαβε διδακτορικό στα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά** από το Πανεπιστήμιο του Illinois. Το 1975 διορίστηκε Επιμελητής της Πρώτης Έδρας Ανάλυσης στο Πανεπιστήμιο Πατρών. Το 1977 μετατάχθηκε στην Τέταρτη Έδρα Γενικών Μαθηματικών του ΕΜΠ όπου αναγορεύθηκε Εντεταλμένος Υφηγητής. Το 1981 εξελέγη Καθηγητής στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Πατρών από όπου μετακινήθηκε μετά από πρόσκληση στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών το 1989. Το 2013 αναγορεύτηκε Ομότιμος Καθηγητής και συνέχισε την **ακαδημαϊκή του δραστηριότητα** στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Διετέλεσε επισκέπτης επίκουρος καθηγητής στο Lefschetz Center for Dynamical Systems του Πανεπιστημίου Brown των ΗΠΑ το 1978-79 και επισκέπτης καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Tennessee των ΗΠΑ το 1986-87. Κατά το διάστημα 2005-2008 ήταν κάτοχος Έδρας Αριστείας **Marie Curie** στο Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics του Πανεπιστημίου **Cambridge** της Αγγλίας. Η έδρα αυτή ήταν μία από τις 16 συνολικά έδρες αριστείας που προκήρυξε η Ευρωπαϊκή Ένωση το 2005 σε όλον τον κόσμο για όλες τις επιστημονικές περιοχές και ο υποψήφιος ήταν ο μόνος προταθείς επιστήμονας από τον Ελλαδικό χώρο. Από το 1980 ως το 1996 διετέλεσε καθηγητής στην Σχολή Επιμόρφωσης Λειτουργιών Μέσης Εκπαίδευσης του Υπουργείου Παιδείας. Από το 1992 ως σήμερα (με εξαίρεση τα έτη που ήταν στο Cambridge) διετέλεσε αρχικά **εισηγητή των Θεμάτων Μαθηματικών** και στην συνέχεια πρόεδρος της Κεντρικής Επιτροπής Εξετάσεων για την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Από το 2014 είναι πρόεδρος της Ανεξάρτητης Αρχής "Εθνικός Οργανισμός Εξετάσεων". Υπήρξε μέλος της πρώτης Διοικούσας Επιτροπής και πρόεδρος της Επιτροπής Ερευνών του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου.

Ερευνητικό έργο - Συγγραμμάτα: Σύμφωνα με το Web of Science το ερευνητικό έργο του Γεωργίου Δάσιου αποτελείται από **143 εργασίες** δημοσιευμένες σε έγκριτα διεθνή περιοδικά. Γι' αυτές τις εργασίες υπάρχουν 1294 αναφορές και h-factor 18. Έχει ακόμα 109 ανακοινώσεις που δημοσιεύθηκαν σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων. Όλες οι δημοσιεύσεις εντάσσονται στην περιοχή των Αναλυτικών Μεθόδων στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Είναι ειδικός σε **Προβλήματα Συνοριακών Τιμών** σε **Ελλειψοειδή Γεωμετρία** και έχει γράψει την μοναδική στην παγκόσμια βιβλιογραφία μονογραφία με θέμα τις **Ελλειψοειδείς Αρμονικές Συναρτήσεις** και **Εφαρμογές τους**. Το βιβλίο αυτό έχει εκδώσει ο οίκος Cambridge University Press το 2012. Το 2000 ο οίκος Oxford University Press εξέδωσε το επίσης ερευνητικό σύγγραμμα **Low Frequency Scattering** που συνέγραψε με τον καθηγητή Ralph Kleinman και περιέχει το σύνολο των ερευνητικών αποτελεσμάτων αυτής της περιοχής από την δεκαετία του 1870 που θεμελιώθηκε από το Λόρδο Reynolds. Στην ελληνική γλώσσα έχει συγγράψει 10 πανεπιστημιακά συγγράμματα και έχει ακόμα συνεισφέρει 11 κεφάλαια σε ελληνικά και ξενόγλωσσα βιβλία ή μικρότερες εκδόσεις.

Ακαδημαϊκό έργο: Έχει συνεχή πανεπιστημιακή διδακτική παρουσία στην Ελλάδα και το εξωτερικό από το 1970. Έχει επιβλέψει **23** διδακτορικές διατριβές, πολλές διπλωματικές και μεταπτυχιακές εργασίες και έχει συμμετάσχει σε περισσότερες από 110 τριμελείς επιτροπές παρακολούθησης διδακτορικών διατριβών. Οι περισσότεροι από τους διδακτορικούς φοιτητές του είναι σήμερα καθηγητές σε πανεπιστήμια της Ελλάδας και της αλλοδαπής. Ήταν μέλος εξεταστικών επιτροπών διδακτορικών διατριβών στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του **Delaware** των **ΗΠΑ** και στην **Ecole Polytechnique** της Γαλλίας. Από το 2013, ως ομότιμος καθηγητής, η διδακτική του δραστηριότητα έχει περιοριστεί σε μεταπτυχιακά μαθήματα και ερευνητικά σεμινάρια.

Ολυμπιάδες



Νέα τираή βιβλίου: 15€



Νέα τираή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Προσφορές

Διαγωνισμοί



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Βιβλία της ΕΜΕ



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€