ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

131

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

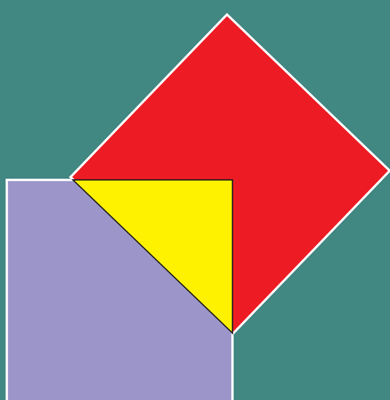
# Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2024 ευρώ 3,5

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Η μαθηματική εύνοια και το ποδόσφαιρο



Μεθόδιος Ανθρακίτης

Θέματα Ευκλείδη 2024

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**Τεύχος 131** - Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2024 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ**


## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



### Γράμμα της Σύνταξης

*Αγαπητοί φίλοι,*
*μαθητές και συνάδελφοι,*

με επιμονή, καλή διάθεση
και αισιόδοξία
να μείνουμε σταθεροί στο όνειρο
και στο ταξίδι της ζωής
μέσα από τη γνώση και τη χαρά
της καθημερινότητας

*Και όπως λέει και ο ακαδημαϊκός*

**"... η ανθρωπότητα ανοίγει**
**δυό κουτιά της Πανδώρας ταυτόχρονα–**
**–την τεχνητή νοημοσύνη και την κλιματική αλλαγή–**
**και η επιβίωση του ανθρωπίνου είδους**
**θα εξαρτήθει από το πως θα χειριστούμε**
**τις δύο αυτές προκλήσεις..."**
**9 Ιανουαρίου 2024**

**Σταμάτης Κριμιζής**
**πρόεδρος Ακαδημίας Αθηνών 2024**
**[Βροντάδος Χίου 1938 – ]**
**καθηγητής Διαστημικής Φυσικής στο J. Hopkins**
**και υπεύθυνος της NASA για αποστολές στο Διάστημα**

**Η επιτροπή σύνταξης**
**του περιοδικού**

**Υ.Γ.** Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
**Α΄Λυκείου** [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
**Β΄Λυκείου** [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
**Γ΄Λυκείου** [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

**Εξώφυλλο:** Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

### Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

| | | |
|---|---|---|
| **Θαλής:** | 4 Νοεμβρίου | 2023 |
| **Ευκλείδης:** | 20 Ιανουαρίου | 2024 |
| **Αρχιμήδης:** | 24 φεβρουαρίου | 2024 |

$$[20+24]^2 + 2[20+24]=2024$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού


**ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

**Εκδότης:**
Φελλούρης Ανάργυρος
**Διευθυντής:**
Τυρλής Ιωάννης

**Επιμέλεια Έκδοσης:**
Ζώτος Ευάγγελος





**Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών**

ΕΛΤΑ Hellenic Post

**Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054**
**ISSN: 1105 - 8005**


**Σχόλιο:** Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε. **Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50**
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα πρωτότυπα κείμενα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών,** αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε


**Εκτύπωση:** printfair **Τηλ.: 2102469799 -2102401695 Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Α. Κρέτσης

# Η αγωνία του τερματοφύλακα

## ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΤΑ πέναλτι

**Νικόλαος Ντόρβας**

Για τους **λάτρεις του ποδοσφαίρου** η ανάδειξη της νικήτριας ομάδας μέσω της **διαδικασίας** των πέναλτι, αποτελεί πάντοτε μία από τις πιο αξιοσημείωτες και συνάμα έντονες στιγμές ενός αγώνα.

Στο παρελθόν, τα ισόπαλα (στην κανονική διάρκεια) παιχνίδια κρίνονταν από τη **ρίψη** ενός δίκαιου νομίσματος ή από ένα **επαναληπτικό** παιχνίδι. Ωστόσο και οι δύο αυτοί τρόποι δεν φαίνεται να αποτέλεσαν τις αποτελεσματικότερες μεθόδους που θα έκριναν τη νικήτρια ομάδα. Η **ρίψη ενός νομίσματος** ήταν μια κάθε άλλο παρά δίκαιη μέθοδος (αφού αναδείκνυε ως νικήτρια όχι την καλύτερη αλλά την **πιο τυχερή ομάδα**), ενώ οι επαναληπτικοί αγώνες χρειάζονταν περισσότερο χρόνο, ταλαιπωρούσαν περισσότερο τους ποδοσφαιριστές και επιβάρυναν με επιπλέον οικονομικά κόστη τους διοργανωτές. Έτσι η διαδικασία των πέναλτι[1] φάνηκε να δίνει λύση στα μέχρι πρότινος προβλήματα, αποτελώντας έναν αξιόπιστο, αποτελεσματικό και «πιο δίκαιο» τρόπο ανάδειξης του νικητή[2].

Η μέχρι πρότινος διαδικασία θέλει τις δύο ομάδες να εκτελούν από **μία φορά, εναλλάξ** και με την ίδια σειρά, αρχίζοντας από εκείνη που έχει επιλεγεί πρώτη μέσω ενός πειράματος τύχης ρίψης ενός δίκαιου νομίσματος[3]. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι δύο ομάδες A και B εκτελούν από 5 πέναλτι (εναλλάξ) σύμφωνα με την ακολουθία **AB | AB | AB | AB | AB** (η συγκεκριμένη σειρά εκτέλεσης ονομάζεται και **κανόνας ABAB**). Σε περίπτωση που οι δύο ομάδες εκτελέσουν ίδιο αριθμό εύστοχων πέναλτι, τότε ακολουθεί η διαδικασία «***Sudden Death***» κατά την οποία οι δύο ομάδες εκτελούν από ένα πέναλτι ακολουθώντας τη σειρά AB μέχρι το αποτέλεσμα να μην είναι ισόπαλο.

Είναι όμως η **συγκεκριμένη διαδικασία** των πέναλτι **η πλέον δίκαιη** για την ανάδειξη του νικητή;

Η διερεύνηση του παραπάνω προβληματισμού δεν θα μπορούσε να αφήσει **ασυγκίνητους μαθηματικούς**, **παιγνιοθεωρητικούς** και οικονομολόγους, οι οποίοι με τη βοήθεια **πιθανοθεωρητικών και στατιστικών** εργαλείων φαίνεται πως κατέληξαν σε ορισμένα πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Σύμφωνα με έρευνα του **Palacios-Huerta** [4] (2010), βασιζόμενη σε δεδομένα από περίπου 1.000 αγώνες ποδοσφαίρου (από Πρωταθλήματα Παγκοσμίων Κυπέλλων και Ευρωπαϊκών, Αμερικανικών και Αφρικανικών Πρωταθλημάτων), όπου ο νικητής κρίθηκε μετά από τη διαδικασία των πέναλτι, προέκυψε ότι **ο νικητής της διαδικασίας «Κορώνα – Γράμματα» όταν επιλέγει να ξεκινήσει πρώτος κερδίζει με ποσοστό της τάξεως του 60,5 % έναντι της ομάδας που ξεκινάει δεύτερη!**

---

[1] Η ιδέα της διαδικασίας των πέναλτι όπως την ξέρουμε σήμερα, ανήκει στον Ισραηλινό **Yosef Dagan** που είδε την Εθνική Ομάδα του Ισραήλ να μένει εκτός των προημιτελικών των Ολυμπιακών Αγώνων το 1968 **εξαιτίας** μιας **κλήρωσης**! Ακολούθησε μια σειρά προτάσεων και συζητήσεων μεταξύ των μελών της Επιτροπής της FIFA, μέχρι που στις 27 Ιουνίου του 1970 η IFAB, δίχως να είναι απόλυτα ικανοποιημένη, υιοθέτησε τον κανόνα.

[2] Η πρώτη φορά που η διαδικασία των πέναλτι ανέδειξε νικήτρια ομάδα ήταν το **1970** με την **Manchester United** να προκρίνεται (έναντι της **Hull City**) στους τελικούς του **Watney Cup**.

[3] Η ομάδα που κερδίζει στο παίγνιο ρίψης νομίσματος (γνωστού και ως «Κορώνα – Γράμματα») επιλέγει για το αν θα ξεκινήσει εκτελώντας το πρώτο ή το δεύτερο πέναλτι.

[4] Ο I.Palacios – Huerta είναι καθηγητής **Οικονομικών και Στρατηγικής** στο London School of Economics και μέλος του συμβουλίου της Ισπανικής ποδοσφαιρικής ομάδας Athletic Club (Bilbao).

Συνεπώς η ομάδα που κερδίζει στη ρίψη νομίσματος, αν επιλέξει να ξεκινήσει πρώτη (γεγονός που συμβαίνει **στο 92%** των περιπτώσεων), τότε ξεκινάει πρώτη σε κάθε γύρο της διαδικασίας μέχρι την ανάδειξη της νικήτριας ομάδας. Επομένως η ομάδα που ξεκινάει πρώτη κερδίζοντας στη ρίψη νομίσματος, **κρατάει το πλεονέκτημα** της εκτέλεσης του πρώτου πέναλτι σε κάθε γύρο της διαδικασίας.

Γιατί όμως η σειρά εκτέλεσης των πέναλτι να επηρεάζει σε τέτοιο βαθμό το τελικό αποτέλεσμα, με την ομάδα που εκτελεί δεύτερη σε κάθε γύρο να έχει λιγότερες πιθανότητες (σε σχέση με εκείνη που εκτελεί πρώτη) να είναι η νικήτρια; Έρευνες από τον **τομέα της Ψυχολογίας** έχουν καταλήξει στην ύπαρξη ενός μηχανισμού **συναισθηματικής φόρτισης** που αναπτύσσεται, όταν σε μια ανταγωνιστική κατάσταση οι συμμετέχοντες παρατηρούν τις κινήσεις και τα αποτελέσματα των αντιπάλων τους. Ο συγκεκριμένος μηχανισμός αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το φαινόμενο ***«first – mover advantage»*** (Lazear & Rosen, 1981) και ερμηνεύει μέχρι ενός σημείου [5]το **ψυχολογικό στρες** της ομάδας που εκτελεί δεύτερη, η οποία πρέπει σε κάθε γύρο να «απαντήσει» κατά τον βέλτιστο τρόπο στο αποτέλεσμα της ομάδας που εκτελεί πρώτη.

Με στόχο τη διαμόρφωση μιας «δικαιότερης» διαδικασίας εκτέλεσης πέναλτι, η IFAB αποφάσισε **το 2017** τη δοκιμή του **κανόνα ΑΒΒΑ** σύμφωνα με τον οποίο η σειρά εκτέλεσης πέναλτι ορίζεται βάσει της ακολουθίας AB | BA | AB | BA | AB (με ομάδα Α να θεωρούμε εκείνη που εκτελεί το πρώτο πέναλτι και Β εκείνης που ακολουθεί). Ο κανόνας ΑΒΒΑ εφαρμόστηκε στα Ευρωπαϊκά Πρωταθλήματα U – 17 και U – 19 (ανδρών και γυναικών) της UEFA, καθώς και στο FA Community Shield[6] με ***πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα*** επί της διαδικασίας του ΑΒΒΑ (όπως φαίνεται στον Πίνακα 1).

| | Κανόνας **ΑΒΑΒ** | Κανόνας **ΑΒΒΑ** |
|---|---|---|
| **1 γύρος** | 0.79 | 0.526 |
| **2 γύροι** | 0.82 | 0.511 |
| **3 γύροι** | 0.77 | 0.519 |
| **4 γύροι** | 0.74 | 0.508 |
| **5 γύροι** | 0.74 | 0.515 |

**Πίνακας 1:** Πιθανότητες επιτυχούς εκτέλεσης για την ομάδα Α που ξεκινάει με το 1$^{ο}$ πέναλτι

Παρόλα αυτά στο **133$^{ο}$** Ετήσιο **Business Meeting** της IFAB εκτιμήθηκε η **μη βιωσιμότητα** και υιοθέτηση του κανόνα ΑΒΒΑ εξαιτίας της **πολυπλοκότητάς**[7] του.

[5] Το ψυχολογικό στρες των αθλητών σε μια ακραία ανταγωνιστική κατάσταση (όπως η διαδικασία των πέναλτι) αποδίδεται και στο φαινόμενο της «**αποστροφής της απώλειας**» (*Loss Aversion*)
Η αποστροφή της απώλειας είναι μια κατάσταση που περιγράφεται από τον κλάδο της Οικονομικής Ψυχολογίας και αφορά την τάση ενός ατόμου να αποδίδει μεγαλύτερη αξία στην αποφυγή των απωλειών παρά στην **επίτευξη πιθανών κερδών**. Ο όρος «αποστροφή απώλειας» εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε ένα έγγραφο του 1979 από τους ψυχολόγους **Daniel Kahneman και Amos Tversky**. Η επακόλουθη έρευνα του Kahneman για τις **γνωστικές διαδικασίες** και την ψυχολογική επιστήμη στις οποίες στηρίζεται η **οικονομική συμπεριφορά**, τον **οδήγησαν** να κερδίσει το **2002** το **Nobel Οικονομικών**.
Στο ακαδημαϊκό τους γράψιμο, οι Kahneman και Tversky εξηγούν πώς ακόμη και **σε κάτι τόσο τυχαίο** όσο η ρίψη ενός νομίσματος, υπάρχει μεγαλύτερη **συναισθηματική** επίδραση στον **φόβο** της απώλειας (και στα σχετικά αρνητικά αποτελέσματα) παρά στα θετικά αποτελέσματα που σχετίζονται με το κέρδος

[6] Στον τελικό του FA Cup Final (2017) η **Arsenal** στέφτηκε νικήτρια απέναντι στην **Chelsea** μετά από μια διαδικασία εκτέλεσης πέναλτι (σύμφωνα με τον **ΑΒΒΑ**)

[7] Μια σημαντική παράμετρος της φάσης των πέναλτι (σύμφωνα με τις απαιτήσεις της IFAB) είναι η **απλότητα της διαδικασίας** έτσι ώστε πέραν της εξασφάλισης δίκαιων κανονισμών, να εξυπηρετείται **η ομαλή ροή** της έντασης του θεάματος. Η πρώτη **απόπειρα ποσοτικοποίησης** της «απλότητας» μιας διαδικασίας έγινε το **2015** από τον Οικονομολόγο Nejat Anbarci (καθηγητή του Durham University της Αυστραλίας). Σύμφωνα με τον Anbarci ένας κανόνας είναι απλός όταν έχει έναν σταθερό μηχανισμό επαναληψιμότητας δύο καταστάσεων. (πχ Στην μία κατάσταση η ομάδα Α μπορεί να εκτελεί πρώτη και στην άλλη, η ομάδα Β να είναι αυτή που θα εκτελεί πρώτη). Οπότε τόσο ο ΑΒΑΒ όσο και ΑΒΒΑ παρουσιάζουν **τον ίδιο βαθμό απλότητας**.

Στα πλαίσια όμως της διερεύνησης λοιπών τρόπων διαμόρφωσης των πέναλτι σε μια δικαιότερη διαδικασία ανάδειξης του νικητή, έχουν προταθεί και αρκετές άλλες μέθοδοι που αναδεικνύουν **με μαθηματικά επιχειρήματα** την υπεροχή τους σε αξιοπιστία έναντι της ΑΒΑΒ.

Η πιο διαδεδομένη εξ αυτών αναφέρεται ως **κανόνας «Catch – up»** και προτάθηκε από τον παιγνιοθεωρητικό **Steven J. Brams** (καθηγητή στο New York University) και τον μαθηματικό **Mehmet S. Ismail** (καθηγητή του King's College στο Λονδίνο).

Σύμφωνα με τον κανόνα του «**Catch – up**» η σειρά εκτέλεσης πέναλτι ανά γύρο προκύπτει με βάση το αποτέλεσμα του προηγούμενου γύρου. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι η ομάδα Α εκτελεί πρώτη σε κάποιον γύρο θεωρείται ότι βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση, οπότε στον επόμενο γύρο θα εκτελέσει πρώτη η ομάδα Β (εκτός και αν στον προηγούμενο γύρο η Α αστόχησε και η Β εκτέλεσε το πέναλτι με επιτυχία). Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τον μηχανισμό του κανόνα «**Catch – up**» ας παρατηρήσουμε τον Πίνακα 2, στον οποίο παρουσιάζεται ένα τυχαίο σενάριο Επιτυχιών (✓) – Αποτυχιών (✗) δύο ομάδων Α και Β και της σειράς εκτέλεσης ανά γύρο, όπως αυτή επιβάλλεται από τον κανόνα «Catch – up».

Γιατί όμως ο παραπάνω τρόπος είναι δίκαιος ή τουλάχιστον δικαιότερος από τον ισχύοντα;

Οι Brams και Ismail απέδειξαν, με σχεδόν στοιχειώδη **μαθηματικά εργαλεία** της Θεωρίας Πιθανοτήτων, ότι η πιθανότητα νίκης τόσο της ομάδα Α, όσο και της ομάδα Β είναι **σχεδόν 50%** ανεξάρτητα με το ποια εκτελεί πρώτη σε κάθε γύρο της διαδικασίας των πέναλτι.

| Αριθμός εκτελέσεων πέναλτι | Ομάδα Α | Ομάδα Β |
|---|---|---|
| $1^o$ | ✓ | |
| $2^o$ | | ✓ |
| $3^o$ | | ✗ |
| $4^o$ | ✗ | |
| $5^o$ | ✓ | |
| $6^o$ | | ✓ |
| $7^o$ | | ✗ |
| $8^o$ | ✓ | |
| $9^o$ | | ✓ |
| $10^o$ | ✗ | |

**Πίνακας 2:** Παράδειγμα Catch – Up Rule

Προκειμένου όμως να υποστηρίξουν και αριθμητικά τη θέση τους, συγκέντρωσαν δεδομένα αποτελεσμάτων αγώνων (**της περιόδου 1970 – 2008**) στους οποίους ο νικητής κρίθηκε από τη διαδικασία των πέναλτι. Κατόπιν υπολόγισαν την πιθανότητα μιας ομάδας να σκοράρει ανάλογα με το αν εκτελεί πρώτη ή δεύτερη σε κάποιον γύρο της διαδικασίας.

Έχοντας αυτά τα δεδομένα στη διάθεσή τους (όπως αυτά παρουσιάζονται στον **Πίνακα 3**) κατάφεραν να εκτιμήσουν κάθε πιθανό αποτέλεσμα μιας ενδεχόμενης διαδικασίας πέναλτι και τελικά να οδηγηθούν στις πιθανότητες της τελικής νίκης ή ήττας μιας ομάδας.

Για πρακτικούς λόγους ας θεωρήσουμε ως ομάδα Α εκείνη που ξεκινάει εκτελώντας πρώτη (μετά τη διαδικασία ρίψης νομίσματος) και ως ομάδα Β εκείνη που εκτελεί δεύτερη.

| Πιθανότητα Επιτυχούς Εκτέλεσης | Γύρος $1^{ος}$ | Γύρος $2^{ος}$ | Γύρος $3^{ος}$ | Γύρος $4^{ος}$ | Γύρος $5^{ος}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ομάδα Α | 0.79 | 0.82 | 0.77 | 0.74 | 0.74 |
| Ομάδα Β | 0.72 | 0.77 | 0.64 | 0.68 | 0.67 |

**Πίνακας 3:** Πιθανότητες επιτυχούς εκτέλεσης (ανά ομάδα) με βάση τον κανόνα **ΑΒΑΒ**

Οι Brams και Ismail χρησιμοποίησαν τα δεδομένα του **Πίνακα 3** με σκοπό να υπολογίσουν τις πιθανότητες η ομάδα Α (και ομοίως τις πιθανότητες της ομάδας Β) να προηγείται ή να είναι ισόπαλη σε επιτυχημένες εκτελέσεις με την ομάδα Β σε κάποιον δεδομένο γύρο της διαδικασίας.

Έχοντας όμως σαν στόχο να αναδείξουν τον κανόνα «Catch – up» ως μια δικαιότερη διαδικασία διάκρισης του νικητή, ξεκίνησαν υπολογίζοντας τις παραπάνω πιθανότητες με βάση τους ισχύοντες κανόνες του ΑΒΑΒ. Ας δούμε **όμως πώς σκέφτηκαν**!

Ενδεικτικά θα υπολογίσουμε (με βάση τον ΑΒΑΒ) την πιθανότητα του ενδεχομένου

**Ε**: «Η ομάδα Α (η οποία εκτελεί πρώτη σε κάθε γύρο) να **προηγείται** της ομάδας Β σε επιτυχείς εκτελέσεις στο τέλος του δεύτερου γύρου της διαδικασίας».

Για τον σκοπό αυτόν θα ορίσουμε τα ενδεχόμενα για τα οποία η ομάδα Α θα προηγείται στο τέλος του δεύτερου γύρου και επιπλέον θα θεωρήσουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες επιτυχών εκτελέσεων σύμφωνα με τη σειρά εκτέλεσης. Έτσι θα έχουμε τα ενδεχόμενα:

**$E_1$**: «Η ομάδα Α σκοράρει και στους δύο γύρους και η ομάδα Β σκοράρει μόνο στον πρώτο γύρο»

**$E_2$**: «Η ομάδα Α σκοράρει και στους δύο γύρους και η ομάδα Β σκοράρει μόνο στον δεύτερο γύρο»

**$E_3$**: «Η ομάδα Α σκοράρει και στους δύο γύρους και η ομάδα Β δεν σκοράρει σε κανέναν από τους δύο γύρους»

**$E_4$**: «Η ομάδα Α σκοράρει μόνο στον πρώτο γύρο και η ομάδα Β δεν σκοράρει σε κανέναν από τους δύο γύρους»

**$E_5$**: «Η ομάδα Α σκοράρει μόνο στον δεύτερο γύρο και η ομάδα Β δεν σκοράρει σε κανέναν από τους δύο γύρους» και τις **πιθανότητες:**

| | |
|---|---|
| **$p_1$** | Η πιθανότητα η ομάδα που εκτελεί πρώτη στον $1^o$ γύρο να σκοράρει |
| **$p_2$** | Η πιθανότητα η ομάδα που εκτελεί πρώτη στον $2^o$ γύρο να σκοράρει |
| **$q_1$** | Η πιθανότητα η ομάδα που εκτελεί δεύτερη στον $1^o$ γύρο να σκοράρει |
| **$q_2$** | Η πιθανότητα η ομάδα που εκτελεί δεύτερη στον $2^o$ γύρο να σκοράρει |

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)+P(E_5)=p_1q_1p_2(1-q_2)+p_1(1-q_1)p_2q_2+p_1(1-q_1)p_2(1-q_2)+$$
$$+p_1(1-q_1)(1-p_2)(1-q_2)+(1-p_1)(1-q_1)p_2(1-q_2).$$

Από τον **Πίνακα 3** όμως έχουμε $p_1=0.79,\ p_2=0.82,\ q_1=0.72,\ q_2=0.77$, άρα $P(E)=0.309$.

Υπολογίζοντας τις αντίστοιχες πιθανότητες των ομάδων Α και Β και για τους υπόλοιπους γύρους προκύπτουν τα παρακάτω:

| | $1^{ος}$ Γύρος | $2^{ος}$ Γύρος | $3^{ος}$ Γύρος | $4^{ος}$ Γύρος | $5^{ος}$ Γύρος |
|---|---|---|---|---|---|
| **Πιθανότητα προβαδίσματος ομάδας Α** | 0.221 | 0.309 | 0.403 | 0.483 | 0.466 |
| **Πιθανότητα προβαδίσματος ομάδας Β** | 0.151 | 0.210 | 0.228 | 0.250 | 0.260 |
| **Πιθανότητα Ισοπαλίας** | 0.628 | 0.481 | 0.369 | 0.312 | 0.274 |

**Πίνακας 4:** Πιθανότητες προβαδίσματος/ισοπαλίας για τις Ομάδες Α & Β στο τέλος κάθε γύρου (Κανονισμός ΑΒΑΒ)

Όπως είναι εύκολο να παρατηρήσουμε, **το πλεονέκτημα της ομάδας** που εκτελεί πρώτη διατηρείται για το σύνολο όλων των γύρων της διαδικασίας. Για παράδειγμα η πιθανότητα η ομάδα Α να προηγείται της Β μετά τον πρώτο γύρο είναι 0.221 έναντι της αντίστοιχης πιθανότητας για την ομάδα Β που είναι 0.151. Ωστόσο η πιθανότητα η ομάδα Α να προηγείται στο τέλος του πέμπτου γύρου είναι 0.466 ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα της ομάδας Β είναι 0.260! Παρατηρούμε λοιπόν ότι παρουσιάζεται μια σημαντική διαφορά **άνω του 20%** μεταξύ των πιθανοτήτων των δύο ομάδων, διαφοράς που όπως αποδεικνύεται μπορεί να αναδείξει ως νικήτρια της διαδικασίας εκείνη που **ξεκινάει να εκτελεί πρώτη.**

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που προηγήθηκε παραπάνω και για τον κανόνα του Catch – up, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας στον οποίο αναγράφονται οι πιθανότητες να προηγηθεί η ομάδα Α ή Β (ή και να υπάρξει ισοπαλία) στο τέλος κάποιου δεδομένου γύρου της διαδικασίας.

| | $1^{ος}$ Γύρος | $2^{ος}$ Γύρος | $3^{ος}$ Γύρος | $4^{ος}$ Γύρος | $5^{ος}$ Γύρος |
|---|---|---|---|---|---|
| **Πιθανότητα προβαδίσματος ομάδας Α** | 0.221 | 0.266 | 0.353 | 0.362 | 0.385 |
| **Πιθανότητα προβαδίσματος ομάδας Β** | 0.151 | 0.241 | 0.270 | 0.310 | 0.326 |
| **Πιθανότητα Ισοπαλίας** | 0.628 | 0.492 | 0.377 | 0.328 | 0.289 |

**Πίνακας 5:** Πιθανότητες προβαδίσματος/ισοπαλίας για τις Ομάδες Α & Β στο τέλος κάθε γύρου (Κανονισμός Catch- Up)

Υπολογίζουμε ενδεικτικά την πιθανότητα η ομάδα Α να έχει προβάδισμα με το τέλος του $2^{ου}$ γύρου (όπως και παραπάνω):

$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)+P(E_5)=p_1q_1(1-p_2)q_2+p_1(1-q_1)p_2q_2+p_1(1-q_1)(1-p_2)q_2$$
$$+p_1(1-q_1)(1-p_2)(1-q_2)+(1-p_1)(1-q_1)(1-p_2)q_2=0.266.$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του **Πίνακα 5** ο κανόνας του «Catch – up» φαίνεται να επιφέρει μια «ισορροπία του τύπου 50 – 50» στις πιθανότητες μιας ομάδας να προηγηθεί έναντι μιας άλλης, ανεξάρτητα με τον αν αυτή ξεκινάει πρώτη ή δεύτερη ανά γύρο. Ενδεικτικά παρατηρούμε ότι η πιθανότητα η ομάδα Α να προηγείται της Β στο τέλος του πέμπτου γύρου είναι 0.385, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για την ομάδα Β **είναι 0.326!**

Ωστόσο υπάρχει και η πιθανότητα με το τέλος του πέμπτου γύρου οι δύο ομάδες να είναι ισόπαλες και να πρέπει να ακολουθήσει η φάση του **sudden death**.

Οι Brams και Ismail φαίνεται να δίνουν με τον κανόνα που προτείνουν και πάλι την πιο δίκαιη λύση, αφού σύμφωνα με τους ισχύοντες κανόνες η ομάδα Α έχει πιθανότητα 64% (ενώ η ομάδα Β μόλις 36%) να είναι η τελική νικήτρια του sudden death, ενώ η αντίστοιχες πιθανότητες με τον κανόνα του «Catch – up» είναι **51%** για την ομάδα Α και **49%** για την ομάδα Β!

Η καθιέρωση της διαδικασίας των πέναλτι έθεσε χωρίς αμφιβολία τα θεμέλια για έναν δικαιότερο τρόπο ανάδειξης της νικήτριας ομάδας μετά από έναν ισόπαλο αγώνα. Το μικρό όμως δείγμα αγώνων κατά τα πρώτα χρόνια εφαρμογής της διαδικασίας των πέναλντι δεν είχε τη δυναμική για να φωτίσει τις υποδόριες **ασυμμετρίες της διαδικασίας**. Οι μελέτες που ακολούθησαν (και συνεχίζονται μέχρι σήμερα) από πλήθος πιθανοθεωρητικών, οικονομολόγων, επιτελείων ομάδων κ.ά εντόπισαν τις «**αστοχίες**» που επιδέχονται λεπτών διορθώσεων. Με τα μαθηματικά μοντέλα των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών** (από τους τομείς της Στατιστικής, των Πιθανοτήτων, της **Θεωρίας Παιγνίων**, της **Θεωρίας Αποφάσεων** κ.ά) επετεύχθη η **ποσοτικοποίηση της «τύχης»** που ενυπάρχει στη διαδικασία (με τους ισχύοντες κανόνες) και ακολούθησε η παράθεση προτάσεων για διορθωτικές παρεμβάσεις επί των κανονισμών. Όσο όμως και αν εστιάσουμε στους μηχανισμούς των μοντέλων που βελτιώνουν τη διαδικασία, τα πέναλτι πάντα θα διατηρούν την «**αίσθηση του αναπά**ντεχου», προσφέροντας στο φίλαθλο κοινό στιγμές έντασης και χαράς!

## Βιβλιογραφικές Αναφορές


Apesteguia J, Palacios-Huerta I. (2010). *Psychological pressure in competitive environments: evidence from a randomized natural experiment.* Am Econ Rev 100(5):2548–2564.

Arrondel L, Duhautois R, Laslier JF. (2019). *Decision under psychological pressure: the shooter's anxiety at the penalty kick.* J Econ Psychol 70:22–35.

Brams SJ, Ismail MS. (2018). *Making the rules of sports fairer.* SIAM Rev 60(1):181–202.

Kendall G, Lenten LJA. (2017). *When sports rules go awry*. Eur J Oper Res 257(2):377–394 .

Palacios-Huerta I. (2012). *Tournaments, fairness and the Prouhet–Thue–Morse sequence.* Econ Inq 50(3):848–849.

Palacios-Huerta I. (2014). *Beautiful game theory: how soccer can help economics.* Princeton University Press, Princeton.

# Μεθόδιος Ανθρακίτης

## [1660 – 1736]

**Γεώργιος Α. Κουσινιώρης**

*Εικ. 1: Ο Μεθόδιος Ανθρακίτης και η υπογραφή του.*

Ο **Μεθόδιος Ανθρακίτης** ήταν κληρικός, θεολόγος, παιδαγωγός και Μαθηματικός. Γεννήθηκε περίπου στα 1660 στο χωριό Καμνιάς ή Καμινιάς **Ζαγορίου** (σημερινό Ανθρακίτη) και σπούδασε **στη Γκιούμειο Σχολή**[1] **των Ιωαννίνων**, όπου και παρακολούθησε τα μαθήματα του σχολάρχη Γεώργιου Σουγδουρή[2]. Διδάχθηκε γραμματική, φυσική και μεταφυσική και το 1697, έχοντας ήδη γίνει ιερομόναχος, πήγε στη Βενετία για να παρακολουθήσει μαθήματα φιλοσοφίας και μαθηματικών. Κατέχει διαπρεπή θέση **στον πρώιμο Νεοελληνικό Διαφωτισμό** και είναι από τους πρώτους που δίδαξε νεότερα Μαθηματικά. Κατά τον Κωνσταντίνο Κούμα[3] «*Ο Μεθόδιος Ανθρακίτης έφερε περί το 1708 από την Ιταλία τας* ***γεωμετρικάς επιστήμας*** *ικανάς να ανάψωσι το φως του Λόγου και να διερεθίσωσιν επί πλέον την έμφυτον του ανθρώπου φιλομάθειαν...*».

Ο Μεθόδιος Ανθρακίτης υπηρετούσε ως εφημέριος στον Ορθόδοξο Ναό του Αγίου Γεωργίου **της Βενετίας**. Το 1708 εγκαταλείπει τη Βενετία κι έρχεται στην Καστοριά ως αναγνωρισμένος ήδη Λόγιος και Θεολόγος προσκεκλημένος από τον Γεώργιο Καστοριώτη ή Καστριώτη[4] για να διδάξει στην Εκκλησιαστική του Σχολή.

Το διδακτικό του έργο αποβλέπει στην πνευματική κατάρτιση των ιερέων και πραγματοποιεί τολμηρές ανατοποθετήσεις στη χριστιανική ηθική συμπεριφορά. Δεν διστάζει **να κρίνει με αυστηρότητα τη συμπεριφορά του κλήρου** και με σκληρή γλώσσα επικρίνει την κατάχρηση του αφορισμού. Για ένα άνθρωπο του πνευματικού αναστήματος του Ανθρακίτη μια εκκλησιαστική σχολή περιορίζει κατά πολύ τον ορίζοντα της διδασκαλίας του. Έτσι δέχεται το 1710 πρόσκληση του Δημητρίου Κυρίτζη να μεταβεί στην Καστοριά για να αναλάβει τη διεύθυνση της σχολής του και το κύριο διδακτικό έργο των μαθηματικών και ιδιαίτερα της φιλοσοφίας. Διδάσκει λογική, μεταφυσική, ηθική, φιλοσοφία κατά τα ευρωπαϊκά πρότυπα, τον **Καρτέσιο** (Descartes[5]) και τα σύγχρονα Μαθηματικά για πρώτη φορά εντός του ελλαδικού χώρου. Συνέβαλλε αποφασιστικά στον νέο προσανατολισμό της ελληνικής παιδείας του 18ου αιώνα. Η ύλη των Μαθηματικών που επεξεργάστηκε και εισήγαγε ο Μεθόδιος ο Ανθρακίτης και οι μαθητές του, παρέμεινε για πολλά χρόνια, **σχεδόν μέχρι τα τέλη του** 19**ου αιώνα**, βασικός κορμός των Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στον ελληνικό χώρο. Ο Ανθρακίτης είναι ο πρώτος που αντικατέστησε την αρχαΐζουσα, ως γλώσσα διδασκαλίας, με τη δημώδη την καθομιλουμένη γλώσσα της εποχής του. Αυτό ήταν ένα επιπλέον σημείο τριβής με τους κύκλους των λογίων του Φαναρίου, που ήταν θερμοί θιασώτες της αρχαΐζουσας. Οι νεωτερικές του ιδέες τον έφεραν σε σύγκρουση με λόγιους της εποχής του και μερίδα των τότε αρτηριοσκληρωτικών εκκλησιαστικών κύκλων. Ο Μακάριος Καλογεράς[6] έγραφε *«(...) ο κύρ Μεθόδιος τρίγωνα και τετράγωνα διδάσκει τους μαθητάς του και την άλλην πολυάσχολον ματαιοπονίαν της Μαθηματικής»*. Κατηγορήθηκε ακόμη και ως αιρετικός. Ως απο-

---

[1] **Σχολή Εμμανουήλ Γκιούμα**: Ήταν από τις πιο φημισμένες σχολές των Ιωαννίνων. Είναι γνωστή επίσης με τις ονομασίες Μπαλαναία Σχολή, Μεγάλη Σχολή και Πρώτη Σχολή των Ιωαννίνων.

[2] **Γεώργιος Σουγδουρής**: (Ιωάννινα 1645/7- 1725). Έλληνας κληρικός, λόγιος, φιλόσοφος και δάσκαλος

[3] **Κωνσταντίνος Κούμας** (Λάρισα, 1777 - Τεργέστη, 1836): Έλληνας διδάσκαλος του Γένους, πρωτεργάτης του νεοελληνικού διαφωτισμού, ιστορικός, φιλόσοφος και μεταφραστής λογοτεχνικών έργων.

[4] **Γεώργιος Καστριώτης** πατριάρχης Ιεροσολύμων.

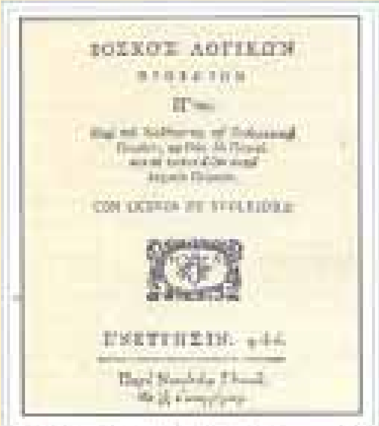
[5] **Καρτέσιος** (1596 – 1650): Εξελληνισμένο όνομα του Rene Descartes. Γάλλος φιλόσοφος, μαθηματικός και φυσικός.

[6] **Μακάριος Καλογεράς** ή Πάτμιος (1688 - 1737): Άγιος της Εκκλησίας. Ιδρυτής της Πατμιάδας Σχολής.

τέλεσμα αυτών των συκοφαντικών φημών, η Σύνοδος του Πατριαρχείου Κωνσταντινουπόλεως διέταξε την απολογία του ενώπιόν της. Εξαιτίας αυτών των εξελίξεων ο Ανθρακίτης εγκαταλείπει την Καστοριά το 1719 για να μεταβεί στη **Σιάτιστα**, όπου πρόκειται να διδάξει για τα επόμενα δύο περίπου χρόνια. Μετά την απολογία του πάρθηκε απόφαση να καούν τα φιλοσοφικά του δοκίμια και επιπλέον τού απαγόρευσαν να διδάσκει προσωρινά. Η ανάκληση της απαγόρευσης της διδασκαλικής του δραστηριότητας πραγματοποιήθηκε το 1725 υπό τον όρον να διδάσκει την φιλοσοφία *«κατά το σύστημα του Κορυδαλλέως*[7]*... μηδεμίαν άλλην παράδοσιν ασυνήθους και ξένης φιλοσοσοφίας τολμήσαι όλως ποτέ»*.

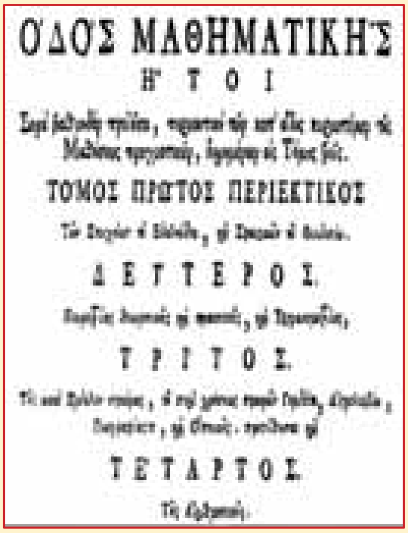
Μαθητές του Μεθοδίου Ανθρακίτη στην Καστοριά υπήρξαν, μεταξύ άλλων, ο Ευγένιος **Βούλγαρης**[8], και ο Μπαλάνος **Βασιλόπουλος**[9]. Ο Μπαλάνος θα τον διαδεχθεί αργότερα, ως Σχολάρχης, στην Σχολή Γκιούμα στα Γιάννενα. Είναι αυτός που θα εκδώσει το 1749 το τρίτομο έργο «Οδός Μαθηματικής», βασισμένο στις σημειώσεις του δασκάλου του. Το βιβλίο αυτό θα αποτελέσει για πολλά χρόνια το **βασικό εγχειρίδιο μαθηματικών** γνώσεων σε όλα τα Ελληνικά Σχολεία της εποχής, από το **Βουκουρέστι** και το **Ιάσιο** ως την **Κωνσταντινούπολη**, την **Αθήνα**, την **Αλεξάνδρεια**, και την **Κύπρο**.

## Το έργο του Μεθόδιου




Το εξώφυλλο του βιβλίου του Μεθοδίου Ανθρακίτη Βοσκός Λογικών προβάτων που εκδόθηκε στη Βενετία το 1708

Τα σπουδαιότερα έργα του Μεθοδίου Ανθρακίτη είναι **Οδός Μαθηματικής**, **Λογική Ελάττων**, **Εισαγωγή της Λογικής**, **Θεωρίαι Χριστιανικαί και ψυχοφελείς νουθεσίαι**, **Επίσκεψις Πνευματική**, **Βοσκός λογικών προβάτων**, **Λόγος εις τον προφήτην Ηλίαν**


ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΗΤΟΙ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΟΣ

ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΤΡΙΤΟΣ

ΤΕΤΑΡΤΟΣ

Το έργο **Οδός Μαθηματικής** το επεξεργάστηκε ο μαθητής του Μπαλάνος Βασιλόπουλος και εκδόθηκε στη Βενετία το 1749. Περιλαμβάνει ποικίλες **πραγματείες γεωμετρίας**, **τριγωνομετρίας**, **γεωγραφίας**, το έργο του Ευκλείδη, του Θεοδοσίου[10] και του Πρόκλου[11] σχετικά με τη χρήση σφαιρών και οπτικής, αστρονομία, **άλγεβρα** και φυσικές επιστήμες. Είναι το πρώτο ελληνικό και μάλιστα ολοκληρωμένο μαθηματικό εγχειρίδιο της νεότερης ιστορίας μας γραμμένο από τον Μεθόδιο Ανθρακίτη για χρήση στα ελληνικά σχολεία κατά την εποχή της τουρκοκρατίας. Η έκδοση της Οδού Μαθηματικής είχε μεγάλη σημασία για την εκπαίδευση, αφού **εισήγαγε τα Μαθηματικά** στο **σχολικό πρόγραμμα**, γεγονός που αναγνωρίζουν όλοι οι δάσκαλοι της εποχής του. Ο πρώτος τόμος της Οδού περιέχει τα «**Στοιχεία του Ευκλείδη**» με σχόλια πάνω σε αυτά και τα «**Σφαιρικά**» του **Θεοδοσίου**. Ο δεύτερος τόμος περιέχει τη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία.

Ο τρίτος τόμος περιέχει τα «Σφαιρικά» του Πρόκλου, «Τα περί χρήσεως σφαιρών» του Γορδάτου, Αστρολαβία, Γεωγραφία και Οπτική.

Ο τέταρτος τόμος «Της Αριθμητικής» προστέθηκε στους τρεις προηγούμενους από το μαθητή του Μπαλάνο Βασιλόπουλο και εκδόθηκε το 1803 μετά το θάνατό του Μπαλάνου από το γιο του Κοσμά Βασιλόπουλο.

---

[7] **Θεόφιλος Κορυδαλλεύς** ( Αθήνα 1650-1746): Λόγιος, φιλόσοφος και κληρικός.

[8] **Ευγένιος Βούλγαρης** (10 Αυγούστου 1716 - 27 Μαΐου 1806): Έλληνας κληρικός, παιδαγωγός, δάσκαλος του Γένους (βλ. «Ευκλείδης Β» τ. 128, Απρίλιος-Ιουνιος 2023)

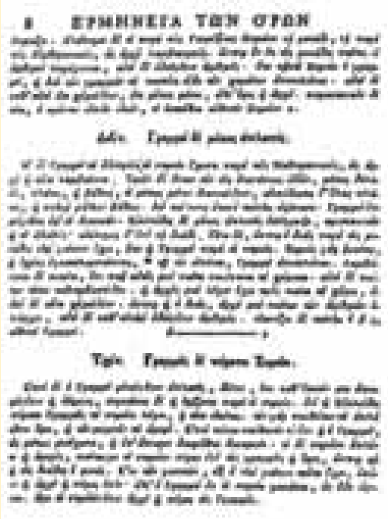
[9] **Μπαλάνος Βασιλόπουλος** (Ιωάννινα 1694 – 1760): Κληρικός, διδάσκαλος και λόγιος, ο οποίος διακρίθηκε κυρίως ως συγγραφέας μαθηματικών έργων.

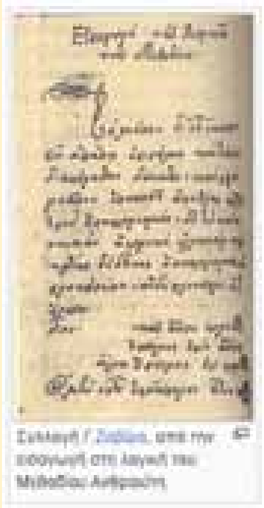
[10] **Θεοδόσιος ο Τριπολίτης** (Τρίπολη Βιθυνίας 160 π.Χ. – 100 π.Χ.): Έλληνας αστρονόμος και μαθηματικός.

[11] **Πρόκλος ο Λύκιος** (Κωνσταντινούπολη 412μΧ – Αθήνα 485μΧ): Νεοπλατωνικός φιλόσοφος, σχολιαστής του Ευκλείδη.

Η **συμβολή** του Μεθόδιου Ανθρακίτη του σπουδαίου αυτού Δάσκαλου του Γένους στη διατήρηση του φρονήματος και στην πνευματική ανάταση ων υπόδουλων Ελλήνων **είναι ανεκτίμητη**. Για τον Ανθρακίτη η διδασκαλία είναι λειτούργημα και αποστολή.


ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ


ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ


Συλλογή Γ. Ζαβίρα, από την εισαγωγή στη λογική του Μεθοδίου Ανθρακίτη

Η διδακτική του πορεία και το επιστημονικό του έργο, τον κατατάσσουν στους μεγάλους Δασκάλους του Γένους και τους σημαντικότερους εκπροσώπους του Ελληνικού Διαφωτισμού. Η προσφορά του στην παιδεία δεν επικεντρώνεται μόνο στην εισαγωγή νέων μαθημάτων από τους αναπτυσσόμενους κλάδους της επιστήμης στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα της πατρίδας αλλά και στην **εφαρμογή νέων μεθόδων διδασκαλίας** που είχαν ως αποτέλεσμα την κατανόηση και την αφομοίωση των θεμάτων που δίδασκε. Υπήρξε διευθυντής στα σημαντικότερα πνευματικά ιδρύματα του υπόδουλου ελληνισμού και πολλές εξέχουσες μορφές του ελληνικού διαφωτισμού υπήρξαν μαθητές του.

Ακολουθούν οι δύο πρώτες σελίδες από τον πρώτο τόμο της Οδού Μαθηματικής όπου ο Μεθόδιος σχολιάζει τους ορισμούς του σημείου και της γραμμής που δίνει ο Ευκλείδης

**Πηγές**:


- https://el.wikipedia.org/wiki/Μεθόδιος_Ανθρακίτης
- https://el.wikipedia.org/wiki/Σχολή_Εμμανουήλ_Γκιούμα
- https://izagori.gr/people/biographies/264- μεθοδιοσ-ανθρακιτησ-1660—1749.html
- https://www.patmosmonastery.gr/index.php/topiki-agiologia/67-o-agios-makarios-o-kalogeras
- https://el.wikipedia.org/wiki/ Μπαλάνος_Βασιλόπουλος
- http://history.math.uoc.gr/el/node/63
- https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/15582?lang=el#page/154/mode/2up
- https://slideplayer.gr/slide/16825755/
- Μαθηματική Επιθεώρηση ΕΜΕ Τεύχος 59 (Ιανουάριος - Ιούνιος 2003)

**84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"**
**20 Ιανουαρίου 2024**

Οι λύσεις των προβλημάτων

## Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. **Να αποδείξετε ότι το πηλίκο**

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\nu^{10} - \nu^6 - \nu^4 + 1}}{\boldsymbol{\nu^7 - \nu^6 - \nu + 1}}$$

**είναι σύνθετος ακέραιος, για κάθε ακέραιο $\boldsymbol{\nu \geq 2}$.**

Λύση

Ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται:

$$\nu^7 - \nu^6 - \nu + 1 = \nu^6(\nu - 1) - (\nu - 1) = (\nu - 1)(\nu^6 - 1) = (\nu - 1)(\nu^3 - 1)(\nu^3 + 1) > 0,$$

για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$. Ο αριθμητής του κλάσματος γράφεται:

$$\nu^{10} - \nu^6 - \nu^4 + 1 = \nu^6(\nu^4 - 1) - (\nu^4 - 1) = (\nu^4 - 1)(\nu^6 - 1)$$
$$= (\nu^2 - 1)(\nu^2 + 1)(\nu^6 - 1) = (\nu - 1)(\nu + 1)(\nu^2 + 1)(\nu^6 - 1).$$

Άρα το κλάσμα γίνεται:

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^{10} - \nu^6 - \nu^4 + 1}{\nu^7 - \nu^6 - \nu + 1} = \frac{(\nu - 1)(\nu + 1)(\nu^2 + 1)(\nu^6 - 1)}{(\nu - 1)(\nu^6 - 1)} = (\nu + 1)(\nu^2 + 1)$$

και είναι σύνθετος ακέραιος, αφού οι αριθμοί $\nu + 1$ και $\nu^2 + 1$ είναι θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 2, για κάθε $\nu \geq 2$.

Πρόβλημα 2. **Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓμε $\boldsymbol{\widehat{\mathrm{B}} = 90^\circ}$. Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΑΓκαι έστω Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ το συμμετρικό του Ν ως προς το Β και έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας ΚΜ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΝΛ είναι κάθετη στην ευθεία ΚΓ.**

Λύση. **(1ος τρόπος)** Παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία η $\widehat{\mathrm{K N \Lambda}}$ είναι συμπληρωματική της $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma$. Αφού η $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma$ συμπληρωματική της $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K} = \mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\Lambda$.

Έχουμε:

1. $\mathbf{K}\widehat{\mathbf{N}}\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{N}\widehat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Lambda}$

Πράγματι, η ΒΓ είναι μεσοκάθετος του ΝΚ και άρα το τρίγωνο ΝΛΚ είναι ισοσκελές.

2. **ΝΜ ∥ ΒΓ και ΝΜ = ΒΚ.**

Πράγματι, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\mathrm{B}} = 90^\circ$ και ισοσκελές με ΑΒ = ΒΓ. Το Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΑΓ, οπότε η ΒΜ είναι η μεσοκάθετος της ΑΓ. Έτσι το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, αφού $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = 45^\circ$.

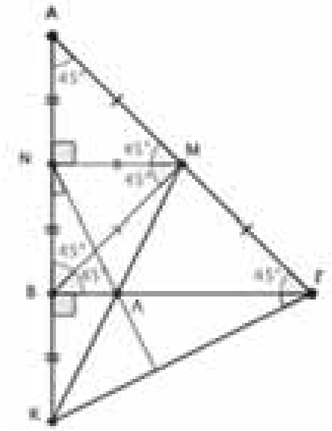
Αφού το σημείο Ν είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΑΜ = ΜΒ, η ΝΜ είναι η μεσοκάθετος της ΑΒ. Άρα ΜΝ ⊥ ΑΒ, και τα τρίγωνα ΑΝΜ και ΒΝΜ είναι ισοσκελή ορθογώνια. Έτσι ΝΜ ∥ ΒΓ και ΝΜ = ΑΝ = ΝΒ = ΒΚ.

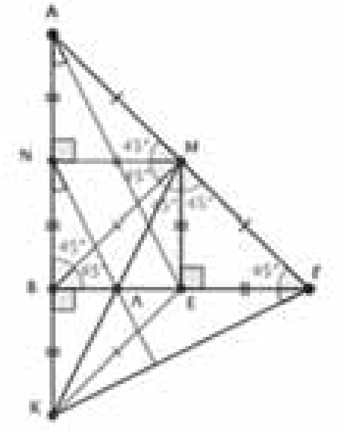
3. **Τα τρίγωνα ΚΝΜ και ΓΒΚ είναι ίσα.**

Πράγματι, είναι $K\hat{N}M = 90^{\circ} = \Gamma\hat{B}K$, $KN = AB = B\Gamma$ και $NM = BK$. Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΝΜ και ΓΒΚ είναι ίσα, και άρα $N\hat{K}M = N\hat{K}\Lambda$.

4. $\mathbf{B\hat{\Gamma}K = K\hat{N}\Lambda}$**.**

Από την ισότητα των τριγώνων, έπεται ότι $B\hat{\Gamma}K = N\hat{K}M = N\hat{K}\Lambda = K\hat{N}\Lambda$, όπως θέλαμε. Συνεπώς, $N\Lambda \perp K\Gamma$.





(2$^{ος}$ **τρόπος**)

Έστω Τ το σημείο τομής της ΜΚ με ΝΓ και Ρ το σημείο τομής της ΝΛ με ΚΓ. Τα τρίγωνα ΒΚΓ, ΝΚΜ είναι ίσα (ορθογώνια με κάθετες πλευρές ίσες), οπότε

$$KM = K\Gamma = \Gamma N \qquad (1).$$

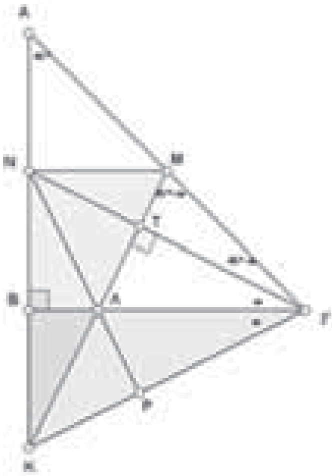
Λόγω συμμετρίας $N\hat{\Gamma}B = K\hat{\Gamma}B = \omega$, $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A = 45^0$ και ΚΜΓ ισοσκελές τρίγωνο, οπότε:

$$N\hat{\Gamma}M = T\hat{\Gamma}M = 45^0 - \omega.$$

Άρα έχουμε $K\hat{\Gamma}M = K\hat{M}\Gamma = 45^0 + \omega$ και επομένως

$$K\hat{T}M = 45^0 - \omega + 45^0 + \omega = 90^0.$$

Άρα Λ ορθόκεντρο του τριγώνου ΓΝΚ και επομένως ΝΡ ύψος, δηλαδή $N\Lambda \perp K\Gamma$.



(3$^{ος}$ **τρόπος**) Έστω Ε το μέσο της πλευράς ΒΓ . Παρατηρούμε ότι

1. $\mathbf{B\hat{A}E = B\hat{\Gamma}K}$**.**

Πράγματι, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΒΚ είναι ίσα, αφού έχουμε $AB = B\Gamma$ και $BK = NB = \frac{AB}{2} = BE$. Συνεπώς, $B\hat{A}E = B\hat{\Gamma}K$.

Άρα η $B\hat{A}E$ είναι συμπληρωματική της $B\hat{K}\Gamma$, και αρκεί να αποδείξουμε ότι $K\hat{N}\Lambda = B\hat{A}E$.

2. **Το Λ είναι το μέσο της ΒΕ.**

Πράγματι, όπως στον πρώτο τρόπο, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΜΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, αφού το Μ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, και κατά συνέπεια, το Μ ανήκει και στη μεσοκάθετη του ΒΓ. Άρα $ME \perp B\Gamma$ και $ME = E\Gamma = B\Gamma/2 = AB/2 = BK$. Αφού οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, τα τρίγωνα ΚΒΛ και ΜΕΛ είναι ίσα. Συνεπώς, $B\Lambda = \Lambda E$, δηλ. το Λ είναι το μέσο της ΒΕ.

3. $\mathbf{\widehat{KN\Lambda} = \widehat{BAE}}$.

Από το Θεώρημα Θαλή ή αφού το Ν είναι το μέσο της ΑΒ και το Λ είναι το μέσο της ΒΕ, έπεται ότι $N\Lambda \parallel AE$. Άρα, $K\hat{N}\Lambda = B\hat{A}E$, ως εντός εναλλάξ. Συνεπώς, $N\Lambda \perp K\Gamma$, όπως θέλαμε.

**Σχόλια.**

1. Εναλλακτικά, στον πρώτο τρόπο, ο ισχυρισμός 2 έπεται ως εξής: Αφού το Ν είναι το μέσο

της πλευράς ΑΒ και το Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΑΓ, είναι ΝΜ ∥ ΒΓ και $\mathrm{NM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \mathrm{BK}$.

2. Για τον ισχυρισμό 2 του δεύτερου τρόπο έχουμε εναλλακτικά: Τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΕΒΚ είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε ΜΕ ∥ ΒΚ, και αφού $\mathrm{M\hat{B}E} = 45^\circ = \mathrm{B\hat{E}K}$, και ΜΒ ∥ ΕΚ. Συνεπώς, το ΒΜΕΚ είναι παραλληλόγραμμο, κι άρα οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Επίσης, εναλλακτικά, αφού ΝΜ ∥ ΒΓ και το Β είναι το μέσο του τμήματος ΝΚ, έπεται ότι το Λ είναι το μέσο της ΚΜ και $\mathrm{B\Lambda} = \frac{\mathrm{NM}}{2} = \mathrm{BE}/2$. Συνεπώς, το Λ είναι το μέσο της ΒΕ.

Πρόβλημα 3. **Να εξετάσετε αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ διαφορετικοί μεταξύ τους τέτοιοι ώστε ο καθένας από αυτούς να ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των δύο άλλων.**

Λύση **(1ος τρόπος)**

Έστω ότι υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{Bmatrix} \alpha = (\beta+\gamma)^2 \\ \beta = (\gamma+\alpha)^2 \\ \gamma = (\alpha+\beta)^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma & (1) \\ \beta = \gamma^2+\alpha^2+2\gamma\alpha & (2) \\ \gamma = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta & (3) \end{Bmatrix}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη της δεύτερης από την πρώτη και της τρίτης από τη δεύτερη λαμβάνουμε:

$$\begin{Bmatrix} \alpha-\beta = (\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2\gamma) \\ \beta-\gamma = (\gamma-\beta)(\beta+\gamma+2\alpha) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha+\beta+2\gamma = -1 \\ \beta+\gamma+2\alpha = -1 \end{Bmatrix},$$

αφού $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\gamma - \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha, \text{ άτοπο.}$$

**(2ος τρόπος)**

Έστω ότι υπάρχουν οι ζητούμενοι αριθμοί. Αν $x$ είναι ένας από τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma$ και $S = \alpha+\beta+\gamma$, τότε: $x = (S-x)^2 \Leftrightarrow x^2-(2S+1)x+S^2 = 0 \quad (1)$

Αν υπάρχουν δύο αριθμοί $x_1 \neq x_2$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1), τότε $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ και από τους τύπους Vieta προκύπτει ότι $x_1+x_2 = 2S+1 > S$, που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν δύο διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

Πρόβλημα 4. **Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ είναι τέτοιοι ώστε $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma = 6}$ και $\boldsymbol{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 9}$, να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:**

$$A = \boldsymbol{\alpha\beta\gamma + \sqrt{(\alpha^2+9)(\beta^2+9)(\gamma^2+9)}}.$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε:

$$\alpha^2+9 = \alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma),$$

$$\beta^2+9 = \beta^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = (\beta+\alpha)(\beta+\gamma),$$

$$\gamma^2+9 = \gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = (\gamma+\alpha)(\gamma+\beta).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι οι αριθμοί $(\alpha+\beta), (\beta+\gamma), (\gamma+\alpha)$, είναι ομόσημοι, και αφού $(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha) = 2(\alpha+\beta+\gamma) = 12 > 0$, έπεται ότι: $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) > 0$.

Άρα έχουμε:

$$A = \alpha\beta\gamma + \sqrt{(\alpha^2+9)(\beta^2+9)(\gamma^2+9)} = \alpha\beta\gamma + |(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)|$$
$$= \alpha\beta\gamma + (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 6\cdot 9 = 54.$$

## Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. **Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους $\boldsymbol{\nu}$ που είναι λύσεις του συστήματος**

**των ανισώσεων:** $\quad -45 \le \frac{2025}{45-\nu}$ **και** $\frac{2025}{45-\nu} \le 45-\nu$.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

**1.** $0 \le \nu < 45$. Τότε $45-\nu > 0$ και έχουμε: $-45 \le \frac{2025}{45-\nu} \Leftrightarrow -2025+45\nu \le 2025 \Leftrightarrow \nu \le 90 \qquad (1)$

$$\frac{2025}{45-\nu} \le 45-\nu \Leftrightarrow 2025 \le (45-\nu)^2 \Leftrightarrow 45-\nu \ge 45 \Leftrightarrow \nu \le 0 \quad (2)$$

Οι ανισώσεις (1) και (2), υπό τη συνθήκη $0 \le \nu < 45$, συναληθεύουν μόνο για $\nu = 0$.

**2.** $\nu > 45$. Τότε $45-\nu < 0$ και έχουμε:

$$-45 \le \frac{2025}{45-\nu} \Leftrightarrow -2025+45\nu \ge 2025 \Leftrightarrow \nu \ge 90 \quad (3)$$

$$\frac{2025}{45-\nu} \le 45-\nu \Leftrightarrow 2025 \ge (45-\nu)^2 \Leftrightarrow -45+\nu \le 45 \Leftrightarrow \nu \le 90 \quad (4)$$

Οι ανισώσεις (3) και (4) συναληθεύουν μόνο για $\nu = 90$.

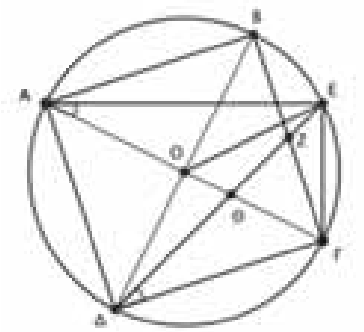
Πρόβλημα 2. **Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εξωτερικό του, στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΑΓ με το Β, τέτοιο ώστε $A\hat{E}\Gamma = 90^0$ και $AE = 2 \cdot E\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΕΔ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ του τετραγώνου.**

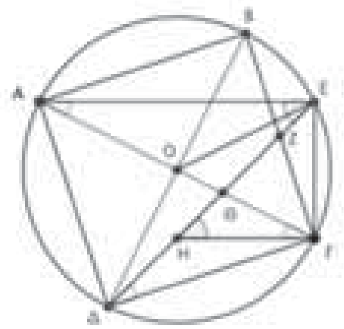
Λύση

Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου. Το Ο είναι το μέσο της ΑΓ, οπότε η ΕΟ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΓ και άρα ισούται με το μισό της. Έτσι, $OE = O\Gamma = OA = O\Delta = OB$.

Επομένως, το σημείο Ο ισαπέχει από τα σημεία Α, Β, Ε, Γ, και Δ, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΑ.

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΕΔ με την πλευρά ΒΓ. Αφού οι εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου οι οποίες βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες, έπεται ότι $E\hat{A}\Gamma = Z\hat{\Delta}\Gamma$.




Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΓκαι ΖΔΓείναι όμοια. Αφού $\Delta\Gamma = B\Gamma$, έχουμε $\frac{Z\Gamma}{B\Gamma} = \frac{Z\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{E\Gamma}{AE} = \frac{1}{2}$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και τριγωνομετρικά ως εξής: $\frac{Z\Gamma}{B\Gamma} = \varepsilon\varphi Z\hat{\Delta}\Gamma = \varepsilon\varphi E\hat{A}\Gamma = \frac{E\Gamma}{AE} = \frac{1}{2}$

Συνεπώς, το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τετραγώνου.

**(2$^{ος}$ τρόπος)** Έστω Θ το σημείο τομής της ΕΔ με την ΑΓ και Η το σημείο τομής της ΕΔ με την παράλληλη ευθεία προς την ΑΕ από το Γ. Τότε τρίγωνα ΑΕΘ και ΓΗΘ είναι όμοια, κι αφού $\Gamma\hat{H}\Theta = H\hat{E}A = 45^\circ = H\hat{E}\Gamma$, το τρίγωνο ΗΓΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ΗΓ=ΕΓ=ΑΕ/2.

Έτσι $\quad \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{H\Gamma} = 2 \qquad$ και άρα $\qquad \frac{2\cdot O\Gamma}{\Theta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} = 1 + \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} = 3.$

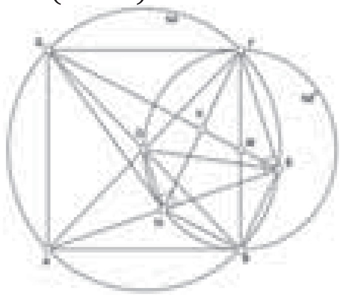
Άρα $O\Gamma : \Theta\Gamma = 3:2$, οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρο του ΔΒΓ. Άρα το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ.

**(3$^{ος}$ τρόπος)** Έστω Ο το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Τότε

$$\mathrm{OE} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \mathrm{OB} = \mathrm{O\Delta} = \mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma}.$$

Επομένως, τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε ανήκουν στον κύκλο $\omega$. Αν $\mathrm{ON} \perp \mathrm{AE}$, τότε το Ν είναι το μέσο του ΑΕ, οπότε $\mathrm{AN} = \mathrm{NE} = \Gamma\mathrm{E}$ και $\mathrm{N}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 90^0$.

Άρα το τρίγωνο ΕΓΝ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{N} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{N}}\Gamma = 45^0$.
Επειδή $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 45^0$ και $\mathrm{NE} = \Gamma\mathrm{E}$, τα τρίγωνα ΔΕΝ και ΔΕΓ είναι ίσα (Π-Γ-Π).



Επομένως θα έχουμε $\Delta\mathrm{N} = \Gamma\mathrm{E}$, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του τμήματος ΓΝ. Θεωρούμε τον κύκλο $\omega' = c(\mathrm{OB\Gamma})$.
Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Ν ανήκει στον κύκλο $\omega'$.
Πράγματι, $\mathrm{O}\hat{\mathrm{N}}\Gamma = 90^0 - \Gamma\hat{\mathrm{N}}\mathrm{E} = 90^0 - 45^0 = 45^0 = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$, οπότε ντα σημεία Ν και Β βλέπουν τη χορδή ΟΓ με γωνία $45^0$. Άρα το Ν είναι σημείο του κύκλου $\omega'$. Επομένως, $\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 90^0$.
Αλλά $\mathrm{KM} \perp \Gamma\mathrm{N}$, $\mathrm{BN} \perp \Gamma\mathrm{N}$, οπότε $\mathrm{KM} \parallel \mathrm{BN}$ και Κ μέσο ΓΝ, οπότε στο τρίγωνο ΓΝΒ έχουμε ότι το Ν είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 3. **Τα 22 παιδιά μιας τάξης σχηματίζουν κύκλο έτσι ώστε κανένα παιδί να μην έχει και στις δύο γειτονικές του θέσεις δεξιά και αριστερά του αγόρι. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των κοριτσιών της τάξης.**

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν στη σειρά διαδοχικά 3 ή περισσότερα αγόρια, γιατί τότε ένα αγόρι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά να υπάρχουν το πολύ 2 αγόρια. Επίσης δεν πρέπει να υπάρχει κάποιο κορίτσι που έχει δίπλα του δυο αγόρια, γιατί τότε ένα κορίτσι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά διαδοχικά να υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορίτσια.

Έστω Κ ο αριθμός των κοριτσιών και $\nu_K$ οι ομάδες κοριτσιών πάνω στον κύκλο. Έστω Α ο αριθμός των αγοριών και $\nu_A$ οι ομάδες αγοριών πάνω στον κύκλο. Για κάθε ομάδα κοριτσιών πρέπει να ακολουθεί μία ομάδα αγοριών, γιατί διαφορετικά θα υπάρχει αγόρι με δύο γειτονικά αγόρια, δηλαδή πρέπει $\nu_K = \nu_A$. Αν υποθέσουμε ότι $K \leq 11$, τότε $\nu_\kappa \leq 5$, οπότε $\nu_A \leq 5$ και $\mathrm{A} \leq 10$.

Άρα $\mathrm{K} + \mathrm{A} \leq 21$, άτοπο. Άρα πρέπει $K \geq 12$. Παρατηρούμε ότι για Κ =12 μπορεί να ισχύει η υπόθεση του προβλήματος ως εξής:

$$AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KKKK.$$

Πρόβλημα 4. **Από όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2024}$ να βρείτε το ζεύγος με το μικρότερο δυνατό $\boldsymbol{m}$.**

Λύση

Μετά την απαλοιφή παρονομαστών, γράφουμε την εξίσωση στην μορφή

$$2024n - 2024m - mn = 0 \Leftrightarrow (2024 - m)(2024 + n) = 2024^2.$$

Για να βρούμε το μικρότερο δυνατό $m$, αρκεί ο $2024 - m < 2024$, να είναι ο μεγαλύτερος δυνατός διαιρέτης του $2024^2$, που είναι μικρότερος του 2024. Παρατηρούμε ότι $2024^2 = 2^6 \cdot 11^2 \cdot 23^2$ και για να βρούμε τον μεγαλύτερο διαιρέτη που δεν ξεπερνά τον 2024, αρκεί να ελέγξουμε τους

$$23^2 \cdot 2, 23 \cdot 11 \cdot 4, 11^2 \cdot 16, 11 \cdot 64.$$

Παρατηρούμε ότι ο $11^2 \cdot 16 = 1936$ είναι ο μεγαλύτερος, άρα η μικρότερη δυνατή τιμή του $m$ είναι $2024 - 1936 = 88$. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε $n = 92$. Πράγματι, έχουμε $\frac{1}{88} - \frac{1}{92} = \frac{1}{2024}$.

## Γ΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. **Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Έστω Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΗ και ΓΗ, αντίστοιχα. Έστω Κ και Λ τα σημεία τομής της ευθείας ΜΝ με τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Έστω Δ το σημείο τομής της ευθείας ΚΗ με την ΑΜ και έστω Ε το σημείο τομής**

**της ευθείας ΛΗ με την ΑΝ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ.**

Λύση **(1ος τρόπος)**

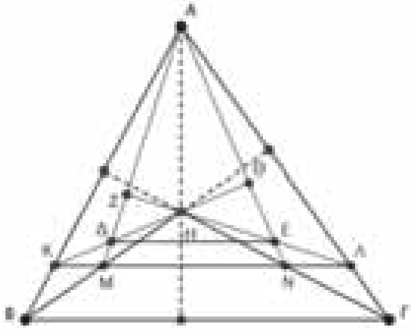
Αφού τα Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΗ και ΓΗ, αντίστοιχα, η ευθεία ΜΝ είναι παράλληλη στην ΒΓ, οπότε ΑΗ ⊥ ΚΛ.

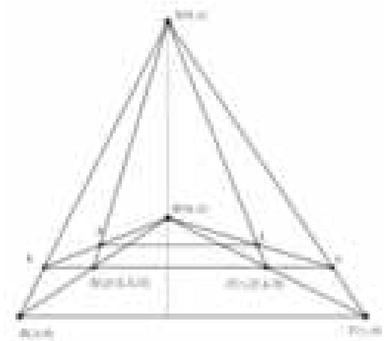
Έστω Ζ το σημείο τομής της ΛΗ με την ΑΜ και έστω Θ το σημείο τομής της ΚΗ με την ΑΝ.

Το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΜΛ, αφού είναι ΑΗ ⊥ ΜΛ και ΜΗ ⊥ ΑΛ. Συνεπώς, ΛΖ ⊥ ΑΜ. Ομοίως, το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΝΚ, αφού είναι ΑΗ ⊥ ΝΚ και ΝΗ ⊥ ΑΚ. Συνεπώς, ΚΘ ⊥ ΑΝ.

Αφού ΕΖ ⊥ ΑΔ και ΔΘ ⊥ ΑΕ, έπεται ότι το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΕΔ. Άρα ΑΗ ⊥ ΔΕ.

Αφού ΑΗ ⊥ ΒΓ, έπεται ότι ΔΕ ∥ ΒΓ, όπως θέλαμε.





**(2ος τρόπος)** Τοποθετούμε το τρίγωνο σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ώστε $Α(0,\alpha)$, $Β(\beta,0)$, $Γ(\gamma,0)$, και $Η(0,h)$. Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΓ είναι

$$ΑΓ\colon y=-\frac{\alpha}{\gamma}x+\alpha$$

Αφού η εξίσωση της ΜΝ είναι $y=\frac{h}{2}$, το σημείο Λ είναι $Λ(\frac{\gamma(2\alpha-h)}{2\alpha},\frac{h}{2})$, οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ΗΛ είναι $ΗΛ\colon y=-\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}x+h$

Αφού $Ν(\gamma/2,h/2)$, εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ΑΝ είναι $ΑΝ\colon y=\frac{-2\alpha+h}{\gamma}x+\alpha$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ΑΝ και ΗΛ, δηλ. του Ε, είναι η λύση του συστήματος των δυο τελευταίων εξισώσεων. Έχουμε $\frac{-2\alpha+h}{\gamma}x+\alpha=-\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}x+h$

Οπότε $\left(\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}+\frac{-2\alpha+h}{\gamma}\right)x=h-\alpha$ Πολλαπλασιάζοντας με $\gamma$ και κάνοντας τις πράξεις στα αριστερά παίρνουμε $\frac{-4\alpha^2+5\alpha h-h^2}{2\alpha-h}x=\gamma(h-\alpha)$

Είναι $-4\alpha^2+5\alpha h-h^2=(4\alpha-h)(h-\alpha)$, οπότε παίρνουμε $x=\frac{\gamma(2\alpha-h)}{4\alpha-h}$, και

$$y=-\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}\cdot\frac{\gamma(2\alpha-h)}{4\alpha-h}+h=\frac{3\alpha h-h^2}{4\alpha-h}.$$

Παρατηρούμε ότι η τεταγμένη του Ε εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες του Α, και του Γ. Άρα η ΕΔ είναι παράλληλη στην ΒΓ και το συμπέρασμα έπεται.

Σχόλιο. Όπως είναι φανερό από τον 2ο τρόπο, δεν απαιτείται το Η να είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ για να ισχύει το συμπερασμα. Αρκεί μόνο το Η να είναι σημείο του ύψους από την κορυφή Α.

**(3ος τρόπος)** Μπορούμε να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μενελάου (σχολικό βιβλίο ΟΕΔΒ, σελ. 165):

Από το θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο ΑΝΓ για την ευθεία ΗΕΛ έχουμε $\frac{ΑΕ}{ΕΝ}\cdot\frac{ΝΗ}{ΗΓ}\cdot\frac{ΓΛ}{ΛΑ}=1$

Αφού το Ν είναι το μέσο του ΗΓ έχουμε $\frac{ΝΗ}{ΗΓ}=\frac{1}{2}$, οπότε παίρνουμε $\frac{ΑΕ}{ΕΝ}=2\cdot\frac{ΛΑ}{ΓΛ}$

Ομοίως, $\frac{ΑΔ}{ΔΜ}=2\cdot\frac{ΚΑ}{ΒΚ}$

Αφού ΚΛ ∥ ΒΓ, έχουμε $\frac{ΛΑ}{ΓΛ}=\frac{ΚΑ}{ΒΚ}$ οπότε από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι $\frac{ΑΕ}{ΕΝ}=\frac{ΑΔ}{ΔΜ}$

Άρα ΔΕ ∥ ΜΝ, όπως θέλαμε.

**Πρόβλημα 2.** **Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες $(x, y, z)$ πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν και τις τρεις επόμενες εξισώσεις:**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{4x + 3y^3 = z^5} \\ \boldsymbol{4y + 3z^3 = x^5} \\ \boldsymbol{4z + 3x^3 = y^5}. \end{aligned}$$

**Λύση**

Με αφαίρεση της δεύτερης από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$4(x-y)+3(y^3-z^3)=z^5-x^5 \qquad (1)$$

Με αφαίρεση της δεύτερης από την τρίτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$4(z-y)+3(x^3-z^3)=y^5-x^5 \qquad (2)$$

Επειδή οι τρεις εξισώσεις είναι κυκλικά συμμετρικές ως προς $x, y, z$, διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

**1.** Αν $x \le y < z$ ή $x < y \le z$, τότε για τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$4(x-y)+3(y^3-z^3)<0\le z^5-x^5, \text{ άτοπο.}$$

**2.** Αν $x \le z < y$ ή $x < z \le y$, τότε για τα δύο μέλη της σχέσης (2) έχουμε:

$$4(z-y)+3(x^3-z^3)<0\le y^5-x^5, \text{ άτοπο.}$$

**3.** $x = y = z$. Τότε προκύπτει η εξίσωση

$$x^5-3x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^4-3x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^4-3x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2} \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2=4 \text{ ή } x^2=-1 \text{ (μη δεκτή).}$$

Επομένως, έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(0,0,0)$, $(x,y,z)=(2,2,2)$, $(x,y,z)=(-2,-2,-2)$.

**Πρόβλημα 3.** **Τα 26 παιδιά μιας τάξης σχηματίζουν κύκλο έτσι ώστε κανένα παιδί να μην έχει και στις δύο γειτονικές του δεξιά και αριστερά του αγόρι. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των κοριτσιών της τάξης.**

**Λύση**

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν στη σειρά διαδοχικά 3 ή περισσότερα αγόρια, γιατί τότε ένα αγόρι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά να υπάρχουν το πολύ 2 αγόρια. Επίσης δεν πρέπει να υπάρχει κάποιο κορίτσι που έχει δίπλα του δυο αγόρια, γιατί τότε ένα κορίτσι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά διαδοχικά να υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορίτσια. Έστω Κ ο αριθμός των κοριτσιών και $\nu_K$ οι ομάδες κοριτσιών πάνω στον κύκλο. Έστω Α ο αριθμός των αγοριών και $\nu_A$ οι ομάδες αγοριών πάνω στον κύκλο. Για κάθε ομάδα κοριτσιών πρέπει να ακολουθεί μία ομάδα αγοριών, γιατί διαφορετικά θα υπάρχει αγόρι με δύο γειτονικά αγόρια, δηλαδή πρέπει $\nu_K=\nu_A$. Αν υποθέσουμε ότι $K \le 13$, τότε $\nu_\kappa \le 6$, οπότε $\nu_A \le 6$ και $\text{Α} \le 12$. Άρα $\text{Κ}+\text{Α} \le 25$, άτοπο. Άρα πρέπει $K \ge 14$. Παρατηρούμε ότι για Κ =14 μπορεί να ισχύει η υπόθεση του προβλήματος ως εξής: *ΑΑ ΚΚ ΑΑ ΚΚ ΑΑ ΚΚ ΑΑ ΚΚ ΑΑ ΚΚ ΑΑ ΚΚΚΚ*

**Πρόβλημα 4.** **Τα πολυώνυμα** $\boldsymbol{P(x)=\left(4x^2+22x+19\right)^{1012}}$,

$$\boldsymbol{Q(x)=a_{2024}x^{2024}+a_{2023}x^{2023}+\cdots+a_1x+a_0},$$

**όπου $\boldsymbol{a_0, a_1, \ldots, a_{2024}}$ ακέραιοι, είναι ίσα. Να αποδείξετε ότι η αριθμητική τιμή του κλάσματος $\boldsymbol{\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2023}}{2+4+\cdots+2022+2024}}$ είναι άρτιος ακέραιος.**

**Λύση.** Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι ίσος με

$$2+4+\cdots+2022+2024=2(1+2+\cdots+1011+1012)=1012\cdot1013.$$

Έστω $\mathrm{P(x)=(4x^2+22x+19)^{1012}=a_{2024}x^{2024}+a_{2023}x^{2023}+\cdots+a_1x+a_0}$.

Δίνεται ότι οι συντελεστές $\mathrm{a_i}$ είναι ακέραιοι για $0 \le \mathrm{i} \le 2024$. Επίσης,

$$\mathrm{a_1+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2023}=\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{45^{1012}-1}{2}}.$$

Επειδή $45^{1012}-1=(45^4)^{253}-1=(45^4-1)((45^4)^{252}+(45^4)^{251}+\cdots+45^4+1)$,

έχουμε: $45^{1012}-1=(45^2-1)(45^2+1)\cdot \mathrm{N}=2024\cdot 2026\cdot \mathrm{N}$,
Όπου $\mathrm{N}=(45^4)^{252}+(45^4)^{251}+\cdots+45^4+1=45^{1008}+45^{1004}+\cdots+45^4+1$.
Συνεπώς, έχουμε
$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2023}}{2+4+\cdots+2022+2024}=\frac{2024\cdot 2026\cdot N}{2\cdot 1012\cdot 1013}=2N,$$
δηλαδή η αριθμητική τιμή του κλάσματος ισούται με άρτιο ακέραιο αριθμό.

## Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 130

**Α79. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που ικανοποιούν την ισότητα $f(f(x))+yf(x)\le x+xf(f(y))$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.** [Ρουμανία 2023]

### Λύση

Για $x=0$ η δεδομένη σχέση δίνει $f(f(0))+yf(0)\le 0$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, η οποία αληθεύει μόνον όταν $f(0)=0$.

Πράγματι, αν $f(0)>0$, τότε προκύπτει ότι $y\le -\frac{f(f(0))}{f(0)}$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, άτοπο, ενώ, αν $f(0)<0$, *τότε* προκύπτει ότι $y\ge -\frac{f(f(0))}{f(0)}$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, άτοπο.

Για $y=0$ η δεδομένη σχέση δίνει: $f(f(x))\le x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

Για $x=1$ η δεδομένη σχέση δίνει $f(f(1))+yf(1)\le 1+f(f(y))$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:
$$f(f(1))+yf(1)\le 1+y\Rightarrow (f(1)-1)y\le 1-f(f(1)),\text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}.$$
Η τελευταία σχέση αληθεύει μόνον όταν $f(1)=1$.

Πράγματι, αν $f(1)>1$, *τότε* προκύπτει ότι $y\le\frac{1-f(f(1))}{f(1)-1}$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, άτοπο, ενώ, αν $f(1)<1$, τότε προκύπτει ότι $y\le\frac{1-f(f(1))}{f(1)-1}$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, άτοπο.

Για $x=1$ η δεδομένη σχέση δίνει:
$$f(f(1))+yf(1)\le 1+f(f(y))\Rightarrow y\le f(f(y)),\text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}.\qquad (2)$$
Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $f(f(x))=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε από τη δεδομένη σχέση προκύπτει ότι: $x+yf(x)\le x+xy$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$,
από την οποία λαμβάνουμε: $yf(x)\le xy$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. (3)
Από τη σχέση (3) για $y=1$ λαμβάνουμε $f(x)\le x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ για $y=-1$ λαμβάνουμε $f(x)\ge x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα έχουμε $f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η οποία, όπως εύκολα επαληθεύουμε, ικανοποιεί την υπόθεση.

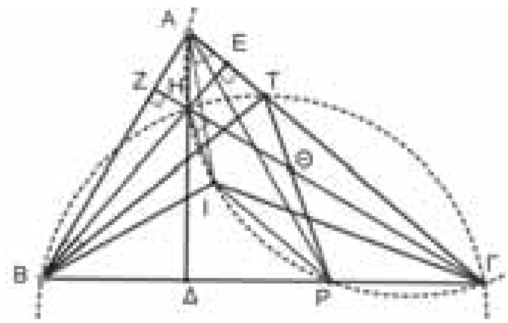
**Γ65. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathbf{AB}<\mathbf{B\Gamma}$., τέτοιο ώστε τα σημεία Α, Η, Ι και Γ να είναι ομοκυκλικά, όπου Η και Ι το ορθόκεντρό του και το έκκεντρό του, αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΗΓ στο σημείο Τ και η ευθεία ΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΗΓ στο σημείο Ρ. Αν οι ευθείες ΡΤ και ΗΙ είναι παράλληλες, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.** [Ρουμανία 2023]

### Λύση

Έστω ότι οι ευθείες ΓΗ, ΡΤ τέμνονται στο σημείο Θ και έστω Δ, Ε και Ζ τα ίχνη των υψών του τριγώνου ΑΒΓ από τις κορυφές Α, Β και Γ, αντίστοιχα.
Από τις υποθέσεις του προβλήματος το τετράπλευρο ΑΗΙΓ είναι εγγράψιμο, οπότε:
$$\Gamma\hat{H}I=\Gamma\hat{A}I=\frac{\hat{A}}{2}\qquad (1)$$

Επειδή οι ευθείες ΡΤ και ΗΙ είναι παράλληλες και επιπλέον λόγω της (1), έπεται ότι:

$$H\hat{\Theta}T = \Gamma\hat{H}I = \frac{\hat{A}}{2} \qquad (2)$$




Επομένως, έχουμε και τις ισότητες

$$\Gamma\hat{\Theta}P = H\hat{\Theta}T = \frac{\hat{A}}{2} \qquad (3)$$

Επίσης, από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΗΙΓ έχουμε τις ισότητες

$$\Delta\hat{H}I = A\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \qquad (4)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΓ και τις (1), (3) λαμβάνουμε

$$\Delta\hat{\Gamma}H = 90^0 - \Delta\hat{H}\Gamma = 90^0 - \Delta\hat{H}I - I\hat{H}\Gamma = 90^0 - \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}}{2},$$

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΖ έχουμε: $\hat{B} + \frac{\hat{B}}{2} = 180^0 \Rightarrow \hat{B} = 60^0$.

Έχουμε ακόμη ότι $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}Z = 90^0 - \hat{A}$, (5)

ενώ από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΓΤΗ λαμβάνουμε

$E\hat{B}T = H\hat{B}T = H\hat{\Gamma}T = A\hat{\Gamma}Z$, (6)

οπότε από τις σχέσεις (5) και (6) λαμβάνουμε $A\hat{B}E = E\hat{B}T$. Επομένως η ΒΕ είναι διχοτόμος και ύψος στο τρίγωνο ΑΒΤ, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $AB = BT$.

Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΙΡΓ έχουμε τις ισότητες

$$B\hat{P}I = \Gamma\hat{A}I = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } A\hat{P}I = A\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{\Gamma}}{2},$$

οπότε $A\hat{P}B = A\hat{P}I + B\hat{P}I = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^0 - \frac{\hat{B}}{2} = 90^0 - \frac{60^0}{2} = 60^0 = \hat{B}$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΡ είναι ισόπλευρο, οπότε έχουμε $BP = AB = BT$. Άρα το τρίγωνο ΒΡΤ είναι ισοσκελές, οπότε: $B\hat{P}T = \frac{180^0 - P\hat{B}T}{2}$

Όμως από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΤ έχουμε: $A\hat{B}T = 180^0 - 2\cdot\hat{A}$

Επειδή $P\hat{B}T = \hat{B} - A\hat{B}T$, έπεται ότι $P\hat{B}T = 2\cdot\hat{A} - 120^0$, οπότε: $B\hat{P}T = 150^0 - \hat{A}$. (7)

Από το τρίγωνο ΡΘΓ έχουμε $B\hat{P}T = \Gamma\hat{\Theta}P + P\hat{\Gamma}\Theta$, οπότε από τις σχέσεις (2) και προηγούμενες ισότητες έχουμε: $150^0 - \hat{A} = \frac{\hat{A}}{2} + 30^0 \Rightarrow \hat{A} = 80^0$ και $\hat{\Gamma} = 40^0$.

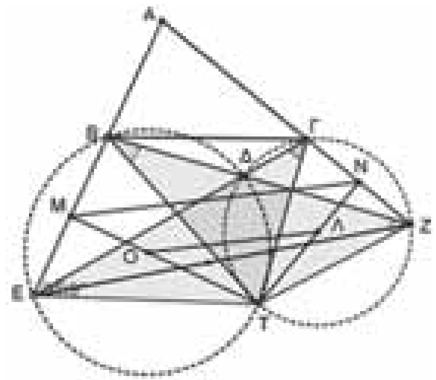
**Γ66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Ε και Ζ κινούνται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ έτσι ώστε το σημείο Β να είναι μεταξύ των σημείων Α, Ε και το σημείο Γ να είναι μεταξύ των σημείων Α, Γ. Υποθέτουμε ότι ΒΖ = ΓΕ και ότι οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Δ. Θεωρούμε και τα μέσα Μ και Ν των τμημάτων ΒΕ και ΓΖ, αντίστοιχα.**
**(α) Έστω Ο και Λ τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΔΒΕ και ΔΓΖ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ότι ΜΝ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΟΛ.**
**(β) Αν Κ είναι το μέσο του τμήματος ΜΝ και Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΕΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΚΗ περνάει από σταθερό σημείο.** **[Βιετνάμ 2022]**

**Λύση**

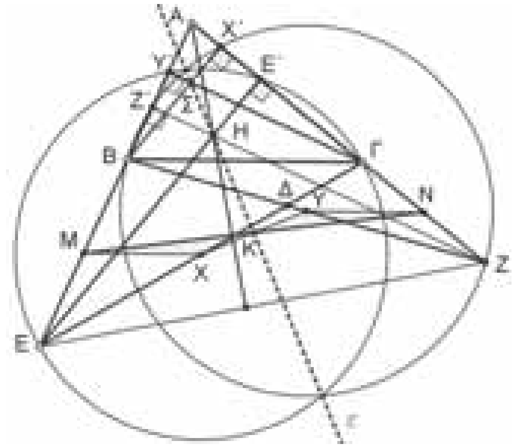
Έστω Τ το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΔΖ.
Τα τρίγωνα ΒΤΖ και ΓΤΕ είναι ίσα, γιατί από την υπόθεση και ισότητες εγγεγραμμένων γωνιών, έχουν: $BZ = \Gamma E$, $T\hat{E}\Gamma = T\hat{B}Z$ και $T\hat{\Gamma}E = T\hat{Z}B$.
Από την ισότητα των τριγώνων ΒΤΖ και ΓΤΕ, έχουμε: $TB = TE$, $T\Gamma = TZ$

$$E\hat{T}B = E\hat{T}\Gamma - B\hat{T}\Gamma = B\hat{T}Z - B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}Z \qquad (1)$$

Επομένως τα τρίγωνα ΤΒΕ και ΤΓΖ είναι ισοσκελή και όμοια.
Επομένως τα τρίγωνα ΤΒΕ και ΤΓΖ είναι ισοσκελή και όμοια.




Επειδή από την υπόθεση τα σημεία Μ, Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΕ και ΓΖ, έπεται ότι ΤΜ ⊥ ΒΕ και ΤΝ ⊥ ΓΖ. Όμως είναι ΟΜ ⊥ ΒΕ και ΛΝ ⊥ ΓΖ. Επομένως τα σημεία Τ, Ο, Μ είναι συνευθειακά και επίσης τα σημεία Τ, Λ, Ν είναι συνευθειακά.
Από την ομοιότητα των ισοσκελών τριγώνων ΤΒΕ και ΤΓΖ έχουμε: $\frac{\text{ΤΟ}}{\text{ΤΜ}} = \frac{\text{ΤΛ}}{\text{ΤΝ}} \Rightarrow \text{ΟΛ} \parallel \text{ΜΝ}$.




**(β)** Ονομάζουμε Χ, Υ τα μέσα των τμημάτων ΕΓ και ΒΖ, αντίστοιχα και $\varepsilon$ τον ριζικό άξονα των κύκλων που έχουν διαμέτρους τα τμήματα ΕΓ και ΒΖ. Υποθέτουμε ότι τα ύψη ΒΧ΄και ΓΥ΄ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Σ.
Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΚΗ περνάει από το σταθερό σημείο Σ, αποδεικνύοντας ότι τα τρία σημεία Κ, Η και Σ ανήκουν στον ριζικό άξονα $\varepsilon$. Τα τμήματα ΜΧ και ΝΥ είναι μεσοπαράλληλα στα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΒΓ, αντίστοιχα, οπότε είναι παράλληλα με τη ΒΓ και ίσα με το μισό της. Άρα έχουμε:

$$\text{ΜΧ} \parallel = \text{ΝΥ} \Rightarrow \text{ΜΝΧΥ} \text{ παραλληλόγραμμο.}$$

Άρα η δύναμη του σημείου Κ ως προς τον κύκλο διαμέτρου ΕΓ ισούται με

$$\Delta_{\text{Κ}/(\text{ΓΕ})} = \text{ΚΧ}^2 - \text{ΚΕ}^2 = \text{ΚΥ}^2 - \left(\frac{\text{ΕΓ}}{2}\right)^2 = \text{ΚΥ}^2 - \left(\frac{\text{ΒΖ}}{2}\right)^2 = \text{ΚΥ}^2 - \text{ΥΖ}^2 = \Delta_{\text{Κ}/(\text{ΒΖ})},$$

οπότε το σημείο Κ ανήκει στο ριζικό άξονα $\varepsilon$.
Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΓΧ΄Υ΄του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο Σ, έχουμε

$$\Delta_{\Sigma/(\text{ΒΖ})} = \Sigma\text{Β} \cdot \Sigma\text{Χ}' = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\text{Υ}' = \Delta_{\Sigma/(\Gamma\text{Ε})},$$

οπότε το σημείο Σ ανήκει στο ριζικό άξονα $\varepsilon$. Ομοίως, από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΕΖΕ¨Ζ΄ προκύπτει ότι το σημείο Η ανήκει στο ριζικό άξονα $\varepsilon$.

## Ασκήσεις για λύση

**Α80.** Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f\colon(0,+\infty)\to(0,+\infty)$που ικανοποιούν την ισότητα $f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right) = 1 + f(y)$, για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$.

**Α81.** Οι αριθμοί $2^3-2, 3^3-3, 4^3-4, \dots, (2\nu+1)^3-(2\nu+1)$, όπου $\nu \geq 2$ ακέραιος, είναι γραμμένοι στον πίνακα. Με την πράξη $*$ διαγράφουμε από τον πίνακα τρεις αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma$ και εμφανίζουμε στον πίνακα τον αριθμό $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta+\gamma\alpha}$. Εφαρμόζουμε την πράξη $*$ μέχρις ότου μέχρις ότου μείνουν στον πίνακα μόνο δύο αριθμοί. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των δύο αριθμών που θα απομείνουν στον πίνακα είναι μεγαλύτερο του 16.

**Γ67.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Ζ και Θ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΖ = ΑΘ και η ευθεία ΖΘ περνάει από το έγκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ. Έστω Μ το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΒΖΙ και ΓΘΙ. Οι ευθείες ΖΜ και ΒΙ τέμνονται στο σημείο Δ και οι ευθείες ΘΜ και ΓΙ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ περνάει από το μέσο του τμήματος ΔΕ.

# Τριγωνομετρικές και μετρικές λύσεις σε προβλήματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας των Μαθηματικών Διαγωνισμών

**Ορέστης Λιγνός – μαθητής Γ΄ Λυκείου**

## Πρόλογος

Η τριγωνομετρία είναι ένας εκ των αρχαιότερων κλάδων των Μαθηματικών, με μακραίωνη ιστορία, που οδηγεί πίσω στους αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς και Αστρονόμους (χαρακτηριστικά παραδείγματα ο Αρχιμήδης, ο Ευκλείδης, ο Αρίσταρχος και ο Πτολεμαίος), στους Σουμέριους και τους Βαβυλώνιους, αλλά και τους Άραβες, τους Κινέζους και τους Γερμανούς στον Μεσαίωνα.

Από την άλλη, οι μετρικές σχέσεις είναι ένα αγαπημένο κεφάλαιο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου, και ταυτόχρονα ένα πολύ δυναμικό εργαλείο στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων.

Σε αυτό το άρθρο θα δούμε ορισμένα προβλήματα που έχουν τεθεί σε πρόσφατους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς για μαθητές, και κάποιες αντιμετωπίσεις με έντονη δόση τριγωνομετρίας και μετρικών σχέσεων (το λεγόμενο **trig** και **length bashing** σε διεθνείς όρους, αντίστοιχα) σε αυτά. Κατά την παρουσίαση των λύσεων έχει γίνει προσπάθεια να αναδειχθούν **χρήσιμες τεχνικές, ιδέες και λήμματα** για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αυτές τις μεθόδους. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι παρουσιαζόμενες λύσεις δόθηκαν από τον συγγραφέα κατά την διάρκεια των εν λόγω διαγωνισμών.

**Πρόβλημα 1 (Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2021): Δίνεται τρίγωνο $ABC$ με $AB<AC$ και κύκλος ω που διέρχεται από τα B,C. Υποθέτουμε ότι το A βρίσκεται στο εσωτερικό του ω. Έστω X,Y σημεία πάνω στον ω τέτοια ώστε $\angle BXA=\angle AYC$ . Υποθέτουμε ακόμη ότι το X βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά της ευθείας AB από ότι το C, και ότι το Y βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά της ευθείας AC από ότι το B.**
**Να αποδείξετε ότι, καθώς μεταβάλλουμε τις θέσεις των X,Y πάνω στον ω, η ευθεία XY διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.**

**Λύση:** Έστω ότι οι ευθείες $AX$ και $AY$ τέμνουν τον κύκλο ω ξανά στα σημεία X’, Y’, αντίστοιχα (αφού το σημείο A βρίσκεται στο εσωτερικό του $\omega$, ισχύει ότι $X'\neq X, Y'\neq Y$). Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$\angle AXB = \angle AYC \Rightarrow 180^0 - \angle X'CB = 180^0 - \angle Y'BC \Rightarrow \angle X'CB = Y'BC,$$

συνεπώς $X'Y' \parallel BC$. Έστω τώρα $AS \perp X'Y'$, $X''$, το συμμετρικό του $X'$ ως προς το $S$ και τέλος $T$ το σημείο που η παράλληλη από το $A$ στην $BC$ τέμνει την $XY$.
Παρατηρούμε ότι:

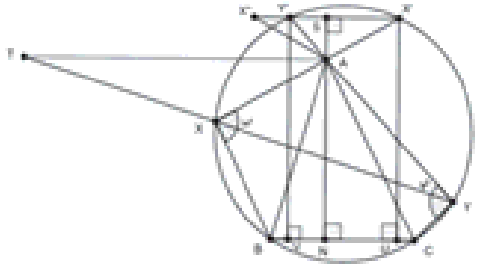
$$\angle TAX = \angle Y'X'A = \angle AYX,$$

συνεπώς η $TA$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AXY$. Αν δείξουμε ότι η απόσταση $TA$ είναι σταθερή, για κάθε επιλογή σημείων $X, Y$, τότε θα έχουμε ότι το σημείο $T$ είναι κι αυτό σταθερό, καθώς ανήκει σε σταθερή ευθεία (την παράλληλη από το $A$ στην $BC$).
Για τον σκοπό αυτό, έστω $\angle AYX = \varphi, \angle AXY = \omega$. Από τον Νόμο Ημιτόνων στα τρίγωνα $AXT, AY'X''$ συνάγουμε ότι

$$\frac{AT}{AX}=\frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu(\omega-\varphi)}\Rightarrow AT=\frac{AX\cdot\eta\mu\omega}{\eta\mu(\omega-\varphi)}=AX\cdot\frac{AX''}{X''Y}=\frac{AX\cdot AX'}{X''S-Y'S}=\frac{AX\cdot AX'}{X'S-Y'S},$$

με τις ισότητες $AX''=AX', X''S=X'S$ να ισχύουν λόγω του ορισμού του $X''$.

Ο αριθμητής του πιο πάνω κλάσματος είναι σταθερός, διότι η ποσότητα $AX\cdot AX'$ ισούται με την δύναμη του σταθερού σημείου $A$ ως προς τον σταθερό κύκλο $\omega$.



Ο παρονομαστής είναι επίσης σταθερός, καθώς αν $U,V,N$ οι προβολές των σημείων $X'$, $Y'$, $A$ πάνω στην $BC$, αντίστοιχα, τότε $BV=CU$ λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου $BY'X'C$, και άρα

$$X'S-Y'S=NU-NY=(NU+UC)-(NV+VB)=NC-NB$$

ποσότητα η οποία σαφώς είναι σταθερή, συνεπώς η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

**Παρατήρηση 1:** Στην πιο πάνω λύση αποδεχθήκαμε σιωπηρά ότι το σημείο $X''$ βρίσκεται εκτός του ευθύγραμμου τμήματος $X'Y'$. Για να το αποδείξουμε αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\omega>\varphi$, ή ισοδύναμα ότι $AX'>AY'$. Είναι,

$$AX'^2-AY'^2=\left(AS^2+SX'^2\right)-\left(AS^2+SY'^2\right)=SX'^2-SY'^2=NU^2-NV^2,$$

και επίσης $CN^2-BN^2=(AC^2-AN^2)-(AB^2-AN^2)=AC^2-AB^2>0$,

Καθώς $AC>AB$. Άρα, έχουμε

$$NU-NV=(NU+UC)-(NV+VB)=NC-NB>0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

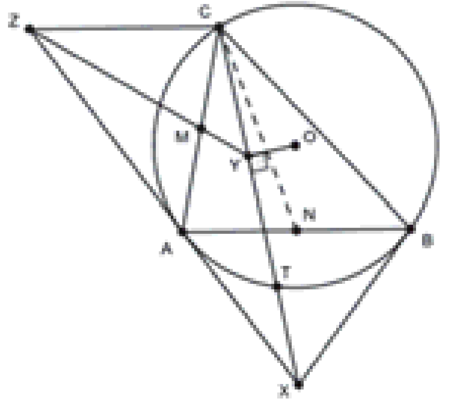
**Παρατήρηση 2:** Ένα λεπτό σημείο της πιο πάνω λύσης είναι ότι το σημείο $T$ ανήκει στα αριστερά του ύψους $AN$. Αυτό, παρόλαυτα, είναι *απαραίτητο* να αποδειχθεί καθώς μόνο τότε εξασφαλίζεται η μοναδικότητα του σημείου $T$ (με δεδομένο ότι η απόσταση $AT$ είναι σταθερή, όπως αποδείξαμε). Προς τούτο, αρκεί να δείξουμε πως $AX<AY$, το οποίο ισχύει καθώς $AX\cdot AX'=AY\cdot AY'$ και $AX'>AY'$, όπως αποδείξαμε στην Παρατήρηση 1.

**Πρόβλημα 2 (Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2022): Έστω $ABC$ ένα οξυγώνιο τρίγωνο τέτοιο, ώστε $CA\neq CB$ με περιγεγραμμένο κύκλο $\omega$ κέντρου $O$ . Έστω $t_A$ και $t_B$ οι εφαπτομένες του $\omega$ στα σημεία $A$ και $B$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο $X$ . Έστω $Y$ το ίχνος της καθέτου από το σημείο $O$ στο ευθύγραμμο τμήμα $CX$. Η παράλληλη από το σημείο $C$ προς την ευθεία $AB$ τέμνει την $t_A$ στο σημείο $Z$. Να δείξετε ότι η ευθεία $YZ$ διέρχεται από το μέσο $M$ του ευθύγραμμου τμήματος $AC$.**

**Λύση:** Από το **Ratio Lemma** (δείτε την Παρατήρηση 1 στο τέλος της λύσης) γνωρίζουμε ότι

$$\frac{AM}{MC}=\frac{AZ}{ZC}\cdot\frac{\eta\mu(\angle AZM)}{\eta\mu(\angle MZC)}\ \text{και}\ \frac{CY}{YX}=\frac{CZ}{ZX}\cdot\frac{\eta\mu(\angle CZY)}{\eta\mu(\angle YZX)}.$$

Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι: $\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CY}{YX}=\frac{AZ}{ZX}$



(παραρατηρήστε ότι η σχέση αυτή προκύπτει και με κατάλληλη εφαρμογή του Θεωρήματος του Μενελάου), συνεπώς για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{CY}{YX}=\frac{AZ}{ZX}.$$

Έστω ότι η $CX$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ABC$ ξανά στο σημείο $T$ και το ευθύγραμμο τμήμα $AB$ στο σημείο $D$.

Από το Θεώρημα του Θαλή γνωρίζουμε πως $\frac{AZ}{ZX}=\frac{CD}{CX}$ και άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{CD}{CX}=\frac{CY}{YX}$$

Αφαιρώντας τον αριθμητή από τον παρονομαστή αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{CD}{DX}=\frac{CY}{TX}\ .$$

Τώρα, ξανά από το Ratio Lemma έχουμε ότι (σε αυτό το πρόβλημα, αλλά και στη συνέχεια του άρθρου, γράφουμε $AB=c, CA=b, BC=a$ για τις πλευρές ενός τρίγώνου $ABC$)

$$\frac{CD}{DX}=\frac{CA}{AX}\cdot\frac{\eta\mu(\angle A)}{\eta\mu(\angle BAX)}=\frac{b}{AX}\cdot\frac{\eta\mu(\angle A)}{\eta\mu(\angle C)}=\frac{ab}{c\cdot AX}$$

και

$$\frac{CY}{TX}=\frac{CT}{2\cdot TX}=\frac{1}{2}\cdot\frac{CA}{XA}\cdot\frac{\eta\mu(\angle CAT)}{\eta\mu(\angle TAX)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{XA}\cdot\frac{\eta\mu(\angle CAT)}{\eta\mu(\angle ACT)}=\frac{b\cdot CT}{2\cdot XA\cdot AT}.$$

Επομένως, για να ολοκληρωθεί η λύση, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{CT}{2\cdot AT}=\frac{a}{c}$ ή ισοδύναμα ότι τα τρίγωνα $CAT$ και $CBN$ είναι όμοια (με $N$ το μέσον της $AB$), το οποίο είναι μια γνωστή ιδιότητα της συμμετροδιαμέσου (δείτε την Παρατήρηση 2).

**Παρατήρηση 1:** Ένα πολύ βασικό λήμμα, το **Ratio Lemma**, και μία νύξη για την απόδειξή του:
**Ratio Lemma:** Έστω τρίγωνο $ABC$ και $D$ ένα εσωτερικό σημείο της $BC$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\eta\mu(\angle BAD)}{\eta\mu(\angle DAC)}.$$

***Απόδειξη:*** Εφαρμόστε κατάλληλα τον Νόμο Ημιτόνων στα τρίγωνα $ADB$ και $ADC$ ■

**Παρατήρηση 2:** Μια βασική ιδιότητα της συμμετροδιαμέσου και η απόδειξή της:
**Λήμμα:** Έστω τρίγωνο $ABC$, $X$ το σημείο τομής των εφαπτομένων του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ABC$ στα σημεία $A$, $B$ και $N$ το μέσον της $AB$. Να αποδείξετε ότι:

$$\angle ACX=\angle BCN, \angle BCX=\angle ACN\ .$$

***Απόδειξη:*** Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του Λήμματος αυτού στη βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μία απόδειξη βασισμένη στον ακόλουθο Ισχυρισμό, που χρησιμοποιείται ευρέως σε τριγωνομετρικές αντιμετωπίσεις.

**Ισχυρισμός:** Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ γωνίες τέτοιες ώστε $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\gamma}=\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\delta}$ και $\alpha+\gamma=\beta+\delta\in(0,\pi)$, τότε:

$$\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta.$$

***Απόδειξη:*** Έστω $\alpha+\gamma=\beta+\delta=t$, και η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{\eta\mu(t-x)}$. Η συνάρτηση $f$ έχει παράγωγο για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu(t-x)+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(t-x)}{\eta\mu^2(t-x)}=\frac{\eta\mu t}{\eta\mu^2(t-x)}>0,$$

καθώς $t \in (0, \pi)$. Συνεπώς, η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1 – 1.
Παρατηρούμε, όμως ότι η δοσμένη συνθήκη γράφεται ως $f(\alpha) = f(\beta)$, επομένως $\alpha = \beta$, και άρα έπεται και ότι $\gamma = t - \alpha = t - \beta = \delta$, όπως θέλαμε ■
Πίσω στην απόδειξη του Λήμματος, παρατηρούμε ότι:
$\frac{\eta\mu(\angle ACN)}{\eta\mu(\angle BCN)} = \frac{BC}{CA}$ (χρησιμοποιείστε το Ratio Lemma, καθώς και ότι $AN = BN$) και

$$\frac{\eta\mu(\angle BCX)}{\eta\mu(\angle ACX)} = \frac{\dfrac{AX}{\eta\mu(\angle ACX)}}{\dfrac{BX}{\eta\mu(\angle BCX)}} = \frac{\dfrac{CX}{\eta\mu(\angle CAX)}}{\dfrac{CX}{\eta\mu(\angle CBX)}} = \frac{\eta\mu(\angle B + \angle C)}{\eta\mu(\angle A + \angle C)} = \frac{BC}{AC},$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\eta\mu(\angle BCX)}{\eta\mu(\angle ACX)} = \frac{\eta\mu(\angle ACN)}{\eta\mu(\angle BCN)},$$

ενώ $\angle BCX + \angle ACX = \angle A = \angle ACN + \angle BCN$.

Συνεπώς, από τον Ισχυρισμό έχουμε ότι:

$$\angle ACX = \angle BCN, \ \angle BCX = \angle ACN$$ ■

**Πρόβλημα 3 [Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 2022]**

**Έστω $ABCDE$ ένα κυρτό πεντάγωνο τέτοιο ώστε $BC = DE$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $T$ στο εσωτερικό του $ABCDE$ για το οποίο $TB = TD, TC = TE$ και $\angle ABT = \angle TEA$. Έστω ότι η ευθεία $AB$ τέμνει τις $CD$ και CT στα σημεία $P$ και $Q$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία $P$, $B$, $A$, $Q$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία τους με αυτή τη σειρά. Έστω ότι η ευθεία $AE$ τέμνει τις $CD$ και $DT$ στα σημεία $R$ και $S$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία $R, E, A, S$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία τους με αυτή τη σειρά. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $P, S, Q, R$ είναι ομοκυκλικά.**

**Λύση [δείτε και στον Ευκλείδη Β, τεύχος 125, σελ. 16]:** Αρχίζουμε την λύση με τον ακόλουθο Ισχυρισμό.

**Ισχυρισμός:** Το τετράπλευρο $QSCD$ είναι εγγράψιμο.

**Απόδειξη:** Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα $TBC, TDE$ είναι ίσα, οπότε είναι και $\angle BTC = \angle ETD$. Άρα, είναι

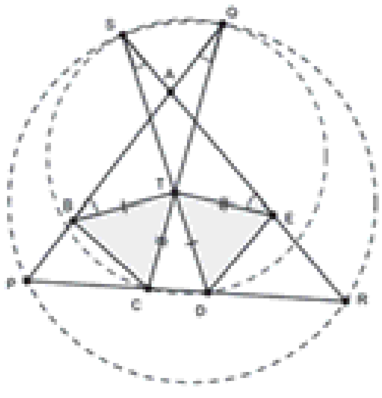
$$\angle AQT = \angle BTC - \angle ABT = \angle ETD - \angle AET = \angle AST.$$

Συνεπώς, από τον Νόμο Ημιτόνων στα τρίγωνα $AST$ και $AQT$, έχουμε

$$\frac{ST}{\eta\mu(\angle SAT)} = \frac{AT}{\eta\mu(\angle AST)} = \frac{AT}{\eta\mu(\angle AQT)} = \frac{QT}{\eta\mu(\angle QAT)},$$

οπότε $\frac{ST}{\eta\mu(\angle SAT)} = \frac{QT}{\eta\mu(\angle QAT)}$, και άρα

$$\frac{ST}{QT} = \frac{\eta\mu(\angle SAT)}{\eta\mu(\angle QAT)}. \qquad (1)$$



Επιπλέον, από τον Νόμο Ημιτόνων στα τρίγωνα $ABT$ και $AET$ είναι

$$\frac{BT}{\eta\mu(\angle BAT)} = \frac{AT}{\eta\mu(\angle ABT)} = \frac{AT}{\eta\mu(\angle AET)} = \frac{ET}{\eta\mu(\angle EAT)}$$

οπότε $\frac{BT}{\eta\mu(\angle BAT)} = \frac{ET}{\eta\mu(\angle EAT)}$ και άρα

$$\frac{TD}{TC} = \frac{BT}{ET} = \frac{\eta\mu(\angle BAT)}{\eta\mu(\angle EAT)} = \frac{\eta\mu(\angle AQT)}{\eta\mu(\angle SAT)}.$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$\frac{TC}{TD} = \frac{\eta\mu(\angle SAT)}{\eta\mu(\angle AQT)}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{ST}{QT} = \frac{TC}{TD}$, άρα $ST \cdot TD = TC \cdot TQ$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο ■

Στο πρόβλημα, από τον Ισχυρισμό είναι $\angle QSD = \angle QCD$. Άρα, έχουμε

$$\angle QSR = \angle QSD - \angle AST = \angle QCD - \angle AQT = \angle QPR,$$

οπότε $\angle QSR = \angle QPR$, που δίνει ότι το τετράπλευρο $QSPR$ είναι εγγράψιμο, όπως θέλαμε.

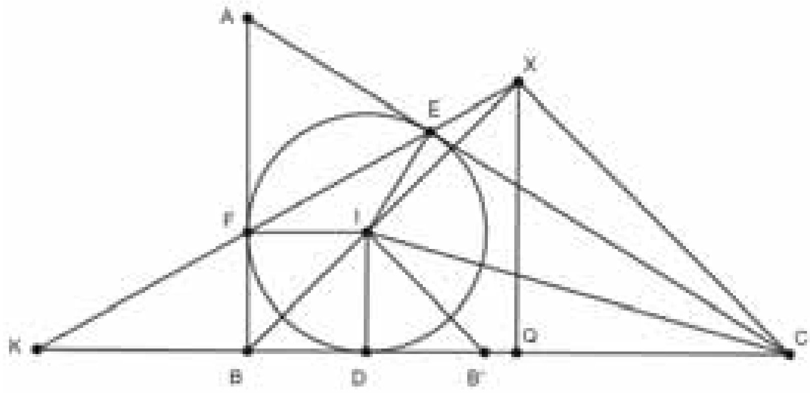
**Πρόβλημα 4 (Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2023): Δίνεται τρίγωνο $ABC$, του οποίου ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στις πλευρές $BC, CA, AB$ στα σημεία $D, E, F$ αντίστοιχα. Δίνεται επιπλέον ότι υπάρχει σημείο $X$ στην ευθεία $EF$ τέτοιο, ώστε $\angle XBC = \angle XCB = 45^0$. Έστω $M$ το μέσο του τόξου $BC$ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ABC$ το οποίο δεν περιέχει το σημείο $A$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $MD$ διέρχεται από το σημείο $E$ ή από το σημείο $F$.**

**Λύση:** Αρχικά, αν ισχύει ότι $AB = AC$, τότε αν $P, Q$ οι προβολές των σημείων $F, X$ πάνω στην $BC$, τότε πρέπει $FP = XQ = \frac{BC}{2}$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$\frac{BC}{2} = FP = FB\eta\mu(\angle B) = BD\eta\mu(\angle B) = \frac{BC}{2}\eta\mu(\angle B),$$

και άρα $\eta\mu(\angle B) = 1$, συνεπώς $\angle B = \angle C = 90^o$, το οποίο είναι σαφώς άτοπο.

Συνεπώς, πρέπει να ισχύει ότι $AB \neq AC$. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $AB < AC$.
Έχουμε τον ακόλουθο Ισχυρισμό.




**Ισχυρισμός:** Ισχύει ότι $\angle B = 90^0$.

**Απόδειξη:** Έστω Q η προβολή του σημείου x πάνω στηνBC και K το σημείο τομής των ευθειών FE και BC. Προφανώς, τοQ είναι το μέσον της BC. Είναι $XQ = \frac{BC}{2}$ και $XQ = KQ\varepsilon\varphi(\angle XKQ)$.

Από το Θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $ABC$ με διατέμνουσα την ευθεία EFK προκύπτει ότι (χρησιμοποιούμε ότι AF=AE) $\frac{KB}{KC} = \frac{BF}{EC}$.

Όμως, αν τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου $ABC$, είναι γνωστό ότι $BF = \tau - b = \frac{\alpha + c - b}{2}$ και

$$EC = \tau - c = \frac{\alpha + b - c}{2}$$

Επομένως, $\frac{KB}{KC}=\frac{\alpha+c-b}{\alpha+b-c}$, το οποίο δίνει, αν αφαιρέσουμε τον αριθμητή από τον παρονομαστή, ότι $KB=\frac{\alpha(\alpha+c-b)}{2b-2c}$. Συνεπώς, $KQ=KB+BQ=\frac{\alpha(\alpha+c-b)}{2b-2c}+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{2(b-c)}$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\angle XKQ=\angle B-\angle KFB=\angle B-\angle AFE=\angle B-\left(\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2}\right)=\frac{\angle B-\angle C}{2}$,

το οποίο εν τέλει μας δίνει ότι $XQ=KQ\varepsilon\varphi(\angle XKQ)=\frac{\alpha^2}{2(b-c)}\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\angle B-\angle C}{2}\right)$.

Καθώς όμως $XQ=\frac{BC}{2}-\frac{\alpha}{2}$, προκύπτει εν τέλει ότι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\angle B-\angle C}{2}\right)=\frac{b-c}{\alpha}$.

Στο σημείο αυτό, προκειμένου να χειριστούμε αποτελεσματικά τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\angle B-\angle C}{2}$, χρησιμοποιούμε την εξής τεχνική (την οποία είδαμε και στο Πρόβλημα 1): έστω $B'$ το συμμετρικό του $B$ ως προς το $D$. Τότε, αν $I$ το έγκεντρο του τριγώνου $ABC$, από τον Νόμο Ημιτόνων στο τρίγωνο $IB'C$ προκύπτει ότι

$$\frac{B'C}{\eta\mu(\angle B'IC)}=\frac{IC}{\eta\mu(\angle IB'C)}=\frac{IC}{\eta\mu(\angle IBC)}=\frac{BC}{\eta\mu(\angle BIC)},$$

και αφού $\angle B'IC=\frac{\angle B-\angle C}{2}$ και $\angle BIC=90^o+\frac{\angle A}{2}$, λόγω της πιο πάνω ισότητας μετ ά από πράξεις καταλήγουμε ότι $\text{συν}\left(\frac{\angle B-\angle C}{2}\right)=\text{συν}\frac{\angle A}{2}$, και έτσι συνάγουμε ότι $\frac{\angle B-\angle C}{2}=\frac{\angle A}{2}$, που δίνει άμεσα ότι $\angle B=90^0$, όπως θέλαμε. ■

Πίσω στο πρόβλημα, παρατηρούμε ότι, λόγω του Ισχυρισμού, είναι $DI = DB$ και $FI = FB$, ενώ από την άλλη λόγω γνωστού Λήμματος $MI = MB$, όπερ σημαίνει τα σημεία $M,D,F$ ανήκουν στην μεσοκάθετο του $BI$, άρα είναι συνευθειακά, όπως θέλαμε.Ολοκληρώνοντας το άρθρο, μερικά επιπλέον προβλήματα που μπορούν να λυθούν με χρήση των τεχνικών που αναπτύξαμε πιο πάνω είναι τα εξής (τα προβλήματα μπορούν εύκολα να βρεθούν στο internet):

1. International Mathematical Olympiad 2023, Problem 2
2. European Mathematical Cup 2023, Senior Category, Problem 2
3. European Mathematical Cup 2023, Junior Category, Problem 3
4. European Girls Mathematical Olympiad 2023, Problem 3
5. United States of America Team Selection Test 2023, Problem 2
6. United States of America Mathematical Olympiad 2014, Problem 5
7. Asian Pacific Mathematical Olympiad 2021, Problem 3.

Τέλος, προτείνεται μια ενδεικτική βιβλιογραφία σχετικά με αυτή τη θεματολογία ασκήσεων και τεχνικών.


1. Στεργίου, Χ., Μπραζιτίκος, Σ., *Μαθηματικοί Διαγωνισμοί 2*, Εκδόσεις Σαββάλας, 2013.
2. Andreescu, T., Pohoata, C., Korsky, S., *Lemmas in Olympiad Geometry*, XYZ Press, 2016.
3. Φελλούρης, Α., Ψύχας, Ε., *Γεωμετρία για Μαθηματικούς Διαγωνισμούς, Τόμος Β'*, Έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2023.
4. *Ratio Lemma Handout*, από τον χρήστη του AoPS mira74, μπορεί να βρεθεί στην διεύθυνση https://artofproblemsolving.com/community/q1h2357938p19166714 (ανακτήθηκε στις 31 Δεκεμβρίου 2023).
5. *Trigonometry and Analytic Tools in Olympiad Geometry Problems, Part I*, από τον συγγραφέα, μπορεί να βρεθεί στην διεύθυνση https://artofproblemsolving.com/community/c6h3222605p29491410 (ανακτήθηκε στις 31 Δεκεμβρίου 2023).

# HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

***συντακτική επιτροπή***: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

## *Ια. τι είναι τα Μαθηματικά*

### *ο Ian Stewart για τα Μαθηματικά*

Ο Ian Stewart στο βιβλίο του «οι αριθμοί της φύσης» (εκδόσεις: "ΚΑΤΟΠΤΡΟ" (1996)), απαντώντας στο ερώτημα "**τί θέλουμε να αποκομίσουμε από τα Μαθηματικά;**", απαντά: «Κάθε μόρφωμα της φύσης είναι και ένας γρίφος, σχεδόν πάντοτε δυσεπίλυτος. Τα Μαθηματικά αποτελούν θαυμάσιο βοηθό στην επίλυση γρίφων. Αποτελούν έναν λίγο-πολύ συστηματικό τρόπο ανακάλυψης των κανόνων και των δομών που κρύβονται πίσω από κάποιο παρατηρούμενο μόρφωμα ή μια κανονικότητα, αλλά και επακόλουθης χρήσης αυτών των κανόνων και δομών προκειμένου να εξηγηθεί αυτό που συμβαίνει. Πράγματι, τα Μαθηματικά και η κατανόησή μας για τη φύση έχουν αναπτυχθεί παράλληλα, το ένα ενισχύοντας το άλλο. …… Αναλύοντας με μαθηματικό τρόπο τις αστρονομικές παρατηρήσεις του σύγχρονού του Δανού αστρονόμου **Tycho Brahe** ο Kepler κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι πλανήτες κινούνται σε ελλείψεις. Η έλλειψη είναι μια ωοειδής καμπύλη που είχε μελετηθεί εκτενώς από τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες, αλλά οι αρχαίοι αστρονόμοι είχαν προτιμήσει να χρησιμοποιήσουν κύκλους, ή συστήματα κύκλων για να περιγράψουν τις τροχιές˙ έτσι το σύστημα του Kepler υπήρξε ριζοσπαστικό για την εποχή του.

## *Ι$_{β}$. συνέχεια από το προηγούμενο τεύχος*

*Διαχρονικά οι κυριότερες απόψεις για τη φύση των Μαθηματικών (από την διδακτορική εργασία του Βασίλη Λιόση)* (β΄ συνέχεια-τελευταία)

• **Immanuel Kant** [1724-1804] Ο Kant, ένας από τους πιο μεγάλους φιλοσόφους, ιδρυτής του γερμανικού ιδεαλισμού ,έγραφε για τα Μαθηματικά: «Ο χώρος και ο χρόνος είναι εκείνες οι εποπτείες, τις οποίες τα καθαρά Μαθηματικά θέτουν ως βάση όλων των γνώσεων και κρίσεων τους, οι οποίες θεωρούνται ως αποδεικτικές και συνάμα αναγκαίες˙ γιατί τα Μαθηματικά οφείλουν να παρουσιάζουν, δηλαδή να κατασκευάζουν, όλες τις έννοιές τους πρώτα μέσα στην εποπτεία, και τα καθαρά Μαθηματικά μέσα στην καθαρή εποπτεία…»

• **Jules Henri Poincaré** [1854-1912] Για τα Μαθηματικά ο Poincaré υποστηρίζει ότι: «οι μαθηματικές αλήθειες προκύπτουν από μικρό αριθμό προφανών προτάσεων μέσω μιας αλυσίδας ανεπίληπτων συλλογισμών που επιβάλλονται όχι μόνο σε εμάς αλλά και στην ίδια τη φύση. Δεσμεύουν, σα να λέμε, το δημιουργό κι επιτρέπουν σε αυτόν να εκλέξει μόνο μεταξύ κάποιων λύσεων σχετικώς ευαρίθμων»

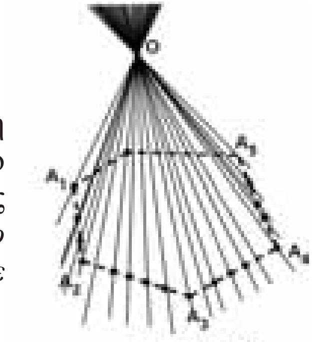
- **Godfrey Harold Hardy** [1877-1947] Κατά τον Hardy, τα καθαρά και τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά διαχωρίζονται με ένα σινικό τείχος, παραπέμποντας κατά ένα τρόπο στην πλατωνική θεώρηση των θεωρητικών κι εφαρμοσμένων Μαθηματικών

- **Aleksandr Danilovich Aleksandrov** [1912-1999] «Το αντικείμενο των Μαθηματικών, είναι οι μορφές εκείνες και οι σχέσεις της πραγματικότητας, που αντικειμενικά κατέχουν τέτοιο βαθμό αδιαφορίας απέναντι στο περιεχόμενο, ώστε μπορούν ολοκληρωτικά να αποσπαστούν από αυτό και να προσδιοριστούν γενικά, με τέτοια σαφήνεια και ακρίβεια, με τη διατήρηση τέτοιου πλούτου συνδέσεων, με σκοπό να αποτελέσουν τη βάση για καθαρά λογική ανάπτυξη της θεωρίας»

## ***ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου***

### ***ΠΥΡΑΜΙΔΑ***

***μια επιφάνεια που γεννά πυραμίδες.*** Δίνεται μια κλειστή, επίπεδη πολυγωνική γραμμή, $A_1A_2A_3...A\nu$, κι ένα σημείο Ο έξω από το επίπεδο αυτής της πολυγωνικής γραμμής. Κάθε ένα σημείο της δοσμένης πολυγωνικής γραμμής, ορίζει, με το σημείο Ο, από μια ευθεία. *Το σύνολο όλων αυτών των ευθειών, ορίζουν μια επιφάνεια, που συμβολίζεται με* $O.A_1A_2A_3...A\nu$. 0 (σχήμα 25.01)



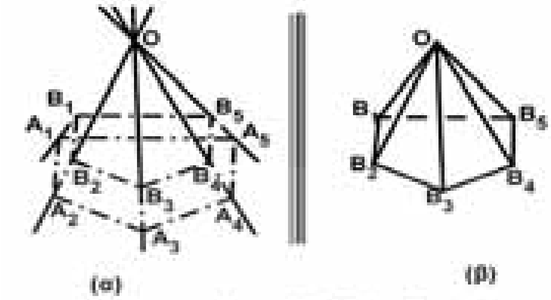
σχήμα 25.01

***ορισμός 01. (γεννήτρια πυραμίδων)***
Την επιφάνεια της προηγούμενης παραγράφου θα ονομάζουμε *γεννήτρια Πυραμίδων*.

***στοιχεία της γεννήτριας πυραμίδων.***

- η δοσμένη πολυγωνική γραμμή $A_1A_2A_3...A\nu$, λέγεται *οδηγός* της γεννήτριας
- το σημείο Ο λέγεται *κορυφή* της γεννήτριας
- κάθε μια από τις ευθείες που αποτελούν τη γεννήτρια πυραμίδων, λέγεται *γενέτειρα* αυτής
- οι γενέτειρες που αντιστοιχούν στις κορυφές της οδηγού, λέγονται *ακμές* της γεννήτριας.

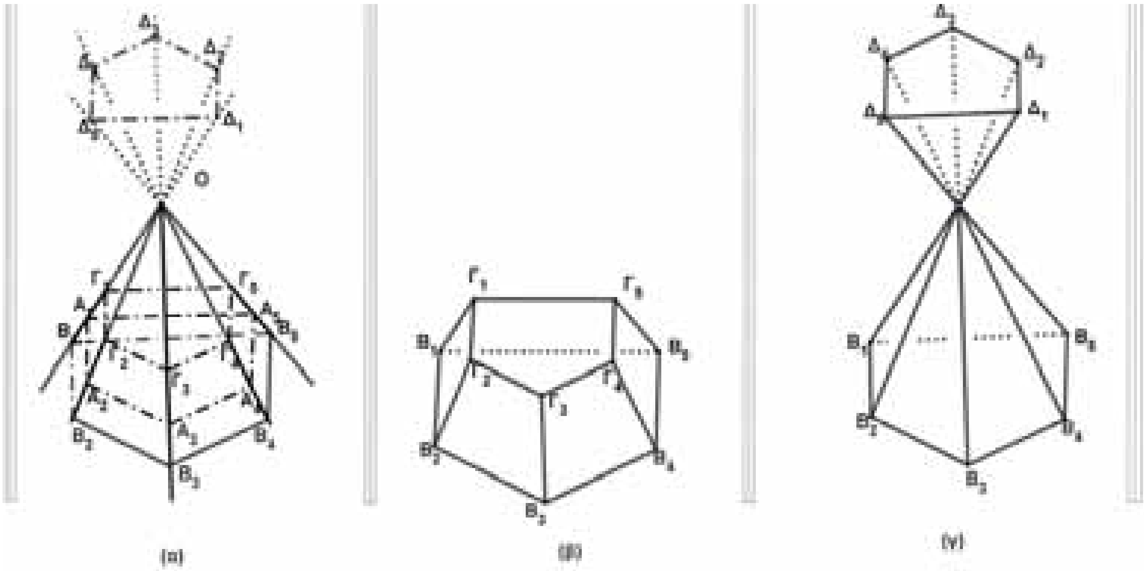
***ορισμός 02. (πυραμίδα)*** *Δίνεται μια γεννήτρια πυραμίδων, την οποία τέμνουμε με δυο επίπεδα παράλληλα προς την οδηγό. Το μέρος της πυραμίδας πυραμίδας που βρίσκεται ανάμεσα από τις τομές αυτές, καθώς και τα εσωτερικά σημεία αυτών των τομών, λέγεται πυραμίδα.* (σχήματα 25.03(α,β,γ))



σχήμα 25.02(α,β)

***πλήρης πυραμίδα.***
Δίνεται μια γεννήτρια πυραμίδα Ο. $A_1A_2A_3A_4A_5$. Τέμνουμε αυτή τη γεννήτρια με δυο επίπεδα (Π), (Ρ), παράλληλα προς το $A_1A_2A_3A_4A_5$, σε τρόπο που το (Ρ) να περνά από την κορυφή Ο και το (Π) τέμνει τις ακμές της γεννήτριας, στα $B_1B_2B_3B_4B_5$. η πυραμίδα Ο. $B_1B_2B_3B_4B_5$, λέγεται πλήρης πυραμίδα ή, απλά, πυραμίδα. (σχήμα 25.02(α,β))

***κόλουρη πυραμίδα Α΄ είδους.*** (σχήμα 25.03(β))
Δίνεται μια γεννήτρια πυραμίδων $O.A_1A_2A_3A_4A_5$. Τέμνουμε αυτή τη γεννήτρια με δυο επίπεδα (Π),(Ρ), παράλληλα προς την οδηγό $A_1A_2A_3A_4A_5$, σε τρόπο που η κορυφή Ο να βρίσκεται ανάμεσα απ' αυτά τα δυο επίπεδα, και τα (Π),(Ρ), να τέμνουν τις ακμές $OA_1,OA_2,OA_3,OA_4,OA_5$, στα $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5$, και $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5$ αντίστοιχα. Η πυραμίδα $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5.B_1,B_2,B_3,B_4,B_5$, λέγεται *κόλουρη πυραμίδα α΄ είδους*.



*σχήμα 25.03(α,β,γ)*

*κόλουρη πυραμίδα Β΄ είδους*. (25.03(γ)) *Δίνεται μια γεννήτρια πυραμίδων Ο. $Α_1Α_2Α_3Α_4Α_5$. Τέμνουμε αυτή τη γεννήτρια με δυο επίπεδα (Π), (Ρ), παράλληλα προς την οδηγό $Α_1Α_2Α_3Α_4Α_5$, σε τρόπο που η κορυφή Ο να βρίσκεται ανάμεσα απ' αυτά τα δυο επίπεδα, και τα (Π), (Ρ), να τέμνουν τις ακμές $ΟΑ_1, ΟΑ_2, ΟΑ_3, ΟΑ_4, ΟΑ_5$, στα $Β_1, Β_2, Β_3, Β_4, Β_5$, και $Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5$ αντίστοιχα. Η πυραμίδα $Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5.Β_1, Β_2, Β_3, Β_4, Β_5$, λέγεται κόλουρη πυραμίδα.*

## *ΙΙΙ. Αυτό το ξέρατε;*

***τί είναι η μαθηματικοποίηση της γνώσης;***

## *IV. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε";*

Στο ερώτημα αυτό δεν μπορούμε να απαντήσουμε συντομογραφικά, αφού αυτό το φαινόμενο, στην επιστήμη των Μαθηματικών, αποτελεί ένα από τα σπουδαιότερα άλματα στην πορεία της ανθρώπινης γνώσης, προς τα ΄μπρος. Για να μη δημιουργηθούν ασάφειες, θα αφιερώσουμε σαν απάντηση σ΄ αυτό το ερώτημα δυο συνέχειες.

### *εισαγωγικά*

***Είναι γνωστό, ότι κανένα υλικό αντικείμενο ή σύστημα αντικειμένων, ακόμα και οι υπαρκτές στην πραγματικότητα συνδέσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους δεν ήταν, ούτε είναι άμεσα αντικείμενα της μαθηματικής μελέτης. Για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα μαθηματικά μέσα για την μελέτη των υπαρκτών στην πραγματικότητα διαδικασιών, φαινομένων ή μεμονωμένων αντικειμένων, είναι απαραίτητο να κατασκευαστούν τα μαθηματικά τους μοντέλα.***

***Μαθηματικά μοντέλα συνηθίζεται να ονομάζονται τα συστήματα των μαθηματικών σχέσεων, που περιγράφουν συμβολικά τις υπό μελέτη διαδικασίες ή φαινόμενα. Για τη συγκρότηση των μαθηματικών μοντέλων χρησιμοποιούνται ποικίλα μαθηματικά μέσα: εξισώσεις (αλγεβρικές, διαφορικές, ολοκληρωτικές), γραφήματα, πίνακες και σχήματα, σχέσεις της μαθηματικής Λογικής, γεωμετρικές κατασκευές κλπ. Η κατασκευή, η μελέτη και η εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων — αυτό είναι το βασικό είδος της δραστηριότητας των μαθηματικών.***

*μέρος Β΄ (μαθηματικοποίηση)*

## *μαθηματικοποίηση των επιστημών*

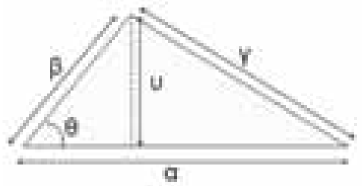
Γρήγορα αλλάζει η δομή των Μαθηματικών και το ίδιο γρήγορα αλλάζει και ο χαρακτήρας της μαθηματικής εργασίας. Ποιό είναι όμως το κύριο, το βασικό σ' αυτήν την θυελλωδώς διεξαγόμενη διαδικασία; Θα κάνουμε πάνω σ' αυτό δύο παρατηρήσεις, χωρίς να επιδιώκουμε την εξαντλητική διαφώτιση του ζητήματος:

**α.** σήμερα, όπως και σε όλες τις ιστορικές περιόδους, τα μαθηματικά μέσα που υπάρχουν αποδείχνονται ανεπαρκή. Η ανάπτυξη της επιστήμης απαιτεί την κατασκευή νέων συστημάτων. Αυτό ανοίγει ανεξάντλητες δυνατότητες για την παραπέρα εξέλιξη των Μαθηματικών.

**β.** η ανάπτυξη της ταχύρρυθμης υπολογιστικής τεχνικής καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη των διαφόρων λογικό - μαθηματικών συστημάτων, από την οποία εξαρτάται και η ίδια. Εκτός αυτού, η αξιοποίηση των διατιθέμενων υπολογιστικών μηχανών απαιτεί τη χρησιμοποίηση εξαιρετικά **μεγάλου αριθμού μαθηματικών μέσων** (αλγοριθμικών γλωσσών, μεταφραστών, προγραμμάτων, αλγορίθμων κλπ.), τα οποία πήραν γενικευμένη ονομασία «μαθηματικός εξοπλισμός» (software) των υπολογιστικών μηχανών. Απ' αυτή την άποψη για τα σύγχρονα Μαθηματικά είναι χαρακτηριστική η δημιουργία νέων τυπικών γλωσσών.

## *μαθηματικοποίηση της γνώσης*

Η πιο γενική θεωρία είναι η τυπική Λογική. Τα αξιώματα της και τα πορίσματα της έχουν επαληθευτεί από την ανθρώπινη σκέψη σε κάθε πλευρά της ανθρώπινης κοινωνίας από τη γέννηση της μέχρι σήμερα. Στην σημερινή της μορφή κι από την άποψη της μαθηματικής Λογικής αποτελεί προϊόν της εξέλιξης και της προόδου. Παρακινεί όλα τα ορθολογιστικά ανθρώπινα ζητήματα. Οι ανθρώπινες δραστηριότητες λογικοποιούύνται. Σε κάθε φυσιολογική ανθρώπινη κοινωνία υπάρχει η «λογικοποίηση», μαθηματικές θεωρίες έρχονται αμέσως μετά την τυπική Λογική και έχουν βαθμούς γενικότητας και συνέχειας, όπως και βαθμούς επαλήθευσης με την αντικειμενική πραγματικότητα. Τα Μαθηματικά ειδικότερα, μπορούν να εισχωρήσουν σ' όλες τις επιστήμες σε κάποιο ορισμένο στάδιο της ανάπτυξης τους. Τότε λέμε ότι οι επιστημονικές δραστηριότητες έχουν «μαθηματικοποιηθεί».




*«Το φαινόμενο της μαθηματικοποίησης υπάρχει στην Επιστήμη και στις εφαρμογές της. Με το πέρασμα των αιώνων έχει περιλάβει διάφορες ανθρώπινες δραστηριότητες. Είναι αναγκαίο να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή σ' αυτό το πρόβλημα»*

## *επιστημονικοτεχνική επανάσταση*

Η εποχή μας άρχισε ως επιστημονική επανάσταση με τη διαμόρφωση των βασικών καθολικών μαθηματικών δομών. Μετατράπηκε σε επιστημονικοτεχνική με τη δημιουργία της υπολογιστικής τεχνολογίας και την κατάληξη της στο στάδιο των Η.Υ. της μαθηματικής πληροφορικής. Τα μέσα αυτά εισχώρησαν γρήγορα στους προετοιμασμένους γι' αυτό τομείς της Μηχανικής, της Φυσικής, της Τεχνικής, της Μετεωρολογίας, της Γεωφυσικής. Καθοριστικό αποτέλεσμα ωστόσο προέκυψε από τη διείσδυσή τους στις σαφώς ώριμες ανάγκες των άλλων φυσικών, κοινωνικών και ανθρωπιστικών επιστημών, όπως η Βιολογία, οι οικονομικές επιστήμες, η Γλωσσολογία. Η δυνατότητα να φτάσει σ' αυτήν την κατάσταση κάθε επιστήμη ή μια σύνθεση επιστημών ως σύνολο καθορίζει τις προοπτικές της επιστημονικοτεχνικής επανάστασης στη σύγχρονη εποχή.

Οι μέθοδοι και τα μέσα της επιστημονικοτεχνικής επανάστασης εξασφαλίζουν την αυτοματοποίηση των διαδικασιών που κατακτήθηκαν και μάλιστα με ιλιγγιώδη ταχύτητα. Έτσι έχουμε εξαιρετική αποδοτικότητα της επιστήμης και της πρακτικής.

Βασική μέθοδος της επιστημονικοτεχνικής επανάστασης είναι η ολική μέθοδος της γενικευμένης πληροφορικής των Η.Υ.

Βασικό μέσο της σύγχρονης επιστημονικοτεχνικής επανάστασης είναι η υπολογιστική τεχνολογία.

## *μέρος Β΄ (μαθηματικό μοντέλο)*

### *ΙΙ. η έννοια ΄΄μοντέλο΄΄*

Η συμμετοχή των Μαθηματικών **στη μελέτη της υλικής πραγματικότητας** έχει τις δικές της ιδιαιτερότητες. Είναι γνωστό, ότι κανένα υλικό αντικείμενο ή σύστημα αντικειμένων, ακόμα και οι υπαρκτές στην πραγματικότητα συνδέσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους δεν ήταν, ούτε είναι άμεσα αντικείμενα της μαθηματικής μελέτης. Για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα μαθηματικά μέσα για την μελέτη των υπαρκτών στην πραγματικότητα διαδικασιών, φαινομένων ή μεμονωμένων αντικειμένων, είναι απαραίτητο να κατασκευαστούν τα μαθηματικά τους μοντέλα.

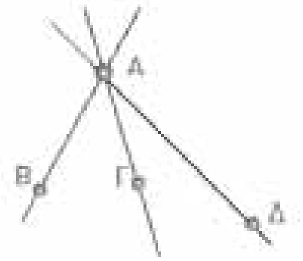
«*Μαθηματικά μοντέλα συνηθίζεται να ονομάζονται τα συστήματα των μαθηματικών σχέσεων, που περιγράφουν συμβολικά τις υπό μελέτη διαδικασίες ή φαινόμενα. Για τη συγκρότηση των μαθηματικών μοντέλων χρησιμοποιούνται ποικίλα μαθηματικά μέσα εξισώσεις (αλγεβρικές, διαφορικές, ολοκληρωτικές), γραφήματα, πίνακες και σχήματα, σχέσεις της μαθηματικής Λογικής, γεωμετρικές κατασκευές κλπ. Η κατασκευή, η μελέτη και η εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων — αυτό είναι το βασικό είδος της δραστηριότητας των μαθηματικών. Σ' αυτό συνίσταται το βασικό τους πρόβλημα*» [02].

Οι δυνατότητες για την ανακάλυψη νέου αντικειμένου μοντελογράφησης αναμένονταν στα αυτόματα της ζωντανής ύλης. Όμως τώρα τα μοντελοποιημένα αυτόματα σ' αυτόν τον τομέα καλύπτονται από τη γλώσσα και τα μέσα των διακριτών Μαθηματικών. Τα τεχνητά αυτόματα της σύγχρονης υπολογιστικής τεχνολογίας επίσης περιέχονται στη γλώσσα και τα μέσα των βασικών δομών.

### *"λύση" του μαθηματικού μοντέλου*

Σε κάθε χωριστή περίπτωση της μαθηματικής έρευνας των διαδικασιών στα Μαθηματικά, ή και εκτός των Μαθηματικών, υπάρχουν δυο στάδια: 1) Η **εξεύρεση του μαθηματικού μοντέλου** των φαινομένων που μελετάμε, η μετατροπή του υπό μελέτη προβλήματος σε μαθηματικό και 2) **η λύση του μαθηματικού μοντέλου,** δηλ. η επεξεργασία της πληροφορίας που περιέχει. Σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση της μαθηματικής μελέτης εφαρμόζονται και οι δυο μέθοδοι, δηλ. η μαθηματική μοντελογράφηση και η μαθηματική πληροφορική κι' έχουμε ενιαία διαδικασία.

Θα γενικεύσουμε τις έννοιες μας, αν αυτή την ενιαία διαδικασία την ονομάσουμε ανάλογα με την περίπτωση **γενικευμένη μαθηματική μοντελογράφηση ή γενικευμένη μαθηματική πληροφορική.**

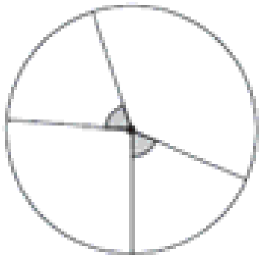



### *ΙΙ. για την ουσία της κατασκευής μοντέλων*

Η κατασκευή μοντέλων δεν αποτελεί την ιδιότυπη μέθοδο επιστημονικής έρευνας που χαρακτηρίζει μόνο τη μαθηματική έρευνα.

Η εξέταση των υπό μελέτη αντικειμένων βάσει των μοντέλων τους είναι διαδομένη παντού και εκδηλώνεται με τις πιο διαφορετικές μορφές.

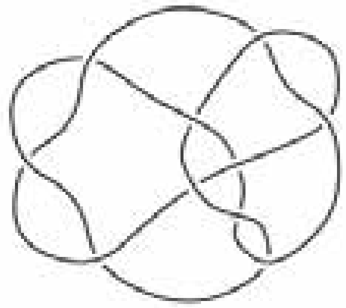
Ο ίδιος ο όρος «μοντέλο» δεν απόκτησε ομοιότυπες ή έστω και ταυτιζόμενες ως προς το νόημα ερμηνείες. Ανάλογα με τις περιστάσεις λένε και γράφουν για μακέτες, για υλικά, φυσικά, τεχνικά, συμβολικά και άλλα μοντέλα, για κώδικες, οχήματα κλπ. Ο όρος, αφού εισαχθεί και χρησιμοποιηθεί σε ειδικές, συγκεκριμένες καταστάσεις, εισάγεται κατόπιν στην επιστημονική, τεχνική, γλωσσική πρακτική των ανθρώπων και καθιερώνεται από τις παραδόσεις. Έξω από τα πλαίσια του περιεχομένου δε γίνεται κατορθωτό να ορίσουμε τον όρο «μοντέλο».



Γεννιούνται ερωτήματα για τα αίτια της απροσδιοριστίας του όρου «μοντέλο», για τις γνωσιολογικές βάσεις της διαδικασίας κατασκευής μοντέλου, για τις ιδιαιτερότητες και δυνατότητες της.

Από γενική φιλοσοφική σκοπιά είναι προφανές, ότι η ανάλυση της διαδικασίας κατασκευής μοντέλου, παρ΄ όλη την πολυμορφία της, πρέπει να ξεκινάει από την αναγνώριση της πραγματικής ύπαρξης των υπό κατασκευή αντικειμένων, από την αναγνώριση της ύπαρξης της αντικειμενικής πραγματικότητας γενικά. Αυτή η ανάλυση πρέπει να γίνεται με βάση τη θεμελιακή αρχή της γνωσιοθεωρίας, δηλ. της θεωρίας της αντανάκλασης.

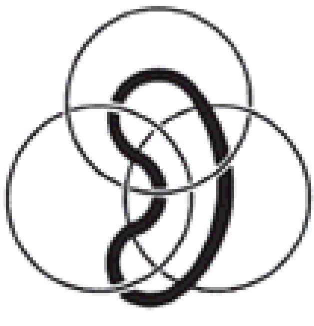
Η απεικόνιση της αντικειμενικά υπαρκτής πραγματικότητας είναι μια σύνθετη διαδικασία της επιστημονικής γνώσης. Η διάκριση μέσα σ' αυτήν την διαδικασία της ειδικής πλευράς της κατασκευής μοντέλου αποδεικνύεται ότι δεν είναι καθόλου απλό πρόβλημα. Επιπλέον, αυτό το πρόβλημα απέχει ακόμα πολύ από τη λύση του. Στην κατανόηση του υπάρχουν διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις. Ο αριθμός τους είναι πολύ μεγάλος.



Όσον αφορά τη γνωσιολογική φύση της κατασκευής μοντέλου, αυτή είναι όχι μόνο ειδική τεχνική γνωστικού χαρακτήρα , η οποία χρησιμοποιείται από την επιστήμη, αλλά και σημαντικό μέρος της επιστημονικής γνώσης γενικά, η πιο συχνά εφαρμοζόμενη μέθοδός της.

### *Οι διαφορετικές κατανοήσεις που υπάρχουν σήμερα για το πρόβλημα της κατασκευής μοντέλων.*

Οι διαφορετικές κατανοήσεις που υπάρχουν σήμερα για το πρόβλημα της κατασκευής μοντέλων έχουν τις ρίζες τους στη διαφορετική κατανόηση των λογικών βάσεων και της πρακτικής της μοντελοκατασκευής. Και το θέμα δε βρίσκεται μόνο στη διαφορά των πεποιθήσεων.



Μη επιδιώκοντας την πλήρη έκθεση όλου του πλέγματος των δύσκολων φιλοσοφικών προβλημάτων, συνδεμένων με τη θεωρία και την πρακτική της κατασκευής μοντέλων, ας δοκιμάσουμε να διατυπώσουμε εκείνα τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας αυτής, που θα μας χρειαστούν κατά κύριο λόγο για την περιγραφή της κατασκευής των μαθηματικών μοντέλων: *«α) σε κάθε μεμονωμένη περίπτωση θα πρέπει να εκπονηθεί και να γίνει αποδεκτή μια όσο το δυνατόν ακριβέστερη έννοια του μοντέλου, που να μην επιτρέπει διαφορετικές ερμηνείες, β) το μοντέλο πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε να μπορεί να αντικαθιστά στις μελέτες τα αντικείμενα, να έχει μ' αυτά όμοια χαρακτηριστικά (ευδιάκριτες ποσοτικές σχέσεις, γεωμετρικά σχήματα, ισόμορφες δομές, αναλογίες κλπ.)»*

*(η συνέχεια στο επόμενο τεύχος 132)*

Τάξη: Α΄

# "στιγμές" ... μέσω θεμάτων ... από προόδους και συναρτήσεις

*Σωτήρης Ε. Λουρίδας*

*Σημασία έχει, να επιχειρήσουμε να δώσουμε ένα στίγμα για το πώς σκεφτόμαστε την μετουσίωση της θεωρίας σε πράξη, μέσω της επίλυσης Μαθηματικών θεμάτων με βάση την Λογική, ώστε να δίνεται η απάντηση στο νοερό ερώτημα:* ***Πώς το σκέφτηκες;***

*Δεν πρέπει βέβαια να ξεχνάμε ότι κινούμαστε στο περιβάλλον των «Συμβολιστικών Μαθηματικών». Εδώ έχει καθοριστικό ρόλο η σωστή μετάφραση από τα Ελληνικά στα Μαθηματικά και αντίστροφα, για παράδειγμα ο τύπος παραγωγής όρων $\alpha_n = 2n^2 - 2,\ n = 1,2,3,\dots,n_0,\dots$, για την τιμή $n = 3$ αναφέρεται σε πλήθος έως εκεί* ***τριών όρων****, όπου ο* ***τρίτος όρος*** *είναι ο $\alpha_3 = 2\cdot 3^2 - 2 = 16$, οπότε αναφερόμαστε στον τρίτο όρο της ακολουθίας και την τιμή του και αυτό έχει τη σημασία του αφού λειτουργεί «μέσα μας» ότι ένας θετικός ακέραιος μπορεί να εκφράζει* ***τιμή ή σειρά ή πλήθος****. Επίσης, άλλο η φράση «Οι αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma$ είναι όροι προόδου, όπου εδώ* ***δεν*** *έχουμε πληροφορία για την αντίστοιχη τάξη τους» και άλλο η φράση «οι αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αποτελούν πρόοδο», όπου εδώ η πρόοδος θεωρείται καθ' αυτή η τετράδα των αριθμών αυτών, οπότε άμεσα έχουμε και τις αντίστοιχες τάξεις των $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.*

*Στο περιβάλλον των συναρτήσεων όταν θέλουμε τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R},\ y = f(x)$, θεωρούμε την $y = f(x)$, εξίσωση ως προς $x \in A$ και τη μεταβλητή $y$ σε ρόλο παραμέτρου που τη προσδιορίζουμε, ώστε η εξίσωση αυτή να έχει λύση που να ανήκει στο σύνολο $A$ κτλ. Εδώ ας επαναλάβουμε με έμφαση ότι ο τύπος $y = f(x)$, «παραγωγής» στοιχείων $y$ με βάση τον «μηχανισμό» $f(x)$ αποκτά νόημα μόνο όταν γνωρίζουμε το σύνολο $A$ (πεδίο ή σύνολο ορισμού της συνάρτησης) που ήδη είδαμε και που τα στοιχεία του είναι οι τιμές που παίρνει το $x$ για να προκύψουν οι αντίστοιχες τιμές του $y$.*

## Πρόοδοι (Αριθμητική, Γεωμετρική)

### Άσκηση 1η:

*Το πρόβλημα της παρεμβολής αριθμητικών ενδιάμεσων.*

**Δίνονται δύο αριθμοί $\alpha,\beta$. Να παρεμβληθούν $\mu$ αριθμητικοί ενδιάμεσοι (ή μέσοι) μεταξύ των αριθμών αυτών, ώστε δηλαδή μαζί με τους $\alpha,\beta$ να συνιστούν αριθμητική πρόοδο.**

Λύση:

Ουσιαστικά μας ζητούν την κατασκευή αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο τον $\alpha$ τελευταίο τον $\beta$ και πλήθος όρων $\mu+2$. Για να το επιτύχουμε αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε την διαφορά $\omega$ της αριθμητικής προόδου, για τεθεί σε κίνηση η διαδικασία της δημιουργίας της προόδου. Έτσι από τον τύπο που δίνει τον *νιοστό* όρο της αριθμητικής προόδου και αν θεωρήσουμε $\alpha_1 = \alpha, \alpha_\nu = \beta, \nu = \mu+2$, παίρνουμε

$$\beta = \alpha + (\mu+1)\omega \Leftrightarrow \beta - \alpha = (\mu+1)\omega \Leftrightarrow \boxed{\omega = \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}}$$

Η ζητούμενη λοιπόν αριθμητική πρόοδος είναι:

$$\alpha,\ \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \alpha + 3\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \dots,\ \alpha + \mu\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \beta$$

Ας αναφέρουμε εδώ ότι, για την ***παρεμβολή μ γεωμετρικών ενδιαμέσων*** μεταξύ δύο δοθέντων αριθμών $\alpha,\beta$, ώστε μαζί με τα $\alpha,\beta$ να συνιστούν γεωμετρική πρόοδο. Τότε, με αντίστοιχες κινήσεις παίρνουμε τον λόγο της $\lambda = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$ ...

***Επισήμανση***: Είναι πλέον σαφές ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε και δικά μας προβλήματα αυτού του είδους. Για παράδειγμα: Να παρεμβληθούν τέσσερις γεωμετρικοί ενδιάμεσοι μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης των ριζών της εξίσωσης $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

### Άσκηση 2η:

**Αν η παράσταση $x^2 + \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\alpha(\beta-\gamma)}xy + \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha(\beta-\gamma)}y^2$, με $\alpha\beta\gamma(\beta-\gamma) \neq 0$, είναι τέλειο τετράγωνο, τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.**

**Λύση:**

Η φράση κλειδί «…η παράσταση είναι τέλειο τετράγωνο…», και επειδή ο συντελεστής του $x^2$ είναι η μονάδα, μας παραπέμπει στην θεώρηση ότι αυτό λαμβάνει την μορφή

$$(x+ky)^2 = x^2 + 2kyx + k^2y^2,$$

που αν θεωρηθεί τριώνυμο ως προς $x$ έχει, όπως διαπιστώνουμε, διακρίνουσα ίση με το μηδέν. Έτσι για το τριώνυμο ως προς $x$ της εκφώνησης θα ισχύει ότι διακρίνουσα του θα είναι ίση με το μηδέν για κάθε τιμή της θεωρούμενης ως παραμέτρου $y$. Επομένως θα ισχύει $\dfrac{\beta^2(\gamma-\alpha)^2}{\alpha^2(\beta-\gamma)^2}y^2 - 4\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha(\beta-\gamma)}y^2 = 0,$

από όπου για $y \neq 0$ (ώστε να απλοποιήσουμε) και μετά από στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε

$(\alpha\beta+\beta\gamma-2\alpha\gamma)^2 = 0 \Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma = 2\alpha\gamma \Rightarrow$

$2\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\gamma}$, που αυτή η τελευταία σχέση μας οδηγεί με βάση τη θεωρία μας στο ζητούμενο.

**Άσκηση 3η:**

**Να βρεθούν επτά ακέραιοι αριθμοί αν αποτελούν γεωμετρική πρόοδο και αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των τριών πρώτων είναι 13 και ότι το άθροισμα των τριών τελευταίων είναι 1053.**

**Λύση:**

Για να έχουμε συμμετρία άρα και διευκόλυνση υπολογισμών η συγκεκριμένη επτάδα θεωρούμε ότι είναι η $\dfrac{x}{\lambda^3}, \dfrac{x}{\lambda^2}, \dfrac{x}{\lambda}, x, x\lambda, x\lambda^2, x\lambda^3.$

Αναζητούμε λύση στους ακέραιους του συστήματος $\sum: \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda^3} + \dfrac{x}{\lambda^2} + \dfrac{x}{\lambda} = 13 \\ x\lambda + x\lambda^2 + x\lambda^3 = 1053 \end{cases}$

ή του ισοδύναμου

$\sum: \begin{cases} x(1+\lambda+\lambda^2) = 13\lambda^3 \\ x\lambda(1+\lambda+\lambda^2) = 1053 \end{cases}$, ως προς $x, \lambda$.

Με διαίρεση κατά μέλη και επίλυση ως προς $\lambda$ τελικά προκύπτει $\lambda^4 = 81$, οπότε $\lambda = \pm 3$. Για $\lambda = 3$ παίρνουμε $x = 27$, και τη πρόοδο $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729$. Για $\lambda = -3$ έχουμε ως τέταρτο όρο τον μη ακέραιο $x = -\dfrac{351}{7}$ τιμή που δεν την δεχόμαστε.

**Άσκηση 4η:**

**Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{\alpha_1^\nu} + \dfrac{1}{\alpha_2^\nu} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_\nu^\nu} = \dfrac{\alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \ldots + \alpha_\nu^\nu}{\alpha_1^2\alpha_2^2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu^2}$.**

**Λύση:**

Έστω $\lambda$ ο λόγος της προόδου. Τότε έχουμε

$\dfrac{1}{\alpha_1^\nu} + \dfrac{1}{\alpha_2^\nu} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_\nu^\nu} = \dfrac{1}{\alpha_1^\nu} + \dfrac{1}{\alpha_1^\nu\lambda^\nu} + \dfrac{1}{\alpha_1^\nu\lambda^{2\nu}} \ldots + \dfrac{1}{\alpha_1^\nu\lambda^{(\nu-1)\nu}} =$

$\dfrac{1}{\alpha_1^\nu}\left[1 + \dfrac{1}{\lambda^\nu} + \dfrac{1}{\lambda^{2\nu}} \ldots + \dfrac{1}{\lambda^{(\nu-1)\nu}}\right]$

αφού το πλήθος των όρων είναι $\nu$ και το πλήθος των όρων από τον δεύτερο έως και τον τελευταίο είναι $\nu-1$. Εντός της αγκύλης υπάρχει άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον $1$ και λόγο $\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^\nu$.

Εφαρμόζουμε εδώ τον τύπο του αθροίσματος και έχουμε: $\dfrac{1}{\alpha_1^\nu} + \dfrac{1}{\alpha_2^\nu} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_\nu^\nu} = \dfrac{1}{\alpha_1^\nu} \cdot \dfrac{1 \cdot \left[\left(\dfrac{1}{\lambda^\nu}\right)^\nu - 1\right]}{\dfrac{1}{\lambda^\nu} - 1} =$

$$= \frac{1}{\alpha_1^\nu} \cdot \frac{\lambda^{\nu^2} - 1}{(\lambda^\nu - 1)\lambda^{\nu(\nu-1)}} \qquad (1).$$

Εργαζόμενοι ομοίως για τη δεδομένη γεωμετρική πρόοδο παίρνουμε

$\alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \ldots + \alpha_\nu^\nu = \ldots = \alpha_1^\nu \dfrac{\lambda^{\nu^2} - 1}{\lambda^\nu - 1}$ $(2)$ και βέβαια

$\alpha_1^2\alpha_2^2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu^2 = \alpha_1^{2\nu}\lambda^{2+4+\ldots+2\nu-2} = \alpha_1^{2\nu}\lambda^{\nu(\nu-1)}$ $(3)$

αφού ο εκθέτης του $\lambda$ είναι άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το $2$ διαφορά επίσης το $2$ και πλήθος όρων $\nu-1$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις $(1), (2), (3)$ με στοιχειώδεις πράξεις έχουμε το ζητούμενο.

**Άσκηση 5η:**

**Η τιμή αγοράς μιας τηλεόρασης είναι μεγαλύτερη από 620 και μικρότερη από 640 ευρώ. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:**

- **Να δοθεί προκαταβολή 120 ευρώ**
- **Η εξόφληση του υπόλοιπου σε 10 μηνιαίες δόσεις.**
- **Κάθε δόση να αυξάνει από την προηγούμενή της, κατά ω ευρώ, $\omega \in \mathbb{N}^*$**
- **Η τέταρτη δόση θα είναι 48 ευρώ.**

**i) Να εκφράσετε το ποσό της 1ης δόσης ως συνάρτηση του ω.**

**ii) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.**

**iii) Να βρείτε την τιμή του ω.**

**iv)** Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης
**v)** Να βρείτε την τιμή αγοράς της τηλεόρασης.

Λύση:

Αφού δόθηκε προκαταβολή 120 ευρώ, το ποσό x των συνολικών δόσεων θα είναι μεταξύ 500 και 520 ευρώ. Αφού οι δόσεις είναι 10 και η κάθε μία αυξάνει από την προηγούμενή της κατά ω ευρώ, έχουμε αριθμητική πρόοδο και το συνολικό ποσό δόσεων είναι το $\Sigma_{10}=\frac{2\alpha_1+9\omega}{2}\cdot 10$

**i)** Αφού η τέταρτη δόση είναι 48 ευρώ, έχουμε: $\alpha_1+3\omega=48 \Leftrightarrow \alpha_1=48-3\omega$.

**ii)** Η τιμή αγοράς είναι:

$$120+\Sigma_{10}=120+\frac{2(48-3\omega)+9\omega}{2}\cdot 10=$$

$120+(96+3\omega)\cdot 5=600+15\omega$

**iii)** Αφού η τιμή αγοράς είναι μεταξύ 620 και 640 ευρώ, έχουμε:

$$620<600+15\omega<640 \Leftrightarrow 20<15\omega<40 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{3}<\omega<\frac{8}{3} \overset{\omega\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} \omega=2.$$

**iv)** Η $10^{\eta}$ δόση είναι:
$\alpha_{10}=\alpha_1+9\omega=48+6\omega=48+12=60$ ευρώ.

**v)** Η τιμή αγοράς είναι $600+15\cdot 2=630$ ευρώ.

## Συναρτήσεις:

Ο συμβολισμός $f:A\to B$, σημαίνει ότι μέσω ενός τρόπου-«μηχανισμού» $y=f(x)$ αντιστοιχίζουμε (παράγουμε) στοιχεία $y$ από το καθένα από ***όλα τα στοιχεία*** $x$ του συνόλου $A$, που ονομάζεται **Πεδίο ή Σύνολο Ορισμού** μιας συνάρτησης (χωρίς να «επιτρέπεται» σε μία τιμή του $x$ να αντιστοιχίζονται πάνω από μία τιμή του $y$ ),ενώ το $B$ είναι το σύνολο που ανήκουν τα στοιχεία $y=f(x)$, χωρίς πάντα το $B$ να αποτελείται αποκλειστικά από τις τιμές που λαμβάνει το $y=f(x)$. Για το σύνολο που αποτελείται αποκλειστικά από τα στοιχεία $y=f(x)$ επιλέγουμε τον χαρακτηρισμό **Σύνολο Τιμών** μίας συνάρτησης και είναι υποσύνολο του $B$ (διαφορετικό ή ίσο με το $B$). Ο τύπος μίας συνάρτησης δεν είναι πάντα αλγεβρικός, για παράδειγμα έχουμε τη συνάρτηση

$$f:\{1,2\}\to\{-2,0,1\}, \text{με } f(1)=-2, f(2)=1,$$

όπου εδώ το σύνολο τιμών μας είναι το $\{-2,1\}$.

Άσκηση $1^{\eta}$:

**Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ με $f(x)=\frac{(x+1)(x+\alpha)}{x^2+1}$ και $f(x)\in[0,1]$. Να λύσετε στο $[0,1]$ την εξίσωση $f(x)=0$, αφού προηγουμένως προσδιορίσετε το $\alpha$.**

Λύση:

Οι τιμές $f(0)=\alpha, f(1)=\alpha+1$ ανήκουν στο $[0,1]$.

Άρα έχουμε $\begin{Bmatrix} 0\le\alpha\le1 \\ 0\le\alpha+1\le1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0\le\alpha\le1 \\ -1\le\alpha\le0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha=0$,

οπότε τελικά $f(x)=\frac{(x+1)x}{x^2+1}$.

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ως ***πιθανές λύσεις*** τις $x=0, x=-1$ από τις οποίες ***δεχόμαστε τελικά*** την $x=0$ επειδή είναι στοιχείο του Πεδίου Ορισμού της $(0\in[0,1])$ και ***απορρίπτουμε*** την $x=-1$ αφού αυτή δεν ανήκει στο Πεδίο ορισμού $[0,1]$ $(-1\notin[0,1])$.

***Επισήμανση***: Αν έχουμε τύπο της μορφής $f(x)=\begin{cases} g(x), x\in D_1 \\ h(x), x\in D_2 \end{cases}$ με $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$

και υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $\alpha$ της τομής $D$ $(\alpha\in D)$ τέτοιο που $g(\alpha)\neq h(\alpha)$, τότε, ο τύπος $f(x)=\begin{cases} g(x), x\in D_1 \\ h(x), x\in D_2 \end{cases}$ με $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$

δεν είναι τύπος συνάρτησης. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι αν ο τύπος; $f(x)=\begin{cases} g(x), x\in D_1 \\ h(x), x\in D_2 \end{cases}$

είναι τύπος συνάρτησης, τότε, το Πεδίο Ορισμού της θα είναι η ένωση $D_1\cup D_2$.

Άσκηση $2^{\eta}$:

**Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\in(-\infty,2\alpha] \\ x^2-1, x\in(\alpha+1,+\infty) \end{cases}$.**

**α) Να προσδιορίσετε τον $\alpha$.**
**Έχει πάντα η συνάρτηση αυτή ως Πεδίο Ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών;**
**β) Να επιλύσετε ως προς $\alpha$ την ανίσωση $f(2\alpha-1)+f(\alpha+2)\le 10\alpha$.**
**γ) Ποιο είναι το Πεδίο ορισμού της συνάρτησης μετά από τον προσδιορισμό από το β) ερώτημα του $\alpha$;**

Λύση:

**α)** Βασιζόμενοι στην προηγούμενη επισήμανση παρατηρούμε αρχικά ότι $x^2+1\neq x^2-1$, για κάθε πραγματικό αριθμό $x$ και αμέσως μετά (για να μην υπάρχει η τομή των $(-\infty,2\alpha],(\alpha+1,+\infty)$))

«απαιτούμε» $2\alpha \le \alpha+1$, οπότε πρέπει και αρκεί $\alpha \le 1$. Στο άμεσα επόμενο ερώτημα έχουμε για τον τυχόντα $\alpha<1$, ότι η συνάρτηση δεν έχει ως Πεδίο Ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ αφού εξαιρούνται από το σύνολο των πραγματικών αριθμών τα στοιχεία του διαστήματος $(2\alpha,\alpha+1)$.

**β)** Έχουμε: $2\alpha-1 \in (-\infty,2\alpha]$ $\Rightarrow f(2\alpha-1)=(2\alpha-1)^2+1=4\alpha^2-4\alpha+2$, και $\alpha+2 \in (\alpha+1,+\infty) \Rightarrow f(\alpha+2)=(\alpha+2)^2-1=$ $\alpha^2+4\alpha+3$, επομένως επιλύουμε την ανίσωση $5\alpha^2+5 \le 10\alpha$ ή την ισοδύναμη της $0 \le (\alpha-1)^2 \le 0$, που δίνει ως λύση την $\alpha=1$.

**γ)** Το Πεδίο ορισμού της συνάρτησης για $\alpha=1$ είναι το σύνολο $(-\infty,2]\cup(2,+\infty)=\mathbb{R}$, δηλαδή όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

## Άσκηση 3η:

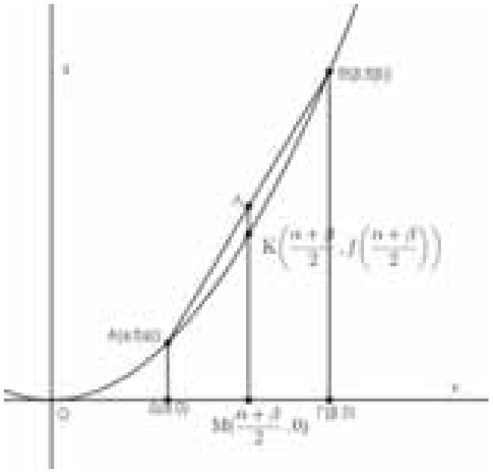
**Δίνεται η γραφική παράσταση $C_f$ συνάρτησης $f:R\to R$, $y=f(x)$ με την ιδιότητα: Κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων της $C_f$ ορίζει μία χορδή δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία A και B που βρίσκεται «πάνω» από την $C_f$. Με βάση την γραφική αυτή παράσταση να διαπιστώσετε ότι $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \dfrac{f(\beta)+f(\beta)}{2}$ (1) για κάθε $\alpha,\beta \in R$**

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Διαπιστώστε τη σχέση (1) με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, $x \in R$ και επιβεβαιώστε την αλήθειά της αλγεβρικά.**

## Λύση:

Αν $\alpha=\beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.

Αν $\alpha\neq\beta$, έστω $\alpha<\beta$ τότε θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ της γραφικής



παράστασης $C_f$, της $f$. Έχουμε ως δεδομένο ότι η χορδή AB $(A\neq B)$ βρίσκεται «πάνω» από την $C_f$. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΔ \parallel ΒΓ)$ που σχηματίζεται το ευθύγραμμο τμήμα ΜΛ είναι η διάμεσος και η ΜΚ είναι μικρότερη της ΜΛ. Έτσι έχουμε:

$$MK<MΛ \Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{ΑΔ+ΒΓ}{2}\Rightarrow$$
$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

Όμοια προκύπτει και αν υποθέσουμε $\alpha>\beta$.

Άρα τελικά ισχύει $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $\alpha,\beta\in R$.

**Αλγεβρική απόδειξη της εφαρμογής:** Η σχέση (1) για την $f(x)=x^2, x\in R$ που πληροί τα δεδομένα της άσκησης, γίνεται: $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\le\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Για την αλγεβρική της απόδειξη έχουμε: αρκεί για κάθε $\alpha,\beta\in R$ να ισχύει: $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}\le\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, αρκεί $(\alpha+\beta)^2\le 2(\alpha^2+\beta^2)$, αρκεί $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\le 2\alpha^2+2\beta^2$, αρκεί $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\ge 0$, αρκεί $(\alpha-\beta)^2\ge 0$, που ισχύει!

## Άσκηση 4η:

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με $f(x)=x^2+x-8$ και $g(x)=-x^2+x$**

**α) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων.**

**β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία αυτά.**

**γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες.**

***Υπόδειξη***:

**α)** Θεωρούμε το σύστημα ως προς $x,y$, $\Sigma:\begin{cases} y=x^2+x-8\\ y=-x^2+x\end{cases}$, που μας οδηγεί στην επίλυση ως προς $x$ της εξίσωσης $x^2=4$... και έτσι καταλήγουμε στα σημεία $A(2,-2)$ και $B(-2,-6)$

**β)** Έστω $y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία. Οι συντεταγμένες των σημείων A,B την επαληθεύουν και έτσι το σύστημα ως προς $\alpha,\beta$ που δημιουργείται δίνει $\alpha=1$, $\beta=-4$, οπότε η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι η

$y=x-4$. γ) Τα σημεία τομής της ευθείας ΑΒ με τους άξονες είναι τα $(4,0)$, $(0,-4)$.

Άσκηση 5η:

**Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x+\alpha}{1+|x|}$, με α πραγματική σταθερά.**
**α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της D.**
**β) Προσδιορίστε τον α αν γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση περνά από την αρχή των αξόνων και σε αυτή τη περίπτωση αποδείξτε ότι $-1<f(x)<1$ για κάθε τιμή $x$ του D.**
**Μπορούμε να ισχυριστούμε εδώ ότι το διάστημα $(-1,1)$ είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$;**

Λύση:

α) Η συνάρτηση $f$ ορίζεται για εκείνα μόνο τα $x$ για τα οποία $1+|x|\neq 0$. Επειδή η σχέση $1+|x|\neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $|x|\neq -1$ με $|x|\geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x$, η σχέση $1+|x|\neq 0$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x$, οπότε το Πεδίο Ορισμού της $f$ θα είναι το $D=R$.

β) Αφού η γραφική της παράσταση περνά από την αρχή των αξόνων δηλαδή από το σημείο $O(0,0)$, οι τιμές **(συντεταγμένες)** $x=0, y=0$ $(y=f(x))$ θα επαληθεύουν τον τύπο της. Παίρνουμε λοιπόν $\alpha=0$ και ο τύπος γίνεται $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ $\left(\text{ή } y=\dfrac{x}{1+|x|}\right)$. Τότε παρατηρούμε ότι $|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+|x|}\right|\Leftrightarrow |f(x)|=\dfrac{|x|}{1+|x|}$, με $|x|<|x|+1$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x$. Καταλήγουμε έτσι στην ισχύ της

$|f(x)|<1\Leftrightarrow -1<f(x)<1\Leftrightarrow f(x)\in(-1,1)$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x$. Για να ισχυριστούμε τώρα ότι το διάστημα $(-1,1)$ είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$ εργαζόμαστε ως εξής: Έστω τυχόντας $y\in(-1,1)$. Παρατηρούμε ότι

$$f\left(\frac{y}{1-|y|}\right)=\frac{\dfrac{y}{1-|y|}}{1+\left|\dfrac{y}{1-|y|}\right|},\ \text{με}\ |y|<1\ \text{ή}\ f\left(\frac{y}{1-|y|}\right)=...=y.$$

Άρα για το τυχόντα $y\in(-1,1)$ υπάρχει ένας $x=\dfrac{y}{1-|y|}$, για τον οποίο έχουμε $f\left(\dfrac{y}{1-|y|}\right)=...=y$.

Εδώ πράγματι ισχυριζόμαστε ότι το διάστημα $(-1,1)$ είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$.

(***Η Ανάλυση ή Σκέψη*** για την επιλογή του $x=\dfrac{y}{1-|y|}$:

Ο τύπος $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ $\left(\text{ή } y=\dfrac{x}{1+|x|}\right)$ μας οδηγεί στο ότι οι $x, y$ είναι ομόσημοι άρα επιλύσαμε ως προς $x$ και πήραμε $x=\dfrac{y}{1-|y|}$).

Άσκηση 6η:

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+(\alpha+1)x-1$ με $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=(\alpha-1)x^2-\alpha-1$, $x\in R$.**
**α) Να προσδιορίσετε τις τιμές του α, ώστε η γραφική παράσταση της $g$, ($C_g$) να μην τέμνει τον άξονα $x'x$.**
**β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του α, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των $f$, $g$ ($C_f$, $C_g$) να μην έχουν κοινά σημεία.**
**γ) Για $\alpha=-3$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων της $C_f$ που βρίσκονται κάτω από την $C_g$**

Λύση:

α) Αν $\alpha=1$, $g(x)=-2\neq 0$. Αν $\alpha\neq 1$, πρέπει και αρκεί $\Delta<0$. Όμως: $\Delta<0\Leftrightarrow -4(\alpha-1)(-\alpha-1)<0$ $\Leftrightarrow 4(\alpha^2-1)<0\Leftrightarrow \alpha^2<1\Leftrightarrow|\alpha|<1\Leftrightarrow -1<\alpha<1$.

Άρα τελικά $-1<\alpha\leq 1$.

β) Για να μην έχουν κοινά σημεία οι $C_f$, $C_g$ πρέπει και αρκεί: $f(x)\neq g(x)$. Όμως:

$$f(x)\neq g(x)\Leftrightarrow$$
$$x^2+(\alpha+1)x-1\neq(\alpha-1)x^2-\alpha-1\Leftrightarrow$$
$$(\alpha-2)x^2-(\alpha+1)x-\alpha\neq 0$$

Αυτό συμβαίνει όταν $\alpha\neq 2$ και $\Delta<0$. Όμως:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\neq 2\\ \Delta<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\alpha\neq 2\\ (\alpha+1)^2+4\alpha(\alpha-2)<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{matrix}\alpha\neq 2\\ 5\alpha^2-6\alpha+1<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\alpha\in\left(\frac{1}{5},1\right)$$

γ) Για $\alpha=-3$ έχουμε: $f(x)=x^2-2x-1$ και $g(x)=-4x^2+2$

Αφού η $C_f$ βρίσκεται κάτω από την $C_g$ έχουμε:

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-2x-1<-4x^2+2\Leftrightarrow$$
$$5x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -\frac{3}{5}<x<1.$$

# Τάξη: Α΄

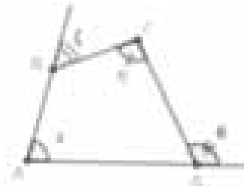
## Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

**Γιώργος Α. Κουσινιώρης**

### Άσκηση 1.

**Να δείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ το άθροισμα των γωνιών που αντιστοιχούν σε δύο απέναντι κορυφές του ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του που αντιστοιχούν στις άλλες δύο κορυφές του.**

Λύση: Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360°$ (1), $\hat{B}=180°-\hat{\zeta}$ και $\hat{\Delta}=180°-\hat{\theta}$ οπότε η (1) γίνεται:



$\hat{\varepsilon}+180°-\hat{\zeta}+\hat{\eta}+180°-\hat{\theta}=360°$ ή

$\hat{\varepsilon}-\hat{\zeta}+\hat{\eta}-\hat{\theta}=0°$ ή $\hat{\varepsilon}+\hat{\eta}=\hat{\zeta}+\hat{\theta}$

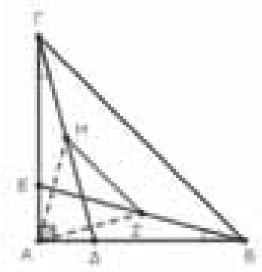
### Άσκηση 2.

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90°$. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως έτσι, ώστε $A\hat{B}E=A\hat{\Gamma}\Delta=15°$. Αν είναι ΒΕ=ΓΔ= 2cm και Ζ, Η είναι τα μέσα των ΒΕ και ΓΔ αντιστοίχως, τότε:**

**α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**

**β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΗ.**

Λύση: α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα γιατί έχουν $A\hat{B}E=A\hat{\Gamma}\Delta$ και ΒΕ=ΓΔ από την υπόθεση. Άρα είναι ΑΒ=ΑΓ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ η ΑΖ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΕ, συνεπώς είναι

$$AZ=BZ=\frac{BE}{2}=\frac{2}{2}=1\,\text{cm} \quad (1).$$

Επομένως το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε είναι $Z\hat{A}B=A\hat{B}E=15°$ (2).

Ομοίως είναι $AH=\Gamma H=\frac{\Gamma\Delta}{2}=1\,\text{cm}$ (3).

και $H\hat{A}\Gamma=A\hat{\Gamma}\Delta=15°$ (4).

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι ΑΖ=ΑΗ, οπότε το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

Επειδή είναι $Z\hat{A}H=90°-Z\hat{A}B-H\hat{A}\Gamma$ ή

$Z\hat{A}H=90°-15°-15° \Leftrightarrow Z\hat{A}H=60°$ το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισόπλευρο.

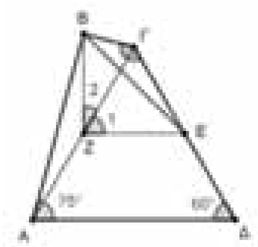
Επομένως ΖΗ = ΑΖ = ΑΗ = 1cm.

### Άσκηση 3.

**Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=75°$ $\hat{\Gamma}=135°$ και $\hat{\Delta}=60°$. Αν είναι ΑΔ = ΓΔ και Ζ και Ε είναι τα μέσα των ΑΓ και ΓΔ, τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.**

Λύση: Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές από την υπόθεση (ΑΔ=ΓΔ) και επειδή είναι $\hat{\Delta}=60°$ είναι ισόπλευρο οπότε

ΑΓ=ΑΔ=ΓΔ. (1)



Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360° οπότε για τη γωνία Β έχουμε

$$\hat{B}=360°-75°-60°-135°=90°.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και η ΒΖ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΑΓ, οπότε είναι

$$BZ=\frac{A\Gamma}{2}=AZ. \quad (2)$$

Στο τρίγωνο ΑΓΔ το ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΓΔ, επομένως είναι

$$EZ//=\frac{A\Delta}{2}. \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) έχουμε ΒΖ = ΕΖ, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές.

Το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο *(γιατί;)* οπότε

$$\hat{Z}_1=60°. \quad (4)$$

Επειδή $\hat{A}=75°$ και $\Gamma\hat{A}\Delta=60°$ είναι

$$\Gamma\hat{A}B=75°-60°=15°.$$

Από τη (2) προκύπτει ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές οπότε έχουμε $A\hat{B}Z=\Gamma\hat{A}B=15°$. (5)

Η γωνία $\hat{Z}_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΖΑΒ οπότε $\hat{Z}_2=A\hat{B}Z+\Gamma\hat{A}B\overset{(5)}{=}15°+15°$ ή $\hat{Z}_2=30°$. (6)

Είναι $B\hat{Z}E=\hat{Z}_1+\hat{Z}_2$ οπότε από τις (4) και (6) έχουμε $B\hat{Z}E=90°$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

### Άσκηση 4.

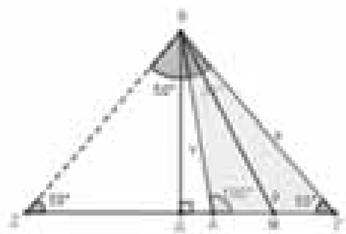
**Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90°$ φέρνουμε τη διχοτόμο ΒΕ και το ύψος ΑΔ που τέμνονται στο Ζ. Αν ΕΗ⊥ΒΓ, να δείξετε ότι ΑΖ=ΕΗ.**

Λύση: Στο ορθογώνιο ΒΔΖ είναι $\hat{Z}_2=90-\hat{B}_2$ και επειδή είναι $\hat{Z}_1=\hat{Z}_2$ (ως κατακορυφήν) και

$\hat{B}_1=\hat{B}_2$ (η ΒΕ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$) είναι $\hat{Z}_1=90-\hat{B}_1$ **(1)** Στο ορθογώνιο ΑΒΕ είναι $\hat{E}_1=90-\hat{B}_1$ . **(2)** Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{E}_1=\hat{Z}_1$ που σημαίνει ότι το ΑΕΖ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΖ=ΑΕ. **(3)**
Επειδή κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της είναι ΑΕ=ΕΗ οπότε, λόγω της (3) είναι ΑΖ = ΕΗ.

### Άσκηση 5.

**Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=100°$, $\hat{B}=30°$, η διάμεσός του ΒΜ και το ύψος του ΒΔ. Αν είναι ΔΜ = 5cm, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.**



Λύση: Στην προέκταση της πλευράς ΑΓ παίρνουμε το σημείο Ζ έτσι ώστε να είναι ΖΔ=ΔΓ. **(1)** Το ΒΓΖ είναι ισοσκελές γιατί έχει τη ΒΔ διάμεσο και ύψος. Στο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=100°$ και $\hat{B}=30°$ οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι $\hat{\Gamma}=180°-(100°+30°)=50°$. Στο ισοσκελές ΒΓΖ είναι $\hat{Z}=\hat{\Gamma}=50°$ οπότε είναι $\Gamma\hat{B}Z=80°$ και επομένως είναι $A\hat{B}Z=\Gamma\hat{B}Z-A\hat{B}\Gamma=80°-30°=50°$. Το ΑΒΖ έχει $A\hat{B}Z=\hat{Z}=50°$ οπότε είναι ισοσκελές και συνεπώς είναι ΑΒ = ΑΖ.

Είναι $AZ=A\Delta+Z\Delta\overset{(1)}{=}A\Delta+\Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma=A\Delta+A\Gamma$ οπότε έχουμε: $AZ=A\Delta+A\Delta+A\Gamma=2A\Delta+A\Gamma$ **(2)**

Αλλά $A\Delta=\Delta M-AM=5-\dfrac{A\Gamma}{2}$ οπότε από τη (2)

$AZ=2\left(5-\dfrac{A\Gamma}{2}\right)+A\Gamma=10-A\Gamma+A\Gamma$ ή ΑΖ=10cm.

### Άσκηση 6.

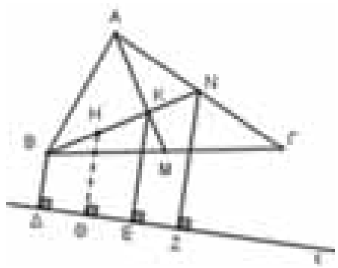
**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90°$ και $\hat{B}=55°$. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε έτσι ώστε $A\hat{B}\Delta=E\hat{B}\Gamma=20°$. Αν είναι ΓΕ = 4cm να βρείτε το μήκος ΑΔ.**

Λύση: Φέρνουμε την κάθετη στην πλευρά ΒΓ στο σημείο Β η οποία τέμνει την προέκταση της πλευράς ΑΓ στο σημείο Ζ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma}=90°-55°=35°$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΖ είναι $\hat{Z}=90°-35°=55°$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ είναι $\hat{B}_1=90°-55°=35°$, οπότε το ΒΔΖ είναι ισοσκελές γιατί είναι $Z\hat{B}\Delta=20°+35°=55°=\hat{Z}$ συνεπώς είναι ΒΔ=ΔΖ. **(1)** Το ΔΒΓ είναι ισοσκελές γιατί είναι $\Delta\hat{B}\Gamma=\hat{B}-A\hat{B}\Delta=55°-20°=35°=\hat{\Gamma}$ συνεπώς είναι ΒΔ = ΔΓ. **(2)** Από τις (1) κα (2) προκύπτει ότι ΔΖ = ΔΓ ή ΑΔ+ΑΖ = ΑΓ–ΑΔ ή 2ΑΔ=ΑΓ–ΑΖ. **(3)** Είναι $B\hat{E}Z=20°+35°=55°$, ως εξωτερική του τριγώνου ΕΒΓ, οπότε το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές αφού $B\hat{E}Z=\hat{Z}$ άρα το ύψος του ΒΑ είναι και διάμεσος οπότε ΑΖ=ΑΕ=ΑΓ–ΓΕ. **(4)** Από (3) και (4) $2A\Delta=A\Gamma-(A\Gamma-\Gamma E)$ ή $2A\Delta=\Gamma E$ άρα $A\Delta=\dfrac{\Gamma E}{2}=2$cm.

### Άσκηση 7.

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΜ και ΒΝ που τέμνονται στο σημείο Κ. Από τα σημεία Β, Κ και Ν φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΒΔ, ΚΕ και ΝΖ προς μια ευθεία (ε). Αν είναι ΒΔ=3cm και ΝΖ=12cm, να βρεθεί η απόσταση του βαρύκεντρου του τριγώνου ΑΒΓ από την ευθεία (ε).**

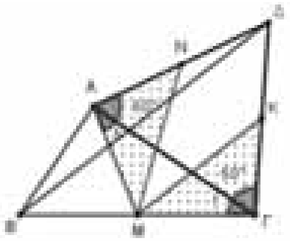


Λύση: Το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ οπότε είναι $BK=\dfrac{2}{3}BN$ και $KN=\dfrac{1}{3}BN$ ή $BK=2KN$. Από το μέσο Η του ΒΚ φέρνουμε την κάθετη ΗΘ προς την ευθεία (ε). Τα τμήματα ΒΔ, ΗΘ, ΚΕ και ΝΖ είναι παράλληλα *(γιατί;)* οπότε τα τετράπλευρα ΒΔΕΚ και ΗΘΖΝ είναι τραπέζια με βάσεις ΒΔ, ΚΕ και ΗΘ, ΝΖ αντιστοίχως. Είναι ΒΗ = ΗΚ οπότε η ΗΘ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΒΔΕΚ με $H\Theta=\dfrac{B\Delta+KE}{2}\Leftrightarrow 2H\Theta=B\Delta+KE$. **(1).** Είναι ακόμα $HK=\dfrac{1}{2}BK=KN$ οπότε στο τραπέζιο ΗΘΖΝ η ΚΕ είναι επίσης διάμεσος συνεπώς είναι $2KE=H\Theta+NZ\Leftrightarrow H\Theta=2KE-NZ$. **(2)** Από τις (1) και (2) έχουμε: $2(2KE-NZ)=B\Delta+KE \Leftrightarrow$ $4KE-2NZ=B\Delta+KE\Leftrightarrow 3KE=2NZ+B\Delta\Leftrightarrow KE=\dfrac{2NZ+B\Delta}{3}$.

Συνεπώς είναι $KE=\dfrac{2\cdot 12+3}{3}=9$ (cm).

### Άσκηση 8.

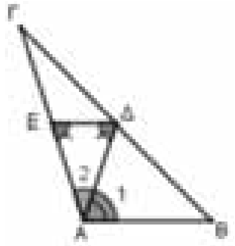
**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία την γωνία $\hat{A}$. Έξω από το ΑΒΓ και με πλευρά την ΑΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντιστοίχως να δείξετε ότι $MN=\frac{B\Delta}{2}$.**



Λύση: Έστω Κ το μέσο της ΓΔ. Είναι $\Gamma K = AN$ ως μισά των ίσων πλευρών ΓΔ και ΑΔ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΓΔ. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A}=90^\circ$ και η ΑΜ είναι η διάμεσός του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ συνεπώς είναι $AM=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma$ οπότε είναι $\hat{\Gamma}_1=\hat{A}_1=\omega$. Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΚ έχουν ΑΜ = ΜΓ, ΑΝ = ΓΚ και $M\hat{A}N=M\hat{\Gamma}K$ = 60°+ω οπότε είναι ίσα και επομένως είναι ΜΝ = ΜΚ. Στο τρίγωνο ΒΓΔ η ΜΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΓΔ άρα $MK=\frac{B\Delta}{2}$ και αφού ΜΝ=ΜΚ τότε $MN=\frac{B\Delta}{2}$.

### Άσκηση 9.

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ στο οποίο είναι ΑΓ = 2ΑΔ και $\Delta\hat{A}B=2\Delta\hat{A}\Gamma$. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ.**

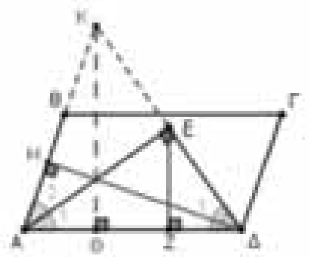


Λύση: Έστω Ε το μέσο της πλευράς ΑΓ. Επειδή τα Δ και Ε είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ είναι ΔΕ//ΑΒ, οπότε έχουμε $\hat{\Delta}=\hat{A}_1$ **(1)** *(γιατί;)* Είναι ακόμα $AE=\frac{A\Gamma}{2}=A\Delta$ (από υπόθεση) οπότε είναι $\hat{E}=\hat{\Delta}\overset{(1)}{=}\hat{A}_1$. **(2)** Από την υπόθεση έχουμε $\hat{A}_1=2\hat{A}_2$ οπότε από τη (2) έχουμε $\hat{E}=\hat{\Delta}=2\hat{A}_2$. **(3).** Στο τρίγωνο ΑΔΕ είναι $\hat{A}_2+\hat{\Delta}+\hat{E}=180^\circ$ συνεπώς λόγω της (3) είναι $\hat{A}_2+2\hat{A}_2+2\hat{A}_2=180^\circ \Leftrightarrow 5\hat{A}_2=180^\circ \Leftrightarrow$ $\hat{A}_2=36^\circ$.Τελικά έχουμε $\hat{A}=\hat{A}_1+\hat{A}_2=2\hat{A}_2+\hat{A}_2$ ή $\hat{A}=3\hat{A}_2 = 3\cdot 36^\circ$ ή $\hat{A}=108^\circ$.

### Άσκηση 10.

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Δ τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η απόσταση του Ε από την πλευρά ΑΔ είναι ΕΖ = 2cm, να βρεθεί το ύψος του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ.**

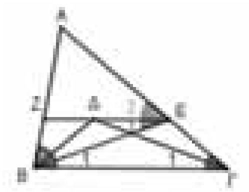
Λύση: Επειδή οι ΑΕ και ΔΕ είναι διχοτόμοι των διαδοχικών γωνιών του παραλληλογράμμου είναι $\hat{A}_1+\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=\frac{\hat{A}+\hat{\Delta}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$ οπότε



το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ορθογώνιο. Τα ΕΑΔ και ΕΑΚ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ και ΑΕ κοινή πλευρά, άρα είναι ΑΚ = ΑΔ και ΕΚ = ΕΔ. Τα ΘΚΑ και ΗΔΑ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με κοινή τη γωνία Α και ΑΚ = ΑΔ, οπότε είναι ΔΗ = ΚΘ. Επειδή ΕΚ = ΕΔ το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΔΚ του τριγώνου ΔΘΚ και επειδή είναι ΕΖ//ΚΘ *(γιατί;)* είναι ΚΘ = 2ΕΖ οπότε έχουμε ΔΗ = ΚΘ = 2·2cm = 4cm.

### Άσκηση 11.

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του Β και Γ που τέμνονται στο Δ. Αν είναι ΓΔ = ΑΒ, να δείξετε ότι $\hat{A}=60^\circ$.**



Λύση: Αν είναι $\hat{\Gamma}=2\omega$ τότε είναι $\hat{B}=4\omega$. Φέρνουμε την παράλληλη ΖΕ από το Δ προς τη ΒΓ. Το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο γιατί $\Delta\hat{B}\Gamma=\frac{\hat{B}}{2}=\hat{\Gamma}$ οπότε οι διαγώνιοί του είναι ίσες επομένως είναι ΒΕ = ΓΔ και επειδή ΓΔ = ΑΒ είναι ΒΕ = ΑΒ **(1).** Είναι $\hat{E}_2=\hat{\Gamma}=2\omega$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, $\hat{\Gamma}_1=\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\omega$, $\hat{E}_1=\hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$, επειδή τα ΔΒΓ και ΕΓΒ είναι ίσα *(γιατί;)*, οπότε $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1=\omega$. Άρα $A\hat{E}B=\hat{E}_1+\hat{E}_2=\omega+2\omega=3\omega$. **(2).**
Είναι ακόμα $A\hat{B}E=A\hat{B}\Delta+\Delta\hat{B}E$ και επειδή είναι $A\hat{B}\Delta=\frac{\hat{B}}{2}=2\omega$ και $\Delta\hat{B}E=\Delta\hat{B}\Gamma-\hat{B}_1=2\omega-\omega=\omega$ έχουμε $A\hat{B}E=2\omega+\omega=3\omega$ **(3).**
Από τις (2), (3) ότι $A\hat{B}E=A\hat{E}B$ και επομένως ΑΕ=ΑΒ **(4).**
Από τις (1), (4) έχουμε ΒΕ=ΑΒ=ΑΕ άρα ΑΒΕ ισόπλευρο και επομένως $\hat{A}=60^\circ$.

*Πηγές: https://www.gogeometry.com/problem/index.html*

# Τάξη: Β΄ — Εκθετικές και Λογαριθμικές Εξισώσεις

Μποζατζίδης Βασίλης – Σανδαλίδης Λάζαρος

## Εκθετικές Εξισώσεις

**Μεθοδολογία Α1:**
**Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)}$**

ΒΗΜΑ 1: Για την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ ισχύει η ιδιότητα:

$$\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2 \text{ (1-1 συνάρτηση)}$$

οπότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

ΒΗΜΑ 2: Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

### ΑΣΚΗΣΗ 1

**Να λύσετε την εξίσωση $5^{x-2}+5^x=\frac{26}{5^{x+2}}$.**

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση διαδοχικά γράφεται:

$$5^{x-2}+5^x=\frac{26}{5^{x+2}} \Leftrightarrow 5^{2x}+5^{2x+2}=26 \Leftrightarrow$$

$$25\cdot 5^{2x}+5^{2x}=26 \Leftrightarrow 26\cdot 5^{2x}=26 \Leftrightarrow$$

$$5^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

### ΑΣΚΗΣΗ 2

**Να λύσετε την εξίσωση:**

$$\left(3^{2024}-3^{2023}\right)\left(3^{2025}-3^{2024}\right)=4\cdot 27^x$$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$\left(3^{2024}-3^{2023}\right)\left(3^{2025}-3^{2024}\right)=4\cdot 27^x \Leftrightarrow$$

$$3^{2023}(3-1)\cdot 3^{2024}(3-1)=4\cdot 27^x \Leftrightarrow$$

$$3^{2023}\cdot 3^{2024}=3^{3x} \Leftrightarrow 3^{4047}=3^{3x} \Leftrightarrow$$

$$3x=4047 \Leftrightarrow x=1349$$

**Μεθοδολογία Α2:**
**Εκθετικές εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές**

ΒΗΜΑ 1: Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή:

$$\alpha_n\left(\alpha^x\right)^n+\alpha_{n-1}\left(\alpha^x\right)^{n-1}+\ldots\ldots+\alpha_0=0$$

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $\alpha^x=\omega>0$, οπότε προκύπτει πολυωνυμική εξίσωση.

ΒΗΜΑ 3: Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση (έστω $\omega_1,\omega_2,\ldots,$ οι λύσεις της).

ΒΗΜΑ 4: Βρίσκουμε τις λύσεις της εκθετικής εξίσωσης από τις εξισώσεις $\alpha^x=\omega_1$ και $\alpha^x=\omega_2$, $\alpha^x=\omega_3$ ...

ΒΗΜΑ 5: Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε επαληθεύουν την δοσμένη εξίσωση.

### ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λύσετε την εξίσωση $5^x+\frac{125}{5^x}=30$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$5^x+\frac{125}{5^x}=30 \Leftrightarrow 5^{2x}+125=30\cdot 5^x \Leftrightarrow$$

$$5^{2x}-30\cdot 5^x+125=0.$$

Θέτουμε $5^x=\omega>0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2-30\omega+125=0 \Leftrightarrow \omega=5 \text{ ή } \omega=25$$

Άρα $5^x=5 \Leftrightarrow x=1$ ή $5^x=25 \Leftrightarrow x=2$

### ΑΣΚΗΣΗ 4

**Να λύσετε την εξίσωση $9^{2x-1}+11\cdot 81^{x-1}=\frac{5}{27}$.**

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$9^{2x-1}+11\cdot 81^{x-1}=\frac{5}{27} \Leftrightarrow 3^{4x-2}+11\cdot 3^{4x-4}=\frac{5}{27} \Leftrightarrow$$

$$3^{4x+1}+11\cdot 3^{4x-1}=5 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{4x}+\frac{11}{3}3^{4x}=15 \Leftrightarrow$$

$$20\cdot 3^{4x}=15 \Leftrightarrow 3^{4x}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x\cdot \ln 3=\ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\ln 3-\ln 4}{4\ln 3}.$$

### ΑΣΚΗΣΗ 5

Να λύσετε την εξίσωση

$$2\cdot 8^x-7\cdot 4^x+7\cdot 2^x-2=0.$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2\cdot 8^x-7\cdot 4^x+7\cdot 2^x-2=0 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot\left(2^3\right)^x-7\cdot\left(2^2\right)^x+7\cdot 2^x-2=0\Leftrightarrow$$
$$2\cdot\left(2^x\right)^3-7\cdot\left(2^x\right)^2+7\cdot 2^x-2=0$$

Θέτουμε $2^x=u>0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$2u^3-7u^2+7u-2=0\Leftrightarrow$$
$$2\left(u^3-1\right)-7u\left(u-1\right)=0\Leftrightarrow$$
$$2\left(u-1\right)\left(u^2+u+1\right)-7u\left(u-1\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\left(u-1\right)\left(2u^2+2u+2-7u\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\left(u-1\right)\left(2u^2-5u+2\right)=0\Leftrightarrow$$
$$u=1 \;\text{ ή }\; u=2 \;\text{ ή }\; u=\frac{1}{2}$$

Οπότε είναι:

Για $u=1$, $2^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Για $u=2$, $2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

Για $u=\frac{1}{2}$, $2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-1$.

**Μεθοδολογία Α3:**
**Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $\kappa\alpha^{f(x)}=\lambda\beta^{f(x)}$.**

ΒΗΜΑ 1: Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $\frac{\alpha^{f(x)}}{\beta^{f(x)}}=\frac{\lambda}{\kappa}$, οπότε γίνεται $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{f(x)}=\frac{\lambda}{\kappa}$.

ΒΗΜΑ 2: Γράφουμε τον αριθμό $\frac{\lambda}{\kappa}$ στη μορφή $\frac{\lambda}{\kappa}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}$ (αν αυτό δεν είναι εφικτό, τότε η εξίσωση λύνεται με χρήση λογαρίθμων (παράγραφος 5.3)) και καταλήγουμε στη μορφή $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{f(x)}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}$, απ' όπου προκύπτει $f(x)=\mu$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λύσετε την εξίσωση

$$2^{x-2}=5^{2-x}.$$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$2^{x-2}=5^{2-x}\Leftrightarrow 2^{x-2}=5^{-(x-2)}\Leftrightarrow 2^{x-2}\cdot 5^{(x-2)}=1\Leftrightarrow$$
$$10^{x-2}=1\Leftrightarrow 10^{x-2}=10^0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να λύσετε την εξίσωση

$$9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}.$$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}\Leftrightarrow 3^{2x}+3^{2x-1}=2^{x+\frac{7}{2}}+2^{x+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{3}\cdot 3^{2x}=9\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 3^{2x-3}=2^{x-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow 3^{2x-3}=2^{\frac{2x-3}{2}}\Leftrightarrow$$
$$3^{2x-3}=\left(\sqrt{2}\right)^{2x-3}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2x-3}=1\Leftrightarrow$$
$$2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

**Μεθοδολογία Α4:**
**Εκθετικές εξισώσεις της μορφής**
**$\kappa\alpha^x+\lambda\beta^x=\mu\gamma^x$, $(\gamma^2=\alpha\beta)$**

ΒΗΜΑ 1: Διαιρούμε τα δύο μέλη με $\gamma^x$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\kappa\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\lambda\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x=\mu\overset{\gamma^2=\alpha\beta}{\Leftrightarrow}\kappa\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\lambda\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{-x}=\mu$$

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x=\omega>0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\kappa\cdot\omega+\frac{\lambda}{\omega}=\mu\Leftrightarrow\kappa\cdot\omega^2-\mu\cdot\omega+\lambda=0$$

ΒΗΜΑ 3: Λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε (έστω $\omega_1,\omega_2$ οι λύσεις της). Δεκτές γίνονται μόνο οι θετικές λύσεις.

ΒΗΜΑ 4: Από την επίλυση των εξισώσεων $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x=\omega_1$ και $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x=\omega_2$ βρίσκουμε τις πιθανές λύσεις της δοσμένης εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να λύσετε την εξίσωση

$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x.$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση διαδοχικά γράφεται:

$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x\Leftrightarrow 3\cdot\frac{4^x}{6^x}+2\cdot\frac{9^x}{6^x}=5\Leftrightarrow$$
$$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x-5=0$$

Θέτουμε $\left(\frac{2}{3}\right)^x = u > 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$3u + \frac{2}{u} - 5 = 0 \Leftrightarrow 3u^2 - 5u + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$u = 1 \text{ ή } u = \frac{2}{3}$$

Για $u = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Για $u = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$.

## ΑΣΚΗΣΗ 9

**Να λύσετε την εξίσωση:**

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^x - 10\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 9$$

### ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{2}^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Επομένως, η εξίσωση γίνεται:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^x - 10\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 9 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^x - 10 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^x} = 9 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2x} - 10 = 9 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^x \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^x - 10 = 0$$

Θέτουμε $\left(\sqrt{2}-1\right)^x = u > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$u^2 - 9u - 10 = 0 \Leftrightarrow$$
$$u = 10 \text{ ή } u = -1, \text{ απορρίπτεται.}$$

Οπότε, για $u = 10$ έχουμε:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 10 \Leftrightarrow \log\left(\sqrt{2}-1\right)^x = \log 10 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot \log\left(\sqrt{2}-1\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\log\left(\sqrt{2}-1\right)},$$

η οποία είναι δεκτή.

## Μεθοδολογία Α5:
## Εκθετικές εξισώσεις της μορφής:
## $\kappa\alpha^{2x}+\lambda\beta^x+\mu\gamma^{2x}=0,\ \beta = \alpha\gamma$

ΒΗΜΑ 1: Διαιρούμε τα δύο μέλη με $\gamma^{2x}$, οπότε μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\kappa\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{2x} + \lambda\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + \mu = 0$$

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x = \omega > 0$ και προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $\kappa\omega^2 + \lambda\omega + \mu = 0$ την οποία λύνουμε (έστω $\omega_1, \omega_2$ οι λύσεις της). Δεκτές γίνονται μόνο οι θετικές λύσεις.

ΒΗΜΑ 3: Βρίσκουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης από τη λύση των εξισώσεων

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x = \omega_1 \text{ και } \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x = \omega_2.$$

## ΑΣΚΗΣΗ 10

**Να λύσετε την εξίσωση**

$$4^{x+1} + 2 \cdot 6^x = 6 \cdot 9^x.$$

### ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$4^{x+1} + 2\cdot 6^x = 6 \cdot 9^x \Leftrightarrow 4\cdot 4^x + 2\cdot 6^x = 6\cdot 9^x \overset{:9^x}{\Leftrightarrow}$$

$$4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x + 2\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^x = 6 \Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x = 6 \Leftrightarrow$$

$$4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 = 0$$

Θέτουμε $\left(\frac{2}{3}\right)^x = u > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$2u^2 + u - 3 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \text{ ή } u = -\frac{3}{2}, \text{ απορρίπτεται.}$$

Οπότε έχουμε $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

## Μεθοδολογία Α6:
## Εξισώσεις της μορφής $(f(x))^{g(x)}=1$

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής αποτελούν μια ιδιαίτερη κατηγορία και θα πρέπει να σημειώσουμε ότι γενικά ΔΕΝ είναι εκθετικές εξισώσεις, αφού η βάση δεν είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

Για την επίλυσή τους διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

ΒΗΜΑ 1: Αν $f(x) = 1$.

ΒΗΜΑ 2: Αν $f(x)=-1$ και $g(x)=$ άρτιος.
ΒΗΜΑ 3: Αν $f(x)\neq 0$ και $g(x)=0$.

### ΑΣΚΗΣΗ 11

**Να λύσετε την εξίσωση**

$$\left[2\sqrt{2^{\sqrt{x}+1}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-2}}=4.$$

### ΛΥΣΗ

Για $0\le x\neq 4$, έχουμε:

$$\left[2\sqrt{2^{\sqrt{x}+1}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-2}}=4\Leftrightarrow\left[2\cdot\left(2^{\sqrt{x}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-2}}=4\Leftrightarrow$$

$$\left[2\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}+1}{2}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-2}}=4\Leftrightarrow 2^{\frac{2}{\sqrt{x}-2}}\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}+1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-2}}=4\Leftrightarrow$$

$$2^{\frac{2}{\sqrt{x}-2}}\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}}=4\Leftrightarrow 2^{\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}}=2^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=2\Leftrightarrow 2+\sqrt{x}+1=2\left(\sqrt{x}-2\right)\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x}=7\Leftrightarrow x=49,$$

η οποία είναι δεκτή.

## Λογαριθμικές Εξισώσεις

**Μεθοδολογία Β1:**
**Λογαριθμικές εξισώσεις της μορφής**
**$\log_\alpha x=\log_\alpha y$.**

ΒΗΜΑ 1: Για να έχουν νόημα οι λογάριθμοι που εμφανίζονται (και γενικότερα η εξίσωση), παίρνουμε τους κατάλληλους περιορισμούς (εναλλακτικά, γράφουμε τους περιορισμούς χωρίς να κάνουμε επιπλέον πράξεις, βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης και βλέπουμε αν «περνάνε» από τους περιορισμούς).
ΒΗΜΑ 2: Κάθε πραγματικό αριθμό που δεν «συνοδεύει» λογάριθμο τον μετατρέπουμε σε λογάριθμο με βάση ίδια με αυτή που εμφανίζεται στους λογάριθμους της εξίσωσης.

πχ $3=\log 10^3$ ή $3=\ln e^3$ κλπ

ΒΗΜΑ 3: Κάθε συντελεστή λογάριθμου τον «ανεβάζουμε» ως εκθέτη.

πχ $2\log_3 x=\log_3 x^2$

ΒΗΜΑ 4: Όλους τους λογάριθμους του πρώτου μέρους τους μετατρέπουμε σε έναν, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αθροίσματος και διαφοράς.
Για παράδειγμα:

$$\log_2 x+\log_2(x+1)-\log_2 4=\log_2\frac{x\cdot(x+1)}{4}$$

Το ίδιο κάνουμε και στο δεύτερο μέρος, οπότε προκύπτει ισότητα λογαρίθμων ίδιας βάσης.
ΒΗΜΑ 5: «Απολογαριθμίζουμε» σύμφωνα με την ιδιότητα:

$$\log_\alpha x=\log_\alpha y\Leftrightarrow x=y$$

οπότε προκύπτει εξίσωση χωρίς λογάριθμους.
ΒΗΜΑ 6: Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.
ΒΗΜΑ 7: Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές ή απορρίπτονται, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του πρώτου βήματος.

### ΑΣΚΗΣΗ 12

**Να λύσετε την εξίσωση**

$$\log_2\left(9-2^x\right)=3-x.$$

### ΛΥΣΗ

Πρέπει $9-2^x>0\Leftrightarrow 2^x<9\Leftrightarrow x<\log_2 9$.

$$\log_2\left(9-2^x\right)=3-x\Leftrightarrow\log_2\left(9-2^x\right)=(3-x)\log_2 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(9-2^x\right)=\log_2 2^{3-x}\Leftrightarrow 9-2^x=\frac{2^3}{2^x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0$$

Για $2^x=\kappa>0$ η εξίσωση γίνεται:

$$\kappa^2-9\kappa+8=0\Leftrightarrow\kappa=1 \text{ ή } \kappa=8$$

Για $\kappa=1$ έχουμε: $2^x=1\Leftrightarrow x=0$

Για $\kappa=8$ έχουμε: $2^x=8\Leftrightarrow 2^x=2^3\Leftrightarrow x=3$

### ΑΣΚΗΣΗ 13

**Να λύσετε την εξίσωση:**

$$\log\sqrt{1+x}+3\log\sqrt{1-x}=\log\sqrt{1-x^2}+2$$

### ΛΥΣΗ

Η εξίσωση έχει νόημα για:

$$\begin{cases}\sqrt{1+x}>0\\ \sqrt{1-x}>0\\ \sqrt{1-x^2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\ 1-x>0\\ 1-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\\ x<1\\ -1<x<1\end{cases}$$

Οπότε, η εξίσωση έχει νόημα για $x\in(-1,1)$.

Η εξίσωση γίνεται:

$$\log\sqrt{1+x}+3\log\sqrt{1-x}=\log\sqrt{1-x^2}+2\Leftrightarrow$$

$$\log\sqrt{1+x}+\log\sqrt{1-x}^3=\log\sqrt{1-x^2}+\log 10^2\Leftrightarrow$$

$$\log\left(\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}^3\right)=\log\left(100\sqrt{1-x^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}^3=100\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}^2=100\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x}^2=100\cancel{\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow$$

$1-x=100\Leftrightarrow x=-99$, απορρίπτεται.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

**Μεθοδολογία Β2:**
**Λογαριθμικές εξισώσεις της μορφής**

$$\alpha_\nu(\log_\alpha f(x))^\nu+\alpha_{\nu-1}(\log_\alpha f(x))^{\nu-1}+\ldots\ldots+\alpha_0=0$$

**που ανάγονται σε πολυωνυμικές.**

ΒΗΜΑ 1: Για να έχουν νόημα οι λογάριθμοι που εμφανίζονται (και γενικότερα η εξίσωση), παίρνουμε τους κατάλληλους περιορισμούς.

ΒΗΜΑ 2: Αντικαθιστούμε το λογάριθμο που εμφανίζεται στην εξίσωση με μια νέα μεταβλητή (πχ $\ln x=\alpha$), οπότε προκύπτει μία πολυωνυμική εξίσωση.

ΒΗΜΑ 3: Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση.

ΒΗΜΑ 4: Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές ή απορρίπτονται, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του πρώτου βήματος.

### ΑΣΚΗΣΗ 14

**Να λύσετε την εξίσωση:**

$$4\ln^3 x-11\ln^2 x+10\ln x-3=0$$

### ΛΥΣΗ

Για $x>0$, θέτουμε $\ln x=u$ και η εξίσωση γίνεται:

$$4u^3-11u^2+10u-3=0$$

Με σχήμα Horner διαπιστώνουμε ότι το u=1 είναι ρίζα και η εξίσωση γίνεται:

$$(u-1)(4u^2-7u+3)=0\Leftrightarrow$$

$u=1$ (διπλή) ή $u=\frac{3}{4}$, οπότε έχουμε:

Για $u=1$, $\ln x=1\Leftrightarrow x=e$ (δεκτή)

Για $u=\frac{3}{4}$, $\ln x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{e^3}$ (δεκτή)

### ΑΣΚΗΣΗ 15

**Να λύσετε την εξίσωση:**

$$2\log^3 x-3=\log x(9\log x-10)$$

### ΛΥΣΗ

Για $x>0$ η εξίσωση γίνεται:

$$2\log^3 x-3=\log x(9\log x-10)\Leftrightarrow$$

$$2\log^3 x-3=9\log^2 x-10\log x\Leftrightarrow$$

$$2\log^3 x-9\log^2 x+10\log x-3=0$$

Θέτουμε $\log x=u$ και η εξίσωση γίνεται:

$$2u^3-9u^2+1u-3=0$$

Με σχήμα Horner διαπιστώνουμε ότι $u=1$ είναι ρίζα και έχουμε:

$$(u-1)(2u^2-7u+3)=0\Leftrightarrow u=1 \text{ ή } u=3 \text{ ή } u=\frac{1}{2}$$

Για $u=1$ είναι $\log x=1\Leftrightarrow x=10$.

Για $u=3$ είναι $\log x=3\Leftrightarrow x=1000$.

Για $u=\frac{1}{2}$ είναι $\log x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{10}$,

οι οποίες είναι δεκτές.

### ΑΣΚΗΣΗ 16

**Να λύσετε την εξίσωση**

$$x^{\log x}=100x.$$

### ΛΥΣΗ

Για $x>0$ έχουμε:

$$x^{\log x}=100x\Leftrightarrow \log x^{\log x}=\log 100x\Leftrightarrow$$

$$\log x\cdot\log x=\log 100+\log x\Leftrightarrow$$

$$(\log x)^2=\log 10^2+\log x\Leftrightarrow$$

$$(\log x)^2-\log x-2=0\Leftrightarrow$$

$$(\log x+1)(\log x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\log x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{10} \text{ ή}$$

$$\log x=2\Leftrightarrow x=100,$$

οι οποίες είναι δεκτές.

**Μεθοδολογία Β3:**

**Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $\alpha^{f(x)}=\beta^{g(x)}$, που ανάγονται σε λογαριθμικές**

Αν μία εκθετική εξίσωση καταλήγει σε ισότητα εκθετικών συναρτήσεων διαφορετικής βάσης, μπορεί να λυθεί με χρήση λογάριθμων ως εξής:

ΒΗΜΑ 1: Λογαριθμίζουμε τα δύο μέρη, χρησιμοποιώντας λογάριθμο οποιασδήποτε βάσης.

πχ $2^x = 3^{x+7} \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 3^{x+7}$

ΒΗΜΑ 2: «Κατεβάζουμε» τους εκθέτες ως συντελεστές των λογάριθμων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$$

ΒΗΜΑ 3: Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Παρατήρηση: Αφού έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε λογάριθμο οποιασδήποτε βάσης, συνήθως χρησιμοποιούμε ως βάση κάποια από τις βάσεις των εκθετικών συναρτήσεων που είχαν εμφανιστεί στο πρώτο βήμα.

ΑΣΚΗΣΗ 17

**Να λύσετε την εξίσωση**

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}^{\,x} - \sqrt{2-\sqrt{3}}^{\,x} = \frac{3}{2}.$$

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\sqrt{3}^{\,2}=1$$

Επομένως είναι $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η εξίσωση λόγω της $(1)$ γίνεται:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}^{\,x} - \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}^{\,x}} = \frac{3}{2}$$

Θεωρώντας $\sqrt{2+\sqrt{3}}^{\,x}=u>0$, έχουμε:

$$u-\frac{1}{u}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2u^2-2=3u\Leftrightarrow 2u^2-3u-2=0$$

Επομένως $u=2$ ή $u=-\dfrac{1}{2}$ (απορρίπτεται).

Για $u=2$ έχουμε:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2\Leftrightarrow x\cdot\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\ln 2\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\ln 2}{\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

Επομένως, $x=\dfrac{\ln 2}{\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$.

*Η εργασία συνοδεύεται και από αντίστοιχο αρχείο για χρήση σε διαδραστικούς πίνακες και εξ αποστάσεως διδασκαλία.*

**Σημείωση:**

*Για το άνοιγμα του αρχείου θα χρειαστείτε την εφαρμογή Smart Notebook.* 11.4.exe για διαδραστικούς πίνακες.

*Για το άνοιγμα του αρχείου θα χρειαστείτε την εφαρμογή Smart Notebook. Μπορείτε να τη βρείτε ΕΔΩ*

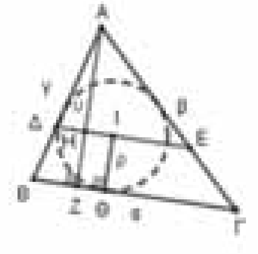
# Τάξη: Β΄

# Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Γιώργος Α. Κουσινιώρης

## Άσκηση 1.

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου και η παράλληλη από το Ι προς τη ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντιστοίχως, να δειχθεί ότι** $\Delta E=\dfrac{\alpha(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}$



**Λύση:** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια *(γιατί;)* οπότε ο λόγος των υψών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητάς τους. Συνεπώς έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{AH}{AZ}\Leftrightarrow \Delta E=\frac{B\Gamma\cdot AH}{AZ}\Leftrightarrow \Delta E=\frac{\alpha\cdot(\upsilon-\rho)}{\upsilon},\quad \mathbf{(1)}$$

όπου υ το ύψος από την κορυφή Α και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma)=\dfrac{\alpha\cdot\upsilon}{2}=\tau\cdot\rho$, όπου $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, οπότε

$\rho=\dfrac{\alpha\cdot\upsilon}{2\tau}$ **(2)** Η (1) λόγω της (2) γίνεται

$$\Delta E=\frac{\alpha\cdot\left(\upsilon-\dfrac{\alpha\cdot\upsilon}{2\tau}\right)}{\upsilon}=\frac{\alpha\cdot\upsilon\cdot\left(1-\dfrac{\alpha}{2\tau}\right)}{\upsilon}=$$

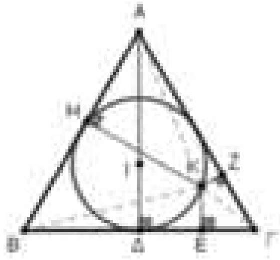
$$=\alpha\cdot\frac{2\tau-\alpha}{2\tau}=\alpha\cdot\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\ \text{ή}\ \Delta E=\frac{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}$$

## Άσκηση 2.

**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Αν από τυχαίο σημείο Κ του εγγεγραμμένου του κύκλου φέρουμε τις κάθετες ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ στις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως, τότε να δείξετε ότι:**

**α)** $\mathbf{KE+KZ+KH=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}}$

**β)** $\mathbf{KE^2+KZ^2+KH^2=\dfrac{3\alpha^2}{8}}$.



**Λύση: α)** Φέρνουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι : $(AB\Gamma)=\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Για το εμβαδόν του ΑΒΓ ισχύει:

$$(AB\Gamma)=(KB\Gamma)+(KA\Gamma)+(KAB)\Leftrightarrow$$

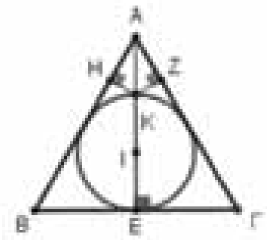
$$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}KE\cdot B\Gamma+\frac{1}{2}KZ\cdot A\Gamma+\frac{1}{2}KH\cdot AB$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}KE\cdot\alpha+\frac{1}{2}KZ\cdot\alpha+\frac{1}{2}KH\cdot\alpha$$

$$\Leftrightarrow KE+KZ+KH=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}(=\upsilon)$$

***Παρατήρηση:*** Η παραπάνω σχέση προφανώς ισχύει για οποιοδήποτε σημείο Κ εσωτερικό του ισοπλεύρου τριγώνου και όχι μόνο για σημείο του εγγεγραμμένου του κύκλου.

**β)** Επειδή η ζητούμενη σχέση ισχύει για το τυχαίο σημείο Κ του εγγεγραμμένου κύκλου θα ισχύει και για κάποιο σημείο που βρίσκεται σε μία ιδιαίτερη θέση, εν προκειμένω όταν το Κ είναι το σημείο τομής του ύψους ΑΔ με τον εγγεγραμμένο κύκλο. Στην περίπτωση αυτή, επειδή το ύψος είναι διάμεσος και διχοτόμος, έχουμε:



$KE=2\rho=2\cdot IE=2\cdot\dfrac{1}{3}AE=\dfrac{2}{3}\upsilon$ ( το Ε συμπίπτει με το Δ οπότε είναι ΑΕ = ΑΔ = υ) και $KZ=KH=\dfrac{1}{2}AK$, γιατί στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΚ και ΑΖΚ βρίσκονται απέναντι από γωνία 30°, και επειδή $AK=AE-KE=\upsilon-\dfrac{2}{3}\upsilon=\dfrac{1}{3}\upsilon$ είναι $KZ=KH=\dfrac{1}{6}\upsilon$.

Επομένως έχουμε

$$KE^2+KZ^2+KH^2=\left(\frac{2}{3}\upsilon\right)^2+\left(\frac{1}{6}\upsilon\right)^2+\left(\frac{1}{6}\upsilon\right)^2=$$

$$\frac{4}{9}\upsilon^2+\frac{1}{36}\upsilon^2+\frac{1}{36}\upsilon^2=\frac{18}{36}A\Delta^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{4}$$

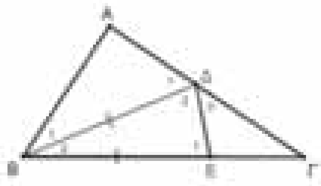
ή τελικά $KE^2+KZ^2+KH^2=\dfrac{3\alpha^2}{8}$.

### Άσκηση 3.

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6cm και ΑΓ = 9cm. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{4}{5}$ και στην πλευρά ΒΓ σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΒΕ = ΒΔ. Να δείξετε ότι: α) $A\hat{B}\Delta=\hat{\Gamma}$.**

**β) $B\hat{A}\Delta=2\cdot\Gamma\hat{\Delta}E$ γ) ΒΔ = 2·ΕΓ**

**Λύση: α)** Είναι



$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow$

$\frac{A\Delta+\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{4+5}{5}\Leftrightarrow$

$\frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{9}{5}\Leftrightarrow\frac{9}{\Delta\Gamma}=\frac{9}{5}$, οπότε ΔΓ = 5 (cm).

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Α κοινή και ισχύει $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{A\Delta}{AB}$ οπότε τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια, που σημαίνει ότι $\hat{B}_1=A\hat{B}\Delta=\hat{\Gamma}$. **(1)**

**β)** Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{A}=180°-\hat{B}_1-\hat{\Delta}_1$ **(2)**. Στο τρίγωνο ΒΓΔ η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική οπότε είναι $\hat{\Delta}_1=\hat{B}_2+\hat{\Gamma}$. **(3).** Η (2) λόγω των (1) και (3) γίνεται $\hat{A}=180°-\hat{\Gamma}-\left(\hat{B}_2+\hat{\Gamma}\right)$ ή

$\hat{A}=180°-\hat{B}_2-2\hat{\Gamma}$. **(4)**

Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές άρα είναι $\hat{\Delta}_2=\hat{E}_1$ επομένως $\hat{B}_2+2\hat{E}_1=180°\Leftrightarrow$

$180°-\hat{B}_2=2\hat{E}_1$, οπότε η (4) γίνεται

$\hat{A}=2\hat{E}_1-2\hat{\Gamma}\Leftrightarrow\hat{A}=2\left(\hat{E}_1-\hat{\Gamma}\right)$. **(5)**

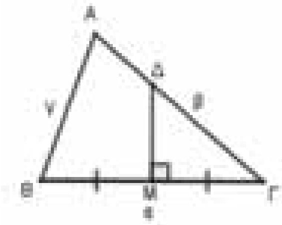
Στο τρίγωνο ΓΔΕ η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική συνεπώς είναι $\hat{E}_1=\hat{\Delta}_3+\hat{\Gamma}\Leftrightarrow\hat{E}_1-\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}_3$, οπότε η (5) γίνεται $\hat{A}=2\cdot\hat{\Delta}_3$ ή $B\hat{A}\Delta=2\cdot\Gamma\hat{\Delta}E$.

**γ)** Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ισχύει $\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{AB}$ ή $\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow B\Delta=\frac{2}{3}B\Gamma$ και επειδή ΒΔ = ΒΕ είναι $BE=\frac{2}{3}B\Gamma$ που σημαίνει ότι $E\Gamma=\frac{1}{3}B\Gamma$, οπότε ΒΕ = 2·ΕΓ ή ΒΔ = 2·ΕΓ.

### Άσκηση 4.

**Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ (β > γ) η μεσοκάθετος της πλευράς α τέμνει τις πλευρές α και β στα σημεία Μ και Δ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι $M\Delta=\frac{2\alpha E}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$ όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου.**

**Λύση:** Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$.



Είναι $M\Gamma=\frac{1}{2}\alpha$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΔ είναι $\eta\mu\Gamma=\frac{M\Delta}{\Gamma\Delta}$, οπότε η σχέση $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$ γίνεται

$E=M\Gamma\cdot\beta\cdot\frac{M\Delta}{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow E=M\Delta\cdot\beta\cdot\frac{M\Gamma}{\Gamma\Delta}$ **(1)**

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΔ είναι $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{M\Gamma}{\Gamma\Delta}$ και από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$, οπότε είναι $\frac{M\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$. Συνεπώς η (1) γίνεται:

$E=M\Delta\cdot\cancel{\beta}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\cancel{\beta}}=M\Delta\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$

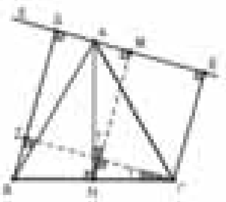
ή $M\Delta=\frac{2\alpha E}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$.

### Άσκηση 5.

**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου. Οι κάθετες προς την ευθεία ε από τις κορυφές Β και Γ τέμνουν την ε στα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως. Αν είναι ΒΔ=13, ΓΕ=11 και Μ το μέσον του ΔΕ, τότε: α) Να δείξετε ότι $AM=\sqrt{3}$.**

**β) Να βρείτε την πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ.**

**Λύση: α)** Φέρνουμε το ύψος ΑΝ του τριγώνου και τη ΓΖ⊥ΒΔ.



Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο *(γιατί;)* και η ΜΝ είναι η διάμεσός του, αφού το ύψος ΑΝ είναι και διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου, οπότε το Ν είναι το μέσον της ΒΓ.

Είναι $MN = \frac{B\Delta + \Gamma E}{2} = \frac{13+11}{2}$ ή MN = 12.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΓ και ΜΑΝ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν $\hat{\Gamma}_1 = \hat{N}_1$ (είναι οξείες με κάθετες πλευρές), συνεπώς έχουμε $\frac{AM}{BZ} = \frac{AN}{B\Gamma}$. **(1)** Το τετράπλευρο ΓΖΔΕ είναι ορθογώνιο οπότε είναι ΔΖ = ΓΕ = 11 και επομένως ΒΖ = 13–11 ή ΒΖ = 2. **(2)**

Το ύψος ΑΝ του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $AN = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ **(3)** Η (1) από (2), (3) γίνεται

$$\frac{AM}{2} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{AM}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{\alpha}\sqrt{3}}{\cancel{2}\cancel{\alpha}} \Leftrightarrow AM = \sqrt{3}.$$

**β)** Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΑΝ έχουμε $AN^2 = AM^2 + MN^2$

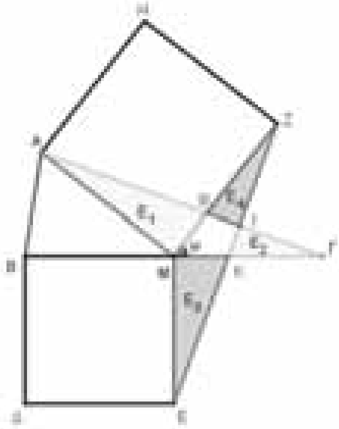
ή $\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 12^2$

$$\Leftrightarrow \frac{3\alpha^2}{4} = 3 + 144 \Leftrightarrow \frac{3\alpha^2}{4} = 147 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{147 \cdot 4}{3}$$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 49 \cdot 4$ και τελικά $\alpha = \sqrt{49 \cdot 4}$ ή α = 14.

## Άσκηση 6.

**Στο διπλανό σχήμα η ΑΜ είναι η διάμεσος του τρίγωνο ΑΒΓ. Τα τετράπλευρα ΒΜΕΔ και ΑΜΖΗ είναι τετράγωνα. Αν $E_1, E_2, E_3, E_4$ είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΜΘ, ΓΙΚ, ΕΜΚ και ΖΘΙ αντιστοίχως, να δείξετε ότι** $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$

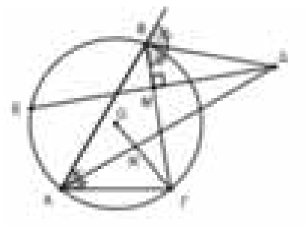


**Λύση:** Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΖΜΕ είναι ίσα γιατί έχουν ΜΑ=ΜΖ, ΜΓ=ΜΕ και τις γωνίες $A\hat{M}\Gamma = Z\hat{M}E = 90° + \hat{\omega}$, επομένως έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή ισχύει (ΑΜΓ) = (ΖΜΕ).

Αφαιρώντας από τα μέλη της τελευταίας ισότητας το εμβαδό του τετραπλεύρου ΜΘΙΚ έχουμε: (ΑΜΓ) – (ΜΘΙΚ) = (ΖΜΕ) – (ΜΘΙΚ) ή $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$.

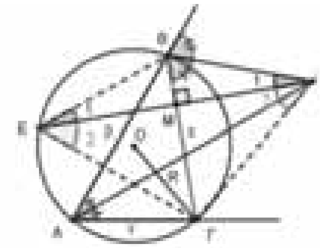
## Άσκηση 7.

**Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, η ΒΔ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Β, η ΔΕ⊥ΒΓ και το Μ είναι μέσο της ΔΕ.**



**α) Να δείξετε ότι $\hat{A} = 60°$**

**β) Να δείξετε ότι η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ είναι $R = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.**



**Λύση: α)** Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Β είναι $M\hat{B}\Delta = \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{180° - \hat{B}}{2}$

$= 90° - \frac{\hat{B}}{2}$. Στο το ορθογώνιο ΜΒΔ είναι $M\hat{B}\Delta + \hat{\Delta}_1 = 90°$ οπότε $\hat{\Delta}_1 = 90° - M\hat{B}\Delta = \frac{\hat{B}}{2}$. Το ΒΔΕ είναι ισοσκελές *(γιατί;)*, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$. Ομοίως είναι $\hat{E}_2 = \hat{\Delta}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Είναι $\hat{A} = B\hat{E}\Gamma$ *(γιατί;)* οπότε έχουμε $\hat{A} = B\hat{E}\Gamma = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}$ ή $\hat{B}+\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$. (1) Στο ΑΒΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ οπότε λόγω της (1) έχουμε $3\hat{A} = 180°$ ή $\hat{A} = 60°$.

**β)** Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A \text{ οπότε } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2\eta\mu A} = R \text{ ή } R = \frac{\alpha}{2\eta\mu 60°} = \frac{\alpha}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \text{ ή}$$

$$R = \frac{\alpha\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \text{ και τελικά } R = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$$

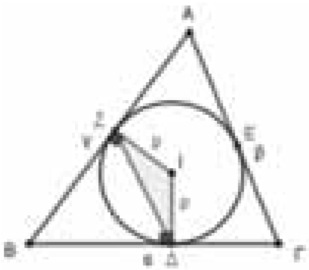
***Παρατήρηση:*** Η σχέση $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R$ προκύπτει άμεσα από το νόμο των ημιτόνων.

**Άσκηση 8.**

**Δίνεται ΑΒΓ με πλευρές α=14cm, β=15cm, γ=13cm. Αν Ι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και Ζ και Δ είναι τα σημεία επαφής του με τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΙΔΖ από τις πλευρές α, β και γ.**

**Λύση**

Το ΒΔΙΖ έχει $\hat{\Delta}+\hat{Z}=90°+90°=180°$ οπότε για τις γωνίες του Β και Ι ισχύει $\hat{B}+\hat{I}=$ $=360°-180°=180°$. Τα ΙΔΖ και ΑΒΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες τους $\hat{B}$ και $\hat{I}$ οπότε είναι $\frac{E_1}{E}=\frac{\rho^2}{\alpha\gamma}$. **(1)** Το εμβαδόν Ε του ΑΒΓ είναι



$E=\tau\cdot\rho$ οπότε είναι $\rho=\frac{E}{\tau}$. **(2)** Η (1), (2) δίνει

$\frac{E_1}{E}=\frac{\left(\frac{E}{\tau}\right)^2}{\alpha\gamma}$ ή $\frac{E_1}{E}=\frac{E^2}{\alpha\gamma\cdot\tau^2}$ ή $E_1=\frac{E^3}{\alpha\gamma\tau^2}$.

Το εμβαδόν Ε του ΑΒΓ από τις πλευρές του βρίσκεται από τον τύπο του Ήρωνα. Έχουμε:

$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{42}{2}=21$ και

$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=\sqrt{21\cdot7\cdot6\cdot8}$ =84cm².

Άρα είναι $E_1=\frac{84^3}{14\cdot15\cdot21^2}$ = 6,4cm².

***Άλλος τρόπος:*** Το εμβαδόν $E_1$ του ΙΔΖ βρίσκεται από τον τύπο $E_1=\frac{1}{2}\cdot I\Delta\cdot IZ\cdot \eta\mu\hat{I}=$ $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\rho\cdot\eta\mu\hat{I}$ ή $E_1=\frac{\rho^2\,\eta\mu\hat{I}}{2}$ **(1)** Το ΒΔΙΖ έχει $\hat{\Delta}+\hat{Z}=90°+90°=180°$ άρα $\hat{B}+\hat{I}=360°-180°=180°$ ή $\hat{I}=180°-\hat{B}$ τότε είναι $\eta\mu\hat{I}=\eta\mu\left(180°-\hat{B}\right)=\eta\mu B$ και από την (1) έχουμε $E_1=\frac{\rho^2\,\eta\mu B}{2}$. **(2)**

Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τους τύπους $E=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\gamma\cdot\eta\mu B$ και $E=\tau\cdot\rho$ οπότε είναι $\eta\mu B=\frac{2E}{\alpha\cdot\gamma}$. **(3)** και $\rho=\frac{E}{\tau}$. **(4)**

Η (2) λόγω των (3) και (4) γίνεται

$E_1=\frac{\left(\frac{E}{\tau}\right)^2\cdot\frac{2E}{\alpha\cdot\gamma}}{2}$ και τελικά $E_1=\frac{E^3}{\alpha\gamma\tau^2}$

**Άσκηση 9.**

**Δίνεται ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ. Αν Ζ, Ε και Δ είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντιστοίχως, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ από τις πλευρές α, β και γ του τριγώνου ΑΒΓ.**

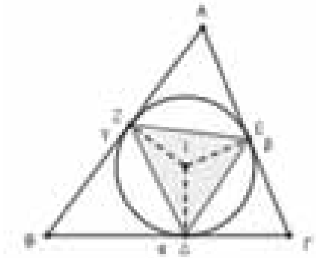
**Εφαρμογή για α = 25m, β = 40m και γ=39m.**

**Λύση:** Από την άσκηση 9 έχουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΙΔΖ είναι: $(I\Delta Z)=\frac{E^3}{\alpha\gamma\tau^2}$.

Ομοίως είναι

$(I\Delta E)=\frac{E^3}{\alpha\beta\tau^2}$ και

$(IEZ)=\frac{E^3}{\beta\gamma\tau^2}$.



Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι $(\Delta EZ)=(I\Delta Z)+(I\Delta E)+(IEZ)$ ή

$$(\Delta EZ)=\frac{E^3}{\alpha\gamma\tau^2}+\frac{E^3}{\alpha\beta\tau^2}+\frac{E^3}{\beta\gamma\tau^2} \text{ ή}$$

$$(\Delta EZ)=\frac{E^3}{\tau^2}\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}\right) \text{ ή}$$

$$(\Delta EZ)=\frac{E^3}{\tau^2}\left(\frac{\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)=\frac{E^3}{\tau^2}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

$=\frac{E^3}{\tau^2}\cdot\frac{2\tau}{\alpha\beta\gamma}$ και τελικά $(\Delta EZ)=\frac{2E^3}{\tau\alpha\beta\gamma}$. Για α=25m, β=40m και γ=39m έχουμε:

$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{25+40+39}{2}=\frac{104}{2}=52\,(m)$.

Επομένως το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι

$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=$

$\sqrt{52(52-25)(52-40)(52-39)}$ = 468 (m²) και

το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι

$(\Delta EZ)=\frac{2E^3}{\tau\alpha\beta\gamma}=\frac{2\cdot468^3}{52\cdot25\cdot40\cdot39}$ = 101,088 (m²)

*Σημείωση: Δείτε μια άλλη απόδειξη στο τεύχος 72 (σελ 29) του Ευκλείδη Β΄.*

**Πηγές:**

- http://www.gogeometry.com/problem/index.html

# Τάξη: Β΄

# Ασκήσεις Μαθηματικών προσανατολισμού

Μπαλτσαβιάς Β. – Τσακιρτζής Σ. – Τσιφάκης Χ

## Θέμα 1

**Δίνεται ο κύκλος $C_1: (x+3)^2+y^2=2$ και το σημείο $A\left(-3+\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right)$. Δίνεται επίσης η παραβολή $C_2: y^2=2x$.**

**i. Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το Α.**

**ii. Να βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής που είναι παράλληλες στις εφαπτομένες του κύκλου.**

### Απάντηση

i. Ο κύκλος $C_1$ έχει κέντρο $K(-3,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$. Είναι

$$(KA)=\sqrt{\sqrt{2}^2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8+2\sqrt{2}}=$$
$$\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=\rho,$$

άρα το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.
Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το Α έχει εξίσωση $\varepsilon_1: x=-3+\sqrt{2}$ και η απόσταση της από το κέντρο του κύκλου είναι ίση με

$$d\left(K,\varepsilon_1\right)=\frac{\left|-3+3-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+0}}=\sqrt{2}=\rho,$$ επομένως η $\varepsilon_1$

είναι κατακόρυφη εφαπτομένη του κύκλου.
Η ευθεία που διέρχεται από το Α και έχει κλίση λ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_2: y+2-\sqrt{2}=\lambda(x+3-\sqrt{2})\Leftrightarrow$$
$$\lambda x-y+\left(3-\sqrt{2}\right)\lambda+\sqrt{2}-2=0$$

Η $\varepsilon_2$ εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν

$$d\left(K,\varepsilon_2\right)=\rho\Leftrightarrow\frac{\left|-3\lambda-3\lambda-\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}-2\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow$$
$$\left|\sqrt{2}\lambda+2-\sqrt{2}\right|=\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{2}\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{2}\cdot\left|\lambda+\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{2}\Leftrightarrow$$
$$\left|\lambda+\sqrt{2}-1\right|^2=\sqrt{\lambda^2+1}^2\Leftrightarrow$$
$$\lambda^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda+\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{2}\lambda-2\lambda+2-2\sqrt{2}+1=1\Leftrightarrow$$
$$\left(2\sqrt{2}-2\right)\lambda=2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow\lambda=1$$

Άρα $\varepsilon_2: y+2-\sqrt{2}=x+3-\sqrt{2}\Leftrightarrow y=x+1$

Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι $\varepsilon_1: x=-3+\sqrt{2}$ και $\varepsilon_2: y=x+1$

ii. Είναι $p=1$ και η εξίσωση της παραβολής στο σημείο της $(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

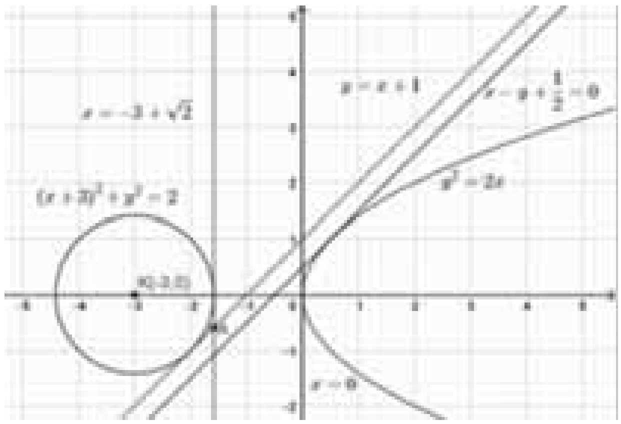
$$\varepsilon_3: yy_1=x+x_1\Leftrightarrow\underbrace{1}_{A}\cdot x+\underbrace{\left(-y_1\right)}_{B}y+x_1=0$$

Για να είναι η $\varepsilon_3$ παράλληλη στην $\varepsilon_1$ πρέπει και αρκεί $B=0\Leftrightarrow y_1=0$. Αφού το $(x_1,y_1)\in C_2$ είναι $0^2=2x_1\Leftrightarrow x_1=0$ άρα $\varepsilon_3: x=0$.
Για να είναι η $\varepsilon_3$ παράλληλη στην $\varepsilon_2$ πρέπει και αρκεί $\lambda_{\varepsilon_3}=\lambda_{\varepsilon_2}\Leftrightarrow-\frac{A}{B}=1\Leftrightarrow A=-B\Leftrightarrow y_1=-1$.

Αφού το $(x_1,y_1)\in C_2$ είναι $(-1)^2=2x_1\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}$

άρα $\varepsilon_3: x-y+\frac{1}{2}=0.$

Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι $x=0$ και $x-y+\frac{1}{2}=0.$



## Θέμα 2

Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=8$ και η παραβολή $C_2: y^2=16x$

i. α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
β) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής.

ii. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες του κύκλου και της παραβολής.

iii. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες του (ii) ερωτήματος τέμνονται κάθετα στην διευθετούσα.

## Απάντηση

**i.** α) Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

β) $2p=16 \Leftrightarrow p=8$, άρα $E(4,0)$ και $\delta: x=-4$

**ii. 1ος τρόπος**:

Η εφαπτομένη της παραβολής $C_2$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon): yy_1=8(x+x_1) \Leftrightarrow 8x-yy_1+8x_1=0$ (1).

Η (ε) εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν

$$d(O,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|8\cdot 0-0\cdot y_1+8x_1|}{\sqrt{8^2+(-y_1)^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{8|x_1|}{\sqrt{64+{y_1}^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow 64{x_1}^2=8\left(64+{y_1}^2\right)$$

$$\underset{{y_1}^2=16x_1}{\overset{A\in C_2}{\Leftrightarrow}} 8{x_1}^2=64+16x_1 \Leftrightarrow$$

$${x_1}^2-2x_1-8=0 \Leftrightarrow x_1=4 \text{ ή } x_1=-2$$

Όμως $x_1=\frac{{y_1}^2}{4}\geq 0$, άρα δεκτή είναι μόνο η $x_1=4$

Για $x_1=4$ έχουμε από την

$C_2$: ${y_1}^2=64 \Leftrightarrow y_1=8$ ή $y_1=-8$

Από την (1) για $x_1=4$ και $y_1=8$ προκύπτει η εφαπτομένη

$(\varepsilon_1): 8x-8y+32=0 \Leftrightarrow x-y+4=0$ ενώ

για $x_1=4$ και $y_1=-8$ προκύπτει η εφαπτομένη

$(\varepsilon_2): 8x+8y+32=0 \Leftrightarrow x+y+4=0$.

**Β΄ τρόπος**: (γενικότερος)

Η εφαπτομένη της παραβολής $C_2$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): yy_1=8(x+x_1) \Leftrightarrow \underbrace{8}_{A}x+\underbrace{(-y_1)}_{B}y+\underbrace{8x_1}_{\Gamma}=0.$$

Αν $B=0 \Leftrightarrow y_1=0$ τότε είναι $x_1=0$, άρα προκύπτει η κατακόρυφη εφαπτομένη $x=0$. Επίσης αφού $A\neq 0$ η παραβολή δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη εφαπτομένη του κύκλου. Συνεπώς ο κύκλος και η παραβολή δεν έχουν κοινές κατακόρυφες ή οριζόντιες εφαπτομένες.

Αναζητούμε λοιπόν κοινή εφαπτομένη της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda\neq 0$. (ε)

Η $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow \lambda x-y+\beta=0$ εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν

$$d(O,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|\beta|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow \beta^2=8\left(\lambda^2+1\right) \quad (1)$$

Στην επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ευθείας $y=\lambda x+\beta$ και παραβολής $y^2=16x$,

$$\begin{cases} y^2=16x \\ y=\lambda x+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y^2}{16} \\ \lambda x-y+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y^2}{16} \\ \frac{\lambda}{16}y^2-y+\beta=0 \end{cases}$$

προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $\frac{\lambda}{16}y^2-y+\beta=0$ αφού $\lambda\neq 0$. Αν εξίσωση έχει δυο ρίζες ίσες (Δ=0) τότε είναι γνωστό ότι η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή και αντίστροφα. Είναι

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 1-4\frac{\lambda}{16}\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \beta\cdot\lambda=4 \Leftrightarrow \beta=\frac{4}{\lambda}$$

Η ευθεία λοιπόν εφάπτεται στην παραβολή αν και μόνο αν $\beta=\frac{4}{\lambda}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\beta^2=8\left(\lambda^2+1\right) \Leftrightarrow \frac{16}{\lambda^2}=8\left(\lambda^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$2=\lambda^2\left(\lambda^2+1\right) \Leftrightarrow \lambda^4+\lambda^2-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda^2-1\right)\cdot\left(\lambda^2+2\right)=0 \overset{\lambda^2+2>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1$$

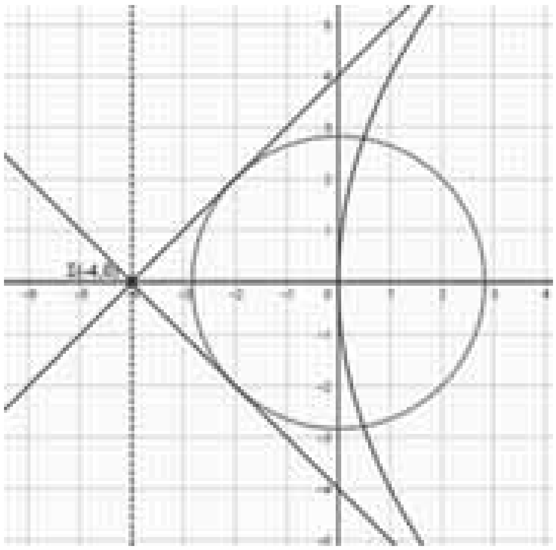
Από τη (2) για $\lambda=1$ είναι $\beta=4$ άρα

$(\varepsilon_1): y=x+4$ και

Για $\lambda=1$ είναι $\beta=4$, άρα $(\varepsilon_2): y=-x-4$.

**iii.** Είναι

$$\begin{cases} y=x+4 \\ y=-x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=-x-4 \\ y=-x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$$



Άρα οι εφαπτομένες τέμνονται στο $\Sigma(-4,0)$ το οποίο ανήκει στην ευθεία $x=-4$.
Επίσης είναι $\lambda_1\cdot\lambda_2=1\cdot(-1)=-1$, άρα $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

### Θέμα 3

**Σε σύστημα συντεταγμένων $Oxy$, δίνεται η έλλειψη $C_1$ με εστίες $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και ο κύκλος $C_2: x^2+y^2=\rho^2$. Η εφαπτομένη του κύκλου $C_2$, στο σημείο του Α, έχει εξίσωση $(\eta): x+\sqrt{3}y=2\varepsilon\sqrt{6}$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{8}{\sqrt{3}}$ τ.μ. Αν το Α είναι ένα κοινό σημείο των $C_1$ και $C_2$,**

i. **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και της έλλειψης.**
ii. **Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου και της έλλειψης.**
iii. **Δείξτε ότι τα σημεία του (ii) ερωτήματος είναι κορυφές ορθογώνιου παραλληλογράμμου.**
iv. **Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει για ορθογώνιο βάσης το ορθογώνιο του (iii) ερωτήματος.**

### Απάντηση

i. Για $x=0$ στην (η) έχουμε

$$\sqrt{3}y=2\sqrt{6}\varepsilon \Leftrightarrow y=\frac{2\sqrt{6}\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

και για $y=0$ στην (η) έχουμε $x=2\sqrt{6}\varepsilon$.
Επομένως η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $Z\left(2\sqrt{6}\varepsilon,0\right)$ και τον άξονα y΄y στο σημείο $\Theta\left(0,\frac{2\sqrt{6}\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)$.

Είναι:

$$(OZ\Theta)=\frac{1}{2}\cdot(OZ)\cdot(O\Theta)\Leftrightarrow\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2\sqrt{6}\varepsilon}{\sqrt{3}}\right|\cdot\left|2\sqrt{6}\varepsilon\right|\Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{12\varepsilon^2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\varepsilon^2=\frac{8}{12}\Leftrightarrow\varepsilon^2=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Άρα $(\eta): x+\sqrt{3}y=4\Leftrightarrow x+\sqrt{3}y-4=0$.
Το κέντρο του κύκλου είναι το $O(0,0)$ και η ακτίνα του ίση με

$$\rho=d(O,\eta)=\frac{\left|4\cdot0+\sqrt{3}\cdot0-4\right|}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}}=\frac{4}{2}=2,$$

επομένως $C_2: x^2+y^2=4$

Για την εύρεση του σημείου επαφής Α των $C_2$ και (η) λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x+\sqrt{3}y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x=4-\sqrt{3}y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(4-\sqrt{3}y\right)^2+y^2=4\\ x=4-\sqrt{3}y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-2\sqrt{3}y+3=0\\ x=4-\sqrt{3}y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(y-\sqrt{3}\right)^2=0\\ x=4-\sqrt{3}y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{3}\\ x=1\end{cases}.$$

Άρα $A\left(1,\sqrt{3}\right)$.

Η έλλειψη $C_1$ έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$. Είναι

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\varepsilon^2=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\Leftrightarrow\frac{4}{6}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\Leftrightarrow3\beta^2=\alpha^2\quad(1)$$

Αφού η $C_1$ διέρχεται από το $A\left(1,\sqrt{3}\right)$ έχουμε

$$\frac{1^2}{\beta^2}+\frac{\sqrt{3}^2}{\alpha^2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{\beta^2}+\frac{3}{\alpha^2}=1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{\beta^2}+\frac{3}{3\beta^2}=1\Leftrightarrow\beta^2=2$$

και από (1) είναι $\alpha^2=6$, επομένως

$$C_1: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1.$$

ii. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της έλλειψης:

$$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1\end{cases}\overset{\omega=x^2\geq0}{\underset{\varphi=y^2\geq0}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\omega+\varphi=4\\ \frac{\omega}{2}+\frac{\varphi}{6}=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\omega=4-\varphi\\ \frac{4-\varphi}{2}+\frac{\varphi}{6}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=4-\varphi\\ 2\varphi=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=1\\ \varphi=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2=1\\ y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x=1\ \text{ή}\ x=-1)\\ (y=\sqrt{3}\ \text{ή}\ y=-\sqrt{3})\end{cases}$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα:
$A\left(1,\sqrt{3}\right), B\left(-1,\sqrt{3}\right), \Gamma\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ και $\Delta\left(1,-\sqrt{3}\right)$

iii. Είναι

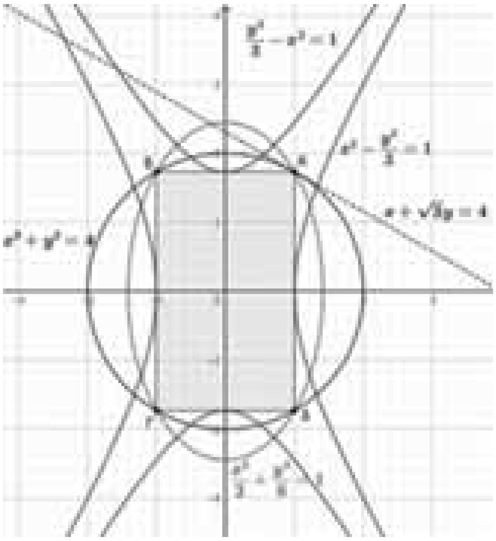
$$\overrightarrow{AB}=(-2,0),\ \overrightarrow{B\Gamma}=\left(0,-2\sqrt{3}\right),\ \overrightarrow{\Delta\Gamma}=(-2,0)\ \text{και}$$

$$\overrightarrow{A\Delta}=\left(0,-2\sqrt{3}\right)$$

Έχουμε:
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ άρα $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|$ και $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, και

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-2\cdot 0+0\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=0$, άρα $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$ οπότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

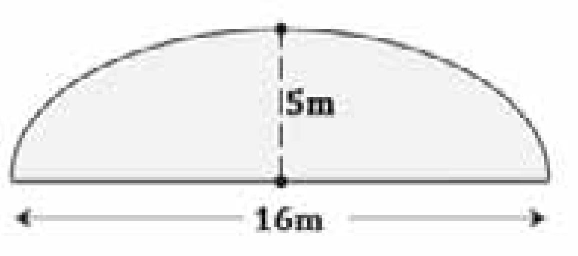
iv. Αν η ζητούμενη υπερβολή έχει εστίες στον άξονα των x τότε έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με ορθογώνιο βάσης το ΑΒΓΔ. Αφού $\alpha>0,\beta>0$ είναι $\alpha=1$ και $\beta=\sqrt{3}$, άρα $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.



Αν η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα των y τότε έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ με ορθογώνιο βάσης το ΑΒΓΔ. Αφού $\alpha>0,\beta>0$ είναι $\alpha=\sqrt{3}$ και $\beta=1$, άρα $\frac{y^2}{3}-x^2=1$.

## Θέμα 4

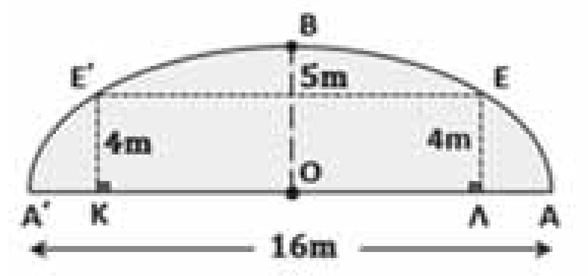
**Μέσα σε ένα βουνό πρόκειται να κατασκευαστεί μια σήραγγα ελλειπτικού ανοίγματος (βλ. σχήμα) ώστε να επεκταθεί ένας αυτοκινητόδρομος τριών λωρίδων. Το πλάτος της σήραγγας στο έδαφος πρέπει να είναι 16m ενώ το ύψος 5m.**




**Να βρείτε το μέγιστο πλάτος του αυτοκινητόδρομου, ώστε να μπορεί να εισέλθει μέσα στη σήραγγα φορτηγό, μέγιστου ύψους 4m.**

### Απάντηση

Σε σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την έλλειψη C με κέντρο το O, μεγάλο άξονα ΑΑ΄ με $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$ και μικρό άξονα ΒΒ΄ με $B(0,5)$. Είναι $2\alpha=16\Leftrightarrow\alpha=8$ και $\beta=5$ όποτε η έλλειψη έχει εξίσωση $C:\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$.




Αν $E'(x,-4)$ και $E(x,4)$ σημεία της έλλειψης τότε για $y=4$ στην C έχουμε:

$$\frac{x^2}{8^2}+\frac{4^2}{5^2}=1\Leftrightarrow x^2=\frac{9\cdot 64}{25}\Leftrightarrow x=\frac{24}{5} \text{ ή } x=-\frac{24}{5}$$

άρα $E'\left(-\frac{24}{5},-4\right)$ και $E\left(\frac{24}{5},4\right)$.

Αν Κ και Λ είναι οι προβολές των σημείων Ε΄ και Ε αντίστοιχα στον χ΄χ, το ζητούμενο μέγιστο πλάτος του αυτοκινητόδρομου είναι ίσο με $K\Lambda=\left|x_{E'}-x_E\right|=\frac{48}{5}=9{,}6\,\text{m}$.

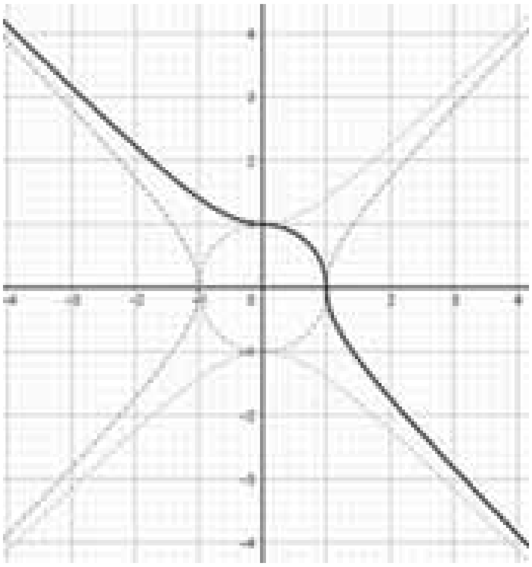
## Θέμα 5

**Να σχεδιάσετε την καμπύλη με εξίσωση $x\cdot|x|+y\cdot|y|=1$. (E)**

### Απάντηση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x\geq 0$ και $y\geq 0$, τότε η (E) γίνεται: $x^2+y^2=1$ (εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου στο πρώτο τεταρτημόριο)
- Αν $x\geq 0$ και $y<0$, τότε η (E) γίνεται: $x^2-y^2=1$ (εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής στο τέταρτο τεταρτημόριο)
- Αν $x<0$ και $y\geq 0$, τότε η (E) γίνεται: $y^2-x^2=1$ (εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής στο δεύτερο τεταρτημόριο)
- Αν $x<0$ και $y<0$, τότε η (E) γίνεται: $x^2+y^2=-1$ και είναι αδύνατη, δηλαδή δεν παριστάνει τίποτα στο επίπεδο.



Θέμα 6

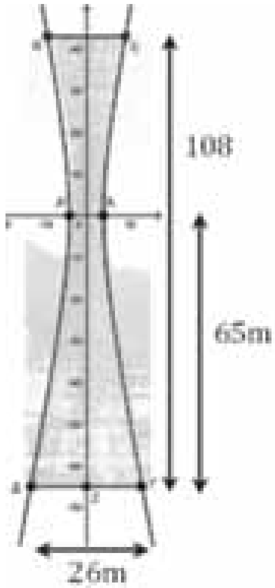
**Ο πύργος τηλεπικοινωνιών του λιμανιού του Κόμπε της Ιαπωνίας έχει σχήμα (τμήματος) υπερβολής όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Το ύψος του πύργου είναι 108 μέτρα. Το στενότερο μέρος του απέχει 65 μέτρα από το έδαφος και έχει πλάτος μόλις 8 μέτρα. Η διάμετρος της βάσης είναι 26 μέτρα. Με τη βοήθεια ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών οι οποίες πλαισιώνουν ικανοποιητικά τη δισδιάστατη απεικόνιση του πύργου.**

Απάντηση

Ας θεωρήσουμε ότι το πλάγιο μέρος πρόκειται για τμήμα υπερβολής με εστίες στον άξονα χ΄χ συνεπώς θα έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (Ε) με κατάλληλους περιορισμούς.

Το στενότερο μέρος είναι η απόσταση ΑΑ' των κορυφών της υπερβολής, άρα $AA'=8$ οπότε $\alpha=4$. Επομένως η (Ε) γίνεται $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (Ε').

Εφόσον η διάμετρος ΔΓ της βάσης είναι 26 μέτρα λόγω συμμετρίας έχουμε $Z\Gamma=13$, άρα το σημείο Γ έχει τετμημένη ίση με 13. Επίσης, αφού η απόσταση του Α΄Α από το έδαφος είναι 65 μέτρα, η τεταγμένη του Γ θα είναι ίση με $-65$, άρα το σημείο $\Gamma(13,-65)$ ανήκει στην υπερβολή. Έτσι για $x=13$ και $y=-65$ στην (Ε΄) έχουμε:





$$\frac{13^2}{4^2}-\frac{(-65)^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{169}{16}-\frac{4225}{\beta^2}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{169}{16}-1=\frac{4225}{\beta^2}\Leftrightarrow\beta^2=\frac{67600}{153}$$

Οπότε $\frac{x^2}{16}-\frac{153\cdot y^2}{67600}=1$ (Υ), όπου $-65\le y\le 43$.

Επίσης για $y=43$ στην Υ έχουμε:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{153\cdot 43^2}{67600}=1\overset{\text{πράξεις}}{\Leftrightarrow}$$

$$x=\frac{\sqrt{350497}}{65} \text{ ή } x-=\frac{\sqrt{350497}}{65}, \text{ άρα}$$

$$E\left(\frac{\sqrt{350497}}{65},43\right) \text{ και } B\left(-\frac{\sqrt{350497}}{65},43\right) \text{ με}$$

$$\frac{\sqrt{350497}}{65}\cong 9{,}11$$

Η γραμμή που προσεγγίζει τη δισδιάστατη απεικόνιση του πύργου αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ $\left(y=43,-\frac{\sqrt{350497}}{65}\le x\le\frac{\sqrt{350497}}{65}\right)$ και ΔΓ $(y=-65,-13\le x\le 13)$ και από τμήμα υπερβολής $\left(\frac{x^2}{16}-\frac{153\cdot y^2}{67600}=1\,,-65\le y\le 43\right)$.

Θέμα 7

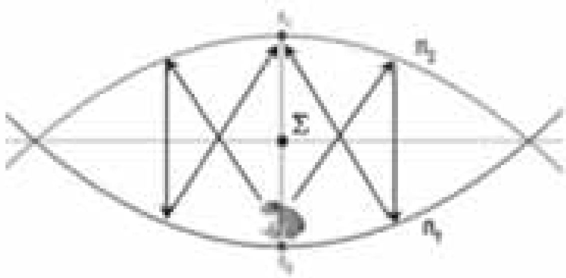
**Το διπλανό παιχνίδι είναι ένας «κατασκευαστής» οπτικών ψευδαισθήσεων. Αποτελείται από δυο όμοια κομμάτια εκ των οποίων το ένα είναι ανοιχτό από πάνω. Στο**

**εσωτερικό κάθε κομματιού υπάρχει ένας παραβολικός καθρέπτης. Αν τοποθετήσουμε ένα αντικείμενο (βατραχάκι) στο κέντρο του κάτω μέρους τότε κλείνοντας το παιχνίδι θα δούμε το ολόγραμμα του στο πάνω μέρος όπως φαίνεται στις εικόνες. Μπορείτε να το εξηγήσετε;**

### Απάντηση

Αν $E_1$ η εστία και $K_1$ η κορυφή της «κάτω» παραβολής $\Pi_1$ και Σ το μέσο του $K_1E_1$, τότε αν στρέψουμε την παραβολή $\Pi_1$ ως προς το σημείο Σ κατά $180^o$ θα προκύψει μια νέα παραβολή $\Pi_2$ συμμετρική της $\Pi_1$. Η εστία $E_2$ της $\Pi_2$ ταυτίζεται με την κορυφή $K_1$.

Το βατραχάκι είναι τοποθετημένο στην εστία της (πάνω) παραβολής $\Pi_2$. Όταν το φως εισέρχεται, τότε οι ακτίνες από την εστία $E_2$ αντανακλώνται στην παραβολή $\Pi_2$, κινούνται παράλληλα με τον άξονα της $\Pi_2$ προς την παραβολή $\Pi_1$ ύστερα αντανακλώνται στην $\Pi_1$ και κατευθύνονται προς την εστία $E_1$. Συνεπώς το είδωλο από το βατραχάκι θα φαίνεται στο πάνω μέρος του παιχνιδιού.



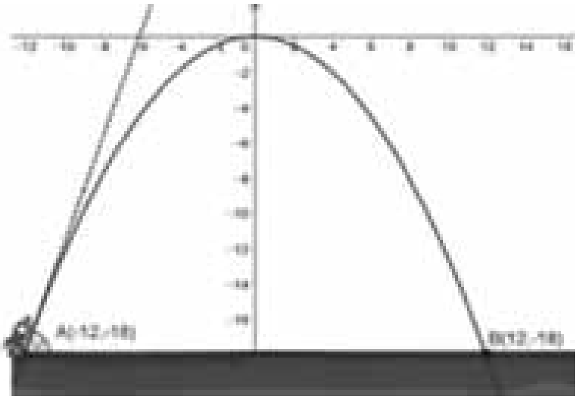

### Θέμα 8

**Σε οριζόντιο έδαφος εκτοξεύουμε ένα μικρό πύραυλο ο οποίος ακολουθώντας παραβολική τροχιά φτάνει σε μέγιστο ύψος 18m όταν απέχει 12m από το σημείο εκτόξευσης. Τελικά φτάνει στο έδαφος 24m μακριά από το σημείο εκτόξευσης. Βρείτε τη γωνία εκτόξευσης.**

**(Δίνεται εφ($71,6^o$) = 3)**

### Απάντηση

Σε σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε ότι το έδαφος βρίσκεται στην ευθεία $y=-12$ και η κορυφή της παραβολής, δηλ. το σημείο μέγιστού ύψους, το $O(0,0)$. Το σημείο εκτόξευσης Α θα έχει συντεταγμένες $A(-12,-18)$ και το σημείο πρόσκρουσης Β θα έχει συντεταγμένες $B(12,-18)$ έτσι ώστε $AB=24$.



Η παραβολή C που περιγράφει την τροχιά του πυραύλου έχει εξίσωση της μορφής $x^2=2py$. Αφού το σημείο Α ανήκει στην παραβολή έχουμε για $x=-12$ και $y=-18$ στην C:

$$(-12)^2=2p(-18)\Leftrightarrow p=-4,\ \text{άρα}\ C:x^2=-8y$$

Η εφαπτομένη ε της παραβολής στο Α έχει εξίσωση

$$\varepsilon: x(-12)=-4(y-18)\Leftrightarrow y=3x-18$$

και κλίση $\lambda_\varepsilon=3$.

Για τη ζητούμενη γωνία εκτόξευσης ω θα ισχύει $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=3$. Άρα $\omega=71.6^o$.

### Θέμα 9

**Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda x-1=0$ (1), με $\lambda\in R$.**

**α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda$ για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.**

**β) Για $\lambda=-3$ να βρείτε:**

**i) Τα σημεία του κύκλου C, τα οποία απέχουν τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από την αρχή Ο των αξόνων.**

**ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$, του κύκλου C στο σημείο του $A(0,1)$.**

**iii) Να βρείτε και την άλλη εφαπτομένη του κύκλου C, η οποία διέρχεται από το Β, όπου Β το σημείο τομής της $(\varepsilon)$ με τον $x'x$.**

Απάντηση

α) Η εξίσωση γίνεται:

$$x^2+y^2-2\lambda x-1=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2\lambda x+\lambda^2+y^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$
$$(x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2+1>0,$$

άρα παριστάνει εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in R$.

β) i) Για $\lambda=-3$, έχουμε C: $(x+3)^2+y^2=10$ με κέντρο το $K(-3,0)$ και $R=\sqrt{10}$.

Εάν M ένα σημείο του κύκλου, τότε η μέγιστη απόστασή του από την αρχή των αξόνων θα είναι

$$d_{max}=\left|\overrightarrow{OM}\right|_{max}=\left|\overrightarrow{OK}\right|+R=3+\sqrt{10}$$

και η ελάχιστη αντίστοιχα θα είναι

$$d_{min}=\left|\overrightarrow{OM}\right|_{min}=R-\left|\overrightarrow{OK}\right|=\sqrt{10}-3,$$

γιατί $R>\left|\overrightarrow{OK}\right|$ οπότε το $O(0,0)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

ii) Έστω $M(x,y)$ σημείο της εφαπτομένης διαφορετικό του $A(0,1)$.

Τότε έχουμε $\overrightarrow{KA}=(3,1)$, $\overrightarrow{AM}=(x,y-1)$ και θα ισχύει: $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 3x+y-1=0$.

Άρα η εφαπτομένη στο A είναι

$$(\varepsilon):\ 3x+y-1=0$$

iii) Η $(\varepsilon)$ τέμνει τον $x'x$ στο $B\left(\frac{1}{3},0\right)$. Λόγω συμμετρίας η άλλη εφαπτομένη από το B θα έχει εξίσωση

$$(\varepsilon'):\ 3x-y-1=0$$

## Θέμα 10

**Η εξίσωση της τροχιάς ενός Πλανήτη γύρω από τον Ήλιο είναι έλλειψη, με τον Ήλιο σε μία από τις εστίες της. Η μεγαλύτερη απόσταση του Πλανήτη από τον Ήλιο ονομάζεται Αφήλιο (Α), ενώ η μικρότερη απόσταση ονομάζεται Περιήλιο (Π). Η μέση απόσταση ενός πλανήτη από τον Ήλιο είναι το μισό του μήκους του μεγάλου άξονα. Εάν η μέση απόσταση της Γης από τον Ήλιο είναι 93 εκατομμύρια Km και το Αφήλιό της είναι 94,5 εκατομμύρια Km, τότε:**

**α) Να βρεθεί το Περιήλιο.**

**β) Να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο.**

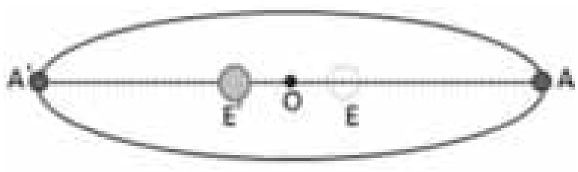
Απάντηση

α) Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με το σημείο $O(0,0)$ στο μέσο της απόστασης Αφήλιου – Περιήλιου. Έτσι η εξίσωση της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι έλλειψη με μεγάλο άξονα τον $x'x$ και δίνεται από την σχέση:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Από τα παραπάνω έχουμε:

Αφήλιο $AE'=94.5$, Περιήλιο $A'E'$ και $AA'=2\alpha=2\cdot 93=186$.




Είναι

$$AE'+A'E'=2\alpha \Leftrightarrow A'E'=2\alpha-AE'$$
$$A'E'=186-94,5=91,5$$

Άρα το Περιήλιο είναι ίσο με 91,5 εκατομμύρια Km.

Επίσης, αφού το O είναι το κέντρο της ελλειπτικής τροχιάς, τότε

$$OA'=\frac{A'A}{2}=\frac{186}{2}=93, \text{ επομένως}$$
$$OE'=OA'-A'E'=93-91.5=1.5$$

Έχουμε:

$2\alpha=183 \Leftrightarrow \alpha=93$ και $\gamma=1.5$. Άρα

$$\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{93^2-1{,}5^2}=\sqrt{8646{,}75}$$

και η τροχιά της γης έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{8649}+\frac{y^2}{8646{,}75}=1.$$

## Θέμα 11

**Να βρεθούν οι τιμές του $k\in R$ για τις οποίες η εξίσωση:**

$$x^2+y^2+4x-6y=\frac{k^2-15k+24}{k-2} \qquad (1)$$

**παριστάνει**

**A) i) ένα σημείο (ποιο;)**

**ii) ένα κενό σύνολο**

**iii) κύκλο του οποίου να βρεθούν τα στοιχεία.**

**B) Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου στα οποία η εφαπτομένη του, είναι κάθετη στην ευθεία**

$$(\delta):\ 2x-y+2024=0.$$

## Απάντηση

A) Καταρχάς πρέπει $k\neq 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2+y^2+4x-6y=\frac{k^2-15k+24}{k-2}\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+4x-6y+4+9=\frac{k^2-15k+24}{k-2}+13\Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=\frac{k^2-2k-2}{k-2},\ k\neq 2 \qquad (2).$$

i) Εάν

$$\frac{k^2-2k-2}{k-2}=0\Leftrightarrow k^2-2k-2=0\Leftrightarrow$$

$$k^2-2k+1=3\Leftrightarrow (k-1)^2=3\Leftrightarrow k=1\pm\sqrt{3}$$

Τότε η (2) γίνεται:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=0\Leftrightarrow x=-2 \text{ και } y=3.$$

Άρα η (1) παριστάνει σημείο, το $(-2,3)$.

ii) Πρέπει η (2) να είναι αδύνατη. Τότε δεν θα υπάρχουν σημεία του επιπέδου που να επαληθεύουν την (1).

Έτσι αρκεί να είναι:

$$\frac{k^2-2k-2}{k-2}<0\Leftrightarrow k\in\left(-\infty,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(2,1+\sqrt{3}\right)$$

iii) Για να παριστάνει κύκλο, πρέπει και αρκεί να είναι

$$\frac{k^2-2k-2}{k-2}>0\Leftrightarrow k\in\left(1-\sqrt{3},2\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$$

και θα έχει κέντρο το $K(-2,3)$ και ακτίνα $R=\sqrt{\dfrac{k^2-2k-2}{k-2}}$.

B) Τα σημεία του κύκλου, από τα οποία μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $(\delta)$ είναι αυτά στα οποία η παράλληλη από το κέντρο του κύκλου προς την $(\delta)$ τέμνει τον κύκλο.

$$\left.\begin{aligned}(x+2)^2+(y-3)^2&=\frac{k^2-2k-2}{k-2}\\ y-3&=2(x+2)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}x&=-2\pm\sqrt{\frac{k^2-2k-2}{5(k-2)}}\\ y&=3\pm2\sqrt{\frac{k^2-2k-2}{5(k-2)}}\end{aligned}\right\},\ \text{με}$$

$k\in\left(1-\sqrt{3},2\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$.

Άρα τα σημεία είναι

$$M\left(-2+\sqrt{\frac{k^2-2k-2}{5(k-2)}},3+2\cdot\sqrt{\frac{k^2-2k-2}{5(k-2)}}\right)$$

και

$$M\left(-2-\sqrt{\frac{k^2-2k-2}{5(k-2)}},3-2\cdot\sqrt{\frac{k^2-2k-2}{5(k-2)}}\right)$$

**Τάξη: Γ΄**

# Επαναληπτικές Ασκήσεις Ανάλυσης

Σωτήρης Σκοτίδας

## Άσκηση 1

**Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με**

$$f(x)=x\cdot \ln\left(1+x^{-1}\right).$$

**α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.**

**β) Να βρείτε το σύνολο τιμών.**

**γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$ είναι $E=\ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{1}{2}$.**

## Λύση

α) Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$f'(x)=1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(1+\frac{1}{x}\right)'\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x}{x+1}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

Από τη γνωστή σχέση $\ln x\le x-1$ παίρνουμε

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow \ln x\ge 1-\frac{1}{x}$$

(το ίσο μόνο αν x=1).Έτσι,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

(η ισότητα δεν ισχύει αφού $1+\frac{1}{x}\neq 1$).

Ώστε $f'(x)>0,\ \forall x>0$.

β) Καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα έχουμε

$$f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,1)$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(1+u)}{u}\left(\text{απροσδ.}\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{H}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln(1+u))'}{u'}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{1+u}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{u=1+\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to1^+}\frac{\ln u}{u-1}=\lim_{u\to1^+}\frac{\ln u-\ln 1}{u-1}=g'(1)=1$$

όπου $g(x)=\ln x$ με $g'(x)=\frac{1}{x}$ άρα $g'(1)=1$.

γ) Αφού $0<f(x)<1$ για κάθε $x>0$, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}dx=\frac{1}{2}\left(4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\ln 2\right)+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{x}{x+1}dx$$

$$=\ln\left(\frac{9}{4}\right)-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\left(\frac{9}{4\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\left[x-\ln(x+1)\right]_1^2$$

$$=\ln\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)+\frac{1}{2}(2-\ln 3-1+\ln 2)=$$

$$\ln\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}=\ln\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}=\ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

## Άσκηση 2

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+1$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η f έχει τρεις διαφορετικές ρίζες στο R.**

**β) Να βρείτε, με απόδειξη, το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f\left(f(x)\right)=0$.**

**γ) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to\rho_3^+}\frac{\eta\mu x-x}{f(x)}$**

## Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $f(-1)=3>0,\ f(1)=-1<0$,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

άρα υπάρχει $x_1<<0$ (πολύ μικρός αρνητικός) ώστε $f(x_1)<0$. (στην πραγματικότητα υπάρχει $x_1$ μικρότερο από οποιονδήποτε πολύ μικρό αρνητικό αριθμό ώστε $f(x_1)<0$). Ανάλογα

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

άρα υπάρχει $x_2 >> 0$ (πολύ μεγάλος θετικός) ώστε $f(x_2)>0$ (στην πραγματικότητα υπάρχει $x_2$ μεγαλύτερο από οποιονδήποτε πολύ μεγάλο θετικό αριθμό ώστε $f(x_2)>0$).

Με εφαρμογή του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών (αφού f συνεχής ως πολυωνυμική) σε καθένα από τα διαστήματα

$$[x_1,-1],[-1,1],[1,x_2]$$

εξασφαλίζουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες της f. Αλλά ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού έχει το πολύ 3 ρίζες.

Εναλλακτικά,

$$f'(x)=3(x^2-1)\ f'(x)=3(x^2-1)$$

οπότε οδηγούμαστε στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Με χρήση της συνέχειας και μονοτονίας της f κατά διαστήματα, βρίσκουμε τα σύνολα τιμών σε κάθε διάστημα.

$$f\big((-\infty,-1)\big)=\Big(\lim_{x\to-\infty} f(x),\, f(-1)\Big)=(-\infty,3),$$

$$f\big((-1,1)\big)=\big(f(1),f(-1)\big)=(-1,3),$$

$$f\big((1,+\infty)\big)=\Big(f(1),\,\lim_{x\to+\infty} f(x)\Big)=(-1,+\infty)$$

Έτσι, υπάρχουν ακριβώς 3 ρίζες, οι

$$\rho_1\in(-\infty,-1),\ \rho_2\in(-1,1),\ \rho_3\in(1,+\infty).$$

**β)** Προφανώς ψάχνουμε το πλήθος ριζών των εξισώσεων $f(x)=\rho_1$, $f(x)=\rho_2$, $f(x)=\rho_3$.

Καθώς $\rho_1\in(-\infty,-1)\subseteq f\big((-\infty,-1)\big)$ έχουμε ότι το η $\rho_1$ ανήκει μόνο στο πρώτο από τα παραπάνω επιμέρους σύνολα τιμών, άρα η εξίσωση $f(x)=\rho_1$ έχει ακριβώς 1 ρίζα.

Ανάλογα η $\rho_2$ ανήκει και στα 3 επιμέρους σύνολα τιμών, άρα η εξίσωση $f(x)=\rho_2$ έχει ακριβώς 3 ρίζες. Αλλά $f(3)=19>0$, άρα $\rho_3\in(1,3)$ δηλαδή και η $\rho_3$ ανήκει και στα 3 επιμέρους σύνολα τιμών.

Ώστε η εξίσωση $f\big(f(x)\big)=0$ έχει 7 διαφορετικές ρίζες στο R.

**γ)** Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to\rho_3^+}(\eta\mu x-x)=\eta\mu\rho_3-\rho_3<0$$

διότι για κάθε $x\in R$ ισχύει

$\eta\mu x\le|\eta\mu x|\le|x|$, (το ίσο μόνο όταν $x=0$).

Αφού $\rho_3\in(1,3)$ και $x\to\rho_3^+$ θα είναι $x>0$, οπότε $\eta\mu x<x$.

Επίσης $\lim_{x\to\rho_3^+} f(x)=f(\rho_3)=0$ (λόγω της συνέχειας της f) και

$$x>\rho_3\Rightarrow f(x)>f(\rho_3)=0,\ \text{άρα}\ \lim_{x\to\rho_3^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty.$$

Τελικά,

$$\lim_{x\to\rho_3^+}\frac{\eta\mu x-x}{f(x)}=\lim_{x\to\rho_3^+}\left[\frac{1}{f(x)}(\eta\mu x-x)\right]=-\infty.$$

## Άσκηση 3

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-2024$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.**

**β) Να αποδείξετε ότι η f(x) παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0\in(0,1)$.**

**γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1$, $x_2$ με $0<x_1<x_0<1<x_2$.**

**δ) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x΄x και την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) ισχύει $E=G(x_2)-G(x_1)$ όπου**

$$G(x)=(x-1)e^x-x,\ x>0.$$

## Λύση

α) Για κάθε $x>0$ η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}\ \text{και}\ f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0.$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Αφού η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα έχουμε ότι για $x\in(0,1)$ οι αντίστοιχες τιμές $f'(x)$ θα ανήκουν στο διάστημα

$$f'\big((0,1)\big)=\Big(\lim_{x\to0^+} f'(x),\ f'(1)\Big)=(-\infty,e-1).$$

Άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0$ το οποίο είναι μοναδικό λόγω της μονοτονίας της $f'(x)$.

Τότε για $x>x_0$ θα είναι $f'(x)>f'(x_0)=0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0,+\infty)$ και ανάλογα για $x<x_0$ θα είναι $f'(x)<f'(x_0)=0$ άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0]$. Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της f.

| x | 0 | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| f | | $\searrow$ | $f(x_0)$ | $\nearrow$ | |

Ώστε η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=x_0$ αφού για $x\le x_0 \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$ ενώ για $x\ge x_0 \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$.

β) Απο τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι

$$x_0<1 \Rightarrow f(x_0)<f(1)=e-2024<0.$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$f((0,x_0])=[f(x_0), \lim_{x\to 0^+} f(x))=[f(x_0),+\infty)$$

διάστημα στο οποίο ανήκει ο αριθμός μηδέν, άρα υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, $x_1\in(0,x_0)$ ώστε $f(x_1)=0$.

Χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$.

Ανάλογα

$$f([x_0,+\infty))=[f(x_0), \lim_{x\to+\infty} f(x))=[f(x_0),+\infty)$$

άρα υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, $x_2\in(x_0,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=0$.

Χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{\ln x}{e^x}\right)\right]=+\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\left(\text{απροσδ.}\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0.$$

Παρατηρούμε ότι αν ήταν $x_0<x_2\le 1$ τότε θα είχαμε

$$f(x_2)\le f(1)\Rightarrow 0\le f(1)<0$$

άτοπο, άρα θα είναι $x_0<1<x_2$.

Έτσι, αποδείξαμε ότι $0<x_1<x_0<1<x_2$.

γ) Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς $x_1, x_2$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,x_1),(x_1,x_2),(x_2,+\infty)$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$$

και αφού $x_1<x_0<x_2$ με $f(x_0)<0$ θα είναι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$.

Έτσι, έχουμε:

$$E=-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2} x'\cdot f(x)dx=-[xf(x)]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2} x\cdot f'(x)dx$$

$$=0+\int_{x_1}^{x_2} x\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}(xe^x-1)dx=$$

$$=G(x_2)-G(x_1)$$

όπου $G(x)=(x-1)e^x-x$ αφού

$$G'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'-x'=e^x+(x-1)e^x+1=xe^x-1$$

## Άσκηση 4

**Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$, $x>0$ και $g(x)=\ln(\ln x)$, $x>1$.**

**α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την x=1.**

**β) Να βρείτε, με απόδειξη, το σημείο Ν της γραφικής παράστασης της g στο οποίο η εφαπτομένη της $C_g$ διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.**

**γ) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x\le x-1$, να αποδείξτε ότι $g(x)\le \ln x-1<f(x)$ για κάθε x>1.**

**δ) Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=e$, $x=e^2$.**

## Λύση

α) Παρατηρούμε ότι: $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα είναι και «1-1». Έτσι η εξίσωση $f(x)=0$ γράφεται $f(x)=f(1)$ άρα $x=1$.

β) Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$g'(x)=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}.$$

Θεωρούμε την εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της g σε ένα τυχαίο σημείο της $\left(x_0, g(x_0)\right)$ η εξίσωση της οποίας είναι $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$.

Θέτοντας $x=0, y=-1$ παίρνουμε

$$-1-g(x_0)=g'(x_0)(-x_0)\Leftrightarrow 1+g(x_0)=x_0 g'(x_0)$$

Δηλαδή $1+\ln(\ln x_0)-\dfrac{1}{\ln x_0}=0\Leftrightarrow f(\ln x_0)=0$.

Από το α) ερώτημα παίρνουμε αναγκαστικά $\ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e$. Ώστε το ζητούμενο σημείο είναι το $N(e, g(e))$ δηλαδή το $N(e,1)$.

**γ)** Καθώς $\ln x\le x-1$ για κάθε x>0 (το ίσο ισχύει αν και μόνον αν x=1), παίρνουμε

$$\ln(\ln x)\le \ln x-1$$

δηλαδή $g(x)\le \ln x-1$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\ln x-1<f(x)\Leftrightarrow \ln x-1<\ln x+1-\frac{1}{x}\Leftrightarrow \frac{1}{x}<2\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

ισχύει, αφού είναι x>1

**δ)** Από γ) ερώτημα είναι $h(x)>0$ και αφού h συνεχής, το ζητούμενο εμβαδό θα είναι ίσο με

$$E=\int_e^{e^2}h(x)dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx+\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$$
$$=I_1+I_2+I_3$$

Για το $I_1$ θέτουμε

$$u=\ln x\Rightarrow du=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x}$$

οπότε $$I_1=\int_{\ln e}^{\ln e^2}u\,du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2=\frac{3}{2}.$$

Επίσης

$$I_2=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}=\left(\ln e^2+\frac{1}{e^2}\right)-\left(\ln e+\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1-e}{e^2}$$

Για το $I_3$ θέτουμε

$$y=\ln x\Rightarrow dy=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x}$$

οπότε

$$I_3=\int_{\ln e}^{\ln e^2}\ln y\,dy=\int_1^2 y'\cdot\ln y\,dy=[y\ln y]_1^2-\int_1^2 y\cdot(\ln y)'dy=$$
$$=2\ln 2-\int_1^2 dy=\ln 4-1.$$

Ώστε $E=\ln 4+\dfrac{3}{2}-\dfrac{e-1}{e^2}$

## Θέματα για λύση

### Θέμα 1

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους x,y ώστε $x^y=y^x$.

*(Crux, math magazine, Mihaly Bencze)*

(**Υπόδειξη:** Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$ η εξίσωση γράφεται $f(x)=f(y)$. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και πάρτε περιπτώσεις για τα x,y ).

### Θέμα 2

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο, ώστε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f^2(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f^2(x)=e-1$. Αν ισχύει $2f(x)f'(x)-f^2(x)>1$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι $\beta-\alpha<1$.

*(Εθνικός Διαγωνισμός Ιράν, 2002)*

[**Υπόδειξη:** θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x)=\ln\left(1+f^2(x)\right)-x$, βρείτε το $g\left((\alpha,\beta)\right)$ ]

### Θέμα 3

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ώστε $f(0)=1$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξτε ότι

$f(x)>e^x$ για κάθε $x>0$.

*(4th Annual Columbus State Calculus Contest, 29/4/ 2016)*

(**Υπόδειξη:** θεωρείστε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-x}$ )

### Θέμα 4

Να εξετάσετε αν υπάρχει παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ ώστε $f'=f\circ f$.

*(IMC, Πολωνία 2002)*

[**Υπόδειξη:** Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση, τότε θα ήταν γνησίως αύξουσα (γιατί;), άρα

$$f(x)>0\ \Rightarrow f\left(f(x)\right)>f(0),\ \forall x\in R.$$

Τότε, για $x<0\Rightarrow f(x)<f(0)<f(f(x))=f'(x)$, κάτι που σημαίνει ότι η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-f(0)\cdot x$$

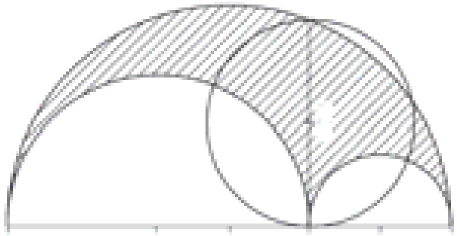
είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, οπότε $f(x)<(x+1)f(0),\ \forall x<0$, άτοπο (γιατί;).]

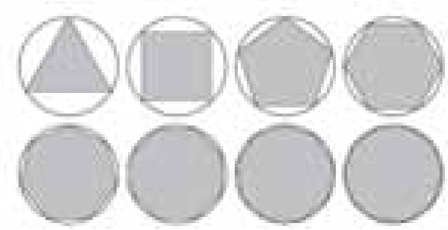
**Τάξη: Γ΄**

# Η χρησιμοποίηση του ορισμένου ολοκληρώματος στον υπολογισμό εμβαδών

**Στέργιος Τουρναβίτης**

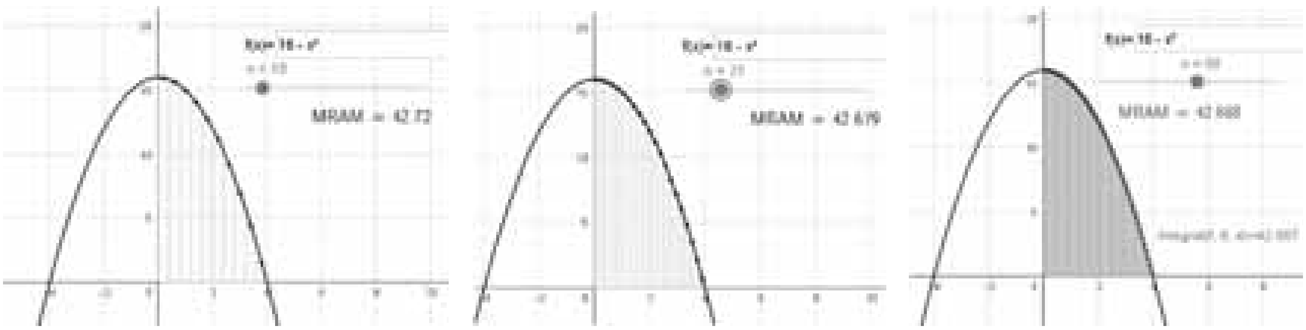
Το πρόβλημα της εύρεσης του εμβαδού μιας περιοχής που περικλείεται από ένα πολύγωνο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, τρίγωνο ήταν γνωστό σε κάποιους πολιτισμούς από την αρχαιότητα. Οι πρώτες δυσκολίες εμφανίστηκαν για τους μαθηματικούς της αρχαιότητας και των μετέπειτα χρόνων, όταν προσπάθησαν να υπολογίσουν εμβαδά περιοχών που περικλείονταν από καμπύλες, όχι ευθύγραμμες όπως τα προηγούμενα σχήματα. Ένα απλό και χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο κύκλος. Ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος ο οποίος αντιμετώπισε με **γεωμετρικές μεθόδους** το γενικό πρόβλημα του **εμβαδού περιοχών** που οριοθετούνται από κυκλικά τόξα, παραβολές, σπείρες και διάφορες καμπύλες χρησιμοποιώντας μία διαδικασία που ονομάστηκε αργότερα **μέθοδος εξάντλησης**. Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε κατά προσέγγιση το εμβαδόν του κύκλου, θεωρώντας το ως το όριο μιας ακολουθίας εμβαδών εγγεγραμμένων πολυγώνων. Όσο το πλήθος των πλευρών των εγγεγραμμένων πολυγώνων αυξάνεται, τόσο η περίμετρός τους πλησιάζει το μήκος της περιφέρειας του κύκλου και το εμβαδόν τους το εμβαδόν του κύκλου.





Χρειάστηκε να περάσουν περίπου **19 αιώνες** από την εποχή που έζησε ο **Αρχιμήδης** για να πλαισιωθούν οι ιδέες του σε μία γενικότερη μέθοδο με την έννοια του ορίου και του απείρου από τον Νεύτωνα και τον **Leibniz**. Στο πλευρό της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας εμφανίστηκε η **νεαρή Ανάλυση** που συνενώνει τον **Διαφορικό** και τον **Ολοκληρωτικό Λογισμό**, με όλες τις ομορφιές και τις επεκτάσεις της στη λύση των προβλημάτων στη Φυσική και στις άλλες θετικές επιστήμες. Μετά από αιώνες τα ζεύγη των αντίστροφων πράξεων που γνώριζε ο κόσμος πρόσθεση/αφαίρεση, πολλαπλασιασμός/διαίρεση, τετραγωνισμός/τετραγωνική ρίζα, ξεπετάχτηκε ένα καινούριο ντουέτο, παραγώγιση/ολοκλήρωση που λειτουργούσε ανάλογα.

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το εμβαδόν που περικλείεται από την παραβολή και τους άξονες προσεγγίζεται καλύτερα όταν οι λωρίδες – ορθογώνια γίνονται ολοένα και περισσότερα.



Στις ασκήσεις που ακολουθούν, αρχικά με τη βοήθεια της μονοτονίας ή και των ακροτάτων της προς ολοκλήρωση συνεχούς συνάρτησης , βρίσκουμε τα όρια ενός **κλειστού διαστήματος** που ανήκει το **ορισμένο ολοκλήρωμα**, και στη συνέχεια με τη βοήθεια των αρχικών συναρτήσεων, μεθόδων ολοκλήρωσης, διαδικασιών από τις προηγούμενες τάξεις, όπως επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, συστημάτων, γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων, υπολογίζουμε διάφορα εμβαδά, δίνοντας ταυτόχρονα τη **γεωμετρική τους αναπαράσταση** και ερμηνεία.

**Για τα επόμενα ορισμένα ολοκληρώματα, αποδεικνύουμε ότι βρίσκονται σ' ένα κλειστό διάστημα ή ικανοποιούν μία διπλή ανισοϊσότητα.**

Άσκηση 1

i. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(3-2συνx)^2} \in \left[\frac{\pi}{54}, \frac{\pi}{24}\right]$

ii. Αν t>0, τότε:

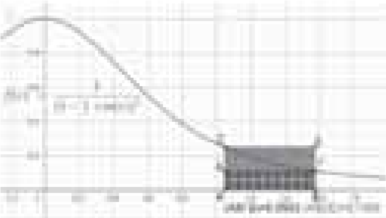
$$\int_{1}^{2\sqrt{2}} (3\sqrt[3]{t^2} - t^2)dt \in [2-4\sqrt{2}, -2+4\sqrt{2}]$$

iii. $0 \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-ημx}{ημx} dx \le \frac{\pi}{3}, x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

iv. $0 \le \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx \le \frac{e-1}{e}, x \in [1, e]$

v. $\frac{2}{e} \cdot (e-1) \le \int_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \le e-1, x \in [e, e^2]$

Λύση:



i. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(3-2συνx)^2}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{4ημx}{(2συνx-3)^3} < 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο $m = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{9}$ και μέγιστο $M = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$. Από τη σχέση: $\frac{1}{9} \le f(x) \le \frac{1}{4}$, $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, έχουμε:

$$\frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(3-2συνx)^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ ή}$$

$$\frac{\pi}{54} \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(3-2συνx)^2} \le \frac{\pi}{24}$$

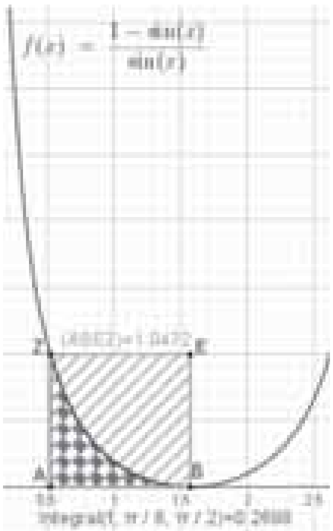
ii. Η συνάρτηση $f(t) = 3\sqrt[3]{t^2} - t^2, t > 0$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1, 2\sqrt{2}\right]$ με παράγωγο $f'(t) = \frac{2}{t^{\frac{1}{3}}} - 2t$ .

| t | 0 — 1 | 1 — $2\sqrt{2}$ | $2\sqrt{2}$ — $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $t^4 - 1$ | − | + | + |
| f'(t) | + | − | − |
| f(t) | ↗ | ↘ | ↘ |

Από τον πίνακα τιμών της μονοτονίας της f, συνάγουμε ότι:
Η f(t) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1, 2\sqrt{2}\right]$, έχει ελάχιστο $m = f(2\sqrt{2}) = -2$ και μέγιστο $M = f(1) = -2$.
Από τη σχέση:
$-2 \le f(t) \le 2\sqrt{2}$, $t \in \left[1, 2\sqrt{2}\right]$, έχουμε:

$$2-4\sqrt{2} \le \int_{1}^{2\sqrt{2}} (3\sqrt[3]{t^2} - t^2)dt \le -2+4\sqrt{2}$$

iii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-ημx}{ημx}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{-συνx}{ημ^2x} < 0$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Επομένως η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο

$m = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ και μέγιστο

$M = f(\frac{\pi}{6}) = 1$.

Από τη σχέση:

$0 \le f(x) \le 1$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$,

έχουμε:

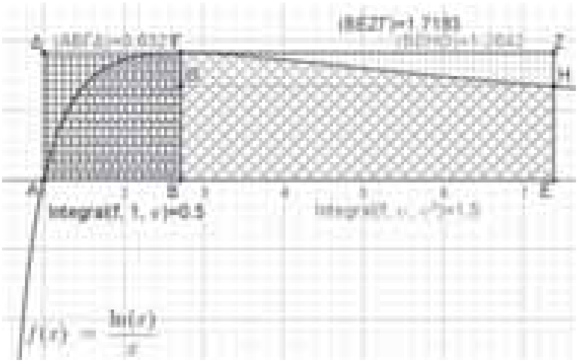
$$0 \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}\,dx \le 1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ή}$$

$$0 \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}\,dx \le \frac{\pi}{3}$$

**iv.** Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x\in[1,e]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$ για κάθε $x\in[1,e]$. Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο $m=f(1)=0$ και μέγιστο $M=f(e)=\dfrac{1}{e}$. Από τη σχέση:

$0\le\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}, x\in[1,e]$, έχουμε:

$$0\le\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx\le\frac{e-1}{e}$$



**v.** Η ίδια συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x\in[e,e^2]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[e,e^2]$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$ για κάθε $x\in[e,e^2]$. Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο $m=f(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$ και μέγιστο $M=f(e)=\dfrac{1}{e}$. Από τη σχέση:

$\dfrac{2}{e^2}\le\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}, x\in[e,e^2]$, έχουμε:

$$\frac{2}{e}\cdot(e-1)\le\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx\le e-1$$

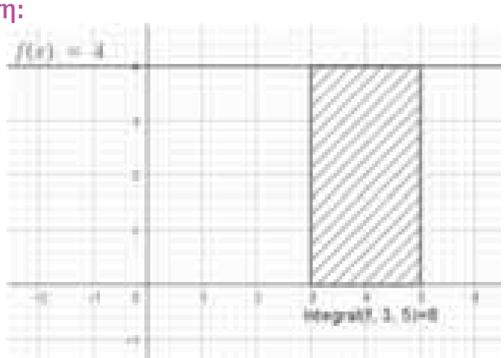
**Εμβαδά κάτω από καμπύλες μεταξύ γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων και ορισμένα ολοκληρώματα.**

Άσκηση 2

Υπολογίζουμε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα και δίνουμε την γεωμετρική τους σημασία.

α) $\int_3^5 4dx$

Λύση:

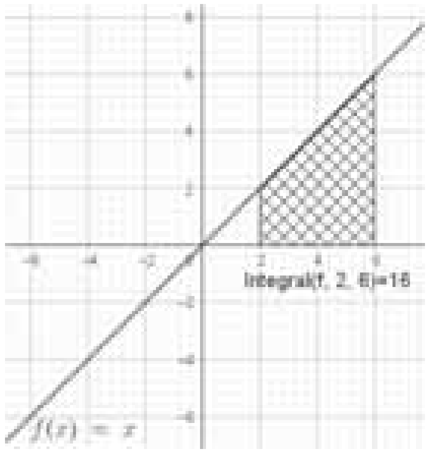



$$\int_3^5 4dx = 4\left[x\right]_3^5 = 4\cdot(5-3)=8$$

Ταυτίζεται με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει μήκος 5-3=2, τη διαφορά των ορίων ολοκλήρωσης και πλάτος 4, την κοινή τεταγμένη των πάνω κορυφών του ορθογωνίου.

β) $\int_2^6 xdx$

Λύση:




$$\int_2^6 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6 = \frac{1}{2}\cdot(36-4)=16$$

Ανάμεσα στο γράφημα της f(x)=x, τις κατακόρυφες ευθείες x=2, x=6 και του οριζόντιου άξονα, περικλείεται ένα τραπέζιο, με εμβαδόν:

$$\frac{\beta+B}{2}\cdot\upsilon=\frac{2+6}{2}\cdot 4=16$$

**Στην παρακάτω άσκηση, αναλύουμε τη διαφορά μεταξύ ορισμένου ολοκληρώματος και εμβαδού.**

Άσκηση 3

Υπολογίζουμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του οριζόντιου άξονα x΄x και της γραφικής παράστασης της $f(x)=\text{συν}x$,

στο κλειστό διάστημα:

α) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, β) $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, γ) $\left[0,\pi\right]$, δ) $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

ε) $\left[0,2\pi\right]$

Λύση:

Αρχίζουμε με μία επισήμανση, ότι οποιοδήποτε εμβαδόν δεν μπορεί να είναι αρνητικό ή μηδέν, σε αντίθεση με το ορισμένο ολοκλήρωμα που μπορεί να είναι.

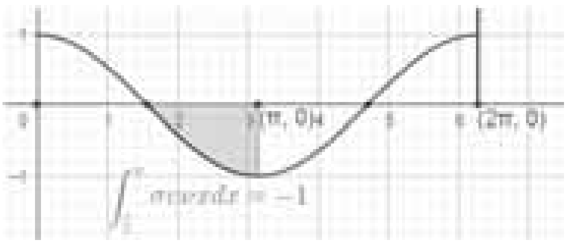
Επίσης τα σκιασμένα χωρία στα σχήματα δεν δηλώνουν **πάντα** εμβαδά αλλά ορισμένα ολοκληρώματα σε αντιστοιχία και με τους τύπους που υπάρχουν σε αυτά τα σχήματα.


α) Έχουμε: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\,dx=\left[\text{ημ}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\text{ημ}\frac{\pi}{2}=1$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ταυτίζεται με το εμβαδόν που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα x΄x. Αυτό συμβαίνει γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι πάνω από τον οριζόντιο άξονα ή αλλιώς η διαφορά: f(x)-g(x)=f(x)-0=f(x) είναι θετική στο ζητούμενο διάστημα, όπου $f(x)=\text{συν}x$ και g(x)=0 η εξίσωση του x΄x.

β) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{συν}x\,dx=\left[\text{ημ}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\text{ημ}\pi-\text{ημ}\frac{\pi}{2}=0-1=-1$

Αυτό είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα αρνητικό. Τι γίνεται όμως με το εμβαδόν;



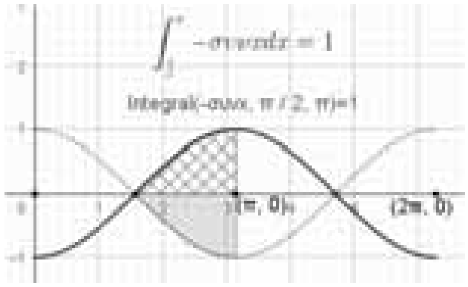

Όπως βλέπουμε η καμπύλη του συνx – γραφική παράσταση της y=συνx, είναι κάτω από τον οριζόντιο άξονα ή αλλιώς η διαφορά συνx-0 είναι αρνητική το πολύ 0, ή ακόμη γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις ότι το συνx δεν είναι θετικό στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Επειδή για την εύρεση του εμβαδού που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, ενδιαφερόμαστε για το ποια γραφική παράσταση είναι πάνω από την άλλη και στην περίπτωσή μας είναι ο άξονας x΄x, για το εμβαδόν που θέλουμε να υπολογίσουμε έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(0-\text{συν}x)\,dx=-\left[\text{ημ}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$$

Αυτό συμπίπτει με το ολοκλήρωμα

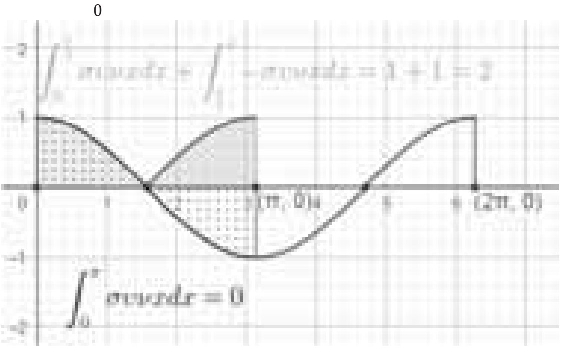
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\text{συν}x\right|\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\text{συν}x\,dx=-\left[\text{ημ}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$$

και επιβεβαιώνεται με το εμβαδόν – ολοκλήρωμα που είναι μεταξύ της αντίθετης συνάρτησης $f(x)=-\text{συν}x$ και του x΄x. Όπως εύκολα βλέπουμε η γραφική παράσταση της $f(x)=-\text{συν}x$ είναι πάνω από αυτόν τον άξονα.




γ) Η διαφορά συνx – 0 = συνx δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$. Επομένως ενώ το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι μηδέν

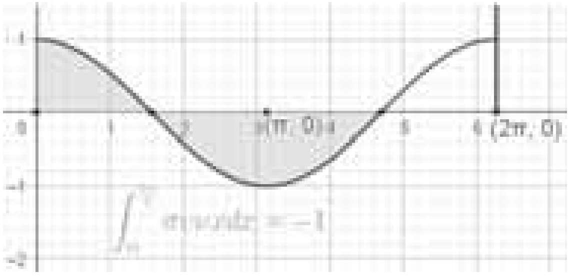
$$\int_0^{\pi}\text{συν}x\,dx=\left[\text{ημ}x\right]_0^{\pi}=\text{ημ}\pi-\text{ημ}0=0$$



για το εμβαδόν πρέπει να υπολογίσουμε το

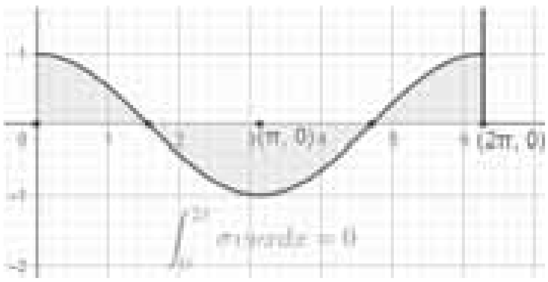
$$\int_0^{\pi}\left|\sigma\upsilon\nu x\right|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sigma\upsilon\nu x\,dx=1+1=2$$

δ) Έχουμε: $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\,dx=\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}=\eta\mu\frac{3\pi}{2}=-1$



και για το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου $E(\Omega)=1+1+1=3$ αφού σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ το εμβαδόν είναι 1τ.μ.

ε) $\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu x\,dx=\left[\eta\mu x\right]_0^{2\pi}=\eta\mu 2\pi-\eta\mu 0=0$



Όμοια $E(\Omega)=1+1+1+1=4$

## Άσκηση 4

Βρίσκουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

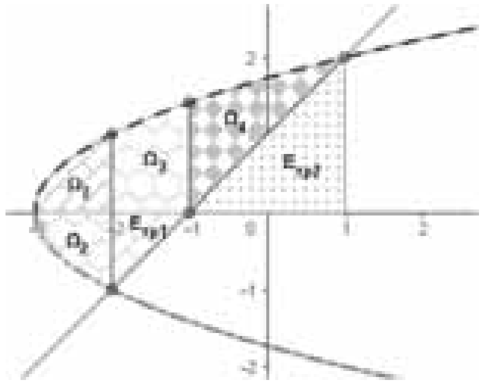
$$f(x)=\sqrt{(x+3)},\; g(x)=-\sqrt{(x+3)},$$

$$h(x)=x+1.$$

**Λύση:**

Για να προσδιορίσουμε τα όρια της περιοχής χρειάζεται να γνωρίζουμε τα σημεία τομής αυτών των γραφικών παραστάσεων ή να βρούμε εκεί που τέμνονται η ευθεία $h(x)=x+1$ με την καμπύλη $x=y^2-3$ (γιατί;)

Από την επίλυση του συστήματος βρίσκουμε ότι αυτά είναι $A(-2,-1)$, $B(1,2)$.



Στη συνέχεια βλέπουμε ότι ενώ το ανώτερο τμήμα της περιοχής που θέλουμε να υπολογίσουμε αποτελείται αποκλειστικά από την $f(x)=\sqrt{(x+3)}$, το κατώτερο αποτελείται από δύο μέρη:

$$g(x)=-\sqrt{(x+3)} \text{ για } -3\le x\le -2 \text{ και},$$
$$h(x)=x+1 \text{ για } -2\le x\le 1.$$

Εξαιτίας της αλλαγής αυτής του κατώτερου μέρους, είναι απαραίτητο να χωρίσουμε το εμβαδόν της περιοχής που θέλουμε να υπολογίσουμε σε δύο μέρη, που εκφράζονται με τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$A_1=\int_{-3}^{-2}[\sqrt{x+3}-\left(-\sqrt{x+3}\right)]dx=\ldots=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\int_{-2}^{1}[\sqrt{x+3}-(x+1)]dx=\ldots=\frac{19}{6}$$

Έτσι το εμβαδόν όλης της περιοχής είναι:

$$A=A_1+A_2=\frac{4}{3}+\frac{19}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

Ένας 2ος τρόπος προσέγγισης είναι να υπολογίσουμε χωριστά τα εμβαδά των χωρίων:

α) $E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=2\cdot E(\Omega_1)=2\int_{-3}^{-2}[\sqrt{x+3}\,dx=\frac{4}{3}$,

β) $E(\Omega_3)=\int_{-2}^{-1}[\sqrt{x+3}\,dx=\ldots=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}$,

γ) $E_{\tau\rho 1}=\int_{-2}^{-1}-(x+1)\,dx=\frac{1}{2}$ για αυτό το εμβαδόν μπορούμε απλά να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1.

δ) $E(\Omega_4)=\int_{-1}^{1}[\sqrt{x+3}\,dx-2=...=\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Αν προσθέσουμε τα παραπάνω εμβαδά,

$$\underbrace{\frac{4}{3}}_{\alpha)}+\underbrace{\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}}_{\beta)}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\gamma)}+\underbrace{\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}}_{\delta)}=\frac{9}{2}$$

βρίσκουμε ξανά το ίδιο αποτέλεσμα.

## ΑΝΤΙΣΤΡΕΦΟΝΤΑΣ ΤΟΝ ΡΟΛΟ ΤΩΝ x ΚΑΙ y.

Μερικές φορές είναι πολύ πιο εύκολο να βρούμε το εμβαδόν μιας περιοχής ολοκληρώνοντας ως προς y (θεωρώντας τη ως ανεξάρτητη μεταβλητή) παρά ως προς x.

Για να γίνει αυτό θα πρέπει όταν θα λύσουμε ως προς x (εξαρτημένη μεταβλητή) από τους τύπους των δύο συναρτήσεων ή καμπυλών να προκύψουν συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα ολοκλήρωσης και η διαφορά w(y)-u(y) είναι θετική μόνο όταν η w(y) βρίσκεται δεξιότερα της u(y).

Ας δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε τις παραπάνω σκέψεις για τον ευκολότερο υπολογισμό του παραπάνω εμβαδού.

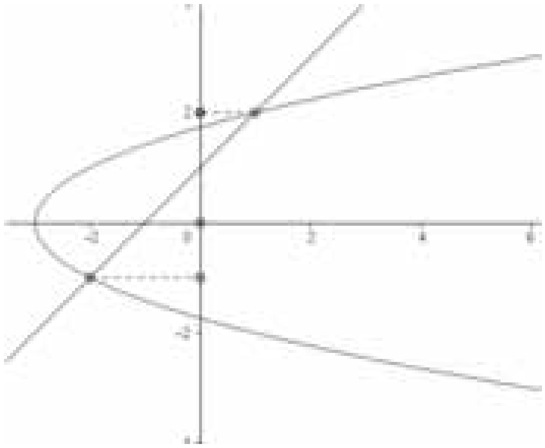
Λύνοντας ως προς x, βλέπουμε ότι η παραβολή $x=y^2-3$ (η ένωση των f, g στην προηγούμενη θεώρηση) είναι μετατόπιση της $x=y^2$ κατά 3 μονάδες αριστερά, καθορίζει το αριστερό σύνορο του εμβαδού στο διάστημα $[-1,2]$, ενώ η $x=y-1$ επίσης συνεχής συνάρτηση βρίσκεται στο δεξιό σύνορο στο ίδιο διάστημα.

Όταν βέβαια αντιστρέψουμε τον ρόλο των μεταβλητών, αντιστρέφονται οι άξονες και η οριζοντιωμένη παραβολή γίνεται μία κανονική συνεχής συνάρτηση λυμένη ως προς x.

Το ζητούμενο εμβαδόν μπορεί να βρεθεί από την επίλυση του ολοκληρώματος:

$$\int_{-1}^{2}[(y-1)-(y^2-3)\,dy=$$

$$\int_{-1}^{2}\left(-y^2+y+2\right)\,dy=...=\frac{9}{2}$$

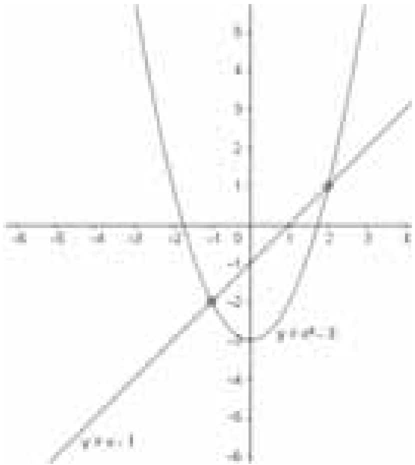


Μπορούμε να επεξηγήσουμε περισσότερο αυτόν τον μετασχηματισμό με μία **απλή αλλαγή της οπτικής** του σχήματος.

Αν αλλάξουμε **οπτική γωνία** και κοιτάξουμε το παραπάνω σχήμα από αριστερά προς τα δεξιά και υποθέσουμε αλλαγή των ρόλων των x, y ο οριζόντιος άξονας γίνεται κατακόρυφος και ο κατακόρυφος, οριζόντιος εκεί δηλαδή που ορίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή y.

Τα παραπάνω γίνονται ακόμη πιο κατανοητά με την **στροφή κατά 90⁰** του όλου σχήματος, της αντιστροφής των x, y στους τύπους της αρχικά οριζοντιωμένης παραβολής (που δεν είναι συνάρτηση με το αρχικό σύστημα αξόνων) αλλά μετασχηματίζεται στην συνεχή συνάρτηση $y=x^2-3$ μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 3 μονάδες κάτω.

Βλέπουμε επίσης πως το αριστερό όριο, γίνεται κάτω όριο και το δεξιό όριο πάνω. Με την ευθεία που είναι γραμμική συνάρτηση εξακολουθεί να είναι γραμμική και συνεχής, σταθερά πάνω από την παραβολή στο διάστημα $[-1,2]$.



# Το Βήμα του Ευκλείδη

## Εφαρμογές των Πολυωνύμων 3ου βαθμού στην Άλγεβρα και στην Ανάλυση.

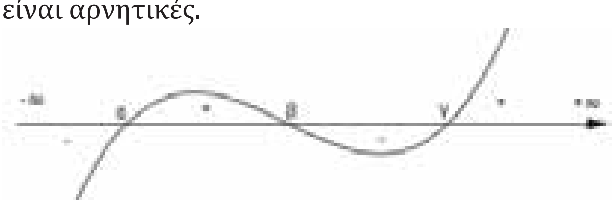
Διονύσης Γιάνναρος

Θεωρούμε πολυώνυμο της μορφής

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-px^2+qx-r$$

όπου $p=\alpha+\beta+\gamma$, $q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $r=\alpha\beta\gamma$.

Αν $\alpha<\beta<\gamma$, τότε οι τιμές του πολυωνύμου $f(x)$ στα διαστήματα $(\alpha,\beta)$ και $(\gamma,+\infty)$ είναι θετικές, ενώ στα διαστήματα $(-\infty,\alpha)$ και $(\beta,\gamma)$ είναι αρνητικές.



**Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε σειρά προβλημάτων χρησιμοποιώντας για την αντιμετώπισή τους πολυώνυμα της παραπάνω μορφής.**

1. **Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν την ισότητα**

$$\mathbf{x+y+z-2(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}-4xyz}.$$ **Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$$
$$=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$$

Οι αριθμοί $x, y, z$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $f(t)$ οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου, δηλαδή $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Είναι:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(x+y+z)+\frac{1}{2}(xy+yz+zx)-xyz$$
$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-(x+y+z)+2(xyz)-4xyz\right]=0$$

Επομένως ο αριθμός $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(t)$, οπότε ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς x, y, z είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.

2. **Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν την ισότητα $\mathbf{(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz}$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα σε αυτούς υπάρχουν δυο που είναι αντίθετοι.**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το πολυώνυμο 3ου βαθμού με ρίζες x, y, z. Έστω

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-x)$$
$$=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

(λόγω υπόθεσης),

$$=[t-(x+y+z)][t^2+(xy+yz+zx)],\quad (1)$$

Από την κατασκευή του το πολυώνυμο $f(t)$ έχει ως ρίζες του τους αριθμούς x, y, z. Από την (1) προκύπτει ότι δυο από τις ρίζες του θα είναι και ρίζες του τριωνύμου $t^2+(xy+yz+zx)$. Από τους τύπους του Vieta συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα αυτών των ριζών θα είναι μηδέν, άρα ανάμεσα στους αριθμούς x, y, z υπάρχουν δυο που είναι αντίθετοι.

3. **Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις σχέσεις $\mathbf{xyz=1}$ και $\mathbf{x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$. Να αποδείξετε ότι ένας από αυτούς είναι ίσος με 1.**

ΛΥΣΗ

Από την ισότητα $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ προκύπτει ότι $x+y+z=xy+yz+zx$, αφού $xyz=1$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$$
$$=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-1$$
$$=(t-1)[t^2+t+1-(x+y+z)t]$$

για το οποίο ισχύει $f(1)=0$. Άρα ένας από τους αριθμούς x, y, z είναι ίσος με την μονάδα.

4. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases}\mathbf{x+y+z=0}\\ \mathbf{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0}\end{cases}$

ΛΥΣΗ

Από την δεύτερη εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι $xy+yz+zx=0$ και $xyz\neq 0$. Έστω $(x,y,z)$ με $x\leq y\leq z$ μια λύση του συστήματος. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$$

$$=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=t^3-xyz$$

όπως προκύπτει από την πρώτη εξίσωση και την ισότητα που προέκυψα από την δεύτερη.

Η εξίσωση $f(t)=0$, δηλαδή η $t^3=xyz$ έχει μοναδική ρίζα, οπότε οι τρείς ρίζες της είναι ίσες που σημαίνει ότι $x=y=z=0$, το οποίο είναι αδύνατο λόγω της $xyz\neq 0$. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

**5. Να αποδείξετε ότι αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει $x+y+z=0$, τότε $xy+yz+zx\leq 0$**

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $xy+yz+zx>0$, (1). Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ με ρίζες τους αριθμούς x, y, z. Είναι:

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$$

$$=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$$

$$=t^3+(xy+yz+zx)t-xyz,\ \text{λόγω υπόθεσης}$$

Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(t)=3t^2+(xy+yz+zx)>0$. Άρα, $f<\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση $f(t)=0$ έχει μοναδική ρίζα δηλαδή $x=y=z$ και επειδή $x+y+z=0$, αναγκαστικά $x=y=z=0$ που είναι άτοπο λόγω της (1). Άρα, $xy+yz+zx\leq 0$.

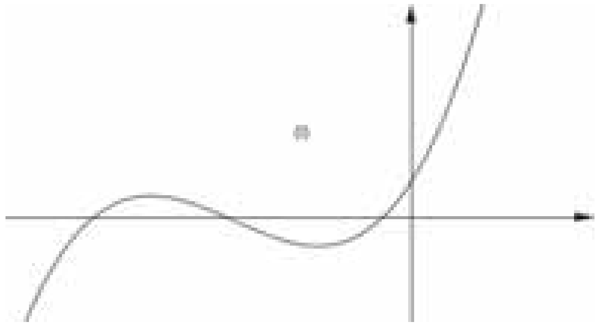
**6. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ ικανοποιούν τις σχέσεις $\alpha+\beta+\gamma>0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$, $\alpha\beta\gamma>0$, να αποδείξετε ότι καθένας από τους α, β, γ είναι θετικός.**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

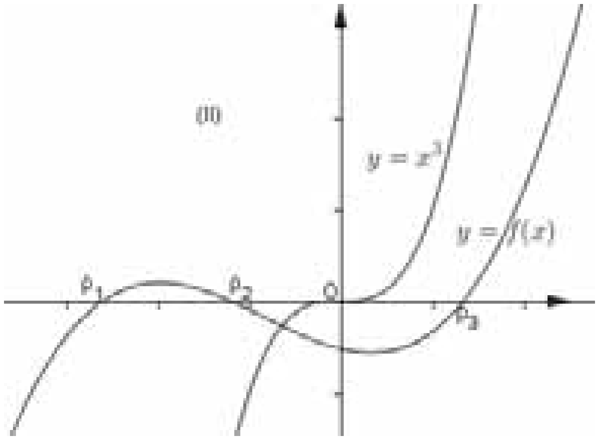
με ρίζες τους αριθμούς $-\alpha,-\beta,-\gamma$. Οι τιμές του είναι θετικές για τις τιμές του x που βρίσκονται δεξιά από την μεγαλύτερη ρίζα και ανάμεσα στις δυο μικρότερες. Είναι: $f(0)=\alpha\beta\gamma>0$, επομένως η αρχή των αξόνων είναι είτε δεξιά από όλες τις ρίζες, είτε μεταξύ των δυο μικρότερων (σχήματα Ι και ΙΙ). Έστω η συνάρτηση $g(x)=x^3$.



Θέτουμε $h(x)=f(x)-x^3$ και επιλέγουμε την περίπτωση του δευτέρου σχήματος οπότε είναι

$$h(0)>0,\ h(\rho_2)=f(\rho_2)-\rho_2^3=-\rho_2^3$$

(εδώ το $\rho_2$ είναι κάποιος από τους αριθμούς $-\alpha,-\beta,-\gamma$).




Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\rho_2]$ και ισχύει $h(0)h(\rho_2)<0$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα. Όμως

$$h(x)=(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$$

με τους συντελεστές του τριωνύμου να είναι όλοι θετικοί, οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει $h(x)>0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $h(x)=0$ δεν μπορεί να έχει ρίζα, άτοπο.

Άρα ισχύει η περίπτωση του πρώτου σχήματος που σημαίνει ότι $-\alpha<0,-\beta<0,-\gamma<0$ δηλαδή

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$$

**7. Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha\beta\gamma>1$ και $\alpha+\beta+\gamma<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$.**

**Να βρείτε πόσοι από αυτούς είναι μικρότεροι από 1**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(t)=(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)$$

Από την $\alpha+\beta+\gamma<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ προκύπτει ότι

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

Είναι: $f(1)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$$>1-(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta\gamma$$
$$=[1-(\alpha+\beta+\gamma)](1-\alpha\beta\gamma)$$

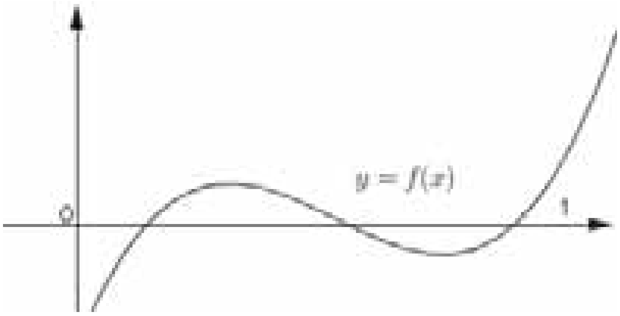
Αλλά, $\alpha\beta\gamma>1$, (1) και επειδή $\alpha,\beta,\gamma>0$, ένας τουλάχιστον από αυτούς θα είναι μεγαλύτερος της μονάδας, οπότε

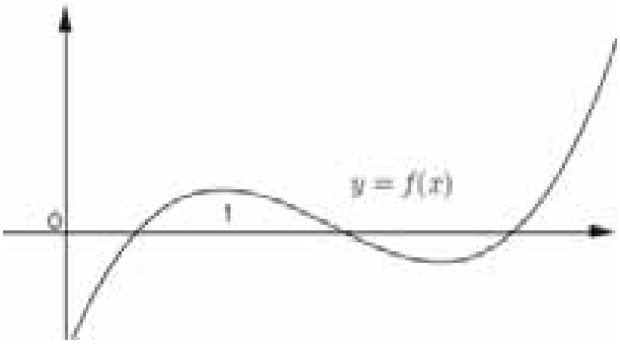
$$\alpha+\beta+\gamma>1\Rightarrow 1-(\alpha+\beta+\gamma)<0\overset{(1)}{\Rightarrow}1-\alpha\beta\gamma<0$$

Έτσι, έχουμε:

$$f(1)=[1-(\alpha+\beta+\gamma)](1-\alpha\beta\gamma)>0$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός 1 θα είναι είτε δεξιά όλων των ριζών είτε μεταξύ των δυο μικρότερων ριζών του πολυωνύμου $f(t)$




Η περίπτωση του σχήματος (Ι) δεν ισχύει γιατί τότε $0<\alpha<1, 0<\beta<1, 0<\gamma<1$ απ' όπου προκύπτει το άτοπο $0<\alpha\beta\gamma<1$. Επομένως ισχύει η περίπτωση (ΙΙ), οπότε μόνο ένας από τους αριθμούς α, β, γ είναι μικρότερος της μονάδας.

**8. Έστω α, β, γ, x, y, z θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha<\beta<\gamma$, $\alpha\le \mathbf{x}\le \mathbf{y}\le \mathbf{z}\le\gamma$, $\alpha\beta\gamma=\mathbf{xyz}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\mathbf{xy}+\mathbf{yz}+\mathbf{zx}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\mathbf{x}, \beta=\mathbf{y}, \gamma=\mathbf{z}$.**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$$
$$g(t)=(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)=t^3-(\alpha+\beta+\gamma)t^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)t-\alpha\beta\gamma$$

Από τις σχέσεις της υπόθεσης είναι: $f(0)=g(0)$, $f(\alpha)\le 0$ (ο αριθμός α βρίσκεται αριστερά της μικρότερης ρίζας του $f(t)$ ή είναι ίσος με αυτή)

$$g(\alpha)=0,\ f(\gamma)\ge 0,\ (\gamma\ge z),\ g(\gamma)=0$$

Αν $h(t)=f(t)-g(t)=[(\alpha+\beta+\gamma)-(x+y+z)]t^2$, τότε για τη συνάρτηση h, που είναι συνεχής, έχουμε:

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=f(\alpha)\le 0,\ h(\gamma)=f(\gamma)-g(\gamma)\ge 0$$

δηλαδή είναι $h(\alpha)h(\gamma)\le 0$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση $h(t)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\gamma]$, έστω ρ, που λόγω της υπόθεσης για τους α, β, γ θα είναι θετική.

Έτσι θα είναι:

$$0=h(\rho)=[(\alpha+\beta+\gamma)-(x+y+z)]\rho^2$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=x+y+z,\ (1)$$

Από την σχέση (1) και την υπόθεση διαπιστώνουμε ότι οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων της μεταβλητής t είναι ίσοι, άρα τα πολυώνυμα είναι ίσα, συνεπώς και οι αντίστοιχες ρίζες τους είναι ίσες δηλαδή $\alpha=x$, $\beta=y$, $\gamma=z$.

**9. Έστω α, β, γ, x, y, z θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha<\beta<\gamma$, $\alpha\le \mathbf{x}\le \mathbf{y}\le \mathbf{z}\le\gamma$, $\alpha\beta\gamma=\mathbf{xyz}$, $\alpha+\beta+\gamma=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\mathbf{x}, \beta=\mathbf{y}, \gamma=\mathbf{z}$.**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$$

$$g(t)=(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)=t^3-(\alpha+\beta+\gamma)t^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)t-\alpha\beta\gamma$$

Από τις σχέσεις της υπόθεσης είναι:

$$f(\alpha)\le 0,\ g(\alpha)=0,\ f(\gamma)\ge 0,\ g(\gamma)=0,\ f(0)=g(0)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(t)=f(t)-g(t)=[(xy+yz+zx)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]t$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)\le 0,\ h(\gamma)=f(\gamma)-g(\gamma)\ge 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση $h(t)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο $[\alpha,\gamma]$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $xy+yz+zx\neq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, (1).

Η (1) δεν μπορεί να ισχύει διότι τότε η συνάρτηση h είναι $1^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο και δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες, τους αριθμούς 0 και $\rho>0$.

- $xy+yz+zx=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, (2).

Τότε η συνάρτηση h είναι το μηδενικό πολυώνυμο και για κάθε $t\in\mathbb{R}$ θα είναι $h(t)=0$. Έτσι,

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=0\Rightarrow f(\alpha)=0\text{, δηλ. } \alpha=x.$$

Όμοια προκύπτει ότι $\gamma=z$. Τέλος, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=x+y+z$ προκύπτει ότι $\beta=y$.

**10. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)=\alpha\beta\gamma$, (1), να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma$.**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(t)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \text{ και}$$

$$g(x)=(x-\alpha-\beta+\gamma)(x+\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha+\beta-\gamma)$$

για τα οποία ισχύει $f(0)=g(0)$ λόγω της (1)

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί

$$\alpha+\beta-\gamma,\ \beta+\gamma-\alpha,\ \gamma+\alpha-\beta$$

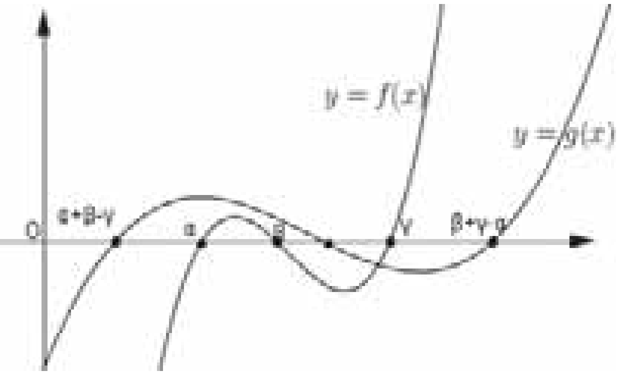
είναι όλοι θετικοί. Πράγματι:

- Αν και οι τρεις είναι μη αρνητικοί, τότε η (1) δεν ισχύει διότι το 1ο μέλος είναι αρνητικό και το 2ο θετικό.
- Αν ο ένας είναι αρνητικός, τότε η (1) δεν ισχύει για τον ίδιο λόγο.
- Τέλος αν δυο είναι αρνητικοί, έστω $\alpha+\beta-\gamma<0$ και $\beta+\gamma-\alpha<0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $\beta<0$ που είναι άτοπο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha\le\beta\le\gamma$. Τότε θα είναι και $\alpha+\beta-\gamma\le\alpha+\gamma-\beta\le\beta+\gamma-\alpha$

Στο διάστημα $[\alpha+\beta-\gamma,\beta+\gamma-\alpha]$ βρίσκονται και οι τρεις ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$.

(Είναι: $\alpha+\beta-\gamma\le\alpha$, $\gamma\le\beta+\gamma-\alpha$ επομένως οι γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων $f(x)$, $g(x)$ αποδίδονται από το επόμενο σχήμα.




Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ για την οποία λόγω της (1) ισχύει $h(0)=0$. Επίσης έχουμε:

$$h(\alpha+\beta+\gamma)=f(\alpha+\beta-\gamma)-g(\alpha+\beta-\gamma)=f(\alpha+\beta-\gamma)\le 0$$

$$h(\beta+\gamma-\alpha)=f(\beta+\gamma-\alpha)-g(\beta+\gamma-\alpha)=f(\beta+\gamma-\alpha)\ge 0$$

οπότε απ' το Θ. Bolzano θα υπάρχει $\xi\in[\alpha+\beta-\gamma,\beta+\gamma-\alpha]$ ώστε $h(\xi)=0$.

Η συνάρτηση h είναι γραμμική και έχει τουλάχιστον δυο λύσεις τους αριθμούς 0 και ξ, άρα είναι σταθερή με τιμή 0, δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)-g(x)=h(x)=0\Rightarrow f(x)=g(x)$$

Επειδή τα δυο πολυώνυμα είναι ίσα, θα είναι ίσα και τα σύνολα λύσεων τους, οπότε θα έχουμε $\alpha=\alpha+\beta-\gamma$ και $\gamma=\beta+\gamma-\alpha$.

Άρα, $\alpha=\beta=\gamma$.

**11. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, x, y, z ισχύουν $\alpha<\beta<\gamma$, $\alpha\le x\le y\le z\le\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma\le x+y+z$, να αποδείξετε ότι:**

$$\alpha\beta\gamma\le xyz \text{ και } \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\le xy+yz+zx$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(t)=(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)=t^3-(\alpha+\beta+\gamma)t^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)t-\alpha\beta\gamma$$

$$g(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$$

Είναι: $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)\le 0$, $f(\gamma)=0$, $g(\gamma)\ge 0$

Συνεπώς η συνεχής συνάρτηση $h(t)=f(t)-g(t)$ έχει ρίζα ξ στο διάστημα $[\alpha,\gamma]$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

- $\alpha+\beta+\gamma=x+y+z$ και $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=xy+yz+zx$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση

$$h(t)=f(t)-g(t)$$

$$=[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(xy+yz+zx)]t+(xyz-\alpha\beta\gamma)$$

είναι γραμμική και δεν έχει άλλες ρίζες. Οι αριθμοί 0 και α βρίσκονται αριστερά από αυτή τη ρίζα, οπότε οι αριθμοί $h(0)$ και $h(\alpha)$ θα είναι ομόσημοι. Επειδή $h(\alpha)\ge 0$ θα είναι και $h(0)\ge\alpha$ δηλαδή $xyz-\alpha\beta\gamma\ge 0\Leftrightarrow xyz\ge\alpha\beta\gamma$ που είναι η πρώτη από τις ζητούμενες. Όμοια για τις τιμές του t δεξιά της ρίζας ξ το πρόσημο της h θα είναι το ίδιο με το πρόσημο της $h(\gamma)=f(\gamma)-g(\gamma)<0$ που σημαίνει ότι ο συντελεστής $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(xy+yz+zx)$ είναι αρνητικός οπότε $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha<xy+yz+zx$.

Σχόλιο: Στη διαδικασία της λύσης χρησιμοποιήσαμε το γνωστό συμπέρασμα ότι κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε διάστημα μεταξύ των ριζών της.

- $\alpha+\beta+\gamma<x+y+z$. Στην περίπτωση αυτή η

συνάρτηση h είναι $h(t)=f(t)-g(t)$

$=[(x+y+z)-(\alpha+\beta+\gamma)]t^2+[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(xy+yz+zx)]t+(xyz-\alpha\beta\gamma)$

Η γραφική παράσταση της h είναι παραβολή με την κορυφή «κάτω», αφού $x+y+z>\alpha+\beta+\gamma$.

Είναι:

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)\geq 0 \text{ και } h(\gamma)=f(\gamma)-g(\gamma)\leq 0$$

οπότε απ' το Θ. Bolzano το τριώνυμο $h(t)$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha,\gamma]$. Επειδή είναι $h(\gamma)\leq 0$ σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα για το πρόσημο τριωνύμου, ο αριθμός γ θα βρίσκεται μεταξύ των ριζών του, έτσι το τριώνυμο h θα έχει την άλλη ρίζα του δεξιά του αριθμού γ, δηλαδή το τριώνυμο θα έχει δυο θετικές ρίζες.

Είναι:

$$h(0)=f(0)-g(0)=-\alpha\beta\gamma+xyz\geq 0\Leftrightarrow xyz\geq\alpha\beta\gamma$$

γιατί, όπως δείχθηκε παραπάνω το τριώνυμο h έχει δυο θετικές ρίζες, θετικό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του και ο αριθμός μηδέν βρίσκεται αριστερά της μικρότερης ρίζας. Επειδή το τριώνυμο h έχει δυο θετικές ρίζες, το άθροισμα τους θα είναι θετικός αριθμός, οπότε σύμφωνα με τους τύπους Vieta έχουμε:

$$-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-(xy+yz+zx)}{x+y+z-(\alpha+\beta+\gamma)}>0$$

που λόγω της $x+y+z-(\alpha+\beta+\gamma)>0$ οδηγεί στην

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha<xy+yz+zx$$

**Κάποιες εφαρμογές του παραπάνω προβλήματος**

• Αν $\alpha<\beta<\gamma$ και $x=y=z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, τότε προφανώς $\alpha<x=y=z<\gamma$ και $\alpha+\beta+\gamma=x+y+z$, οπότε σύμφωνα με τα συμπεράσματα του προβλήματος έχουμε:

i. $\alpha\beta\gamma\leq\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3$ (ανισότητα ΑΜ-ΓΜ)

ii. $3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\leq(\alpha+\beta+\gamma)^2$

• Αν $\alpha<\beta<\gamma$ και $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $z=\frac{\beta+\gamma}{2}$ τότε

$$8\alpha\beta\gamma\leq(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

• Αν α, β, γ μη αρνητικοί αριθμοί ώστε $\alpha+\beta+\gamma=1$

Να αποδείξετε ότι

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\geq 8(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

ΛΥΣΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Τότε

$$1-\gamma\geq 1-\beta\geq 1-\alpha \text{ και } \frac{1+\alpha}{2}\geq\frac{1+\beta}{2}\geq\frac{1+\gamma}{2}$$

Επιπλέον, είναι:

$$1-\gamma\geq\frac{1+\alpha}{2}\Leftrightarrow 2-2\gamma\geq 1+\alpha\Leftrightarrow 1\geq\alpha+2\gamma\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma\geq\alpha+2\gamma\Leftrightarrow\beta\geq\gamma$$

που ισχύει. Ανάλογα έχουμε:

$$1-\alpha\leq\frac{1+\gamma}{2}\leq\frac{1+\beta}{2}\leq\frac{1+\alpha}{2}\leq 1-\gamma \text{ και}$$

$$(1-\alpha)+(1-\beta)+(1-\gamma)=\frac{1+\gamma}{2}+\frac{1+\beta}{2}+\frac{1+\alpha}{2}$$

δηλαδή ισχύουν οι υποθέσεις του προβλήματος οπότε $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\leq\frac{(1+\gamma)(1+\beta)(1+\alpha)}{8}$,

ή $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\geq 8(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

• Να αποδείξετε την ανισότητα

$\alpha\beta\gamma\geq(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)$, όταν

**i.** Οι α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τυχαίου τριγώνου.

**ii.** Οι α, β, γ είναι τυχαίοι θετικοί αριθμοί.

ΛΥΣΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Τότε είναι:

$$\alpha+\beta-\gamma\geq\alpha+\gamma-\beta\geq\beta+\gamma-\alpha \text{ και}$$
$$\alpha+\beta-\gamma\geq\alpha,\ \gamma\geq\beta+\gamma-\alpha$$

**i.** Έστω ότι οι α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου. Θεωρούμε τις τριάδες των αριθμών

$\alpha,\beta,\gamma$ και $\alpha+\beta-\gamma,\ \alpha+\gamma-\beta,\ \beta+\gamma-\alpha$

για τις οποίες βάσει των παραπάνω έχουμε

$$\beta+\gamma-\alpha\leq\gamma\leq\beta\leq\alpha\leq\alpha+\beta-\gamma \text{ και}$$
$$(\beta+\gamma-\alpha)+(\gamma+\alpha-\beta)+(\alpha+\beta-\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$$

δηλαδή ισχύουν οι υποθέσεις του προβλήματος, άρα, $(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)\leq\alpha\beta\gamma$.

**ii.** Έστω ότι οι αριθμοί α, β, γ δεν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Τότε, αν υποθέσουμε ότι, στο δεξιό μέλος της ανισότητας δύο ή τρεις παράγοντες του είναι αρνητικοί, καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε μόνο ένας παράγοντας είναι αρνητικός, οπότε η ανισότητα είναι προφανής.

• Έστω $\alpha,\beta,\gamma>0$ με $\alpha\beta\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha-1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta-1+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\gamma-1+\frac{1}{\alpha}\right)\leq 1$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\alpha=\frac{x}{y}$, $\beta=\frac{y}{x}$, $\gamma=\frac{z}{x}$, οπότε έχουμε

$$\alpha-1+\frac{1}{\beta}=\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}=\frac{x-y+z}{y}$$

$$\beta-1+\frac{1}{\gamma}=\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}=\frac{x+y-z}{z}$$

$$\gamma-1+\frac{1}{\alpha}=\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}=\frac{-x+y+z}{x}$$

και έτσι, η αποδεικτέα γίνεται:

$$\frac{x-y+z}{y}\cdot\frac{x+y-z}{z}\cdot\frac{-x+y+z}{x}\le 1\text{, ή}$$

$$(x-y+z)(x+y-z)(-x+y+z)\le xyz$$

που είναι η προηγούμενη.

• Αν οι αριθμοί α, β, γ παριστάνουν μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}\ge 3$$

ΛΥΣΗ

Από την ανισότητα $AM\ge GM$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}}\ge 3$$

λόγω της

$$\alpha\beta\gamma\ge(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta).$$

**12. Αν οι αριθμοί $x, y. z\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν την ανισότητα $x+y+z\ge\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$, να αποδείξετε ότι $|x|+|y|+|z|=x+y+z$.**

ΛΥΣΗ

Από την δοσμένη σχέση προκύπτει ότι $x+y+z\ge 0$ και

$$(x+y+z)^2\ge 2(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)\ge x^2+y^2+z^2\ge 0$$

Επομένως ισχύουν $x+y+z\ge 0$ και $xy+yz+zx\ge 0$ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$$

της οποίας τα κρίσιμα σημεία θα είναι οι ρίζες της

$$f'(t)=3t^2-2(x+y+z)t+xy+yz+zx,\ (1)$$

Το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, αφού

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$

και έχουν γινόμενο και άθροισμα μη αρνητικό, οπότε είναι μη αρνητικές.

Έστω $x\le y\le z$ και $\rho_1, \rho_2$ $(\rho_1\le\rho_2)$ οι ρίζες του τριωνύμου (1). Ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ρίζες μιας συνάρτησης όμως, υπάρχει σύμφωνα με το Θ. Rolle ρίζα της παραγώγου της, οπότε έχουμε $x\le\rho_1\le y\le\rho_2\le z$ απ' όπου προκύπτει ότι $y\ge 0, z\ge 0$. Συνεπώς το πολυώνυμο έχει τουλάχιστον δυο μη αρνητικές ρίζες.

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι $x<0, y\ge 0, z\ge 0$, τότε είναι:

$$y+z>x+y+z\ge\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}>\sqrt{2(y^2+z^2)}$$

οπότε

$$y+z>\sqrt{2(x^2+y^2)}\Rightarrow 2xy>y^2+z^2\text{, άτοπο.}$$

Άρα, $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, οπότε

$$|x|+|y|+|z|=x+y+z$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια σειρά από (γνωστές) ανισότητες, που για την αντιμετώπιση τους χρησιμοποιούμε τόσο πολυώνυμα 3ου βαθμού, όσο και τα γνωστά συμπεράσματα για το πρόσημο του τριωνύμου.

**13. Έστω $\alpha>\beta>\gamma>0$. Να αποδείξετε ότι**

$$\boldsymbol{\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha>\beta^2\alpha+\alpha^2\gamma+\gamma^2\beta,\quad (1)}$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(t)=(t-\alpha^2\beta)(t-\beta^2\gamma)(t-\gamma^2\alpha)\text{ και}$$

$$g(t)=(t-\beta^2\alpha)(t-\alpha^2\gamma)(t-\gamma^2\beta)$$

των οποίων οι ρίζες είναι οι όροι των δυο μελών της αποδεικτέας. Λόγω της υπόθεσης διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός $\alpha^2\beta$ είναι ο μεγαλύτερος από όλους τους όρους που εμφανίζονται στα μέλη της (1). Παρατηρούμε ότι $f(0)=g(0)$ και

$$f(-\alpha\beta\gamma)=-\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=g(-\alpha\beta\gamma)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(t)=g(t)-f(t)$$

$$=t^3-(\beta^2\alpha+\alpha^2\gamma+\gamma^2\beta)t^2+(\alpha^3\beta^2\gamma+\gamma^3\alpha^2\beta+\beta^3\gamma^2\alpha)t-\alpha^3\beta^3\gamma^3$$

$$=[t^3-(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)t^2+(\alpha^2\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha\beta^2+\alpha^3\gamma^2\beta)t-\alpha^3\beta^3\gamma^3]$$

$$=[(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)-(\beta^2\alpha+\alpha^2\gamma+\gamma^2\beta)]t^2$$

$$+\alpha\beta\gamma[(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)-(\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2)]t$$

δηλαδή η h είναι τριώνυμο με ρίζες 0 και $-\alpha\beta\gamma$.

Είναι:

$$h(\alpha^2\beta)=g(\alpha^2\beta)-f(\alpha^2\beta)=g(\alpha^2\beta)$$

Όμως ο αριθμός $\alpha^2\beta$ είναι δεξιά της μεγαλύτερης ρίζας του πολυωνύμου $g(t)$, οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι $g(\alpha^2\beta)>0$. Έτσι, και $h(\alpha^2\beta)>0$. Ο αριθμός $\alpha^2\beta$ βρίσκεται δεξιά της μεγαλύτερης ρίζας του τριωνύμου $h(t)$ και όπως διαπιστώσαμε το πρόσημο του τριωνύμου στο $\alpha^2\beta$ είναι θετικό, οπότε ο συντελεστής

$$(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)-(\beta^2\alpha+\alpha^2\gamma+\gamma^2\beta) \text{ του } t^2$$

θα είναι θετικός, δηλαδή

$$(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)-(\beta^2\alpha+\alpha^2\gamma+\gamma^2\beta)>0$$

$$\Rightarrow \alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha>\beta^2\alpha+\alpha^2\gamma+\gamma^2\beta \text{ δηλ. η } (1)$$

Σχόλιο: Προφανώς μπορούμε να έχουμε και απλούστερη λύση στην (1), αφού με μεταφορά των όρων στο πρώτο μέλος και παραγοντοποίηση παίρνουμε: $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)>0$ που ισχύει λόγω της $\alpha>\beta>\gamma$. Ωστόσο αυτό που επιδιώξαμε εδώ είναι να δείξουμε πως εφαρμόζουμε τα πολυώνυμα 3ου βαθμού στην αντιμετώπιση κάποιων προβλημάτων.

**14. Αν $\alpha>\beta>\gamma$, να αποδείξετε ότι**

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$f(x)=\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x-\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(x-\frac{\gamma}{\alpha}\right) \text{ και}$$

$$g(x)=\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x-\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(x-\frac{\alpha}{\gamma}\right)$$

Είναι: $f(0)=g(0)$ και $f(-1)=g(-1)$.

Από την υπόθεση ο αριθμός $\frac{\alpha}{\gamma}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\alpha}{\gamma},\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\gamma},\frac{\gamma}{\alpha},\frac{\gamma}{\beta}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$h(x)=\left[x^3-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)x^2+\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x-1\right]$$

$$=-\left[x^3-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}\right)x-1\right]$$

$$=\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)x^2+\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)x$$

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

$h(0)=0$ και $h(-1)=0$ και επειδή η h είναι τριώνυμο, δεν έχει άλλες ρίζες.

Επίσης έχουμε:

$$h\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)-g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)>0$$

αφού ο αριθμός $\frac{\alpha}{\gamma}$ βρίσκεται δεξιότερα από τη μεγαλύτερη ρίζα του $f(x)$. Συνεπώς, αφού ισχύει $h\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)>0$, ο συντελεστής του $x^2$ είναι θετικός, δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}$ που είναι η αποδεικτέα

**15. Έστω $\alpha\ge\beta\ge\gamma>0$. Να αποδείξετε ότι:**

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha}\ge\alpha+\beta+\gamma$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\alpha^2}{\beta},\frac{\beta^2}{\gamma},\frac{\gamma^2}{\alpha}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta}$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο με κάθε όρο του αθροίσματος του β΄ μέλους και το κλάσμα $\frac{\gamma^2}{\alpha}$ δεν είναι μεγαλύτερο από κανένα όρο του β΄ μέλους.

Έτσι, οι αριθμοί α, β, γ βρίσκονται μεταξύ του μικρότερου και του μεγαλύτερου από τους αριθμούς

$$\frac{\alpha^2}{\beta},\frac{\beta^2}{\gamma},\frac{\gamma^2}{\alpha}.$$

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(t)=\left(t-\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(t-\frac{\beta^2}{\gamma}\right)\left(t-\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)$$

και

$$g(t)=(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)$$

Είναι: $f(0)=g(0)$.

Επίσης αν θεωρήσουμε ότι

$$\max\left\{\frac{\alpha^2}{\beta},\frac{\beta^2}{\gamma},\frac{\gamma^2}{\alpha}\right\}=\frac{\alpha^2}{\beta} \text{ και } \min\left\{\frac{\alpha^2}{\beta},\frac{\beta^2}{\gamma},\frac{\gamma^2}{\alpha}\right\}=\frac{\gamma^2}{\alpha}$$

Τότε στο διάστημα $\left[\frac{\gamma^2}{\alpha},\frac{\alpha^2}{\beta}\right]$ για τη συνεχή συνάρτηση $h(t)=g(t)-f(t)$ ισχύουν:

$$h\left(\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)=g\left(\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)-f\left(\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)=g\left(\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)\le 0$$

$$h\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)=g\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)-f\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)=g\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\geq 0$$

Επομένως σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in\left[\frac{\gamma^2}{\alpha},\frac{\alpha^2}{\beta}\right]$ ώστε $h(\xi)=0$.

Η συνάρτηση h είναι τριώνυμο με ρίζες τους αριθμούς 0 και ξ. Επειδή δε είναι $h\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\geq 0$ ο συντελεστής του $t^2$ είναι θετικός οπότε προκύπτει η αποδεικτέα.

**16. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί, να αποδείξετε ότι $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5\geq\alpha^3\beta^2+\beta^3\gamma^2+\gamma^3\alpha^2$**

ΛΥΣΗ

Έστω $\max\{\alpha^5,\beta^5,\gamma^5\}=\alpha^5$ και

$\min\{\alpha^5,\beta^5,\gamma^5\}=\gamma^5$. Τότε έχουμε:

$$\alpha^5\geq\alpha^3\beta^2,\ \alpha^5\geq\beta^3\gamma^2,\ \alpha^5\geq\gamma^3\alpha^2 \text{ και}$$

$$\gamma^5\leq\alpha^3\beta^2,\ \gamma^5\leq\beta^3\gamma^2,\ \gamma^5\leq\gamma^3\alpha^2$$

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(t)=(t-\alpha^5)(t-\beta^5)(t-\gamma^5) \text{ και}$$

$$g(t)=(t-\alpha^3\beta^2)(t-\beta^3\gamma^2)(t-\gamma^3\alpha^2)$$

Είναι: $f(0)=g(0)$.

Επίσης, με συλλογισμούς ανάλογους με εκείνους της προηγούμενης εφαρμογής, βρίσκουμε ότι ανάμεσα στον μικρότερο και τον μεγαλύτερο από τους $\alpha^5,\beta^5,\gamma^5$ δηλαδή στο διάστημα $[\gamma^5,\alpha^5]$ υπάρχει και δεύτερη ρίζα.

Θέτουμε $h(t)=g(t)-f(t)$ και έχουμε:

$$h(\alpha^5)=g(\alpha^5)-f(\alpha^5)=g(\alpha^5)>0$$

άρα και ο συντελεστής του $t^2$ στο $h(t)$ θα είναι θετικός δηλαδή

$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5>\alpha^3\beta^2+\beta^3\gamma^2+\gamma^3\alpha^2$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

**17. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί, να αποδείξετε ότι $\alpha^3\beta+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha\geq\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\gamma\alpha+\gamma^2\alpha\beta$**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(x)=(x-\alpha^3\beta)(x-\beta^3\gamma)(x-\gamma^3\alpha) \text{ και}$$

$$g(x)=(x-\alpha^2\beta\gamma)(x-\beta^2\gamma\alpha)(x-\gamma^2\alpha\beta)$$

Παρατηρούμε ότι $f(0)=g(0)$.

Έστω $\alpha=\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\alpha^2\beta\gamma=\min\{\alpha^2\beta\gamma,\beta^2\alpha\gamma,\gamma^2\alpha\beta\}.$$

Επιπλέον ισχύει

$$\alpha^3\beta\leq\alpha^2\beta\gamma\Leftrightarrow\alpha\leq\gamma$$

δηλαδή τελικά είναι:

$$\alpha^3\beta\leq\alpha^2\beta\gamma\leq\beta^2\alpha\gamma,\ \gamma^2\alpha\beta$$

Αν επιπλέον για παράδειγμα ισχύει

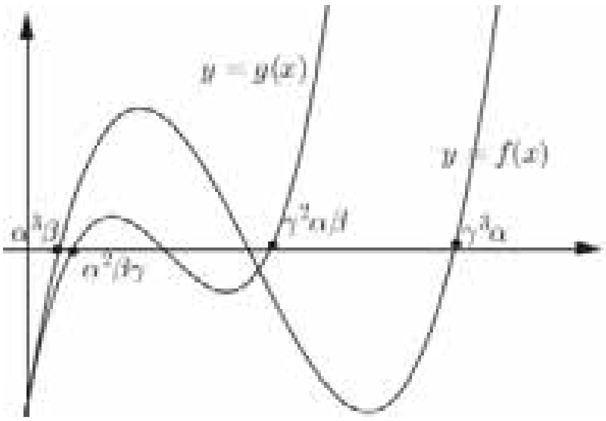
$$\gamma^2\alpha\beta=\max\{\alpha^2\beta\gamma,\beta^2\alpha\gamma,\gamma^2\alpha\beta\},$$

τότε θα είναι και

$$\gamma^2\alpha\beta\leq\gamma^3\alpha\Leftrightarrow\beta\leq\gamma \text{ (εφόσον } \alpha\leq\beta\leq\gamma\text{ )},$$

δηλαδή ο μεγαλύτερος από τους όρους του δεξιού μέλους της ανισότητας δεν υπερβαίνει τον μεγαλύτερο των όρων του α΄ μέλους της.

Τα παραπάνω εμφανίζονται στο επόμενο σχήμα.




Συνεπώς η συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)$ όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα και σύμφωνα με το Θ. Bolzano έχει και δεύτερη ρίζα στο διάστημα $[\alpha^3\beta,\gamma^3\alpha]$.

Η πρώτη ρίζα είναι προφανώς ο αριθμός 0. Έτσι οι δυο ρίζες του τριωνύμου $h(x)$ βρίσκονται αριστερά από την μεγαλύτερη ρίζα του $f(x)$.

Ακόμη είναι:

$$h(\gamma^3\alpha)=f(\gamma^3\alpha)-g(\gamma^3\alpha)=g(\gamma^3\alpha)>0$$

συνεπώς ο συντελεστής του $x^2$ στην έκφραση του τριωνύμου $h(x)$ θα είναι θετικός λόγω του γνωστού συμπεράσματος για το πρόσημο του τριωνύμου, δηλαδή θα είναι

$$\alpha^3\beta+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha>\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\gamma\alpha+\gamma^2\alpha\beta$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

# Είναι το Τρίγωνο Ισοσκελές;

**Γιώργος Τσαπακίδης**

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι τα συμμετρικά σχήματα έχουν πολύ περισσότερες ιδιότητες από **τα μη συμμετρικά**. Το ισοσκελές τρίγωνο, που έχει άξονα συμμετρίας, κατέχει ιδιαίτερη θέση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, λόγω των πολλών ιδιοτήτων του. Είναι φυσικό να θέσουμε το ερώτημα:

**Αν ένα τρίγωνο έχει κάποια από τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, είναι ισοσκελές;**

Α. Στο τρίγωνο είναι γνωστές οι ισοδυναμίες:

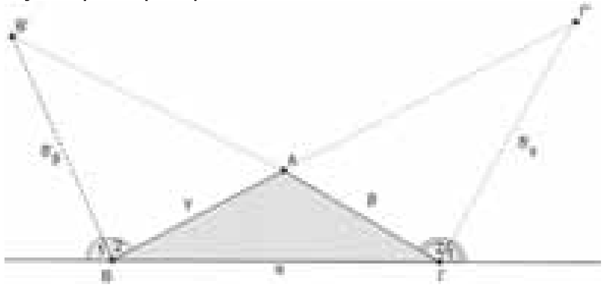
- $\beta=\gamma \Leftrightarrow \upsilon_\beta=\upsilon_\gamma$, • $\beta=\gamma \Leftrightarrow \mu_\beta=\mu_\gamma$
- $\beta=\gamma \Leftrightarrow \delta_\beta=\delta_\gamma$

Έτσι σε τρίγωνο, αν δύο ύψη του ή δύο διάμεσοί του ή δύο διχοτόμοι του είναι ίσες, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**Σχόλιο:** Η πρόταση «Αν σε τρίγωνο ισχύει $\delta_\beta=\delta_\gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές» δεν έχει και τόσο απλή απόδειξη. Είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως «Θεώρημα Steiner–Lehmus». Από το **1840**, που ο Γερμανός μαθηματικός **C.L. Lehmus** ζήτησε με επιστολή του από τον Γάλλο μαθηματικό **C. Sturm** μια καθαρά **γεωμετρική απόδειξη**, μέχρι σήμερα έχουν δοθεί και συνεχίζουν να δίνονται πολλές αποδείξεις στο πρόταση αυτή. Ένας από τους πρώτους που έδωσε λύση είναι ο Ελβετός γεωμέτρης **J. Steiner**, εξ ου και το όνομα του θεωρήματος. Για μερικές γεωμετρικές αποδείξεις του θεωρήματος δείτε στα [2], [4], [5] της βιβλιογραφίας.

**Β.1. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι εξωτερικές του διχοτόμοι είναι ίσες, δηλ. αν σε τρίγωνο ισχύει β=γ, τότε $\delta'_\beta=\delta'_\gamma$. Ισχύει το αντίστροφο; Δηλ. αν σε τρίγωνο είναι $\delta'_\beta=\delta'_\gamma$ τότε β=γ;**

Ας το ερευνήσουμε:



Τα μήκη των εξωτερικών διχοτόμων είναι:

$$\delta'_\beta=\frac{1}{|\alpha-\gamma|}\sqrt{\alpha\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)} \text{ και}$$

$$\delta'_\gamma=\frac{1}{|\alpha-\beta|}\sqrt{\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}$$ [δες στο [1], σελίδα 241].

Έτσι $\delta'_\beta=\delta'_\gamma$

$$\Leftrightarrow(\beta-\gamma)\left[\alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha-\beta\gamma(\beta+\gamma)\right]=0 \quad (1)$$

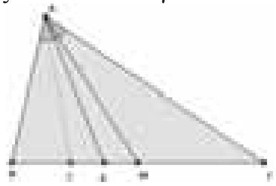
Το ερώτημα τώρα είναι: αν $\beta\neq\gamma$, έστω $\beta>\gamma$, η (1) έχει λύση ως προς α;Για $\beta>\gamma$ η (1) γράφεται ισοδύναμα: $\alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha-\beta\gamma(\beta+\gamma)=0$ (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$f(\alpha)=\alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha-\beta\gamma(\beta+\gamma)$, που είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, με $f(0)=-\beta\gamma(\beta+\gamma)<0$

$f(\beta)=\beta\gamma(\beta-\gamma)>0$ άρα $f(0)f(\beta)<0$, οπότε από το θ. Bolzano η (2) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\beta)$.

**Συμπέρασμα:** Όταν ένα τρίγωνο έχει δύο εξωτερικές διχοτόμους ίσες **δεν** είναι αναγκαστικά ισοσκελές.



**Β.2. Έστω ΑΔ η διχοτόμος και ΑΜ η διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ. Θεωρούμε τη συμμετρική της ευθείας ΑΜ ως προς την ΑΔ, που τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Το τμήμα ΑΕ το λέμε συμμετροδιάμεσο του τριγώνου.**

Το μήκος της συμμετροδιαμέσου του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου είναι

$$\sigma_\alpha=\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\mu_\alpha$$ [δες [1] σελίδα 259].

Έτσι αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές (β=γ) τότε οι συμμετροδιάμεσοί του που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσες ($\sigma_\beta=\sigma_\gamma$). Ισχύει το αντίστροφο;Δηλ. αν $\sigma_\beta=\sigma_\gamma$ είναι β=γ;

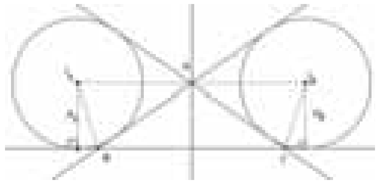
Έχουμε $\sigma_\beta=\sigma_\gamma \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}\mu_\beta=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\gamma^2}\mu_\gamma$

και μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$\left(\gamma^2-\beta^2\right)\left[2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\alpha^2\right)\alpha^2+\beta^2\gamma^2\left(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\right]=0\Leftrightarrow$$

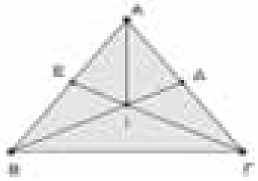
$\Leftrightarrow \beta=\gamma$ άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**Β.3**



**Εύκολα αποδεικνύεται: $\beta=\gamma \Leftrightarrow \rho_\beta=\rho_\gamma$.**

**Γ.1. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Ι, είναι ΙΔ = ΙΕ (εύκολη απόδειξη με ισότητες τριγώνων). Ισχύει το αντίστροφο; Δηλ. αν στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Ι και ισχύει ΙΔ = ΙΕ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές;**



Τα τρίγωνα ΑΙΔ και ΑΙΕ

έχουν ΙΔ = ΙΕ (υπόθ.)

ΑΙ = ΑΙ (κοινή)

$\Delta\hat{A}I=E\hat{A}I$ (Ι έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ)

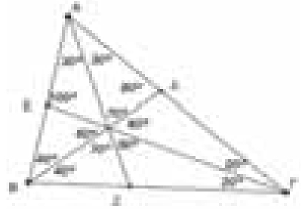
$A\hat{\Delta}I=A\hat{E}I$ (1) ή $A\hat{\Delta}I+A\hat{E}I=180^0$ (2)

(είναι η αμφίβολη περίπτωση ισότητας τρίγωνων )

*Αν ισχύει η (1), τότε $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}B$, οπότε το ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο και έτσι $E\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$ ΑΒΓ ισοσκελές.

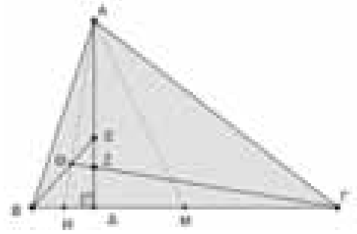
* Αν ισχύει η (2), τότε το τρίγωνο ΑΒΓ μπορεί να μην είναι ισοσκελές, όπως φαίνεται στο σχήμα:



**Γ.2. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ), και οι διχοτόμοι των $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ τέμνουν το ύψος του ΑΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, τότε ΒΕ = ΓΖ (προφανώς το Ε και Ζ ταυτίζονται).**

**Ισχύει το αντίστροφο; Δηλ. αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν το ύψος του ΑΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα και είναι ΒΕ = ΓΖ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές;**

Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ισοσκελές, τότε $\hat{B} \neq \hat{\Gamma}$ και έστω $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, τότε ΒΔ<ΔΕ.



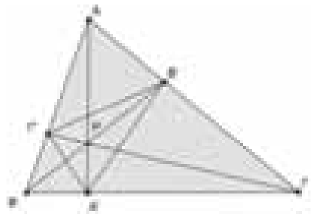
Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ έχουμε: $B\Delta^2 + \Delta E^2 = BE^2 = \Gamma Z^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta Z^2$ και επειδή ΒΔ<ΔΕ, παίρνουμε ΔΕ>ΔΖ, έτσι η ΓΖ τέμνει το τμήμα ΒΕ στο Θ, οπότε η ΑΘΗ θα είναι η τρίτη διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως το ύψος ΑΔ θα βρίσκεται μεταξύ της διχοτόμου ΑΗ και της διαμέσου ΑΜ.

**Αυτό είναι άτοπο**, γιατί σε κάθε μη ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος βρίσκεται μεταξύ του ύψους και της διαμέσου που άγονται από την ίδια κορυφή. Άρα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

**Σχόλιο:** Το πρόβλημα αυτό είναι το 570 της στήλης προβλημάτων του περιοδικού **‘The College Mathematics Journal’** και προτάθηκε από τον M.S. Klamkin. Η λύση που παρατίθεται είναι αυτή που έστειλα στο περιοδικό.

**Γ.3. Αν σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τα ύψη του ή τις διχοτόμους του ή τις διαμέσους του ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ προφανώς ισχύει Α΄Β΄=Α΄Γ΄ και ΒΓ΄=ΓΒ΄. Ισχύει το αντίστροφο; Δηλ. αν Ρ είναι το εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και οι ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ τέμνουν τις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στο Α΄, Β΄, Γ΄ αντίστοιχα και ισχύουν Α΄Β΄ = Α΄Γ΄ και ΒΓ΄ = ΓΒ΄, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές;**

Έστω ότι είναι ΑΒ΄ < ΑΓ΄ τότε από το τρίγωνο ΑΒ΄Γ΄ παίρνουμε $A\hat{\Gamma}'B' < A\hat{B}'\Gamma'$, άρα $A\hat{\Gamma}'A' < A\hat{B}'A'$ (αφού $B'\hat{\Gamma}'A' = \Gamma'\hat{B}'A'$), έτσι $B\hat{\Gamma}'A' > \Gamma\hat{B}'A'$, οπότε από τα τρίγωνα ΒΓ΄Α’ κ ΓΒ΄Α΄ παίρνουμε ΒΑ΄>Α΄Γ (1)



Από το Θ. Ceva έχουμε: $\frac{A\Gamma'}{\Gamma'B}\frac{BA'}{A'\Gamma}\frac{\Gamma B'}{B'A} = 1$ και

επειδή Γ΄Β=ΓΒ΄ παίρνουμε: $\frac{A\Gamma'}{B'A} = \frac{A'\Gamma}{BA'} < 1$

(από (1)) έτσι ΑΓ΄<ΑΒ΄, άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι ΑΒ΄<ΑΓ΄, οπότε ΑΒ΄=ΑΓ΄⇔ΑΒ=ΑΓ και το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**Σχόλιο:** Το πρόβλημα είναι το **1771** της στήλης των προβλημάτων του **Mathematics Magazine**, προτάθηκε από τον **M. Hajja**. Η λύση που παρατίθεται είναι αυτή που έστειλα στο περιοδικό.

**Γενικό σχόλιο:** Με την αντιστροφή απλών ιδιοτήτων του ισοσκελούς είναι μάλλον εύκολη η κατασκευή γεωμετρικών προβλημάτων στα οποία το ζητούμενο να είναι ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι:

1. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος ΑΔ έχει το ίδιο μήκος με τη διάμεσο ΑΜ, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές;
2. Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε κάθετες στη ΒΓ στα Β και Γ που τέμνουν τις προεκτάσεις των διαμέσων ΓΔ και ΒΕ στα Κ και Λ αντίστοιχα. Αν ΒΚ = ΓΛ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές;
3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των εξωτερικών του γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνουν τις προεκτάσεις των διχοτόμων $\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}$ στα Β΄ και Γ΄ αντίστοιχα. Αν ΒΒ΄ = ΓΓ΄, τότε το ΑΒΓ είναι ισοσκελές;
4. Αν οι αποστάσεις της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ από τις διχοτόμους των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες, το ΑΒΓ είναι ισοσκελές;
5. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τη διάμεσο ΓΜ στο Δ και η διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ τέμνει τη διάμεσο ΒΝ στο Ε. Αν ΒΔ = ΓΕ τότε το ΑΒΓ είναι ισοσκελές;

   Να λυθούν τα προηγούμενα προβλήματα.

   Να κατασκευαστούν ανάλογα προβλήματα.

## Βιβλιογραφία


1. Γ. Ντάνη, Γεωμετρία (Δεν αναφέρονται: Εκδοτικός οίκος, τόπος και χρονολογία).
2. H.S Coxeter, S.L. Greitzer, Geometry Revisited, M.A.A, USA, 1967.
3. R. Honsberger, Episode in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, M.A.A., USA, 1995.
4. I. F. Sharugin, Το Θεώρημα Steiner – Lehmus, Quantum, Τόμος 6, τεύχος 1, 1999.
5. Γ. Τσαπακίδης, Εννέα αποδείξεις του Θεωρήματος C. Lehmus, Ευκλείδης Β’ τόμος ΚΗ’, τεύχος 3, 1995.

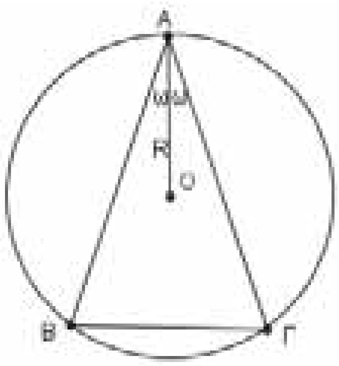
# Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

## ΑΣΚΗΣΗ 416 (ΤΕΥΧΟΣ 129)

Θεωρούμε όλα τα ισοσκελή τρίγωνα με σταθερή περίμετρο $2\tau$. Να βρείτε ποια από αυτά έχουν την μικρότερη ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου και ποιο είναι το μήκος της ακτίνας αυτής.
Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη




**ΛΥΣΗ** (Μιστριώτης Γεώργιος – Χαλκίδα)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. του οποίου θεωρούμε ότι είναι γνωστή η περίμετρος $2\tau=\alpha+\beta+\gamma$. Ορίζουμε την οξεία γωνία $\omega=\frac{1}{2}\hat{A}$ οπότε, οι γωνίες του τριγώνου είναι ίσες με $\omega=2\hat{A},\ \hat{B}=\hat{\Gamma}=90^o-\omega$.

Από **τον νόμο των ημιτόνων** προκύπτει ότι:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{\eta\mu 2\omega}=\frac{\beta}{\eta\mu(90^o-\omega)}=\frac{\gamma}{\eta\mu(90^o-\omega)}=2R$$

$$\frac{\alpha}{2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu+2\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$=\frac{2\tau}{2\sigma\upsilon\nu\omega(1+\eta\mu\omega)}=2R$$

οπότε $R=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega(1+\eta\mu\omega)}\cdot\frac{\tau}{2}$, (1)

Από την ισότητα (1) προκύπτει ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου γίνεται ελάχιστη όταν η συνάρτηση

$$f(\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega(1+\eta\mu\omega),\ 0<\omega<\frac{\pi}{2}$$

πάρει την μέγιστη τιμή της.
Η f παραγωγίσιμη με

$$f'(\omega)=-\eta\mu\omega(1+\eta\mu\omega)+\sigma\upsilon\nu^2\omega=\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega-\eta\mu\omega$$
$$=\sigma\upsilon\nu 2\omega-\eta\mu\omega$$

και

$$f'(\omega)=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu 2\omega=\eta\mu\omega\Rightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2\omega\right)=\eta\mu\omega$$

και επειδή $0<\omega<\frac{\pi}{2}$ παίρνουμε

$$\frac{\pi}{2}-2\omega=\omega\Rightarrow 3\omega=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{6}$$

Επιπλέον, $f''(\omega)=-2\eta\mu 2\omega-\sigma\upsilon\nu\omega<0$, $0<\omega<\frac{\pi}{2}$ οπότε $f'$ γνησίως αύξουσα και επειδή $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ εύκολα συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{6}$, οπότε η ακτίνα του περιγεγραμμένο κύκλου του τριγώνου γίνεται ελάχιστη όταν η γωνία Α είναι $\frac{\pi}{3}$ δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Η ελάχιστη ακτίνα είναι ίση με

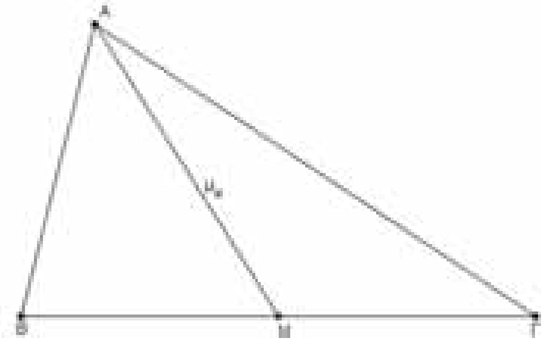
$$R_{min}=\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{4}}\frac{\tau}{2}=\frac{2\tau}{3\sqrt{3}}=\frac{3\alpha}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha$$

**Λύση** έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός, Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός, Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα, Νερούτσος Κώστας – Γλυφάδα, Χωματάς Θεόδωρος -Νίκαια .

## ΑΣΚΗΣΗ 417 (ΤΕΥΧΟΣ 129)

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x, y, z$ ισχύει $xy+yz+zx=1$ να αποδείξετε ότι $x^2+y^2+z^2+3xyz(x+y+z)\geq 2$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι



### ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Είναι: $x^2+y^2+z^2+3xyz(x+y+z)-2$

$$=(x^2+y^2+z^2)\cdot 1+3xyz(x+y+z)-2\cdot 1^2$$

$$=(x^2+y^2+z^2)\cdot(xy+yz+zx)+3xyz(x+y+z)-2\cdot(xy+yz+zx)^2$$

$$=(x^2+y^2+z^2)\cdot(xy+yz+zx)+3xyz(x+y+z)$$

$$-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2-4xyz(x+y+z)$$

$$=(x^2+y^2+z^2)\cdot(xy+yz+zx)-xyz(x+y+z)-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

$$=[xy(x^2+y^2)-2x^2y^2]+[yz(y^2+z^2)-2y^2z^2]+[zx(z^2+x^2)-2z^2x^2]$$

$$=xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+zx(z-x)^2\geq 0$$

αφού οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί.
Επομένως, $x^2+y^2+z^2+3xyz(x+y+z)\geq 2$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**Λύση** έστειλε επίσης ο συνάδελφος Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη.

## ΑΣΚΗΣΗ 418 (ΤΕΥΧΟΣ 129)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\left(\alpha+2\mu_\alpha+2\gamma\right)^2\geq 24\sqrt{3}E$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

### ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\tau\geq 3\sqrt{3}\rho$, οπότε

$$\tau^2\geq 3\sqrt{3}\rho\tau\Rightarrow\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4}\geq 3\sqrt{3}(\mathrm{AB\Gamma})$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq 12\sqrt{3}(\mathrm{AB\Gamma}),\quad (1)$$

Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{ABM})=\frac{1}{2}E \quad \text{Άρα}$$

$$\alpha+2\mu_\alpha+2\gamma=2\left(\frac{\alpha}{2}+\mu_\alpha+\gamma\right)=2\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}+\mathrm{AM}+\mathrm{AB}\right)$$

$$(\alpha+2\mu_\alpha+2\gamma)^2=4\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}+\mathrm{AM}+\mathrm{AB}\right)^2$$

$$\overset{(1)}{\geq}4\cdot 12\sqrt{3}(\mathrm{ABM})=4\cdot 12\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})=24\sqrt{3}E$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$\frac{\alpha}{2}=\mu_\alpha=\gamma\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{A}=90^o\\ \hat{B}=60^o \ \text{ και } \ \hat{\Gamma}=30^o\end{cases}$$

**Σημείωση σύνταξης** Αναλυτική αναφορά και απόδειξη της ανισότητας $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq 12\sqrt{3}(\mathrm{AB\Gamma})$ έχουμε παραθέσει στο **τεύχος 114** του περιοδικού.

**Λύση** έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια, Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός.

## ΑΣΚΗΣΗ 419 (ΤΕΥΧΟΣ 129)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3\beta^3+(\alpha^3+\beta^3)(\gamma+\delta)^3\leq 0$$

Τσιλιακός Λευτέρης – Γαλάτσι

### ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός)

Είναι:

$$\alpha^3\beta^3+(\alpha^3+\beta^3)(\gamma+\delta)^3\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\alpha^3\beta^3-[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)^3$$

$$\Leftrightarrow(\alpha\beta)^3-(\alpha+\beta)^6+3\alpha\beta(\alpha+\beta)^4\leq 0,\quad (1)$$

Αν θέσουμε $\alpha\beta=x$ και $y=(\alpha+\beta)^2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $x^3-y^3+3xy^2\leq 0$

η οποία προφανώς ισχύει όταν $y=0$. Έτσι, αρκεί, με $y>0$, να αποδείξουμε ότι $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-1+3\dfrac{x}{y}\leq 0$

Αν τώρα θέσουμε $\dfrac{x}{y}=t$, τότε λόγω της προφανούς $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ $\;y\geq 4x\overset{y>0}{\Leftrightarrow}\frac{x}{y}\leq\frac{1}{4}$, αρκεί να δείξουμε ότι $t^2+3t-1\leq 0$ με $t\leq\frac{1}{4}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^3+3t-1,\ t\leq\frac{1}{4}$ για την οποία ισχύει $f'(t)=3t^2+3>0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\ \frac{1}{4}\right]$.

Έτσι, για οποιοδήποτε $t\leq\frac{1}{4}$ ισχύει $f(t)\leq f\left(\frac{1}{4}\right)$

και $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}+\frac{48}{64}-1=-\frac{15}{64}<0$

οπότε με $t\leq\frac{1}{4}$ έχουμε $t^2+3t-1\leq-\frac{15}{64}<0$

που είναι το ζητούμενο.

**2η ΛΥΣΗ** (Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός)

Επειδή $\gamma+\delta=-(\alpha+\beta)$ έχουμε:

$$A=\alpha^3\beta^3+(\alpha^3+\beta^3)(\gamma+\delta)^3, \quad (1)$$
$$=\alpha^3\beta^3-(\alpha^3+\beta^3)(\alpha+\beta)^3, \quad (2)$$
$$=\alpha^3\beta^3-(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha+\beta)^4$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\alpha\beta\leq 0$, τότε $(\alpha\beta)^3\leq 0$ και $-(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha+\beta)^4\leq 0$ οπότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα.
- Αν $\alpha\beta>0$, τότε $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\geq\alpha\beta\geq 0$ και $(\alpha+\beta)^4\geq(4\alpha\beta)^2$ οπότε
 $(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha+\beta)^4\geq 16\alpha^3\beta^3\geq 0$
 $\Rightarrow\alpha^3\beta^3-(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha+\beta)^4\leq-15\alpha^3\beta^3$
 $\Rightarrow\alpha^3\beta^3+(\alpha^3+\beta^3)(\gamma+\delta)^3\leq 0$, από (1), (2).

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, ισχύει το ζητούμενο.

**Λύση** έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα.

## ΑΣΚΗΣΗ 420 (ΤΕΥΧΟΣ 129)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha}+\frac{\delta}{\alpha+\beta}\geq 2$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

**ΛΥΣΗ** (Από τον ίδιο)

Από την ανισότητα $(x+y)^2\geq 4xy$ που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y εύκολα βρίσκουμε ότι $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}\geq 4\frac{\alpha y+\beta x}{(x+y)^2}$

που ισχύει για κάθε α, β, x, y .

Με βάση την ανισότητα αυτή, έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha}\geq 4\frac{\alpha(\alpha+\delta)+\gamma(\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}$$

$$\text{και }\ \frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\delta}{\alpha+\beta}\geq 4\frac{\beta(\alpha+\beta)+\delta(\gamma+\delta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}$$

$$\text{οπότε }\ \frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha}+\frac{\delta}{\alpha+\beta}$$

$$\geq\frac{4}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}[\alpha(\alpha+\delta)+\gamma(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\beta)+\delta(\gamma+\delta)]$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha}+\frac{\delta}{\alpha+\beta}$$

$$\geq\frac{4}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}(\alpha^2+\alpha\delta+\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\beta+\beta^2+\gamma\delta+\delta^2)$$

$$\text{και }\ 4(\alpha^2+\alpha\delta+\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\beta+\beta^2+\gamma\delta+\delta^2)$$

$$=2(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+2\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta-2\alpha\gamma-2\beta\delta)$$
$$=2[(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2]$$

Έτσι, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha}+\frac{\delta}{\alpha+\beta}\geq 2+2\frac{(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}$$

$$\text{οπότε }\ \frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha}+\frac{\delta}{\alpha+\beta}\geq 2$$

που είναι το ζητούμενο.

**2η ΛΥΣΗ** (Νερούτσος Κωστας - Γλυφάδα)

$$\text{Έστω }\ A=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha}+\frac{\delta}{\alpha+\beta}$$

Τότε έχουμε:

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}+\frac{\beta^2}{\beta\gamma+\beta\delta}+\frac{\gamma^2}{\gamma\delta+\gamma\alpha}+\frac{\delta^2}{\delta\alpha+\delta\beta}$$

και από την ανισότητα του Andrescu έχουμε:

$$A \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\gamma\alpha+\delta\alpha+\delta\beta}$$

οπότε για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\gamma\alpha+\delta\alpha+\delta\beta} \geq 2, \ (1)$$

Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 \geq 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\gamma\alpha+\delta\alpha+\delta\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta$$
$$\geq 2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta+2\gamma\alpha+2\delta\alpha+2\delta\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \geq 2\alpha\gamma+2\beta\delta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha\gamma-2\beta\delta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2 \geq 0$$

που ισχύει, οπότε ισχύει και η (1).
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

**Λύση** έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι και Δεληστάθης Βασίλειος – Άνω Πατήσια.

**Σημείωμα σύνταξης:** Όπως έχουμε αναφέρει και στο τεύχος 117, αποδεικνύεται ότι: Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί και x, y, z οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν:

- $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta} \geq \dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$
- $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

Ανάλογα

- $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}+\dfrac{w^2}{\delta} \geq \dfrac{(x+y+z+w)^2}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

Η απόδειξη της πρώτης είναι απλή, και καθεμία από τις επόμενες αποδεικνύεται με τη βοήθεια της προηγούμενης. Συχνά στη βιβλιογραφία αναφέρονται ως **ανισότητα Andreescu**, ενώ ο ίδιος, όποια χρησιμοποιεί, την αναφέρει ως βοηθητικό λήμμα.

## Προτεινόμενα Θέματα

**425.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα $\upsilon_\alpha, \mu_\beta$ και $\delta_\gamma$ συντρέχουν, αν και μόνο αν είναι $\dfrac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}=\varepsilon\varphi\Gamma$.

Δεληστάθης Βασίλειος – Άνω Πατήσια

**426.** Να λύσετε την εξίσωση

$$\log_3\left(|x^2-1|+1\right)+\sqrt{4x^4-5x^2+11}=\sqrt{2x^4+7x^2-7}$$

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

**427.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$3\left(\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}+\frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma}+\frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}\right) \geq$$
$$(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu \Gamma)\left(\frac{1}{\eta\mu A}+\frac{1}{\eta\mu B}+\frac{1}{\eta\mu \Gamma}\right)$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι

**428.** Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2\left[\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^2\right] \geq \frac{36}{\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

Ο δαίμων του copy paste απέτρεψε στο προηγούμενο τεύχος την επικόλληση του σωστού προβλήματος στο πρόβλημα με αριθμό 422, αφήνοντας το ίδιο (416) που ήδη δημοσιεύτηκε στο προηγούμενο τεύχος. Για την αποκατάσταση της σωστής αρίθμησης, παρακάτω παραθέτουμε το πρόβλημα 422.

**422.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma-A}{2}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}$

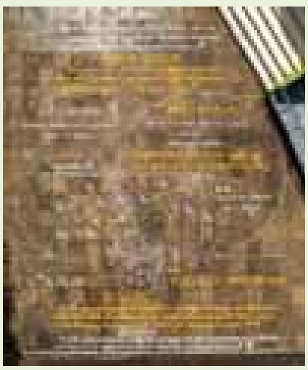
$$\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}+\frac{\gamma+\alpha}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}}\right)$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

# αφορμές ... και στιγμιότυπα

## Η γεωμετρία των δρόμων

**Ν**α που και οι δρόμοι έχουν την δική τους ιστορία. Μερικοί δρόμοι έχουν **και την δική τους** Γεωμετρία και τον δημιουργό της "οδού Ευκλείδειας Γεωμετρίας" στο **Ιστορικό Κέντρο Καλαμάτας**, Γιάννη Τσιμόγιαννη. Έχοντας μεταφέρει **την αγάπη** του για τη Γεωμετρία εκτός των τεσσάρων τοιχώναπό το 2021 όταν και ξεκίνησε η μετατροπή της οδού Ηφαίστου σε «**δρόμο θεωρημάτων**», ο νομικός στο επάγγελμα και κάτοικος της περιοχής κ. Τσιμόγιαννης δεν έχει επαναπαυθεί στην αρχική του πρωτοβουλία πριν 2.5 χρόνια, κρίνοντας κανείς από την εξαίρετη δουλειά του στο 5**ο ΓΕΛ Καλαμάτας**, μέσω του προγράμματος «**Ο τοίχος διδάσκει**» αλλά και από τα νέα θεωρήματα και σχήματα που σχεδίασε πρόσφατα κατά μήκος του πεζόδρομου της Γερμανού. Μέσα έτσι από το **ταλέντο** ενός ανθρώπου και από την εθελοντική του **προσφορά**, έχει δημιουργηθεί μια άτυπη τουριστική περιήγηση στην Καλαμάτα, όπου όμοια της **δεν υπάρχει** όχι μόνο στην Ελλάδα **αλλά ευρύτερα στον κόσμο**, κάτι που έχει σχολιαστεί πολλάκις από ανθρώπους που αγαπούν τον συγκεκριμένο κλάδο, αλλά και από επισκέπτες της πόλης όπου δείχνουν εντυπωσιασμένοι διασχίζοντας το Ιστορικό Κέντρο.



**ΑΠΟ ΤΟ ΑΙΣΘΗΤΙΚΟ ΣΤΟ... ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΚΕΛΟΣ**: Ο δρόμος στο **συγκεκριμένο χώρο**, όπου το έδαφος είναι σαφώς πιο ιδανικό για να καθίσει καλά το χρώμα πάνω και να σχεδιαστούν τα σχήματα», μπήκε στη διαδικασία να ανανεώσει τα πρώτα του θεωρήματα, αλλά και να φτιάξει **νέα κατά** μήκος των δύο προαναφερόμενων δρόμων. «Σε δεύτερη φάση, δεν ξέρω αν το **μαθηματικό σκέλος** τους ενδιαφέρει, για να αφιερώσουν περαιτέρω χρόνο ως προς το τι αποτυπώνουν. Προσωπικά είμαι λεπτομερής ως προς την απόδειξη, διαγράφοντας γωνίες και καθετότητες, ώστε να διευκολύνω τους περαστικούς **να σκεφτούν επαγωγικά**, με κεντρικό στόχο φυσικά τα **παιδιά**» σημείωνε ο ίδιος. Τόνιζε επίσης, πως κάποιες από τις νέες δημιουργίες του, περιστρέφονται γύρω από τη "**χρυσή τομή**" της γεωμετρίας, τις οποίες για να αποτυπώσει σωστά, χρησιμοποιεί ακόμα και **σκάλα** ώστε να πετύχει με ακρίβεια της ευθείες.


**ΜΕ ΤΟ... ΒΛΕΜΜΑ ΣΤΟ ΜΕΛΛΟΝ**: Ενα αξιοσημείωτο γεγονός, εν αντιθέσει με τα όσα παρατηρούνται με τις **ακαλαίσθητες** φιγούρες και τα σύμβολα στους δρόμους της πόλης, είναι πως ο κόσμος έχει **σεβαστεί** τις δημιουργίες αυτές. «Γενικότερα έχω λάβει κολακευτικά σχόλια από πολλές μεριές, ξεχωρίζοντας το σχόλιο ενός φίλου, πως πέρα από την πρωτοτυπία που διακρίνει τα σχέδια είναι πάνω απ' όλα επιμορφωτικά» συνέχισε, λέγοντας πως βάση έρευνας που έχει κάνει σχετικά με τα Ρεκόρ Γκίνες, έχει ψάξει αν υπάρχει άλλο **μεγάλο γεωμετρικό σχήμα** σαν αυτό του προαυλίου στο 5ο ΓΕΛ Καλαμάτας **που έχει αποτυπώσει**, δίχως να προκύπτει κάποιο παρόμοιο, με αποτέλεσμα να είναι υπό σκέψεις για το αν θα καταθέσει υποψηφιότητα για τέτοιου τύπου ρεκόρ. Στο ίδιο πεδίο, εκτίμησε πως ο Δήμος Καλαμάτας θα εκμεταλλευτεί την "**οδό Ευκλείδειας Γεωμετρίας**" μέσω κάποιων δρώμενων, επικαλούμενος σχετικά μηνύματα που έχει λάβει.

**ΣΕΙΡΑ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΟ 1ο ΛΥΚΕΙΟ**: Η αλήθεια είναι ότι συνεχίζεται αυτή η προσπάθεια των δρόμων «Για την ώρα θα ολοκληρωθούν οι δημιουργίες μου, στο Ιστορικό Κέντρο και από το καλοκαίρι **του** 2024 εφόσον πάρω το "**πράσινο φως**" από το σχολείο θα ήταν χαρά μου να φτιάξω αντίστοιχα σχέδια και στο 1ο Λύκειο», αναφερόμενος ως εξής με βάση τη φράση του Ανδρέα Εμπειρίκου "**Πάρε την λέξη μου**. **Δώσε μου το χέρι σου**": «Η επιδίωξή μου είναι από τη σκόνη των σπουδαστηρίων, να **εμφανίσω τη γεωμετρία στο δημόσιο χώρο**. Από την πλευρά μου δίνω το σύνθημα μετάβασης στο δημόσιο χώρο με σκοπό να επωφεληθεί η πλειοψηφία από την πρωτοβουλία αυτή».

Πηγές: Ελευθερία on line, Messinia live, Εφημερίδα Θάρρος,