

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί
γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$
- 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί
παραπληρωματικών γωνιών
- 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρι-
κών αριθμών μιας γωνίας
- 2.4 Νόμος ημιτόνων
Νόμος συνημιτόνων

Γενικές ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου
Επανάληψη – Ανακεφαλαίωση



2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$



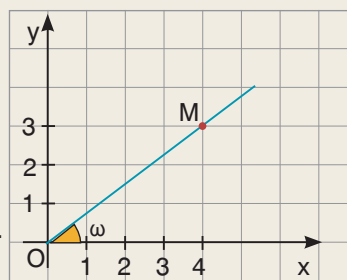
- 4 *Θυμάμαι πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.*
- 4 *Γνωρίζω πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.*
- 4 *Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέραμε την ημιευθεία OM , που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ω .

1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου M και να υπολογίσετε την απόσταση του M από την αρχή O .
2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

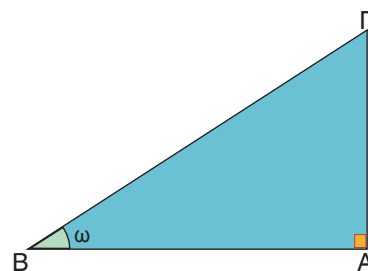


Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AG}{BG}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{BG}$$

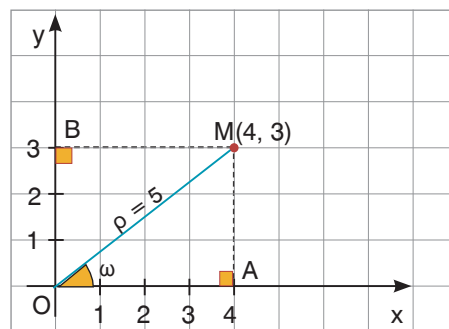
$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{AG}{AB}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρουμε το σημείο $M(4, 3)$ και φέρουμε $MA \perp x'x$ και $MB \perp y'y$, τότε έχουμε $OA = 4$ και $OB = AM = 3$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = \angle xOM$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM .

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση $\rho = OM$ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα



$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O}$$

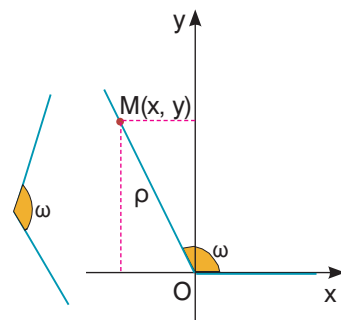
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.

Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω , τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy , έτσι ώστε η κορυφή της να συμπίπτει με την αρχή O , η μία πλευρά της να συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$, διαφορετικό από το O , τότε για την απόσταση $\rho = OM$ ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

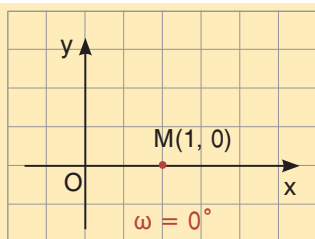
$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε είναι $x > 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, $\epsilon\phi\omega > 0$.
- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι $x < 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, $\epsilon\phi\omega < 0$.

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 90^\circ$ ή $\omega = 180^\circ$.

Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0° , 90° και 180° .

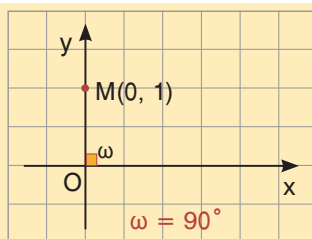


Αν M σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το $M(1, 0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\epsilon\phi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

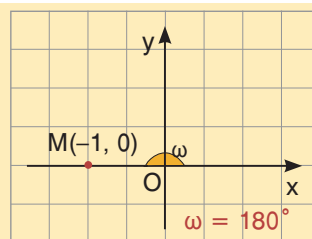


Αν M σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το $M(0, 1)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$\epsilon\phi 90^\circ$ δεν ορίζεται
(γιατί $x=0$)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το $M(-1, 0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\epsilon\phi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° , 45° και 60° που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\phi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy παίρνουμε το σημείο $M(-4, 3)$. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$.

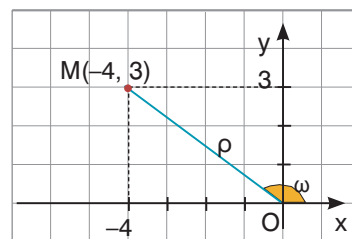
Λύση

Για την απόσταση $OM = \rho$ έχουμε:

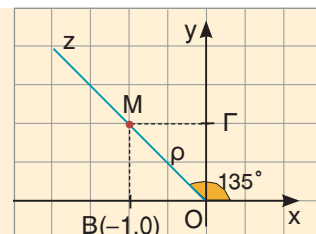
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{Άρα: } \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{και } \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$



- 2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $\widehat{xOz} = 135^\circ$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο M με τετμημένη -1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{xOM} = 135^\circ$.



Λύση

Φέρουμε $MB \perp x'x$ και $M\Gamma \perp y'y$. Επειδή $\widehat{xOM} = 135^\circ$ και $\widehat{xOy} = 90^\circ$ θα είναι $\widehat{OM\Gamma} = 45^\circ$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο $OM\Gamma$ είναι και ισοσκελές.

Άρα $OG = M\Gamma = OB = 1$ και η τεταγμένη του σημείου M είναι $y = 1$.

Δηλαδή έχουμε $M(-1, 1)$ και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$\text{Άρα } \eta\mu 135^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 135^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1.$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Για το σημείο $M(5, 12)$ είναι $\rho = OM = 13$. Αν $\omega = \widehat{xOM}$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
- $\eta\mu\omega = \dots\dots\dots$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$ $\epsilon\phi\omega = \dots\dots\dots$

- 2 Αν η γωνία $\omega = \widehat{xOM}$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο $>$ ή $<$.
 $\eta\mu\omega \dots 0$ $\sigma\upsilon\nu\omega \dots 0$ $\epsilon\phi\omega \dots 0$

- 3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

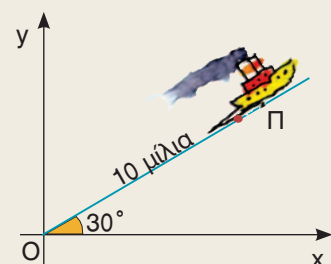
Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 90^\circ$	1. 0
β. $\sigma\upsilon\nu 180^\circ$	
γ. $\epsilon\phi 0^\circ$	
δ. $\sigma\upsilon\nu 90^\circ$	2. -1
ε. $\eta\mu 0^\circ$	3. 1
στ. $\epsilon\phi 180^\circ$	
ζ. $\sigma\upsilon\nu 0^\circ$	
η. $\eta\mu 180^\circ$	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

- 4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
- α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$. ☐
- β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $\epsilon\phi\omega < 0$. ☐
- γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega > 0$, τότε η ω είναι οξεία. ☐
- δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

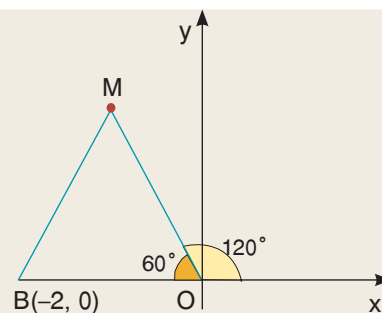
- 1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$, όταν:
 α) $M(3, 4)$ β) $M(-5, 12)$ γ) $M(0, 3)$
- 2 Μια ευθεία ϵ έχει εξίσωση $y = -2x$.
 α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ϵ και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της M που έχει τετμημένη -1 .
 β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$.
- 3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα Ox γωνία 30° . Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



- 4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OBM είναι ισόπλευρο.

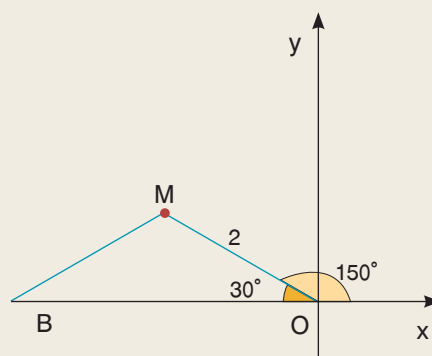
Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του M.
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120° .



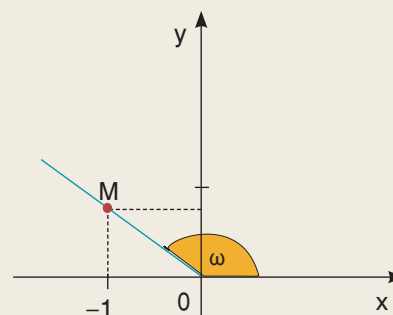
- 5 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OBM είναι ισοσκελές.

- α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του M είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150° .

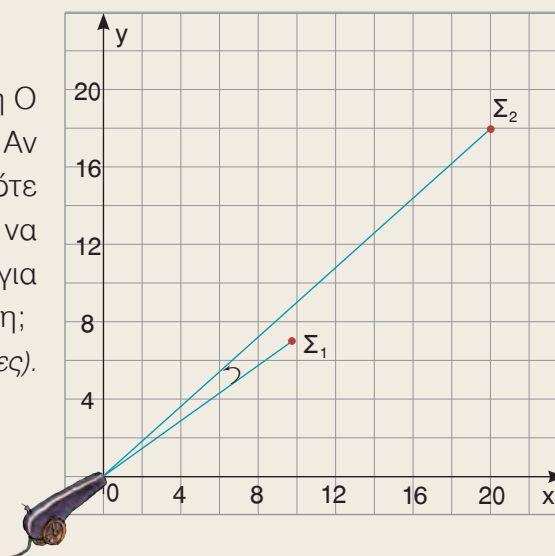


- 6 Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου M είναι -1 , τότε να υπολογίσετε:

- α) την τεταγμένη του σημείου M.
β) το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$.



- 7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση O και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο Σ_1 . Αν ο στόχος Σ_1 μετακινηθεί στη θέση Σ_2 , τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών



Γνωρίζω ποια σχέση συνδέει:

- 4 Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών.
- 4 Τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να πάρετε το σημείο $M(3, 4)$.

1. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου M' , που είναι συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $y'y$;
2. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $\widehat{xOM} = \omega$ και $\widehat{xOM'} = \varphi$ είναι παραπληρωματικές.
3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ και τη σχέση που τους συνδέει.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο $M(3, 4)$ και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείου $M'(-3, 4)$ ως προς τον άξονα $y'y$.

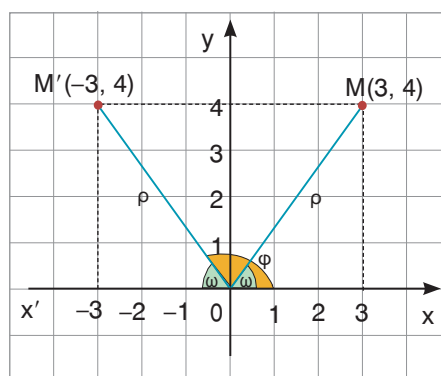
Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $\widehat{xOM}$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $\widehat{x'OM'} = \omega$, οπότε για τη γωνία $\varphi = \widehat{xOM'}$ ισχύει $\varphi = 180^\circ - \omega$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού $\omega + \varphi = 180^\circ$.

Έχουμε ακόμη ότι

$$\rho = OM = OM' = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5, \text{ οπότε:}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{5}, \quad \epsilon\varphi\varphi = -\frac{4}{3}.$$



Παρατηρούμε λοιπόν, ότι:

Οι παραπληρωματικές γωνίες $\omega, \varphi = 180^\circ - \omega$ έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γενικά

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$

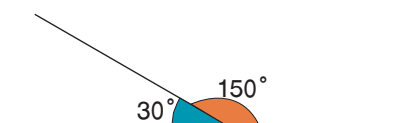
Με τους προηγούμενους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.

Για παράδειγμα,

$$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi 150^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150° και 30° , αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο. Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180° , τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν $\eta\mu x = \eta\mu 35^\circ$ και $0 \leq x \leq 180^\circ$, τότε είναι $x = 35^\circ$ ή $x = 180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή $x = 35^\circ$ ή $x = 145^\circ$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \eta\mu 140^\circ + \sigma\upsilon\nu 170^\circ - \eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ$.

Λύση

Οι γωνίες 140° και 40° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή είναι $\eta\mu 140^\circ = \eta\mu 40^\circ$.

Οι γωνίες 170° και 10° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή είναι $\sigma\upsilon\nu 170^\circ = -\sigma\upsilon\nu 10^\circ$. Άρα:

$$A = \eta\mu 140^\circ + \sigma\upsilon\nu 170^\circ - \eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ = \eta\mu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 10^\circ - \eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ = 0.$$

- 2 Αν $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$ να αποδειχθεί ότι: α) $\eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma$ β) $\sigma\upsilon\nu(A + B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$

Λύση

Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου έχουν άθροισμα 180° , δηλαδή είναι:

$$80^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ, \text{ οπότε } \hat{\Gamma} = 30^\circ. \text{ Άρα:}$$

$$\alpha) \eta\mu(A + B) = \eta\mu(80^\circ + 70^\circ) = \eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \eta\mu\Gamma.$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu(A + B) = \sigma\upsilon\nu(80^\circ + 70^\circ) = \sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ$

☐

β) $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$

☐

γ) $\epsilon\phi 100^\circ = \epsilon\phi 80^\circ$

☐

δ) $\epsilon\phi 75^\circ = -\epsilon\phi 105^\circ$

☐

ε) $\sigma\upsilon\nu 110^\circ = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$

☐

στ) $\eta\mu 140^\circ = -\eta\mu 40^\circ$

☐

- 2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\eta\mu x = \eta\mu 60^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$

γ) Αν $\epsilon\phi x = -\epsilon\phi 30^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$

- 3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

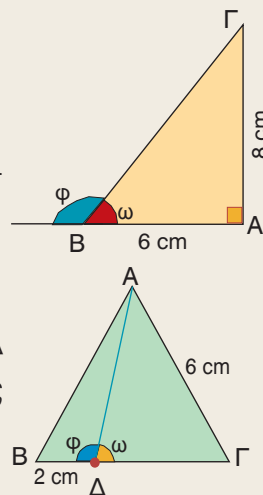
Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 140^\circ$	1. $\eta\mu 40^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 140^\circ$	2. $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
γ. $\epsilon\phi 140^\circ$	3. $\epsilon\phi 40^\circ$
	4. $-\eta\mu 40^\circ$
	5. $-\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
	6. $-\epsilon\phi 40^\circ$

α	β	γ



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) 120° β) 135° γ) 150°
- Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ = 0$
β) $\epsilon\phi 122^\circ - \epsilon\phi 58^\circ \cdot \epsilon\phi 135^\circ = 0$
- Να αποδείξετε ότι:
α) $\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = 1$ β) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = 2$
- Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(140^\circ + x) = \eta\mu(40^\circ - x)$ και $\sigma\upsilon\nu(158^\circ - x) = -\sigma\upsilon\nu(22^\circ + x)$.
- Να βρείτε τη γωνία x , όταν:
α) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $\eta\mu x = 1 - \eta\mu x$ γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
δ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ ε) $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ στ) $2\epsilon\phi x = 1 + \epsilon\phi x$
- Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών του;
- Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A - \eta\mu \Gamma + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 0$ β) $\epsilon\phi A + \epsilon\phi \Gamma = 0$
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και ϕ .
- Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και ϕ .



2.3

Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας



4 Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και μαθαίνω πώς αποδεικνύονται.

4 Χρησιμοποιώ τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για την απόδειξη άλλων απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε ένα σημείο M στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο με όποιες συντεταγμένες θέλετε.

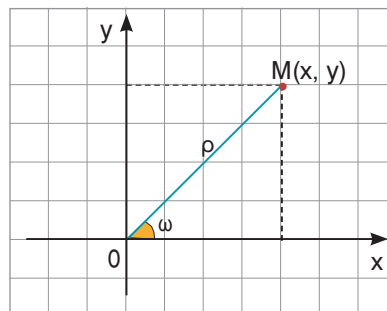
1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \angle x\hat{O}M$.
2. Να υπολογίσετε την παράσταση $(\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τα αποτελέσματα που βρήκαν οι συμμαθητές σας.
3. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και να τον συγκρίνετε με την εφω.

Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση ρ ενός σημείου M(x, y) από την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το ρ^2 , τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \quad (1).$$



Επειδή $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, η ισότητα (1) γίνεται

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 = 1 \text{ ή συντομότερα } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\omega$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ ισχύει

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**, γιατί με τη βοήθειά τους αποδεικνύουμε και άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Λύση

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{4}{5}.$$

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

$$\text{Από την ταυτότητα } \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ έχουμε } \epsilon\phi\omega = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}, \text{ οπότε } \epsilon\phi\omega = -\frac{3}{4}.$$

- 2 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega = 2$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Λύση

Έχουμε $\epsilon\phi\omega = 2$ δηλαδή $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = 2$, οπότε $\eta\mu\omega = 2\sigma\upsilon\nu\omega$ (1).

Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ αντικαταστήσουμε το $\eta\mu\omega$ με το $2\sigma\upsilon\nu\omega$ έχουμε

$$(2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad \text{ή} \quad 4\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad \text{ή} \quad 5\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{5},$$

$$\text{άρα } \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Επειδή η γωνία ω είναι οξεία έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\text{Από την ισότητα (1) έχουμε } \eta\mu\omega = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\omega = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

- 3 Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 1$

β) $1 + \epsilon\phi^2\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$

Λύση

α) Έχουμε

$$(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

β) Έχουμε

$$1 + \epsilon\phi^2\omega = 1 + \left(\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^2 = 1 + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
 - α) Αν $\eta\mu^2\omega = \frac{3}{5}$, τότε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{2}{5}$. ☐
 - β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$, τότε δεν ορίζεται η εφω. ☐
 - γ) Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$. ☐
 - δ) Αν $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$, τότε $\epsilon\phi\omega = \frac{5}{12}$ ☐
- 2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- 3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
 - α) Αν $\eta\mu\omega = 1$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$
 - β) Αν $\eta\mu\omega = 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$
- 4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ είναι ίσο με:
 - α) $\frac{2}{5}$
 - β) $\frac{4}{5}$
 - γ) $\frac{2}{5}$ ή $-\frac{2}{5}$
 - δ) $\frac{4}{5}$ ή $-\frac{4}{5}$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

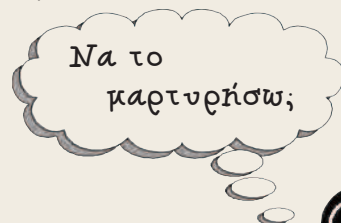
- 1 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 2 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 3 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 4 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{1}{3}\eta\mu\omega + \frac{2}{3}\sigma\upsilon\nu\omega - \frac{1}{10}\epsilon\phi\omega.$$

- 5 Να αποδείξετε ότι:
 α) $\eta\mu^3\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega = \eta\mu\omega$ β) $\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = \eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$
- 6 Αν είναι $x = 3\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = 3\eta\mu\omega$, τότε να αποδείξετε ότι:
 α) $x\sigma\upsilon\nu\omega + y\eta\mu\omega = 3$ β) $x^2 + y^2 = 9$
- 7 Να αποδείξετε ότι:
 α) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ β) $\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$
- 8 Να αποδείξετε ότι:
 α) $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2$
 β) $(\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega - \alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2$
- 9 Να αποδείξετε ότι:
 α) $\sigma\upsilon\nu^2x \epsilon\phi^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$ β) $\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \epsilon\phi x} = \sigma\upsilon\nu x$
- 10 Να αποδείξετε ότι:
 α) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$ β) $\epsilon\phi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$
- 11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
 α) $\eta\mu 50^\circ \eta\mu 130^\circ - \sigma\upsilon\nu 50^\circ \sigma\upsilon\nu 130^\circ$
 β) $\eta\mu^2 14^\circ + \eta\mu^2 114^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 166^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 66^\circ$
- 12 Να αποδείξετε ότι:
 α) $\epsilon\phi 70^\circ \sigma\upsilon\nu 70^\circ - \epsilon\phi 110^\circ \sigma\upsilon\nu 110^\circ = 0$
 β) $\epsilon\phi^2 40^\circ \sigma\upsilon\nu^2 40^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 140^\circ = 1$
- 13 Αν είναι $\alpha = 30^\circ$ και $\beta = 60^\circ$, τότε να αποδείξετε ότι:
 $\eta\mu^2\alpha \eta\mu\alpha \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΙΝΙΓΜΑ

- 14 Είναι γωνία, όχι οξεία,
 ημίτονο έχει τον αριθμό $\frac{\lambda + 1}{\lambda + 3}$ και
 συνημίτονο έχει τον αριθμό $\frac{-2\lambda\sqrt{3}}{\lambda + 3}$.
 Ποια γωνία είναι;



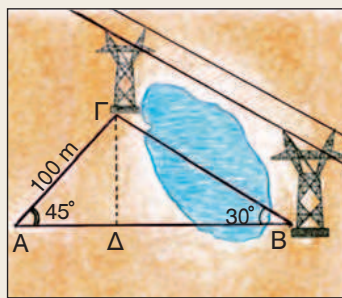


4 Γνωρίζω τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και μαθαίνω να τους εφαρμόζω στη λύση προβλημάτων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση ΓΒ δύο πυλώνων της ΔΕΗ, γιατί ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μια λίμνη. Γι' αυτό επιλέγει μια θέση Α που απέχει 100 m από τον πυλώνα Γ και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο μετράει τις γωνίες $\hat{A} = 45^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.



- Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση ΓΒ, αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση ΓΒ πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι λόγοι $\frac{\Gamma\text{B}}{\eta\mu 45^\circ}$ και $\frac{\Gamma\text{A}}{\eta\mu 30^\circ}$ είναι ίσοι.
- Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

A Νόμος των ημιτόνων

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του ή μια πλευρά και μια οξεία γωνία του. Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου όταν δεν είναι ορθογώνιο;

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \beta\eta\mu A \quad (1)$$

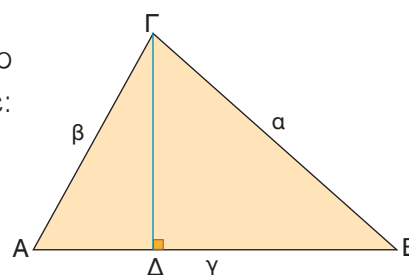
$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \alpha\eta\mu B \quad (2)$$

$$\text{Από τις ισότητες (1), (2) έχουμε} \quad \beta\eta\mu A = \alpha\eta\mu B \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}.$$

$$\text{Ομοίως αποδεικνύεται ότι} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$



Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των ημιτόνων**.

Γενικά

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

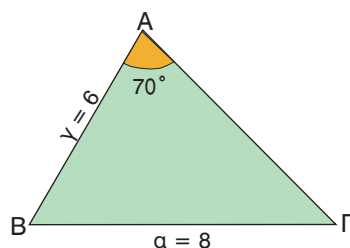
Με τον νόμο των ημιτόνων, αν γνωρίζουμε μια πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μια άλλη πλευρά ή γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του (πλευρές – γωνίες).

Για παράδειγμα, στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος μπορούμε με τον νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$, αφού

$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{8}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{6}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{ή} \quad 8\eta\mu \Gamma = 6\eta\mu 70^\circ \quad \text{ή}$$

$$\eta\mu \Gamma = \frac{6\eta\mu 70^\circ}{8} \quad \text{ή} \quad \eta\mu \Gamma = \frac{6 \cdot 0,94}{8} \quad \text{ή} \quad \eta\mu \Gamma = 0,705.$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.



B Νόμος των συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε με τον νόμο των ημιτόνων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου, αφού δε γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι γωνία της.

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $a^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$ (1).

Επειδή $\Delta B = \gamma - \Delta\Delta$, η ισότητα (1) γράφεται:

$$a^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - \Delta\Delta)^2 \quad \text{ή} \quad a^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + \Delta\Delta^2 - 2\gamma \cdot \Delta\Delta \quad (2).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

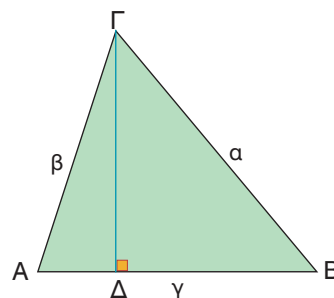
$$\Delta\Gamma^2 + \Delta\Delta^2 = \beta^2 \quad \text{και} \quad \sin A = \frac{\Delta\Delta}{\beta} \quad \text{ή} \quad \Delta\Delta = \beta \sin A.$$

Άρα η ισότητα (2) γράφεται: **$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A$**

Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των συνημιτόνων**.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \gamma^2 + a^2 - 2\gamma a \sin B \\ \gamma^2 &= a^2 + \beta^2 - 2a\beta \sin \Gamma \end{aligned}$$



Με τον νόμο των συνημιτόνων, αν σ' ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του.

Για παράδειγμα, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 9 \text{ cm}$, $\beta = 7 \text{ cm}$ και $\gamma = 6 \text{ cm}$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.

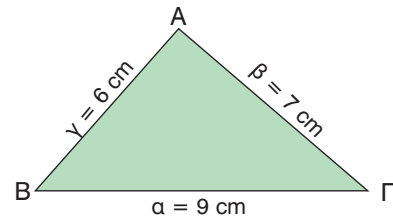
Π.χ. για να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{B}$ έχουμε:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cos B \quad \text{ή}$$

$$7^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos B \quad \text{ή}$$

$$49 = 36 + 81 - 108 \cdot \cos B \quad \text{ή} \quad 108 \cos B = 68 \quad \text{ή}$$

$$\cos B = \frac{68}{108} = 0,629. \text{ Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι } \hat{B} = 51^\circ.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\alpha = 30 \text{ cm}$. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Gamma}$ και η πλευρά β .

Λύση

Από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ έχουμε

$$120^\circ + 45^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \quad \text{ή}$$

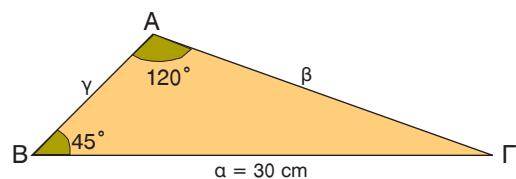
$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - 165^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{\Gamma} = 15^\circ.$$

Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{ή} \quad \frac{30}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} \quad \text{ή} \quad \beta \cdot \eta\mu 120^\circ = 30 \cdot \eta\mu 45^\circ \quad (1).$$

Επειδή $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ η ισότητα (1) γράφεται:

$$\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{30\sqrt{6}}{3} \quad \text{ή} \quad \beta = 10\sqrt{6} \text{ cm}.$$

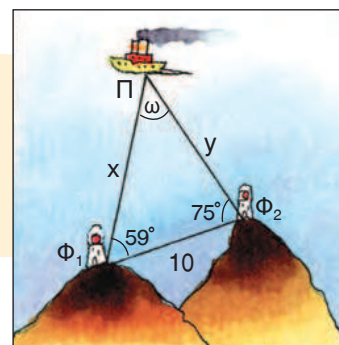


- 2 Δύο φάρoi Φ_1 , Φ_2 απέχουν μεταξύ τους 10 μίλια. Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε μια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις x , y του πλοίου από κάθε φάρο.

Λύση

Στο τρίγωνο $\Pi\Phi_1\Phi_2$ έχουμε $\omega + 59^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, οπότε $\omega = 46^\circ$. Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{10}{\eta\mu 46^\circ} = \frac{x}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{y}{\eta\mu 59^\circ}.$$



Από την ισότητα $\frac{10}{\eta\mu 46^\circ} = \frac{x}{\eta\mu 75^\circ}$ έχουμε $x = \frac{10 \cdot \eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$ ή $x = \frac{10 \cdot 0,966}{0,719} = 13,44$ μίλια.

Από την ισότητα $\frac{10}{\eta\mu 46^\circ} = \frac{y}{\eta\mu 59^\circ}$ έχουμε $y = \frac{10 \cdot \eta\mu 59^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$ ή $y = \frac{10 \cdot 0,857}{0,719} = 11,92$ μίλια.

Επομένως το πλοίο Π απέχει από τον φάρο Φ_1 13,44 μίλια και από τον φάρο Φ_2 11,92 μίλια.

- 3** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $\beta = 4$ cm και $\gamma = 2$ cm. Να υπολογιστεί η πλευρά α και οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.

Λύση

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\text{ή} \quad \alpha^2 = 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = 12.$$

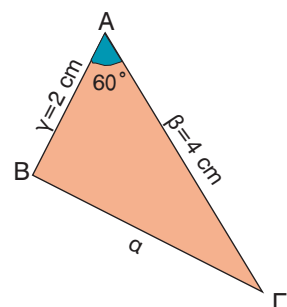
$$\text{Άρα} \quad \alpha = \sqrt{12} \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Ομοίως έχουμε:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cos B \quad \text{ή} \quad 4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos B \quad \text{ή}$$

$$16 = 4 + 12 - 8\sqrt{3} \cdot \cos B \quad \text{ή} \quad 8\sqrt{3} \cdot \cos B = 0 \quad \text{ή} \quad \cos B = 0, \text{ οπότε } \hat{B} = 90^\circ.$$

$$\text{Αφού } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ και } \hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 90^\circ, \text{ έχουμε } \hat{\Gamma} = 30^\circ.$$



- 4** Δύο δυνάμεις $F_1 = 4$ N και $F_2 = 3$ N εφαρμόζονται σ' ένα υλικό σημείο O και σχηματίζουν γωνία $\omega = 60^\circ$. Να υπολογιστεί η συνισταμένη τους F.

Λύση

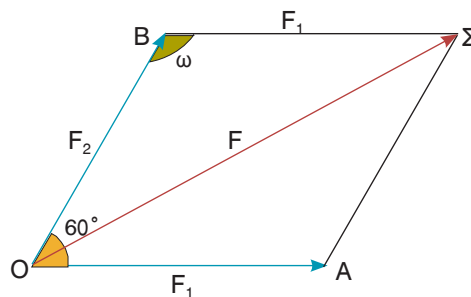
Η συνισταμένη F των δυνάμεων F_1, F_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου OΑΣΒ. Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OBΣ και επειδή $B\Sigma = F_1$, έχουμε:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\omega \quad (1).$$

Οι γωνίες όμως ω και 60° είναι παραπληρωματικές, οπότε $\sin\omega = -\sin 60^\circ$ και ο τύπος (1) γράφεται:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sin 60^\circ \quad \text{ή} \quad F^2 = 4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad F^2 = 37, \text{ οπότε}$$

$$F = \sqrt{37} \text{ N} \quad \text{ή} \quad F = 6,08 \text{ N.}$$





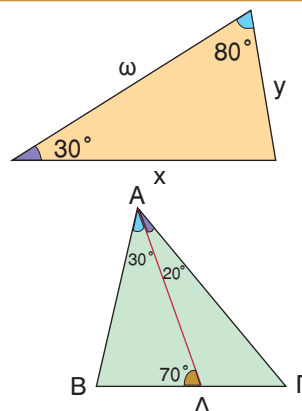
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος $\frac{\omega}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 80^\circ} = \frac{x}{\sin 10^\circ}$

2 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο ΑΒΔ $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle B} = \frac{AD}{\sin \angle A}$

β) στο τρίγωνο ΑΔΓ $\frac{AD}{\sin \angle AGD} = \frac{DG}{\sin \angle G} = \frac{AG}{\sin \angle A}$



3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $a \sin B = b \sin A$. ☐

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{G} = 100^\circ$, τότε $\frac{b}{\sin 100^\circ} = \frac{y}{\sin 20^\circ}$. ☐

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2b \cos A = b^2 + c^2 - a^2$. ☐

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{G} = 80^\circ$, τότε ισχύει $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos 80^\circ$. ☐

ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{G} = 60^\circ$, τότε ισχύει $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. ☐

4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων:

$$x^2 = \dots\dots\dots y^2 = \dots\dots\dots \omega^2 = \dots\dots\dots$$

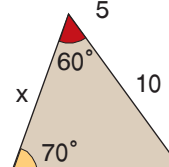
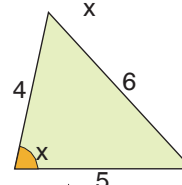
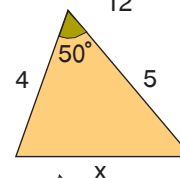
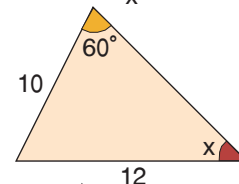
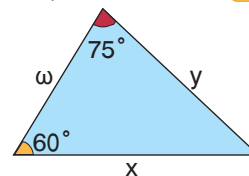
5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

α) Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των $\sin$ από την ισότητα $\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sin x}$

β) Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των $\cos$ από την ισότητα $4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 50^\circ = x^2$

γ) Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των $\sin$ από την ισότητα $\frac{4}{\sin x} = \frac{6}{\sin 50^\circ}$

δ) Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των $\cos$ από την ισότητα $x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 70^\circ$

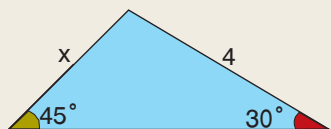




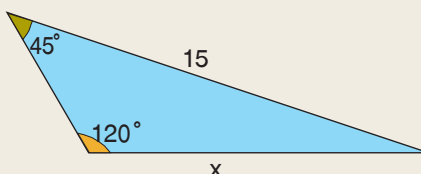
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

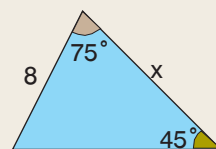
α)



β)

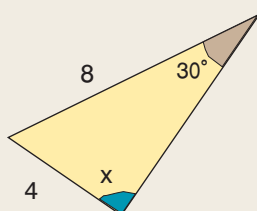


γ)

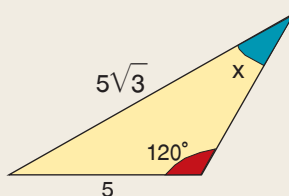


2 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

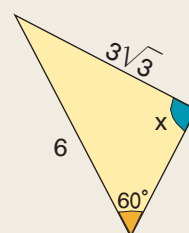
α)



β)



γ)

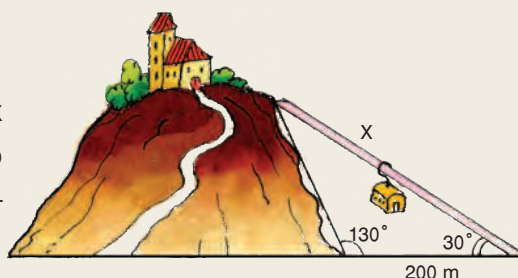


3 Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν:

α) $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\hat{B} = 30^\circ$ β) $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

4 Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 30^\circ$, $\beta = 10$, $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5 Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής x του εναέριου σιδηροδρόμου στο διπλανό σχήμα. (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



6 Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή του των Μαθηματικών είπε:

– Κύριε, σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $\hat{B} = 60^\circ$ και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του.

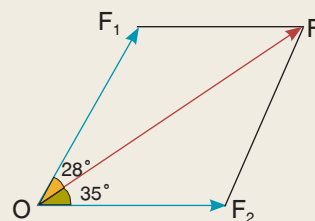
Πώς λύνεται;

Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση του είπε:

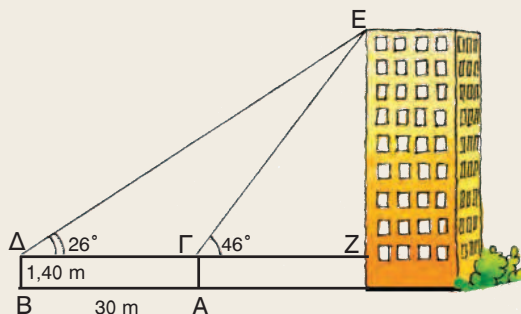
– Κάποιο λάθος έχεις κάνει, γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής;

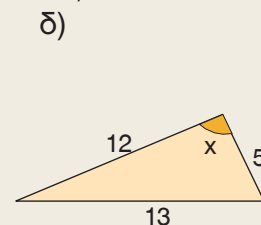
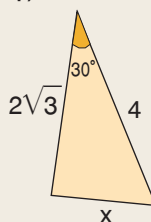
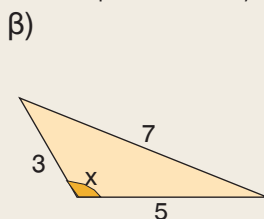
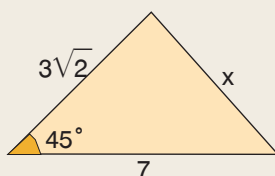
7 Οι δυνάμεις F_1 , F_2 έχουν συνισταμένη $F = 10$ N που σχηματίζει με την F_1 γωνία 28° και με την F_2 γωνία 35° . Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1 , F_2 . (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



- 8 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός ψηλού κτιρίου τοποθέτησε το γωνιόμετρό του στο σημείο Α και βρήκε τη γωνία $\widehat{E\Gamma Z} = 46^\circ$. Στη συνέχεια μετακινήθηκε κατά 30 m, τοποθέτησε το γωνιόμετρο στη θέση Β και βρήκε τη γωνία $\widehat{E\Delta\Gamma} = 26^\circ$. Ποιο ήταν το ύψος του κτιρίου, αν το γωνιόμετρο έχει ύψος 1,4 m.
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

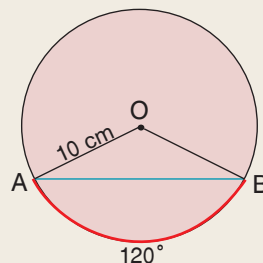


- 9 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:



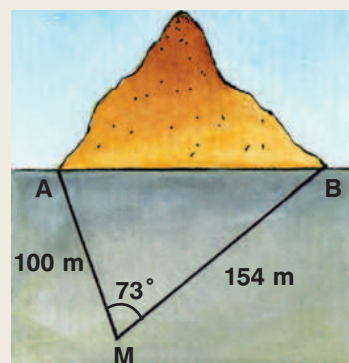
- 10 Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, αν $\widehat{A} = 120^\circ$ και $a = 3\sqrt{3}$.

- 11 Σε κύκλο με ακτίνα $R = 10$ cm, η χορδή AB αντιστοιχεί σε τόξο 120° . Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής.

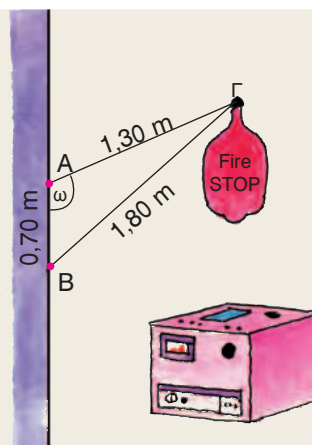


- 12 Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με $AB=4$, $B\Gamma=3$ και $\widehat{A} = 120^\circ$.

- 13 Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει μια προσφορά για την κατασκευή μιας σήραγγας AB . Ένας μηχανικός της εταιρείας με τους συνεργάτες του έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση M που η απόστασή του από το A ήταν 100 m και από το B ήταν 154 m. Αφού μέτρησε τη γωνία $\widehat{AMB} = 73^\circ$, ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας. Είχε δίκιο ή άδικο; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



- 14 Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα ενός καλοριφέρ. Ένας τεχνικός θέλει να κατασκευάσει τη βάση στήριξής του και διαθέτει τρεις μεταλλικές βέργες $AB = 0,70 \text{ m}$, $AG = 1,30 \text{ m}$ και $BG = 1,80 \text{ m}$. Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις βέργες AB , AG , όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω . Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε, ώστε να βοηθήσετε τον τεχνικό; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

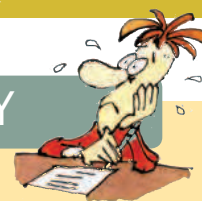


ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

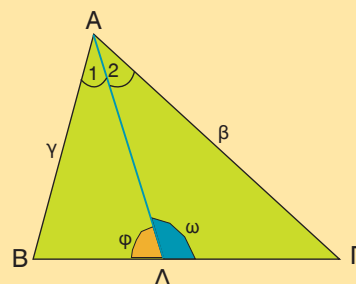
ΘΕΜΑ: Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων.

Υπολογισμός του ύψους ενός ψηλού κτιρίου, ενός βουνού, της απόστασης δύο υφάλων, δύο φάρων κ.τ.λ.

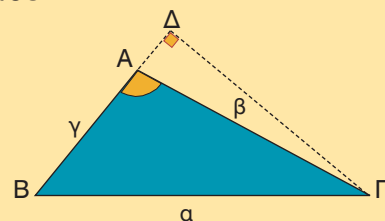
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



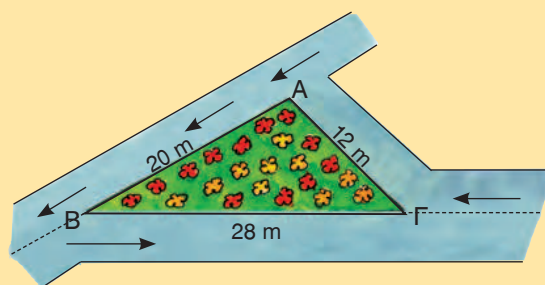
- 1 Να αποδείξετε ότι:
α) $(1 - \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = 2(1 - \eta\mu\chi)(1 + \sigma\upsilon\nu\chi)$ β) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$
- 2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy δίνεται το σημείο $A(4, 0)$ και το σημείο M που έχει τετμημένη -5 , τεταγμένη θετική και η απόστασή του από το O είναι 13. Αν ω είναι η γωνία $\widehat{AOM}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την απόσταση AM .
- 3 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 30 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 45^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 75^\circ$. Να χαράξετε τη διχοτόμο AD του τριγώνου $AB\Gamma$, να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο $AD\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου AD .
- 4 Αν AD διχοτόμος τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
α) $\frac{\gamma}{B\Delta} = \frac{\eta\mu\phi}{\eta\mu A_1}$ β) $\frac{\beta}{\Gamma\Delta} = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu A_2}$ γ) $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$



- 5 α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu A$.



- β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ και το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



- 6 α) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta \mu^2 A = \eta \mu^2 B + \eta \mu^2 \Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
β) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta \mu(B + \Gamma) + \sigma \nu \nu(B - \Gamma) = 2$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

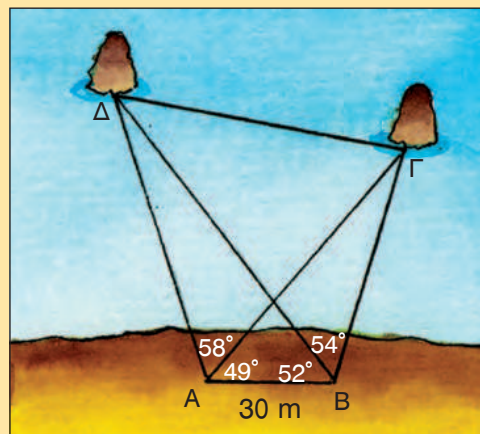
- 7 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha(\eta \mu B - \eta \mu \Gamma) + \beta(\eta \mu \Gamma - \eta \mu A) + \gamma(\eta \mu A - \eta \mu B) = 0$ β) $\alpha = \beta \sigma \nu \nu \Gamma + \gamma \sigma \nu \nu B$

γ) $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha(\beta \sigma \nu \nu \Gamma - \gamma \sigma \nu \nu B)$ δ) $\frac{\sigma \nu \nu A}{\alpha} + \frac{\sigma \nu \nu B}{\beta} + \frac{\sigma \nu \nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

- 8 Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και $\sigma \nu \nu \Gamma = \frac{3}{4}$.

- 9 Δύο φίλοι τοποθέτησαν τα γωνιόμετρά τους στις θέσεις Α, Β μιας ακτής και παρατήρησαν δύο βράχους που προεξείχαν από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν η απόσταση ΑΒ ήταν 30 m και τα αποτελέσματα των μετρήσεων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα, τότε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο βράχων. (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



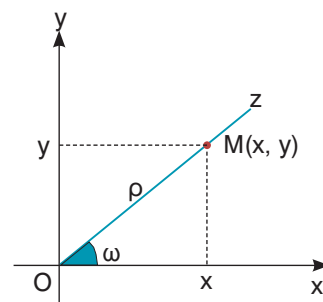
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy , αν είναι $\omega = \widehat{xOz}$, και $M(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της πλευράς Oz , διαφορετικό από το O , τότε:

$$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \text{ συν}\omega = \frac{x}{\rho}, \text{ εφ}\omega = \frac{y}{x}.$$

Π.χ. αν $M(1, 2)$, τότε $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$\eta\mu\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \text{συν}\omega = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \text{εφ}\omega = \frac{2}{1} = 2.$$



- Τα πρόσσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα:

ω	0°	90°	180°
$\eta\mu\omega$	+	+	
$\text{συν}\omega$	+	-	
$\text{εφ}\omega$	+	-	

- Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \quad \text{συν}(180^\circ - \omega) = -\text{συν}\omega \quad \text{εφ}(180^\circ - \omega) = -\text{εφ}\omega$$

$$\text{Π.χ. } \eta\mu 160^\circ = \eta\mu 20^\circ \quad \text{συν} 160^\circ = -\text{συν} 20^\circ \quad \text{εφ} 160^\circ = -\text{εφ} 20^\circ$$

- Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:

$$\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1 \quad (\text{ισχύει για οποιαδήποτε γωνία } \omega).$$

$$\text{εφ}\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\text{συν}\omega} \quad (\text{ισχύει για οποιαδήποτε γωνία } \omega \text{ με } \text{συν}\omega \neq 0)$$

$$\text{Π.χ. } \eta\mu^2 35^\circ + \text{συν}^2 35^\circ = 1, \quad \text{εφ} 35^\circ = \frac{\eta\mu 35^\circ}{\text{συν} 35^\circ}$$

- Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν

$$\text{– Νόμος των ημιτόνων: } \frac{a}{\eta\mu A} = \frac{b}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

$$\begin{aligned} \text{– Νόμος των συνημιτόνων: } a^2 &= b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \text{ συν} A \\ b^2 &= \gamma^2 + a^2 - 2\gamma a \text{ συν} B \\ \gamma^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \text{ συν} \Gamma \end{aligned}$$