Κανόνες παραγωγίσεως.
Κανόνας παραγωγίσεως αθροίσματος.

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$ ισχύει ότι

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x).$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι για πεπερασμένο πλήθος προσθετέων ισχύει ότι

$$[f_1(x)+f_2(x)+...+f_k(x)]' = f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_k'(x).$$

Παρατήρηση. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0, είναι πιθανό η συνάρτηση $f+g$ να είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0.

Πράγματι οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση $x_0 = 0$, ενώ η συνάρτηση $h(x) = f(x)+g(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 0$.

- $\left(x^4+5x^2+3\right)' = \left(x^4\right)' + \left(5x^2\right)' + (3)' = 4x^3+10x+0 = 4x^3+10x = 2x\left(2x^2+5\right)$.
- $\left(1+sinx\right)' = 1' + \left(sinx\right)' = 0+cosx = cosx$.
- $\left(x^3+cosx\right)' = \left(x^3\right)' + \left(cosx\right)' = 3x^2 - sinx$.
- $\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+1\right)' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' + \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 1' = \frac{1}{5}\left(x^5\right)' + \frac{1}{3}\left(x^3\right)' + 1' = x^4+x^2$.

Κανόνας παραγωγίσεως διαφοράς.

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$ ισχύει ότι

$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x).$$

Παρατήρηση. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0, είναι πιθανό η συναρτήσεις $f-g$ και $g-f$ να είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0.

Κανόνας παραγωγίσεως γινομένου.

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$ ισχύει ότι

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Γενικεύοντας, ισχύει ότι

$$[(fgh)(x)]' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$

Παρατήρηση. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0, είναι πιθανό η συνάρτηση fg να είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0.

Πράγματι οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση $x_0=0$, ενώ η συνάρτηση $h(x)=f(x)\cdot g(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=0$.

Ειδική περίπτωση. Αν $c\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ισχύει ότι $(cf)'(x)=cf'(x)$.

- $\left[x^2\cdot sinx\right]'=\left(x^2\right)'sinx+x^2\left(sinx\right)'=2xsinx+x^2cosx$.
- $\left(e^x\cdot lnx\right)'=\left(e^x\right)'lnx+e^x\left(lnx\right)'=e^x\cdot lnx+\frac{e^x}{x}=e^x\left(lnx+\frac{1}{x}\right)$.
- $\left(x^2\cdot e^x\cdot lnx\right)'=\left(x^2\right)'e^xlnx+x^2\left(e^x\right)'lnx+x^2e^x\left(lnx\right)'=2xe^xlnx+x^2e^xlnx+xe^x=$

  $xe^x\left(2lnx+xlnx+1\right)$.
- $\left(e^xcosx\right)'=\left(e^x\right)'cosx+e^x\left(cosx\right)'=e^xcosx-e^xsinx=e^x\left(cosx-sinx\right)$.
- $\left(2xsinx-\left(x^2-2\right)cosx\right)'=\left(2xsinx\right)'-\left[\left(x^2-2\right)cosx\right]'=$

  $$2\left(xsinx\right)'-\left[\left(x^2-2\right)'cosx+\left(x^2-2\right)\left(cosx\right)'\right]=$$

  $$2\left(x'sinx+xcosx\right)-\left[2xcosx+\left(x^2-2\right)\left(-sinx\right)\right]=$$

  $$2\left(sinx+xcosx\right)-2xcosx+x^2sinx-2sinx=x^2sinx$$
- $\left(x^3\cdot\log x-\frac{1}{3}x^3\right)'=\left(x^3\cdot\log x\right)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\left(x^3\right)'\log x+x^3\left(\log x\right)'-\frac{1}{3}\left(x^3\right)'=$

  $3x^2\log x+x^3\left(\frac{lnx}{ln10}\right)'-x^2=3x^2\log x+x^3\frac{1}{xln10}-x^2=3x^2\log x+\frac{x^2}{ln10}-x^2=$

  $x^2\left(3\log x+\frac{1}{ln10}-1\right)$.

Παράγωγος πηλίκου.

Για κάθε $x\in D(f)\cap D(g)$ για το οποίο υπάρχουν οι $f'(x),g'(x)$ και $g(x)\neq 0$ ισχύει ότι $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

- $\left(tanx\right)'=\left(\frac{sinx}{cosx}\right)'=\frac{\left(sinx\right)'cosx-sinx\left(cosx\right)'}{cos^2x}=\frac{cosx\cdot cosx+sinx\cdot sinx}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$.
- $\left(\sigma\phi x\right)'=\left(\frac{cosx}{sinx}\right)'=\frac{\left(cosx\right)'sinx-cosx\left(sinx\right)'}{sin^2x}=\frac{-sinx\cdot sinx-cosx\cdot cosx}{sin^2x}=\frac{-1}{sin^2x}$.

- $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1'x - 1x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$. • $\left(\frac{5}{x}\right)' = \frac{5'x - 5x'}{x^2} = \frac{-5}{x^2}$.
- $(logx)' = \left(\frac{lnx}{ln10}\right)' = \frac{(lnx)' ln10 - lnx(ln10)'}{ln^2 10} = \frac{\frac{1}{x}ln10 - 0}{ln^2 10} = \frac{1}{x \cdot ln10}$.
- $\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x)' x^2 - e^x (x^2)'}{x^4} = \frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} = \frac{e^x x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$.
- $\left(\frac{e^x}{2^x}\right)' = \frac{(e^x)' 2^x - e^x (2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{e^x 2^x - e^x 2^x ln2}{(2^x)^2} = \frac{e^x - e^x ln2}{2^x} = \frac{e^x(1-ln2)}{2^x}$.
- $\left(\frac{sinx}{x} + \frac{x}{sinx}\right)' = \frac{x \cdot cosx - sinx}{x^2} + \frac{sinx - x \cdot cosx}{sin^2 x}$.

Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων.

- $\left[sine^x\right]' = (e^x)' cose^x = e^x cose^x$.
- $\left[(x^2+1)^5\right]' = 5(x^2+1)^4 (x^2+1)' = 10x(x^2+1)^4$.
- $\left[cos(3x+2)\right]' = -sin(3x+2) \cdot (3x+2)' = -3sin(3x+2)$.
- $\left[cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right]' = -sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \left(\frac{3x}{2}\right)' = -\frac{3}{2} sin\left(\frac{3x}{2}\right)$.
- $\left[sin(3x)\right]' = (3x)' cos(3x) = 3cos(3x)$.
- $\left[sin(x^2+1)\right]' = (x^2+1)' cos(x^2+1) = 2x \cdot cos(x^2+1)$.
- $\left[sin(cosx)\right]' = cos(cosx) \cdot (cosx)' = -sinx \cdot cos(cosx)$.
- $\left[(x^2+1)^3\right]' = 3(x^2+1)^2 (x^2+1)' = 6x(x^2+1)^2$.
- $\left[e^{x^2}\right]' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}$.
- $\left[log(x^2+1)\right]' = \left[\frac{ln(x^2+1)}{ln10}\right]' = \frac{1}{ln10}\left[ln(x^2+1)\right]' = \frac{1}{ln10} \cdot \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} = \frac{2x}{(x^2+1) \cdot ln10}$.
- $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $\left[cos^2(3x) + sin^2(2x)\right]' = \left[cos^2(3x)\right]' + \left[sin^2(2x)\right]' =$

$$2cos(3x)\left[cos(3x)\right]' + 2sin(2x)\left[sin(2x)\right]' =$$

$$-2cos(3x) \cdot sin(3x) \cdot (3x)' + 2sin(2x) \cdot cos(2x) \cdot (2x)' =$$

$$-6cos(3x)\cdot sin(3x)+4sin(2x)\cdot cos(2x).$$

•

$$\left[sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right]'=2sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right]'=2sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)'=$$

$$6sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right).$$

• Αν $f(x)=\left(x^2+1\right)^x$, να υπολογισθεί η $f'(x)$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και $x^2+1=e^{ln\left(x^2+1\right)}\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^x=\left[e^{ln\left(x^2+1\right)}\right]^x\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^x=e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}$.

Είναι $f(x)=\left(x^2+1\right)^x=e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}$. Άρα $f'(x)=\left[e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}\right]'=e^{x\cdot ln\left(x^2+1\right)}\left[x\cdot ln\left(x^2+1\right)\right]'=$

$$\left(x^2+1\right)^x\left[x'\cdot ln\left(x^2+1\right)+x\cdot ln'\left(x^2+1\right)\right]=\left(x^2+1\right)^x\left[ln\left(x^2+1\right)+x\cdot\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}\right]=$$

$$\left(x^2+1\right)^x\left[ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right].$$

• Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Δείξτε ότι:

- Αν f άρτια, τότε η f' είναι περιττή.
- Αν f περιττή, τότε η f' είναι άρτια.
- Αν f περιοδική, τότε η f' είναι περιοδική, ίδιας περιόδου.

Απόδειξη.

➢ $f\ \alpha\rho\tau\iota\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}1.\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\\ 2.\ f(x)=f(-x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)=f(-x)\Leftrightarrow f'(x)=\left[f(-x)\right]'=f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(-x)$ (3)

Από (1), (3) έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι περιττή.

➢ $f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\eta\Leftrightarrow\begin{cases}1.\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\\ 2.\ f(x)=-f(-x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)=-f(-x)\Leftrightarrow f'(x)=\left[-f(-x)\right]'=-f'(-x)\cdot(-x)'=f'(-x)$ (3)

Από (1), (3) έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι άρτια.

➢ $f\ \pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa\eta\ \pi\varepsilon\rho\iota o\delta o\upsilon\ \mathrm{T}\Leftrightarrow\begin{cases}1.\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+\mathrm{T}\in\mathbb{R}\\ 2.\ f(x)=f\left(x+\mathrm{T}\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$f(x)=f\left(x+\mathrm{T}\right)\Leftrightarrow f'(x)=\left[f\left(x+\mathrm{T}\right)\right]'=f'\left(x+\mathrm{T}\right)\cdot\left(x+\mathrm{T}\right)'=f'\left(x+\mathrm{T}\right)$ (3)

Από (1), (3) έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι περιοδική περιόδου T.

Εφαρμογή.

Ισχύει ότι $x=e^{lnx}$ διότι $lnx=ln\left(e^{lnx}\right)=lnx\cdot lne=lnx\cdot 1=lnx$

- Είναι $x^x=\left(e^{lnx}\right)^x=e^{x\cdot lnx}$

Άρα, $\left(x^x\right)'=\left(e^{x\cdot lnx}\right)'=e^{x\cdot lnx}\left(x\cdot lnx\right)'=x^x\left(1\cdot lnx+x\frac{1}{x}\right)=x^x\left(1+lnx\right)$

- Είναι $5^{sinx}=e^{ln5^{sinx}}=e^{sinx\cdot ln5}$

Άρα, $\left(5^{sinx}\right)'=\left(e^{sinx\cdot ln5}\right)'=e^{sinx\cdot ln5}\left(sinx\cdot ln5\right)'=5^{sinx}\cdot cosx\cdot ln5$

- Είναι $\left(lnx\right)^x=e^{ln\left(lnx\right)^x}=e^{x\cdot ln\left(lnx\right)}$

Άρα, $\left[\left(lnx\right)^x\right]'=\left[e^{x\cdot ln\left(lnx\right)}\right]'=e^{x\cdot ln\left(lnx\right)}\left[x\cdot ln\left(lnx\right)\right]'=$

$$\left(lnx\right)^x\left[ln\left(lnx\right)+x\frac{1}{lnx}\frac{1}{x}\right]=\left(lnx\right)^x\left[ln\left(lnx\right)+\frac{1}{lnx}\right]$$

- Είναι $\left(x^2+1\right)^{x^2}=e^{ln\left(x^2+1\right)^{x^2}}=e^{x^2ln\left(x^2+1\right)}$

Άρα, $\left[\left(x^2+1\right)^{x^2}\right]'=\left[e^{x^2ln\left(x^2+1\right)}\right]'=e^{x^2ln\left(x^2+1\right)}\left[x^2ln\left(x^2+1\right)\right]'=$

$$\left(x^2+1\right)^{x^2}\left[2xln\left(x^2+1\right)+\frac{x^2 2x}{x^2+1}\right]=\left(x^2+1\right)^{x^2}2x\left[ln\left(x^2+1\right)+\frac{x^2}{x^2+1}\right]$$

- Είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Άρα, $\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]'=\left[e^{x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]'=e^{x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'=$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'\right]=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}\right]$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right].$$

Άλυτες ασκήσεις παραγώγων.

1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και μελετήστε ως προς τα ακρότατα, τις συναρτήσεις:

(α) $f(x)=3x-2$ (β) $f(x)=2x^2-3x+5$ (γ) $f(x)=3x-4x^2$

(δ) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ (ε) $f(x)=\frac{x+3}{2x-1}$ (στ) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

(ζ) $f(x)=-x^2+2x-1$ (η) $f(x)=-x^4+4x^2-3$ (θ) $f(x)=x-\ln x$

(ι) $f(x)=x\cdot\ln x$ (ια) $f(x)=3-x-x^2-x^3$ (ιβ) $f(x)=x^3-3x+2$

(ιγ) $f(x)=e^x-x+1$ (ιδ) $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ (ιε) $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

2. Βρείτε τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=3x^4-4x^3+1$ (β) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ (γ) $f(x)=x\cdot\ln x-1$

(δ) $f(x)=2x-x^3$ (ε) $f(x)=3x^2-2x^3+1$ (στ) $f(x)=x^3-9x^2+24x+2$

3. Έστω οι συναρτήσεις $f, f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $g, g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Δείξτε ότι $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=f(x)$.

4. Αν $y=a\cdot\cos(kx)+b\cdot\sin(kx)$ δείξτε ότι: $y''+k^2y=0$.

5. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\cos x-\sin x$. Υπολογίστε τη συνάρτηση $f^{(2000)}(x)$.

6. Έστω άρτια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f' είναι περιττή.

7. Παραγωγίστε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases},\qquad g(x)=|x+5|=\begin{cases}x+5, & x\geq -5\\ -x-5, & x<-5\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ x^2+2, & x\leq 0\end{cases},\qquad w(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\\ -x^2+2, & x\in(0,1)\end{cases}$$

8. Με τη βοήθεια του ορισμού βρείτε τον παράγωγο αριθμό της συναρτήσεως f, στη θέση x_0. (α) $f, f(x)=\sin x$, $x_0=0$ (β) $f, f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$

(γ) $f, f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x_0=2$ (δ) $f, f(x)=x^2-x-2$, $x_0=-1$ & $x_0=5$.

9. Παραγωγίστε τις συναρτήσεις:

(α) $f(x)=\sin\left(x^2+1\right)$ (β) $f(x)=\sin(3x)$ (γ) $f(x)=\sin\left(e^x\right)$

(δ) $f(x)=\cos(3x+2)$ (ε) $f(x)=\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ (στ) $f(x)=\cos\left(x^3\right)$

(ζ) $f(x)=\sin(\cos x)$ (η) $f(x)=\left(x^2+1\right)^3$ (θ) $f(x)=e^{x^2}$

(ι) $f(x)=\log\left(x^2+1\right)$ (ια) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ (ιβ) $f(x)=\tan(5x)$

(ιγ) $f(x)=\text{cotan}\left(x^2\right)$ (ιδ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (ιε) $f(x)=1+\sin x$

(ιστ) $f(x)=x^3+\cos x$ (ιζ) $f(x)=x^2\cdot\sin x$ (ιη) $f(x)=x^2\cdot\ln x\cdot e^x$

(ιθ) $f(x)=x^2\cdot\ln x$ (κ) $f(x)=e^x\cdot\cos x$ (κα) $f(x)=e^x\cdot x^3$

(κβ) $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$ (κγ) $f(x)=\tan x-\text{cotan}\, x$ (κδ) $f(x)=x^4+5x^2+3$

(κε) $f(x)=2x\sin x-\left(x^2-2\right)\cos x$ (κστ) $f(x)=\frac{e^x}{2^x}$ (κζ) $f(x)=\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2$

(κη) $f(x)=\frac{x^2}{\log x}$ (κθ) $f(x)=x^3\cdot\log x-\frac{1}{3}x^3$ (κι) $f(x)=\tan x$

(λ) $f(x)=\text{cotan}\, x$ (λα) $f(x)=|x-1|+2$ (λβ) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$

(λγ) $f(x)=|\sin x|$ (λδ) $f(x)=(x-1)2^x$ (λε) $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$

(λστ) $f(x)=\frac{1}{\left(x^2-2\right)^2}$ (λζ) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{3x}$ (λη) $f(x)=\frac{\tan x}{x}$

(λθ) $f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$ (λι) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ (λκ) $f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{x}}$

(μ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$ (μα) $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$ (μβ) $f(x)=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{x^2}$

(μγ) $f(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+1$ (μδ) $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos(2x)$ (με) $f(x)=\sin^2\left(x^2+2x\right)$

(μστ) $f(x)=\cos^2\left(3x\right)+\sin^2\left(2x\right)$ (μζ) $f(x)=\left|\cos x\right|$ (μη) $f(x)=\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

(μθ) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ \left(x-2\right)^2, & x>1 \end{cases}$ (μι) $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(μκ) $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Εξίσωση εφαπτομένης σε γραφική παράσταση συναρτήσεως.
Παραδείγματα.

1. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα xx', η εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\ \beta)$ της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{a^2}{x}$.

Λύση. Είναι $f'(x)=-\dfrac{a^2}{x^2}$ και $f'(a)=-\dfrac{a^2}{a^2}=-1$.

Αν $\widehat{\omega}$ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε $tan\widehat{\omega}=f'(a)=-1$. Άρα, $\widehat{\omega}=\dfrac{3\pi}{4}=135^0$.

2. Ποια η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x$ στο σημείο της που έχει τετμημένη $x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

Λύση. Είναι $f'(x)=\dfrac{-1}{sin^2x}+\dfrac{1}{cos^2x}$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-8}{3}$ και $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{6},f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ είναι

$$y-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow y-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{-8}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=2x^2+x+3$ στο σημείο $\mathrm{M}(0,\ 3)$.

Λύση. Είναι $f'(x)=4x+1$ και $f'(0)=4\cdot 0+1=1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως στο σημείο $\mathrm{M}(0,\ 3)$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-3=1x\Leftrightarrow y=x+3$.

4. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+7x-1$ στο σημείο $\mathrm{M}\left(1,\ \dfrac{23}{6}\right)$. Ακολούθως βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα xx'.

Λύση. Είναι $f'(x)=x^2-5x+7$ και $f'(1)=3$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως στο σημείο $\mathrm{M}\left(1,\ \dfrac{23}{6}\right)$ είναι $y-\dfrac{23}{6}=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x+\dfrac{5}{6}$.

Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},\ 0)$ όπου $0=3x_{\mathrm{A}}+\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow -\dfrac{5}{6}=3x_{\mathrm{A}}\Leftrightarrow x_{\mathrm{A}}=-\dfrac{5}{18}$. Άρα, είναι $\mathrm{A}\left(-\dfrac{5}{18},\ 0\right)$.

5. Να προσδιορισθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο $\mathrm{A}(2,\ -10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-12$ και η εφαπτομένη στο σημείο A να έχει συντελεστή διευθύνσεως -3.

Λύση. Αφού το σημείο $\mathrm{A}(2,\ -10)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συναρτήσεως, ισχύει ότι $-10=\alpha\cdot 2^3+\beta\cdot 2^2+9\cdot 2-12 \Leftrightarrow -4=2\alpha+\beta\ \ (1)$.
Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+9$ και $f'(2)=12\alpha+4\beta+9$.
Ισχύει ότι $f'(2)=-3 \Leftrightarrow 12\alpha+4\beta+9=-3 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-3\ \ (2)$.
Από (1), (2) προκύπτει ότι $\alpha=1$, $\beta=-6$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=\sqrt{x+3}+x-3$ στο σημείο της που έχει τετμημένη $x_0=-3$.

Λύση. Είναι $D(f)=[-3,\ +\infty)$, $f(x_0)=f(-3)=-6$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}+1$.
Για τον υπολογισμό του $f'(-3)$, θα γίνει χρήση του ορισμού, οπότε

$$f'(-3)=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+3}+x-3+6}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+3}+(x+3)}{x+3}=$$

$\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+\lim\limits_{x\to -3^+}1=(+\infty)+1=+\infty$. Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως στο σημείο $\mathrm{A}(-3,\ -6)$ είναι $x=-3$.

Επεξήγηση. $x\to -3^+ \Leftrightarrow x>-3 \Leftrightarrow x+3>0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+3}} \xrightarrow[x\to -3^+]{} +\infty$.

7. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=x^2+3x+\beta$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι:
(α) Παράλληλη προς τον άξονα xx'.
(β) Παράλληλη προς την ευθεία $y=2x-3$.
(γ) Παράλληλη προς την ευθεία $y=x$.
Λύση. Είναι $f'(x)=2x+3$ και $f'(x_0)=2x_0+3$.
(α) Έστω $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ το ζητούμενο σημείο. Για να είναι η εφαπτομένη στο σημείο αυτό παράλληλη προς τον άξονα xx', πρέπει $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0+3=0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{-3}{2}$.

Είναι $f(x_0)=f\left(\dfrac{-3}{2}\right)=\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{-3}{2}\right)+\beta=\dfrac{-9}{4}+\beta$.

Συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}\left(\dfrac{-3}{2},\ \dfrac{-9}{4}+\beta\right)$.

(β) Η ευθεία $y=2x-3$ έχει συντελεστή διευθύνσεως 2. Αν $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ το ζητούμενο σημείο, πρέπει $f'(x_0)=2 \Leftrightarrow 2x_0+3=2 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{-1}{2}$.

Είναι $f(x_0)=f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\beta=\dfrac{-5}{4}+\beta$.

Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}\left(\dfrac{-3}{2},\ \dfrac{-9}{4}+\beta\right)$.

(γ) Ομοίως πρέπει $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow 2x_0+3=1 \Leftrightarrow x_0=-1$.
Είναι $f(x_0)=f(-1)=(-1)^2+3(-1)+\beta=-2+\beta$.
Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}(-1,\ -2+\beta)$.

8. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, στα σημεία με τετμημένες $x_1=1$, $x_2=-1$ αντιστοίχως, της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=x^3+3x^2+2x$. Εξετάστε αν οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έχουν και άλλα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f.

9. Να βρεθεί ο $a\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=a^x$ να έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=x$. **Απάντηση** $\left(a=e^{\frac{1}{e}}\right)$.

10. Να βρεθεί ο $a\in\mathbb{R}$ ώστε το διάγραμμα της συναρτήσεως $f(x)=\frac{1}{4}\left(ax-x^3\right)$ να τέμνει τον άξονα xx' υπό γωνία $\widehat{\omega}=45^0$. **Απάντηση** $(a=4)$.

11. Να βρεθούν οι ευθείες της μορφής $y=\alpha x-1$, όπου $a\in\mathbb{R}$ οι οποίες εφάπτονται στη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=x^2$ και να δειχθεί ότι τέμνονται μεταξύ τους σε σημείο του άξονα yy'. **Απάντηση** $\left(y=\pm 2x-1,\ \ (x_0,y_0)=(0,\ -1)\right)$.

Κυρτές συναρτήσεις – σημεία καμπής.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

(**α**) Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), τότε η f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[\alpha,\beta]$.

(**β**) Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β), τότε η f είναι μη κυρτή ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha,\beta]$.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει η ακόλουθη πρόταση:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β).

(**α**) Όταν $\forall x \in (\alpha,\beta)$ είναι $f''(x) > 0$ τότε η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[\alpha,\beta]$.

(**β**) Όταν $\forall x \in (\alpha,\beta)$ είναι $f''(x) < 0$ τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha,\beta]$.

Ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f, όταν

(**α**) Η f είναι συνεχής στη θέση x_0.

(**β**) Υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της f στο $M(x_0, f(x_0))$.

(**γ**) Η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου x_0.

Ειδική περίπτωση. Αν $f'(x_0) = 0$ (το x_0 είναι στάσιμο σημείο της f), λέμε ότι έχομε σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει η πρόταση:

Αν το $M(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παραστάσεως της f, τότε είναι $f''(x_0) = 0$ ή δεν ορίζεται η f'' στο x_0.

Γεωμετρική ερμηνεία.

(**α**) Αν η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα Δ, τότε η γραφική της παράσταση μένει πάνω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

(**β**) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα Δ, τότε η γραφική της παράσταση μένει κάτω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

(**γ**) Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παραστάσεως στο $M(x_0, f(x_0))$ «διαπερνά» τη γραφική παράσταση.

Παραδείγματα.

1. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας – κοιλότητας και τα σημεία καμπής της συναρτήσεως $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$.

Λύση.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $f'(x) = 6x - 6x^2$ και $f''(x) = [f'(x)]' = 6 - 12x = 6(1-2x)$.

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(1-2x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$. Θέση πιθανού σημείου καμπής.

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f		$\cup$		$\cap$	

Συνεπώς, σημείο καμπής είναι το σημείο $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας – κοιλότητας και τα σημεία καμπής της συναρτήσεως $f(x)=x\cdot lnx-1$.

Λύση.

Είναι $D(f)=(0, \ +\infty)$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $f'(x)=1+lnx$ και $f''(x)=\frac{1}{x}$.

$\forall x\in D(f)$ είναι $f''(x)>0$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω. Δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

3. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας – κοιλότητας και τα σημεία καμπής της συναρτήσεως $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

Λύση.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$ και $f''(x)=\frac{2x\left(3+x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$.

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Θέση πιθανού σημείου καμπής.

Η f'' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $\frac{x}{x^2-1}$, δηλαδή με το γινόμενο $x(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f''		$-$	II	$+$	0	$-$	II	$+$	
f		$\cap$	II	$\cup$		$\cap$	II	$\cup$	

Συνεπώς, σημείο καμπής είναι το σημείο $(0, \ 0)$.

4. Να βρεθούν οι $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=\frac{\alpha x}{x^2+\beta}$ να έχει σημείο καμπής το σημείο $\mathrm{M}\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Λύση.

Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως πρέπει να διέρχεται από το σημείο M, άρα ισχύει ότι $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2a=3+\beta \quad (1)$.

Για να παρουσιάζει η συνάρτηση f καμπή στο σημείο M, πρέπει να ισχύει ότι $f''\left(\sqrt{3}\right)=0$ και επιπλέον η συνάρτηση $f''(x)$ να αλλάζει πρόσημο στη θέση $x_0=\sqrt{3}$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{\alpha\beta-\alpha x^2}{\left(x^2+\beta\right)^2}$ και $f''(x)=\dfrac{2x\left(ax^2-3\alpha\beta\right)}{\left(x^2+\beta\right)^3}$.

Είναι $f''\left(\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow 6a\sqrt{3}(1-\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha(1-\beta)=0 \Leftrightarrow \beta=1$.
Αποκλείεται να είναι $\alpha=0$, διότι τότε $f(x)=0$ και η f δεν έχει σημείο καμπής.
Από (1) έπεται ότι $\alpha=2$.

Άρα $f''(x)=\dfrac{4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$. Η f'' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			Σ.κ.		Σ.κ.		Σ.κ.		

5. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=x^4-x^3+\dfrac{3}{2}x^2-1$ σε οποιοδήποτε σημείο της M, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση πλην του M.

Λύση.

Αρκεί να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως μένει, διαρκώς, πάνω ή κάτω από οποιανδήποτε εφαπτομένη της, δηλαδή αρκεί να δειχθεί ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω σε όλο το πεδίο ορισμού της που είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.
Πράγματι $f'(x)=4x^3-3x^2+3x$ και $f''(x)=12x^2-6x+3$.
Είναι $f''(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς. η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω.

6. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω σε ένα διάστημα Δ. Η συνάρτηση g είναι αύξουσα και στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $f(\Delta)$. Δείξτε ότι η gof στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα Δ.

Λύση.

Αρκεί να δειχθεί ότι $(gof)''(x)\geq 0$. Είναι $(gof)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Είναι $(gof)''(x)=g''(f(x))\cdot[f'(x)]^2+g'(f(x))\cdot f''(x)$.

Ισχύει ότι $(gof)''(x)\geq 0$, διότι:

- Η f στρέφει τα κοίλα άνω, άρα $f''(x)\geq 0\ \ \forall x\in\Delta$.
- Η g στρέφει τα κοίλα άνω, άρα $g''(f(x))\geq 0\ \ \forall x\in\Delta$.
- Η g αύξουσα άρα $g'(f(x))\geq 0\ \ \forall x\in\Delta$.

➢ Ισχύει ότι $\left[f'(x)\right]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$.

7. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία σημεία καμπής που είναι συνευθειακά.

Λύση.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$ και $f''(x)=\dfrac{2\left(x^3+3x^2-3x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Η f'' έχει το ίδιο πρόσημο με το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+3x^2-3x-1=(x-1)\left[x-\left(-2-\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right]$$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			Σ.κ.		Σ.κ.		Σ.κ.		

Είναι $f\left(-2-\sqrt{3}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$, $f\left(-2+\sqrt{3}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ και $f(1)=1$.

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\left(-2-\sqrt{3},\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-2+\sqrt{3},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=\dfrac{1}{4}$ και εξίσωση $x-4y+3=0$ την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες του σημείου $(1,\ 1)$.

8. Εύρεση των σημείων καμπής της συναρτήσεως $f(x)=\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}$.

Λύση.

Είναι $f(x)=\left|x^2-1\right|$ και $D(f)=\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)2x}{2\left|x^2-1\right|}=\begin{cases}2x, & x>1 \ \eta \ x<-1\\ -2x, & -1<x<1\end{cases}$, $D(f')=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

Είναι $f''(x)=\begin{cases}2, & x>1 \ \eta \ x<-1\\ -2, & -1<x<1\end{cases}$, $D(f'')=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$.

Η συνάρτηση f'' αλλάζει πρόσημο στα σημεία $x_0=1$ και $x_0=-1$ στα οποία και δεν ορίζεται. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημεία $x_0=1$ και $x_0=-1$. Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f δεν έχει εφαπτομένη στα σημεία αυτά. Άρα η γραφική της παράσταση δεν έχει σημεία καμπής.

9. Εύρεση των σημείων καμπής της συναρτήσεως $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}$.

Λύση.

Είναι $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x>0\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}, & x<0\end{cases}$ και $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}, & x>0\\ \dfrac{2}{9\sqrt[3]{(-x)^5}}, & x<0\end{cases}$.

Είναι $f''(x)<0$ όταν $x>0$. Είναι $f''(x)>0$ όταν $x<0$.
Είναι $f'_\delta(0)=f'_\alpha(0)=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το $f'(0)$.
Η f'' αλλάζει πρόσημο στη θέση $x_0=0$. Η f είναι συνεχής στη θέση $x_0=0$.

Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f έχει εφαπτομένη στο σημείο αυτό. Άρα το $(0,\ f(0))=(0,\ 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f.

10. Εύρεση των σημείων καμπής της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Λύση.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ και $\begin{cases}f''(x)<0, & \forall x\in(-\infty,\ 0)\\ f''(x)>0, & \forall x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$.

Άρα η θέση $x_0=0$ επειδή δεξιά και αριστερά της αλλάζει πρόσημο η f'' «φαίνεται» να είναι σημείο καμπής. Όμως $0\notin D(f)$, άρα δεν υπάρχει σημείο καμπής.

11. Εύρεση των σημείων καμπής της συναρτήσεως $f(x)=3x^4-4x^3+1$.

Λύση.

Είναι $f'(x)=12x^3-12x^2$, $f''(x)=36x\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$.

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=\dfrac{2}{3}$ θέσεις πιθανών σημείων καμπής.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			Σ.κ.		Σ.κ.		

Όταν $x=0\Rightarrow f'(0)=0$, άρα το σημείο $(0, f(0))=(0,\ 1)$ είναι σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

Όταν $x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow f'\left(\dfrac{2}{3}\right)\neq 0$, άρα το σημείο $\left(\dfrac{2}{3},\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής με πλάγια εφαπτομένη.

Ασκήσεις.

Βρείτε τα διαστήματα κοιλότητας – κυρτότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=2x-x^3$, **(β)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$, **(γ)** $f(x)=x\cdot e^x$,

(δ) $f(x)=x\cdot|x|$, **(ε)** $f(x)=x^3-3x^2$, **(στ)** $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$,

(ζ) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, **(η)** $f(x)=x^3\cdot e^{-x^2}$, **(θ)** $f(x)=e^x\cdot \eta\mu x$,

(ι) $f(x)=\ln|\ln x|$, **(ια)** $f(x)=\ln|x^2-1|$, **(ιβ)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

(ιγ) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, **(ιδ)** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, **(ιε)** $f(x)=x^x$,

(ιζ) $f(x)=e^x\cdot\left(7+x^2-5x\right)$ **(ιη)** $f(x)=sin^3x+cos^3x$ **(ιθ)** $f(x)=4x^5-5x^4+2$

(κ) $f(x)=(x-1)^4(3-x)^3$ **(κα)** $f(x)=\dfrac{a}{x}ln\left(\dfrac{a}{x}\right)$, $a>0$

(κβ) $f(x)=\dfrac{2a\sqrt{2ax-x^2}}{x}$, $a>0$ **(κγ)** $f(x)=x^3-9x^2+24x+2$

Απροσδιόριστες μορφές.

1η μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Εμφανίζεται όταν έχομε να υπολογίσομε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$. Τότε, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2η μορφή $(+\infty)-(+\infty)$ ή $(-\infty)-(-\infty)$. Εμφανίζεται όταν έχομε να υπολογίσομε το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ και είναι: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty\\ \text{ή}\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty\end{cases}$. Τότε κάνομε τη διαφορά (των κλασμάτων) κλάσμα και καταλήγομε **πάντα** στη μορφή $\frac{0}{0}$.

3η μορφή $0\cdot(\pm\infty)$ ή $(\pm\infty)\cdot 0$. Εμφανίζεται όταν έχομε να υπολογίσομε το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ με $x_0\in\overline{\Re}=\Re\cup\{+\infty,-\infty\}$ και $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ \text{ή}\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\end{cases}$

Τότε $\begin{cases} f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \text{ μορφή } \dfrac{0}{0}\\ \text{ή}\\ f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \text{ μορφή } \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\end{cases}$

Παρατήρηση. Ποτέ δεν αντιστρέφομε τη συνάρτηση $y=lnx$.

4η μορφή 0^0 ή $(+\infty)^0$ ή $1^{\pm\infty}$. Εμφανίζεται όταν έχομε να υπολογίσομε το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ όπου $f(x)>0$ και $x_0\in\overline{\Re}=\Re\cup\{+\infty,-\infty\}$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, προκύπτει η μορφή 0^0.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, προκύπτει η μορφή $(+\infty)^0$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, προκύπτει η μορφή $1^{\pm\infty}$.

Όλες αυτές οι μορφές αντιμετωπίζονται ως εξής:

$f(x)>0\Rightarrow f(x)=e^{\ln f(x)}\Rightarrow\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\ln f(x)}$$

Σχόλια.

1. Οι συναρτήσεις e^x, $\ln x$, x^ν, $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\phi x$ είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους. Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$, κ.ο.κ. Επίσης, κάθε αλγεβρική παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων, είναι συνεχής.

2. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος σύγκλιση και σύνθεση μπορούμε να υπολογίσομε τα $\lim\limits_{x\to x_0}e^{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\ln f(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\eta\mu f(x)\right]$, κ.ο.κ.

3. Απροσδιόριστες μορφές είναι

- Για την πρόσθεση στο $\overline{\Re}$ οι μορφές: $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$.
- Για την αφαίρεση στο $\overline{\Re}$ οι μορφές: $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$.
- Για τον πολλαπλασιασμό στο $\overline{\Re}$ οι μορφές: $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$.
- Για την διαίρεση στο $\overline{\Re}$ οι μορφές: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.
- Για τις δυνάμεις στο $\overline{\Re}$ οι μορφές: $(+\infty)^0$, 0^0, $1^{\pm\infty}$.

Άσκηση 1. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Οι συναρτήσεις $\begin{cases}f,f(x)=x\\ g,g(x)=e^x\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$ με $\begin{cases}f',f'(x)=1\\ g',g'(x)=e^x\end{cases}$

Άρα, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+\ln x}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\ln x)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Οι συναρτήσεις $\begin{cases}f,f(x)=e^x\\ g,g(x)=x^2+\ln x\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με $\begin{cases}f',f'(x)=e^x\\ g',g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}\neq 0\end{cases}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x+\dfrac{1}{x}}$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Οι συναρτήσεις f', g' είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με $\begin{cases} f'', f''(x)=e^x \\ g'', g''(x)=2-\dfrac{1}{x^2}\neq 0 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

Άσκηση 3. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} f, f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x \\ g, g(x)=x^2 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$ με $\begin{cases} f', f'(x)=\eta\mu x \\ g', g'(x)=2x\neq 0,\ x\in\Re^* \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{2x}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{2}$

Άσκηση 4. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x}-2)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}2x^2=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} f, f(x)=e^x+e^{-x}-2 \\ g, g(x)=2x^2 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$ με $\begin{cases} f', f'(x)=e^x-e^{-x} \\ g', g'(x)=4x\neq 0,\ x\in\Re^* \end{cases}$ Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{4x}$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to0}(e^x-e^{-x})=0$ και $\lim\limits_{x\to0}4x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Οι συναρτήσεις f', g' είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$ $\begin{cases} f'', f''(x)=e^x+e^{-x} \\ g'', g''(x)=4\neq 0 \end{cases}$.

Άρα, είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{4}=\dfrac{e^0+e^0}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{1-x^5}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim_{x\to1}\left(1-x^2\right)=0$ και $\lim_{x\to1}\left(1-x^5\right)=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-x^5}=\lim_{x\to1}\frac{\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^5\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{-2x}{-5x^4}=\lim_{x\to1}\frac{2}{5x^3}=\frac{2}{5}$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 3x}{2x}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim_{x\to0}\left(\eta\mu 3x\right)=0$ και $\lim_{x\to0}\left(2x\right)=0$ (*). Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 3x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\eta\mu 3x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{3\cdot\sigma\upsilon\nu 3x}{2}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to0}\sigma\upsilon\nu 3x=\frac{3}{2}\cdot1=\frac{3}{2}$

(*) **Επεξήγηση** $\phi,\phi(x)=\eta\mu 3x$, $\phi=f\circ g,\begin{cases}f,f(x)=\eta\mu x\\ g,g(x)=3x=\psi\end{cases}$

$\lim_{x\to0}g\left(x\right)=\lim_{x\to0}3x=0$, $\lim_{x\to0}f\left(\psi\right)=\lim_{\psi\to0}\eta\mu\psi=0$.

Άσκηση 7. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim_{x\to0}\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)=0$, $\lim_{x\to0}\left(\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=0$. Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς $\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{2\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x}=\frac{0}{2}=0$

Άσκηση 8. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim_{x\to0}\left(x-\eta\mu x\right)=0$ και $\lim_{x\to0}x^3=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\eta\mu x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}$.

Είναι $\lim_{x\to0}\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)=0$ και $\lim_{x\to0}3x^2=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\eta\mu x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{6x}$

Είναι $\lim_{x\to0}\eta\mu x=0$ και $\lim_{x\to0}6x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\frac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\eta\mu x)'}{(6x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Άσκηση 9. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(7x^7-8x^5-x+2\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3-x^2-x+1\right)=0$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left(7x^7-8x^5-x+2\right)'}{\left(x^3-x^2-x+1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{49x^6-40x^4-1}{3x^2-2x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(49x^6-40x^4-1\right)=8$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x^2-2x-1\right)=0$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(49x^6-40x^4-1\right)\cdot\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{3x^2-2x-1}=8\cdot(+\infty)=+\infty$

Επεξήγηση Είναι $3x^2-2x-1=3\cdot(x-1)\cdot(x+\dfrac{1}{3})$

x	$-\infty$		**-1/3**		**1**		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		+	0	-	0	+	

$x\to 1^+\Rightarrow x>1\Rightarrow 3x^2-2x-1>0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x^2-2x-1\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{3x^2-2x-1}=+\infty$

Άσκηση 10. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-5x^2+7\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x^3-1\right)=+\infty$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(x^3-5x^2+7\right)'}{\left(2x^3-1\right)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-10}{6x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-10)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}6x=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-10}{6x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(3x-10)'}{(6x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Άσκηση 11. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{10} = +\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{10}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)^{(10)}}{\left(x^{10}\right)^{(10)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{10!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 10}\lim_{x\to+\infty} e^x = \frac{1}{10!}(+\infty) = +\infty$$

Άσκηση 12. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x+1}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^x\right)\right] = +\infty$ (*) και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]'}{(x+1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^x} = 0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $0\cdot(+\infty)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[e^x\right]'}{\left(1+e^x\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

(*) **Επεξήγηση** $\phi, \phi(x) = \ln\left(1+e^x\right)$, $\phi = f\circ g, \begin{cases} f, f(x) = \ln x \\ g, g(x) = 1+e^x = \psi \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x) = +\infty$, $\lim\limits_{\psi\to+\infty} f(\psi) = \lim\limits_{\psi\to+\infty}\ln\psi = +\infty$.

Άσκηση 13. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

Άσκηση 14. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\eta\mu x-1}{\ln(1+x)}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\eta\mu x-1\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)\right] = 0$ (*). Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\eta\mu x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x+\eta\mu x-1\right)'}{\left[\ln(1+x)\right]'}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)\cdot\left(e^x+\sigma\upsilon\nu x\right)\right]=2$

(*) **Επεξήγηση** $\phi,\phi(x)=\ln(1+x)$, $\phi=f\circ g,\begin{cases} f, f(x)=\ln x \\ g, g(x)=1+x=\psi \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$, $\lim\limits_{\psi\to 1} f(\psi)=\lim\limits_{\psi\to 1}\ln\psi=0$.

Άσκηση 15. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}-2x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x-\eta\mu x)=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\eta\mu x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\eta\mu x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\eta\mu x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}\right)=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=1$. Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}=2$.

Άσκηση 16. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^a\cdot\ln x\right)$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$0\cdot(-\infty)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^a\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^a}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^a}=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^a\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^a}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x^a}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^a}{-a}=\dfrac{1}{-a}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}x^a=0$.

Άσκηση 17. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\varepsilon\phi x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $0\cdot(-\infty)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\sigma\phi x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\phi x=+\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\sigma\phi x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\ln x\right)'}{\left(\sigma\phi x\right)'}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu^2 x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi x\cdot\ln x\right)=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\eta\mu^2 x\right)'}{x'}=-2\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=0$.

Άσκηση 18. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(0^0\right)$.

Είναι $y=e^{\ln y}$. Άρα $\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}=e^{\ln\varepsilon\phi\frac{x}{2}}\Rightarrow\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)\right]}e^1\underset{*}{=}e$.

(*) **Επεξήγηση.**

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2})\right]\underset{*}{=}-\infty$. Επίσης $\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2})=\dfrac{\ln(\varepsilon\phi\frac{x}{2})}{\ln x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left[\ln\left(\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right)\right]'}{\left(\ln x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\eta\mu x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x'}{(\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{1}=1$

(*) **Επεξήγηση.**

$\phi,\phi(x)=\ln\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right)$, $\phi=fog$, όπου $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$ και $\lim\limits_{\psi\to 0}f(\psi)=\lim\limits_{\psi\to 0}\ln\psi=-\infty$.

Άσκηση 19. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Απάντηση.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}x=-\infty$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(1^{-\infty}\right)$.

Είναι $y=e^{\ln y}$. Άρα $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to -\infty}e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}\overset{*}{=}e^1=e$

(*) **Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$ (*) Άρα απροσδιόριστη μορφή (?)$(-\infty)\cdot 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$

(*) **Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$.

Είναι $\phi,\phi(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $\phi=f\circ g\begin{cases}f(x)=\ln x\\ g(x)=1+\dfrac{1}{x}=\psi\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$,

$\lim\limits_{\psi\to 1}f(\psi)=0$.

Άσκηση 20. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Απάντηση. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}\overset{*}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή $(?)\,(+\infty)-(+\infty)$. Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\cdot\eta\mu^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\eta\mu^2 x\right)'}{\left(x^2\cdot\eta\mu^2 x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x\cdot\eta\mu^2 x+x^2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu^2 x+x^2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=0$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή $(?)\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(x\cdot\eta\mu^2 x+x^2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x+2\cdot x\cdot\eta\mu 2x+x^2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sigma\upsilon\nu 2x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu^2 x+2\cdot x\cdot\eta\mu 2x+x^2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\right)=0$.

Άρα, απροσδιόριστη μορφή $(?)\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu 2x\right)'}{\left(\eta\mu^2 x+2\cdot x\cdot\eta\mu 2x+x^2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 2x+3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-x^2\cdot\eta\mu 2x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu 2x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 2x+3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-x^2\cdot\eta\mu 2x\right)=0$

Άρα, απροσδιόριστη μορφή $(?)\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\eta\mu 2x\right)'}{\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 2x+3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-x^2\cdot\eta\mu 2x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-4\cdot x\cdot\eta\mu 2x-x^2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu 2x=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-4\cdot x\cdot\eta\mu 2x-x^2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\right)=3$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3}$.

(*) **Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}=+\infty$.

Όταν $x\to 0\Rightarrow \eta\mu^2 x>0$. Από $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu^2 x=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}=+\infty$.

Άσκηση 21. Βρείτε η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f, f(x)=\dfrac{e^{ax}-e^{x}-x}{x^2}$ να έχει στο σημείο $x_0=0$, όριο πραγματικό αριθμό.

Απάντηση. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{ax}-e^{x}-x\right)=0=\lim\limits_{x\to 0}x^2$. Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Οι συναρτήσεις $\begin{cases} g, g(x)=e^{ax}-e^{x}-x \\ h, h(x)=x^2 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$.

Είναι $\begin{cases} g', g'(x)=ae^{ax}-e^{x}-1 \\ h', h'(x)=2x\neq 0, \qquad (x\neq 0) \end{cases}$

Συνεπώς $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{h'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{ax}-e^{x}-1}{2x}=1 \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(2x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(ae^{ax}-e^{x}-1\right)=a-2 \end{cases}$

Όταν $a-2\neq 0$ το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Άρα, $a=2$, οπότε απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Οι συναρτήσεις g', h' είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$ με $\begin{cases} g''(x)=4e^{2x}-e^{x} \\ h''(x)=2\neq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)}{h''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{2x}-e^{x}}{2}=\dfrac{3}{2} \qquad$ Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Άσκηση 22. Έστω η συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2(\pi x)}{x-1}, x\neq 1 \\ 0 \qquad\quad, x=1 \end{cases}$.

(**α**) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\Re$.

(**β**) Εξετάστε αν η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.

Απάντηση. (**α**)

$\forall x\in\Re-\{1\}\Rightarrow f(x)=\dfrac{\eta\mu^2(\pi x)}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της συναρτήσεως f στη θέση $x_0=1$.

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}$ Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[\eta\mu^2(\pi x)\right]'}{\left[(x-1)^2\right]'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi\cdot\eta\mu(2\pi x)}{2(x-1)}$ Απροσδιόριστη μορφή (?)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Συνεπώς $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi\cdot[\eta\mu(2\pi x)]'}{2(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\pi^2\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\right)=\pi^2\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi)=\pi^2$

Άρα, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\Re$.

$$f', f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}, & x\neq 1\\ \pi^2, & x=1\end{cases}$$

(β) $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{(x-1)^2}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}=2\pi^2-\pi^2=\pi^2=f'(1)$

Άρα, η συνάρτηση f' είναι συνεχής στη θέση $x_0=1$.

Άσκηση 23. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f, f(x)=e^{|x|}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

Άσκηση 24. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g, g(x)=|\ln x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Άσκηση 25. Βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως $f, f(x)=\alpha^{|x-\beta|}$, όπου $\beta\in\Re$ και $0<a\neq 1$.

Άσκηση 26. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}$, **(β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$, **(γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$, **(δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$, **(ε)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$,

(στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{e^x}$, **(ζ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$, **(η)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$, **(θ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(x^2+1)}$,

(ι) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+\eta\mu x}$, **(κ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}$, **(λ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\eta\mu(\beta x)}, (\alpha,\beta\in\Re^*)$,

(μ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x)-\sigma\upsilon\nu(\beta x)}{\sigma\upsilon\nu(\gamma x)-\sigma\upsilon\nu(\delta x)}$, $(\gamma\neq\delta)$, **(ν)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{e^{\beta x}-\sigma\upsilon\nu(\beta x)}$, $(\alpha,\beta\in\Re^*)$.

Άσκηση 27.

Βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως $f, f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & -\dfrac{1}{2}<x\leq 0\\ 2x, & x>0\end{cases}$

Άσκηση 28. Βρείτε τους $a,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ η συνάρτηση $f, f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{2x} & ,x \le 0 \\ \eta\mu(2x) + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(3x) & ,x > 0 \end{cases}$.

Άσκηση 29. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x \le 0 \\ x \cdot \ln x, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{e} \cdot e^{-x}, & x \ge 1 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία 0 και 1.

Άσκηση 30. Βρείτε τους $a,\beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες: $f, f(x) = \begin{cases} ax + \beta, & x > e \\ \ln^3 x, & 0 < x \le e \end{cases}$, $g, g(x) = \begin{cases} \ln^4 x, & 0 < x < e \\ ax^2 + \beta x + 1, & x \ge e \end{cases}$

Εφαρμογή 1. Ο αριθμός x των τόνων τσιμέντου που πωλεί εταιρεία εξαρτάται από την τιμή k (σε €) του ενός τόνου. Αν $x = 100 - \frac{k}{10}$, όπου $100 \le k \le 1.000$, ποια τα έσοδα από την πώληση x τόνων; Για ποια τιμή του k μεγιστοποιούνται τα έσοδα;

Λύση. Τα έσοδα από πώληση x τόνων είναι $f(k) = x \cdot k = \left(100 - \frac{k}{10}\right)k = 100k - \frac{k^2}{10}$

Οπότε $f'(k) = 100 - \frac{k}{5}$. Είναι $f'(k) = 0 \Leftrightarrow k = 500$.

Ισχύει ότι $f'(k) > 0 \Leftrightarrow 100 - \frac{k}{5} > 0 \Leftrightarrow k < 500$.

Ισχύει ότι $f'(k) < 0 \Leftrightarrow 100 - \frac{k}{5} < 0 \Leftrightarrow k > 500$.

Άρα, τα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν ο τόνος πωλείται προς 500 €.

k	100		500		1.000
$f'(k)$		+	0	−	
$f(k)$		↗	Ολικό Maximum	↘	

Άσκηση 2. Τα έσοδα από την παραγωγή x τεμαχίων προϊόντος είναι $E(x) = 500x - 20x^2$. Το κόστος για την παραγωγή τους είναι $K(x) = x^3 - 50x^2 + 500x + 250$, με $0 \le x \le 35$. Βρείτε την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το κέρδος.

Λύση. Είναι Κέρδος= Έσοδα − Έξοδα.

Άρα αν $P(x)$ το κέρδος, ισχύει ότι $P(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 30x^2 - 250$.

Συνεπώς $P'(x) = -3x(x-20)$.

Άρα $P'(x) = -3x(x-20)$ και $P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$

Είναι $P'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,20)$ και $P'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 20$.

Άρα, το κέρδος μεγιστοποιείται όταν παράγονται 20 τεμάχια προϊόντος.

x	0		20		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	−	
$P(x)$		↗	Ολικό Maximum	↘	

Ασύμπτωτες γραφικής παραστάσεως συναρτήσεως.

Ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως συναρτήσεως $y = f(x)$ ονομάζονται οι ευθείες που για πολύ μικρές ή μεγάλες τιμές των x, y προσεγγίζουν ικανοποιητικά την γραφική παράσταση της f.

Η ευθεία $x = \alpha$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παραστάσεως της f όταν ένα τουλάχιστον από τα $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$ Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της $f, f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Η ευθεία $y = \beta$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παραστάσεως της f όταν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \beta$.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2} = 2$ Άρα, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της $f, f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ σε μία περιοχή του $+\infty$.

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παραστάσεως της f όταν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0$.

Η ασύμπτωτη είναι πλάγια όταν $\lambda \neq 0$ και οριζόντια όταν $\lambda = 0$.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ Άρα, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της $f, f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Η εύρεση της οριζόντιας ή πλάγιας ασύμπτωτης γίνεται με χρήση της προτάσεως: Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f, αν και μόνο αν $\lambda = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - x\right]$, όπου $\lambda, \beta \in \Re$.

Παρατηρήσεις.

1. Οι γραφικές παραστάσεις ρητών συναρτήσεων έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες της μορφής $x = a$, όπου a ρίζα του παρονομαστή μόνο. Αν το a είναι ρίζα και του αριθμητή, για να είναι η ευθεία $x = a$ κατακόρυφη ασύμπτωτη πρέπει το a να είναι ρίζα του παρονομαστή με μεγαλύτερη πολλαπλότητα από αυτήν του αριθμητή.

2. Καθώς $x \to +\infty$ (ή $x \to -\infty$) δεν είναι δυνατό να υπάρχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως. Επομένως έχομε το πολύ δύο ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$.

3. Η γραφική παράσταση πολυωνυμικών συναρτήσεων με βαθμό $\nu \geq 2$ δεν έχει οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

Πράγματι, αν $f, f(x)=a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+a_1 x + a_0$, όπου $a_\nu \neq 0$ και $\nu \geq 2$, τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_\nu x^{\nu-1}\right)=a_\nu \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{\nu-1}=\pm\infty$.

Άρα, η γραφική παράσταση της $f, f(x)=ax+\beta$ που είναι η ευθεία $y=ax+\beta$ έχει ασύμπτωτη την ίδια την ευθεία.

4. Είναι δυνατό η γραφική παράσταση συναρτήσεως να τέμνει μία ασύμπτωτη της, σε ένα τουλάχιστον σημείο.

5. Για τη γραφική παράσταση ρητών συναρτήσεων ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(α) Όταν ο βαθμός αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού παρονομαστή, υπάρχει μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη.

(β) Όταν ο βαθμός αριθμητή είναι κατά ένα μεγαλύτερος του βαθμού παρονομαστή, υπάρχει μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη.

(γ) Όταν ο αριθμητής έχει βαθμό τουλάχιστον κατά δυο μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, δεν υπάρχουν ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

6. Αν $f(x)=\lambda x+\beta+g(x)$ με $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, η $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f , διότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$.

Παραδείγματα.

1. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως της $f, f(x)=\dfrac{x^5}{x^2-4}$.

Λύση. $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$. Άρα, οι ευθείες $x=\pm 2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως της f. Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Άρα, δεν υπάρχουν οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f.

2. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως της $f, f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+2x+3}$.

Λύση.

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης.

Για κάθε $x\in\Re$ είναι $x^2+2x+3>0$. Άρα, δεν υπάρχει $a\in\Re$ ώστε $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$. Συνεπώς, η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-2$. Άρα, η ευθεία $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f σε μία περιοχή του $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta=-2$.

Άρα, η ευθεία $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f σε μία περιοχή του $-\infty$.

3. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως της $f, f(x) = \dfrac{3|x| - 2x + 1}{x+3}$.

Λύση.

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης.

Είναι $\lim\limits_{x\to -3}(x+3) = 0$ και $\lim\limits_{x\to -3}\left[3|x| - 2x + 1\right] = 16 > 0$.

Συνεπώς, είναι $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$.

Άρα, η $x = -3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f.

Η γραφική παράσταση προσεγγίζει την $x = -3$ από δεξιά και αριστερά.

Εύρεση οριζόντιας-πλάγιας ασύμπτωτης.

Είναι $f, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+3}, x \geq 0 \\ \\ \dfrac{1-5x}{x+3}, x < 0 \text{ και } x \neq -3 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda = 0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \beta = 1$.

Άρα, η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f σε μία περιοχή του $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda = 0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \beta = -5$.

Άρα, η $y = -5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f σε μία περιοχή του $-\infty$.

4. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως της $f : (1, +\infty) \to \Re$ με $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$.

Λύση.

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης.

Είναι $D(f) = (1, +\infty)$.

Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f είναι η $x = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$. Άρα, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη γραφικής παραστάσεως της f.

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1 = \lambda, \quad \lim_{x\to +\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1 = \beta$$

Άρα, η ευθεία $y = x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f.

5. Βρείτε τους $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}\right]=0$.

Λύση.

Αν είναι $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+\beta)\right]=0$
Άρα, η $y=ax+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f καθώς $x\to-\infty$. Άρα, $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=3$.

Παρατήρηση.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)$. Η ευθεία $y=ax+\beta$ ονομάζεται πλάγια ασύμπτωτη της f αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=ax+\beta$ ή ισοδύναμα $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0$.

Εύρεση των α, β. $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\beta$

Μελέτη περιπτώσεων.

- Όταν $a=0$ και $\beta=0$, υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη που είναι ο άξονας xx'.
- Όταν $a=0$ και $\beta\neq0$, υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη που είναι η ευθεία $y=\beta$.
- Όταν $a\neq0$ και $\beta=0$, υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη που είναι η ευθεία $y=ax$.
- Όταν $a\neq0$ και $\beta\neq0$, υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη που είναι η ευθεία $y=ax+\beta$.

6. Βρείτε σε μία περιοχή του $+\infty$ την ασύμπτωτη $y=ax+\beta$ της γραφικής παραστάσεως της $f, f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}$.

Λύση. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=ax+\beta \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}-ax-\beta\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{\beta}{x}\right]\right\}=(+\infty)(4-a)$$

- Όταν $4-a>0 \Leftrightarrow 4>a$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=+\infty$.
- Όταν $4-a<0 \Leftrightarrow 4<a$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=-\infty$.
- Όταν $4-a=0 \Leftrightarrow 4=a$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=(+\infty)0\,(?)$ Απροσδιόριστη μορφή. Συνεπώς,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}+\sqrt{9x^2+1}-4x-\beta\right]=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}-x\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+1}-3x\right]-\beta$$

Χρησιμοποιώντας δυο φορές συζυγή παράσταση έχομε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x+3}-x\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+1}-3x\right]-\beta=0+0-\beta=-\beta.$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\beta\right]=0 \Leftrightarrow a=4,\ \beta=0$.

7. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2+5x-1}{x+2}-(ax+\beta)\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ax+\beta-\sqrt{x^2+x+2}\right]=0$.

8. Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f, f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x^2+ax+\beta}$ να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1$, $x=2$. Στη συνέχεια εξετάστε αν η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

9. Ποιες οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων;

(α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5}$, (β) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, (γ) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$, (δ) $f(x)=3x+\dfrac{1}{x^2}$,

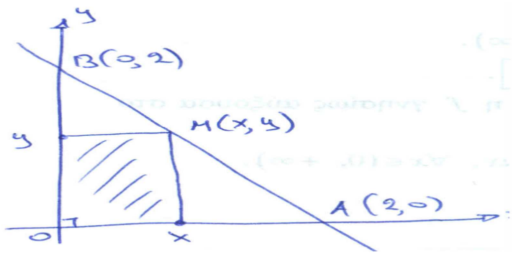
(ε) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, (στ) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-3}$, (ζ) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, (η) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x}}$

(θ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{x}$, (ι) $f(x)=1-\dfrac{|x|}{x-2}$, (κ) $f(x)=-x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Εφαρμογές.

• Βρείτε τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεγίστου εμβαδού, αν οι δύο πλευρές του βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και μία από τις κορυφές του ανήκει στην ευθεία $y=-x+2$.

Λύση.



$E(x)=x\cdot y=x(-x+2)=-x^2+2x$

$E'(x)=-2x+2=2(1-x)$

$E'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$E''(x)=-2<0$

Αν $x=1\Rightarrow y=1$, άρα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γίνεται τετράγωνο

• Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερό εμβαδόν $k^2\ (k>0)$, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Λύση.

E	x	y	Περίμετρος
100	100	1	202
100	50	2	104
100	25	4	58
100	200	0,5	401
100	10	10	40

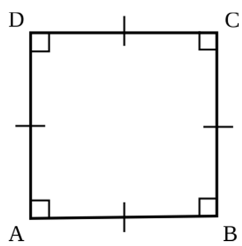
$$\left.\begin{aligned}E&=k^2\\E&=x\cdot y\end{aligned}\right\}\Rightarrow x\cdot y=k^2\Rightarrow y=\frac{k^2}{x}$$

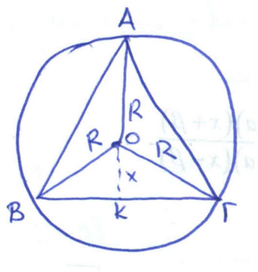
Η περίμετρος είναι $2(x+y)$ και η ελαχιστοποίηση της σημαίνει ελαχιστοποίηση της παραστάσεως $x+y$ δηλαδή της παραστάσεως $x+\dfrac{k^2}{x}$.

Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x+\dfrac{k^2}{x}$. Είναι $f'(x)=\dfrac{(x+k)(x-k)}{x^2}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\begin{cases}k, & \text{Δεκτή}\\ -k<0, & \text{Απορρίπτεται}\end{cases}$

Είναι $f''(x)=\dfrac{2k^2}{x^3}$, άρα $f''(k)=\dfrac{2k^2}{k^3}=\dfrac{2}{k}>0$, συνεπώς $x=y=k$, οπότε $E=x\cdot y=x^2=k^2$.





• Σε σφαίρα ακτίνας R να εγγραφεί κώνος με μέγιστο όγκο.

Λύση.

Είναι $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = R$

Συνεπώς, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (\mathrm{KB})^2\,\mathrm{AK} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(R^2 - x^2\right)\left(R + x\right) =$

$\frac{1}{3}\pi \cdot \left(R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3\right) = V\left(x\right)$

Σχήμα. Τομή της σφαίρας και του κώνου.

x: Η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το επίπεδο της βάσεως του κώνου.

Είναι $V'\left(x\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(R^2 - 2Rx - 3x^2\right)$ & $V''\left(x\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(-2R - 6x\right)$

$$V'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow R^2 - 2Rx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -R, & \text{Απόριψη} \\ \frac{R}{3}, & \text{Δεκτή} \end{cases}$$

$V''\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{-4}{3}\pi \cdot R < 0$. Άρα, $OK = x = \frac{R}{3}$.

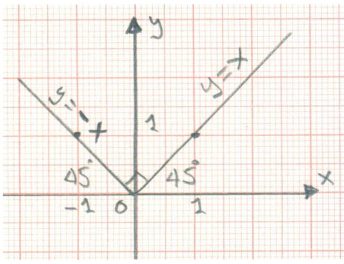
Θεώρημα του Pierre Fermat.

Αν μία συνάρτηση f:

- ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ,
- παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$,
- είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0)=0$.

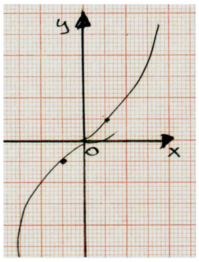
Σχόλια.

1. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.



Π.χ. Η συνάρτηση $f, f(x)=|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=0$, όμως παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση αυτή. Δηλαδή $f(x)=|x|\geq 0=f(0), \ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Ο μηδενισμός της παραγώγου μίας συναρτήσεως σε ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτου της συναρτήσεως στο σημείο αυτό.



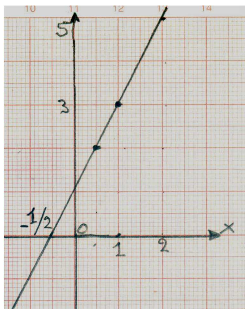
Π.χ. Η συνάρτηση $f, f(x)=x^3$ έχει παράγωγο συνάρτηση $f'(x)=3x^2$ που μηδενίζεται στη θέση $x_0=0$. Πράγματι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Όμως στη θέση αυτή η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Δεν παρουσιάζει μέγιστο διότι: $\forall x>0$ είναι $f(x)>0$.

Δεν παρουσιάζει ελάχιστο διότι: $\forall x<0$ είναι $f(x)<0$.

3. Η υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο ανοικτού διαστήματος είναι αναγκαία.



Π.χ. Έστω η συνάρτηση $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x+1$. Στη θέση $x_0=1$ η f παρουσιάζει μέγιστο διότι $\forall x\in[0,\ 1]$ είναι $f(x)=2x+1\leq 2\cdot 1+1=3=f(1)$.

Όμως η παράγωγος συνάρτηση f' της συναρτήσεως f που έχει τύπο $f'(x)=2$, στη θέση $x_0=1$ δε μηδενίζεται, καθόσον $f'(1)=2\neq 0$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα πιθανά ακρότατα της $f, f(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{2\cdot e^x}$, στο διάστημα $(0,\ 2\pi)$.

Λύση.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\right)'=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}, \qquad f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Άρα, τα $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ αποτελούν θέσεις των πιθανών ακροτάτων της συναρτήσεως.

Σημείωση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2\pi)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

2. Ισχύει το θεώρημα Fermat για τη συνάρτηση $f, f(x)=\eta\mu x$ με $D(f)=[0,\ 2\pi]$;

Λύση.

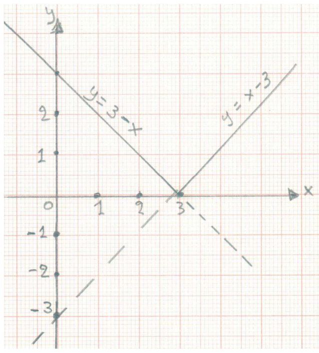
- Η f είναι ορισμένη στο $(0,\ 2\pi)$.
- Η f παρουσιάζει ακρότατο για $x_0=\dfrac{\pi}{2}$, $x_0=\dfrac{3\pi}{2}$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στις θέσεις $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$.

Είναι $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ολικό μέγιστο και $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ολικό ελάχιστο.

Πράγματι, $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

ή διαφορετικά $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=0$, $f'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{2}=0$.

3. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=|x-3|=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases}$. Η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο το $f(3)$ στη θέση $x_0=3$, αλλά δεν ισχύει το θεώρημα Fermat. Γιατί;



Λύση.

- $D(f)=\mathbb{R}=(-\infty,\ +\infty)$, ανοικτό διάστημα.
- Η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_0=3$, το $f(x_0)=0<f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$
- Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=3$.

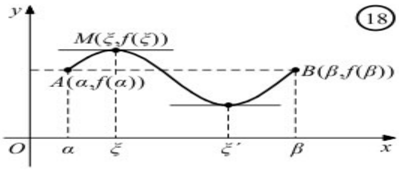
Πράγματι, $\left.\begin{cases} f'_\delta(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1 \\ f'_\alpha(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3-x}{x-3}=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow f'_\delta(3)=1\neq -1=f'_\alpha(3)$.

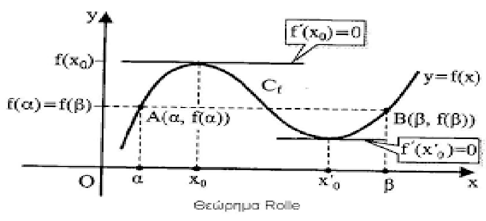
Άρα δεν υπάρχει το $f'(3)$.

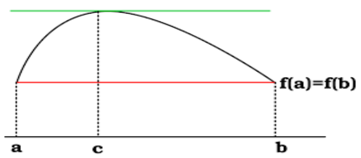
Θεώρημα του Michel Rolle.

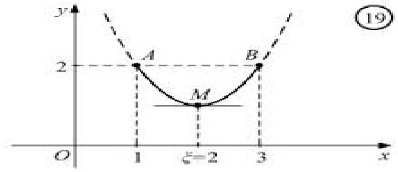
Αν μία συνάρτηση f είναι:

- ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,
- παραγωγίσιμη στο (α,β),
- $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi)=0$.









Πόρισμα. Αν μία συνάρτηση f είναι:

- ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- παραγωγίσιμη στο (α, β),
- τα α, β είναι ρίζες της $f(x)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi) = 0$.

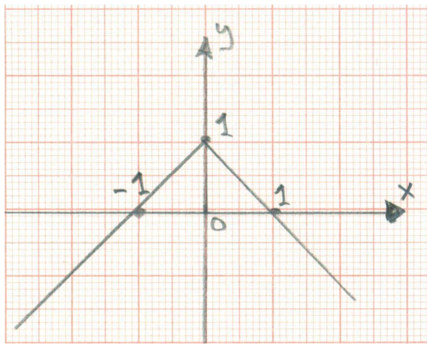
Παρατηρήσεις.

1. Για την εφαρμογή του θεωρήματος Rolle είναι δυνατό να μην έχει η συνάρτηση f παράγωγο στα σημεία α, β. Πράγματι έστω συνάρτηση $f, f(x) = \sqrt{1-x^2}$ τότε:

- συνεχής στο $[-1,\ 1]$,
- παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 1)$,
- $f(-1) = 0 = f(1)$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$. Πράγματι $f'(0) = 0$, δηλαδή $\xi = 0$. Και ενώ ισχύουν αυτά, δεν υπάρχουν τα $f'(-1)$ και $f'(1)$.

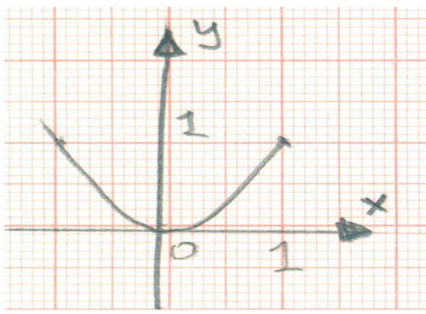
2. Η ύπαρξη της παραγώγου της συναρτήσεως στο (α, β) είναι αναγκαία για την εφαρμογή του θεωρήματος. Η συνάρτηση $f, f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1-x, & x \geq 0 \\ 1+x, & x \leq 0 \end{cases}$, είναι:



- συνεχής στο $[-1,\ 1]$,
- $f(1) = f(-1) = 0$,
- $f'(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, δεν υπάρχει το $f'(0)$.

Άρα, η f όχι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Άρα $\nexists\ \xi \in (-1,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$ και αυτό διότι δεν υπάρχει η παράγωγος της συναρτήσεως f $\forall x \in (-1,\ 1)$.

3. Η υπόθεση $f(a) = f(\beta)$ για το θεώρημα Rolle είναι αναγκαία. Πράγματι αν $f, f(x) = x^2$ με $[\alpha, \beta] = [0,\ 1]$ είναι:



- συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική,
- παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ ως πολυωνυμική,
- αλλά $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$, οπότε $\nexists\ \xi \in (0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Πράγματι $f'(x) = 2x$, $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \notin (0,\ 1)$.

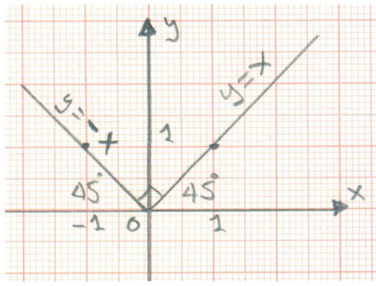
4. Η υπόθεση της συνέχειας της συναρτήσεως στο $[\alpha,\beta]$ είναι αναγκαία για το θεώρημα Rolle. Πράγματι έστω συνάρτηση $f, f(x)=\frac{1}{x}+1$, $D(f)=\mathbb{R}^*$.

- $f(0)\overset{?}{=}f(1)=2$,
- f παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,
- f ασυνεχής στη θέση $x_0=0$. Άρα $\nexists\ \xi\in(0,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Πράγματι, $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2}=0$ αδύνατη.

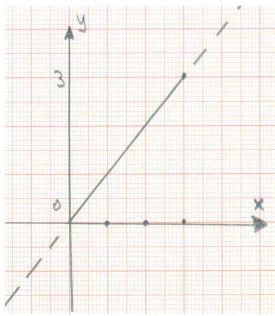
Παραδείγματα.

1. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=|x|$. Είναι συνεχής στο $[-2,\ 2]$, $f(-2)=f(2)$.
Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=0$, άρα ούτε και στο $(-2,\ 2)$.
Συνεπώς, δεν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα του Rolle.



2. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\frac{2}{3}x$. Είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), αλλά $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Συνεπώς, δεν εφαρμόζεται γι αυτή το θεώρημα του Rolle.

3. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases}3, & x=0\\ x, & 0<x\leq 3\end{cases}$.
Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 3)$ και ισχύει ότι $f(0)=f(3)=3$
Δεν είναι συνεχής στο $[0,\ 3]$ διότι δεν είναι συνεχής στη θέση $x_0=0$.
Συνεπώς, δεν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα του Rolle.



4. Έστω συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 0\\ x^3, & x>0\end{cases}$. Ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1,\ 1]$; Αν ναι να υπολογίσετε την τιμή του ξ.

Λύση.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x<0 \Rightarrow f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x\\ \forall x<0 \Rightarrow f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ παραγωγισιμη στο } \mathbb{R}^*$$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της συναρτήσεως f στη θέση $x_0=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0\\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0)=0$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη συνεπώς και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έτσι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 1)$ και $f(-1)=f(1)=1$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Είναι $f', f'(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ 3x^2, & x<0\end{cases}$, άρα $\xi=0$.

5. Δείξτε με το θεώρημα Rolle ότι η εξίσωση $6x^5-4x+1=0$ έχει <u>τουλάχιστον μία</u> ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Λύση. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=6x^5-4x+1$.

Θεωρώ συνάρτηση $h, h(x)=x^6-2x^2+x$. Δηλαδή $h'(x)=f(x)$.

Η συνάρτηση h ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0,\ 1)$.

Η συνάρτηση h ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,\ 1]$.

Είναι $h(0)=h(1)=1$

Συνεπώς, από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε $h'(\xi)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f(\xi)=0$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,\ 1)$.

6. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(2x-1)(x+3)(x-5)(x-7)$ με $D(f)=\mathbb{R}$. Βρείτε πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x)=0$.

Λύση. Οι ρίζες της εξισώσεως $f(x)=0$ είναι $-3,\ \dfrac{1}{2},\ 5,\ 7$.

Η $f'(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτο βαθμού. Άρα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f στο $\left[-3,\ \dfrac{1}{2}\right]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα $\exists\ \xi_1\in\left(-3,\ \dfrac{1}{2}\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1)=0$.

Η συνάρτηση f στο $\left[\dfrac{1}{2},\ 5\right]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα $\exists\ \xi_2\in\left(\dfrac{1}{2},\ 5\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2)=0$.

Η συνάρτηση f στο $[5,\ 7]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα $\exists\ \xi_3\in(5,\ 7)$ έτσι ώστε $f'(\xi_3)=0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.

7. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^5+4x^3+5x+2012$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία πραγματική και τέσσερεις μιγαδικές ρίζες.

Λύση. Το πολυώνυμο είναι περιττού βαθμού, άρα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, έστω την ρ. Έστω ότι $\rho_1 \neq \rho$ είναι μία άλλη πραγματική ρίζα του πολυωνύμου.

Η συνάρτηση f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\rho_1 < \rho$, η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\rho_1, \rho]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Άτοπο, διότι $f'(x)=5x^4+12x^2+5>0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Καταλήξαμε σε άτοπο διότι δεχθήκαμε την ύπαρξη και δεύτερης πραγματικής ρίζας της εξισώσεως $f(x)=0$, άρα αυτή έχει μία μόνο πραγματική ρίζα, οπότε οι άλλες τέσσερεις είναι μιγαδικές.

Θεώρημα. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

8. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^5$ με $D(f)=\mathbb{R}$. Ισχύει το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 1]$;

Λύση. Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Οπότε η συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο $[-1, 1]$,
- παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$,
- $f(-1)=-1 \neq 1 = f(1)$.

Συνεπώς, δεν ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[-1, 1]$.

9. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(1-x)\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$. Δείξτε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση.

- f συνεχής στο $[0, 1]$,
- $\left.\begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(1)=-\eta\mu 1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f στο διάστημα $(0, 1)$.

10. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=1+x^{\mu}(1-x)^{\nu}$, $\mu,\nu \in \mathbb{N}$. Χωρίς να υπολογισθεί η $f'(x)$, δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει <u>τουλάχιστον μία</u> ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Λύση.

Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζω το θεώρημα Rolle.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$,
- $f(0)=1=f(1)$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Άρα, η $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

11. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\frac{c_0}{1}x+\frac{c_1}{2}x^2+...+\frac{c_\nu}{\nu+1}x^{\nu+1}$, όπου $c_0, c_1, ..., c_\nu\in\mathbb{R}$ με $\frac{c_0}{1}+\frac{c_1}{2}+...+\frac{c_\nu}{\nu+1}=0$. Δείξτε ότι υπάρχει <u>τουλάχιστον ένα</u> $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Λύση.

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζω το θεώρημα Rolle.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$,
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$,
- $f(0)=0=f(1)$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

12. Δείξτε ότι η εξίσωση $a_0x^\nu+a_1x^{\nu-1}+...+a_{\nu-1}x+a_\nu=0$ έχει <u>τουλάχιστον μία</u> ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$ όταν $\frac{a_0}{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu}+...+\frac{a_{\nu-1}}{2}+a_\nu=0$.

Λύση.

Αν $f, f(x)=a_0x^\nu+a_1x^{\nu-1}+...+a_{\nu-1}x+a_\nu$ τότε η συνάρτηση η οποία έχει την f σαν παράγωγο είναι η $h, h(x)=\frac{a_0}{\nu+1}x^{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu}x^\nu+...+\frac{a_{\nu-1}}{2}x^2+a_\nu x$.

Η συνάρτηση h, ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Εφαρμόζω το θεώρημα Rolle.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$,
- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$,
- $h(0)=0=h(1)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $h'(\xi)=0$.

Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $f(\xi)=0$.

Άρα, η συνάρτηση f έχει στο $(0,\ 1)$ τουλάχιστον μία ρίζα.

Μέθοδος εργασίας.

Γενικά, αν θέλομε να δείξομε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\ \beta)$, θα προσδιορίζομε μία συνάρτηση $h, h(x)$ για την οποία έχομε $h'(x)=f(x)$ και για την h θα διαπιστώνομε ότι στο $[\alpha,\ \beta]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε θα υπάρχει στο $(\alpha,\ \beta)$ μία τουλάχιστον ρίζα για την $h'(x)$, δηλαδή για την $f(x)$.

13. Δίνεται η εξίσωση $x^5+x^3+2x+\alpha=0$. Δείξτε ότι $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

Λύση.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^5+x^3+2x+\alpha$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f', f'(x)=5x^4+3x^2+2$.

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει δυο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Η συνάρτηση f στο $\left[\rho_1,\rho_2\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\rho_1,\rho_2\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Άτοπο, διότι είναι $f'(x)>0 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$.

Μέθοδος εργασίας. Αν ζητείται να αποδειχθεί ότι μία εξίσωση έχει k <u>το πολύ</u> ρίζες, θα το αποδεικνύομε εργαζόμενοι ως εξής: Θα υποθέτομε ότι έχει $k+1$ το πλήθος ρίζες και θα καταλήγομε σε άτοπο. Θα γίνεται χρήση του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ρίζες.

14. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3-3x+a=0$ δεν έχει για κανέναν πραγματικό αριθμό a δυο ρίζες στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Λύση. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^3-3x+a$ με $D\left(f\right)=\mathbb{R}$. Παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι $\exists a\in\mathbb{R}$: $0<\rho_1<\rho_2<1$ και $f\left(\rho_1\right)=f\left(\rho_2\right)=0$.

Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\rho_1,\rho_2\right]$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\rho_1,\rho_2\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Άτοπο, διότι $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Σχόλιο: $\pm1\notin\left(\rho_1,\rho_2\right)\subset(0,\ 1)$.

15. Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ απλή ρίζα ενός πολυωνύμου $f(x)$. Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ απλή ρίζα της παραγώγου $f'(x)$. Τότε το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

Λύση. Εξ΄ υποθέσεως είναι $f(x)=(x-\rho)\cdot P(x)$ και $f'(x)=(x-\rho)\cdot Q(x)$.

Επίσης $f'(x)=\left[(x-\rho)\cdot P(x)\right]'=(x-\rho)'\cdot P(x)+(x-\rho)\cdot P'(x)=P(x)+(x-\rho)\cdot P'(x)$

Συνεπώς, $P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x)-(x-\rho)\cdot P'(x)=(x-\rho)\cdot\left[Q(x)-P'(x)\right]$.

Από την $f(x)=(x-\rho)\cdot P(x)$ έπεται ότι:

$$f(x)=(x-\rho)\cdot(x-\rho)\cdot\left[Q(x)-P'(x)\right]=(x-\rho)^2\cdot\left[Q(x)-P'(x)\right].$$

16. Αν ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $f(x)$ με πολλαπλότητα $k\in\mathbb{N}$, τότε και η παράγωγος του $f(x)$, η $f'(x)$, έχει ρίζα ρ με πολλαπλότητα $k-1$.

Λύση. Εξ΄ υποθέσεως είναι $f(x)=(x-\rho)^k\cdot P(x)$. Συνεπώς,

$$f'(x)=\left[(x-\rho)^k\right]'\cdot P(x)+(x-\rho)^k\cdot P'(x)=k\cdot(x-\rho)^{k-1}P(x)+(x-\rho)^k\cdot P'(x)=$$
$$(x-\rho)^{k-1}\cdot\left[k\cdot P(x)+(x-\rho)\cdot P'(x)\right]=\ (x-\rho)^{k-1}\cdot Q(x)$$

17. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^{2\nu}+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$ και $D(f)=\mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν έχει περισσότερες από δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση.

Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Στο $[\rho_1,\rho_2]$ ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1)=0$. (1)

Στο $[\rho_2,\rho_3]$ ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2)=0$. (2)

Αλλά $\quad f'(x)=2\nu x^{2\nu-1}+\alpha \quad$ και $\quad f'(x)=0\Leftrightarrow x^{2\nu-1}=\dfrac{-\alpha}{2\nu}\Leftrightarrow x=\sqrt[2\nu-1]{\dfrac{-\alpha}{2\nu}}$.

Δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Από τις (1) και (2) καταλήγομε σε άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες.

18. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\left(x^2-1\right)e^x$. Δείξτε με τη βοήθεια του θεωρήματος Rolle ότι υπάρχει $x_0\in(-1,\,1)$ έτσι ώστε $f'(x_0)=0$. Να βρεθεί το x_0.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,\,1]$,
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,\,1)$,
- Είναι $f(-1)=0=f(1)$

Από θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,\,1)$ έτσι ώστε $f'(x_0)=0$. Αλλά $f'(x)=\left(x^2-1+2x\right)e^x$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1+2x=0\Leftrightarrow x_0=\begin{cases}-1+\sqrt{2}\in(-1,\,1)\\ -1-\sqrt{2}\notin(-1,\,1)\end{cases}.$$

19. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=2x^3-3x-1$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει <u>ακριβώς</u> μία ρίζα $\rho\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Λύση. Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα Bolzano:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

- $\left.\begin{cases} f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1>0 \\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}-1<0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ έτσι ώστε $f(\rho)=0$.

Έστω ότι υπάρχει $\rho_1 \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με $\rho_1<\rho$ έτσι ώστε $f(\rho_1)=0$.

Τότε από το θεώρημα Rolle:
- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\ \rho]$,
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1,\ \rho)$,
- $f(\rho_1)=0=f(\rho)$.

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1,\ \rho)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Άτοπο, διότι

$f'(x)=6x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-3=0 \Leftrightarrow 2x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Είναι $(\rho_1,\ \rho)\subset\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

20. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=x^2-x\cdot \eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$. Δείξτε ότι έχει <u>το πολύ</u> δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση. Έστω ότι η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Στο $[\rho_1,\rho_2]$ ισχύει το θεώρημα Rolle για την f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1,\rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1)=0$. (1)

Στο $[\rho_2,\rho_3]$ ισχύει το θεώρημα Rolle για την f, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho_2,\rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2)=0$. (2)

Όμως $f'(x)=2x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x=x\cdot(2-\sigma\upsilon\nu x)$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sigma\upsilon\nu x=2 \text{ Αδύνατο} \end{cases}$

Δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική λύση.
Συνεπώς, από τα (1), (2) οδηγούμαστε σε άτοπο.

21. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases} x^2+ax+\beta, & x\in[-2,\ 0) \\ \gamma x^2+3x+3, & x\in[0,\ 2] \end{cases}$. Να προσδιορισθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο $[-2,\ 2]$.

Λύση.

Προκειμένου να ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο $[-2,\ 2]$, πρέπει:

• Η f να είναι συνεχής στο $[-2,\ 2]$. Άρα συνεχής και στη θέση $x_0=0$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Επειδή $f(0)=3$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\beta$ είναι $\beta=3$.

• Η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,\ 2)$. Άρα παραγωγίσιμη και στη θέση $x_0=0$, δηλαδή:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma x^{\cancel{2}}+3\cancel{x}+\cancel{\beta}-\cancel{\beta}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\gamma x+3)=3=f_\delta'(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{\cancel{2}}+a\cancel{x}+\cancel{\beta}-\cancel{\beta}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+a)=a=f_\alpha'(0) \end{cases}\right\}\Leftrightarrow \alpha=3$$

• $\left.\begin{cases} f(2)=4\gamma+6+3=4\gamma+9 \\ f(-2)=4-6+3=1 \end{cases}\right\}\Leftrightarrow f(2)=f(-2)\Leftrightarrow 4\gamma+9=1\Leftrightarrow \gamma=-2$

22. Αν η εξίσωση $a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x=0$ έχει μία θετική ρίζα x_0, τότε η εξίσωση $\nu a_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)a_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+a_1=0$ έχει μία τουλάχιστο θετική ρίζα μικρότερη του x_0.

Λύση.

Θεωρώ τη συνάρτηση $f, f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x$. Είναι $f(0)=f(x_0)=0$.
Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
• Η f είναι συνεχής στο $[0,\ x_0]$,
• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ x_0)$,
• $f(0)=f(x_0)$. Άρα, από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ x_0)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή το ξ είναι ρίζα της εξισώσεως $f'(x)=0$ και είναι $\xi<x_0$, διότι $\xi\in(0,\ x_0)$.

23. Να υπολογισθούν οι $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[-1,\ 1]$ για τη συνάρτηση $f, f(x)=\begin{cases} x^2+\beta x+\gamma, & x\in[-1,\ 0] \\ ax^2+4x+4, & x\in(0,\ 1) \end{cases}$.

Λύση.

• Η f είναι ορισμένη στο $[-1,\ 1]$ και ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$.

Εξετάζω τη συνέχεια της f στη θέση $x_0=-1$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=1-\beta+\gamma=f(-1)$.

Εξετάζω τη συνέχεια της f στη θέση $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+4x+4\right)=a+8=f(1)$.

Εξετάζω τη συνέχεια της f στη θέση $x_0=0$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=\gamma$, $f(0)=\gamma$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(ax^2+4x+4\right)=4$.
Άρα $\gamma=4$.

- $\forall x\in(-1,\ 0)\Rightarrow f(x)=x^2+\beta x+\gamma\Rightarrow f'(x)=2x+\beta$
  $\forall x\in(0,\ 1)\Rightarrow f(x)=ax^2+4x+4\Rightarrow f'(x)=2\alpha x+4$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της f στη θέση $x_0=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f_a'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+\beta x+\cancel{\gamma}-\cancel{\gamma}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+\beta\right)=\beta \\ f_\delta'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax^2+4x+\cancel{4}-\cancel{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(ax+4\right)=4 \end{array}\right\}\Rightarrow\beta=4$$

- $\left.\begin{array}{l} f(-1)=1-\beta+\gamma=1-\cancel{4}+\cancel{4}=1 \\ f(1)=\alpha+8 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\alpha+8=1\Leftrightarrow\alpha=7$

24. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(x-a+1)(x-a)(x-a-1)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

Λύση.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=a-1$ ή $x=a$ ή $x=a+1$. Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Οπότε:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[a-1,\ a\right]$, $\left[a,\ a+1\right]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(a-1,\ a\right)$, $\left(a,\ a+1\right)$.
- $f(a-1)=f(a)=f(a+1)=0$

Από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι στο διάστημα:

$\left(a-1,\ a\right)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα x_1, έτσι ώστε $f'(x_1)=0$ (1)

$\left(a,\ a+1\right)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα x_2, έτσι ώστε $f'(x_2)=0$ (2)

Αλλά $f'(x)=3x_2-6ax+\left(2a^2-1\right)$, τριώνυμο, άρα έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες. Από (1), (2) έπεται ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες $x_1\in\left(a-1,\ a\right)$, $x_2\in\left(a,\ a+1\right)$, οπότε είναι διακεκριμένες.

25. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)$, όπου $\alpha<\beta<\gamma\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δυο ακριβώς πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.

Λύση.

Η f, ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Οπότε:
- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\ \beta\right]$, $\left[\beta,\ \gamma\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(\alpha,\ \beta\right)$, $\left(\beta,\ \gamma\right)$.
- Είναι $f(a)=f(\beta)=f(\gamma)=0$

Στο $\left[\alpha,\ \beta\right]$, από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\left(\alpha,\ \beta\right)$: $f'(x_1)=0$.

Στο $\left[\beta,\ \gamma\right]$, από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\left(\beta,\ \gamma\right)$: $f'(x_2)=0$.

Δηλαδή η $f', f'(x)=3x^2-2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)x+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$, που είναι τριώνυμο, έχει τουλάχιστον δυο ρίζες $x_1\in(\alpha,\ \beta)$, $x_2\in(\beta,\ \gamma)$, προφανώς διακεκριμένες.

Όμως η $f'(x)=0$ ως δευτεροβάθμια εξίσωση έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες. Άρα, αυτές θα είναι οι x_1, x_2.

26. Εξετάστε αν ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-4,\ 0]$ για τη συνάρτηση $f, f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Λύση. Είναι $f=(h\circ g)\circ\phi$, όπου $h, h(x)=\sqrt[3]{x}$, $D(h)=\mathbb{R}$

$g, g(x)=x^2$, $D(g)=\mathbb{R}$

$\phi, \phi(x)=(x+2)$, $D(\phi)=\mathbb{R}$

$D(h\circ g)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$, $D(f)=D\left((h\circ g)\circ\phi\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:(x+2)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$

Η f, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή το $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-4,\ 0]$. Επίσης $f(-4)=f(0)=\sqrt[3]{4}$.

Όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-4,\ 0)$ διότι δεν είναι παραγωγίσιμη στην θέση -2 καθόσον $f', f'(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$.

Συνεπώς, δεν ισχύει το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f στο $[-4,\ 0]$.

27. Αποδείξτε ότι αν μία πολυωνυμική συνάρτηση f μηδενίζεται για k διαφορετικές τιμές του $x\in\mathbb{R}$, τότε η f' μηδενίζεται για $(k-1)$ τουλάχιστον τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ..., \rho_{\kappa-1}, \rho_k\in\mathbb{R}$ ρίζες της f, διαφορετικές ανά δυο μεταξύ τους, με $\rho_1<\rho_2<\rho_3<...<\rho_{\kappa-1}<\rho_k$.

Η f ως πολυωνυμική έχει $D(f)=\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θεωρώ τα διαστήματα $[\rho_1,\ \rho_2]$, $[\rho_2,\ \rho_3]$, …, $[\rho_{k-1},\ \rho_k]$. Από το θεώρημα Rolle για την f προκύπτει ότι:

Στο $[\rho_1,\ \rho_2]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\ \rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1)=0$.

Στο $[\rho_2,\ \rho_3]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\ \rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_2)=0$.

…………………………………………………………………………………………

Στο $[\rho_{k-1},\ \rho_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_{\kappa-1}\in(\rho_{\kappa-1},\ \rho_k)$ έτσι ώστε $f'\left(\xi_{\kappa-1}\right)=0$.

Άρα η f' έχει τουλάχιστον $k-1$ πραγματικές ρίζες, διακεκριμένες.

28. Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\log(\eta\mu x)$ με $D(f)=\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία λύση στο $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$ η οποία και να βρεθεί.

Λύση.

$$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:\eta\mu x>0\}=\{x\in\mathbb{R}:0<x<\pi\}=\{x\in\mathbb{R}:2k\pi<x<(2k+1)\pi\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $D(f)$. Συνεπώς:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$,
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$,
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\log\frac{1}{2}$. Συνεπώς, από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Είναι $f'(x)=\sigma\phi x$, $f'(\xi)=0\Leftrightarrow\sigma\phi\xi=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\xi=0\Leftrightarrow\xi=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Αλλά $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}<\xi<\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{\cancel{\pi}}{6}<k\cancel{\pi}+\frac{\cancel{\pi}}{2}<\frac{5\cancel{\pi}}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{6}<k+\frac{1}{2}<\frac{5}{6}\Leftrightarrow$

$1<6k+3<5\Leftrightarrow-2<6k<2\Leftrightarrow-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3}\overset{k\in\mathbb{Z}}{\Longleftrightarrow}k=0$. Άρα, $\xi=k\pi+\frac{\pi}{2}\overset{k=0}{=}0$. Δηλαδή,

το ξ έχει μια μόνο τιμή, την $\frac{\pi}{2}$, διότι και το k έχει μία μόνο τιμή, την $k=0$.

Ασκήσεις.

Υπάρχουν δυο κατηγορίες ασκήσεων πάνω στο θεώρημα Rolle.

(i) Να δειχθεί αν για μία συγκεκριμένη συνάρτηση τηρούνται, σε κάποιο διάστημα, οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ή αν ισχύει το θεώρημα.

(ii) Να δειχθεί ότι κάποιο πολυώνυμο ή πολυωνυμική εξίσωση ή συνάρτηση ή το παράγωγο πολυώνυμο ή η παράγωγος εξίσωση ή η παράγωγος συνάρτηση έχει ακριβώς μία ή το πολύ μία ή το πολύ k ή τουλάχιστον k ή τουλάχιστον μία ρίζα.

1. Με το θεώρημα Rolle να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+6x+1=0$ δε μπορεί να έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες.

2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^6+\alpha x+\beta=0$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει <u>το πολύ</u> δυο πραγματικές ρίζες.

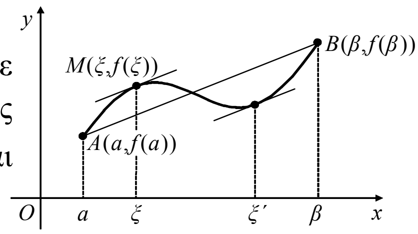
Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Αν η συνάρτηση f είναι: • Συνεχής στο <u>κλειστό</u> διάστημα $[\alpha,\ \beta]$

• Παραγωγίσιμη στο <u>ανοικτό</u> διάστημα $(\alpha,\ \beta)$,

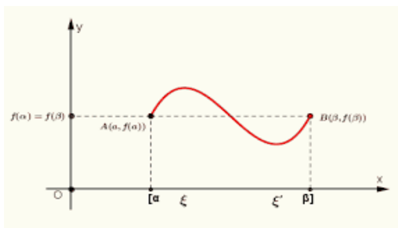
Τότε υπάρχει <u>τουλάχιστον ένα</u> $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$.

Γεωμετρική ερμηνεία. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ ώστε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f, στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς το τμήμα AB, με $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, οπότε η κλίση της εφαπτομένης είναι $f'(\xi)$ και του AB είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$, με $f'(\xi) = \lambda_{AB}$.



Παρατηρήσεις.

1. Από το θεώρημα μέσης τιμής, αν $f(\beta) = f(a)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. Δηλαδή προκύπτει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle. Συνεπώς, το θεώρημα Rolle είναι μερική περίπτωση του θεωρήματος μέσης τιμής.



2. Μεταξύ δυο ριζών μίας παραγωγίσιμης συναρτήσεως υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της παραγώγου συναρτήσεως.

Απόδειξη.

Έστω $\rho_1,\ \rho_2$ δυο ρίζες της παραγωγίσιμης συναρτήσεως f. Ισχύει ότι:

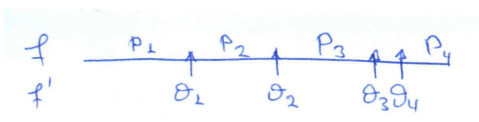
• Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\ \rho_2]$,

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1,\ \rho_2)$,

• $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1,\ \rho_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

3. Μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της παραγώγου συναρτήσεως, υπάρχει το πολύ μία ρίζα της αρχικής συναρτήσεως.



Απόδειξη.

Έστω $\theta_1,\ \theta_2$ δυο διαδοχικές ρίζες της παραγώγου συναρτήσεως.

Έστω $\rho_1,\ \rho_2$ δυο ρίζες της αρχικής συναρτήσεως.

Αν $\rho_1,\ \rho_2 \in (\theta_1,\ \theta_2)$ έπεται ότι υπάρχει $\theta_3 \in (\rho_1,\ \rho_2)$ όπου θ_3 ρίζα της παραγώγου συναρτήσεως. Άρα οι ρίζες $\theta_1,\ \theta_2$ δεν είναι διαδοχικές, πράγμα άτοπο.

Εφαρμογές.

1. Δείξτε ότι αν $0<x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}<e^{x_2}$.

Λύση.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=e^x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Στο $[x_1,\ x_2]$ είναι:

- f συνεχής στο $[x_1,\ x_2]$,
- f παραγωγίσιμη στο $(x_1,\ x_2)$.

Άρα, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1,\ x_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow e^{\xi}=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα από $0<x_1<\xi<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{\xi}<e^{x_2}$, δηλαδή $e^{x_1}<\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}<e^{x_2}$.

2. Δείξτε ότι αν $0<x_1<x_2$, τότε: $1-\dfrac{x_1}{x_2}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{x_2}{x_1}-1$.

Λύση.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\ln x$, παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Στο $[x_1,\ x_2]$ είναι:

- f συνεχής στο $[x_1,\ x_2]$,
- f παραγωγίσιμη στο $(x_1,\ x_2)$.

Άρα, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (x_1,\ x_2) \text{ ώστε } f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}.$$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα από $0<x_1<\xi<x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_2}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{x_1}$.

Άρα, $0<x_1<\xi<x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_2}<\dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}<\dfrac{1}{x_1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_2}(x_2-x_1)<\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{1}{x_1}(x_2-x_1) \Rightarrow$

$1-\dfrac{x_1}{x_2}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{x_2}{x_1}-1$.

3. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0,\ 1)$ είναι $1+x<e^x<1+ex$.

Λύση.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=e^x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\ x]$ με $f'(x)=e^x$, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (0,\ x)$ τέτοιος ώστε $\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=e^\xi$ ή $\dfrac{e^x-1}{x}=e^\xi$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0<\xi<x<1$ είναι $e^0<e^\xi<e^1$.

Άρα $e^0<\dfrac{e^x-1}{x}<e^1 \Leftrightarrow 1<\dfrac{e^x-1}{x}<e \Leftrightarrow x<e^x-1<ex \Leftrightarrow x+1<e^x<ex+1$.

4. Δείξτε ότι $\nu x^{\nu-1}(x-y) \geq x^\nu - y^\nu \geq \nu y^{\nu-1}(x-y)$, όπου $x \geq y>0$.

Λύση.

- Όταν $x=y$ ισχύει η ισότητα.
- Όταν $x>y$, θεωρώ τη συνάρτηση $f, f(x)=x^\nu$ οπότε $f, f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Από το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y,\ x]$ έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (y,\ x)$ ώστε $\nu \xi^{\nu-1}=\dfrac{x^\nu-y^\nu}{x-y}$. Θέλω να αποδείξω ότι $\nu x^{\nu-1} \geq \dfrac{x^\nu-y^\nu}{x-y} \geq \nu y^{\nu-1}$.

Αρκεί να δειχθεί ότι $\cancel{\nu} x^{\nu-1} \geq \cancel{\nu}\xi^{\nu-1} \geq \cancel{\nu} y^{\nu-1} \Leftrightarrow x^{\nu-1} \geq \xi^{\nu-1} \geq y^{\nu-1} \Leftrightarrow x \geq \xi \geq y$.
Αυτό όμως ισχύει.

5. Έστω συνάρτηση $f:[0,\ 3] \to \mathbb{R}$ με $f(x)=x^3-x+1$. Να βρεθεί $x_0 \in (0,\ 3)$ ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}$ και να διαπιστώσετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της f στο σημείο με τετμημένη x_0, είναι παράλληλη προς την χορδή που ορίζεται από τα σημεία $(0,\ 1)$ και $(3,\ 25)$.

Λύση.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 3]$,
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 3)$.

Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\ 3)$ ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}=\dfrac{25-1}{3}=8$.

Επειδή $f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'(x_0)=3x_0^2-1$.

Άρα, $3x_0^2-1=8 \Leftrightarrow x_0^2=3 \Leftrightarrow x_0=\begin{cases} \sqrt{3} & \text{Δεκτή} \\ -\sqrt{3} & \text{Απορρίπτεται} \end{cases}$.

6. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x-\eta\mu y| \leq |x-y|$.

Λύση.

- Για $x=y$ η προς απόδειξη σχέση είναι προφανής, διότι ισχύει η ισότητα.
- Για $x \neq y$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτομε ότι $x<y$.

Η προς απόδειξη σχέση γίνεται $\left|\frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{x-y}\right|\leq 1$.

Έστω συνάρτηση $f, f(x)=\eta\mu x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Στο $[x, y]$ από το θεώρημα μέσης τιμής για την f, έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x, y)$ ώστε $f, f'(x)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi=\frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{x-y}$.

Αρκεί να δειχθεί ότι $|\sigma\upsilon\nu\xi|\leq 1$. Είναι προφανές ότι ισχύει.

Άρα είναι και $\left|\frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{x-y}\right|\leq 1$.