

## Περιεχόμενα

1.1 Ορισμός πίνακα.....	4
Εφαρμογή 1 .....	4
Εφαρμογή 2 .....	4
Εφαρμογή 3 .....	4
Εφαρμογή 4 .....	5
Εφαρμογή 5 .....	5
1.2 Είδη πινάκων.....	5
1.2.1 Πίνακας στοιχείο .....	5
1.2.2 Πίνακας (ή διάνυσμα) γραμμή .....	6
1.2.3 Πίνακας (ή διάνυσμα) στήλη .....	6
1.2.4 Τετραγωνικός .....	6
1.2.5 Κλιμακωτός άνω .....	7
1.2.6 Κλιμακωτός κάτω.....	7
1.2.7 Τριγωνικός άνω .....	7
1.2.8 Τριγωνικός κάτω .....	7
Παρατήρηση 1 .....	8
1.2.9 Διαγώνιος .....	8
Εφαρμογή 6 .....	8
1.2.10 Ανάστροφος .....	8
1.2.11 Συμμετρικός .....	8
1.2.12 Αντισυμμετρικός .....	8
Παρατήρηση 2 .....	9
1.2.13 Μηδενικός .....	9
1.2.14 Αντίθετος.....	9
1.2.15 Μοναδιαίος.....	9
Εφαρμογή 7 .....	9
1.3 Ισότητα πινάκων .....	10
Εφαρμογή 8 .....	10
Εφαρμογή 9 .....	10
Εφαρμογή 10 .....	10
Εφαρμογή 11 .....	10
Εφαρμογή 12 .....	11
Εφαρμογή 13 .....	11
Εφαρμογή 14 .....	11
1.3.1 Ιδιότητες της ισότητας πινάκων .....	11
1.4 Πρόσθεση πινάκων .....	11
1.4.1 Ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων.....	12
Πρόταση 1 .....	13
Πρόταση 2 .....	13
Εφαρμογή 15 .....	13
Εφαρμογή 16 .....	14
Άσκηση 1 .....	15
Άσκηση 2 .....	15
Άσκηση 3 .....	15
1.5 Αφαίρεση πινάκων .....	15
Εφαρμογή 17 .....	17
Άσκηση 4 .....	17
1.6 Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί πίνακα .....	17
1.6.1 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί πίνακα.....	18

Εφαρμογή 18 .....	19
Εφαρμογή 19 .....	19
Εφαρμογή 20 .....	20
Εφαρμογή 21 .....	20
Εφαρμογή 22 .....	21
Εφαρμογή 23 .....	23
1.7 Πολλαπλασιασμός πινάκων .....	24
1.7.1 Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων .....	27
Εφαρμογή 24 .....	27
Εφαρμογή 25 .....	29
Εφαρμογή 26 .....	29
Άσκηση 5 .....	29
1.7.2 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων .....	29
Εφαρμογή 27 .....	31
1.7.3 Αδύναμος πίνακας .....	31
Άσκηση 6 .....	32
1.7.4 Ορθογώνιος πίνακας .....	32
Εφαρμογή 28 .....	32
Εφαρμογή 29 .....	32
Εφαρμογή 30 .....	33
Εφαρμογή 31 .....	33
Εφαρμογή 32 .....	33
Εφαρμογή 33 .....	33
Εφαρμογή 34 .....	34
Εφαρμογή 35 .....	34
Εφαρμογή 36 .....	34
Εφαρμογή 37 .....	34
Εφαρμογή 38 .....	34
Εφαρμογή 39 .....	35
Εφαρμογή 40 .....	35
Άσκηση 7 .....	35
Άσκηση 8 .....	35
Άσκηση 9 .....	35
Άσκηση 10 .....	35
Άσκηση 11 .....	35
Άσκηση 12 .....	35
Άσκηση 13 .....	36
Άσκηση 14 .....	36
Άσκηση 15 .....	36
Άσκηση 16 .....	36
Άσκηση 17 .....	36
Άσκηση 18 .....	36
Άσκηση 19 .....	36
Άσκηση 20 .....	36
1.8 Βαθμός πίνακα .....	36
1.8.1 Πορίσματα .....	37
Άσκηση 21 .....	38
1.9 Αντίστροφος πίνακας .....	38
Εφαρμογή 41 .....	38
Άσκηση 22 .....	38

Άσκηση 23 .....	38
Άσκηση 24 .....	38
Άσκηση 25 .....	38
Άσκηση 26 .....	39
Πρόταση 3 .....	39
Πρόταση 4 .....	39
Παρατήρηση 3 .....	39
Εφαρμογή 42 .....	39
Εφαρμογή 43 .....	39
1.9.1 Ιδιότητες των αντιστρέψιμων πινάκων .....	40
Εφαρμογή 44 .....	40
Εφαρμογή 45 .....	40
Εφαρμογή 46 .....	41
Εφαρμογή 47 .....	41
Άσκηση 27 .....	41
1.9.2 Εύρεση του αντιστρόφου, ενός $2 \times 2$ πίνακα .....	41
Εφαρμογή 48 .....	41
Εφαρμογή 49 .....	41
Εφαρμογή 50 .....	42
Εφαρμογή 51 .....	42
Εφαρμογή 52 .....	42
Εφαρμογή 53 .....	42
Εφαρμογή 54 .....	43
Εφαρμογή 55 .....	43
Εφαρμογή 56 .....	43
Εφαρμογή 57 .....	44
Εφαρμογή 58 .....	44
Εφαρμογή 59 .....	44
Εφαρμογή 60 .....	45
Εφαρμογή 61 .....	45
Εφαρμογή 62 .....	45
Εφαρμογή 63 .....	46
Εφαρμογή 64 .....	46
Εφαρμογή 65 .....	46
Εφαρμογή 66 .....	47
Άλυτες ασκήσεις .....	48
Ιστορικό σημείωμα .....	51

### 1.1 Ορισμός πίνακα

Πίνακας (ή μήτρα–matrix)  $\mu \times \nu$  των πραγματικών αριθμών  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$  &  $j = 1, 2, \dots, \nu$ ), είναι μία ορθογώνια τοποθέτηση τους σε  $\mu$  γραμμές και  $\nu$  στήλες. Το πλήθος  $\mu$  των γραμμών και  $\nu$  των στηλών, είναι οι **διαστάσεις** του πίνακα. Οι αριθμοί που περιέχονται στον πίνακα, είναι τα **στοιχεία** του. Οι πίνακες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ, ... ενώ τα στοιχεία τους με μικρά. Το στοιχείο ενός πίνακα  $A_{\mu \times \nu}$  που βρίσκεται στην  $i$  γραμμή και στην  $j$  στήλη, συμβολίζεται ως  $a_{ij}$ , οπότε ο πίνακας γράφεται όπως παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{i\nu-1} & \alpha_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu-11} & \alpha_{\mu-12} & \dots & \alpha_{\mu-1j} & \dots & \alpha_{\mu-1\nu-1} & \alpha_{\mu-1\nu} \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \dots & \alpha_{\mu j} & \dots & \alpha_{\mu\nu-1} & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας περιγράφεται ως  $A_{\mu \times \nu} = [a_{ij}]$  ή  $A_{\mu \times \nu} = (a_{ij})$  ή  $A = [a_{ij}]$  ή  $A = (a_{ij})$ , ή  $[a_{ij}]$  ή  $(a_{ij})$   $i = 1, 2, \dots, \mu$  &  $j = 1, 2, \dots, \nu$ . Όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στην ίδια γραμμή, έχουν ίδιο τον 1<sup>ο</sup> δείκτη τους, ενώ όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη, έχουν ίδιο τον 2<sup>ο</sup> δείκτη τους.

#### Εφαρμογή 1

Ο  $A_{2 \times 3}$ , δείχνει πόσοι αξιωματικοί A', B', Γ' τάξης είναι στο 1<sup>ο</sup> (3, 5, 7) και στο 2<sup>ο</sup> πλοίο (4, 6, 8), αντίστοιχα.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A' & B' & \Gamma' \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{πλοίο 1} \\ \text{πλοίο 2} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Είναι  $a_{11} = 3$ ,  $a_{12} = 5$ ,  $a_{13} = 7$ ,  $a_{21} = 4$ ,  $a_{22} = 6$ ,  $a_{23} = 8$

#### Εφαρμογή 2

$$\text{Στον } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \text{ βρείτε τα στοιχεία } a_{12}, a_{21}, a_{32}, a_{23}, a_{24}$$

Είναι  $a_{12} = 2$ ,  $a_{21} = 5$ ,  $a_{32} = 10$ ,  $a_{23} = 7$ ,  $a_{24} = 8$

#### Εφαρμογή 3

Σχηματίστε τον  $A_{2 \times 3}$ , αν ισχύει ότι  $a_{ij} = i + j$

Είναι  $a_{11} = 1+1=2$ ,  $a_{12} = a_{21} = 1+2=3$ ,  $a_{13} = 1+3=4$ ,  $a_{22} = 2+2=4$ ,  $a_{23} = 2+3=5$

Άρα, ο πίνακας  $A$  είναι  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

#### Εφαρμογή 4

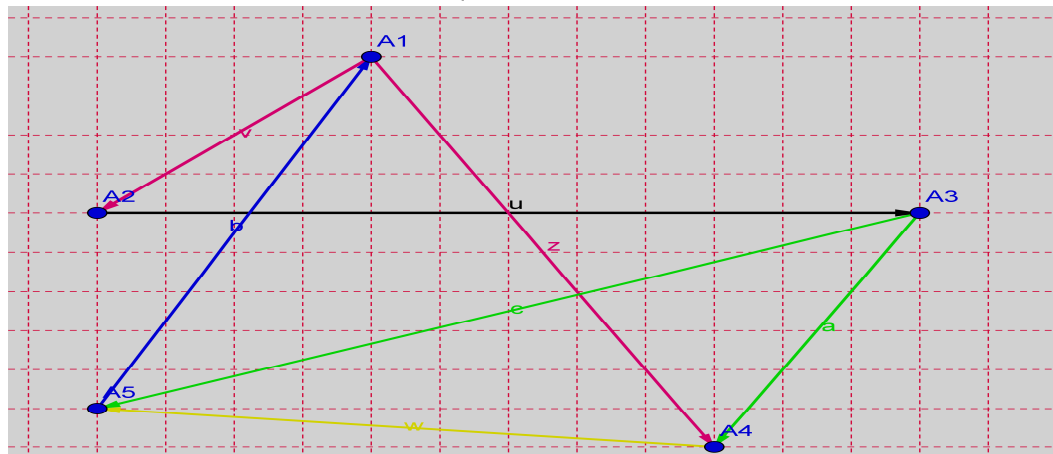
Σχηματίστε τον  $A_{3 \times 3}$ , αν ισχύει ότι  $a_{ij} = 2i + 3j$

Είναι

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

#### Εφαρμογή 5

Το  $A_i A_j$  δηλώνει ότι το  $A_i$  επηρεάζει το  $A_j$ . Περιγράψτε τη σχέση επιρροής, με πίνακα  $[a_{ij}]$ , σημειώνοντας  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν το } A_i \text{ επηρεάζει το } A_j \\ 0, & \text{όταν διαφορετικά} \end{cases}$



Είναι

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Μπορώ να θεωρήσω ότι τα σημεία παριστάνουν τα μέλη μίας ομάδας ανθρώπων (ή ομάδες συμφερόντων ή επιχειρήσεις ή κράτη και μελετούμε τις μεταξύ τους σχέσεις επιρροής), άρα η θεωρία πινάκων είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς τομείς της επιστήμης. Επίσης φαίνεται πόσα και ποια άτομα, πρέπει να μεσολαβήσουν ώστε να φτάσει μία πληροφορία από τον πομπό στον δέκτη, άρα να τη γνωρίζουν.

## 1.2 Είδη πινάκων

### 1.2.1 Πίνακας στοιχείο

Είναι ο πίνακας που έχει μία γραμμή και μία στήλη, άρα περιέχει ένα στοιχείο και η γενική του μορφή είναι  $A = [a_{11}]$  **Π.χ.**  $A_{1 \times 1} = [9]$ ,  $B_{1 \times 1} = [007]$

### 1.2.2 Πίνακας (ή διάνυσμα) γραμμή

Είναι ο πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή ( $\mu = 1$ ) και η γενική μορφή του είναι

$$A = [\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13} \quad \alpha_{14} \quad \dots \quad \alpha_{1v-1} \quad \alpha_{1v}]$$

$$\text{Π.χ. } A_{1 \times 4} = [-7 \quad \sqrt{5} \quad 8 \quad \cos 45^\circ], B_{1 \times 3} = [0 \quad 0 \quad 7], \Gamma_{1 \times 2} = [-2 \quad \sin 30^\circ]$$

### 1.2.3 Πίνακας (ή διάνυσμα) στήλη

Είναι ο πίνακας που έχει μόνο μία στήλη ( $\nu = 1$ ) και η γενική μορφή του είναι

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \dots \\ \alpha_{\mu-11} \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix} \quad \text{Π.χ. } A_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3,6 \end{bmatrix}, \Gamma_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \ln 8 \end{bmatrix}$$

### 1.2.4 Τετραγωνικός

Είναι ο πίνακας που έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ( $\mu = \nu$ ). Αν  $\nu$  είναι το πλήθος γραμμών και στηλών, τότε έχω τον πίνακα  $A_{\nu \times \nu}$

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Π.χ. } B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & \pi \\ 0 & 6 & -5 & \sin 90^\circ \\ 3 & 7 & \sqrt{7} & \frac{3}{5} \\ 4 & 8 & e & 7,2 \end{bmatrix}, \Delta_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \Gamma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

**Κύρια** (ή πρωτεύουσα) **διαγώνιος**, ενός τετραγωνικού πίνακα  $\nu \times \nu$ , είναι η διαγώνιος που περιέχει τα στοιχεία  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, \nu$ ) που έχουν  $i = j$  δηλαδή, περιέχει τα στοιχεία  $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$  που ονομάζονται **πρωτεύοντα στοιχεία** του πίνακα.

Στον τετραγωνικό πίνακα, τα στοιχεία  $a_{ij}$  που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο, έχουν την ιδιότητα  $i < j$ , ενώ όσα βρίσκονται κάτω από αυτήν, έχουν την ιδιότητα  $i > j$

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

**Δευτερεύουσα διαγώνιος** ενός τετραγωνικού πίνακα  $\nu \times \nu$  ονομάζεται η διαγώνιος που περιέχει τα στοιχεία  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, \nu$ ) για τα οποία ισχύει ότι  $i + j = \nu + 1$

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \text{ με } 1+2 = 2+1 = 3, \quad A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \text{ με } 1+3 = 2+2 = 3+1 = 4$$

### 1.2.5 Κλιμακωτός άνω

Είναι ο πίνακας  $\mu \times \nu$  που όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα κάτω από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν, δηλαδή  $a_{ij} = 0$  όταν  $i > j$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dots & \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3\nu-1} & \alpha_{3\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & \dots & \alpha_{4\nu-1} & \alpha_{4\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{\mu-1\nu-1} & \alpha_{\mu-1\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{Π.χ. } A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

### 1.2.6 Κλιμακωτός κάτω

Είναι ο πίνακας  $\mu \times \nu$  που όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα πάνω από την κύρια

διαγώνιο, είναι μηδέν. Δηλαδή  $a_{ij} = 0$  όταν  $i < j$  Π.χ.  $A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 4 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

### 1.2.7 Τριγωνικός άνω

Είναι ο τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα κάτω από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν, δηλαδή  $a_{ij} = 0$  όταν  $i > j$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dots & \alpha_{1\nu-1} & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3\nu-1} & \alpha_{3\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & \dots & \alpha_{4\nu-1} & \alpha_{4\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{\nu-1\nu-1} & \alpha_{\nu-1\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{Π.χ. } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

### 1.2.8 Τριγωνικός κάτω

Είναι ο τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του, τα ευρισκόμενα πάνω από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν, δηλαδή  $a_{ij} = 0$  όταν  $i < j$

$$\text{Π.χ. } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

### Παρατήρηση 1

Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός πίνακας.

$$\text{Πράγματι, } \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ bx + cy & cz \end{pmatrix}$$

### 1.2.9 Διαγώνιος

Είναι ο τετραγωνικός πίνακας που όσα στοιχεία του δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο, είναι μηδέν, δηλαδή  $a_{ij} = 0$  όταν  $i \neq j$ . Κάθε διαγώνιος πίνακας είναι

$$\text{τριγωνικός άνω και κάτω. Π.χ. } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Εφαρμογή 6

$$\text{Βρείτε τον } x \in \mathbb{R} \text{ ώστε να είναι διαγώνιος ο } A = \begin{bmatrix} 12 & x^2 - 1 \\ x + 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

### 1.2.10 Ανάστροφος

Ανάστροφος του  $A_{\mu \times \nu} = [a_{ij}]$ , είναι ο  $A_{\nu \times \mu}^T = [a_{ji}]$ , δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει από τον  $A$ , όταν οι γραμμές του γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές, με την ίδια τάξη. Προφανώς, ανάστροφος του αναστρόφου είναι ο αρχικός πίνακας, δηλαδή  $(A^T)^T = A$

$$\text{Π.χ. } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, A_{2 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, B_{3 \times 3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

### 1.2.11 Συμμετρικός

Είναι ο τετραγωνικός πίνακας  $A_{\nu \times \nu}$  που τα στοιχεία του τα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή  $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ . Άρα, αν  $A_{\nu \times \nu} = A_{\nu \times \nu}^T$

$$\text{τότε ο } A_{\nu \times \nu} \text{ είναι συμμετρικός. Π.χ. } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

### 1.2.12 Αντισυμμετρικός

Είναι ο τετραγωνικός πίνακας  $A_{\nu \times \nu}$  που τα στοιχεία του τα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο είναι αντίθετα και όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι

μηδέν, δηλαδή  $\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{όταν } i=j \\ -\alpha_{ji} & , \text{όταν } i \neq j \end{cases}$  Άρα, αν  $A_{\nu \times \nu} = -A_{\nu \times \nu}^T$ , τότε ο  $A_{\nu \times \nu}$  είναι

αντισυμμετρικός. **Π.χ.**  $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

## Παρατήρηση 2

Κάθε τετραγωνικός πίνακας, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

### 1.2.13 Μηδενικός

Είναι ο πίνακας που κάθε στοιχείο του είναι μηδέν. Συμβολίζεται ως  $O_{\mu \times \nu}$  ή όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ως  $O$ . Επειδή ο πραγματικός αριθμός 0 είναι μοναδικός, έπεται ότι ο μηδενικός πίνακας είναι μοναδικός, για κάθε διάσταση πίνακα.

**Π.χ.**  $O_{1 \times 1} = [0]$ ,  $O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $O_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

### 1.2.14 Αντίθετος

Αντίθετος του  $A_{\mu \times \nu}$ , είναι ο ιδίων διαστάσεων πίνακας  $-A$ , που όλα τα στοιχεία του είναι αντίθετα των αντίστοιχων τους στοιχείων του  $A$ . Ισχύει ότι

$-(-A) = A$  **Π.χ.** Αντίθετος του  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  είναι ο  $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$

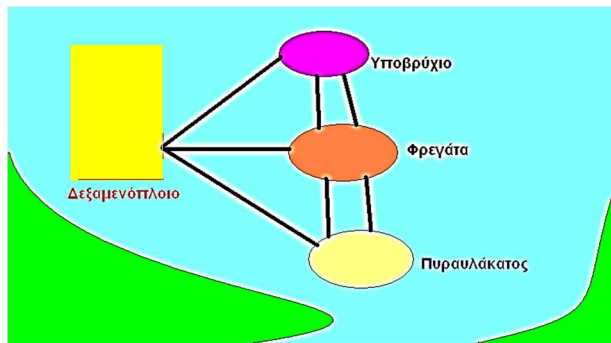
### 1.2.15 Μοναδιαίος

Είναι ο διαγώνιος πίνακας που όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι 1 ( $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \dots = \alpha_{\nu \nu} = 1$ ), συμβολίζεται ως  $I_{\nu}$ , ή απλούστερα ως  $I$  όταν είναι φανερός ο τύπος του από τις πράξεις με τους άλλους πίνακες.

**Π.χ.**  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $I_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

## Εφαρμογή 7

Κατά τη διάρκεια άσκησης, 4 πλοία παίρνουν τις παρακάτω θέσεις (1–δεξαμενόπλοιο, 2–υποβρύχιο, 3–φρεγάτα, 4– πυραυλάκατος) και επικοινωνούν, μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Κατασκευάστε πίνακα  $A = [\alpha_{ij}]$ , που να δείχνει το πλήθος των διαύλων επικοινωνίας, μεταξύ των πλοίων (Π.χ.  $\alpha_{34} = 2$ ) Τι είδους είναι ο πίνακας  $A$ ;



	Δ/Ξ	Υ/Β	Φ/Γ	Π/Ρ
Δ/Ξ	0	1	1	1
Υ/Β	1	0	2	0
Φ/Γ	1	2	0	2
Π/Ρ	1	0	2	0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Το πλήθος των διαύλων επικοινωνίας, περιγράφεται από τον παραπάνω πίνακα διπλής εισόδου, από τον οποίο προκύπτει ο συμμετρικός πίνακας  $A$  που τα στοιχεία της κύρια διαγωνίου του είναι 0

### 1.3 Ισότητα πινάκων

Δύο ιδίων διαστάσεων πίνακες  $A, B$  είναι ίσοι όταν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, οπότε γράφω  $A=B$ . Δύο ή περισσότερα στοιχεία ονομάζονται αντίστοιχα, όταν βρίσκονται στην ίδια γραμμή και στήλη σε δύο ή περισσότερους πίνακες.

#### Εφαρμογή 8

Βρείτε τον  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $A=B$ , αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει τα αντίστοιχα στοιχεία να είναι ίσα, ένα προς ένα. Άρα,  $\alpha_{11}=2=\beta_{11}$ ,  $\alpha_{12}=3=\beta_{12}$ ,  $\alpha_{21}=x=5=\beta_{21}$ ,  $\alpha_{22}=1=\beta_{22}$ . Άρα,  $x=5$

#### Εφαρμογή 9

Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3x \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2x & 5 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A \neq B$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

Για να είναι  $A=B$ , πρέπει  $\begin{cases} 3x=6 \\ 6=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$  άτοπο

#### Εφαρμογή 10

Βρείτε αν υπάρχουν, τα  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$  Πρέπει  $x=5$

#### Εφαρμογή 11

Βρείτε αν υπάρχουν, τα  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$  Ισχύει  $\forall x \in \mathbb{R}$

**Εφαρμογή 12**

Βρείτε αν υπάρχουν, τα  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$

Δεν υπάρχουν  $x \in \mathbb{R}$  διότι  $\alpha_{11} = 10 \neq 2 = \beta_{11}$

**Εφαρμογή 13**

Βρείτε αν υπάρχουν, τα  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  Πρέπει  $x = 0$

**Εφαρμογή 14**

Βρείτε αν υπάρχουν, τα  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $\begin{bmatrix} 12 & x^2 - 1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ x^2 - 4x & -7 \end{bmatrix}$

Πρέπει  $\begin{cases} x^2 - 1 = 8 \\ -3 = x^2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = 1 \text{ ή } x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

**1.3.1 Ιδιότητες της ισότητας πινάκων**

Από τις ιδιότητες της ισότητας των πραγματικών αριθμών, έπεται ότι η ισότητα των πινάκων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

**1** Κάθε πίνακας  $A$ , είναι ίσος με τον εαυτό του, δηλαδή  $A = A$  (ανακλαστική)

**2** Αν  $A = B$ , τότε και  $B = A$  (συμμετρική)

**3** Αν  $A = B$  και  $B = \Gamma$ , τότε  $A = \Gamma$  (μεταβατική)

**1.4 Πρόσθεση πινάκων**

Το σκάφος Ικαρία 1, έχει κόψει για τη 2<sup>η</sup> εβδομάδα του Αυγούστου εισιτήρια όπως φαίνονται, ανά ημέρα και κατηγορία, στον πίνακα  $A$ . Λόγω βλάβης, δεν θα εκτελέσει τα προγραμματισμένα δρομολόγια του και θα αντικατασταθεί από το σκάφος Ικαρία 2, που όμως έχει κόψει για την ίδια εβδομάδα εισιτήρια όπως φαίνονται, ανά ημέρα και κατηγορία, στον πίνακα  $B$ .

	Φ/Γ	I.X.	MOT.	VIP	ΟΙΚ.		Φ/Γ	I.X.	MOT.	VIP	ΟΙΚ.
$A =$	50	70	30	80	600	Δευτέρα	25	30	40	85	300
	40	60	40	70	500	Τρίτη	20	30	40	76	200
	30	80	50	90	400	Τετάρτη	15	40	50	98	200
	50	90	60	100	700	Πέμπτη	25	50	60	104	300
	20	100	150	150	900	Παρασκευή	10	80	150	153	200
	20	150	100	100	800	Σάββατο	10	700	100	102	400
	45	100	90	90	700	Κυριακή	40	60	90	91	300
							$B =$				

Ο συνολικός αριθμός των φορτηγών (Φ/Γ), των ιδιωτικής χρήσης αμαξιών (I.X.), των μοτοποδήλατων (MOT.), των επιβατών διακεκριμένης (VIP) και οικονομικής (ΟΙΚ.) θέσης που θα χρειασθεί να μεταφέρει ανά ημέρα το Ικαρία 2, είναι ένας πίνακας  $\Gamma$ , του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων

στοιχείων των A, B. Ο Γ ονομάζεται **άθροισμα** των δύο προηγούμενων πινάκων. Η πράξη με την οποία βρίσκω το άθροισμα δύο πινάκων, ονομάζεται **πρόσθεση πινάκων**.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 50+25 & 70+30 & 30+40 & 80+85 & 600+300 \\ 40+20 & 60+30 & 40+40 & 70+76 & 500+200 \\ 30+15 & 80+40 & 50+50 & 90+98 & 400+200 \\ 50+25 & 90+50 & 60+60 & 100+104 & 700+300 \\ 20+10 & 100+80 & 150+150 & 150+153 & 900+200 \\ 20+10 & 150+700 & 100+100 & 100+102 & 800+400 \\ 45+40 & 100+60 & 90+90 & 90+91 & 700+300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 100 & 70 & 165 & 900 \\ 60 & 90 & 80 & 146 & 700 \\ 45 & 120 & 100 & 188 & 600 \\ 75 & 140 & 120 & 204 & 1000 \\ 30 & 180 & 300 & 303 & 1100 \\ 30 & 850 & 200 & 202 & 1200 \\ 85 & 160 & 180 & 181 & 1000 \end{bmatrix}$$

**Ορισμός** Άθροισμα δύο  $\mu \times \nu$  πινάκων  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [\beta_{ij}]$ , ονομάζεται ο  $\mu \times \nu$  πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A, B δηλαδή  $A + B = [a_{ij} + \beta_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \dots & \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\mu 1} & \beta_{\mu 2} & \beta_{\mu 3} & \dots & \beta_{\mu \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \alpha_{13} + \beta_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} + \beta_{1\nu} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \alpha_{23} + \beta_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} + \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} + \beta_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} + \beta_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} + \beta_{\mu 3} & \dots & \alpha_{\mu \nu} + \beta_{\mu \nu} \end{bmatrix}$$

Δεν ορίζεται άθροισμα πινάκων διαφορετικού τύπου.

#### 1.4.1 Ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων, είναι ανάλογες με τις ιδιότητες της πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών. Έστω A, B, Γ πίνακες  $\mu \times \nu$  και **O** ο αντίστοιχος μηδενικός πίνακας.

**1**  $A + B = B + A$  Αντιμεταθετική

**2**  $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$  Προσεταιριστική

Το  $(A+B)+\Gamma$  ονομάζεται άθροισμα των  $A, B, \Gamma$  και συμβολίζεται ως  $A+B+\Gamma$ . Η προσεταιριστική ιδιότητα, επιτρέπει να γράφω  $A+B+\Gamma$  για καθένα από τα ίσα αθροίσματα  $A+(B+\Gamma), (A+B)+\Gamma$

Ομοίως, αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  πίνακες ίδιων διαστάσεων, τότε  $[(A+B)+\Gamma]+\Delta=(A+B)+(\Gamma+\Delta)=[A+(B+\Gamma)]+\Delta=A+[B+(\Gamma+\Delta)]=A+[(B+\Gamma)+\Delta]=[B+A]+\Gamma+\Delta = \kappa.ο.κ.$

Γενικότερα, με παρόμοιο τρόπο ορίζεται το άθροισμα περισσοτέρων από τρεις ( $\kappa \geq 3$ ) πινάκων διαστάσεων  $\mu \times \nu, A_1, A_2, \dots, A_\kappa$ , συμβολίζεται ως  $A_1 + A_2 + \dots + A_\kappa$  και είναι ίδιο, κατά οιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί η πρόσθεση, διότι ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα.

$$3 \quad A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{O}$$

$$4 \quad A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A \quad \text{Ουδέτερο στοιχείο}$$

$$5 \quad \text{Αν } A, B \text{ είναι πίνακες ίδιων διαστάσεων, τότε } (A+B)^T = A^T + B^T$$

### Πρόταση 1

Για κάθε  $A_{\mu \times \nu}$ , υπάρχει ένα και μόνο ένα ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, δηλαδή ο πίνακας  $\mathbf{O}$  που επαληθεύει την ανωτέρω σχέση, είναι μοναδικός.

#### Απόδειξη

Έστω ότι ο  $A_{\mu \times \nu}$  έχει και έναν άλλο, εκτός τον  $\mathbf{O}$  προφανώς ίδιων διαστάσεων, πίνακα

$\mathbf{O}'$  για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A \quad (1), \quad A + \mathbf{O}' = \mathbf{O}' + A = A \quad (2)$$

$$\text{Η (1) για } A = \mathbf{O}' \text{ γίνεται } \mathbf{O}' + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{O}' = \mathbf{O}' \quad (3)$$

$$\text{Η (2) για } A = \mathbf{O} \text{ γίνεται } \mathbf{O} + \mathbf{O}' = \mathbf{O}' + \mathbf{O} = \mathbf{O} \quad (4)$$

Από τις (3), (4) έπεται ότι, αφού είναι ίσα τα πρώτα μέλη, είναι ίσα και τα δεύτερα. Άρα  $\mathbf{O} = \mathbf{O}'$

### Πρόταση 2

Για κάθε πίνακα  $A$  υπάρχει μόνο ένας αντίθετος πίνακας.

#### Απόδειξη

Έστω ότι ο  $A$  δεν έχει αντίθετο μόνο τον  $-A$ , αλλά και τον  $(-A')$ . Τότε, πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω ισότητες

$$A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{O} \quad \text{και} \quad A + (-A') = (-A') + A = \mathbf{O}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει

$$(-A') = (-A') + \mathbf{O} = (-A') + [A + (-A)] = [(-A') + A] + (-A) = \mathbf{O} + (-A) = (-A)$$

Άρα οι  $-A, (-A')$  συμπίπτουν.

### Εφαρμογή 15

Χαρακτηρίστε ως σωστές ( $\checkmark$ ) ή λάθος ( $\times$ ), τις παρακάτω προτάσεις.

1 Το άθροισμα δύο πινάκων  $2 \times 3$  είναι πίνακας ίδιων διαστάσεων.  $\checkmark$

2 Ο  $I_2$  έχει 2 στοιχεία.  $\times$

3 Ο  $I_2$  έχει 2 στοιχεία διάφορα του μηδέν.  $\checkmark$

4 Οι μοναδιαίοι πίνακες, είναι συμμετρικοί.  $\checkmark$

5 Οι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων  $n \times n$ , έχουν  $n^2$  στοιχεία.  $\checkmark$

6 Ο ανάστροφος ενός πίνακα γραμμής, είναι ένας πίνακας στήλης.  $\checkmark$

- 7 Αν οι A, B, Γ είναι διαστάσεων 2x3 τότε και ο (A + B + Γ) είναι 2x3 ✓  
 8 Η κύρια διαγώνιος ενός πίνακα 3x3, περιέχει 3 τουλάχιστον στοιχεία. ✗  
 9 Οι μοναδιαίοι πίνακες, είναι πάντα διαστάσεων 2x2 ή 3x3 ✗  
 10 Οι μηδενικοί πίνακες είναι πάντα τετραγωνικοί. ✗ Επεξήγηση  $\mathbf{O}_{1 \times 3}$   
 11 Η κύρια διαγώνιος ενός τετραγωνικού πίνακα, έχει περισσότερα στοιχεία από τη δευτερεύουσα διαγώνιο. ✗  
 12 Οι μηδενικοί πίνακες, είναι ίσοι μεταξύ τους. ✗ Επεξήγηση  $\mathbf{O}_{2 \times 2} \neq \mathbf{O}_{2 \times 3} \neq \mathbf{O}_{3 \times 3}$   
 13 Το άθροισμα δύο διαγωνίων πινάκων, είναι διαγώνιος πίνακας. ✓

Επεξήγηση  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & 0 \\ 0 & y+b \end{pmatrix}$

14 Οι μηδενικοί πίνακες, είναι διαγώνιοι. ✗ Επεξήγηση.  $\mathbf{O}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 15 Οι μοναδιαίοι πίνακες, είναι κλιμακωτοί άνω. ✗

Επεξήγηση  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16 Οι μηδενικοί πίνακες, είναι συμμετρικοί. ✗ Επεξήγηση  $\mathbf{O}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 17 Αν A τετραγωνικός και  $A^T$  ο ανάστροφος του, ο (A +  $A^T$ ) είναι συμμετρικός. ✓

Επεξήγηση  $A = \begin{pmatrix} x & a \\ b & y \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} x & b \\ a & y \end{pmatrix}, A + A^T = \begin{pmatrix} 2x & a+b \\ a+b & 2y \end{pmatrix}$ .

### Εφαρμογή 16

Οι ημερήσιες πωλήσεις εφημερίδων, για 2 συνεχόμενες ημέρες, αριθμούν σε φύλλα όπως δείχνουν οι παρακάτω πίνακες.

1 <sup>η</sup> Ημέρα	Αθλητικές	Οικονομικές	Πολιτικές
Πρωινές	100	200	300
Απογευματινές	80	50	900

2 <sup>η</sup> Ημέρα	Αθλητικές	Οικονομικές	Πολιτικές
Πρωινές	200	100	100
Απογευματινές	180	30	500

Κατασκευάστε τους πίνακες A, B των πωλήσεων της 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup> ημέρας αντίστοιχα, υπολογίστε τον A+B και ερμηνεύστε τον.

Αθλ. Οικ. Πολ.

$A = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 80 & 50 & 900 \end{bmatrix}$  Πρωινές  
 Απογευματινές  $B = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 100 \\ 180 & 30 & 500 \end{bmatrix}$

Αθλ. Οικ. Πολ.

$A+B = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 80 & 50 & 900 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & 100 & 100 \\ 180 & 30 & 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 300 & 400 \\ 260 & 80 & 1400 \end{bmatrix}$  Πρωινές  
 Απογευματινές

Ο  $A+B$  εκφράζει τις συνολικές πωλήσεις των εφημερίδων (πρωινών και απογευματινών), το διήμερο, ανά κατηγορία.

### Άσκηση 1

Οι ημερήσιες πωλήσεις ενός αυτόματου πωλητή, δίνονται από τους πίνακες  $A$ ,  $B$  για τις πρωινές και για τις απογευματινές ώρες, αντίστοιχα. Βρείτε και ερμηνεύστε τον  $A+B$

$$A = \begin{array}{c} \text{Cola} \quad \text{H}_2\text{O} \quad \text{Τσάι} \\ \begin{bmatrix} 5 & 80 & 40 \\ 3 & 70 & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1^{\text{η}} \text{ Μηχανή} \\ 2^{\text{η}} \text{ Μηχανή} \end{array} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \text{Cola} \quad \text{H}_2\text{O} \quad \text{Τσάι} \\ \begin{bmatrix} 30 & 100 & 60 \\ 20 & 90 & 50 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1^{\text{η}} \text{ Μηχανή} \\ 2^{\text{η}} \text{ Μηχανή} \end{array} \end{array}$$

### Άσκηση 2

Η ετήσια κατανάλωση ρεύματος 4 οικογενειών φαίνεται στον πίνακα.

	<b>Α' Τετράμηνο</b> 14.01.2025–15.05.2025	<b>Β' Τετράμηνο</b> 16.05.2025–17.09.2025	<b>Γ' Τετράμηνο</b> 18.09.2025–19.01.2026
1 <sup>η</sup> Οικογένεια	850 <i>kwh</i>	300 <i>kwh</i>	650 <i>kwh</i>
2 <sup>η</sup> Οικογένεια	1200 <i>kwh</i>	600 <i>kwh</i>	900 <i>kwh</i>
3 <sup>η</sup> Οικογένεια	----	300 <i>kwh</i>	500 <i>kwh</i>
4 <sup>η</sup> Οικογένεια	1500 <i>kwh</i>	600 <i>kwh</i>	1000 <i>kwh</i>

Αν η *kwh* κοστίζει 0,82 € και ο λογαριασμός κάθε τετράμηνο επιβαρύνεται με πάγια χρέωση 10 €, με δημοτικά τέλη 20 € και με 10 € για την ΕΡΤ, παραστήστε με ένα πίνακα  $B$  τα ποσά που πληρώνει κάθε οικογένεια, ανά τετράμηνο. Αν αυξηθεί η τιμή της κλοβατώρας στο 1 €, πόσο επιβαρύνονται ετησίως οι οικογένειες; Αν η 4<sup>η</sup> οικογένεια μειώσει την κατανάλωση κατά 25%, πόσα χρήματα θα εξοικονομήσει;

### Άσκηση 3

Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $\Gamma = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ , βρείτε τους  $A+B$ ,  $A+\Gamma$ ,  $B+\Gamma$ ,  $A+B+\Gamma$

### 1.5 Αφαίρεση πινάκων

Πλοίο αναχωρεί για Ικαρία και Σάμο μεταφέροντας οχήματα και επιβάτες ανά κατηγορία, σύμφωνα με τον πίνακα  $A$ . Αν στην Ικαρία αποβιβασθούν οχήματα και επιβάτες σύμφωνα με τον πίνακα  $B$ , πόσοι επιβάτες και οχήματα θα αποβιβασθούν στη Σάμο;

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 30 \\ 160 \\ 200 \\ 300 \\ 1.000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Φορτηγά} \\ \text{I.X.} \\ \text{Δίκυκλα} \\ \text{V.I.P.} \\ \text{Οικονομική} \end{array} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10 \\ 90 \\ 120 \\ 100 \\ 500 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Φορτηγά} \\ \text{I.X.} \\ \text{Δίκυκλα} \\ \text{V.I.P.} \\ \text{Οικονομική} \end{array} \end{array}$$

Η διαφορά οχημάτων και επιβατών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο είναι διαφορά των αντίστοιχων στοιχείων των  $A$ ,  $B$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 30-10 \\ 160-90 \\ 200-120 \\ 300-100 \\ 1.000-500 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Φορτηγά} \\ \text{I.X.} \\ \text{Δίκυκλα} \\ \text{V.I.P.} \\ \text{Οικονομική} \end{array}$$

Άρα,  $\Gamma = \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \\ 80 \\ 200 \\ 500 \end{bmatrix}$  επιβάτες και οχήματα, ανά κατηγορία, θα αποβιβασθούν στη Σάμο.

**Ορισμός** Αν  $A_{\mu\nu} = [a_{ij}]$ ,  $B_{\mu\nu} = [\beta_{ij}]$ , ονομάζεται **διαφορά** του B από τον A, ο  $\mu\nu$  πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι η διαφορά των αντίστοιχων στοιχείων των A, B και συμβολίζεται  $A - B$ , δηλαδή  $A - B = [a_{ij} - \beta_{ij}] = A + (-B)$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\mu 1} & \beta_{\mu 2} & \beta_{\mu 3} & \dots & \beta_{\mu\nu} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11} & \alpha_{12} - \beta_{12} & \alpha_{13} - \beta_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} - \beta_{1\nu} \\ \alpha_{21} - \beta_{21} & \alpha_{22} - \beta_{22} & \alpha_{23} - \beta_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} - \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} - \beta_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} - \beta_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} - \beta_{\mu 3} & \dots & \alpha_{\mu\nu} - \beta_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Για να ορίζεται η διαφορά δύο πινάκων, πρέπει αυτοί να είναι ιδίων διαστάσεων. Η πράξη με την οποία βρίσκω τη διαφορά δύο πινάκων, λέγεται **αφαίρεση πινάκων**. Προφανώς ισχύει ότι  $A - \mathbf{O} = A$

### 1.5.1 Ιδιότητες της αφαίρεσης πινάκων

**1** Αν  $A_{\mu\nu}$ , τότε  $(-A)^T = -A^T$

**2** Αν  $A_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}$  τότε  $A - (B + \Gamma) = A - B - \Gamma$ ,  $-(A + B) = -A - B$

**3** Στο σύνολο  $\mathbb{R}$ , η εξίσωση  $\alpha + x = \beta$  έχει μοναδική λύση  $x = \beta - \alpha$ . Ομοίως, στο σύνολο  $\Pi_{\mu\nu}$  των πινάκων με διαστάσεις  $\mu\nu$ , ισχύει ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} A + X = B \Leftrightarrow (-A) + A + X = (-A) + B \Leftrightarrow \mathbf{O} + X = B - A \Leftrightarrow X = B - A \\ X + A = B \Leftrightarrow X + A + (-A) = B + (-A) \Leftrightarrow X + \mathbf{O} = B - A \Leftrightarrow X = B - A \end{array} \right\}$$

Μία ισότητα μεταξύ πινάκων που περιέχει έναν άγνωστο πίνακα, ονομάζεται **εξίσωση με πίνακες**. Η διαδικασία που ακολουθείται, για να βρεθεί ο άγνωστος πίνακας  $X$ , ονομάζεται **επίλυση εξίσωσης**.

**4** Στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει ότι  $a+x=b+x \Rightarrow a=b$ . Ομοίως, στο  $\Pi_{\mu\nu}$  ισχύει ότι  $A+X=B+X \Rightarrow A=B$  **Νόμος της διαγραφής**

**Π.χ.** Αν  $A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$  δείξτε ότι αν  $A=B$  τότε  $A-B=O$

Πράγματι,  $A=B$  άρα  $A+(-B)=B+(-B)=O$  συνεπώς  $A-B=O$

### Εφαρμογή 17

Χαρακτηρίστε ως σωστές (✓) ή λάθος (✗), τις παρακάτω προτάσεις.

**1** Αν οι  $A, B, \Gamma$  είναι διαστάσεων  $2 \times 3$  τότε ο  $(A+B-\Gamma)^T$  είναι  $2 \times 3$  ✗

**2** Αν ο  $A$  είναι τετραγωνικός, τότε ο  $A-A^T$  είναι αντισυμμετρικός. ✓

Επεξήγηση

$$A = \begin{pmatrix} k & n \\ m & \ell \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} k & m \\ n & \ell \end{pmatrix}, A - A^T = \begin{pmatrix} k & n \\ m & \ell \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & m \\ n & \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n-m \\ m-n & 0 \end{pmatrix}$$

**3** Αν οι  $A, B$  είναι συμμετρικοί, τότε οι  $(A+B), (A-B)$  είναι συμμετρικοί. ✓

Επεξήγηση

$$A = \begin{pmatrix} k & m \\ m & n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} k+x & m+y \\ m+y & n+z \end{pmatrix}, A-B = \begin{pmatrix} k-x & m-y \\ m-y & n-z \end{pmatrix}$$

### Άσκηση 4

Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -11 \end{bmatrix}$  βρείτε τους  $-(A+B)+\Gamma, A+(B+\Gamma),$

$(-A)+(-B), -(A+B), A-(B-\Gamma), (A-B)+\Gamma, A+A$

### 1.6 Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί πίνακα

Εταιρεία αποφασίζει εφέτος να διπλασιάσει τα bonus, που χορηγεί στους αξιωματικούς της. Τα περσινά bonus ανά ειδικότητα και βαθμό, φαίνονται στον πίνακα  $A$ . Υπολογίστε τα εφετινά bonus.

$$A = \begin{matrix} & \text{Πλ.} & \text{Μηχ.} \\ \begin{bmatrix} 10.000 & 9.000 \\ 8.000 & 7.000 \\ 6.000 & 5.000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Α' τάξεως} \\ \text{Β' τάξεως} \\ \text{Γ' τάξεως} \end{matrix} \end{matrix}$$

Τα εφετινά bonus φαίνονται στον πίνακα  $B$ , που είναι ίδιων διαστάσεων με τον  $A$  και κάθε στοιχείο του προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου στοιχείου του  $A$  επί 2

$$B = \begin{matrix} & \text{Πλ.} & \text{Μηχ.} \\ \begin{bmatrix} 20.000 & 18.000 \\ 16.000 & 14.000 \\ 12.000 & 10.000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Α' τάξεως} \\ \text{Β' τάξεως} \\ \text{Γ' τάξεως} \end{matrix} \end{matrix}$$

**Ορισμός** Γινόμενο του  $\lambda \in \mathbb{R}$  επί τον  $A = [a_{ij}]$ , ονομάζεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσω κάθε στοιχείο του  $A$  επί  $\lambda$  και συμβολίζεται με  $\lambda \cdot A$  ή  $\lambda A$ , δηλαδή,  $\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}]$ . Η πράξη με την οποία βρίσκω το γινόμενο αριθμού επί πίνακα, ονομάζεται **πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί πίνακα**. Στον παραπάνω ορισμό δεν αναφέρθηκαν οι διαστάσεις του  $A$ , άρα ορίσθηκε ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με πίνακα τυχαίων διαστάσεων.

$$A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1v-1} & \alpha_{1v} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2v-1} & \alpha_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{iv-1} & \alpha_{iv} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu-11} & \alpha_{\mu-12} & \dots & \alpha_{\mu-1j} & \dots & \alpha_{\mu-1v-1} & \alpha_{\mu-1v} \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \dots & \alpha_{\mu j} & \dots & \alpha_{\mu v-1} & \alpha_{\mu v} \end{bmatrix} \text{ τότε, } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} \lambda \cdot \alpha_{11} & \lambda \cdot \alpha_{12} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{1j} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{1v-1} & \lambda \cdot \alpha_{1v} \\ \lambda \cdot \alpha_{21} & \lambda \cdot \alpha_{22} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{2j} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{2v-1} & \lambda \cdot \alpha_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot \alpha_{i1} & \lambda \cdot \alpha_{i2} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{ij} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{iv-1} & \lambda \cdot \alpha_{iv} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot \alpha_{\mu-11} & \lambda \cdot \alpha_{\mu-12} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{\mu-1j} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{\mu-1v-1} & \lambda \cdot \alpha_{\mu-1v} \\ \lambda \cdot \alpha_{\mu1} & \lambda \cdot \alpha_{\mu2} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{\mu j} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{\mu v-1} & \lambda \cdot \alpha_{\mu v} \end{bmatrix}$$

Στην  $\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}]$  η τελεία ( $\cdot$ ) στο 1<sup>ο</sup> μέλος, συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού επί πίνακα που δίνει αποτέλεσμα πίνακα, ενώ η τελεία ( $\cdot$ ), στο 2<sup>ο</sup> μέλος, συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών. Επειδή ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών είναι αντιμεταθετική πράξη, δηλαδή  $\lambda \cdot a_{ij} = a_{ij} \cdot \lambda$  γράφω  $\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}] = [a_{ij} \cdot \lambda]$

### 1.6.1 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί πίνακα

Αν  $A, B$  πίνακες διαστάσεων  $\mu \times \nu$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

**1**  $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$

**2**  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

**3**  $\kappa(\lambda A) = (\kappa \lambda)A$

**4**  $1A = A$  όπου 1 το μοναδιαίο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

**5** Αν  $\mathbf{O}$  ο μηδενικός πίνακας τότε  $\lambda \mathbf{O} = \mathbf{O}$

**6** Αν  $\lambda A = \mathbf{O}$  τότε  $\lambda = 0$  ή  $A = \mathbf{O}$

**7** Το γινόμενο του πραγματικού αριθμού 0 επί τον τυχαίο πίνακα  $A$  είναι ο αντίστοιχος μηδενικός πίνακας, δηλαδή  $0A = \mathbf{O}$  Προκύπτει από την  $\lambda A$ , για  $\lambda = 0$

**8**  $(-1)A = -A$  Προκύπτει από την  $\lambda A$ , για  $\lambda = -1$

**9** Αν  $A=B$  τότε  $\lambda A = \lambda B$

**10** Αν  $A_{\mu\nu}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$  τότε  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

**11** Αν  $\lambda A = \lambda B$  και  $\lambda \neq 0$  τότε  $A = B$

$$9 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix}$$

Αν  $0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$  τότε δεν έπεται ότι  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

**12** Αν  $\kappa A = \lambda A$  και  $A \neq \mathbf{O}$  τότε  $\kappa = \lambda$

Αν  $5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  τότε δεν έπεται ότι  $5 = k$

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 5 = k$$

### Εφαρμογή 18

Ο  $A$  δείχνει τις τιμές πώλησης τριών ηλεκτρικών συσκευών σε δύο υποκαταστήματα. Αν γίνει έκπτωση 10%, υπολογίστε με χρήση πινάκων τις νέες τιμές.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{TV} & \text{dvd} & \text{MP3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Υποκατάστημα 1} \\ \text{Υποκατάστημα 2} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1000 & 200 & 300 \\ 1500 & 250 & 200 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Αφού τα προϊόντα πωλούνται με έκπτωση 10%, η τιμή πώλησης τους είναι το 90% της αρχικής τους τιμής ή διαφορετικά τα  $9/10$  αυτής. Οι νέες τιμές φαίνονται στον πίνακα  $B$ , για τον οποίο ισχύει ότι  $B = 0,9 \cdot A$

$$B = 0,9 \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{TV} & \text{dvd} & \text{MP3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Υποκατάστημα 1} \\ \text{Υποκατάστημα 2} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1000 & 200 & 300 \\ 1500 & 250 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & 180 & 270 \\ 1350 & 225 & 180 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

### Εφαρμογή 19

Αποδείξτε ότι το παρακάτω άθροισμα είναι διαγώνιος πίνακας.

$$\cos A \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{bmatrix} + \sin A \begin{bmatrix} \sin A & \cos A \\ -\cos A & \sin A \end{bmatrix}$$

$$\text{Πράγματι, } \cos A \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{bmatrix} + \sin A \begin{bmatrix} \sin A & \cos A \\ -\cos A & \sin A \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos A \cdot \cos A & -\sin A \cdot \cos A \\ \sin A \cdot \cos A & \cos A \cdot \cos A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin A \cdot \sin A & \cos A \cdot \sin A \\ -\cos A \cdot \sin A & \sin A \cdot \sin A \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 A & -\sin A \cdot \cos A \\ \sin A \cdot \cos A & \cos^2 A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 A & \cos A \cdot \sin A \\ -\cos A \cdot \sin A & \sin^2 A \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 A + \sin^2 A & 0 \\ 0 & \cos^2 A + \sin^2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Εφαρμογή 20

Εργοστάσιο ξυλείας χρησιμοποιεί 4 μηχανές για να φτιάξει τραπέζια, καρέκλες και κρεβάτια. Το ανά ώρα και μηχανή, πλήθος των παραγόμενων προϊόντων δίνεται από τον A. Στο τέλος μίας εργάσιμης ημέρας (8 ώρες εργασίας) πόσες μονάδες από το κάθε προϊόν, θα έχει κατασκευάσει η κάθε μηχανή;

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Τρ} & \text{Καρ} & \text{Κρεβ} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 10 & 80 & 5 \\ 30 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 70 & 5 & 20 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1^{\text{η}} \text{ μηχανή} \\ 2^{\text{η}} \text{ μηχανή} \\ 3^{\text{η}} \text{ μηχανή} \\ 4^{\text{η}} \text{ μηχανή} \end{matrix} \end{matrix}$$

Όλα τα ανωτέρω ποσά θα οκταπλασιαστούν, οπότε προκύπτει ο πίνακας B που είναι ιδίων διαστάσεων με τον A και κάθε στοιχείο του προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου στοιχείου του A, επί 8

$$B=8A=8 \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Τρ} & \text{Καρ} & \text{Κρεβ} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 10 & 80 & 5 \\ 30 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 70 & 5 & 20 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1^{\text{η}} \text{ μηχανή} \\ 2^{\text{η}} \text{ μηχανή} \\ 3^{\text{η}} \text{ μηχανή} \\ 4^{\text{η}} \text{ μηχανή} \end{matrix} \end{matrix}$$

### Εφαρμογή 21

Τα αποτελέσματα που πέτυχαν εντός και εκτός έδρας, τέσσερις ομάδες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Γράψτε τα υπό μορφή τριών πινάκων A, B, Γ που να περιέχουν αντίστοιχα, τα τρίποντα, τα δίποντα και τις ελεύθερες βολές της κάθε ομάδας. Βρείτε τον πίνακα που δίνει τους συνολικούς πόντους της κάθε ομάδας, εντός και εκτός έδρας.

Πόντοι	Τρίποντα	Τρίποντα	Δίποντα	Δίποντα	Ελεύθερες βολές	Ελεύθερες βολές
Ομάδες	Εντός έδρας	Εκτός έδρας	Εντός έδρας	Εκτός έδρας	Εντός έδρας	Εκτός έδρας
Αστραπή	10	8	21	15	10	8
Κεραυνός	9	7	18	14	12	11
Θύελλα	6	5	17	13	2	0
Ανίκητος	1	4	16	3	20	19

Οι A, B, Γ δίνουν τα τρίποντα, τα δίποντα, τις ελεύθερες βολές, αντίστοιχα, που σημειώθηκαν εντός και εκτός έδρας.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 9 & 7 \\ 6 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 21 & 15 \\ 18 & 14 \\ 17 & 13 \\ 16 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 11 \\ 2 & 0 \\ 20 & 19 \end{bmatrix}$$

Ο Δ δίνει τους συνολικούς πόντους της κάθε ομάδας.

$$\Delta = 3 \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 9 & 7 \\ 6 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 21 & 15 \\ 18 & 14 \\ 17 & 13 \\ 16 & 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 11 \\ 2 & 0 \\ 20 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 24 \\ 27 & 21 \\ 18 & 15 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 & 30 \\ 36 & 28 \\ 34 & 26 \\ 32 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 11 \\ 2 & 0 \\ 20 & 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30+42+10 & 24+30+8 \\ 27+36+12 & 21+28+11 \\ 18+34+2 & 15+26+0 \\ 6+32+20 & 12+6+19 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{Εντός} & \text{Εκτός} \\ \begin{bmatrix} 82 & 62 \\ 75 & 60 \\ 54 & 41 \\ 58 & 37 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Αστραπή} \\ \text{Κεραυνός} \\ \text{Θύελλα} \\ \text{Ανίκητος} \end{matrix} \end{matrix}$$

## Εφαρμογή 22

Τέσσερις εταιρείες καταλαμβάνουν από έναν όροφο μεγάρου, του οποίου η ανάλυση των εξόδων μηνός Μαρτίου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Καθαριότητα	Ανελκυστήρας	Θέρμανση	Φύλαξη	Ειδικά έξοδα
3.500 €	200 €	1.000 €	5.000 €	500 €

Αν η αναλογία επιβάρυνσης κατά όροφο, είναι:

1 <sup>ος</sup> όροφος	2 <sup>ος</sup> όροφος	3 <sup>ος</sup> όροφος	4 <sup>ος</sup> όροφος
100 ‰	150 ‰	350 ‰	400 ‰

(α) Κατασκευάστε πίνακα που να αναλύει κατά κατηγορία, τα έξοδα του κάθε ορόφου.  
 (β) Τον Απρίλιο θα μειωθεί κατά 10% η δαπάνη θέρμανσης, αλλά θα αυξηθούν κατά 20% τα ειδικά έξοδα (συντήρηση αποχετεύσεων, εργασίες στον κήπο). Τι θα πληρώσει τότε ο κάθε όροφος;

(α) Είναι  $100\% = 0,1$  και  $150\% = 0,15$  και  $350\% = 0,35$  και  $400\% = 0,4$ . Κατασκευάζω τον πίνακα στήλη, που περιέχει τις αναλογίες (χιλιοστά) επιβάρυνσης του κάθε

ορόφου.  $\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix}$  Τα έξοδα ανά κατηγορία, προκύπτουν από τους πολλαπλασιασμούς

$$3.500 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 525 \\ 1.225 \\ 1.400 \end{bmatrix} \text{ για καθαριότητα}$$

$$200 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix} \text{ για ανελκυστήρες}$$

$$1.000 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix} \text{ για θέρμανση}$$

$$5.000 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 750 \\ 1.750 \\ 2.000 \end{bmatrix} \text{ για φύλαξη}$$

$$500 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 75 \\ 175 \\ 200 \end{bmatrix} \text{ για τα ειδικά έξοδα}$$

Αναλυτικός πίνακας εξόδων του Μαρτίου, κατά κατηγορία, για κάθε όροφο.

	Καθαριότητα	Ανελκυστήρες	Θέρμανση	Φύλαξη	Ειδικά έξοδα	Σύνολο
1 <sup>ος</sup> όροφος	350 €	20 €	100 €	500 €	50 €	1.020€
2 <sup>ος</sup> όροφος	525 €	30 €	150 €	750 €	75 €	1.530€
3 <sup>ος</sup> όροφος	1.225 €	70 €	350 €	1.750 €	175 €	3.570€
4 <sup>ος</sup> όροφος	1.400 €	80 €	400 €	2.000 €	200 €	4.080€
Σύνολο	3.500 €	200 €	1.000 €	5.000 €	500 €	10.200€

(β) Τον Απρίλιο η δαπάνη για θέρμανση θα μειωθεί κατά 10%, άρα θα ανέρχεται στο 90% της αντίστοιχης δαπάνης του Μαρτίου και ο καταμερισμός της ανά όροφο,

$$\text{προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό } 1.000 \cdot 0,9 \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = 900 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 135 \\ 315 \\ 360 \end{bmatrix}$$

Η δαπάνη για ειδικά έξοδα θα αυξηθεί κατά 20%, άρα θα ανέρχεται στο 120% της αντίστοιχης δαπάνης του Μαρτίου και ο καταμερισμός της ανά όροφο, προκύπτει από

$$\text{τον πολλαπλασιασμό } 500 \cdot 1,2 \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = 600 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 210 \\ 240 \end{bmatrix}$$

Οι λοιπές δαπάνες, παραμένουν αμετάβλητες (3.500 € για καθαριότητα, 200 € για συντήρηση ανελευστήρων και 5.000 € για υπηρεσίες φύλαξης). Η δαπάνη ανά όροφο, τον Απρίλιο προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό

$$(3.500 + 200 + 0,9 \cdot 1.000 + 5.000 + 500 \cdot 1,2) \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} =$$

$$10.200 \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.020 \\ 1.530 \\ 3.570 \\ 4.080 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{εταιρεία 1}^{\text{οο}} \text{ ορόφου} \\ \text{εταιρεία 2}^{\text{οο}} \text{ ορόφου} \\ \text{εταιρεία 3}^{\text{οο}} \text{ ορόφου} \\ \text{εταιρεία 4}^{\text{οο}} \text{ ορόφου} \end{array}$$

### Εφαρμογή 23

Κάθε διάνυσμα του επιπέδου, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια ενός πίνακα γραμμής ή ενός πίνακα στήλης. Από το παρακάτω σχήμα είναι

$$\overline{OA} = [A1, A2] = [3, 5] \quad \text{ή} \quad \overline{OA} = \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{OB} = [B1, B2] = [7, 2] \quad \text{ή} \quad \overline{OB} = \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

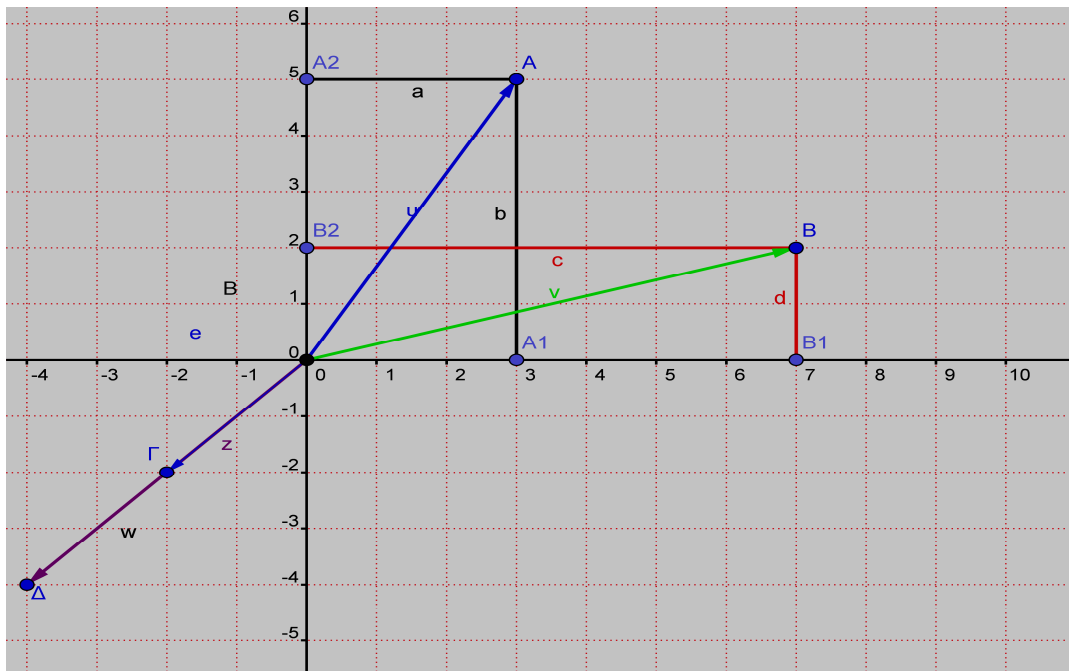
Για να προσθέσω ή για να αφαιρέσω δύο διανύσματα, προσθέτω ή αφαιρώ τις αντίστοιχες συντεταγμένες τους. Συνεπώς

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Όταν ένα διάνυσμα πολλαπλασιάζεται επί έναν πραγματικό αριθμό, τότε το διάνυσμα που προκύπτει έχει ως συντεταγμένες τις αντίστοιχες συντεταγμένες του αρχικού, πολλαπλασιασμένες επί τον πραγματικό αριθμό.

Στο παρακάτω σχήμα είναι  $\overline{OG} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\overline{OD} = 2 \overline{OG} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$ . Άρα, ο πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα ανάγεται σε πολλαπλασιασμό αριθμού επί πίνακα.



### 1.7 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Οι αξιωματικοί που απασχολούνται σε εταιρεία, ανά ειδικότητα (πλοίαρχοι, μηχανικοί) και ανά βαθμό (Α', Β', Γ') φαίνονται στον πίνακα.

$$\text{Πλ. Μηχ.} \\ A = \begin{bmatrix} 30 & 40 \\ 35 & 45 \\ 50 & 60 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Α' τάξεως} \\ \text{Β' τάξεως} \\ \text{Γ' τάξεως} \end{array}$$

Λόγω αυξημένης κερδοφορίας, η εταιρεία κατέβαλε πέρυσι bonus 8.000 € σε κάθε αξιωματικό γέφυρας και 7.000 € σε κάθε αξιωματικό μηχανής, ανεξαρτήτως τάξης. Για εφέτος προγραμματίζει να κάνει το ίδιο, προσφέροντας 10.000 € και 9.000 € αντίστοιχα. Ζητείται από το λογιστήριο να υπολογίσει πόσα χρήματα δόθηκαν πέρυσι στους αξιωματικούς κάθε τάξης ξεχωριστά και πόσα θα δοθούν εφέτος. Ο λογιστής, θα σχηματίσει τον  $2 \times 2$  πίνακα B των bonus και θα κάνει τις παρακάτω πράξεις.

$$\text{Πέρυσι Εφέτος} \\ B = \begin{bmatrix} 8.000 & 10.000 \\ 7.000 & 9.000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Πλοίαρχοι} \\ \text{Μηχανικοί} \end{array}$$

Για το περσινό bonus των αξιωματικών Α' τάξης έδωσε  $30 \cdot 8.000 \text{ €} + 40 \cdot 7.000 \text{ €} = 240.000 \text{ €} + 280.000 \text{ €} = 520.000 \text{ €}$  Η διαδικασία περιγράφεται με πίνακες ως εξής 
$$\begin{bmatrix} 30 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} = [30 \cdot 8.000 + 40 \cdot 7.000] = [520.000]$$

Για το εφετινό bonus των αξιωματικών Α' τάξης θα δώσει  $30 \cdot 10.000 \text{ €} + 40 \cdot 9.000 \text{ €} = 300.000 \text{ €} + 360.000 \text{ €} = 660.000 \text{ €}$  Η διαδικασία περιγράφεται με πίνακες ως εξής 
$$\begin{bmatrix} 30 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10.000 \\ 9.000 \end{bmatrix} = [30 \cdot 10.000 + 40 \cdot 9.000] = [660.000]$$

Για το περσινό bonus των αξιωματικών Β΄ τάξης έδωσε  $35 \cdot 8.000 \text{€} + 45 \cdot 7.000 \text{€} = 280.000 \text{€} + 315.000 \text{€} = \mathbf{595.000 \text{€}}$  Η διαδικασία περιγράφεται με πίνακες ως εξής

$$\begin{bmatrix} 35 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} = [35 \cdot 8.000 + 45 \cdot 7.000] = [595.000]$$

Για το εφετινό bonus των αξιωματικών Β΄ τάξης θα δώσει  $35 \cdot 10.000 \text{€} + 45 \cdot 9.000 \text{€} = 350.000 \text{€} + 405.000 \text{€} = \mathbf{755.000 \text{€}}$  Η διαδικασία περιγράφεται με πίνακες ως

$$\text{εξής } \begin{bmatrix} 35 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10.000 \\ 9.000 \end{bmatrix} = [35 \cdot 10.000 + 45 \cdot 9.000] = [755.000]$$

Για το περσινό bonus των αξιωματικών Γ΄ τάξης έδωσε  $50 \cdot 8.000 \text{€} + 60 \cdot 7.000 \text{€} = 400.000 \text{€} + 420.000 \text{€} = \mathbf{820.000 \text{€}}$  Η διαδικασία περιγράφεται με πίνακες ως εξής

$$\begin{bmatrix} 50 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} = [50 \cdot 8.000 + 60 \cdot 7.000] = [820.000]$$

Για το εφετινό bonus των αξιωματικών Γ΄ τάξης θα δώσει  $50 \cdot 10.000 \text{€} + 60 \cdot 9.000 \text{€} = 500.000 \text{€} + 540.000 \text{€} = \mathbf{1.040.000 \text{€}}$  Η διαδικασία περιγράφεται με πίνακες ως εξής

$$\begin{bmatrix} 50 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10.000 \\ 9.000 \end{bmatrix} = [50 \cdot 10.000 + 60 \cdot 9.000] = [1.040.000]$$

Τα αποτελέσματα των πράξεων μπορούν να συνοψιστούν υπό τη μορφή πίνακα διπλής εισόδου

Πέρυσι	Εφέτος	Πλοίαρχοι & μηχανικοί
520.000	660.000	Α΄ τάξης
595.000	755.000	Β΄ τάξης
820.000	1.040.000	Γ΄ τάξης

ή υπό τη μορφή πίνακα

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 520.000 & 660.000 \\ 595.000 & 755.000 \\ 820.000 & 1.040.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(Πλ/χοι \& Μηχ/κοί) Α΄} \\ \text{(Πλ/χοι \& Μηχ/κοί) Β΄} \\ \text{(Πλ/χοι \& Μηχ/κοί) Γ΄} \end{matrix}$$

Ο  $\Gamma$  ονομάζεται **γινόμενο του Α με τον Β** και συμβολίζεται  $AB$ . Το στοιχείο  $\gamma_{11}$  προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> γραμμής του Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> στήλης του Β και αθροίσω τα γινόμενα. Το στοιχείο  $\gamma_{12}$  προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> γραμμής του Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2<sup>ης</sup> στήλης του Β και αθροίσω τα γινόμενα, κ.ο.κ.

**Ορισμός** Αν  $A_{\mu\nu} = [\alpha_{ik}]$ ,  $B_{\nu\rho} = [\beta_{kj}]$  ορίζεται ως **γινόμενο του Α με τον Β** και συμβολίζεται με  $AB$  ή  $A \cdot B$ , ο  $\mu\rho$  πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο  $\gamma_{ij}$  είναι το άθροισμα των γινομένων των  $\nu$  στοιχείων της  $i$  γραμμής του Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της  $j$  στήλης του Β, δηλαδή  $\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \dots + \alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}$

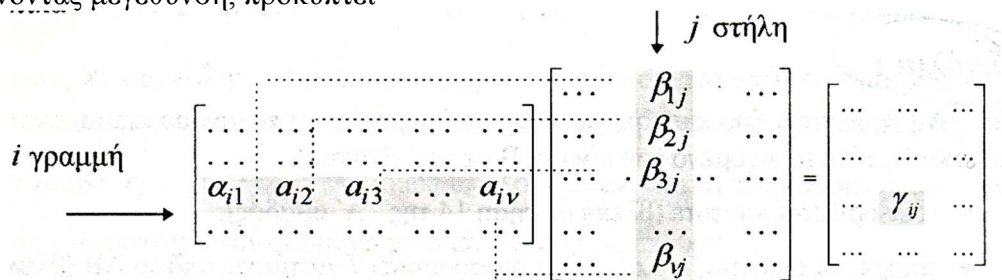
Σχηματικά, αυτό περιγράφεται ως εξής

$$A_{\mu \times \nu} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \text{ γραμμή} \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{v1} & \beta_{v2} & \dots & \beta_{vj} & \dots & \beta_{vp} \end{bmatrix} \begin{matrix} j \text{ στήλη} \end{matrix} \quad \text{και}$$

$$i \text{ γραμμή} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{v1} & \beta_{v2} & \dots & \beta_{vj} & \dots & \beta_{vp} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2j} & \dots & \gamma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \dots & \gamma_{ij} & \dots & \gamma_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \dots & \gamma_{\mu j} & \dots & \gamma_{\mu p} \end{bmatrix} \begin{matrix} j \text{ στήλη} \\ i \text{ γραμμή} \end{matrix}$$

Κάνοντας μεγέθυνση, προκύπτει



Ο πολλαπλασιασμός  $AB$  δεν ορίζεται για όλους τους πίνακες, αλλά μόνο για όσους το πλήθος των στηλών του 1<sup>ου</sup> πίνακα ισούται με το πλήθος των γραμμών του 2<sup>ου</sup> πίνακα.

**Ορισμός** Δύναμη ενός τετραγωνικού πίνακα διαστάσεως  $n$ , με εκθέτη φυσικό αριθμό  $k \neq 0$  είναι ο πίνακας  $A^k = \underbrace{AAA \dots A}_{k \text{ φορές}}$ . Όταν  $k=1$ , είναι  $A^1=A$

### 1.7.1 Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων

$$\mathbf{A}_{2 \times 2} \mathbf{B}_{2 \times 2} = (\mathbf{AB})_{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} \mathbf{B}_{3 \times 2} = [\mathbf{AB}]_{2 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 1 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 8 - 6 \cdot 1 & 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 - 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 34 & 61 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{3 \times 1} \mathbf{B}_{1 \times 3} = (\mathbf{AB})_{3 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4 \ 5 \ 6) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1 \times 3} \mathbf{B}_{3 \times 1} = (\mathbf{AB})_{1 \times 1}$$

$$(4 \ 5 \ 6) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3) = (32)$$

$$\mathbf{A}_{3 \times 1} \mathbf{B}_{1 \times 2} = (\mathbf{AB})_{3 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

#### Εφαρμογή 24

Το δίκτυο παρουσιάζει τις συνδέσεις των λιμανιών  $\Lambda_1, \Lambda_2$  με τα  $\Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$  και τις συνδέσεις αυτών με τα  $\Lambda_6, \Lambda_7$ . Ο αριθμός των πλοίων που συνδέουν δύο λιμάνια, φαίνεται πάνω από την κάθε γραμμή του δικτύου τους.

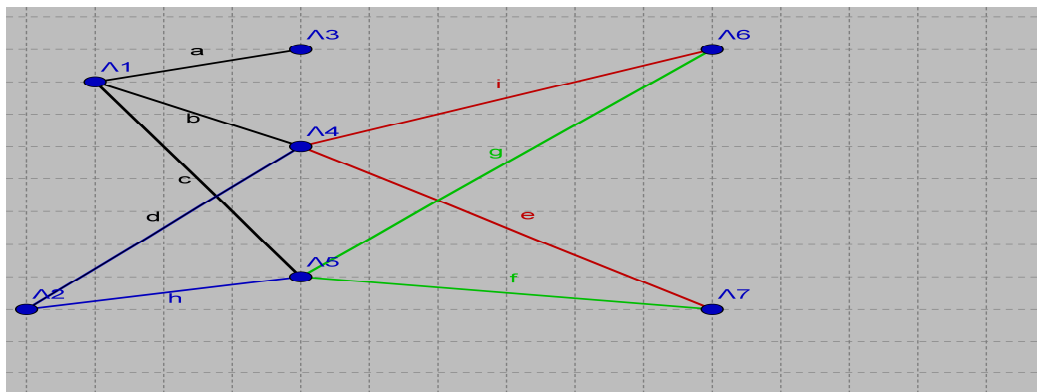
1 Να δοθούν με τη μορφή πίνακα A, οι αριθμοί των πλοίων από τα Λ1, Λ2 προς τα Λ3, Λ4, Λ5

2 Ομοίως, με τη μορφή πίνακα B από τα Λ3, Λ4, Λ5 προς τα Λ6, Λ7

3 Ομοίως, με τη μορφή πίνακα Γ από τα Λ1, Λ2 προς τα Λ6, Λ7

4 Υπολογίστε τον AB και να τον συγκρίνετε με τον Γ

Να γίνει εφαρμογή για a=3, b=6, c=1, d=5, e=2, f=3, g=4, h=2, i=1



1 Οι αριθμοί των πλοίων, δίνονται από τον A

	Λ3	Λ4	Λ5
Λ1	a=3	b=6	c=1
Λ2	0	d=5	h=2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2 Οι αριθμοί των πλοίων, δίνονται από τον B

	Λ6	Λ7
Λ3	0	0
Λ4	i=1	e=2
Λ5	g=4	f=3

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3 Οι αριθμοί των πλοίων, δίνονται από τον Γ

	Λ6	Λ7
Λ1	bi + cg = 6 + 4 = 10	be + cf = 12 + 3 = 15
Λ2	di + hg = 5 + 8 = 13	de + hf = 10 + 6 = 16

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$$

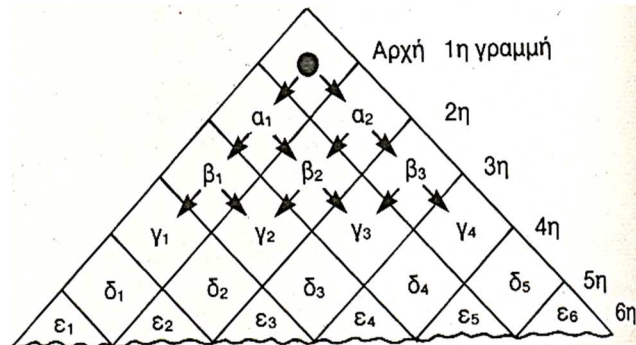
4 Εκτελώ τις πράξεις και παρατηρώ ότι AB = Γ

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 13 & 16 \end{bmatrix} = \Gamma$$

### Εφαρμογή 25

Η μπίλια μπορεί να κινηθεί από την κορυφή του πλέγματος μόνο πλαγίως προς τα κάτω, όπως δείχνουν τα βέλη και μόνο κατά ένα τετράγωνο κάθε φορά.

(α) Να συμπληρωθούν οι κινήσεις της μπίλιας, από γραμμή σε γραμμή του πλέγματος, ακολουθώντας τον εξής κανόνα: Γράφω 1 αν η μπίλια μπορεί να μετακινηθεί από το ένα τετράγωνο στο άλλο και 0 αν δε μπορεί.



$$\begin{array}{l} \text{Στο } \alpha_1 \ \alpha_2 \\ \text{Από την αρχή} \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Στο } \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \\ \text{Από } \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Στο } \gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4 \\ \text{Από } \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Στο } \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \\ \text{Από } \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Στο } \epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \epsilon_4 \ \epsilon_5 \ \epsilon_6 \\ \text{Από } \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{matrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array}$$

(β) Αν  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  είναι κατά σειρά οι παραπάνω πίνακες, να βρεθεί το γινόμενο  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$  και να εξηγηθεί τι παριστάνει.

### Εφαρμογή 26

Να γραφεί το  $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$  με χρήση πινάκων ως  $A \cdot X = B$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ο πίνακας των αγνώστων}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix} \text{ ο πίνακας των σταθερών όρων.}$$

### Άσκηση 5

Να γραφεί το  $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 2x - y + 3z = 15 \\ 3x + 2y - z = -3 \end{cases}$  με χρήση πινάκων ως  $A \cdot X = B$

### 1.7.2 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων

1 Δεν είναι πράξη αντιμεταθετική, όπως ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών, διότι υπάρχουν οι εξής πέντε περιπτώσεις:

- Να μην ορίζονται οι AB, BA. Π.χ.  $A_{1 \times 2}, B_{3 \times 4}$
- Να ορίζεται ο AB αλλά όχι ο BA. Π.χ.  $A_{1 \times 2}, B_{2 \times 3}$
- Να ορίζεται ο BA αλλά όχι ο AB. Π.χ.  $B_{3 \times 4}, A_{4 \times 1}$
- Να ορίζονται οι AB, BA, αλλά να είναι πίνακες διαφορετικών διαστάσεων, άρα όχι ίσοι μεταξύ τους. Π.χ.  $A_{2 \times 3}, B_{3 \times 2} \rightarrow (AB)_{2 \times 2}$  και  $B_{3 \times 2}, A_{2 \times 3} \rightarrow (BA)_{3 \times 3}$
- Να ορίζονται οι AB και BA, να είναι πίνακες ιδίων διαστάσεων αλλά  $AB \neq BA$

Π.χ. Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$  τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 9 & 28 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 7 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 34 \end{bmatrix}$$

Αν αναφέρεται ότι  $AB=BA$ , αυτό είναι μία ειδική περίπτωση, δεν είναι κάτι γενικό και δε σημαίνει ότι ισχύει πάντα.

**2** Αν  $AB=O$  δεν έπεται ότι  $A=O$  ή  $B=O$  όπως στους πραγματικούς αριθμούς.

Πράγματι, αν  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq O, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq O$  τότε  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

**3** Αν  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  και  $A, B, \Gamma$  πίνακες, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες υπό την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται.

- $A(B \pm \Gamma) = AB \pm A\Gamma$  επιμεριστική
- $(B \pm \Gamma)A = BA \pm \Gamma A$  επιμεριστική
- $(\kappa A)(\lambda B) = (\kappa\lambda)AB$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $A I_\nu = I_\mu A = A$  όπου  $\mu, \nu$  οι διαστάσεις του  $A$
- Αν  $A$  τετραγωνικός διάστασης  $\nu$ , τότε  $A I_\nu = I_\nu A = A$
- $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$  προσεταιριστική

Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει να γράφω  $AB\Gamma$  για καθένα από τα ίσα γινόμενα  $A(B\Gamma), (AB)\Gamma$ . Αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  πίνακες τέτοιοι ώστε να ορίζονται τα  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ , έχω  $(AB)(\Gamma\Delta) = [(AB)\Gamma]\Delta = A[B(\Gamma\Delta)] = [A(B\Gamma)]\Delta$  και γράφω  $AB\Gamma\Delta$  για καθένα από αυτά. Γενικά, επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν πολλαπλασιάζω έναν αριθμό πινάκων  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{v-1}, A_v$ , το γινόμενο είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός, χωρίς όμως να αλλάξει η σειρά των παραγόντων και συμβολίζεται  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{v-1} A_v$

**4** Αν  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$  και  $\rho \in \mathbb{R}$ , ισχύουν:

- $A^\kappa A^\lambda = A^{\kappa+\lambda}$  Π.χ.  $A^2 A^3 = A^5$
- $(A^\kappa)^\lambda = A^{\kappa\lambda}$  Π.χ.  $(A^3)^2 = A^6, (A^2)^3 = A^6$
- $(\rho A)^\kappa = \rho^\kappa A^\kappa$  Π.χ.  $(3A)^2 = 9A^2, (2A)^3 = 8A^3$

- $A^1 = A$
- $(I_v)^k = I_v$

**5** Αν  $A_{\nu \times \mu}$ ,  $B_{\mu \times \rho}$  τότε  $(AB)^T = B^T A^T$  Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι  $(A_1 A_2 A_3 \dots A_\nu)^T = A_\nu^T A_{\nu-1}^T A_{\nu-2}^T \dots A_3^T A_2^T A_1^T$

**6** Αν  $A, B$  διαγώνιοι διάστασης  $\nu$ , τότε οι  $AB, BA$  είναι διαγώνιοι και  $AB = BA$

**Π.χ.** Αν  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  τότε  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

**7** Αν  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$  τότε  $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{bmatrix}$ , ...,  $A^\nu = \begin{bmatrix} \alpha^\nu & 0 \\ 0 & \beta^\nu \end{bmatrix}$  όπου  $\nu \in \mathbb{N}$

Αν  $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$  τότε  $B^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{bmatrix}$ ,  $B^3 = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^3 \end{bmatrix}$ , ...,  $B^\nu = \begin{bmatrix} \alpha^\nu & 0 & 0 \\ 0 & \beta^\nu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^\nu \end{bmatrix}$

όπου  $\nu \in \mathbb{N}$

**8** Αν για τους  $A, B, \Gamma$  ισχύει ότι  $AB = A\Gamma$ , δεν έπεται ότι  $B = \Gamma$  (νόμος διαγραφής)

**Π.χ.** Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ , είναι  $B \neq \Gamma$  και  $AB = A\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

### Εφαρμογή 27

Αν  $A_{\mu \times \nu}$  δείξτε ότι οι  $AA^T$ ,  $A^T A$  είναι συμμετρικοί.

Ισχύει ότι  $(AB)^T = B^T A^T$  και ότι αν  $A = A^T$  τότε ο  $A$  είναι συμμετρικός. Αφού  $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ , ο  $AA^T$  είναι συμμετρικός.

Ομοίως  $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = AA^T$  άρα, ο  $AA^T$  είναι συμμετρικός.

### 1.7.3 Αδύναμος πίνακας

Είναι ο τετραγωνικός  $A_{\nu \times \nu}$  αν  $A^2 = A$ . Οι αδύναμοι πίνακες (ή περιοδικοί περιόδου 1), έχουν πολλές εφαρμογές στη στατιστική.

**Π.χ.** Αν  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  είναι  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Αν  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$  είναι  $B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 4+3-5 & -6-12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 6**

$$\text{Αν } \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ δείξτε ότι } \Gamma^2 = \Gamma, \Delta^2 = \Delta$$

**1.7.4 Ορθογώνιος πίνακας**

Είναι ο τετραγωνικός  $A_{n \times n}$  αν  $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$ , δηλαδή ο ανάστροφος του, ισούται με τον αντίστροφο του, διότι  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ , άρα,  $A^T = A^{-1}$

**Εφαρμογή 28**

$$\text{Εξετάστε αν είναι ορθογώνιος ο } A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Είναι } A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

**Εφαρμογή 29**

Επιχείρηση με υποκαταστήματα πούλησε τρία προϊόντα, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3
Υποκαταστήματα	Laptop	Printer	Scanner
Αθηνών	90	80	20
Θεσσαλονίκης	70	50	45
Ηρακλείου	60	150	100

Αν οι τιμές πώλησης για τα προϊόντα 1, 2, 3 είναι 600 €, 50 €, 40 € αντίστοιχα, βρείτε με χρήση πινάκων, τα έσοδα του κάθε υποκαταστήματος.

Ο  $A_{3 \times 3}$  δείχνει τις πωλήσεις, ανά προϊόν και ανά υποκατάστημα.

Ο  $B_{3 \times 1}$  δείχνει τις τιμές πώλησης του κάθε προϊόντος.

Ο  $\Gamma_{3 \times 1} = AB$  δείχνει τα έσοδα του κάθε υποκαταστήματος.

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 90 & 80 & 20 \\ 70 & 50 & 45 \\ 60 & 150 & 100 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Lap} & \text{Pr} & \text{Scan} \\ \text{Αθήνα} \\ \text{Θεσ/νίκη} \\ \text{Ηράκλειο} \end{matrix} \quad B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 600 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Laptop} \\ \text{Printer} \\ \text{Scanner} \end{matrix}$$

$$\Gamma = A_{3 \times 3} B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 90 & 80 & 20 \\ 70 & 50 & 45 \\ 60 & 150 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \cdot 600 + 80 \cdot 50 + 20 \cdot 40 \\ 70 \cdot 600 + 50 \cdot 50 + 45 \cdot 40 \\ 60 \cdot 600 + 150 \cdot 50 + 100 \cdot 40 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 54.000+4.000+800 \\ 42.000+2.500+1.800 \\ 36.000+7.500+4.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.800 \\ 46.300 \\ 47.500 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Αθήνα} \\ \text{Θεσ/νίκη} \\ \text{Ηράκλειο} \end{matrix}$$

### Εφαρμογή 30

Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ , δείξτε ότι  $A^2 + B^2 = (A+B)^2$

Ποιο είναι το συμπέρασμα σας;

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{άρα } A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Είναι } AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \text{ άρα } AB + BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Είναι } (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } A^2 + B^2 = (A+B)^2$$

Το συμπέρασμα είναι ότι γενικά, στους πίνακες δεν ισχύουν οι ταυτότητες των πραγματικών αριθμών, διότι δεν ισχύει στους πίνακες η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υπολογίζω τον  $(A+B)^2$  και ως εξής  $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

### Εφαρμογή 31

Χαρακτηρίστε ως σωστές (✓) ή λάθος (✗) τις παρακάτω προτάσεις.

1 Για να ορίζετε ο  $A^2$  πρέπει ο  $A$  να είναι τετραγωνικός. ✓

2 Αν  $A_{2 \times 2}$  ισχύει ότι  $AA^2 = A^2A$  ✓

3 Αν  $A_{\mu \times \nu}$  και  $AI_\nu = I_\nu A = A$  τότε  $\mu = \nu$  ✓

4 Αν  $A_{2 \times 3}$ ,  $B_{3 \times 2}$ , τότε ορίζονται τα γινόμενα  $AB$ ,  $BA$  και  $AB = BA$  ✗

### Εφαρμογή 32

Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με τον  $(A+B)^2$ ;

1  $(B+A)^2$  ✓

2  $A^2 + 2AB + B^2$  ✗

3  $A(A+B) + B(A+B)$  ✓

4  $A^2 + AB + BA + B^2$  ✓

### Εφαρμογή 33

Σημειώστε τη σωστή (✓) απάντηση. Αν δύο πίνακες είναι ιδίων διαστάσεων τότε ορίζεται πάντα

1 Το  $A+B$  ✓

2 Το  $AB$

3 Και τα δύο

(δ) Τίποτα από τα δύο

### Εφαρμογή 34

Σημειώστε τη σωστή (✓) απάντηση. Αν για δύο πίνακες  $2 \times 2$  ισχύει  $A^2 = B^2$ , τότε

1  $A = B$

2  $A = -B$

3 Ισχύουν και τα δύο

4 Μπορεί να μην ισχύει κανένα από τα δύο ✓

Σχόλιο Αν  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  τότε  $A^2 = B^2 = \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

### Εφαρμογή 35

Σημειώστε τη σωστή (✓) απάντηση. Αν για δύο πίνακες διαστάσεων  $n \times n$  ισχύει ότι

$(A - B)^2 = \mathbf{O}$ , τότε

1  $A = B$

2  $A = B = \mathbf{O}$

3 Δεν είναι απαραίτητο να ισχύει το (α) ή το (β). ✓

### Εφαρμογή 36

Σημειώστε τη σωστή (✓) απάντηση. Αν για τον  $A_{2 \times 2}$  είναι  $A^2 = \mathbf{O}$ , τότε

1  $A = I_2$

2  $A = \mathbf{O}$

3 Δεν είναι απαραίτητο να ισχύει το (α) ή το (β). ✓

### Εφαρμογή 37

Σημειώστε τη σωστή (✓) απάντηση. Οι διαστάσεις των  $A, B$  αντίστοιχα, αν το γινόμενο τους είναι πίνακας στοιχείο, είναι

1  $m \times n, n \times l$

2  $l \times n, n \times l$  ✓

3  $l \times n, n \times l$

### Εφαρμογή 38

Αν  $A_{3 \times 3}, B_{3 \times 3}$  ποιες προτάσεις είναι σωστές (✓); Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Για τις λάθος (✗) προτάσεις, δώστε αντιπαράδειγμα.

1 Αν η 1<sup>η</sup> και η 3<sup>η</sup> στήλη του  $B$  είναι ίδιες, τότε η 1<sup>η</sup> και η 3<sup>η</sup> στήλη του  $AB$  είναι ίδιες. ✓

$$\text{Επεξήγηση} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ \ell & 2 & \ell \\ m & 4 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2\ell+3m & \dots & k+2\ell+3m \\ 4k+5\ell+6m & \dots & 4k+5\ell+6m \\ 7k+8\ell & \dots & 7k+8\ell \end{pmatrix}$$

2 Αν η 1<sup>η</sup> και η 3<sup>η</sup> γραμμή του  $B$  είναι ίδιες, τότε η 1<sup>η</sup> και η 3<sup>η</sup> γραμμή του  $AB$  είναι ίδιες. ✗

$$\text{Αντιπαράδειγμα} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & \ell & m \\ x & y & z \\ k & \ell & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k+2x & 4\ell+2y & 4m+2z \\ \dots & \dots & \dots \\ 7k+8x & 7\ell+8y & 7m+8z \end{pmatrix}$$

3 Αν η 1<sup>η</sup> και η 3<sup>η</sup> γραμμή του A είναι ίδιες, τότε και η 1<sup>η</sup> με την 3<sup>η</sup> γραμμή του AB είναι ίδιες. ✓

$$\text{Αντιπαράδειγμα } \begin{pmatrix} k & \ell & m \\ x & y & z \\ k & \ell & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+4\ell+7m & 2k+5\ell+8m & 3k+6\ell \\ \dots & \dots & \dots \\ k+4\ell+7m & 2k+5\ell+8m & 3k+6\ell \end{pmatrix}$$

### Εφαρμογή 39

Βρείτε πίνακα 2x2 ώστε  $A^2 = -I$

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

### Εφαρμογή 40

Δείξτε ότι το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων διάστασης 3, είναι άνω τριγωνικός, διάστασης 3

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & k & l \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb+yd & xc+ye+zf \\ 0 & kd & ke+lf \\ 0 & 0 & mf \end{pmatrix}$$

### Άσκηση 7

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \text{ δείξτε ότι } AB = BA = \begin{bmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{bmatrix}$$

### Άσκηση 8

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ δείξτε ότι } AB = BA = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

### Άσκηση 9

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ δείξτε ότι } AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

### Άσκηση 10

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \text{ δείξτε ότι } A^2 = I_3, B^2 = I_3$$

### Άσκηση 11

Αν A, B τετραγωνικοί ίδιου τύπου, δείξτε ότι  $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$   
Πότε ισχύει η  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ;

### Άσκηση 12

Βιομηχανία έχει δύο εργοστάσια  $E_1, E_2$ . Οι A, B δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές σε ευρώ (€) ανά

εργασία, αντιστοίχως. Βρείτε και ερμηνεύστε τον  $AB$ . Ποιο είναι το κόστος εργασίας για την παραγωγή μίας καρέκλας στο  $E_1$  και ενός τραπέζιού στο  $E_2$ ;

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0,3 \\ 1 & 0,25 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$	<table style="border: none;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">Κατασκευή</td> <td style="padding-right: 5px;">Βάψιμο</td> <td style="padding-right: 5px;">Συσκευασία</td> <td style="padding-right: 10px;">Τραπέζι</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>Κρεβάτι</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>Καρέκλα</td> </tr> </table>	Κατασκευή	Βάψιμο	Συσκευασία	Τραπέζι				Κρεβάτι				Καρέκλα	<table style="border: none;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>E_1</math></td> <td style="padding-right: 5px;"><math>E_2</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">5</td> <td style="padding-right: 5px;">6</td> <td>Κατασκευή</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">4</td> <td style="padding-right: 5px;">5</td> <td>Βάψιμο</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">3</td> <td style="padding-right: 5px;">2</td> <td>Συσκευασία</td> </tr> </table>	$E_1$	$E_2$		5	6	Κατασκευή	4	5	Βάψιμο	3	2	Συσκευασία
Κατασκευή	Βάψιμο	Συσκευασία	Τραπέζι																							
			Κρεβάτι																							
			Καρέκλα																							
$E_1$	$E_2$																									
5	6	Κατασκευή																								
4	5	Βάψιμο																								
3	2	Συσκευασία																								

### Άσκηση 13

Βρείτε με δοκιμές, πίνακες  $2 \times 2$  ώστε  $B^2 = \mathbf{O}$  με  $B \neq \mathbf{O}$

### Άσκηση 14

Βρείτε με δοκιμές, πίνακες  $2 \times 2$  ώστε  $\Gamma \cdot \Delta = -\Delta \cdot \Gamma$ , με  $\Gamma \cdot \Delta \neq \mathbf{O}$

### Άσκηση 15

Βρείτε με δοκιμές, πίνακες  $2 \times 2$  ώστε  $EZ = \mathbf{O}$ , με  $E \neq \mathbf{O}$ ,  $Z \neq \mathbf{O}$

### Άσκηση 16

Δείξτε ότι, το γινόμενο δυο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός πίνακας.

### Άσκηση 17

Δείξτε ότι, κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

### Άσκηση 18

Δείξτε ότι αν  $A, B$  συμμετρικοί, ισχύει ότι  $AB$  συμμετρικός  $\Leftrightarrow AB = BA$

### Άσκηση 19

Αν για τους  $A, B$  ορίζονται οι  $A+B, AB$  δείξτε ότι οι  $A, B$  είναι τετραγωνικοί.

### Άσκηση 20

Αν  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  δείξτε ότι  $\cos x \begin{bmatrix} \cos x & \tan x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} + \sin x \begin{bmatrix} \sin x & -1 \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix} = I_2$

## 1.8 Βαθμός πίνακα

Τα διανύσματα γραμμές του  $A_{\mu \times \nu} = [\alpha_{ij}]$  είναι τα

$$\Gamma_1 = [\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \dots \quad \alpha_{1\nu}], \Gamma_2 = [\alpha_{21} \quad \alpha_{22} \quad \dots \quad \alpha_{2\nu}], \dots, \Gamma_\mu = [\alpha_{\mu 1} \quad \alpha_{\mu 2} \quad \dots \quad \alpha_{\mu \nu}]$$

και τα διανύσματα στήλες τα  $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix}, \dots, \Sigma_\nu = \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \dots \\ \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix}$

**Ορισμός** Τα διανύσματα στήλες  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\kappa$  του  $A_{\mu \times \nu}$  είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** αν και μόνο αν υπάρχουν  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa \in \mathbb{R}$ , με ένα τουλάχιστον διάφορο του μηδέν, ώστε  $\lambda_1 \cdot \Sigma_1 + \lambda_2 \cdot \Sigma_2 + \dots + \lambda_\kappa \cdot \Sigma_\kappa = \mathbf{O}_{\mu \times 1}$

Για τα διανύσματα γραμμές είναι ίδιος ο ορισμός, με το  $\mathbf{O}$  του  $2^{\text{ου}}$  μέλους να συμβολίζει τον μηδενικό πίνακα  $1 \times n$

**Π.χ.** Οι  $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένες, διότι  $\Sigma_2 = 10\Sigma_1$

Οι  $\Gamma_1 = [5 \quad -6 \quad 7]$ ,  $\Gamma_2 = [15 \quad -18 \quad 21]$  είναι γραμμικώς εξαρτημένες, διότι  $\Gamma_2 = 3\Gamma_1$

**Ορισμός** Τα διανύσματα στήλες  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** όταν η σχέση  $\lambda_1 \cdot \Sigma_1 + \lambda_2 \cdot \Sigma_2 + \dots + \lambda_k \cdot \Sigma_k = \mathbf{O}_{\mu \times 1}$  με  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  ισχύει μόνο αν  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ . Όμοιος ορισμός είναι για τις γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  και με  $\mathbf{O}$  συμβολίζω τον μηδενικό πίνακα  $1 \times n$

**Π.χ.** Οι  $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, διότι  $\lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ . Από  $\lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2 = \mathbf{O}$  είναι  $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$  άρα  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

**Ορισμός** Σε κάθε πίνακα  $A$  το μέγιστο πλήθος  $\rho$  των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του, ονομάζεται **βαθμός** του πίνακα και συμβολίζεται **rank**  $A = \rho$

### 1.8.1 Πορίσματα

1. Αν  $A_{\mu \times \nu}$  και  $\rho$  ο βαθμός του, είναι  $\rho \leq \mu$ ,  $\rho \leq \nu$

2. Αν  $\rho$  είναι ο βαθμός του πίνακα, υπάρχουν  $\rho$  στήλες (ή γραμμές) του που είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, ενώ οποιοσδήποτε  $\rho + 1$  στήλες (ή γραμμές) του είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

**Π.χ.** Βρείτε τον βαθμό του  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  Ο  $A$  έχει 3 γραμμές και 5 στήλες.

Άρα,  $\text{rank } A \leq 5$

Επειδή  $2\Sigma_1 = \Sigma_2$  οι στήλες  $\Sigma_1, \Sigma_2$  είναι γραμμικά εξαρτημένες, άρα  $\text{rank } A \leq 4$

Οι  $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_5$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι  $\lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_3 \Sigma_3 + \lambda_5 \Sigma_5 = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  άρα,

$3 \leq \text{rank } A \leq 4$

Είναι  $3\Sigma_1 + 5\Sigma_3 + 0\Sigma_5 = \Sigma_4$  άρα, οι  $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_5, \Sigma_4$  γραμμικά εξαρτημένες άρα,  $\text{rank } A = 3$

**Άσκηση 21**

Δείξτε ότι  $\text{rank } A = 2$ ,  $\text{rank } B = 3$ , όπου  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**1.9 Αντίστροφος πίνακας**

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$  υπάρχει ο αντίστροφος του, συμβολίζεται ως  $\frac{1}{\alpha}$  ή  $\alpha^{-1}$  και  $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$ . Υπάρχει κάτι αντίστοιχο στους πίνακες; Δηλαδή, δοθέντος  $A$  υπάρχει  $X$  ώστε  $AX = XA = I_n$ ;

**Ορισμός** Για  $A_{n \times n}$  αν υπάρχει  $X_{n \times n}$  ώστε  $AX = XA = I_n$ , τότε ο  $A$  είναι **αντιστρέψιμος**, ο  $X$  ονομάζεται **αντίστροφος** του  $A$  και συμβολίζεται ως  $A^{-1}$

Αντίστροφος του αντιστρέφου, είναι ο ίδιος ο πίνακας, δηλαδή ότι  $(A^{-1})^{-1} = A$

**Π.χ.** Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  είναι  $AX = XA = I_2$ , άρα  $X = A^{-1}$

**Εφαρμογή 41**

Δείξτε ότι ο  $X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  είναι αντίστροφος του  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 & 3(-5) + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & 1(-5) + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 & 2 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 22**

Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

**Άσκηση 23**

Αν  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

**Άσκηση 24**

Αν  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Άσκηση 25**

Αν  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Άσκηση 26**

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ δείξτε ότι } A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Πρόταση 3**

Αν ο  $A_{n \times n}$  έχει αντίστροφο, τότε αυτός είναι μοναδικός.

**Απόδειξη**

Έστω ότι ο  $A$  δεν έχει ως αντίστροφο μόνο τον  $A^{-1}$ , αλλά και τον  $B^{-1}$

Τότε, είναι  $AA^{-1}=A^{-1}A=I$  και  $AB^{-1}=B^{-1}A=I$

Θα δείξω ότι  $A^{-1}=B^{-1}$

Πράγματι,  $B^{-1}=B^{-1}I=B^{-1}(AA^{-1})=(B^{-1}A)A^{-1}=IA^{-1}=A^{-1}$

**Πρόταση 4**

Αν ο  $A_{n \times n}$  είναι αντιστρέψιμος τότε και ο  $A^T$  είναι αντιστρέψιμος με  $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

**Απόδειξη**

Αφού ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, είναι  $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

Άρα,  $(AA^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=I^T$

Συνεπώς,  $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$

Άρα, ο  $A^T$  είναι αντιστρέψιμος και αντίστροφος του είναι ο  $(A^{-1})^T$

Άρα,  $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

**Παρατήρηση 3**

Αν  $A_{n \times n}$  ορθογώνιος τότε  $AA^T=A^T A=I$ , άρα  $A^{-1}=A^T$  δηλαδή, οι ορθογώνιοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

**Εφαρμογή 42**

Αν  $A, B$  αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης  $n$  και  $AB=A$ ,  $BA=B$ , δείξτε ότι  $A^2=A$ ,  $B^2=B$

Είναι  $A^2=AA=(AB)A=A(BA)=AB=A$

$B^2=BB=(BA)B=B(AB)=BA=B$

**Εφαρμογή 43**

Αν  $A_{n \times n}, B_{n \times n}$ , αντιστρέψιμοι με  $AB=BA$ , δείξτε ότι  $A^{-1}B=BA^{-1}$ ,  $A^{-1}B=BA^{-1}$

Είναι  $AB=BA \Leftrightarrow$

$(AB)B^{-1}=(BA)B^{-1} \Leftrightarrow$

$A(BB^{-1})=B(AB^{-1}) \Leftrightarrow$

$AI=B(AB^{-1}) \Leftrightarrow$

$A=B(AB^{-1}) \Leftrightarrow$

$B^{-1}A=B^{-1}[B(AB^{-1})] \Leftrightarrow$

$$B^{-1}A = (B^{-1}B)(AB^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$B^{-1}A = I(AB^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$B^{-1}A = AB^{-1} \quad \text{Ομοίως αποδεικνύεται ότι } A^{-1}B = BA^{-1}$$

### 1.9.1 Ιδιότητες των αντιστρέψιμων πινάκων

1 Ο  $\mathbf{O}_{\nu \times \nu}$  δεν είναι αντιστρέψιμος.

2 Ο  $I_\nu$  είναι αντιστρέψιμος και  $I_\nu = I_\nu^{-1}$

3 Αν  $A$  αντιστρέψιμος τότε ο  $A^\nu$  είναι αντιστρέψιμος με  $(A^\nu)^{-1} = (A^{-1})^\nu = A^{-\nu}$

4 Αν  $A, B$  αντιστρέψιμοι και  $A = B$  τότε  $A^{-1} = B^{-1}$

5 Αν  $AB = I$  τότε  $A^{-1} = B, B^{-1} = A$

6 Αν  $A^2 = I$  είναι  $AA = I \Leftrightarrow A = A^{-1}$  Ενδεικτικά είναι  $A = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 Αν  $A, B$ , αντιστρέψιμοι τότε ο  $AB$  είναι αντιστρέψιμος με  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Πράγματι  $(AB)(AB)^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

και  $(AB)^{-1}(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

Αυτή η ιδιότητα επεκτείνεται και για περισσότερους πίνακες. Για 3 πίνακες ισχύει ότι  $(AB\Gamma)^{-1} = \Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1}$

Πράγματι,  $(AB\Gamma)(AB\Gamma)^{-1} = (AB\Gamma)(\Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1}) = A[B(\Gamma\Gamma^{-1})B^{-1}]A^{-1} = I$

και  $(AB\Gamma)^{-1}(AB\Gamma) = (\Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1})(AB\Gamma) = \Gamma^{-1}[B^{-1}(A^{-1}A)B]\Gamma = I$

Αν  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$  αντιστρέψιμοι  $\nu \times \nu$  πίνακες, τότε ο  $A_1A_2A_3\dots A_\nu$  είναι αντιστρέψιμος και  $(A_1A_2A_3\dots A_\nu)^{-1} = A_\nu^{-1}\dots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$

8 Αν οι  $A, B$  είναι αντιστρέψιμοι δεν έπεται ότι οι  $(A+B), (A-B)$  είναι αντιστρέψιμοι. Έτσι, αν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος δεν έπεται ότι ο  $(A+\lambda I)$  είναι αντιστρέψιμος.

#### Εφαρμογή 44

Δείξτε ότι αν  $A$  αντιστρέψιμος και  $AB = A\Gamma$  ή  $BA = \Gamma A$  τότε  $B = \Gamma$

Πράγματι,

$$AB = A\Gamma \Leftrightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(A\Gamma) \Leftrightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)\Gamma \Leftrightarrow IB = I\Gamma \Leftrightarrow B = \Gamma$$

και επίσης

$$BA = \Gamma A \Leftrightarrow (BA)A^{-1} = (\Gamma A)A^{-1} \Leftrightarrow B(AA^{-1}) = \Gamma(AA^{-1}) \Leftrightarrow BI = \Gamma I \Leftrightarrow B = \Gamma$$

#### Εφαρμογή 45

Δείξτε ότι αν  $A$  αντιστρέψιμος και  $AB = \mathbf{O}$  ή  $BA = \mathbf{O}$  τότε  $B = \mathbf{O}$

Πράγματι,  $AB = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}\mathbf{O} \Leftrightarrow (A^{-1}A)B = \mathbf{O} \Leftrightarrow IB = \mathbf{O} \Leftrightarrow B = \mathbf{O}$

και  $BA = \mathbf{O} \Leftrightarrow (BA)A^{-1} = \mathbf{O}A^{-1} \Leftrightarrow B(AA^{-1}) = \mathbf{O} \Leftrightarrow BI = \mathbf{O} \Leftrightarrow B = \mathbf{O}$

**Εφαρμογή 46**

Αν  $A^3 = I$  βρείτε τον  $A^{-1}$ . Είναι  $A^3 = I \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 \cdot A = I \\ A \cdot A^2 = I \end{cases} \Leftrightarrow A^2 = A^{-1}$

**Εφαρμογή 47**

Αν  $A^2 = 3A + I$  βρείτε τον  $A^{-1}$

Είναι  $A^2 = 3A + I \Leftrightarrow A^2 - 3A = I \Leftrightarrow \begin{cases} A(A - 3I) = I \\ (A - 3I)A = I \end{cases} \Leftrightarrow A^{-1} = A - 3I$

**Άσκηση 27**

Αν  $A$  αντιστρέψιμος, τότε  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$  για  $\lambda \neq 0$

**1.9.2 Εύρεση του αντιστρόφου, ενός 2x2 πίνακα**

Θα εξετάσω αν υπάρχει ο αντίστροφος του  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ . Έστω ότι υπάρχει και είναι

$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ . Τότε είναι

$$\begin{aligned} AA^{-1} = A^{-1}A = I &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y + \beta \omega = 0 \\ \gamma y + \delta \omega = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, λύνω τα δύο συστήματα.

**Εφαρμογή 48**

Αν  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$  βρείτε τον  $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$

$$\text{Από } AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x + 3z & -y + 3\omega \\ 2x - 5z & 2y - 5\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 3z = 1 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} -y + 3\omega = 0 \\ 2y - 5\omega = 1 \end{cases} \text{ άρα } \begin{cases} x = 5 \\ z = 2 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} y = 3 \\ \omega = 1 \end{cases} \text{ άρα, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Εφαρμογή 49**

Βρείτε τον  $A^{-1}$  αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

**Ορισμός** Ορίζουσα του  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  είναι ο πραγματικός αριθμός  $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

Αν  $D \neq 0$ , τότε ο  $A$  αντιστρέφεται και  $A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ , δηλαδή αντιστρέφονται μόνο όσοι τετραγωνικοί πίνακες έχουν ορίζουσα διάφορη του μηδέν.

$$\text{Ο } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \text{ δεν αντιστρέφεται διότι } D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 4 \cdot 5 = 0$$

### Εφαρμογή 50

$$\text{Βρείτε τον } B^{-1} \text{ αν } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Είναι } D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \text{ άρα, } B^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

### Εφαρμογή 51

Λογιστής πλήρωσε 14.000 € για 1 μισθό μηχανικού Β' και 1 μισθό μηχανικού Γ' και 55.000 € για 5 μισθούς μηχανικού Β' και 2 μισθούς μηχανικού Γ'. Βρείτε τους μισθούς των μηχανικών Β' και Γ'.

Έστω (σε χιλιάδες €)  $x$  ο μισθός του μηχανικού Γ' και  $y$  του μηχανικού Β'.

$$\text{Είναι } \begin{cases} x + y = 14 \\ 2x + 5y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B, \text{ με } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 14 \\ 55 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ο } A \text{ αντιστρέφεται διότι } |A| = 3 \neq 0 \text{ και } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Από } AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\text{Άρα, } X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 55 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ άρα } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ (σε χιλιάδες €)}$$

### Εφαρμογή 52

Αν  $A, B, \Gamma$  αντιστρέψιμοι, τότε  $(AB\Gamma)^{-1}(AB\Gamma)^2(B\Gamma)^{-1}(BA)^{-1}(A^{-1}B^{-1})^{-1} = A$

Είναι

$$\begin{aligned} & (AB\Gamma)^{-1}(AB\Gamma)^2(B\Gamma)^{-1}(BA)^{-1}(A^{-1}B^{-1})^{-1} = \\ & (\Gamma^{-1}B^{-1}A^{-1})(AB\Gamma)(AB\Gamma)(\Gamma^{-1}B^{-1})(A^{-1}B^{-1})BA = \\ & (\Gamma^{-1}B^{-1})(A^{-1}A)(B\Gamma)(AB)(\Gamma\Gamma^{-1})B^{-1}A^{-1}(B^{-1}B)A = \\ & (\Gamma^{-1}B^{-1})I(B\Gamma)(AB)IB^{-1}A^{-1}IA = \\ & (\Gamma^{-1}B^{-1})(B\Gamma)(AB)B^{-1}A^{-1}A = \\ & \Gamma^{-1}(B^{-1}B)\Gamma A(BB^{-1})(A^{-1}A) = \\ & \Gamma^{-1}\Gamma A I I = (\Gamma^{-1}\Gamma)A = IA = A \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 53

$$\text{Βρείτε αν υπάρχουν, τους αντιστρόφους των } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 5 = 6 + 5 = 11 \neq 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0 \quad \text{Ο Β δεν αντιστρέφεται.}$$

$$|\Gamma| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0, \quad \Gamma^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

### Εφαρμογή 54

Αν  $A_{\nu \times \nu}$  με  $A^2 + A + I_\nu = \mathbf{O}$ , βρείτε τον  $A^{-1}$  και δείξτε ότι  $A^{100} + A^{101} + I_\nu^{102} = \mathbf{O}$

Είναι  $A^2 + A + I_\nu = \mathbf{O} \Leftrightarrow$

$$I_\nu = -A^2 - A \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_\nu = A(-A - I_\nu) \\ I_\nu = (-A - I_\nu)A \end{array} \right\} \Leftrightarrow A^{-1} = -A - I_\nu = A^2$$

**Σχόλιο** Αφού  $A^{-1} = A^2 \Leftrightarrow AA^{-1} = AA^2 \Leftrightarrow I_\nu = A^3$

Είναι  $A^{100} + A^{101} + I_\nu^{102} =$

$$(A^3)^{33} A + (A^3)^{33} A^2 + I_\nu =$$

$$I_\nu^{33} A + I_\nu^{33} A^2 + I_\nu =$$

$$I_\nu A + I_\nu A^2 + I_\nu = A + A^2 + I_\nu = \mathbf{O}$$

### Εφαρμογή 55

Δείξτε ότι αν  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , τότε  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Εφαρμογή 56

Δείξτε ότι  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  είναι  $A \cdot B = B \cdot A$ , αν  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

**Εφαρμογή 57**

Αν  $A, B$  αντιστρέψιμοι με  $AB=A$ ,  $BA=B$  δείξτε ότι  $A^2=A$ ,  $B^2=B$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = (A \cdot B) \cdot A = A \cdot B \cdot A \\ A = A \cdot B = A \cdot (B \cdot A) = A \cdot B \cdot A \end{array} \right\} \Rightarrow A^2 = A \quad \text{Ομοίως } B^2=B$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot B) \cdot A = A \cdot (B \cdot A) = A \cdot B = A \quad \text{Ομοίως } B^2=B$$

**Εφαρμογή 58**

Αν  $A, B$  αντιστρέψιμοι με  $AB=BA$ , δείξτε ότι  $AB^{-1} = B^{-1}A$ ,  $A^{-1}B = BA^{-1}$

$$AB = BA \Leftrightarrow$$

$$(AB)B^{-1} = (BA)B^{-1} \Leftrightarrow$$

$$A(BB^{-1}) = B(AB^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$AI = B(AB^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$A = B(AB^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$B^{-1}A = B^{-1}B(AB^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$B^{-1}A = I(AB^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$AB^{-1} = B^{-1}A$$

Ομοίως,  $AB = BA \Leftrightarrow$

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(BA) \Leftrightarrow$$

$$(A^{-1}A)B = A^{-1}(BA) \Leftrightarrow$$

$$IB = A^{-1}(BA) \Leftrightarrow$$

$$B = A^{-1}(BA) \Leftrightarrow$$

$$BA^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1} \Leftrightarrow$$

$$BA^{-1} = (A^{-1}B)(AA^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$BA^{-1} = (A^{-1}B)I \Leftrightarrow$$

$$BA^{-1} = A^{-1}B$$

**Εφαρμογή 59**

Αν  $A_{n \times n}$  με  $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = O$ , δείξτε ότι  $A^{-1} = A^4$

$$I_n = -A^4 - A^3 - A^2 - A = \begin{cases} (-A^3 - A^2 - A - I_n) \cdot A \\ A(-A^3 - A^2 - A - I_n) \end{cases}$$

Άρα, υπάρχει ο  $A^{-1}$  και είναι  $A^{-1} = -A^3 - A^2 - A - I_n$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = O \Rightarrow (A - I_n)(A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n) = (A - I_n)O \Rightarrow$$

$$A^5 - I_n = O \Rightarrow A^5 = I_n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cdot A^4 = I_n \\ A^4 \cdot A = I_n \end{array} \right\} \Rightarrow A^{-1} = A^4.$$

**Εφαρμογή 60**

Δείξτε ότι ο  $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  επαληθεύει τη σχέση  $X^{4K+1} + 2^{2K} X = O$ , όπου  $K$  περιττός αριθμός.

Αποδεικνύω αρχικά τη σχέση  $X^4 = -4I_2$ , άρα

$$\begin{cases} X^{4K+1} & + 2^{2K} X = \\ (X^4)^K X & + (2^2)^K X = \\ (-4I_2)^K X & + 4^K X = \\ -4^K X & + 4^K X = O \end{cases}$$
**Εφαρμογή 61**

Βρείτε τον  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{2020}$

Είναι  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ισχυρίζομαι ότι  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^v = \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $v \in \mathbb{N}$

**Βήμα 1** Όταν  $v=1$ , είναι  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Βήμα 2** Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για  $v = \kappa$ , δηλαδή έστω ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\kappa = \begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 3** Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για  $v = \kappa + 1$ . Πράγματι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\kappa+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από τα βήματα 1, 2, 3 και τα γνωστά από την επαγωγή, η προς απόδειξη σχέση ισχύει

$$\forall v \in \mathbb{N}, \text{ άρα } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{2020} = \begin{bmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Εφαρμογή 62**

Βρείτε αν υπάρχει, το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού των  $2 \times 2$  πινάκων της

μορφής  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{Z}^*$

Έστω  $I = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$  με  $x \in \mathbb{Z}^*$  το ουδέτερο στοιχείο.

Τότε  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$ , άρα  $\begin{bmatrix} ax & 0 \\ 2ax & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$ , άρα  $x=1$

Άρα,  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  ουδέτερο στοιχείο από δεξιά.

$$\text{Επίσης } \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \text{ άρα } \begin{bmatrix} ax & 0 \\ 2ax & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \text{ άρα } x=1$$

Συνεπώς,  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  ουδέτερο στοιχείο και από αριστερά, άρα είναι το ουδέτερο στοιχείο.

---

### Εφαρμογή 63

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ με } a \in \mathbb{R}, \text{ δείξτε ότι } A^v = \begin{bmatrix} 1 & va \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ όπου } v \in \mathbb{N}$$

$$\text{Βήμα 1} \text{ Όταν } v=1, \text{ είναι } A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

**Βήμα 2** Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για  $v = \kappa$ , δηλαδή έστω ότι  $A^\kappa = \begin{bmatrix} 1 & \kappa a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Βήμα 3** Θαδειχθεί ότι, η προς απόδειξη σχέση, ισχύει για  $v = \kappa + 1$ . Πράγματι  $A^{\kappa+1} = A^\kappa \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & \kappa a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\kappa+1)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Από τα βήματα 1, 2, 3 και τα γνωστά από την επαγωγή, η προς απόδειξη σχέση ισχύει  $\forall v \in \mathbb{N}$

---

### Εφαρμογή 64

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ βρείτε τους } A^2, A^{20} \text{ και αν } \mathbf{O} = f(A) = A^{40} + \alpha \cdot A^6 + 14 \cdot \beta \cdot I_2,$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ δείξτε ότι } 49 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = -7^{19}$$

$$\text{Είναι } A^2 = 7I_2$$

$$A^{20} = (A^2)^{10} = (7 \cdot I_2)^{10} = 7^{10} (I_2)^{10} = 7^{10} \cdot I_2.$$

$$f(A) = A^{40} + \alpha \cdot A^6 + 14\beta \cdot I_2$$

$$= 7^{20} I_2 + \alpha \cdot 7^3 \cdot I_2 + 14 \cdot \beta \cdot I_2 = (7^{20} + \alpha \cdot 7^3 \cdot I_2 + 14 \cdot \beta) I_2 = \mathbf{O}$$

$$\text{Άρα, } 7^{20} + 7^3 \alpha + 14\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$7^{19} + 7^2 \alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$49\alpha + 2\beta = -7^{19}$$


---

### Εφαρμογή 65

$$\text{Αν } A \in \Pi_v \text{ με } A^2 = 2A, \text{ λύστε την } X + A = XA$$

$$A^2 = 2A \Leftrightarrow$$

$$A^2 - 2A = \mathbf{O} \Leftrightarrow$$

$$A^2 - 2AI_v + I_v^2 = I_v^2 \Leftrightarrow$$

$$(A - I_v)^2 = I_v \Leftrightarrow$$

$$(A - I_v)(A - I_v) = I_v \Leftrightarrow$$

$$(A - I_\nu)^{-1} = A - I_\nu$$

$$X + A = XA \Leftrightarrow$$

$$A = XA - X \Leftrightarrow$$

$$A = X(A - I_\nu) \Leftrightarrow$$

$$A(A - I_\nu)^{-1} = X(A - I_\nu)(A - I_\nu)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$A(A - I_\nu)^{-1} = XI_\nu \Leftrightarrow$$

$$A(A - I_\nu)^{-1} = X \Leftrightarrow$$

$$A(A - I_\nu) = X \Leftrightarrow$$

$$A^2 - A = X \Leftrightarrow$$

$$2A - A = X \Leftrightarrow$$

$$A = X$$


---

### Εφαρμογή 66

Αν  $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ , βρείτε τον  $A^\nu$ , όπου  $\nu \in \mathbb{N}$

Είναι  $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ -2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix}$

Ισχυρίζομαι ότι  $A^\nu = \begin{bmatrix} \cos(\nu\alpha) & \sin(\nu\alpha) \\ -\sin(\nu\alpha) & \cos(\nu\alpha) \end{bmatrix}$

**Βήμα 1** Για  $\nu = 1$  ισχύει. Πράγματι είναι  $A^1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^1 = A$

**Βήμα 2** Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για  $\nu = \kappa$ , δηλαδή έστω ότι

$$A^\kappa = \begin{bmatrix} \cos(\kappa\alpha) & \sin(\kappa\alpha) \\ -\sin(\kappa\alpha) & \cos(\kappa\alpha) \end{bmatrix}$$

**Βήμα 3** Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για  $\nu = \kappa + 1$ , δηλαδή θα δειχθεί

$$\text{ότι } A^{\kappa+1} = \begin{bmatrix} \cos[(\kappa+1)\alpha] & \sin[(\kappa+1)\alpha] \\ -\sin[(\kappa+1)\alpha] & \cos[(\kappa+1)\alpha] \end{bmatrix}$$

Πράγματι,  $A^{\kappa+1} = A^\kappa \cdot A = \begin{bmatrix} \cos(\kappa\alpha) & \sin(\kappa\alpha) \\ -\sin(\kappa\alpha) & \cos(\kappa\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\kappa\alpha) \cdot \cos\alpha - \sin(\kappa\alpha) \cdot \sin\alpha & \cos(\kappa\alpha) \cdot \sin\alpha + \sin(\kappa\alpha) \cdot \cos\alpha \\ -\sin(\kappa\alpha) \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos(\kappa\alpha) & -\sin\alpha \cdot \sin(\kappa\alpha) + \cos(\kappa\alpha) \cdot \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\kappa\alpha + \alpha) & \sin(\kappa\alpha + \alpha) \\ -\sin(\kappa\alpha + \alpha) & \cos(\kappa\alpha + \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos[(\kappa+1)\alpha] & \sin[(\kappa+1)\alpha] \\ -\sin[(\kappa+1)\alpha] & \cos[(\kappa+1)\alpha] \end{bmatrix}$$

Από τα βήματα 1, 2, 3 και τα γνωστά από την επαγωγή, η προς απόδειξη σχέση ισχύει  $\forall \nu \in \mathbb{N}$

---

### Άλυτες ασκήσεις

**1** Λύστε την  $A + X = B$ , για  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**2** Βρείτε τους  $A, B$  αν  $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $3 \cdot A + B = O$

**3** Βρείτε  $x, y, z, \omega \in \mathbb{R}$  αν  $\begin{bmatrix} 4x & -3y \\ 5z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & -7 \\ -4 & 5\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & x+y \\ z+\omega & 12 \end{bmatrix}$

**4** Βρείτε  $x, y \in \mathbb{R}$  ώστε  $A \cdot B = I_2$ , αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

**5** Βρείτε  $x, y \in \mathbb{R}$  ώστε  $A \cdot B = 4 \cdot B$ , αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

**6** Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  βρείτε τον  $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  ώστε  $A \cdot B = 3 \cdot B$

**7** Λύστε την  $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

**8** Αν  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι η  $A \cdot X = \lambda \cdot X$  έχει  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , μία μόνο λύση στο σύνολο των  $2 \times 1$  πινάκων.

**9** Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  βρείτε τον  $X$ , ώστε  $A \cdot X = B$ .

**10** Αν  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 2\alpha & 0 \end{bmatrix}$  με  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$  βρείτε  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $A \cdot B = A$

**11** Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  βρείτε  $x, y \in \mathbb{R}$  ώστε  $x \cdot A + y \cdot B = O$

**12** Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  λύστε την  $2 \cdot A + 3 \cdot X = -B$

13 Βρείτε τους  $X, Y$  αν  $X+Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $3 \cdot X + 4 \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

14 Λύστε την  $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

15 Βρείτε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 2\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta & 5 \\ -4 & -3\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

16 Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  λύστε το  $\begin{cases} 2 \cdot X + 3 \cdot Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

17 Βρείτε τους  $X, Y$  ώστε  $X+Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $5 \cdot X + 6 \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

18 Αν  $A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  βρείτε  $x, y \in \mathbb{R}$  ώστε  $(A - x \cdot I)(A - y \cdot I) = O$

19 Αν  $A = \begin{bmatrix} \alpha\gamma + \delta & \beta\gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \alpha\epsilon + \zeta & \beta\epsilon \\ \epsilon & \zeta \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A \cdot B = B \cdot A$

20 Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$  βρείτε το  $A \cdot B$

21 Αν  $A = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma & \beta \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \alpha + \delta & \beta \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A \cdot B = B \cdot A$ ,  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

22 Αν  $A_{2 \times 2}$  αντιστρέψιμος, λύστε την  $D(x \cdot A) = x \cdot D(A)$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ ,  $D(A)$  η ορίζουσα του  $A$  και  $D(x \cdot A)$  η ορίζουσα του  $x \cdot A$

23 Αν  $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$  υπολογίστε το  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (A^2 + B^2)$

24 Αν  $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 3 \cdot I$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  βρείτε τον πίνακα  $\varphi(A)$

25 Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & x-y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ,  
 $A \cdot B = B \cdot A$

**26** Βρείτε τον  $X$  ώστε  $X \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = I_2$

**27** Έστω συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \Pi_2$  με  $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}$   
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \Pi_2$  με  $\varphi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$

Δείξτε ότι  $f(\alpha) \cdot f(\beta) = \varphi(\alpha - \beta)$ ,  $[f(\alpha)]^2 = I_2$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**28** Εξετάστε αν για τον  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  είναι  $A = A^2 = A^3 = A^4 = \dots = A^n$

**29** Αν  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$  βρείτε τον  $A^2$

**30** Αν  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -x \\ -1 & 0 & y \\ -x & y & 0 \end{bmatrix}$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ , δείξτε ότι  $A^3 = O$

**31** Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $A^2 + B = 3B - A$

**32** Αν ο  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$  δεν είναι αντιστρέψιμος, λύστε την  $A^2 = A$

**33** Ισχύει ότι  $(A+B) \cdot A^{-1} \cdot (A-B) = (A-B) \cdot A^{-1} \cdot (A+B)$ , αν  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times n}$ ,  $|A| \neq 0$ ;

**34** Αν  $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$  λύστε την  $A^2 + A + I = O$

**35** Αν  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , δείξτε ότι οι  $A, B$  αντιμετατίθενται αν και μόνο αν αντιμετατίθενται οι  $(A - \lambda \cdot I)$ ,  $(B - \lambda \cdot I)$

**36** Οι συναρτήσεις  $f_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$ ,  $f_2 = 2x_1 + 3x_2 - x_3$  είναι γραμμικά εξαρτημένες;

**37** Βρείτε τους  $A, B$  αν  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

## Ιστορικό σημείωμα

Ένα μέρος της θεωρίας των πινάκων αναπτύχθηκε την περίοδο 1800–1850 σε προβλήματα διαφορικών εξισώσεων, που προέκυψαν από τη μηχανική και την αστρονομία. Την οριστική της μορφή πήρε το 1850, όταν ο [James Sylvester](#) (1814–1879) κατασκεύασε μία ορθογώνια διάταξη αριθμών με σκοπό να δημιουργήσει τετράγωνα με αριθμούς, αποκόπτοντας από αυτή γραμμές και στήλες.

Ο [Sylvester](#), είχε προτίμηση στο να δίνει φανταχτερά ονόματα στα αντικείμενα στα οποία εργαζόταν. Έτσι, ονόμασε τις ορθογώνιες διατάξεις **matrix** (πίνακες, μήτρες, καλούπια). Η ονομασία αυτή αποδείχθηκε κατάλληλη, διότι η μήτρα είναι ένα όργανο μέσα στο οποίο κάτι αναπτύσσεται ή δημιουργείται.

Το 1858 οι [William Rowan Hamilton](#) (1805–1865) και [Arthur Cayley](#) (1821–1895) διατύπωσαν το βασικό θεώρημα της θεωρίας πινάκων «Κάθε τετραγωνικός πίνακας επαληθεύει την χαρακτηριστική του εξίσωση». Ο [Hamilton](#) σε ηλικία 13 ετών γνώριζε 13 γλώσσες, μεταξύ των οποίων και ελληνικά, σε ηλικία 17 ετών επεσήμανε λάθος στο έργο του Laplace «Πραγματεία για την ουράνια μηχανική», σε ηλικία 22 ετών διορίστηκε καθηγητής αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο του Δουβλίνου και διετέλεσε πρόεδρος της Ακαδημίας της Ιρλανδίας. Οφείλει τη φήμη του στην επινόηση και επεξεργασία ενός ιδιότυπου συστήματος αριθμών, το λεγόμενο κβαντέρνιο (λογισμός τετραέδρων) και για αυτό θεωρείται ένας από τους ιδρυτές του διανυσματικού λογισμού.

Ο [Cayley](#), στη διάρκεια της δεκατετραετούς θητείας ως δικηγόρος, γνωρίστηκε και έγινε φίλος με τον Sylvester και δημοσίευσε 300 μαθηματικές εργασίες. Εγκατέλειψε τη δικηγορία όταν ανέλαβε καθηγητής μαθηματικών στην Οξφόρδη, ο νεότερος που είχε εκλεγεί έως τότε, θέση που κράτησε μέχρι τον θάνατο του, διετέλεσε πρόεδρος της London Mathematical Society από το 1868 ως το 1870, ανακάλυψε τη θεωρία των πινάκων και επαλήθευσε με σαφήνεια ότι ο πολλαπλασιασμός ενός συστήματος τετραέδρων μπορεί να εκφρασθεί με πίνακες.

Βαθμιαία, οι μαθηματικοί αναγνώρισαν ότι οι πίνακες ήταν κατάλληλοι συμβολισμοί για την επέκταση της κοινής έννοιας των αριθμών. Έτσι, έγινε αντιληπτό ότι η θεωρία τους μπορεί να επεκταθεί πέρα από τα σύνορα της άλγεβρας και να εκφράσει πολλές ιδέες των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Το 1910, ο [Andrey Markoff](#) (1856–1922), εισήγαγε τους πίνακες στις πιθανότητες και στη στατιστική και το 1925 ο [Werner Heisenberg](#), στην κβαντική μηχανική. Τις τελευταίες δεκαετίες, με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, έγιναν το κύριο μέσο για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων στην επιστήμη και στην τεχνολογία. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα μαγικά τετράγωνα, δηλαδή οι τετραγωνικοί πίνακες που το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής, της κάθε στήλης και των διαγωνίων είναι ο ίδιος αριθμός.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 72 & 9 & 54 \\ 27 & 45 & 62 \\ 36 & 81 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 148 & 333 & 74 \\ 111 & 185 & 259 \\ 296 & 37 & 222 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 96 & 11 & 89 & 68 \\ 86 & 69 & 91 & 16 \\ 61 & 86 & 18 & 99 \\ 19 & 96 & 66 & 81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 9 & 3 & 22 & 16 \\ 17 & 11 & 5 & 4 & 23 \\ 24 & 18 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 20 & 19 & 13 & 7 \\ 8 & 2 & 21 & 15 & 14 \end{bmatrix}$$