Περιεχόμενα

2. Ορίζουσες

Σε κάθε πίνακα $A_{2X2}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός που ονομάζεται ορίζουσα του A και ορίζεται ως $|A|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$ Η έννοια της ορίζουσας είναι αναγκαία, ώστε να ελεγχθεί αν ένας τετραγωνικός πίνακας αντιστρέφεται.

2.1 Ορίζουσα 1ης τάξης

Ο $\alpha_{11}\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ορίζουσα του $A=[\alpha_{11}]$ Συμβολικά, είναι $|A|=|\alpha_{11}|=\alpha_{11}$
Επειδή ο A είναι διαστάσεων $1x1$, η ορίζουσα του ονομάζεται $1^{ης}$ τάξης.

2.2 Ορίζουσα 2ης τάξης

Η ορίζουσα του $A_{2X2}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$, συμβολίζεται ως $|A|$ ή $D(A)$ ή $Det(A)$ και εξ΄ ορισμού είναι $|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$ Η ορίζουσα ονομάζεται $2^{ης}$ τάξης, διότι έχει δυο γραμμές και δυο στήλες.

Εφαρμογή 1

Έστω $A_{2X2}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ Ισχύει ότι $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=4-6=-2$

2.3 Ορίζουσα 3ης τάξης

Εξ΄ ορισμού, ορίζουσα του $A_{3X3}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός $\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$ Επειδή ο πίνακας είναι διαστάσεων $3x3$, η ορίζουσα λέγεται $3^{ης}$ τάξης.

Δηλαδή, $|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$

2.3.1 Ανάπτυγμα ορίζουσας 3ης τάξης

Έστω $A_{3X3}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ Η ορίζουσα του είναι $|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας, σύμφωνα με τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21}&\alpha_{22}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}\end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας, σύμφωνα με τα στοιχεία της 2ης γραμμής

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\alpha_{21}\begin{vmatrix}\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\alpha_{22}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{13}\\\alpha_{31}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\alpha_{23}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}\end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας, σύμφωνα με τα στοιχεία της 3ης γραμμής

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\alpha_{31}\begin{vmatrix}\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{22}&\alpha_{23}\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\alpha_{32}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{23}\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\alpha_{33}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας, σύμφωνα με τα στοιχεία της 1ης στήλης

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\alpha_{21}\begin{vmatrix}\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\alpha_{31}\begin{vmatrix}\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{22}&\alpha_{23}\end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας, σύμφωνα με τα στοιχεία της 2ης στήλης

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\alpha_{22}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{13}\\\alpha_{31}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\alpha_{32}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{23}\end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας, σύμφωνα με τα στοιχεία της 3ης στήλης

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21}&\alpha_{22}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\alpha_{23}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\alpha_{33}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}$$

2.3.2 Κανόνας του Sarrus

Πρόκειται για μνημονικό κανόνα, που εφαρμόζεται μόνο στο ανάπτυγμα των οριζουσών 3ης τάξης.

$$|A|=\left|\begin{matrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}\end{matrix}=-\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}-\alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}+\alpha_{33}\alpha_{22}\alpha_{11}+\alpha_{31}\alpha_{23}\alpha_{12}+\alpha_{32}\alpha_{21}\alpha_{13}$$

$$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$$

2.4 Ιδιότητες των οριζουσών

1 Η ορίζουσα, δεν μεταβάλλεται αν πάρω το ανάπτυγμα της κατά τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε γραμμής (ή στήλης) της.

2 Όταν όλα τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε γραμμής (ή στήλης) είναι μηδέν, τότε η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot 4 - 3\cdot 0 = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 - 2\cdot 0 = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot 4 - 2\cdot 0 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 - 3\cdot 0 = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$

3 Όταν τα αντίστοιχα στοιχεία δυο γραμμών (ή στηλών) είναι ίσα ή ανάλογα, τότε η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 30 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0$

4 Η ορίζουσα των διαγωνίων πινάκων, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου τους. Η απόδειξη, γίνεται με χρήση της επαγωγικής μεθόδου.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 = 6$ $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)2\cdot 3 = -6$

5 Για κάθε τετραγωνικό πίνακα, ισχύει ότι $|A| = |A^T|$ Δηλαδή, η ορίζουσα του κάθε τετραγωνικού πίνακα, ισούται με την ορίζουσα του ανάστροφου του. Αυτό σημαίνει ότι, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται, αν οι γραμμές της γίνουν στήλες ή οι στήλες της γίνουν γραμμές, με την ίδια όμως διάταξη.

Για $\nu = 2$ ισχύει ότι $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

Εφαρμογή 2

Έστω $A_{2X2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Ισχύει ότι $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$

Είναι $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ και $|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

Για $\nu = 3$ ισχύει ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = -\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{22}\alpha_{11} + \alpha_{31}\alpha_{23}\alpha_{12} + \alpha_{32}\alpha_{21}\alpha_{13} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

6 Για κάθε τριγωνικό άνω (ή κάτω) πίνακα, ισχύει ότι $|\mathrm{A}| = \alpha_{11}\alpha_{22}...\alpha_{\nu\nu}$, δηλαδή η ορίζουσα του, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad \begin{vmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

7 Αν σε μία ορίζουσα εναλλάξω τη θέση δυο γραμμών (ή στηλών), τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Πράγματι, έστω η $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

Με εναλλαγή της θέσης των δυο γραμμών, προκύπτει ότι $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ a & \beta \end{vmatrix} = \beta\gamma - \alpha\delta$

Με εναλλαγή της θέσης των δυο στηλών, προκύπτει ότι $\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \beta\gamma - \alpha\delta$

Αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = 5$, τότε εναλλάσσοντας τη θέση των γραμμών, προκύπτει ότι

$$\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \kappa \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{vmatrix} = -5$$

Ομοίως, αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = 5$, τότε εναλλάσσοντας τη θέση των στηλών, προκύπτει ότι

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ \varepsilon & \delta & \zeta \\ \theta & \eta & \kappa \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \zeta & \varepsilon & \delta \\ \kappa & \theta & \eta \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \delta & \zeta & \varepsilon \\ \eta & \kappa & \theta \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \varepsilon & \zeta & \delta \\ \theta & \kappa & \eta \end{vmatrix} = 5$$

8 Αν πολλαπλασιάσω τα στοιχεία μίας γραμμής (ή στήλης) μίας ορίζουσας επι τον αριθμό k, τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επι τον k

$$k\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & k\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ k\gamma & k\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & \beta \\ k\gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & k\beta \\ \gamma & k\delta \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} ka & k\beta \\ k\gamma & k\delta \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & \beta \\ k\gamma & k\delta \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2a & k^2\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ k^2\gamma & k^2\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2a & \beta \\ k^2\gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & k^2\beta \\ \gamma & k^2\delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k\alpha & 2\beta & 3\gamma \\ k\delta & 2\varepsilon & 3\zeta \\ k\eta & 2\theta & 3\lambda \end{vmatrix} = 6k\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \lambda \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} k\alpha & k\beta & k\gamma \\ k\delta & k\varepsilon & k\zeta \\ k\eta & k\theta & k\lambda \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \lambda \end{vmatrix}$$

9 Για κάθε $\mathrm{A}_{\nu x\nu}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $|\lambda\mathrm{A}| = \lambda^\nu |\mathrm{A}|$

Πράγματι, αν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$ τότε $\lambda\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1\nu} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\alpha_{\nu 1} & \lambda\alpha_{\nu 2} & \dots & \lambda\alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$ οπότε

$$|\lambda\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1\nu} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\alpha_{\nu 1} & \lambda\alpha_{\nu 2} & \dots & \lambda\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \lambda^\nu \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \lambda^\nu |\mathrm{A}|$$

10 Αν κάθε στοιχείο μίας γραμμής (ή στήλης) μίας ορίζουσας είναι άθροισμα δυο προσθετέων, τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3+x & 4+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{vmatrix}$$

11 Αν στα στοιχεία μίας γραμμής (ή στήλης) μίας ορίζουσας προσθέσω τα αντίστοιχα στοιχεία μίας άλλης γραμμής (ή στήλης) πολλαπλασιασμένα επι έναν αριθμό k, τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma+5a & \delta+5\beta \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma-4a & \delta-4\beta \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3\beta & \beta \\ \gamma+3\delta & \delta \end{vmatrix}$$

12 Αν A,B είναι πίνακες $2x2$, τότε ισχύει ότι $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|$

Αποδεικνύεται ότι, η ισότητα $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|$ ισχύει γενικά για πίνακες $\nu x\nu$

Αν $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ προκύπτει ότι $|\mathrm{A}^2| = |\mathrm{A}|^2$ Γενικότερα, ισχύει ότι $|\mathrm{A}^k| = |\mathrm{A}|^k$, $|\mathrm{A}^{-1}| = |\mathrm{A}|^{-1}$

13 Κάθε $\nu x\nu$ πίνακας με περισσότερα από $\nu^2-\nu$ μηδενικά στοιχεία, έχει ορίζουσα μηδέν.

Απόδειξη

Αν η κάθε γραμμή του πίνακα έχει το πολύ $\nu-1$ μηδενικά στοιχεία, τότε οι ν γραμμές, δηλαδή ο πίνακας, έχει το πολύ $\nu(\nu-1) = \nu^2-\nu$ μηδενικά στοιχεία.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots \\ \dots & 0 \end{pmatrix},\ \nu^2-\nu = 2^2-2 = 2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \nu^2-\nu = 3^2-3 = 6$$

14 Αν για τον $A_{\nu x\nu}$ ισχύει ότι $|A|=1$, τότε $|A^{\nu}|=|A|^{\nu}=1^{\nu}=1$

15 Το ανάπτυγμα κάθε ορίζουσας ν τάξης, είναι άθροισμα $\nu!$ όρων.

16 Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$ τότε το ίχνος του AB (άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου) ισούται με το ίχνος του BA

Πράγματι, $AB=\begin{bmatrix} \alpha k+\beta m & \alpha l+\beta n \\ \gamma k+\delta m & \gamma l+\delta n \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} k\alpha+l\gamma & k\beta+l\delta \\ m\alpha+n\gamma & m\beta+n\delta \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 3

Αν $|A|=3$ και A_{2x2}, τότε $|A^{-1}|=\dfrac{1}{3}$, $|A^2|=|A|^2=3^2=9$, $|A^3|=|A|^3=3^3=27$,

$|\lambda A|=\lambda^2|A|=3\lambda^2$, $|\lambda A^{-1}|=\lambda^2|A^{-1}|=\lambda^2|A|^{-1}=\dfrac{\lambda^2}{3}$

Εφαρμογή 4

Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$

Είναι $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

Η $2^η$ και η $3^η$ γραμμή, πολλαπλασιάστηκαν επί 1 και ακολούθως προστέθηκαν στην $1^η$ γραμμή. Μετά, από την $1^η$ γραμμή θα βγει κοινός παράγοντας το $(x+2)$ Τέλος, η $1^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -1, προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές.

$$(x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$x=-2$ ή $x=1$ (Διπλή λύση)

Εφαρμογή 5

Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}=0$

Είναι $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

Η $2^η$ και η $3^η$ γραμμή αφού πολλαπλασιάστηκαν επί 1, προστέθηκαν στην $1^η$ γραμμή. Μετά, από την $1^η$ γραμμή θα βγει κοινός παράγοντας το $(2x-1)$, η $1^η$ στήλη πολλαπλασιασμένη επί -1, θα προστεθεί στις άλλες δύο στήλες και μετά θα υπολογισθεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας.

$$(2x-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & -1-x & 0\\ x & 0 & -1-x\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(2x-1)(-1-x)(-1-x)=0\Leftrightarrow(2x-1)(x+1)^2=0$$

$(2x-1)(1+x)^2=0\Leftrightarrow x=0{,}5$ ή $x=-1$ (Διπλή λύση)

Εφαρμογή 6

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix}1 & 2020^3 & 3{,}14159\\ 0 & 2 & 45^6\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$

Είναι $\begin{vmatrix}1 & 2020^3 & 3{,}14159\\ 0 & 2 & 45^6\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 3=6$ διότι, όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Εφαρμογή 7

Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ \alpha & \alpha & \alpha\\ 3 & x & 3\end{vmatrix}=0$

Από τη 2η γραμμή, θα βγει κοινός παράγοντας το a και στη συνέχεια, η 1η γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -1 και -3, θα προστεθεί στις 2η και 3η γραμμή, αντίστοιχα. $\begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ \alpha & \alpha & \alpha\\ 3 & x & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\alpha\begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & x & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\alpha\begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1-x\\ 0 & x-3 & 3-3x\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

Υπολογισμός του αναπτύγματος, σύμφωνα με τα στοιχεία της 1ης στήλης.

$$\alpha(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}0 & 1-x\\ x-3 & 3-3x\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\alpha\begin{vmatrix}0 & 1-x\\ x-3 & 3(1-x)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\alpha(1-x)\begin{vmatrix}0 & 1\\ x-3 & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$\alpha(1-x)(3-x)=0\Leftrightarrow a=0$ ή $x=1$ ή $x=3$

Εφαρμογή 8

Δείξτε ότι $\begin{vmatrix}\alpha & \beta+2 & 1\\ \beta & 2+\alpha & 1\\ 2 & \alpha+\beta & 1\end{vmatrix}=0$

Η 2η και η 3η στήλη πολλαπλασιασμένες επί 1, προστίθεται στην 1η στήλη. Μετά, από την 1η στήλη βγαίνει κοινός παράγοντας το $(\alpha+\beta+3)$

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta+2 & 1\\ \beta & 2+\alpha & 1\\ 2 & \alpha+\beta & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha+\beta+3 & \beta+2 & 1\\ \alpha+\beta+3 & 2+\alpha & 1\\ \alpha+\beta+3 & \alpha+\beta & 1\end{vmatrix}=(\alpha+\beta+3)\begin{vmatrix}1 & \beta+2 & 1\\ 1 & 2+\alpha & 1\\ 1 & \alpha+\beta & 1\end{vmatrix}=(\alpha+\beta+3)0=0$$

Δύο στήλες (1η και 3η) είναι ίσες, άρα η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

Εφαρμογή 9

Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 1+y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1+y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1+y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

Είναι $\begin{vmatrix} 1+y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1+y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1+y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1+y_1 \\ 1 & 1 & x_2+y_2 \\ 1 & 1 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1+y_1 \\ 1 & x_2 & x_2+y_2 \\ 1 & x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 \\ y_2 & 1 & x_2 \\ y_3 & 1 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_2 \\ y_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 \\ y_2 & 1 & x_2 \\ y_3 & 1 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ y_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 \\ y_2 & 1 & x_2 \\ y_3 & 1 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Εφαρμογή 10

Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 2^5 & 2^5 & 2^5 \\ 2^5 & 2^5-x & 2^5 \\ 2^5 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0$

Από την 1η στήλη, βγαίνει κοινός παράγοντας το 2^5

$$\begin{vmatrix} 2^5 & 2^5 & 2^5 \\ 2^5 & 2^5-x & 2^5 \\ 2^5 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2^5\begin{vmatrix} 1 & 2^5 & 2^5 \\ 1 & 2^5-x & 2^5 \\ 1 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2^5 & 2^5 \\ 1 & 2^5-x & 2^5 \\ 1 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

Η 1η γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -1 προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές. Μετά, υπολογίζεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2^5 & 2^5 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 2^6-2^5-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x\left(2^6-2^5-x\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2^6-2^5=64-32=32$$

Εφαρμογή 11

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Η 1η γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -4, -7 προστίθεται στις 2η, 3η γραμμές, αντίστοιχα. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = (-3)(-6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18\cdot 0 = 0$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας είναι μηδέν, διότι έχει δύο ίσες γραμμές (2η, 3η)

Εφαρμογή 12

Αν A_{3X1}, B_{1X3}, να βρεθεί ο AB και να δειχθεί ότι δεν αντιστρέφεται.

Είναι $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3\beta_1 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_3 \end{pmatrix}$

Είναι $|\mathrm{AB}|=0$, διότι τα στοιχεία δυο γραμμών (Γ_1,Γ_2) είναι ανάλογα $\left(\Gamma_1\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}=\Gamma_2\right)$

Εφαρμογή 13

Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\gamma & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma\alpha & \beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$

Αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$, τότε προφανώς ισχύει.

Πράγματι, αν $\alpha=0$ είναι $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta^2 \\ 0 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \beta\gamma\left(\beta\gamma^2-\beta^2\gamma\right)$

Πράγματι, αν $\beta=0$ είναι $\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \alpha^3\gamma^2-\alpha^2\gamma^3$

Πράγματι, αν $\gamma=0$ είναι $\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2$

Αν $\alpha\beta\gamma\neq 0$, πολλαπλασιάζοντας την ορίζουσα επί $\alpha\beta\gamma$ και ταυτόχρονα διαιρώντας την 1η γραμμή δια α, τη 2η γραμμή δια β και την 3η γραμμή δια γ προκύπτει:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\beta} & \beta & \beta^2 \\ \frac{1}{\gamma} & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cancel{\alpha}\beta\gamma}{\cancel{\alpha}} & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{\alpha\cancel{\beta}\gamma}{\cancel{\beta}} & \beta & \beta^2 \\ \frac{\alpha\beta\cancel{\gamma}}{\cancel{\gamma}} & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\gamma & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma\alpha & \beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

Πρόταση 1

Αν $A_{\nu x\nu}, B_{\nu x\nu}$, τότε $AB = I \Leftrightarrow BA = I$ Δηλαδή, αν για τους $A_{\nu x\nu}, B_{\nu x\nu}$ είναι $AB = I$ τότε οι A, B είναι αντιστρέψιμοι και ο ένας είναι αντίστροφος του άλλου (δεν χρειάζεται και το $BA = I$).

Εφαρμογή 14

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+4 \\ y & y+1 & y+4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Είναι $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+4 \\ y & y+1 & y+4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ y & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Η 1η στήλη, αφαιρείται από τις άλλες δύο. Δύο στήλες (2η, 3η) είναι ανάλογες, άρα η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

Εφαρμογή 15

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Από την 1η γραμμή, βγαίνει κοινός παράγοντας το 3. Μετά, η 3η γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -1 και -5 προστίθεται στις 1η και 2η γραμμή, αντίστοιχα.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6(-1)^{1+3}\,1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

Εφαρμογή 16

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta \end{vmatrix}$

Η 1η γραμμή, αφαιρείται από τις άλλες δύο γραμμές. Η ορίζουσα του άνω τριγωνικού πίνακα, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta$$

Εφαρμογή 17

Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 8,02 & 0,5 & 300 \\ 8,04 & 0,6 & 200 \\ 8,06 & 0,7 & 100 \end{vmatrix} = 0$

Είναι $\begin{vmatrix} 8,02 & 0,5 & 300 \\ 8,04 & 0,6 & 200 \\ 8,06 & 0,7 & 100 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 8,02 & 0,5 & 3 \\ 8,04 & 0,6 & 2 \\ 8,06 & 0,7 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 8,02 & 5 & 3 \\ 8,04 & 6 & 2 \\ 8,06 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

Η $1^η$ γραμμή, πολλαπλασιάζεται επί -1 και προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές.

$10\begin{vmatrix} 8,02 & 5 & 3 \\ 0,02 & 1 & -1 \\ 0,04 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$, διότι η $2^η$ και η $3^η$ γραμμή είναι ανάλογες.

Εφαρμογή 18

Εύρεση A^{-1} αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ Είναι $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, άρα $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Εφαρμογή 19

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha+1 & \beta+1 & 1 \\ \alpha-8 & \beta-8 & 1 \end{vmatrix}$

Η $1^η$ γραμμή, πολλαπλασιάζεται επί -1 και προστίθενται στις άλλες δύο γραμμές.

$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha+1 & \beta+1 & 1 \\ \alpha-8 & \beta-8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ($2^η$ γραμμή = $3^η$ γραμμή)

Εφαρμογή 20

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} \alpha & \delta & 5\alpha+\delta \\ \beta & \varepsilon & 5\beta+\varepsilon \\ \gamma & \zeta & 5\gamma+\zeta \end{vmatrix}$

Η $2^η$ στήλη, πολλαπλασιάζεται επί -1 και προστίθενται στην $3^η$ στήλη, οπότε

$\begin{vmatrix} \alpha & \delta & 5\alpha+\delta \\ \beta & \varepsilon & 5\beta+\varepsilon \\ \gamma & \zeta & 5\gamma+\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & 5\alpha \\ \beta & \varepsilon & 5\beta \\ \gamma & \zeta & 5\gamma \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \alpha \\ \beta & \varepsilon & \beta \\ \gamma & \zeta & \gamma \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 = 0$ ($1^η$ στήλη=$3^η$ στήλη)

Εφαρμογή 21

Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ α^2 & α & 1 \\ β^2 & β & 1 \end{vmatrix} = 0$

Η $1^η$ γραμμή, αφού πολλαπλασιαστεί επί -1 θα προστεθεί στις άλλες δύο γραμμές.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ α^2 & α & 1 \\ β^2 & β & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ α^2 - x^2 & α - x & 0 \\ β^2 - x^2 & β - x & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(α^2 - x^2\right)(β - x) - \left(β^2 - x^2\right)(α - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - x)(β - x)\left[(a + x) - (β + x)\right] = 0 \Leftrightarrow (a - x)(β - x)(\alpha - β) = 0$$

Εφαρμογή 22

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ διότι όλα τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης είναι 0

Εφαρμογή 23

Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \log 36 & \log 75 & \log 72 \\ \log 64 & \log 27 & \log 8 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = 0$

Υπενθύμιση. Ισχύει ότι $\log \theta^k = k \cdot \log \theta$ και $\log \theta_1 - \log \theta_2 = \log \dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ και $\log \theta_1 + \log \theta_2 = \log(\theta_1 \cdot \theta_2)$

Η $3^η$ γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -1 προστίθενται στην $1^η$ γραμμή, οπότε

$$\begin{vmatrix} \log 36 & \log 75 & \log 72 \\ \log 64 & \log 27 & \log 8 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 12 & \log 15 & \log 12 \\ \log 4^3 & \log 3^3 & \log 2^3 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 12 & \log 15 & \log 12 \\ 3 \cdot \log 4 & 3 \cdot \log 3 & 3 \cdot \log 2 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix}$$

Η $3^η$ γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -1 προστίθενται στην $1^η$ γραμμή, οπότε

$\begin{vmatrix} \log 12 & \log 15 & \log 12 \\ 3 \cdot \log 4 & 3 \cdot \log 3 & 3 \cdot \log 2 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 4 & \log 3 & \log 2 \\ 3 \cdot \log 4 & 3 \cdot \log 3 & 3 \cdot \log 2 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = 0$ διότι οι γραμμές $1^η$ και $2^η$ είναι ανάλογες.

Εφαρμογή 24

Δείξτε ότι αν $A_{\nu x \nu}$, $|A| = 1$ τότε $|A^\nu| = 1$ Είναι $|A^\nu| = |A|^\nu = 1^\nu = 1$

Εφαρμογή 25

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (Βασική τριγωνομετρική ταυτότητα)

Εφαρμογή 26

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 25424 & 25436 \\ 25423 & 25435 \end{vmatrix}$

Από την 1^{η} γραμμή, αφαιρείται η 2^{η} γραμμή οπότε

$$\begin{vmatrix} 25424 & 25436 \\ 25423 & 25435 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 25423 & 25435 \end{vmatrix} = 25435 - 25423 = 12$$

Εφαρμογή 27

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

Η 1^{η} γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -4 και -2 αντίστοιχα, προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές. Μετά, από τη 2^{η} γραμμή βγαίνει κοινός παράγοντας το 13

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 13\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

Η 2^{η} γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -7 προστίθεται στην 3^{η} γραμμή. Η ορίζουσα που προκύπτει, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου της.

$$13\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot 13(-5) = -65$$

Εφαρμογή 28

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

Η 2^{η} γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -2 και -3 προστίθεται στην 3^{η} και 1^{η} γραμμή, αντίστοιχα. Μετά, η 3^{η} γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -2 και 2 προστίθεται στις 2^{η} και 1^{η} γραμμή, αντίστοιχα. Τέλος, υπολογίζεται η τιμή της ορίζουσας από το ανάπτυγμα των στοιχείων της $1^{\eta\varsigma}$ γραμμής.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}9\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

Εφαρμογή 29

Υπολογίστε την τιμή της $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Η 1^{η} γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -2 προστίθεται στη 2^{η} γραμμή. Μετά, η 3^{η} γραμμή πολλαπλασιασμένη επί 10, προστίθεται στη 2^{η} γραμμή. Τέλος, υπολογίζεται η τιμή της ορίζουσας με βάση το ανάπτυγμα της $1^{\eta\varsigma}$ στήλης της.

Εφαρμογή 30

Αν A_{3x3}, $B=(x+2)A$, λύστε ως προς $x\in\mathbb{R}$ την $|B|=2^6|A|$

Από $B=(x+2)A$ είναι $|B|=|(x+2)A|=(x+2)^3|A|$

Συνεπώς, $2^6|A|=(x+2)^3|A| \Leftrightarrow 2^6=(x+2)^3 \Leftrightarrow 4^3=(x+2)^3 \Leftrightarrow 4=x+2 \Leftrightarrow 2=x$

Εφαρμογή 31

Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 1-\alpha-\beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & 1-\beta-\gamma & \alpha \\ \beta & \beta & 1-\gamma-\alpha \end{vmatrix} \geq 0$

Προσθέτω στην 1^η γραμμή, αρχικά τη 2^η γραμμή πολλαπλασιασμένη επί 1 και στη συνέχεια, την 3^η γραμμή πολλαπλασιασμένη επί 1, οπότε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1-\beta-\gamma & \alpha \\ \beta & \beta & 1-\gamma-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-a-\beta-\gamma & 0 \\ \beta & 0 & 1-\gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = \left(1-a-\beta-\gamma\right)^2 \geq 0$$

Εφαρμογή 32

Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ x+4\alpha & x+5\alpha & x+6\alpha & x+7\alpha \\ x+8\alpha & x+9\alpha & x+10\alpha & x+11\alpha \\ x+12\alpha & x+13\alpha & x+14\alpha & x+15\alpha \end{vmatrix} = 0$.

Είναι $\begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ x+4\alpha & x+5\alpha & x+6\alpha & x+7\alpha \\ x+8\alpha & x+9\alpha & x+10\alpha & x+11\alpha \\ x+12\alpha & x+13\alpha & x+14\alpha & x+15\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha \\ 7\alpha & 8\alpha & 8\alpha & 8\alpha \\ 11\alpha & 12\alpha & 12\alpha & 12\alpha \end{vmatrix} =$

Η 1^η γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -1 προστίθεται στις άλλες γραμμές. Η 2^η γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί -1 προστίθεται στην 3^η και στην 4^η γραμμή, οπότε

$$= \begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha \\ 7\alpha & 8\alpha & 8\alpha & 8\alpha \end{vmatrix} = 4\alpha^3 \begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

Η 1^η στήλη, πολλαπλασιασμένη επί -1, προστίθενται σε όλες τις άλλες στήλες, άρα

$$= 4\alpha^3 \begin{vmatrix} x & \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\alpha^3\left(-1\right)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\alpha^3 \cdot 0 = 0$$

Εφαρμογή 33

Αν $A_{\nu x \nu}$ αντιστρέψιμος, δείξτε ότι $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

Είναι $AA^{-1}=I_\nu \Leftrightarrow |AA^{-1}|=|I_\nu| \Leftrightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=1 \Leftrightarrow |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=|A|^{-1}$

Εφαρμογή 34

Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x^2 & 3x & 1 \\ 1 & 15 & 7 \end{vmatrix}=0$

Είναι $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x^2 & 3x & 1 \\ 1 & 15 & 7 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ και αφαιρώντας την 1^η στήλη από τις άλλες, είναι

$$3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x-x^2 & 1-x^2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}=3(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} x-x^2 & 1-x^2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} x-x^2 & 1-x^2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$6\left[3\left(x-x^2\right)-2\left(1-x^2\right)\right]=6(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Εφαρμογή 35

Έστω $A_{\nu x\nu}$ αντιστρέψιμος, με $|A|=2$ Βρείτε την τιμή της $|\lambda A^{-1}|$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$

Είναι $|\lambda A^{-1}|=\lambda^\nu|A^{-1}|=\dfrac{\lambda^\nu}{2}$

Εφαρμογή 36

Έστω $A_{\nu x\nu}$ αντιστρέψιμος με $A^3=4A$ Βρείτε την τιμή της $|A|$

Είναι $A^3=4A \Leftrightarrow |A^3|=|4A| \Leftrightarrow |A|^3=4^\nu|A| \Leftrightarrow |A|^2=4^\nu \Leftrightarrow |A|=\sqrt{4^\nu}$

Άλυτες ασκήσεις

1. Υπολογίστε το γινόμενο $\Delta_1\cdot\Delta_2$ όταν $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

2. Δείξτε ότι η τιμή της $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1+\kappa+4\lambda \\ 2 & 1 & 2+2\kappa+\lambda \\ 0 & 3 & 4+3\lambda \end{vmatrix}$ είναι ανεξάρτητη των τιμών των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

3. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \beta_1+\gamma_1 & \gamma_1+\alpha_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ \beta_2+\gamma_2 & \gamma_2+\alpha_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ \beta_3+\gamma_3 & \gamma_3+\alpha_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

4. Βρείτε τις τιμές της γωνίας θ ώστε $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=0$

5. Αν $A_{\nu x\nu}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι $|\lambda\cdot A|=\lambda^\nu\cdot|A|$

6. Αν $A_{\nu x \nu}$ δείξτε ότι $|A|=0 \Leftrightarrow$ ο Α έχει περισσότερα από $\left(\nu^2-\nu\right)$ μηδενικά στοιχεία.

7. Αν $A=\begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda+1 \\ 2 & \lambda+6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda+1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}$, βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $|AB|=0$

8. Αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ βρείτε τους adjA, A^{-1}

9. Αν A_{2x2} με $|A+I|=|A-I|$, δείξτε ότι $|A-2I|=4+|A|$

10. Σε ορίζουσα D, τάξης ν>1 υπάρχουν $\mu \in \mathbb{N}^*$ μηδενικά στοιχεία ώστε $\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}<\frac{1}{\nu-1}$. Δείξτε ότι D=0

11. Λύστε τις εξισώσεις (**α**) $\begin{vmatrix} 6-x & 3 & 5 \\ 2 & 5-x & 7 \\ 6 & 6 & 2-x \end{vmatrix}=0$, (**β**) $\begin{vmatrix} x-5 & x+4 & x-3 \\ x+4 & x-2 & x-6 \\ x-2 & x-3 & x+1 \end{vmatrix}=0$

(**γ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta-3x \\ \beta & \alpha & \gamma-3x \\ \gamma & \beta & \alpha-3x \end{vmatrix}=0$, $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, (**δ**) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & x & x^2 \\ x^2+x & x^2+5 & x+5 \end{vmatrix}=0$,

(**ε**) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}=0$ (**στ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+9 & \alpha \\ \alpha+x & \alpha & \alpha+12 \\ \alpha & \alpha+x & \alpha \end{vmatrix}=0,\ \alpha \neq 0$

12. Δείξτε ότι: (**α**) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \sin x \\ \beta & \cos x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \sin\omega \\ \beta & \cos\omega \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \gamma & \sin y \\ \delta & \cos y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma & \sin\varphi \\ \delta & \cos\varphi \end{vmatrix} \end{vmatrix}^2 \leq \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)^2$,

(**β**) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin(2\alpha) \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin(2\alpha) \\ 1+\sin(2\alpha) & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\cos^3(2\alpha)$, (**γ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \leq (\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)$.

(**δ**) $\begin{vmatrix} 1+\alpha^3 & \alpha & \alpha^2 \\ 1+\beta^3 & \beta & \beta^2 \\ 1+\gamma^3 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(1+\alpha\beta\gamma)$, (**ε**) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix}=-(\alpha-\beta)^4$,

(**στ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix}=(\alpha+3\beta)(\alpha-\beta)^3$

13. Υπολογίστε τις $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4\alpha \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+4x & \alpha+8x & \alpha+12x \\ \alpha+x & \alpha+5x & \alpha+9x & \alpha+13x \\ \alpha+2x & \alpha+6x & \alpha+10x & \alpha+14x \\ \alpha+3x & \alpha+7x & \alpha+11x & \alpha+15x \end{vmatrix}$

14. Λύστε τις εξισώσεις $\begin{vmatrix} x & 1 & -7 \\ 4x+6 & -x^2 & x \\ -2x & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

15. Με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων βρείτε τον A^{-1} αν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
