Περιεχόμενα

3. Γραμμικά συστήματα

Επιθυμείς να αγοράσεις τα ανταλλακτικά Α, Β, Γ, Δ σύμφωνα με τις ανάγκες σου (400, 500, 520, 380 τεμάχια αντίστοιχα). Αυτά τα ανταλλακτικά, διατίθεται στις συσκευασίες M_1, M_2, M_3 η κάθε μία από τις οποίες τα περιέχει σε διαφορετικές μεταξύ τους ποσότητες, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

Παραγγελίες	**Συσκευασίες**	**Α**	**Β**	**Γ**	**Δ**
x_1	M_1	20	40	120	20
x_2	M_2	40	60	40	60
x_3	M_3	60	60	40	40
Ανάγκες σου		**400**	**500**	**520**	**380**

Πόσες παραγγελίες x_1, x_2, x_3 πρέπει να δώσεις, ώστε οι ποσότητες που θα παραλάβεις, να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα στις ανάγκες σου;

Εξαρτήματα

$$\begin{Bmatrix} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 = 400 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 = 500 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 = 520 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 = 380 \end{Bmatrix}$$

3.1 Επίλυση με τη μέθοδο του αντιστρόφου πίνακα

Αν ο $A_{\nu x\nu}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε το γραμμικό σύστημα $A \cdot X = B$ έχει μοναδική λύση, τη $X = A^{-1} \cdot B$, όπου:

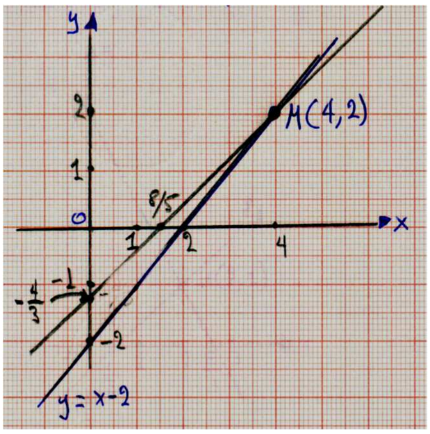
A ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων,
X ο πίνακας των αγνώστων,
B ο πίνακας των σταθερών όρων.

Εφαρμογή 1

Λύστε το $\begin{Bmatrix} x - \ \ y = 2 \\ -5x + 6y = -8 \end{Bmatrix}$

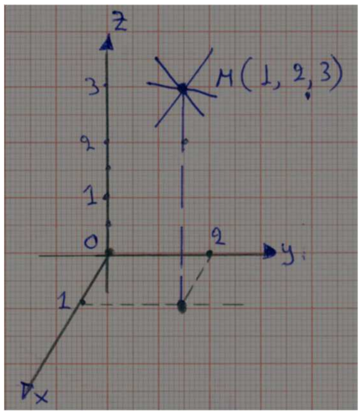
Είναι $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$

Το σύστημα ισοδυνάμως, γράφεται $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$



Εφαρμογή 2

Λύστε το $\left\{\begin{matrix} 2x+ & y- & z=1 \\ x- & 3y+ & z=-2 \\ 2x+ & 3y- & 2z=2 \end{matrix}\right\}$



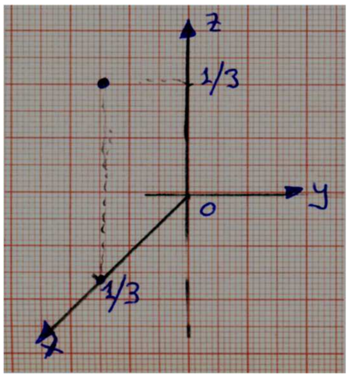
Είναι $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=1\neq 0$, $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 9 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

Το σύστημα ισοδυνάμως, γράφεται $A\cdot X=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 3

Λύστε το $\left\{\begin{matrix} 3x+ & y & =1 \\ 2x+ & 4y+ & z=1 \\ & y+ & 3z=1 \end{matrix}\right\}$



Είναι $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=27\neq 0$

Το σύστημα, γράφεται $A\cdot X=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} \frac{11}{27} & \frac{-3}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{-6}{27} & \frac{9}{27} & \frac{-3}{27} \\ \frac{2}{27} & \frac{-3}{27} & \frac{10}{27} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3.2 Επίλυση με τη μέθοδο των οριζουσών (Cramer)

Δίνεται το $\nu x\nu$ γραμμικό σύστημα $A\cdot X=B$, αν:

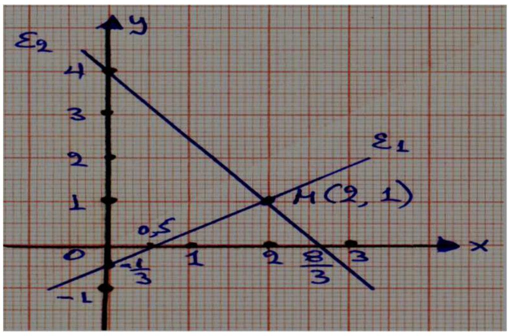
- $|A|\neq 0$, έχει μοναδική λύση τη $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$, κ.ο.κ.
- $|A|=0$, είναι αδύνατο ή αόριστο.

Εφαρμογή 4

Λύστε το $\left\{\begin{matrix} 2x-3y=1 \\ 3x+2y=8 \end{matrix}\right\}$

Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 26$, $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 13$

Άρα, $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{26}{13} = 2$ και $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{13}{13} = 1$

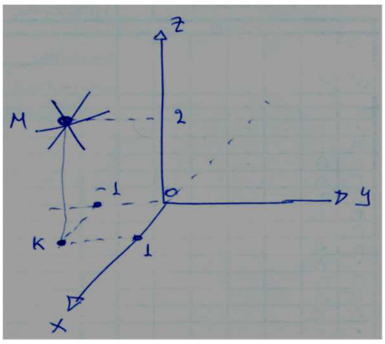


Εφαρμογή 5

Λύστε το $\begin{Bmatrix} x + 2y + 3z = 5 \\ x - \ \ y - \ z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \end{Bmatrix}$

Είναι $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6$, $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -6$,

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 12$ Άρα, $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{6}{6} = 1$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-6}{6} = -1$, $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{12}{6} = 2$



Εφαρμογή 6

Λύστε το $\begin{Bmatrix} 3x + 6y = 7 \\ 2x + 4y = 3 \end{Bmatrix}$

Είναι $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 18 = 10 \neq 0 \Rightarrow$ Αδύνατο

Ομοίως και αν $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 14 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ Αδύνατο

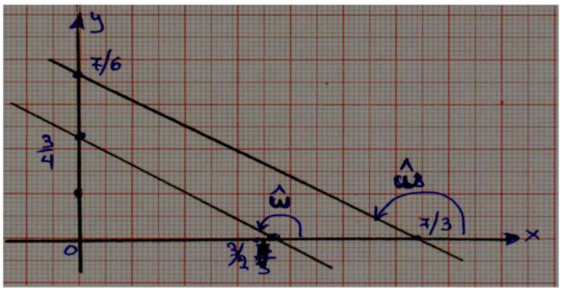
Εφαρμογή 7

Λύστε το $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$

Είναι $D=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=6-6=0$, $D_x=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$, $D_y=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0$

Από $D=D_x=D_x=0$ έπεται ότι το σύστημα είναι αόριστο. Παρατηρώ ότι η $2^η$ εξίσωση, προκύπτει αν πολλαπλασιάσω την $1^η$ επί 2

Άρα, $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases} \Leftrightarrow x+3y=2 \Leftrightarrow x=2-3y$ Άρα, $(x,y)=(2-3y,\ y)$ με $y\in\mathbb{R}$



Εφαρμογή 8

Λύστε το $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-y-z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \end{cases}$

Είναι $D=6\neq 0$, $D_x=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix}=-1$, $D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-10$, $D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix}=9$

Άρα, $(x,y,z)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D},\dfrac{D_z}{D}\right)=\left(\dfrac{-1}{6},\dfrac{-10}{6},\dfrac{9}{6}\right)$

Εφαρμογή 9

Λύστε το $\begin{cases} 5x-2y+3z-\omega=6 \\ x+2y-3z=9 \\ -3x+y-2\omega=-1 \\ 4x+3y-z+5\omega=-7 \end{cases}$

Είναι $D=206\neq 0$, $D_x=412$, $D_y=-206$, $D_z=D_\omega=-618$

Άρα, $(x,y,z,\omega)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D},\dfrac{D_z}{D},\dfrac{D_\omega}{D}\right)=(2,-1,-3,-3)$

Εφαρμογή 10

Λύστε το $\begin{cases} (\lambda+2)x+7(\lambda-3)y=35 \\ x+\ \ (\lambda-3)y=\lambda \end{cases}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

Είναι $D=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 7(\lambda-3)\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda+2 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+2-7)=(\lambda-3)(\lambda-5)$

$$D_x=\begin{vmatrix}35 & 7(\lambda-3)\\ \lambda & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}35 & 7\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(35-7\lambda)=-7(\lambda-3)(\lambda-5)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 35\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda-35=(\lambda-5)(\lambda+7)$$

- Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3$ και $\lambda\neq 5$ είναι $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(-7,\dfrac{\lambda+7}{\lambda-3}\right)$
- Αν $\lambda=3$, τότε $\begin{Bmatrix}5x+0y=35\\ x+0y=3\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}5x=35\\ x=3\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=\dfrac{35}{3}\\ x=3\end{Bmatrix}$ Αδύνατο
- Αν $\lambda=5$, τότε $\begin{Bmatrix}7x+14y=35\\ x+\ 2y=5\end{Bmatrix}\Leftrightarrow x+2y=5\Leftrightarrow$ Αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,\ y)=(5-2y,\ y)$ όπου $y\in\mathbb{R}$

Εφαρμογή 11

Λύστε το $\begin{Bmatrix}3x+5y=12\\ x-3y=4\end{Bmatrix}$

Είναι $D=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14\neq 0$, $D_x=\begin{vmatrix}12 & 5\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-56$, $D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 1 & 4\end{vmatrix}=0$

Άρα, $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(\dfrac{-56}{-14},\dfrac{0}{-14}\right)=(4,0)$

Εφαρμογή 12

Λύστε το $\begin{Bmatrix}\lambda x+\mu y=1\\ \mu x+\lambda y=\lambda+\mu\end{Bmatrix}$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Είναι $D=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)$

Όταν $D\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq\pm\mu$, τότε $(x,y)=\left(\dfrac{D_X}{D},\dfrac{D_Y}{D}\right)=\left(\dfrac{\begin{vmatrix}1 & \mu\\ \lambda+\mu & \lambda\end{vmatrix}}{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)},\dfrac{\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ \mu & \lambda+\mu\end{vmatrix}}{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)}\right)$

- Όταν $\lambda=\mu$, τότε το σύστημα γράφεται $\begin{Bmatrix}\lambda x+\lambda y=1\\ \lambda x+\lambda y=\lambda+\lambda\end{Bmatrix}$....
- Όταν $\lambda=-\mu$, τότε το σύστημα γράφεται $\begin{Bmatrix}\lambda x-\lambda y=1\\ -\lambda x-\lambda y=0\end{Bmatrix}$...

3.3 Επίλυση ομογενούς γραμμικού συστήματος $\nu x \nu$

Το γραμμικό $2x2$ σύστημα $\begin{Bmatrix} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{Bmatrix}$ ποτέ δεν είναι αδύνατο, διότι έχει πάντα ως προφανή λύση τη μηδενική. Το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c=0$

Αν $D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c\neq 0$, τότε το σύστημα έχει ως μόνη λύση την προφανή.

Εφαρμογή 13

Λύστε το $\begin{Bmatrix} x+2y=0 \\ 2x+4y=0 \end{Bmatrix}$

Είναι $\begin{Bmatrix} x+2y=0 \\ 2x+4y=0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x+2y=0 \\ 2(x+2y)=0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow x+2y=0\Leftrightarrow x=-2y$

Είναι $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4-4=0$ Άρα, έχει και άλλες λύσεις εκτός της προφανούς οι οποίες είναι της μορφής $(x,\ y)=(-2y,\ y)=(-2,\ 1)y$ όπου $y\in\mathbb{R}$, οπότε μία λύση είναι η $(x,y)=(10,-5)$

Εφαρμογή 14

Λύστε το $\begin{Bmatrix} 2x+\ y-\ z=0 \\ x+3y+\ z=0 \\ -x+\ y-3z=0 \end{Bmatrix}$

$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-22\neq 0$, άρα το σύστημα δεν έχει άλλη λύση πλην της μηδενικής.

Εφαρμογή 15

Λύστε το $\begin{Bmatrix} x+\ \ y-z=0 \\ 3y-z=0 \\ 2x-\ y-z=0 \end{Bmatrix}$

Είναι $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$, άρα υπάρχει και μη μηδενική λύση.

Υπολογισμός της μη μηδενικής λύσης.

$$\begin{matrix} (-2) \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ (1) \\ \hookleftarrow \end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]:(3)$$

$$\sim \begin{array}{c} \mapsto \\ (-1) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \bigg| 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & \bigg| 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & \bigg| 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & \bigg| 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-\dfrac{2}{3}z=0 \\ y-\dfrac{1}{3}z=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}z \\ y=\dfrac{1}{3}z \end{array} \right.$$

Άρα, $(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{2}{3}z,\ \dfrac{1}{3}z,\ z\right)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)z$, όπου $z\in\mathbb{R}$

3.4 Μέθοδος του επαυξημένου πίνακα (Gauss)

Εφαρμογή 16

Λύστε το $\left\{ \begin{array}{l} x+\ \ y=4 \\ 2x+3y=11 \end{array} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \big| 4 \\ 2 & 3 & \big| 11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (-2) \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \big| 4 \\ 0 & 1 & \big| 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ (-1) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \big| 1 \\ 0 & 1 & \big| 3 \end{bmatrix} \text{ άρα} \begin{bmatrix} x=1 \\ y=3 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 17

Λύστε το $\left\{ \begin{array}{l} x+2y=3 \\ x+2y=4 \end{array} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \big| 3 \\ 1 & 2 & \big| 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (-1) \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \big| 3 \\ 0 & 0 & \big| 1 \end{bmatrix} \text{ άρα } 0x+0y=1 \Leftrightarrow 0=1 \text{ Αδύνατο}$$

Εφαρμογή 18

Λύστε το $\left\{ \begin{array}{l} x+\ \ 2y=3 \\ 10x+20y=30 \end{array} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \big| 3 \\ 10 & 20 & \big| 30 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (-10) \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \big| 3 \\ 0 & 0 & \big| 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \big| 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x+2y=3 \Leftrightarrow x=3-2y$$

Αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(3-2y,\ y)$ $y\in\mathbb{R}$

Εφαρμογή 19

Λύστε το $\left\{ \begin{array}{l} x+\ \ y=1 \\ 2x+3y=-5 \end{array} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \big| 1 \\ 2 & 3 & \big| -5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (-2) \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \big| 1 \\ 0 & 1 & \big| -7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ (-1) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \big| 8 \\ 0 & 1 & \big| -7 \end{bmatrix} \text{ άρα} \begin{bmatrix} x=8 \\ y=-7 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 20

Λύστε το $\left\{ \begin{array}{l} x+2y-\ \ 3\omega=2\lambda \\ 2x+6y-11\omega=3\lambda-1 \\ x-2y+\ 7\omega=3\lambda \end{array} \right\}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \big| 2\lambda \\ 2 & 6 & -11 & \big| 3\lambda-1 \\ 1 & -2 & 7 & \big| 3\lambda \end{bmatrix} \begin{array}{c} (-2)(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \big| 2\lambda \\ 0 & 2 & -5 & \big| -\lambda-1 \\ 0 & -4 & 10 & \big| \lambda \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ (-1) \\ \ \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c}\\(-2)\\ \to\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\lambda+1\\0&-2&5&\lambda+1\\0&-4&10&\lambda\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\lambda+1\\0&-2&5&\lambda+1\\0&0&0&-\lambda-2\end{array}\right]$$

• Όταν $-\lambda-2\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -2$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

• Όταν $\lambda=-2$, τότε $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-5\\0&-2&5&-1\end{array}\right]\sim\left\{\begin{array}{l}x+2\omega=-5\\-2y+5\omega=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-5-2\omega\\y=\dfrac{1+5\omega}{2}\end{array}\right.$

Αόριστο το σύστημα, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,\ y,\ \omega)=\left(-5-2\omega,\ \dfrac{1+5\omega}{2},\ \omega\right)$, όπου $\omega\in\mathbb{R}$

Εφαρμογή 21

Λύστε το $\left\{\begin{array}{r}x+\ \ y\qquad=3\\2x+5y-z=0\\-7x+9y-z=-1\end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\2&5&-1&0\\-7&9&-1&-1\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)(7)\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&3&-1&-6\\0&16&-1&20\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ \leftarrow\\(-1)\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&-13&0&-26\\0&16&-1&20\end{array}\right]:(-13)$$

$$\sim\begin{array}{c}\\(-16)\\ \to\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&1&0&2\\0&16&-1&20\end{array}\right]\begin{array}{c}\leftarrow\\(-1)\\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&-1&-12\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&12\end{array}\right]$$

Άρα, $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 12)$

Εφαρμογή 22

Λύστε το $\left\{\begin{array}{l}x+2y+\lambda\omega=1\\2x+\lambda y+8\omega=3\end{array}\right\}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

Είναι $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&\lambda&1\\2&\lambda&8&3\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&\lambda&1\\0&\lambda-4&8-2\lambda&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&\lambda&1\\0&(\lambda-4)&-2(\lambda-4)&1\end{array}\right]$

• Όταν $\lambda-4\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 4$, τότε το σύστημα γράφεται $\left\{\begin{array}{l}x+\qquad 2y+\qquad\lambda\omega=1\\ \qquad(\lambda-4)y-2(\lambda-4)\omega=1\end{array}\right\}$ και είναι αόριστο.

• Όταν $\lambda-4=0\Leftrightarrow\lambda=4$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, διότι η $2^{η}$ γραμμή γράφεται $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&1\\0&0&0&1\end{array}\right]$

Εφαρμογή 23

Λύστε το $\left\{\begin{array}{r} x+4y+7z=6 \\ 2x+5y+9z=9 \\ 3x+6y+8z=12 \end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 12 \end{array}\right]\begin{array}{c} (-2)(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & -6 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ :(-1) \\ :(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 13 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ :3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1 \\ 0 & 6 & 13 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{c} \leftarrow \\ (-6)(-4) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ :(3) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{cc} \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & \uparrow \\ (-5/3) & (-1/3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{ άρα } \left[\begin{array}{c} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right]$$

Εφαρμογή 24

Λύστε το $\left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=3 \\ 5x+6y+7z=6 \end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{cc} (-2) & (-5) \\ \leftarrow & \downarrow \\ \leftarrow & \leftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ :(-1) \\ :(-4) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} \leftarrow \\ (-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ y+2z=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=1-2z \end{array}\right.$$

Αόριστο το σύστημα, έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=(z,\ 1-2z,\ z)\ z\in\mathbb{R}$

Εφαρμογή 25

Λύστε το $\left\{\begin{array}{r} x+\ \ y+z=2 \\ 2x+4y+5z=13 \\ 3x+6y+7z=18 \end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & 18 \end{array}\right]\begin{array}{cc} (-2) & (-3) \\ \leftarrow & \downarrow \\ \leftarrow & \leftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ :(2) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 4{,}5 \\ 0 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right]\begin{array}{c} \leftarrow \\ (-1)(-3) \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -0,5 & -2,5\\0 & 1 & 1,5 & 4,5\\0 & 0 & -0,5 & -1,5\end{array}\right] : (-0,5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -0,5 & -2,5\\0 & 1 & 1,5 & 4,5\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \begin{array}{cc}\leftarrow & \leftarrow\\ \leftarrow & \uparrow\\ (-1,5) & (0,5)\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

Άρα, $(x,y,z)=(-1,\ 0,\ 3)$

3.5 Άλυτες ασκήσεις

1 Λύστε τα **(α)** $\left\{\begin{array}{l}x+4y-3z=5\\2x+8y-6z=9\\3x+12y-9z=10\end{array}\right\}$ **(β)** $\left\{\begin{array}{l}5x+y-3z=0\\4x-y+7z=0\\3y+z=x\end{array}\right\}$ **(γ)** $\left\{\begin{array}{l}\lambda x+y+z=1\\x+\lambda y+z=\lambda\\x+y+\lambda z=\lambda^2\end{array}\right\}$

(δ) $\left\{\begin{array}{l}(\lambda-1)x-y=0\\2\lambda x+3y=7z\\(\lambda+2)x+2y-6z=0\end{array}\right\}$ **(ε)** $\left\{\begin{array}{l}3x-5y+z=0\\4x-2y+2z=0\\3x-5y+6z=1\\6x+y+3z=1\end{array}\right\}$ **(στ)** $\left\{\begin{array}{l}10x-13y+15z=18\\3x-y+z=2\\x+y+4z=3\\-2x+3y+z=-2\end{array}\right\}$

(ζ) $\left\{\begin{array}{l}(2\mu-3)x-\mu y=3\mu-2\\5x+(2\mu+3)y=-5\end{array}\right\}$ **(η)** $\left\{\begin{array}{l}(\mu-2)x+3\mu y=-3\\3\mu x+(\mu-2)y=\mu-2\end{array}\right\}$

(θ) $\left\{\begin{array}{l}(\lambda+5)x+(2\lambda+3)y=3\lambda+2\\(\lambda+10)x+(\lambda+6)y=\lambda+4\end{array}\right\}$ **(ι)** $\left\{\begin{array}{l}x+2y-z=1\\2x-y+z=-5\\5x+5y-2z=-2\end{array}\right\}$ **(κ)** $\left\{\begin{array}{l}2x-3y=1\\3y+5z=7\\2x+5z=11\end{array}\right\}$

(λ) $\left\{\begin{array}{l}x+y+z-\omega=1\\2x-y+3z=9\\-x+3y-z+2\omega=-4\\5x-y+4z-3\omega=11\end{array}\right\}$ **(μ)** $\left\{\begin{array}{l}x-2y+3z+2\omega=0\\2x+y-z+4\omega=0\\3x-y+2z+6\omega=0\\-x-3y+4z-2\omega=0\end{array}\right\}$ **(ν)** $\left\{\begin{array}{l}\lambda x+3y+2z=1\\2x-\lambda y-z=5\\x+(\lambda-1)y=4\\10y+3z=-2\end{array}\right\}$

(ξ) $\left\{\begin{array}{l}x+\lambda y=1\\\lambda x-3\lambda y=2\lambda+3\end{array}\right\}$ **(ο)** $\left\{\begin{array}{l}6x+7y+10z=11\\2x-y+5z=3\\4x+8y+5z=10\end{array}\right\}$ **(π)** $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=\kappa\\ax+\beta y+\gamma z=\lambda\\\beta x+\gamma y+\alpha z=\mu\end{array}\right\}$

(ρ) $\left\{\begin{array}{l}(\lambda+1)x-2(\lambda-1)y=\mu+2\\x+3\lambda y=4\lambda+5\end{array}\right\}$ **(σ)** $\left\{\begin{array}{l}(\lambda-\mu)x+(\lambda+\mu)y=2(\lambda^2+\mu^2)\\(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y=2(\lambda^2+2\lambda\mu-\mu^2)\end{array}\right\}$

(τ) $\left\{\begin{array}{l}(\sin\alpha)x-(\cos\alpha)y=\sin(2\alpha)\\(\cos\alpha)x+(\sin\alpha)y=\cos(2\alpha)\end{array}\right\}$ **(υ)** $\left\{\begin{array}{l}x+2y=\lambda+1\\3\lambda x-y=3\lambda-1\\2x-\lambda y=4\end{array}\right\}$ **(φ)** $\left\{\begin{array}{l}2x+3y=0\\4x+\sqrt{2}y=0\end{array}\right\}$

2 Δείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας A_{2X2} για τον οποίο $\left|A^2\right|-\frac{1}{2}\left|2A\right|+3=0$

3 Βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, αν $(x,\ y,\ z) = \left(-1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$ είναι λύση του $\left\{\begin{array}{l} \lambda x - \mu y + z = 1 + 2\mu \\ 2\mu x - (\lambda - 2\mu)y - \lambda z = -5 + \lambda \end{array}\right\}$

4 Αν $A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε τον X ώστε $A \cdot X = B$

5 Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $A^2 - (\alpha + \delta) \cdot A + |A| \cdot I = O$

6 Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι αδύνατο το $\left\{\begin{array}{l} (\lambda + 6)x + (3\lambda + 4)y = \lambda + 2 \\ (2\lambda + 3)x + (\lambda + 2)y = 3\lambda + 1 \end{array}\right\}$

7 Αν υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{R}$ με $|x| + |y| + |z| \neq 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, $\beta x + \gamma y + \alpha z = 0$ και $\gamma x + \alpha y + \beta z = 0$, δείξτε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

8 Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x+1 & x+1 & 0 & 0 \\ x+2 & x+2 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & x+3 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

9 Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 \end{vmatrix} = 4(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$

10 Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$

11 **A.** Βρείτε το γινόμενο $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

B. Αν $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, βρείτε τον X

12 Λύστε με τη μέθοδο του αντιστρόφου πίνακα, τα

(α) $\left\{\begin{array}{l} -x + 3y = 10 \\ 2x - 5y = 2 \end{array}\right\}$ **(β)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 3 \end{array}\right\}$ **(γ)** $\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 2z = 1 \\ 5x + 2y + 7z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \end{array}\right\}$

(**δ**) $\begin{cases} 2x-3y+5z=14 \\ 4x+5y-z=-5 \\ x \qquad -3z=-3/2 \end{cases}$ (**ε**) $\begin{cases} x+\ \ y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ \lambda x+\ \ y+z=\lambda^2 \end{cases}$

13 Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε το $\begin{cases} \alpha x+2\beta y=1-x \\ 3x+(3\beta-1)\,y=\alpha x-3 \end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και να υπολογίσετε.

14 Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι συγχρόνως αδύνατα τα

$\begin{cases} \alpha x-(2\beta+1)\,y=\beta \\ 2x- \qquad 6y=7\alpha-4\beta \end{cases}$, $\begin{cases} 3x+ \qquad 2y=\alpha-\beta-1 \\ (5\alpha+\beta)\,x-(\alpha-5\beta)\,y=5 \end{cases}$

15 Δείξτε ότι το $\begin{cases} (\lambda+2)x-3y=2\lambda+3 \\ x+\lambda y=3 \end{cases}$ έχει μία λύση $(x_0,\ y_0)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ Υπολογίστε την τιμή του λ, ώστε $x_0+3y_0=7$

16 Βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι αόριστο το $\begin{cases} \lambda x+2y-z\ =2 \\ 2x+\lambda y+3z=13 \\ 3(x+y)+2z=15 \end{cases}$ και μετά υπολογίστε τις άπειρες λύσεις του.

17 Δείξτε ότι είναι αδύνατο το $\begin{cases} (k^2+1)\,x+ \qquad k\lambda y=k\mu \\ k\lambda x+(\lambda^2+1)\,y=\lambda\mu \\ k\mu x+ \qquad \lambda\mu y=\mu^2+1 \end{cases}$

18 Ποια σχέση συνδέει τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αν το $\begin{cases} \alpha x+\beta y=1 \\ \beta x+\alpha y=\alpha\beta \\ x+\ \ y=\alpha+\beta \end{cases}$ είναι συμβιβαστό;

19 Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} \mu+2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, βρείτε τον X ώστε $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{B}$

20 Βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να έχει τουλάχιστον μία λύση το $\begin{cases} x+ \qquad y=3 \\ \lambda x+(\lambda+1)\,y=8 \\ (\lambda+1)\ x- \qquad y=1 \end{cases}$

21 Δείξτε ότι $\forall\theta\in\mathbb{R}$ είναι αδύνατο το $\begin{cases} (1+\sin\theta)\,x+2y=1 \\ (-1+\sin\theta)\,x+3y=-1 \\ 2x-\ \ y=4 \end{cases}$

22 Αν ο αντιστρέψιμος $\mathrm{A}_{2\mathrm{X}2}$ επαληθεύει την $9\mathrm{A}^2=\sqrt{3}\mathrm{A}^{-1}$, βρείτε την $|\mathrm{A}|$

23 Δείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας A_{2X2} για τον οποίο $\left|A^2\right| - \frac{1}{2}|2A| + 3 = 0$

24 Λύστε τα (**α**) $\begin{Bmatrix} (\lambda-1)^2 x + (\lambda^2-1) y = 0 \\ (2\lambda-1) x + (\lambda+1) y = 0 \end{Bmatrix}$ (**β**) $\begin{Bmatrix} \alpha x - \beta y + \gamma z = 0 \\ \beta x + \gamma y + \alpha z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{Bmatrix}$

(**γ**) $\begin{Bmatrix} \alpha x + \beta y = 1 \\ \beta x + \alpha y = \alpha\beta \\ x + y = \alpha + \beta \end{Bmatrix}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ (**δ**) $\begin{Bmatrix} 2x + \lambda y = -\lambda \\ \lambda x + 2y = -\lambda \\ \lambda x + \lambda y = -2 \end{Bmatrix}$

(**ε**) $\begin{Bmatrix} (\lambda+1) x + y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda+1) y = 1 \\ x + y = 2\lambda + 1 \end{Bmatrix}$ (**στ**) $\begin{Bmatrix} x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + 8z = 0 \\ 2x + 3y + 7z = 0 \end{Bmatrix}$ (**ζ**) $\begin{Bmatrix} x + \lambda y = 7 \\ 2x + \lambda y = 5 \\ 5x - (1-\lambda) y = -4 \end{Bmatrix}$

(**η**) $\begin{Bmatrix} (\lambda+2) x + (\lambda-1) y = 2\lambda - 3 \\ (\lambda-2) x + (2\lambda+1) y = \lambda + 3 \end{Bmatrix}$ (**θ**) $\begin{Bmatrix} x + 2y - z = 6 \\ 2x - 5y + z = 4 \end{Bmatrix}$ (**ι**) $\begin{Bmatrix} x + (\lambda+1) y = 2 \\ (\lambda+2) x - (\lambda^2-1) y = 5 \end{Bmatrix}$

(**κ**) $\begin{Bmatrix} 3x + y - z = 5 \\ 2x - 4y + 3z = 8 \\ 5x - 3y + 2z = 13 \end{Bmatrix}$ (**λ**) $\begin{Bmatrix} x + y + \lambda z = 2 \\ 2x + y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = 3\lambda \end{Bmatrix}$ (**μ**) $\begin{Bmatrix} \alpha x + y + z = 3 \\ x + \alpha y + z = 3 \\ x + y + \alpha z = 3 \end{Bmatrix}$

(**ν**) $\begin{Bmatrix} 7x + 3y - z = 3 \\ 5x + 4y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{Bmatrix}$ (**ξ**) $\begin{Bmatrix} \lambda x + y + z + \omega = 1 \\ x + \lambda y + z + \omega = \lambda \\ x + y + \lambda z + \omega = \lambda^2 \\ x + y + z + \lambda\omega = \lambda^3 \end{Bmatrix}$ (**ο**) $\begin{Bmatrix} x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 6 \\ x - y - 3z = 3 \end{Bmatrix}$

(**π**) $\begin{Bmatrix} \lambda x + 2y + z = 1 \\ x + (\lambda+1) y + 3z = \alpha \\ 2x + \lambda y + z = 1 \end{Bmatrix}$ (**ρ**) $\begin{Bmatrix} \alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha - \beta \\ \beta x + \gamma y + \alpha z = \beta - \gamma \\ \gamma x + \alpha y + \beta z = \gamma - \alpha \end{Bmatrix}$ όπου $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

25 Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, βρείτε τον X_{2X1} ώστε $A \cdot X = \lambda \cdot X$

26 Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να έχει άπειρες λύσεις το $\begin{Bmatrix} (\lambda^2-1) x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{Bmatrix}$. Ποιες είναι τότε οι λύσεις;

27 Αν $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ διαφορετικοί ανά δύο και το $\left\{\begin{array}{r} x+\quad y+\quad z=0 \\ \beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z=0 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\ \gamma^2 z=0 \end{array}\right\}$ έχει και μη μηδενικές λύσεις, δείξτε ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$

28 Βρείτε τους $x,y \in \mathbb{R}$, ώστε $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} y \\ \lambda y \end{bmatrix} = (\lambda+1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

29 Αν το $\left\{\begin{array}{l} \alpha^2 x+\alpha\beta y+\beta^2 z=0 \\ \beta^2 x+\beta\gamma y+\gamma^2 z=0 \\ \gamma^2 x+\alpha\gamma y+\alpha^2 z=0 \end{array}\right\}$ έχει άπειρες λύσεις, δείξτε ότι $\alpha^2=\beta\gamma$ ή $\beta^2=\alpha\gamma$ ή $\gamma^2=\alpha\beta$

30 Βρείτε το πολυώνυμο $f(x)=|x \cdot I - A|$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και δείξτε ότι $f(A)=\mathbf{O}$ αν

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

31 Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\left\{\begin{array}{l} \lambda x+(\lambda+2)y=0 \\ \quad x+\qquad \lambda y=1 \end{array}\right\}$ να έχει μία λύση (x_0,y_0) τέτοια ώστε, η παράσταση $\left(x_0+3y_0{}^2\right)$ να είναι ελάχιστη.

32 Αν α,β,γ οι πλευρές και $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\Gamma}$ οι γωνίες τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, αποδείξτε τον νόμο των συνημιτόνων. Υπόδειξη. Θεωρείστε ως δεδομένα τα $\left\{\begin{array}{l} \beta \cdot \cos\Gamma+\gamma \cdot \cos\mathrm{B}=\alpha \\ \gamma \cdot \cos\mathrm{A}+\alpha \cdot \cos\Gamma=\beta \\ \alpha \cdot \cos\mathrm{B}+\beta \cdot \cos\mathrm{A}=\gamma \end{array}\right\}$

33 Βρείτε τα $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συγχρόνως αδύνατα τα $\left\{\begin{array}{l} (\mu-1)x+\lambda y=2 \\ 2x+5y=3 \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{l} (\mu+1)x+2\lambda y=3 \\ 4x+10\,y=5 \end{array}\right\}$

34 Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\left\{\begin{array}{l} x+\qquad 2y+\qquad 3\omega=0 \\ 4x+(\lambda+3)y+\qquad 6\omega=0 \\ 5x+\qquad 4y+(1+\lambda)\omega=0 \end{array}\right\}$ να έχει και μη μηδενικές λύσεις. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος για τη μικρότερη τιμή του λ από το προηγούμενο ερώτημα.

35 Βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, για να είναι συγχρόνως αδύνατα τα $\left\{\begin{matrix}(2\lambda-1)x+10\mu y=3\\ 2x+\quad 4y=5\end{matrix}\right\}$,

$\left\{\begin{matrix}(\lambda-2)x-(\mu+1)y=2\\ 3x-\qquad 6y=5\end{matrix}\right\}$

36 Δείξτε ότι για $\lambda\neq 1$ το $\left\{\begin{matrix}(\lambda+1)x+(\lambda+1)y+\quad(\lambda+2)\omega=\lambda+1\\ (\lambda+1)x+(\lambda+1)y+\qquad\lambda\omega=\lambda+1\\ (\lambda+2)x+(\lambda+1)y+(2\lambda+5)\omega=1\end{matrix}\right\}$ έχει μόνο μία λύση (x_0,y_0,ω_0). Δείξτε ότι για $\lambda=-1$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Αν $\mathrm{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}x_0 & y_0\\ -y_0 & x_0\end{bmatrix}$ λύστε την εξίσωση $\mathrm{A}^2(\lambda)=0$

37 Λύστε με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα, τα

(α) $\left\{\begin{matrix}x+y+2\omega=-1\\ 2x-y+2\omega=-4\\ 4x+y+4\omega=-2\end{matrix}\right\}$ **(β)** $\left\{\begin{matrix}x-2y+3\omega=1\\ 3x+5y+\omega=2\\ -3x-16y+7\omega=5\end{matrix}\right\}$ **(γ)** $\left\{\begin{matrix}x+2y+3z+5\omega=1\\ 2x+y-z+3\omega=-1\\ 3x-y+2z+\omega=3\end{matrix}\right\}$

(δ) $\left\{\begin{matrix}x-2y-\omega=-3\\ 2x-3y-3\omega=-4\end{matrix}\right\}$ **(ε)** $\left\{\begin{matrix}\lambda x+y=1\\ x+y=\lambda\end{matrix}\right\}$ **(στ)** $\left\{\begin{matrix}x+2y+\lambda\omega=1\\ 2x+\lambda y+8\omega=3\end{matrix}\right\}$

(ζ) $\left\{\begin{matrix}3x+4y=12\\ 6x+8y=24\end{matrix}\right\}$ **(η)** $\left\{\begin{matrix}2x+y=5\\ 2x+y=2\end{matrix}\right\}$ **(θ)** $\left\{\begin{matrix}x-y+4z-3\omega=0\\ 3x-5y+2z+\omega=0\\ -2x+3y+z-2\omega=0\end{matrix}\right\}$

(ι) $\left\{\begin{matrix}x+4y=5\\ 3x-2y=1\\ 4x+5y=9\end{matrix}\right\}$ **(κ)** $\left\{\begin{matrix}2x+3y-\ z=7\\ x+\ y+\ z=4\\ 3x-\ y+2z=-1\end{matrix}\right\}$ **(λ)** $\left\{\begin{matrix}2x-3y+\ z=-1\\ x+2y-2z=8\\ 3x-8y+3z=-8\end{matrix}\right\}$

(μ) $\left\{\begin{matrix}x+y=3\\ 2x+5y=\lambda\\ -7x+9y=\lambda-1\end{matrix}\right\}$ **(ν)** $\left\{\begin{matrix}x+\ 2y-2z+\ \omega=1\\ 3x-\ 3y+\ z\qquad=2\\ 2x-8y+3z-2\omega=3\end{matrix}\right\}$ **(ξ)** $\left\{\begin{matrix}x+2y-3\omega=2\lambda\\ 2x+6y-11\omega=3\lambda-1\\ x+3y+7\omega=3\lambda\end{matrix}\right\}$

(ο) $\left\{\begin{matrix}5x-2y+3z-\omega=6\\ x+2y-3z=9\\ -3x+y-2\omega=-1\\ 4x+3y-z+5\omega=-7\end{matrix}\right\}$ **(π)** $\left\{\begin{matrix}x+y-z+2\omega=1\\ 2x+4y-6z-2\omega=0\\ -x+y-3z-9\omega=-2\\ x-2y+5z+13\omega=\lambda+4\end{matrix}\right\}$ **(ρ)** $\left\{\begin{matrix}3x+\ 5y-8z=0\\ 2x+\ y-\ z=2\\ 5x+2y+3z=1\\ -x+\ y\ +\ z=1\end{matrix}\right\}$

(σ) $\left\{\begin{matrix}2x-\ y+\ z=1\\ x+2y-2z=3\\ 3x-2y+3z=1\end{matrix}\right\}$ **(τ)** $\left\{\begin{matrix}x+\ y+\ z=0\\ 2x+2y+2z=0\\ 3x+3y+4z=0\end{matrix}\right\}$ **(υ)** $\left\{\begin{matrix}2y-3z+\qquad\varphi=2\\ x-2y+\ z-\omega+2\varphi=1\\ 2x-\ y+3z+\omega-\ \varphi=10\end{matrix}\right\}$

(φ) $\begin{Bmatrix} 3x+5y=13 \\ 5x-2y=1 \end{Bmatrix}$ **(χ)** $\begin{Bmatrix} 2x+4y-\omega=6 \\ 2x+3y+5\omega=8 \end{Bmatrix}$ **(ψ)** $\begin{Bmatrix} x+3y=7 \\ 2x-y=0 \\ 4x+y=7 \end{Bmatrix}$ **(ω)** $\begin{Bmatrix} x+3y=8 \\ 3x-2y=2 \\ 5x+\ y=12 \end{Bmatrix}$

(ς) $\begin{Bmatrix} x-2y-10\omega=-1 \\ 2x+\qquad 5\omega=13-y \\ 3x \qquad\quad -38=-3y-\omega \end{Bmatrix}$ **(w)** $\begin{Bmatrix} 2(2x-y)+4(2x-y)=48 \\ 5(x+y)-3(5x+y)=40 \end{Bmatrix}$

38 Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν $\mathrm{AB}=\lambda\mathrm{B}$, όπου $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}$

39 Αν το $\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ \beta x+\gamma y+\alpha z=0 \end{Bmatrix}$ όπου $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, έχει τις διαφορετικές λύσεις (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) δείξτε ότι $(x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2)=z_1\cdot z_2$
