ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

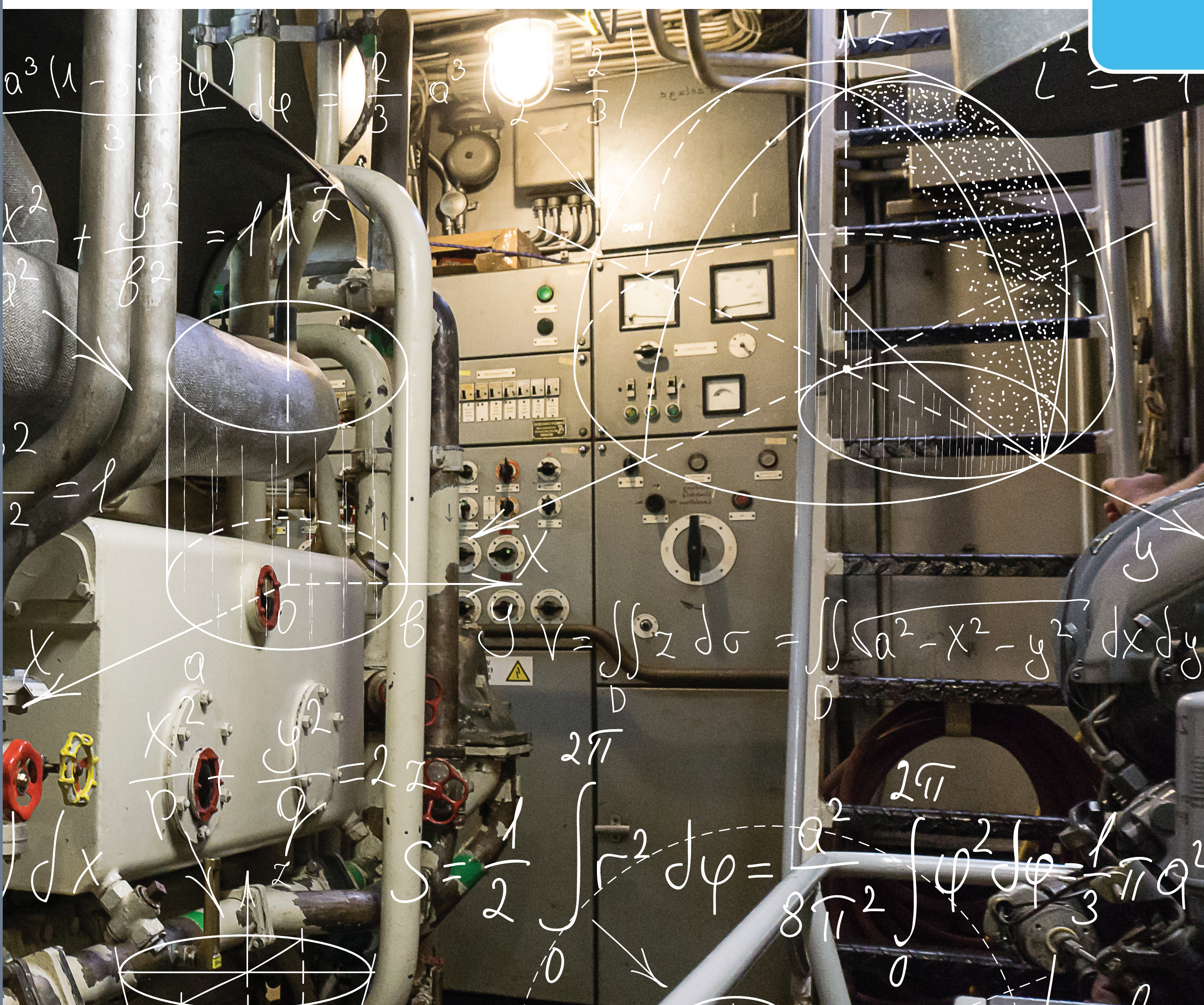
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΚΟΥ ΚΟΥΤΡΑ

β΄ έκδοση

ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ

ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΚΟΥ Β. ΚΟΥΤΡΑ

Μαθηματικού/Στατιστικού -
Καθηγητού Πανεπιστημίου Πειραιώς

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΑΘΗΝΑ
2022

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 2010
Β΄ ΕΚΔΟΣΗ 2022
ISBN: 978-960-337-184-7

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Το 1952 ο Ευγένιος Ευγενίδης (1882-1954) όρισε με τη διαθήκη του τη σύσταση του Ιδρύματος Ευγενίδου, του οποίου ως μοναδικό σκοπό έταξε «νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν νέων ἑλληνικῆς ὑπηκοότητος ἐν τῷ ἐπιστημονικῷ καὶ τεχνικῷ πεδίῳ». Ο ιδρυτής και χορηγός του Ιδρύματος Ευγενίδου ορθά προέβλεψε ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο της Ελλάδος αποτελεί η άρτια κατάρτιση των Ελλήνων τεχνιτών κατά τα πρότυπα της επαγγελματικής εκπαίδευσης άλλων ευρωπαϊκών χωρών.

Την 23η Φεβρουαρίου του 1956 εγκρίθηκε η σύσταση του κοινωφελούς Ιδρύματος Ευγενίδου, την διοίκηση και διαχείριση του οποίου κατά την ρητή επιθυμία του ιδρυτή του ανέλαβε η αδελφή του Μαριάνθη Σίμου (1895 -1981). Τότε ξεκίνησε η υλοποίηση του σκοπού του Ιδρύματος και η εκπλήρωση μίας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου από την Μαριάνθη Σίμου και τους επιστημονικούς συνεργάτες της.

Το έργο της Μαριάνθης Σίμου συνέχισε από το 1981 ο πολύτιμος συνεργάτης και διάδοχος του Ευγενίου Ευγενίδη, Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης (1920-2000). Από το 2000 το έργο του Ιδρύματος Ευγενίδου συνεχίζει ο Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης, ο οποίος υλοποιεί τον σκοπό του Ιδρύματος προσαρμόζοντας το όραμα του ιδρυτή του στις σύγχρονες εξελίξεις.

Μία από τις πρώτες δραστηριότητες του Ιδρύματος Ευγενίδου, ευθύς μετά την ίδρυσή του, υπήρξε η συγγραφή και έκδοση εκπαιδευτικών βιβλίων για τους μαθητές των τεχνικών σχολών, καθώς διαπιστώθηκε ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός τους με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν τα ορθά θεμέλια για την παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό. Καρπός αυτής της δραστηριότητας είναι η Βιβλιοθήκη του Τεχνίτη, η οποία αριθμεί 32 τίτλους, η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού, που περιλαμβάνει 50 τίτλους, η Τεχνική Βιβλιοθήκη με 11 τίτλους και η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού Βοηθού Χημικού με 3 τίτλους. Επιπλέον, από το 1977 μέχρι σήμερα έχουν εκδοθεί 171 τίτλοι για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων και 16 για τους μαθητές των Σχολών Μέσης Τεχνικής και Επαγγελματικής εκπαίδευσης.

Ξεχωριστή σειρά βιβλίων του Ιδρύματος Ευγενίδου αποτελεί η Βιβλιοθήκη του Ναυτικού (1967 έως σήμερα), η οποία είναι το αποτέλεσμα της συνεργασίας του Ιδρύματος Ευγενίδου με την Διεύθυνση Εκπαίδευσης Ναυτικών του Υπουργείου Ναυτιλίας. Η συγγραφή και έκδοση των εκπαιδευτικών βιβλίων για τους σπουδαστές των ναυτικών σχολών ανατέθηκε στο Ίδρυμα Ευγενίδου με την υπ' αριθμ. 61288/5031/9.8.1966 απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και λειτούργησε η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων, η οποία είχε συσταθεί ήδη από το 1958. Η συνεργασία Ιδρύματος Ευγενίδου και Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας ανανεώθηκε και επικαιροποιήθηκε με Υπουργικές Αποφάσεις το 1999 και το 2005, με τις οποίες το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή των εκπαιδευτικών βοηθημάτων για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.). Η ανάθεση της αρμοδιότητας για την έκδοση των διδακτικών βιβλίων για τις Ακαδημίες επαναβεβαιώθηκε με νομοθετική ρύθμιση τον Μάρτιο του 2020 (Ν. 4676).

Στην Βιβλιοθήκη του Ναυτικού περιλαμβάνονται 149 διδακτικά βιβλία ναυτικής εκπαίδευσης, καθώς και σχετικές έρευνες και πρακτικά συνεδρίων. Όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Ναυτικού ανταποκρίνονται στις ανάγκες των σπουδαστών των ΑΕΝ και είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία. Επιπλέον οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων καταβάλλουν κάθε προσπάθεια ώστε τα διδακτικά βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια, να επικαιροποιούνται με βάση τα εκάστοτε αναλυτικά προγράμματα σπουδών των Α.Ε.Ν. και να παραμένουν συμβατά με τις μεταβαλλόμενες διεθνείς απαιτήσεις.

Η διαχρονική συμβολή του Ιδρύματος Ευγενίδου στη Ναυτική Εκπαίδευση επιτυγχάνεται όχι μόνο με την έκδοση των σχετικών εκπαιδευτικών βιβλίων αλλά και με δωρεές στις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτι-

κού, υποτροφίες σε αξιωματικούς του Λιμενικού Σώματος, εκπόνηση μελετών/ερευνών και διεξαγωγή συνεδρίων για την ναυτική εκπαίδευση και την ναυτιλία γενικότερα, καθώς και παροχή πρόσβασης σε κορυφαίες ναυτιλιακές βάσεις δεδομένων μέσω της Βιβλιοθήκης του.

Με την προσφορά των εκδόσεών του στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, αλλά και με την πλειάδα εκδόσεων για Τεχνικούς, το Ίδρυμα Ευγενίδου συνεχίζει να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση της Ελλάδος, υλοποιώντας επί 60 και πλέον χρόνια το όραμα του ιδρυτή του, αείμνηστου ευεργέτη Ευγένιου Ευγενίδη.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ιωάννης Γκόλιας, Καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.

Αχιλλέας Ματσάγγος, Αντιναύαρχος Λ.Σ. (ε.α.).

Γεώργιος Γεωργούλης, Πλοίαρχος Α' Ε.Ν., Ε.Δι.Π. Παν/μίου Αιγαίου.

Ελευθέριος Πετρόπουλος, Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Υπ. Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής.

Χρήστος Βαγιωνάκης, Προϊστάμενος Τμήματος Κανονισμών και Εκπαιδευτικών Προγραμμάτων, Υπ. Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής.

Γραμματέας της Επιτροπής, **Ελευθερία Τελειώνη**.

Επιστημονικός Σύμβουλος για την Α΄ Έκδοση του βιβλίου «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» **Γεώργιος Παντελίδης**, ομ. καθηγητής ΕΜΠ.
Επιστημονικός Σύμβουλος για την Β΄ Έκδοση του βιβλίου «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» **Ιωάννης Σαριδάκης**, Καθηγητής Σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης Πολυτεχνείου Κρήτης.

Διατελέσαντα μέλη της Επιτροπής

Πρόεδροι
Α. Παππάς (1955-1983) Καθηγητής ΕΜΠ, *Μ. Αγγελόπουλος* (1983-2003) ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Σταυρόπουλος* ομ. Καθηγητής Πανεπ. Πειραιώς (2003-2008), *Ε. Δρης*, Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ (2008-2020)

Λοιπά μέλη
Γ. Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Καλογεράς* (1957-1970) Καθηγητής ΕΜΠ, *Χ. Καβουνίδης* (1955-1984) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, Μ. Αγγελόπουλος (1970-1983), Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, *Σπ. Γουλιέλμος (1958)* Αντιπλοίαρχος, *Ξ. Αντωνιάδης* (1959-1966) Αντιπλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Γ. Τσακίρης* (1967-1969) Πλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ελλ. Σίδερης* (1967-1969) Υποναύαρχος, *Π. Φουστέρης* (1969-1971) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αλ. Μοσχονάς* (1971-1972) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Χρυσανθακόπουλος* (1972-1974) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αθαν. Σωτηρόπουλος* (1974-1977) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Σπαρτιώτης* (1977) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., προσωρινός Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Πουλάκης* (1977-1979) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Λυκούδης* (1979-1981) Πλοίαρχος Λ. Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αναστ. Δημαράκης* (1981-1982) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Τσαντήλας* (1982-1984) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ε. Τζαβέλας* (1984-1986) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Γρηγοράκος* (1986-1988) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Μπαρκατσάς* (1988-1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Παπαναστασίου* (1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Λάμπρου* (1989-1992) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Κοκορέτσας* (1992-1993) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρκάκης* (1993-1994) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Ζουμπούλης* (1994-1995) Πλοίαρχος Λ.Σ., *Φ. Ψαρράς* (1995-1996) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Καλαρώνης* (1996-1998) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Ρεντζεπέρης* (1998-2000) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Στεφανάκης* (2000-2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρίνος* (2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Εξαρχόπουλος* (2001-2003) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μπριλάκης (*2003-2004) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ν. Θεμέλαρος* (2003-2004) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Κουβέλης* (2004-2005) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Δ. Βασιλάκης* (2005-2008) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Πετρόπουλος* (2008-2009) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Ματσάγγος* (2009-2011) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Σέργης* (2011-2012) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Τζαβάρας*, (2004-2013) Αντιναύαρχος Λ.Σ. (Ε.Α.), Ι. Τεγόπουλος (1988-2013) Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, Α. Θεοφανόπουλος (2012-2014) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Β. Καλλιπολίτου (2014-2017) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντρια Ναυτ. Εκπαιδ., Σ. Μπέλλας (2017-2018) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Α. Τσελίκης (2018-2019) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Βουτσινάς*, Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ..

Σύμβουλοι επί των Εκδόσεων

Δ .Γ. Νιάνιας (1956-1965) Καθηγητής ΕΜΠ, *Κ. Αγγ. Μανάφης* (1966-2018), ομ. Καθηγητής Φιλοσ. Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Α΄ ΕΚΔΟΣΗΣ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί διδακτικό εγχειρίδιο για τους σπουδαστές των Ακαδημιών του Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.). Σκοπός του είναι να προσφέρει μια άρτια και παιδαγωγικά αποτελεσματική εισαγωγή στις βασικές μαθηματικές έννοιες επάνω στις οποίες θα στηριχθούν πολλές από τις επόμενες γνώσεις και εμπειρίες, που θα αποκτήσουν στη διάρκεια της σταδιοδρομίας τους, ως φοιτητές των Α.Ε.Ν. και αξιωματικοί του Εμπορικού Ναυτικού.

Για την κατανόηση της ύλης που καλύπτεται θεωρείται αρκετό το μαθηματικό υπόβαθρο που αποκτά κάποιος με την ολοκλήρωση των λυκειακών του σπουδών. Ιδιαίτερη προσπάθεια έχει καταβληθεί, ώστε να δοθούν τα αποτελέσματα στην πιο απλή μορφή τους να γίνουν εύκολα κατανοητά από τον αναγνώστη, χωρίς όμως να χάνουν τη μαθηματική τους ορθότητα και τη λογική συνέπειά τους. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε προκειμένου τα θέματα που αναπτύσσονται στο βιβλίο, να υποστηρίζονται με επαρκή αριθμό εποπτικών σχημάτων, διαγραμμάτων και πινάκων, ώστε να είναι ευκολότερη η αφομοίωση και εμπέδωση της ύλης.

Σχετικά με τη διάρθρωση της ύλης αξίζει να αναφερθούν τα εξής: Κάθε κεφάλαιο χωρίστηκε σε μικρότερες παραγράφους, στις οποίες γίνεται εισαγωγή νέων εννοιών ή αποτελεσμάτων. Για τη διευκόλυνση των σπουδαστών στη μελέτη του εγχειριδίου, τα μαθηματικά στοιχεία ιδιαίτερης σπουδαιότητας (ορισμοί, προτάσεις, θεωρήματα και κατάλογοι ιδιοτήτων) έχουν σημειωθεί με ***γαλάζια σκίαση****, ώστε να μπορούν να εντοπισθούν εύκολα και να προσελκύσουν την προσοχή του σπουδαστή. Σε κάθε παράγραφο, δίνονται σειρά προσεκτικά επιλεγμένων παραδειγμάτων, που σημειώνονται με* ***ροζ σκίαση****, παρέχοντας έτσι τη δυνατότητα ο σπουδαστή να γνωρίσει τον τρόπο χρήσης της θεωρίας στην αντιμετώπιση προβλημάτων και να μπορέσει στη συνέχεια να προχωρήσει στη λύση των ανάλογων ασκήσεων που προτείνονται σε κάθε παράγραφο. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου κρίθηκε σκόπιμο να δοθούν οι βασικές έννοιες και τύποι του κεφαλαίου (συνοπτικά στοιχεία θεωρίας), ερωτήσεις κατανοήσεως (σωστού/λάθους και πολλαπλής επιλογής), αλλά και μια συλλογή από γενικές ασκήσεις.*

Η διάρθρωση και η μορφοποίηση της ύλης έγινε, όχι μόνο με βάση τις απαιτήσεις και απόψεις του συγγραφέως για το περιεχόμενο ενός τέτοιου εγχειριδίου, αλλά και με βάση το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας των Α.Ε.Ν. Η επιθυμία να μην αποτελέσει το βιβλίο αυτό μόνο ένα διδακτικό εγχειρίδιο, αλλά και ένα σύμβουλο σε περίπτωση που κάποιος σπουδαστής θελήσει να εμβαθύνει περισσότερο στα θέματα που αυτό πραγματεύεται, οδήγησε στην παρουσίαση και κάποιων πιο προχωρημένων θεμάτων, που εξαρτάται στην κρίση του διδάσκοντος κατά πόσο θα διδαχθούν (λαμβάνοντας υπόψη το διαθέσιμο χρόνο διδασκαλίας και την ταχύτητα αφομοίωσης των βασικών θεμάτων από τους εκάστοτε σπουδαστές). Τα θέματα αυτά έχουν σημειωθεί με ***γκρίζα σκίαση****, ώστε να είναι εύκολα ανιχνεύσιμα από τους διδάσκοντες, αλλά και τους σπουδαστές.*

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ομότιμο καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Γεώργιο Παντελίδη, ο οποίος, ως κριτής και ειδικός επιστημονικός σύμβουλος αφιέρωσε πολύ χρόνο στη μελέτη των αρχικών κειμένων και με τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις του βοήθησε σημαντικά στη βελτίωση του παρόντος εγχειριδίου.

Επίσης ευχαριστώ το συνάδελφό μου κ. Βασίλη Σεβρόγλου, ο οποίος συνέβαλε ουσιαστικά στη διαμόρφωση των κεφαλαίων 7 και 8 και είχε την υπομονή να διορθώσει προσεκτικά τα τυπογραφικά δοκίμια του εγχειριδίου κατά τις διάφορες φάσεις που προηγήθηκαν της εκτυπώσεως του βιβλίου.

Ο συγγραφέας θεωρεί τιμή του την ανάθεση της συγγραφής του παρόντος εγχειριδίου από το ΥΠ.ΟΙ.Α.Ν. και το Ίδρυμα Ευγενίδου και επιθυμεί να ευχαριστήσει όλους τους συνεργάτες του Τμήματος Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου που με την άρτια, άριστη και κοπιαστική συνεργασία συνέβαλαν στην ολοκλήρωση του παρόντος συγγράμματος.

Θεωρώντας ότι ο καλύτερος τρόπος για τη βελτίωση κάθε ανθρώπινου (άρα και μη τέλειου) έργου είναι η δημιουργική και καλόπιστη κριτική, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ των προτέρων τους αναγνώστες που θα μου απευθύνουν παρατηρήσεις, υποδείξεις ή σχόλια, τα οποία θα βοηθήσουν στη βελτίωσή του σε επόμενη έκδοση.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2010
Μ. Β. Κούτρας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β΄ ΕΚΔΟΣΗΣ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί διδακτικό εγχειρίδιο για τους σπουδαστές των Ακαδημιών Εμπορικού Ναυτικού (ΑΕΝ) και έχει προέλθει μετά από σημαντική αναθεώρηση του αντίστοιχου βιβλίου που εκδόθηκε το 2010. Ο στόχος της αναθεώρησης ήταν να καλύψει την τρέχουσα ύλη των μαθημάτων «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι» και «Μαθηματικά ΙΙ & Στατιστική», που διδάσκονται στους σπουδαστές των ΑΕΝ Μηχανικών σύμφωνα με το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα.

Στη νέα έκδοση έχει αφαιρεθεί το Κεφάλαιο των Μετασχηματισμών Laplace και έχει προστεθεί ένα νέο κεφάλαιο, το οποίο καλύπτει την ύλη των Πιθανοτήτων. Έχουν επίσης γίνει διάφορες προσθήκες καθώς και αναδιατάξεις, ώστε η παρουσίαση της ύλης να ακολουθεί μια πιο παιδαγωγική ροή.

Κατά την αναθεώρηση λήφθηκαν υπόψη οι παρατηρήσεις των διδασκόντων, οι οποίοι για περισσότερα από 10 έτη χρησιμοποίησαν τα κεφάλαια της προηγούμενης έκδοσης στη διδασκαλία της συγκεκριμένης ύλης τόσο στις Σχολές Μηχανικών όσο και στις Σχολές Πλοιάρχων των ΑΕΝ. Θα ήθελα να απευθύνω σε όλους θερμές ευχαριστίες τόσο για τα θετικά σχόλια επί της προηγούμενης έκδοσης όσο και για τις κριτικές και καλόπιστες πιστεύω παρατηρήσεις τους, οι οποίες βοήθησαν στη βελτίωση της νέας έκδοσης.

Και σε αυτή την έκδοση, κάθε κεφάλαιο χωρίστηκε σε μικρότερες παραγράφους, στις οποίες γίνεται εισαγωγή νέων εννοιών ή αποτελεσμάτων. Για τη διευκόλυνση των σπουδαστών στη μελέτη του εγχειριδίου, τα μαθηματικά στοιχεία ιδιαίτερης σπουδαιότητας (ορισμοί, προτάσεις, θεωρήματα και κατάλογοι ιδιοτήτων) έχουν σημειωθεί με γαλάζια σκίαση, ώστε να μπορούν να εντοπιστούν εύκολα και να προσελκύσουν την προσοχή του αναγνώστη. Σε κάθε παράγραφο λύνονται υποδειγματικά προσεκτικά επιλεγμένα παραδείγματα, παρέχοντας έτσι τη δυνατότητα να γνωρίσει ο αναγνώστης τον τρόπο χρήσης της θεωρίας στην αντιμετώπιση προβλημάτων και να μπορέσει στη συνέχεια να προχωρήσει στη λύση των ανάλογων ασκήσεων που προτείνονται.

Για την διευκόλυνση του σπουδαστή κρίθηκε σκόπιμο για κάθε κεφάλαιο να δοθούν οι βασικές έννοιες και τύποι του κεφαλαίου (συνοπτικά στοιχεία θεωρίας), ερωτήσεις κατανόησης (σωστού/λάθους και πολλαπλής επιλογής) και μια συλλογή από γενικές ασκήσεις, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν πλήθος εφαρμογών της ύλης σε πραγματικά προβλήματα. Το υλικό αυτό είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του Ιδρύματος Ευγενίδου, στην ενότητα Βιβλιοθήκη του Ναυτικού.

Ο συγγραφέας θεωρεί τιμή του την ανάθεση της συγγραφής του παρόντος εγχειριδίου από την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου και επιθυμεί να ευχαριστήσει όλους τους συνεργάτες της Ομάδας Εκδόσεων του Ιδρύματος, που με την συστηματική, άριστη και κοπιαστική συνεργασία τους συνέβαλαν στην άρτια έκδοση του βιβλίου.

Τέλος, θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω από τη θέση αυτή τον καθηγητή Ιωάννη Σαριδάκη, ο οποίος ως επιστημονικός σύμβουλος της Επιτροπής Εκδόσεων για την παρούσα έκδοση, αφιέρωσε πολύ χρόνο στην μελέτη των κειμένων και με τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις του βοήθησε σημαντικά στη βελτίωση του παρόντος εγχειριδίου.

Παρότι έγινε η μεγαλύτερη δυνατή προσπάθεια προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν τα λάθη και οι παραλείψεις, είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα έχουν παραμείνει αρκετά από αυτά στο τελικό τυπωμένο κείμενο και για τον λόγο αυτό ζητώ προκαταβολικά την κατανόηση των αναγνωστών. Θεωρώντας ότι η δημιουργική και καλόπιστη κριτική αποτελεί τον καλύτερο τρόπο για τη συνεχή καλυτέρευσή του, θα ήμουν υποχρεωμένος απέναντι σε κάθε χρήστη αυτού του πονήματος, ο οποίος θα ήθελε να μου απευθύνει παρατηρήσεις, υποδείξεις ή σχόλια, που θα βοηθήσουν στην βελτίωσή του σε επόμενες εκδόσεις.

Ο συγγραφέας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1: Πίνακες

Κεφάλαιο 2: Ορίζουσες

Κεφάλαιο 3: Γραμμικά συστήματα

Κεφάλαιο 4: Μιγαδικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 5: Συναρτήσεις

Κεφάλαιο 6: Παράγωγοι

Κεφάλαιο 7: Ολοκληρώματα

Κεφάλαιο 8: Διαφορικές εξισώσεις

Κεφάλαιο 9: Στατιστική

Κεφάλαιο 10: Πιθανότητες

1

ΠΙΝΑΚΕΣ

Οι πίνακες είναι ένα από τα χρησιμότερα «εργαλεία» των μαθηματικών, αφού μας δίνουν τη δυνατότητα να παρουσιάσουμε με συνοπτικό τρόπο ένα σύνολο στοιχείων, έτσι ώστε να μπορούμε να λαμβάνουμε από αυτόν εύκολα και γρήγορα τις πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν. Παράλληλα, με τον ορισμό καταλλήλων πράξεων μεταξύ πινάκων, μπορούμε να παίρνουμε ως αποτέλεσμα νέους πίνακες, που μας δίνουν πρόσθετες πληροφορίες για το πρόβλημα που μελετάμε.

1.1 Η έννοια του πίνακα. Ισότητα πινάκων. Ειδικές μορφές πινάκων.

Στο Υπουργείο Ναυτιλίας έχουν συγκεντρωθεί, μεταξύ άλλων, στατιστικά στοιχεία που αφορούν στον αριθμό επιβατών που μετακινήθηκαν προς τρία ελληνικά νησιά α, β, γ, μέσω τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά τον μήνα Ιούνιο ενός συγκεκριμένου έτους. Σύμφωνα με τα στοιχεία αυτά, ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν κατά τον μήνα Ιούνιο ήταν:

1η Εταιρεία: 8000 επιβάτες προς το νησί α, 5000 επιβάτες προς το νησί β και 6000 επιβάτες προς το νησί γ.

2η Εταιρεία: 6000 επιβάτες προς το νησί α, 4000 επιβάτες προς το νησί β και 2000 επιβάτες προς το νησί γ.

3η Εταιρεία: 3000 επιβάτες προς το νησί α, 2000 επιβάτες προς το νησί β και 3000 επιβάτες προς το νησί γ.

4η Εταιρεία: 2000 επιβάτες προς το νησί α, 1000 επιβάτες προς το νησί β και 1000 επιβάτες προς το νησί γ.

Προκειμένου να παρουσιάσουμε συνοπτικά τα παραπάνω δεδομένα, αλλά και να έχουμε τη δυνατότητα σύγκρισης με αντίστοιχα δεδομένα που αφορούν σε άλλους μήνες, θα μπορούσαμε να τα οργανώσουμε όπως παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα όπου η επιβατική κίνηση είναι καταγεγραμένη σε χιλιάδες επιβάτες:

	Επιβάτες		
Εταιρεία	*Νησί α*	*Νησί β*	*Νησί γ*
1	8	5	6
2	6	4	2
3	3	2	3
4	2	1	1

Στον πίνακα αυτόν υπάρχει συγκεντρωμένη όλη η πληροφορία που αφορά την επιβατική κίνηση προς τα 3 νησιά μέσω των 4 εταιρειών. Επιπλέον παρατηρώντας τον πίνακα μπορούμε εύκολα να εξάγουμε διάφορα χρήσιμα συμπεράσματα, π.χ. να διαπιστώσουμε ότι η 4η εταιρεία διακίνησε σε κάθε νησί τους λιγότερους επιβάτες (σε σχέση με τις υπόλοιπες τρεις εταιρίες), ενώ η 1η εταιρεία τους περισσότερους κ.λπ.

Εάν διατηρήσουμε τα αριθμητικά μόνο δεδομένα της προηγούμενης διάταξης και τα τοποθετήσουμε μέσα σε αγκύλες, δηλαδή γράψουμε:

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

θα λέμε ότι σχηματίζεται ένας ***πίνακας*** 4×3 ή ένας ***πίνακας τύπου*** 4×3.

> ***Πίνακας*** $\mu\times\nu$ ή ***πίνακας τύπου*** $\mu\times\nu$ ονομάζεται μία ορθογώνια τοποθέτηση $\mu\times\nu$ πλήθους αριθμών, σε μ γραμμές και ν στήλες.

Το πλήθος μ των γραμμών και ν των στηλών ονομάζονται ***διαστάσεις*** του πίνακα, ενώ οι αριθμοί που εμπεριέχονται σ' αυτόν καλούνται ***στοιχεία*** του πίνακα. Συνήθως οι πίνακες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ κ.λπ., ενώ τα στοιχεία τους με πεζά. Το στοιχείο ενός πίνακα A τύπου $\mu \times \nu$, που βρίσκεται στην *i*-***γραμμή*** και στην *j*- ***στήλη***, συμβολίζεται με α_{ij}, και ο πίνακας A θα γράφεται:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & j\ \text{στήλη} & & \phantom{a_{1\nu}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\nu} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu j} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i\ \text{γραμμή} \\ \\ \\ \end{array}$$

ή πιο απλά $A = [\alpha_{ij}]_{\mu\times\nu}$ ή, αν είναι προφανές ποιες είναι οι διαστάσεις του πίνακα, $A = [\alpha_{ij}]$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας που περιγράφει τη διακίνηση επιβατών από τις τέσσερεις εταιρείες προς τα τρία νησιά έχει διαστάσεις $\mu=4$ και $\nu=3$ και αν χρησιμοποιήσουμε γι' αυτόν το γράμμα A, μπορούμε να γράψουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο α_{22} του πίνακα αυτού είναι ίσο με 4, το α_{41} είναι ίσο με 2 κ.λπ.

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός επιβατών που διακινήθηκαν από τις τέσσερεις εταιρείες προς καθένα από τα τρία νησιά κατά τον μήνα Ιούλιο παρέμεινε αμετάβλητος. Είναι τότε φανερό ότι ο αντίστοιχος πίνακας, έστω B, για τον μήνα Ιούλιο έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του A. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο πίνακας B είναι ***ίσος*** με τον A.

> Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι ***ίσοι***, δηλαδή $A = B$, όταν είναι του ίδιου τύπου (έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Από τον ορισμό της ισότητας πινάκων που δόθηκε παραπάνω προκύπτει ότι δύο πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορεί να είναι ίσοι.

Έτσι, οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 1/w \\ y^3 & z \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

θα είναι ίσοι αν και μόνο αν $x^2 = 9$, $1/w = -5$, $y^3 = 8$, $z = 6$, δηλαδή όταν $x = \pm 3$, $w = -1/5$, $y = 2$ και $z = 6$.

Αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένα είδη πινάκων, που έχουν ιδιαίτερη σημασία, αφου, εμφανίζονται αρκετά συχνά στις εφαρμογές που κάνουν χρήση της έννοιας του πίνακα:

1) ***Μηδενικός πίνακας*** τύπου $\mu\times\nu$ ονομάζεται ένας πίνακας A, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν. Για έναν τέτοιο πίνακα θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{O}_{\mu\times\nu}$ ή απλώς $\mathbf{O}$, όταν δεν υπάρ-

χει κίνδυνος σύγχυσης. Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι μηδενικοί πίνακες τύπου 2×2 και 3×2 αντίστοιχα.

2) ***Αντίθετος πίνακας*** ενός πίνακα A ονομάζεται ο πίνακας ίδιου τύπου, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των αντιστοίχων στοιχείων του A. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $-A$. Για παράδειγμα, ο αντίθετος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \text{ είναι ο } B = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

και αντίστροφα, ο αντίθετος του πίνακα B είναι ο A. Συνήθως θα λέμε απλά ότι οι πίνακες A και B είναι αντίθετοι.

3***) Πίνακας–γραμμή*** ονομάζεται ένας πίνακας τύπου $1\times\nu$, όπως ο [4 2 5 4 1]. Πολλές φορές για τον πίνακα-γραμμή χρησιμοποιείται η ορολογία ***διάνυσμα*** διάστασης ν ή διάνυσμα-γραμμή διάστασης ν.

4) ***Πίνακας–στήλη*** ονομάζεται ένας πίνακας τύπου $\mu\times 1$, όπως ο

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Πολλές φορές, για πίνακα-στήλη χρησιμοποιείται η ορολογία ***διάνυσμα*** διάστασης ν ή διάνυσμα –στήλη διάστασης ν.

5) ***Τετραγωνικός πίνακας τάξης ν*** ονομάζεται ένας πίνακας με ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ν (δηλ. τύπου $\nu\times\nu$). Για παράδειγμα, οι πίνακες,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2 και 3 αντίστοιχα.

Σ' έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξης ν,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$ λέμε ότι σχηματίζουν την ***κύρια διαγώνιό*** του και αναφέρονται συνήθως με την ονομασία ***διαγώνια στοιχεία***.

6) ***Διαγώνιος πίνακας*** ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$, του οποίου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλαδή $\alpha_{ij} = 0$ για $i = j$, οπότε θα έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα οι πίνακες $\begin{bmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιοι πίνακες τάξης 2 και 3 αντίστοιχα.

Μία σημαντική ειδική περίπτωση διαγώνιου πίνακα είναι ο πίνακας ο οποίος έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με 1, δηλαδή ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας ονομάζεται ***μοναδιαίος πίνακας*** ή ***ταυτοτικός πίνακας*** τάξης ν και συμβολίζεται με I_ν ή απλά με I στην περίπτωση που η τάξη του πίνακα είναι προφανής και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

7) ***Τριγωνικός πίνακας*** ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά (***άνω τριγωνικός***) ή όλα τα στοιχεία που βρίσκονται επάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά (***κάτω τριγωνικός***), για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2 & 0 \\ 5 & y & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ -7 & 1 & x^3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Πίνακες άνω τριγωνικοί *Πίνακες κάτω τριγωνικοί*

Αν ο Α $= [\alpha_{ij}]$ είναι άνω τριγωνικός, θα ισχύει $\alpha_{ij} = 0$ για $i > j$ ενώ αν είναι κάτω τριγωνικός θα ισχύει $\alpha_{ij} = 0$ για $i < j$.

8) ***Ανάστροφος ενός $\mu \times \nu$ πίνακα*** A ονομάζεται ο $\boldsymbol{\nu \times \mu}$ πίνακας, ο οποίος έχει ως γραμμές τις στήλες του A και ως στήλες τις γραμμές του A. Ο ανάστροφος του πίνακα A θα συμβολίζεται με A^T.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu j} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{\mu 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{\mu 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{\mu j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & \dots & a_{i\nu} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Πίνακας A *Ανάστροφος του πίνακα A*

Για παράδειγμα, ανάστροφος του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 6\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -5 & 4\\ 6 & -2\end{bmatrix}$.

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι ισχύει πάντοτε η ισότητα $(A^T)^T = A$.

9) ***Συμμετρικός πίνακας*** τάξης ν ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}]_{\nu\times\nu}$ για τον οποίο ισχύει $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα $i = 1,2,..., \nu$ και $j = 1,2,..., \nu$. Έτσι, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix}1 & x^2 & 5\\ x^2 & 2 & y\\ 5 & y & 3\end{bmatrix}$$

είναι ένας συμμετρικός πίνακας τάξης 3. Από τον ορισμό που δόθηκε προηγουμένως για τον ανάστροφο πίνακα είναι φανερό ότι ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ισούται με τον ανάστροφό του, δηλαδή αν ισχύει $A^T = A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1.

Ένα πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Ραφήνα-Άνδρος-Τήνος-Μύκονος. Οι αποστάσεις (σε ν.μ.) μεταξύ Ραφήνας-Άνδρου, Άνδρου-Τήνου, και Τήνου-Μυκόνου είναι 46, 20 και 10 ν.μ. αντίστοιχα. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα, ο οποίος να δίνει όλες τις δυνατές αποστάσεις μεταξύ των τεσσάρων λιμένων ανά δύο. Να σχολιάσετε τη μορφή του πίνακα σε σχέση με τα είδη πινάκων που αναφέρθηκαν στη θεωρία.

Λύση.

Αν γράψουμε τους τέσσερεις λιμένες στις γραμμές και στις στήλες ενός πίνακα και συμπληρώσουμε τις αποστάσεις που δόθηκαν, θα έχουμε:

ΠΡΟΣ / ΑΠΟ	***Ραφήνα***	***Άνδρο***	***Τήνο***	***Μύκονο***
Ραφήνα	0	46	...	...
Άνδρο	46	0	20	...
Τήνο	...	20	0	10
Μύκονο	...	...	10	0

Συμπληρώνουμε τώρα και τις μιλιομετρικές αποστάσεις που λείπουν (θεωρώντας ότι η μετάβαση γίνεται σειριακά, δηλαδή για να ταξιδέψουμε από Ραφήνα σε Τήνο, εκτελούμε το δρομολόγιο Ραφήνα-Άνδρος-Τήνος. Επομένως για τον υπολογισμό της απόστασης γίνεται πρόσθεση των αντίστοιχων αποστάσεων και έτσι οδηγούμαστε στον επόμενο πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 46 & 66 & 76\\ 46 & 0 & 20 & 30\\ 66 & 20 & 0 & 10\\ 76 & 30 & 10 & 0\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που προέκυψε είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης 4, στον οποίο η κύρια διαγώνιος έχει όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα $i =$ 1, 2, 3, 4 και $j =$ 1, 2, 3, 4 ή ισοδύναμα $A^T = A$, οπότε ο πίνακας είναι συμμετρικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.2.

Δίνεται ο πίνακας $A = [\alpha_{ij}]_{2\times 3}$, όπου $\alpha_{ij} = |i-j|$, για $i =$ 1, 2, και $j =$ 1, 2, 3. Να γράψετε αναλυτικά τον πίνακα A και τον ανάστροφο πίνακα A^T. Είναι ο πίνακας A συμμετρικός;

Λύση.

Ο ζητούμενος πίνακας A έχει στοιχεία

$$a_{11} = |1-1| = 0,\quad a_{12} = |1-2| = 1,\quad a_{13} = |1-3| = 2,$$

$$a_{21} = |2-1| = 1,\quad a_{22} = |2-2| = 0,\quad a_{13} = |2-3| = 1$$

οπότε

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δεν έχει νόημα να εξετασθεί κατά πόσον ο πίνακας είναι συμμετρικός, αφού ο A δεν είναι τετραγωνικός.

Ασκήσεις.

1.1.1. Να αναφέρετε σε ποια ή ποιες από τις κατηγορίες (είδη) πινάκων (α)–(θ) εμπίπτει καθένας από τους επόμενους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [0\,0\,0\,0\,0] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Δίνεται ο 4×4 πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$, όπου $\alpha_{ij} = |2i - 3j|$ για $i =$ 1, 2, 3, 4 και $j =$ 1, 2, 3, 4. Να γράψετε αναλυτικά τον πίνακα αυτόν, αφού βρείτε τα στοιχεία του.

1.1.3. Να βρείτε την τιμή του αριθμού x ώστε ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & x^2-4 \\ x^2-5x+6 & 2 \end{bmatrix}$ να είναι διαγώνιος.

1.1.4. Να βρείτε τις τιμές των x, y, για τις οποίες ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & x^2-1 & x-1 \\ 1-x^2 & x & 0 \\ 0 & y^2 & (x+1)^2-3 \end{bmatrix}$

είναι συμμετρικός. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ίσος με τον μοναδιαίο πίνακα τάξης $\nu = 3$.

1.1.5. Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας τάξης 3

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a & x & y \\ x' & \beta & z \\ y' & z' & \gamma \end{bmatrix}.$$

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα $B = [\beta_{ij}]$ τάξης 3 με στοιχεία

$$\beta_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_{ij}+\alpha_{ji}),\ i=1,\ 2,\ 3\ \text{ και } j=1,\ 2,\ 3,$$

και να διαπιστώσετε ότι ο B είναι πάντοτε ένας συμμετρικός πίνακας. Να διαπιστώσετε ότι, αν ο αρχικός πίνακας A ήταν συμμετρικός, τότε οι πίνακες A και B θα ήταν ίσοι.

1.2 Πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό.

Συνεχίζοντας το παράδειγμα που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά τον μήνα Ιούλιο του έτους που μας ενδιαφέρει δίνεται από τον επόμενο πίνακα:

$$B=\begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 9 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι ο συνολικός αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία ελληνικά νησιά α, β, γ μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά τους δύο μήνες που εξετάζουμε (Ιούνιο και Ιούλιο), θα δίνεται από έναν τρίτο πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο θα είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των δύο αυτών πινάκων, δηλαδή από τον

$$\begin{bmatrix} 8+10 & 5+5 & 6+5 \\ 6+9 & 4+2 & 2+3 \\ 3+7 & 2+8 & 3+1 \\ 2+1 & 1+5 & 1+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 18 & 10 & 11 \\ 15 & 6 & 5 \\ 10 & 10 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται ***άθροισμα*** των πινάκων A και B.

> ***Άθροισμα*** δύο πινάκων, $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ τύπου $\mu\times\nu$, ονομάζεται ο πίνακας $\mu\times\nu$, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A + B$, δηλαδή
>
> $$A+B=[\alpha_{ij}+\beta_{ij}]_{\mu\times\nu}.$$

Η πράξη με την οποία υπολογίζουμε το άθροισμα δύο πινάκων ονομάζεται ***πρόσθεση πινάκων***.

Η διαφορά του αριθμού επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία ελληνικά νησιά α, β, γ μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, ανάμεσα στους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο, θα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο αποτελεί διαφορά των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B.

$$\begin{bmatrix} 8-10 & 5-5 & 6-5 \\ 6-9 & 4-2 & 2-3 \\ 3-7 & 2-8 & 3-1 \\ 2-1 & 1-5 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται ***διαφορά*** των δύο πινάκων A και B (το αρνητικό αποτέλεσμα στον τελευταίο πίνακα σημαίνει μείωση του αριθμού επιβατών κατά τον μήνα Ιούλιο).

Αν $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ είναι δύο πίνακες τύπου $\mu \times \nu$, τότε ονομάζουμε ***διαφορά*** του πίνακα B από τον πίνακα A τον πίνακα $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο αποτελεί διαφορά των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A - B$, δηλαδή:

$$A - B = [\alpha_{ij} - \beta_{ij}]_{\mu \times \nu}.$$

Από τον τρόπο ορισμού των δύο προηγουμένων πράξεων καταλαβαίνουμε ότι, για να ορίζεται το άθροισμα ή η διαφορά δύο πινάκων, θα πρέπει οι πίνακες να είναι του ***ίδιου τύπου***.

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

τότε θα έχουμε

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A + \Gamma^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad \Gamma - A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

ενώ οι πίνακες A, Γ, καθώς και οι πίνακες B, Γ, που δεν είναι του ίδιου τύπου, δεν μπορούν ούτε να προστεθούν ούτε να αφαιρεθούν.

Οι ιδιότητες της *πρόσθεσης* των πινάκων είναι ανάλογες με τις ιδιότητες της πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, αν A, B, Γ είναι τρεις πίνακες τύπου $\mu \times \nu$ και $\mathbf{O}$ ο αντίστοιχος μηδενικός (τύπου $\mu \times \nu$), τότε θα ισχύουν τα εξής:

***Π*₁**. $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

***Π*₂**. $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

***Π*₃**. $A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$

***Π*₄**. $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{O}$

Το άθροισμα $A + (B + \Gamma)$ ή λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, το άθροισμα $(A + B) + \Gamma$, θα συμβολίζεται με $A + B + \Gamma$. Ομοίως, αν A, B, Γ, Δ είναι τέσσερεις πίνακες ίδιου τύπου, το άθροισμα $(A + (B + \Gamma)) + \Delta$, το οποίο με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα είναι ίσο με καθένα από τα αθροίσματα

$$((A + B) + \Gamma) + \Delta, \quad (A + B) + (\Gamma + \Delta,) \quad A + ((B + \Gamma) + \Delta), \quad A + (B + (\Gamma + \Delta)),$$

θα λέγεται άθροισμα των πινάκων A, B, Γ, Δ και θα συμβολίζεται ως $A+B+\Gamma+\Delta$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται το άθροισμα $k \geq 3$ πινάκων $A_1, A_2, ..., A_k$, το οποίο συμβολίζεται ως $A_1+A_2+...+A_k$.

Από τους ορισμούς της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και τις ιδιότητές τους προκύπτει ότι:

$$X+B=A \Leftrightarrow X=A-B.$$

Τέλος, για τον ανάστροφο του αθροίσματος και της διαφοράς δύο πινάκων $A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}$ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύουν οι ισότητες:

Π_5. $(A+B)^T = A^T + B^T$ (ανάστροφος του αθροίσματος πινάκων)

Π_6. $(A-B)^T = A^T - B^T$ (ανάστροφος της διαφοράς πινάκων)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά τον μήνα Αύγουστο ήταν διπλάσιος του αριθμού που μετακινήθηκαν τον μήνα Ιούνιο. Για να βρούμε το πλήθος των επιβατών που μετακινήθηκαν κατά τον μήνα Αύγουστο, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του πίνακα A που αφορά στον μήνα Ιούνιο με τον αριθμό 2. Έτσι, ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά τον μήνα Αύγουστο θα δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 8 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 6 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 12 \\ 12 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται ***γινόμενο*** του αριθμού 2 με τον πίνακα A.

Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν $\mu\times\nu$ πίνακα A ονομάζεται ο $\mu\times\nu$ πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε με λ κάθε στοιχείο του πίνακα A. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με λA, δηλαδή αν $A=[\alpha_{ij}]$, θα έχουμε

$$\lambda A = [\lambda\alpha_{ij}]_{\mu\times\nu}.$$

Αν Α, Β είναι δύο $\mu\times\nu$ πίνακες και λ, λ' είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

Γ_1. $(\lambda+\lambda')A = \lambda A + \lambda' A$ **Γ_2.** $\lambda(\lambda' A) = (\lambda\lambda')A$ **Γ_3.** $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Γ_4. $1A = A1 = A$ **Γ_5.** $\lambda A = \mathbf{O}$ αν και μόνο αν $\lambda = 0$ ή $A = \mathbf{O}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.1.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει για τρεις ομάδες ποδοσφαίρου τις νίκες, τις ήττες και τις ισοπαλίες που πέτυχαν στη διάρκεια του πρωταθλήματος (15 αγώνες) εντός και εκτός έδρας.

	Νίκες		*Ισοπαλίες*		*Ήττες*	
Ομάδες	*εντός*	*εκτός*	*εντός*	*εκτός*	*εντός*	*εκτός*
1η	13	11	2	1	0	3
2η	10	9	2	2	3	4
3η	8	6	4	4	3	5

α) Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή τριών πινάκων Α, Β, Γ, που να περιέχουν ο Α τις νίκες, ο Β τις ισοπαλίες και ο Γ τις ήττες κάθε ομάδας, διατηρώντας την σειρά παρουσίασης των δεδομένων.

β) Αν για κάθε νίκη η ομάδα παίρνει 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία 2 βαθμούς και για κάθε ήττα 1 βαθμό, να δημιουργήσετε τον πίνακα ο οποίος δίνει:
– Τους βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα στο πρωτάθλημα εντός και εκτός έδρας.
– Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εντός έδρας.
– Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εκτός έδρας.

γ) Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή δύο πινάκων Δ, Ε που να περιέχουν ο Δ τις εντός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας και ο Ε τις εκτός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα που δίνει τις συνολικές (εντός και εκτός έδρας) νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας.

Λύση.

α) Οι πίνακες A, B, Γ, που δίνουν αντίστοιχα τις νίκες, τις ισοπαλίες και τις ήττες κάθε ομάδας είναι οι εξής:

$$A=\begin{bmatrix}13 & 11\\ 10 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας X που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός και εκτός έδρας, θα έχει τη μορφή $X = 3A + 2B + \Gamma$, οπότε:

$$X=3\begin{bmatrix}13 & 11\\ 10 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39 & 33\\ 30 & 27\\ 24 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\\ 8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43 & 38\\ 37 & 35\\ 35 & 31\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας X_1 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της πρώτης στήλης του X, ενώ ο πίνακας X_2 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εκτός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του X. Επομένως:

$$X_1=\begin{bmatrix}43\\ 37\\ 35\end{bmatrix},\qquad X_2=\begin{bmatrix}38\\ 35\\ 31\end{bmatrix}.$$

γ) Έχουμε

$$\Delta=\begin{bmatrix}13 & 2 & 0\\ 10 & 2 & 3\\ 8 & 4 & 3\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}11 & 1 & 3\\ 9 & 2 & 4\\ 6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

και ο πίνακας που δίνει τις συνολικές (εντός και εκτός έδρας) έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας θα είναι ο:

$$\varDelta+E=\begin{bmatrix}13&2&0\\10&2&3\\8&4&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11&1&3\\9&2&4\\6&4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13+11&2+1&0+3\\10+9&2+2&3+4\\8+6&4+4&3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&3&3\\19&4&7\\14&8&8\end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.2.

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}0&3&-4\\2&-2&5\\4&1&-1\end{bmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα X, για τον οποίο ισχύει $5X-I_3=2X-3A$. (Μια ισότητα μεταξύ πινάκων που περιέχει έναν άγνωστο πίνακα, όπως η παραπάνω, ονομάζεται ***εξίσωση με πίνακες***. Η διαδικασία που ακολουθείται με στόχο να βρεθεί ο πίνακας X ονομάζεται επίλυση της εξίσωσης).

Λύση.

Αφού οι πράξεις των πινάκων που γνωρίσαμε (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός με αριθμό) έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με τις πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση με τον ίδιο τρόπο που λύνουμε τις συνήθεις εξισώσεις με έναν άγνωστο. Έτσι παίρνουμε διαδοχικά

$$5X-I_3=2X-3A\Leftrightarrow 5X-2X=I_3-3A\Leftrightarrow 3X=I_3-3A\Leftrightarrow X=\frac{1}{3}(I_3-3A)$$

και αντικαθιστώντας τον πίνακα A βρίσκουμε:

$$X=\frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0&3&-4\\2&-2&5\\4&1&-1\end{bmatrix}\right\}=\frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-9&12\\-6&6&-15\\-12&-3&3\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1/3&-3&4\\-2&19/3&-5\\-4&-1&4/3\end{bmatrix}$$

Ασκήσεις.

1.2.1. Δίνονται οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&0\\3&0&3\end{bmatrix},\quad \varGamma=\begin{bmatrix}-2&3&-3\\0&1&2\end{bmatrix},\quad \varDelta=\begin{bmatrix}4&0\\3&-1\\2&5\end{bmatrix}.$$

Για καθένα από τα επόμενα ζεύγη πινάκων να υπολογίσετε το άθροισμα και τη διαφορά των πινάκων, εφόσον ορίζονται.

α) A, B β) $A, \varGamma$ γ) $A, \varDelta$ δ) A, B^T ε) $\varGamma, \varDelta^T$ στ) $\varGamma^T, \varDelta$.

1.2.2. Αν

$$A=\begin{bmatrix}4&-3\\1&-2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix},\quad \varGamma=\begin{bmatrix}2&4\\5&-1\end{bmatrix},$$

να βρείτε τους πίνακες $(-A)+(-B)$, $-(A+B)$, $A+(B+\varGamma)$, $(A+B)+\varGamma$, $A-(B-\varGamma)$ και τέλος $A-B+\Gamma$. Τι παρατηρείτε;

1.2.3. Αν

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τους πίνακες $-3B,\ \frac{1}{5}A,\ A+2\Gamma,\ 2B-\Gamma,\ \frac{1}{4}(2\Gamma-3A)$.

1.2.4. Να υπολογίσετε τον πίνακα X, για τον οποίο ισχύει $5X-2A = 6B + 3X$, όπου

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -2 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}.$$

1.2.5. Να υπολογίσετε τους πίνακες X, Y, για τους οποίους ισχύει:

$$2X + 3Y = A-4I_4 \quad \text{και} \quad 3X + 2Y = 3I_4 + A$$

όπου $A = [a_{ij}]$ με $a_{ij} = |i-j|,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ και $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

1.3 Γινόμενο πινάκων.

Ας επανέλθουμε στο αρχικό παράδειγμα της παραγράφου 1.1. Σύμφωνα με αυτό, ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}8 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

δίνει τον αριθμό επιβατών (σε χιλιάδες) που μετακινήθηκαν προς τρία ελληνικά νησιά α, β, γ, μέσω τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά τον μήνα Ιούνιο ενός συγκεκριμένου έτους. Ας υποθέσουμε ότι ο Ελληνικός Οργανισμός Τουρισμού, για διαφημιστικούς λόγους έκανε διανομή ενός δώρου και ενός φυλλαδίου σε κάθε επιβάτη που ταξίδεψε στα τρία νησιά με τις τέσσερεις εταιρείες τον μήνα Ιούνιο. Τα δώρα και τα φυλλάδια που διανεμήθηκαν είχαν διαφορετικά κόστη για κάθε νησί και πιο συγκεκριμένα:

1) Κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί α κόστισε 5 €, κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί β κόστισε 6 € και κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί γ κόστισε 8 €.

2) Κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί α κόστισε 2 €, κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί β κόστισε 1 € και κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί γ κόστισε 3 €.

Ο επόμενος πίνακας, μας δίνει το κόστος του δώρου και του φυλλαδίου ανά νησί (στην πρώτη στήλη έχει καταχωρηθεί το κόστος των δώρων, ενώ στη δεύτερη το κόστος των φυλλαδίων):

$$B=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 6 & 1\\ 8 & 3\end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των ***δώρων*** στα άτομα που ταξίδεψαν με την ***$1^η$ εταιρεία***, θα πρέπει να εκτελέσουμε τις πράξεις:

αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί α μέσω της $1^{ης}$ εταιρείας	$\cdot$	κόστος δώρου που δόθηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί α μέσω της $1^{ης}$ εταιρείας	$+$	αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί β μέσω της $1^{ης}$ εταιρείας	$+$
$+$	κόστος δώρου που δόθηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί β μέσω της $1^{ης}$ εταιρείας	$+$	αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί γ μέσω της $1^{ης}$ εταιρείας	$\cdot$	κόστος δώρου που δόθηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί γ μέσω της $1^{ης}$ εταιρείας

Έτσι τα έξοδα αυτής της κατηγορίας (σε χιλιάδες €) θα δίνονται από την έκφραση

$$8 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 118$$

η οποία προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα.

Αντίστοιχα, αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2ης στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα θα λάβουμε

$$8 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 39$$

το οποίο μας δίνει τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των ***φυλλαδίων*** στα άτομα που ταξίδεψαν με την ***$1^η$ εταιρεία.***

Παρόμοιες πράξεις οι οποίες χρησιμοποιούν τη δεύτερη, την τρίτη ή την τέταρτη γραμμή του πίνακα A αντί της πρώτης θα μας δώσουν τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των ***δώρων*** (όταν χρησιμοποιηθεί η πρώτη γραμμή του πίνακα B) και των ***φυλλαδίων*** (όταν χρησιμοποιηθεί η δεύτερη γραμμή του πίνακα B) στα άτομα που ταξίδεψαν με την **$2^η$**, **$3^η$** ή την **$4^η$** ***εταιρεία*** αντίστοιχα. Έτσι βρίσκουμε ότι τα έξοδα του ΕΟΤ ήταν, σε χιλιάδες ευρώ:

1) Για τους επιβάτες της $1^{ης}$ εταιρείας: **118** (για τα δώρα), **39** (για τα φυλλάδια).
2) Για τους επιβάτες της $2^{ης}$ εταιρείας: **70** (για τα δώρα), **39** (για τα φυλλάδια).
3) Για τους επιβάτες της $3^{ης}$ εταιρείας: **51** (για τα δώρα), **17** (για τα φυλλάδια).
4) Για τους επιβάτες της $4^{ης}$ εταιρείας: **24** (για τα δώρα), **8** (για τα φυλλάδια).

Όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

Κόστος / ***Εταιρεία***	***Δώρων***	***Φυλλαδίων***
1η	118	39
2η	70	22
3η	51	17
4η	24	8

και έτσι φτάνουμε στον επόμενο πίνακα, ο οποίος μας δίνει το διαφημιστικό κόστος για κάθε εταιρεία ανά δώρο και φυλλάδιο

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 118 & 39 \\ 70 & 22 \\ 51 & 17 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας Γ ονομάζεται ***γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β*** και συμβολίζεται με $A \cdot B$ ή απλώς AB. Είναι φανερό ότι το στοιχείο γ_{11} του πίνακα Γ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα, το γ_{12} αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2ης στήλης του B και προσθέσουμε τα γινόμενα κ.ο.κ.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω περιγράφεται στη γενική περίπτωση από το επόμενο πλαίσιο.

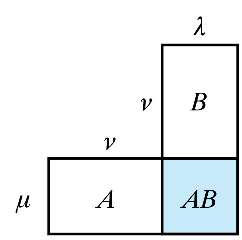
Αν $A = [\alpha_{ij}]_{\mu\times\nu}$ και $B = [\beta_{ij}]_{\nu\times\lambda}$, τότε ορίζουμε ως ***γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β***, και το συμβολίζουμε με AB, τον πίνακα τύπου $\mu\times\lambda$, του οποίου το στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της i γραμμής του A με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της j στήλης του B. Επομένως:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \dots + \alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}.$$

Η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\ \text{γραμμή} \longrightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j\ \text{στήλη} & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & \beta_{1j} & \cdots \\ \cdots & \beta_{2j} & \cdots \\ \cdots & \beta_{3j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \beta_{\nu j} & \cdots \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \gamma_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι για να μπορούν να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα $\Gamma = AB$ με τον τύπο που αναφέραμε προηγουμένως, θα πρέπει ο αριθμός των στηλών του πίνακα Α να είναι ίδιος με τον αριθμό των γραμμών του Β (σχ. 1.1).



Σχ. 1.1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τα γινόμενα AE, EA και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τον πίνακα A.

Λύση.

Έχουμε

$$AE=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & \gamma\end{bmatrix},\qquad EA=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι όταν ο πίνακας E πολλαπλασιάζει από τα δεξιά τον A, του αντιμεταθέτει τις στήλες, ενώ όταν πολλαπλασιάζει από τα αριστερά τον A, του αντιμεταθέτει τις γραμμές. Ο πίνακας E προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_2 με εναλλαγή των δύο γραμμών του (ή των δύο στηλών του), και ονομάζεται ***μεταθετικός πίνακας***.

Αν k, k' είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και A, B, Γ τρεις πίνακες (για τους οποίους ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω), τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$\boldsymbol{\Pi_1}$. $(kA)(k'B)=(kk')(AB)$

$\boldsymbol{\Pi_2}$. $A(B\Gamma)=(AB)\Gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

$\boldsymbol{\Pi_3}$. $A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma$, $(B+\Gamma)A=BA+\Gamma A$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$\boldsymbol{\Pi_4}$. $AI_\nu=I_\mu A=A$

Το γινόμενο $A(B\Gamma)$ ή, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας το $(AB)\Gamma$, θα συμβολίζεται με $AB\Gamma$. Αν A, B, Γ, Δ είναι τέσσερεις πίνακες, το γινόμενο $(A(B\Gamma))\Delta$, το οποίο με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα θα είναι ίσο με καθένα από τα γινόμενα $((AB)\Gamma)\Delta$, $(AB)(\Gamma\Delta)$, $A(B(\Gamma\Delta))$, $A((B\Gamma)\Delta)$, ονομάζεται γινόμενο των πινάκων A, B, Γ, Δ και συμβολίζεται με $AB\Gamma\Delta$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο $k\geq 3$ πινάκων $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_k$, το οποίο θα συμβολίσουμε με $A_1A_2A_3\cdots A_k$. Ειδικά αν $A_1=A_2=A_3=\cdots=A_k=A$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, το γινόμενο $A_1A_2A_3\cdots A_k=AAA\cdots A$ θα συμβολίζεται με τη μορφή δύναμης ως A^k. Σε αντιστοιχία με την πρώτη και τη μηδενική δύναμη ενός πραγματικού αριθμού ορίζουμε

$$A^1=A,\quad A^0=I.$$

Είναι προφανές ότι: $I^k=I$ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k.

Αν k, r είναι δύο μη αρνητικοί ακέραιοι, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

$\boldsymbol{\Pi_5}$. $A^kA^r=A^{k+r}$ $\quad$ $\boldsymbol{\Pi_6}$. $(A^k)^r=A^{kr}$ $\quad$ $\boldsymbol{\Pi_7}$. $(\lambda A)^k=\lambda^kA^k$, $\lambda\in\mathrm{R}$.

Για τον ανάστροφο του γινομένου δύο πινάκων A, B ισχύει το εξής: $\boldsymbol{\Pi_8}$. $(AB)^T=B^TA^T$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών όπου ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα $\alpha\beta=\beta\alpha$ για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β, δεν συμβαίνει το ίδιο για οποιουσδήποτε πίνακες A, B. Μάλιστα, αν A, B είναι δύο πίνακες για τους οποίους ορίζεται το γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B, τότε για το γινόμενο του πίνακα B με τον πίνακα A μπορεί να εμφανιστεί οποιαδήποτε από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) Το AB μπορεί να μην ορίζεται.

β) Το AB μπορεί να ορίζεται, αλλά να έχει διαφορετικές διαστάσεις από το BA.

γ) Το AB μπορεί να ορίζεται και να έχει τις ίδιες διαστάσεις με το BA, αλλά να μην είναι ίσο με αυτό, δηλαδή ισχύει $AB\neq BA$.

δ) Το AB μπορεί να ορίζεται, να έχει τις ίδιες διαστάσεις με το BA και να ισχύει $AB=BA$.

Γενικά λοιπόν δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο γινόμενο δύο πινάκων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ***μην ισχύουν*** κάποιες από τις ταυτότητες που γνωρίζουμε για τους πραγματικούς αριθμούς.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή αναφέρουμε ότι:

α) Αν A είναι ένας πίνακας $\mu \times \nu$ και $\mathbf{O}$ ο μηδενικός πίνακας $\nu \times \lambda$, τότε το γινόμενο $A\mathbf{O}$ δίνει τον μηδενικό πίνακα $\mu \times \lambda$.

β) Η γνωστή ιδιότητα του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών «αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$» ***δεν ισχύει*** για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού π.χ. για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ισχύει

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

χωρίς ωστόσο να είναι $A = \mathbf{O}$ ή $B = \mathbf{O}$. Επομένως, αν το γινόμενο AB δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας (δηλ. αν $AB = \mathbf{O}$), δεν είναι απαραίτητο κάποιος από τους πίνακες A, B να είναι μηδενικός ή αλλιώς μπορεί ένα γινόμενο πινάκων να ισούται με τον μηδενικό πίνακα, χωρίς κανένας από αυτούς να είναι μηδενικός. Κλείνοντας την ενότητα αυτή αναφέρουμε ότι η n-οστή δύναμη (n θετικός ακέραιος) ενός διαγώνιου πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

είναι επίσης διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις n-οστές δυνάμεις των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα, δηλαδή

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}^n \end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.2.

Αν A, B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες τάξης ν και I ο μοναδιαίος πίνακας της ίδιας τάξης, να υπολογίσετε τις δυνάμεις $(A + B)^2$, $(A + B)^3$. Στη συνέχεια να βρείτε τη μορφή που θα λάβουν οι τύποι που προέκυψαν, στην περίπτωση που ισχύει $AB = BA$. Ως εφαρμογή των προηγούμενων τύπων να υπολογίσετε τις δυνάμεις $(A + I)^2$, $(A + I)^3$.

Λύση.

Κάνοντας χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε διαδοχικά:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^2 + BA + AB + B^2$$

$$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B) =$$

$$= A^3 + A^2B + BA^2 + BAB + ABA + AB^2 + B^2A + B^3 .$$

Δεδομένου ότι για τους πίνακες δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα (δηλ. δεν γνωρίζουμε αν αληθεύει ότι $AB=BA$), οι τύποι που βρέθηκαν δεν επιδέχονται άλλες απλοποιήσεις.

Στην περίπτωση που ισχύει $AB=BA$, ο πρώτος από τους δύο τύπους παίρνει τη μορφή

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

δηλαδή προκύπτει μια έκφραση αντίστοιχη με τον γνωστό τύπο του τετραγώνου του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών.

Όσον αφορά στον δεύτερο τύπο, αφού τώρα ισχύουν οι σχέσεις

$$BA^2 = (BA)A = (AB)A = A(BA) = A(AB) = (AA)B = A^2B,$$

$$BAB = (BA)B = (AB)B = A(BB) = AB^2$$

$$ABA = A(BA) = A(AB) = (AA)B = A^2B$$

$$B^2A = (BA)A = (AB)A = A(BA) = A(AB) = (AA)B = A^2B$$

παίρνουμε

$$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + A^2B + AB^2 + A^2B + AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

δηλαδή προκύπτει μια έκφραση αντίστοιχη με τον γνωστό τύπο του κύβου του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών.

Για τις ποσότητες $(A+I)^2$, $(A+I)^3$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τελευταίους δύο τύπους που βρήκαμε, αφού $AI = IA = A$. Έτσι παίρνουμε

$$(A+I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A^2 + 2A + I.$$

$$(A+I)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I = A^3 + 3A^2 + 3A + I.$$

Ασκήσεις.

1.3.1. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

α) Να εξετάσετε ποια από τα γινόμενα πινάκων AB, $A\Gamma$, BA, ΓA μπορούν να οριστούν.
β) Να εξετάσετε αν οι πίνακες AB, $A\Gamma$ είναι ίσοι.
γ) Τι παρατηρείτε για το γινόμενο $A(B-\Gamma)$;

1.3.2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε τους επόμενους πίνακες: $AB + 2B\Gamma + 3\Gamma A$, $3A^2 - 2B\Gamma$, $AB\Gamma$, $2B\Gamma - 3A$

1.3.3. Αν $A = [x \;\; y \;\; z]$, $B = [\alpha \;\; \beta \;\; \gamma]^T$, να δείξετε ότι $AB=BA$. Πώς θα μπορούσατε να εκφράσετε με πράξεις μεταξύ πινάκων το άθροισμα τετραγώνων $x^2 + y^2 + z^2$;

1.3.4. Αν $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ όπου $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ και $y \neq 0$, να δείξετε ότι η μόνη περίπτωση για την οποία ισχύει $AB = BA$ είναι όταν $a = 1$.

1.3.5. Αν $A=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, να δείξετε ότι ο πίνακας A^2+5A εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα τάξης 2.

1.4 Αντιστρέψιμοι πίνακες.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a με $a\neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφός του, που συμβολίζεται με $\frac{1}{a}$ ή a^{-1}, για τον οποίο ισχύει $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. Είναι λογικό λοιπόν να θέσουμε το επόμενο ερώτημα: *«Αν δοθεί ένας πίνακας Α, μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα Β, τέτοιον ώστε να ισχύει ΑΒ=ΒΑ=Ι;».*
Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι κάτι τέτοιο δεν είναι πάντοτε εφικτό.

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης ν. Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B τάξης ν, τέτοιος ώστε να ισχύει $AB=BA=I$, τότε ο A ονομάζεται ***αντιστρέψιμος πίνακας*** και ο B ***αντίστροφος*** του A.

Αν ένας πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αποδεικνύεται ότι αυτός είναι μοναδικός. Τον αντίστροφο του πίνακα A, όταν υπάρχει, θα τον συμβολίζουμε με A^{-1}. Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό έχουμε:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, τότε έχουμε

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2 \quad \text{και} \quad BA=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2.$$

Άρα, ο B είναι αντίστροφος του A.
Από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα είναι φανερό ότι αν ο B είναι αντίστροφος του A, τότε και ο A θα είναι αντίστροφος του B. Για τον λόγο αυτόν πολλές φορές θα λέμε ότι οι πίνακες A και B είναι αντίστροφοι.
Όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A, δεν είναι απαραίτητο να ελέγξουμε και τις δύο σχέσεις $AB=I$ και $BA=I$, αφού αν για δύο τετραγωνικούς πίνακες A, B αληθεύει μία από τις δύο ισότητες, τότε θα αληθεύει και η άλλη.
Όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, ισχύει η επόμενη πρόταση, η οποία θα μας φανεί πολύ χρήσιμη σε επόμενη παράγραφο.

Αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και B, X είναι δύο άλλοι πίνακες για τους οποίους έχουν νόημα οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B \text{ και } XA=B \Leftrightarrow X=BA^{-1}. \qquad (1.4.1)$$

Πράγματι:
α) Αν $AX=B$, τότε $A^{-1}B=A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=IX=X$ και αντίστροφα.
β) Αν $X=A^{-1}B$, τότε $AX=A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=IB=B$.
Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις.

Στην προηγούμενη παράγραφο διαπιστώσαμε ότι, αν το γινόμενο AB δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας (δηλ. αν $AB=\mathbf{O}$), δεν είναι απαραίτητο κάποιος από τους πίνακες A, B να είναι μηδενικός.

Στην περίπτωση όμως που ισχύει $AB=\mathbf{O}$ και ο ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός. Πράγματι, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε θα έχουμε:

$$AB=\mathbf{O} \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{O} \Rightarrow IB=\mathbf{O} \Rightarrow B=\mathbf{O}.$$

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε πότε αντιστρέφεται ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης 2 και θα δώσουμε έναν απλό τύπο για τον υπολογισμό του αντιστρόφου του.

Έστω λοιπόν $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης 2. Και ας αναζητήσουμε έναν πίνακα $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $AX=I$ ή ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha x+\beta z & \alpha y+\beta\omega \\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta\omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι οι αριθμοί x, y, z, ω ικανοποιούν τα συστήματα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta z=1 \\ \gamma x+\delta z=0 \end{cases} \quad (\Sigma_1) \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \alpha y+\beta\omega=0 \\ \gamma y+\delta\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_2).$$

Έστω $D=\alpha\delta-\beta\gamma$. Ας διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

1) Αν $D\neq 0$, τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το ζεύγος (x, z) με $x=\dfrac{\delta}{D}$ και $z=\dfrac{-\gamma}{D}$, είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ_1), ενώ το ζεύγος (y, ω) με $y=\dfrac{-\beta}{D}$ και $\omega=\dfrac{\alpha}{D}$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ_2). Άρα

$$X=\begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{D} & \dfrac{-\beta}{D} \\ \dfrac{-\gamma}{D} & \dfrac{\alpha}{D} \end{bmatrix} \quad \text{και ο αντίστροφος του } A \text{ θα είναι ο } A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

2) Αν $D=0$, τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο, οπότε ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται. Πράγματι:

α) Αν $\alpha\neq 0$ ή $\beta = 0$ ή $\gamma\neq 0$ ή $\delta\neq 0$, τότε διαπιστώνεται ότι ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο.

β) Αν $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, τότε και τα δύο συστήματα θα είναι αδύνατα.

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, μπορούμε να ισχυριστούμε τα επόμενα:

α) Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν, και μόνο αν, $D=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

β) Ο αντίστροφος του πίνακα $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, όταν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \qquad (1.4.2)$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα που διατυπώνεται παραπάνω, ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ αντιστρέφεται, γιατί $D=1\cdot 5-2\cdot 3=5-6=-1\neq 0$ και ο αντίστροφός του είναι ο

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}.$$

Αντίθετα, ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται, αφού $D=1\cdot 6-2\cdot 3=6-6=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1.

Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες τάξης ν, να αποδείξετε ότι το γινόμενο AB είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας και ότι ισχύει

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Λύση.

Αρκεί να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν οι ισότητες $(AB)(B^{-1}A^{-1})=I_\nu$ και $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I_\nu$. Όμως, κάνοντας επανειλημμένη χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας της πράξης του πολλαπλασιασμού έχουμε:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=((AB)B^{-1})A^{-1}=(A(BB^{-1}))A^{-1}=(AI_\nu)A^{-1}=AA^{-1}=I_\nu,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=((B^{-1}A^{-1})A)B=(B^{-1}(A^{-1}A))B=(B^{-1}I)B=B^{-1}B=I_\nu.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2.

Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις A^2, B^2. Τι παρατηρείται;

β) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A και τον αντίστροφο του πίνακα B.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $AX=B$ και την εξίσωση $BY=A$.

Λύση.

α) Έχουμε

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

και

$$B^2=\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

β) Αφού ισχύει $A^2=B^2=I_3$, μπορούμε να γράψουμε $AA=I_3$ και $BB=I_3$, οπότε τόσο ο A όσο και ο B είναι αντιστρέψιμοι με $A^{-1}=A$ και $B^{-1}=B$. Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος αυτού προκύπτει ότι δεν είναι σωστός ο ισχυρισμός: «Αν για δύο πίνακες ισχύει $A^2=B^2$, τότε θα ισχύει $A=B$ ή $A=-B$»;

γ) Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1}=A$, έχουμε:

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow X=AB=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ -5 & 5 & -4\end{bmatrix}$$

Ομοίως, επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με $B^{-1}=A$, θα έχουμε:

$$BY=A \Leftrightarrow Y=B^{-1}\cdot A \Leftrightarrow Y=BA=\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -4\\ 1 & 0 & 1\\ 5 & -5 & 6\end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις.

1.4.1. Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα, αν υπάρχει, για καθέναν από τους παρακάτω τετραγωνικούς πίνακες τάξης 2.

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}\eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 4 & 2\end{bmatrix}.$$

1.4.2. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}4 & -7\\ -3 & 5\end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των A και B.

β) Να βρείτε τον πίνακα X, για τον οποίο ισχύει $AXA^{-1}=B$.

γ) Να βρείτε τον πίνακα Y, για τον οποίο ισχύει $BYB^{-1}=A$.

1.4.3. Σε καθένα από τα παρακάτω ζεύγη πινάκων A, B να αποδείξετε ότι ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A.

α) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 11\\ 3 & 1 & -7\end{bmatrix}$ β) $A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

1.4.4. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των A και B.

β) Να βρείτε τον πίνακα $(AB)^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο AB.

2

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτο θα γνωρίσουμε την έννοια της ορίζουσας, η οποία συνδέεται άμεσα με τους τετραγωνικούς πίνακες που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών μπορούμε να φτάσουμε σε μια τεχνική με την οποία γίνεται εφικτή η εύρεση του αντίστροφου ενός πίνακα. Επιπλέον, μπορεί κάποιος να αναπτύξει "κομψούς" γενικούς τύπους για τον υπολογισμό των εμβαδών γεωμετρικών σχημάτων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα γνωρίσουμε μια επιπλέον εφαρμογή των οριζουσών στη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

2.1 Η έννοια της ορίζουσας.

Ας θεωρήσουμε τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x_1, x_2

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= \beta_2. \end{aligned} \tag{Σ}$$

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Αν στην συνέχεια χρησιμοποιήσουμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ (πίνακας των συντελεστών των αγνώστων), τον 2×1 πίνακα $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (πίνακας των αγνώστων του συστήματος) και τον 2×1 πίνακα $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ (πίνακας των σταθερών όρων), το αρχικό σύστημα γράφεται στη μορφή

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B. \tag{2.1.1}$$

Για την εύρεση της λύσης του γραμμικού συστήματος, θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση επί α_{22} και τη δεύτερη επί α_{12}, ώστε να πάρουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_{22}x_1 + \alpha_{12}\alpha_{22}x_2 &= \alpha_{22}\beta_1 \\ \alpha_{21}\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}\alpha_{12}x_2 &= \alpha_{12}\beta_2 \end{aligned}$$

και να τις αφαιρέσουμε κατά μέλη, οπότε θα έχουμε:

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})x_1 = \alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2. \tag{2.1.2}$$

Αν θέσουμε

$$D = \alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{21}\,\alpha_{12}, \quad D_{x_1} = \beta_1\,\alpha_{22} - \beta_2\,\alpha_{12}$$

η (2.1.2) γράφεται στην μορφή $x_1 D_{x_1} = D$, και αν $D \neq 0$ ο άγνωστος x_1 θα δίνεται από την έκφραση

$$x_1 = \frac{a_{22}\beta_1 - a_{12}\beta_2}{\alpha_{11}a_{22} - \alpha_{21}a_{12}} = \frac{a_{22}\beta_1 - a_{12}\beta_2}{D} = \frac{D_{x_1}}{D}. \tag{2.1.3}$$

Με ανάλογη διαδικασία μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για τον άγνωστο x_2 ισχύει

$$(\alpha_{11}a_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})x_2 = \alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1, \tag{2.1.4}$$

δηλαδή $x_2 D_{x_2} = D$ όπου $D_{x_2} = \alpha_{11}\,\beta_2 - \alpha_{21}\,\beta_2$. Επομένως, για $D \neq 0$, θα έχουμε

$$x_2 = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}a_{22} - \alpha_{21}a_{12}} = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{D} = \frac{D_{x_2}}{D}. \tag{2.1.5}$$

Ο αριθμός $D = \alpha_{11}\,\alpha_{21} - \alpha_{21}\,\alpha_{22}$ που εμφανίζεται στους παρονομαστές των παραπάνω εκφράσεων, ονομάζεται ***ορίζουσα του πίνακα*** $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ ή ***ορίζουσα 2ης τάξης*** (επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν 2×2 πίνακα) και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$.

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης 2

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε, η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \qquad (2.1.6)$$

Για παράδειγμα:

Αν $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ βρίσκουμε $|A|=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=4(-2)-5(-3)=7$, για τον πίνακα $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παίρνουμε $|I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1-0=1$ και η ορίζουσα του μηδενικού πίνακα $\mathbf{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι $|\mathbf{O}|=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0-0=0$.

Οι εκφράσεις που εμφανίζονται στους αριθμητές των τύπων (2.1.3), (2.1.5) μπορούν επίσης να γραφούν ως ορίζουσες πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψουμε

$$D_{x_1}=\beta_1\alpha 2_2-\beta_2\alpha_{12}=\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_{x_2}=\alpha_{11}\beta_2-\alpha_{21}\beta_1=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

οπότε, αν $D\neq 0$, το σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους, θα έχει ως μοναδική λύση την

$$x_1=\frac{D_{x_1}}{D}=\frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{D_{x_2}}{D}\ \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} \qquad (2.1.7)$$

(οι τύποι αυτοί είναι γνωστοί με την ονομασία ***τύποι του Cramer***).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ορίζουσες D_{x1}, D_{x2} προκύπτουν από την $D=|A|$ αν αντικαταστήσουμε τις στήλες που αντιστοιχούν στους αγνώστους x_1, x_2 με τις στήλες των σταθερών όρων.

Δεδομένου ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τις σχέσεις (2.1.2), (2.1.4), οι οποίες προφανώς γράφονται στη μορφή

$$D\cdot x_1=D_{x1}, \quad D\cdot x_2=D_{x2}$$

εύκολα καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα, που αφορούν στη λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \beta_2 . \end{cases}$ και ας συμβολίσουμε με $D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων.

– Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}. \tag{2.1.8}$$

– Αν $D = 0$ και ισχύει επιπλέον είτε $D_{x_1} \neq 0$ είτε $D_{x_2} \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

– Αν $D = D_{x_1} = D_{x_2} = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, εκτός αν ισχύει

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0 \text{ και } \beta_1 \neq 0 \text{ ή } \beta_2 \neq 0,$$

οπότε θα είναι αδύνατο.

Με τη βοήθεια της ορίζουσας 2ης τάξης θα ορίσουμε την ***ορίζουσα 3ης τάξης***, δηλαδή την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Τότε, η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο:

$$|A| = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση με την οποία υπολογίζεται η $|A|$ και η οποία ονομάζεται ***ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής***, είναι (αλγεβρικό) άθροισμα τριών γινομένων με εναλλασσόμενα πρόσημα. Ο κάθε όρος του (αλγεβρικού) αθροίσματος είναι το γινόμενο του στοιχείου $\alpha_{1j}, j = 1,2,3$ με την ορίζουσα 2ης τάξης που προκύπτει από την $|A|$, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{1j}. Το πρόσημο κάθε τέτοιου όρου είναι ίσο με $(-1)^{1+j}$.

Αν αντικαταστήσουμε τις ορίζουσες 2ης τάξης στο προηγούμενο ανάπτυγμα, θα πάρουμε την έκφραση

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$|A| = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$
$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ο τελευταίος τρόπος γραφής ονομάζεται ***ανάπτυγμα της*** $|A|$ ***ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.***

Ομοίως, διαπιστώνουμε ότι η $|A|$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως εξής:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται ***ανάπτυγμα της*** $|A|$ ***ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης.***

Γενικά, αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του πίνακα A προκύπτει αν θεωρήσουμε τα (αλγεβρικά) αθροίσματα των γινομένων που περιγράψαμε παραπάνω, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης. Τα πρόσημα των όρων του αθροίσματος είναι εναλλασσόμενα και ένας μνημονικός κανόνας περιγράφεται παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

για τον υπολογισμό της ορίζουσας $|A|$, θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα του πίνακα A ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής που περιέχει δύο μηδενικά, οπότε θα παίρναμε:

$$|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-10+2) = -16$$

Γενικά, αν υπάρχουν γραμμές ή στήλες που περιέχουν μηδενικά, ο υπολογισμός της ορίζουσας διευκολύνεται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς αυτές τις γραμμές ή στήλες.

Γράφοντας την έκφραση που βρήκαμε προηγουμένως για την ορίζουσα 3×3 πίνακα A στη μορφή

$$|A| = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{23}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}) =$$
$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{31}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31}\alpha_{22}$$

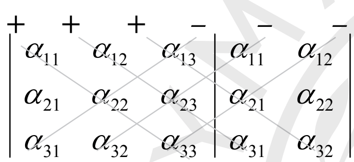
καταλήγουμε στον επόμενο πρακτικό κανόνα υπολογισμού, ο οποίος είναι γνωστός με την ονομασία ***κανόνας του Sarrus.*** Επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα στη δεξιά μεριά του και σχηματίζουμε τρία γινόμενα με «συν» $(+)$, λαμβάνοντας τα γινόμενα που προκύπτουν κινούμενοι από άνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά και τρία γινόμενα με «πλην» $(-)$, λαμβάνοντας τα γινόμενα που προκύπτουν κινούμενοι από κάτω αριστερά προς τα άνω δεξιά (σχ. 2.1).

Είναι φανερό ότι αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε η ορίζουσα του A είναι ίση με μηδέν (αυτό προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του κανόνα του Sarrus ή αν αναπτύξουμε την $|A|$ ως προς τα στοιχεία της γραμμής ή στήλης που έχει τα μηδενικά).

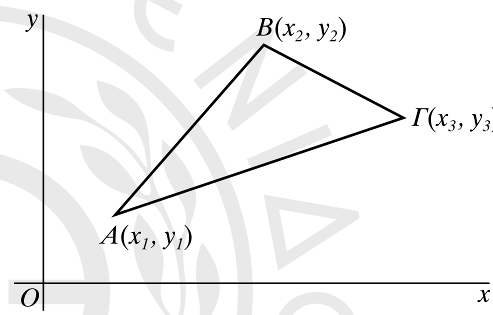
Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή αναφέρουμε ότι η ορίζουσα τρίτης τάξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου όπως δείχνει το επόμενο αποτέλεσμα.

Αν A, B, Γ είναι τρία σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) αντίστοιχα, τότε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 2.2) δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right|.$$



Σχ. 2.1
Κανόνας του Sarrus



Σχ. 2.2

Για παράδειγμα το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ που ορίζεται από τα σημεία $A(4,5)$, $B(5,2)$ και $\Gamma(1,2)$ είναι ίσο με

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\cdot|-12| = 6.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.1.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για $\lambda=2$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με μηδέν.

β) Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα A συναρτήσει του λ.

Λύση.

α) Για $\lambda=2$ αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης έχουμε

$$|A|=\begin{vmatrix}0&2&3\\1&0&1\\2&-2&-1\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}0&1\\-2&-1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&3\\-2&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=$$

$$=-[2\cdot(-1)-3\cdot(-2)]+2[2\cdot 1-0\cdot 3]=-4+4=0.$$

β) Θεωρώντας το ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&3\\1&2-\lambda&1\\2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\-2&1-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\2&1-\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&2-\lambda\\2&-2\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)[(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)-(-2)\cdot 1]-2[1\cdot(1-\lambda)-1\cdot 2]+3[(1\cdot(-2)-2\cdot(1-\lambda)]=$$

$$=-\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-8.$$

Είναι φανερό ότι για $\lambda=2$, η τελευταία ποσότητα μηδενίζεται, όπως αναμένεται και από το αποτέλεσμα που πήραμε στο πρώτο ερώτημα.

Ασκήσεις.

2.1.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων (2.1.8).

α) $\begin{matrix}2x+3y=5\\3x+2y=5\end{matrix}$ β) $\begin{matrix}2x+3y=5\\3x+6y=3\end{matrix}$ γ) $\begin{matrix}2x-5y=1\\-4x+10y=-2\end{matrix}$

2.1.2. Να υπολογίσετε τις επόμενες ορίζουσες αναπτύσσοντας ως προς την κατάλληλη γραμμή ή στήλη έτσι ώστε να χρειαστεί να υπολογίσετε μόνο μία ορίζουσα $2^{ης}$ τάξης.

α) $\begin{vmatrix}1&0&5\\2&2&4\\3&0&1\end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix}1&0&5\\0&2&0\\3&0&4\end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix}9&3&2\\6&2&4\\0&0&1\end{vmatrix}$

2.1.3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\begin{vmatrix}x-1&1&2\\x-1&1&x\\x-1&x&3\end{vmatrix}=0$ β) $\begin{vmatrix}x-2&x+1&1\\x-1&x+1&2\\x-3&x&3\end{vmatrix}=0$

2.1.4. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{bmatrix}$.

α) Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα A συναρτήσει του λ.

β) Να βρεθούν όλα τα λ για τα οποία ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1.$$

2.2 Ανάπτυγμα ορίζουσας ν τάξης.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης 3, η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, για παράδειγμα

$$|A| = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Παρατηρήσαμε επίσης ότι σε καθένα από τα αναπτύγματα της $|A|$, κάθε στοιχείο α_{ij} της αντίστοιχης γραμμής ή στήλης πολλαπλασιάζεται με την ορίζουσα 2ης τάξης του πίνακα M_{ij} που προκύπτει από τον A, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}. Η ορίζουσα αυτή ονομάζεται ***ελάσσων ορίζουσα*** του στοιχείου α_{ij} και συμβολίζεται με $m_{ij} = |M_{ij}|$.

Τέλος, κάθε όρος ενός αναπτύγματος της $|A|$ έχει πρόσημο + ή –, πιο συγκεκριμένα το πρόσημο του $(-1)^{i+j}$. Το γινόμενο $(-1)^{i+j}\, m_{ij}$ ονομάζεται ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** του στοιχείου α_{ij} και θα συμβολίζεται με c_{ij}, δηλαδή

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς, τα παραπάνω αναπτύγματα γράφονται ως εξής

$$|A| = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23}, \ |A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}, \ |A| = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31}. \qquad (2.2.1)$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος, με εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων και σύγκριση των τελικών εκφράσεων, ότι η $|A|$ μπορεί να γραφεί στις ισοδύναμες μορφές:

$$|A| = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33}, \ |A| = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32}, \ |A| = a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33}. \qquad (2.2.2)$$

Οι παραπάνω έξι εκφράσεις μας δίνουν έναν τρόπο για να υπολογίζουμε μία ορίζουσα $3^{ης}$ τάξης (ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα) με τη βοήθεια της ορίζουσας $2^{ης}$ τάξης.

Την ίδια τεχνική θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια, προκειμένου να φτάσουμε στην ορίζουσα ν τάξης, δηλαδή την ορίζουσα ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$. Πιο συγκεκριμένα θα ορίσουμε την ορίζουσα ν τάξης $\nu \geq 3$ με τη βοήθεια της ορίζουσας τάξης $\nu-1$ (μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται ***επαγωγική διαδικασία***).

Έστω λοιπόν ο τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$. Ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $|A|$ ή

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

τον αριθμό $|A| = \alpha_{11}c_{11} + \alpha_{12}c_{12} + \cdots + \alpha_{1\nu}c_{1\nu}$ όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ και M_{ij} είναι ο τετραγωνικός πίνακας τάξης $\nu-1$ που προκύπτει από τον A, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}.

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, η ορίζουσα $m_{ij} = |M_{ij}|$ θα ονομάζεται ***ελάσσων ορίζουσα*** του στοιχείου α_{ij} και το γινόμενο $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ θα ονομάζεται ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** του στοιχείου α_{ij}. Η παράσταση $\alpha_{11}c_{11} + \alpha_{12}c_{12} + \cdots + \alpha_{1\nu}c_{1\nu}$, μέσω της οποίας ορίσαμε την $|A|$, ονομάζεται ***ανάπτυγμα της ορίζουσας*** κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής.

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $\nu\times\nu$ πίνακα δεν έχει σημασία ποια γραμμή ή ποια στήλη θα χρησιμοποιηθεί για το ανάπτυγμά της μέσω οριζουσών τάξης $\nu-1$. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Έστω $|A| = [\alpha_{ij}]$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης ν. Η ορίζουσα του A δίνεται από τους τύπους

$$|A| = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{i\nu}c_{i\nu}, \quad |A| = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{\nu j}c_{\nu j}$$

όπου i και j είναι οποιοσδήποτε ακέραιος από τους 1,2,...,ν. Η πρώτη παράσταση ονομάζεται ***ανάπτυγμα της ορίζουσας*** $|A|$ ως ***προς τα στοιχεία της*** i ***γραμμής***, ενώ η δεύτερη, ***ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της*** j ***στήλης***.

Υπενθυμίζουμε ότι για λόγους ταχύτητας στις πράξεις, καλό θα είναι το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας να βασίζεται στη γραμμή ή τη στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

Επίσης είναι φανερό από τον γενικό ορισμό που δόθηκε παραπάνω ότι, αν τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή μιας οποιασδήποτε στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδενικά, τότε $|A| = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.1.

Να λυθεί η εξίσωση $|A| = 0$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ x-\alpha & 0 & \alpha - x & 0 \\ \alpha & 0 & x & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & x \end{bmatrix}$$

και α είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $|A|$ κατά τα στοιχεία της 2ης γραμμής (η οποία έχει δύο μηδενικά στοιχεία) θα έχουμε

$$|A| = (-1)^{2+1}(x-a)m_{21} + (-1)^{2+3}(a-x)m_{23} = (x-a)(-m_{21} + m_{23})$$

όπου
$$m_{21} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & x \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την m_{21} κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης και την m_{23} κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης, παίρνουμε αντίστοιχα

$$m_{21}=\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a\begin{vmatrix} a & a \\ x & a \end{vmatrix}=a(x^2-a^2)+a(a^2-ax)=ax(x-a),$$

$$m_{23}=\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & x \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}a\begin{vmatrix} a & a \\ a & x \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}a\begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix}=-a(ax-a^2)=-a^2(x-a).$$

Αντικαθιστώντας τα m_{21}, m_{23} στον προηγούμενο τύπο βρίσκουμε

$$|A| = (x-a)[-ax(x-a)-a^2(x-a)] = -a(x-a)^2(x+a)$$

οπότε η εξίσωση πού δόθηκε, γίνεται τελικά $-a(x-a)^2(x+a) \Leftrightarrow x=a$ ή $x=-a$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.2.

Να δειχθεί ότι, η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

Λύση.

Θα παραθέσουμε την απόδειξη για την περίπτωση ενός 3×3 κάτω τριγωνικού πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής (παράδειγμα 2.2.1) παίρνουμε:

$$|A|=\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} \alpha_{21} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

οπότε

$$|A|=\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-0\cdot\alpha_{32})=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η διαδικασία αυτή γενικεύεται για οποιονδήποτε $\nu\times\nu$ κάτω τριγωνικό πίνακα, καθώς επίσης και για άνω τριγωνικούς πίνακες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.3.

Αν ένας τετραγωνικός $\nu\times\nu$ πίνακας έχει τη μορφή:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}+\alpha'_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1}+\alpha'_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

τότε η ορίζουσά του μπορεί να γραφεί ως άθροισμα οριζουσών στην μορφή $|A|=|A_1|+|A_2|$ όπου:

$$A_1=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix},\quad A_2=\begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \alpha_{1\nu} \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \alpha'_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdot & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη.

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης θα έχουμε

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}+\alpha'_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1}+\alpha'_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}=(\alpha_{11}+\alpha'_{11})\,c_{11}+(\alpha_{21}+\alpha'_{21})\,c_{21}+\cdots+(\alpha_{\nu 1}+\alpha'_{\nu 1}\;c_{\nu 1}),\text{ όπου}$$

$c_{i1}=(-1)^{i+1}m_{i1}=(-1)^{i+1}|M_{i1}|$ είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{i1}, $i=1,2,\ldots\nu$.

Επομένως

$$|A|=(\alpha_{11}c_{11}+\alpha_{21}c_{21}+\cdots+\alpha_{\nu 1}c_{\nu 1})+(\alpha'_{11}c_{11}+\alpha'_{21}c_{21}+\cdots+\alpha'_{\nu 1}c_{\nu 1})$$

και η απόδειξη συμπληρώνεται παρατηρώντας ότι ο πρώτος όρος είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας του A_1 ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης, ενώ ο δεύτερος είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας του A_2 ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης και πάλι.

Ασκήσεις.

2.2.1. Να υπολογισθούν οι τιμές των οριζουσών:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \beta & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 10 \\ 0 & \beta & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & a & 4 \\ 8 & 0 & \gamma & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 6 & \beta & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

2.2.2. Να διαπιστωθεί ότι οι τιμές όλων των οριζουσών που ακολουθούν είναι ίσες.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 111 & 111 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 111 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2.3. Χρησιμοποιώντας τεχνική παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε στην απόδειξη του παραδείγματος 2.2.2, να υπολογίσετε την ορίζουσα πινάκων της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}.$$

2.3 Ιδιότητες οριζουσών.

Από όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός πίνακα τάξης ν πραγματοποιείται με διαδοχικό υποβιβασμό σε ορίζουσες υποπινάκων, οι οποίες, κάθε φορά, είναι κατά ένα μέγεθος μικρότερες από την ορίζουσα του προηγούμενου πίνακα. Έτσι καταλήγουμε να έχουμε ορίζουσες υποπινάκων τάξης 2, οπότε χρησιμοποιούμε για κάθε μία από αυτές τον γνωστό μας τύπο υπολογισμού (2.1.6). Η προηγούμενη διαδικασία είναι ιδιαίτερα κοπιαστική, γι' αυτό στην πράξη εφαρμόζουμε συνήθως κατάλληλες ιδιότητες της ορίζουσας πινάκων, καθώς και έτοιμους τύπους της ορίζουσας για συγκεκριμένες κατηγορίες πινάκων, ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί.

Όλα τα αποτελέσματα που ακολουθούν, αναφέρονται σε τετραγωνικούς πίνακες, έστω και αν δεν γίνεται ρητή αναφορά σε αυτό.

Στο παράδειγμα 2.2.2 διαπιστώσαμε ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

> $\mathbf{D}_1$ Αν ένας πίνακας A είναι τριγωνικός άνω ή κάτω, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Για παράδειγμα,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 2 & e^x & \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ 0 & 0 & 3 & x^2-1 & \dfrac{x^4+2}{x^4+2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & xe^{-x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$$

Δύο άμεσες συνέπειες της ιδιότητας D_1 είναι οι επόμενες:

D$_2$ Αν ένας πίνακας A είναι διαγώνιος, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{\nu\nu}\,.$$

D$_3$ Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα τάξης ν είναι ίση με 1, δηλαδή $|I_\nu| = 1$.

Μία ιδιότητα, που προκύπτει εύκολα από τον τρόπο υπολογισμού οριζουσών μέσω αναπτύγματος κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή οποιασδήποτε στήλης είναι η εξής:

D$_4$ Αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

Δίνουμε στη συνέχεια, χωρίς απόδειξη, δύο ακόμη χρήσιμες ιδιότητες των οριζουσών.

D$_5$ Αν δύο γραμμές (ή δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

D$_6$ Αν δύο γραμμές (ή δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ανάλογες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

Στις επόμενες τρεις ιδιότητες περιγράφεται το αποτέλεσμα που έχει στην τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα η εκτέλεση ορισμένων πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών του πίνακα (η απόδειξη παραλείπεται).

D$_7$ Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών (ή δύο στηλών) του πίνακα A, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B| = -|A|$.

D$_8$ Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με πολλαπλασιασμό των στοιχείων μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A επί έναν (μη μηδενικό) αριθμό λ, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B| = \lambda\,|A|$.

D$_9$ Αν B είναι ο πίνακας που παίρνουμε με αντικατάσταση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A με εκείνη που προκύπτει με πρόσθεση σ' αυτήν μιας άλλης γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A πολλαπλασιασμένης επί έναν μη μηδενικό αριθμό, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B| = |A|$.

Δίνουμε στη συνέχεια ορισμένους τύπους που αφορούν στην ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα, την ορίζουσα του γινομένου ενός πίνακα μ' έναν πραγματικό αριθμό και του γινομένου δύο πινάκων.

D$_{10}$ Η ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του A, δηλαδή $|A^T| = |A|$.

D$_{11}$ Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων ίδιου τύπου είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων, δηλαδή $|AB| = |A|\cdot|B|$.

Ειδικά για $B = A$ παίρνουμε $|A^2| = |A|^2$, τύπος ο οποίος ισχύει και στη γενικότερη μορφή

$$|A^k| = |A|^k, \quad = k = 2,3,...$$

D$_{12}$ Για την ορίζουσα του γινομένου ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης ν με έναν πραγματικό αριθμό, ισχύει ο τύπος $|\lambda A| = \lambda^\nu |A|$.

Η ιδιότητα D_{10} προκύπτει εύκολα αν συγκρίνουμε το ανάπτυγμα της $|A|$ κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής με το ανάπτυγμα της $|A^{\mathrm{T}}|$ κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Η απόδειξη της ιδιότητας D_{11} παραλείπεται, ενώ για την D_{12} αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\lambda A = \lambda(IA) = (\lambda I)$Α και εφαρμόζοντας την D_{11} και την D_2 να γράψουμε $|\lambda A| = |\lambda I_\nu| = |A|$ και $|\lambda I_\nu| = \lambda^\nu$ αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες D_{11} και D_3 μπορούμε να γράψουμε ότι: $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I_\nu| = 1$.

Αν ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος τότε θα ισχύει $|A| \neq 0$ και η ορίζουσα του αντιστρόφου του θα δίνεται από τον τύπο

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.1.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 16 \end{bmatrix}$ χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών, ώστε να φτάσετε στην ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα.

Λύση.

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί (–2) και προσθέτοντας στη δεύτερη παίρνουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 7 & 16 \end{vmatrix}$$

η οποία σύμφωνα με την ιδιότητα D_9 θα είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα A, δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 7 & 16 \end{vmatrix}.$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή της τελευταίας ορίζουσας επί (–3) και προσθέτοντας στην τρίτη, παίρνουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Αν τέλος πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη γραμμή της τελευταίας επί (–1) και την προσθέσουμε στην τρίτη θα πάρουμε

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας που βρήκαμε είναι άνω τριγωνικός, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα D_1 η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, δηλαδή $|A| = -10$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.2.

Να διαπιστωθεί ότι οι αριθμοί 0, 1, 2 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης $A(x) = 0$, όπου

$$A(x)=\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 1 & 2\\ x^2-1 & 1 & 3 & 8\\ x^3-1 & 1 & 7 & 26\\ x^4-1 & 1 & 15 & 80\end{vmatrix}.$$

Λύση.

Για $x = 0, x = 1, x = 2$ και $x = 3$, η ορίζουσα λαμβάνει τη μορφή

$$A(0)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 8\\ -1 & 1 & 7 & 26\\ -1 & 1 & 15 & 80\end{vmatrix},\quad A(1)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 8\\ 0 & 1 & 7 & 26\\ 0 & 1 & 15 & 80\end{vmatrix},\quad A(2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 8\\ 7 & 1 & 7 & 26\\ 15 & 1 & 15 & 80\end{vmatrix},\quad A(3)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 8 & 1 & 3 & 8\\ 26 & 1 & 7 & 26\\ 80 & 1 & 15 & 80\end{vmatrix}$$

αντίστοιχα. Στην $A(0)$ η πρώτη και η δεύτερη στήλη έχουν στοιχεία ανάλογα [τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης προκύπτουν από τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης πολλαπλασιάζοντας επί (–1)], οπότε θα ισχύει, με βάση την ιδιότητα D_6 των οριζουσών $A(0)=0$. Επομένως, το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $A(x)=0$.

Τα στοιχεία της πρώτης στήλης της $A(1)$ είναι όλα μηδέν, οπότε θα ισχύει (με βάση την ιδιότητα D_4 των οριζουσών) $A(1)=0$. Επομένως, το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $A(x)=0$. Τέλος, οι ορίζουσες $A(2), A(3)$ έχουν δύο στήλες με ίσα στοιχεία, συνεπώς θα ισχύει (με βάση την ιδιότητα D_5 των οριζουσών) $A(2)=0$ και $A(3)=0$. Επομένως τόσο το 2 όσο και το 3 είναι ρίζες της εξίσωσης $A(x)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.3.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}x & 5 & 5 & 5 & 5\\ 5 & x & 5 & 5 & 5\\ 5 & 5 & x & 5 & 5\\ 5 & 5 & 5 & x & 5\\ 5 & 5 & 5 & 5 & x\end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να καταφύγετε σε ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες). Στη συνέχεια να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|A| = 0$.

Λύση.

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη, τρίτη, τέταρτη και πέμπτη στήλη επί 1 και προσθέτοντας την καθεμία από αυτές στην πρώτη στήλη παίρνουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{bmatrix}$$

ο οποίος, σύμφωνα με την ιδιότητα D_9, θα έχει ορίζουσα ίση με την ορίζουσα του πίνακα A. Επομένως

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = (x+20)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & x & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & x & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & x & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix},$$

όπου για την τελευταία ισότητα εφαρμόσαμε την ιδιότητα D_8.

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την πρώτη γραμμή επί (–1) και προσθέτοντας το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού στη δεύτερη, τρίτη, τέταρτη και πέμπτη γραμμή παίρνουμε

$$|A| = (x+20)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = (x+20)\cdot 1 \cdot (x-5)^4 = (x+20)\,(x-5)^4,$$

αφού ο τελευταίος πίνακας που βρήκαμε είναι άνω τριγωνικός, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα D_1 η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Για να ισχύει $|A| = 0$ θα πρέπει να έχουμε $(x+20)\,(x-5)^4 = 0$ οπότε προκύπτει $x = -20$ ή $x = 5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.4.

Αν A, B είναι δύο σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), αντίστοιχα, τότε η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A, B μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3.1)$$

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής παίρνουμε

$$1\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}-x\cdot\begin{vmatrix}1 & y_1\\ 1 & y_2\end{vmatrix}+y\cdot\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}$$

η οποία γράφεται στη μορφή $\alpha x+\beta y=\gamma$ όπου $\alpha=-\begin{vmatrix}1 & y_1\\ 1 & y_2\end{vmatrix}$, $\beta=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}$, $\gamma=-\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$.

Επομένως, η εξίσωση (2.3.1) αποτελεί πράγματι εξίσωση ευθείας. Επί πλέον, η (2.3.1) ικανοποιείται για $x=x_1, y=y_1$ και για $x=x_2, y=y_2,$ αφού

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}=0$$

(λόγω της ιδιότητας D_5). Επομένως, η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A, B μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\cdot$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (1, 2) και (2, 1) είναι η

$$\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-x\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+y\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x+y=3.$$

Ασκήσεις.

2.3.1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}x-2 & 1 & 1\\ 1 & x-2 & 1\\ 1 & 1 & x-2\end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να καταφύγετε σε ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες).

2.3.2. Να διαπιστώσετε ότι οι ορίζουσες που δόθηκαν στην άσκηση 2.2.1 μπορούν να προκύψουν η μία από την άλλη με κατάλληλη εφαρμογή της ιδιότητας D_7 (περισσότερες από μία φορές).

2.3.3. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση έχει ως ρίζα την $x=-(\alpha+\beta)$.

$$\begin{vmatrix}x-\alpha-\beta & 2x & 2x\\ 2\alpha & \alpha-\beta-x & 2\alpha\\ 2\beta & 2\beta & \beta-x-\alpha\end{vmatrix}=0$$

2.3.4. Να διαπιστώσετε ότι οι αριθμοί 1, 2 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ (x-1)^2 & 1 & 4 \\ (x-1)^3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 .$$

2.3.5. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να βρείτε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & 16 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.3.6. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz .$$

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξης 4, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A.

2.3.7. Αν A, B, Γ είναι τρεις τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξης να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.

$$A^4B^3\Gamma^T,\ (A^T)^3(B^4)^T\Gamma^T,\ A^3\Gamma B^4,\ (3A)B^2(2\Gamma^T),\ 6B^2\Gamma B^T,\ \Gamma^T B^3 A^4,\ B^3\Gamma A^4,\ B^2(6\Gamma)A^T$$

2.3.8. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B, Γ ίδιας τάξης γνωρίζουμε ότι $|A| = 1$, $|B| = 2$, $|\Gamma| = 3$, να υπολογίσετε την ορίζουσα των επομένων πινάκων

$$AB\Gamma,\ A^T B\Gamma,\ A^3B^2\Gamma,\ 3AB^2\Gamma^T,\ 3B^2\Gamma A .$$

2.3.9. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A αν γνωρίζουμε ότι ισχύει:

α) $A^TA=I_\nu$ β) $A^TA^2=I_\nu$ γ) $A^3=I_\nu$

2.4 Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα με χρήση οριζουσών.

Ας θεωρήσουμε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξης 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

και ας συμβολίσουμε με $m_{ij} = |M_{ij}|$ την ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου a_{ij} και με $c_{ji} = (-1)^{i+j} m_{ji}$ $= (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} για $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. ΄Εστω ακόμη C ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Ο ανάστροφος πίνακας C^T, δηλαδή

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}. \qquad (2.4.1)$$

ονομάζεται ***προσαρτημένος πίνακας*** του A. Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί, ότι ισχύει $A \cdot C^T = |A| \cdot I_3$. Η ισότητα αυτή, στην περίπτωση που ισχύει $|A| \neq 0$, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} C^T \right) = I_3, \quad \text{οπότε ο πίνακας} \quad \frac{1}{|A|} C^T$$

θα είναι ο αντίστροφος του πίνακα Α.

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικά και διαπιστώνεται στην επόμενη πρόταση.

΄Εστω A ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης ν, $C = [c_{ij}]_{\nu\times\nu}$, όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} για $i = 1, 2,..., \nu$ και $j = 1, 2,..., \nu$ και C^T ο ανάστροφος του πίνακα C, ο οποίος ονομάζεται ***προσαρτημένος πίνακας*** του A. Τότε:

α) Ισχύει ότι $A \cdot C^T = |A| \cdot I_\nu$.

β) Αν $|A| \neq$ τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T. \qquad (2.4.2)$$

Ας εφαρμόσουμε στη συνέχεια τους τύπους που βρήκαμε για τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα, στην περίπτωση που έχουμε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξης ν=2

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το (β), ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Στην περίπτωση αυτή, ο αντίστροφος του A θα δίνεται από τον τύπο (2.4.2) και είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$C = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Επομένως θα έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Έτσι καταλήγουμε και πάλι στον τύπο (1.4.2), ο οποίος αποδείχτηκε στο κεφάλαιο 1 με εντελώς διαφορετικό τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.1.

Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση.

Υπολογίζουμε αρχικά την ορίζουσα του A, η οποία είναι ίση με

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(12-1) - 1(6-0) = 27 \neq 0\,.$$

Για τις ελάσσονες ορίζουσες $m_{ij} = |M_{ij}|$ των στοιχείων a_{ij} και τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

όπου $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$ βρίσκουμε

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11, \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(6-0) = -6, \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-0) = -3, c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9, c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(3-0) = -3,$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-0) = -3, c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10,$$

Επομένως

$$C = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Τέλος ο αντίστροφος του A, σύμφωνα με τον τύπο (2.4.2) θα είναι ο

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}C^{T}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}11 & -3 & 1\\ -6 & 9 & -3\\ 2 & -3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11/27 & -3/27 & 1/27\\ -6/27 & 9/27 & -3/27\\ 2/27 & -3/27 & 10/27\end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.2.

Να δειχθεί ότι, αν $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33} \neq 0$ ο αντίστροφος του διαγώνιου πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}, \text{ είναι ο } A^{-1}=\begin{bmatrix}1/a_{11} & 0 & 0\\ 0 & 1/a_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1/a_{33}\end{bmatrix}.$$

Λύση.

Σύμφωνα με την ιδιότητα D_2 των οριζουσών, η ορίζουσα του πίνακα A θα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή $|A| = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$.

Αν κάποιος από τους αριθμούς $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ είναι ίσος με μηδέν, θα έχουμε $|A| = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} = 0$, οπότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Αν και οι τρεις αριθμοί $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ είναι διαφορετικοί από το μηδέν, τότε $|A| = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} \neq 0$ και θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα A με χρήση του τύπου (2.4.2). Εναλλακτικά θα μπορούσαμε απλά να παρατηρήσουμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/a_{11} & 0 & 0\\ 0 & 1/a_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1/a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

η οποία δείχνει ότι ο αντίστροφος του A, είναι ο δεύτερος πίνακας του αριστερού μέλους.

Σημειώνεται ότι το αποτέλεσμα που προέκυψε μπορεί εύκολα να γενικευτεί για διαγώνιους πίνακες οποιασδήποτε τάξης. Έτσι, αν $\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{\nu\nu} \neq 0$, ο αντίστροφος του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu}\end{bmatrix} \text{ είναι ο } A^{-1}=\begin{bmatrix}1/a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{\nu\nu}\end{bmatrix}.$$

Στην ειδική περίπτωση $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=\ldots=a_{\nu\nu}=1$ λαμβάνουμε τον αντίστροφο του μοναδιαίου πίνακα για τον οποίο προφανώς ισχύει $I_\nu^{-1}=I_\nu$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.3.

Αν για τους αντιστρέψιμους τετραγωνικούς πίνακες A, B ίδιου τύπου γνωρίζουμε ότι $|A| = 2$, $|B| = 4$, να υπολογιστεί η ορίζουσα των επόμενων πινάκων:

$$A^{-1}B\,(A^{T}B^{T})^{-1}AB^{2}.$$

Λύση.

Κάνοντας χρήση του παραδείγματος 2.4.2 και των ιδιοτήτων D_{10}, D_{11} των οριζουσών, παίρνουμε

$$\left|A^{-1}B\right| = \left|A^{-1}\right|\ |B| = \frac{1}{|A|}\ |B| = \frac{1}{2}\ 4 = 2,$$

$$\left|(A^T B^T)^{-1} AB^2\right| = \left|(A^T B^T)^{-1}\right|\ \left|AB^2\right| = \frac{1}{\left|A^T B^T\right|}\ |A|\ \left|B^2\right| = \frac{|A|\ |B|^2}{\left|A^T\right|\ \left|B^T\right|} = \frac{|A|\ |B|^2}{|A|\ |B|} = |B| = 4.$$

Ασκήσεις.

2.4.1. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Στην περίπτωση που είναι, να υπολογίσετε την ορίζουσα του αντίστροφου πίνακα, χωρίς να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.4.2. Να βρείτε τον αντίστροφο των επόμενων πινάκων, αν υπάρχει

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4.3. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B, Γ ίδιας τάξης γνωρίζουμε ότι $|A| = |B| = |\Gamma| = 2$, να υπολογιστεί η ορίζουσα των επόμενων πινάκων.

$$A^{-1}B\Gamma^T,\ (A^T B^{-1}\Gamma)^{-1}, A^3 B^T \Gamma^{-1},\ A^{-1}B^{-1}\Gamma^{-1}, B^2\Gamma^{-1}A^{-1}.$$

2.4.4. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν, αν γνωρίζουμε ότι ισχύει $A^{-1}A^T = A^2$.

2.4.5. Αν A είναι ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας, να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $A^T A^{-1}$.

3

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

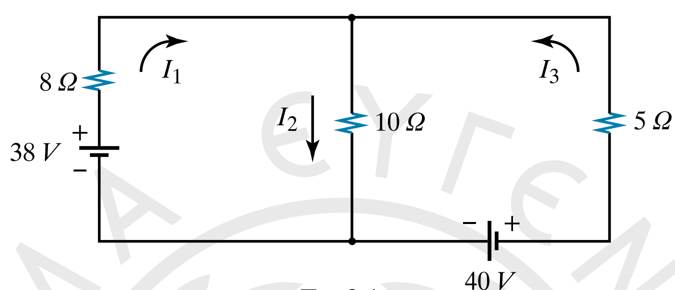
Κατά τη μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων Μηχανικής, Οικονομίας, Ηλεκτρονικής κ.λπ. οδηγούμαστε αρκετά συχνά σε προβλήματα λύσης ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Όμως συνήθως σε τέτοια προβλήματα το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων είναι αρκετά μεγάλο, πράγμα που καθιστά δύσκολη τη λύση τους. Στις περιπτώσεις αυτές η γραφή του συστήματος σε μορφή μιας εξίσωσης πινάκων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού δίνει τη δυνατότητα να αναπτυχθεί ένας συστηματικός τρόπος λύσης με τη χρήση της έννοιας της ορίζουσας, την οποία γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.1 Γραμμικά συστήματα εξισώσεων.

Πολλά προβλήματα Μηχανικής, Οικονομίας, Ηλεκτρονικής κ.λπ. μπορούν να μετασχηματιστούν σε προβλήματα λύσης ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Θα αναφέρουμε αμέσως τώρα δύο τέτοια προβλήματα και στη συνέχεια θα δούμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε στη λύση τους.

Πρόβλημα I.

Θεωρούμε το ηλεκτρικό δίκτυο του σχήματος 3.1 όπου οι αντιστάσεις εκφράζονται σε Ohm (Ω), η ένταση I ρεύματος σε Ampere (A) και η ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής σε Volt (V).



Σχ. 3.1

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Kirchhoff μπορεί να διαπιστώσει κάποιος εύκολα ότι οι εντάσεις I_1, I_2, I_3, ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 8I_1 + 10I_2 &= 38 \\ 10I_2 + 5I_3 &= 40 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Πρόβλημα II.

Ένα ναυπηγείο χρησιμοποιεί 4 διαφορετικά εξαρτήματα πλοίων A, B, Γ, Δ. Τα εξαρτήματα αυτά μπορεί να τα προμηθεύεται το ναυπηγείο μέσω τριών συσκευασιών M_1, M_2, M_3, καθεμιά από τις οποίες περιέχει και τα τέσσερα είδη εξαρτημάτων, σε διαφορετικές ποσότητες την καθεμία. Η συσκευασία M_1 περιέχει 20 εξαρτήματα τύπου A, 40 εξαρτήματα τύπου B, 120 εξαρτήματα τύπου Γ, και 20 εξαρτήματα τύπου Δ. Η συσκευασία M_2 περιέχει 40 εξαρτήματα τύπου A, 60 εξαρτήματα τύπου B, 40 εξαρτήματα τύπου Γ και 60 εξαρτήματα τύπου Δ. Τέλος, η συσκευασία M_3 περιέχει 60 εξαρτήματα τύπου A, 60 εξαρτήματα τύπου B, 40 εξαρτήματα τύπου Γ, και 40 εξαρτήματα τύπου Δ. Αν οι μηνιαίες ανάγκες του ναυπηγείου είναι 400 μονάδες του εξαρτήματος A, 500 μονάδες του εξαρτήματος B, 520 μονάδες του εξαρτήματος Γ και 380 μονάδες του εξαρτήματος Δ, εκείνο που θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι να βρεθεί ποια ποσότητα πρέπει να προμηθευτεί από καθεμία από τις συσκευασίες M_1, M_2, M_3, ώστε να ικανοποιήσει τις μηνιαίες ανάγκες του και συγχρόνως να μην χρειαστεί να γίνει αποθήκευση εξαρτημάτων ή συσκευασιών που περίσσεψαν.

Για να δημιουργήσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για το Πρόβλημα II, ας συμβολίσουμε με x_1, x_2, x_3 το πλήθος των συσκευασιών από τα τρία είδη M_1, M_2, M_3 αντίστοιχα που πρέπει να προμηθευτεί το ναυπηγείο, ώστε να καλύψει τις ανάγκες ενός μήνα.

Στις x_1 συσκευασίες είδους M_1 θα υπάρχουν $20x_1$ εξαρτήματα τύπου A, στις x_2 συσκευασίες είδους M_2 θα υπάρχουν $40x_2$ εξαρτήματα τύπου A και στις x_3 συσκευασίες είδους M_3 θα υπάρχουν $60x_3$ εξαρτήματα τύπου A. Επομένως, το συνολικό πλήθος εξαρτημάτων τύπου A θα είναι:

$$20x_1 + 40x_2 + 60x_3$$

και αφού ο στόχος μας ήταν η προμήθεια 400 μονάδων του εξαρτήματος A, θα πρέπει να ισχύει (δεδομένου ότι θέλουμε να μην περισσέψουν αχρησιμοποίητα εξαρτήματα)

$$20x_1 + 40x_2 + 60x_3 = 400. \tag{3.1.2}$$

Όμοια, αφού ο στόχος μας να συγκεντρώσουμε 500, 520, 380 μονάδες των εξαρτημάτων B, Γ, Δ αντίστοιχα, θα πρέπει να ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned} 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 &= 500 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 &= 520 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 &= 380. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Η εξίσωση (3.1.2), καθώς και καθεμιά από τις εξισώσεις (3.1.3) ονομάζεται γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους.

Γενικά, κάθε εξίσωση της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_\nu x_\nu = \beta$, όπου $a_1, a_2, a_3, ..., a_\nu$, β είναι πραγματικοί αριθμοί και $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu$, άγνωστοι, ονομάζεται ***γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους***.

Αν για τους αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_\nu$ ισχύει $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + ... + a_\nu\lambda_\nu = \beta$, θα λέμε ότι «μία λύση της εξίσωσης είναι η $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = \lambda_3, ..., x_\nu = \lambda_\nu$».

Επανερχόμενοι στο Πρόβλημα ΙΙ, οι άγνωστοι x_1, x_2, x_3, πέραν της εξίσωσης (3.1.2) θα πρέπει να ικανοποιούν και τις εξισώσεις (3.1.3). Μας ενδιαφέρει λοιπόν τα x_1, x_2, x_3 να ικανοποιούν τις 4 εξισώσεις

$$\begin{aligned} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 &= 400 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 &= 500 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 &= 520 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 &= 380. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή συντομότερα ένα γραμμικό σύστημα 4×3. Ομοίως, οι τρεις εξισώσεις που δίνονται στην (3.1.1) αποτελούν γραμμικό σύστημα 3×3 με αγνώστους τα I_1, I_2, I_3.

Γενικά ένα πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους, των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, ονομάζεται ***γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους*** ή απλούστερα ***γραμμικό σύστημα*** $\mu\times\nu$ και έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + ... + \alpha_{\mu\nu}x_\nu &= \beta_\mu . \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Οι αριθμοί $\alpha_{ij}, i = 1,2,3,...\mu$, και $j = 1, 2, 3,...\nu$ ονομάζονται ***συντελεστές των αγνώστων*** ή απλά ***συντελεστές του συστήματος,*** ενώ οι αριθμοί $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\mu$ ονομάζονται ***σταθεροί όροι***. Οι συντελεστές a_{ii} (δηλ. οι $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ κ.τ.λ.) ονομάζονται ***διαγώνιοι συντελεστές*** του συστήματος. Κάθε ν-άδα αριθμών που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις ενός $\mu\times\nu$ συστήματος ονομάζεται ***λύση*** του συστήματος.

Στην περίπτωση που σε μια εξίσωση του συστήματος λείπει ένας ή περισσότεροι από τους αγνώστους, τότε θεωρούμε ότι ο άγνωστος ή οι άγνωστοι έχουν συντελεστή το μηδέν.

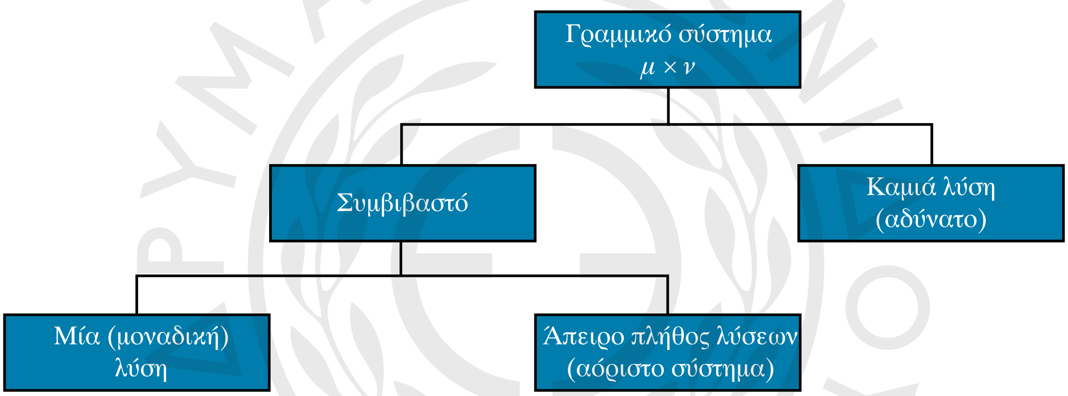
Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις λύσεις ενός συστήματος ονομάζεται ***επίλυση*** του συστήματος. ΄Ενα γραμμικό σύστημα που έχει μία τουλάχιστον λύση ονομάζεται ***συμβιβαστό***, ενώ όταν δεν έχει λύσεις ονομάζεται ***αδύνατο.***

Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις ονομάζονται ***ισοδύναμα.*** Για παράδειγμα, τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad (\Sigma) \qquad\qquad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad (\Sigma')$$

είναι ισοδύναμα, αφού και τα δύο έχουν μοναδική λύση τη $x = 1, y = 2$ δυάδα (1,2). Συμβολικά τότε θα γράφουμε $(\Sigma) \sim (\Sigma')$.

Αποδεικνύεται ότι ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα έχει είτε μία μοναδική λύση, είτε άπειρες λύσεις. Δεν μπορεί δηλαδή να έχει δύο, τρεις ή οποιοδήποτε άλλο πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Συνοπτικά έχουμε:



Αν στο γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$ οι σταθεροί όροι $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\mu$ είναι όλοι μηδέν, τότε το σύστημα ονομάζεται ***ομογενές.***

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί σύντομα ως μία ισότητα με τη βοήθεια της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων. Πράγματι, επιστρέφοντας στο Παράδειγμα ΙΙ, μπορούμε να παρουσιάσουμε τις τέσσερεις εξισώσεις του συστήματος (3.1.4) ως ισότητα δύο πινάκων–στηλών με τον εξής τρόπο:

$$\begin{bmatrix} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix} \qquad (3.1.6)$$

Ορίζοντας τους πίνακες,

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}$$

η (3.1.6) γράφεται στη μορφή $AX = B$.

Γενικότερα, το γραμμικό σύστημα (3.1.1) των μ εξισώσεων με ν αγνώστους γράφεται

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}. \tag{3.1.7}$$

ή ισοδύναμα $AX=B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

είναι ο ***πίνακας των συντελεστών των αγνώστων*** (ή απλά πίνακας των συντελεστών), ο ***πίνακας*** (στήλη) ***των αγνώστων*** και ο ***πίνακας*** (στήλη) ***των σταθερών όρων*** αντίστοιχα.

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η εύρεση γενικών μεθόδων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, δηλαδή ο προσδιορισμός του άγνωστου πίνακα X, δεδομένου του πίνακα A και του πίνακα B.

Για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε μία απλή μέθοδο, τη μέθοδο της αντικατάστασης, ενώ στην επόμενη παράγραφο θα αναλύσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Τέλος στην παράγραφο 3.3 θα περιγράψουμε τρεις ακόμη μεθόδους, τη μέθοδο του Cramer, τη μέθοδο της αντιστροφής πίνακα και τη μέθοδο της τριγωνικής παραγοντοποίησης, οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε συστήματα, όπου ο A είναι τετραγωνικός πίνακας (δηλ. σε συστήματα με ίσο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων).

Σημειώνουμε ότι η επιλογή της μεθόδου που είναι προσφορότερη κάθε φορά εξαρτάται από το μέγεθος και τη μορφή του κάθε συστήματος.

Η ***μέθοδος της απλής αντικατάστασης*** είναι η απλούστερη διαθέσιμη μέθοδος και μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά μόνο για συστήματα που είτε έχουν μικρό αριθμό εξισώσεων είτε είναι ειδικής μορφής όπως π.χ. τα συστήματα των οποίων ο πίνακας των συντελεστών τους είναι άνω ή κάτω τριγωνικός. Πρώτο βήμα είναι η επίλυση κάποιας από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και η αντικατάσταση του αγνώστου αυτού στις άλλες εξισώσεις. Προκύπτει έτσι ένα νέο σύστημα, μικρότερο από το αρχικό κατά μία εξίσωση και έναν άγνωστο. Στο νέο σύστημα επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία (επίλυση κάποιας από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και αντικατάσταση του αγνώστου αυτού στις άλλες εξισώσεις) μέχρις ότου να φτάσουμε σε:

α) ***Μία εξίσωση με έναν άγνωστο***[1]. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε αρχικά τον άγνωστο λύνοντας την εξίσωση αυτή και ακολουθούμε αντίστροφα βήματα, αντικαθιστώντας κάθε φορά το αποτέλεσμα στις ενδιάμεσες εξισώσεις, ώστε να υπολογίσουμε και τους υπόλοιπους αγνώστους.

β) ***Πολλές εξισώσεις με έναν άγνωστο.*** Στην περίπτωση αυτή λύνουμε τη μία από αυτές και αντικαθιστούμε τη λύση στις υπόλοιπες. Αν όλες επαληθεύονται, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση (που βρίσκεται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση). Αν κάποια από τις υπόλοιπες δεν επαληθεύεται, το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) ***Μία ή περισσότερες εξισώσεις με πλήθος αγνώστων που υπερβαίνουν το πλήθος των εξισώσεων.*** Τότε ορισμένοι από τους αγνώστους μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα και να εκφραστούν οι υπόλοιποι άγνωστοι μέσω αυτών. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο σύστημα).

Σημειώνουμε επίσης ότι, σε περίπτωση που κατά τη διαδικασία των αντικαταστάσεων προκύψει

[1] Μερικές φορές χρησιμοποιείται και ο όρος «εξίσωση ως προς έναν άγνωστο».

προφανής ισότητα (ταυτότητα), τότε την αγνοούμε και συνεχίζουμε με τις υπόλοιπες, ενώ αν προκύψει μία ισότητα που δεν ισχύει, τότε το αρχικό σύστημα θα είναι αδύνατο.

Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα (3.1.1), με τη μέθοδο της αντικατάστασης θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να λύσουμε ως προς I_1 και I_3 τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνοντας

$$I_1 = \frac{38-10I_2}{8}, \qquad I_3 = \frac{40-10I_2}{5}$$

και αντικαθιστώντας τις τελευταίες στην πρώτη να πάρουμε την επόμενη εξίσωση με έναν άγνωστο

$$\frac{38-10I_2}{8} - I_2 + \frac{40-10I_2}{5} = 0.$$

Λύνοντας προκύπτει ότι $I_2=3$ και αντικαθιστώντας στις προηγούμενες παίρνουμε

$$I_1 = \frac{38-10\cdot 3}{8} = 1, \qquad I_3 = \frac{40-10\cdot 3}{5} = 2.$$

Άρα η λύση του συστήματος θα είναι η $I_1=1, I_2=3, I_3=2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.1.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικατάστασης.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 6x_3 &= 12. \end{aligned}$$

Λύση.

Από την τρίτη εξίσωση προκύπτει $x_3 = 12/6 = 2$. Ανταkαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση την τιμή που βρήκαμε για το x_3 προκύπτει

$$-2x_2 + 3\cdot 2 = 8 \Leftrightarrow -2x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τα $x_2 = -1, x_3 = 2$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$2x_1 - (-1) + 2 = 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2$.

Σημειώνουμε ότι, η διαδικασία που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσουμε οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα του οποίου ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων είναι άνω ή κάτω τριγωνικός (τέτοια συστήματα λέγονται ***τριγωνικά***).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικατάστασης.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Λύση.

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x_1, βρίσκουμε $x_1 = x_2 - x_4 + 3$, και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση (η τρίτη δεν περιέχει τον άγνωστο x_1) παίρνουμε το επόμενο σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_4 + 3) + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{aligned} 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Ομοίως, λύνοντας την πρώτη εξίσωση του νέου συστήματος ως προς x_3, βρίσκουμε $x_3 = 3x_2 - 2x_4 + 4$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε $3x_2 + (3x_2 - 2x_4 + 4) - x_4 = 3 \Leftrightarrow 6x_2 - 3x_4 = -1$.

Αφού έχουμε μία μόνο εξίσωση με δύο αγνώστους, μπορούμε να επιλέξουμε έναν από τους αγνώστους αυθαίρετα και να εκφράσουμε τους υπόλοιπους μέσω αυτού. Πράγματι, θέτοντας $x_4 = \lambda$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκουμε

$$x_2 = \frac{3x_4 - 1}{6} = \frac{3\lambda - 1}{6},\; x_3 = 3 \cdot \frac{3\lambda - 1}{6} - 2\lambda + 4 = \frac{21 - 3\lambda}{6},\; x_1 = x_2 - x_4 + 3 = \frac{3\lambda - 1}{6} - \lambda + 3.$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$x_1 = \frac{17 - 3\lambda}{6}, \quad x_2 = \frac{3\lambda - 1}{6}, \quad x_3 = \frac{7 - \lambda}{2}, \quad x_4 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.3.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικατάστασης.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Λύση.

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x_1, βρίσκουμε $x_1 = -x_2 - x_3 + 6$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε το επόμενο σύστημα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} (-x_2 - x_3 + 6) - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ (-x_2 - x_3 + 6) + 5x_2 - 2x_3 &= 1 \\ (-x_2 - x_3 + 6) + 2x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{aligned} -2x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_2 - 3x_3 &= -5 \\ x_2 - 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Ομοίως, λύνοντας την πρώτη εξίσωση του νέου συστήματος ως προς x_3, βρίσκουμε $x_3 = 2x_2 - 1$ και αντικαθιστώντας στις δύο τελευταίες θα πάρουμε

$$\begin{aligned} 4x_2 - 3 \cdot (2x_2 - 1) &= -5 \\ x_2 - 2 \cdot (2x_2 - 1) &= 4 \end{aligned} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{aligned} -2x_2 &= -8 \\ -3x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε τη λύση $x_2 = 4$, η οποία προφανώς δεν επαληθεύει τη δεύτερη. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Ασκήσεις.

3.1.1. Να γράψετε στη μορφή (3.1.5) τα γραμμικά συστήματα που περιγράφουν οι επόμενες ισότητες.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.1.2. Να γράψετε τα επόμενα συστήματα στη μορφή $AX=B$, όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας των αγνώστων και B ο πίνακας των σταθερών όρων.

α) $\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= -9 \\ 3x_1+5x_2+6x_3 &= 1 \\ x_1+2x_2+8x_3 &= -3 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} x+y+z &= 5 \\ x-y+z &= 2 \\ 3x+y+3z &= 12 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} x-3\omega &= 0 \\ x+\omega &= 0 \\ 3x-2\omega &= 0 \\ x-y+\omega-z &= 6 \end{aligned}$

3.1.3. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντικαταστασης.

α) $\begin{aligned} x+y+z &= 5 \\ x-y+z &= 2 \\ 3x+y+3z &= 12 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} x+y+\omega+z &= 10 \\ x+y &= 3 \\ y+\omega &= 5 \\ y+z &= 6 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} x+2y+z &= 7 \\ x+3y+9z &= 13 \\ x-y+z &= 0 \\ x+y+z &= 4 \end{aligned}$ δ) $\begin{aligned} x+y+3z &= 6 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x+y+z &= 4 \\ x+y+2z &= 4 \\ x+y+z &= 3 \end{aligned}$

3.1.4. Μια τριγωνική πλατεία έχει περίμετρο 120 m. Η μεγαλύτερη πλευρά της είναι κατά 40 m μεγαλύτερη από τη μικρότερη, ενώ η τρίτη πλευρά διαφέρει από τη μεγαλύτερη όσο και από τη μικρότερη.

α) Αν συμβολίσουμε με x, y, z τα μήκη των τριών πλευρών της πλατείας, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z.

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

3.2 Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Η διαδικασία επίλυσης συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής συνίσταται στην πρόσθεση σε κάθε εξίσωση κατάλληλων πολλαπλασίων μιας άλλης, ώστε το σύστημα να οδηγηθεί σε απλούστερο ισοδύναμο σύστημα. Συνήθως ξεκινάμε από την πρώτη εξίσωση, την οποία πολλαπλασιάζουμε κατάλληλα και την προσθέτουμε στις επόμενες, ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου σ' αυτές. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, την οποία επίσης πολλαπλασιάζουμε κατάλληλα και την προσθέτουμε στις επόμενες κ.ο.κ.

Ο στόχος είναι να καταλήξουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα, το οποίο μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης, ξεκινώντας από την εξίσωση με τους λιγότερους αγνώστους και πηγαίνοντας προς τα πίσω μέχρι να υπολογιστούν όλοι οι άγνωστοι.

Προκειμένου να παρουσιάσουμε συστηματικότερα την παραπάνω μέθοδο, θα ταξινομήσουμε αρχικά τις ενέργειες που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν σε τρεις διαδικασίες ως εξής:

	Διαδικασία	*Συμβολισμός*
1.	Εναλλαγή της θέσης των εξισώσεων που βρίσκονται στη θέση i και j (εξισώσεις ε_i και ε_j)	$\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$
2.	Αντικατάσταση της εξίσωσης που βρίσκεται στη θέση i (εξίσωση ε_i) με εκείνη που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της με έναν μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$)	$\varepsilon_i \to \lambda\varepsilon_i$
3.	Αντικατάσταση της εξίσωσης που βρίσκεται στη θέση i (εξίσωση ε_i) με εκείνη που προκύπτει αν και στα δύο μέλη της προσθέσουμε τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης που βρίσκεται στη θέση j πολλαπλασιασμένα με έναν μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$).	$\varepsilon_i \to \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j$

Αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε οποιαδήποτε από τις παραπάνω τρεις διαδικασίες, τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ***ισοδύναμο*** με το αρχικό.

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες διαδικασίες για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, προσπαθώντας μέσω αυτών να το μετασχηματίσουμε σε ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό σύστημα, του οποίου η λύση να προκύπτει εύκολα.

Για παράδειγμα ας προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το σύστημα (3.1.4) που προέκυψε από την ανάλυση του Προβλήματος ΙΙ της παραγράφου 3.1.

Κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \to \lambda\varepsilon_i$, διαιρούμε αρχικά όλα τα μέλη όλων των εξισώσεων του συστήματος με τον αριθμό 20, ώστε ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου στην πρώτη εξίσωση να γίνει μονάδα (αυτό δεν είναι υποχρεωτικό, αλλά γίνεται για διευκόλυνση των πράξεων). Έτσι παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 25 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases} \qquad (\Sigma_1)$$

Στη συνέχεια, με εφαρμογή των διαδικασιών

$$\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 + (-2)\,\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-6)\,\varepsilon_1, \quad \varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + (-1)\,\varepsilon_1$$

παίρνουμε διαδοχικά τα συστήματα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19 \end{cases} (\Sigma_2) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19 \end{cases} (\Sigma_3) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases} (\Sigma_4)$$

Στο σύστημα (Σ_4) έχουμε επιτύχει οι συντελεστές του αγνώστου x_1 να μηδενιστούν σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη. Ο επόμενος στόχος είναι να μηδενιστούν οι συντελεστές του αγνώστου x_2 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από τη δεύτερη.

Εφαρμόζοντας τις διαδικασίες $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-10)\cdot\varepsilon_2$ και $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + 1\cdot\varepsilon_2$ παίρνουμε

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ 14x_3 &= 56 \\ x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right. \quad (\Sigma_5) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ 14x_3 &= 56 \\ -4x_3 &= -16 \end{aligned}\right. \quad (\Sigma_6)$$

και φτάσαμε πλέον σ' ένα σύστημα, στο οποίο έχουν μηδενιστεί οι συντελεστές του αγνώστου x_1 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη εξίσωση και όλοι οι συντελεστές του αγνώστου x_2 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από τη δεύτερη.

Τέλος μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία $\varepsilon_5 \to \varepsilon_4 + (\frac{4}{14})\varepsilon_3$, οπότε παίρνουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ 14x_3 &= 56 \\ 0x_3 &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_7)$$

Προφανώς, η τελευταία εξίσωση αποτελεί ταυτότητα (ισχύει πάντοτε), οπότε μπορεί να παραλειφθεί (γενικά, αν κατά την επίλυση ενός συστήματος παρουσιαστεί μια εξίσωση της μορφής: $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_\nu = 0$, τότε η εξίσωση αυτή παραλείπεται).

Επομένως, το σύστημα (Σ_7) είναι ισοδύναμο με το σύστημα των τριών πρώτων εξισώσεων, δηλαδή το

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -x_2 - 3x_3 &= -15 \\ 14x_3 &= 56. \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma_8)$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $x_3 = 4$ και αν αντικαταστήσουμε την τιμή $x_3 = 4$ στη δεύτερη εξίσωση του (Σ_8), μπορούμε να υπολογίσουμε το $x_2 = 3$. Ομοίως θέτοντας $x_2 = 3$ και $x_3 = 4$ στην πρώτη εξίσωση του (Σ_8), βρίσκουμε $x_1 = 2$.

Επειδή το σύστημα (Σ_8) είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα (3.1.4), συμπεραίνουμε ότι το σύστημα (3.1.4) έχει μοναδική λύση την $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ και $x_3 = 4$.

Η διαδικασία επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος με την προηγούμενη μέθοδο, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία ***μέθοδος απαλοιφής του Gauss***, περιγράφεται αλγοριθμικά με τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1: Φροντίζουμε, κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$, αν υπάρχει ανάγκη, ο συντελεστής του αγνώστου x_1 στην πρώτη εξίσωση να γίνει μη μηδενικός. Αυτός ο συντελεστής ονομάζεται *στοιχείο-οδηγός* ή απλώς ***οδηγός***[2].

Βήμα 2: Απαλείφουμε τον άγνωστο x_1 από τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_i \to \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j$.

Βήμα 3: Αγνοώντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος και τον πρώτο άγνωστο, επαναλαμβάνουμε τα Βήματα 1 και 2 στις υπόλοιπες $\mu - 1$ εξισώσεις και $\nu - 1$ αγνώστους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται ανάλογα και στις $\mu - 2$, $\mu - 3$, $\mu - 4$, ..., 2 εξισώσεις, δηλαδή ώσπου

[2] Σε περίπτωση που δεν μπορούμε να εντοπίσουμε οδηγό για κάποιον άγνωστο, το σύστημα θα είναι είτε αόριστο, είτε αδύνατο.

να μηδενιστούν όλοι οι συντελεστές των αγνώστων που είναι κάτω από τους διαγώνιους συντελεστές.

Ο αλγόριθμός της μεθόδου της απαλοιφής εφαρμόζεται στα προγράμματα των υπολογιστών για τη λύση μεγάλων γραφικών συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.1.

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$ με τη μέθοδο της απαλοιφής (το ίδιο σύστημα, λύθηκε στο παράδειγμα 3.1.2 με τη μέθοδο της αντικατάστασης).

Λύση.

Με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 + (-2)\,\varepsilon_1$, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Για να διευκολυνθούμε στις πράξεις κάνουμε τον συντελεστή του x_2 στη δεύτερη εξίσωση ίσο με 1, εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_2 \to (1/3)\varepsilon_2$, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{4}{3} \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 - 3\varepsilon_2$ παίρνουμε

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{4}{3}. \\ 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Θέτοντας $x_4 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ η τρίτη εξίσωση δίνει $2x_3 = 7 - \lambda \iff x_3 = \dfrac{7-\lambda}{2}$.

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $x_2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7-\lambda}{2}\right) + \dfrac{2}{3}\lambda - \dfrac{4}{3} = \dfrac{7-\lambda+4\lambda-8}{6} = \dfrac{3\lambda-1}{6}$ και, αντικαθιστώντας τα x_2, x_3 στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$x_1 = 3 + x_2 - x_4 = 3 + \frac{3\lambda - 1}{6} - \lambda = \frac{18 + 3\lambda - 1 - 6\lambda}{6} = \frac{17 - 3\lambda}{6}.$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$x_1 = \frac{17 - 3\lambda}{6}, \quad x_2 = \frac{3\lambda - 1}{6}, \quad x_3 = \frac{7 - \lambda}{2}, \quad x_4 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2.

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$ με τη μέθοδο της απαλοιφής.

Λύση.

Με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1$ και στη συνέχεια της διαδικασίας $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-6)\varepsilon_1$ παίρνουμε τα συστήματα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 13x_2 - 10x_3 - 10x_4 = -10 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Ο συντελεστής του x_2 στη δεύτερη εξίσωση είναι ίσος με 1, οπότε συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τις διαδικασίες $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-13)\varepsilon_2$ και $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + (-1)\varepsilon_2$ και λαμβάνουμε τα συστήματα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 42x_3 - 36x_4 = -114 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 42x_3 - 36x_4 = -114 \\ 0x_3 + 0x_4 = -3. \end{cases}$$

Η τέταρτη εξίσωση του τελευταίου συστήματος δεν επαληθεύεται για καμία τιμή των x_3, x_4, οπότε το σύστημα είναι ***αδύνατο***.

Γενικά, αν κατά την επίλυση ενός συστήματος παρουσιαστεί μια εξίσωση της μορφής

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_\nu = \beta \text{ με } \beta \neq 0,$$

τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο να συνεχίσουμε τη διαδικασία μέχρι το τέλος.

Ασκήσεις.

3.2.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της απαλοιφής.

α) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

3.2.2. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της απαλοιφής.

α) $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ x + z = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_3 - 8x_4 = -17 \end{cases}$

3.3 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με ν εξισώσεις και ν αγνώστους.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε, για λόγους πληρότητας, και επιπλέον μεθόδους επίλυσης συστημάτων, στα οποία το πλήθος των αγνώστων είναι ίσο με το πλήθος των εξισώσεων (τέτοια συστήματα ονομάζονται ***τετραγωνικά***). Θα ξεκινήσουμε με τη ***μέθοδο της αντιστροφής,*** η οποία μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που ο πίνακας των συντελεστών αντιστρέφεται και βασίζεται στην παρακάτω ισοδυναμία (βλ. σχέση 1.4.1)

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \tag{3.3.1}$$

Έστω λοιπόν το επόμενο γραμμικό σύστημα ***ν εξισώσεων με ν αγνώστους*** (γραμμικό σύστημα $\nu \times \nu$).

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu &= \beta_\nu . \end{aligned} \tag{Σ}$$

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 3.1, το γραμμικό σύστημα (Σ) γράφεται στη μορφή (βλ. 3.1.7 για $\mu = \nu$)

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}.$$

ή ισοδύναμα $AX = B$, όπου A, X, B είναι αντίστοιχα ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, ο πίνακας (στήλη) των αγνώστων και ο πίνακας (στήλη) των σταθερών όρων.

Προφανώς ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και οι πίνακες (στήλες) X και B έχουν τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις. Στην περίπτωση που ο πίνακας A αντιστρέφεται, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.3.1), ώστε να λάβουμε τη λύση του συστήματος στη μορφή

$$X = A^{-1}B.$$

Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστροφος πίνακας υπολογίζεται από τον τύπο (2.4.2).

Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου της αντιστροφής είναι ότι διευκολύνει την επίλυση πολλών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα A, αλλά διαφορετικό δεξί μέλος B. Ωστόσο, λόγω της εμπλοκής πολλών πράξεων στη διαδικασία εύρεσης του αντιστρόφου, η μέθοδος δεν προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.1.

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$

Λύση.

α) Έχουμε το σύστημα $AX=B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Όμως, σύμφωνα με τους υπολογισμούς που έγιναν στο παράδειγμα 2.4.1, ο αντίστροφος πίνακας του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix}$$

οπότε η λύση του συστήματος θα δίνεται ως εξής:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $x_1 = 1/3, x_2 = 0, x_3 = 1/3$.

β) Το σύστημα γράφεται στη μορφή $AX = B_1$, όπου A είναι ο πίνακας που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Επομένως

$$X = A^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/27 \\ -3/37 \\ 10/27 \end{bmatrix}.$$

γ) Και αυτό το σύστημα γράφεται στη μορφή $AX = B_2$, οπότε

$$X = A^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/27 \\ -6/27 \\ 2/27 \end{bmatrix}$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \beta_3 \end{aligned}$$

και ας εξετάσουμε τη μορφή που παίρνει η λύση του $X = A^{-1}B$, στην περίπτωση που ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.4.2), θα έχουμε

$$X = A^{-1}B = \left(\frac{1}{|A|}C^T\right)B = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11}\beta_1 + c_{21}\beta_2 + c_{31}\beta_3 \\ c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + c_{32}\beta_3 \\ c_{13}\beta_1 + c_{23}\beta_2 + c_{33}\beta_3 \end{bmatrix},$$

όπου

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} για $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Επομένως, η λύση του συστήματος θα είναι η

$$x_1 = \frac{c_{11}\beta_1 + c_{21}\beta_2 + c_{31}\beta_3}{|A|}, \quad x_2 = \frac{c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + c_{32}\beta_3}{|A|}, \quad x_3 = \frac{c_{13}\beta_1 + c_{23}\beta_2 + c_{33}\beta_3}{|A|}.$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση που βρήκαμε για το x_1 τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\left|M_{22}\right| = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad c_{21} = (-1)^{2+1}\left|M_{21}\right| = -\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\left|M_{31}\right| = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

παίρνουμε

$$x_1 = \frac{\beta_1\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \beta_2\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \beta_3\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Όμως η έκφραση που υπάρχει στον αριθμητή αποτελεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής, και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_{x_1}}{D}.$$

όπου με D συμβολίσαμε την ορίζουσα του πίνακα A και με

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν αντικαταστήσουμε τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_1 με τη στήλη των σταθερών όρων. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι αντίστοιχοι τύποι προκύπτουν για τους αγνώστους x_2, x_3, δηλαδή

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}$$

όπου
$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{x_3} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3 \end{vmatrix},$$

είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D, αν αντικαταστήσουμε τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_2 με τη στήλη των σταθερών όρων και τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_3 με τη στήλη των σταθερών όρων αντίστοιχα.

Οι τύποι που προέκυψαν προηγουμένως για το σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους μπορούν να γενικευθούν για οποιοδήποτε τετραγωνικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους (γραμμικό σύστημα $\nu \times \nu$). Πιο συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα, στο οποίο η λύση ενός γραμμικού συστήματος δίνεται με τη μορφή λόγων από ορίζουσες. Οι τύποι που αναφέρονται σ' αυτό είναι γνωστοί με την ονομασία τύποι του ***Cramer***[3].

Τύποι του Cramer.

Έστω ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$.

α) Αν $|A| \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \ldots, \; x_\nu = \frac{D_{x_\nu}}{D}, \tag{3.3.2}$$

όπου D είναι η ορίζουσα $|A|$ του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων και

3. Η χρησιμοποίηση των οριζουσών για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έγινε πρώτη φορά από τον C. MacLaurin το 1729. Ωστόσο, η μέθοδος έμεινε γνωστή με το όνομα του Cramer, ο οποίος θέλοντας να προσδιορίσει μια καμπύλη που διέρχεται από 5 γνωστά σημεία, κατέληξε σε ένα γραμμικό σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους. Τη λύση του συστήματος με τη μέθοδο αυτή την παρουσίασε στο βιβλίο του *«Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών»* (1750).

D_{x_i}, $i = 1, 2, 3, ..., \nu$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσουμε την i στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.
β) Αν $|A| = 0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Σημειώνουμε ότι, στην παράγραφο 2.1 είχαμε επίσης αποδείξει τους τύπους του Cramer στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε πίνακες τύπου 2×2 (βλ. σχέση 2.1.8).

Οι τύποι του Cramer, αν και μας δίνουν μια πιο αποδοτική μέθοδο από τη μέθοδο της αντιστροφής, δεν είναι κατάλληλοι για να χρησιμοποιηθούν στη λύση συστημάτων με μεγάλο αριθμό εξισώσεων, αφού απαιτούν τον υπολογισμό πολλών οριζουσών μεγάλης τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2.

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x-y-z \quad =0 \\ 4x+5y+6z=11 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-y-z \quad =0 \\ 4x+5y+6z=0 \end{cases}$

Λύση.

α) Έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=6\neq 0,$$

και

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix}=6,\quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 6 \end{vmatrix}=-6,\quad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}=12.$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους του Cramer, το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = D_x/D = 1, y = D_y/D = -1, z = D_z/D = 2$.

β) Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίδια με πριν, οπότε $D = 6 \neq 0$. Ωστόσο όλες οι άλλες ορίζουσες έχουν αλλάξει κατά μία στήλη, οπότε θα πρέπει να ξαναϋπολογισθούν. Τώρα έχουμε

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}=-1,\quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-10,\quad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}=9$$

και σύμφωνα με τους τύπους του Cramer, θα είναι

$$x = D_x/D = -1/6, y = D_y/D = -10/6, z = D_z/D = 9/6$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.3.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda^2 x + y - z = 2 \\ x + \lambda^2 y - z = 2 \\ -x + y + \lambda^2 z = 2 \end{cases}.$$

Λύση.

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda^2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^4+1) - 1(\lambda^2-1) - 1(1+\lambda^2) = \lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

απ' όπου προκύπτει ότι $D = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2-1)\ (\lambda^2+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-1)\ (\lambda+1) \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Επίσης βρίσκουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda^2 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 2(\lambda^4+1) - 2(\lambda^2+1) - 2(1-\lambda^2) = 2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2(\lambda^2+1) - 2(\lambda^2-1) - 2(1+1) = 2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda^2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2(\lambda^2-1) - 2(1+1) + 2(1+\lambda^2) = 2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1).$$

Αφού οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την ορίζουσα D είναι οι $0,-1,1$, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$ θα έχουμε $D \neq 0$ και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)}{\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)} = \frac{2}{\lambda^2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)}{\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)}{\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

β) Για $\lambda = 0$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases}.$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} y & -z & = & 2 \\ x & -z & = & 2 \\ y & -z & = & 4, \end{cases}$$

το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

γ) Για $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 2 \\ -x & +y & +z & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ -x & +y & +z & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & z \\ y & = & 2. \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $x = k, y = 2, z = k$ με $k \in \mathbb{R}$.

δ) Για $\lambda = -1$, το σύστημα λαμβάνει την ίδια μορφή με την περίπτωση (β), οπότε θα έχει και πάλι άπειρες λύσεις της μορφής $x = k, y = 2, z = k$ με $k \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις.

3.3.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντιστροφής.

α) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

3.3.2. Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ είναι ο } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντιστροφής.

α) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

3.3.3. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων του Cramer.

α) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y=-1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+2y+3z=-6 \\ x-2y-4z=1 \\ 7x-10y-21z=0 \end{cases}$

3.3.4. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων του Cramer για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

α) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2\lambda x+2\lambda y+z=2\lambda+1 \\ \lambda x+y+z=1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+\lambda^2 y+\lambda^2 z=1 \\ \lambda^2 x+2y-z=0 \\ \lambda^2 x+y+z=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+2y-z=\lambda \\ 3x-y+2z=0 \\ 7x+7y-2z=\lambda \end{cases}$

3.4 Μελέτη ομογενών γραμμικών συστημάτων.

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 3.1, στο ομογενές γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$ όλοι οι σταθεροί όροι είναι μηδέν, οπότε έχει τη μορφή $AX=\mathbf{O}$ ή αναλυτικά

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1\nu}x_\nu&=0 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2\nu}x_\nu&=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1}x_1+\alpha_{\mu2}x_2+\ldots+\alpha_{\mu\nu}x_\nu&=0. \end{aligned}$$

Ένα τέτοιο σύστημα δεν μπορεί να είναι αδύνατο αφού έχει πάντοτε ως λύση των $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_\nu=0$. Επομένως

> Ένα ***ομογενές γραμμικό σύστημα*** είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική, είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες στο πλήθος.

Στην περίπτωση που το ομογενές σύστημα είναι τετραγωνικό ($\mu=\nu$), μπορούμε να μελετήσουμε το σύστημα με χρήση των τύπων του Cramer (3.3.2). Πράγματι, αν ισχύει $D=|A|\neq 0$, δεδομένου ότι $D_{x_1}=D_{x_2}=\ldots=D_{x_\nu}=0$ (αφού όλες οι ορίζουσες έχουν μία στήλη που όλα τα στοιχεία της είναι μηδενικά), το ομογενές σύστημα θα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Αν $D=|A|=0$, τότε το ομογενές σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις (αφού δεν μπορεί να είναι αδύνατο). Επομένως ισχύουν τα εξής:

> Το ομογενές σύστημα $AX=\mathbf{O}$:
> α) Έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν $|A|\neq 0$.
> β) Έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρο πλήθος), αν και μόνο αν $|A|=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.1.

Να λύσετε το επόμενο σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\begin{cases} x+y+2\lambda z=0 \\ x+2\lambda y+z=0 \\ 2\lambda x+y+z=0. \end{cases}$$

Λύση.

Για την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\lambda \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 2\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2\lambda-1)-(1-2\lambda)+2\lambda(1-(2\lambda)^2)=-8\lambda^3+6\lambda-2$$

οπότε

$$D=0 \Leftrightarrow -8\lambda^3+6\lambda-2=0 \Leftrightarrow 2(2\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda=-1.$$

Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $\lambda \neq 1/2$ και $\lambda \neq -1$ και άπειρες μη μηδενικές λύσεις (επιπλέον της μηδενικής) όταν $\lambda = 1/2$ ή $\lambda = -1$.

Για $\lambda = 1/2$ το σύστημα γίνεται $x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-y-z$ και επομένως θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $x=-k-m$, $y=k$, $z=m$ όπου $k, m \in \mathbb{R}$ παράμετροι.

Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\ y-2z=0 \\ -3y+3z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\ y-2z=0 \\ -3y+3z=0 \\ 0z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=z, \end{cases}$$

οπότε θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $x=k$, $y=k$, $z=k$ με $k \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις.

3.4.1. Να εξετάσετε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ τα επόμενα ομογενή συστήματα έχουν και άλλες λύσεις πέραν της μηδενικής.

α) $\begin{cases} (\lambda^2-3)x+y+z=0 \\ x+(\lambda^2-3)y+z=0 \\ x+y+(\lambda^2-3)z=0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \lambda x+y+2z=0 \\ \lambda^2 x+y+4z=0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \lambda(\lambda+1)x+\lambda(\lambda+1)y+z=0 \\ \lambda(\lambda+1)x+2y+2z=0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (1/\lambda)x+3y+2z=0 \\ (1/\lambda^2)x+9y+4z=0 \end{cases}$

3.4.2. Να εξετάσετε για ποια τιμή της παραμέτρου λ και τα τρία ομογενή συστήματα που δίνονται παρακάτω έχουν και άλλες λύσεις πέραν της μηδενικής.

$$\begin{cases} x & +\lambda y & +\lambda\omega & = & 0 \\ \lambda x & +2y & -\omega & = & 0 \\ \lambda x & +y & +\omega & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x & +y & +\omega & = & 0 \\ x & +\lambda y & +\omega & = & 0 \\ x & +y & +\lambda\omega & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x & +y & -\omega & = & 1 \\ \lambda x & +y & +\lambda\omega & = & \lambda-1 \\ 3x & +3y & +\lambda\omega & = & 1 \end{cases}$$

3.4.3. Να λύσετε τα επόμενα ομογενή συστήματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\text{α)} \begin{cases} x & + & y & +z & = & 0 \\ \lambda^2 x & + & 4y & +z & = & 0 \\ \lambda^4 x & + & 16y & +z & = & 0 \end{cases} \quad \text{β)} \begin{cases} x & + & y & +z & = & 0 \\ 2x & + & \lambda y & & = & 0 \\ 4x & + & \lambda^2 y & & = & 0 \end{cases} \quad \text{γ)} \begin{cases} (\lambda+1)x & + & y & + & \omega & = & 0 \\ & & (\lambda-1)y & - & \omega & = & 0 \\ & & y & + & (\lambda-1)\omega & = & 0 \end{cases}$$

3.4.4. Να λύσετε το επόμενο ομογενές σύστημα για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ \lambda x & +\mu y & +3z & = & 0 \\ \lambda^2 x & +\mu^2 y & +9z & = & 0. \end{cases}$$

4

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η ιδέα του μιγαδικού αριθμού πρωτοεμφανίστηκε τον 16ο αιώνα στην προσπάθεια των μαθηματικών της εποχής εκείνης να λύσουν εξισώσεις 2ου βαθμού. Η επίλυση ορισμένων τέτοιων εξισώσεων δημιουργούσε ιδιαίτερες δυσκολίες, αφού η χρησιμοποίηση των μέχρι τότε γνωστών τύπων και μεθόδων οδηγούσε στο «παράδοξο» της εμφάνισης τετραγωνικών ριζών αρνητικών αριθμών. Για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιούσαν ένα ειδικό σύμβολο για την τετραγωνική ρίζα του αριθμού –1 (την οποία θεωρούσαν ως μη υπαρκτή, φανταστική ποσότητα) και εκτελούσαν πράξεις ανάλογες με τους πραγματικούς αριθμούς.

Οι μιγαδικοί αριθμοί μελετήθηκαν αρχικά από τον γνωστό μαθηματικό του 16ου αιώνα Gerolamo Cardano, οι κανόνες όμως στους οποίους υπακούουν δόθηκαν πολύ αργότερα από τον Euler στο περίφημο σύγγραμμά του «Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση».

Όπως και σε αρκετές άλλες περιπτώσεις, οι μιγαδικοί αριθμοί, δημιούργημα αρχικά της «μαθηματικής περιέργειας και φαντασίας», απέκτησαν ραγδαία ιδιαίτερη πρακτική αξία και σήμερα αποτελούν πλέον βασικό εργαλείο της Μηχανολογίας, της Ηλεκτροτεχνίας, της Φυσικής κ.λπ.

4.1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού – Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών.

Είναι γνωστό ότι, αν η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, είναι αρνητική, τότε η εξίσωση αυτή δεν έχει ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x^2 - 6x + 10 = 0,$$

της οποίας η διακρίνουσα είναι ίση με $\Delta = -4$, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(x^2 - 6x + 9) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -1$$

και για να μπορέσουμε να επιλύσουμε την τελευταία, χρειαζόμαστε έναν αριθμό $y = x - 3$, για τον οποίο να ισχύει $y^2 = -1$. Γνωρίζουμε όμως ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός y με τέτοια ιδιότητα. Επομένως, η εξίσωση δεν έχει λύση στο ***σύνολο*** $\mathbb{R}$ ***των πραγματικών αριθμών.***

Η ανάγκη εύρεσης ενός αριθμού ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση $y^2 = -1$, οδήγησε στην εισαγωγή της έννοιας του μιγαδικού αριθμού. Το νέο σύνολο, εφοδιασμένο με κατάλληλες πράξεις, αποτελεί μια διεύρυνση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ονομάζεται ***σύνολο των μιγαδικών αριθμών*** και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε «να επεκτείνουμε» το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών σ' ένα νέο σύνολο, που να έχει παρόμοιες πράξεις με το $\mathbb{R}$. Τότε οι νέες πράξεις θα πρέπει να υπακούουν στις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με τις γνωστές πράξεις στο $\mathbb{R}$ και στο νέο σύνολο η εξίσωση $x^2 = -1$ να έχει λύση. Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής θα συμβολίζονται με i ***(φανταστική μονάδα)*** και –i, δηλαδή θα έχουμε

$$\mathrm{i}^2 = -1 \text{ και } (-\mathrm{i})^2 = -1.$$

Το νέο σύνολο, το οποίο, όπως ήδη αναφέρθηκε, ονομάζεται σύνολο των μιγαδικών αριθμών και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$, περιέχει ως στοιχεία αθροίσματα της μορφής $\boldsymbol{z = \alpha + \beta}$**i** με $\boldsymbol{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$. Μια τέτοια έκφραση ονομάζεται ***μιγαδικός αριθμός*** (ή απλώς μιγαδικός). Ο πραγματικός αριθμός α ονομάζεται ***πραγματικό μέρος*** και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(z)$, ενώ ο πραγματικός αριθμός β ονομάζεται ***φανταστικό μέρος*** και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(z)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο σύνολο $\mathbb{C}$, ένας πραγματικός αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ γράφεται στη μορφή $z = \alpha + 0\mathrm{i}$, οπότε ισχύει $\mathrm{Im}(z) = 0$. Στην περίπτωση που ισχύει $\alpha = \mathrm{Re}(z) = 0$ και $\beta \neq 0$, ο αριθμός που προκύπτει έχει τη μορφή $z = 0 + \beta\mathrm{i}$ και λέγεται φανταστικός αριθμός.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta\mathrm{i}$ και $z_2 = \gamma + \delta\mathrm{i}$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$, δηλαδή

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \text{ και } \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2).$$

Ειδικότερα, ένας μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ είναι ίσος με το μηδέν, αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, δηλαδή $\alpha + \beta\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Έτσι:

α) Αν $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$, $z_3 = -3 + 4\mathrm{i}$, και $z_4 = -3 - 4\mathrm{i}$, κανένας από τους αριθμούς αυτούς δεν είναι ίσος με κάποιον από τους άλλους, παρόλο που όταν τους εξετάζουμε ανά ζεύγη μπορεί να έχουν ίδιο το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος (όχι όμως και τα δύο συγχρόνως).

β) Ο μιγαδικός αριθμός $z = (\alpha - 2) + (3\beta - 5)\mathrm{i}$ είναι ίσος με το μηδέν, αν και μόνο αν $\alpha = 2$ και $\beta = 5/3$.

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι πράξεις με διώνυμα της μορφής $a + \beta x$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$. Έτσι, αν $a + \beta\mathrm{i}$ και $\gamma + \delta\mathrm{i}$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε το άθροισμά τους και η διαφορά τους ορίζονται ως εξής:

Άθροισμα: $(\alpha+\beta\ \mathrm{i})+(\gamma+\delta\ \mathrm{i})=\ (\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)\ \mathrm{i}$

Διαφορά: $(\alpha+\beta\ \mathrm{i})-(\gamma+\delta\ \mathrm{i})=\ (\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\ \mathrm{i}$

Επομένως, για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς, προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών χωριστά. Για παράδειγμα:

$$(7-3\mathrm{i})+(2+8\mathrm{i})=(7+2)+(-3+8)\mathrm{i}=9+5\mathrm{i}\,,\qquad 5\mathrm{i}+(6-2\mathrm{i})=(0+6)+(5-2)\ \mathrm{i}=6+3\mathrm{i}\,.$$

Αφού $(\alpha+\beta\mathrm{i})+(0+0\mathrm{i})=(\alpha+0)+(\beta+0)\ \mathrm{i}=\alpha+\beta\mathrm{i}$, το ***ουδέτερο στοιχείο*** της πρόσθεσης στο σύνολο των μιγαδικών είναι ο μηδενικός μιγαδικός αριθμός $0+0\mathrm{i}=0$.

Επιπλέον, από την ισότητα $(\alpha+\beta\ \mathrm{i})+((-\alpha)+(-\beta)\ \mathrm{i})=(\alpha-\alpha)+(\beta-\beta)\ \mathrm{i}=0$, είναι φανερό ότι ο ***αντίθετος*** του μιγαδικού $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $(-\alpha)+(-\beta)\mathrm{i}=-\alpha-\beta\mathrm{i}$, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $-z$.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή αξίζει να αναφερθεί ότι, σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς, δύο μιγαδικοί αριθμοί δεν διατάσσονται σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά μεγέθους. Έτσι, αν $z_1=\alpha+\beta\mathrm{i}$ και $z_2=\gamma+\delta\mathrm{i}$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε είτε θα ισχύει $z_1=z_2$, είτε $z_1\neq z_2$. Στη δεύτερη περίπτωση όμως, δεν υπάρχει κάποιος κανόνας με βάση τον οποίο να αποφασίζουμε κατά πόσο ο αριθμός z_1 είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τον αριθμό z_2 (εκτός αν $\beta=\delta=0$, οπότε η σύγκριση γίνεται ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.1.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, έτσι ώστε οι μιγαδικοί $z_1=(\alpha+\beta-5)+4\mathrm{i}$ και $z_2=(2\alpha-3)+(\alpha+\beta)\mathrm{i}$ να είναι ίσοι.

Λύση.

Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι ίσοι, αν και μόνο αν

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-5=2\alpha-3\\ \alpha+\beta=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta=2\\ \alpha+\beta=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=6\\ \alpha+\beta=4.\end{cases}$$

Άρα $\beta=3$ και $\alpha=1$. Για τις τιμές αυτές έχουμε $z_1=z_2=-1+4\mathrm{i}$.

Ασκήσεις.

4.1.1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, έτσι ώστε οι μιγαδικοί $z_1=(\alpha+\beta-4)+(\alpha-\beta+1)\,\mathrm{i}$ και $z_2=(2\alpha-4)+(\alpha+\beta-3)\,\mathrm{i}$ να είναι:

α) Και οι δύο φανταστικοί αριθμοί. β) Ίσοι. γ) Και οι δύο πραγματικοί αριθμοί.

4.1.2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

α) $(\alpha-3)+3\mathrm{i}=1+(\beta-1)\ \mathrm{i}$ β) $(10\alpha+3\beta-5)+(20-4\beta)\mathrm{i}=0$

γ) $(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\ \mathrm{i}=7-5\mathrm{i}$ δ) $(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha+\beta)\ \mathrm{i}=9+3\mathrm{i}$

4.1.3. Να γράψετε στη μορφή $a+\beta\,\mathrm{i}$ τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς.

α) $(9+4\mathrm{i})+(5-7\mathrm{i})$

β) $(10a\,\mathrm{i}+3\beta-5\mathrm{i})+(20a\,\mathrm{i}-4\beta+3\mathrm{i})=0$

γ) $(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\mathrm{i})+(-3\sqrt{7}-2\sqrt{3}\mathrm{i})$

δ) $(4+3\mathrm{i})-(6-4\mathrm{i})+(2-7\mathrm{i})$

4.1.4. Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ και ισχύει $(x+y)-(x-y)\,\mathrm{i} = 5z + z\mathrm{i}$, να αποδείξετε ότι $2x-y=z$.

4.1.5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $a, \beta, \gamma, \in \mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{a}{3}=\dfrac{\beta}{4}=\dfrac{\gamma}{5}$, να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=3(\gamma-\beta)+4(\beta-a)\mathrm{i}$, $z_2=a+\beta\,\mathrm{i}$, $z_3=a+2(\gamma-a)\mathrm{i}$ είναι ίσοι.

4.2 Γεωμετρική παράσταση και μέτρο μιγαδικού.

Είναι γνωστό ότι τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να τους αντιστοιχίσουμε σε σημεία ενός άξονα, ο οποίος ονομάζεται ***άξονας των πραγματικών αριθμών***. Οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$ μπορούν να απεικονιστούν σε σημεία $M(\alpha, \beta)$ του Καρτεσιανού επιπέδου και αντίστροφα[1] (σχ. 4.2α). Το σημείο M ονομάζεται ***εικόνα*** του μιγαδικού αριθμού z και θα συμβολίζεται με $M(\alpha, \beta)$ ή $M(z)$ ή απλώς $\alpha + \beta\mathrm{i}$. Το επίπεδο, επάνω στο οποίο σημειώνονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών ονομάζεται ***μιγαδικό επίπεδο*** ή ***επίπεδο Gauss***. Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται ***πραγματικός άξονας*** και θα συμβολίζεται με Re, και ο κατακόρυφος ***φανταστικός άξονας*** και θα συμβολίζεται με Im.

Στο σχήμα 4.2β δίνεται η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του αριθμού $z = -3 + 2\,\mathrm{i}$.

Η απόσταση της αρχής των αξόνων Ο(0,0) από το σημείο $M(\alpha, \beta)$, που είναι η εικόνα του $z = a + \beta\mathrm{i}$, (σχ. 4.2γ) ονομάζεται ***μέτρο*** (ή απόλυτη τιμή) του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $|z|$, δηλαδή

$$|z| = |a+\beta\ \mathrm{i}| = \sqrt{a^2+\beta^2}.$$

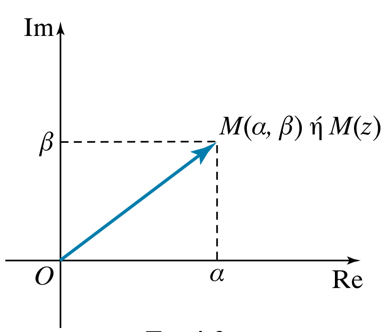
Έτσι, για τον αριθμό $z = -3 + 2\,\mathrm{i}$ θα έχουμε $|z| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Η έννοια του μέτρου έχει μια ενδιαφέρουσα πρακτική ερμηνεία στην ηλεκτροτεχνία. Η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος RLC, ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός

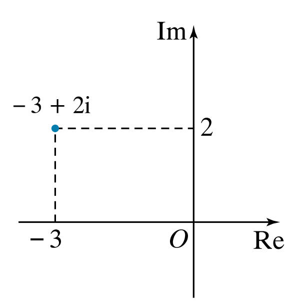
$$z = R + \mathrm{i}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right),$$

όπου ω ο παλμός, $\mathrm{Re}(z) = R$ η ωμική αντίσταση και

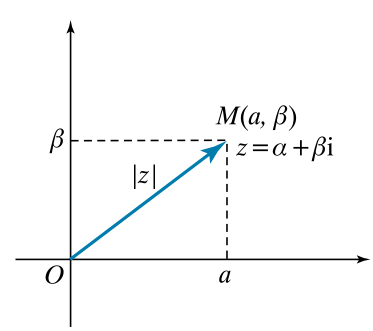
$$\mathrm{Im}(z) = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$



Σχ. 4.2α



Σχ. 4.2β



Σχ. 4.2γ

1. Η βασική ιδέα της αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών με χρησιμοποίηση σημείων του επιπέδου, οφείλεται στον Jean Robert Argand (1806).

η αντίσταση που οφείλεται στην αυτεπαγωγή L και στη χωρητικότητα C. Το μέτρο αυτού του μιγαδικού δίνεται από τον τύπο:

$$|z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

και εκφράζει τη λεγόμενη ***εμπέδηση*** του κυκλώματος.

Η απεικόνιση μιγαδικών αριθμών σε σημεία του Καρτεσιανού επιπέδου, μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε τους μιγαδικούς στις διανυσματικές ακτίνες των σημείων αυτών. Έτσι στον μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$ αντιστοιχίζουμε τη ***διανυσματική ακτίνα*** $\overrightarrow{OM}$. Είναι φανερό ότι

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + \beta^2} = |z|,$$

δηλαδή το μήκος της διανυσματικής ακτίνας $\overrightarrow{OM}$ ισούται με το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z.

Με τη βοήθεια των διανυσματικών ακτίνων των μιγαδικών μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά το άθροισμα και τη διαφορά των μιγαδικών. Έστω $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ αντίστοιχα. Τότε το άθροισμα $z_1 + z_2$ έχει ως διανυσματική ακτίνα τη διαγώνιο $\overrightarrow{OM}$ του παραλληλογράμμου που δημιουργείται αν χρησιμοποιήσουμε ως διαδοχικές πλευρές τις διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ (σχ. 4.2δ).

Επίσης, η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του σημείου $M(z_1 - z_2)$ βρίσκεται αν προσθέσουμε τη διανυσματική ακτίνα $-\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2'}$ του σημείου $M'_2(-z_2)$ στη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM_1}$ του $M_1(z_1)$. Από το σχήμα 4.2ε είναι φανερό ότι η διανυσματική ακτίνα που αντιστοιχεί στη διαφορά $z_1 - z_2$ προκύπτει αν φέρουμε από την αρχή των αξόνων ένα διάνυσμα παράλληλο προς το $\overrightarrow{M_2M_1}$.

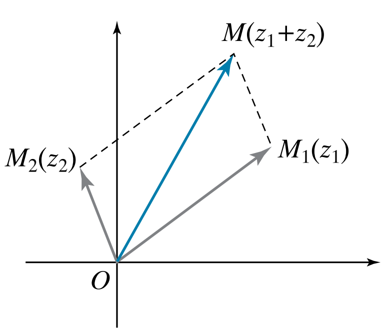
Στην περίπτωση που τα σημεία O, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι συνευθειακά, οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ προκύπτουν με απλή πρόσθεση ή αφαίρεση των ευθύγραμμων τμημάτων OM_1, OM_2, όπως φαίνεται στα σχήματα 4.2στ και 4.2ζ.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 έτσι, ώστε τα σημεία O, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ να μην είναι συνευθειακά. Από το τρίγωνο OMM_2 του σχήματος 4.2η παίρνουμε με βάση τη γνωστή τριγωνική ανισότητα της Γεωμετρίας, ότι:

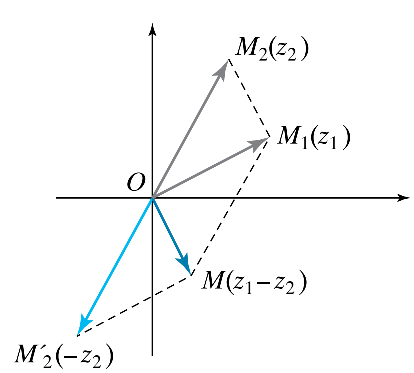
$$|M_2M - OM_2| < OM < M_2M + OM_2$$

και επειδή ισχύει $\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{OM_1}$, μπορούμε να γράψουμε

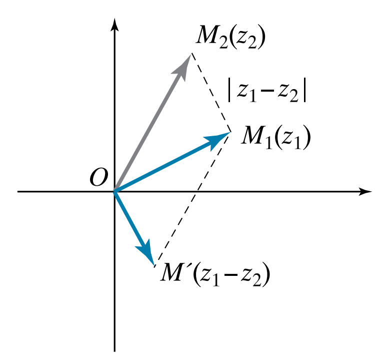
$$\big||z_1| - |z_2|\big| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$



Σχ. 4.2δ



Σχ. 4.2ε



Σχ. 4.2στ

Στην περίπτωση που τα σημεία O, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι συνευθειακά ή ένα τουλάχιστον από τα z_1, z_2 είναι ίσο με μηδέν, τότε αντί για γνήσιες ανισότητες μπορεί να έχουμε ισότητα. Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \quad \textbf{(τριγωνική ανισότητα)}$$

Από το σχήμα 4.2στ είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM'}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε τον επόμενο ισχυρισμό:

Η απόσταση των σημείων M_1 και M_2, που είναι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα, είναι ίση με το μέτρο της διαφοράς z_1-z_2.

Η παραπάνω διαπίστωση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, αν δοθεί ένας μιγαδικός αριθμός $z_0=x_0+y_0\mathrm{i}$, του οποίου η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ένας θετικός αριθμός r, τότε:

Η εξίσωση $|z-z_0|=r$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα r.

Έτσι, για να βρούμε την αναλυτική εξίσωση (της περιφέρειας) ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα r (σχ. 4.2ζ), μπορούμε να γράψουμε διαδοχικά

$$|z-z_0|=r \Leftrightarrow |x+y\mathrm{i}-x_0-y_0\mathrm{i}|=r \Leftrightarrow |(x-x_0)+(y-y_0)\mathrm{i}|=r \Leftrightarrow$$

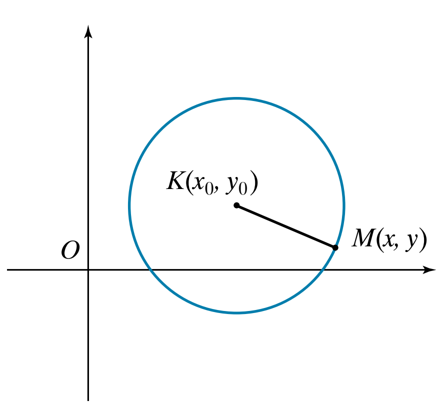
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Στην περίπτωση που το κέντρο K του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$, θα έχουμε $x_0=y_0=0$, οπότε η εξίσωση του κύκλου γίνεται

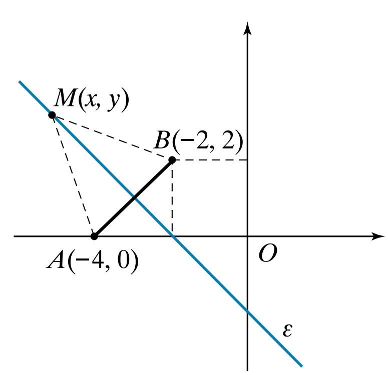
$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |z|=r.$$

Είναι φανερό ότι

οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z|>r$, είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου $|z|=r$,



Σχ. 4.2ζ



Σχ. 4.2η

ενώ

οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z|<r$, είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου $|z|=r$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=(x-1)+(y-1)\mathrm{i}$ με $|z|=5$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,1)$ και ακτίνα $r=5$.

Λύση.

Έχουμε $\quad |z|=5 \Leftrightarrow |(x-1)+(y-1)\mathrm{i}|=5 \Leftrightarrow |(x+y\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})|=5 \Leftrightarrow |w-(1+\mathrm{i})|=5$,

όπου θέσαμε $w=x+y\mathrm{i}$. Επομένως, τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,1)$ (το οποίο είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_0=1+\mathrm{i}$) και ακτίνα $r=5$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου αυτού βρίσκεται άμεσα ως εξής:

$$|(x-1)+(y-1)\mathrm{i}|=5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=5 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=5^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2.

Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|z+4|=|z+2-2\mathrm{i}|$.

Λύση.

Έχουμε $|z+4|=|z+2-2\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z-(-4)|=|z-(-2+2\mathrm{i})|$.

Έστω $A(-4,0)$, $B(-2,2)$ οι εικόνες των μιγαδικών $-4+0\mathrm{i}$, $-2+2\mathrm{i}$, αντίστοιχα και $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+y\mathrm{i}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2η.

Το μέτρο της διαφοράς $|z-(-4+0\mathrm{i})|$ παριστάνει την απόσταση (AM), ενώ το μέτρο της διαφοράς $|z-(-2+2\mathrm{i})|$ παριστάνει την απόσταση (BM). Επειδή θέλουμε

$$|z-(-4+0\mathrm{i})|=|z-(-2+2\mathrm{i})|,$$

θα πρέπει $(AM)=(MB)$. Άρα, τα σημεία M ισαπέχουν από τα άκρα $A(-4,0)$, $B(-2,2)$ του τμήματος AB, οπότε βρίσκονται στη μεσοκάθετο ε του AB.

Αντίστροφα, για κάθε σημείο $M(x,y)$ της μεσοκαθέτου ε ισχύει $(AM)=(MB)$, οπότε

$$|z-(-4+0\mathrm{i})|=|z-(-2+2\mathrm{i})|.$$

Σημειώνεται ότι ισχύει γενικότερα το επόμενο αποτέλεσμα.

Αν z_1, z_2 είναι δύο δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 \neq z_2$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z-z_1|=|z-z_2|,$$

βρίσκονται επάνω στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους αριθμούς z_1 και z_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3.

Τα σημεία που φωτίζονται από έναν φάρο Α περιγράφονται από τις εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|z-4+2\mathrm{i}|<3$. Τα σημεία που φωτίζονται από έναν δεύτερο φάρο Β περιγράφονται από τις εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|z-8-2\mathrm{i}|<4$. Να βρείτε σημεία:

α) Τα οποία φωτίζονται από τον φάρο Α και από τον φάρο Β και

β) τα οποία φωτίζονται μόνο από τον φάρο Α και όχι από τον φάρο Β.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε, μας ενδιαφέρουν οι εικόνες $M(z)$ των σημείων, που ικανοποιούν τις επόμενες δύο συνθήκες:

$$|z-(4-2\mathrm{i})|<3, \qquad |z-(8+2\mathrm{i})|<4.$$

Έστω $K(4,-2)$, $\Lambda(8,2)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $4-2\mathrm{i}$, $8+2\mathrm{i}$ αντίστοιχα. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z-(4-2\mathrm{i})|<3$$

βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(4,-2)$ και ακτίνα $r=3$, ενώ οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει

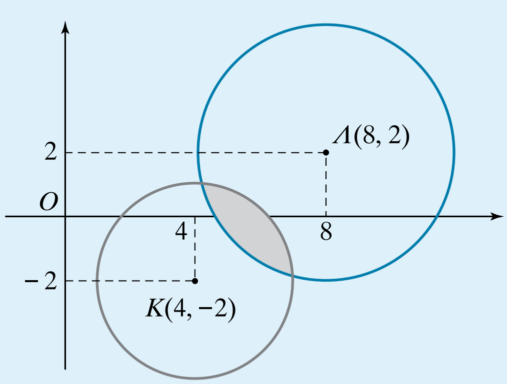
$$|z-(8+2\mathrm{i})|<4$$

βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $\Lambda(8,2)$ και ακτίνα $r=4$. Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z-(4-2\mathrm{i})|<3$ και $|z-(8+2\mathrm{i})|<4$ βρίσκονται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος 4.2θ.

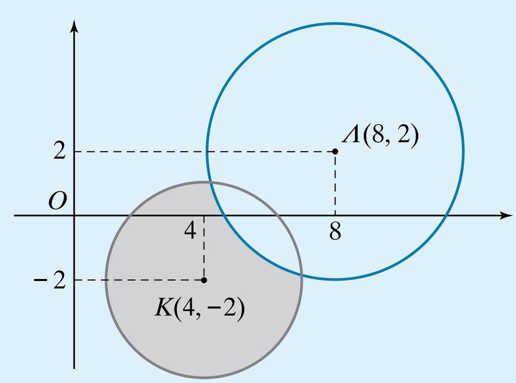
β) Εδώ, μας ενδιαφέρουν οι εικόνες $M(z)$ των σημείων, που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$|z-(4-2\mathrm{i})|<3, \qquad |z-(8+2\mathrm{i})|\geq 4.$$

Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει η πρώτη συνθήκη θα βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(4-2)$ και ακτίνα $r=3$, ενώ οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει $|z-(8+2\mathrm{i})|\geq 4$ θα βρίσκονται στο εξωτερικό (ή επάνω στην περιφέρεια) του κύκλου κέντρου $\Lambda(8,2)$ και ακτίνας $r=4$. Συνεπώς, οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύουν και οι δύο συνθήκες είναι αυτές που βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο μηνίσκο του σχήματος 4.2ι.



Σχ. 4.2θ



Σχ. 4.2ι

Ασκήσεις.

4.2.1. Να υπολογίσετε το μέτρο των επομένων μιγαδικών αριθμών.

α) $3 + 4\mathrm{i}$ β) $3 - 4\mathrm{i}$ γ) $-3 + 4\mathrm{i}$ δ) $-3 - 4\mathrm{i}$

4.2.2. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των επομένων μιγαδικών.

α) $2(z_1+z_2)$ β) $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ γ) $\frac{1}{3}(2z_1 + z_2)$

4.2.3. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

α) $|z| = 16$ β) $|z+3| = 1/2$ γ) $|z-2+\mathrm{i}| = 1$ δ) $|z-\mathrm{i}| = |z-1|$

4.2.4. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=4+3\mathrm{i}$, $z_2=-5+2\mathrm{i}$ και $z = x + y\mathrm{i}$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z-2z_1| = |z-3z_2|$. Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y.

4.2.5. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=3-2\mathrm{i}$, $z_2=-1+\mathrm{i}$ και $z = x + y\mathrm{i}$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z-z_2| = |z_1+z_2|$. Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y.

4.2.6. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

α) $|z-1+3\mathrm{i}| \geq 5$

β) $|z| \leq |z-1+3\mathrm{i}|$

γ) $|z-1+3\mathrm{i}| \geq 5$ και $|z| \leq |z-1+3\mathrm{i}|$ συγχρόνως.

4.2.7. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=1+5\mathrm{i}$, $z_3=5+5\mathrm{i}$, και $z = x + y\mathrm{i}$. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + y\mathrm{i}$, ο οποίος ισαπέχει και από τους τρεις αριθμούς z_1, z_2, z_3, δηλαδή τον μιγαδικό για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z-z_1| = |z-z_2| = |z-z_3|.$$

Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y.

4.3 Συζυγείς μιγαδικοί – Πολλαπλασιασμός και διαίρεση μιγαδικών.

Ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών γίνεται και πάλι όπως ο πολλαπλασιασμός διωνύμων της μορφής $\alpha + \beta x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, όπου φυσικά για το x ισχύει $x^2=-1$. Έτσι, αν $z_1 = \alpha + \beta\mathrm{i}$, $z_2 = \gamma + \delta\mathrm{i}$, θα έχουμε

$$(\alpha + \beta\mathrm{i})(\gamma + \delta\mathrm{i}) = \alpha(\gamma + \delta\mathrm{i}) + \beta\mathrm{i}(\gamma + \delta\mathrm{i}) = \alpha\gamma + \alpha\delta\mathrm{i} + \beta\gamma\mathrm{i} + (\beta\mathrm{i})\cdot(\delta\mathrm{i}) =$$
$$= \alpha\gamma + \alpha\delta\mathrm{i} + \beta\gamma\mathrm{i} + \beta\delta\mathrm{i}^2 = \alpha\gamma + \alpha\delta\mathrm{i} + \beta\gamma\mathrm{i} - \beta\delta = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathrm{i},$$

δηλαδή

$$(\alpha + \beta\,\mathrm{i})(\gamma + \delta\,\mathrm{i}) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\mathrm{i}.$$

Για παράδειγμα,

$$(5-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i}) = 5(3+4\mathrm{i}) - \mathrm{i}(3+4\mathrm{i}) = 15 + 20\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2 = (15+4) + (20-3)\mathrm{i} = 19+17\mathrm{i}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τους μιγαδικούς 3+4i και 3–4i, οι οποίοι έχουν ***ίσα πραγματικά μέρη** και **αντίθετα φανταστικά μέρη***. Για το γινόμενό τους έχουμε:

$$(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=3(3-4\mathrm{i})+4\mathrm{i}(3-4\mathrm{i})=9-12\mathrm{i}+12\mathrm{i}-16\mathrm{i}^2=25\,.$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο δύο μιγαδικών μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου παραδείγματος είναι της μορφής $\alpha+\beta\mathrm{i}$ και $\alpha-\beta\mathrm{i}$ και ονομάζονται ***συζυγείς μιγαδικοί***. Έτσι, αν $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$, τότε ο συζυγής του, που συμβολίζεται με $\bar{z}$, είναι ο $\bar{z}=\alpha-\beta\mathrm{i}$. Για παράδειγμα, ο συζυγής του 7+5i είναι ο 7–5i, ο συζυγής του 8i είναι ο –8i, ενώ ο συζυγής του 3 είναι ο 3.

Έστω $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$ ένας μιγαδικός αριθμός. Τότε θα έχουμε

$$\overline{(\bar{z})}=\overline{a-\beta\, i}=a+\beta\, i=z\,,\ |\bar{z}|=\sqrt{\alpha^2+(-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=|z|$$

$$z+\bar{z}=(a+\beta\ \mathrm{i})+(a-\beta\ \mathrm{i})=2a=2\mathrm{Re}\ (z),\quad z-\bar{z}=(a+\beta\ \mathrm{i})-(a-\beta\ \mathrm{i})=2\beta\ \mathrm{i}=2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\ (z)$$

και

$$z\bar{z}=(a+\beta\ \mathrm{i})(a-\beta\ \mathrm{i})=(a\cdot a-\beta\cdot(-\beta)\cdot)+(a\cdot(-\beta)+\beta\cdot a)\,\mathrm{i}=a^2+\beta^2=|z|^2.$$

Επομένως, για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες[2]:

$$\overline{(\bar{z})}=z,\qquad \mathrm{Re}\ (z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2\ \mathrm{i}},$$

$$|\,\bar{z}\,|=|z|\qquad |z|^2=a^2+\beta^2=z\bar{z}$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη ιδιότητα είναι φανερό ότι:

Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $z=\bar{z}$.
Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$.

Από το σχήμα 4.3α (ή και αλγεβρικά) μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$|z|=|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|.$$

Για τους συζυγείς του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών z_1 και z_2 μπορούν να αποδειχτούν οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\qquad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$$

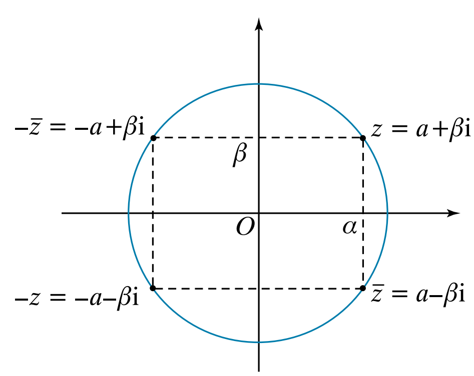
Πράγματι, αν $z_1=\alpha+\beta\mathrm{i}$, $z_2=\gamma+\delta\mathrm{i}$, θα έχουμε:

$z_1+z_2=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)\mathrm{i}$, $z_1-z_2=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\mathrm{i}$

οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\overline{z_1+z_2}=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)\,\mathrm{i}=(\alpha-\beta\ \mathrm{i})+(\gamma-\delta\ \mathrm{i})=\bar{z}_1+\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1-z_2}=(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)\,\mathrm{i}=(\alpha-\beta\ \mathrm{i})-(\gamma-\delta\ \mathrm{i})=\bar{z}_1-\bar{z}_2.$$



Σχ. 4.3α

2. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τις τρεις τελευταίες ισότητες, για κάθε μιγαδικό αριθμό z, οι ποσότητες $z\bar{z}$, $z+\bar{z}$, $(z-\bar{z})/\mathrm{i}$, είναι πραγματικοί αριθμοί.

Σημειώνεται ότι η πρώτη ιδιότητα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς.

Οι συζυγείς μιγαδικοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην εκτέλεση της πράξης της διαίρεσης μιγαδικών. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = \alpha + \beta$i και $z_2 = \gamma + \delta$i με $z_2 \neq 0$, δηλαδή τον μιγαδικό αριθμό $z = x + y\mathrm{i}$, για τον οποίο ισχύει $z \cdot z_2 = z_1$. Ο αριθμός αυτός θα συμβολίζεται με z_1/z_2. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας $z \cdot z_2 = z_1$ με το $\overline{z}_2$, έχουμε $zz_2\overline{z}_2 = z_1\overline{z}_2$ οπότε:

$$z = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(a+\beta\,\mathrm{i})(\gamma-\delta\,\mathrm{i})}{(\gamma+\delta\,\mathrm{i})(\gamma-\delta\,\mathrm{i})} = \frac{(a\gamma+\beta\,\delta)+(\beta\gamma-a\delta)\,\mathrm{i}}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{a\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-a\delta}{\gamma^2+\delta^2}\mathrm{i}.$$

Για παράδειγμα,

$$\frac{2+3\,\mathrm{i}}{5-2\,\mathrm{i}} = \frac{(2+3\,\mathrm{i})(5+2\,\mathrm{i})}{(5-2\,\mathrm{i})(5+2\,\mathrm{i})} = \frac{10+4\,\mathrm{i}+15\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}^2}{5^2+2^2} = \frac{4+19\,\mathrm{i}}{29} = \frac{4}{29}+\frac{19}{29}\,\mathrm{i}.$$

Οι δυνάμεις μιγαδικών αριθμών ορίζονται όπως και οι αντίστοιχες των πραγματικών αριθμών. Έτσι, $z^1 = z$, $z^2 = zz$, $z^3 = z^2z$ και, γενικά, για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$ ορίζουμε

$$z^\nu = z^{\nu-1}z.$$

Για $z \neq 0$ θέτουμε

$$z^0 = 1 \text{ και } z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu}.$$

Στον λογισμό με μιγαδικούς αριθμούς είναι χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίζουμε τις διάφορες δυνάμεις του i. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{array}{llll} \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, & \mathrm{i}^2 = -1, & \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2\,\mathrm{i} = -\mathrm{i}, & \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^3\,\mathrm{i} = -\mathrm{i}^2 = 1, \\ \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4\,\mathrm{i} = \mathrm{i}, & \mathrm{i}^6 = \mathrm{i}^5\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,\mathrm{i} = -1, & \mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^6\,\mathrm{i} = -\mathrm{i}, & \mathrm{i}^8 = \mathrm{i}^7\,\mathrm{i} = (-\mathrm{i})\mathrm{i} = 1 \text{ κ.λπ.} \end{array}$$

δηλαδή μετά το i^4 οι τιμές 1, –1, i, –i επαναλαμβάνονται κυκλικά. Έτσι, για τον υπολογισμό της δύναμης i^ν, όπου ν θετικός ακέραιος, αρκεί να γράψουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $4\varkappa + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < 4$ (με τη βοήθεια της Ευκλείδειας διαίρεσης διά του 4), οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{i}^\nu = \mathrm{i}^{4\varkappa+\upsilon} = \mathrm{i}^{4\varkappa}\,\mathrm{i}^\upsilon = (\mathrm{i}^4)^\varkappa \cdot \mathrm{i}^\upsilon = \mathrm{i}^\upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < 4.$$

Επομένως, αν ν είναι ένας θετικός ακέραιος, για τη δύναμη i^ν μπορούμε να γράψουμε

$$\mathrm{i}^\nu = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad \nu = 4\varkappa \\ \mathrm{i} & \alpha\nu \quad \nu = 4\varkappa+1 \\ -1 & \alpha\nu \quad \nu = 4\varkappa+2 \\ -\mathrm{i} & \alpha\nu \quad \nu = 4\varkappa+3 \end{cases} \quad \text{όπου } \varkappa = 0, 1, 2, \ldots .$$

Για παράδειγμα,

$$\mathrm{i}^{38} = \mathrm{i}^{4\cdot 9+2} = \mathrm{i}^{4\cdot 9} \cdot \mathrm{i}^2 = (\mathrm{i}^4)^9 \cdot \mathrm{i}^2 = 1(-1) = -1.$$

Τέλος, για τους συζυγείς του γινομένου, του πηλίκου και της δύναμης δύο μιγαδικών z_1 και z_2 μπορούν να αποδειχτούν οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \text{ (για } z_2 \neq 0)$$

Η πρώτη ιδιότητα προκύπτει εύκολα αν θεωρήσουμε $z_1 = \alpha + \beta$i και $z_2 = \gamma + \delta$i, οπότε θα έχουμε

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a+\beta i)(\gamma+\delta \mathrm{i})} = \overline{(a\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i} = (a\gamma-\beta\delta)-(a\delta+\beta\gamma)\mathrm{i}$$

και

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (a-\beta\,\mathrm{i})(\gamma-\delta\,\mathrm{i}) = (a\gamma-\beta\delta)-(a\delta+\beta\gamma)\mathrm{i}\,.$$

Έστω τώρα $z = z_1/z_2$. Από την ισότητα $zz_2{=}z_1$ συμπεραίνουμε, λόγω της ιδιότητας που αποδείξαμε προηγουμένως, ότι $\overline{z_1} = \overline{zz_2} = \overline{z}\cdot\overline{z_2}$, οπότε θα έχουμε $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{z} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

Σημειώνεται ότι η πρώτη ιδιότητα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς, δηλαδή για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$, ισχύει

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 \cdots \overline{z}_\nu.$$

Εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο για $z_1 = z_2 = ... = z_\nu$, προκύπτει $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.1.

Αν για τη σύνθετη αντίσταση z ενός κυκλώματος RLC ισχύει $|z-2|=|z|$, να αποδείξετε ότι η ωμική αντίσταση $R{=}\mathrm{Re}(z)$ του κυκλώματος είναι ίση με 1 Ohm.

Λύση.

Έχουμε τη σχέση $|z-2|=|z|$, από την οποία παίρνουμε διαδοχικά

$$|z-2|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow (z-2)\overline{(z-2)} = z\overline{z} \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}-2) = z\overline{z} \Leftrightarrow -2z-2\overline{z}+4=0\,.$$

Άρα,

$$z+\overline{z}=2 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)=2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=1\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.2.

Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, για τους οποίους ισχύει $z^2{=}3{+}4$i.

Λύση.

Αν θέσουμε $z = x + y\,\mathrm{i}$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, θα έχουμε

$$(x+y\mathrm{i})^2 = 3+4\mathrm{i} \Leftrightarrow x^2+2xy\mathrm{i}+y^2\mathrm{i}^2 = 3+4\mathrm{i} \Leftrightarrow x^2-y^2+2xy\mathrm{i} = 3+4\mathrm{i}\,.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\begin{cases} x_2 - y_2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = 2/x \end{cases}.$$

Με αντικατάσταση του $y = 2/x$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε την $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, η οποία για $x^2 = \omega$ δίνει $\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$. Από την τελευταία βρίσκουμε $\omega = 4$ και $\omega = -1$. Όμως, η δεύτερη λύση απορρίπτεται, γιατί $\omega = x^2 \geq 0$. Επομένως, $x^2 = 4$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x = 2$ ή $x = -2$.

Για $x = 2$ έχουμε $y = 1$, ενώ για $x = -2$ έχουμε $y = -1$. Άρα, $z = z_1 = 2 + \mathrm{i}$ ή $z = z_2 = -2 - \mathrm{i}$.

Οι μιγαδικοί $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ και $z_2 = -2 - \mathrm{i}$ ονομάζονται τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού $3 + 4\mathrm{i}$. Γενικά, ***τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού*** $\alpha + \beta\mathrm{i}$ ονομάζεται κάθε μιγαδικός $z = x + y\mathrm{i}$, για τον οποίο ισχύει $z^2 = \alpha + \beta\mathrm{i}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.3.

Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $P(z) = 0$, όπου $P(\cdot)$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, να αποδείξετε ότι θα ισχύει επίσης $\overline{P(z)} = 0$.

Λύση.

Έστω $P(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$, με $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\overline{P(z)} = \overline{\alpha_\nu z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}} + \cdots + \overline{\alpha_1 z} + \overline{\alpha_0} = \alpha_\nu \ (\bar{z})^\nu + \alpha_{\nu-1} (\bar{z})^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \bar{z} + \alpha_0 = P(\bar{z}) \ .$$

Επομένως, αν ισχύει $P(z) = 0$, θα έχουμε $\overline{P(z)} = 0$, οπότε $P(\bar{z}) = 0$.

Το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να διατυπωθεί με λόγια ως εξής:

> Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα ενός πολυώνυμου με πραγματικούς συντελεστές, τότε ο συζυγής του είναι επίσης ρίζα του ίδιου πολυωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.4.

Έστω ένας μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $z\bar{z} = 4i(\bar{z} - z)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Λύση.

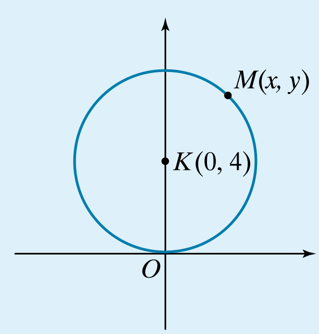
Αν θέσουμε $z = x + y\mathrm{i}$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, θα είναι $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$, οπότε

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \text{ και } \bar{z} - z = -2y\mathrm{i}.$$

Επομένως,

$$z\bar{z} = 4\mathrm{i}(\bar{z} - z) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4\mathrm{i}(-2y\mathrm{i}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -8y\mathrm{i}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 = 4^2 .$$



Σχ. 4.3β

Άρα, τα σημεία $M(x,y) = M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,4)$ και ακτίνα $r = 4$ (σχ. 4.3β).

Ασκήσεις.

4.3.1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς $(-3+5\mathrm{i})(-5-2\mathrm{i})$, $(1+\sqrt{3}\ \mathrm{i})(1-\sqrt{3}\ \mathrm{i})$ και $(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$.

4.3.2. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς $(1-\mathrm{i})^2-(1+\mathrm{i})^2$, $-3\mathrm{i}\,(\mathrm{i}-3)^2$, $(1-\mathrm{i})^4 7\mathrm{i}$.

4.3.3. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}}$, $z_2=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{-3\mathrm{i}}$, $z_3=\dfrac{3\mathrm{i}}{\mathrm{i}-7}$.

4.3.4. Αν $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=1-2\mathrm{i}$, να βρείτε τους μιγαδικούς $\dfrac{z_1}{z_2}, \dfrac{z_1^2}{z_2^2}, \dfrac{z_1^2}{z_2}, \dfrac{z_1}{z_2^2}$.

4.3.5. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z, για τον οποίο ισχύει $2\mathrm{i}z-z\bar{z}=-7+4\mathrm{i}$.

4.3.6. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=k+15\,\mathrm{i}$, $z_2=5+\lambda\,\mathrm{i}$, όπου $k,\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των k και λ, ώστε να ισχύει $z_1=5\,\bar{z}_2$.

4.3.7. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, ώστε να ισχύει $z\cdot\bar{z}+(z-\bar{z})=5+2\,\mathrm{i}$.

4.3.8. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών $z_1=5\mathrm{i}$, $z_2=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$.

4.3.9. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς $z_1=\dfrac{2-3\mathrm{i}}{(2+3\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}$, $z_2=\dfrac{(7\mathrm{i}-5)(4-2\mathrm{i})}{(8+5\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}$.

4.3.10. Αν $z=x+y\,\mathrm{i}$ και ο αριθμός $u=(z-1)(\bar{z}-\mathrm{i})$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $x=y+1$.

4.4 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Ας θεωρήσουμε τον μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$ και έστω $M(\alpha,\beta)$ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Αν θ είναι ***μία*** από τις γωνίες με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox, τελική πλευρά την OM και φορά θετική, δηλαδή αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, μπορούμε να γράψουμε (σχ. 4.4α)

$$\alpha=\varrho\,\text{συν}\theta,\ \beta=\varrho\,\text{ημ}\theta,\ \varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \text{οπότε}\ \alpha+\beta\,\mathrm{i}=\varrho\,\text{συν}\theta+\varrho\,\text{ημ}\theta\,\mathrm{i}=\varrho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta).$$

Το δεύτερο μέλος της ισότητας αυτής ονομάζεται ***τριγωνομετρική μορφή*** του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Αν $z=\alpha+\beta\mathrm{i}$ είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός, τότε, ***τριγωνομετρική μορφή*** του z ονομάζεται η έκφραση

$$z=\varrho\,(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta),$$

όπου $\varrho=|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha=\varrho\,\text{συν}\theta$ και $\beta=\varrho\,\text{ημ}\theta$.

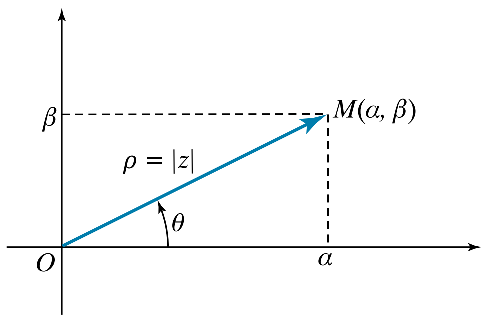
Κάθε γωνία θ για την οποία ισχύει $\alpha=\varrho\,\text{ημ}\theta$ και $\beta=\varrho\,\text{συν}\theta$ ονομάζεται ***όρισμα*** του z. Από όλες τις τιμές της γωνίας θ, μία βρίσκεται στο διάστημα $[0,2\pi)$. Αυτή ονομάζεται ***πρωτεύον όρισμα*** του μιγαδικού και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}\,z$. Κάθε άλλο όρισμα διαφέρει από το πρωτεύον κατά $2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$[3]. Αξίζει να σημειωθεί ότι το ζεύγος (ϱ,θ) ορίζει τις λεγόμενες ***πολικές συντεταγμένες*** του μιγαδικού αριθμού z.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον μιγαδικό $z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ (σχ. 4.4β), ο οποίος έχει μέτρο ίσο με

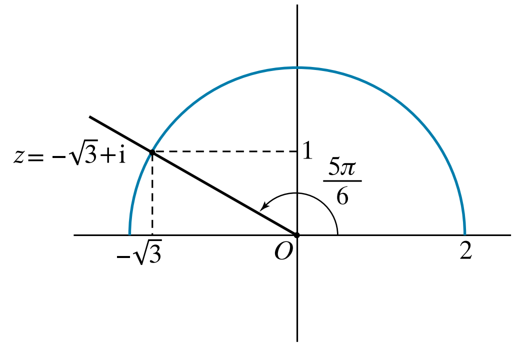
$$|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2.$$

Για τη γωνία θ έχουμε $-\sqrt{3}=2\text{συν}\theta$ και $1=2\text{ημ}\theta$, οπότε $\text{συν}\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{ημ}\theta=\dfrac{1}{2}$. Επομένως $\mathrm{Arg}\,z=5\pi/6$, ενώ όλες οι γωνίες της μορφής $\theta=2\kappa\pi+5\pi/6$ είναι ορίσματα του z. Έτσι, ο μιγαδικός

3. Με $\mathbb{Z}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακέραιων αριθμών.



Σχ. 4.4α



Σχ. 4.4β

αριθμός $z=-\sqrt{3}+\text{i}$ μπορεί να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$z=2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\text{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right).$$

Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού ***δεν είναι μοναδική***, αφού για κάθε μιγαδικό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα ορίσματα (εκ των οποίων μόνο ένα είναι το πρωτεύον). Τέλος, σημειώνουμε ότι δεν ορίζεται όρισμα για τον μιγαδικό αριθμό $z=0$.

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών: Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, δηλαδή:

Αν $z_1=\varrho_1(\text{συν}\theta_1+\text{i}\,\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2=\varrho_2(\text{συν}\theta_2+\text{i}\,\text{ημ}\theta_2)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \varrho_1=\varrho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1-\theta_2=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Η γραφή ενός μιγαδικού αριθμού σε τριγωνομετρική μορφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν πρέπει να εργαστούμε με γινόμενα, πηλίκα και δυνάμεις μιγαδικών, αλλά και για να βρίσκουμε εύκολα τις λύσεις εξισώσεων της μορφής $z^\nu=w$, όπου $w\in\mathbb{C}$. Θα αναλύσουμε τις τεχνικές αυτές στην παράγραφο 4.7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.1

Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών, για τους οποίους:

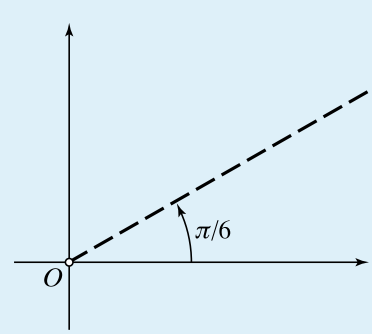
α) $\text{Arg}\,z=\frac{\pi}{6}$ β) $\frac{\pi}{6}<\text{Arg}\,z<\frac{\pi}{3}$ γ) $|z|<4$ και $\frac{\pi}{6}<\text{Arg}\,z<\frac{\pi}{3}$

Λύση.

α) Οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται στη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 4.4γ, η οποία σχηματίζει γωνία $\pi/6=30^\text{o}$ με τον οριζόντιο άξονα, με εξαίρεση το σημείο O.

β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 4.4δ που περικλείεται από τις διακεκομμένες ημιευθείες, οι οποίες σχηματίζουν γωνίες $\pi/6=30^\text{o}$ και $\pi/3=60^\text{o}$ με τον οριζόντιο άξονα, με εξαίρεση το σημείο O.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z|<4$,

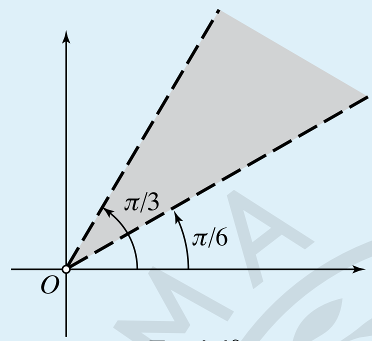


Σχ. 4.4γ

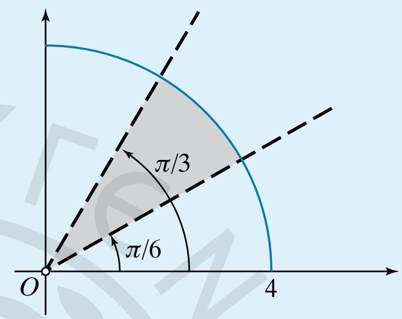
είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο O(0,0) και ακτίνα r=4. Οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει

$$\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3},$$

είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τις διακεκομμένες ημιευθείες, του σχήματος 4.4ε, οι οποίες σχηματίζουν γωνίες $\pi/6 = 30^{\circ}$ και $\pi/3 = 60^{\circ}$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών, για τους οποίους ισχύουν και οι δύο συνθήκες, κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 4.4ε.



Σχ. 4.4δ



Σχ. 4.4ε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.2.

α) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ και $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
β) Να γράψετε στη μορφή α+β i τον μιγαδικό αριθμό z, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι

$$|z| = \sqrt{2} \text{ και } \operatorname{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$$

Λύση.

α) Ο μιγαδικός $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ έχει μέτρο $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Θέλοντας να γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή ϱ (συνθ+i ημθ), για τη γωνία θ θα έχουμε

$$\text{συν}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ και } \ \text{ημ}\theta = \frac{1}{2},$$

οπότε $\theta = \pi/6$. Άρα,

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right).$$

Ομοίως, αν $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i} = \varrho$ (συνθ+i ημθ), θα έχουμε i $|z_2|$ =2, ενώ επιπλέον για τη γωνία θ πρέπει να ισχύει

$$\text{συν}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ και } \ \text{ημ}\theta = -\frac{1}{2},$$

οπότε

$$\theta = \frac{11\pi}{6}.$$

Άρα,

$$z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right).$$

β) Αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο της τριγωνομετρικής μορφής ενός μιγαδικού $z = \varrho\ (\sigma\upsilon\nu\theta + \mathrm{i}\,\eta\mu\theta)$ παίρνουμε διαδοχικά

$$z = \varrho\ (\sigma\upsilon\nu\theta + \mathrm{i}\,\eta\mu\theta) = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\eta\mu\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}.$$

Ασκήσεις.

4.4.1. Έστω ο μιγαδικός $z = \dfrac{7-\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα των x.

4.4.2. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους επόμενους μιγαδικούς αριθμούς.

α) $z_1 = 8\mathrm{i}$ β) $z_2 = -5$ γ) $z_3 = 1+\mathrm{i}$ δ) $z_4 = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$

4.4.3. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta\,\mathrm{i}$ τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς.

α) $z_1 = 3(\sigma\upsilon\nu 2\pi + \mathrm{i}\eta\mu 2\pi)$ β) $z_3 = 5\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\eta\mu\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)\right)$

4.4.4. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς, για τους οποίους ισχύει:

α) $|z| = 3$ και $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{4}$ β) $\dfrac{3\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{2\pi}{3}$

γ) $\operatorname{Arg} z = \dfrac{3\pi}{2}$ δ) $\operatorname{Arg}(z-5) = \dfrac{3\pi}{4}$

4.4.5. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2}{11+i}$. Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z στη μορφή $z = x + y\,\mathrm{i}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, και στη συνέχεια σε τριγωνομετρική μορφή. Τέλος, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $r = \sqrt{2}$.

4.5 Μέτρο και πράξεις – Όρισμα γινομένου και πηλίκου μιγαδικών.

Οι ιδιότητες που συνδέουν τις πράξεις των μιγαδικών αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, γινόμενο και πηλίκο) με τα μέτρα τους, είναι ίδιες ακριβώς με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, στην παράγραφο 4.2 διαπιστώσαμε την ισχύ της τριγωνικής ανισότητας για μιγαδικούς αριθμούς η οποία, ως γνωστό, ισχύει και για την απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών. Όσον αφορά στο μέτρο του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{για } z_2 \neq 0).$$

Για την απόδειξη της πρώτης, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (\overline{z}_1 \overline{z}_2)(z_1) z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2,$$

ενώ η δεύτερη ιδιότητα μπορεί να αποδειχτεί παρατηρώντας ότι

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2} z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|.$$

Γενικά, ισχύει ότι $|z_1 z_2 \cdots z_\nu| = |z_1||z_2|\cdots|z_\nu|$ ενώ για $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z$ προκύπτει $|z^\nu| = |z|^\nu$.

Σημειώνουμε ότι, αφού για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |z|$, θα έχουμε

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = 1.$$

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μιγαδικών μπορούν να διευκολυνθούν πολύ με τη χρήση της τριγωνομετρικής μορφής που εξηγήσαμε στην παράγραφο 4.4. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται).

> Αν $z_1 = \varrho_1$ (συνθ_1 + i ημθ_1), $z_2 = \varrho_2$ (συνθ_2 + i ημθ_2) είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε
>
> $$z_1\ z_2 = \varrho_1\varrho_2\,[\text{συν}\,(\theta_1+\theta_2)+\text{i}\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)]$$
>
> $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,[\text{συν}(\theta_1-\theta_2) + \text{iημ}\,(\theta_1-\theta_2)],\quad \varrho_2 \neq 0.$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής του προηγούμενου αποτελέσματος ας θεωρήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{και} \quad z_2 = 4\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right).$$

Τότε
$$z_1 z_2 = 8\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + \text{i}\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right] = 8\left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right) = 8\text{i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4}\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + \text{i}\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \text{i}\frac{1}{4}.$$

Από τους γενικούς τύπους που βρέθηκαν παραπάνω για την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών προκύπτει ότι:

α) Το μέτρο του γινομένου δύο μιγαδικών ισούται με το γινόμενο των μέτρων τους, ενώ το μέτρο του πηλίκου δύο μιγαδικών ισούται με το πηλίκο των μέτρων τους (η ιδιότητα αυτή αποδείχτηκε επίσης στην αρχή της παρούσας ενότητας με διαφορετικό τρόπο).

β) Ένα όρισμα του γινομένου (πηλίκου) δύο μιγαδικών αριθμών προκύπτει αν προσθέσουμε (αφαιρέσουμε) τα ορίσματα των δύο αριθμών, δηλαδή:

$$\text{Arg}\,(z_1 z_2) = \text{Arg}\,z_1 + \text{Arg}\,z_2, \quad \text{Arg}\,(z_1 / z_2) = \text{Arg}\,z_1 - \text{Arg}\,z_2.$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα:

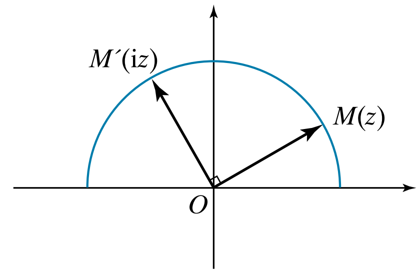
> Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού με τον μιγαδικό $z = \varrho_2$ (συνθ + i ημθ) σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του κατά γωνία θ ενώ η διαίρεσή του με τον z σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του κατά γωνία $-\theta$.

Εφόσον ο μιγαδικός αριθμός i = συν($\pi/2$) + i ημ($\pi/2$) έχει μέτρο 1 και πρωτεύον όρισμα $\pi/2$, ο μιγαδικός iz έχει το ίδιο μέτρο με το μέτρο του z και όρισμα μεγαλύτερο κατά $\pi/2$ από το όρισμα του

z, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία[4] $\pi/2$ (σχ. 4.5).

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή άλλες δύο φορές καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

> Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $\pi/2$, με τον αριθμό $\mathrm{i}^2=-1$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$κατά γωνία π, ενώ με τον αριθμό $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$κατά γωνία $3\pi/2$.



Σχ. 4.5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.1.

Να βρείτε το μέτρο και έναν όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta-\mathrm{i}\,\eta\mu\theta}$, όπου $\theta\neq(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ και στη συνέχεια να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z^{100}.

Λύση.

Αν θέσουμε $w=1+\sigma\upsilon\nu\theta+\mathrm{i}\eta\mu\theta$, θα έχουμε $z=\dfrac{w}{\overline{w}}$ και επομένως $|z|=1$. Για το μέτρο του μιγαδικού z^{100} έχουμε $\left|z^{100}\right|=|z|^{100}=1^{100}=1$.

Για την εύρεση ενός ορίσματος του z παρατηρούμε ότι $z=\dfrac{w}{\overline{w}}=\dfrac{w^2}{w\overline{w}}$ και επομένως:

$$z=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta-\mathrm{i}\,\eta\mu\theta)(1+\sigma\upsilon\nu\theta+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta)}=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2-\eta\mu^2\theta+2\mathrm{i}\,\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2+\eta\mu^2\theta}=$$

$$=\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu^2\theta+2\mathrm{i}\,\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu^2\theta}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta+2\mathrm{i}\,\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}=$$

$$=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta+\mathrm{i}\,\eta\mu\theta.$$

Η τελευταία ισότητα δείχνει ότι ένα όρισμα του z είναι το θ.

Ασκήσεις.

4.5.1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών $(1+\mathrm{i})^2$, $(1-\mathrm{i})^2$, $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$, $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$ καθώς επίσης και του μιγαδικού $\left(\dfrac{\alpha+\beta\,\mathrm{i}}{\alpha-\beta\,\mathrm{i}}\right)^2$ όπου α,β είναι πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

4.5.2. Αφού γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς $z_1=1+\mathrm{i}$ και $z_2=1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, να βρείτε τους αριθμούς z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_1^2}{z_2}$, $\dfrac{z_1}{z_2^2}$.

4. Όταν αναφερόμαστε σε στροφή κατά μία θετική γωνία, εννοούμε ότι η φορά της στροφής είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

4.5.3. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $|z| = 1$ και πρωτεύον όρισμα $\pi/3$. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z_1 = (1-z)/(1+z)$.

4.5.4. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z =$ συνθ + i ημθ. Να βρείτε τον αριθμό $\frac{1}{z}$ και να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z+\frac{1}{z}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $z-\frac{1}{z}$ είναι φανταστικός.

4.5.5. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z = 1 + \mathrm{i}\frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} \quad \text{όπου } \theta \in [0,\pi] \text{ με } \theta \neq \frac{\pi}{2}.$$

4.5.6. Να βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + y\,\mathrm{i}$, για τους οποίους ισχύει

$$\left|\frac{z}{z-3}\right| = \frac{1}{2}.$$

4.5.7. Αν $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ και $z_2 = 1 + \mathrm{i}$, να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό z_1/z_2 και, με βάση τη μορφή αυτή, να υπολογίσετε το συν$\frac{\pi}{12}$ και το ημ$\frac{\pi}{12}$.

4.6 Ο τύπος De Moivre.

Ας θεωρήσουμε έναν μιγαδικό αριθμό z με τριγωνομετρική μορφή $z = \varrho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.5, θα έχουμε:

$$z^2 = \varrho\,\varrho[\text{συν}(\theta+\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\theta+\theta)] = \varrho^2(\text{συν}2\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}2\theta).$$

$$z^3 = z\cdot z^2 = [\varrho(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)]\cdot[\varrho^2(\text{συν}2\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}2\theta)] = \varrho^3[\text{συν}(\theta+2\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\theta+2\theta)] = \varrho^3(\text{συν}3\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}3\theta)$$

κ.ο.κ. Γενικά έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι γνωστό ως ***Θεώρημα (ή τύπος) De Moivre***.

Θεώρημα De Moivre

Για κάθε ακέραιο ν ισχύει: $[\varrho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)]^\nu = \varrho^\nu[\text{συν}(\nu\theta) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(\nu\theta)]$.

Σημειώνεται ότι ο τύπος De Moivre ισχύει ακόμη και όταν το ν είναι ρητός αριθμός (δηλ. πηλίκο δύο ακεραίων). Ως παράδειγμα εφαρμογής του τύπου De Moivre, ας υπολογίσουμε τη δύναμη $(1+\mathrm{i})^{40}$. Μπορούμε να γράψουμε πρώτα τον μιγαδικό αριθμό $1+\mathrm{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)$$

οπότε θα έχουμε $(1+\mathrm{i})^{40} = \left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)\right]^{40} = (\sqrt{2})^{40}\left(\text{συν}\frac{40\pi}{4} + \mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{40\pi}{4}\right) =$

$$= 2^{20}[\text{συν}(10\pi) + \mathrm{i}\,\text{ημ}(10\pi)] = 2^{20}(1 + \mathrm{i}\cdot 0) = 2^{20}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.1.

Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}$.

Λύση.

Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ και $z_3=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, σύμφωνα με το παράδειγμα 4.4.2, γράφονται σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right),\quad z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right)$$

και επομένως

$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5=z_1^3=2^5\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right),\quad z_2^3=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3=2^3\left(\text{συν}\frac{33\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{33\pi}{6}\right).$$

Συνεπώς, το κλάσμα που δόθηκε γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}=\frac{2^3\left(\text{συν}\frac{33\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{33\pi}{6}\right)}{2^5\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right)}=2^2\left[\text{συν}\left(\frac{28\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(\frac{28\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=4\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)=4\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.2.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=1+\mathrm{i}$.

α) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z^{10}.

β) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των δυνάμεων $z^2, z^3, \ldots, z^{11}$.

Λύση.

α) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z=1+\mathrm{i}$ είναι $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Θέλοντας να γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό $z=1+\mathrm{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή ρ(συνθ +i ημθ), για τη γωνία θ θα έχουμε

$$\text{συν}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{και}\quad\text{ημ}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

οπότε $\theta=\pi/4$. Επομένως, $z=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)$ και σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre έχουμε

$$z^{10}=\left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}=\sqrt{2^{10}}\left(\text{συν}\frac{10\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{10\pi}{4}\right)=32\mathrm{i}.$$

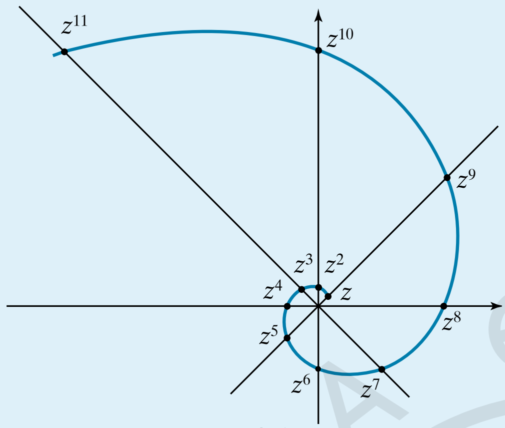
β) Για τις δυνάμεις του z έχουμε:

$$z^2=\sqrt{2^2}\left(\text{συν}\frac{2\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{2\pi}{4}\right)=2\mathrm{i},\quad z^3=\sqrt{2^3}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right)=-2+2\mathrm{i}$$

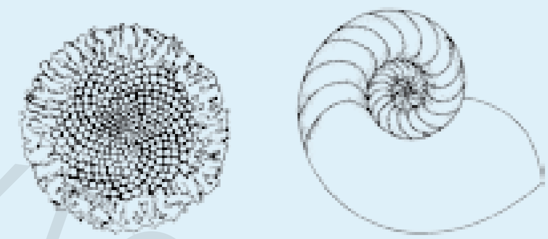
$$z^4=\sqrt{2^4}\left(\text{συν}\frac{4\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{4\pi}{4}\right)=-4,\ldots\ z^{11}=32\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{11\pi}{4}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{11\pi}{4}\right)=-32-32\mathrm{i}.$$

Οι εικόνες των δυνάμεων $z^2, z^3, \ldots, z^{11}$ του αριθμού z φαίνονται στο σχήμα 4.6α. Αν ενώσουμε τις εικόνες των δυνάμεων αυτών, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μία ελικοειδής γραμμή, η οποία ονομάζεται ***ισογωνιακή σπείρα*** (σχ. 4.6α).

Τέτοιες γραμμές τις συναντάμε αρκετά συχνά στη φύση. Για παράδειγμα, τα κέρατα ορισμένων ζώων, ο σπόρος του ηλιοτροπίου [σχ. 4.6β(α)] κ.λπ. έχουν παρόμοια μορφή. Εντυπωσιακή ομοιότητα με τη σπείρα αυτή έχει και το όστρακο του ναυτίλου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.6β(β).



Σχ. 4.6α
Ισογωνιακή σπείρα



σπόρος ηλιοτροπίου
(α)

όστρακο ναυτίλου
(β)

Σχ. 4.6β

Ασκήσεις.

4.6.1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1=\frac{1}{(1+\mathrm{i})^5},\quad z_2=\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16},\quad z_3=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{100},$$

4.6.2. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$[2(\text{συν}10^0+\mathrm{i}\,\text{ημ}10^0)]^{-6},\quad \left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-5},\quad \left[3\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{-6}.$$

4.6.3. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $z=\dfrac{(\text{ημ}\theta-\mathrm{i}\,\text{συν}\theta)^{10}}{(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)^5}$.

4.6.4. Αν $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ και $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $z_1^{600}+z_2^{600}$ και $z_1^{600}-z_2^{600}$.

4.6.5. Αν $z=1-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z^3 και $(1-z)^8$.

4.7 Νιοστές ρίζες μιγαδικού αριθμού – Λύση εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Στο παράδειγμα 4.3.2 διαπιστώσαμε ότι οι μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την εξίσωση $z^2=3+4\mathrm{i}$ είναι οι $z_1=2+\mathrm{i}$ και $z_2=-2-\mathrm{i}$. Σημειώσαμε μάλιστα ότι κάθε μιγαδικός $z=x+y\,\mathrm{i}$, για τον οποίο ισχύει $z^2=\alpha+\beta\,\mathrm{i}$, ονομάζεται ***τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού*** $\alpha+\beta\mathrm{i}$. Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε τη νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού ως εξής:

Ένας μιγαδικός αριθμός z ονομάζεται ***νιοστή ρίζα*** του μιγαδικού αριθμού w, όταν για τον ακέραιο αριθμό $\nu > 1$, ισχύει $z^{\nu} = w$.

Όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα, η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών, μας δίνει ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για τον υπολογισμό των νιοστών ριζών οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο είναι διαθέσιμη η τριγωνομετρική του μορφή.

Ένας μη μηδενικός αριθμός $w = \rho\,(\text{συν}\theta + \text{i}\,\text{ημ}\theta)$ έχει ν ακριβώς νιοστές ρίζες, οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$z_{\varkappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\frac{\theta + 2\varkappa\pi}{\nu} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\theta + 2\varkappa\pi}{\nu}\right], \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1. \qquad (4.7.1)$$

Η απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος παραλείπεται.

Αν απεικονίσουμε τις ρίζες $z_{\varkappa}$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ στο μιγαδικό επίπεδο, αυτές θα βρίσκονται επάνω στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα $r = \sqrt[\nu]{\rho}$ (αφού ισχύει $|z_{\varkappa}| = \sqrt[\nu]{\rho}$ για κάθε $\varkappa = 0, 1, \ldots, \nu - 1$). Επίσης από τη μορφή που έχουν τα ορίσματα, είναι φανερό ότι, σημειώνοντας τις ρίζες $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$ επάνω σ' αυτόν τον κύκλο, θα πάρουμε τις κορυφές ενός κανονικού ν–γώνου με μία από τις κορυφές να είναι το σημείο, στο οποίο απεικονίζεται ο μιγαδικός z_0 με όρισμα θ/ν.

Ας θεωρήσουμε τον μιγαδικό $w = -\sqrt{3} - \text{i}$ ως παράδειγμα εφαρμογής του προηγουμένου θεωρήματος. Για να βρούμε τις κυβικές ρίζες ($\nu = 3$) του μιγαδικού αυτού, γράφουμε πρώτα τον αριθμό σε τριγωνομετρική μορφή. Έχουμε

$$|w| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \;\; \text{και} \;\; \text{συν}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \; \text{ημ}\theta = -\frac{1}{2},$$

οπότε ένα όρισμά του είναι το $\frac{7\pi}{6}$. Άρα,

$$w = 2\left(\text{συν}\frac{7\pi}{6} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{7\pi}{6}\right)$$

και σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού $w = -\sqrt{3} - \text{i}$ θα δίνονται από τον τύπο

$$z_{\varkappa} = \sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\varkappa\pi}{3} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\varkappa\pi}{3}\right], \quad \varkappa = 0, 1, 2$$

ή αναλυτικά

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{7\pi}{18} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{7\pi}{18}\right], \; z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{19\pi}{18} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{19\pi}{18}\right], \; z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{31\pi}{18} + \text{i}\,\text{ημ}\frac{31\pi}{18}\right].$$

Γεωμετρικά, οι κυβικές ρίζες είναι οι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[3]{|w|} = \sqrt[3]{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.1.

Δίνεται η εξίσωση $z^{\nu} = 1$. Αφού βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης σε τριγωνομετρική μορφή, να διαπιστώσετε ότι οι ρίζες της είναι οι $1, z_1, z_1^2, z_1^3, \ldots, z_1^{\nu-1}$, όπου

$$z_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}.$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το άθροισμα όλων των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 0, ενώ το γινόμενό τους είναι ίσο με $(-1)^{\nu-1}$.

Λύση.

Οι ρίζες της εξίσωσης $z^\nu = 1$, σύμφωνα με τον γενικό τύπο (4.7.1), για $w = 1(\text{συν}0 + i\text{ημ}0)$, θα δίνονται από τις εκφράσεις

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{1}\left[\text{συν}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu}\right],\ \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1,$$

δηλαδή

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^\kappa = z_1^\kappa,\quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$$

όπου $z_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$.

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι της μορφής $z_0 = 1,\quad z_1 = z_1,\quad z_2 = z_1^2, \ldots, z_{\nu-1} = z_1^{\nu-1}$.

Για το άθροισμα όλων των ριζών παρατηρούμε ότι

$$z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{\nu-1} = 1 + z_1 + z_1^2 + \cdots + z_1^{\nu-1} = \frac{(z_1)^\nu - 1}{z_1 - 1} = \frac{1-1}{z_1-1} = 0.$$

Επίσης, έχουμε

$$z_0 z_1 z_2 \cdots z_{\nu-1} = 1\cdot z_1 z_1^2 z_1^3 \cdots z_1^{\nu-1} = z_1^{1+2+3+\cdots+(\nu-1)} = z_1^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} =$$

$$= \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = \text{συν}\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu},$$

οπότε

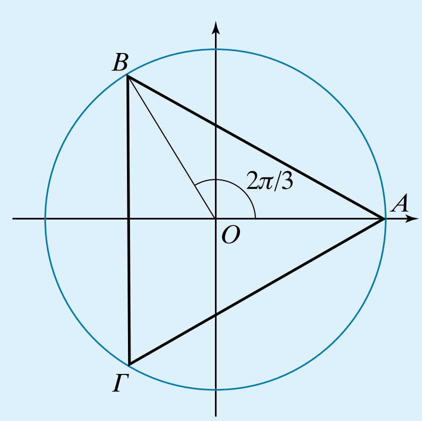
$$z_0 z_1 z_2 \cdots z_{\nu-1} = \text{συν}[\pi(\nu-1)] + i\,\text{ημ}(\pi(\nu-1)] = (\text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi)^{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = 1$ είναι οι ***νιοστές ρίζες της μονάδας***. Οι εικόνες των ριζών αυτών στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $r = 1$. Η κεντρική γωνία του πολυγώνου είναι ίση με $\varphi = 2\pi/\nu$.

Για παράδειγμα, οι ***κυβικές ρίζες της μονάδας*** είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^3 = 1$ και δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{3},\ \kappa = 0,1,2.$$

Οι λύσεις αυτές παριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο με τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $r=1$. Η κεντρική γωνία του τριγώνου αυτού είναι $\varphi = 2\pi/3$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.7.



Σχ. 4.7

Σύμφωνα με όσα είδαμε μέχρι στιγμής στην παρούσα ενότητα, οι πολυωνυμικές εξισώσεις τρίτου βαθμού $z^3 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$ και $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$ έχουν ακριβώς τρεις ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ενώ η πολυωνυμική εξίσωση $z^\nu = 1$, όπου ν οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος, έχει ν ακριβώς διαφορετικές ρίζες στο ίδιο σύνολο. Γενικότερα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι γνωστό ως ***θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας***

Κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$, νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{C}$, $\alpha_\nu \neq 0$ έχει ***ακριβώς*** ν ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Η αναζήτηση των νιοστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού w ισοδυναμεί με τη λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(z) = 0$, όπου $P(z) = z^\nu - \mathrm{w}$.

Αν $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ (οι οποίες δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικές), αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής

$$P(z) = \alpha_\nu (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_\nu).$$

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολυωνυμικές εξισώσεις με ***πραγματικούς συντελεστές*** και θα δούμε πώς μπορούν να λυθούν στο σύνολο $\mathbb{C}$. Η επίλυση τέτοιων εξισώσεων στο σύνολο $\mathbb{C}$ γίνεται με τη βοήθεια των ίδιων μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση εξισώσεων στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ας ξεκινήσουμε με τη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$. Η τελευταία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = 0,$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$. Επομένως:

α) Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $z_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $z_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

β) Αν $\Delta = 0$, τότε έχει διπλή πραγματική λύση, την $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$.

γ) Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση στη οποία καταλήξαμε προηγουμένως γράφεται διαδοχικά (αφού $-\Delta > 0$).

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)\left(z + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right) = 0.$$

Άρα, οι ρίζες της είναι οι ***συζυγείς*** μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = \frac{-\beta - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}, \qquad z_2 = \frac{-\beta + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}.$$

Θα συνεχίσουμε με τη λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $5^{ου}$ βαθμού, πιο συγκεκριμένα της $P(z) = 0$, όπου

$$P(z) = z^5 + 2z^4 - z - 2.$$

Θεωρούμε αρχικά τους διαιρέτες του σταθερού όρου –2, που πιθανόν να είναι ρίζες της. Αυτοί είναι οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2$. Για $z=1$ βρίσκουμε $P(1)=0$, οπότε το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης. Εφαρμόζοντας το σχήμα του Horner στο $z=1$, βρίσκουμε

1	2	0	0	–1	–2	1
	1	3	3	3	2	
1	3	3	3	2	$\boxed{0}$	

οπότε μπορούμε να γράψουμε $P(z)=z^5+2z^4-z-2=(z-1)(z^4+3z^3+3z^2+3z+2)$.

Σημειώνουμε ότι στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε, θεωρώντας την ανάλυση του $P(z)$ στη μορφή (αφού το 1 είναι ρίζα)

$$P(z)=z^5+2z^4-z-2=(z-1)(z^4+az^3+\beta z^2+\gamma z+\delta)$$

όπου τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μπορούν να προσδιοριστούν αν εκτελέσουμε αρχικά τις πράξεις στο δεξί μέλος και εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του z.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία στο πηλίκο $z^4+3z^3+3z^2+3z+2$ της προηγούμενης διαιρέσεως, βρίσκουμε ότι το $z=-1$ είναι ρίζα και το σχήμα του Horner δίνει

1	3	3	3	2	–1
	–1	–2	–1	–2	
1	2	1	2	$\boxed{0}$	

Επομένως

$$z^4+3z^3+3z^2+3z+2=(z+1)(z^3+2z^2+z+2).$$

Το πολυώνυμο έχει ρίζα το $z=-2$ και εφαρμόζοντας για άλλη μια φορά το σχήμα του Horner προκύπτει $z^3+2z^2+z+2=(z+2)(z^2+1)$.

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $P(z)=z^5+2z^4-z-2$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(z)=(z-1)(z+1)(z+2)(z^2+1)=(z-1)(z+1)(z+2)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$$

και έχει ως ρίζες τους αριθμούς $1, -1, -2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$.

Από την επίλυση της παραπάνω πολυωνυμικής εξίσωσης, καθώς και από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$ με $\Delta<0$ παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες που προκύπτουν είναι ανά δύο συζυγείς.

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα (βλ. παράδ. 4.3.3):

> Αν ο μιγαδικός αριθμός $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ $(\beta \neq 0)$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ***πραγματικούς*** συντελεστές, τότε ο συζυγής του $\alpha-\beta\,\mathrm{i}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης αυτής.

Σύμφωνα με αυτό:

> Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Παραπάνω είδαμε ότι το πολυώνυμο $P(z)=z^5+2z^4-z-2$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $1, -1, -2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων και ενός δευτεροβάθμιου παράγοντα που έχει

$\Delta < 0$, πιο συγκεκριμένα $P(z) = (z-1)(z+1)(z+2)(z^2+1)$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

> Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες έχουν αρνητική διακρίνουσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.2.

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, τέτοιο ώστε $P(1)=-2$ και η εξίσωση $P(x) = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και $1+\mathrm{i}$.

Λύση.

Επειδή το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό $1+\mathrm{i}$, θα έχει ρίζα και τον συζυγή του αριθμό $1-\mathrm{i}$. Επομένως, οι 3 ρίζες του είναι οι αριθμοί 2, $1-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ και ως εκ τούτου μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(x) = a(x-2)(x-(1-\mathrm{i}))(x-(1+\mathrm{i})), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$P(x) = a(x-2)(x^2 - x(1+\mathrm{i}) - x(1-\mathrm{i}) + (1^2 - \mathrm{i}^2)) = a(x-2)(x^2-2x+2) = a(x^3-4x^2+6x-4).$$

Αφού $P(1)=-2$, θα έχουμε $\alpha(1^3 - 4\cdot 1^2 + 6\cdot 1 - 4) = -2 \Leftrightarrow -\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$, οπότε

$$P(x) = 2(x^3-4x^2+6x-4) = 2x^3-8x^2+12x-8.$$

Ασκήσεις.

4.7.1. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α) $z^4 = -16$ β) $z^9 - z^5 + z^4 - 1 = 0$ γ) $z^4 = \dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

4.7.2. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α) $z^4 = -\mathrm{i}$ β) $z^4 = 16\left(\text{συν}\dfrac{8\pi}{5} + i\,\text{ημ}\dfrac{8\pi}{5}\right)$ γ) $z^6 = 64$

δ) $z^3 = \dfrac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ ε) $z^4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ στ) $z^4 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

4.7.3. Έστω $z = \rho\,(\text{συν}\theta + \mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)$ η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z

α) Να γράψετε την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $\overline{z}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $z^9 \cdot (\overline{z})^5 = 1$.

4.7.4. Αφού βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $z^7 = -1$, να αποδείξετε ότι $\text{συν}\dfrac{\pi}{7} + \text{συν}\dfrac{3\pi}{7} + \text{συν}\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$.

4.7.5. Αν ω είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $\omega \neq 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$.

4.7.6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των επομένων δύο εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

$$(z^2+1)^2+z^3+z=0\,,\quad z^{23}+z^{16}+1=0\,.$$

4.7.7. Να βρείτε τις κυβικές ρίζες του αριθμού -1. Αν w είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $w \neq -1$:
α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $w^2 - w + 1 = 0$.
β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(-1 + w + w^2)\,(1 + w - w^2)$.
γ) Να αποδείξετε ότι οι τρεις κυβικές ρίζες της μονάδας είναι οι $w, \overline{w}, w\overline{w}$.

4.7.8. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:
α) $z^2 - 2|z| = 0$ β) $z^3 - 4z = 0$.
Τι παρατηρείτε;

4.7.9. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(1-\mathrm{i})z + 2\mathrm{i}\overline{z} = 5 + 3\mathrm{i}$ β) $z^3 - 7z^2 + 16z - 10 = 0$
γ) $z^3 - 3z^2 + 3z - 28 = 0$ δ) $z^4 = 4(z^2 + z + 1) + z$
ε) $|z+4+8\mathrm{i}| = 2|z+1+2\mathrm{i}|$ στ) $|z^2| = -z^2$
ζ) $z^2 - 2z + 2 = 0$ η) $(z-1)^3 - (1-\mathrm{i})(z+1)^3 = 0$

4.7.10. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^4(z + 1)^2 + z^2 + 2z^3 + z^2 + (z + 1)^2 = 0$.

4.7.11. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

4.7.12. Αν ο μιγαδικός αριθμός $1+\mathrm{i}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^3 - z^2 + 2a = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι ίσος με 1 και στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης.

4.7.13. Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z = 3 + 2\mathrm{i}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^3 - 5\alpha\, z^2 + 7\beta z + 13 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4.7.14. Να εκφράσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^6 - x^3 + 1$ ως γινόμενο τριών δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές.

4.7.15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(z) = (z+1)^{6k+1} - z^{6k+1} - 1$, όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος.
α) Να αποδείξετε ότι οι καθαρές μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδος είναι ρίζες του $P(z)$.
β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(z)$ έχει ως παράγοντα το πολυώνυμο $z^2 + z + 1$.

4.7.16. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^2 + 6z + 18 = 0$. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{z_1^2 + z_2^2 - 2\mathrm{i}}{z_1 z_2 + 3\mathrm{i}}$ στη μορφή $\alpha + \beta\mathrm{i}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

4.7.17. Δίνεται ότι ο αριθμός $3 + \mathrm{i}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^3 - 8z^2 + az + \beta = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 22, \beta = -20$.
β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $z^3 - 8z^2 + 22z - 20$ έχει ως παράγοντα το $z^2 - 6z + 10$.
γ) Να βρείτε και τις τρεις ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

5

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την έννοια της συνάρτησης. Η βασική ιδέα για την ανάπτυξή της ήταν η σχέση μεταξύ αιτίου και αποτελέσματος και η μελέτη της εξάρτησης των τιμών δύο μεταβλητών ποσοτήτων.

Ο όρος ***συνάρτηση****, από το λατινικό ρήμα fungor, που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ, εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε ένα χειρόγραφο του Leibniz το 1673. Το 1755, ο Euler διατύπωσε έναν λιτό, αλλά και αυστηρό συγχρόνως ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, ο οποίος είχε ως εξής: «Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιον τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάζουν, συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων». Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το x υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιονδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του x.*

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθεί η έννοια της πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής, καθώς και οι βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα δοθούν οι ιδιότητες των ορίων και της συνέχειας, καθώς και εφαρμογές του Θεωρήματος Bolzano και ενδιάμεσων τιμών.

5.1 Η έννοια της συνάρτησης. Γραφική παράσταση συνάρτησης.

Η έννοια της συνάρτησης είναι μία από τις πλέον βασικές έννοιες των Μαθηματικών. Όπως συμβαίνει και με πολλές άλλες μαθηματικές έννοιες, τη χρησιμοποιούμε αρκετά συχνά στις καθημερινές μας δραστηριότητες, χωρίς να το συνειδητοποιούμε. Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της συνάρτησης προκύπτει με τελείως φυσιολογικό τρόπο σε όλες τις περιπτώσεις, όπου η τιμή μιας ποσότητας εξαρτάται με συγκεκριμένο τρόπο από τις τιμές κάποιας άλλης. Για παράδειγμα:

α) Το ποσό του φόρου (Φ.Π.Α.) που πληρώνουμε κατά την αγορά ενός προϊόντος εξαρτάται από την τιμή πώλησής του. Έτσι, αν το προϊόν που αγοράζουμε έχει τιμή x και υπόκειται σε Φ.Π.Α. 24%, γνωρίζουμε ότι η επιβάρυνση του προϊόντος λόγω του Φ.Π.Α. θα είναι ίση με $y = 0{,}24x$.

β) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου εξαρτάται από το μήκος της πλευράς του. Πιο συγκεκριμένα, αν το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι ίσο με x, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι ίσο με $y = x^2$.

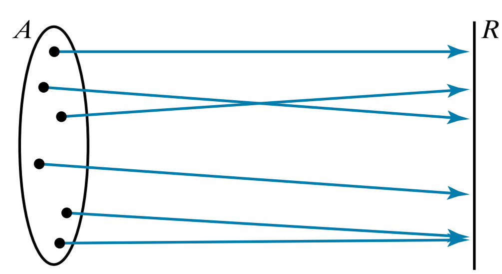
Στα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι οι τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας, που ονομάζουμε y, εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής ποσότητας, που ονομάζουμε x. Επιπλέον, είναι φανερό ότι, αν γνωρίζουμε την τιμή της μεταβλητής x, τότε καθορίζεται με μοναδικό τρόπο η τιμή της μεταβλητής y. Στις περιπτώσεις αυτές θα λέμε ότι έχουμε μια συνάρτηση της μεταβλητής x (σχ. 5.1α).

> Ονομάζουμε πραγματική ***συνάρτηση*** ορισμένη σε ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών ($A \subseteq \mathbb{R}$), έναν κανόνα f, που κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός y, τον οποίο συμβολίζουμε $y = f(x)$.
>
> Το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών για τους οποίους ορίζεται η f ονομάζεται ***πεδίο ορισμού*** (domain) της f και συνήθως συμβολίζεται με $D(f)$. Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της f ονομάζεται ***σύνολο τιμών*** (range) της f και συμβολίζεται με $R(f)$, δηλαδή $R(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$.

Ο ορισμός αυτός αφορά στις λεγόμενες πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, αφού τόσο τα στοιχεία x, όσο και τα στοιχεία y, στα οποία αντιστοιχίζονται αυτά, προέρχονται από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δεδομένου ότι στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιες περιπτώσεις, θα χρησιμοποιούμε τον όρο *συνάρτηση* και θα εννοούμε τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, χωρίς να το αναφέρουμε ρητά κάθε φορά. Επίσης, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα θεωρούμε ότι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων τις οποίες μελετάμε είναι ***ένα διάστημα*** ή ***μια ένωση διαστημάτων*** (εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό).

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha<\beta$, τότε ονομάζουμε διαστήματα με άκρα τα α, β καθένα από τα σύνολα $(\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$, $[\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \le x \le \beta\}$, $[\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \le x < \beta\}$ και $(\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \le \beta\}$. Το πρώτο από τα προαναφερθέντα διαστήματα ονομάζεται ***ανοικτό*** διάστημα, το δεύτερο ***κλειστό***, ενώ τα δύο τελευταία ***ημιανοιχτά*** διαστήματα.

Επίσης, αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε ***μη φραγμένα*** διαστήματα με άκρο το α καθένα από τα σύνολα: $(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\}$, $[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge \alpha\}$, $(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$, $(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le \alpha\}$.



Σχ. 5.1α
Συνάρτηση ορισμένη στο A

Το σύνολο $\mathbb{R}$ ορισμένες φορές συμβολίζεται υπό μορφή διαστήματος ως $(-\infty,+\infty)$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, με τον όρο ***περιοχή του σημείου*** ξ εννοούμε ένα ανοιχτό διάστημα της μορφής $(\xi-\delta,\ \xi+\delta)$, όπου δ είναι ένας θετικός αριθμός. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, ονομάζονται ***εσωτερικά σημεία***[1] του Δ.

Κατά την περιγραφή μιας συνάρτησης f, η μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή του πεδίου ορισμού $A = D(f)$ ονομάζεται ***ανεξάρτητη*** μεταβλητή και συμβολίζεται συνήθως με x. Κάθε τιμή του x δημιουργεί μοναδική τιμή για τη δεύτερη μεταβλητή ποσότητα, την ***εξαρτημένη*** μεταβλητή. Ο μοναδικός αριθμός y, στον οποίο αντιστοιχίζεται το στοιχείο x του $A = D(f)$, ονομάζεται ***τιμή της f στο x*** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Μια συνάρτηση f μπορεί να παρασταθεί με τους παρακάτω δύο τρόπους:

$$\begin{aligned} f: A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad y = f(x),\ x \in A,$$

Η φράση *«η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο B»* σημαίνει ότι $B \subseteq D(f)$. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται το σύνολο

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \ \text{ για } x \in B\} = \{f(x) \mid x \in B\}.$$

Προφανώς το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το σύνολο $f(A)$.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, για να οριστεί μια συνάρτηση f, αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

α) Το πεδίο ορισμού της και

β) Η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της (ο κανόνας με τον οποίο κάθε x αντιστοιχίζεται στο $f(x)$).

Στα δύο παραδείγματα που δόθηκαν στην αρχή της παρούσας παραγράφου έχουμε:

α) $A = [0, +\infty)$, αφού η τιμή x του προϊόντος δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές και $f(x) = 0{,}24x$.
Θα μπορούσαμε επίσης να γράψουμε:

$$\begin{aligned} f: [0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0{,}24x \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad y = 0{,}24x,\ x \in [0, +\infty).$$

β) $A = [0, +\infty)$, αφού το μήκος x της πλευράς του τετραγώνου δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές και $f(x) = x^2$.

Αρκετά συχνά, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών x (δηλ. το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$), για το οποίο το $f(x)$ έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε:

«δίνεται η συνάρτηση $f: [3,+\infty) \to \mathrm{R}$ με $f(x) = \sqrt{x-3}$»

θα λέμε:

«δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x-3}$»

ή ακόμη πιο σύντομα:

«δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3}$» ή «δίνεται η συνάρτηση $y = \sqrt{x-3}$ ».

Γνωρίζοντας ότι η τετραγωνική ρίζα ορίζεται μόνο όταν το υπόριζο είναι μη αρνητικό, συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει να ισχύει $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ και επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης που δόθηκε είναι το $A = [3,+\infty)$.

---

1. Γενικότερα, εσωτερικά σημεία ενός συνόλου Δ (όχι απαραίτητα διαστήματος) ονομάζονται τα σημεία $\xi \in \mathbb{R}$, για τα οποία μπορεί να βρεθεί ένας θετικός αριθμός ε τέτοιος, ώστε να ισχύει $(\xi - \varepsilon,\ \xi + \varepsilon) \subseteq \Delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.1.

Η πίεση που ασκείται σε ένα σώμα στη θάλασσα εξαρτάται από το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Για να βρούμε την πίεση κάθε φορά, διαιρούμε το βάθος (σε μέτρα) με 33, προσθέτουμε 1 στο πηλίκο και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με 15.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f, ο οποίος εκφράζει την πίεση που ασκείται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε βάθος x m.

β) Ποια θα είναι η πίεση σε βάθος 198 m;

Λύση.

α) Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε, αν x m είναι το βάθος, τότε η αντίστοιχη πίεση θα είναι ίση με $\left(\frac{x}{33}+1\right)\cdot 15$. Έτσι ο τύπος της συνάρτησης f που αντιστοιχίζει στο βάθος x την πίεση που ασκείται σε ένα σώμα θα είναι

$$y=15\left(\frac{x}{33}+1\right)=\frac{15}{33}x+15 \quad \text{ή} \quad f(x)=15\left(\frac{x}{33}+1\right)=\frac{15}{33}x+15.$$

β) Σε βάθος $x = 198$ m η πίεση που ασκείται σε ένα σώμα θα είναι ίση με:

$$y=f(198)=15\left(\frac{198}{33}+1\right)=15\cdot(6+1)=105 \text{ (μονάδες πίεσης).}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.2.

Ένας εργάτης τοποθετεί βίδες σε συσκευασίες (κουτιά). Το πλήθος των βιδών, σε εκατοντάδες, που τοποθετεί σε x ώρες, δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+30x$.

α) Πόσες βίδες θα τοποθετήσει σε συσκευασίες ο εργάτης ως τη 1 μ.μ., αν ξεκίνησε την εργασία του στις 7 π.μ.;

β) Πόσες βίδες θα έχει τοποθετήσει σε συσκευασίες μεταξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ.;

Λύση.

α) Στις 7 το πρωί είναι $x = 0$ και το πλήθος των βιδών που θα έχει τοποθετήσει ο εργάτης είναι ίσος με $f(0) = 0$ (το οποίο συμφωνεί με ό,τι θα αναμέναμε, αφού τότε ξεκινά να τοποθετεί βίδες).

Μέχρι τη 1 μ.μ θα έχει εργασθεί $13-7 = 6$ ώρες, οπότε θα έχει τοποθετήσει

$$f(6)=\frac{1}{9}6^3-6^2+30\cdot 6=168$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 16.800 βίδες).

β) Μεταξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ. θα έχει τοποθετήσει $f(6)-f(3)$ βίδες, αφού έως τις 10:00 έχει εργαστεί 3 ώρες και έως τη 1 έχει εργαστεί 6 ώρες.

Άρα

$$f(6)-f(3)=[\frac{1}{9}6^3-6^2+30\cdot 6]-[\frac{1}{9}3^3-3^2+30\cdot 3]=168-86=82$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 8.200 βίδες).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$

Λύση.

Η συνάρτηση f ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους έχει νόημα η παράσταση $\sqrt{9x^2-16}$, δηλαδή για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $9x^2-16\geq 0$. Όμως:

$$9x^2-16\geq 0 \Leftrightarrow 9x^2\geq 16 \Leftrightarrow x^2\geq\frac{16}{9}\Leftrightarrow |x|\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3} \text{ ή } x\leq-\frac{4}{3}$$

οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα είναι το

$$A=(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[\frac{4}{3},+\infty).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.4.

Το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, σε €, δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=x^4-3x^2+100x+80.$$

α) Να υπολογιστεί το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος.
β) Να βρεθεί και να ερμηνευθεί το $f(0)$.

Λύση.

α) Το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος θα είναι η τιμή της συνάρτησης f για x = 3, δηλαδή $f(x) = 3^4-3\cdot 3^2+100\cdot 3+80 = 434$€.

β) Αν θέσουμε στον τύπο της συνάρτησης $x = 0$, παίρνουμε

$$f(0)=0^4-3\cdot 0^2+100\cdot 0+80=80.$$

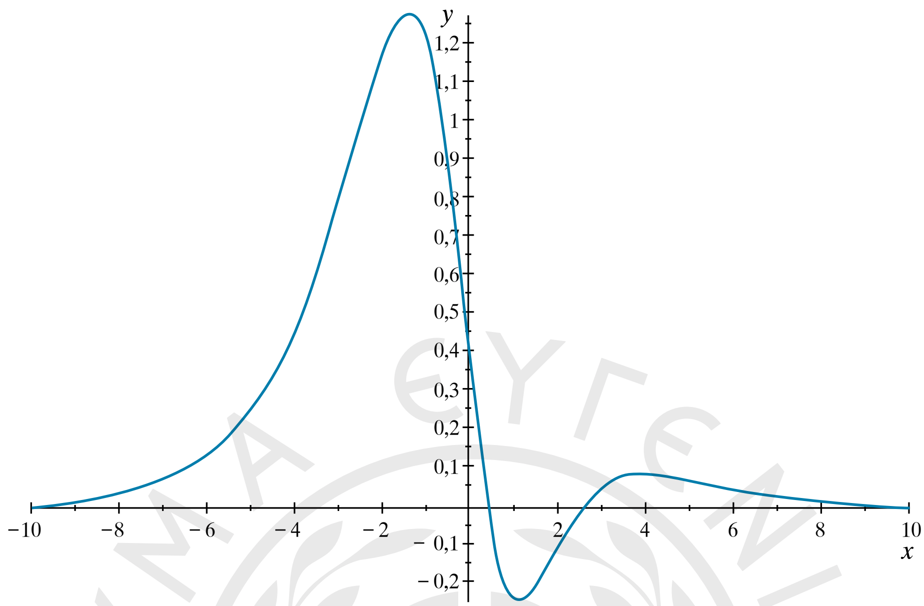
δηλαδή έχουμε $f(0)=80$. Το ποσό αυτό μπορούμε να πούμε ότι θα αντιστοιχεί στα «πάγια» έξοδα της επιχείρησης, τα οποία γίνονται είτε παράγει μονάδες είτε όχι. Τέτοια έξοδα μπορεί να είναι για παράδειγμα το ενοίκιο, οι λογαριασμοί νερού, ρεύματος κ.λπ.

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε πολλές οικονομικές εφαρμογές, όπως η παρούσα, η ανεξάρτητη μεταβλητή x λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές. Είναι όμως αρκετά συνηθισμένο σ' αυτές τις περιπτώσεις να θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης που χρησιμοποιούμε ένα διάστημα ή μία ένωση διαστημάτων A (στην οποία φυσικά να περιέχονται οι ακέραιες τιμές που μας ενδιαφέρουν) και να τη μελετάμε σε ολόκληρο το A. ΄Ετσι, ενώ στο συγκεκριμένο παράδειγμα το x μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0, 1, 2,... (αφού παριστάνει αριθμό μονάδων ενός προϊόντος), ως πεδίο ορισμού της f χρησιμοποιούμε το $A=[0,+\infty)$.

΄Εστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x\in A$, ονομάζεται ***γραφική παράσταση*** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f (σχ. 5.1β)[2]. Η γραφική

2. Συνήθως το σύμβολο C_f χρησιμοποιείται για να παραστήσει το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2=\{(x,f(x))\,|\,x\in D(f)\}$, το οποίο ονομάζεται ***γράφημα*** της f. Στην περίπτωση που το γράφημα παρίσταται στο καρτεσιανό επίπεδο, τότε έχουμε τη ***γραφική παράσταση*** της f. Ωστόσο, στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου, θα χρησιμοποιούμε (καταχρηστικά) την έκφραση «γραφική παράσταση C_f της f».

παράσταση μιας συνάρτησης f έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα ότι η (εξίσωση) $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην C_f. Επομένως, μπορούμε να πουμε ότι η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.



Σχ. 5.1β
Γραφική παράσταση

Εξετάζοντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να πάρουμε αρκετές πληροφορίες γι' αυτήν, όπως για παράδειγμα, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών της, πού τέμνει τους άξονες, αν σε κάποιο σημείο $x = a$ παίρνει τιμή μεγαλύτερη από ό,τι σε όλα τα άλλα σημεία $x \neq a$ κ.λπ.

Επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A, κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y = f(x) \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη x. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει, με τη γραφική παράσταση της f, το πολύ ένα κοινό σημείο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1γ.

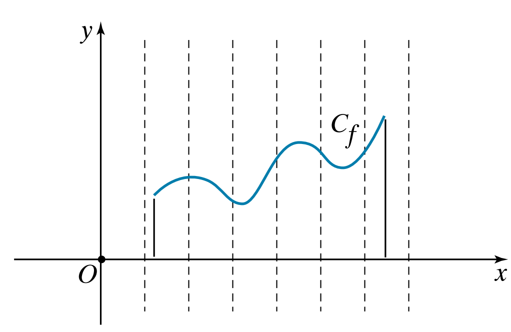
Έτσι, από τις 4 γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.1δ μόνο η (α) και η (δ) είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, το πεδίο ορισμού της μπορεί να προκύψει εύκολα ως το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f. Επομένως, ένα σημείο x_0 θα ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, αν και μόνο αν η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ έχει ένα κοινό σημείο με την C_f (σχ. 5.1ε).

Ομοίως, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f. Έτσι ένας πραγματικός αριθμός β θα ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f, αν η ευθεία με εξίσωση $y = \beta$ τέμνει την C_f σε ***ένα*** ή περισσότερα σημεία C_f (σχ. 5.1στ).

Πρακτικά, από τις παραπάνω διαπιστώσεις προκύπτουν τα εξής:

α) Η προβολή της C_f στον άξονα των x (δηλ. το σύνολο των τετμημένων όλων των σημείων της C_f) δίνει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (σχ. 5.1ζ).



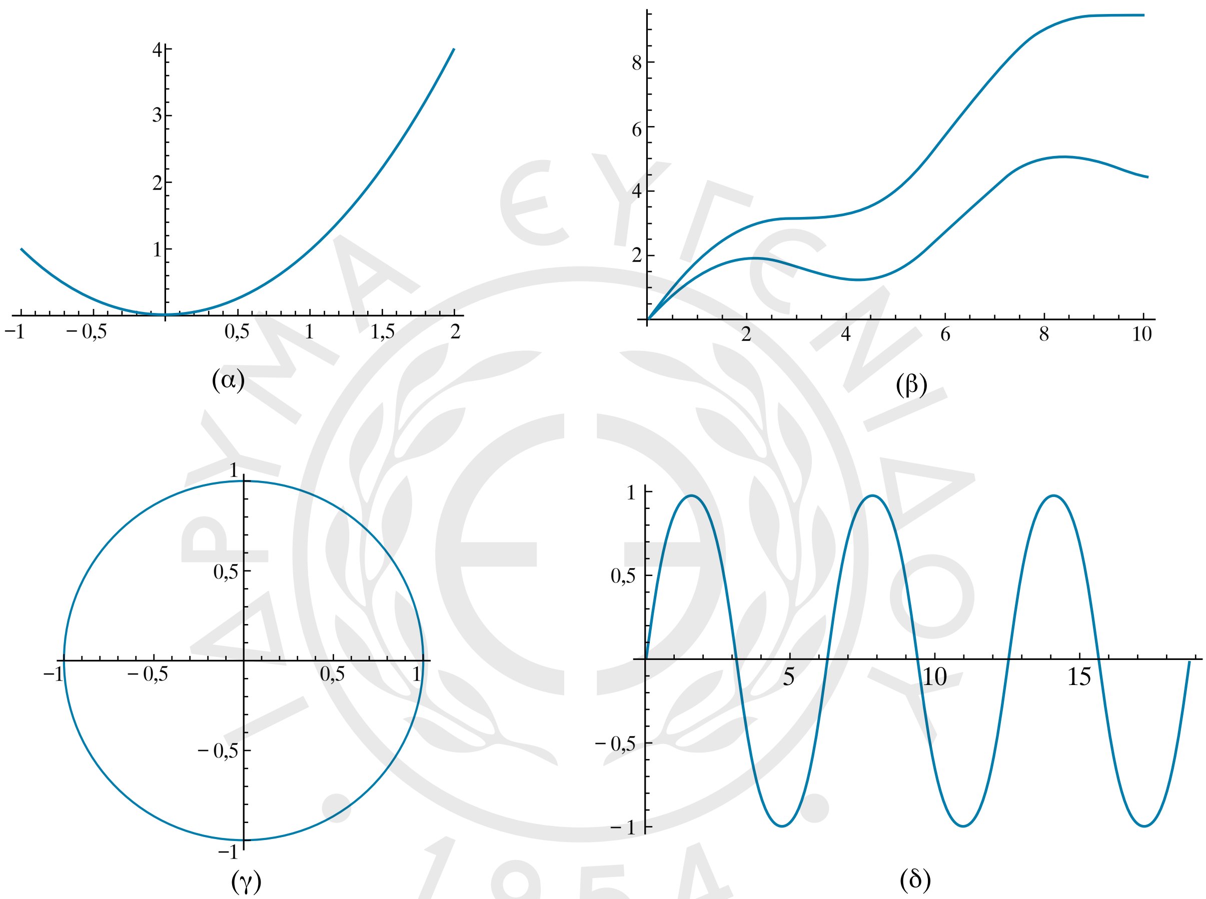
Σχ. 5.1γ

β) Η προβολή της C_f στον άξονα των y (δηλ. το σύνολο των τεταγμένων όλων των σημείων της C_f) δίνει το σύνολο τιμών της (σχ. 5.1η).

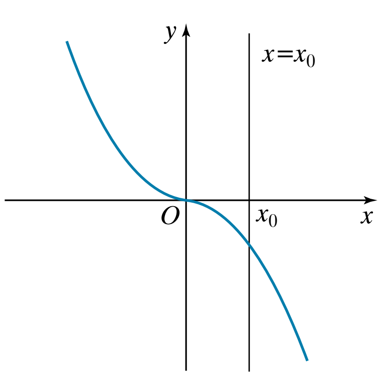
Για παράδειγμα, παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$ που δίνεται στο σχήμα 5.1θ, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο

$$A=(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[\frac{4}{3},+\infty).$$

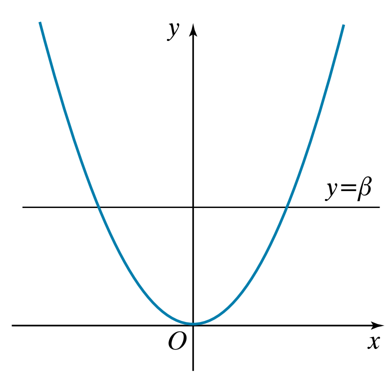
(όπως ακριβώς το βρήκαμε στο παράδειγμα 5.1.3), ενώ το σύνολο τιμών της είναι το $B=[0,+\infty)$.



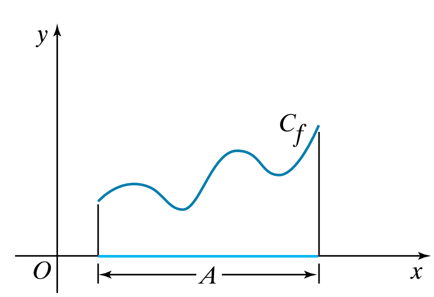
Σχ. 5.1δ



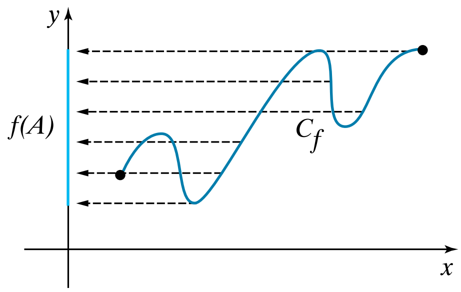
Σχ. 5.1ε



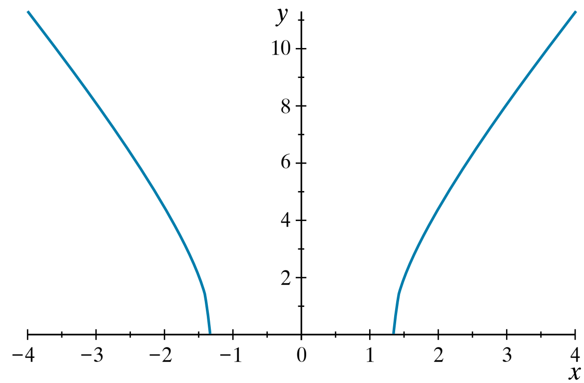
Σχ. 5.1στ



Σχ. 5.1ζ



Σχ. 5.1η



Σχ. 5.1θ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}-3x-1 & \text{αν } x<1\\ 6x-7 & \text{αν } x\geq 1.\end{cases}$

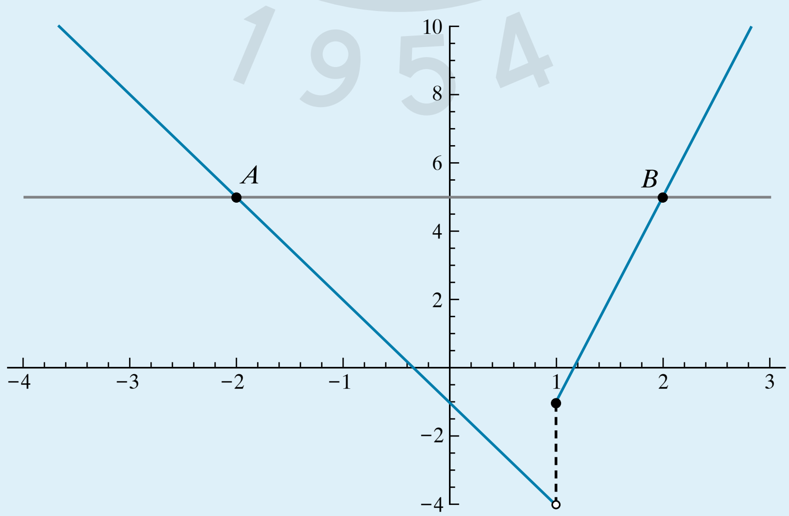
α) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.
β) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 5$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αφού τα $y=f(x)$ ορίζονται για κάθε τιμή του x. Για $x<1$, η C_f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y=-3x-1$, που έχει κλίση -3 και φτάνει μέχρι το σημείο $(1,-4)$ χωρίς το τελευταίο να συμπεριλαμβάνεται στην C_f. Για $x\geq 1$ η C_f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y=6x-7$, που έχει κλίση 6 και ξεκινάει από το σημείο $(1,-1)$, το οποίο όμως τώρα συμπεριλαμβάνεται στην C_f.

΄Ετσι παίρνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 5.1ι, η οποία αποτελείται από δύο ημιευθείες.

β) Η ευθεία με εξίσωση $y=5$ τέμνει τις δύο ημιευθείες της C_f σε δύο σημεία $A(x_1, 5)$ και $B(x_1, 5)$. Άρα θα έχουμε: $-3x_1-1=5$ και $6x_2-7=5$, οπότε $x_1=-2$ και $x_2=2$. ΄Ετσι οι πραγμα-



Σχ. 5.1ι

τικοί αριθμοί x για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες από το 5 θα είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται επάνω από την ευθεία με εξίσωση $y=5$. Δηλαδή, $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\beta, \gamma, \in \mathbb{R}$.

α) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ, έτσι ώστε το σημείο $(1, 2)$ να ανήκει στην C_f;

β) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ, έτσι ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$;

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, αν ισχύουν και οι δύο συνθήκες που ζητήθηκαν στα ερωτήματα (α) και (β).

Λύση.

α) Για να ανήκει το σημείο $(1, 2)$ στη γραφική παράσταση της f, με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, θα πρέπει να ισχύει $f(1)=2$, οπότε θα έχουμε $1+\beta+\gamma=2 \Leftrightarrow \beta+\gamma=1$.

β) Για να τέμνει η C_f τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,3)$, θα πρέπει να ισχύει $f(0)=3$, οπότε θα έχουμε $\gamma = 3$.

γ) Τώρα ζητάμε να ισχύουν και οι δύο σχέσεις που βρήκαμε προηγουμένως, οπότε παίρνουμε

$$\left.\begin{matrix} \beta+\gamma=1 \\ \gamma=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \beta=-2 \\ \gamma=3 \end{matrix}\right\}$$

και η f γίνεται $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Ασκήσεις.

5.1.1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x<0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(0), f(1)$ της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τις τιμές $g(-1), g(0), g(1), g(-1/2), g(1/2)$ της συνάρτησης g. Τι παρατηρείτε;

5.1.2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ β) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+7}{(x-1)(x+7)}$

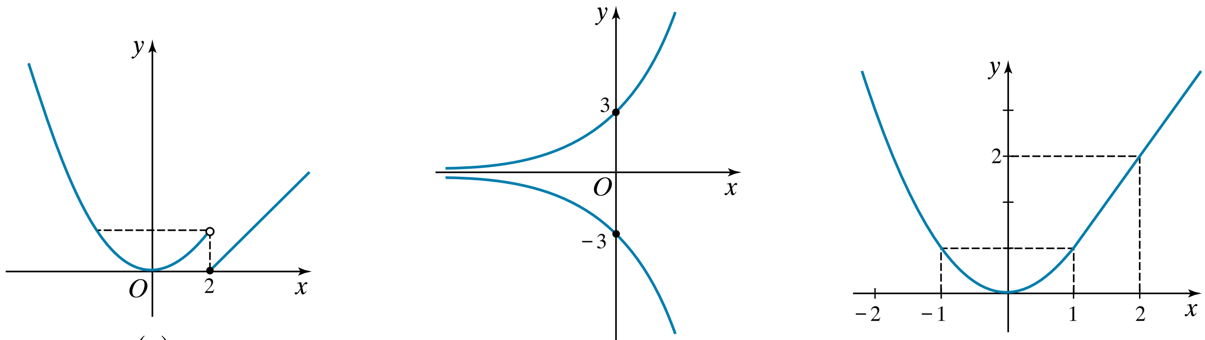
γ) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-4}$ δ) $f(x) = \left|\dfrac{x-4}{x^2+9}\right|$

5.1.3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \sqrt{\sqrt{3}-|x|}$ β) $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-16}$

γ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x-2}}$ δ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$

5.1.4. Να εξεταστεί ποια από τα σχήματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.1ια αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.



(α) (β) (γ)

Σχ. 5.1ια

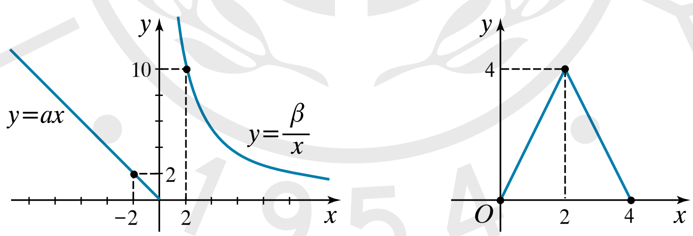
5.1.5. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

α) $f(x) = x^2 - 9x + 20$ β) $f(x) = (3x-1)^5$ γ) $f(x) = \left|\dfrac{2x-1}{x^2+1}\right|$

5.1.6. Να δώσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = |2x-3|$ β) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0<x\le 2 \\ x, & x>2 \end{cases}$

5.1.7. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων, των οποίων η γραφική παράσταση δίνεται παραπάνω (σχ. 5.1ιβ).



(α) (β)

Σχ. 5.1ιβ

5.2 Ισότητα, πράξεις και είδη συναρτήσεων.

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f και g με τύπους

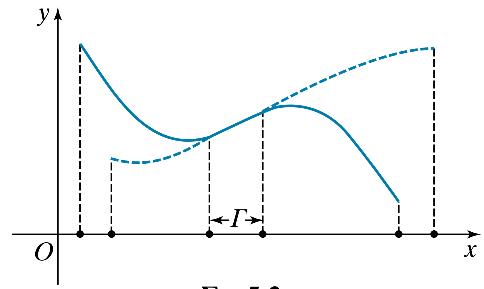
$$f(x) = \frac{4x^5+8x}{x^4+2} \text{ και } g(x) = 4x,$$

οι οποίες έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Είναι προφανές ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(x) = \frac{4x^5+8x}{x^4+2} = \frac{4x(x^4+2)}{x^4+2} = 4x = g(x).$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ***ίσες***.

Δύο συναρτήσεις f και g είναι ***ίσες*** αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$. Τότε θα γράφουμε $f = g$.



Σχ. 5.2α

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να συμβεί για δύο συναρτήσεις έστω f, g, να ισχύει η ισότητα $f(x) = g(x)$ μόνο σε ένα υποσύνολο Γ των πεδίων ορισμού τους (σχ. 5.2α). Τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ***ίσες στο σύνολο Γ***.

Αρκετά συχνά στην πράξη χρειάζεται να συνδυαστούν δύο ή περισσότερες συναρτήσεις μέσω των συνηθισμένων αλγεβρικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μια ναυτιλιακή εταιρεία κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο προϊόν, το οποίο, για να ολοκληρωθεί η διαδικασία κατασκευής του, χρειάζεται να περάσει από δύο διαφορετικά στάδια επεξεργασίας. Το κόστος επεξεργασίας x μονάδων του προϊόντος στο πρώτο στάδιο δίνεται από τη συνάρτηση f με $f(x) = 5x^2 + 4x+1$, ενώ το κόστος επεξεργασίας x μονάδων του προϊόντος στο δεύτερο στάδιο δίνεται από την g με $g(x) = 5x + 7$. Προφανώς, το συνολικό κόστος κατασκευής x μονάδων του προϊόντος θα βρίσκεται από το άθροισμα:

$$f(x)+g(x)=(5x^2+4x+1)+(5x+7)=5x^2+9x+8.$$

Ορίζεται έτσι μια νέα συνάρτηση h με το ίδιο πεδίο ορισμού A, για την οποία ισχύει $h(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in A$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ***άθροισμα των συναρτήσεων f και g*** και συμβολίζεται με $f + g$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να εισάγουμε και τις υπόλοιπες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

Αν f και g είναι συναρτήσεις με ***κοινό πεδίο ορισμού A***, τότε μπορούμε να ορίσουμε:

α) ***Το άθροισμα*** $f+g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in A$.

β) ***Τη διαφορά*** $f-g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f-g)(x) = f(x)-g(x), x \in A$.

γ) ***Το γινόμενο*** cf αριθμού c με τη συνάρτηση f με τύπο: $(cf)(x) = cf(x), x \in A$.

δ) ***Το γινόμενο*** fg των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(fg)(x) = f(x)g(x), x \in A$.

ε) ***Το πηλίκο*** $\dfrac{f}{g}$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Το άθροισμα και γινόμενο συναρτήσεων ορίζεται ανάλογα και για περισσότερες των δύο συναρτήσεις. Στην περίπτωση που έχουμε γινόμενο μίας συνάρτησης f με τον εαυτό της κ φορές θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο f^{κ} (όπως ακριβώς κάνουμε και για το γινόμενο ενός αριθμού με τον εαυτό του κ φορές), δηλαδή θα έχουμε $f^{\kappa}(x)=(f(x))^{\kappa}$.

Στην περίπτωση που, κατά την εκτέλεση πράξεων μεταξύ συναρτήσεων, τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε είναι διαφορετικά, οι πράξεις θα θεωρούμε ότι ορίζονται μόνο ***στην τομή των πεδίων ορισμού τους***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.1.

Το κόστος παραγωγής και διάθεσης x μονάδων ενός προϊόντος (σε χιλιάδες) που κατασκευάζει μια εταιρεία είναι ίσο με $10x+100$ χρηματικές μονάδες, ενώ τα αντίστοιχα έσοδα από τις πωλήσεις x μονάδων προϊόντος είναι ίσα με $15x$ χρηματικές μονάδες.

α) Να δώσετε τη συνάρτηση f που εκφράζει το κόστος παραγωγής και διάθεσης x μονάδων του προϊόντος.

β) Να δώσετε τη συνάρτηση g που εκφράζει τα έσοδα από τις πωλήσεις x μονάδων του προϊόντος.

γ) Να δώσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g σε κοινό σύστημα συντεταγμένων.

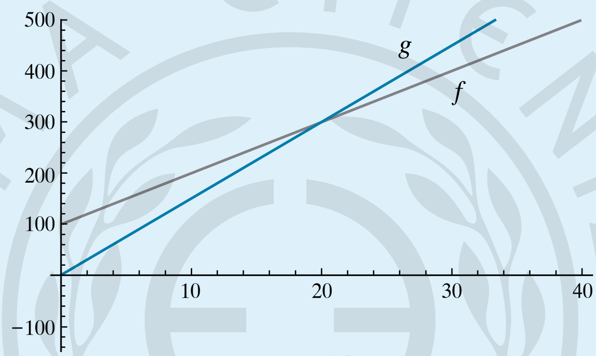
δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση που δίνει το κέρδος από την πώληση x μονάδων προϊόντος, να δώσετε την γραφική της παράσταση και να βρείτε για ποιες τιμές του x η εταιρεία έχει κέρδος από την πώληση του προϊόντος.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση, το κόστος παραγωγής και διάθεσης x μονάδων ενός προϊόντος (σε χιλιάδες) που κατασκευάζει μια εταιρεία θα δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=10x+100$.

β) Τα έσοδα από τις πωλήσεις x μονάδων προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $g(x)=15x$.

γ) Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g σε κοινό σύστημα συντεταγμένων δίνεται στο σχήμα 5.2β.



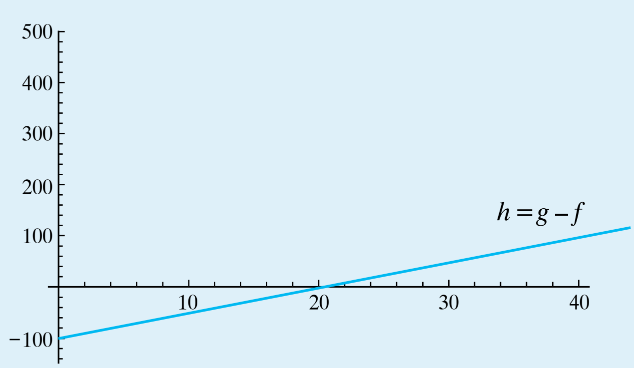
Σχ. 5.2β

δ) Το κέρδος από την πώληση x μονάδων του προϊόντος θα είναι η διαφορά των εσόδων από την πώληση x μονάδων του προϊόντος και του αντίστοιχου κόστους παραγωγής τους. Θα είναι δηλαδή η τιμή της συνάρτησης $h=g-f$ στο x. Έχουμε:

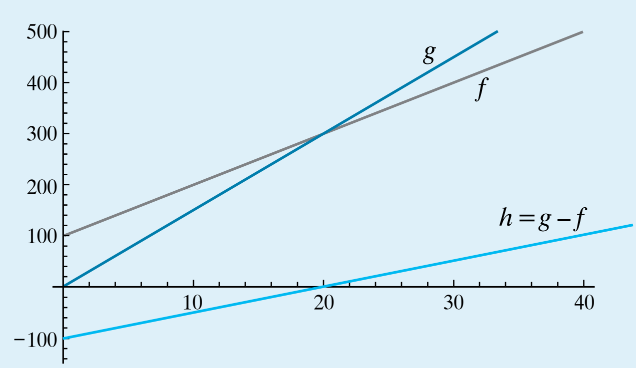
$$h(x)=g(x)-f(x)=15x-(10x+100)=5x-100$$

και η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα 5.2γ. Παρατηρούμε ότι η C_h τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $A(20,\ 0)$, που σημαίνει ότι για να έχουμε κέρδος, πρέπει να κατασκευαστούν πάνω από 20 μονάδες προϊόντος.

Το σημείο $A(20,\ 0)$ αντιστοιχεί προφανώς στο σημείο τομής των δύο ευθειών του σχήματος 5.2β. Στο σχήμα 5.2δ έχει γίνει γραφική παράσταση και των τριών ευθειών που μας ενδιαφέρουν.



Σχ. 5.2γ



Σχ. 5.2δ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.2.

Έστω ότι γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, δηλαδή την C_f. Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $g = -f$, η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x) = -f(x)$.

β) $g = |f|$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$$

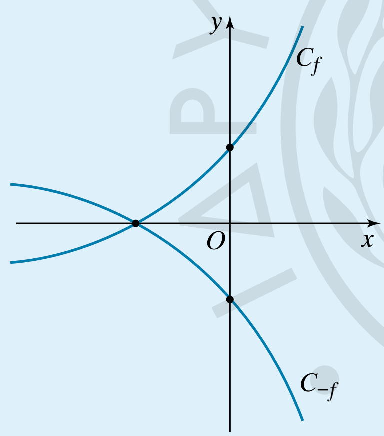
γ) $g = f + c$ (όπου c είναι μια σταθερά), η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x) = f(x) + c$.

Λύση.

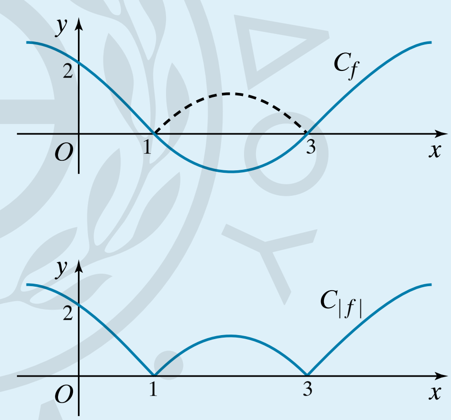
α) Η C_{-f} θα είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$ (σχ. 5.2ε).

β) Η $C_{|f|}$ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_f όπου είναι $f(x) \geq 0$, ενώ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_{-f}, όπου είναι $f(x) < 0$ (σχ. 5.2στ).

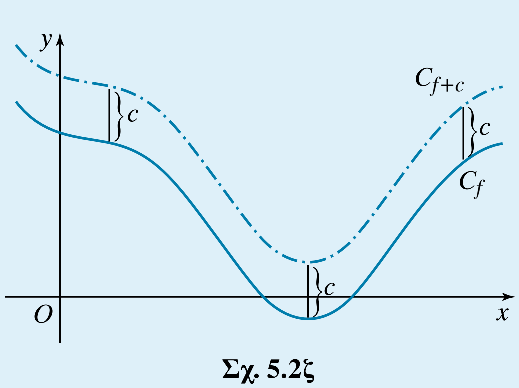
γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = f(x) + c$, $c>0$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα πάνω αν $c > 0$ (σχ. 5.2ζ) ή προς τα κάτω αν $c < 0$ (σχ. 5.2η).



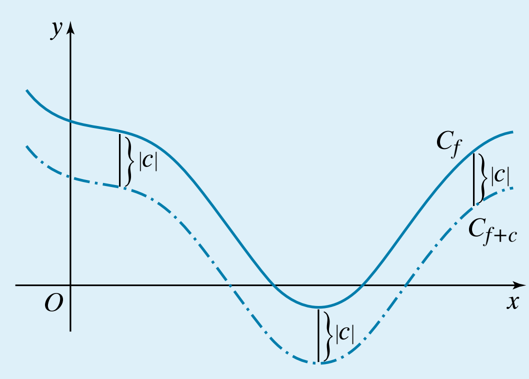
Σχ. 5.2ε



Σχ. 5.2στ

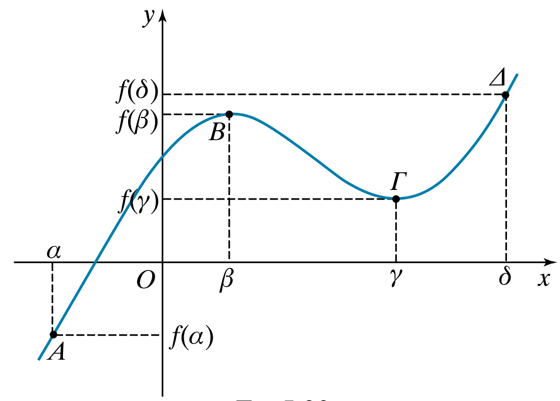


Σχ. 5.2ζ



Σχ. 5.2η

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε πού αυτή «ανεβαίνει» και πού «κατεβαίνει». Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f που φαίνεται στο σχήμα 5.2θ, ανεβαίνει από το σημείο A μέχρι το σημείο B (δηλ. οι τιμές της f αυξάνονται, καθώς το x κινείται από το α προς το β), κατεβαίνει από το σημείο B μέχρι το σημείο Γ (δηλ. οι τιμές της μειώνονται, καθώς το x κινείται από το β προς το γ) και πάλι ανεβαίνει από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Δ. Λέμε τότε ότι η συνάρτηση f είναι ***γνησίως αύξουσα*** στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\gamma, \delta]$, ενώ είναι ***γνησίως φθίνουσα*** στο διάστημα $[\beta, \gamma]$.



Σχ. 5.2θ

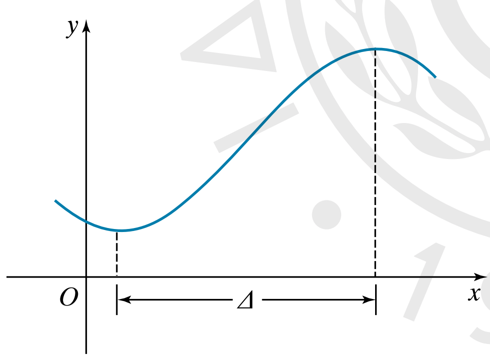
Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και Δ ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της ($\Delta \subseteq A$).

α) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***γνησίως αύξουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (σχ. 5.2ι).

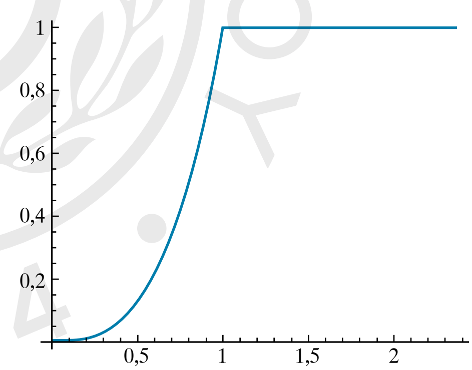
β) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***αύξουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$ (σχ. 5.2ια).

γ) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***γνησίως φθίνουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (σχ. 5.2ιβ).

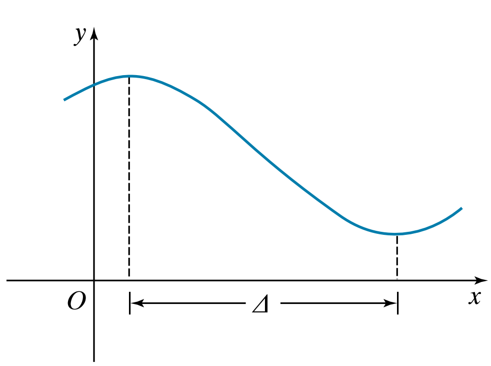
δ) Η συνάρτηση f ονομάζεται ***φθίνουσα*** στο διάστημα Δ, αν για κάθε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$ (σχ. 5.2ιγ).



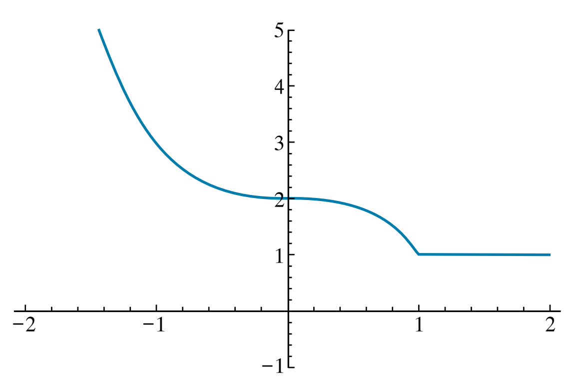
Σχ. 5.2ι



Σχ. 5.2ια



Σχ. 5.2ιβ



Σχ. 5.2ιγ

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, αφού για $0 \le x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

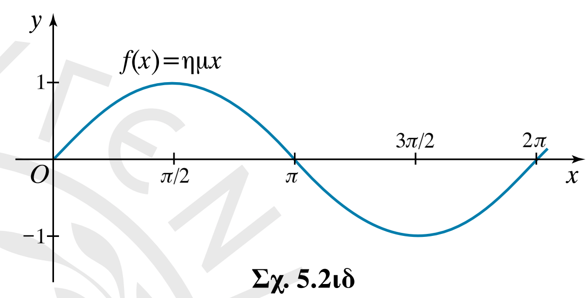
Η ίδια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού για $x_1 < x_2 \le 0$ έχουμε $0 \le -x_2 < -x_1$, οπότε $0 \le x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ονομάζεται ***γνησίως μονότονη*** στο Δ. Αντίστοιχα, αν μια συνάρτηση f είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ονομάζεται ***μονότονη*** στο Δ.

Από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εύκολα αναγνωρίζουμε αν αυτή είναι μονότονη σε κάποιο διάστημα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x,\ x \in [0,2\pi]$$

της οποίας η γραφική παράσταση εικονίζεται στο σχήμα 5.2ιδ, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0,\frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.



Σχ. 5.2ιδ

Αν συγκρίνουμε τις δύο γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.2ιε, παρατηρούμε ότι:

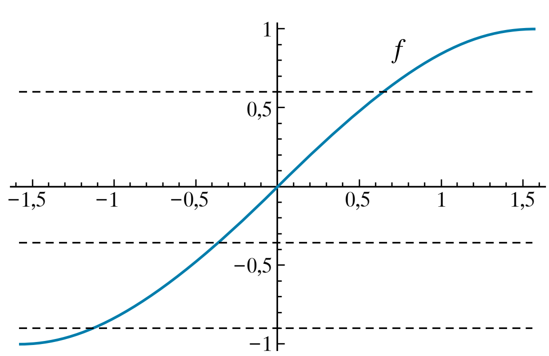
α) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση (α) το πολύ σε ένα σημείο ή ισοδύναμα δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης f με την ίδια τεταγμένη.

β) Υπάρχουν οριζόντιες ευθείες που τέμνουν τη γραφική παράσταση (β) σε περισσότερα από ένα σημεία ή ισοδύναμα υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με την ίδια τεταγμένη.

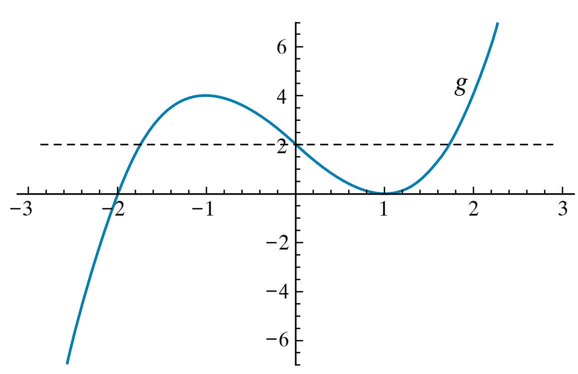
Μια συνάρτηση f που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x λέγεται αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα:

Μία συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ***αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση*** ή συνάρτηση 1-1 (ένα προς ένα), όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \ne x_2$ ισχύει $f(x_1) \ne f(x_2)$. Ισοδύναμα, η f θα είναι αμφιμονοσήμαντη όταν για $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$



(α)



(β)

Σχ. 5.2ιε

Για παράδειγμα:

α) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση αφού, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά (σχ. 5.2ιστ)

$$\alpha x_1 + \beta = \alpha x_2 + \beta \Leftrightarrow \alpha x_1 = \alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 .$$

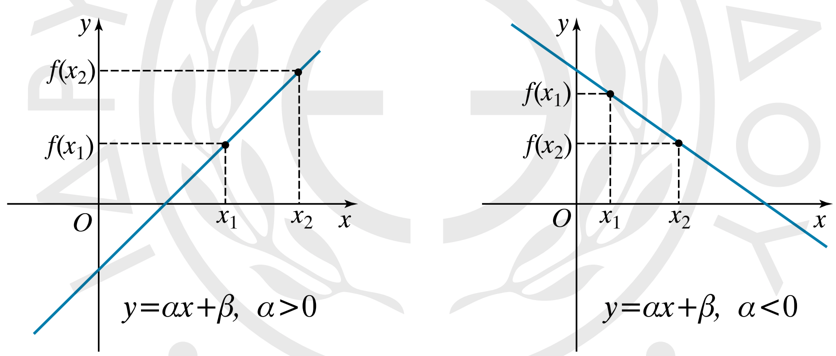
β) Η συνάρτηση $f(x) = 5x^2$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, αφού ισχύει $f(-x) = f(x) = 5x^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό x (π.χ. $f(-2) = f(2) = 20$ αν και είναι $-2 \neq 2$) (σχ. 5.2ιζ).

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι αμφιμονοσήμαντη σε ένα υποσύνολο Δ του πεδίου ορισμού της όταν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

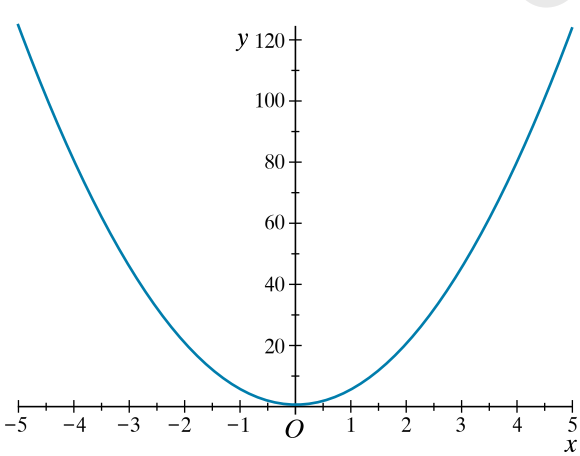
Στη συνέχεια, όταν αναφέρουμε ότι μια συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη ή μονότονη, θα εννοούμε ότι αυτό ισχύει για ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Πράγματι ας θεωρήσουμε μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε θα ισχύει είτε $x_1 < x_2$, είτε $x_1 > x_2$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε, αφού η f είναι αύξουσα, $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ομοίως, αν $x_1 > x_2$, θα έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε και πάλι θα ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ και σύμφωνα με τον ορισμό η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται ότι κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

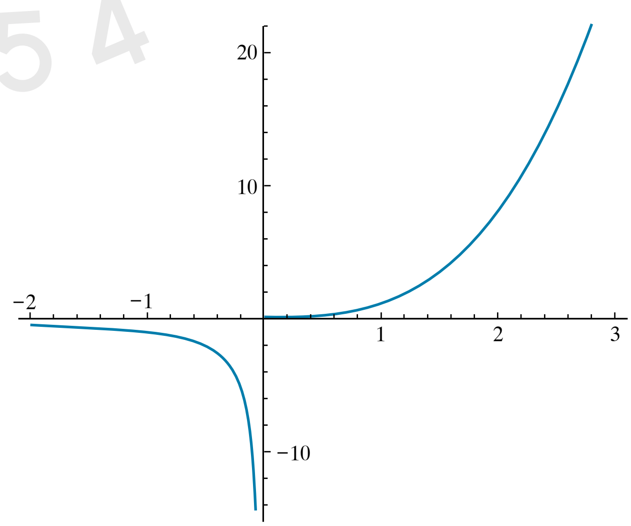
Το αντίστροφο της παραπάνω διαπίστωσης δεν αληθεύει, δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις που είναι αμφιμονοσήμαντες, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. Μία τέτοια συνάρτηση φαίνεται στο σχήμα 5.2ιη.



Σχ. 5.2ιστ



Σχ. 5.2ιζ



Σχ. 5.2ιη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.3.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες:

α) $f(x) = (x–1)\,(x–3)$ β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ γ) $f(x) = ημx$.

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(3)=0$, ενώ $1\neq 3$. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{-1\}$. Αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1+1}=\frac{x_2+2}{x_2+1} \Leftrightarrow (x_1+2)(x_2+1)=(x_2+2)(x_1+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2+x_1+2x_2+2=x_2x_1+x_2+2x_1+2 \Leftrightarrow x_2=x_1\,.$$

γ) Γνωρίζουμε ότι $ημ(x + 2\pi) = ημx$ για κάθε x. Αφού λοιπόν, για παράδειγμα $f(0) = f(2\pi) = 0$, ενώ $0 \neq 2\pi$, η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.4.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι μονότονες.

α) $f(x) = 5x^2 – 7$ β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+1}, & x\neq -1\\ 0, & x=-1\end{cases}$

Λύση.

Ένας συστηματικός τρόπος για να εξετάζουμε τη μονοτονία συναρτήσεων είναι μέσω της διερεύνησης του προσήμου του λεγόμενου ***λόγου μεταβολής***

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad x_1\neq x_2.$$

Αν διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

για κάθε $x_1 \neq x_2$ τα οποία ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα στο Δ. Αντίστοιχα, αν διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$$

για κάθε $x_1 \neq x_2$, τα οποία ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f θα είναι φθίνουσα στο Δ.

α) Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, θα έχουμε:

$$f(x_2)-f(x_1)=(5x_2^2-7)-(5x_1^2-7)=5x_2^2-5x_1^2$$

οπότε

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{5x_2^2-5x_1^2}{x_2-x_1}=\frac{5(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=5(x_2+x_1)\,.$$

Είναι τώρα φανερό ότι:

– Αν $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ (με $x_1 \neq x_2$), θα ισχύει $\lambda = 5(x_2 + x_1) > 0$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [0, +\infty)$.

– Αν $x_1 \leq 0$ και $x_2 \leq 0$ (με $x_1 \neq x_2$), θα ισχύει $\lambda = 5(x_2 + x_1) < 0$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, 0]$.

β) Αν $x_1, x_2, \in \Delta = \mathbb{R} - \{-1\}$ με $x_1 \neq x_2$, θα έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 + 2}{x_2 + 1} - \frac{x_1 + 2}{x_1 + 1} = \frac{(x_2 + 2)(x_1 + 1) - (x_1 + 2)(x_2 + 1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)}$$

οπότε

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Είναι τώρα φανερό ότι:

– Αν $x_1 > -1$ και $x_2 > -1$, θα ισχύει $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, οπότε $\lambda < 0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-1, \infty)$.

– Αν $x_1 < -1$ και $x_2 < -1$ ισχύει και πάλι $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, οπότε $\lambda < 0$. Άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, -1)$.

– Αν θεωρήσουμε έναν αριθμό $x_1 > -1$ και έναν δεύτερο $x_2 < -1$ (ή αντίστροφα), θα ισχύει $(x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0$, οπότε $\lambda > 0$. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$.

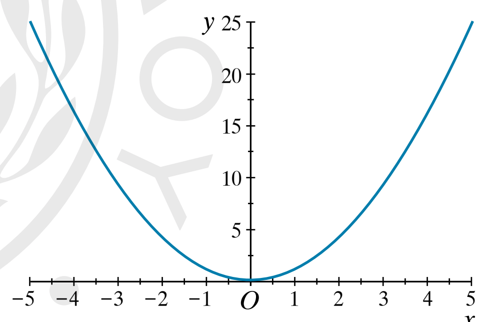
Θα ολοκληρώσουμε την παρούσα παράγραφο αναφέροντας ορισμένες επιπλέον γενικές κατηγορίες συναρτήσεων. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = \text{ημ}x$ (με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{R}$), είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύουν τα εξής:

α) $f(-x) = (-x)^2 = -x^2 = f(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

γ) $h(x + 2\pi) = \text{ημ}(x + 2\pi) = \text{ημ}(x) = h(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Συναρτήσεις που έχουν τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται αντίστοιχα άρτιες, περιττές και περιοδικές.



Σχ. 5.2ιθ
Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$

α) Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ***άρτια***, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$.

β) Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ***περιττή***, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

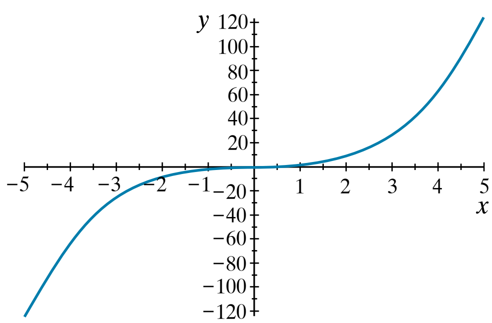
γ) Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ***περιοδική*** με περίοδο τον θετικό αριθμό T, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $x + T \in A$ και ισχύει $f(x + T) = f(x)$.

Από τους ορισμούς αυτούς προκύπτει άμεσα ότι:

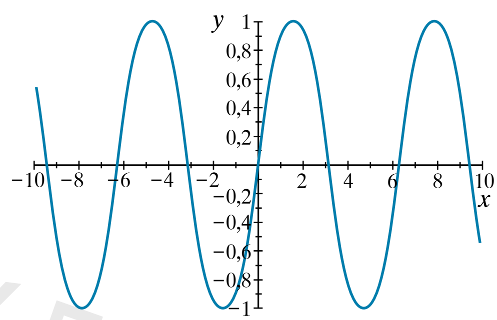
α) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα (άξονα $y'y$) (σχ. 5.2ιθ).

β) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων (σχ. 5.2κ).

γ) Η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης αποτελείται από επαναλαμβανόμενα τμήματα (σε πλάτος μιας περιόδου) (σχ. 5.2κα).



Σχ. 5.2κ
Γραφική παράσταση της συνάρτησης
$f(x) = x^3$



Σχ. 5.2κα
Γραφική παράσταση της συνάρτησης
$f(x) = ημx$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.5.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

α) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ β) $f(x) = \frac{1}{x} + 3x$ γ) $f(x) = x^2 + 2x$.

Λύση.

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 + 2 = x^4 + 3x^2 + 2 = f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} + 3(-x) = -\left(\frac{1}{x} + 3x\right) = -f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$. Όμως:

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x \ , \quad -f(x) = -(x^2 + 2x) = -x^2 - 2x$$

και δεν μπορεί να ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε x [π.χ. έχουμε $f(-1) = -1 \neq 3 = f(1)$), ούτε να ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x (π.χ. έχουμε $f(-1) = -1 \neq -3 = -f(1)$].

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Ασκήσεις.

5.2.1. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f\neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

α) $f(x)=\sqrt{x^2}\,,\ g(x)=(\sqrt{x})^2$ β) $f(x)=\sqrt{x^2}\,,\ g(x)=|x|$

γ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+3\,, & x<0\\ \sqrt{x}+3\,, & x\geq 0\end{cases},\quad g(x)=\sqrt{|x|}+3$ δ) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}+3\,,\ g(x)=\dfrac{|x|}{x}+3$

5.2.2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=|x-2|$, $g(x)=|x+2|$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h=f+g$ χωρίς τη χρήση του συμβόλου της απόλυτης τιμής και στη συνέχεια να δώσετε τη γραφική της παράσταση.

5.2.3. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται από τους τύπους

$$f(x)=\begin{cases}5x-3, & x<0\\ x^2+2\,, & x\geq 0\end{cases}\quad \text{και}\quad g(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<0\\ 3x-x^2-2\,, & x\geq 0\end{cases}$$

να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h=f+g$.

5.2.4. Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g,\ f-g,\ fg,\ \dfrac{f}{g},\ 3f+2g$.

α) $f(x)=x,\ g(x)=\dfrac{1}{x}$ β) $f(x)=\sqrt{x}-3,\ g(x)=\sqrt{x}+3$

γ) $f(x)=-x+2,\ g(x)=x-2$ δ) $f(x)=x^2-1,\ g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

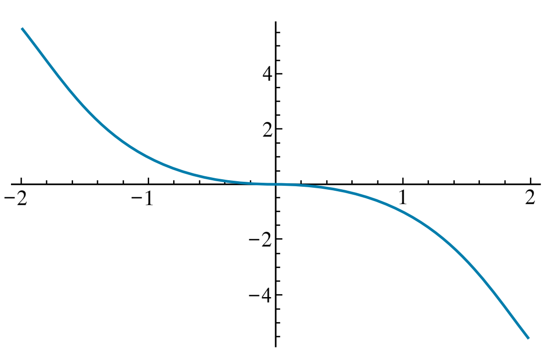
5.2.5. Για καθεμιά από τις γραφικές παραστάσεις (σχ. 5.2κβ) της συνάρτησης f να δοθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g=-f$ και της συνάρτησης $g=|f|$.

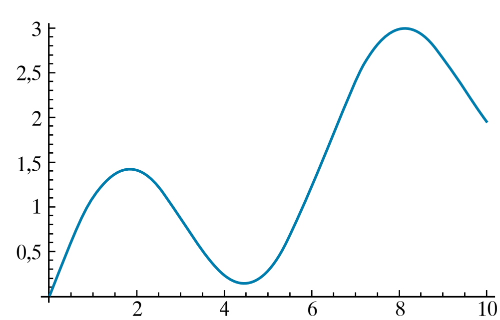
5.2.6. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες.

α) $f(x)=(x-5)(x-7)+1$ β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}-2$ γ) $f(x)=\text{συν}x$ δ) $f(x)=|x-5|+|x-2|+15$

5.2.7. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι μονότονες στο πεδίο ορισμού τους ή σε κάποιο υποσύνολο αυτού.

α) $f(x)=8x^3+x+1$ β) $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x+5}$ γ) $f(x)=|3x-5|$ δ) $f(x)=(x-2)^2+4x$



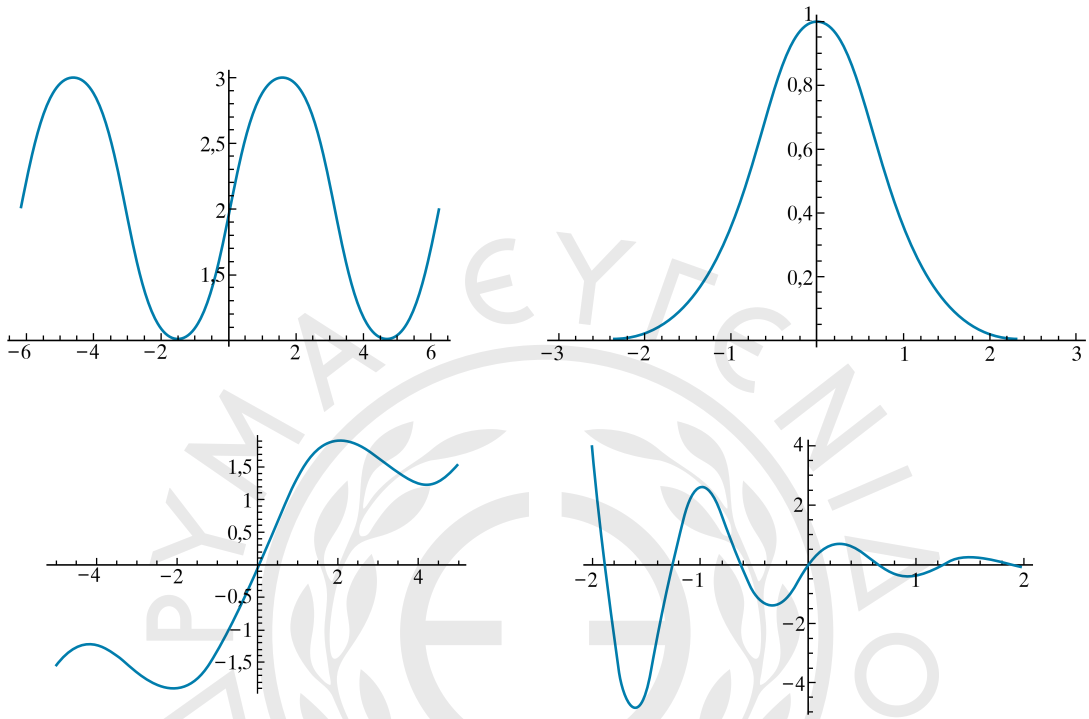


Σχ. 5.2κβ

5.2.8. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

α) $f(x) = x^6 + 3x^4 |x| + 2|x|$ β) $f(x) = \dfrac{1}{|x|} + 3x^2$ γ) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ ημx

5.2.9. Ποιες από τις γραφικές παραστάσεις (σχ. 5.2κγ) αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που είναι άρτιες, περιττές και ποιες σε τίποτε από τα δύο; Ποιες από τις συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές;



Σχ. 5.2κγ

5.2.10. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και c, d είναι δύο πραγματικές σταθερές με $c > 0$, τότε η συνάρτηση $cf + d$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ και α, β είναι δύο πραγματικές σταθερές με $c < 0$, τότε η συνάρτηση $cf + d$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

5.2.11. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσες) σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο Δ.

β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

δ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

5.2.12. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν δύο συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: A \to \mathbb{R}$ είναι άρτιες, τότε η συνάρτηση $f+g$ και η συνάρτηση $f\,g$ είναι επίσης άρτιες.

β) Αν δύο συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: A \to \mathbb{R}$ είναι περιττές, τότε η συνάρτηση $f\,g$ είναι επίσης άρτια.

γ) Αν η συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι άρτια και η συνάρτηση $g\colon A \to \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε η συνάρτηση fg είναι περιττή.

5.2.13. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $f_1(x) = \frac{1}{2}\,(f(z) + f(-x)$, είναι άρτια.

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $f_2(x) = \frac{1}{2}\,(f(z) - f(-x)$, είναι περιττή.

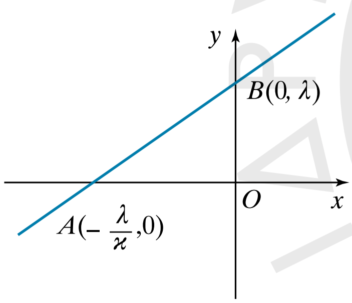
5.3 Στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις.

Στην παράγραφο αυτή θα επεξηγήσομε τις γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων που συναντάμε συχνά και θα αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητές τους.

α) ***Πολυωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού με τύπο*** $f(x) = \varkappa x + \lambda$, $\varkappa \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $A=\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της το $f(A)=\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία που τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία $A(-\frac{\lambda}{\varkappa},0)$ και $B(0,\lambda)$ αντίστοιχα. Για $\varkappa>0$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (σχ. 5.3α), για $\varkappa<0$ είναι γνησίως φθίνουσα (σχ. 5.3β).

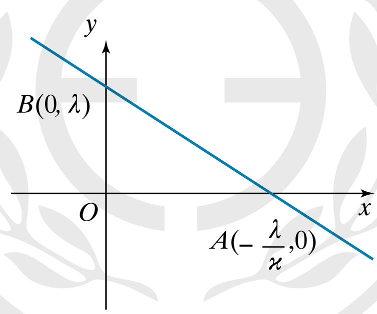
β) ***Πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού με τύπο*** $f(x) = \varkappa x^2$, $\varkappa \neq 0$. Είναι άρτια συνάρτηση (οπότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$) με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Αν $\varkappa>0$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=[0,+\infty)$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varkappa x^2$ για $\varkappa>0$ φαίνεται στο σχήμα 5.3γ.



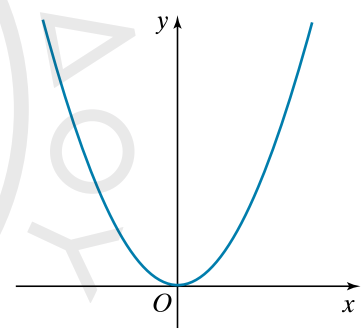
$\varkappa > 0$

Σχ. 5.3α



$\varkappa < 0$

Σχ. 5.3β



$\varkappa > 0$

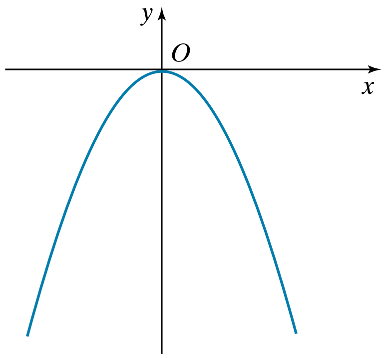
Σχ. 5.3γ

Αν $\varkappa < 0$, η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)= [-\infty,0)$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varkappa x^2$ για $\varkappa<0$ φαίνεται στο σχήμα 5.3δ.

γ) ***Πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με τύπο*** $f(x) = \varkappa x^3$, $\varkappa \neq 0$. Είναι περιττή συνάρτηση (οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων) με πεδίο ορισμού το $A= \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A)= \mathbb{R}$.

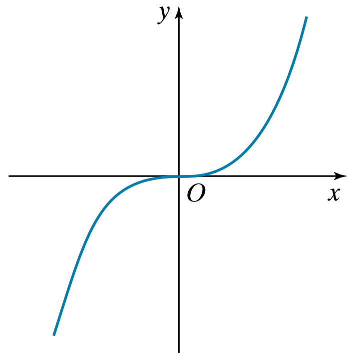
Αν $\varkappa>0$, η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σχ. 5.3ε), ενώ για $\varkappa<0$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σχ. 5.3στ).

δ) ***Ρητή συνάρτηση με τύπο*** $f(x)=\frac{\varkappa}{x}$, $\varkappa \neq 0$. Είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς την αρχή των αξόνων. Για $\varkappa>0$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0,+\infty)$ (χωρίς όμως να είναι φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της), ενώ για $\varkappa<0$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0,+\infty)$



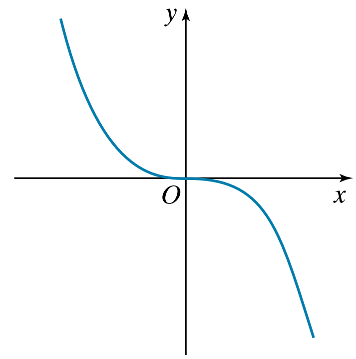
$\varkappa < 0$

Σχ. 5.3δ



$\varkappa > 0$

Σχ. 5.3ε



$\varkappa < 0$

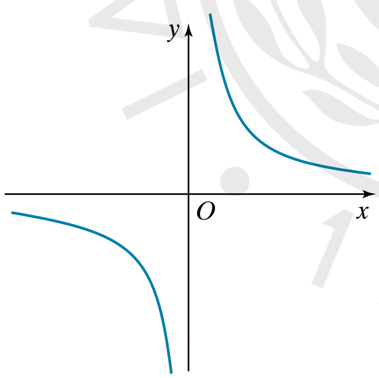
Σχ. 5.3στ

(χωρίς όμως να είναι αύξουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της). Στο σχήμα 5.3ζ δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \varkappa/x$ με $\varkappa > 0$, ενώ στο σχήμα 5.3η για $\varkappa < 0$.

ε) *Οι **τριγωνομετρικές συναρτήσεις: ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης.*** Η συνάρτηση $f(x)$ = ημx είναι περιττή συνάρτηση [αφού ισχύει ημ($-x$) = $-$ημx] με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $f(A)=[-1,1]$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ είναι εναλλάξ αύξουσα και φθίνουσα σε διαστήματα πλάτους π (σχ. 5.3θ).

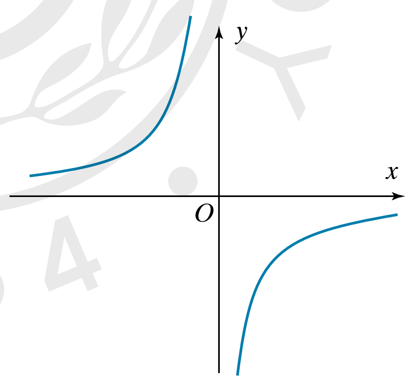
Η συνάρτηση $f(x)$ = συνx είναι άρτια συνάρτηση [αφού ισχύει *συν*($-x$) = *συνx*] με πεδίο ορισμού το Α=$\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $f(A)=[-1,1]$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ είναι εναλλάξ αύξουσα και φθίνουσα σε διαστήματα πλάτους π (σχ. 5.3ι).

Η συνάρτηση $f(x)$ = εφx = ημx/συνx είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού A το $\mathbb{R}$, με εξαίρεση τα σημεία της μορφής $\varkappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\varkappa \in$ Z και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$,



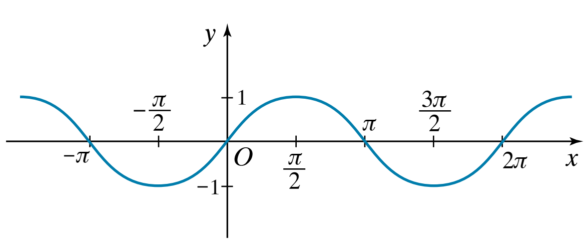
$\varkappa > 0$

Σχ. 5.3ζ

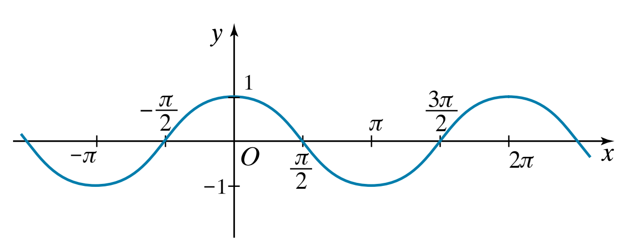


$\varkappa < 0$

Σχ. 5.3η



Σχ. 5.3θ



Σχ. 5.3ι

ενώ είναι αύξουσα σε διαστήματα πλάτους π της μορφής $(\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa\pi + \frac{\pi}{2})$, $\kappa \in \mathrm{Z}$ (σχ. 5.3ια).

στ) ***Εκθετική συνάρτηση*** με βάση a: $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$. Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = (0, +\infty)$. Αν $0 < a < 1$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 5.3ιβ), επομένως είναι αμφιμονοσήμαντη. Για $a > 1$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 5.3ιγ), οπότε και πάλι είναι αμφιμονοσήμαντη. Ο πραγματικός αριθμός α ονομάζεται ***βάση*** της εκθετικής συνάρτησης. Η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό του Euler e λέγεται απλά εκθετική συνάρτηση.

ζ) ***Λογαριθμική συνάρτηση*** με βάση a: $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$. Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$. Αν $0 < a < 1$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 5.3ιδ), ενώ για $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 5.3ιε). Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον αριθμό Euler e συμβολίζεται με $\ln x$ και ονομάζεται απλά ***λογαριθμική συνάρτηση***.

Υπενθυμίζουμε ότι, για τη λογαριθμική συνάρτηση, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

β) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

γ) $\log_\alpha \alpha^x = x$, $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

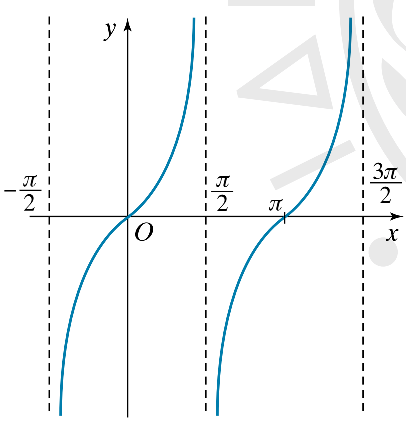
δ) $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

ε) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

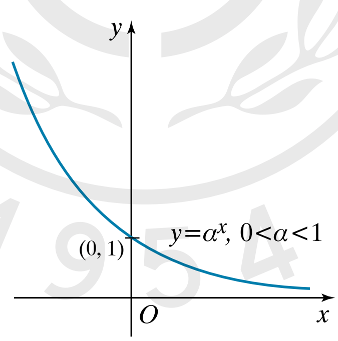
στ) $\log_\alpha x^k = k \log_\alpha x$

ζ) Αν $\alpha > 1$, τότε $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

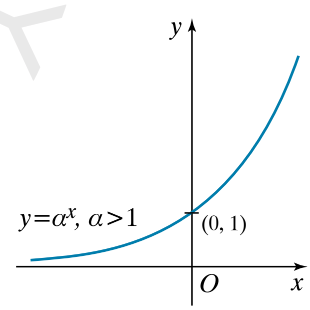
Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.



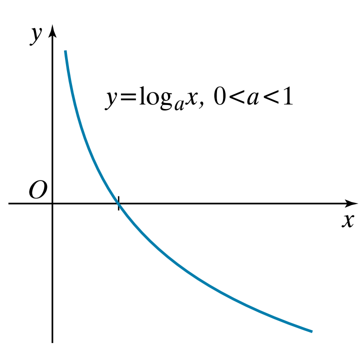
Σχ. 5.3ια



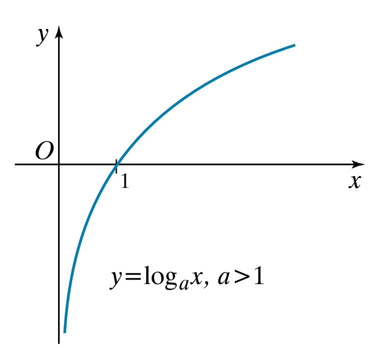
Σχ. 5.3ιβ



Σχ. 5.3ιγ



Σχ. 5.3ιδ



Σχ. 5.3ιε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.1.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} 2x+e-2, & x<1 \\ e^x, & x\geq 1. \end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x και y.

Λύση.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y = 2x + (e-2)$ στο διάστημα $(-\infty,1)$ και το τμήμα της γραφικής παράστασης της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$ στο διάστημα $[1,+\infty)$. Έτσι έχουμε το σχήμα 5.3ιστ.

β) Για να βρούμε σε ποιο σημείο η C_f τέμνει τον άξονα των x, θέτουμε $y = 0$ και προσδιορίζουμε το αντίστοιχο x. Αφού για $x \geq 1$ έχουμε $y = e^x > 0$, οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $y = 0$ θα πρέπει να αναζητηθούν στον άλλο κλάδο της συνάρτησης, δηλαδή για $x<1$. Έτσι παίρνουμε $2x+e-2 = 0$, οπότε

$$x=\frac{2-e}{2}<1,$$

η οποία αποτελεί αποδεκτή τιμή.

Για να βρούμε σε ποιο σημείο η C_f τέμνει τον άξονα των y, θέτουμε $x=0$, δηλαδή έχουμε $f(0)=y$ ή $y=e-2$. Άρα η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\frac{2-e}{2},0)$ και $(0,e-2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.2.

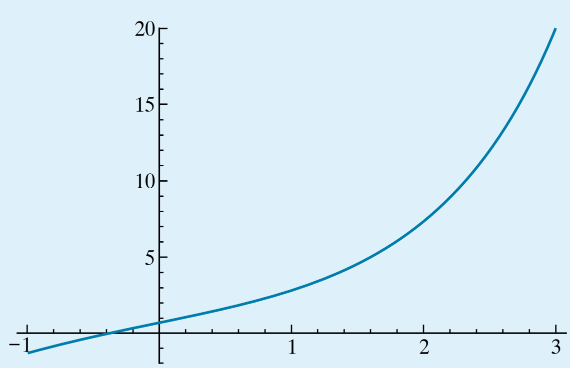
Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$.

Λύση.

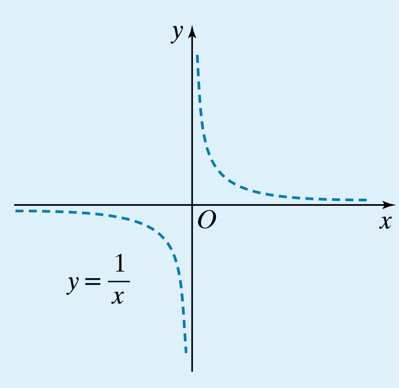
Αρχικά παριστάνουμε γραφικά (σχ. 5.3ιζ) τη συνάρτηση $f_1(x)=\frac{1}{x}$ και στη συνέχεια την

$$f_2(x)=\frac{1}{|x|}=|f_1(x)|.$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 5.2.2, η $C_{|f|}$ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_f, όπου είναι $f(x)\geq 0$ (δηλ. στον άνω δεξί κλάδο), ενώ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_{-f}, όπου είναι $f(x)<0$ (δηλ. στον



Σχ. 5.3ιστ



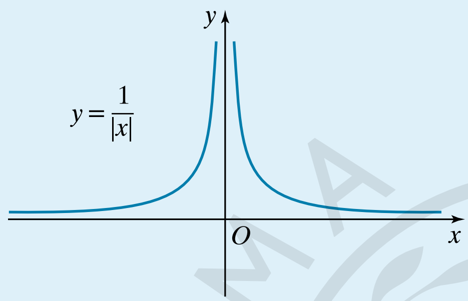
Σχ. 5.3ιζ

κάτω δεξί κλάδο). Όμως, και πάλι σύμφωνα με το παράδειγμα 5.2.2, η C_{-f} θα είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$ (μας ενδιαφέρει μόνο το κομμάτι που αντιστοιχεί σε $x<0$). Έτσι προκύπτει η γραφική παράσταση (σχ. 5.3ιη) για τη συνάρτηση $f_2(x)$.

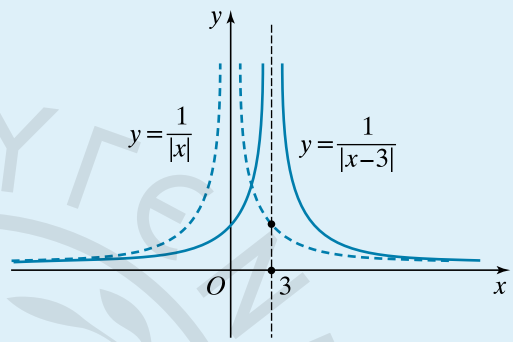
Τέλος, επειδή

$$f(x)=\frac{1}{|x-3|}=f_2(x-3)\ ,$$

η γραφική παράσταση της f προκύπτει, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f_2 (διακεκομμένη γραμμή στο σχ. 5.3ιθ) κατά τρεις μονάδες προς τα δεξιά (συνεχόμενη γραμμή στο σχ. 5.3ιθ).



Σχ. 5.3ιη



Σχ. 5.3ιθ

Ασκήσεις.

5.3.1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x^2-4}$ β) $f(x)=e^{x-3}$ γ) $f(x)=\ln(x-3)+2$ δ) $f(x)=|\ln x|$

Ποιο είναι το σύνολο τιμών για κάθε μία από τις συναρτήσεις αυτές;

5.3.2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x<1\\ x^3+1, & x\ge 1\end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\le e\\ (x/e)^2, & x>e\end{cases}$

5.3.3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων f, g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

α) $f(x)=2e^x-3$ και $g(x)=3e^x+2$ β) $f(x)=e^x$ και $g(x)=-e^x$ γ) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln\dfrac{1}{x^2}$

5.3.4. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται από τους παρακάτω τύπους, να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

$$f(x)=\begin{cases}5x\ , & x<0\\ x^3, & 0\le x<2\\ -x^3\ , & x\ge 2\end{cases}\quad \text{και}\quad g(x)=\begin{cases}x+3, & x<1\\ x^3-3\ , & x\ge 1\end{cases}.$$

5.4 Σύνθεση συναρτήσεων. Η αντίστροφη συνάρτηση.

Ας υποθέσουμε ότι για τη μελέτη του αριθμού των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν σε μία πόλη χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός τύπος $15\sqrt{y+1}$, όπου y είναι ο πληθυσμός της πόλης σε εκατοντάδες χιλιάδες άτομα (ο προηγούμενος τύπος δίνει τον αριθμό αυτοκινήτων σε χιλιάδες αυτοκίνητα). Στην πραγματικότητα, για τον καθορισμό του αριθμού των αυτοκινήτων μέσω του πληθυσμού της πόλης χρησιμοποιείται μία συνάρτηση με τύπο:

$$g(y)=15\sqrt{y+1}\,,\quad y>0. \tag{5.4.1}$$

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ο πληθυσμός της πόλης μεταβάλλεται ετησίως σύμφωνα με τον τύπο $f(x)=20e^{0,01x}$, $x\geq 0$, δηλαδή ο πληθυσμός σε x έτη από σήμερα θα είναι $20e^{0,01x}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

Αν θέλαμε να εκφράσουμε τον αριθμό των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του χρόνου t, θα σκεφτόμασταν ως εξής: σε x έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι ίσος με $y=20e^{0,01x}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα και σύμφωνα με τον τύπο (3.4.1), ο αριθμός των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στην πόλη θα είναι:

$$z=15\sqrt{y+1}=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}\,.$$

Ο τελευταίος τύπος ορίζει μια συνάρτηση του x, πιο συγκεκριμένα έχουμε την

$$h(x)=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $y=20e^{0,01x}=f(x)$, ο τύπος αυτός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$h(x)=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}=15\sqrt{y+1}\;=15\sqrt{y+1}=g(y)=g(f(x)).$$

Τα βήματα του σχηματισμού της νέας συνάρτησης φαίνονται γραφικά στο σχήμα 5.4α.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "z\,=\,g(y)\,=\,g(f(x))"] & y=20e^{0,01x}=f(x) \arrow[r] & z=h(x)=15\sqrt{20e^{0,01x}+1}=g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Η συνάρτηση που σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x αντιστοιχίζει την τιμή $g(f(x))$ ονομάζεται ***σύνθεση της f με την g*** και συμβολίζεται με $g\circ f$. Είναι φανερό ότι για να οριστεί η τιμή $g(f(x))$ της συνάρτησης $g\circ f$, θα πρέπει το $f(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g (σχ. 5.4α)

> Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A,B αντίστοιχα. Τότε για όλα τα $x\in A$ για τα οποία $f(x)\in B$, ορίζεται η συνάρτηση $g\circ f$ με τύπο $(g\circ f)(x)=g(f(x))$και ονομάζεται ***σύνθεση της f με την g.***

Θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g\circ f$ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A της f, αλλά περιορίζεται στα $x\in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της g, δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A\,|\,f(x)\in B\}.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend left=60, "g\circ f"] & y=f(x) \arrow[r, bend left, "g"] & z=g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Σχ. 5.4α

Στην περίπτωση που ισχύει $f(A) \cap B = \varnothing$, δεν ορίζεται η σύνθεση της f με την g, ενώ αν συμβεί να ισχύει $f(A) \subseteq B$ το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι ολόκληρο το σύνολο A.

Η σύνθεση συναρτήσεων μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Τη συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε ***σύνθεση*** των f, g και h, τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$ και θα έχουμε:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))).$$

Ομοίως ορίζεται η σύνθεση συναρτήσεων και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.1.

Από ένα δεξαμενόπλοιο διαρρέει συνεχώς πετρέλαιο, το οποίο διαχέεται στην επιφάνεια της θάλασσας σχηματίζοντας μία κυκλική κηλίδα. Η ακτίνα της πετρελαιοκηλίδας δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 5 + 3t$, όπου t είναι ο χρόνος από τη στιγμή που άρχισε η διαρροή. Να εκφράσετε την επιφάνεια της πετρελαιοκηλίδας ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση.

Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας του r, ως συνάρτηση της ακτίνας του δίνεται από τον τύπο

$$E = g(r) = \pi r^2.$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα που εξετάζουμε, η ακτίνα της κυκλικής κηλίδας είναι συνάρτηση του χρόνου t που διαρκεί η διαρροή και εκφράζεται από τη σχέση

$$r = f(t) = 5 + 3t.$$

Επομένως, η επιφάνεια της κηλίδας σε χρόνο t από τη στιγμή που άρχισε η διαρροή θα δίνεται από τη σύνθεση των συναρτήσεων f και g, δηλαδή

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(5 + 3t) = \pi(5 + 3t)^2 = 25\pi + 30\pi t + 9\pi t^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x^2 + 1$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι το $\mathbb{R}$, οπότε τόσο η $f \circ g$ όσο και η $g \circ f$ θα έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ο τύπος της $f \circ g$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2,$$

ενώ τύπος της $g \circ f$ είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2.$$

Είναι φανερό ότι, παρότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού (το $\mathbb{R}$), δεν ισχύει $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ για κάθε x, οπότε

$$g \circ f \neq f \circ g,$$

δηλαδή στη σύνθεση συναρτήσεων έχει σημασία η σειρά με την οποία εργαζόμαστε.

Ας υποθέσουμε ότι κατά τη μελέτη της απλής ευθύγραμμης κινήσης η απόσταση του κινητού (σε cm) από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή x (σε sec) δίνεται από τον τύπο $f(x)=3x+5$.

Ας υποθέσουμε ότι το κινητό κινείται συνολικά επί 10 min. Μπορούμε τότε εύκολα να προσδιορίσουμε τη θέση του σε διάφορες χρονικές στιγμές x $(0 \leq x \leq 600)$, αφού από τον αριθμό των sec που πέρασαν από την αρχή των χρόνων μπορούμε να βρίσκουμε την απόσταση σε cm που απέχει το κινητό από την αρχή των αξόνων. Στον πίνακα 5.4.1 δίνονται οι αποστάσεις του κινητού για κάποιες επιλεγμένες χρονικές στιγμές. ΄Ετσι, παρατηρούμε ότι στην αρχή των χρόνων ($x = 0$) το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 5 cm από την αρχή των αξόνων, σε χρόνο $x=5$ sec σε απόσταση 20 cm, ενώ στο τέλος της κίνησης έχει βρεθεί σε απόσταση 1805 cm από την αρχή των αξόνων.

Ας δούμε τώρα το ίδιο θέμα από μια διαφορετική οπτική γωνία. Αν αναρωτηθούμε σε ποια χρονική στιγμή το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 305 cm από την αρχή των αξόνων, η απάντηση προφανώς είναι 100 sec. Συνεχίζοντας να εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο (αντίστροφα από ό,τι κάναμε αρχικά), δηλαδή να βρίσκουμε τα sec που απαιτούνται για να βρεθεί το κινητό σε συγκεκριμένη απόσταση από την αρχή των αξόνων, θα δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση, η οποία καλείται ***αντίστροφη συνάρτηση*** της f, και θα συμβολίζεται με f^{-1}. ΄Ετσι $f^{-1}(y)$ θα είναι ο χρόνος (σε sec) που χρειάζεται το κινητό ώστε να βρεθεί σε συγκεκριμένη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Για να βρούμε κάποιες τιμές της συνάρτησης f^{-1}, μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα 5.4.1 αντίστροφα, με αμοιβαία εναλλαγή των δύο στηλών του, οπότε θα πάρουμε τον πίνακα 5.4.2.

Οι δύο συναρτήσεις f και f^{-1} μάς μεταφέρουν, στην πραγματικότητα, την ίδια πληροφορία, αλλά εκφράζονται διαφορετικά. Για παράδειγμα το γεγονός ότι το κινητό σε χρόνο $x = 20$ sec βρίσκεται σε απόσταση $y = 65$ cm από την αρχή των αξόνων, μπορεί να αποδοθεί και με τις δύο συναρτήσεις ως εξής:

$$f(20)=65 \quad \text{ή} \quad f^{-1}(65)=20.$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή για την f γίνεται εξαρτημένη μεταβλητή για την f^{-1} και αντίστροφα. Επίσης το πεδίο ορισμού της μίας γίνεται σύνολο τιμών της άλλης. Πιο συγκεκριμένα, το πεδίο ορισμού της f είναι όλοι οι χρόνοι t για τους οποίους το κινητό πραγματοποιεί την κίνησή του, δηλαδή $0 \leq x \leq 600$, και συμπίπτει με το σύνολο τιμών της f^{-1}. Το σύνολο τιμών της f είναι όλες οι αποστάσεις y από την αρχή των αξόνων, στις οποίες βρέθηκε το κινητό κατά τη διάρκεια της κίνησής του, δηλαδή $5 \leq x \leq 1805$, και συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Αν δοθεί μια συνάρτηση f, δεν είναι πάντοτε δυνατό να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} όπως

Πίνακας 5.4.1
Αποστάσεις από την αρχή για δεδομένο χρόνο

χρόνος x (σε sec)	*απόσταση $f(x)$ (σε cm)*
0	5
1	8
2	11
5	20
10	35
20	65
30	95
100	305
500	1505
600	1805

Πίνακας 5.4.2
Χρόνοι που απαιτούνται για να διανυθούν δεδομένες αποστάσεις

απόσταση y (σε sec)	*χρόνος $f^{-1}(y)$ (σε sec)*
5	0
8	1
11	2
20	5
35	10
65	20
95	30
305	100
1505	500
1805	600

την περιγράψαμε παραπάνω. Για να καταλάβουμε ποιες συναρτήσεις έχουν αντίστροφη, θα εξετάσουμε το επόμενο παράδειγμα. Στην πρώτη προσπάθεια πτήσης αστροναύτη (Alan Shepard, 1961), το διαστημόπλοιο έφτασε σε ύψος 186 km και μετά άρχισε να επιστρέφει προς τη γη, μέχρι που έπεσε στη θάλασσα. Όλο το ταξίδι διήρκεσε μόλις 15 min. Στο σχήμα 5.4β δίνεται γραφικά το ύψος y (σε km) στο οποίο βρισκόταν το διαστημόπλοιο x λεπτά μετά την απογείωση. Η συνάρτηση $f(x)$ τώρα δεν έχει αντίστροφη. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η f έχει αντίστροφη και ας προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το διαστημόπλοιο βρισκόταν σε ύψος 160 km. Είναι προφανές ότι υπάρχουν δύο τέτοιοι χρόνοι: ένας θα μας δίνει τον χρόνο που χρειάστηκε το διαστημόπλοιο για να φτάσει σε ύψος 160 km ανεβαίνοντας και ο άλλος για να φτάσει στο ίδιο ύψος κατεβαίνοντας. Αφού στο ύψος y αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές του χρόνου x, δεν μπορεί να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Γενικά, μια συνάρτηση έχει αντίστροφη, αν και μόνο αν, οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο. Αυτό, σύμφωνα με όσα είδαμε στην παράγραφο 5.2, σημαίνει ότι η συνάρτηση θα πρέπει να είναι αμφιμονοσήμαντη.

Αν $f: A \to f(A)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση:

$$f^{-1}: f(A) \to A,$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f ($y \in f(A)$) το μοναδικό x, για το οποίο ισχύει $y=f(x)$. Η f^{-1} θα καλείται ***αντίστροφη*** συνάρτηση της f.

Αν η συνάρτηση f αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό x στον αριθμό y, τότε η συνάρτηση f^{-1}, αν υπάρχει, θα αντιστοιχίζει τον αριθμό y στον αριθμό x, δηλαδή έχουμε την ισοδυναμία

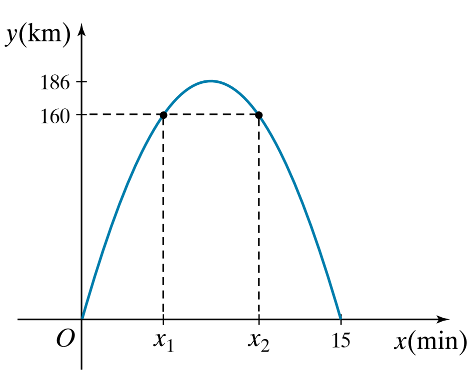
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Άμεση συνέπεια της τελευταίας ισοδυναμίας είναι και οι επόμενες δύο ισότητες, οι οποίες ισχύουν για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση:

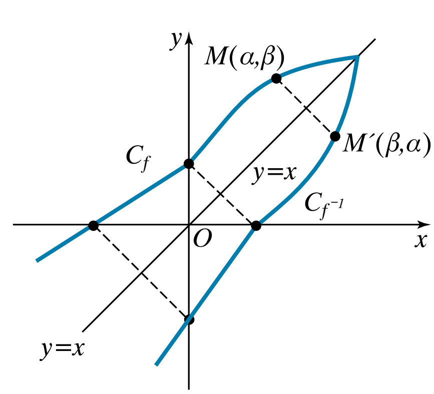
$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A).$$

Σημειώνεται ότι αν για δύο συναρτήσεις ισχύουν οι σχέσεις $g(f(x))=x$, $f(g(y))=y$, τότε οι f, g αποτελούν αντίστροφες συναρτήσεις, δηλαδή ισχύει $f^{-1}=g$ και $g^{-1}=f$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε σημείο (x,y) της γραφικής παράστασης της f θα έχουμε ένα σημείο (y,x) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1}. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη $C_{f^{-1}}$ βρίσκοντας τα σημεία (α, β), για τα οποία ισχύει $\beta=f(\alpha)$, και να τα απεικονίζουμε ως (β, α). Το αποτέλεσμα που θα έχουμε αν εργαστούμε με αυτόν τον τρόπο είναι το ίδιο που θα είχαμε αν σχεδιάζαμε τη συμμετρική της C_f ως προς τη διχοτόμο $y = x$ (σχ. 5.4γ).



Σχ. 5.4β



Σχ. 5.4γ

Επομένως:

> Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων (δηλ. ως προς την ευθεία $y = x$).

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^x$. Όπως είναι γνωστό (βλ. παράγρ. 5.3 εδάφιο στ για $a=e$), η συνάρτηση αυτή είναι 1–1 με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. Η συνάρτηση αυτή (σχ. 5.4δ), σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω, θα έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$, σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και θα αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0,+\infty)$ στο μοναδικό x για το οποίο ισχύει $e^x=y$. Επειδή όμως $e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$, θα έχουμε:

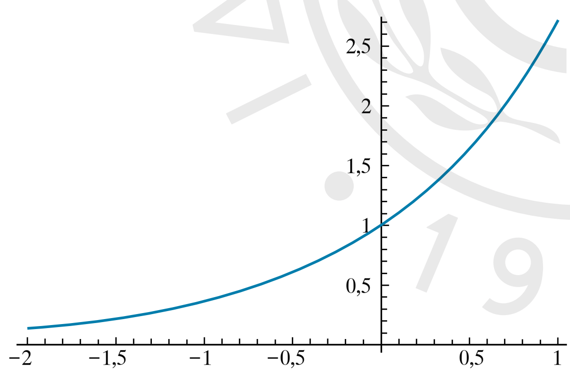
$$f^{-1}(y)=x=\ln y.$$

Επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με x και η εξαρτημένη μεταβλητή με y, για την αντίστροφη συνάρτηση της $f: A \to f(A)$ θα χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $f^{-1}(x)$, $x \in f(A)$ [αντί του $f^{-1}(y)$, $y \in f(A)$ που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως]. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι η λογαριθμική συνάρτηση

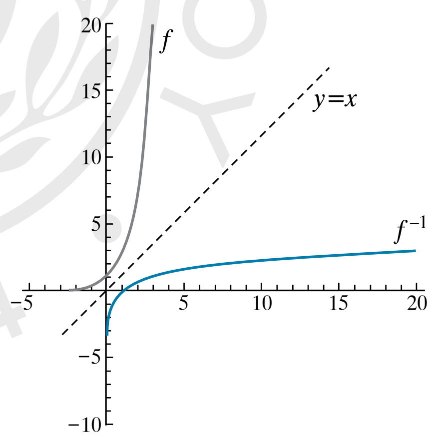
$$f^{-1}(x)=\ln x.$$

Στο σχήμα 5.4ε δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Σημειώνεται ότι εφαρμόζοντας στην περίπτωση αυτή τους τύπους: $f(f^{-1}(y))=y$, $y \in f(A)$, $f^{-1}(f(x))=x$, $x \in A$, παίρνουμε τους γνωστούς τύπους $\ln e^x=x$, $x \in \mathbb{R}$ και $e^{\ln x}=x$, $x \in (0,+\infty)$.



Σχ. 5.4δ



Σχ. 5.4ε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.3.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2x-1}$ είναι αμφιμονοσήμαντη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Λύση.

Για να ορίζεται η συνάρτηση f, θα πρέπει να ισχύει $2x-1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq \frac{1}{2}$. Άρα το πεδίο ορισμού της

$$f(x)=\sqrt{2x-1} \text{ είναι το σύνολο } A=[\frac{1}{2},+\infty).$$

Η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε

$$\sqrt{2x_1-1}=\sqrt{2x_2-1}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x_1=x_2$. Επίσης, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=[0,+\infty)$ (σχ. 5.4στ).

Επομένως, για τη συνάρτηση f μπορεί να οριστεί η αντίστροφή της $f^{-1}: f(A)\to A$, η οποία θα αντιστοιχίζει κάθε $y\in f(A)=[0,+\infty)$ στο $f^{-1}(y)=x\in A$, για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Για $x\geq \frac{1}{2}$ έχουμε

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow y^2=2x-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(y^2+1),\ y\in f(A)=[0,+\infty)$$

οπότε ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης θα είναι ο

$$f^{-1}(y)=x=\frac{1}{2}(y^2+1),$$

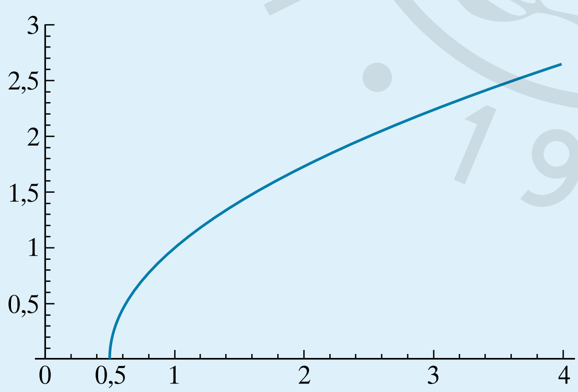
δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y^2+1)\ ,\ y\in[0,+\infty).$$

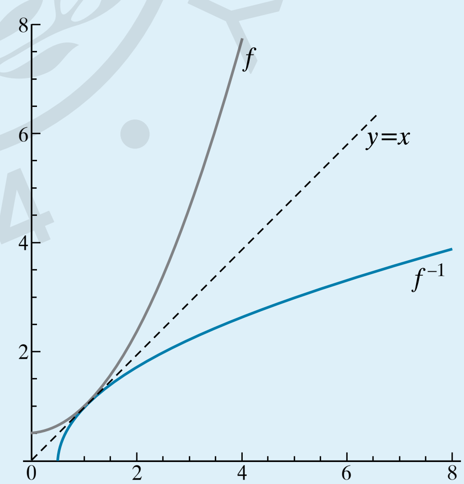
Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση της f θα είναι η

$$f^{-1}:[0,+\infty)\to A \text{ με } f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1).$$

Στο σχήμα 5.4ζ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Παρατηρούμε ότι, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} ως προς την ευθεία $y=x$.



Σχ. 5.4στ
Γραφική παράταση της συνάρτησης
$f(x)=\sqrt{2x-1}$



Σχ. 5.4ζ
Γραφική παράταση των συναρτήσεων f, f^{-1}

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.4.

α) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι αμφιμονοσήμαντες, τότε και η σύνθεσή τους $g\circ f$ θα είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=5e^{2x-3}+2$ είναι αμφιμονοσήμαντη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Λύση.

α) Έστω x_1, x_2 δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού της σύνθεσης $g\circ f$ με $(g\circ f)\ (x_1)=(g\circ f)\ (x_2)$.

Τότε θα έχουμε $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ και εφόσον η g είναι αμφιμονοσήμαντη, συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Από την τελευταία, επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη, προκύπτει ότι $x_1=x_2$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $(g\circ f)\ (x_1)=(g\circ f)\ (x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ και επομένως η συνάρτηση $g\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Η συνάρτηση $h(x)=5e^{2x-3}+2$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $f_1(x) = 2x-3$, $f_2(x) = e^x$ και $f_3(x) = 5x + 2$, οι οποίες είναι αμφιμονοσήμαντες (αφού σύμφωνα με την παράγραφο 5.3 είναι γνήσια μονότονες σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$). Επομένως με εφαρμογή (δύο φορές) του αποτελέσματος που αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), συμπεραίνουμε ότι η h είναι αμφιμονοσήμαντη.

Για να βρούμε την αντίστροφη της h θέτουμε $y = h(x)$ και λύνουμε ως προς x. Παίρνουμε διαδοχικά

$$h(x)=y \Leftrightarrow 5e^{2x-3}+2=y \Leftrightarrow e^{2x-3}=\frac{y-2}{5},\ y>2 \Leftrightarrow 2x-3=\ln\left(\frac{y-2}{5}\right),\ y>2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{y-2}{4}+\frac{3}{2},\ y>2.$$

Επομένως,

$$f^{-1}(y)=x=\frac{1}{2}\ln\frac{y-2}{4}+\frac{3}{2},\ y>2$$

και η αντίστροφη της συνάρτησης f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{4}+\frac{3}{2},\ x>2.$$

Ασκήσεις.

5.4.1. Ένα υβριδικό αυτοκίνητο καταναλώνει 4 lt βενζίνης ανά 100 km. Η τιμή της βενζίνης ανά lt είναι 1,8 €.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση f που εκφράζει την κατανάλωση του αυτοκινήτου μέσω των χιλιομέτρων που διανύει.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση g που εκφράζει το κόστος αγοράς βενζίνης συναρτήσει των λίτρων που καταναλώνει το αυτοκίνητο.

γ) Να γράψετε συνάρτηση που εκφράζει το κόστος μέσω των χιλιομέτρων που διανύει και να εκφραστεί ως σύνθεση συναρτήσεων.

5.4.2. Από διάφορες στατιστικές μελέτες βρέθηκε ότι ο αριθμός των πωλήσεων, σε εκατοντάδες τεμάχια, ενός προϊόντος σε μια πόλη δίνεται από τον τύπο $3\sqrt{x}+2$, όπου x είναι ο πληθυσμός της πόλεως σε εκατοντάδες χιλιάδες άτομα. Ο πληθυσμός της πόλης μεταβάλλεται (μειώνεται) σύμφωνα με το μοντέλο $f(t)=ae^{-0,05t}$, $t\geq 0$, όπου $f(t)$ είναι ο πληθυσμός σε t έτη από σήμερα. Ο σημερινός πληθυσμός της πόλης είναι 10.000 άτομα.

α) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς a.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση g που εκφράζει τον αριθμό των πωλήσεων του προϊόντος μέσω του πληθυσμού της πόλης.
γ) Να γράψετε τη συνάρτηση h που εκφράζει τον αριθμό των πωλήσεων του προϊόντος μέσω του χρόνου και να την εκφράσετε ως σύνθεση συναρτήσεων.
δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση h είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

5.4.3. Να εκφράσετε τις επόμενες συναρτήσεις ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων.

α) $f(x) = \ln(e^{3x}+2)$ β) $f(x) = \ln(x^2+1)$ γ) $f(x) = 3\eta\mu^2(5x)-2$

δ) $f(x)=\ln|\eta\mu(3x)|$ ε) $f(x)=\sqrt{\eta\mu(x^3+1)+2}$ στ) $f(x)=\eta\mu(x^3+1)$

ζ) $f(x)=\sqrt{\ln(x^2+2)}$ η) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+2}$

5.4.4. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ στις εξής περιπτώσεις:
α) $f(x)=2x^2+3, g(x)=x+2$ β) $f(x)=x^2, g(x)=x^3$ γ) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x^2}$

5.4.5. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει $(f\circ g)(x)=x^2-2x+3$, όπου g είναι η συνάρτηση με τον τύπο $g(x)=x-1$.

5.4.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1+\dfrac{3}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(f(x))=x$ για κάθε $x\neq 1$ β) $g(g(x))=x$ για κάθε $x\neq 2$.

5.4.7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x + 1$ και $g(x) = \beta x + 3$, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι ισχύει $f\circ g = g\circ f$ και $f(f(1))=1$. Να υπολογισθούν οι τιμές των α και β.

5.4.8. Το κόστος C (σε €) για την παραγωγή x μονάδων (σε εκατοντάδες τεμάχια) ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=3+5x$. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να περιγράψετε την πληροφορία που δίνει ο αριθμός $f^{-1}(y)$.

5.4.9. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της.
α) $f(x)=-5x+2$ β) $f(x)=\ln(1-x^2)$ γ) $f(x)=\dfrac{2e^x+2}{3e^x+1}$

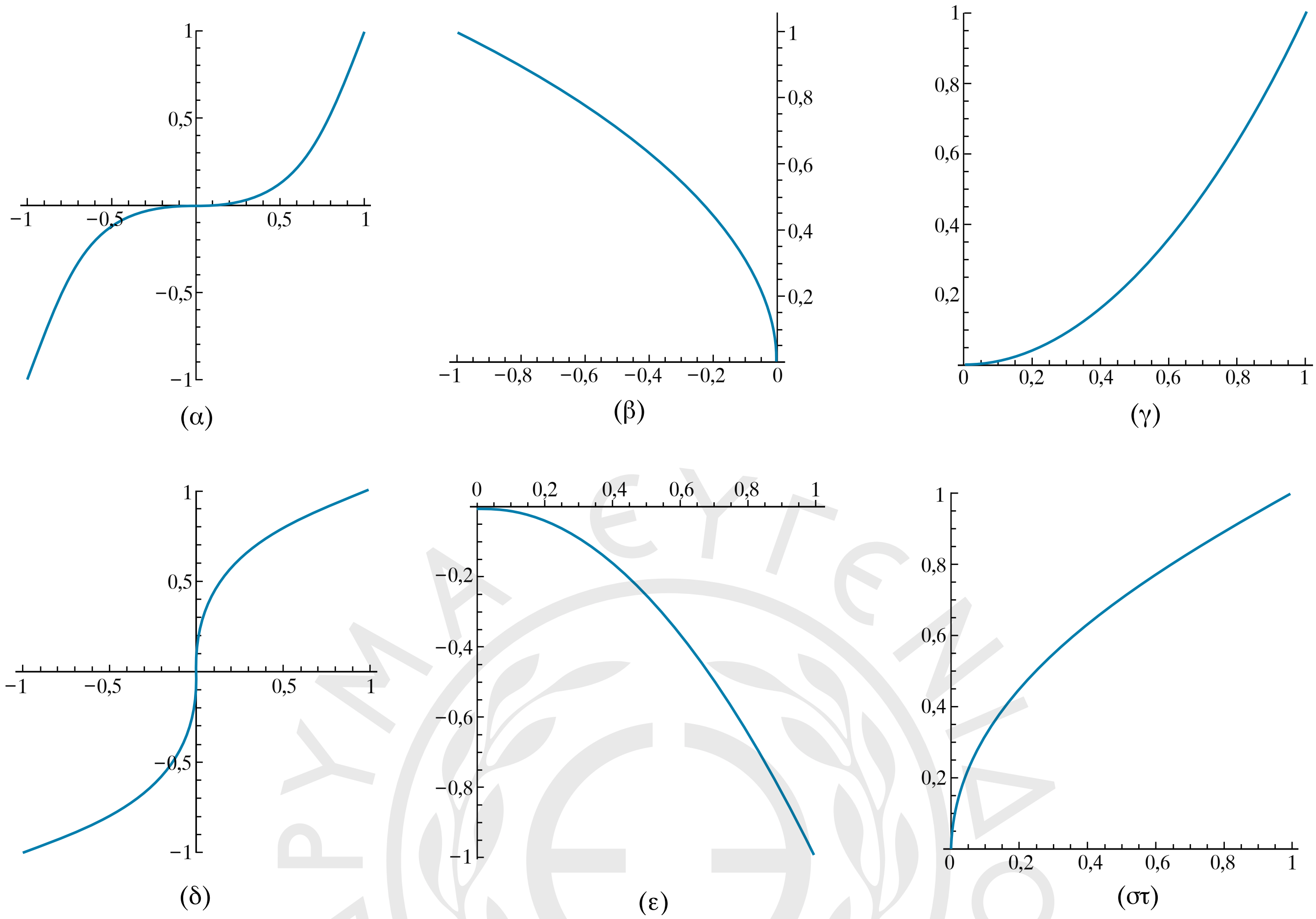
5.4.10. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$, $g(x) = \ln(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις f, g.
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g\circ f$.
γ) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g, h αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.
δ) Να διαπιστώσετε ότι ισχύει $h^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

5.4.11. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις (σχ. 5.4η) κάποιων συναρτήσεων. Να βρείτε ποιες από τις γραφικές αυτές παραστάσεις αντιστοιχούν σε ζεύγη από αντίστροφες συναρτήσεις.

5.5 Πεπερασμένα όρια συναρτήσεων σε ένα σημείο $x_0\in\mathbb{R}$. Βασικές ιδιότητες ορίων.

Στην παρούσα παράγραφο θα ορίσουμε την έννοια του ορίου συνάρτησης και θα παρουσιάσουμε ορισμένες από τις ιδιότητές της. Η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης, αφού πολλές από τις βασικές έννοιες των Μαθηματικών, της Φυσικής αλλά και άλλων επιστημών μπορούν να οριστούν και να κατα-



Σχ. 5.4η

νοηθούν μόνο με τη βοήθειά της. Στην παράγραφο αυτή, θα επιχειρήσουμε μια διεξοδική προσέγγιση της σημαντικής αυτής έννοιας με απλά αλλά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας, και θα αναφέρουμε με συντομία τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό της.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} 2+x^3, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}, & x>0 \end{cases}, \tag{5.5.1}$$

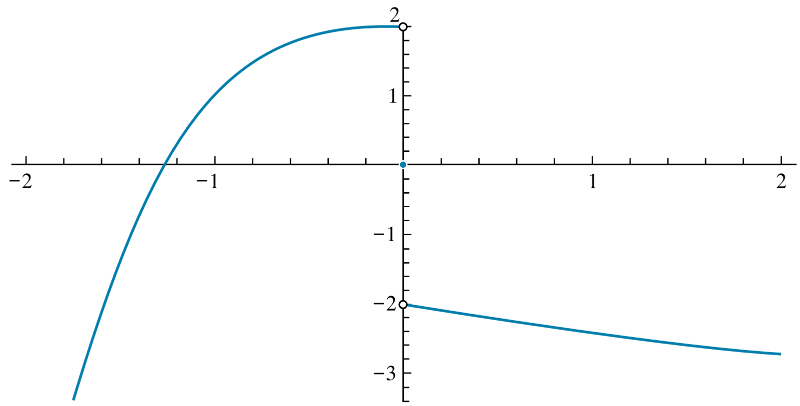
της οποίας η γραφική παράσταση εικονίζεται στο σχήμα 5.5α.

Προκειμένου να μελετήσουμε τη «συμπεριφορά» της συνάρτησης f όταν το x πλησιάζει την τιμή 0, συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών 5.5.1.

Τόσο από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης όσο και από τον πίνακα τιμών 5.5.1 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

α) Καθώς το x, κινούμενο επάνω στον άξονα $x'x$, πλησιάζει τον αριθμό 0 από αριστερά ($x<0$), οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε τον αριθμό 2.

β) Καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν τον αριθμό 0 από δεξιά ($x>0$), οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε τον αριθμό –2.



Σχ. 5.5α

Γραφική παράσταση της συνάρτησης (4.5.1)

Πίνακας 5.5.1
Πίνακας τιμών της f.

Το x πλησιάζει το 0 από αριστερά

$x \longrightarrow 0$

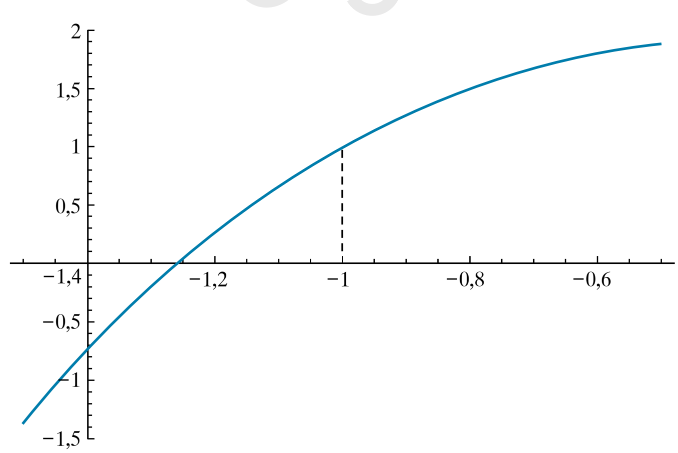
x	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}15$	$-0{,}1$	$-0{,}01$
$f(x)$	1,973000	1,992000	1,996630	1,999000	1,999999

Το x πλησιάζει το 0 από δεξιά

$0 \longleftarrow x$

x	0,0001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	–2,0004998	–2,0004999	–2,0049876	–2,0488088

Ας εξετάσουμε επιπλέον τη συμπεριφορά της ίδιας συνάρτησης, όταν το x πλησιάζει την τιμή –1. Στην περίπτωση αυτή, παρατηρώντας την επόμενη γραφική παράσταση (σχ. 5.5β) (αποτελεί απλά μεγέθυνση της γραφικής παράστασης του σχήματος 5.5α στην περιοχή που μας ενδιαφέρει) και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών 5.5.2, διαπιστώνουμε ότι καθώς το x, κινούμενο επάνω στον άξονα $x'x$, πλησιάζει τον αριθμό –1 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, χωρίς να γίνεται ίσο με –1, οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f πλησιάζουν στον αριθμό 1. Μάλιστα υπάρχει η δυνατότητα, με κατάλληλη επιλογή της



Σχ. 5.5β

περιοχής (γύρω από το -1) που κινείται το x, να «φέρουμε» τις τιμές της $f(x)$ όσο κοντά θέλουμε στον αριθμό 1.

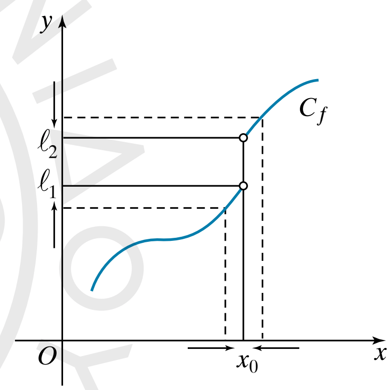
Πίνακας 5.5.2
Πίνακας τιμών της f.

το x πλησιάζει το –1 από αριστερά $\longrightarrow -1 \longleftarrow$ ***το x πλησιάζει το –1 από δεξιά***

x	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	$-1{,}0001$	$\to -1 \leftarrow$	$-0{,}9999$	$-0{,}999$	$-0{,}99$	$-0{,}9$
$f(x)$	0,6690	0,9697	0,9970	0,9997		1,0003	1,0030	1,0297	1,2710

Σε περιπτώσεις όπως αυτές που προαναφέρθηκαν θα λέμε ότι ο αριθμός προς τον οποίον πλησιάζουν οι τιμές της f είναι το ***όριο της συνάρτησης***, δηλώνοντας παράλληλα σε ποιον αριθμό πλησιάζουν οι αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x. Πιο συγκεκριμένα, σε αντιστοιχία με ό,τι είδαμε παραπάνω, δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

α) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0). Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ_1, καθώς το x πλησιάζει το x_0 από αριστερά ($x < x_0$), λέμε ότι το ***αριστερό πλευρικό όριο της f στο*** x_0 είναι το ℓ_1 και γράφουμε[3] (σχ. 5.5γ):



Σχ. 5.5γ

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell_1$$

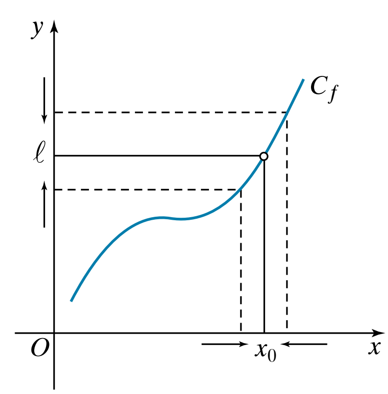
(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: *«το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1»*).

β) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β). Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ_2, καθώς το x πλησιάζει το x_0 από δεξιά ($x > x_0$), λέμε ότι το ***δεξιό πλευρικό όριο της f στο*** x_0 είναι το ℓ_2 και γράφουμε (σχ. 5.5γ)

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell_2$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: *«το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2»*).

γ) Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ, καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 (χωρίς να είναι απαραίτητο να γίνουν ίσες με το x_0), τότε λέμε ότι ***το όριο της f όταν το x τείνει στο*** x_0 ***είναι το*** ℓ και γράφουμε (σχ. 5.5δ)



Σχ. 5.5δ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: *«το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ»* ή *«το όριο της f(x) στο x_0 είναι ℓ»*).

Έτσι, για τη συνάρτηση f που ορίστηκε στην (5.5.1), μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -2, \quad \lim_{x \to -1} f(x) = 1.$$

3. Το σύμβολο lim είναι αρχικό της Λατινικής λέξης limes, που σημαίνει όριο.

Από τους προηγούμενους ορισμούς είναι φανερό ότι για να αναζητήσουμε το αριστερό πλευρικό όριο μιας συνάρτησης f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής (a, x_0), ενώ για να αναζητήσουμε το δεξί πλευρικό όριο της f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β). Τέλος, για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται «*κοντά στο* x_0», δηλαδή τουλάχιστον σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Προφανώς, στην τελευταία περίπτωση, θα μπορούμε να αναζητούμε τόσο το αριστερό πλευρικό όριο της f στο x_0, όσο και το δεξί πλευρικό της όριο.

Από τον τρόπο που εισήχθησαν τα όρια προκύπτει άμεσα το εξής χρήσιμο αποτέλεσμα:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Τότε το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά της όρια και είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \text{ αν, και μόνο αν, } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell.$$

Στην περίπτωση που μια συνάρτηση f είναι ορισμένη μόνο σε ένα διάστημα της μορφής (a, x_0), ενώ δεν ορίζεται σε διαστήματα της μορφής (x_0, β), το x θα μπορεί να προσεγγίσει το x_0 μόνο από αριστερά (για $x<x_0$). Τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αντί του $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. Ομοίως, αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη μόνο σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ενώ δεν ορίζεται σε διαστήματα της μορφής (a, x_0), το x θα μπορεί να προσεγγίσει το x_0 μόνο από δεξιά (για $x > x_0$). Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αντί του $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

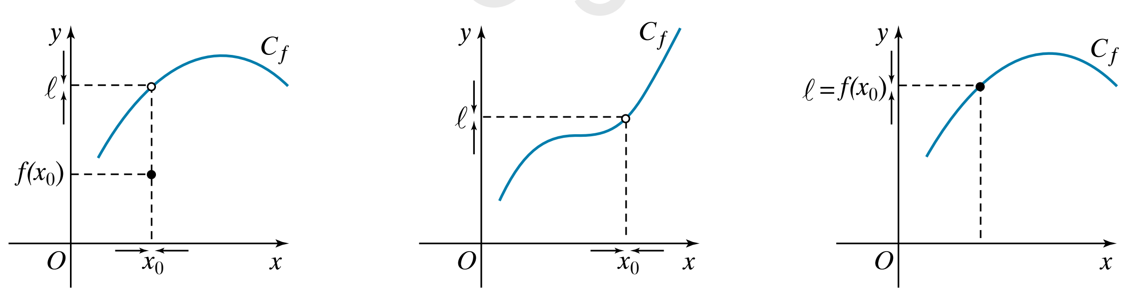
Όπως γίνεται φανερό από τις επόμενες τρεις γραφικές παραστάσεις, όταν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, μπορεί να εμφανιστούν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης [σχ. 5.5ε(α) και (γ)].

β) Το x_0 να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης [σχ. 5.5ε(β)].

γ) Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_0, η τιμή $f(x_0)$ μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0, αν υπάρχει [σχ. 5.5ε(γ)], ή μπορεί να είναι διαφορετική από αυτό [σχ. 5.5ε(α)].

Αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0, τότε αυτό είναι ορισμένο μονοσήμαντα (είναι μοναδικό). Επίσης, το όριο είναι ανεξάρτητο από τα άκρα α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β), στα οποία ορίζεται η f και επηρεάζεται μόνο από τις τιμές της συνάρτησης «*γύρω από το* x_0» (για τον λόγο αυτόν λέμε ότι το όριο είναι τοπική έννοια)[4].



(α) (β) (γ)

Σχ. 5.5ε

4. Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, όταν λέμε ότι η f έχει «κοντά στο x_0» μία ιδιότητα, θα εννοούμε ότι υπάρχει σύνολο της μορφής $(a, x_0)\cup(x_0, \beta)$, στο οποίο ορίζεται η f και έχει την ιδιότητα αυτή για κάθε $x \in (a, x_0)\cup(x_0, \beta)$.

Η τελευταία διαπίστωση μας δίνει τη δυνατότητα να περιοριζόμαστε σε διαστήματα (γύρω από το x_0) όσο μικρά θέλουμε, γεγονός που πολλές φορές οδηγεί σε απλοποίηση του τύπου της συνάρτησης και διευκολύνει την εύρεση του ορίου της.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{|2x-6|}{x-3}$$

στο $x_0=1$, μπορούμε να περιοριστούμε στο υποσύνολο $(0,1)\cup(1,2)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή λαμβάνει τη μορφή (αφού για $x<3$ ισχύει $2x-6<0$)

$$f(x)=\frac{-(2x-6)}{x-3}=-2\,.$$

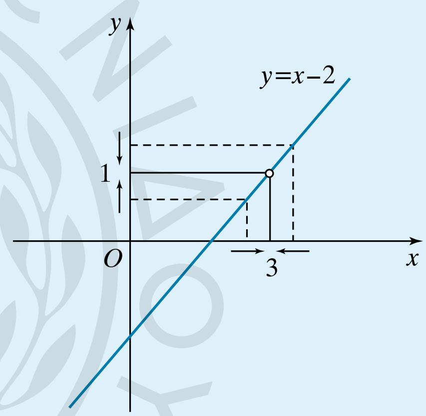
Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$ (όταν το x βρίσκεται κοντά στο 1, οι τιμές της συνάρτησης είναι ίσες με –2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5.1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}.$$

Να παραστήσετε γραφικά την f και να βρείτε (αν υπάρχει) το όριό της στο $x_0=3$.



Σχ. 5.5στ

Λύση.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $A=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ και για $x\neq 3$ παίρνει τη μορφή

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=x-2.$$

Προκειμένου να μελετήσουμε τις τιμές της συνάρτησης f, καθώς οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x πλησιάζουν στο 3, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 5.5στ και τον ακόλουθο πίνακα τιμών. Από αυτά παρατηρούμε ότι καθώς το x κινείται στον άξονα $x'x$ και πλησιάζει (από μικρότερες ή μεγαλύτερες τιμές) τον αριθμό 3, οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν τον αριθμό 1.

Το x πλησιάζει το 3 από αριστερά→3←το x πλησιάζει το 3 από δεξιά

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	→3←	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	0,9	0,99	0,999	0,9999		1,0001	1,001	1,01	1,1

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο παράδειγμα αυτό υπολογίσαμε το όριο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=3$, ενώ η συνάρτηση δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

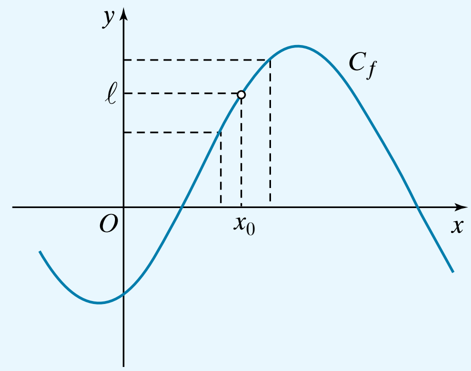
Μπορεί να αποδειχθεί ότι για το όριο ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες. Στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου δεν θα επεκταθούμε σε αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών.

L₁. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

L₂. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

L₃. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

L₄. α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε θα ισχύει $f(x)>0$ κοντά[5] στο x_0 (σχ. 5.5ζ).



Σχ. 5.5ζ

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Οι δύο αυτές ιδιότητες μας δείχνουν ότι, όταν το όριο μιας συνάρτησης στο x_0 είναι μη μηδενικό, τότε, κοντά στο x_0 η συνάρτηση λαμβάνει τιμές ομόσημες με το όριό της.

L₅. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια αυτών στο x_0, τότε ισχύει η ανισότητα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

L₆. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$ $=l_2$ με $l_1, l_2\in\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχει και το όριο της συνάρτησης $f+g$ στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=l_1+l_2$$

(η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις).

L₇. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και c είναι μια πραγματική σταθερά, τότε θα υπάρχει και το όριο της συνάρτησης cf στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim_{x\to x_0} f(x).$$

L₈. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$ $=l_2$ με $l_1, l_2\in\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχει και το όριο της συνάρτησης fg στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

(η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις).

L₉. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$ και επιπλέον ισχύει $l_2\neq 0$, τότε θα υπάρχει και το όριο της συνάρτησης f/g στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{l_1}{l_2}.$$

5. Όταν λέμε κοντά στο x_0, εννοούμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει σε μία περιοχή του x_0, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in D(f)$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $f(x)>0$.

L_{10}. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0, τότε θα υπάρχει και το όριο της συνάρτησης $|f|$ στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|.$$

L_{11}. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και επιπλέον ισχύει $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, τότε θα υπάρχει και το όριο της συνάρτησης f^ν στο x_0 (ν είναι ένας θετικός ακέραιος[6]) και θα ισχύει:

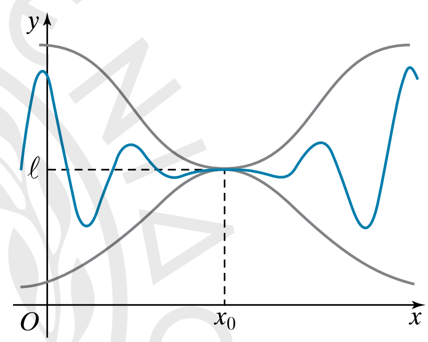
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu.$$

L_{12}. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν ισχύει $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και επιπλέον έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$,

τότε:
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell.$$

Η τελευταία ιδιότητα είναι γνωστή με την ονομασία ***κριτήριο της παρεμβολής***, αφού ουσιαστικά μας δείχνει ότι αν μία συνάρτηση f «εγκλωβίζεται» κοντά στο x_0 ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g που έχουν κοινό όριο, καθώς το x τείνει στο x_0, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.5η, η f θα έχει το ίδιο όριο.

Σημειώνεται ότι όλες οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για τα πλευρικά όρια των συναρτήσεων.



Σχ. 5.5η

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5.2.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-7$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)+5g(x)]$ β) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]^3$ γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3f(x)+5g(x)}{[f(x)+(g(x))^2]^3}$

Λύση.

α) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες L_6 και L_7 συμπεραίνουμε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{x\to x_0}[3f(x)+5g(x)]=3\lim_{x\to x_0} f(x)+5\lim_{x\to x_0} g(x)=3\cdot(-1)+5(-7)=-38.$$

β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες L_6, L_7 και L_{11} συμπεραίνουμε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]^3=[\lim_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]]^3=[\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0}(g(x))^2]^3=$$

$$=[\lim_{x\to x_0} f(x)+(\lim_{x\to x_0} g(x))^2]^3=[-1+(-7)^2]^3=48^3.$$

6. Το αποτέλεσμα ισχύει και όταν το ν είναι ρητός αριθμός, δηλαδή $\nu=\kappa/\lambda$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$ και $\lambda\neq 0$.

γ) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα L_9 και τα αποτελέσματα που βρέθηκαν στα (α), (β) συμπεραίνουμε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και είναι ίσο με:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{3f(x)+5g(x)}{[f(x)+(g(x))^2]^3}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}(3f(x)+5g(x))}{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+(g(x))^2]^3}=\frac{-38}{48^3}.$$

Οι ιδιότητες L_1–L_{13}, σε συνδυασμό με τα όρια κάποιων βασικών συναρτήσεων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό διαφόρων πιο πολυπλόκων συναρτήσεων. Για τον λόγον αυτό παραθέτουμε στη συνέχεια τα όρια ορισμένων *βασικών συναρτήσεων* που συναντήσαμε στην παράγραφο 5.3.

B$_1$. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ (όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της),

$\lim\limits_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

B$_2$. Αν $f(x)=c$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (το όριο σταθερής συνάρτησης είναι ίσο με τη σταθερά, για κάθε x_0).

B$_3$. $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x=\eta\mu x_0$, $\quad\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$

B$_4$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

Έστω τώρα η ***πολυωνυμική συνάρτηση***

$$P(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_0)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_n x^n)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{n-1}x^{n-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$
$$=\alpha_n\lim_{x\to x_0}x^n+\alpha_{n-1}\lim_{x\to x_0}x^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\lim_{x\to x_0}\alpha_0=\alpha_n x_0^n+\alpha_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$

Επομένως:

Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to -1}(5x^3-2x^2+3x+10)=5(-1)^3-2(-1)^2+3(-1)+10=0.$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια το όριο μιας συνάρτησης της μορφής

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x (μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται ρητή συνάρτηση του x). Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως:

Για κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0.$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to -1} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3x + 13}{x^2 + 2} = \frac{5(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) + 13}{(-1)^2 + 2} = \frac{3}{3} = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5.3.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x^3}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-5}{x^2+1}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}[(x+1)^2 \cdot |x^2-1|]$ ε) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$ στ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+12}}{x-2}$

Λύση.

α) Για $x \neq 0$ έχουμε $\left|\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right| \leq 1$, οπότε $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right| = |x^2| \cdot \left|\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right| \leq |x^2|$. Επομένως,

$$-x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x^3} \leq x^2,$$

και αφού $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, εφαρμόζοντας το κριτήριο της παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

β) Αφού έχουμε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x\to 1}(x^3+1) = \lim_{x\to 1} P(x) = P(1) = 1^3 + 1 = 2.$$

γ) Αφού έχουμε τη ρητή συνάρτηση $R(x) = \dfrac{x^5-5}{x^2+1} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με $Q(1) = 1^2 + 1 = 2 \neq 0$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-5}{x^2+1} = \lim_{x\to 1} R(x) = R(1) = \frac{1^5-5}{1^2+1} = -2.$$

δ) Έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x\to 2}\left[(x+1)^2\left|x^2-3\right|\right]=\lim_{x\to 2}(x+1)^2\cdot\lim_{x\to 2}\left|x^2-3\right|=\left[\lim_{x\to 2}(x+1)\right]^2\cdot\left|\lim_{x\to 2}(x^2-3)\right|=3^2\cdot\left|2^2-3\right|=9$$

ε) Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-4)=0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα L9. Παρατηρούμε όμως ότι για $x=4$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, οπότε ο τύπος της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4},\ \text{με}\ x\neq 4$$

θα μπορεί να απλοποιηθεί. Πράγματι, για $x\neq 4$, έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}=\frac{(x-4)(x-1)}{x-4}=x-1\,.$$

Επομένως, $\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}(x-1)=3$

στ) Για $x=2$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής: πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $2x+\sqrt{x^2+12}$ και έτσι έχουμε:

$$f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+12}}{x-2}=\frac{(2x-\sqrt{x^2+12})(2x+\sqrt{x^2+12})}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{(2x)^2-(\sqrt{x^2+12})^2}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}$$

$$=\frac{4x^2-(x^2+12)}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{3x^2-12}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}$$

$$=\frac{3(x+2)}{2x+\sqrt{x^2+12}}\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+2)}{2x+\sqrt{x^2+12}}=\frac{3\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2}(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{3\cdot 4}{4+\sqrt{16}}=\frac{3}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5.4.

Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0=2$ της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & x<2\\ \dfrac{8}{x^3}+1, & x\geq 2.\end{cases}$

Λύση

Για $x<2$ έχουμε $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-2)=2^2-2=2$, ενώ

για $x>2$ έχουμε $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(\frac{8}{x^3}+1)=\frac{8}{2^3}+1=2$.

Αφού $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=2$, θα είναι $\lim_{x\to 2}f(x)=2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5.5.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^3-25, & x<3 \\ x-3a\ , & x\geq 3. \end{cases}$

α) Να βρείτε το αριστερό πλευρικό όριο της f στο $x_0 = 3$ είτε

β) να βρείτε το δεξί πλευρικό όριο της f στο $x_0 = 3$ είτε

γ) να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = 3$.

Λύση.

α) Για $x<3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^3-25)=3^3-25=2.$

β) Για $x>3$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3a)=3-3a.$

γ) Αφού ζητάμε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 3$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

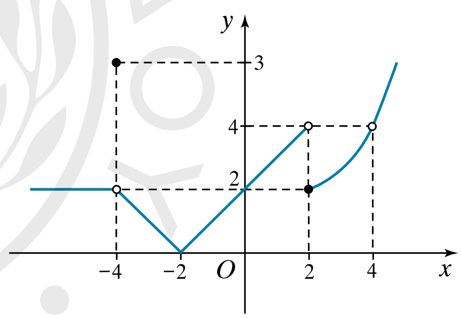
δηλαδή, $3-3\alpha=2$ οπότε $\alpha=\dfrac{1}{3}.$

Ασκήσεις.

5.5.1. Στο σχήμα 5.5θ παρατίθεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



Σχ. 5.5θ

5.5.2. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{|3x-3|}{2x-2}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0,9	0,99	0,999	$\to 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,1
$f(x)$				$\to ; \leftarrow$			

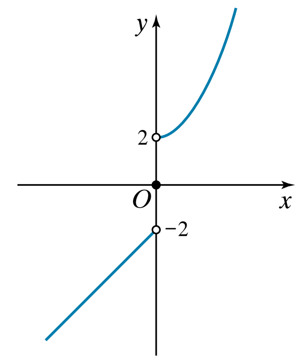
και στη συνέχεια να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5.5.3. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–5,1	–5,01	–5,001	$\to -5 \leftarrow$	–4,999	–4,99	–4,9
$f(x)$				$\to ; \leftarrow$			

και στη συνέχεια να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο $f(x)$ στο $x_0 = -5$.

5.5.4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2+2, & x>0. \end{cases}$



Σχ. 5.5ι

α) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του σχήματος 5.5ι να βρείτε τα πλευρικά όρια της $f(x)$ στο $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε τα ίδια όρια, χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα τιμών.

5.5.5. Για τις επόμενες συναρτήσεις f, να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για το x_0 που δίνεται.

α) $f(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-4}$, $x_0=2$ και $x_0=-2$ β) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0 \\ -2x+3, & x>0 \end{cases}$, $x_0=0$

5.5.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{αν} \quad x<0 \\ x^2+1, & \text{αν} \quad 0\le x\le 3 \\ 7+x, & \text{αν} \quad x>3. \end{cases}$ Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, ζ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5.5.7. Να υπολογίσετε για ποια τιμή της σταθεράς a υπάρχει το όριο στο $x_0=-1$ της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-a, & x<-1 \\ -\dfrac{1}{x^3}, & x\ge -1. \end{cases}$$

5.5.8. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 4}(2x^2-3x+1)$ β) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^5-4x^2+2x+1)$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^5-4x^2+2x+1}{x^2+1}$

δ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^5-4x^2+2x+1}{x^2+1}$ ε) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2|x|+1}{|x|+1}$ στ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-1)^2-1}{h^2+1}$

5.5.9. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}^2 x}{x(1+\text{συν}x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}^2 x-1}{x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}x(\text{συν}x-1)}{x^2}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{εφ}x}{x}$ ε) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\text{ημ}x}{x}\right)$ στ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{ημ}x}{x^3+2x}\right)$

5.5.10. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-\sqrt{x}}{4-x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^3}}{3x^3}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

5.6 Όριο συνάρτησης στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Μη πεπερασμένα όρια.

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να μελετήσουμε τις τιμές που λαμβάνει μια συνάρτηση f, καθώς οι τιμές της μεταβλητής x μεγαλώνουν απεριόριστα, δηλαδή παίρνουν πολύ μεγάλες θετικές τιμές ή πολύ μεγάλες (κατ' απόλυτη τιμή) αρνητικές τιμές. Στην περίπτωση αυτή θα μιλάμε για όριο συναρτήσεων στο άπειρο ($+\infty$ ή $-\infty$). Για να αντιληφθούμε την πρακτική σημασία της έννοιας αυτής, ας εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Η αντοχή ενός υλικού είναι γνωστό ότι επηρεάζεται έντονα από τη θερμοκρασία. Μια κατασκευάστρια βιομηχανία ενός εξαρτήματος που χρησιμοποιείται ως ανταλλακτικό σε γεννήτριες πλοίων περιγράφει την αντοχή του εξαρτήματος με έναν δείκτη που λαμβάνει τιμές μεταξύ των αριθμών 1 και 2. Ο δείκτης αντοχής λαμβάνει την ελάχιστη τιμή 1 όταν η αντοχή είναι η μεγαλύτερη δυνατή και αυτό συμβαίνει στους 0 °C ενώ, όσο αυξάνει η τιμή του δείκτη, έχουμε μικρότερες αντοχές. Στη βιομηχανία, για να περιγραφεί η σχέση του δείκτη αντοχής του εξαρτήματος και της θερμοκρασίας x χρησιμοποιείται, για μη αρνητικές θερμοκρασίες, η συνάρτηση f με τύπο

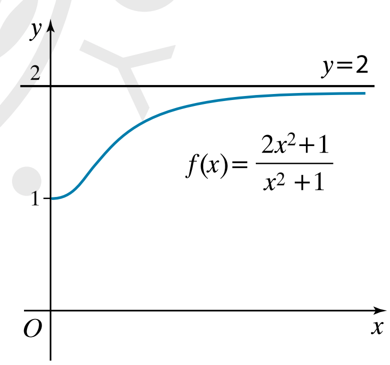
$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+1}, \tag{5.6.1}$$

όπου $x\geq 0$. Προκειμένου να διερευνήσουμε τι συμβαίνει με την αντοχή του εξαρτήματος για μεγάλες τιμές της θερμοκρασίας, θα πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει με τις τιμές του δείκτη αντοχής, καθώς η θερμοκρασία (x) αυξάνεται συνεχώς χωρίς κανέναν περιορισμό. Ένας πρακτικός τρόπος για να μελετηθεί αυτό είναι, όπως έχουμε δει και στα προηγούμενα κεφάλαια, να κατασκευάσουμε έναν πίνακα τιμών. Από τον πίνακα που ακολουθεί είναι φανερό ότι, καθώς οι τιμές του x αυξάνονται απεριόριστα, οι τιμές $y=f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά στον αριθμό 2.

το x αυξάνει απεριόριστα →

x	0	5	10	20	50	100	...
$f(x)$	1	1,96	1,99	1,9999	1,9996	1,9999	

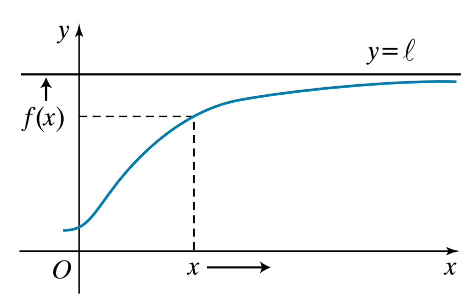
Αυτό είναι επίσης εμφανές από το διάγραμμα του σχήματος 5.6α, στο οποίο η γραφική παράσταση της f, όταν οι τιμές του x αυξάνονται, «κολλάει» στην οριζόντια ευθεία που άγεται από το σημείο $y=2$ του κατακόρυφου άξονα. Για τον λόγο αυτόν, η ευθεία με εξίσωση $y=2$ ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συνάρτησης f στο $+\infty$. Για να περιγράψουμε τα παραπάνω θα λέμε ότι: *«η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο τον αριθμό 2»* ή ότι: *«το όριο της f στο $+\infty$ είναι το 2»* και θα γράφουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.



Σχ. 5.6α

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς οι τιμές του x αυξάνονται απεριόριστα (σχ. 5.6β), τότε λέμε ότι ***το όριο της f στο $+\infty$ είναι το ℓ*** και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$ ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συνάρτησης f στο $+\infty$.



Σχ. 5.6β

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης στο $+\infty$, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

Η συνάρτηση (5.6.1) θα μπορούσε να μελετηθεί για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αφού ο τύπος της μπορεί να εφαρμοστεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η f είναι άρτια, αφού για κάθε x, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της $A=\mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και επιπλέον

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2+1}{(-x)^2+1}=\frac{2x^2+1}{x^2+1}=f(x).$$

Επομένως, όταν το x παίρνει τις τιμές -10, -20, -50, -100,...., οι τιμές της συνάρτησης θα πλησιάζουν και πάλι προς τον πραγματικό αριθμό 2 (σχ. 5.6γ).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι *«η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο τον αριθμό 2»* ή *«το όριο της f στο $-\infty$ είναι το 2» και γράφουμε:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2.$$

Η ευθεία με εξίσωση $y=2$ στην περίπτωση αυτή ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συνάρτησης f στο $-\infty$.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς οι τιμές του x μειώνονται απεριόριστα (σχ. 5.6δ), τότε λέμε ότι ***το όριο της f στο $-\infty$ είναι το*** ℓ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell.$$

Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$ ονομάζεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της συνάρτησης f στο $-\infty$.

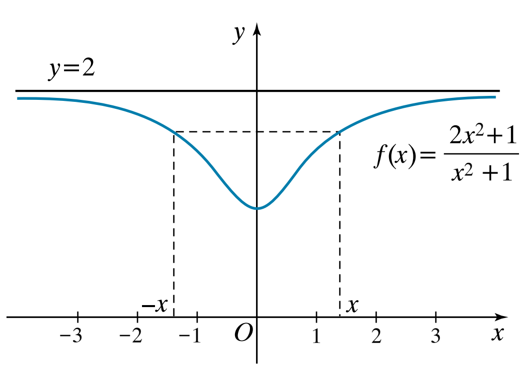
Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης στο $-\infty$, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3, με τύπους:

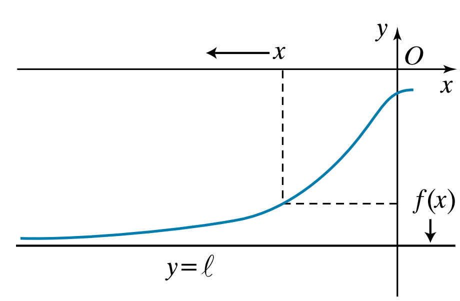
$$f_1(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0 \qquad f_2(x)=\frac{1}{x^2},\ x\neq 0 \qquad f_3(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα 5.6ε.

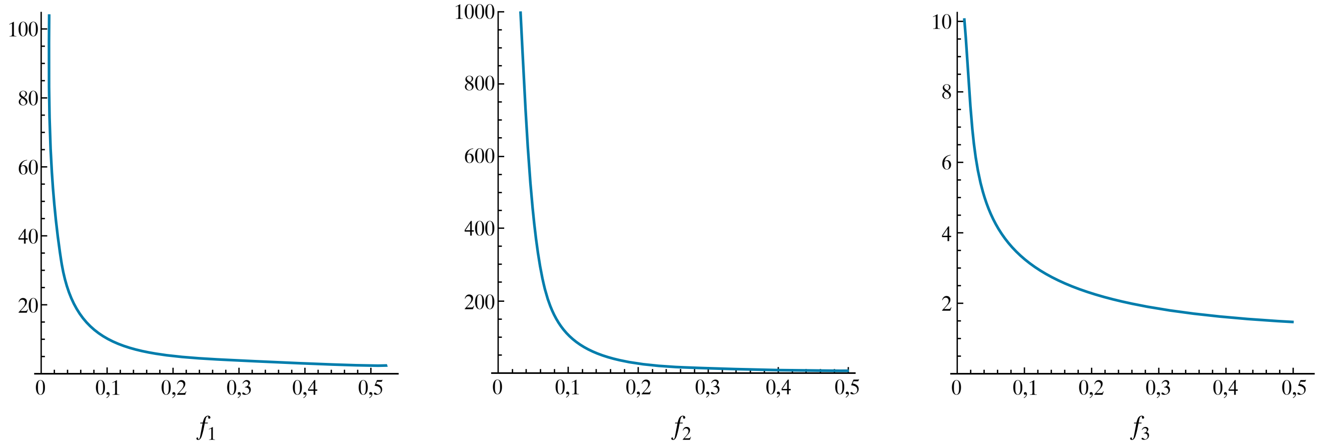
Από τις γραφικές παραστάσεις καθώς επίσης και τον πίνακα τιμών 5.6.1 παρατηρούμε ότι όταν



Σχ. 5.6γ



Σχ. 5.6δ



Σχ. 5.6ε

το x αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές των συναρτήσεων πλησιάζουν το μηδέν. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Ανάλογα έχουμε:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \,.$$

Πίνακας 5.6.1

	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_1	$\frac{1}{x}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}
f_2	$\frac{1}{x^2}$	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-12}
f_3	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	10	$10^{-3/2}$	10^{-2}	10^{-3}

Γενικά ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν r είναι ένας θετικός αριθμός, τότε:

α) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

β) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$, εφόσον το x^r ορίζεται για αρνητικές τιμές.

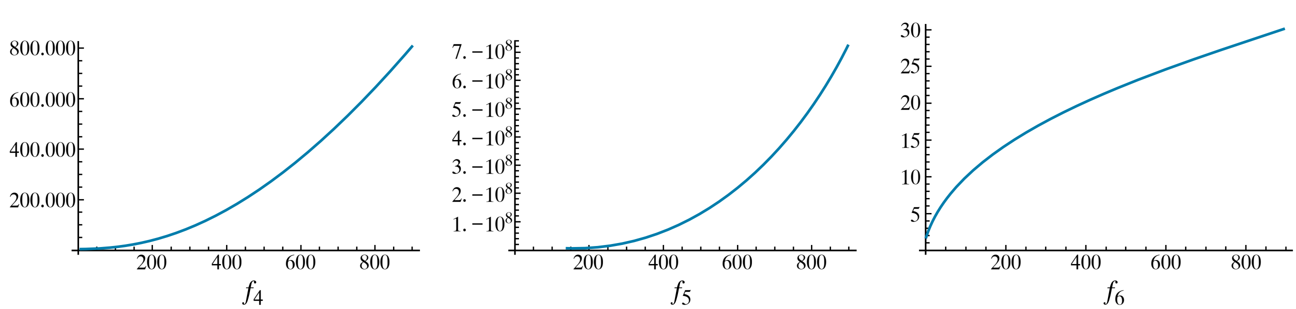
Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{2/3}} = 0 \,, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^5} = 0 \,, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{1/2}} = 0 \,.$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

$$f_4(x) = x^2, \quad f_5(x) = x^3, \quad f_6(x) = \sqrt{x}$$

και τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις που φαίνονται στο σχήμα 5.6στ.



Σχ. 5.6στ

Ας θεωρήσουμε επίσης τις συναρτήσεις με τύπους

$$f_7(x) = -x^2, \qquad f_8(x) = -x^3, \qquad f_9(x) = -\sqrt{x}, x > 0$$

και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους που δίνονται στο σχήμα 5.6ζ.

Από τις γραφικές παραστάσεις των σχημάτων 5.6στ και 5.6ζ και τους αντίστοιχους πίνακες τιμών 5.6.2, 5.6.3, παρατηρούμε ότι, όταν το x αυξάνει απεριόριστα ($x \to +\infty$):

α) οι τιμές των συναρτήσεων f_4, f_5, f_6 αυξάνουν απεριόριστα, ενώ

β) οι τιμές των συναρτήσεων f_7, f_8, f_9 μειώνονται απεριόριστα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f_4, f_5, f_6 έχουν στο $+\infty$ όριο το $+\infty$, ενώ οι συναρτήσεις f_7, f_8, f_9 έχουν στο $+\infty$ όριο το $-\infty$, και γράφουμε:

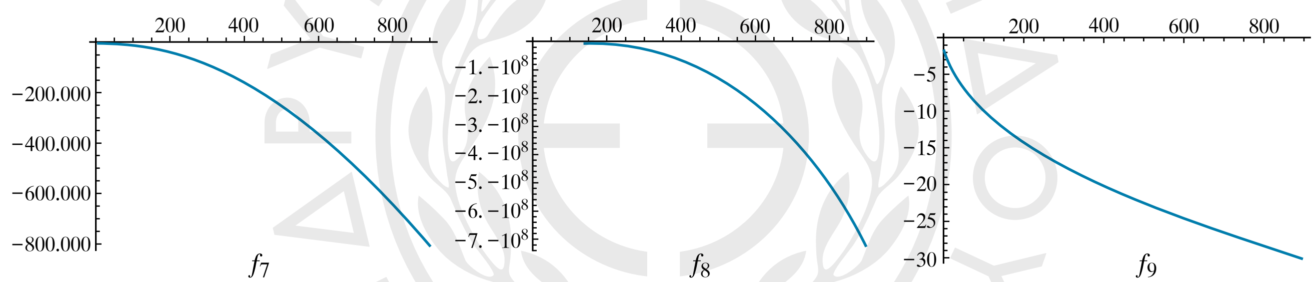
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} (-\sqrt{x} = -\infty).$$

Ανάλογα, από τους πίνακες τιμών 5.6.4, 5.6.5 και το σχήμα 5.6η, παρατηρούμε ότι, όταν το x μικραίνει απεριόριστα ($x \to -\infty$):

α) οι τιμές των συναρτήσεων f_4, f_8 αυξάνονται απεριόριστα, ενώ

β) οι τιμές των συναρτήσεων f_5, f_7 μειώνονται απεριόριστα.



Σχ. 5.6ζ

Πίνακας 5.6.2

	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_4	x^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}
f_5	x^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{18}
f_6	$\sqrt{x}$	10	$\sqrt{10^3}$	10^2	10^3

Πίνακας 5.6.3

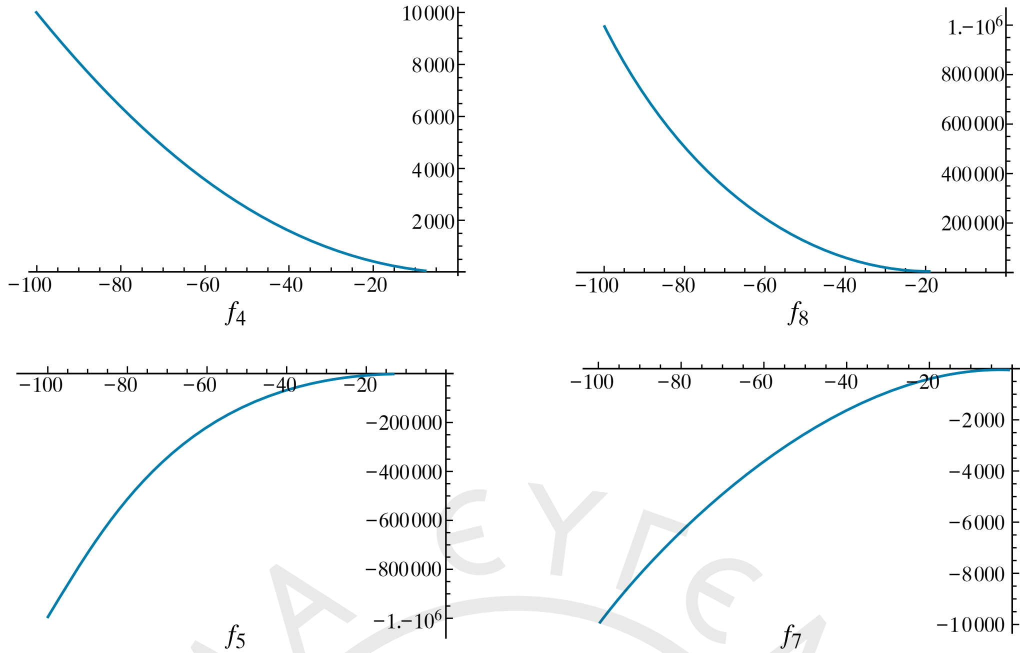
	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_7	$-x^2$	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{12}
f_8	$-x^3$	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{18}
f_9	$-\sqrt{x}$	-10	$-\sqrt{10^3}$	-10^2	-10^3

Πίνακας 5.6.4

	x	-10^2	-10^3	-10^4	-10^6
f_4	x^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}
f_5	x^3	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{18}

Πίνακας 5.6.5

	x	-10^2	-10^3	-10^4	-10^6
f_7	$-x^2$	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{12}
f_8	$-x^3$	10^6	10^9	10^{12}	10^{18}



Σχ. 5.6η

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f_4, f_8 έχουν στο $-\infty$ όριο το $+\infty$, ενώ οι συναρτήσεις f_5, f_7 έχουν στο $-\infty$ όριο το $-\infty$, και γράφουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty} (-x^2)=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty} (-x^3)=+\infty$$

Οι ιδιότητες των ορίων που εξετάσαμε στην παράγραφο 5.5 ισχύουν και για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$. Για το όριο στο $-\infty$ των ακέραιων θετικών δυνάμεων του x ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } n \text{ άρτιος}\\ -\infty, & \text{αν } n \text{ περιττός.}\end{cases}$$

Με χρήση πινάκων τιμών μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$ της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης που γνωρίσαμε στην παράγραφο 5.3 ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Αν $\alpha>1$ (σχ. 5.6θ), τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x=0,\qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0} \log_\alpha x=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x=+\infty$$

Αν $0<\alpha<1$ (σχ. 5.6ι), τότε:

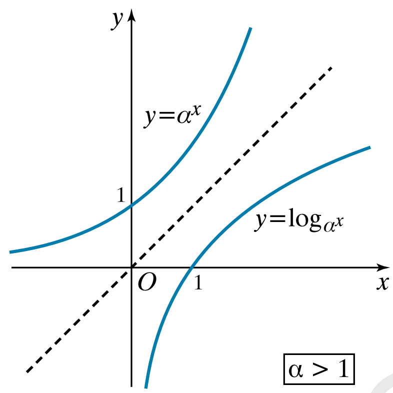
$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x=0,\qquad \lim_{x\to 0} \log_\alpha x=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x=-\infty$$

Για παράδειγμα, όταν $\alpha=e>1$, λαμβάνουμε:

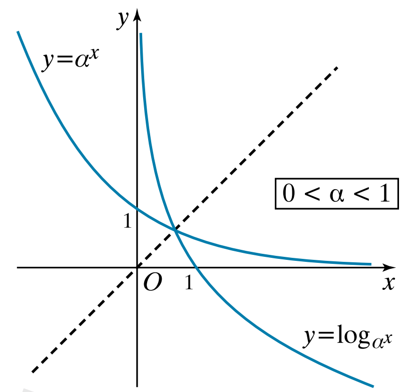
$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0,\quad \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty,\quad \lim_{x\to 0} \ln x=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty,$$

ενώ για $a=1/e<1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$$



Σχ. 5.6θ



Σχ. 5.6ι

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.1.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}(5x^3+7x-3)$ β) $\lim_{x\to-\infty}(5x^3+7x-3)$ γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-4}{x^3-4}$

δ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-6x+9}{6x^3+5x-1}$ ε) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}$ στ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}$

Λύση.

α) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=5x^3+7x-3$ μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$f(x)=5x^3\left(1-\frac{7}{5x^2}-\frac{3}{5x^3}\right)$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{7}{5x^2}-\frac{3}{5x^3}\right)=1-0-0=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(5x^3)=+\infty$$

έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(5x^3)=+\infty.$$

β) Αφού τώρα έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{7}{5x^2}-\frac{3}{5x^3}\right)=1-0-0=1$, $\lim_{x\to-\infty}(5x^3)=-\infty$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(5x^3)=-\infty.$$

γ) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=\frac{6x^2-4}{x^3-4}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{6x^2-4}{x^3-4}=\frac{6x^2\left(1-\frac{4}{6x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{4}{x^3}\right)}=\frac{6x^2}{x^3}\cdot\frac{1-\frac{4}{6x^2}}{1-\frac{4}{x^3}},$$

και αφού
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{6x^2}}{1-\frac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{6x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)}=\frac{1-0}{1-0}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0$$

παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^3}$.

δ) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=\frac{3x^2-6x+9}{6x^3+5x-2}$ μπορεί με παρόμοιο τρόπο να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+9}{6x^3+5x-1}=\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{5}{6x^2}-\frac{1}{6x^3}}\cdot\frac{3x^2}{6x^3},$$

και αφού
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{5}{6x^2}-\frac{1}{6x^3}}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{6x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{6x^3}$.

ε) Για $x\neq 0$ η συνάρτηση $f(x)=\frac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{6x^3+x-7}{3x^3-x+1}=\frac{6x^3\left(1+\frac{1}{6x^3}-\frac{7}{6x^3}\right)}{3x^3\left(1-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x^3}\right)}=\frac{6x^3}{3x^3}\cdot\frac{1+\frac{1}{6x^3}-\frac{7}{6x^3}}{1-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x^3}},$$

και αφού
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{6x^3}-\frac{7}{6x^3}}{1-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x^3}}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3}{3x^3}=\lim_{x\to+\infty}2=2$$

παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^3}{3x^3}$.

στ) Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (στ) βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^3}{3x^3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.2.

Η ταχύτητα με την οποία ένας εργάτης μπορεί να κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο εξάρτημα είναι συνάρτηση της εμπειρίας του (συνολικού χρόνου υπηρεσίας). Ας υποθέσουμε ότι μετά από t μήνες εργασίας, ο μέσος υπάλληλος μπορεί να κατασκευάζει

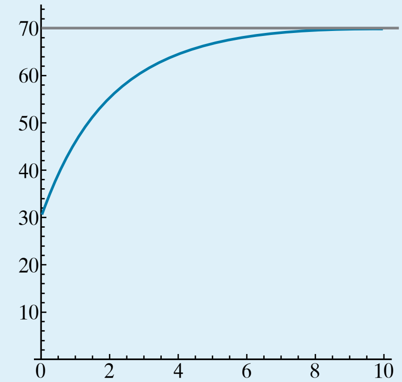
$$f(t)=70-40e^{-0,5t}$$

εξαρτήματα ανά ημέρα (σχ. 5.6ια). Να βρείτε πόσα εξαρτήματα ανά ώρα μπορεί να κατασκευάζει:

α) Ένας νέος εργάτης.

β) Ένας μέσος εργάτης με έξι μήνες εμπειρία.

γ) Ένας μέσος εργάτης με «άπειρες» ώρες εργασίας.



Σχ. 5.6ια

Λύση.

α) Ο αριθμός των εξαρτημάτων που μπορεί να κατασκευάζει ο νέος εργάτης θα είναι (για $t=0$)

$$f(0) = 70 - 40e^{-0,5\cdot 0} = 70 - 40 = 30.$$

β) Μετά από 6 μήνες εργασίας ο μέσος εργάτης θα κατασκευάζει

$$f(6) = 70 - 40e^{-0,5\cdot 6} = 70 - 40\cdot e^{-3} \cong 68 \text{ εξαρτήματα.}$$

γ) Εδώ μας ενδιαφέρει να βρούμε τι συμβαίνει καθώς το t αυξάνει ($t \to \infty$). Έχουμε

$$\lim_{t\to+\infty}(f)t = \lim_{t\to+\infty} = (70 - 40e^{-0,5t}) = 70 - 40\cdot 0 = 70,$$

δηλαδή για εργάτη με «άπειρες» ώρες εργασίας (εμπειρίας) το $f(t)$ προσεγγίζει τον αριθμό 70. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία με εξίσωση $y=70$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης f (σχ. 5.6ια) και έτσι η απόδοση του μέσου εργάτη μετά από εργασία «άπειρων» ωρών θα «σταθεροποιηθεί» στα 70 εξαρτήματα την ώρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.3.

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f *στο* $+\infty$ αν ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

ενώ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f *στο* $-\infty$ αν ισχύει:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$ [7].

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{20} + \frac{4e^x - 3}{2e^x + 3}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Λύση.

α) Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε, για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \left(\frac{x}{20} - 1\right)\right] = 0.$$

7. Ο ορισμός αυτός, για $\lambda=0$, ανάγεται στον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης. Όταν $\lambda \neq 0$, η $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ***πλάγια ασύμπτωτη***.

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\frac{x}{20}-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{6e^x}{2e^x+3}=\frac{6\cdot 0}{2\cdot 0+3}=0\,.$$

β) Ομοίως, για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\dfrac{x}{20}+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει

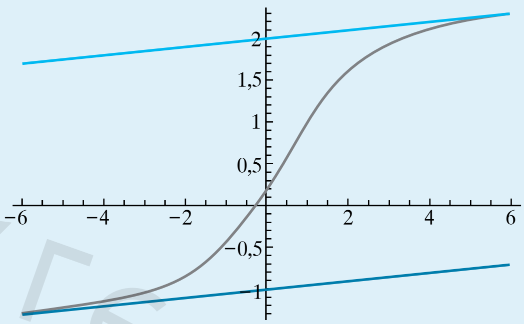
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\frac{x}{20}+2)\right]=0\,.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\frac{x}{20}+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-6}{2e^x+3}\right]=0.$$

Όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 5.6ιβ, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία

$$y=\frac{x}{20}+2\,,$$



Σχ. 5.6ιβ

ενώ όταν το x τείνει στο $-\infty$, η γραφική παράσταση της f, προσεγγίζει την ευθεία

$$y=\frac{x}{20}-1\,.$$

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι τιμές μιας συνάρτησης f μπορεί να αυξάνονται απεριόριστα, καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνονται απεριόριστα, δηλαδή λαμβάνουν πολύ μεγάλες θετικές τιμές ή πολύ μεγάλες (κατ' απόλυτη τιμή) αρνητικές τιμές. Υπάρχει όμως περίπτωση οι τιμές της f να αυξάνονται απεριόριστα ή να μειώνονται απεριόριστα, καθώς η μεταβλητή x πλησιάζει σε έναν πραγματικό αριθμό x_0.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\,,$$

η οποία ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Ο πίνακας 5.6.6 δίνει τις τιμές της συνάρτησης, καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν στον αριθμό 1.

Πίνακας 5.6.6
Πίνακας τιμών της f.

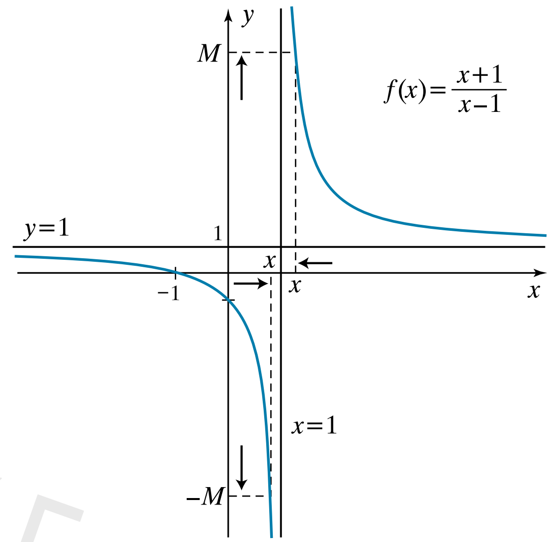
το x πλησιάζει τον αριθμό 1 από αριστερά					$\to 1 \leftarrow$	*το x πλησιάζει τον αριθμό 1 από δεξιά*			
x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	–19	–199	–1999	–19999	?	20001	2001	201	21

Από τον πίνακα 5.6.6, καθώς και από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που φαίνεται στο σχήμα 5.6ιγ παρατηρούμε ότι: καθώς το x πλησιάζει από δεξιά τον πραγματικό αριθμό 1, οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα. Μάλιστα υπάρχει η δυνατότητα, με κατάλληλη επιλογή των τιμών που θα λάβει το x, να «υποχρεώσουμε» τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f να γίνουν μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M μας δοθεί. Για παράδειγμα, από τον πίνακα τιμών 5.6.6 είναι φανερό ότι:

α) Επιλέγοντας το x δεξιά του 1 και σε απόσταση από αυτό μικρότερη του 0,001 (δηλ. $1 < x < 1{,}001$), εξασφαλίζεται ότι οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f θα γίνουν μεγαλύτερες από τον αριθμό 2001 [δηλ. θα ισχύει $f(x) > 2001$].

β) Επιλέγοντας το x δεξιά του 1 και σε απόσταση από αυτό μικρότερη του 0,0001 (δηλ. $1 < x < 1,\ 0001$), εξασφαλίζεται ότι οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f θα γίνουν μεγαλύτερες από τον αριθμό 20001 (δηλ. θα ισχύει $f(x) > 20001$) κ.ο.κ. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο 1 από δεξιά, όριο το $+\infty$ και θα γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty .$$



Σχ. 5.6ιγ

Από τον πίνακα 5.6.5 είναι επίσης φανερό ότι, καθώς το x πλησιάζει από αριστερά τον πραγματικό αριθμό 1, οι τιμές της συνάρτησης f ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M(M>0)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο 1 από αριστερά, όριο το $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty .$$

Από το σχήμα 5.6ιγ φαίνεται ότι καθώς το x πλησιάζει τον αριθμό 1, η γραφική παράσταση της συνάρτησης πλησιάζει την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, η οποία είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

Η ευθεία $x = 1$ ονομάζεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ή απλούστερα κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Γενικά για $x_0 \in R$ μπορούν να οριστούν τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to x_0^-} (x) = +\infty$ β) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ ε) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ στ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

των οποίων το νόημα γίνεται ευκολότερα κατανοητό μέσα από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 5.6ιδ (σε όλες έχουμε $x_0 = 1$).

Αν για μία συνάρτηση f υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα όρια (α)–(στ), τότε η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ θα ονομάζεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ή απλώς κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

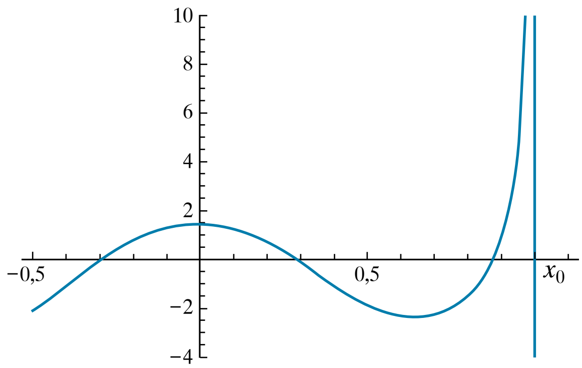
Εφόσον τα όρια (α)–(στ) αφορούν στα όρια όταν το x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό x_0:

α) Για να αναζητήσουμε το (μη πεπερασμένο) αριστερό πλευρικό όριο μιας συνάρτησης f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0).

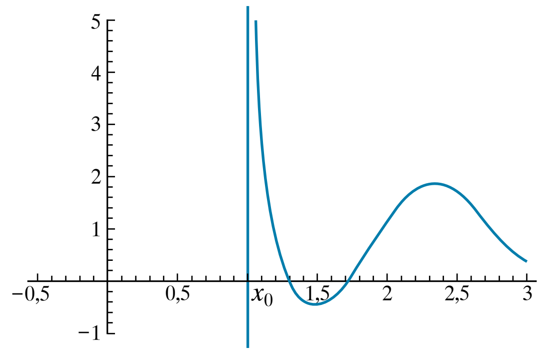
β) Για να αναζητήσουμε το (μη πεπερασμένο) δεξί πλευρικό όριο της f στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β).

γ) Για να αναζητήσουμε το (μη πεπερασμένο) όριο μιας συνάρτησης στο x_0, θα πρέπει αυτή να ορίζεται «*κοντά στο* x_0», δηλαδή να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

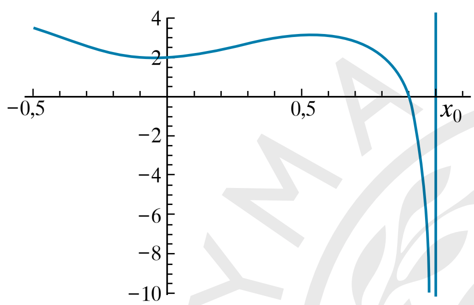
Αποδεικνύεται (η απόδειξη ξεφεύγει των στόχων του παρόντος εγχειριδίου) ότι, όπως και για τα πεπερασμένα όρια, το (μη πεπερασμένο) όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά της όρια και είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει:



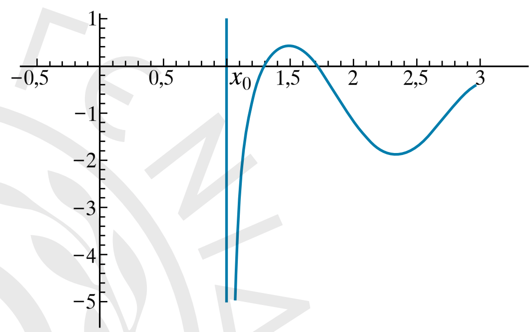
α) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$



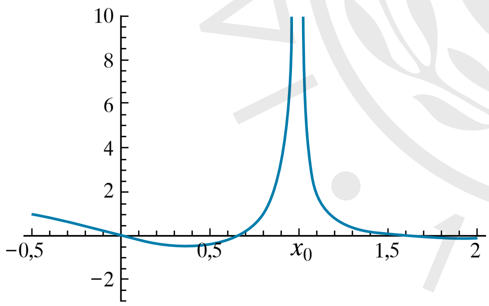
β) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$



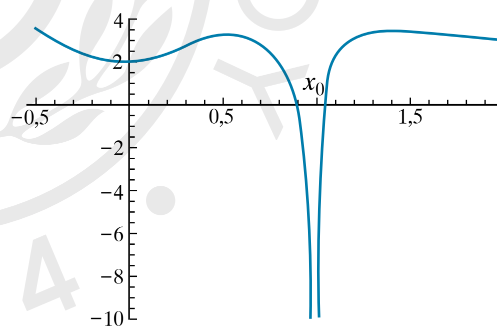
γ) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$



δ) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$



ε) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



στ) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Σχ. 5.6ιδ

α) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Ισχύουν επίσης τα παρακάτω αποτελέσματα για *μη πεπερασμένα* όρια:

$\mathbf{M_1}$ α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε η $f(x)$ θα λαμβάνει θετικές τιμές ($f(x)>0$) κοντά στο x_0.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε η $f(x)$ θα λαμβάνει αρνητικές τιμές ($f(x)<0$) κοντά στο x_0.

M₂ α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

M₃ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

M₄ α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

M₅ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

M₆ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=+\infty$ (για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό κ).

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{2n}}=+\infty,\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{(x-x_0)^{2n-1}}=+\infty,\quad \lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{(x-x_0)^{2n-1}}=-\infty$$

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$, το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει στο 0 το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

Στους επόμενους τρεις πίνακες δίνεται το όριο του αθροίσματος του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων, όταν γνωρίζουμε τα όρια της καθεμίας από αυτές. Τα αποτελέσματα που δίνονται στους πίνακες ισχύουν:

α) Για πλευρικά και για μη πλευρικά όρια και

β) όταν τα όρια αναφέρονται στο $x_0\in\mathbb{R}$ ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Όριο της f	*Όριο της g*		*Όριο της f+g*
ℓ_1	ℓ_2		$\ell_1+\ell_2$
ℓ_1	$+\infty$		$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\Rightarrow$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		απροσδιόριστο
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$
0	$+\infty$		$+\infty$
0	$-\infty$		$-\infty$

Όριο της f	*Όριο της g*		*Όριο της $f \cdot g$*
ℓ_1	ℓ_2	$\Rightarrow$	$\ell_1 \ell_2$
ℓ_1	$+\infty$		$+\infty$, αν $\ell_1 > 0$ $-\infty$, αν $\ell_1 < 0$
$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$
0	$+\infty$		απροσδιόριστο
0	$-\infty$		απροσδιόριστο

Όριο της f	*Όριο της g*		*Όριο της* $\dfrac{f}{g}$
ℓ_1	$\ell_2 \neq 0$	$\Rightarrow$	ℓ_1/ℓ_2
ℓ_1	$+\infty$ ή $-\infty$		0
$+\infty$	$\ell_2 > 0$		$+\infty$
$-\infty$	$\ell_2 > 0$		$-\infty$
$\ell_1 > 0$	$0, (g(x) > 0$		$+\infty$
$\ell_1 > 0$	$0, (g(x) < 0$		$-\infty$
$+\infty$ ή $-\infty$	$+\infty$ ή $-\infty$		απροσδιόριστο
0	0		απροσδιόριστο

Όπου έχει σημειωθεί, η έκφραση «απροσδιόριστο» στους παραπάνω πίνακες σημαίνει ότι το όριο, αν υπάρχει, εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη μορφή των συναρτήσεων *f* και *g*. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε ***απροσδιόριστες μορφές***.

Πιο συγκεκριμένα, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{και} \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

αντίστοιχα. Επειδή $f - g = f + (-g)$, απροσδιόριστες μορφές για το όριο της διαφοράς συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) - (+\infty) \quad \text{και} \quad (-\infty) - (-\infty).$$

Τέλος, επειδή $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για το όριο του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την έννοια της απροσδιόριστης μορφής, ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + a$ (όπου α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός) και $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, για τις οποίες τότε έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2} + a\right) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Αφού $f(x) + g(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2} + a\right) + \dfrac{1}{x^2} = a$, είναι φανερό ότι $\lim\limits_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to 0} a = a$, οπότε το όριο του αθροίσματος δεν μπορεί να καθοριστεί (προσδιοριστεί) από το όριο των δύο προσθετέων. Για παράδειγμα:

α) Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0} g(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=1$$

β) Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+2$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 0} g(x)=+\infty \ \text{ και } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=2$$

γ) Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 0} g(x)=+\infty \ \text{ και } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=0 \ \text{ κ.ο.κ}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.4.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-2x+1}{x^4-10x^3+25x^2}$ β) $\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x-1}$ γ) $\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}$ δ) $\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}$

Λύση.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^4-10x^3+25x^2}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^4-10x^3+25x^2}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2(x^2-10x+25)}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2}\frac{1}{(x-5)^2}\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-2x+1}{x^2}=\frac{2\cdot 5^2-2\cdot 5+1}{5^2}=\frac{41}{25}>0,\quad \lim_{x\to 5}(x-5)^2=0,\ (x-5)^2>0\,,$$

οπότε $\lim_{x\to 5} f(x)=+\infty$.

β) Αφού $\lim_{x\to 1^+}(x-2)\sqrt{x+3}=-2$ και $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^3}=+\infty$ (για $x>1$ είναι $(x-1)^3>0$),

θα έχουμε $\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x-1}=-\infty$.

γ) Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και ισχύει $x-2>0$ για $x>2$, θα έχουμε $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^3}=+\infty$.

Ισχύει επιπλέον ότι $\lim_{x\to 2^+}(2x^2-3x+1)=\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+1)=3$, οπότε το ζητούμενο όριο προκύπτει ως εξής:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{(x-2)^3}(2x^2-3x+1)\right]=+\infty.$$

δ) Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και ισχύει $x-2<0$ για $x<2$, θα έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^3}=-\infty.$$

Ισχύει επιπλέον ότι

$$\lim_{x\to 2^-}(2x^2-3x+1)=\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+1)=3,$$

οπότε το ζητούμενο όριο προκύπτει ως εξής:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{(x-2)^3}(2x^2-3x+1)\right]=-\infty.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.5.

Μια εταιρεία κατασκευής ενός ναυτιλιακού προϊόντος έχει πάγια μηνιαία έξοδα 5000 €, ενώ το κόστος κατασκευής μιας μονάδας του προϊόντος είναι 20 €.

α) Να υπολογίσετε το μηνιαίο κόστος $K(x)$ για την κατασκευή x μονάδων του προϊόντος.

β) Το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος δίνεται από τον τύπο:

$$K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}.$$

Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty}K_\mu(x)$ και $\lim_{x\to 0^+}K_\mu(x)$. Ποια είναι η φυσική σημασία των ορίων αυτών;

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $K_\mu(x)$.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση το μηνιαίο κόστος $K(x)$ για την κατασκευή x μονάδων του προϊόντος θα δίνεται από τον τύπο $K(x)=20x+5000$, $x\geq 0$.

β) Έχουμε

$$K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{20x+5000}{x}=20+\frac{5000}{x}$$

και αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{5000}{x}=0$, προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}K_\mu(x)=\lim_{x\to+\infty}(20+\frac{5000}{x})=\lim_{x\to+\infty}20+\lim_{x\to+\infty}\frac{5000}{x}=20.$$

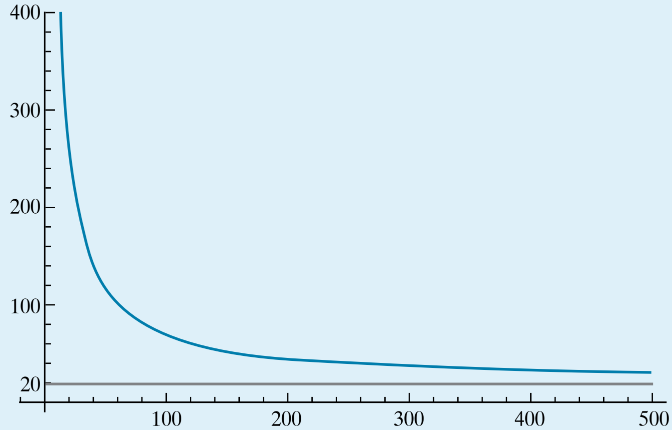
Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία με εξίσωση $y=20$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης $K_\mu(x)$ στο $+\infty$. Επομένως, όταν η εταιρεία κατασκευάζει απεριόριστα πολλές μονάδες, το μέσο κόστος ταυτίζεται με το κόστος ανά μονάδα, αφού τα πάγια έξοδα είναι τότε αμελητέα.

Για το όριο στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}K_\mu(x)=\lim_{x\to 0^+}(20+\frac{5000}{x})=+\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $K_\mu(x)$. Επομένως, όταν η εταιρεία κατασκευάζει πολύ λίγες μονάδες, το μέσο κόστος είναι εξαιρετικά υψηλό.

γ) Γνωρίζοντας ότι οι ευθείες με εξισώσεις $y = 20$ και $x = 0$ είναι ασύμπτωτες της συνάρτησης, με τη βοήθεια του πίνακα τιμών μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 5.6ιε.



Σχ. 5.6ιε

Ασκήσεις.

5.6.1. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^5}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)^2$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+2x-7)$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+2x-7)$ ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{-x^2+5}$ στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3}{x^4+3}$

5.6.2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$ των επόμενων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^2+3}$ γ) $f(x)=\dfrac{1-2x}{3+5x}$

5.6.3. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+3}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+2)$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x^3+3x}$ δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

5.6.4. Έστω η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.6ιστ.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{x\to1^+}f(x),\ \lim_{x\to1^-}f(x),\ \lim_{x\to1}f(x),\ \lim_{x\to-1^+}f(x),\ \lim_{x\to-1^-}f(x),\ \lim_{x\to-1^+}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x).$$

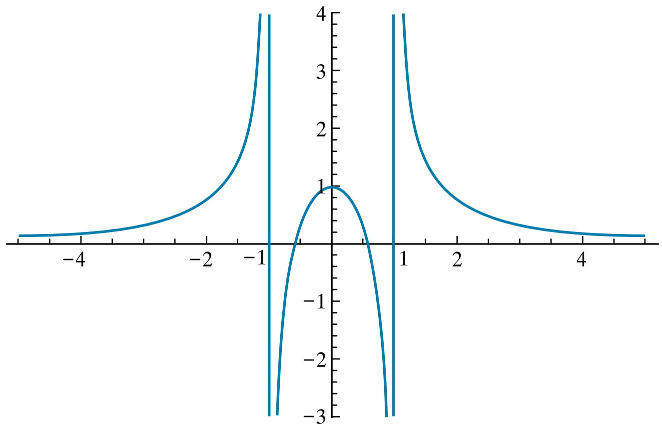
β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, καθώς και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f.

5.6.5. Έστω η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.6ιζ.

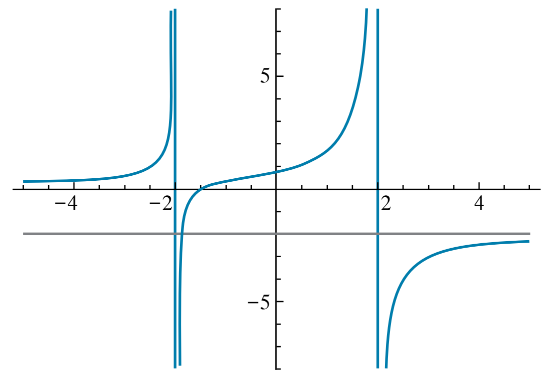
α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{x\to2^+}f(x),\ \lim_{x\to2^-}f(x),\ \lim_{x\to2}f(x),\ \lim_{x\to-2^+}f(x),\ \lim_{x\to-2^-}f(x),\ \lim_{x\to-2}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x).$$

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, καθώς και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f.



Σχ. 5.6ιστ



Σχ. 5.6ιζ

5.6.6. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{6}{2x-4}$ β) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3}{\sqrt{1-x}}$ γ) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{(x+3)^{40}}$ δ) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{x^2-4}$

ε) $\lim\limits_{x\to -6^-} \dfrac{1}{(x+6)^{11}}$ στ) $\lim\limits_{x\to -6^+} \dfrac{1}{(x+6)^{11}}$ ζ) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2)$ η) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x}$

5.6.7. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ως κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = x_0$.

α) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, $x_0 = -2$ β) $f(x) = \dfrac{1-3x^2}{1-x^4}$, $x_0 = -1$, και $x_0 = 1$ γ) $f(x) = \dfrac{1-3x}{3+6x}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$

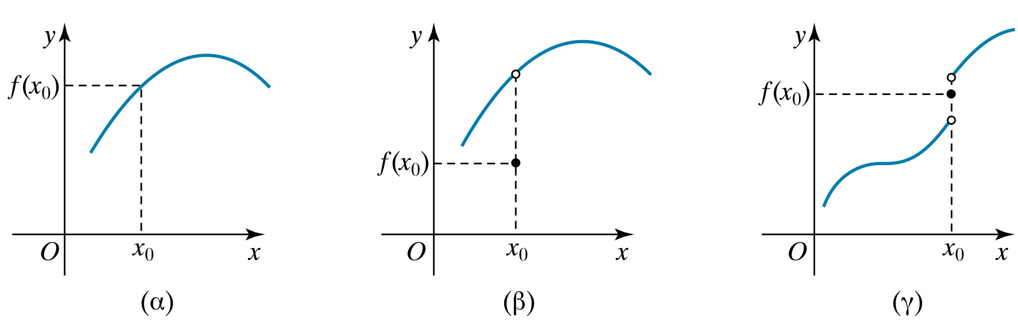
5.6.8. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 που δίνεται.

α) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^3+3x^2}$, $x_0 = 0$ β) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$ γ) $f(x) = \dfrac{x-|x|}{|x|x}$, $x_0 = 0$

5.7 Συνέχεια συναρτήσεων.

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων, που μας παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά τους, είναι η συνέχεια. Στην καθημερινή ομιλία, όταν λέμε ότι μια διαδικασία είναι ***συνεχής***, εκείνο που αντιλαμβανόμαστε είναι ότι αυτή δεν παρουσιάζει διακοπές. Στα Μαθηματικά η έννοια της συνέχειας δεν διαφέρει πολύ από την απλοϊκή περιγραφή αυτή.

Ας θεωρήσουμε τρεις συναρτήσεις με γραφικές παραστάσεις, που δίνονται στο σχήμα 5.7α.



Σχ. 5.7α

Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις (β) και (γ) «διακόπτονται» στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, ενώ η γραφική παράσταση (α) δεν «διακόπτεται» στο σημείο αυτό. Με την έννοια αυτή, η συνάρτηση του σχήματος (α) θα λέμε ότι είναι συνεχής στο x_0, ενώ οι συναρτήσεις των σχημάτων (β) και (γ) ότι δεν είναι συνεχείς στο x_0.

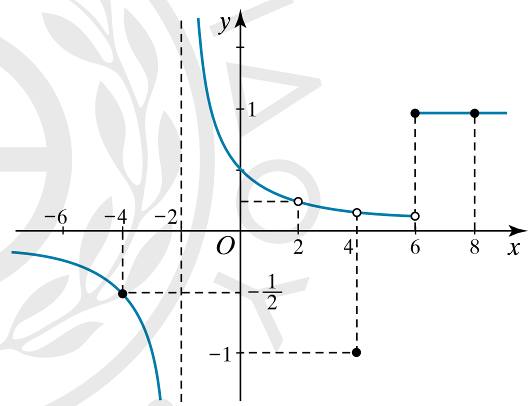
Γενικά, όταν λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εννοούμε ότι η γραφική της παράσταση ***δεν διακόπτεται*** στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Αν διακόπτεται, λέμε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της συνέχειας και τη σχέση της με την έννοια του ορίου που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,4)\cup(4,6)\\ -1, & x=4\\ 1, & x\in[6,+\infty)\end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζεται στο σχήμα 5.7β, απ' όπου συμπεραίνουμε (γραφικά) ότι, σημεία στα οποία παρουσιάζεται διακοπή της συνάρτησης είναι τα –2, 2, 4, 6. Εξετάζοντας τα όρια και τις τιμές της συνάρτησης f σε διάφορα σημεία, παίρνουμε τον επόμενο πίνακα:

x_0	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$f(x_0)$	*Γραφική παράσταση*
–4	–1/2	–1/2	δεν διακόπτεται
–2	δεν υπάρχει	δεν ορίζεται	διακόπτεται
0	1/2	1/2	δεν διακόπτεται
2	1/4	δεν ορίζεται	διακόπτεται
4	1/6	–1	διακόπτεται
6	δεν υπάρχει	1	διακόπτεται
8	1	1	δεν διακόπτεται



Σχ. 5.7β

Παρατηρούμε ότι:

α) Στα σημεία –2, 2 παρουσιάζεται διακοπή της C_f, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι εκεί η f δεν ορίζεται.

β) Στο σημείο $x_0 = 4$, όπου η C_f διακόπτεται, υπάρχει το όριο της f, αλλά ισχύει $\lim\limits_{x\to 4} f(x)\neq f(4)$.

γ) Στο σημείο $x_0 = 6$, όπου επίσης η C_f διακόπτεται, δεν υπάρχει το όριο της f.

Τέλος, στα τρία σημεία στα οποία δεν εμφανίζεται διακοπή της γραφικής παράστασης, δηλαδή στα –4, 0, 8, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για να διατυπωθεί ο επόμενος ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Μία συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3-2$ είναι συνεχής στο $x_0=1$, αφού

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^3-2)=1^3-2=-1=f(1).$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι μια συνάρτηση f ***δεν είναι συνεχής*** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

α) Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

β) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και δεν ισχύει η ισότητα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις με τύπους:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 3-2x, & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}, \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1 \\ 0, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχείς στο σημείο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(3-2x)=1$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 1 και

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\ , \quad g(1)=0$$

οπότε υπάρχει το όριο της g στο 1, αλλά δεν ισχύει η ισότητα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες των ορίων, μας βοηθάει στη διαπίστωση της συνέχειας συναρτήσεων που παράγονται από συνεχείς συναρτήσεις μέσω απλών αλγεβρικών πράξεων.

> Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις
>
> $f+g$, αf (με $\alpha\in\mathbb{R}$), $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ (όπου $g(x_0)\ne 0$) $|f|$, $\sqrt[\nu]{f}$ (όπου $f(x_0)\ge 0$)
>
> είναι συνεχείς στο x_0.

Για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

Όμως, σύμφωνα με την ιδιότητα L_6 των ορίων (βλ. παράγρ. 5.5), αφού υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, θα υπάρχει και το όριο της συνάρτησης $f+g$ στο x_0 και θα ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0)=(f+g)(x_0),$$

σχέση η οποία αποδεικνύει ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο x_0.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες των μαθηματικών πράξεων.

Τέλος, μπορεί να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα της συνέχειας διατηρείται και όταν χρησιμοποιούμε την πράξη της σύνθεσης. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα:

> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Εκτός από τη συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, μας ενδιαφέρει και η συνέχεια σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Διαισθητικά η συνέχεια σε διάστημα αναφέρεται στην ιδιότητα να μην διακόπτεται η γραφική παράσταση συνάρτησης σε κανένα σημείο του διαστήματος που εξετάζουμε (εσωτερικό ή άκρο του).

Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής:

α) Σε ένα ***ανοικτό διάστημα*** $\Delta=(\alpha,\beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0\in\Delta$.

β) Σε ένα ***κλειστό διάστημα*** $\Delta=[\alpha,\beta]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

Αν η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, ονομάζεται απλά ***συνεχής***.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3-2$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}(x^3-2)=x_0^3-2=f(x_0).$$

Αντίθετα, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της $[0,1]$, αφού διακόπτεται στο άνω άκρο (ισχύει $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1\neq 0=f(1)$).

Από τον τρόπο που ορίστηκε η συνέχεια συναρτήσεων σε διάστημα, γίνεται φανερό ότι οι ιδιότητες που αναφέρονται στη συνέχεια σε σημείο, μπορούν να μεταφερθούν άμεσα σε αντίστοιχες ιδιότητες σε διαστήματα.

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους, τότε και οι συναρτήσεις

  $f+g$, $\quad cf$ (με $c\in\mathbb{R}$), $\quad f\cdot g$,

  $|f|$, $\quad \dfrac{f}{g}$ (όπου ισχύει $g(x)\neq 0$), $\quad \sqrt[\nu]{f}$ (όταν $f(x)\geq 0$),

  είναι συνεχείς στο Δ.
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και η g είναι συνεχής στο $f(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο Δ.

Πολλές από τις συναρτήσεις που γνωρίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους είναι συνεχείς σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους. Έτσι:

α) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει (βλ. παράγρ. 5.5)

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0).$$

β) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$ έχουμε (βλ. παράγρ. 5.5)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

γ) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημx και συνx είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει (βλ. Ιδιότητα $\boldsymbol{B_3}$ στην παράγρ. 5.5)

$$\lim_{x \to x_0} \text{ημ}x = \text{ημ}x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \text{συν}x = \text{συν}x_0.$$

Οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$ $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς. Ειδικότερα είναι συνεχείς οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = e^x$, $f(x) = 10^x$, $g(x) = \ln x$, $g(x) = \log x$.

Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \text{εφ}x = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$ και $g(x) = \text{σφ}x = \dfrac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους (το οποίο δεν είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \text{εφ}(x^3 + 2x + 1)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $g(x) = \text{εφ}x$ και $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

Αναφέρουμε τέλος το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο διευκολύνει την εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης μιας συνάρτησης (αν υπάρχει), η οποία έχει τη μορφή πηλίκου συνεχών συναρτήσεων.

Αν οι συναρτήσεις g, h είναι συνεχείς στο $x = x_0$, $g(x_0) \neq 0$ και $h(x_0) = 0$, τότε για τη συνάρτηση $f = \dfrac{g}{h}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

οπότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = x_0$.

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και για πλευρικά όρια, όταν οι δύο συναρτήσεις g, h είναι ***ορισμένες στα διαστήματα*** $(\alpha, x_0]$ ή $[x_0, \beta)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.1.

Να βρείτε τον αριθμό α, έτσι ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\alpha x^3, & x \leq 2 \\ 2\alpha^2 x - 3, & x > 2. \end{cases}$$

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής για $x > 2$, καθώς και για $x < 2$ ως πολυωνυμική. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = -4a.$$

Όμως έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-\frac{1}{2}ax^3) = -4a, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2a^2 x - 3) = 4a^2 - 3.$$

Επομένως θα πρέπει

$$4a^2-3=-4a \Leftrightarrow 4a^2+4a-3=0 \Leftrightarrow \ \alpha=\frac{1}{2} \ \text{ή} \ \alpha=-\frac{3}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.2.

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x(x+3)}$.

Λύση.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $g(x)=x+2$ και $h(x)=x(x+3)$ (είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμικές).

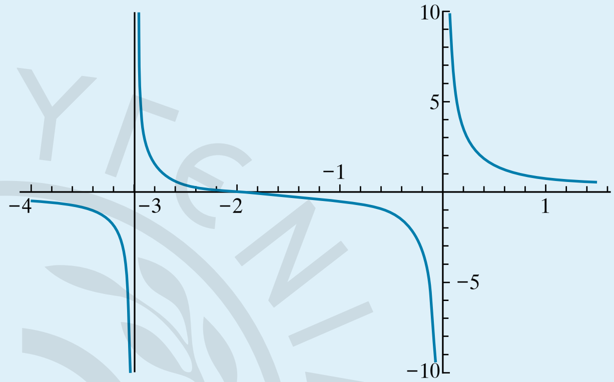
Επιπλέον ισχύει,

$$h(0)=0\cdot(0+1)=0,\ g(0)=0+2=2\neq 0,$$

οπότε η f θα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x=0$. Επίσης ισχύει:

$$h(-3)=-3\cdot(-3+3)=0,\ g(-3)=-3+2=-1\neq 0,$$

οπότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και την ευθεία με εξίσωση $x=-3$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο σχήμα 5.7γ.



Σχ. 5.7γ

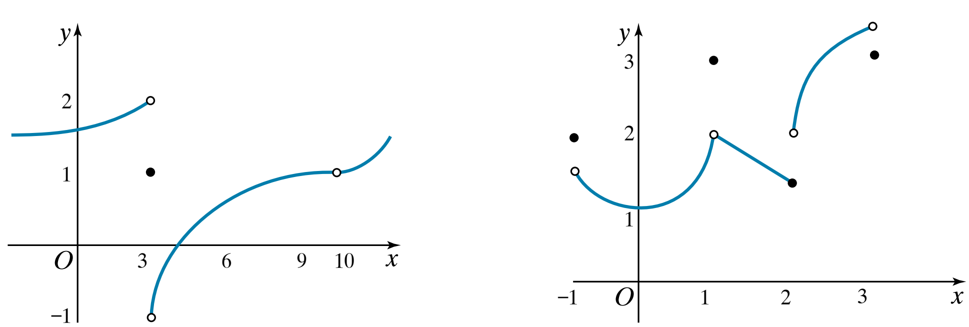
Ασκήσεις.

5.7.1. Στο σχήμα 5.7δ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.

5.7.2. Να μελετήσετε τις επόμενες συναρτήσεις

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+3}, & x\neq -3\\[2ex] 0 & x=-3\end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1\\ 0, & x=1\\ x^2-2x+1, & x>1\end{cases}$

ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_0, όπου $x_0=-3,\ 1$ αντίστοιχα.



Σχ. 5.7δ

5.7.3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις επόμενες συναρτήσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<3 \\ 8-x, & x\geq 3 \end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x\geq e \\ -2x+2, & x<e \end{cases}$ γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\,\eta\mu x}{x}, & x<0 \\ 1+\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0 \end{cases}$

5.7.4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η συνάρτηση f που δίνεται παρακάτω να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\leq 3 \\ \alpha x^2-2, & x>3 \end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases} ax^{10}-1, & x\geq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}, & x<1 \end{cases}$

5.7.5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x)=\eta\mu(\varepsilon\varphi x)$ β) $f(x)=e^{\eta\mu x}$ γ) $f(x)=\ln(x^2+4)$ δ) $f(x)=\ln(x^2+x+1)+e^x$

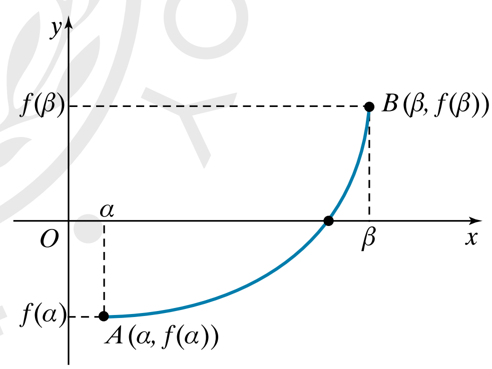
5.7.6. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x-1)(x+4)}$ β) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{(x-3)(x^2-4)}$

5.8 Θεώρημα Bolzano και Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε δύο πολύ βασικά αποτελέσματα που αφορούν σε συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κλειστά διαστήματα.

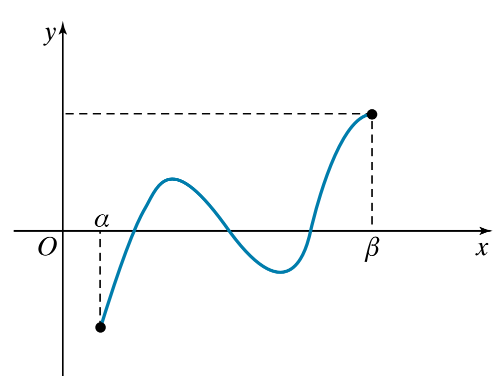
Ας θεωρήσουμε το σχήμα 5.8α, όπου έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)>0$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα και η γραφική παράσταση της f δεν διακόπτεται (λόγω της συνέχειας της f), αντιλαμβανόμαστε ότι αυτή θα πρέπει οπωσδήποτε να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0. Προφανώς στο σημείο αυτό θα ισχύει $f(x_0)=0$, δηλαδή το $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).



Σχ. 5.8α

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 5.8β, το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδικό. Μπορεί να έχουμε περισσότερα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις, οι οποίες προφανώς ισχύουν και όταν έχουμε $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)<0$, είναι γνωστές με την ονομασία ***Θεώρημα του Bolzano***. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.



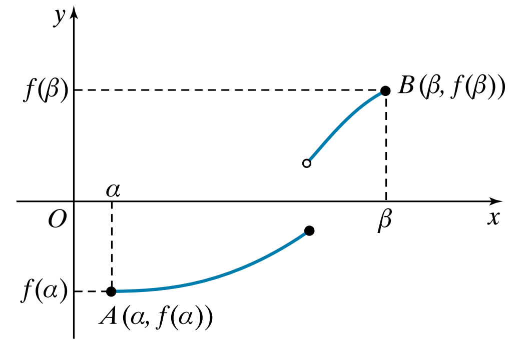
Σχ. 5.8β

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 5.8β, το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδικό. Μπορεί να έχουμε περισσότερα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις, οι οποίες προφανώς ισχύουν και όταν έχουμε $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)<0$, είναι γνωστές με την ονομασία ***Θεώρημα του Bolzano***. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα Bolzano

> Έστω μία συνάρτηση f, συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $f(\alpha)\ f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β).



Σχ. 5.8γ

Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην ιδιότητα της συνέχειας της συνάρτησης f που περιγράφεται στο θεώρημα Bolzano, διότι αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής, τότε η γραφική της παράσταση θα μπορούσε να είναι μια διακοπτόμενη γραμμή και επομένως δεν είναι απαραίτητο να τέμνει τον οριζόντιο άξονα, έστω και αν ισχύει $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$ (σχ. 5.8γ).

Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν για μία (συνεχή ή μη συνεχή) συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)\,f(\beta) > 0$, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η f δεν έχει ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Για παράδειγμα:

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2-2$ μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[1,2]$ αφού είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, και ισχύει ότι $f(1)\,f(2) = (-1)\cdot 2 = -2 < 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1,2]$ (η οποία προφανώς είναι η $x_0 = \sqrt{2}$). Για την ίδια συνάρτηση, δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2,2]$, αφού είναι μεν συνεχής, ως πολυωνυμική, αλλά ισχύει $f(-2)f(2) = 2\cdot 2 = 4 > 0$.Ωστόσο, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα $[-2,2]$, τις $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$.

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$ μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2,2]$ αφού είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, και ισχύει ότι $f(-2)f(2) = (-10)\cdot 6 = -60 < 0$. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[-2,2]$. Στην πραγματότητα, υπάρχουν τρεις ρίζες στο διάστημα $[-2,2]$, οι $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, και $x_3 = 1$.

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει άμεσα ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε οι τιμές της συνάρτησης είτε θα είναι θετικές για κάθε $x \in \Delta$, είτε θα είναι αρνητικές για κάθε $x \in \Delta$. Επομένως:

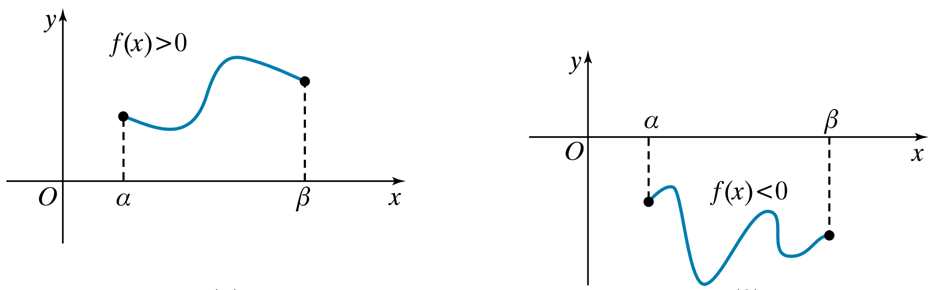
> Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Δ, διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ.

Έτσι για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ είτε θα έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ [σχ. 5.8δ(α)] είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ [σχ. 5.8δ(β)].

Μία άμεση συνέπεια των προηγούμενων είναι ότι οι συνεχείς συναρτήσεις f διατηρούν το πρόσημό τους σε καθένα από το διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού τους (σχ. 5.8ε).

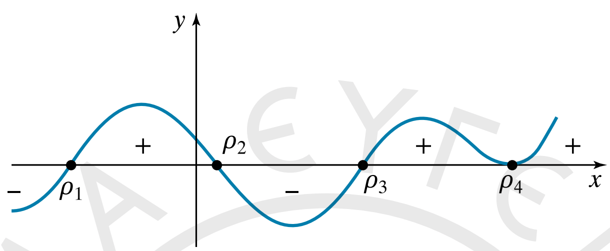
Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Πιο συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

> **Βήμα 1.** Βρίσκουμε όλες τις ρίζες της συνάρτησης f.
> **Βήμα 2.** Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε ένα σημείο ξ και βρίσκουμε το πρόσημο του $f(\xi)$.
> **Βήμα 3.** Αν $f(\xi) > 0$, η f θα έχει θετικό πρόσημο σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα. Αν $f(\xi) < 0$, η f θα έχει αρνητικό πρόσημο σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα.



(α) (β)

Σχ. 5.8δ



Σχ. 5.8ε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.8.1.

Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)$ = ημx – συνx στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση.

Για τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχουμε

$$\text{ημ}x - \text{συν}x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{συν}x \Leftrightarrow \text{εφ}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{4}.$$

Επομένως, οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{και} \quad \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right],$$

στα οποία η f θα διατηρεί σταθερό το πρόσημό της. Για να προσδιορίσουμε το είδος του προσήμου σε κάθε υποδιάστημα, επιλέγουμε έναν αριθμό ξ και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Διάστημα	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f(\xi)$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$	1	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$
Πρόσημο	–	+	–

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ το πρόσημο της f είναι αρνητικό, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ είναι θετικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.8.2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-2}+\frac{x^3}{x-1}=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)e^x + (x-2)x^3$ και διαπιστώνουμε ότι ισχύει:

$$f(-1)=-\frac{2}{e}+3>0\,, f(0)=-1<0 \text{ και } f(2)=e^2>0.$$

Επίσης η f είναι συνεχής ως άθροισμα γινομένων συνεχών συναρτήσεων. Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και ισχύει $f(-1)\,f(0) < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Όμως, αφού $x_0 \neq -1{,}0$, μπορούμε να γράψουμε

$$f(x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0-1)e^{x_0}+(x_0-2)x_0^3=0 \Leftrightarrow \frac{(x_0-1)e^{x_0}+(x_0-2)x_0^3}{(x_0-1)(x_0-2)}=0 \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{x_0-2}+\frac{x_0^3}{x_0-1}=0,$$

πράγμα το οποίο δείχνει ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(0)\,f(2) < 0$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει και μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

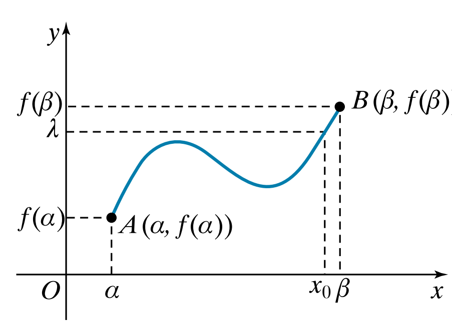
Ας υποθέσουμε ότι για μια συνεχή συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$. Ας θεωρήσουμε επίσης έναν αριθμό λ που βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, δηλαδή ισχύει $f(\alpha) < \lambda < f(\beta)$ (σχ. 5.8στ). Τότε μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = f(x) - \lambda$, $x \in [\alpha,\beta]$, ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος του Bolzano. Πράγματι η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, επίσης ισχύει $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \lambda < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \lambda > 0$.

Επομένως, με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \lambda = 0$, δηλαδή $f(x_0) = \lambda$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Bolzano και είναι γνωστό ως ***Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών***. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

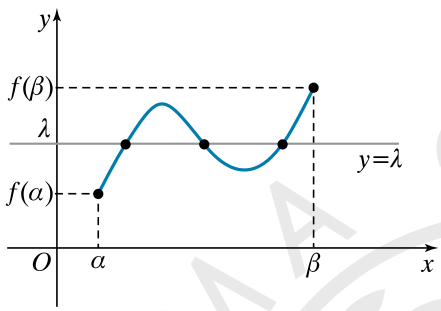
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \lambda$.



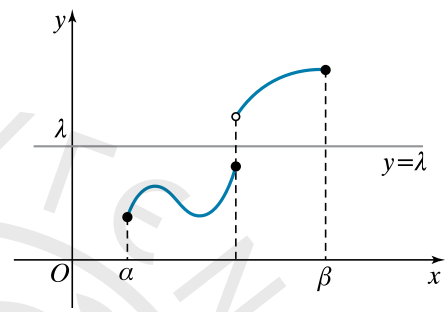
Σχ. 5.8στ

Ο όρος Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών έχει προκύψει από το γεγονός ότι, σύμφωνα μ' αυτό, μία συνεχής συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές οι οποίες βρίσκονται ανάμεσα (ενδιάμεσα) στις τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ που λαμβάνει στα δύο άκρα του διαστήματος. Αυτό σημαίνει, ισοδύναμα, ότι για κάθε τιμή λ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda$ συναντά τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8ζ, το σημείο στο οποίο η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda$ συναντά τη γραφική παράσταση της f δεν είναι απαραίτητα μοναδικό. Επίσης, αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.8η, δεν λαμβάνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Σχ. 5.8ζ



Σχ. 5.8η

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών αποδεικνύεται η επόμενη πολύ σημαντική ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων:

> Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Στην ειδική περίπτωση που μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, μπορούμε πολύ εύκολα να καθορίσουμε τα άκρα του διαστήματος $f(\Delta)$ υπολογίζοντας τις τιμές της στα άκρα του Δ (αν τα άκρα ανήκουν στο πεδίο ορισμού της) ή τα πλευρικά όριά της σε αυτά (αν τα άκρα δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα:

> Αν μια συνάρτηση f είναι ***γνησίως αύξουσα*** και ***συνεχής*** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου
>
> $$A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \to \beta^-} f(x) .$$
>
> Αν, όμως, η f είναι ***γνησίως φθίνουσα*** και ***συνεχής*** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A).

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ και $(\alpha, \beta]$ προκύπτουν αντίστοιχα συμπεράσματα.

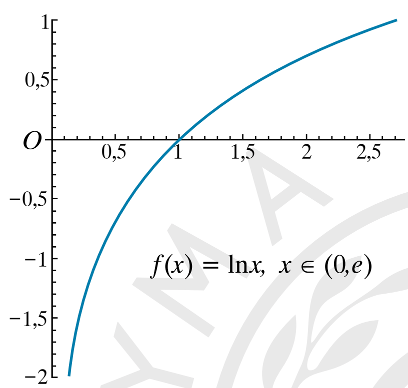
Αξίζει να σημειωθεί ότι, στις παραπάνω περιπτώσεις, η αντίστροφη συνάρτηση της f (η οποία ορίζεται αφού η f, ως γνησίως μονότονη, θα αντιστρέφεται), είναι επίσης συνεχής με πεδίο ορισμού το διάστημα με άκρα A και B και σύνολο τιμών το διάστημα με άκρα α και β.

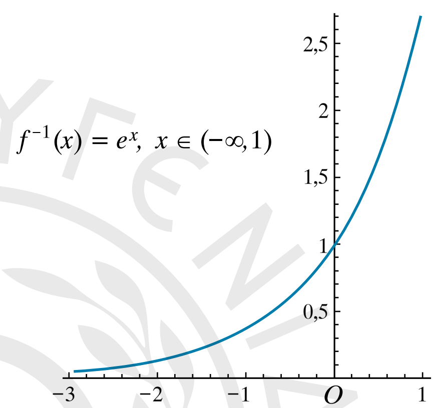
Για παράδειγμα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln x, x \in (0, e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, είναι το διάστημα $(-\infty, 1)$ [σχ. 5.8η(α)], αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x) = \ln e = 1.$$

Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x) = e^x$ της f, είναι επίσης συνεχής με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, 1)$ και σύνολο τιμών το $(0, e)$ [σχ. 5.8η(β)].

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, αν μια συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως μονότονη, τότε το σύνολο τιμών της $\{f(x) \mid x\in[\alpha,\beta]\}$ είναι ένα κλειστό διάστημα με άκρα τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ (δηλ. το $[f(\alpha), f(\beta)]$, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή το $[f(\beta), f(\alpha)]$, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα).





Σχ. 5.8η

Στην περίπτωση που η συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε και πάλι το σύνολο τιμών της $\{f(x) \mid x\in[\alpha,\beta]\}$ είναι ένα κλειστό διάστημα χωρίς όμως τα άκρα του να είναι απαραίτητα τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται).

> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η τιμή που λαμβάνει η f στη θέση x_1 είναι η μικρότερη δυνατή (αφού ισχύει $f(x_1) \le f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$), ενώ η τιμή που λαμβάνει στη θέση x_2 είναι η μεγαλύτερη δυνατή (αφού $f(x) \le f(x_2)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$). Για τον λόγο αυτόν το αποτέλεσμα είναι γνωστό με την ονομασία ***θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.*** Συνδυάζοντας το θεώρημα αυτό με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το ***σύνολο τιμών*** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.8.3.

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

$$f(x) = \ln x + e^x, \ x\in[1,3] \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x, \ x\in(0,2].$$

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων (βλ. άσκηση 5.2.11).

Αφού $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\ln x + e^x) = \lim_{x\to 1}(\ln x + e^x) = \ln 1 + e^1 = 0 + e = e$$

και $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(\ln x + e^x) = \lim_{x\to 3}(\ln x + e^x) = \ln 3 + e^3$$

το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $[e, \ln 3 + e^3]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως φθίνουσα ως άθροισμα φθινουσών συναρτήσεων.

Αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \text{ θα έχουμε } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = +\infty.$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

οπότε το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $[\frac{3}{4}, +\infty]$.

Ασκήσεις.

5.8.1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\varDelta$.

α) $f(x) = x + \text{συν}2x - 3,\ \varDelta = [0, \pi]$ β) $f(x) = x^3 - 3^x + 2,\ \varDelta = [-2, 0]$

γ) $f(x) = 4^x - 3^x + 2 - 2,\ \varDelta = [0, 1]$ δ) $f(x) = x^3 - 3^x + 2,\ \varDelta = [-2, 0]$

5.8.2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$, $[0,2]$ και $[2,3]$.

5.8.3. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^3+1}{x+2} + \dfrac{x^2+1}{x-2} = 0$ β) $\dfrac{e^{-2x}}{x+2} + \dfrac{\ln(|x|/2)+1}{x-2} = 0$ γ) $\dfrac{\sqrt{|x|+2}}{x+2} + \dfrac{x^3+1}{x-2} = 0$

έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,2)$.

5.8.4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων f για όλες τις τιμές του x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x) = x^3 - 16x$ β) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ γ) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(x^4 - 16)$

δ) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ ε) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ στ) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

5.8.5. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων f για όλες τις τιμές του x που ανήκουν στο διάστημα $[0,2\pi]$.

α) $f(x) = \text{ημ}x + \text{συν}x$ β) $f(x) = \text{ημ}2x + \text{συν}2x$ γ) $f(x) = -\text{ημ}x + \text{συν}x$

5.8.6. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα που δίνεται.

α) $f(x)=e^x$, $(-1,1]$ β) $f(x) = -3x + 2$, $(-2, 2)$ γ) $f(x) = 2\ln x + 1$, $[1,e^2]$

5.8.7. ΄Εστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$. Αν υπάρχει $\beta\in(\alpha,\gamma)$ για τα οποία ισχύει $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$, να δειχθεί ότι η f δεν είναι 1–1. Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για το $\lambda = f(g)$.

6

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Σε πολλά πρακτικά προβλήματα που σχετίζονται με τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανολογία, την οικονομία, την οικολογία κ.λπ. εμφανίζεται συχνά η ανάγκη να μελετήσουμε συστηματικά τον τρόπο που μεταβάλλονται διάφορα μεγέθη, για παράδειγμα πώς αλλάζει η ταχύτητα ενός κινητού με το πέρασμα του χρόνου, πώς κυμαίνεται η τάση σε μία γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικού ρεύματος, πώς μεταβάλλεται διαχρονικά το μέγεθος ενός πληθυσμού κ.ά. Τον 17ο αιώνα, διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με την κίνηση ενός σώματος, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642–1727) και Leibniz (1646–1716), οι οποίοι εισήγαγαν την έννοια της «παραγώγου» και τη χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής και της Γεωμετρίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε με την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου (που αποτελεί την «καρδιά» του Διαφορικού Λογισμού) και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδέες και τεχνικές της περιοχής αυτής.

6.1 Η έννοια της παραγώγου.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε κυρίως τις μεταβολές που υφίστανται οι τιμές μιας συναρτησης, όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή. Στο πλαίσιο αυτό διερευνήσαμε δύο συγκεκριμένους «νόμους μεταβολών»: τη ***μονοτονία*** και τη ***συνέχεια*** μιας συνάρτησης. Στο κεφάλαιο αυτό θα στραφούμε σε μια τελείως νέα κατεύθυνση που αφορά στη σύγκριση της μεταβολής μιας συνάρτησης f πλησίον ενός σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της, δηλαδή της διαφοράς $f(x)-f(x_0)$, με την αντίστοιχη μεταβολή $x-x_0$ της ανεξάρτητης μεταβλητής. Προς τούτο ας θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση C_f μιας συνεχούς συνάρτησης (σχ. 6.1α), ένα σημείο της $A\ (x_0, f(x_0))$ και ένα δεύτερο σημείο $B(x, f(x))$, με $x \neq x_0$. Αν συμβολίσουμε με $h = x - x_0 \neq 0$ την απόσταση των τετμημένων των σημείων A και B (οπότε θα έχουμε $x = x_0 + h$), ο λόγος

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τη μορφή και τις ιδιότητες της συνάρτησης f και ονομάζεται ***λόγος μεταβολής της*** f (ή εναλλακτικά, ***πηλίκο διαφορών της*** f). Το όριο του λόγου μεταβολής όταν το x τείνει στο x_0 (ισοδύναμα, όταν $h \to 0$) ονομάζεται ***παράγωγος της συνάρτησης*** f στο σημείο x_0.

Έστω f μια συνάρτηση και $A\ (x_0,\ f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε θα λέμε ότι η f είναι ***παραγωγίσιμη*** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται ***παράγωγος*** της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου (την οποία συναντήσαμε στο κεφάλαιο 5), προκύπτει άμεσα ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης, όταν υπάρχει, είναι μοναδική.

Αν θέσουμε $x - x_0 = \Delta x$ και $f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, ο τύπος ορισμού της παραγώγου μπορεί να γραφεί στη μορφή:

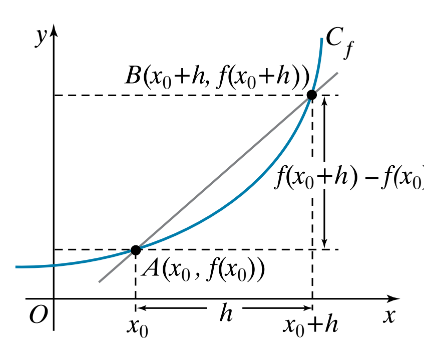
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ο συμβολισμός της παραγώγου στο x_0 με $f\,'(x_0)$ οφείλεται στον Lagrange, ενώ ο Leibniz, λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία ισότητα, συμβόλισε την παράγωγο στο x_0 με:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{ή} \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Σήμερα χρησιμοποιούνται και οι δύο προηγούμενοι συμβολισμοί, σχεδόν εξίσου, απ' όσους ασχολούνται με αντικείμενα που κάνουν χρήση της έννοιας της παραγώγου.

Έχοντας υπόψη μας τον γεωμετρικό ορισμό της εφαπτομένης ενός κύκλου θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη μιας καμπύλης του επιπέδου, όταν έχει με αυτήν ένα



Σχ. 6.1α

μόνο κοινό σημείο και αφήνει την καμπύλη προς το ίδιο μέρος του επιπέδου. Κατ' αναλογία θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η οριακή θέση (εφ' όσον υπάρχει) των ευθειών που ορίζουν οι χορδές AB της γραφικής παράστασης, όταν το σημείο $B(x, f(x))$, κινούμενο πάνω στην γραφική παράσταση της f, προσεγγίζει το A (σχ. 6.1β).

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι η ευθεία που περνάει από το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$. Επομένως:

> Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση
> $$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται συνήθως ***κλίση της γραφικής παράστασης C_f*** της f στο x_0 ή απλά ***κλίση*** της f στο x_0. Αν ω $(\omega \neq \frac{\pi}{2})$ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα, θα ισχύει εφ$\omega = f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2/2$ και $x_0=1$ θα έχουμε:

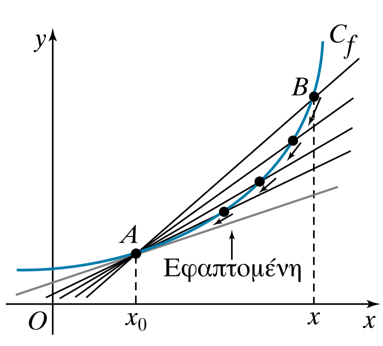
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{(1+h)^2}{2}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{2h+h^2}{2h}=1+\frac{h}{2}$$

και επομένως

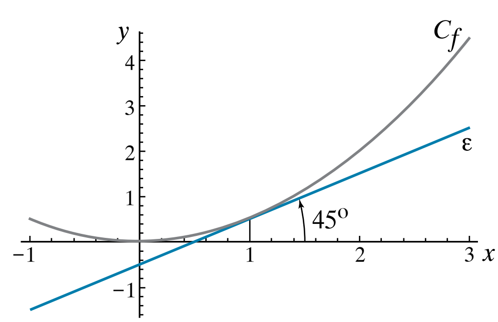
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{2})=1.$$

Επίσης, αφού η κλίση της f στο $x_0=1$ είναι ίση με $1=$εφ$\frac{\pi}{4}$, η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα θα είναι ίση με $\omega=\frac{\pi}{4}=45^{\mathrm{o}}$ (σχ. 6.1γ). Η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης C_f στο σημείο $A(1,f(1))$, έχει την εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=x-\frac{1}{2}.$$



Σχ. 6.1β



Σχ. 6.1γ

Ας εξετάσουμε στο $x_0 = 1$ τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x \geq 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases}. \tag{6.1.1}$$

Για $x > 1$, δηλαδή $x = 1 + h$, $h > 0$ θα έχουμε:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{[(1+h)^2+2]-3}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h\,,$$

και επομένως

$$\lim_{h\to 1^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 1^+}(2+h)=2\,.$$

Για $x < 1$, δηλαδή $x = 1 + h$, $h < 0$ έχουμε:

$$\lim_{h\to 1^-}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 1^-}\frac{3(1+h)-3}{h}=3.$$

Αφού ισχύει

$$\lim_{h\to 1^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3\neq 2=\lim_{h\to 1^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

η f δεν παραγωγίζεται στο x_0=1.

Από τα παραπάνω και από όσα αναλύσαμε στο κεφάλαιο 5 για τα πλευρικά όρια, γίνεται φανερό ότι αν x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μίας συνάρτησης f, τότε θα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Η f είναι ***παραγωγίσιμη*** στο x_0, αν και μόνον αν υπάρχουν τα όρια

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

και είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί.

Οι ποσότητες $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ ονομάζονται ***πλευρικές παράγωγοι*** της f στο x_0 από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που το x_0 είναι άκρο διαστήματος (πεδίο ορισμού της συνάρτησης f), τότε ονομάζουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(x_0, f(x_0)$ την ευθεία που προκύπτει χρησιμοποιώντας στον τύπο της εφαπτομένης την κατάλληλη πλευρική παράγωγο.

Έστω τώρα μια συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0. Για $x \neq x_0$ μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

και αφού

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [(f(x)-f(x_0))+f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

το οποίο δείχνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0. Καταλήγουμε λοιπόν στο επόμενο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

> Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

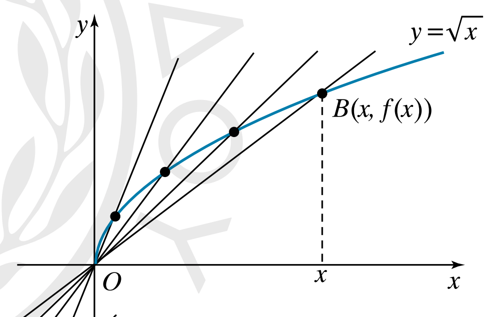
Προφανώς, σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, είναι φανερό ότι αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής στο $x_0=0$ χωρίς να είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο. Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η συνάρτηση (6.1.1), για την οποία αποδείξαμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Έστω τέλος η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$. Η f είναι συνεχής στο 0, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, αφού για $h>0$ έχουμε:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Θέλοντας να εξετάσουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή με την εφαπτομένη της C_f, στο σημείο της $O(0,0)$, ας θεωρήσουμε ένα δεύτερο σημείο $B(x,f(x))$, $x>0$ της C_f. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1δ, καθώς το B προσεγγίζει το σημείο O κινούμενο επάνω στη γραφική παράσταση της f, η τετμημένη του x προσεγγίζει το μηδέν. Έτσι, η ευθεία OB τείνει να πάρει ως οριακή θέση στο σημείο $O(0,0)$ την κατακόρυφη που περνά από το O, δηλαδή τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή, ως εφαπτομένη της C_f, στο σημείο της $O(0, 0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία με την εξίσωση $x=0$.



Σχ. 6.1δ

Γενικά:

> Αν μια συνάρτηση f είναι ***συνεχής*** στο x_0 και ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:
>
> α) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ (ή $-\infty$),
>
> β) $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ και $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$,
>
> γ) $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$ και $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$,
>
> τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ η (κατακόρυφη) ευθεία με εξίσωση $x=x_0$.

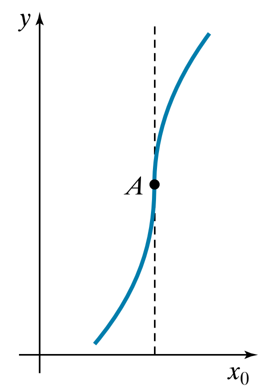
Στην περίπτωση που ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty,$$

τότε λέμε ότι η ***συνάρτηση f έχει παράγωγο*** $+\infty$ (σχ. 6.1ε). Αντίστοιχα αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty,$$

θα λέμε ότι η ***συνάρτηση f έχει παράγωγο*** $-\infty$.



Σχ. 6.1ε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} \alpha x+5, & x \le 0 \\ x^2+5, & x>0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β) Για ποια τιμή του α είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$;

Λύση.

α) Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$, πρέπει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Όμως έχουμε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\alpha x+5) = \alpha \lim_{x \to 0^-} x+5=5$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+5) = \lim_{x \to 0^+} x^2+5=5,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 5$$

και αφού $f(0)=\alpha \cdot 0+5=5$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, θα ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η συνάρτηση θα είναι συνεχής στο $x_0=0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[\alpha \cdot (0+h)+5]-5}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\alpha h}{h} = \alpha,$$

ενώ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(h^2+5)-5}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} h = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, μόνο όταν $\alpha=0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ενώ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, μόνο για $\alpha=0$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Ασκήσεις.

6.1.1. Να βρείτε την παράγωγο στο σημείο x_0 των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x+2,\ x_0=1$ β) $f(x)=x^2+2,\ x_0=4$ γ) $f(x)=2,\ x_0=1$

δ) $f(x)=3x^2+2,\ x_0=0$ ε) $f(x)=\dfrac{3}{x},\ \ x_0=1$ στ) $f(x)=\eta\mu x,\ x_0=0$

6.1.2. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις με τους παρακάτω τύπους ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_0 και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό το σημείο.

α) $f(x)=\begin{cases} 4x-2 & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 2x^2 & \text{αν} \quad x>1 \end{cases},\quad x_0=1$ β) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 2x^2 & \text{αν} \quad x>1 \end{cases},\quad x_0=1$

γ) $f(x)=|x-1|,\quad x_0=1$ δ) $f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad x_0=1$

ε) $f(x)=|x-1|+|x+1|,\quad x_0=1$ στ) $f(x)=|x-1|+|x+1|,\quad x_0=0.$

Στην περίπτωση που η παράγωγος υπάρχει, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$.

6.1.3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=3x+2x^2$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=1$ και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,5)$.

6.1.4. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2 & \text{αν} \quad x\le 1 \\ x+\beta & \text{αν} \quad x>1. \end{cases}$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

6.1.5. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0 και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=a\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ότι $f'(x_0)=a$.

6.1.6. Έστω μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $x^2+2x+1\le f(x)\le 5x^2+2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και ότι ισχύει $x(x+2)\le f(x)-f(0)\le x\,(5x^2+2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0=0$.

6.2 Παράγωγος συνάρτηση. Κανόνες παραγώγισης.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2$ (η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$) και έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x_0. Προκειμένου να υπολογίσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$ στο συγκεκριμένο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, παρατηρούμε ότι για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=\frac{(x_0^2+2x_0h+h^2)-x_0^2}{h}=\frac{2x_0h+h^2}{h}=2x_0+h$$

οπότε,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0\,.$$

Άρα $f'(x_0)=2x_0$.

Δεδομένου ότι ισχύει $f'(x_0)=2x_0$ για κάθε x_0, θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση, η οποία σε κάθε x_0 να απεικονίζει τον αριθμό $f'(x_0)=2x_0$ ή, ισοδύναμα, σε κάθε x να απεικονίζει τον αριθμό $2x$. Τη νέα αυτή συνάρτηση θα τη λέμε συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f και θα τη συμβολίζουμε με f'. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι $f'(x)=2x$ και για τα διάφορα x να βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της νέας συνάρτησης, π.χ. $f'(1)=2\cdot 1=2$, $f'(0)=2\cdot 0=0$, $f'(-2)=2\cdot(-2)=-4$ κ.λπ.

Γενικά, έστω μια συνάρτηση f, η οποία παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \varDelta$, όπου $\varDelta$ είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Τότε η συνάρτηση $f': x \to f'(x)$ με πεδίο ορισμού το $\varDelta$ ονομάζεται ***συνάρτηση πρώτης παραγώγου*** της f ή απλώς ***παράγωγος*** της f και συμβολίζεται με:

$$f' \text{ ή } \frac{df}{dx} \text{ ή } y' \text{ ή } \frac{dy}{dx}.$$

Μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε και τους όρους «η παράγωγος $f'(x)$» ή «η παράγωγος $\frac{df(x)}{dx}$».

Για τις συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, το $\varDelta$ είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αν υποθέσουμε ότι σε κάποιο υποσύνολο του $\varDelta$ η f είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγος της f' θα ονομάζεται ***δεύτερη παράγωγος συνάρτησης της*** f και θα συμβολίζεται με:

$$f'' \text{ ή } \frac{d^2 f}{dx^2} \text{ ή } y'' \text{ ή } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ή } f''(x).$$

Επαγωγικά μπορεί να οριστεί η ***νιοστή παράγωγος*** $f^{(\nu)}$ της f ή ***παράγωγος της*** f ***νιοστής τάξης***, από τον τύπο

$$f^{(\nu)} = \left(f^{(\nu-1)}\right)', \quad \nu \ge 3.$$

Η νιοστή παράγωγος θα συμβολίζεται με

$$f^{(\nu)}(x) \text{ ή } \frac{d^\nu f}{dx^\nu} \text{ ή } y^{(\nu)} \text{ ή } \frac{d^\nu y}{dx^\nu}.$$

Η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης ονομάζεται ***παραγώγιση***. Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης δεν είναι πάντα εύκολο να γίνει με χρήση του ορισμού για τον λόγο αυτό θα μας διευκόλυνε αν είχαμε κάποιους τύπους που θα μας έδιναν την παράγωγο των βασικών συναρτήσεων που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 5 και επιπλέον κάποιους κανόνες παραγώγισης για πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Έτσι δεν θα χρειάζεται να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά που θέλουμε να παραγωγίσουμε. Ο πίνακας 6.2.1 δίνει την πρώτη παράγωγο ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

Πίνακας 6.2.1
Η πρώτη παράγωγος των βασικών συναρτήσεων

f	c (σταθερά)	x^ν	$\frac{1}{x}$, $x\neq 0$	$\sqrt{x}$, $x\ge 0$	ημx	συνx	e^x	$\ln x$, $x>0$
f'	0	$\nu x^{\nu-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$	συνx	−ημx	e^x	$\frac{1}{x}$

Ας δούμε την απόδειξη σε δύο από αυτούς τους τύπους.

Έστω αρχικά η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, όπου ν είναι ένας θετικός ακέραιος με $\nu \neq 0, 1$. Αν x_0 είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}.$$

Επομένως, για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή του $\mathbb{R}$, ισχύει $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$. Ο τελευταίος τύπος αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το ν είναι αρνητικός ακέραιος.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ έχει παράγωγο συνάρτηση $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Πράγματι, αν x_0 είναι ένας θετικός αριθμός, τότε για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h\ (\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\frac{x_0+h-x_0}{h\ (\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}.$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι, όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 6.1, η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 0, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.1.

Να βρείτε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\ln x$, για το οποίο:

α) Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα είναι ίση 45°.

β) Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 1/4.

γ) Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να δώσετε την εξίσωση της εφαπτομένης σε κάθε περίπτωση.

Λύση.

Αφού
$$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x},$$

η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι η ακόλουθη:

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

α) Γνωρίζουμε ότι, αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα, θα ισχύει εφ$\omega=f'(x_0)$. Αφού $\omega=\pi/4$, θα έχουμε:

$$f'(x_0)=\text{εφ}\frac{\pi}{4}=1\Leftrightarrow\frac{1}{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=1$$

οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1, f(1)) = A(1,0)$ και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης η $y = x-1$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με $f'(x_0)$. Επομένως έχουμε:

$$f'(x_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = 4$$

και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y - \ln 4 = \frac{1}{4}(x-4) \Leftrightarrow y = \frac{x}{4} + (\ln 4 - 1).$$

γ) Η ευθεία ε θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, αν και μόνο αν

$$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το $A(e,1)$ και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης η

$$y - \ln e = \frac{1}{e}(x-e) \Leftrightarrow y = \frac{x}{e}.$$

Για να διευκολυνθούμε στη διαδικασία της παραγώγισης μιας συνάρτησης, πέραν των τύπων που βρήκαμε για την παράγωγο των βασικών συναρτήσεων, θα μας ήταν χρήσιμοι κάποιοι κανόνες παραγώγισης που να αφορούν σε πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Το επόμενο αποτέλεσμα μας δίνει τύπους, με τους οποίους μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση της παραγώγου συναρτήσεων που προκύπτουν από απλές συναρτήσεις με τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε υπάρχει η παράγωγος των συναρτήσεων $f+g$, cf με $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, f/g στο x_0 και ισχύουν οι επόμενοι τύποι:

Π$_1$. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Π$_2$. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Π$_3$. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x)g'(x_0)$

Π$_4$. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, (για $g(x_0) \neq 0$).

Αρκετά συχνά θα χρησιμοποιούμε τους παραπάνω τύπους και στη μορφή

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),\ (cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων Π$_1$–Π$_4$ μπορούν να γίνουν με χρήση του ορισμού της παραγώγου. Για παράδειγμα, η απόδειξη της Π$_1$ γίνεται εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

και ότι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),\ \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0).$$

Επομένως, για κάθε x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f+g$, ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Ως παραδείγματα εφαρμογής των τύπων Π_1–Π_4, αναφέρουμε τα εξής:

α) Αν $f(x)=x^2+2\sqrt{x},\quad x>0$, τότε:

$$f'(x)=(x^2)'+(2\sqrt{x})'=2x+2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{\sqrt{x}},\qquad x>0.$$

β) Αν $f(x)=xe^x-x^3,\quad x\in\mathbb{R}$, τότε:

$$f'(x)=(xe^x-x^3)'=(xe^x)'-(x^3)'=x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'-3x^2=e^x+xe^x-3x^2.$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$f(x)=\text{εφ}x,\quad x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\quad\text{και}\quad g(x)=\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x},\quad x\neq\kappa\pi,\ \kappa\in Z.$$

Έχουμε

$$f'(x)=(\text{εφ}x)'=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2x}=$$

$$=\frac{\text{συν}x\ \text{συν}x-\text{ημ}x(-\text{ημ}x)}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=1+\text{εφ}^2x$$

και

$$g'(x)=(\text{σφ}x)'=\left(\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}\right)'=\frac{(\text{συν}x)'\text{ημ}x-\text{συν}x(\text{ημ}x)'}{\text{ημ}^2x}=\frac{(\text{-ημ}x)\text{ημ}x-\text{συν}x\text{συν}x}{\text{ημ}^2x}=\frac{-(\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x)}{\text{ημ}^2x}=-\frac{1}{\text{ημ}^2x}$$

$$=\frac{(\text{-ημ}x)\text{ημ}x-\text{συν}x\text{συν}x}{\text{ημ}^2x}=\frac{-(\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x)}{\text{ημ}^2x}=-\frac{1}{\text{ημ}^2x}\quad=\frac{-\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x}{\text{ημ}^2x}=-(1+\text{σφ}^2x).$$

Έτσι ο πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων συμπληρώνεται με τον πίνακα 6.2.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι, για να χρησιμοποιηθούν οι τύποι της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, θα πρέπει οι γωνίες x να έχουν εκφραστεί σε ***ακτίνια (rad)*** και όχι σε μοίρες ή βαθμούς.

Πίνακας 6.2.2
Η πρώτη παράγωγος των βασικών συναρτήσεων

f	$\text{εφ}x$	$\text{σφ}x$
f'	$\frac{1}{\text{συν}^2x}=1+\text{εφ}^2x$	$-\frac{1}{\text{ημ}^2x}=-(1+\text{σφ}^2x)$

Η ιδιότητα Π_1 ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν $f_1, f_2, ..., f_k$, είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες, τότε:

$$(f_1+f_2+\cdots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_k'(x).$$

Επίσης, η ιδιότητα Π_3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του γινομένου περισσότερων από δύο συναρτήσεων. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= [\big(f(x)g(x)\big)\cdot h(x)]' = \big(f(x)g(x)\big)'\cdot h(x)+\big(f(x)g(x)\big)\cdot h'(x)\\ &= [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

Για παράδειγμα:

α) $(\eta\mu x+x^2+e^x+2x)'=(\eta\mu x)'+(x^2)'+(e^x)'+(2x)'=\sigma\upsilon\nu x+2x+e^x+2$

β) $(x^4\cdot e^x\cdot \ln x)'=(x^4)'e^x\cdot\ln x+x^4\cdot(e^x)'\cdot\ln x+x^4e^x\cdot(\ln x)' =$

$$=3x^3e^x\cdot\ln x+x^4\cdot e^x\cdot\ln x+x^4e^x\cdot\frac{1}{x},\ x>0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.2.

Να βρείτε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+3}, x\neq -3$ β) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ γ) $g(x)=\sqrt{x}\ \eta\mu x+\dfrac{\ln x}{x-1}, x\neq 1$

Λύση.

α) Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)'(x+3)-(x^2-4)(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{2x(x+3)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(1+\sqrt{x})-e^x(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{e^x(1+\sqrt{x})-e^x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=e^x\,\frac{2\sqrt{x}+2x-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$g'(x)=(\sqrt{x}\ \eta\mu x)'+\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=(\sqrt{x})'\eta\mu x+\sqrt{x}(\eta\mu x)'+\frac{(\ln x)'(x-1)-(x-1)'\ln x}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x+\sqrt{x}\ \sigma\upsilon\nu x+\frac{\dfrac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{\eta\mu x+2x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x}}+\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.3.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 1$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

α) $f''(x)=0$ β) $f''(x)>0$ γ) $f''(x)<0$

Λύση.

Έχουμε $f'(x)=(x^4)'-(2x^3)'-(12x^2)'+(1)'=4x^3-6x^2-24x$ και

$$f''(x)=(4x^3-6x^2-24x)'=(4x^3)'-(6x^2)'-(24x)'=12x^2-12x-24=12(x+1)\,(x-2).$$

Επομένως:

α) $f''(x)=0 \Leftrightarrow 12(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή x.

β) $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

γ) $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,2)$.

Ας προσπαθήσουμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = ημ^2x$. Επειδή $ημ^2x = ημx \cdot ημx$, εφαρμόζοντας την ιδιότητα $Π_3$ παίρνουμε:

$$h'(x)=(ημ^2x)'=(ημx\cdot ημx)'=(ημx)'ημx+ημx(ημx)'=συνx\cdot ημx+συνx\cdot ημx\,,$$

δηλαδή $h'(x) = (ημ^2x)' = 2ημx \cdot συνx$. Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $h(x) = ημ^2x$ δεν είναι η συνάρτηση $2ημx$, όπως ίσως θα περίμενε κάποιος γνωρίζοντας ότι ισχύει ο τύπος $(x^2)'=2x$. Αν λάβουμε υπόψη ότι η συνάρτηση $h(x) = ημ^2x = (ημx)^2$ είναι σύνθεση της $f(x)=x^2$ και της $g(x) = ημx$ (δηλ. $h = f\circ g$), για τις οποίες γνωρίζουμε ότι $f'(x)=2x$, $g'(x)=συνx$, η παράγωγος h' της h που υπολογίσαμε προηγουμένως μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$h'(x)=2ημx\cdot συνx=[2g(x)]g'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

Αποδεικνύεται (η απόδειξη παραλείπεται) ότι γενικότερα για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

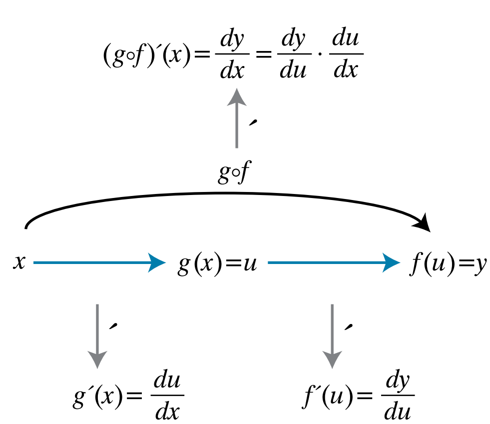
Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $Δ$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(Δ)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $Δ$ και ισχύει:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Με τον συμβολισμό του Leibniz, αν θέσουμε $u = g(x)$ και $y = f(u)$, ο παραπάνω τύπος γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

και είναι γνωστός ως ***κανόνας της αλυσίδας*** (σχ. 6.2α). Παρατηρούμε ότι ενώ ο παραπάνω συμβολισμός δεν δηλώνει διαίρεση, στον κανόνα της αλυσίδας συμπεριφέρεται ως συνηθισμένο πηλίκο (πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα).



Σχ. 6.2α

Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος και των πινάκων 6.2.1 και 6.2.2 των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων μπορούμε εύκολα να σχηματίσουμε τον πίνακα 6.2.3, ο οποίος μας δίνει παραγώγους σύνθετων συναρτήσεων (g είναι οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση).

Πίνακας 6.2.3
Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων

f	f'	f	f'
$(g(x))^{\nu}$	$\nu(g(x))^{\nu-1}\cdot g'(x)$	$\varepsilon\varphi\,(g(x))$	$\dfrac{g'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(g(x))}$
$\sqrt{g(x)}$, με $g(x)>0$	$\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$\sigma\varphi(g(x))$	$-\dfrac{g'(x)}{\eta\mu^2(g(x))}$
$\eta\mu(g(x))$	$\sigma\upsilon\nu(g(x))g'(x)$	$e^{g(x)}$	$e^{g(x)}\cdot g'(x)$
$\sigma\upsilon\nu(g(x))$	$-\eta\mu(g(x))g'(x)$	$\ln(g(x))$, με $g(x)>0$	$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 6.2.4.

Να βρείτε τις παραγώγους των εξής συναρτήσεων:

α) $h(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^4$ β) $h(x)=e^{-x^3+2x}$ γ) $h(x)=\ln(x^4+2x^2+2)$

Λύση.

α) Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x)=x^4 \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι έχουμε $h(x)=[g(x)]^4=f(g(x))$ και χρησιμοποιώντας τον πρώτο τύπο του πίνακα 6.2.3 παίρνουμε $h'(x)=4(g(x))^3\cdot g'(x)$.

Όμως

$$g'(x)=\frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2},$$

οπότε

$$h'(x)=4\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3\cdot\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{12(2x-1)^3}{(x+1)^5}.$$

β) Ομοίως παρατηρούμε ότι $h(x)=e^{-x^3+2x}=e^{g(x)}$ όπου $g(x)=-x^3+2x$.

Επομένως $(e^{g(x)})'=e^{g(x)}\cdot g'(x)=e^{-x^3+2x}(-x^3+2x)'=(-3x^2+2)\,e^{-x^3+2x}$.

γ) Θέτοντας $u=x^4+2x^2+2$ θα έχουμε $y=h(x)=\ln(x^4+2x^2+2)=\ln u$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

βρίσκουμε

$$h'(x)=y'=(\ln u)'\cdot u'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{x^4+2x^2+2}\cdot(x^4+2x^2+2)'=\frac{1}{x^4+2x^2+2}\cdot(4x^3+4x)=\frac{4x(x^2+1)}{x^4+2x^2+2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.5.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^a$, $x>0$ και $a\in\mathbb{R}^*$ β) $f(x)=a^x, x\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1$ γ) $f(x)=\ln|x|, x\in\mathbb{R}^*$

Λύση.

α) Επειδή για $x>0$ ισχύει $x^a=e^{a\ln x}$, θα έχουμε $f(x)=e^{a\cdot\ln x}=e^{g(x)}$, όπου $g(x)=a\ln x$. Επομένως,

$$f'(x)=e^{g(x)}g'(x)=e^{a\ln x}\cdot(a\ln x)'=e^{a\ln x}\cdot a\frac{1}{x}=x^a\cdot a\frac{1}{x}=ax^{a-1}$$

δηλαδή ισχύει ο τύπος $(x^a)'=ax^{a-1}$ για κάθε $a\in\mathbb{R}^*(x>0)$, ο οποίος γενικεύει τον δεύτερο τύπο του πίνακα 6.2.1.

β) Αφού $f(x)=a^x=e^{x\ln a}=e^{g(x)}$, όπου $g(x)=x\ln a$, θα έχουμε:

$$f'(x)=e^{g(x)}g'(x)=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a,$$

δηλαδή

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1$$

γ) Αν $x>0$, τότε

$$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}=\frac{1}{|x|}.$$

Για $x<0$ θα έχουμε $\ln|x|=\ln(-x)=\ln(g(x))$ με $g(x)=-x$, απ' όπου προκύπτει

$$(\ln|x|)'=(\ln(g(x))'=\frac{1}{g(x)}g'(x)=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\cdot$

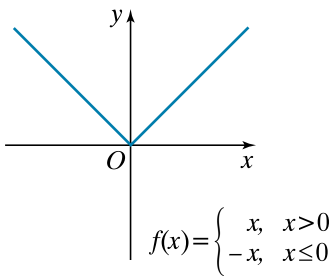
Ασκήσεις.

6.2.1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0.

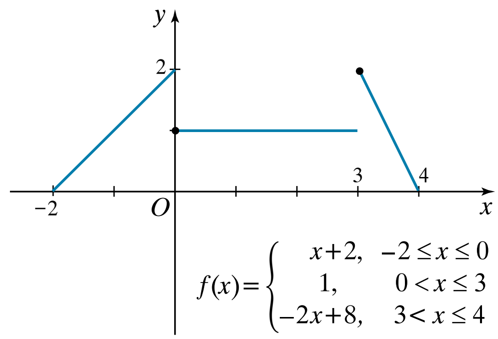
α) $f(x)=x^5, x_0=-1$ β) $f(x)=\ln x,\ x_0=\frac{1}{2}$ γ) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=3$

δ) $f(x)=e^x, x_0=0$ ε) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4$ στ) $f(x)=\eta\mu^3 x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$

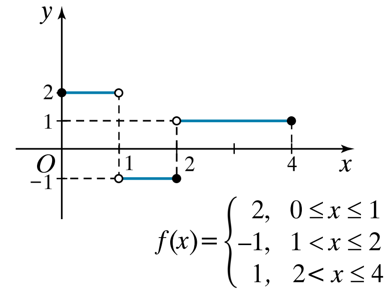
6.2.2. Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων (σχ. 6.2β). Να αποδώσετε τη γραφική παράσταση της παράγωγου συνάρτησης για κάθε μία από αυτές (για τα σημεία στα οποία αυτή υπάρχει).



(α)



(β)



(γ)

Σχ. 6.2β

6.2.3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^4$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η κλίση της f είναι:

α) Θετική. β) Αρνητική. γ) Ίση με 24.

6.2.4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f, οι οποίες είναι παράλληλες με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(-1,1)$.

6.2.5. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^{10}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{10}-1}{h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^{10}-1}{h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^{10}-2^{10}}{h}.$$

6.2.6. Να υπολογίσετε, όπου υπάρχει, την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<1 \\ \sqrt{x}, & x\ge 1 \end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x, & x<0 \\ x^2, & x\ge 0 \end{cases}$ γ) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$ ε) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x>0 \end{cases}$ στ) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

6.2.7. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επόμενων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}$ β) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

γ) $f(r)=r^3+\dfrac{1}{r^3}$ δ) $f(t)=2t^2+t\,\sigma\upsilon\nu\theta-2$ (θ σταθερά)

6.2.8. Να υπολογίσετε την παράγωγο των ακόλουθων συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x^5+5\ln x-\sqrt{3}x$ β) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+\ln 3$

γ) $x\sqrt{x}+6x^2$ δ) $x^2\eta\mu x+(x^2+1)\,\sigma\upsilon\nu x$

6.2.9. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επόμενων συναρτήσεων.

α) $f(x)=x^3\ \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x$ β) $f(x)=\dfrac{x\,e^x}{\ln x}$

γ) $f(x)=\dfrac{x\ \eta\mu x}{e^x}$ δ) $f(x)=\dfrac{x\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{1+x\ \sigma\upsilon\nu x}$

6.2.10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=-2x+x^3$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\pi/4$.

6.2.11. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, όπου α, β, γ είναι τρεις σταθεροί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι για $x \neq \alpha, \beta, \gamma$, ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma}.$$

6.2.12. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=5x^2$ και $g(x) = \dfrac{24x+1}{5x}$ στο κοινό σημείο τους $A(1,1)$, είναι κάθετες.

6.2.13. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-9x+3$, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=10x-5$.

6.2.14. Αν $f(x) = \alpha\,\text{συν}\omega x + \beta\,\text{ημ}\omega x$, όπου α, β και ω είναι τρεις γνωστές σταθερές, να αποδείξετε ότι ισχύει $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.2.15. Αν $f(x) = e^{ax}$, να βρείτε την τιμή της σταθεράς $a \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f''(x)-7f'(x)-10f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.2.16. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,f(0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = \text{συν}(\frac{\pi}{3} + x^3)$.

6.2.17. Να υπολογίσετε την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x)=(x^3+2x^2+x)^8$ β) $f(x)=(x^6-3x^2+1)^{15}$ γ) $f(x)=x^5\,\text{ημ}5x$

δ) $f(x)=\text{ημ}^3\sqrt{x}$ ε) $f(x)=\text{ημ}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ στ) $f(x)=\text{ημ}(x^3+2x+1)$

6.3 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και εφαρμογές.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού, που είναι γνωστό ως ***Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού*** (Θ.Μ.Τ.). Με βάση το θεώρημα αυτό θα μπορέσουμε στη συνέχεια να αναπτύξουμε πολλά άλλα αποτελέσματα χρήσιμα για τη συστηματική μελέτη των παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ας διατυπώσομε λοιπόν αρχικά το πολύ σημαντικό αυτό θεώρημα (η απόδειξή του παραλείπεται).

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.3α, γεωμετρικά το θεώρημα αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f, όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία που περνάει από τα σημεία $A\ (\alpha, f(\alpha))$ και $B\ (\beta, f(\beta))$ και επομένως έχει κλίση.

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Το σημείο ξ για το οποίο ισχύει η ισότητα:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

δεν είναι απαραίτητα μοναδικό όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.3β.

Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha) = f(\beta)$, για τον πραγματικό αριθμό ξ θα ισχύει $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f γίνεται παράλληλη με τον άξονα των x. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως ***Θεώρημα του Rolle*** και η γεωμετρική ερμηνεία του εικονίζεται στα σχήματα 6.3γ και 6.3δ.

Θεώρημα του Rolle

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β). Αν επιπλέον ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

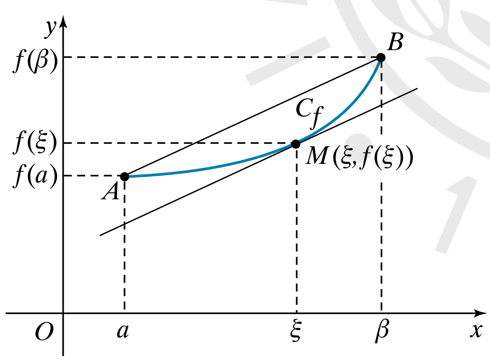
$$f'(\xi) = 0.$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση:

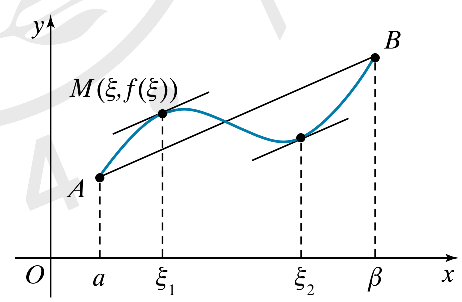
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 8x + 1,\ x \in [0,8].$$

Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, δηλαδή η f είναι συνεχής στο [0, 8], και παραγωγίσιμη στο (0, 8) με $f'(x)= 3x^2-18x + 8$ και $f(0) = f(8) =1$, θα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (0, 8)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή $3\xi^2 - 18\xi + 8 = 0$. Για την εύρεση του αριθμού ξ, αρκεί να λύσουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $3x^2-18x + 8 = 0$, οπότε βρίσκουμε

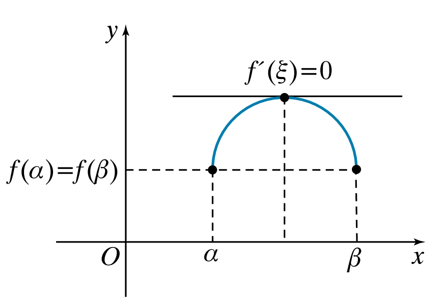
$$\xi_1=\frac{18-2\sqrt{57}}{6}=0,48 \ \text{ και } \ \xi_2=\frac{18+2\sqrt{57}}{6}=5,52$$



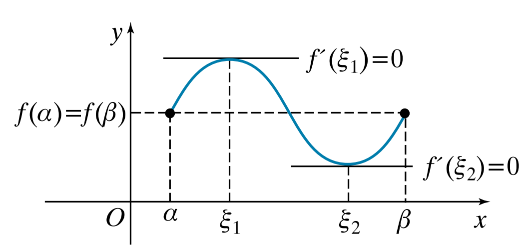
Σχ. 6.3α



Σχ. 6.3β



Σχ. 6.3γ



Σχ. 6.3δ

(στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία του διαστήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη $f'(\xi) = 0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3.1.

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \leq |\beta - \alpha|$.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση.

α) Η $f(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με παράγωγο $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

β) Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ δηλαδή } \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $|\sigma\upsilon\nu\xi| \leq 1$ για κάθε $\xi \in (\alpha,\beta)$ οπότε θα έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha}\right| \leq 1 \iff \frac{|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \iff |\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \leq |\alpha - \beta|.$$

γ) Αν $x=0$, η ανισότητα ισχύει (με τη μορφή ισότητας). Αν $x>0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα που αποδείχθηκε στο ερώτημα (β) για $\alpha=0, \beta=x$, παίρνουμε:

$$|\eta\mu x - \eta\mu 0| \leq |x - 0| \iff |\eta\mu x| \leq |x|.$$

Τέλος, αν $x<0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα που αποδείχθηκε στο ερώτημα (β) για $\alpha=x, \beta=0$, θα έχουμε:

$$|\eta\mu 0 - \eta\mu x| \leq |0 - x| \iff |-\eta\mu x| \leq |-x| \iff |\eta\mu x| \leq |x|.$$

Άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$. Παίρνοντας δύο διαφορετικά σημεία x_1,x_2 του Δ με $x_1<x_2$ και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. (οι υποθέσεις του ισχύουν αφού η f παραγωγίζεται στα εσωτερικά σημεία του Δ, άρα θα είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), και επιπλέον είναι συνεχής στο $[x_1,x_2] \subseteq \Delta$), προκύπτει ότι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Αφού όμως υποθέσαμε ότι ισχύει $f'(x) = 0$, για όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ, θα έχουμε $f'(\xi) = 0$, οπότε προκύπτει $f(x_2) = f(x_1)$.

Άρα, η f έχει την ίδια τιμή για οποιουσδήποτε διαφορετικούς αριθμούς x_1, x_2 του Δ, δηλαδή είναι σταθερή στο Δ. Σε αντίστοιχο αποτέλεσμα οδηγούμαστε αν θεωρήσουμε δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1, > x_2$.

Καταλήγουμε λοιπόν στο επόμενο αποτέλεσμα:

> Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Ας θεωρήσουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g σε ένα διάστημα Δ, τέτοιες ώστε για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ να ισχύει $f'(x) = g'(x)$. Τότε για τη συνάρτηση $f-g$, η οποία είναι επίσης συνεχής στο Δ, θα ισχύει, για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$,

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

και επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$.

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα:

> Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε θα υπάρχει μία σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:
>
> $$f(x) = g(x) + c.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε κανένα $x \in \Delta$. Τότε, σύμφωνα μ' αυτά που γνωρίσαμε στην παράγραφο 5.8, η f θα διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση που ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ και ας διαλέξουμε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε, αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

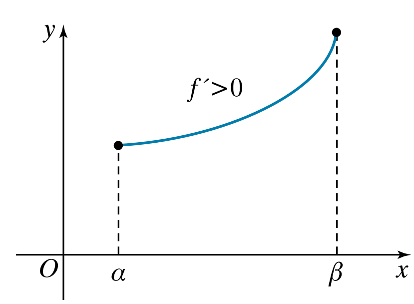
οπότε θα έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

(διότι $f'(\xi) > 0$ και $x_1 - x_2 > 0$). Άρα $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ή ισοδύναμα $f(x_1) < f(x_2)$, που αποδεικνύει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Στην περίπτωση που σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) < 0$, εργαζόμενοι αναλόγως, διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

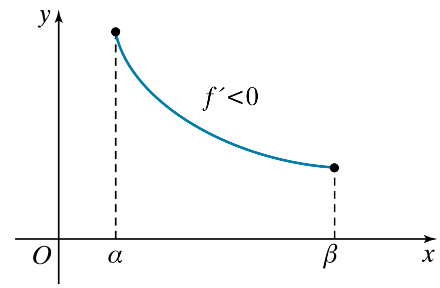
Έχουμε λοιπόν αποδείξει το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο μας προσφέρει έναν σχετικά εύκολο τρόπο για να διαπιστώνουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα.

> Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
>
> - Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ (σχ. 6.3ε).



Σχ. 6.3ε

• Αν ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ (σχ. 6.3στ).



Σχ. 6.3στ

Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και όταν η παράγωγος f' μηδενίζεται σε ένα ή περισσότερα (πεπερασμένα το πλήθος) σημεία του πεδίου ορισμού της.

Στην περίπτωση που ισχύει $f'(x)\geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ, τότε η f θα είναι αύξουσα (όχι απαραίτητα γνήσια αύξουσα) στο Δ. Αντίστοιχα, αν ισχύει $f'(x)\leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f θα είναι φθίνουσα (όχι απαραίτητα γνήσια φθίνουσα) στο Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3.2.

Δίνεται μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0)=3$.

Λύση.

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\frac{f'(x)e^{2x}-f(x)2e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{(f'(x)-2f(x))}{e^{2x}}$$

και αφού υποθέσαμε ότι για την f ισχύει $f'(x)=2f(x)$, θα έχουμε $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η g είναι σταθερή, υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{f(x)}{e^{2x}}=c \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως $f(x)=ce^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $f(0)=3$, έχουμε $ce^{2\cdot 0}=3$, οπότε $c=3$ και τελικά βρίσκουμε ότι η συνάρτηση θα δίνεται από τον τύπο $f(x)=3e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3.3.

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2+24x+1$ είναι γνησίως μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας (αύξουσα, φθίνουσα) σε καθένα από αυτά.

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2-18x+24=3(x^2-6x+8)=3(x-2)(x-4))$. Το πρόσημο της f' δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, η συνάρτηση f:

α) Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(-\infty,2)$.

β) Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,4]$, αφού είναι συνεχής στο $[2,4]$ και ισχύει $f'(x)<0$ στο $(2,4)$.

γ) Είναι γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[4,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(4,+\infty)$.

Το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f στα διαστήματα $(-\infty,2]$, $[2,4]$ και $[4,+\infty)$ δίνονται συνοπτικά στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(2)=1$	↘	$f(4)=125$	↗	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3.4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\ln x+2x-10,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\ln x+2x-10=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,+\infty)$ $\mathbb{R}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0,+\infty)$ και έχει παράγωγο ίση με $f'(x)=\frac{3}{x}+2$. Επειδή

$$f'(x)=\frac{3}{x}+2>0 \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3\ln x+2x-10)=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(3\ln x+2x-10)=-\infty,$$

μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω στον επόμενο πίνακα

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

γ) Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (βλ. παραγρ. 5.8), η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γενικά, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι χρήσιμο για τη μελέτη των ριζών της εξίσωσης $f(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$.

Αν f είναι μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α,β) και οι τιμές της f' είναι όλες θετικές ή όλες αρνητικές στο (α,β), τότε η εξίσωση $f(x)=c$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, έχει μοναδική λύση στο (α,β).

Ασκήσεις.

6.3.1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=3x^4-x^3+2x^2-3x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $12x^3-3x^2+4x-3=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

6.3.2. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που δίνεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

α) $f(x)=x-x^2$, $[-1,1]$ β) $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $[1,3]$ γ) $f(x)=|x|$, $[-2,2]$

δ) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3x^2-x, & x>1 \end{cases}$, $[-1,1]$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $[1,9]$

6.3.3. Έστω μια συνάρτηση f, που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει $f(\alpha)=0$ και $m \le f'(x) \le M$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ (m, M είναι δύο πραγματικοί αριθμοί). Να αποδείξετε ότι $(\beta-\alpha)m \le f(\beta) \le (\beta-\alpha)M$.

6.3.4. Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<\beta$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha<\beta$ ισχύει η ανισότητα:

$$e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta-\alpha} < e^\beta.$$

6.3.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^4-9x^2+4x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$, μία, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$ και μία, τουλάχιστον, στο διάστημα $(1,2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $8x^3-18x+4=0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

6.3.6. Δίνεται μία συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{3x}}$ είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0)=1$.

6.3.7. Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν οι f, g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και ισχύει $f'(x)=2g(x)$, $g'(x)=-2f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x:

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f''(x)+4f(x)=0$ και $g''(x)+4g(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h με $h(x)=(f(x))^2+(g(x))^2$ είναι σταθερή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

γ) Να διαπιστώσετε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τύπους $f(x)$ = ημ$2x$, $g(x)$ = συν$2x$, αντίστοιχα ικανοποιούν τις υποθέσεις που κάναμε. Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από αυτήν τη διαπίστωση;

6.3.8. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=3+\dfrac{2}{x}$ και $g(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}, & x<0 \\ 1+\dfrac{2}{x}, & x>0. \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή.

6.3.9. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

6.3.10. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι επόμενες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες και το είδος της μονοτονίας (αύξουσα, φθίνουσα) σε καθένα από αυτά.

α) $f(x)=x^5+3x^3+12x-1$ β) $f(x)=x^3-3x+5$ γ) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

δ) $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$ ε) $f(x)=\begin{cases} 1-x^3, & x \le 1 \\ 2x^2+1, & x>1 \end{cases}$ στ) $f(x)=|x^2-9|$

6.3.11. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x)=2e^x-3+\ln(x+2)$ β) $f(x)=\ln x^3+e^x$ γ) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{-x}}$

δ) $f(x)=$ ημ$^3 x+$ συν$^5 x$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ ε) $f(x)=3^x+5^x+7^x$ στ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

6.3.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+6x+3$ και $g(x)=e^x+2x^5-2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $x^3=3x^2-6x-3$ και $e^x+2x^5=2$ έχουν ακριβώς μία ρίζα.

6.4 Μελέτη συναρτήσεων με τη βοήθεια της παραγώγου.

Η επίλυση ενός μεγάλου πλήθους πρακτικών προβλημάτων απαιτεί τον προσδιορισμό της μικρότερης ή της μεγαλύτερης τιμής μιας συνάρτησης. Για παράδειγμα:

α) Μία εταιρεία ενδιαφέρεται να μεγιστοποιήσει το κέρδος της ή να ελαχιστοποιήσει το κόστος της.

β) Ένας γιατρός, ο οποίος πρόκειται να χορηγήσει σε κάποιον ασθενή ένα συγκεκριμένο φάρμακο είναι λογικό να ενδιαφέρεται να προσδιορίσει τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επίδραση του φαρμάκου στον ασθενή γίνεται η μεγαλύτερη δυνατή.

γ) Οι τεχνικοί ενός εργοστασίου θέλουν να ξέρουν πώς θα κατασκευάσουν έναν κινητήρα που θα έχει τη μεγαλύτερη απόδοση, για δεδομένη κατανάλωση καυσίμου.

Προβλήματα όπως τα παραπάνω ανάγονται στον προσδιορισμό της μεγαλύτερης ή της μικρότερης τιμής μιας συνάρτησης (η οποία εκφράζει το μέγεθος που μας ενδιαφέρει κάθε φορά).

Ας θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση f, που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα 6.4α. Στο σημείο $x=x_1$ η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_1 (με άλλα λόγια, το σημείο $M_1\ (x_1, f(x_1))$ είναι το «ψηλότερο» σημείο της γραφικής παράστασης, όταν το x παίρνει τιμές «γειτονικές» στο σημείο x_1). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει ***τοπικό μέγιστο*** στο $x=x_1$.

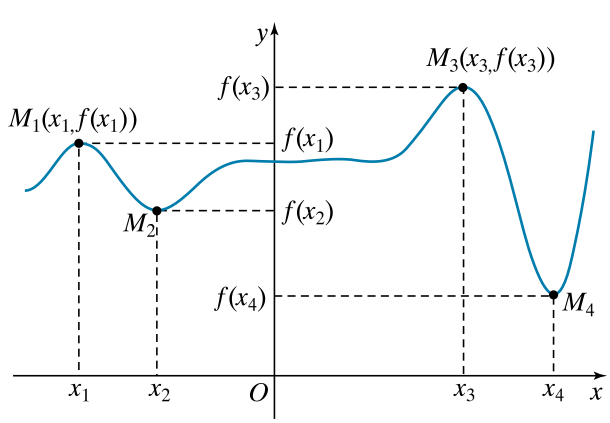
> Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό μέγιστο*** στο $\xi \in A$ όταν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει
>
> $$f(x) \le f(\xi) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta .$$
>
> Το ξ ονομάζεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού μεγίστου,*** ενώ το $f(\xi)$ ***τοπικό μέγιστο της f.***

Στο σχήμα 6.4α βλέπουμε επίσης ότι και για το σημείο $M_3\ (x_3, f(x_3))$ ικανοποιείται η συνθήκη του προηγούμενου ορισμού. Όμως το σημείο αυτό δεν είναι απλώς το ψηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης για τα x που ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ γύρω από το x_3, αλλά είναι και το «ψηλότερο» σημείο ολόκληρης της γραφικής παράστασης. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_3 ***ολικό μέγιστο*** (ή απλώς μέγιστο), ενώ το $f(x_3)$ θα ονομάζεται μέγιστο της f.

Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ακόμη ότι στο σημείο $x = x_2$ η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_2 (με άλλα λόγια, το σημείο $M_2\ (x_2, f(x_2))$ είναι το «χαμηλότερο» σημείο της γραφικής παράστασης, όταν το x παίρνει τιμές «γειτονικές» στο σημείο x_2). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει ***τοπικό ελάχιστο*** στο σημείο $M_2\ (x_2, f(x_2))$.

> Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό ελάχιστο*** στο $\xi \in A$, όταν υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $\Delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο, ώστε να ισχύει:
>
> $$f(x) \ge f(\xi) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta .$$
>
> Το ξ ονομάζεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού ελαχίστου***, ενώ το $f(\xi)$ ονομάζεται ***τοπικό ελάχιστο της f.***

Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(\xi)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η f ***παρουσιάζει*** στο $\xi \in A$ ***ολικό ελάχιστο*** ή απλώς ***ελάχιστο***, ενώ το $f(\xi)$ θα ονομάζεται ελάχιστο της f. Η συνάρτηση f του σχήματος 6.4α παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο σημείο $M_4(x_4, f(x_4))$.



Σχ. 6.4α

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f ονομάζονται ***τοπικά ακρότατα***, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα ονομάζονται ***θέσεις τοπικών ακροτάτων***. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f ονομάζονται ***ολικά ακρότατα*** ή απλώς ***ακρότατα***. Σημειώνουμε ότι ένα ολικό ακρότατο, μπορεί να θεωρηθεί και ως τοπικό ακρότατο, αφού προφανώς ικανοποιεί τη συνθήκη ορισμού του τελευταίου.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εύρεση ακροτάτων τιμών ***συνεχών*** συναρτήσεων. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 6.4β. Είναι φανερό ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_1 και ολικό μέγιστο στη θέση x_5. Επίσης τα σημεία x_4, x_6 (αλλά και το x_1) είναι σημεία τοπικού ελάχιστου, ενώ τα σημεία x_3, x_7 (αλλά και το x_5) είναι σημεία τοπικού μεγίστου.

Παρατηρούμε ότι, στα σημεία x_5, x_6, όπου η συνάρτηση παραγωγίζεται, η εφαπτομένη παίρνει θέση παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, οπότε θα ισχύει:

$$f'(x_5) = 0 \text{ και } f'(x_6) = 0.$$

Υπάρχει όμως και ένα τρίτο σημείο, το x_2, το οποίο δεν αποτελεί θέση τοπικού ακροτάτου, παρότι ισχύει $f'(x_2)=0$. Τέλος στις θέσεις x_3, x_4 έχουμε τοπικά ακρότατα, ενώ η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A μπορεί να είναι:

α) Τα ***άκρα*** του A (αν ανήκουν σ' αυτό) και

β) ***Εσωτερικά*** σημεία του A, στα οποία η f είτε δεν παραγωγίζεται (ενώ όμως είναι συνεχής), είτε παραγωγίζεται και η παράγωγός της μηδενίζεται.

Τα σημεία της περίπτωσης (β) τα ονομάζουμε ***κρίσιμα σημεία*** της συνάρτησης f. Αποδεικνύεται μάλιστα (η απόδειξη παραλείπεται) ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, που είναι γνωστό ως ***Θεώρημα Fermat***.

Θεώρημα του Fermat

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$, τότε θα ισχύει: $f'(x_0)=0$.

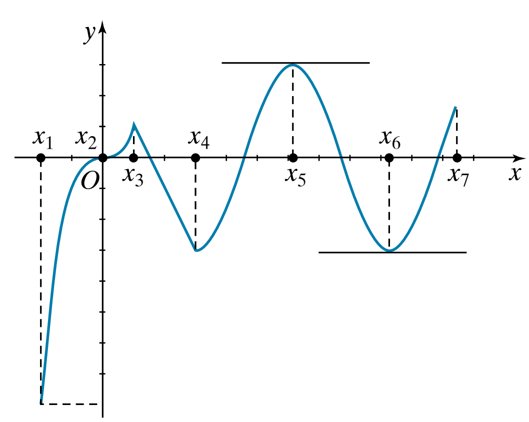
Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Ωστόσο ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου σε ένα σημείο δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το σημείο αυτό είναι τοπικό ακρότατο. Για παράδειγμα, στο σημείο $x_2=0$ του σχήματος 6.4β ισχύει $f'(x_2)=0$, ενώ το x_2 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Έτσι, τα κρίσιμα σημεία είναι απλώς ***υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων***. Χρειαζόμαστε επομένως ένα κριτήριο, το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Αν εξετάσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης f του σχήματος 6.4β στο x_3 παρατηρούμε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_3]$, δηλαδή, $f(x) \le f(x_3)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_3]$, ενώ

β) η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής $[x_3, \beta)$, δηλαδή, $f(x) \le f(x_3)$ για κάθε $x \in [x_3, \beta)$.



Σχ. 6.4β

Μ’ αυτόν τον τρόπο έχει εξασφαλιστεί ότι ισχύει $f(x) \leq f(x_3)$ για κάθε $x \in \Delta = (\alpha, \beta)$ (οπότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_3). Ανάλογες διαπιστώσεις ισχύουν και για το σημείο x_5.

Ομοίως, εξετάζοντας τη συμπεριφορά της συνάρτησης f στο x_4 παρατηρούμε ότι:

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_4]$, δηλαδή $f(x) \geq f(x_4)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_4]$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα της μορφής $[x_4, \beta)$, δηλαδή $f(x) \geq f(x_4)$ για κάθε $x \in [x_4, \beta)$.

Έτσι, για κάθε $x \in \Delta = (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) \geq f(x_4)$, οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_4. Ανάλογες διαπιστώσεις ισχύουν και για το σημείο x_6.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά το επόμενο αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται):

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο A, συνεχής στο διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq A$ και $x_0 \in [\alpha, \beta)$ ένα κρίσιμο σημείο της f.

α) Αν $f'(x) > 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 (σχ. 6.4γ).

β) Αν $f'(x) < 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 (σχ. 6.4δ).

Για να βρούμε λοιπόν τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την πρώτη παράγωγο, ώστε να εντοπίσουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, καθώς και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τα σημεία στα οποία η f' αλλάζει πρόσημο μας δίνουν τα τοπικά της ακρότατα.

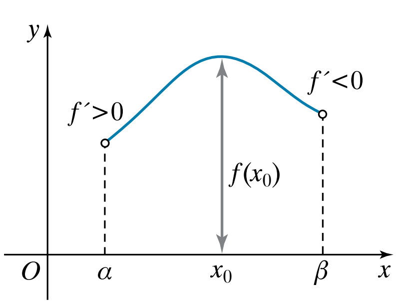
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (σχ. 6.4ε), που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η f είναι προφανώς παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$. Για τις ρίζες της πρώτης παραγώγου έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1,$$

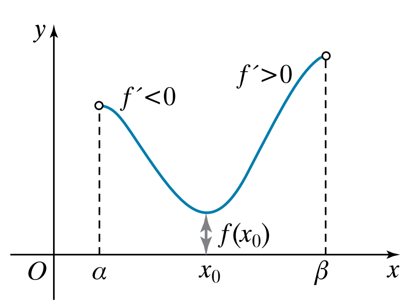
ενώ για το πρόσημο της f' ισχύουν τα εξής:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

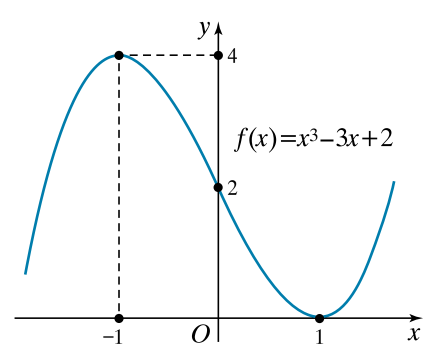
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$, το $f(-1)=4$ είναι τοπικό μέγιστο. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty]$, το $f(1)=0$ είναι τοπικό ελάχιστο (σχ. 6.4ε).



Σχ. 6.4γ



Σχ. 6.4δ



Σχ. 6.4ε

Τα παραπάνω αποτελέσματα δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 6.4.1.

Σημειώνουμε ότι κατά τη χρησιμοποίηση της διαδικασίας αυτής δεν είναι απαραίτητο να εξασφαλίζεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 (θα πρέπει όμως η f να είναι ***συνεχής*** στο σημείο αυτό).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση (σχ. 6.4στ):

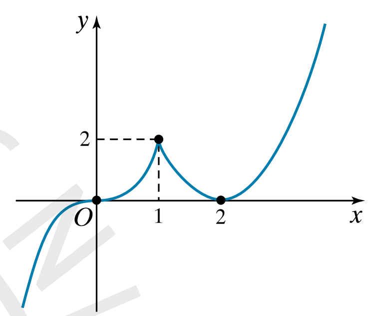
$$f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x < 1 \\ 2(x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με: $f'(x) = \begin{cases} 6x^2, & x < 1 \\ 4(x-2), & x > 1 \end{cases}$

Πίνακας 6.4.1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	4	↘	0	↗	

Τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -1$ *Τοπικό ελάχιστο στο* $x_0 = 1$



Σχ. 6.4στ

Στο σημείο $x_0 = 1$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Ωστόσο, αφού ισχύει $f'(x) > 0$ για $x < 1$ και $f'(x) < 0$ για $1 < x < 2$, η f θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 1$

Το παρακάτω αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο ελέγχου σχετικά με το κατά πόσο ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, στο οποίο (υπάρχει και) μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, αποτελεί τοπικό ακρότατο της συνάρτησης. Σύμφωνα μ' αυτό, αντί να ελέγχουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0, αρκεί να εξετάσουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο σημείο x_0 μόνο. Για τον λόγο αυτόν είναι γνωστό ως ***κριτήριο της δεύτερης παραγώγου***.

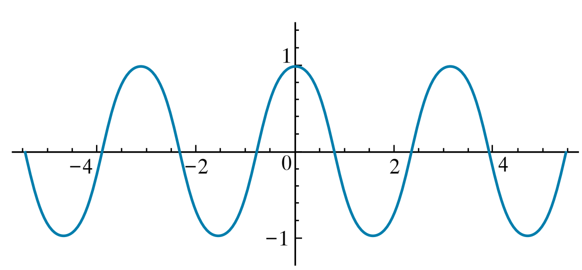
Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του *Δ*, για το οποίο ισχύει $f'(x) = 0$.

α) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και ισχύει $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0.

β) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και ισχύει $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.

Σημειώνεται ότι αν κατά την εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης προκύψει ότι $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) = 0$, τότε χρειάζεται να καταφύγουμε σε παραγώγους μεγαλύτερης τάξης για να διευκρινισθεί η φύση του σημείου x_0 (τέτοιες περιπτώσεις δεν θα εξετασθούν στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου).

Ως εφαρμογή του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \text{συν}2x$ (σχ. 6.4ζ), που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η f παραγωγί-



Σχ. 6.4ζ

ζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = -2\eta\mu 2x, \qquad f''(x) = -4\sigma\upsilon\nu 2x.$$

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = \kappa\pi,\ x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$.

Επειδή $f''(\kappa\pi) = -4\sigma\upsilon\nu 2\kappa\pi = -4 < 0$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στα σημεία $0, \pm\pi, \pm 2\pi,\ldots$ τοπικά μέγιστα.

Ομοίως, αφού

$$f''(\kappa\pi + \frac{\pi}{2}) = -4\sigma\upsilon\nu\left(2(\kappa\pi + \frac{\pi}{2})\right) = -4\sigma\upsilon\nu\pi = 4 > 0,$$

η συνάρτηση f θα παρουσιάζει στα σημεία $\pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{3\pi}{2},\ \ldots$ τοπικά ελάχιστα.

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο αυτή, υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής που εξηγήσαμε στην παράγραφο 5.8, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \ \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Επομένως, σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν προηγουμένως, η f θα έχει (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Για την εύρεση αυτών, στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

α) Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.

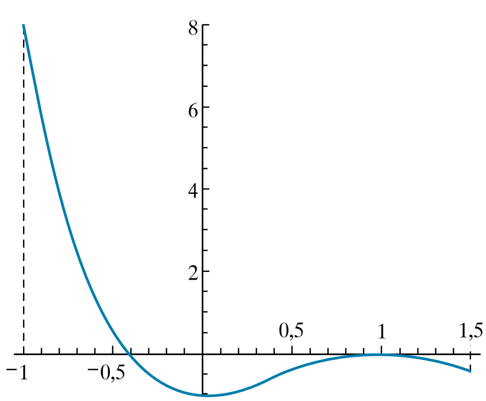
β) Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά, καθώς επίσης και στα άκρα των διαστημάτων.

γ) Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο της f και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

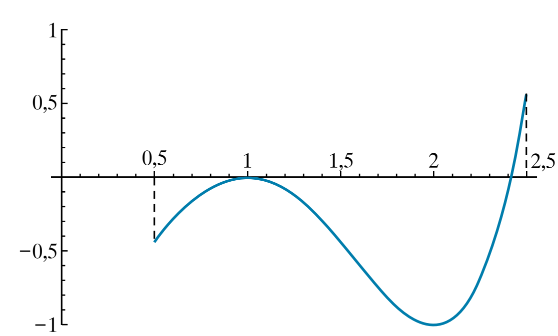
Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$, που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και έχει παράγωγο $f'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)\,(x-2)$, οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι οι $x = 0$, $x = 1$, και $x = 2$. Επομένως:

α) Αν εξετάσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[-1, \dfrac{3}{2}]$, (σχ. 6.4η) το μέγιστο της f θα είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές $f(-1) = 8$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{7}{16}$, δηλαδή το $f(-1) = 8$, ενώ το ελάχιστο, η μικρότερη από τις τιμές $f(-1) = 8,\ f(0) = -1,\ f(1) = 0,\ f(\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{7}{16}$, δηλαδή το $f(0) = -1$.

β) Αν εξετάσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}]$, (σχ. 6.4θ) το μέγιστο της f θα είναι η μεγαλύ-



Σχ. 6.4η

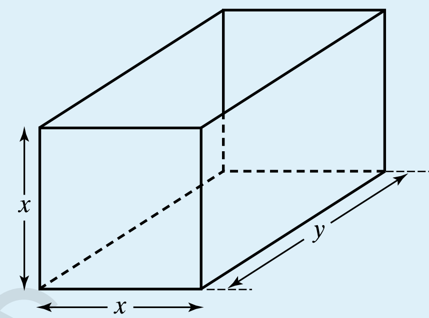


Σχ. 6.4θ

τερη από τις τιμές $f(\frac{1}{2})=-\frac{7}{16}$, $f(1)=0$, $f(2)=-1$, $f(\frac{5}{2})=\frac{9}{16}$, δηλαδή το $f(\frac{5}{2})=\frac{9}{16}$, ενώ το ελάχιστο, η μικρότερη από τις τιμές $f(\frac{1}{2})=-\frac{7}{16}$, $f(1)=0$, $f(2)=-1$, $f(4)=63$, δηλαδή το $f(2)=-1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.1.

Μία δεξαμενή πλοίου έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με τις δύο έδρες του τετράγωνα πλευράς x. Αν η δεξαμενή πρόκειται να κατασκευαστεί από λαμαρίνα συνολικού εμβαδού 24 m^2, να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής, έτσι ώστε αυτή να χωράει τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού.



Λύση.

Αν y είναι η τρίτη διάσταση της δεξαμενής, τότε το εμβαδόν της επιφάνειάς της θα δίνεται από τον τύπο:

$$E = 2xy + 2xy + 2x^2 = 4xy + 2x^2.$$

Επειδή η συνολική διαθέσιμη λαμαρίνα είναι 24 m^2, θα έχουμε $E=24$, οπότε

$$4xy + 2x^2 = 24 \Leftrightarrow 4xy = 24 - 2x^2 \Leftrightarrow y = \frac{24-2x^2}{4x}\ .$$

Ο όγκος της δεξαμενής είναι ίσος με:

$$V = (x \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot \frac{24-2x^2}{4x} = \frac{1}{2}(12x - x^3)\ .$$

Επομένως αναζητάμε τη μεγίστη τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{2}(12x - x^3), \qquad x > 0$$

της οποίας η παράγωγος είναι ίση με $f'(x) = \frac{1}{2}(12 - 3x^2)$. Η μοναδική θετική ρίζα της $f'(x)=0$ είναι η $x=2$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα 6.4.2.

Επειδή $f'(2)=0$ και η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2, η συνάρτηση f θα παρουσιάζει για $x=2$ τη μέγιστη τιμή της, η οποία είναι ίση με:

$$f(2) = \frac{1}{2}(12 \cdot 2 - 2^3) = 8.$$

Επομένως, οι διαστάσεις της δεξαμενής που εξασφαλίζουν τη μεγαλύτερη χωρητικότητα νερού (8 m^3) είναι:

$$x = 2\text{m} \quad \text{και} \quad y = \frac{24 - 2\cdot 2^2}{4 \cdot 2} = 2\ \text{m}$$

(η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί στην περίπτωση που η δεξαμενή έχει όλες τις διαστάσεις της ίσες, δηλαδή κυβικό σχήμα).

Πίνακας 6.4.2

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

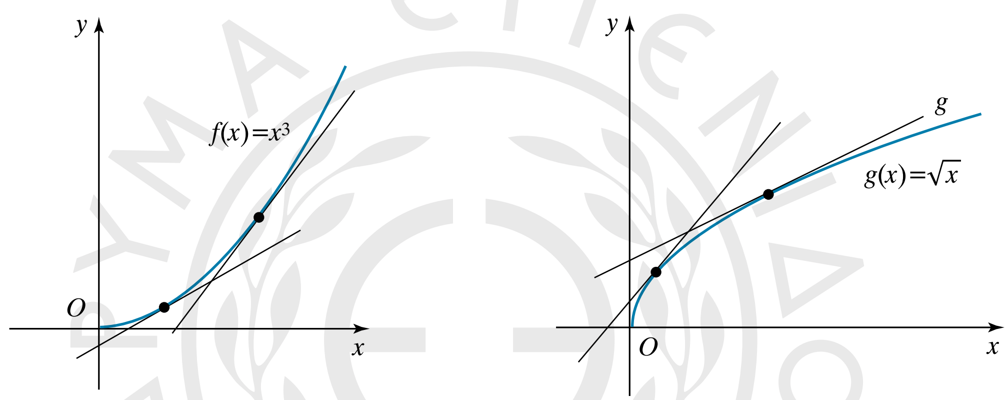
Μέγιστο

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0,+\infty)$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα 6.4ι.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f(x)=3x^2>0$ και

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Επομένως και οι δύο είναι γνησίως αύξουσες στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζουν ελάχιστο στο σημείο 0. Ωστόσο οι δύο γραφικές παραστάσεις που δίνονται στο σχήμα 6.4ι φαίνονται να διαφέρουν. Πιο συγκεκριμένα, ο τρόπος με τον οποίο «ανέρχεται» η f είναι τέτοιος, ώστε η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται συνεχώς επάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της, ενώ ο τρόπος με τον οποίο «ανέρχεται» η g είναι τέτοιος, ώστε η γραφική παράσταση της g να βρίσκεται συνεχώς κάτω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της. Παρατηρούμε επίσης ότι, καθώς το x αυξάνει, η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνει, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, ενώ η κλίση $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.



Σχ. 6.4ι

Για μια συνάρτηση όπως η f θα λέμε ότι ***στρέφει τα κοίλα προς τα άνω*** ή είναι ***κυρτή*** στο $[0,+\infty)$, ενώ για μια συνάρτηση όπως η g θα λέμε ότι ***στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω*** ή είναι ***κοίλη*** στο $[0,+\infty)$.

Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ. Θα λέμε ότι η f είναι:

α) ***Κυρτή*** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
β) ***Κοίλη*** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών μιας συνάρτησης ότι αυτή είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\cup$ ή $\cap$ αντίστοιχα[1].

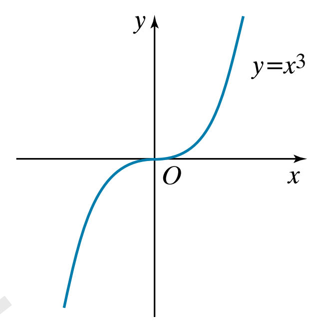
Δεδομένου ότι η μονοτονία της πρώτης παραγώγου σε ένα διάστημα μπορεί να καθοριστεί από το

1. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε ορισμένα συγγράμματα μια συνάρτηση με γνησίως αύξουσα πρώτη παράγωγο ονομάζεται ***γνησίως κυρτή***, ενώ ο όρος *κυρτή* χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η παράγωγός της είναι απλώς αύξουσα. Αντίστοιχα, μια συνάρτηση με γνησίως φθίνουσα πρώτη παράγωγο ονομάζεται ***γνησίως κοίλη***, ενώ ο όρος *κοίλη* χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η παράγωγός της είναι απλώς φθίνουσα. Με τη θεώρηση αυτή η συνάρτηση $f(x)=\kappa x+\lambda$ (της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή) θεωρείται και κυρτή και κοίλη ταυτόχρονα. Ωστόσο, στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου ο όρος *κυρτή/κοίλη συνάρτηση* θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια συνάρτηση με γνησίως αύξουσα/γνησίως φθίνουσα πρώτη παράγωγο αντίστοιχα (οπότε συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\kappa x+\lambda$ δεν είναι ούτε κυρτές ούτε κοίλες).

πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο διάστημα αυτό, μπορούμε να διατυπώσουμε τα επόμενα κριτήρια, τα οποία μας διευκολύνουν να βρίσκουμε τα διαστήματα, στα οποία μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη.

> Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Τότε η f είναι:
>
> α) ***Κυρτή*** στο Δ, αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.
>
> β) ***Κοίλη*** στο Δ, αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε και πάλι τη συνάρτηση $f(x)=x^3$, αυτή τη φορά σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 6.4ια. Αφού $f'(x)=3x^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε επίσης $f''(x)=6x>0$ για $x>0$ και $f''(x)=6x<0$ για $x<0$. Επομένως, η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$, ενώ είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.



Σχ. 6.4ια

Παρατηρούμε επίσης ότι η f εκατέρωθεν του σημείου $x_0=0$ αλλάζει από κοίλη σε κυρτή και ότι η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$ την ευθεία με εξίσωση $y=0$, η οποία μάλιστα «διαπερνά» την καμπύλη. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σημείο O είναι ***σημείο καμπής*** της C_f ή ***η συνάρτηση παρουσιάζει καμπή στο*** x_0.

> Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως κάποιο σημείο του x_0. Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται ***σημείο καμπής*** της γραφικής παράστασης της f αν:
>
> α) Η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και
>
> β) η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι στο σημείο $O(0,0)$, που είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, ισχύει $f''(0)=0$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται):

> Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, τότε είτε θα ισχύει $f''(x_0)=0$ είτε δεν θα υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0.

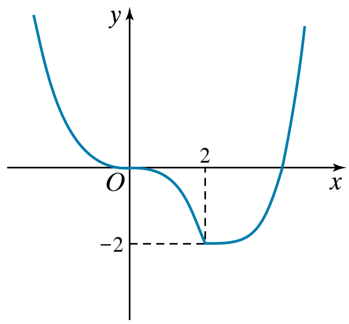
Έτσι τα σημεία που αποτελούν ***υποψήφιες θέσεις*** σημείων καμπής θα πρέπει να τα αναζητούμε εξετάζοντας:

α) Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ, στα οποία η f'' μηδενίζεται

β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^3, & x\le 2 \\ (x-2)^2-2, & x>2 \end{cases}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 6.4ιβ. Έχουμε

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^2, & x<2 \\ 2(x-2), & x>2 \end{cases} \quad \text{και} \quad f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{2}x, & x<2 \\ 2, & x>2. \end{cases}$$



Σχ. 6.4ιβ

Πίνακας 6.4.3

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+		–	+
$f(x)$				
		σημείο καμπής		

Η μοναδική ρίζα της $f''(x)=0$ είναι το 0, ενώ στο σημείο 2 δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον πίνακα 6.4.3.

Επομένως, οι υποψήφιες θέσεις σημείων καμπής είναι τα σημεία 0 και 2. Παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν των σημείων 0 και 2 η f'' αλλάζει πρόσημο. Όμως στο σημείο $(2,-2)$ η C_f δεν έχει εφαπτομένη. Επομένως το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της f, ενώ το σημείο $A(2,-2)$ δεν είναι σημείο καμπής.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, όταν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και επιπλέον ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ (δηλ. η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0), τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.2.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2-48x+100$.

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=3x^2-18x-48 \quad \text{και} \quad f''(x)=6x-18.$$

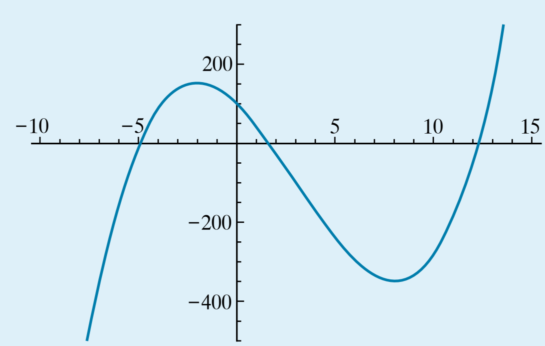
Επίσης έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x-48=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=8$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Leftrightarrow x=3$.

Το πρόσημο της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου, η μονοτονία της συνάρτησης και το είδος της (κυρτή/κοίλη) παρουσιάζονται στον πίνακα 6.4.4 μεταβολών της f.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ την τιμή $f(-2)=152$ και τοπικό ελάχιστο για $x=8$ την τιμή $f(8)=-348$. Τέλος, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $\Gamma(3, f(3))$, δηλαδή το $\Gamma(3, -98)$. Στο σχήμα 6.4ιγ δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Πίνακας 6.4.4

x	$-\infty$		-2	3	8	$+\infty$
f'		+	0	–	0	+
f''			–	0	+	
f						
			τοπικό μέγιστο	σημείο καμπής	τοπικό ελάχιστο	



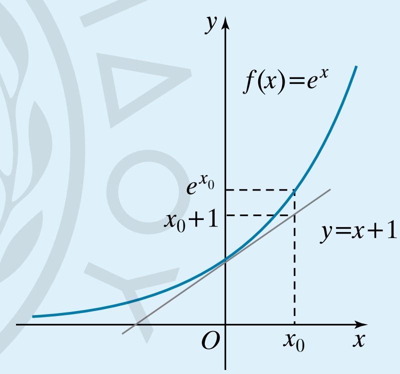
Σχ. 6.4ιγ

Η πορεία την οποία ακολουθήσαμε στην εφαρμογή αυτή ονομάζεται ***μελέτη συνάρτησης.*** Γενικά, για τη μελέτη μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.
β) Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.
γ) Βρίσκουμε τις δύο πρώτες παραγώγους f' και f'' (όπου αυτές υπάρχουν) και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους.
δ) Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.
ε) Με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και τα σημεία καμπής.
στ) Μελετάμε τη «συμπεριφορά» της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες κ.λπ.).
ζ) Κατασκευάζουμε τον ***πίνακα μεταβολών της f*** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.3.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^x$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $x\in\mathbb{R}$.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.
γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $e^{x_0}\geq x_0+1$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.



Σχ. 6.4ιδ

Λύση.

α) Η συνάρτηση f με $f(x)=e^x$ έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Επίσης, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x$. Αφού ισχύει $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f θα είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

β) Έχουμε $f'(0)=e^0=1$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι η $y-1=1\cdot(x-0)$, δηλαδή η $y=x+1$ (σχ. 6.4ιδ).

γ) Επειδή η f είναι κυρτή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, η γραφική παράστασή της θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της, σε οποιοδήποτε σημείο της $(x_0, f(x_0))$. Επομένως, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$f(x_0)\geq y_0=x_0+1$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$e^{x_0}\geq x_0+1.$$

Ασκήσεις.

6.4.1. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα (εφόσον υπάρχουν) των επόμενων συναρτήσεων.

α) $f(x)=2x^4-3x^3-12x^2+5$ β) $f(x)=x^2-3x+5$ γ) $f(x)=2(x^2-4)^5$

δ) $f(x)=2x^3-4x^2-2x+3$ ε) $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}$ στ) $f(x)=x-e^{2x}$

6.4.2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα.

α) $f(x)=2x^3+4x+1$ β) $f(x)=e^x+\ln x-1$ γ) $f(x)=\sqrt{x}(1+\sqrt{x})$

δ) $f(x)=2^x+3^x+4^x$ ε) $f(x)=x^2e^x+3e^x$ στ) $f(x)=x+3^x$

6.4.3. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f, της οποίας η παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f'(x)=3(x^2-4)(x-2)^2(x-4)^2$.

6.4.4. Αφού μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=2x^3+3x^2-12x+6$, να βρείτε στη συνέχεια το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^2(2x+3)=12x-6$.

6.4.5. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με περίμετρο 40 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

6.4.6. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι η δεύτερη παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f''(x)=(x-2)(x-1)^2(x+1)$. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

6.4.7. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

α) $f(x)=-1+9x+x^2$ β) $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}$ γ) $f(x)=x^2e^{-x/2}$

δ) $f(x)=x^3-5x^2+x+1$ ε) $f(x)=\eta\mu 2x$ στ) $f(x)=e^{-x^2/2}$

ζ) $f(x)=xe^{-x}$ η) $f(x)=x^3|x|$ θ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

6.4.8. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι η πρώτη παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f'(x)=x(x-1)$. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

6.4.9. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=x^4-5x^2+4$.

6.5 Κανόνες του L' Hospital.

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους:

$$f_1(x)=\frac{e^x-1}{x} \quad \text{και} \quad f_2(x)=\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}},$$

οι οποίες είναι ορισμένες στα σύνολα $A_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $A_2=(0,+\infty)$ αντίστοιχα. Αν θα θέλαμε να υπολογίσουμε τα όρια των συναρτήσεων αυτών όταν το x τείνει στο 0, δηλαδή τα

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}},$$

δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου του πηλίκου δύο συναρτήσεων, αφού για την f_1 έχουμε

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)=e^0-1=1-1=0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} x=0$$

ενώ για την f_2,

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty .$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και $\frac{-\infty}{+\infty}$ αντίστοιχα.

Σε τέτοιες απροσδιόριστες μορφές μπορεί να εφαρμοστεί το παρακάτω αποτέλεσμα, που είναι γνωστό ως ***κανόνας του L' Hospital***, και σε αρκετές περιπτώσεις μας προσφέρει έναν πολύ εύκολο τρόπο υπολογισμού ορίων, στα οποία εμπλέκονται απροσδιόριστες μορφές.

Κανόνας του L' Hospital

Έστω Δ ένα διάστημα, $x_0 \in \Delta$ και f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες τουλάχιστον στο $\Delta - \{x_0\}$. Υποθέτουμε επίσης ότι $g'(x) \neq 0$ τουλάχιστον στο $\Delta - \{x_0\}$, ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή μη) και ότι ισχύει ***μία*** από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$.

Τότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ο Κανόνας του L' Hospital ισχύει και για πλευρικά όρια $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, καθώς και όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$, (αρκεί όμως να πληρούνται οι προϋποθέσεις του).

Το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

που θεωρήσαμε προηγουμένως είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \frac{e^x}{1} = e^x.$$

Αφού υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1,$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L' Hospital και να γράψουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Ομοίως, για το δεύτερο όριο θα έχουμε:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0.$$

Σημειώνεται ότι ο κανόνας του L' Hospital μπορεί να εφαρμοστεί και περισσότερες από μία φορές αν χρειαστεί, δηλαδή αν μετά την εφαρμογή του εξακολουθούμε να έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Για παράδειγμα, θέλοντας να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\text{ , όπου } f(x)=e^{5x},\ g(x)=x^3$$

παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\text{ , }\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}g''(x)=+\infty$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5e^{5x}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25e^{5x}}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{125e^{5x}}{6}=+\infty.$$

Ο κανόνας του L' Hospital μπορεί να βρει εφαρμογή και στον υπολογισμό ορίων που αφορούν σε απροσδιόριστες μορφές του τύπου $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)-(\pm\infty)$, αφού πρώτα μετατρέψουμε κατάλληλα τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει, ώστε να προκύψει μία από τις απροσδιόριστες μορφές που καλύπτει το προηγούμενο θεώρημα.

Για παράδειγμα το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x^2)$, που είναι της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$ (αφού $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\ln x^2=+\infty$), μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: γράφουμε αρχικά τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει στη μορφή (αφού αναζητήσουμε το όριο στο $\pm\infty$, μπορούμε να περιοριστούμε σε μεγάλες θετικές τιμές του x)

$$x-\ln x^2=x-2\ln x=x(1-2\frac{\ln x}{x})$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}(1-2\frac{\ln x}{x})=1$$

και επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x^2)=\lim_{x\to+\infty}x(1-2\frac{\ln x}{x})=+\infty.$$

Τέλος αναφέρουμε ότι, όταν αναζητούμε όρια συναρτήσεων της μορφής $(f(x))^{g(x)}$, μπορεί να οδηγηθούμε επίσης σε απροσδιόριστες μορφές 0^0, ∞^0, 1^∞. Σε πολλές περιπτώσεις, οι παραπάνω απροσδιόριστες μορφές υπολογίζονται με τον κανόνα του L' Hospital γράφοντας τη συνάρτηση στη μορφή $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$.

Για παράδειγμα το όριο $\lim_{x\to 0^+}x^x$, που είναι της μορφής 0^0, μπορεί να υπολογισθεί αν λάβουμε υπόψη ότι $x^x=e^{x\ln x}$ και καταφέρουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to 0^+}x\ln x$. Επειδή $\lim_{x\to 0^+}x=0$ και $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, έχουμε οδηγηθεί σε απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(-\infty)$ και για να προχωρήσουμε στον υπολογισμό γράφουμε την τελευταία συνάρτηση στη μορφή

$$x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}.$$

Αφού $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ θα έχουμε:

οπότε
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)} = e^0 = 1\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5.1.

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$.

Λύση.

Η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο $A=(1,2)\cup(2,+\infty)$. Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f στα 1, 2 και στο $+\infty$.

α) Για $x=1$ έχουμε:
$$\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+}(x-2) = -1$$
οπότε θα είναι:
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{x-2} = +\infty\,.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

β) Για $x=2$ έχουμε:
$$\lim_{x\to 2}\ln(x-1) = \ln 1 = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 2}(x-2) = 0$$
Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital θα έχουμε:
$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}(x-1)'}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-1} = 1\,.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=2$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

γ) Τέλος εξετάζουμε αν η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ παρατηρούμε ότι:
$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x-1) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 0\,.$$
Επομένως
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-2} = 0\,.$$
και η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f.

Ασκήσεις.

6.5.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}2x}{\ln(2x+1)}$ ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\text{συν}x}{x-\text{ημ}x}$ στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{συν}x}{x^2}$ η) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}$ θ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{ημ}x}{\sqrt{x}}$

6.5.2. Να υπολογίσετε τα εξής όρια:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4\ln x)$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x\ln(1+\dfrac{2}{x}))$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-3\ln x)$

δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3+2x)^{1/x}$ ε) $\lim\limits_{x\to -\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x^2}$ στ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x^3}{x^5}$ η) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x})$ θ) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^5e^{-x}$

6.5.3. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\text{ημ}(x-2)}{x^2-5x+6}$ γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{x-4x+3}$

6.5.4. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{x^2}{3^x}$ β) $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}$ γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)(x-2)}$

6.6 Εφαρμογές των παραγώγων.

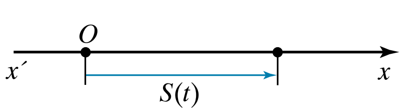
Ας θεωρήσουμε ένα κινητό (σώμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή O ενός άξονα $x'x$ (σχ. 6.6α). ΄Εστω ότι το σώμα κινείται μόνο κατά μήκος του άξονα (εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση) και ας συμβολίσουμε με $S(t)$ την απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t από το O (δηλ. την τετμημένη που αντιστοιχεί στη θέση του κινητού).

Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή t και ονομάζεται ***συνάρτηση θέσεως*** του κινητού.

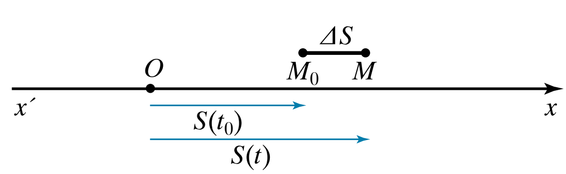
΄Εστω ότι, ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση O, κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t=t_0+h$, έχει μετακινηθεί στη θέση M (σχ. 6.6β). Τότε η μετατόπιση του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t]$ θα είναι ίση με τη διαφορά $\Delta S=S(t)-S(t_0)$ και επομένως η μέση ταχύτητά του θα δίνεται από το λόγο της συνολικής μετατοπίσεως $\Delta S=S(t)-S(t_0)$ προς το χρόνο $\Delta t=t-t_0=h$ που πέρασε, δηλαδή από τον τύπο:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}.$$

Όταν το t πλησιάζει το t_0 ($t\to t_0$ ή ισοδύναμα $h\to 0$), το παραπάνω πηλίκο μάς δίνει μια ιδέα του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η θέση του κινητού «κοντά στο t_0». Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0



Σχ. 6.6α



Σχ. 6.6β

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}=S'(t_0),$$

ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα ή απλά ***ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή*** t_0 και συνήθως συμβολίζεται με $\upsilon(t_0)$.

Η ταχύτητα ενός κινητού ονομάζεται πολλές φορές και ***ρυθμός μεταβολής*** της θέσης του κινητού. ΄Ετσι, ο λόγος $\Delta S/\Delta t$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t]$, ενώ το όριο

$$S'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}$$

είναι ο ***στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής*** της θέσης του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 (ο ρυθμός μεταβολής όταν το κινητό βρίσκεται πάρα πολύ κοντά στο t_0). Στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιούμε τον όρο *ρυθμός μεταβολής* θα εννοούμε το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής.

Για παράδειγμα, αν $S(t)=-2t^2+10t$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού, τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές $t_1=1$, $t_2=2$ και $t_3=3$ θα είναι αντίστοιχα (αφού $S'(t)=-4t+10$)

$$S'(1)=-4\cdot 1+10=6,\quad S'(2)=-4\cdot 2+10=2\quad S'(3)=-4\cdot 3+10=-2.$$

Σημειώνουμε ότι, όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει

$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0,$$

οπότε θα είναι $\upsilon(t_0)\geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά, κοντά στο t_0 ισχύει

$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0,$$

οπότε θα έχουμε $\upsilon(t_0)\leq 0$. Συνεπώς το πρόσημο της ταχύτητας υποδηλώνει την κατεύθυνση του κινητού, γεγονός που δικαιολογεί τον διανυσματικό χαρακτήρα της ταχύτητας ως φυσικού μεγέθους.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $\upsilon: t\to\upsilon(t)=S'(t)$. Σε αναλογία με όσα προαναφέρθηκαν, αντιλαμβανόμαστε ότι το όριο του πηλίκου

$$\frac{\upsilon(t)-\upsilon(t_0)}{t-t_0}=\frac{\upsilon(t_0+h)-\upsilon(t_0)}{h}$$

καθώς το t πλησιάζει το t_0 ($t\to t_0$ ή ισοδύναμα $h\to 0$) μας δίνει μια ιδέα του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα του κινητού κοντά στο t_0. Το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{\upsilon(t_0+h)-\upsilon(t_0)}{h}=\upsilon'(t_0)=S''(t_0)$$

ονομάζεται στιγμιαία επιτάχυνση ή απλά ***επιτάχυνση του κινητού*** τη χρονική στιγμή t_0. Με άλλα λόγια, η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $\upsilon(t)$ (ταχύτητας) τη χρονική στιγμή t_0.

Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής συμπέρασμα:

Αν $S(t)$ η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t είναι ίσες με $\upsilon(t)=S'(t)$ και $a(t)=\upsilon'(t)=S''(t)$ αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν η θέση του κινητού δίνεται από τη συνάρτηση

$$S(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2,$$

όπου s_0, v_0, a είναι δεδομένες σταθερές, τότε

$$v(t) = S'(t) = (s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2)' = v_0 + a\, t \quad \text{και} \quad a(t) = v'(t) = (v_0 + a\, t)' = a,$$

δηλαδή το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση (εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση).

Η χρήση του όρου *ρυθμός μεταβολής* μπορεί να γίνει σε όλες τις περιπτώσεις που κάποιο μέγεθος y μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο άλλο μέγεθος x.

Αν δύο μεγέθη x,y συνδέονται με τον τύπο $y=f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ, τότε η παράγωγος

$$f'(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

εκφράζει τον ***ρυθμό μεταβολής του y ως προς x*** για τη συγκεκριμένη τιμή $x=x_0$.

Για παράδειγμα:

α) Αν ο όγκος y ενός θερμαινόμενου κύβου πλευράς x αυξάνεται σύμφωνα με τον τύπο $y=f(x)=x^3$, ο ρυθμός μεταβολής του όγκου για $x=x_0$ είναι ίσος με $f'(x_0)=3x_0^2$. Έτσι η ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται ο όγκος ενός κύβου πλευράς 1 (μονάδας μήκους) είναι $3\cdot 1^2=3$, ενώ όταν ο κύβος έχει πλευρά 2, η ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται ο όγκος του τετραπλασιάζεται (γίνεται $3\cdot 2^2=12$).

β) Αν $Q(t)$ είναι η συνάρτηση που εκφράζει το φορτίο που διέρχεται από μια κάθετη τομή ενός αγωγού τη χρονική στιγμή t, τότε η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό τη χρονική στιγμή t_0 (που σύμφωνα με τη Φυσική, είναι ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου τη χρονική στιγμή t_0), θα δίνεται από την παράγωγο $Q'(t_0)$.

γ) Αν θεωρήσουμε ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και συμβολίσουμε με $J(t)$ το μέτρο της ορμής του τη χρονική στιγμή t, τότε το μέτρο της δύναμης που κινεί το σώμα είναι ίσο με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής τη χρονική στιγμή t_0, και θα δίνεται από την παράγωγο $J'(t_0)$.

Ας δούμε στη συνέχεια πώς χρησιμοποιείται η έννοια του ρυθμού μεταβολής σε προβλήματα που έχουν σχέση με οικονομικές εφαρμογές. Στην Οικονομία, το κόστος παραγωγής και το κέρδος εκφράζονται συνήθως ως συνάρτηση της ποσότητας x που παράγεται. Ας υποθέσουμε ότι το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x)$ και η συνολική είσπραξη από την πώληση x μονάδων του προϊόντος είναι $E(x)$.

Τότε:

α) Το συνολικό κέρδος από την πώληση x μονάδων του προϊόντος θα είναι ίσο με

$$P(x) = E(x) - K(x).$$

β) Το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων του προϊόντος είναι ίσο με

$$K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Όταν ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγουμε μεταβάλλεται από x_0 σε x (θεωρούμε ότι το x μεταβάλλεται σε διάστημα), τότε το πηλίκο

$$\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0} = \frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}, \quad \text{όπου } h = x - x_0$$

δίνει το ***μέσο κέρδος*** όταν εμπορευόμαστε από x_0 μέχρι x μονάδες του προϊόντος.

Καθώς το x πλησιάζει το x_0 (ισοδύναμα $h \to 0$), το μέσο κέρδος μάς δίνει μια ιδέα του ρυθμού μεταβολής του κέρδους όταν παράγουμε (και πουλάμε) έναν αριθμό μονάδων που βρίσκεται πολύ κοντά στο x_0. Για τον λόγο αυτόν το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h} = P'(x_0),$$

ονομάζεται ***οριακό κέρδος*** στο x_0. Ανάλογα ορίζονται και οι έννοιες του ***οριακού κόστους*** και της ***οριακής είσπραξης*** στο x_0 ως οι παράγωγοι $K'(x_0)$, $E'(x_0)$ αντίστοιχα.

Από τους τύπους:

$$P'(x) = E'(x) - K'(x) \quad \text{και} \quad K'_\mu(x) = \left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{K'(x)\cdot x - K(x)}{x^2}$$

είναι φανερό ότι:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$$

και

$$K'_\mu(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x)\cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \Leftrightarrow K'(x) = K_\mu(x)\,.$$

Επομένως, ισχύουν τα εξής, τα οποία αποτελούν δύο γνωστές αρχές της οικονομικής θεωρίας:

α) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσοι.

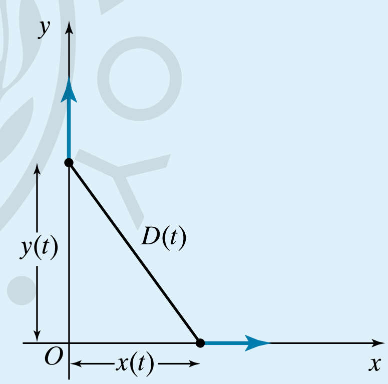
β) Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6.1.

Δύο πλοία ξεκινούν από ένα λιμάνι O και έχουν κάθετες διευθύνσεις (σχ. 6.6γ). Το πρώτο κινείται βόρεια με σταθερή ταχύτητα 40 ν.μ/h, ενώ το δεύτερο κινείται ανατολικά με σταθερή ταχύτητα 50 ν.μ/h.

α) Να γράψετε τους τύπους που περιγράφουν τις συναρτήσεις θέσης των δύο πλοίων.

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $D(t)$ των πλοίων μετά από 3 ώρες.



Σχ. 6.6γ

Λύση.

α) Αφού τα πλοία κινούνται με σταθερές ταχύτητες 40 και 50 ν.μ/h, οι συναρτήσεις θέσης θα βρίσκονται με εφαρμογή του τύπου

$$S(t) = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

για $s_0=0$, $a=0$ και $\upsilon_0=40$, 50 αντίστοιχα. Επομένως θα έχουμε $x(t)=40t$, $y(t)=50t$ και $x'(t) = 40$, $y'(t) = 50$ για κάθε $t \geq 0$.

β) Η απόσταση των πλοίων τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο:

$$D(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}$$

οπότε ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης $D(t)$ των πλοίων τη χρονική στιγμή t θα είναι ίσος με:

$$D'(t)=\left(\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}}\left([x(t)]^2+[y(t)]^2\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}}\left(2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)\right)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_0=3$ έχουμε $x'(t_0)=40$, $x(t_0)=40t_0=40\cdot 3=120$, $y'(t_0)=50$, $y(t_0)=50t_0=50\cdot 3=150$, οπότε:

$$D'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{[x(t_0)]^2+[y(t_0)]^2}}=\frac{120\cdot 40+150\cdot 50}{\sqrt{120^2+150^2}}=\frac{12300}{\sqrt{36900}}=64,03.$$

Άρα τα πλοία απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ταχύτητα περίπου 64 ν.μ/h.

Ασκήσεις.

6.6.1. Δύο συναρτήσεις f και g συνδέονται με τη σχέση $f(t)=2e^{3g(t)}+1$. Αν $g(1)=0$ και $g'(1)=1$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f όταν $t=1$.

6.6.2. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα, έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο t να δίνεται από τον τύπο $S(t)=3t^3-\frac{9}{2}t^2+2t+1$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και να προσδιορίσετε πότε το σώμα είναι ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος στις χρονικές αυτές στιγμές;

6.6.3. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $S(t)=s_0$ημωt, όπου t ο χρόνος και τα s_0, ω είναι σταθερές.
α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t.
β) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη του y.
γ) Να αποδείξετε ότι, όταν η επιτάχυνση γίνει 0, τότε το μέτρο της ταχύτητας παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

6.6.4. Η ακτίνα $R(t)$ μιας κυκλικής κηλίδας ρύπανσης μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $R(t)=3t^2+5t+1$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου της κηλίδας, καθώς και του εμβαδού της κατά τη χρονική στιγμή $t=10$ sec.

6.6.5. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει είναι 10 cm^3/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας $R(t)$ του μπαλονιού, όταν η διάμετρός του γίνεται ίση με 5 cm (ο όγκος σφαίρας ακτίνας r δίνεται από τον τύπο $E=4/3\pi r^3$.

6.6.6. Μία σφαιρική μπάλα πάγου που βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας αρχίζει να λιώνει και η επιφάνειά της μειώνεται με ρυθμό 3 cm^2/min. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της διαμέτρου της μπάλας τη χρονική στιγμή που η διάμετρος ισούται με 5 cm (η συνολική επιφάνεια σφαίρας διαμέτρου d δίνεται από τον τύπο $E=\pi d^2$).

6.6.7. Το κόστος παραγωγής, $K(x)$, και η είσπραξη, $E(x)$, από την κατασκευή x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις:

$$K(x)=x^3-80x^2+2400x+1 \text{ και } E(x)=300x,$$

αντίστοιχα. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους της βιομηχανίας είναι θετικός.

6.7 Μερική παράγωγος.

Σε πολλές εφαρμογές, η τιμή που χρησιμοποιούμε για τις συναρτήσεις εξαρτάται από την τιμή περισσότερων της μίας μεταβλητής. Για παράδειγμα ο όγκος ενός κυκλικού κυλίνδρου εκφράζεται συναρτήσει της ακτίνας του r και του ύψους του h μέσω του τύπου

$$V = \pi h r^2.$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται μια συνάρτηση, η οποία απεικονίζει τα στοιχεία του συνόλου $A=\{(r,h): r \in \mathbb{R} \text{ και } h \in \mathbb{R}\}$ σε πραγματικούς αριθμούς μέσω του τύπου $V(r,h) = \pi h r^2$. Ο τύπος αυτός για κάθε τιμή της ακτίνας του r και του ύψους του h μάς δίνει τον όγκο του κυκλικού κυλίνδρου. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα είναι $r=1\ m$ και το ύψος του $h=2\ m$, τότε ο όγκος του κυκλικού κυλίνδρου θα είναι:

$$V(1,2) = \pi \cdot 2 \cdot 1^2 \Rightarrow V(1,2) = 2 \cdot \pi\ m^3.$$

Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται ***συναρτήσεις δύο μεταβλητών***. Όπως και για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, έτσι και για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών θα θεωρούμε ότι έχουν ως πεδίο ορισμού τους το σύνολο όλων εκείνων των δυάδων για τις οποίες έχει νόημα η συνάρτηση.

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή

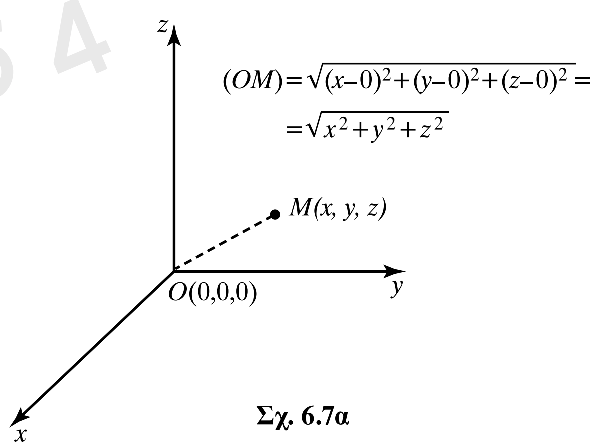
$$A \subseteq \{(x,y): x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Μια διαδικασία (κανόνας) μέσω της οποίας, σε κάθε δυάδα (x,y) αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός z καλείται ***συνάρτηση f δύο μεταβλητών*** με πεδίο ορισμού το A. Ο αριθμός z θα συμβολίζεται με $f(x,y)$ $(z = f(x,y))$ και θα καλείται ***εξαρτημένη μεταβλητή***, ενώ οι μεταβλητές x,y ***ανεξάρτητες***. Ως σύνολο τιμών της συνάρτησης ορίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών τιμών $z = f(x,y) \in \mathbb{R}$ για $(x,y) \in A$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου $V(r,h) = \pi h r^2$, η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το V, ενώ οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι r, h.

Τα παραπάνω γενικεύονται για συναρτήσεις τριών μεταβλητών, τεσσάρων μεταβλητών κ.ο.κ. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να εκφράζει την απόσταση OM του σημείου $M(x,y,z)$ από την αρχή $O(0,0,0)$ ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων συντεταγμένων $Oxyz$ (σχ. 6.7α). Αφού

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Σχ. 6.7α

η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει θα δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Η τιμή της f στο σημείο (1,2,3) είναι προφανώς η απόσταση του σημείου $M(1,2,3)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$ και βρίσκεται ίση με:

$$f(1,2,3)=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\text{, δηλαδή } (OM)=\sqrt{14}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.7.1.

Να βρείτε και να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δύο μεταβλητών

$$f(x,y)=\sqrt{-x^2+y}.$$

Ποιο είναι το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης;

Λύση.

Το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλες τις δυάδες εκείνες (x,y) για τις οποίες ο τύπος της συνάρτησης f μπορεί να εφαρμοστεί και να δώσει ως αποτέλεσμα έναν πραγματικό αριθμό. Επομένως θα πρέπει

$$-x^2+y\geq 0 \Rightarrow y\geq x^2. \tag{6.7.1}$$

Αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $y=x^2$, τότε είναι φανερό από την (6.7.1) ότι ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης παίρνουμε όλα τα σημεία εκείνα που βρίσκονται επάνω ή στο εσωτερικό της παραβολής $y=x^2$ (σχ. 6.7β).

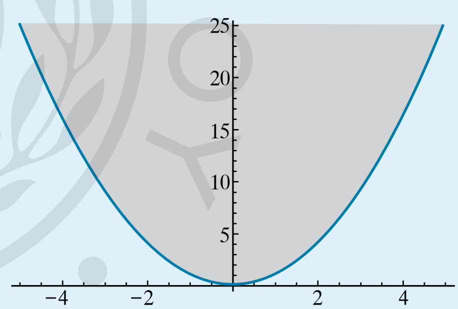
Επιπλέον είναι προφανές ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών, αφού:

$$z=f(x,y)=\sqrt{-x^2+y}\geq 0$$

για κάθε ζεύγος (x,y) με $y\geq x^2$ και επιπλέον, για κάθε $z\geq 0$ μπορούμε να βρούμε (τουλάχιστον ένα) ζεύγος (x,y) με $y\geq x^2$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$z=\sqrt{-x^2+y}\Leftrightarrow -x^2+y=z^2$$

(θα μπορούσαμε, π.χ. να πάρουμε $x=0$, $y=z^2$).



Σχ. 6.7β

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$z=f(x,y)=50-x^2-y^2-xy. \tag{6.7.2}$$

Αν στην παραπάνω συνάρτηση κρατήσουμε σταθερή την ανεξάρτητη μεταβλητή y και παραγωγίσουμε ως προς x, τότε θα έχουμε

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{d}{dx}(50-x^2-y^2-xy)=0-2x-0-y=-2x-y.$$

Ο συμβολισμός $\frac{d}{dx}f(x,y)$ στον παραπάνω τύπο παριστάνει την παράγωγο της $z=f(x,y)$ ως προς x όταν κρατήσουμε το y σταθερό και ονομάζεται ***μερική παράγωγος της f ως προς x.*** Συνήθως, για τη μερική παράγωγο της f ως προς x, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \ \text{ή} \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \ \text{ή} \ f_x(x,y)$$

ή απλούστερα

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ \text{ή} \ f_x \ \text{ή} \ \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Επομένως, για τη συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο (6.7.2) μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -2x - y. \tag{6.7.3}$$

Για την τελευταία συνάρτηση, η οποία προφανώς αποτελεί μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τιμή της σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο (x_0, y_0). Για παράδειγμα η τιμή της $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -2x - y$ στο σημείο $(x_0, y_0) = (1, 2)$ είναι ίση με $-2 \cdot 1 - 2 = -4$. Ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει θα γράφεται ως:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right|_{x=1,\, y=2} = -4 \quad \text{ή απλούστερα} \quad \left.\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right|_{(1,2)} = -4.$$

Γενικά, η ***μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο*** (x_0, y_0) θα συμβολίζεται με

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) \ \text{ή} \ f_x(x_0,y_0) \ \text{ή} \ \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \ \text{ή απλά} \ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Από τον τρόπο που υπολογίζεται η μερική παράγωγος, μπορεί κάποιος εύκολα να αντιληφθεί ότι θα μπορούσε να εκφραστεί ως όριο μέσω του επόμενου τύπου (ο οποίος μοιάζει με τον τύπο ορισμού της παραγώγου μίας μεταβλητής, που αναφέρεται στην παράγραφο 6.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε τη μερική παράγωγο της f ως προς y, η οποία θα συμβολίζεται με:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \ \text{ή} \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \ \text{ή} \ f_y(x,y)$$

ή απλούστερα

$$\frac{\partial f}{\partial y} \ \text{ή} \ f_y \ \text{ή} \ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Έτσι για τη συνάρτηση (6.7.2) θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(50 - x^2 - y^2 - xy) = 0 - 0 - 2y - x = -2y - x,$$

ενώ αν θέλαμε να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο της f ως προς y στο σημείο $(x_0, y_0) = (2,3)$, θα είχαμε:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right|_{(2,3)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(50 - x^2 - y^2 - xy)\right|_{(2,3)} = \left.-2y - x\right|_{(2,3)} = -2 \cdot 3 - 2 = -8.$$

Τα παραπάνω γενικεύονται για συναρτήσεις τριών ή τεσσάρων μεταβλητών ή και γενικότερα, όταν έχουμε n–μεταβλητές. Οι μερικές παράγωγοι είναι αυτές που παίρνουμε όταν σε μια συνάρτηση κρατήσουμε σταθερές όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές, εκτός από μία, και παραγωγίσουμε μόνο ως προς αυτή. Στους υπολογισμούς των μερικών παραγώγων μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους ήδη γνωστούς κανόνες παραγώγισης για συναρτήσεις μίας μεταβλητής (βλ. παράγρ. 6.2).

Σημειώνουμε τέλος ότι, αφού η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης αποτελεί μια νέα συνάρτηση (δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών), θα μπορούσε να ξαναπαραγωγισθεί ως προς τις μεταβλητές που περιλαμβάνει, λαμβάνοντας παραγώγους ανώτερης τάξης. Για παράδειγμα, παραγωγίζοντας την (6.7.3) ως προς x και y παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-2x-y)=-1\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-2x-y)=-2\ .$$

Οι παραπάνω μερικές παράγωγοι συμβολίζονται

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}\quad \text{και}\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\ \text{αντίστοιχα.}$$

Ομοίως θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-2y-x)=-1,\ \ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-2y-x)=-2\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.7.2.

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους της παρακάτω συνάρτησης ως προς κάθε μεταβλητή

$$f(x,y)=e^x\,\text{ημ}\,y.$$

Λύση.

Βρίσκουμε πρώτα την $\frac{\partial f}{\partial x}$ θεωρώντας ότι το ημy είναι σταθερό. Έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(e^x\text{ημ}\,y)=\frac{\partial}{\partial x}(e^x)\cdot\text{ημ}\,y=e^x\,\text{ημ}\,y\,.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ κρατώντας τη μεταβλητή x σταθερά, και έτσι παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\text{ημ}\,y)=e^x\,\frac{\partial}{\partial y}(\text{ημ}\,y)=e^x\,\text{συν}\,y.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.7.3.

Να βρείτε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ της συνάρτησης: $f(x,y)=e^x\ln(x^2+y^2+1)$.

Λύση

Βρίσκουμε τη ζητούμενη παράγωγο θεωρώντας ως σταθερά τη μεταβλητή x και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\ln(x^2+y^2+1))=e^x\,\frac{\partial}{\partial y}(\ln(x^2+y^2+1))=e^x\,\frac{1}{x^2+y^2+1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+1)$$

$$=e^x\,\frac{1}{x^2+y^2+1}\cdot(0+2y+0)=\frac{e^x}{x^2+y^2+1}\cdot 2y=\frac{2ye^x}{1+x^2+y^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.7.4.

Ας υποθέσουμε ότι τρεις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3, βρίσκονται σε παράλληλη σύνδεση, οπότε η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{R_{ολ}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\ .$$

α) Να υπολογίσετε τη μερική παράγωγο $\dfrac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$.

β) Ποια είναι η φυσική ερμηνεία της μερικής παραγώγου $\dfrac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$;

Λύση.

α) Εύκολα προκύπτει η επόμενη έκφραση για την ολική αντίσταση $R_{ολ}$:

$$R_{ολ}=\frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_2+R_1R_3}\ .$$

Θεωρούμε τις μεταβλητές R_2, R_3 σταθερές και παραγωγίζοντας ως προς R_1 παίρνουμε:

$$\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}=R_2R_3\frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}\right)$$

$$=R_2R_3\cdot\frac{\dfrac{\partial}{\partial R_1}(R_1)\cdot(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)-R_1\cdot\dfrac{\partial}{\partial R_1}(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)}{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2}$$

$$=R_2R_3\cdot\frac{1\cdot(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)-R_1\cdot(R_2+0+R_3)}{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2}=R_2R_3\cdot\frac{R_2R_3}{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2}.$$

β) Όπως και στην περίπτωση της συνήθους παραγώγου, που είδαμε στην παράγραφο 6.6, η μερική παράγωγος θα εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης. Ωστόσο, επειδή τώρα η συνάρτηση περιέχει περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, ο ρυθμός μεταβολής αφορά στον τρόπο που μεταβάλλεται η συνάρτηση όταν μεταβληθεί η τιμή της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει (αυτή ως προς την οποία παραγωγίζουμε), ενώ όλες οι άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν αμετάβλητες.

Έτσι, η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$ στο παρόν παράδειγμα, μας δίνει τον ρυθμό μεταβολής της ολικής αντίστασης $R_{ολ}$ ως προς την R_1, όταν κρατήσουμε τις αντιστάσεις R_2 και R_3 σταθερές. Έτσι, θέλοντας να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής της ολικής αντίστασης $R_{ολ}$ ως προς την R_1 όταν $R_1 = 1$ Ohm και $R_2 = 2$ Ohm, εύκολα προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_1}=\frac{1^2\cdot 2^2}{(R_1+2+2R_1)^2}\Rightarrow\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_1}=\frac{4}{(3R_1+2)^2}\ .$$

Αν λοιπόν η R_1 έχει τιμή 1 Ohm και αυξηθεί, τότε ο ρυθμός αύξησης της ολικής αντιστασης $R_{o\lambda}$ θα είναι ίσος με $4/(3\cdot 1+2)^2=4/25$ (εφόσον φυσικά οι αντιστάσεις R_2 και R_3 διατηρήσουν τις τιμές τους R_2=1 Ohm και R_2 =2 Ohm).

Ασκήσεις.

6.7.1. Σε ένα επίπεδο θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων xOy και ένα σταθερό σημείο $M_0\,(x_0,y_0)$. Να γράψετε τη συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση MM_0 ενός σημείου $M\,(x,y)$ από το σημείο $M_0\,(x_0,y_0)$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ποιο το σύνολο τιμών της;

6.7.2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x,y)=xy$ β) $f(x,y)=\sqrt{xy}$ γ) $f(x,y,z)=e^x\sin(yz)$

δ) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2}$ ε) $f(x,y)=\sqrt{e^x-1}$ στ) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

6.7.3. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων ως προς κάθε μεταβλητή.

α) $f(x,y)=x^2+y^2$ β) $f(x,y)=ye^x$ γ) $f(x,y)=4$

δ) $f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ ε) $f(x,y)=e^x\sin y$ στ) $f(x,y)=(xy)^5$

6.7.4. Στις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

α) $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z$ β) $f(x,y,z)=yze^x$ γ) $f(x,y,z)=e^x\sin(yz)$

δ) $f(x,y,z)=\ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ ε) $f(x,y)=(xy)^z$ στ) $f(x,y,z)=(xyz)^5$

6.7.5. Να βρείτε τη μερική παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ για τη συνάρτηση τριών μεταβλητών με τύπο

$$f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}.$$

6.7.6. Δίνεται ότι οι μεταβλητές x, y και r, θ συνδέονται μεταξύ τους με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x=r\cos\theta \quad \text{και} \quad y=r\sin\theta.$$

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\partial x}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \theta}-\dfrac{\partial y}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \theta}=r.$

6.7.7. Για τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)=\dfrac{1}{2}-x^2-y^2$ να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y^2x\frac{\partial f}{\partial y}=-2x(x+y^3)\,.$$

6.7.8. Δίνεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών με τύπο $f(x,y) = 3x^3y^2 + 2xy^3 + x^2 + y^4$.

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

β) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

γ) Να διαπιστώσετε ότι για κάθε x και y ισχύει η ισότητα $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

(δηλ. δεν έχει καμιά σημασία η σειρά με την οποία γίνεται η παραγώγιση για τις μεταβλητές x και y), ενώ δεν ισχύει αντίστοιχη ισότητα ανάμεσα στις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \text{ και } \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο 6 ασχοληθήκαμε με την ενότητα των Μαθηματικών που είναι γνωστή ως Διαφορικός Λογισμός. Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός επίπεδου σχήματος, ώθησε τους μαθηματικούς στην ανακάλυψη ενός νέου κλάδου των Μαθηματικών, του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Το πρόβλημα του εμβαδού μελετήθηκε αρχικά από τον Αρχιμήδη. Οι μέθοδοι που ανέπτυξε, διαπνέονταν από εκπληκτική πρωτοτυπία σκέψης, συνδυασμένη με αυστηρότητα και μεγάλη ικανότητα στην τεχνική των υπολογισμών. Ο Αρχιμήδης εφάρμοσε με επιτυχία τις μεθόδους του για τον κυκλικό δίσκο και για παραβολικά «χωρία». Στο διάστημα που μεσολάβησε από την Αρχαιότητα ως τις αρχές του 17^ου αιώνα υπολογίστηκαν με επιτυχία τα εμβαδά και άλλων πιο πολυπλόκων επιφανειών. Όμως, οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν δεν ήταν γενικές και αντιμετώπιζαν μόνο το συγκεκριμένο πρόβλημα κάθε φορά.

Η ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού βοήθησε στην αντικατάσταση όλων αυτών των ειδικών διαδικασιών υπολογισμού εμβαδού σχημάτων και όγκων στερεών από μία γενική μέθοδο. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθεί η έννοια του ολοκληρώματος (αόριστου και ορισμένου) μιας πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής, θα δοθούν οι βασικές ιδιότητές του και θα παρουσιαστεί ο τρόπος χρήσης του στον υπολογισμό εμβαδών. Στην πορεία της παρουσίασης της σχετικής θεωρίας θα αναλυθούν διάφορες εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στη Φυσική, στην Οικονομία κ.λπ.

7.1 Η έννοια και οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

Σε διάφορα πρακτικά προβλήματα εμφανίζεται η ανάγκη εφαρμογής μιας διαδικασίας που είναι αντίστροφη της παραγώγισης. Πιο συγκεκριμένα, αρκετές φορές μάς δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F, έτσι ώστε να ισχύει $F'(x)=f(x)$ σε ένα διάστημα Δ. Τέτοια προβλήματα είναι για παράδειγμα τα εξής:

α) Η εύρεση της θέσης $S(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστή η ταχύτητά του $\upsilon(t)$, οι οποίες, όπως γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 6, συνδέονται με τη σχέση $S'(t)=\upsilon(t)$.

β) Η εύρεση της τιμής $P(t)$ ενός αγαθού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης της τιμής, ο οποίος όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 6, είναι η παράγωγος $f(t)=P'(t)$ της συνάρτησης $P(t)$.

γ) Η εύρεση του μεγέθους $N(t)$ ενός πληθυσμού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης $f(t)=N'(t)$ του πληθυσμού.

Το κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι ζητάμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε την παράγωγο.

Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό:

> Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. ***Αρχική συνάρτηση*** ή ***αντιπαράγωγος*** ή ***παράγουσα της f στο Δ*** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για την οποία ισχύει:
>
> $$F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F, που να ικανοποιεί τη συνθήκη του παραπάνω ορισμού.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ είναι μια παράγουσα της $f(x)=x^3$ στο $\mathbb{R}$, αφού $(\frac{1}{4}x^4)'=x^3$. Προφανώς, για κάθε σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ισχύει επίσης $(\frac{1}{4}x^4+c)'=x^3$, οπότε και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=\frac{1}{4}x^4+c=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R}$.

> Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:
>
> α) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
>
> β) κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ γράφεται στη μορφή $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$.

Πράγματι, αν F είναι μία παράγουσα της f, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι επίσης παράγουσα της f, αφού θα ισχύει $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$.

Επίσης, αν G είναι μία άλλη παράγουσα της f, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε θα έχουμε:

$$G'(x)=F'(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με όσα αναλύσαμε στην παράγραφο 6.3, θα υπάρχει μία σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται ***αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ*** και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$ (το παραπάνω σύμβολο διαβάζεται «ολοκλήρωμα εφ του x ντε x»). Επομένως, αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, θα έχουμε:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Για παράδειγμα, αφού $(e^x)' = e^x$ και $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \text{και} \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται ***ολοκλήρωση***, ενώ η σταθερά c που εμφανίζεται στον τύπο του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται ***σταθερά ολοκλήρωσης***.

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες 6.2.1, 6.2.2 των παραγώγων βασικών συναρτήσεων και τα αποτελέσματα του παραδείγματος 6.2.5, μπορούμε να δημιουργήσουμε άμεσα τον πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων 7.1.1.

Πίνακας 7.1.1

Αόριστα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων

$\int a dx = ax + c$ (για $a \in \mathbb{R}$)	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \dfrac{1}{\text{συν}^2 x} dx = \text{εφ}x + c$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$	$\int \text{συν}x dx = \text{ημ}x + c$	$\int \dfrac{1}{\text{ημ}^2 x} dx = -\text{σφ}x + c$
$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{a+1} + c$ (για $a \neq -1$)	$\int \text{ημ}x dx = -\text{συν}x + c$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

Οι τύποι του πίνακα 7.1.1 ισχύουν σε κάθε διάστημα, στο οποίο έχουν νόημα οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται στον πίνακα. Για να διαπιστώσουμε την ισχύ των τύπων που δόθηκαν παραπάνω, αρκεί να παραγωγίσουμε το δεξί μέλος και να επαληθεύσουμε ότι προκύπτει ως αποτέλεσμα το αριστερό. Για παράδειγμα, ο τύπος:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{έχει προκύψει από το γεγονός ότι}$$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right)' = \frac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{\alpha+1} + 0 = x^{\alpha}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.1.

Να βρείτε μία συνάρτηση f που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$ και η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ ισούται με x για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x)$ ισούται με την τιμή της παραγώγου $f'(x)$. Επομένως, ζητάμε να ισχύει $f'(x) = x$, οπότε:

$$f(x)=\int x dx=\frac{x^2}{2}+c\ .$$

Για να διέρχεται η f από το σημείο $A(2,4)$ πρέπει να ισχύει $f(2)=4$, δηλαδή $\frac{2^2}{2}+c=4 \Leftrightarrow c=2$,

επομένως
$$f(x)=\frac{x^2}{2}+2\ .$$

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε για το αόριστο ολοκλήρωμα, αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$ θα έχουμε:

$$\int f(x)dx=F(x)+c\ ,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στον τελευταίο τύπο το $f(x)=F'(x)$, προκύπτει ότι

$$\int F'(x)dx=F(x)+c\ .$$

Προέκυψε λοιπόν το επόμενο χρήσιμο αποτέλεσμα:

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει:

$$\int f'(x)dx=f(x)+c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

Αν τώρα F , G είναι παράγουσες των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε θα ισχύει:

$$(F+G)'(x)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$

και

$$(\lambda F)'(x)=\lambda F'(x)=\lambda f(x)$$

για κάθε $x\in\Delta$. Επομένως η συνάρτηση $F+G$ είναι μία παράγουσα της $f+g$ και η λF, $\lambda\in\mathbb{R}$, είναι μία παράγουσα της λf στο Δ. Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύει ότι για το αόριστο ολοκλήρωμα ισχύουν οι επόμενες δύο ιδιότητες:

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε θα έχουν παράγουσα (στο ίδιο διάστημα) και οι συναρτήσεις λf, $\lambda\in\mathbb{R}$ και $f+g$. Τότε θα ισχύουν οι τύποι:

α) $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx,\ \lambda\in\mathbb{R}.$

β) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν για παράδειγμα τα εξής:

$$\int 5x^9dx=5\int x^9dx=5\frac{x^{10}}{10}+c=\frac{x^{10}}{2}+c\ ,$$

$$\int(4e^x-5\text{συν}x)dx=4\int e^xdx-5\int\text{συν}dx=4e^x-5\text{ημ}x+c.$$

Οι τύποι που δόθηκαν στον πίνακα 6.2.3 για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να πάρουμε κάποιους αντίστοιχους τύπους για την ολοκλήρωση σύνθετων συναρτήσεων. ΄Ετσι, γράφοντας τον τύπο:

$$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \text{ στη μορφή } \left(2\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx = \int \left(2\sqrt{g(x)}\right)' = 2\sqrt{g(x)} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Εργαζόμενοι με όμοιο τρόπο μπορούμε, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 6.2.2, να δημιουργήσουμε άμεσα τον πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων σύνθετων συναρτήσεων 7.1.2.

Πίνακας 7.1.2
Αόριστα ολοκληρώματα σύνθετων συναρτήσεων

$\int \frac{g'(x)}{[g(x)]^2}dx = -\frac{1}{g(x)} + c$	$\int e^{g(x)}g'(x)dx = e^{g(x)} + c$
$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$	$\int \text{συν}(g(x))g'(x)dx = \text{ημ}(g(x)) + c$
$\int (g(x))^a g'(x)dx = \frac{(g(x))^{a+1}}{\alpha+1} + c$ (για $a \neq -1$)	$\int \text{ημ}(g(x))g'(x)dx = -\text{συν}(g(x)) + c$

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int 3x^2(x^3+1)^4 dx$, μπορούμε να θέσουμε $g(x)=x^3+1$, οπότε θα έχουμε $g'(x)=3x^2$ και επομένως

$$\int 3x^2(x^3+1)^4 d\,x = \int g'(x)(g(x))^4\,dx = \frac{(g(x))^{4+1}}{4+1} = \frac{(g(x))^5}{5} = \frac{(x^3+1)^5}{5}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.2.

΄Ενα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η ταχύτητά του σε m/min τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t)=t^2(2t+3)+5$. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 3 m από την αρχή των αξόνων, να βρείτε τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min.

Λύση.

Όπως γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 6, ισχύει $u(t) = s'(t)$, όπου με $S(t)$ έχουμε συμβολίσει τη συνάρτηση θέσης του κινητού. Σύμφωνα, την εκφώνηση θα έχουμε:

$$S'(t) = t^2(2t+3) + 5 = 2t^3 + 3t^2 + 5$$

και επομένως

$$\int S'(t)dt = \int (2t^3 + 3t^2 + 5)dt = \int 2t^3dt + \int 3t^2dt + \int 5dt = 2\int t^3dt + 3\int t^2dt + \int 5dt = 2\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^3}{3} + 5t + c.$$

Άρα:

$$S(t) = \frac{1}{2}t^4 + t^3 + 5t + c$$

και αφού $S(0)=3$, θα πρέπει $0+c=3$, δηλαδή $c=3$, οπότε τελικά

$$S(t)=\frac{1}{2}t^4+t^3+5t+3.$$

Η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min θα βρίσκεται με εφαρμογή του τελευταίου τύπου για $t=2$. Έτσι προκύπτει:

$$S(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^4+2^3+5\cdot 2+3=29 \text{ m}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.3.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx$, β) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^2-4x+3}\,dx$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1,3\}$ γράφεται $f(x)=\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}$ και μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα από απλά κλάσματα (με παρονομαστές τους όρους $x-1$ και $x-3$) ως εξής:

$$\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-3}.$$

Για να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, προχωράμε σε απαλοιφή παρονομαστών, οπότε θα έχουμε

$$3x-5=\alpha(x-3)+\beta(x-1) \Leftrightarrow 3x-5=(\alpha+\beta)x+(-3\alpha-\beta).$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,3\}$ θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ -3\alpha-\beta=-5 \end{cases}$$

και λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\alpha=1, \beta=2$. Επομένως:

$$\int\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}\right)dx=\int\frac{1}{x-1}dx+2\int\frac{1}{x-3}dx.$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα με εφαρμογή του δεύτερου τύπου του πίνακα 7.1.2 για $g(x)=x-1$ και $g(x)=x-3$ αντίστοιχα, οπότε παίρνουμε τελικά

$$\int\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}dx=\ln|x-1|+2\ln|x-3|+c=\ln(|x-1|(x-3)^2)+c.$$

β) Εκτελώντας τη διαίρεση του πολυωνύμου $2x^2-5x+1$ με το πολυώνυμο x^2-4x+3, βρίσκουμε

$$2x^2-5x+1=2(x^2-4x+3)+(3x-5)$$

οπότε θα έχουμε:

$$\frac{2x^2-5x+1}{x^2-4x+3}=2+\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$$

Επομένως:

$$\int\frac{2x^2-5x+1}{x^2-4x+3}\,dx=\int 2dx+\int\frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx=2x+\ln(|x-1|\,(x-3)^2)+c.$$

Ο τρόπος που εργαστήκαμε στο παράδειγμα αυτό, ο οποίος ονομάζεται ***μέθοδος των μερικών κλασμάτων***, μας επιτρέπει τον υπολογισμό οποιωνδήποτε ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων, των οποίων ο παρονομαστής μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων (π.χ. αν είναι τριώνυμο με δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, όπως ήταν στο παράδειγμα). Μπορεί επίσης να γενικευθεί στην περίπτωση που ο παρονομαστής γράφεται ως γινόμενο πολυωνύμων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Ασκήσεις.

7.1.1. Ο αριθμός $N(t)$, σε εκατομμύρια, των παθογόνων μικροοργανισμών που βρίσκονται σε μια μολυσμένη λίμνη, αυξάνεται με ρυθμό $N'(t)=e^t$ ανά ώρα. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού των μικροοργανισμών στις πρώτες δύο ώρες.

7.1.2. Η ταχύτητα $\upsilon(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t)=\text{ημ}\,t$. Να βρείτε τη συνάρτηση θέσης $S(t)$ του κινητού και να διαπιστώσετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει $S(t)=-a(t)$, όπου $a(t)$ είναι η επιτάχυνση του κινητού.

7.1.3. Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι παράγουσες της ίδιας συνάρτησης:

α) $F(x)=x^2-3x+2$ β) $F(x)=e^x-2$ γ) $F(x)=e^{2x+1}$

δ) $F(x)=e^x+2$ ε) $F(x)=x(x-3)$ στ) $F(x)=e^{2x}$

ζ) $F(x)=e^{2x}-2e$ η) $F(x)=e^{2x}(e+e^{-2x})$ θ) $F(x)=-x^2+3x-2$

7.1.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int(4x^3+2\text{ημ}x-\text{συν}x)dx$ β) $\int(x^{99}-4x^{39}+3x^{29})dx$ γ) $\int x^3\sqrt{x}dx$

δ) $\int\left(5e^x-\frac{2+x^2}{x^3}\right)dx$ ε) $\int\left(\frac{3}{\text{ημ}^2x}-\frac{2}{\text{συν}^2x}\right)dx$ στ) $\int\frac{x-3}{x^2-9}\,dx$

ζ) $\int(3^{x+2}-4^{x-1})\,dx$ η) $\int\frac{x^2-3x+2}{x^2}dx$ θ) $\int\frac{x^2-x}{x^3}dx$

7.1.5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{\text{συν}x-\text{ημ}x}{e^x},\qquad g(x)=\frac{\text{ημ}x}{e^x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{\text{συν}x-\text{ημ}x}{e^x}dx$.

7.1.6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x+8}$.

α) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, ώστε να ισχύει $f(x)=\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\beta}{x-4}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx=\int \dfrac{x-3}{x^2-6x+8}dx$

7.1.7. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 7.1.2.

α) $\int 2x(x^2+3)^6dx$ β) $\int \dfrac{4x^3+3}{x^4+3x+2}dx$ γ) $\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx$

δ) $\int \text{συν}x\, e^{\text{ημ}x}dx$ ε) $\int e^x \text{συν}e^x dx$ στ) $\int (2e^x+1)(2e^x+x)^{10}dx$

7.1.8. Να βρείτε μια συνάρτηση f, της οποίας η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ είναι σταθερή για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και επιπλέον ικανοποιεί τις συνθήκες $f(0)=f'(0)=1$ και $f(1)=4$.

7.1.9. Να βρείτε μία συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ να ισούται με $3x^2+2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

7.1.10. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x}dx$ β) $\int \dfrac{9x^2+3x-1}{9x^2+3x-2}dx$ γ) $\int \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}dx$

δ) $\int \left(5e^x-\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)dx$ ε) $\int \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-9}dx$ στ) $\int \dfrac{2x}{x^2+9}dx$

7.2 Μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος.

Αν θεωρήσουμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g σε ένα διάστημα Δ, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης του γινομένου συναρτήσεων θα έχουμε:

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\ \text{για κάθε } x\in\Delta.$$

Επομένως

$$\int f(x)g'(x)dx=\int (f(x)g(x))'dx-\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c,$$

αφού

$$\int (f(x)g(x))'dx=\int f(x)g(x)dx+c.$$

Παραλείποντας τη σταθερά c (αφού το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους περιέχει ήδη μία σταθερά ολοκλήρωσης) καταλήγουμε στον επόμενο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός ως ***τύπος της παραγοντικής ολοκληρώσης*** ή της ***ολοκλήρωσης κατά παράγοντες***.

Παραγοντική ολοκλήρωση.

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται όταν το ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπολογίζεται ευκολότερα από το πρώτο, για παράδειγμα όταν η $f(x)$ είναι μια δύναμη του x, οπότε με την παραγώγισή της θα προκύπτει μικρότερη δύναμη.

Έτσι, αν θέλαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int xe^{2x}dx$, θα μπορούσαμε να γράψουμε τον όρο e^{2x} στη μορφή $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$, και χρησιμοποιώντας τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης να πάρουμε:

$$\int xe^{2x}dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int (x)'\frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

οπότε

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$$

Ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης μπορεί να απλοποιήσει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int P(x)e^{\lambda x}dx\,, \quad \int P(x)\eta\mu(\lambda x)dx\,, \quad \int P(x)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx, \quad \int P(x)\ln(\lambda x)dx,$$

όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x και λ ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός, καθώς επίσης και ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \eta\mu(ax)e^{\lambda x}dx, \quad \int \sigma\upsilon\nu(ax)e^{\lambda x}dx.$$

Στα επόμενα δύο παραδείγματα εξηγείται αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθούμε για τέτοιους υπολογισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 7.2.1.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int (x^2+x)e^x dx$ β) $\int (x^2+2x+1)\ln x dx$ γ) $\int x\eta\mu 3x dx$

Λύση.

α) Αφού $(e^x)'=e^x$, θα έχουμε:

$$\int (x^2+x)e^x dx = \int (x^2+x)(e^x)'dx = (x^2+x)e^x - \int (x^2+x)'e^x dx = (x^2+x)e^x - \int (2x+1)e^x dx\,.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για το τελευταίο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\int (2x+1)e^x dx = \int (2x+1)(e^x)'dx = (2x+1)e^x - \int (2x+1)'e^x dx =$$

$$= (2x+1)e^x - \int (2x+1)'e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + c$$

οπότε τελικά βρίσκουμε:

$$\int (x^2+x)e^x dx = (x^2+x)e^x - ((2x+1)e^x - 2e^x + c) = (x^2-x+1)e^x + c_1.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πολλαπλασιασμός ή η πρόσθεση σταθερών οδηγούν επίσης σε σταθερές ποσότητες. Για τον λόγο αυτό, κατά τον επιμέρους υπολογισμό ολοκληρωμάτων θα μπορούσαμε να παραλείπουμε τις σταθερές και απλά να προσθέτουμε μια σταθερά c στην τελική έκφραση που βρίσκουμε.

β) Γράφοντας τον όρο x^2+2x+1 στη μορφή $(\frac{1}{3}x^3+x^2+x)'$ παίρνουμε:

$$\int (x^2+2x+1)\ln x dx = \int (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)'\ln x dx = (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)\ln x - \int (\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)(\ln x)'dx$$

και αφού
$$\int(\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)(\ln x)'dx=\int\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2+x}{x}dx=\int(\tfrac{1}{3}x^2+x+1)dx=\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+x+c$$

έχουμε τελικά:
$$\int(x^2+2x+1)\ln x dx=(\tfrac{1}{3}x^3+x^2+x)\ln x-(\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+x+c)$$

γ) Γράφοντας τον όρο ημ3x στη μορφή $(-\tfrac{1}{3}\text{συν}3x)'$ παίρνουμε:

$$\int x\text{ημ}3x dx=\frac{1}{3}\int x(-\text{συν}3x)'dx=-\frac{1}{3}x\text{συν}3x+\frac{1}{3}\int\text{συν}3x dx=-\frac{1}{3}x\text{συν}3x+\frac{1}{9}\text{ημ}3x+c\ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.2.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^{2x}\text{ημ}(4x)dx$.

Λύση.

Θέτοντας $I=\int e^{2x}\text{ημ}(4x)dx$ μπορούμε να πάρουμε διαδοχικά

$$I=\int(\tfrac{1}{2}e^{2x})'\text{ημ}(4x)dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\text{ημ}(4x)-\int e^{2x}(\text{ημ}(4x))'dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\text{ημ}(4x)-2\int e^{2x}\text{συν}(4x)dx=\frac{1}{2}e^{2x}\text{ημ}(4x)-\int(e^{2x})'\text{συν}(4x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\text{ημ}(4x)-\left[e^{2x}\text{συν}(4x)-\int e^{2x}\ (\text{συν}(4x))'dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\text{ημ}(4x)-e^{2x}\text{συν}(4x)-4\int e^{2x}\text{ημ}(4x)dx\ .$$

Επομένως έχουμε:
$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\text{ημ}(4x)-e^{2x}\text{συν}(4x)-4I$$

και λύνοντας την τελευταία ισότητα ως προς I βρίσκουμε

$$I=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\text{ημ}(4x)-e^{2x}\text{συν}(4x)\right).$$

Αν θέλουμε να δώσουμε τύπο για όλες τις παράγουσες της συνάρτησης που πρέπει να ολοκληρώσουμε, θα πρέπει να γράψουμε:

$$\int e^{2x}\text{ημ}(4x)dx=\frac{1}{10}e^{2x}\text{ημ}(4x)-\frac{1}{5}e^{2x}\text{συν}(4x)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Θα αναλύσουμε στη συνέχεια μια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων που έχουν ή μπορούν να λάβουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$, όταν για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε μία παράγουσα της F. Αφού για τις f, F ισχύει η σχέση $F'=f$, για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $F(g(x))=(F\circ g)(x)$ θα έχουμε

$$(F(g(x))')=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)\,,$$

οπότε το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει παίρνει τη μορφή

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int F'(g(x))g'(x)dx = \int (F(g(x)))'dx = F(g(x)) + c$$

και θέτοντας $u=g(x)$ έχουμε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(u) + c = \int f(u)du\ .$$

Έτσι φτάνουμε στον επόμενο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός ως ***τύπος της ολοκλήρωσης με τη μέθοδο της αντικατάστασης*** ή απλά ***ολοκλήρωση με αντικατάσταση***.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,\ \text{όπου } u=g(x) \text{ και } du=g'(x)dx.$$ [1]

Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα $\int (3x^2+2)\,\eta\mu(x^3+2x+1)dx$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα θέτοντας $u=x^3+2x+1$, οπότε $du=(x^3+2x+1)'dx=(3x^2+2)dx$ και επομένως θα έχουμε διαδοχικά

$$\int (3x^2+2)\,\eta\mu(x^3+2x+1)\,dx = \int \eta\mu(u)du = -\sigma\upsilon\nu u + c = -\sigma\upsilon\nu(x^3+2x+1)+c.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα φτάναμε αν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο $\int \eta\mu(g(x))\cdot g'(x)dx = -\sigma\upsilon\nu(g(x))+c$ του πίνακα 7.1.2 για $g(x)=x^3+2x+1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.3.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int x\eta\mu(x^2+\frac{\pi}{3})dx$ β) $\int x(x-2)(x^3-3x^2+1)^{19}dx$ γ) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(1/x)}{x^2}dx$

Λύση.

α) Θέτουμε $u=x^2+\frac{\pi}{3}$, οπότε $du=(x^2+\frac{\pi}{3})'dx=2xdx$ και έτσι παίρνουμε:

$$\int x\eta\mu(x^2+\frac{\pi}{3})dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu u du = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu u + c = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(x^2+\frac{\pi}{3})+c\ .$$

β) Θέτουμε $u=x^3-3x^2+1$, οπότε $du=(x^3-3x^2+1)'dx=3x(x-2)dx$, και το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει παίρνει τη μορφή:

$$\int x(x-2)(x^3-3x^2+1)^{19}dx = \frac{1}{3}\int u^{19}du = \frac{1}{3}\frac{u^{20}}{20}+c = \frac{1}{60}(x^3-3x^2+1)^{20}+c\ .$$

γ) Θέτουμε $u=\frac{1}{x}$, οπότε $du=(\frac{1}{x})'dx=-\frac{1}{x^2}dx$, και θα έχουμε:

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu(1/x)}{x^2}dx = -\int \sigma\upsilon\nu u du + c = -\eta\mu u + c = -\eta\mu(1/x)+c\ .$$

---

1. Η ποσότητα $du=dg(x)$ λέγεται ***διαφορικό*** της συνάρτησης $g(x)$ και μπορεί να ερμηνευθεί ως η μεταβολή της συνάρτησης $g(x)$ όταν το x μεταβληθεί κατά dx. Πιο συγκεκριμένα, για πολύ μικρές τιμές του dx ισχύει $g(x+dx)-g(x)\cong g'(x)\,dx=dg(x)$.

Ασκήσεις.

7.2.1. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με χρήση του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

α) $\int x^2 e^{-2x} dx$ β) $\int (x^2+x+1)e^{-3x} dx$ γ) $\int x^{11}\ln x dx$ δ) $\int e^{-3x}\eta\mu 2x dx$

7.2.2. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με χρήση του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

α) $\int \theta^2 \eta\mu 3\theta d\theta$ β) $\int u\sigma\upsilon\nu 5u du$ γ) $\int (2t^2+3t)\ln t dt$

7.2.3. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

α) $\int x\eta\mu 5x^2 dx$ β) $\int (x^2-2x+3)^9(x-1)dx$ γ) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$. δ) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

ε) $\int \sigma\upsilon\nu\theta\cdot e^{-\eta\mu\theta}d\theta$ στ) $\int \frac{x+2}{(x^2+4x)^5}dx$ ζ) $\int x\sqrt{9-x^2}dx$ η) $\int te^{-t^2}dt$

7.2.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα.

α) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ β) $\int x^2 e^{-x^3}dx$ γ) $\int e^{2x+1}\eta\mu(3x)dx$

δ) $\int x^5 e^{-x}dx$ ε) $\int e^{-2x}\eta\mu(5x)dx$ στ) $\int \frac{x}{x^2+1}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

7.2.5. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών τύπων:

$$\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\ ,\quad \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\ ,$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\ .$$

α) $\int \eta\mu(20x)\sigma\upsilon\nu(10x)dx$ β) $\int \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(3x)dx$ γ) $\int \eta\mu(3x)\eta\mu(5x)dx$

7.2.6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Διαπιστώστε ότι $f(x+dx)-f(x)=2x\,dx+(dx)^2$ θεωρώντας ότι το dx παίρνει πολύ μικρές τιμές.

7.3 Η έννοια και οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Έστω f μια ***συνεχής*** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία λαμβάνει μη αρνητικές τιμές, δηλαδή ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Προκειμένου να προσεγγίσουμε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=a, x=\beta$, θα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής:

α) Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν υποδιαστήματα, ίσου πλάτους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, χρησιμοποιώντας τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_\nu=\beta$. Μια τέτοια επιλογή σημείων ονομάζεται (ομοιόμορφη) ***διαμέριση*** του διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

β) Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\varkappa-1},x_\varkappa]$, $\varkappa=1,2,...,\nu$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο $\xi_\varkappa$. Τα σημεία ξ_1, ξ_2,..., ξ_ν ονομάζονται ***ενδιάμεσα σημεία*** της διαμέρισης. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\varkappa)$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου αυτού (σχ. 7.3α) θα είναι ίσο με:

$$E_\varkappa=f(\xi_\varkappa)\Delta x$$

γ) Θεωρούμε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που σχηματίσαμε στο (β), δηλαδή το

$$R_\nu = E_1 + E_2 + \ldots + E_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x, \qquad (7.3.1)$$

το οποίο προφανώς γράφεται και στην εξής μορφή $R_\nu = [f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$.

Είναι φανερό ότι, όσο το πλήθος των σημείων ν της διαμέρισης αυξάνεται, το άθροισμα R_ν θα προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου Ω. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι το R_ν, όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα (οπότε το πλάτος $\Delta x = (\beta - \alpha)/\nu$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό, δηλ. τείνει στο μηδέν) λαμβάνει μια «οριακή τιμή» που είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των σημείων $\xi_\varkappa$. Η οριακή αυτή τιμή, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty} R_\nu = I$, ονομάζεται ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με:

$$I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

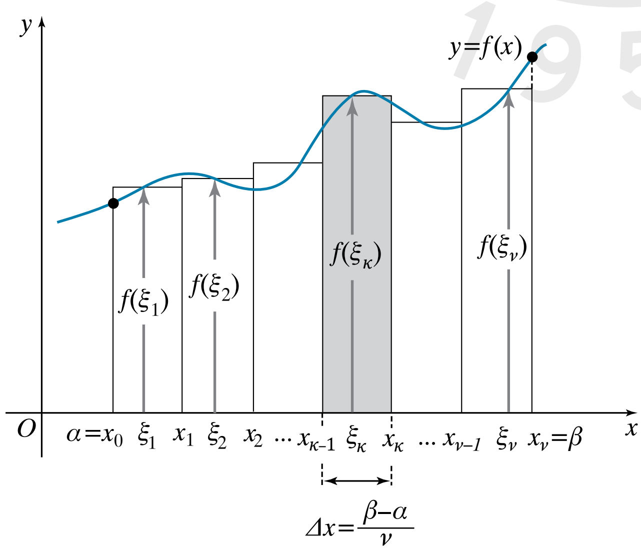
και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το α στο β». Ο τρόπος ορισμού του ολοκληρώματος που παρουσιάστηκε παραπάνω προτάθηκε από τον Riemann και για τον λόγο αυτό το άθροισμα (7.3.1) είναι γνωστό ως άθροισμα Riemann και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ονομάζεται ***ολοκλήρωμα Riemann***.

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz. Οι αριθμοί α και β ονομάζονται ***όρια της ολοκλήρωσης***. Η λέξη «όρια» που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 5, αφού εδώ μας δείχνουν απλά από ποιο μέχρι ποιο σημείο εξετάζουμε τη συνάρτηση f.

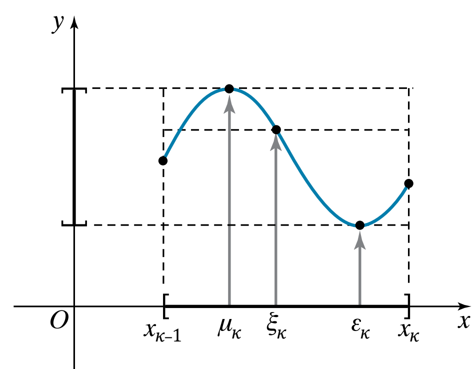
Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$, $\int_\alpha^\beta f(u)du$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα, που είναι πραγματικός αριθμός (σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που γνωρίσαμε στην παράγραφο 7.1, το οποίο παριστάνει ένα σύνολο συναρτήσεων).

Ένας δεύτερος τρόπος προσέγγισης της έννοιας του ολοκληρώματος μιας μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ προκύπτει αν, αντί να πάρουμε τυχαία ενδιάμεσα σημεία της διαμέρισης, θεωρήσουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$, $\varkappa = 1,2,\ldots,\nu$ τα σημεία $\varepsilon_\varkappa, \mu_\varkappa$, στα οποία η συνάρτηση παίρνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή αντίστοιχα (τέτοια σημεία υπάρχουν πάντοτε σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής που αναφέραμε στην παράγραφο 5.8). Τότε θα έχουμε (σχ. 7.3β):

$$f(\varepsilon_\varkappa) \le f(\xi_\varkappa) \le f(\mu_\varkappa)$$



Σχ. 7.3α



Σχ. 7.3β

οπότε για το εμβαδόν $E_\kappa = f(\xi_\kappa)\Delta x$ του ορθογωνίου που έχει βάση Δx και ύψος $f(\xi_\kappa)$ θα ισχύει η ανισότητα:

$$f(\varepsilon_\kappa)\Delta x \le f(\xi_\kappa)\Delta x \le f(\mu_\kappa)\Delta x \Leftrightarrow f(\varepsilon_\kappa)\Delta x \le E_\kappa \le f(\mu_\kappa)\Delta x$$

(η ίδια ανισότητα ισχύει αν στη θέση του E_κ θεωρήσουμε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \mu_\kappa$ και $x = \varepsilon_\kappa$.

Επομένως για τα αθροίσματα:

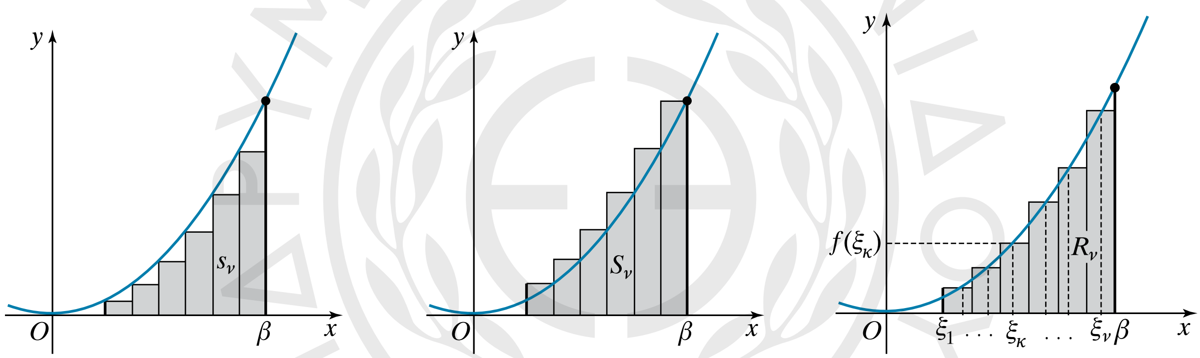
$$s_\nu = f(\varepsilon_1)\Delta x + f(\varepsilon_2)\Delta x + \cdots + f(\varepsilon_\nu)\Delta x, \;\; S_\nu = f(\mu_1)\Delta x + f(\mu_2)\Delta x + \cdots + f(\mu_\nu)\Delta x \qquad (7.3.2)$$

μπορούμε να γράψουμε τις ανισότητες $s_\nu \le R_\nu \le S_\nu$ και $s_\nu \le E(\Omega) \le S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι, όσο το πλήθος των σημείων ν της διαμέρισης αυξάνεται (οπότε το πλάτος $\Delta x = (\beta - \alpha)/\nu$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό), τα αθροίσματα s_ν, S_ν πλησιάζουν προς την ίδια «οριακή τιμή», δηλαδή $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} R_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu = E(\Omega)$.

Έτσι ξαναφτάνουμε στο ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, που έχουμε εισάγει προηγουμένως μέσω του αθροίσματος R_ν.

Τα παραπάνω γίνονται πιο εύκολα κατανοητά από το σχήμα 7.3γ, στο οποίο θεωρήσαμε μια γνήσια μονότονη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.



Σχ. 7.3γ

Από τον τρόπο που ορίστηκε το ολοκλήρωμα της ***μη αρνητικής συνεχούς*** συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι φανερό ότι:

Αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$.

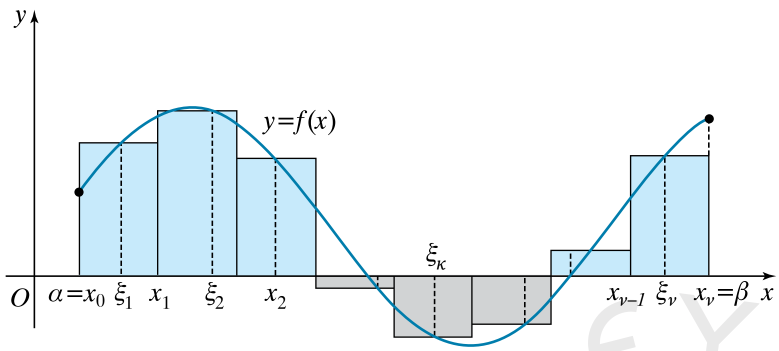
Σημειώνουμε ότι, αν η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι γνήσια θετικό, δηλαδή ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$$

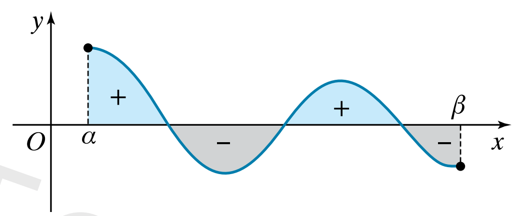
Στην περίπτωση που έχουμε μία συνεχή, αλλά όχι απαραίτητα μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, μπορούμε και πάλι να θεωρήσουμε τα αθροίσματα (7.3.1), (7.3.2), για τα οποία θα ισχύει επίσης η ανισότητα $s_\nu \le R_\nu \le S_\nu$. Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση αυτή, τα αθροίσματα s_ν, R_ν, S_ν πλησιάζουν προς την ίδια «οριακή τιμή», όταν το πλήθος των σημείων ν της διαμέρισης αυξάνεται (οπότε το πλάτος $\Delta x = (\beta - \alpha)/\nu$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό). Έτσι ορίζεται το ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** μιας οποιασδήποτε ***συνεχούς*** συνάρτησης f από το α στο β. Στην περίπτωση αυτή όμως, όπως μπορούμε εύκολα να δούμε, το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.3δ και 7.3ε)[2].



Σχ. 7.3δ



Σχ. 7.3ε

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εισήχθηκε παραπάνω μόνο για την περίπτωση που ισχύει $\alpha<\beta$ (αλλιώς δεν έχει νόημα να μιλάμε για διάστημα $[\alpha, \beta]$). Μπορούμε ωστόσο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha=\beta$ ή $\alpha>\beta$, δεχόμενοι τις εξής συμβάσεις:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx, \text{ για } \alpha>\beta.$$

Θα αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στους υπολογισμούς της τιμής του χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στον ορισμό του (ο οποίος είναι γενικά δύσχρηστος).

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ και $\alpha, \beta, \gamma, \in\Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ (σχ. 7.3στ). Αν συμβολίσουμε με Ω το χωρίο $A\Gamma\Delta Z$, με Ω_1 το $ABEZ$ και με Ω_2 το $B\Gamma\Delta E$, είναι φανερό ότι ισχύει $E(\Omega)= E(\Omega_1)+E(\Omega_2)$.

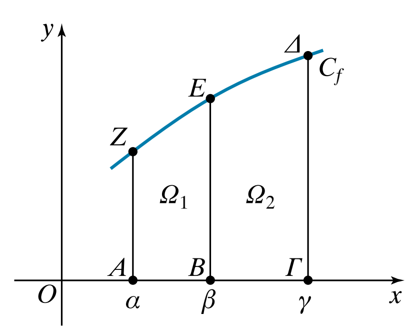
Όμως

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx, \quad E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \; E(\Omega_2) = \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx,$$

οπότε θα έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για ***οποιαδήποτε*** σημεία $\alpha, \beta, \gamma \in\Delta$ (ανεξάρτητα της διάταξής τους) και για ***οποιαδήποτε*** συνεχή συνάρτηση f. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα:



Σχ. 7.3στ

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in\Delta$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

2. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε παραπάνω για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μπορεί να ακολουθηθεί και για ορισμένες συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς, π.χ. για μονότονες συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ωστόσο, στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου θα περιοριστούμε στη μελέτη ολοκληρωμάτων συνεχών μόνο συναρτήσεων.

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος μπορεί να αποδειχθεί και το παρακάτω αποτέλεσμα, που αφορά στο ολοκλήρωμα του αθροίσματος δύο συναρτήσεων και του γινομένου συνάρτησης επί σταθερό αριθμό.

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε ισχύουν οι τύποι:

α) $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$

β) $\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+g(x)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

Όπως είδαμε προηγουμένως, για κάθε μη αρνητική συνεχή συνάρτηση f ($f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$) έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=E(\Omega)\geq 0.$$

Αν τώρα f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, θα έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(g(x)-f(x))dx\geq 0,$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$

Επομένως, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$. Τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$

Τέλος αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ θα ισχύει $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$. Επομένως:

$$\int_{\alpha}^{\beta}(-|f(x)|)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad -\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$$

απ' όπου προκύπτει η ανισότητα

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|\leq\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx.$$

Επομένως, αποδείχτηκε το εξής αποτέλεσμα:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει η ανισότητα[3]:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|\leq\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx.$$

3. Η ανισότητα αυτή είναι αντίστοιχη με τη γνωστή τριγωνική ανισότητα $|\alpha_1+\alpha_2|\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|$ ή καλύτερα, με τη γενίκευση της $|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa|\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\kappa|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3.1.

Δίνεται ότι $\int_1^2 f(x)dx = 2$, $\int_1^4 f(x)dx = 1$ και $\int_1^2 g(x)dx = 4$.

α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 [3f(x)-2g(x)]dx$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 |3f(x)-2g(x)|dx \geq 2$.

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_2^4 f(x)dx$.

Λύση.

α) Έχουμε:

$$\int_1^2 [3f(x)-2g(x)]dx = \int_1^2 3f(x)dx + \int_1^2 (-2)g(x)dx = 3\int_1^2 f(x)dx - 2\int_1^2 g(x)dx = 3\cdot 2 + (-2)\cdot 4 = -2.$$

β) Έχουμε: $\left|\int_1^2 [3f(x)-2g(x)]dx\right| \leq \int_1^2 |3f(x)-2g(x)|dx$, οπότε $\int_1^2 |3f(x)-2g(x)|dx \geq |-2| = 2$.

γ) Έχουμε: $\int_2^4 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -2+1 = -1$.

Ασκήσεις.

7.3.1. Να αποδείξετε ότι α) $\int_1^5 \ln x^2 dx + 3\int_5^1 \ln\frac{1}{x}dx = 5\int_1^5 \ln x dx$, β) $\int_0^\pi ημ^2 x dx + \int_\pi^0 (1-συν^2 x)dx = 0$.

7.3.2. Αν $\int_1^{10} f(x)dx = 5$, $\int_3^{10} f(x)dx = 2$ και $\int_8^{10} f(x)dx = 13$, να υπολογίσετε τις τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_1^3 f(x)dx$, $\int_3^8 f(x)dx$, $\int_1^8 f(x)dx$.

7.3.3. Αν $\int_0^3 f(x)dx = -1$ και $\int_0^3 g(x)dx = 2$, να υπολογίσετε τις τιμές των επόμενων ολοκληρωμάτων.

α) $\int_0^3 2f(x)dx$ β) $\int_0^3 (-3)g(x)dx$ γ) $\int_0^3 (2f(x)-3g(x))dx$

δ) $\int_3^0 (2f(x)+g(x))dx$ ε) $\int_3^0 f(x)dx + \int_0^3 g(x)dx$ στ) $-3\int_3^0 f(x)dx + 2\int_0^3 g(x)dx$

7.3.4. Δίνεται μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να γράψετε στη μορφή $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ τις επόμενες παραστάσεις:

α) $\int_1^2 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx$ β) $\int_{-1}^5 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx$

γ) $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx + \int_5^{10} f(x)dx$ δ) $\int_{-3}^1 f(x)dx - \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_1^6 f(x)dx$

7.3.5. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ανισότητες:

α) $\int_{-5}^5 (x^2+1)dx \geq 0$ β) $\int_1^3 \ln x dx \geq 0$

γ) $\int_1^2 x^3dx \geq \int_1^2 x^2dx \geq \int_1^2 xdx$ δ) $\int_{-5}^5 (x^2-5x+9)dx \geq 0$

ε) $\int_{1/2}^1 \ln x dx \leq 0$ στ) $\int_0^1 x^3dx \leq \int_0^1 x^2dx \leq \int_0^1 xdx$

7.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μέχρι το σημείο αυτό, παρότι αναφέραμε διάφορες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε κάποια ολοκληρώματα όταν γνωρίζουμε κάποια άλλα, δεν έχουμε δει τρόπους υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος μιας δεδομένης συνάρτησης (με εξαίρεση τον τύπο του ορισμού, ως οριακή τιμή αθροισμάτων, ο οποίος είναι δύσχρηστος). Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού που θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή θα μας δώσει έναν αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων, χωρίς τη χρήση του ορισμού.

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f συνεχή σε ένα διάστημα Δ και έστω α ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ (όχι απαραίτητα άκρο του Δ). Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση F με τύπο:

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt,\ x\in\Delta. \tag{7.4.1}$$

Αποδεικνύεται (η απόδειξη παραλείπεται) ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το διάστημα Δ και ότι η παράγωγός της είναι ίση με την f, δηλαδή ότι ισχύει:

$$F'(x)=f(x),\quad x\in\Delta \tag{7.4.2}$$

ή ισοδύναμα συνδυάζοντας τις (7.4.1), (7.4.2),

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x),\quad x\in\Delta. \tag{7.4.3}$$

Από τον τύπο (7.4.3) και τον τύπο παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$ για την οποία έχει νόημα η σύνθεση των f και g, θα ισχύει και ο γενικότερος τύπος:

$$\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)'=f(g(x))\cdot g'(x). \tag{7.4.4}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (7.4.2), η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει $F(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f(t)dt=0$ και $F(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt$, οπότε:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta)-F(\alpha). \tag{7.4.5}$$

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως ***θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού (ή απειροστικού) λογισμού***, δείχνει ότι θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ μέσω του τελευταίου τύπου, ακόμη και αν αντί της F χρησιμοποιούσαμε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Πράγματι, αφού η G είναι παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, και η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι επίσης παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $G(x) = F(x) + c$. Θέτοντας στην τελευταία $x = \alpha$ και $x = \beta$ παίρνουμε αντίστοιχα:

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c \Leftrightarrow c = G(\alpha),$$

$$G(\beta) = F(\beta) + c = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + c \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - c.$$

Επομένως τελικά θα έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Συνήθως η διαφορά $G(\beta) - G(\alpha)$ θα συμβολίζεται με $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε ο τύπος του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού παίρνει τη μορφή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} \text{ όπου } G(x) = \int f(x)dx.$$

Για διευκόλυνση κατά την εφαρμογή του τελευταίου τύπου που βρήκαμε παρατίθεται ο πίνακας 7.4.1 (έχει παραλειφθεί η σταθερά c), ο οποίος προκύπτει άμεσα από τον πίνακα 7.1.1.

Πίνακας 7.4.1
Πίνακας παραγουσών (ή αρχικών) συναρτήσεων

f(x)	$x^{\alpha}, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	συνx	ημx	$\frac{1}{\text{συν}^2 x}$	$\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$	α^x
Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	ημx	−συνx	εφx	−σφx	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}$

Σημειώνεται ότι οι τύποι της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής που αναφέραμε στην παράγραφο 7.2 (για αόριστα ολοκληρώματα) λαμβάνουν, για το ορισμένο ολοκλήρωμα, την επόμενη μορφή:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ όπου $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.1.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta-\alpha)$.

Λύση.

Μία παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης $f(x)=c$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι η $F(x)=cx$. Επομένως:

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = [cx]_{\alpha}^{\beta} = c\beta - c\alpha = c(\beta-\alpha).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.2.

Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int_3^9 x^2 dx$, $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ $\int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}x dx$, β) $\int_1^2 \frac{x^2+2x-3}{x}dx$, γ) $\int_1^4 |x-3|dx$

Λύση.

α) Χρησιμοποιώντας τα αόριστα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων του πίνακα 7.1.1 παίρνουμε:

$$\int_3^9 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^9 = \frac{9^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 243 - 9 = 234, \quad \int_1^3 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}x dx = [-\text{συν}x]_{-\pi}^{\pi} = -\text{συν}\pi + \text{συν}(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0.$$

β) Έχουμε διαδοχικά

$$\int_1^2 \frac{x^2+2x-3}{x}dx = \int_1^2 (x+2-\frac{3}{x})dx = \int_1^2 xdx + 2\int_1^2 1dx - 3\int_1^2 \frac{1}{x}dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2[x]_1^2 - 3[\ln x]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} + 2 - 3\ln 2 = \frac{7}{2} - \ln 2.$$

γ) Αφού

$$|x-3| = \begin{cases} 3-x, & x \le 3 \\ x-3, & x \ge 3 \end{cases}$$

θα έχουμε:

$$\int_1^4 |x-3|dx = \int_1^3 (3-x)dx + \int_3^4 (x-3)dx = \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^4 = \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right) + \left(-4 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right) = 5.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.3.

Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi} x\,\text{συν}x\,dx$ β) $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx$ γ) $\int_2^3 \frac{\ln x}{x}dx$

Λύση.

α) Έχουμε διαδοχικά:

$$I=\int_0^{\pi}x(\eta\mu x)'dx=\left[x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(x)'\eta\mu x dx=\left[x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=$$

$$=\left[x\eta\mu x\right]_0^{\pi}+\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=(\pi\cdot\eta\mu\pi-0\cdot\eta\mu 0)+(\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0)=-2.$$

β) Θέτουμε $u=9-x^2$, οπότε $du=-2xdx$, δηλαδή $xdx=-\frac{1}{2}du$. Για $x=0$ είναι $u_1=9$ και για $x=3$ είναι $u_2=0$. Επομένως:

$$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx=\int_9^0\sqrt{u}(-\frac{1}{2})\,du=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}[u^{3/2}]_9^0=-\frac{1}{3}(0-\sqrt{9^3})=-\frac{1}{3}(-27)=9.$$

γ) Αν θέσουμε $u=\ln x$, θα έχουμε $du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx$, $u_1=\ln 2$ και $u_2=\ln 3$. Επομένως:

$$\int_2^3\frac{\ln x}{x}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=\frac{(\ln 3)^2-(\ln 2)^2}{2}.$$

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$. Τότε για την συνάρτηση $F(x)$ που ορίστηκε στην (7.4.1) ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (βλ. Ενότητα 6.3), οπότε θα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$F'(\xi)=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow F(\beta)-F(\alpha)=F'(\xi)(\beta-\alpha).$$

Κάνοντας χρήση των (7.4.2) και (7.4.5), η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί στο επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι γνωστό ως ***Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού***.

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\mu(\beta-\alpha)\qquad(7.4.6)$$

όπου $\mu=f(\xi)$.

Ο αριθμός $\mu=f(\xi)$ λέγεται ***μέση τιμή*** της συνάρτησης f.

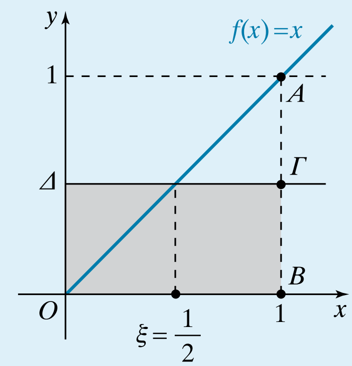
Αξίζει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση που η συνάρτηση f παίρνει μη αρνητικές τιμές, η σχέση (7.4.6) δείχνει ότι το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$, είναι ίσο με το εμβαδό ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με πλευρές μήκους $\beta-\alpha$ και μ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.4.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x)=x$ στο διάστημα [0, 1]. Τότε

$$\mu=\frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}=\frac{\int_0^1 xdx}{1-0}=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

Ο αριθμός ξ για τον οποίο ισχύει $f(\xi)=\mu=\frac{1}{2}$ είναι ο $\xi=\frac{1}{2}$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, το εμβαδόν του τριγώνου OAB του σχήματος 7.4α θα είναι ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό.



Σχ. 7.4α

Ασκήσεις.

7.4.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=xe^x$ και $F(x)=xe^x-e^x$. Να αποδείξετε ότι η F είναι μία παράγουσα της f και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^2 xe^x dx,\quad \int_2^3 xe^x dx,\quad \int_0^3 xe^x dx,\quad \int_{-1}^1 xe^x dx.$$

7.4.2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x$ημx. Αφού βρείτε την παράγωγο της f, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/2}(\text{ημ}x+x\text{συν}x)dx,\quad \int_0^{\pi}(\text{ημ}x+x\text{συν}x)dx,\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\text{ημ}x+x\text{συν}x)dx.$$

7.4.3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Να βρείτε την παράγωγο της f και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,\quad \int_1^2\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,\quad \int_0^9\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

7.4.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 e^x dx$ β) $\int_{-1}^0 e^{-x}dx$ γ) $\int_1^2\frac{5}{x}dx$

δ) $\int_0^{\pi/2}(2\text{συν}x-3\text{ημ}x)dx$ ε) $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ στ) $\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$

7.4.5. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $F(x)=\int_1^{\text{ημ}x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ β) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^1\frac{\text{συν}(t^2)}{t}dt$ γ) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t}dt$

7.4.6. Αν $\int_0^x t^2 f(t)dt=x^3+2x^5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $f(2)$.

7.4.7. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης με τύπο $F(x)=e^x+\int_0^x e^x f(t)dt$.

7.4.8. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^3 (x^2-9)dx$ β) $\int_1^2 \left(x-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx$ γ) $\int_1^4 \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$

δ) $\int_{-2}^1 (x^2+3x+1)dx$ ε) $\int_{-20}^{20} (2x^3+3x)dx$ στ) $\int_2^3 \left(x^2+x+\frac{1}{x-1}\right)dx$

7.4.9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-1}^1 (x^2-|x|)dx$ β) $\int_{-2}^2 |x^2-1|dx$ γ) $\int_1^4 |x^2-5x+6|dx$

7.4.10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 te^{-t^2}dt$ β) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+6}dx$ γ) $\int_{-1}^1 x^3(x^4+1)^4dx$

7.4.11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi/2} \text{ημ}^3 x\,\text{συν}x\,dx$ β) $\int_{\pi^2}^{3\pi^2} \frac{\text{συν}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ γ) $\int_1^2 \frac{x+3}{(x^2+6x)^2}dx$

δ) $\int_{2/\pi}^{3/\pi} \frac{\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$ ε) $\int_1^2 x\ln x\,dx$ στ) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$

7.4.12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^2 xe^{2x}dx$ β) $\int_0^1 x^2e^{-x/2}dx$ γ) $\int_0^1 (2x^2+3x+1)e^{-x}dx$.

7.4.13. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2, & -1\le x<0\\ 6x^3, & 0\le x\le 2\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

7.4.14. Να βρεθεί η μέση τιμή μ της συνάρτησης $f(x)=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, καθώς και το ξ, για το οποίο ισχύει $f(\xi)=\mu$.

7.4.15. Αν μ είναι η μέση τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι

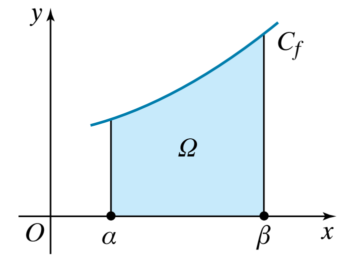
$$\int_\alpha^\beta (f(x)-\mu)dx=0.$$

7.5 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε πώς μπορούμε, χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα, να υπολογίζουμε το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων, των οποίων τα όρια (σύνορα) καθορίζονται από γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και/ή κατακόρυφες ευθείες.

Στην παράγραφο 7.3, στην πορεία εισαγωγής της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, διαπιστώσαμε ότι το εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας μη αρνητικής συνεχούς ($f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$) συνάρτησης στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και από τον άξονα των x, δίνεται από τον τύπο (σχ. 7.5α)

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$



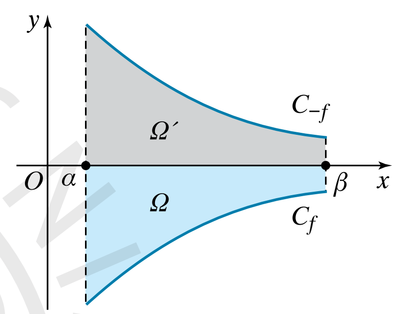
Σχ. 7.5α

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, από τις ευθείες $x=-1$, $x=1$ και από τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με:

$$\int_{-1}^{1} x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1^3-(-1)^3}{3}=\frac{2}{3}.$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f παίρνει μόνο αρνητικές ή μηδενικές τιμές στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ($f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$) μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $-f$ (η οποία θα παίρνει μη αρνητικές τιμές) και το αντίστοιχο χωρίο Ω' που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $-f$ από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.5β). Αφού τα Ω, Ω' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, θα έχουν ίσα εμβαδά, οπότε:

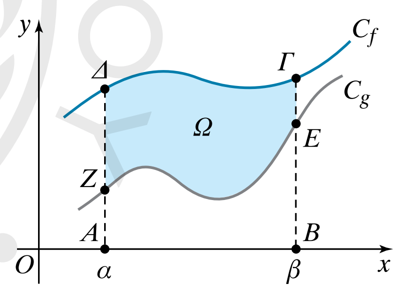
$$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}(-f(x))dx=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$



Σχ. 7.5β

Έστω τώρα δύο συναρτήσεις f, g, συνεχείς μη αρνητικές στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, για τις οποίες ισχύει $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με το σχήμα 7.5γ παίρνοντας τη διαφορά των εμβαδών που αντιστοιχούν στα χωρία $AB\Gamma\Delta$ και $ABEZ$. Επομένως:

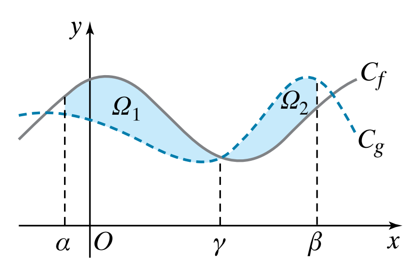
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$



Σχ. 7.5γ

Ο τύπος αυτός ισχύει ακόμη και όταν οι συνεχείς συναρτήσεις f, g, δεν είναι μη αρνητικές στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, αρκεί όμως να ικανοποιούν τον περιορισμό $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Αν τέλος η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο σχήμα 7.5δ, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1 και Ω_2, οπότε:



Σχ. 7.5δ

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\beta}(g(x)-f(x))dx.$$

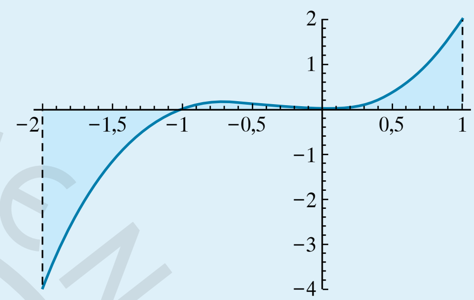
Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος τύπος μπορεί να γραφεί και στην εξής μορφή:

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx,$$

η οποία αποτελεί την πλέον γενική έκφραση για τον υπολογισμό του εμβαδού *Ε(Ω)* του χωρίου *Ω*, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο οποιωνδήποτε συνεχών συναρτήσεων *f*, *g* και από τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.1.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+x^2$, από τις ευθείες $x=-2$, $x=1$ και από τον άξονα $x'x$.



Σχ. 7.5ε

Λύση.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον $x'x$ στα σημεία που οι τετμημένες τους είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Έχουμε $x^3+x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x^2$ είναι συνεχής στο $[-2,1]$ και ισχύει $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[-2,-1]$ και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ (σχ. 7.5ε).

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$$E(\Omega)=-\int_{-2}^{-1}(x^3+x^2)dx+\int_{-1}^{1}(x^3+x^2)dx=-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{25}{12}\cdot$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.2.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου *Ω*, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ και από τις ευθείες $x=-1$, $x=2$.

Λύση.

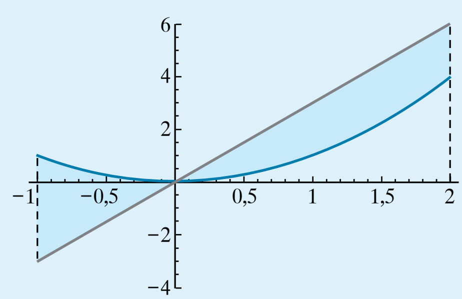
Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων, βρίσκουμε αρχικά τις ρίζες της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[-1,2]$. Έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=3x\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x(x-3)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3.$$

Η δεύτερη ρίζα δεν μας ενδιαφέρει, αφού βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[-1,2]$. Το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[-1,2]$ φαίνεται στον πίνακα 7.5.1 (σχ. 7.5στ).

Πίνακας 7.5.1

x	-1		0		2
$f(x)-g(x)$	4	+	0	−	−2



Σχ. 7.5στ

Δηλαδή για $x \in [-1,0]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$ και για $x \in [0,2]$ ισχύει $f(x) \leq g(x)$.
Επομένως,

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{2}\left|3x-x^2\right|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{2}(3x-x^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{31}{6}.$$

Ασκήσεις.

7.5.1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, και από τον άξονα των $x'x$, όταν:

α) $f(x)=e^{-x}$, $\alpha=-1$, $\beta=1$ β) $f(x)=-x^2$, $\alpha=1$, $\beta=3$ γ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\alpha=1$, $\beta=e$

δ) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$, $\alpha=1$, $\beta=e$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $\alpha=0$, $\beta=4$ στ) $f(x)=x(x+2)$, $\alpha=0$, $\beta=3$.

7.5.2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=6x^2-3x$ και από τον άξονα $x'x$.

7.5.3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3+1$, $g(x)=x^2+1$.

7.5.4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2-2x+1$ και $g(x)=x^3-x^2-x+1$ και από τις ευθείες $x=-2$, $x=3$.

7.5.5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu 2x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2\pi$.

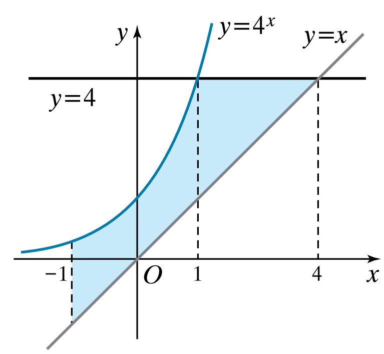
7.5.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, από την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(1, 5)$ και από τον άξονα $x'x$.

7.5.7. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x<1\\ 2\sqrt{x}-1, & x\geq 1\end{cases}$$

τις ευθείες $x=0$, $x=3$ και τον άξονα των x.

7.5.8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 7.5θ.



Σχ. 7.5θ

7.5.9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένες $x=1$ και $x=e$.

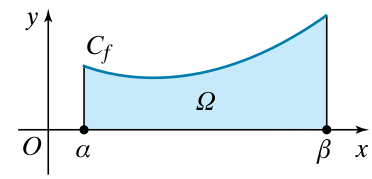
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f και τις δύο εφαπτόμενες.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e,1)$.

7.6 Όγκοι στερεών. Μήκος τόξου καμπύλης.

Τα ορισμένα ολοκληρώματα, εκτός από τον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων χωρίων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον υπολογισμό των όγκων στερεών, που δημιουργούνται από την περιστροφή ενός επίπεδου σχήματος γύρω από ένα σταθερό άξονα.

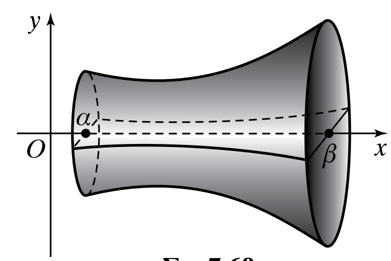
Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, από τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.6α). Αν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, δημιουργείται ένα στερεό, το οποίο ονομάζεται ***στερεό εκ περιστροφής*** (σχ. 7.6β).



Σχ. 7.6α

Ο όγκος V_f του στερεού δίνεται από τον παρακάτω τύπο (η απόδειξη παραλείπεται):

$$V_f=\pi\int_\alpha^\beta (f(x))^2\,dx$$



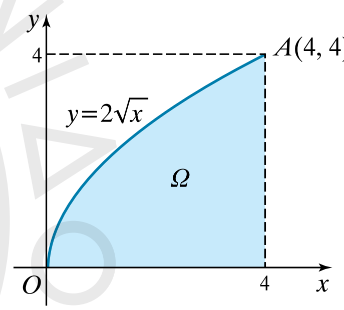
Σχ. 7.6β

Στην περίπτωση που η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα $y'y$, ο όγκος V_f του στερεού δίνεται από τον επόμενο τύπο, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη (και επομένως αντιστρέφεται) στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

$$V_f=\pi\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} (f^{-1}(y))^2\,dy$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=2\sqrt{x}\,,\ 0\le x\le 4$$

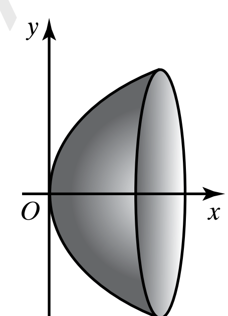


Σχ. 7.6γ

και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f, από τις ευθείες $x=0$, $x=4$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.6γ). Αν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δημιουργήσει το στερεό του σχήματος 7.6δ, που ονομάζεται ***παραβολοειδές*** και χρησιμοποιείται στην κατασκευή παραβολικών κατόπτρων (φώτα αυτοκινήτων κ.λπ.).

Ο όγκος του στερεού αυτού είναι ίσος με:

$$V_f=\pi\int_0^4 (2\sqrt{x})^2\,dx=4\pi\int_0^4 x\,dx=4\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=32\pi\,.$$



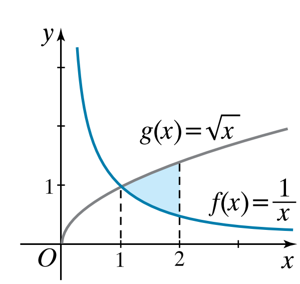
Σχ. 7.6δ

Αν το περιστρεφόμενο χωρίο περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$ και ισχύει $f(x)\ge g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το στερεό που παράγεται έχει όγκο:

$$V_{f,g}=\pi\int_\alpha^\beta[(f(x))^2-(g(x))^2]dx.$$

Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις $f(x)=1/x$ και $g(x)=\sqrt{x}$ (σχ. 7.6ε). Αφού ισχύει $\sqrt{x}\ge 1/x\ge 0$ για κάθε $x\in[1,2]$, ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι:

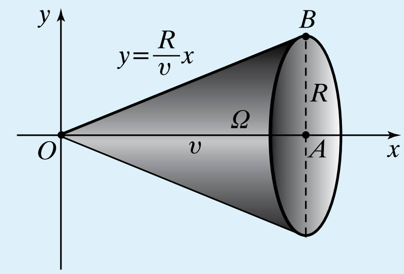
$$V_{f,g}=\pi\int_1^2[(\sqrt{x})^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2]dx=\pi\int_1^2\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right]_1^2=\pi.$$



Σχ. 7.6ε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.1.

Το ορθογώνιο τρίγωνο OAB του σχήματος 7.6στ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, δημιουργώντας κατά την περιστροφή του έναν κώνο ύψους $\upsilon=(OA)$ και ακτίνας βάσης R. Να βρείτε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο του κώνου αυτού συναρτήσει των υ και R.



Σχ. 7.6στ

Λύση.

Η κλίση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $O(0,0)$ και $B(\upsilon, R)$ είναι ίση με $\lambda=R/\upsilon$. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OB θα περιγράφεται από τον τύπο:

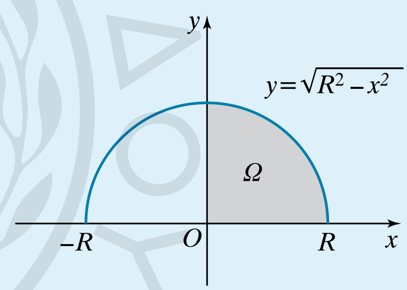
$$f(x)=\lambda x=\frac{R}{\upsilon}x,\ 0\le x\le \upsilon\ .$$

Επομένως, ο όγκος V_f του στερεού που παράγεται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_f=\pi\int_0^{\upsilon}\left(\frac{R}{\upsilon}x\right)^2dx=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon}x^2dx=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\upsilon}=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\frac{\upsilon^3}{3}=\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.2.

Να υπολογίσετε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο σφαίρας ακτίνας R.



Σχ. 7.6ζ

Λύση.

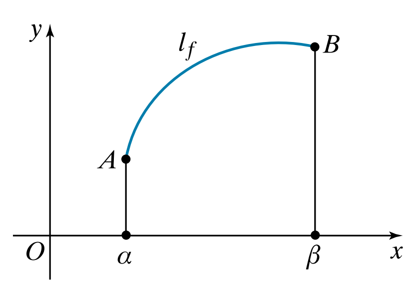
Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $0\le x\le R,$ από τις ευθείες $x=0$ και $x=R$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.6ζ). Όταν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δημιουργήσει ένα στερεό όγκου

$$V_f=\pi\int_0^R(\sqrt{R^2-x^2}\ )^2dx=\pi\int_0^R(R^2-x^2)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\pi(R^3-\frac{R^3}{3})=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Ο όγκος της σφαίρας ακτίνας R θα βρίσκεται αν πάρουμε το διπλάσιο από το προηγούμενο ολοκλήρωμα, δηλαδή είναι ίσος με

$$V=2V_f=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Τα ορισμένα ολοκληρώματα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του μήκους της καμπύλης της γραφικής παράστασης C_f μιας συνεχούς συνάρτησης που αντιστοιχεί σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Συνήθως αναφερόμαστε σ' αυτό με την ονομασία ***μήκος τόξου*** της καμπύλης $y=f(x)$ από το α έως το β (ή ισοδύναμα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$) και θα το συμβολίζουμε με $l_f\,(\alpha,\ \beta)$ ή απλά l_f (σχ. 7.6η).



Σχ. 7.6η

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με συνεχή παράγωγο. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ από το α έως το β δίνεται από τον τύπο (η απόδειξη παραλείπεται):

$$l_f=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.3.

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. Να βρείτε το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ από το 0 έως το 1.

Λύση.

Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι ίση με:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο

$$l_f=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

για $\alpha=0, \beta=1$ παίρνουμε

$$l_f=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}-2)}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}+2)}\,dx=$$

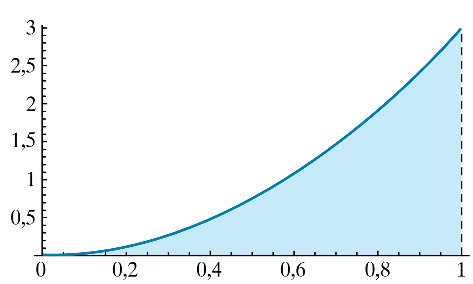
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}\left([e^x]_0^1+[-e^{-x}]_0^1\right)=\frac{1}{2}(e+e^{-1}).$$

Ασκήσεις.

7.6.1. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=3x^2$, από την ευθεία με εξίσωση $x=1$ και από τους άξονες $x'x$ και yy' (σχ. 7.6θ).

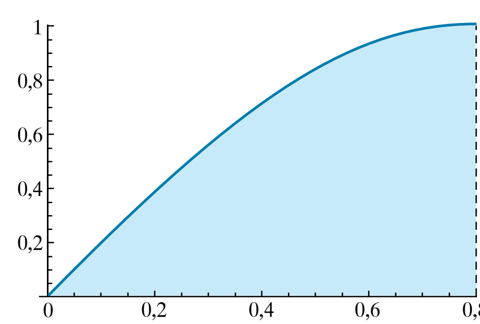
7.6.2. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\eta\mu 2x$, από τις ευθείες $x=0, x=\pi/4$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.6ι).

7.6.3. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του



$y=3x^2$

Σχ. 7.6θ



$y=\eta\mu 2x$

Σχ. 7.6ι

χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = 3x$.

7.6.4. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{2x+1}$, από τις ευθείες $x=1$, $x=3$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.6ια).

7.6.5. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=3x^2$, από τις ευθείες $x=1$, $x=3$ και από τον άξονα $x'x$.

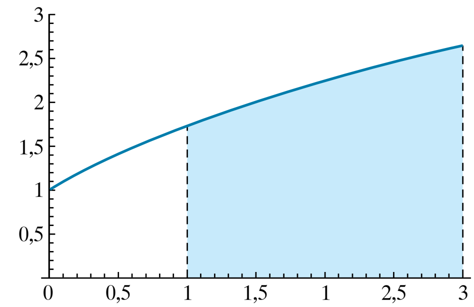
7.6.6. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$, $g(x)=1$ και από τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \pi/3$ (σχ. 7.6ιβ).

7.6.7. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = 3x^3$.

7.6.8. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) =xe^{-x}$ και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=5$ (σχ. 7.6ιγ).

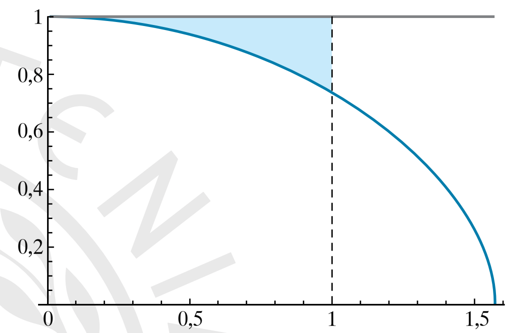
7.6.9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Να υπολογίσετε το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ στο διάστημα $[0, 27]$.

7.6.10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=e^{x/2}+e^{-x/2}$. Να υπολογίσετε το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ στο διάστημα $[-1,1]$.



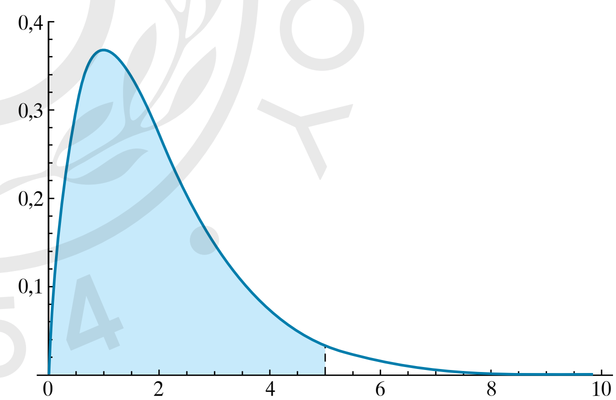
$y=\sqrt{2x+1}$

Σχ. 7.6ια



$f(x)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$, $g(x)=1$

Σχ. 7.6ιβ



$f(x)=xe^{-x}$

Σχ. 7.6ιγ

7.6.11. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{2r}(e^{rx} + e^{-rx})$, όπου r είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$1+(f'(x))^2= r^2 f^2(x).$$

β) Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης $rf(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ δίνεται από την έκφραση:

$$l_f = \frac{1}{2r}\,[(e^{r\beta} + e^{-r\alpha})(e^{-r\beta} + e^{r\alpha})].$$

8

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

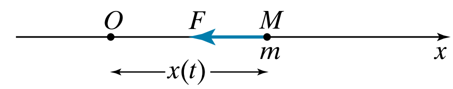
Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαγάγουμε την έννοια της διαφορικής εξίσωσης. Μία εξίσωση που περιέχει μία εξαρτημένη μεταβλητή και ένα πλήθος παραγώγων αυτής ως προς μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, καλείται διαφορική εξίσωση. Θα παρουσιάσουμε διάφορους τρόπους ταξινόμησης των εξισώσεων και θα περιγράψουμε μεθόδους επίλυσης αυτών ανά κατηγορία. Επίσης, θα παρουσιάσουμε διάφορες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων στη Φυσική και στη Μηχανική. Σημειώνουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν αντικείμενο μελέτης με ιδιαίτερο ενδιαφέρον κατά τους τελευταίους τρεις αιώνες και ακόμη και σήμερα ξεχωρίζουν ως ένα δυναμικό πεδίο έρευνας με πολλές εφαρμογές και με πολλά ενδιαφέροντα «άλυτα» προβλήματα.

8.1 Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης.

Πολλά σημαντικά προβλήματα στη Φυσική, στη Χημεία, στη Βιολογία, στην Αστρονομία και στις κοινωνικές επιστήμες περιγράφονται με τη βοήθεια των διαφορικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα η μοντελοποίηση διαφόρων προβλημάτων που εμφανίζονται στις επιστήμες αυτές, οδηγεί σε εξισώσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν μια άγνωστη συνάρτηση και μία ή περισσότερες παραγώγους αυτής.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης είναι ο νόμος του Νεύτωνα. Ας θεωρήσουμε ένα υλικό σημείο M μάζας m, το οποίο έλκεται από ακίνητο κέντρο O και η δύναμη F που ασκείται από το O προς αυτό είναι ανάλογη της απομάκρυνσης (σχ. 8.1). Τότε ο νόμος κίνησης του σημείου M περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0 \qquad (8.1.1)$$



Σχ. 8.1

ή ισοδύναμα $x''(t)+\omega^2x(t)=0$, όπου $x(t)$ είναι η θέση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t και $\omega>0$ μία σταθερά.

Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης είναι η εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt}=-kt \qquad (8.1.2)$$

ή ισοδύναμα $x'(t)+kt=0$, όπου $x(t)$ εκφράζει την ποσότητα ενός προϊόντος που παράγεται σε μια χημική αντίδραση τη χρονική στιγμή t και k είναι μία σταθερά.

Στις εξισώσεις (8.1.1), (8.1.2), για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $x(t)$ ως προς t χρησιμοποιήσαμε τους συμβολισμούς

$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dt} \quad \text{και} \quad x''(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2},$$

τους οποίους γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 6.

Στη συνέχεια, για μια συνάρτηση $y=y(x)$ θα συμβολίζουμε την πρώτη παράγωγο της $y=y(x)$ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x με:

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad (\text{αντί } y'(x)=\frac{dy(x)}{dx})$$

τη δεύτερη ως προς x με:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \quad (\text{αντί } y''(x)=\frac{d^2y(x)}{dx^2}) \text{ κ.ο.κ.,}$$

δηλαδή, από εδώ και στο εξής, θα παραλείπεται από τους συμβολισμούς η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Στα προηγούμενα παραδείγματα είναι προφανές ότι η άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ που εμφανίζεται στην εξίσωση εξαρτάται από μία μόνο *ανεξάρτητη* μεταβλητή, τον χρόνο t. Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση καλείται ***συνήθης διαφορική εξίσωση***. Αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η εξίσωση καλείται ***διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων***. Παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης μερικών παραγώγων αποτελεί η εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (8.1.3)$$

όπου $u=u(x,y)$ η άγνωστη συνάρτηση με τις $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ να συμβολίζουν τις μερικές παραγώγους της

$u = u(x, y)$ ως προς x και y αντίστοιχα.

Επιπλέον παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων είναι τα επόμενα

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x}, \qquad \frac{dy}{dx} + xy = 0, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

όπου οι τρεις πρώτες είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με $y = y(x)$ και η τελευταία μερική διαφορική εξίσωση με $w = w(x, y, z)$.

Θα συνεχίσουμε την παρουσίασή μας εστιάζοντας στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Μια ***συνήθης διαφορική εξίσωση*** είναι μια εξίσωση που περιέχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή x, μία άγνωστη συνάρτηση αυτής $y = y(x)$ και έναν πεπερασμένο αριθμό παραγώγων $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ της y ως προς x.

Δηλαδή μια συνήθης διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \quad n \geq 1, \quad y = y(x), \tag{8.1.4}$$

ή ισοδύναμα

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0, \quad n \geq 1, \quad y = y(x), \tag{8.1.5}$$

όπου F είναι μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται σε μια διαφορική εξίσωση, τόσο πιο δύσκολη είναι συνήθως η επίλυσή της. Για τον λόγο αυτό η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζεται σ' αυτήν ονομάζεται ***τάξη*** μιας διαφορικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^2y + 3x - 1 = 0$$

είναι μια εξίσωση δεύτερης τάξης, ενώ η εξίσωση $y''' - 3y'' + y' + 1 = 0$ είναι μια διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης κ.ο.κ.

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε διάφορες μεθόδους επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Με τον όρο ***επίλυση*** μιας διαφορικής εξίσωσης εννοούμε τη διαδικασία με την οποία βρίσκουμε συναρτήσεις που επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι η συνάρτηση $y = e^{2x}$ αποτελεί λύση της εξίσωσης $y'' - 5y' + 6y = 0$, αφού για $y = e^{2x}$ έχουμε:

$$y'' - 5y' + 6y = (e^{2x})'' - 5(e^{2x})' + 6e^{2x} = 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0.$$

Μια συνάρτηση $y : A \to \mathbb{R}$ λέγεται ***λύση*** της διαφορικής εξίσωσης (8.1.4) αν:

α) Η y έχει παραγώγους μέχρι και n-τάξης και

β) η συνάρτηση y ικανοποιεί την (8.1.4) για κάθε $x \in A$, δηλαδή ισχύει:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)\right) = 0, \text{ για κάθε } x \in A.$$

Το πεδίο ορισμού A της λύσης $y: A \to \mathbb{R}$ είναι συνήθως ένα διάστημα της μορφής (α, β), $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ή ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, \beta)$, $[-\infty, \beta)$, $(-\infty, +\infty)$.

΄Ενα ερώτημα που θα μπορούσε να τεθεί όσον αφορά μια διαφορική εξίσωση είναι: Πόσες λύσεις μπορεί να έχει μια συνήθης διαφορική εξίσωση;

Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση $y' = x^{-1/2}$, $x \in (0, +\infty)$, η οποία γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}.$$

Κάθε συνάρτηση της μορφής $y(x) = 2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, αφού:

$$\frac{dy}{dx} = (2\sqrt{x} + c)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχουμε άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μία αυθαίρετη σταθερά $c \in \mathbb{R}$. Η οικογένεια των συναρτήσεων

$$y(x) = 2\sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{8.1.6}$$

καλείται ***γενική λύση*** της διαφορικής εξίσωσης. Γενικά, κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής (8.1.4) με $n \geq 1$ έχει άπειρες λύσεις.

Από το παραπάνω παράδειγμα καθίσταται φανερό ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης που εξετάστηκε είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (περιέχει μία αυθαίρετη σταθερά). Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι μια διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές) κ.ο.κ.. Αν στη γενική λύση (8.1.6) δώσουμε μία συγκεκριμένη τιμή στη σταθερά $c \in \mathbb{R}$, τότε προκύπτει μία συγκεκριμένη λύση, η οποία ονομάζεται ***μερική λύση*** της διαφορικής εξίσωσης. ΄Ετσι η μερική λύση που αντιστοιχεί στην τιμή $c = 1$ είναι η:

$$y(x) = 2\sqrt{x} + 1.$$

Επίσης, αν ζητήσουμε τη μερική λύση που επαληθεύει τη συνθήκη $y(1) = 2$, τότε από την (8.1.6) προκύπτει ότι:

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 2\sqrt{1} + c \Rightarrow c = 0.$$

Συνεπώς, η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{dy}{dx} = x^{-1/2}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(1) = 2$ είναι η $y(x) = 2\sqrt{x}$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση

$$y = \varphi(x, c_1, ..., c_n) \tag{8.1.7}$$

που εξαρτάται από τις n σταθερές $c_1, ..., c_n$ είναι η ***γενική λύση*** της διαφορικής εξίσωσης (8.1.4) όταν:

α) Για κάθε σημείο $(c_1, ..., c_n)$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου Δ του $\mathbb{R}^n$ η (8.1.7) αποτελεί λύση της (8.1.4) και

β) για οποιοδήποτε σημείο $(x_o, y_o, y_1, ..., y_{n-1})$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου του πεδίου ορισμού της F, υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $(c_1, ..., c_n)$ του Δ, ώστε η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(x_o) = y_o, ..., y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1}$.

Κάθε λύση μιας διαφορικής εξίσωσης η οποία προκύπτει από τη γενική λύση της, όταν στις αυθαίρετες σταθερές που περιλαμβάνει δοθούν συγκεκριμένες πραγματικές τιμές, καλείται ***μερική λύση*** αυτής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.1

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y''+4y=0$.

α) Να προσδιορίσετε την τάξη της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = \text{συν}2x + \text{ημ}2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

γ) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(0)=1 \text{ και } y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση είναι η δεύτερη (ο όρος y''), συνεπώς η διαφορική εξίσωση είναι τάξης 2.

β) Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $y = \text{συν}2x + \text{ημ}2x$ ως προς x δύο φορές και παίρνουμε:

$$y' = -2\text{ημ}2x + 2\text{συν}2x, \quad y'' = -4\text{συν}2x - 4\text{ημ}2x = -4(\text{συν}2x + \text{ημ}2x) = -4y.$$

Από την τελευταία προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

γ) Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ δύο φορές ως προς x και παίρνουμε:

$$y'' = -4c_1\,\text{συν}2x - 4c_2\,\text{ημ}2x = -4\,(c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x) = -4y$$

Επομένως, $y'' + 4y = 0$, οπότε η συνάρτηση $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

δ) Με χρήση της συνθήκης $y(0)=1$ για την $y = c_1\,\text{συν}2x + c_2\,\text{ημ}2x$ έχουμε:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1\,\text{συν}0 + c_2\,\text{ημ}0 = 1 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε και τη δεύτερη συνθήκη $y\,(\pi/4) = 1$ σε συνδυασμό με την c_1, $=1$, προκύπτει:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow c_1\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2} - 1.$$

Τελικά, η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις δύο δοθείσες συνθήκες δίνεται από τον τύπο $y = \text{συν}2x + (\sqrt{2} - 1)\,\text{ημ}2x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.2.

Μία καλλιέργεια βακτηρίων πολλαπλασιάζεται με ρυθμό που είναι ανάλογος του αριθμού $P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας τη χρονική στιγμή t. Ας συμβολίσουμε με q τον συντελεστή αναλογίας μεταξύ του ρυθμού αύξησης των βακτηρίων και του πληθυσμού των βακτηρίων (η ποσότητα αυτή προσδιορίζεται συνήθως από εργαστηριακές μετρήσεις).

α) Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί ο αριθμός $P=P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας και να διαπιστώσετε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $P(t)=e^{c+qt}$, $c\in\mathbb{R}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

β) Να εκφράσετε τον αριθμό $P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας τη χρονική στιγμή $t=10$ sec συναρτήσει του αρχικού πληθυσμού $P(0)$.

γ) Αν σε μια καλλιέργεια τη χρονική στιγμή $t=1$ sec ο αριθμός των βακτηρίων είναι 100, τότε να βρείτε τον αρχικό πληθυσμό των βακτηρίων.

Λύση.

α) Γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $P(t)$ είναι ίσος με $P'(t)=\frac{dP}{dt}$. Επομένως, σύμφωνα με την εκφώνηση, θα έχουμε $\frac{dP}{dt}=qP$, όπου q η σταθερά αναλογίας. Κάθε συνάρτηση της μορφής $P(t) = ce^{qt}$, $c \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, αφού ισχύει:

$$\frac{dP}{dt}=(ce^{qt})'=c(e^{qt})'=c\,q\,e^{qt}=qP.$$

β) Από τον τύπο $P(t) = ce^{qt}$, προκύπτει για $t = 0$ ότι

$$P(0) = ce^{q\cdot 0} \Rightarrow P(0) = c,$$

δηλαδή το c εκφράζει τον αρχικό πληθυσμό των βακτηρίων της καλλιέργειας.

Τη χρονική στιγμή $t=10$ sec ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι

$$P(10)=P_{(0)}e^{q\cdot 10} \Rightarrow P(10)=P_{(0)}e^{10q}$$

γ) Στην περίπτωση αυτή δίνεται P(1)=100, οπότε θα έχουμε:

$$P(1)=100 \Rightarrow P_{(0)}e^{q}=100 \Rightarrow P_{(0)}=\frac{100}{e^{q}}=100e^{-q}.$$

Ασκήσεις.

8.1.1. Να προσδιορίσετε την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

α) $y'+2xy=e^{-x}$ β) $y^{(4)}+4y'''+3y=x$

γ) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$ δ) $\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=1$

8.1.2. Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι λύσεις των αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων.

α) $y=x^2+\mathrm{c}$, $y=2x$ β) $y=cx^2$, $xy'=2y$ γ) $y^2=e^{2x}+c$, $yy'=e^{2x}$

δ) $y = e^{3x} + e^{x}$, $y''-4y'+3y = 0$, ε) $y=\frac{1}{1-x^2}$, $y'=2xy^2$ στ) $y=ce^{y/x}$, $y'=\frac{y^2}{xy-x^2}$

8.1.3. Έστω η διαφορική εξίσωση $y'=2xy$, $y>0$.

α) Να προσδιορίσετε την τάξη της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = 4e^{x^2}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = c\,e^{x^2}$, $c\in\mathbb{R}$ είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

δ) Να βρείτε τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(2) =1$.

8.1.4. Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y=c_1e^{-x}$συν$x+c_2e^{-x}$ ημx είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + 2y' + 2y = 0$. Στη συνέχεια να βρείτε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(\pi) = 0$.

8.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών.

Αρκετά συχνά πολλά προβλήματα της Μηχανικής, της Οικονομίας, της Βιολογίας κ.λπ. οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν μόνο την άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$, την πρώτη παράγωγο $y' = f'(x)$ και την ανεξάρτητη μεταβλητή x. Μια τέτοια διαφορική εξίσωση είναι της μορφής (8.1.4), που αντιστοιχεί στην τιμή $n=1$, δηλαδή έχει τη μορφή:

$$F(x,y,y')=0, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\equiv 0. \tag{8.2.1}$$

Τέτοιες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 8.1, ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, θα μελετηθούν στην παρούσα παράγραφο.

Ας θεωρήσουμε αρχικά την απλή περίπτωση, κατά την οποία η (8.2.1) μπορεί να επιλυθεί ως προς $\frac{dy}{dx}$, δηλαδή

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{8.2.2}$$

όπου $f(x,y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Παράδειγμα τέτοιας διαφορικής εξίσωσης αποτελεί η

$$y'(x)=\frac{2y}{x}, \qquad x\neq 0. \tag{8.2.3}$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$y=cx^2 \tag{8.2.4}$$

διαπιστώνουμε εύκολα με αντικατάσταση της y και της παραγώγου της y', στην (8.2.3), ότι αποτελεί λύση της για κάθε τιμή της σταθεράς $c\in\mathbb{R}$. Πράγματι για το πρώτο μέλος της (8.2.3) έχουμε $y=(cx^2)'=2cx$, ενώ επίσης με αντικατάσταση της y στο δεύτερο μέλος της (8.2.3) προκύπτει και πάλι

$$\frac{2y}{x}=\frac{2cx^2}{x}=2cx.$$

Στην περίπτωση αυτή μπορέσαμε να βρούμε μια λύση της διαφορικής εξίσωσης, στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή y εκφράζεται συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής x μέσω ενός συγκεκριμένου τύπου. Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x)=\frac{1-y^2}{xy}. \tag{8.2.5}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι κάθε συνάρτηση y, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$xy=\ln y+c, \tag{8.2.6}$$

αποτελεί λύση της (8.2.5) για κάθε τιμή της σταθεράς $c\in\mathbb{R}$, χωρίς ωστόσο από την ισότητα αυτή να μπορούμε να εκφράσουμε το y συναρτήσει του x. Πράγματι, παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x, προκύπτει:

$$xy'+y=\frac{1}{y}\Leftrightarrow xy'=\frac{1-y^2}{y}\Leftrightarrow y'=\frac{1-y^2}{xy}.$$

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι μερικές φορές η λύση y είναι δύσκολο ή και αδύνατο να εκφραστεί ακριβώς συναρτήσει μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Η μορφή (8.2.6) λέμε ότι δίνει τη λύση της εξίσωσης σε ***πεπλεγμένη μορφή***.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την απλούστερη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

Ονομάζουμε διαφορική εξίσωση ***χωριζόμενων μεταβλητών*** μια διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$, της οποίας το δεύτερο μέλος αποτελείται από δύο παράγοντες, που ο ένας εξαρτάται από το x και ο άλλος από το y.

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x)\cdot M(y)\frac{dy}{dx}+Q(x)\cdot N(y)=0 \tag{8.2.7}$$

μπορεί με κατάλληλες προϋποθέσεις να πάρει την προηγούμενη μορφή.

Αν υποθέσουμε ότι $N(y)\neq 0$, $P(x)\neq 0$, τότε η διαφορική εξίσωση (8.2.7) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{M(y)}{N(y)}y'=-\frac{Q(x)}{P(x)},$$

και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη προκύπτει:

$$\int\frac{M(y)}{N(y)}y'dx-\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx\Leftrightarrow\int\frac{M(y)}{N(y)}dy=-\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx+c\,,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Ένας πιο γρήγορος "τεχνικός τρόπος" για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν γράψουμε την (8.2.7) στη μορφή

$$\frac{M(y)}{N(y)}dy=-\frac{Q(x)}{P(x)}dx,$$

στην οποία έχουν διαχωριστεί οι μεταβλητές x και y στα δύο μέλη της εξίσωσης (εκεί οφείλεται και η ονομασία της κατηγορίας αυτής διαφορικών εξισώσεων) και ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της, οπότε θα έχουμε:

$$\int\frac{M(y)}{N(y)}dy=-\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx+c\,,\quad c\in\mathbb{R}. \tag{8.2.8}$$

Σημειώνεται ότι αν η $y=\beta$ είναι ρίζα της εξίσωσης $N(y)=0$, τότε και η σταθερή συνάρτηση $y=\beta$ είναι επίσης λύση της διαφορικής εξίσωσης (8.2.7).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.1.

Να επιλύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση $y'=x^{-1/2}$, $x\in(0,+\infty)$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση γράφεται σε μορφή χωριζόμενων μεταβλητών, ως εξής:

$$\frac{dy}{dx}=x^{-1/2}\Leftrightarrow dy=x^{-1/2}dx\,.$$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας παίρνουμε $\int dy=\int x^{-1/2}dx\Leftrightarrow y=2\sqrt{x}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.2.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $e^{y}\frac{dy}{dx}-(x+x^{3})=0.$

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση γράφεται σε μορφή χωριζόμενων μεταβλητών ως εξής:

$$e^y\,dy=(x+x^3)\,dx.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας βρίσκουμε:

$$\int e^y dy=\int (x+x^3)\,dx \Leftrightarrow e^y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+c>0 \Leftrightarrow y=\ln(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+c)\ ,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(x)=\ln(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+c)$, $c\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.3.

Να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=k(a-y)(\beta-y),\ y(0)=0, \tag{8.2.9}$$

όπου α, β, k είναι γνωστές σταθερές με $\beta>\alpha>0$, $k>0$ και $y(x)\geq 0$ για κάθε x.

Λύση.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\frac{dy}{(a-y)(\beta-y)}=kdx$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\int\frac{dy}{(a-y)(\beta-y)}=\int k\,dx+c. \tag{8.2.10}$$

Εφαρμόζοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του πρώτου μέλους, παίρνουμε:

$$\frac{1}{(a-y)(\beta-y)}=\frac{1}{a-\beta}\left(\frac{1}{\beta-y}-\frac{1}{a-y}\right). \tag{8.2.11}$$

Με αντικατάσταση της (8.2.11) στην (8.2.10) προκύπτει:

$$\frac{1}{a-\beta}\left(\int\frac{1}{\beta-y}dy-\int\frac{1}{a-y}dy\right)=kx+c\Rightarrow\frac{1}{a-\beta}\ln|\beta-y|-\frac{1}{a-\beta}\ln|a-y|=kx+c_1,$$

απ’ όπου καταλήγουμε στην ισότητα $\frac{y-\beta}{y-a}=e^{kx(a-\beta)}e^{c_1(a-\beta)}$. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς y, προκύπτει ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (8.2.9) δίνεται από την έκφραση:

$$y(x)=\frac{a-\beta c e^{-(a-\beta)kx}}{1-ce^{-(a-\beta)kx}}\ , \tag{8.2.12}$$

όπου $c=e^{-c_1(a-\beta)}$. Επιπλέον, με απλή αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση (8.2.9) προκύπτει ότι και οι συναρτήσεις $y=a$, $y=\beta$ είναι λύσεις αυτής.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0)=0$, από την γενική λύση (8.2.12) προκύπτει ότι:

$$y(0)=0 \Rightarrow 0=\frac{a-\beta c e^{-(a-\beta)k\cdot 0}}{1-c e^{-(a-\beta)k\cdot 0}} \Rightarrow c=\frac{a}{\beta}$$

και με αντικατάσταση της σταθεράς c στην (8.2.12) παίρνουμε τη μερική λύση

$$y(x)=\frac{a\beta[1-e^{(\beta-a)kx}]}{\beta-ae^{(\beta-a)kx}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.4.

Υποθέτουμε ότι η αξία ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος του συστήματος πλοήγησης ενός πλοίου δίνεται από την εξαρτημένη μεταβλητή $y=y(x)$, όπου x τα χρόνια εμφάνισής του στην αγορά. Έχει παρατηρηθεί ότι η $y=y(x)$ μειώνεται με ρυθμό που είναι ίσος με την τρέχουσα τιμή του.

α) Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $y=y(x)$.

β) Να βρείτε τη γενική λύση της.

γ) Αν υποθέσουμε ότι το εξάρτημα πρωτοεμφανίζεται στο εμπόριο, με τιμή 2599 €, τότε να βρείτε ποια θα είναι η αξία του ύστερα από έναν χρόνο.

Λύση.

α) Αφού ο ρυθμός μείωσης της τιμής του εξαρτήματος ισούται με την τρέχουσα τιμή του, η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $y=y(x)$ είναι η $\frac{dy}{dx}=-y(x)$.

β) Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι χωριζόμενων μεταβλητών και γράφεται στη μορφή $\frac{dy}{y}=-dx$.

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx \Leftrightarrow \ln y=-x+c' \Leftrightarrow e^{\ln y}=e^{-x+c'} \Leftrightarrow e^{\ln y}=e^{c'}e^{-x} \Leftrightarrow y=ce^{-x},$$

όπου θέσαμε $e^{c'}=c$. Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(x)=ce^{-x}$, $c\in\mathbb{R}$.

γ) Στην περίπτωση αυτή, η αρχική συνθήκη που θα έχουμε είναι η $y(0)=2599$.

Επομένως, η τελευταία σε συνδυασμό με τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνει:

$$y(0)=2599 \Rightarrow 2599=ce^{-0} \Rightarrow c=2599.$$

Άρα η μερική λύση είναι η $y(x)=2599\,e^{-x}$ και συνεπώς, η αξία του εξαρτήματος μετά από έναν χρόνο ($x=1$) θα είναι:

$$y(1)=2599e^{-1}=2599/e\cong 956€.$$

Ασκήσεις.

8.2.1. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $y'+6xy=0$, $y(\pi)=5$ β) $e^y y'=(x+x^3)$, $y(0)=1$ γ) $y'=\ln x$, $y(e)=0$

8.2.2. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις να βρείτε τη λύση εκείνη που ικανοποιεί την αντίστοιχη δοθείσα αρχική συνθήκη.

α) $y' = xe^x$, $y(1) = 3$ β) $y' = \ln x$, $y(e) = 0$

γ) $y' = 2\sin x \cos x$, $y(0) = 1$ δ) $y' = 2x^2$, $y(0) = 1$

8.2.3. Να λύσετε τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' = \dfrac{x+1}{y^3+3}$, β) $y' = \dfrac{y}{x^2}$, γ) $y' = \dfrac{x^2 y - y}{y+1}$

δ) $y' = 2x$ ε) $y' = x^3 y^2$ στ) $xy' = 2y$

8.2.4. Για κάθε μία από τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις να βρείτε τη λύση εκείνη που ικανοποιεί τη δοθείσα αρχική συνθήκη.

α) $y' = xe^x$, $y(1) = 3$ β) $y' = \ln x$, $y(e) = 0$

γ) $y' = 2\sin x \cos x$, $y(0) = 1$ δ) $y' = 2x^2$, $y(0) = 1$

8.2.5. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(x) = \dfrac{x\,y(4-y)}{1+x}$, $y(0) = y_0 > 0$.

α) Να βρείτε τη γενική λύση $y = y(x)$ της διαφορικής εξίσωσης.
β) Να υπολογίσετε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στη δοθείσα αρχική συνθήκη.
γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

8.2.6. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των αυτοκινήτων μίας μεγαλούπολης δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t, από τη συνάρτηση $y = y(t)$ και ότι ο ρυθμός αύξησης αυτών είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων. Αν ο αριθμός αυτοκινήτων της μεγαλούπολης σε 7 χρόνια είναι τριπλάσιος του αρχικού, να βρείτε σε πόσα χρόνια θα πενταπλασιαστεί.

8.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.

Συνεχίζοντας τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, βρίσκουμε στο επόμενο επίπεδο δυσκολίας τις λεγόμενες ***ομογενείς διαφορικές εξισώσεις***.

Ας θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y) = x^2 + xy$, όπου $(x, y) \in I \subseteq \mathbb{R}^2$ και ας υπολογίσουμε την $f(\lambda x, \lambda y)$ για κάθε $\lambda \neq 0$. Τότε, έχουμε:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 x y = \lambda^2 (x^2 + x y) = \lambda^2 f(x, y).$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$, $\lambda \neq 0$. Μία τέτοια συνάρτηση λέμε ότι είναι ομογενής δευτέρου βαθμού ή ομογενής βαθμού δύο.

> Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ καλείται ***ομογενής βαθμού m*** αν για κάθε $\lambda \neq 0$ ισχύει
> $$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y). \qquad (8.3.1)$$

Έτσι οι συναρτήσεις $\sqrt{x^2 + y^2}$ και $\sin(x/y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 1 και 0 αντίστοιχα. Είμαστε έτοιμοι τώρα να δώσουμε τον βασικό ορισμό αυτής της παραγράφου:

Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ονομάζεται ***ομογενής***, αν είναι της μορφής

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0, \tag{8.3.2}$$

όπου $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού και συνεχείς ως προς τις μεταβλητές τους x και y.

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια της αντικατάστασης $z=y/x$ ή $z=x/y$. Με τον τρόπο αυτό η διαφορική εξίσωση (8.3.2) μετατρέπεται σε μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Το παράδειγμα που ακολουθεί, αποσαφηνίζει τη διαδικασία αυτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.3.1.

Να διαπιστώσετε ότι η διαφορική εξίσωση

$$x^2-y^2+2xyy'=0 \tag{8.3.3}$$

είναι ομογενής και κατόπιν να την επιλύσετε.

Λύση.

Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση (8.3.3) στη μορφή:

$$x^2-y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0 \tag{8.3.4}$$

και παρατηρούμε ότι η τελευταία είναι της μορφής (8.3.2), με $P(x,y)=x^2-y^2$ και $Q(x,y)=2xy$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό (8.3.1), ελέγχουμε αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού. Όντως, παρατηρούμε ότι:

$$P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(x^2-y^2)=\lambda^2 P(x,y) \quad \text{και} \quad Q(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 Q(x,y).$$

Αφού διαπιστώσαμε ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι και οι δύο ομογενείς βαθμού δύο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $z=y/x$, οπότε προκύπτει:

$$z=\frac{y}{x}\Rightarrow y=z\,x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}\,. \tag{8.3.5}$$

Με αντικατάσταση της (8.3.5) στη διαφορική εξίσωση (8.3.4) παίρνουμε:

$$x^2-z^2x^2+2x\,z\,x\left(x\frac{dz}{dx}+z\right)=0\Leftrightarrow(1+z^2)dx+2x\,z\,dz=0,$$

όπου η τελευταία είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Από την έκφραση

$$2x\,zdz=-(1+z^2)dx\Rightarrow\frac{z}{1+z^2}dz=-\frac{1}{2x}dx, \tag{8.3.6}$$

ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της, έχουμε:

$$\int\frac{z}{1+z^2}dz=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow\ln(1+z^2)=-\ln|x|+c'\Rightarrow$$

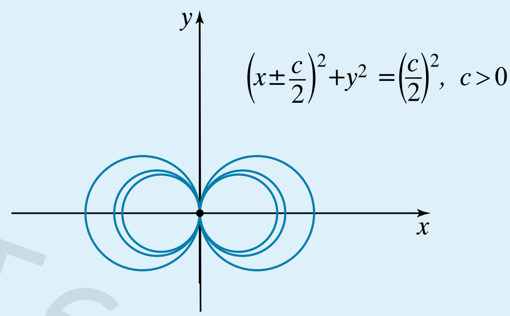
$$\Rightarrow \ln(1+z^2) = \ln|x| + \ln c \quad (c' = \ln c) \Rightarrow 1+z^2 = \frac{c}{|x|},\ c>0.$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της αρχικής μας αντικατάστασης $z=y/x$, βρίσκουμε από την τελευταία ότι η γενική λύση της (8.3.3) δίνεται από τη σχέση $x^2+y^2=c|x|$, $c>0$, όπου $y=y(x)$. Τέλος, μπορούμε εύκολα να δώσουμε στη γενική λύση την ισοδύναμη μορφή:

$$x^2 \pm 2x\frac{c}{2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = 0,$$

δηλαδή

$$\left(x \pm \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2,\quad c>0.$$



Σχ. 8.3

Η τελευταία μορφή δείχνει ότι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης αποτελούν μία οικογένεια κύκλων με κέντρα $K\pm(c/2,0)$ και αντίστοιχες ακτίνες $c/2$, $c>0$ (σχ. 8.3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.3.2.

Να διαπιστώσετε ότι η διαφορική εξίσωση $x+y-x\dfrac{dy}{dx}=0$ είναι ομογενής και κατόπιν να την επιλύσετε.

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση που δόθηκε είναι ομογενής, αφού είναι της μορφής (8.3.2) με

$$P(x,y)=x-y,\ Q(x,y)=-x$$

και ισχύει

$$P(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)+(\lambda y)=\lambda(x+y)=\lambda P(x,y),\quad Q(\lambda x,\lambda y)=-(\lambda x)=\lambda(-x)=\lambda Q(x,y).$$

Αφού διαπιστώσαμε ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι και οι δύο ομογενείς πρώτου βαθμού, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $z=y/x \Leftrightarrow y=zx$, καθώς και την αντίστοιχη παράγωγο (8.3.5). ΄Ετσι, η διαφορική εξίσωση που δόθηκε γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$x+zx-x\left(z+x\frac{dz}{dx}\right)=0 \Rightarrow x+zx-zx-x^2\frac{dz}{dx}=0 \Rightarrow x=x^2\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Η τελευταία αποτελεί διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και θα έχουμε:

$$dz=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int dz=\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow z=\ln|x|+c' \Rightarrow z=\ln|x|+\ln|c| \Rightarrow z=\ln|cx|,\quad c\in\mathbb{R}$$

όπου $c'=\ln|c|$. Αντικαθιστώντας τέλος το $z=y/x$, βρίσκουμε τη λύση $y=x\ln|cx|$, $c\in\mathbb{R}$.

Ασκήσεις.

8.3.1. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομογενείς και, αν είναι, να βρεθεί ο βαθμός τους.

α) $f(x,y)=y^2+xy$ β) $g(x,y)=x^3+y^2xe^{\frac{x}{y}}$ γ) $h(x,y)=x+y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ δ) $k(x,y)=xy+x$

8.3.2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς.

α) $y' = \dfrac{y^2}{x}$ β) $2xy e^{\frac{x}{y}} - \left(x^2 + y^2 \sin\dfrac{x}{y}\right) y' = 0$ γ) $y' = \dfrac{x^2 + y}{x^3}$

8.3.3. Να επαληθεύσετε ότι οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και στη συνέχεια να τις επιλύσετε.

α) $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$ β) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\dfrac{y}{x}$ γ) $xy' = y + 2xe^{-y/x}$ δ) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

8.3.4. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$, $y(1) = -2$ β) $2x\,y\,y' + x^2 - 3y^2 = 0$, $y(2) = 1$ γ) $y' = 1 + \dfrac{y}{x + \sqrt{xy}}$, $y(2) = 3$

8.3.5. Να επαληθεύσετε ότι οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και στη συνέχεια να τις επιλύσετε.

α) $2xyy' = x^2 + 2y^2$ β) $x^2 y' - 3xy - 2y^2 = 0$ γ) $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

8.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και Riccati.

Ένα από τα σημαντικότερα είδη διαφορικών εξισώσεων είναι οι γραμμικές. Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι εκείνη της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι γραμμική συνάρτηση της άγνωστης συνάρτησης $y=y(x)$. Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση $y'=3y+6$ ή ισοδύναμα η

$$y' - 3y = 6 \tag{8.4.1}$$

είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση. Αν πολλαπλασιάσουμε την (8.4.1) με τον παράγοντα

$$Q(x) = e^{\int -3\,dx} = e^{-3x},$$

(σημειώνουμε ότι έχει παραλειφθεί η σταθερά της ολοκλήρωσης στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας) προκύπτει:

$$y' e^{-3x} - 3y e^{-3x} = 6e^{-3x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(y e^{-3x}\right) = 6e^{-3x}.$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς x, μπορούμε να λάβουμε εύκολα τη γενική λύση ως εξής:

$$\int \frac{d}{dx}\left(y e^{-3x}\right)dx = \int 6e^{-3x}dx \Leftrightarrow y e^{-3x} = -2e^{-3x} + c\; y = c-2 + ce^{3x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να επιλύσουμε οποιαδήποτε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης καλείται ***γραμμική*** όταν είναι της μορφής

$$y'(x) + p(x)y = f(x), \tag{8.4.2}$$

όπου $p(x), f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν $f(x)=0$, η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης που προκύπτει ονομάζεται ***ομογενής***.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y''(x)+p(x)y'+q(x)y=r(x),$$

όπου $p(x)$, $q(x)$ και $r(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x.

Το ενδιαφέρον μας σε αυτήν την παράγραφο θα επικεντρωθεί στην επίλυση της εξίσωσης πρώτης τάξης (8.4.2). Εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται με τη βοήθεια ενός ***ολοκληρωτικού παράγοντα***, γνωστού και ως ***πολλαπλασιαστή*** του ***Euler***, της μορφής

$$Q(x)=e^{\int p(x)dx} \tag{8.4.3}$$

που εξαρτάται μόνο από το x (δηλ. δεν περιέχει καθόλου το y). Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (8.4.2) με τον παραπάνω ολοκληρωτικό παράγοντα παίρνουμε:

$$y'\cdot e^{\int p(x)dx}+p(x)\cdot e^{\int p(x)dx}y=f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\Leftrightarrow\left(y\cdot e^{\int p(x)dx}\right)'=f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της τελευταίας βρίσκουμε:

$$\int\left(y\cdot e^{\int p(x)dx}\right)'dx=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+c\Leftrightarrow ye^{\int p(x)dx}=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+c\ .$$

Συνεπώς:

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (8.4.2) δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+c\right],\quad c\in\mathbb{R}. \tag{8.4.4}$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι:

α) Αν $f(x)=0$ (ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης), έχουμε ουσιαστικά μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών της μορφής $y'(x)+p(x)y=0$, της οποίας η λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=c\,e^{-\int p(x)dx}.$$

β) Αν οι $p(x)$, $f(x)$ είναι σταθερές, τότε η (8.4.2) είναι και πάλι μία εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και μπορεί να επιλυθεί με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 8.2.

γ) Αν $p(x)=0$, τότε προκύπτει η εξίσωση $y'=f(x)$, της οποίας η γενική λύση προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση και των δύο μελών, δηλαδή:

$$y'=f(x)\Rightarrow\int y'dy=\int f(x)dx\Rightarrow y=\int f(x)dx+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.4.1.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'+3y=e^{2x}$.

Λύση.

Όπως παρατηρούμε, η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική της μορφής (8.4.2) με $p(x)=3$ και $f(x)=e^{2x}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (8.4.4) παίρνουμε:

$$y(x)=e^{-\int 3dx}\left[\int e^{2x}\cdot e^{\int 3dx}dx+c\right]\Leftrightarrow y(x)=e^{-3x}\left[\int e^{2x}e^{3x}dx+c\right]\Leftrightarrow y(x)=e^{-3x}\left[\int e^{5x}dx+c\right].$$

Επομένως, η γενική λύση της δοθείσας εξίσωσης θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=e^{-3x}\left[\frac{1}{5}e^{5x}+c\right]\Rightarrow y(x)=\frac{1}{5}e^{2x}+c\,e^{-3x},\quad c\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.4.2.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=3x,\ x>0.$

Λύση.

Η παραπάνω εξίσωση είναι προφανώς γραμμική με $p(x)=1/x$ και $f(x)=3x$ και αντίστοιχο ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$Q(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (8.4.4) η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=e^{-\ln x}\left[\int 3x\cdot e^{\ln x}dx+c\right]\Rightarrow y(x)=\frac{1}{x}\left[\int 3x\cdot x\,dx+c\right]\Rightarrow y(x)=\frac{1}{x}\left[3\int x^2\,dx+c\right],$$

απ' όπου προκύπτει τελικά:

$$y(x)=x^2+\frac{c}{x},\quad c\in\mathbb{R}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη διαφορική εξίσωση

$$y'+\frac{1}{x}y=xy^2,$$

η οποία διαφέρει από τη γραμμική διαφορική εξίσωση (8.4.2) μόνο κατά τον όρο y^2 στο δεύτερο μέλος. Μία τέτοια εξίσωση (η οποία είναι μεν πρώτης τάξης αλλά όχι γραμμική) ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli.

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής:

$$y'(x)+p(x)y=f(x)y^m,\ \ m\neq 0,1 \tag{8.4.5}$$

όπου $p(x)$, $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x, καλείται ***διαφορική εξίσωση του Bernoulli***.

Αν $m=0$, η διαφορική εξίσωση του Bernoulli είναι προφανώς γραμμική, ενώ αν $m=1$, ανάγεται άμεσα σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Για άλλες τιμές του m ($m\neq 0,1$) μετατρέπεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$z=y^{1-m}.$$

Η διαδικασία αυτή αποσαφηνίζεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.4.3.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$y'+\frac{3}{x}y=x^2y^2,\quad x>0 \tag{8.4.6}$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (8.4.6) είναι εξίσωση Bernoulli με $m = 2$ και $p(x) = 3/x$, $f(x) = x^2$. Αν ισχύει $y \neq 0$, μπορούμε να προχωρήσουμε στην αντικατάσταση $z = y^{1-2} \Leftrightarrow z = y^{-1}$, οπότε θα έχουμε $z' = -y^{-2}y'$ και η δοθείσα παίρνει τη μορφή

$$-y^{-2}\,y' - \frac{3}{x}y^{-1} = -x^2 \;\;\Rightarrow\;\; z' - \frac{3}{x}z = -x^2.$$

Η τελευταία είναι γραμμική πρώτης τάξης και μπορούμε να την επιλύσουμε εύκολα ακολουθώντας τη γενική πορεία λύσης που είδαμε στα προηγούμενα. Η τελική λύση που προκύπτει είναι η:

$$y(x) = \frac{1}{x^3(c - \ln x)}, \quad c - \ln x \neq 0, \quad x > 0$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ μία σταθερά. Αξίζει να αναφερθεί ότι και η $y(x) = 0$, $x > 0$ είναι μια προφανής αλλά τετριμμένη λύση της (8.4.6), η οποία όμως δεν προκύπτει από τη γενική λύση.

Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή αναφέροντας άλλη μία κατηγορία διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγονται σε ισοδύναμες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής:

$$y' = p(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x), \tag{8.4.7}$$

όπου $p(x)$, $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x, καλείται ***διαφορική εξίσωση του Riccati***.

Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνεται με ποιον τρόπο μπορεί κανείς να επιλύσει διαφορετικές εξισώσεις αυτής της μορφής:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.4.4.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$y' - e^{-x}y^2 + 3y - 3e^x = 0. \tag{8.4.8}$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (8.4.6) είναι εξίσωση Riccati με $p(x) = e^{-x}$, $q(x) = -3$, $r(x) = 3e^x$. Αν θέσουμε $y_1(x) = e^x$, είναι φανερό ότι

$$y_1' - e^{-x}y_1^2 + 3y_1 - 3e^x = e^x - e^{-x}\cdot e^{2x} + 3e^x - 3e^x = 0$$

οπότε η y_1 αποτελεί μια μερική λύση της (8.4.8).

Αν θέσουμε $y(x) = e^x + \dfrac{1}{u(x)}$, είναι εύκολο να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση (8.4.8) παίρνει τη μορφή:

$$u' - u + e^{-x} = 0.$$

Πράγματι, για την $y(x)$ έχουμε

$$y' = e^x - \frac{u'}{u^2}, \quad y^2 = e^{2x} + \frac{1}{u^2} + \frac{2e^x}{u}$$

οπότε

$$y' - e^{-x}y^2 + 3y - 3e^x = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{u'}{u^2} - e^{-x}\left(e^{2x} + \frac{1}{u^2} + \frac{2e^x}{u}\right) + 3\left(e^x + \frac{1}{u}\right) - 3e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} - \frac{e^{-x}}{u^2} + \frac{1}{u} = 0 \Leftrightarrow u' - u + e^{-x} = 0$$

Η τελευταία είναι μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής (8.4.2), οπότε η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο (8.4.3), δηλαδή

$$u(x) = e^x\left(-\int e^{-x}e^{-x}dx + c\right) = e^x\left(\frac{e^{-2x}}{2} + c\right) = \frac{1}{2}(e^{-x} + 2ce^x)$$

Επομένως, η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^x + e^{-x}}.$$

Ασκήσεις.

8.4.1. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση $y' - 3y = 6$.
α) Να βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα για την παραπάνω εξίσωση.
β) Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση.

8.4.2. Να επιλύσετε τις παρακάτω (γραμμικές) διαφορικές εξισώσεις.

α) $y' - \frac{3}{x}y = x^3$ β) $y' + y = \sin x$ γ) $y' + \frac{4}{x}y = x^4$ δ) $y' - xy = -x$

8.4.3. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y' + 2xy = 2x^3, \quad y(0) = 1$ β) $y' + xy = -x, \quad y(0) = -4$

γ) $y' + y = \sin x, \quad y(\pi) = 1$ δ) $y' + \frac{2}{10 + 2y}y = 4, \quad y(2) = 100$

8.4.4. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' + y - e^x y^2 = 0$.

8.4.5. Να επιλύσετε το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών $y' + \frac{6}{x}y = 3y^{\frac{4}{3}}, \quad y(1) = \frac{1}{8}$.

8.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε τη γενίκευση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Γραμμική διαφορική εξίσωση n–τάξης καλείται μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n(x)y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = f(x), \qquad (8.5.1)$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ και οι συντελεστές $\alpha_i\,(x)$, $i = 0,1, 2,..., n$ εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή x.

Αν $f(x) = 0$, τότε η εξίσωση (8.5.1) ονομάζεται ***ομογενής***, ενώ αν $f(x) \neq 0$ ονομάζεται ***μη ομογενής***.

Στην περίπτωση που όλοι οι συντελεστές α_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, είναι σταθεροί αριθμοί, δηλαδή η εξίσωση έχει τη μορφή

$$\alpha_n y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_2 y''(x) + \alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = f(x)$$

θα ονομάζεται ***γραμμική διαφορική εξίσωση n–τάξης με σταθερούς συντελεστές***.

Η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές μπορεί προφανώς να γραφεί στη μορφή

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0 \tag{8.5.2}$$

όπου p, q σταθεροί αριθμοί. Στη συνέχεια, θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε διαφορικές εξισώσεις αυτού του τύπου.

Ας αναζητήσουμε αρχικά για την (8.5.2) μερικές λύσεις της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}$. Αφού:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{και} \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

αντικαθιστώντας στην (8.5.2), παίρνουμε $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$, οπότε θα έχουμε

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{8.5.3}$$

Η τελευταία καλείται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (8.5.2). Αν λ_0 είναι μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (8.5.3), τότε η συνάρτηση $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ θα αποτελεί όντως μια μερική λύση της (8.5.2). Έτσι, για παράδειγμα, η χαρακτηριστική εξίσωση της $y'' + 3y' - 4y=0$ είναι η $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ και αφού οι ρίζες της τελευταίας είναι οι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2 = -4$, οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x$ και $y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-4x}$ θα αποτελούν μερικές λύσεις της.

Σημειώνουμε ότι με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης n–τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_2 y''(x) + \alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = 0,$$

η οποία θα δίνεται από την

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0.$$

Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική εξίσωση της $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - y = 0$ είναι η $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση της $\dfrac{d^5x}{dt^5} - 3\dfrac{d^3x}{dt^3} + 5\dfrac{dx}{dt} - 7x = 0$ είναι η $\lambda^5 - 3\lambda^3 + 5\lambda - 7 = 0$ κ.ο.κ.

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις ορίζονται μόνο για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και όχι για τη γενική μορφή (8.5.1). Η χαρακτηριστική εξίσωση παίζει σπουδαίο ρόλο στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, αφού οι ρίζες της σχετίζονται άμεσα με τις λύσεις των αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου, θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Για την κατηγορία αυτή διαφορικών εξισώσεων ισχύει το επόμενο γενικό αποτέλεσμα:

Έστω η διαφορική εξίσωση (8.5.2) με αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση την (8.5.3). Ας συμβολίσουμε με $\Delta = p^2 - 4q$ τη διακρίνουσα της (8.5.3) και με λ_1, λ_2 τις ρίζες της. Για την εύρεση της γενικής λύσης $y_{ομ}$ της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (8.5.2) διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta > 0$, οπότε $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (η χαρακτηριστική εξίσωση (8.5.3) έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες), τότε οι $e^{\lambda_1 x}$ και $e^{\lambda_2 x}$ είναι μερικές λύσεις της (8.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{8.5.4}$$

β) Αν $\Delta = 0$, οπότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (η χαρακτηριστική εξίσωση (8.5.3) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα), τότε οι $e^{\lambda x}$ και $x e^{\lambda x}$ είναι μερικές λύσεις της (8.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}. \tag{8.5.5}$$

γ) Αν $\Delta < 0$, οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση (8.5.3) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω $\lambda_1 = a + \beta i,\ \lambda_2 = a - \beta i$, τότε η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{\text{ομ}} = e^{ax}(c_1\,\text{συν}\beta x + c_2\,\text{ημ}\beta x). \tag{8.5.6}$$

Στα επόμενα παραδείγματα παρουσιάζεται ο τρόπος εφαρμογής των παραπάνω σε συγκεκριμένες διαφορικές εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5.1.

Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Λύση.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι η επόμενη: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Αυτή έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$ και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (8.5.4), η γενική λύση της θα δίνεται από τον τύπο $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5.2.

α) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' - 4y' + 4y = 0$.

β) Να βρείτε τη μερική λύση της παραπάνω εξίσωσης που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = y'(0) = 1$.

Λύση.

α) Η παραπάνω εξίσωση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ με ρίζες τις $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$, οπότε η γενική λύση της είναι η $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι, αν παραγωγίσουμε τη γενική λύση, έχουμε:

$$y'_{\text{ομ}} = 2c_1 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + c_2 e^{2x} = e^{2x}(2c_1 + 2xc_2 + c_2).$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = y'(0) = 1$ παίρνουμε:

$$y_{\text{ομ}}(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1,\quad y'_{\text{ομ}}(0) = 1 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 1.$$

Επομένως, $c_1 = 0,\ c_2 = 1$ και η μερική λύση για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες είναι η $y_{\text{ομ}} = x e^{2x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5.3.

Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Λύση

Η παραπάνω εξίσωση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2+4\lambda+5=0$, με $\Delta=p^2-4q=4^2-4\cdot 5=-4<0$ και επομένως έχει δύο μιγαδικές ρίζες, τις $\lambda_1=-2+i,\quad \lambda_2=-2-i$.

Σύμφωνα με τον τύπο (8.5.6), η γενική λύση της εξίσωσης είναι η $y_{\text{ομ}}=e^{-2x}(c_1\,\text{συν}x+c_2\,\text{ημ}x)$.

Στις εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων που αφορούν στον τύπο (8.5.6), αν θέσουμε $c_1=A$ ημφ, $c_2=A$ συνφ, ο τύπος (8.5.6) μετατρέπεται στον ισοδύναμο

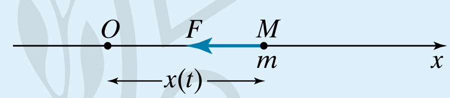
$$y_{\text{ομ}}=e^{ax}\,(A\,\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\beta x+A\,\text{συν}\varphi\,\text{ημ}\,\beta x)=A\,e^{ax}\,(\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\beta x+\text{συν}\varphi\,\text{ημ}\,\beta x)=A\,e^{ax}\,\text{ημ}(\beta x+\varphi)$$

(χρησιμοποιήθηκε ο τριγωνομετρικός τύπος $\text{ημ}(\alpha+\beta)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta$). Η φυσική ερμηνεία της παραπάνω έκφρασης είναι ότι αν η ανεξάρτητη μεταβλητή x ερμηνευθεί ως χρόνος, τότε από φυσικής άποψης ο τύπος $y_{\text{ομ}}=A\,e^{\alpha x}\,\text{ημ}(\beta x+\varphi)$ περιγράφει ταλαντώσεις με αρχική φάση φ, οι οποίες για $\alpha>0$ μεγαλώνουν απεριόριστα, ενώ για $\alpha<0$ αποσβένουν.

Ως εφαρμογή του παραπάνω, ας επανέλθουμε στην πρώτη διαφορική εξίσωση που αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου 8.1, η οποία προκύπτει από τον νόμο του Νεύτωνα. Στο επόμενο παράδειγμα θα κατασκευάσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση και στη συνέχεια θα την επιλύσουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5.4.

Έστω ένα υλικό σημείο M μάζας m, το οποίο έλκεται από ακίνητο κέντρο O και η δύναμη F που ασκείται από το O προς αυτό είναι ανάλογη της απομάκρυνσης (σχ. 8.5). Να βρείτε τον νόμο κίνησης του σημείου M.



Σχ. 8.5

Λύση.

Από τον νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι ισχύει $F=m\cdot a$, όπου a είναι η επιτάχυνση που αποκτά το υλικό σημείο υπό την επίδραση της δύναμης F. Γνωρίζουμε όμως, από τον νόμο του Hooke, ότι ισχύει επίσης $F=-k\cdot x$, όπου $k>0$ ένας συντελεστής αναλογίας, x η απόσταση του υλικού σημείου M από το O (το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της F είναι αντίθετη προς την μετατόπιση x του M). Είναι επίσης γνωστό ότι η επιτάχυνση $a=a(t)$ δίνεται από τη δεύτερη παράγωγο της απόστασης $x=x(t)$ ως προς τον χρόνο, δηλαδή

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση:

$$-k\,x=m\,\frac{d^2x}{dt^2}\Leftrightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\Leftrightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2\,x=0\Leftrightarrow x''+\omega^2x=0\,,$$

όπου θέσαμε $\omega^2=\dfrac{k}{m}\Rightarrow\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (σταθερά). Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η $\lambda^2+\omega^2=0$, οπότε $\lambda^2+\omega^2=0\Rightarrow\lambda^2=-\omega^2\Rightarrow\lambda=\pm\,\mathrm{i}\,\omega$, δηλαδή έχει μιγαδικές ρίζες, τις $\lambda_1=0+\mathrm{i}\omega,\quad\lambda_2=0-\mathrm{i}\omega$.

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (8.5.6), η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης που μας ενδιαφέρει δίνεται από τον τύπο $x_{\text{ομ}}=e^{0\cdot x}\,(c_1\,\text{συν}\omega t+c_2\,\text{ημ}\omega t)$.

Αν θέσουμε $c_1 = A$ ημφ, $c_2 = A$ συνφ, η γενική λύση μετατρέπεται στην $x_{\text{ομ}}(t) = A\text{ημ}(\omega t+\varphi)$, $A \geq 0$. Η τελευταία δηλώνει ότι το σημείο M εκτελεί περιοδικές αρμονικές ταλαντώσεις ως προς το κέντρο έλξης O, με πλάτος ταλάντωσης A και αρχική φάση φ.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x), \tag{8.5.7}$$

όπου p, q σταθερές και $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = e^{3x}, \tag{8.5.8}$$

όπου έχουμε $p = -2$, $q = 1$ και $f(x) = e^{3x}$. Η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση της (8.5.8), δηλαδή η $y'' - 2y' + y = 0$, έχει χαρακτηριστική εξίσωση την $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ (η οποία έχει μία διπλή ρίζα, την $\lambda = 1$), οπότε η γενική της λύση είναι η

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^x + c_2\, x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι μία μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (8.5.8) είναι η

$$y_\mu = \frac{1}{4} e^{3x},$$

αφού με χρήση των

$$y_\mu = \frac{1}{4} e^{3x},\ y'_\mu = \frac{3}{4} e^{3x} \ \text{ και } \ y''_\mu = \frac{9}{4} e^{3x}$$

προκύπτει άμεσα ότι $y'' - 2y' + y = e^{3x}$.

Αν τώρα προσθέσουμε τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'' - 2y' + y = 0$ και τη μερική λύση της μη ομογενούς αυτής, τότε προκύπτει η συνάρτηση

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu = c_1 e^x + c_2\, x e^x + \frac{1}{4} e^{3x},$$

η οποία εύκολα μπορεί να επαληθευθεί ότι αποτελεί τη γενική λύση της (8.5.8).

Γενικά, αποδεικνύεται το εξής:

Η γενική λύση y της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (8.5.7) δίνεται από την έκφραση:

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu,$$

όπου $y_{\text{ομ}}$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$$

και y_μ είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (8.5.7) (η οποία δεν θα περιέχει καθόλου σταθερές).

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι για να υπολογιστεί η γενική λύση μιας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (8.5.7), θα πρέπει κάθε φορά να γνωρίζουμε μία μερική της λύση. Άρα, γεννιέται το βασικό ερώτημα: με ποιον τρόπο μπορούμε να προσδιορίζουμε τέτοιες μερικές λύσεις y_μ; Θα περιγράψουμε στη συνέχεια μια συγκεκριμένη μέθοδο εύρεσης μερικής λύσης, γνωστή ως ***μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών***. Πριν περιγράψουμε τη γενική μέθοδο, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5.5.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' - 5y' + 6y = x - 1, \tag{8.5.9}$$

Λύση.

Επιλύουμε αρχικά την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση $y'' - 5y + 6y = 0$, η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση την $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ με ρίζες $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Άρα η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

Θα αναζητήσουμε τώρα μία μερική λύση της (8.5.9). Αφού $f(x)=x-1$, θα μπορούσαμε ίσως να αναζητήσουμε μία μερική λύση της μορφής $y_\mu = \varkappa x + \lambda$. Έχουμε τότε $y'_\mu = \varkappa$, $y''_\mu = 0$ και αντικαθιστώντας στην (8.5.9) παίρνουμε:

$$0 - 5\varkappa + 6\varkappa x + 6\lambda = x - 1 \Leftrightarrow 6\varkappa x + (6\lambda - 5\varkappa) = x - 1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδίων δυνάμεων του x βρίσκουμε $6\varkappa=1$ και $6\lambda-5\varkappa=-1$, απ' όπου προκύπτει ότι $\varkappa = \frac{1}{6}$, $\lambda = -\frac{1}{36}$. Συνεπώς μία μερική λύση της (8.5.9) είναι η $y_\mu = \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}$ και η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (8.5.9) θα δίνεται από τον τύπο

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι στην περίπτωση που στη διαφορική εξίσωση (8.5.7) η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο, μπορούμε να αναζητήσουμε μία μερική λύση της μορφής $y_\mu = P(x)$, όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο ίδιου βαθμού με την f.

Γενικά το τι θα επιλέγουμε ως μορφή της μερικής λύσης της (8.5.7) εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης f που βρίσκεται στο δεξί της μέλος. Ακολουθούν αναλυτικές οδηγίες για τον τρόπο επιλογής της συνάρτησης f στις πλέον συνήθεις περιπτώσεις:

Η μερική λύση y_μ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (8.5.7) μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής:

α) Έστω ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού n ως προς x. Τότε:

– Αν $q \neq 0$, αναζητούμε μία μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

– Αν $q = 0$, αναζητούμε μία μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = x(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0),$$

όπου a_i, $i=0,1,2,3,\ldots,n$ είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

β) Έστω ότι $f(x) = k\,e^{\lambda x}$, όπου k, λ είναι γνωστές σταθερές. Τότε αναζητούμε μία μερική λύση της μορφής $y_\mu = Ae^{\lambda x}$, όπου A είναι μία σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί.

γ) Έστω ότι $f(x) = k_1\,ημωx + k_2\,συνωx$, όπου k_1, k_2 και ω είναι γνωστές σταθερές. Τότε αναζητούμε μία μερική λύση της μορφής $y_\mu = A\,ημωx + B\,συνωx$, όπου A, B είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε μερική λύση της (8.5.7) και όταν το δεξί μέλος της είναι συνδυασμός των περιπτώσεων (α), (β) και (γ). Για παράδειγμα, αν η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α) και (β), δηλαδή $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$, τότε θεωρούμε ως μερική λύση την

$$y_\mu = e^{\lambda x}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

με a_i, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, \nu$ σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Αν η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α), (β) και (γ) (πολυωνύμου, εκθετικής συνάρτησης και όρου ημιτόνου ή συνημιτόνου), δηλαδή:

$$f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)\,ημωx \quad ή \quad f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)\,συνωx,$$

τότε θεωρούμε ως μερική λύση την

$$y_\mu = e^{\lambda x}ημωx(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) + e^{\lambda x}συνωx(\beta_n x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)$$

με a_i, β_i, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Αναφέρουμε ότι υπάρχουν και διάφορες άλλες μέθοδοι εύρεσης μερικών λύσεων που καλύπτουν την περίπτωση που η f δεν ανήκει στους τύπους των συναρτήσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω ή όταν η διαφορική εξίσωση δεν έχει σταθερούς συντελεστές. Στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες μεθόδους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5.6.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Λύση.

Στην εξίσωση που δόθηκε, η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α) και (β), δηλαδή, $f(x) = e^{\lambda x}P_1(x)$, όπου $P_1(x) = 4x$ είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και $\lambda = 2$. Αναζητούμε λοιπόν μία μερική λύση της μορφής $y_\mu = e^{2x}(Ax + B)$, όπου A, B είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Όμως

$$y'_\mu = e^{2x}(2Ax + A + 2B), \quad y''_\mu = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B)$$

και με αντικατάσταση των δύο τελευταίων σχέσεων στη διαφορική εξίσωση παίρνουμε:

$$e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - e^{2x}(2Ax + A + 2B) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(Ax + 3A + B) = e^{2x}4x \Leftrightarrow Ax + 3A + B = 4x + 0\,.$$

Άρα $A = 4$ και $3A + B = 0 \Rightarrow B = -12$ και μία μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης που δόθηκε είναι η $y_\mu = e^{2x}(4x - 12)$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' - y' - y = 0$, η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2-\lambda-1=0$. Οι ρίζες της είναι οι $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

οπότε η γενική λύση της ομογενούς είναι η

$$y_{\text{ομ}}=c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

Τελικά η γενική λύση θα είναι η

$$y=y_{\text{ομ}}+y_\mu=c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}+e^{2x}(4x-12).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.5.7.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y''-y-2y=\text{ημ}2x$.

Λύση.

Εύκολα μπορεί να βρει κάποιος, ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία, ότι η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_{\text{ομ}}=c_1 e^{-x}+c_2 e^{2x}$.

Αφού $f(x)=\text{ημ}\,2x$, αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_\mu=A\,\text{ημ}2x+B\,\text{συν}2x$. Παραγωγίζοντας δύο φορές τη μερική λύση έχουμε:

$$y'_\mu=2A\text{συν}2x-2B\text{ημ}2x,\quad y''_\mu=-4A\text{ημ}2x-2B\text{συν}2x$$

και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$(-4A\text{ημ}2x-4B\text{συν}2x)-(2A\text{συν}2x-2B\text{ημ}2x)-2(A\text{ημ}2x+B\text{συν}2x)=\text{ημ}2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-6A+2B)\text{ημ}2x+(-6B-2A)\text{συν}2x=1\cdot\text{ημ}2x+0\cdot\text{συν}2x.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων παίρνουμε $-6A+2B=1$ και $-2A-6B=0$, απ' όπου βρίσκουμε:

$$A=-\frac{3}{20}\quad\text{και}\quad B=\frac{1}{20}.$$

Επομένως $y_\mu=-\frac{3}{20}\text{ημ}2x+\frac{1}{20}\text{συν}2x$ και η γενική λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y=y_{\text{ομ}}+y_\mu=c_1 e^{-x}+c_2 e^{2x}-\frac{3}{20}\text{ημ}2x+\frac{1}{20}\text{συν}2x.$$

Ασκήσεις.

8.5.1. Να βρείτε την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων και να προσδιορίσετε ποιες από αυτές είναι γραμμικές.

α) $2xy''+x^2y'-(\text{συν}x)y=2$ β) $y''-y-2y=0$ γ) $y''-2y=0$

δ) $yy''+xy'+y=x^3$ ε) $4y''+4y'+y=0$ στ) $2y'+4xy=x+1$

Ποιες από τις παραπάνω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και ποιες με σταθερούς συντελεστές;

8.5.2. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=5e^{-x}$ είναι δύο μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y''-2y'+y=0$. Στη συνέχεια να ελέγξετε αν η $y=c_1e^x+c_2 5e^{-x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ αποτελεί επίσης λύση της.

8.5.3. Να επιλύσετε τις εξής διαφορικές εξισώσεις:

α) $y'' - 6y = 0$ β) $y'' - 7y' = 0$ γ) $y'' - 2y' - y = 0$

δ) $y'' + 2y' + 5y = 0$ ε) $y'' + 10y' + 21y = 0$ στ) $y'' - 3y' + 4y = 0$

8.5.4. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $\dfrac{d^2I}{dt^2} + 20\dfrac{dI}{dt} + 200I = 0$.

8.5.5. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 6$ είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' - 2y' + y = x^2$, να βρείτε τη γενική της λύση.

8.5.6. Να αποδείξετε ότι η γενική λύση $y_{ομ} = d_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + d_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$ της (8.5.2) στην περίπτωση που έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες, είναι ισοδύναμη με την $y_{ομ} = e^{\alpha x}(c_1\,συν\beta x + c_2\,ημ\beta x)$.

8.5.7. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y'' + y = 0,\ y(2) = y'(2) = 1$ β) $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 1$

γ) $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 8$ δ) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

8.5.8. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$ β) $y'' - y' - 2y = 4x^2$ γ) $y'' - 3y' + 2y = 2ημx$

δ) $y'' - 2y = 4x^2 e^x$ ε) $y'' - 7y' + y = e^{2x}(3x - 5)$ στ) $y'' - 3y' + 2y = 8x - 1$

8.5.9. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y'' - 3y' + 2y = 2ημx,\ y(1) = 0, y'(1) = 1$ β) $y'' + 8y' + 15y = e^x(x+3),\ y(0) = y'(0) = 0$

γ) $y'' + y = x^2 - 3x + 1,\ y(2) = 3, y'(2) = 0$ δ) $y'' - 2y + y = \dfrac{e^x}{x},\ y(1) = 0, y'(1) = 1$

8.6 Εφαρμογές.

Η μοντελοποίηση ενός φαινομένου της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, της Μηχανικής και πολλών άλλων επιστημών, οδηγεί αρκετά συχνά σε διαφορικές εξισώσεις. Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε παραδείγματα από μία σειρά φυσικών προβλημάτων-φαινομένων, τα οποία μπορούν να περιγραφούν και συγχρόνως να μελετηθούν μέσω διαφορικών εξισώσεων.

Για κάθε κατηγορία μοντέλου παρουσιάζεται αναλυτικά το φυσικό πρόβλημα, καθώς και η διαφορική εξίσωση που το περιγράφει μαθηματικά.

8.6.1 Ραδιενεργή ακτινοβολία.

Χρόνος ημιζωής ή απλά ***ημιζωή*** ενός ***ραδιενεργού στοιχείου*** είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ελαττωθεί κατά το ήμισυ η ένταση της ακτινοβολίας του. Η ημιζωή ενός ραδιενεργού ισοτόπου, σχετίζεται με έναν αριθμό, που χαρακτηρίζει την ταχύτητα ελάττωσης της έντασης ακτινοβολίας με την πάροδο του χρόνου.

Η ελάττωση της έντασης R της ακτινοβολίας ενός ραδιοϊσοτόπου περιγράφεται μαθηματικά με μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$\frac{dR}{dt} = kR, \tag{8.6.1}$$

όπου $k<0$. Η εξίσωση (8.6.1) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και η γενική της λύση βρίσκεται εύκολα ως εξής:

$$\frac{dR}{R}=k\,dt \Rightarrow \int\frac{dR}{R}=k\int dt \Rightarrow \ln R = k\,t+c' \Rightarrow R(t)=c\,e^{kt}, \tag{8.6.2}$$

όπου $c=e^{c'}$ μία σταθερά. Αν γνωρίζουμε την αρχική ένταση ακτινοβολίας του ισοτόπου (δηλ. αυτή που αντιστοιχεί σε χρόνο $t=0$), τότε η σταθερά c της λύσης (8 .6.2) προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$R(0)=ce^{k\cdot 0} \Rightarrow c=R(0).$$

Επομένως, η σταθερά c είναι ίση με την αρχική ένταση ακτινοβολίας $R(0)$. Η σταθερά k προσδιορίζεται συνήθως μέσα από εργαστηριακές μετρήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.6.1.

Το ισότοπο άνθρακας-14 του ραδιενεργού άνθρακα περιέχεται ως συστατικό της ύλης όλων των ζωντανών οργανισμών. Όταν ένας οργανισμός πεθάνει, τότε το ισότοπο άνθρακας-14 εξακολουθεί να ακτινοβολεί μέχρι να μηδενιστεί η ακτινοβολία του (στην πράξη μέχρι να αποκτήσει αμελητέα τιμή). Οι επιστήμονες θεωρούν ότι αυτό θα συμβεί μετά από χρόνο διπλάσιο της ημιζωής* του άνθρακα-14, η οποία είναι περίπου 5730 χρόνια.

Αν ο ραδιενεργός άνθρακας που ανιχνεύτηκε σε ένα απολίθωμα εκπέμπει το 77,7% της αρχικής του ακτινοβολίας, να προσδιορίσετε την ηλικία του απολιθώματος.

Λύση.

Όπως είδαμε παραπάνω, η γενική λύση της (8.6.1) είναι η $R(t)=c\,e^{kt}$, όπου $c=R(0)$ η αρχική ακτινοβολία. Σύμφωνα με την υπόθεση των επιστημόνων, η ημιζωή του άνθρακα-14 είναι περίπου 5730 χρόνια, οπότε θα πρέπει να έχουμε $R(5730) = 0{,}5\,R(0)$ ή ισοδύναμα:

$$0{,}5\,R(0)=R(0)e^{5730k} \Leftrightarrow \ln 0{,}5=5730k \Leftrightarrow k=\frac{\ln 0{,}5}{5730}\cong -0{,}00012.$$

Αφού ο ραδιενεργός άνθρακας που ανιχνεύτηκε στο απολίθωμα εκπέμπει το 77,7% της αρχικής του ακτινοβολίας, για την ηλικία t του απολιθώματος θα πρέπει να ισχύει $R(t)=0{,}777\,R(0)$. Επομένως θα έχουμε διαδοχικά:

$$0{,}777\,R(0)=R(0)e^{k\,t} \Leftrightarrow 0{,}777=e^{k\,t} \Leftrightarrow t=\frac{\ln 0{,}777}{k} \Leftrightarrow t=\frac{\ln 0{,}777}{-0{,}00012}\cong 2102.$$

Άρα η ηλικία του απολιθώματος εκτιμάται στα 2102 χρόνια.

* Ημιζωή ή χρόνος ημιζωής ενός ραδιενεργού υλικού είναι ο χρόνος εντός του οποίου η εκπομπή ραδιενέργειας από αυτό πέφτει στο μισό της αρχικής της τιμής.

8.6.2 Ψύξη και θέρμανση.

Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι, σύμφωνα με μια βασική αρχή της διεργασίας ψύξης, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογος με τη διαφορά μεταξύ της θερμοκρασίας του και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος μέσου. Πρόκειται για τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, που ισχύει βεβαίως και για τη θέρμανση. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα σχετικό με τον νόμο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.6.2.

Έστω ότι μία ένα τρόφιμο βρίσκεται σε ένα ψυγείο θερμοκρασίας $2^o C$ και στη συνέχεια τοποθετείται σε έναν φούρνο θερμοκρασίας $200^o C$. Μετά από παρέλευση 30 min η εσωτερική θερμοκρασία του τροφίμου έχει ανέλθει στους $16^o C$. Αν το ψήσιμο του τροφίμου ολοκληρώνεται όταν η εσωτερική θερμοκρασία φτάσει τους $88^o C$, να βρείτε τον χρόνο που απαιτείται συνολικά για το ψήσιμο του τροφίμου.

Λύση.

Αν συμβολίσουμε με $\theta=\theta(t)$ τη θερμοκρασία του τροφίμου τη χρονική στιγμή t, τότε ο ρυθμός μεταβολής αυτής θα δίνεται από την παράγωγο $\dfrac{d\theta}{dt}$. Επομένως, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διεργασία θέρμανσης είναι η

$$\frac{d\theta}{dt}=\gamma(200-\theta),$$

όπου γ ένας συντελεστής αναλογίας (που εξαρτάται από το μέσο). Η τελευταία είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και θα έχουμε:

$$\frac{d\theta}{dt}=\gamma(200-\theta)\Leftrightarrow\frac{d\theta}{200-\theta}=\gamma\,dt\Leftrightarrow\int\frac{d\theta}{200-\theta}=\int\gamma\,dt\Leftrightarrow-\ln(200-\theta)=\gamma t+c.$$

Από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$t=\frac{1}{\gamma}(-\ln(200-\theta)-c). \tag{8.6.3}$$

Αφού τη χρονική στιγμή $t=0$ το τρόφιμο βρισκόταν σε θερμοκρασία 2^oC, ενώ στον χρόνο $t=30$ η θερμοκρασία της ήταν 16^oC, από την (8.6.3) προκύπτει $0=\dfrac{1}{\gamma}(-\ln(200-2)-c)\Rightarrow c=-\ln 198$ και

$$30=\frac{1}{\gamma}(-\ln(200-16)-c)\Rightarrow 30\gamma=-c-\ln 184\Rightarrow\gamma=\frac{\ln 198-\ln 184}{30}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των c,γ στην έκφραση (8.6.3) βρίσκουμε τον χρόνο που απαιτείται για το ψήσιμο του τροφίμου

$$t=30\,\frac{\ln 198-\ln 112}{\ln 198-\ln 184}\cong 233\,\text{min}.$$

8.6.3 Εξάπλωση επιδημίας.

Στη Βιολογία με τον όρο «πληθυσμό» εννοούμε τον αριθμό των ατόμων ή οργανισμών που ζουν σε μια δεδομένη περιοχή. Η εξάπλωση επιδημίας σε έναν πληθυσμό αποτελεί ένα φυσικό πρόβλημα, το οποίο μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μελέτης της εξάπλωσης ενός ιού σε ένα κλειστό πληθυσμό όπως θα ήταν π.χ. τα άτομα που ταξιδεύουν με ένα κρουαζιερόπλοιο, τα άτομα μιας μονάδας εκπαίδευσης του Πολεμικού Ναυτικού κτλ..

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.6.3.

α) Έστω ότι σε μια μονάδα νεοσυλλέκτων του Πολεμικού Ναυτικού κατατάχτηκαν συνολικά 3000 άτομα, 3 εκ των οποίων είναι φορείς ενός ιού. Ο ιός μεταδίδεται με ρυθμό ίσο με το ένα δεκάκις χιλιοστό του γινομένου των νοσούντων και μη νοσούντων ατόμων. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που θα νοσούν μετά από δύο ημέρες.

β) Μετά από πόσες ημέρες θα έχουν νοσήσει όλοι οι νεοσύλλεκτοι; Είναι λογικό το ερώτημα αυτό; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση.

α) Έστω $x = x(t)$ ο αριθμός των νοσούντων ατόμων τη χρονική στιγμή t. Από υπόθεση για τον ρυθμό μεταβολής, θα έχουμε τη σχέση

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10^4} x(3000 - x), \tag{8.6.4}$$

η οποία είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Η λύση της (8.6.4) είναι η (αφήνεται ως άσκηση στον σπουδαστή)

$$x(t) = \frac{3000}{1 + c\,e^{-0,3t}}.$$

Από την αρχική συνθήκη $x(0)=3$, μπορούμε να βρούμε τη σταθερά c, ως εξής:

$$x(0) = 3 \Rightarrow \frac{3000}{1 + c\,e^{0}} = 3 \Rightarrow c = 999.$$

Άρα

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 999\,e^{-0,3t}} \tag{8.6.5}$$

και ο αριθμός των νεοσυλλέκτων που θα νοσούν μετά από δύο ημέρες θα δίνεται από την (8.6.5) για $t = 2$, δηλαδή θα είναι ίσος με:

$$x(2) = \frac{3000}{1 + 999\,e^{-0,6}} \Rightarrow x(2) \cong 5.$$

β) Αφού θέλουμε να έχουν νοσήσει όλοι οι νεοσύλλεκτοι, δηλαδή και τα 3000 άτομα, θα πρέπει να έχουμε $x(t)=3000$, οπότε παίρνουμε

$$3000 = \frac{3000}{1 + 999\,e^{-0,3t}} \Rightarrow e^{-0,3t} = 0.$$

Η ισότητα αυτή δεν ισχύει για καμμία συγκεκριμένη πραγματική τιμή του χρόνου t. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει για $t \to +\infty$, δηλαδή χρειάζεται άπειρος χρόνος για να νοσήσουν όλοι οι νεοσύλλεκτοι. Επομένως, το ερώτημα αυτό δεν έχει νόημα, αφού το ζητούμενο ενδεχόμενο πρακτικά δεν θα συμβεί ποτέ.

Ασκήσεις.

8.6.1. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται με ρυθμό ανάλογο με την παρούσα ποσότητά του, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{dN}{dt} = k\,N,$$

όπου $N = N(t)$ είναι η μάζα του υλικού και k μια σταθερά. Αν αρχικά υπήρχαν 50 mg ραδιενεργού υλικού, ενώ έπειτα από δύο ώρες παρατηρήθηκε ότι το υλικό έχει χάσει το 10% της αρχικής του μάζας, να βρείτε:

α) Μια έκφραση για τη μάζα που απομένει οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Τη μάζα του υλικού μετά από 4 ώρες.

γ) Τον χρόνο που χρειάζεται για να απομείνει το 50% της αρχικής μάζας.

8.6.2. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται με ρυθμό ανάλογο με την παρούσα ποσότητά του. Υποθέτουμε ότι αρχικά υπάρχουν 100 mg, ενώ έπειτα από δύο χρόνια παρατηρήθηκε ότι έχει διασπαστεί το 5% της αρχικής του μάζας. Να βρείτε:

α) Μια έκφραση για τη μάζα για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Τον χρόνο που χρειάζεται για να διασπαστεί το 10% της αρχικής μάζας.

8.6.3. Σε μία καλλιέργεια αναπτύσσονται βακτηρίδια με ρυθμό ανάλογο με τον πληθυσμό τους. Υποθέτουμε ότι αρχικά υπάρχουν 300 άτομα, ενώ μετά από 2 ώρες το πλήθος ατόμων της καλλιέργειας έχει αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος ατόμων της καλλιέργειας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Τον χρόνο που χρειάζεται για να διπλασιαστεί ο αρχικός πληθυσμός.

8.6.4. Ένα σώμα θερμοκρασίας 0^o F τοποθετείται σε περιβάλλον το οποίο έχει θερμοκρασία 100^o F. Μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος γίνεται 25^o F. Να βρείτε:

α) Τον χρόνο που απαιτείται για να φτάσει η θερμοκρασία στους 50^o F.

β) Τη θερμοκρασία του σώματος μετά από 20 min.

8.6.5. Ένα σώμα θερμοκρασίας 50^oF τοποθετείται σε φούρνο με σταθερή θερμοκρασία 150^o F. Αν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι 75^o F, να βρείτε τον χρόνο που απαιτείται, ώστε η θερμοκρασία να φτάσει τους 100^o F.

8.6.6. Ένα σώμα θερμοκρασίας 50^o F τοποθετείται σε φούρνο με σταθερή θερμοκρασία $150^o F$. Αν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $75^o F$, να βρείτε τον χρόνο που απαιτείται, ώστε η θερμοκρασία του να φτάσει τους $100^o F$.

8.6.7. Ένα φλιτζάνι ζεστής σοκολάτας με αρχική θερμοκρασία $190^o F$, αφήνεται να παγώσει σε περιβάλλον θερμοκρασίας $72^o F$. Η θερμοκρασία του μετά από δύο λεπτά πέφτει στους 150^o F. Να υπολογίσετε:

α) Τη θερμοκρασία της σοκολάτας μετά από 5 min.

β) Τον χρόνο που χρειάζεται για να πέσει η θερμοκρασία στους $100^o F$.

8.6.8. Σε έναν πληθυσμό που αποτελείται από 500 ποντίκια μολύνθηκαν σκόπιμα τα 5 από αυτά από ιό μιας μεταδοτικής νόσου. Ο σκοπός της μόλυνσης ήταν να ελεγχθεί μια θεωρία επιδημικής εξάπλωσης, σύμφωνα με την οποία ο ρυθμός μεταβολής του μολυσμένου πληθυσμού $N(t)$ είναι ανάλογος με το γινόμενο του πλήθους των ποντικών που μολύνθηκαν επί το πλήθος των υγιών ποντικών, δηλαδή $\frac{dN}{dt} = k\,N\,(500 - N)$, όπου k μια σταθερά. Να βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται για να μολυνθεί ο μισός πληθυσμός.

9

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Ο όρος «στατιστική» είναι ένας γνωστός όρος σε όλους, αφού αρκετά συχνά τα Μ.Μ.Ε. αναφέρονται σε στατιστικά στοιχεία που αφορούν στις αφίξεις τουριστών στην Ελλάδα, στα τροχαία ατυχήματα, στις γεννήσεις, στο εξωτερικό μας εμπόριο κ.ά. Η στατιστική με την έννοια της απλής συλλογής πληροφοριών (απογραφής), οι οποίες ήταν απαραίτητες για τη λειτουργία του κράτους (για στρατιωτικούς και φορολογικούς λόγους) ήταν γνωστή από την αρχαιότητα. Για τον λόγο αυτό, από πολλούς θεωρείται ότι ο όρος «στατιστική» προέρχεται από τη λατινική λέξη status, η οποία σημαίνει πολιτεία ή κράτος. Σύμφωνα με ιστορικές μαρτυρίες, η πρώτη συστηματική απογραφή διενεργήθηκε στην Κίνα το 2238 π.Χ. από τον αυτοκράτορα Yao, ενώ κατά καιρούς πραγματοποιήθηκαν επίσης απογραφές και από τους Αιγύπτιους, τους Έλληνες και τους Ρωμαίους.

Ενώ παλαιότερα η Στατιστική είχε ως αντικείμενο τη συγκέντρωση στοιχείων και την παράθεση τεράστιων πινάκων με δεδομένα καθώς και διαγραμμάτων, σήμερα αποτελεί μια αυτοτελή επιστήμη, της οποίας οι βασικές έννοιες και τεχνικές έχουν εισχωρήσει σε όλες σχεδόν τις επιστήμες και σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Στατιστικής και στις μεθόδους παρουσίασης στατιστικών στοιχείων μέσω γραφημάτων και αριθμητικών περιγραφικών μέτρων. Τέλος, θα δοθεί η έννοια της συσχέτισης δύο μεταβλητών, καθώς και μία σύντομη εισαγωγή στην ανάλυση παλινδρόμησης.

9.1 Εισαγωγή – Πληθυσμός και δείγμα.

Σύμφωνα με τη συνήθη έννοια, ο όρος «στατιστική» σημαίνει την παρουσίαση σε οργανωμένη μορφή της πληροφορίας η οποία αντλείται μέσα από απαριθμήσεις ή μετρήσεις γεγονότων και χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των ατόμων ή φαινομένων που μελετάμε. Ο πλέον γνωστός ορισμός της επιστήμης της Στατιστικής είναι εκείνος που δόθηκε από τον R.A. Fisher (1890-1962), σύμφωνα με τον οποίο:

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών που έχουν ως στόχο:
α) Τον σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων.
β) Τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους.
γ) Την ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η ανάπτυξη επιστημονικών τεχνικών που αφορούν στον σχεδιασμό και στην υλοποίηση της διαδικασίας συλλογής δεδομένων είναι αντικείμενο μιας περιοχής της Στατιστικής, γνωστής με την ονομασία ***θεωρία δειγματοληψίας***, και μιας δεύτερης που ονομάζεται ***σχεδιασμός πειραμάτων***. Η οργάνωση/ταξινόμηση των δεδομένων με σκοπό την παρουσίασή τους με συνοπτικό και αποτελεσματικό τρόπο, ώστε αυτά να γίνουν κατανοητά ακόμη και από τους μη ειδικούς, αποτελεί το αντικείμενο ενός κλάδου της Στατιστικής που ονομάζεται ***περιγραφική στατιστική***. Τέλος, η λεγόμενη ***επαγωγική στατιστική*** ή ***στατιστική συμπερασματολογία*** αναπτύσσει μεθόδους για την εξαγωγή επιστημονικά τεκμηριωμένων συμπερασμάτων, ώστε ο ενδιαφερόμενος να οδηγηθεί στη συνέχεια στη λήψη αποφάσεων, με το μικρότερο δυνατό σφάλμα. Οι τεχνικές που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της επαγωγικής Στατιστικής επιτρέπουν τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου πληθυσμού, με βάση τα στοιχεία που συλλέχθηκαν για τα χαρακτηριστικά αυτά σε ένα μικρό υποσύνολο των δεδομένων.

Μια θεμελιώδης έννοια της Στατιστικής είναι αυτή της ομάδας ή του συνόλου, για την οποία οι στατιστικοί αναλυτές χρησιμοποιούν τον όρο *στατιστικός πληθυσμός* ή απλά ***πληθυσμός***. Ο όρος *πληθυσμός* θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια για να δηλώσει οποιοδήποτε σύνολο ατόμων (ανθρώπων, ζώων κ.λπ.) ή αντικειμένων, τα χαρακτηριστικά των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε. Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως ***μονάδες*** ή ***άτομα*** του πληθυσμού. Οι πληθυσμοί διακρίνονται σε πεπερασμένους και μη πεπερασμένους (ή άπειρους), ανάλογα με το αν το πλήθος των μονάδων που περιλαμβάνουν είναι πεπερασμένο ή όχι.

Για παράδειγμα:

α) Αν, εν όψει των προσεχών εκλογών, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την ηλικία και τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων, ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των ατόμων που μπορούν να ψηφίσουν στις συγκεκριμένες εκλογές. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι οι ψηφοφόροι και ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος.

β) Αν θέλουμε να μελετήσουμε τον χρόνο ζωής ενός GPS πλοίου που παράγεται από μια συγκεκριμένη βιομηχανία, ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των GPS που παράγονται από τη βιομηχανία. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι τα GPS και ο πληθυσμός είναι μη πεπερασμένος (θεωρητικά τουλάχιστον, αν υποθέσουμε ότι η βιομηχανία θα συνεχίσει να παράγει το συγκεκριμένο GPS στο μέλλον χωρίς διακοπή).

γ) Αν θέλουμε να μελετήσουμε το εργατικό δυναμικό (αριθμός υπαλλήλων) και το μέγεθος των ελληνικών ναυτιλιακών εταιρειών (έστω ότι αυτές έχουν ταξινομηθεί σε τρεις κατηγορίες: μικρή, μεσαία, μεγάλη), ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των ελληνικών ναυτιλιακών εταιρειών. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι οι ναυτιλιακές εταιρείες και ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος.

Σε καθένα από τα παραπάνω παραδείγματα επιθυμούμε να εξετάσουμε τις μονάδες ενός πληθυσμού ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους, τα οποία ονομάζονται ***πληθυσμιακά χαρακτηριστικά***. Είναι προφανές ότι οι τιμές των εξεταζόμενων χαρακτηριστικών ποικίλλουν (διαφέρουν, μεταβάλλονται) μεταξύ των μονάδων του πληθυσμού. Για τον λόγο αυτό τα πληθυσμιακά χαρακτηριστικά καλούνται ***μεταβλητές*** και συμβολίζονται συνήθως με κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, \dots$. Οι τιμές που μπορεί να λάβει μια μεταβλητή ονομάζονται (δυνατές) ***τιμές της μεταβλητής***. Για τα τρία παραδείγματα που δόθηκαν παραπάνω, οι μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν είναι:

α) Η προτίμηση X των ψηφοφόρων με τιμές «κόμμα α, κόμμα β, ...» και η ηλικία Y των ψηφοφόρων με τιμές «18, 19, 20, ...».

β) Ο χρόνος ζωής Z του GPS που παράγεται από τη βιομηχανία με τιμές στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) Το δυναμικό V των ναυτιλιακών εταιρειών με τιμές «1, 2,...» και το μέγεθος W με τιμές «μικρή, μεσαία, μεγάλη».

Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με τις τιμές που μπορούν να λάβουν και το είδος της μέτρησης που επιδέχονται: τις ***ποιοτικές*** και τις ***ποσοτικές***.

Οι ποιοτικές μεταβλητές αναφέρονται σε μη αριθμητικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού, π.χ. κατάσταση υγείας, επίπεδο μόρφωσης, επάγγελμα κ.λπ. Οι τιμές των ποιοτικών μεταβλητών εκφράζονται με λέξεις, γράμματα ή άλλα σύμβολα (αριθμητικά ή μη) και επιτρέπουν απλά την κατάταξη των επιμέρους μονάδων ενός πληθυσμού σε διακεκριμένες μεταξύ τους κατηγορίες. Καθεμιά μονάδα του πληθυσμού ανήκει οπωσδήποτε σε μία και μόνο κατηγορία και η πληροφόρηση που μπορούμε να έχουμε για ένα τέτοιο χαρακτηριστικό είναι η απλή απαρίθμηση των μονάδων-μελών καθεμιάς κατηγορίας. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές X και W που ορίστηκαν παραπάνω είναι ποιοτικές μεταβλητές. Ως άλλα παραδείγματα, μπορούμε να αναφέρουμε την ομάδα αίματος (με τιμές A, B, AB, 0), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), την επιβατική κίνηση των πλοίων σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλή, μέτρια ή χαμηλή κ.λπ.

Δύο ιδιαίτερες κατηγορίες ποιοτικών μεταβλητών είναι:

α) Οι ***διατάξιμες***, οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα στον ερευνητή να διαβαθμίσει (διατάξει) τις κατηγορίες που προκύπτουν από τις τιμές τους σε μια ιεραρχική σειρά (π.χ. το «επίπεδο εκπαίδευσης», σύμφωνα με το οποίο κατατάσσουμε τις μονάδες του πληθυσμού σε διακριτές κατηγορίες, όπως αυτούς που έχουν τελειώσει πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση, είναι διατάξιμη μεταβλητή, αφού μας δίνεται επιπλέον η δυνατότητα να διατάξουμε τις κατηγορίες αυτές σε μία σειρά από το χαμηλότερο προς το ανώτερο εκπαιδευτικό επίπεδο ή αντίστροφα).

β) Οι ***κατηγορικές*** ή μη διατάξιμες, οι οποίες αναφέρονται σε ποιοτικά χαρακτηριστικά που δεν δύνανται να ιεραρχηθούν, όπως το φύλο, το επάγγελμα, το χρώμα των ματιών, κ.λπ. Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση των κατηγορικών μεταβλητών είναι οι ***δίτιμες*** μεταβλητές, οι οποίες μπορούν να λάβουν μόνο δύο τιμές (π.χ. το φύλο, με τιμές αγόρι, κορίτσι).

Οι ***ποσοτικές*** μεταβλητές, αντίθετα με τις ποιοτικές, μπορούν να λάβουν μόνο αριθμητικές τιμές και για τις τιμές αυτές έχουν νόημα οι συνήθεις αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιαμός κ.λπ.).

Στην περίπτωση που μία ποσοτική μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο «μεμονωμένες» αριθμητικές τιμές (π.χ. «1, 2, 3, 4» ή «1, 10, 100» ή «..., –2, –1, 0, 1, 2,...») ονομάζεται ***διακριτή***. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές Y και V που ορίστηκαν στις περιπτώσεις (α) και (γ) παραπάνω είναι διακριτές μεταβλητές. Ως άλλα παραδείγματα μπορούμε να αναφέρουμε τον αριθμό παιδιών μιας οικογένειας, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1, 2,..., 6), τον αριθμό μελών ενός νοικοκυριού, τον μηνιαίο αριθμό θανατηφόρων ατυχημάτων στις εθνικές οδούς κ.λπ. Η δεύτερη κατηγορία ποσοτικών μεταβλητών είναι οι λεγόμενες ***συνεχείς*** μεταβλητές, οι τιμές των οποίων δύνανται, έστω θεωρητικά, να καλύψουν ένα συνεχές διάστημα τιμών, χωρίς να υπάρχει κανένα κενό μεταξύ των δυνατών τιμών τους. Τέτοια περίπτωση είναι η μεταβλητή Z του παραδείγματος (β), η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης, ο χρόνος που χρειάζεται ένα πλοίο για να πραγματοποιήσει ένα προγραμματισμένο δρομολόγιο κ.λπ. Για τη μέτρηση των συνεχών μεταβλητών υπάρχει συνήθως κάποια καθιερωμένη μονάδα μέτρησης, π.χ. δευτερόλεπτο (sec), ώρα (hour), μέτρο (m), κιλό (kg) κ.ά.

Στην πράξη ο διαχωρισμός μεταξύ διακριτών και συνεχών μεταβλητών δεν είναι πάντα σαφής, κυρίως λόγω του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι μονάδες μέτρησης και της πιθανής στρογγυλοποίησης που μπορεί να γίνεται. Έτσι, μία διακριτή μεταβλητή μπορεί να έχει προκύψει από την παρατήρηση μιας συνεχούς μεταβλητής, της οποίας η τιμή δεν καταγράφεται με απόλυτη ακρίβεια. Για παράδειγμα η ηλικία ενός ανθρώπου συνήθως δίνεται σε χρόνια, οπότε αποτελεί διακριτή μεταβλητή, ενώ η πραγματική της τιμή, μετρούμενη με απόλυτη ακρίβεια, με σημείο έναρξης τη στιγμή γέννησης του ανθρώπου, θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή.

Ένας τρόπος προκειμένου να αντλήσουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται ***απογραφή***.

Αρκετά συχνά οι πληθυσμοί που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε, είναι πρακτικά άπειροι ή τόσο μεγάλοι σε μέγεθος, που είναι δύσκολο ή και σχεδόν αδύνατο να λάβουμε τις επιθυμητές πληροφορίες για καθένα από τα μέλη τους. Παράλληλα, ο χρόνος και τα έξοδα που χρειάζονται για τη διεξαγωγή μιας απογραφής είναι υπερβολικά, ιδίως όταν ο πληθυσμός που εξετάζεται είναι αρκετά μεγάλος. Για παράδειγμα, μια εταιρεία δημοσκοπήσεων που έχει αναλάβει να προβλέψει το αποτέλεσμα των επόμενων βουλευτικών εκλογών, πριν αυτές διενεργηθούν, είναι δύσκολο να εξετάσει όλους τους ψηφοφόρους, για να προσδιορίσει το τι θα ψηφίσουν. Ένας κατασκευαστής ηλεκτρικών συσκευών είναι αδύνατο να δοκιμάζει όλες τις παραγόμενες συσκευές, για να ελέγχει την ορθή λειτουργία τους ή να τις παρακολουθεί μέχρι τη στιγμή που θα εμφανίσουν βλάβη για να καταγράψει τον χρόνο ζωής τους.

Όταν λοιπόν η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή ασύμφορη, καταφεύγουμε στην πράξη στη διαδικασία της ***δειγματοληψίας***, δηλαδή συλλέγουμε πληροφορίες από μια σχετικά μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται ***δείγμα*** και καταγράφουμε τις τιμές του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει μόνο για τα άτομα που επιλέχθηκαν στο δείγμα. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας κατάλληλες στατιστικές τεχνικές, γενικεύουμε τα συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Είναι φανερό ότι για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα που θα προκύψουν από τη μελέτη του δείγματος, δηλαδή να ισχύουν πράγματι με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό, η επιλογή του δείγματος θα πρέπει να πραγματοποιηθεί με ορθό τρόπο ή όπως λέμε στη στατιστική ορολογία το δείγμα να είναι ***αντιπροσωπευτικό*** του πληθυσμού. Πρακτικά, ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Όπως ήδη αναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας παραγράφου, μετά τον ορισμό της έννοιας της Στατιστικής, οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πληθυσμούς είναι αντικείμενο μιας ιδιαίτερης περιοχής της Στατιστικής που αναφέρεται ως Μέθοδοι Δειγματοληπτικών Ερευνών ή απλά ως Δειγματοληψία.

Ασκήσεις.

9.1.1. Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές;

α) Αριθμός ναυτικών ατυχημάτων σε ένα έτος.
β) Τόπος καταγωγής των Πλοιάρχων που εργάζονται σε μία ναυτιλιακή εταιρεία.
γ) Αριθμός επιβατών ενός πλοίου.
δ) Μεικτό βάρος ενός πλοίου.
ε) Οικογενειακή κατάσταση του πληρώματος ενός πλοίου.
στ) Είδος απασχόλησης του πληρώματος ενός πλοίου.
ζ) Τιμή αμόλυβδης βενζίνης σε ένα πρατήριο βενζίνης.
η) Αποτελέσματα εξετάσεων στο μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.
θ) Θερμοκρασία ψύξης στον χώρο του ψυγείου ενός εμπορικού πλοίου.

9.1.2. Για όσες από τις μεταβλητές της άσκησης 9.1.1 διαπιστώθηκε ότι είναι ποσοτικές, να βρείτε ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς.

9.1.3. Σε ένα πλοίο ταξιδεύουν 200 επιβάτες. Αν θέλετε να επιλέξετε με τυχαίο τρόπο 20 άτομα για να τους διανείμετε ένα ερωτηματολόγιο, με ποιους τρόπους θα κάνατε την επιλογή του δείγματος;

9.1.4. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αναφέρετε δύο μεταβλητές που θα μπορούσαν να μας ενδιαφέρουν. Στη συνέχεια, να καθορίσετε το είδος τους (ποιοτικές ή ποσοτικές) και να αναφέρετε μερικές δυνατές τιμές τους.

α) Λαμβάνουμε ένα δείγμα επιβατών ενός πλοίου, συνολικής χωρητικότητας 300 επιβατών.
β) Λαμβάνουμε ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας, στην οποία εργάζονται 30 άτομα.
γ) Εξετάζουμε ένα δείγμα προϊόντων από μια βιομηχανική γραμμή παραγωγής.
δ) Λαμβάνουμε τα στατιστικά στοιχεία ενός αγώνα καλαθοσφαίρισης.

9.1.5. Με την αγορά μίας καινούργιας ηλεκτρικής συσκευής λαμβάνεται ένα σύντομο στατιστικό δελτίο, το οποίο παρακαλείστε να συμπληρώσετε και να το ταχυδρομήσετε στον εμπορικό αντιπρόσωπο. Στο φυλλάδιο σας ζητούνται οι ακόλουθες πληροφορίες:

α) Πόσες άλλες συσκευές ίδιου είδους έχετε στην οικία σας;
β) Το φύλο σας.
γ) Από πόσα μέλη αποτελείται η οικογένειά σας;
δ) Από ποιο κατάστημα αγοράσατε τη συσκευή;

Να αναγνωρίσετε τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο και να τις ταξινομήσετε, δίνοντας παράλληλα και μερικές ή όλες (αν είναι δυνατόν) τις τιμές που μπορούν να λάβουν.

9.2 Πίνακες συχνοτήτων – Γραφικές μέθοδοι παρουσίασης στατιστικών στοιχείων.

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων (συνήθως από τις εθνικές στατιστικές υπηρεσίες, αν πρόκειται για απογραφικά δεδομένα ή εταιρείες δημοσκοπήσεων και ερευνητικά κέντρα αν πρόκειται για δεδομένα δειγματοληψίας), η πρώτη ενέργεια που γίνεται συνήθως, είναι η κατασκευή συνοπτικών πινάκων και γραφικών παραστάσεων, ώστε να είναι εύκολη η κατανόηση των δεδομένων τους και μια προκαταρκτική ανάλυση αυτών. Στους πίνακες αυτούς γίνεται κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση των στοιχείων και να απεικονίζεται με κάποιο τρόπο η δομή του πληθυσμού που μελετάμε.

Για παράδειγμα, ο πίνακας 9.2.1 έχει βασιστεί στα δελτία συμβάντων της Τροχαίας για το έτος 2020 και αφορά τον Αύγουστο του 2020. Ο πίνακας δίνει πληροφορίες για τον αριθμό των παρόντων σε τροχαία ατυχήματα κατά βαθμό σοβαρότητας.

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην εισαγωγή των εννοιών που θα αναλύσουμε στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι, μετά τη διανομή ενός ερωτηματολογίου σε 20 τυχαία επιλεγμένα ενήλικα άτομα που ταξίδευαν με ένα επιβατικό πλοίο, συγκεντρώθηκαν τα δεδομένα του πίνακα 9.2.2.

Στον πίνακα 9.2.2 έχουν καταχωρηθεί οι τιμές τριών χαρακτηριστικών (επάγγελμα, μηνιαίο εισόδημα και μηνιαία χρήση δρομολογίου) για $\nu=20$ άτομα. Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι συγκεντρώσαμε τις τιμές για τρεις μεταβλητές, με βάση ένα τυχαία επιλεγμένο δείγμα μεγέθους 20. Αν συμβολίσουμε με X μία από τις μεταβλητές αυτές, θα σημειώνουμε με $x_1, x_2,..., x_\nu$ τις αντίστοιχες τιμές για τα ν άτομα και με $t_1, t_2,..., t_\kappa$, τις διαφορετικές μεταξύ τους τιμές x_i. Έτσι, αν η μεταβλητή X παριστάνει το επάγγελμα των ατόμων του δείγματος, θα έχουμε:

x_1= Δημόσιος υπάλληλος, x_2= Ιδιοκτήτης εταιρείας,

x_3= Ανειδίκευτος εργάτης, x_4= Ιδιοκτήτης εταιρείας,

x_5= Δημόσιος υπάλληλος,..., x_{20}= Δημόσιος υπάλληλος,

ενώ το πλήθος των διαφορετικών τιμών είναι μόλις $\kappa=5$, δηλαδή

t_1= Δημόσιος υπάλληλος, t_2= Ιδιοκτήτης εταιρείας,

t_3= Ανειδίκευτος εργάτης, t_4= Τεχνίτης,

t_5= Ιδιωτικός υπάλληλος.

Πίνακας 9.2.1

Βαθμός σοβαρότητας	*Αριθμός*
Νεκροί	68
Βαριά τραυματίες	54
Ελαφρά τραυματίες	998
Σύνολο	**1120**

Αντίστοιχα, αν το X παριστάνει τη μηνιαία χρήση του δρομολογίου (πόσες φορές χρησιμοποιεί ο συγκεκριμένος επιβάτης το συγκεκριμένο δρομολόγιο τον μήνα) οι τιμές των x_i, $i = 1, 2,..., 20$ είναι 1, 2, 1, 10, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 4, 10, 1, 6, 2, 6, 6, ενώ $\kappa = 6$ και

$$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 6, t_6 = 10.$$

Ας υποθέσουμε ότι $t_1, t_2,..., t_\kappa$ είναι οι διαφορετικές τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν. Σε κάθε τιμή t_i αντιστοιχίζεται ένας φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή t_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται ***απόλυτη συχνότητα*** ή απλά ***συχνότητα*** της τιμής t_i. Είναι προφανές ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος, δηλαδή ισχύει:

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu. \tag{9.2.1}$$

Ο υπολογισμός των συχνοτήτων γίνεται, διατρέχοντας με τη σειρά τα συγκεντρωθέντα δεδομένα και καταγράφοντας κάθε παρατήρηση με ένα σύμβολο (π.χ. μια γραμμή “ | ”). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ***διαλογή των παρατηρήσεων*** και για λόγους εύκολης απαρίθμησης στη συνέχεια συνηθίζουμε να οργανώνουμε τα σύμβολα ανά πεντάδες, όπως φαίνεται στους πίνακες 9.2.3 και 9.2.4.

Πίνακας 9.2.2
Στοιχεία που αφορούν 20 ενήλικες επιβάτες

Άτομο	*Επάγγελμα*	*Μηνιαίο Εισόδημα (σε €)*	*Μηνιαία χρήση δρομολογίου*
1	Δημόσιος υπάλληλος	2000	1
2	Ιδιοκτήτης εταιρείας	5000	2
3	Ανειδίκευτος εργάτης	800	1
4	Ιδιοκτήτης εταιρείας	4000	10
5	Δημόσιος υπάλληλος	1800	1
6	Τεχνίτης	2450	2
7	Ιδιωτικός υπάλληλος	2500	3
8	Τεχνίτης	950	2
9	Δημόσιος υπάλληλος	2100	3
10	Ιδιωτικός υπάλληλος	3500	2
11	Τεχνίτης	1350	2
12	Δημόσιος υπάλληλος	1500	2
13	Ιδιωτικός υπάλληλος	3100	4
14	Ιδιωτικός υπάλληλος	2800	10
15	Δημόσιος υπάλληλος	1700	1
16	Ιδιωτικός υπάλληλος	1600	6
17	Δημόσιος υπάλληλος	1950	2
18	Δημόσιος υπάλληλος	2050	6
19	Ιδιωτικός υπάλληλος	3050	6
20	Δημόσιος υπάλληλος	2150	2

Πίνακας 9.2.3
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή Χ: «Επάγγελμα»

t_i	*Διαλογή*	*Συχνότητα* ν_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Σχετική συχνότητα* $f_i\%$
Δημόσιος υπάλληλος	~~||||~~ |||	8	0,40	40
Ιδιοκτήτης εταιρείας	||	2	0,10	10
Ανειδίκευτος εργάτης			1	0,05	5
Τεχνίτης	|||	3	0,15	15
Ιδιωτικός υπάλληλος	~~||||~~		6	0,30	30
Σύνολο		**20**	**1,00**	**100**

Πίνακας 9.2.4
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή Χ: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου»

t_i	*Διαλογή*	*Συχνότητα* ν_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Σχετική συχνότητα* $f_i\%$	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
1	||||	4	0,20	20	4	0,20
2	~~||||~~ |||	8	0,40	40	12	0,60
3	||	2	0,10	10	14	0,70
4			1	0,05	10	15	0,75
6	|||	3	0,15	15	18	0,90
10	||	2	0,10	10	20	1,00
Σύνολο		**20**	**1,00**	**100**		

Η τέταρτη στήλη των πινάκων 9.2.3 και 9.2.4 προκύπτει αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, οπότε λαμβάνουμε τη λεγόμενη ***σχετική συχνότητα*** f_i της τιμής t_i, δηλαδή έχουμε:

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, \kappa. \tag{9.2.2}$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i\%$ (βλ. πέμπτη στήλη των πινάκων 9.2.3 και 9.2.4)[1]. Είναι προφανές ότι για τις σχετικές συχνότητες ισχύουν οι σχέσεις:

α) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.
β) $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$.

Ένας πίνακας στον οποίο είναι συγκεντρωμένες οι ποσότητες t_i, ν_i, f_i (όπως οι πίνακες 9.2.3 και 9.2.4) ονομάζεται ***πίνακας κατανομής συχνοτήτων*** ή απλά ***πίνακας συχνοτήτων***. Το σύνολο των ζευγών (t_i, ν_i) λέμε ότι αποτελεί την ***κατανομή συχνοτήτων*** και το σύνολο των ζευγών (t_i, f_i), την ***κατανομή των σχετικών συχνοτήτων*** του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

1. Αντίστοιχο σχόλιο ισχύει και για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i.

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για ποσοτικές μεταβλητές, εκτός από τις συχνότητες ν_i και f_i χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες ***αθροιστικές συχνότητες*** N_i και οι ***αθροιστικές σχετικές συχνότητες*** F_i, οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό (απλό ή εκφρασμένο επί τοις εκατό) αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή t_i.

Αν οι διαφορετικές τιμές $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$, $\varkappa \leq \nu$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X τοποθετηθούν στον πίνακα συχνοτήτων σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής t_i θα ισούται με $N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$. Ομοίως, για την αθροιστική σχετική συχνότητα θα έχουμε $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$, για $i = 1, 2, ..., \varkappa$. Από τις δύο τελευταίες εκφράσεις είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\nu_1 = N_1,\ \nu_2 = N_2 - N_1, ..., \nu_\varkappa = N_\varkappa - N_{\varkappa-1}$$

και

$$f_1 = F_1,\ f_2 = F_2 - F_1, ..., f_\varkappa = F_\varkappa - F_{\varkappa-1},$$

μέσω των οποίων μπορούμε να υπολογίζουμε τις συχνότητες (απλές ή σχετικές) όταν γνωρίζουμε τις αθροιστικές συχνότητες.

Στην έκτη και έβδομη στήλη του πίνακα 9.2.4 δίνονται οι αθροιστικές συχνότητες της μεταβλητής *«Μηνιαία χρήση του δρομολογίου»* για τα δεδομένα του πίνακα 9.2.2.

Ένας γρήγορος τρόπος δημιουργίας πινάκων συχνοτήτων είναι με χρήση ειδικών προγραμμάτων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, τα οποία είναι γνωστά με την ονομασία ***Στατιστικά Προγράμματα*** ή ***Στατιστικά Πακέτα***. Ο πίνακας 9.2.5 έχει ληφθεί από ένα τέτοιο πρόγραμμα και μας δίνει την κατανομή συχνοτήτων για τη μεταβλητή X: *«Μηνιαία χρήση του δρομολογίου»*.

Πίνακας 9.2.5
Χρήση δρομολογίου

Valid	*Frequency*	*Percent*	*Cumulative percent*
1	4	20,0	20,0
2	8	40,0	60,0
3	2	10,0	70,0
4	1	5,0	75,0
6	3	15,0	90,0
10	2	10,0	100,0
Total	**20**	**100,0**	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2.1.

Στον πίνακα συχνοτήτων 9.2.6 δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και ορισμένες συχνότητες.

Πίνακας 9.2.6

t_i	*Συχνότητα* ν_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
1				
2	6	0,15	16	
3				0,45
4				
5	18			
Σύνολο				

α) Να συμπληρώσετε όλες τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα.

β) Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι: (i) το πολύ 3, (ii) τουλάχιστον 4, (iii) μεταξύ του 2 και του 4 (συμπεριλαμβανομένων των τιμών αυτών).

Λύση.

α) Με βάση τους τύπους που γνωρίζουμε για τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες (απόλυτες και σχετικές) έχουμε διαδοχικά:

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Rightarrow 0{,}15 = \frac{6}{v} \Rightarrow v = \frac{6}{0{,}15} = 40\ ,\ N_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow 16 = v_1 + 6 \Rightarrow v_1 = 10\ ,$$

$$N_1 = v_1 = 10\ ,\ f_1 = F_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{40} = 0{,}25\ ,$$

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 \Rightarrow 0{,}45 = 0{,}25 + 0{,}15 + f_3 \Rightarrow f_3 = 0{,}05\ ,$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0{,}05 = \frac{v_3}{40} \Rightarrow v_3 = 2\ ,$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \Rightarrow 40 = 10 + 6 + 2 + v_4 + 18 \Rightarrow v_4 = 4\ .$$

Αφού έχει συμπληρωθεί η στήλη με τις συχνότητες του πίνακα, είναι πλέον εύκολο να συμπληρωθούν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία που λείπουν, και έτσι προκύπτει ο πίνακας 9.2.7.

β) Με βάση τον πίνακα, τα ζητούμενα ποσοστά είναι ίσα με:

$$f_1 + f_2 + f_3 = F_3 = 45\%\ .$$

$$f_4 + f_5 = 0{,}10 + 0{,}45 = 55\%\ \text{ ή εναλλακτικά }\ 1 - F_3 = 1 - 0{,}45 = 55\%\ .$$

$$f_2 + f_3 + f_4 = 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}30 = 30\%\ .$$

Πίνακας 9.2.7

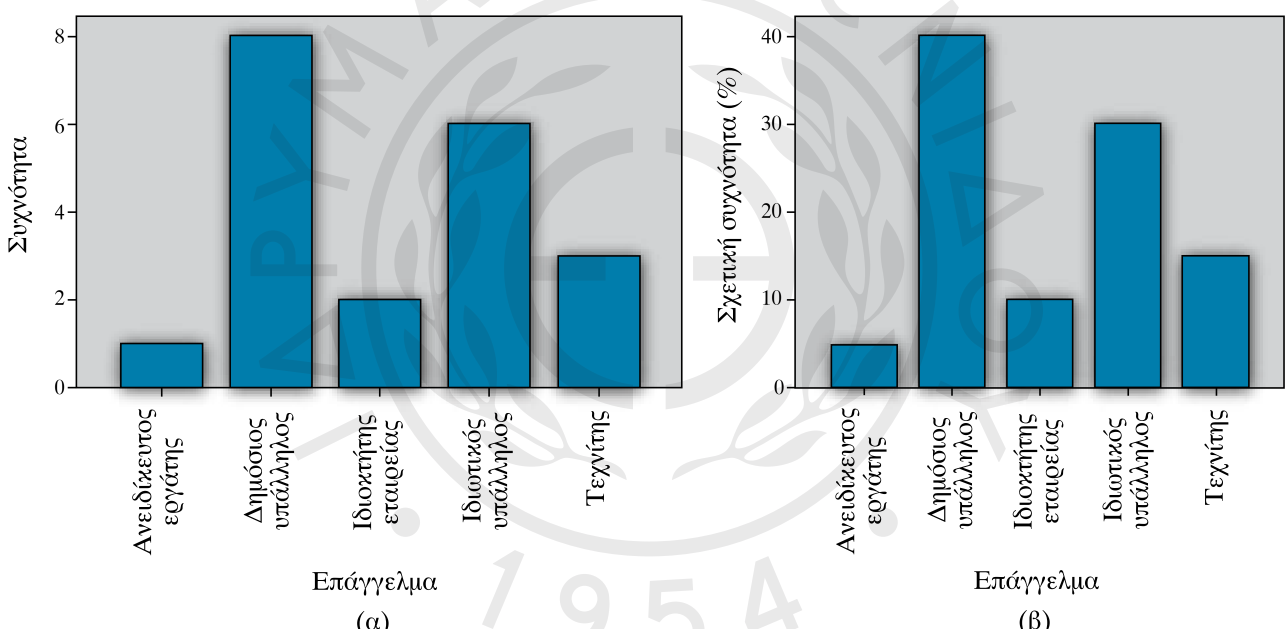
t_i	*Συχνότητα* v_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
1	10	0,25	10	0,25
2	6	0,15	16	0,40
3	2	0,05	18	0,45
4	4	0,10	22	0,55
5	18	0,45	40	1,00
Σύνολο	**40**	**1,00**		

Ένας αποτελεσματικός τρόπος παρουσίασης στατιστικών δεδομένων είναι με μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Σε σχέση με τους πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν μια πιο εύληπτη εικόνα του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει και είναι πολύ πιο κατανοητές, χωρίς πρακτικά να προσφέρουν λιγότερη πληροφορία από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνοτήτων. Επιπρόσθετα, με τα διαγράμματα διευκολύνεται σημαντικά η σύγκριση μεταξύ διάφορων πληθυσμιακών ομάδων ή δειγμάτων.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που διαθέτουμε. Για τη γραφική απεικόνιση των ποιοτικών δεδομένων χρησιμοποιούνται συνήθως τα ***ραβδογράμματα*** και τα ***κυκλικά διαγράμματα***. Στα διαγράμματα αυτά οι απεικονίσεις των διάφορων μεγεθών γίνονται με γεωμετρικά ή άλλα σχήματα, με εφαρμογή της αρχής της αναλογίας ως προς τις παρατηρούμενες συχνότητες, απόλυτες ή σχετικές. Στην περίπτωση που έχουμε ποσοτικά χαρακτηριστικά, αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιούμε το λεγόμενο ***διάγραμμα συχνοτήτων***.

Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή στον κατακόρυφο άξονα. Έτσι, τα ραβδογράμματα αποτελούνται από τόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όσες είναι οι διαφορετικές τιμές της ποιοτικής μεταβλητής που εξετάζουμε, έχουν συνήθως βάσεις ίσου εύρους, ενώ τα ύψη τους είναι ανάλογα των συχνοτήτων των αντίστοιχων τιμών στις οποίες αναφέρονται.

Ανάλογα με το αν στο ραβδόγραμμα απεικονίζονται απόλυτες ή σχετικές συχνότητες, έχουμε αντίστοιχα το ***ραβδόγραμμα συχνοτήτων*** και το ***ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων***. Στο σχήμα 9.2α δίνονται τα ραβδογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων της μεταβλητής X: *«Επάγγελμα»* για τα δεδομένα του πίνακα 9.2.1.

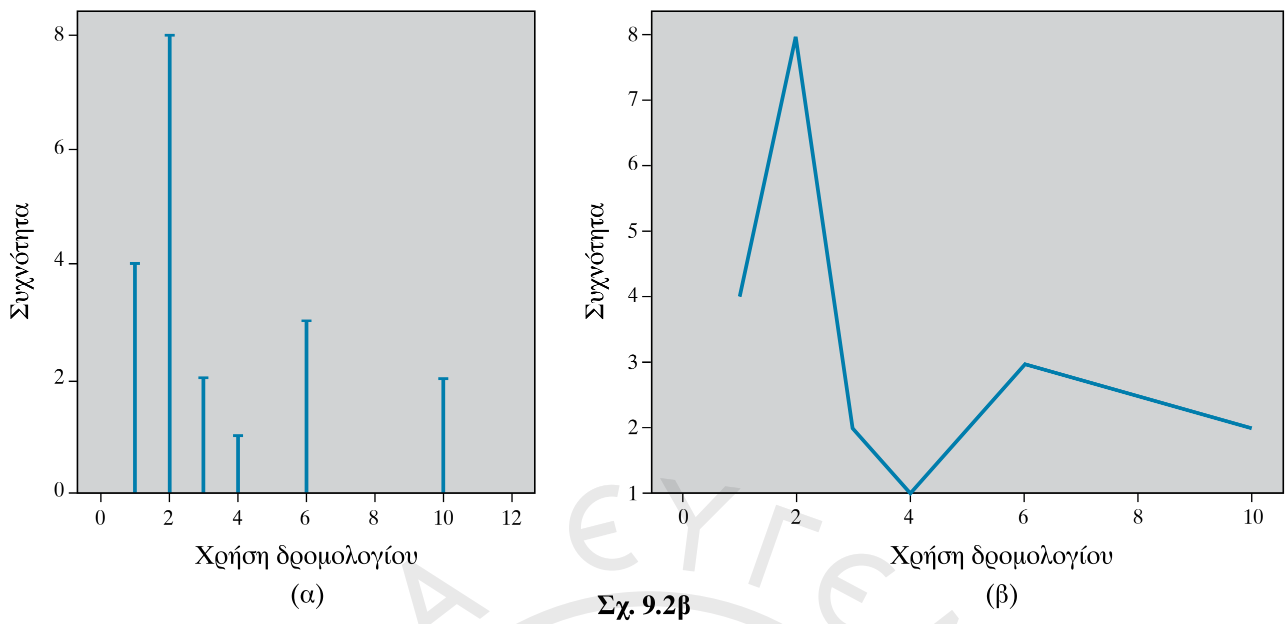


Σχ. 9.2α

Ραβδόγραμμα συχνοτήτων (α) και σχετικών συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή Χ: «Επάγγελμα» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2

Όπως ήδη αναφέρθηκε, όταν έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή, αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το ***διάγραμμα συχνοτήτων*** (σχ. 9.2β). Σ' αυτό, αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια, υψώνουμε στη θέση του άξονα που αντιστοιχούν οι διαφορετικές τιμές t_i μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων v_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i, οπότε έχουμε το ***διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων***. Ενώνοντας τα σημεία (t_i, v_i) ή (t_i, f_i) λαμβάνουμε το λεγόμενο ***πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων***, αντίστοιχα.

Το ***κυκλικό διάγραμμα*** (piechart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων. Για την κατασκευή ενός κυκλικού διαγράμματος αρχικά δημιουργούμε έναν κυκλικό δίσκο και στη συνέχεια τον χωρίζουμε σε τόσους κυκλικούς τομείς, όσες και οι



Σχ. 9.2β

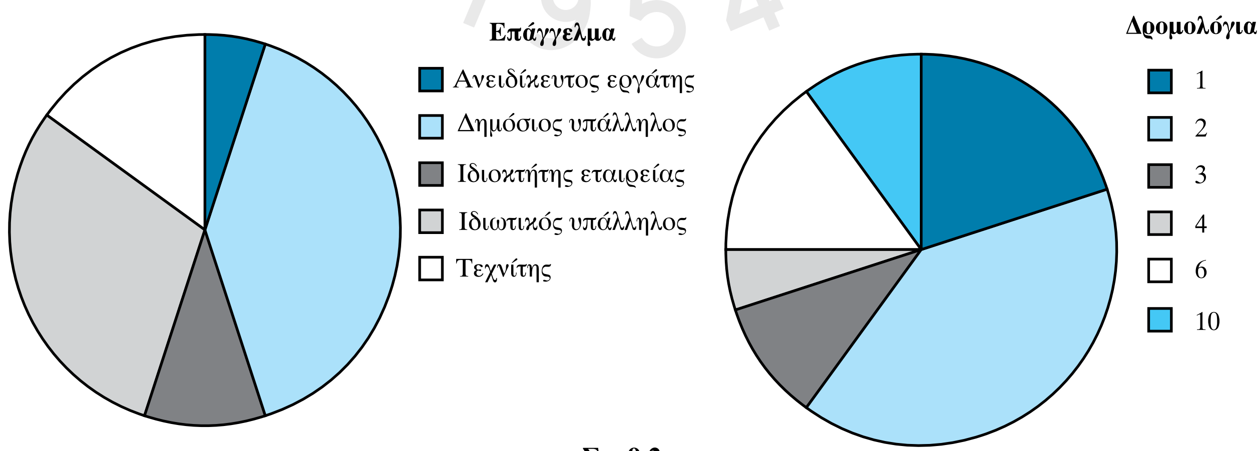
Διάγραμμα συχνοτήτων (α) και πολύγωνο συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή Χ: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2

διαφορετικές τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει, έτσι ώστε τα εμβαδά (ή ισοδύναμα, τα τόξα τους) να είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i. Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με θ_i το τόξο του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή t_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i, τότε θα έχουμε:

$$\theta_i = \nu_i \frac{360^{\mathrm{o}}}{\nu} = 360^{\mathrm{o}} f_i \quad \text{για} \quad \mathrm{i}=1,2,\ldots,\kappa.$$

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες, αφού σε αντίθετη περίπτωση το σχήμα που προκύπτει περιέχει πάρα πολλούς μικρούς κυκλικούς τομείς, με αποτέλεσμα να χάνει την περιγραφική του αξία.

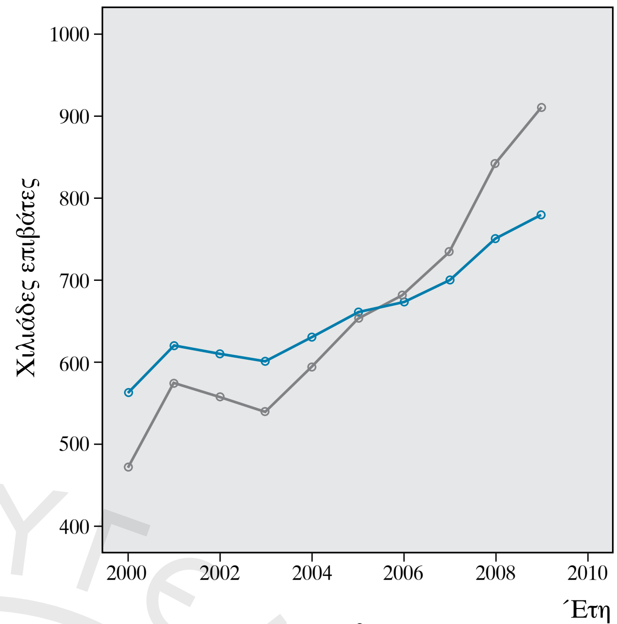
Στο σχήμα 9.2γ δίνεται το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «*Επάγγελμα*» και «*Μηνιαία χρήση του δρομολογίου*» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2.



Σχ. 9.2γ

Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «Επάγγελμα» και «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή παρουσιάζοντας τα χρονολογικά διαγράμματα ή ***διαγράμματα χρονοσειράς***, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης οικονομικών, πληθυσμιακών ή άλλων χαρακτηριστικών που μεταβάλλονται με τον χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα ενός διαγράμματος χρονοσειράς τοποθετείται συνήθως ο χρόνος, ενώ στον κάθετο άξονα η εξεταζόμενη μεταβλητή. Στο σχήμα 9.2δ δίνεται η ετήσια κίνηση (σε χιλιάδες επιβάτες) δύο ελληνικών λιμανιών κατά τα τελευταία χρόνια. Σύμφωνα με τα διαγράμματα αυτά, μετά το 2003 υπάρχει συνεχής αύξηση της επιβατικής κίνησης και στα δύο λιμάνια, ενώ από το έτος 2005 στο 2006 υπήρξε ανατροπή της σειράς των δύο λιμανιών ως προς την επιβατική τους κίνηση.



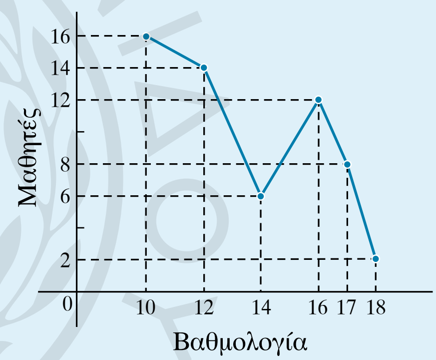
Σχ. 9.2δ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2.2.

Στο σχήμα 9.2ε δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων που προέκυψε από τη βαθμολογία σε ένα τεστ σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού.

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στο πολύγωνο συχνοτήτων το οποίο δόθηκε.

β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



Σχ. 9.2ε

Λύση.

α) Διαβάζοντας από το πολύγωνο συχνοτήτων που δόθηκε τις συχνότητες ν_i, $i = 1, 2,\ldots \kappa$ ($\kappa = 6$) και τις τιμές της μεταβλητής που μελετάμε (βαθμολογία των σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού στο τεστ), συμπληρώνουμε άμεσα τις πρώτες δύο στήλες του πίνακα 9.2.8.

Πίνακας 9.2.8

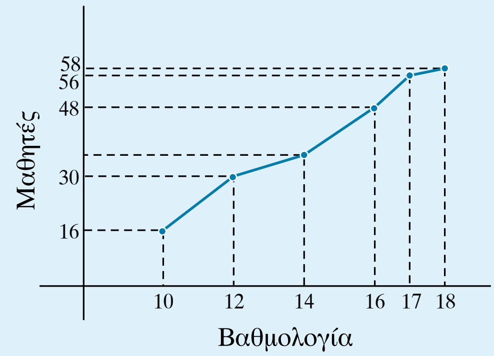
t_i	*Συχνότητα* ν_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
10	16	0,275862	16	0,275862
12	14	0,241379	30	0,517241
14	6	0,103448	36	0,62069
16	12	0,206897	48	0,827586
17	8	0,137931	56	0,965517
18	2	0,034483	58	1
Σύνολο	**58**	**1**		

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τις υπόλοιπες στήλες με χρήση των τύπων

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu},\quad N_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i,\quad F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$$

για $i = 1, 2, \ldots, 6$.

β) Από τον προηγούμενο πίνακα, προκύπτει εύκολα το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων που παρουσιάζεται στο σχήμα 9.2στ.



Σχ. 9.2στ

Ασκήσεις.

9.2.1. Ο πίνακας συχνοτήτων 9.2.9 παρουσιάζει την κατανομή των ωρών λειτουργίας ενός μηχανήματος, σε χιλιάδες ώρες, πριν εμφανίσει βλάβη για πρώτη φορά. Τα δεδομένα προέκυψαν από την παρακολούθηση ενός δείγματος 120 μηχανημάτων που λήφθηκαν από μια συγκεκριμένη γραμμή παραγωγής.

α) Να συμπληρώσετε τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες για κάθε τιμή του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο λιγότερο ή ίσο των 2, 5, 8 και 10 χιλιάδων ωρών.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο μεγαλύτερο των 2, 5, 8 και 10 χιλιάδων ωρών.

δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο μεταξύ 2 και 9 χιλιάδων ωρών.

Πίνακας 9.2.9

Αριθμός ωρών	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Συχνότητα	4	7	9	15	16	20	24	10	5	5	3	2

9.2.2. Στον πίνακα συχνοτήτων 9.2.10 δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και ορισμένες συχνότητες.

α) Να συμπληρώσετε όλες τις τιμές του πίνακα που λείπουν.

Πίνακας 9.2.10

t_i	*Συχνότητα* ν_i	*Σχετική συχνότητα* f_i	*Αθροιστική συχνότητα* N_i	*Αθροιστική σχετική συχνότητα* F_i
1		0,10		
2	4			
3	6		20	
4	20			
5				0,85
6	18			
7				
Σύνολο				

β) Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι το πολύ 4.
γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των ατόμων για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι από 4 μέχρι 6.

9.2.3. Ο αριθμός των δωματίων 20 διαμερισμάτων που επιλέχθηκαν τυχαία σε ένα οικοδομικό τετράγωνο ήταν:

2	3	5	2	4	2	2	3	4	4
2	3	5	4	4	4	4	3	6	2

α) Να κατασκευάσετε πίνακα ο οποίος να περιέχει τις (απόλυτες) συχνότητες, τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες για κάθε τιμή του χαρακτηριστικού που μελετάμε.
β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των διαμερισμάτων που έχουν τουλάχιστον 3 δωμάτια.
γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των διαμερισμάτων που έχουν το πολύ 4 δωμάτια.

9.2.4. Καθένας από τους 30 υπαλλήλους μιας επιχείρησης πήρε για θερινή άδεια τον παρακάτω αριθμό ημερών:

21	25	26	22	26	24	22	26	24	27
22	26	21	25	24	25	25	25	24	25
24	22	24	23	27	27	23	24	25	24.

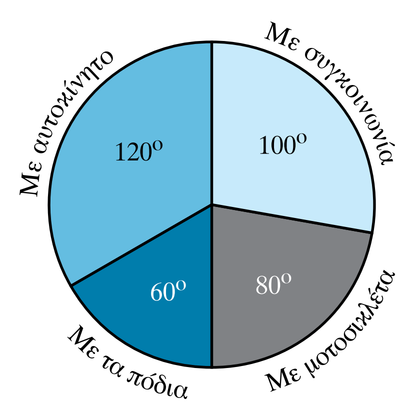
α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.
β) Να σχεδιαστεί διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.
γ) Να σχεδιαστεί κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.

9.2.5. Η οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων μιας επιχείρησης είναι η εξής:

Άνδρες ανύπαντροι	15	Γυναίκες ανύπαντρες	18
Άνδρες παντρεμένοι	25	Γυναίκες παντρεμένες	20
Άνδρες διαζευγμένοι	10	Γυναίκες διαζευγμένες	15

α) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα με ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
β) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα με ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

9.2.6. Το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του σχήματος 9.2ζ παρουσιάζει το μεταφορικό μέσο που χρησιμοποίησαν 180 άνθρωποι για να μετακινηθούν από το σπίτι τους στη δουλειά τους.
α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που χρησιμοποίησαν συγκοινωνία.
β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που δεν μετακινήθηκαν με τα πόδια.



Σχ. 9.2ζ

γ) Να μετατραπεί το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα.

9.2.7. Σε έναν μετεωρολογικό σταθμό καταγράφεται κάθε έτος ο αριθμός των χιονοπτώσεων. Σε διάστημα 40 ετών συγκεντρώθηκαν τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον πίνακα 9.2.11.
α) Να συντάξετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απόλυτων και αθροιστικών).
β) Να συντάξετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να συντάξετε κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας 9.2.11

Αριθμός χιονοπτώσεων	0	1	2	3	4	5	**Σύνολο**
Αριθμός ετών	21	10	5	2	1	1	**40**

9.2.8. Στον πίνακα 9.2.12 δίνονται τα καθαρά κέρδη (σε χιλιάδες €) μιας επιχείρησης κατά την οκταετία 2000 – 2007.

Πίνακας 9.2.12

΄Ετος	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Κέρδη	560	550	610	8200	1220	1500	1950	2100

Να παρασταθούν τα δεδομένα σε ένα χρονολογικό διάγραμμα.

9.2.9. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα έχει απεικονιστεί το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας ναυτιλιακής εταιρείας σε τέσσερεις κατηγορίες:

Α΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου
Β΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου
Γ΄ Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης
Δ΄ Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

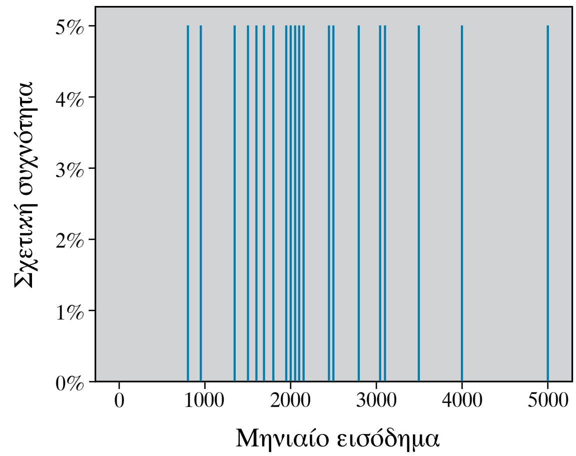
Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές. Στην Α΄ κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ΄ κατηγορίας είναι 18°. Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β΄ κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ΄ κατηγορίας.
α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.
β) Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

9.2.10. Τα κρούσματα δύο μεταδοτικών νόσων από το 2000 έως το 2010 παρουσιάζονται στον πίνακα 9.2.13.
α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα χρονοσειράς για τη νόσο A.
β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα χρονοσειράς για τη νόσο B.
γ) Να σχολιάσετε την εξέλιξη των νόσων και να τις συγκρίνετε με βάση τα δύο διαγράμματα χρονοσειράς.

Πίνακας 9.2.13

΄Ετος	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Νόσος A	180	126	256	366	278	412	492	514	686	602	522
Νόσος B	720	526	564	362	444	272	264	536	608	232	280

9.3 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.



Σχ. 9.3α

Όταν το πλήθος των διαφορετικών τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο, είναι αρκετά δύσκολο να κατασκευαστούν οι πίνακες συχνοτήτων και τα αντίστοιχα διαγράμματα. Ακόμη όμως και αν τα κατασκευάσουμε, οι πληροφορίες που δίνουν έχουν πολύ μικρή αξία, αφού οι πιο πολλές τιμές θα έχουν μικρές ή ίσες συχνότητες εμφάνισης, με αποτέλεσμα να μην προκύπτει κάποιο χρήσιμο συμπέρασμα από την παρατήρηση του πίνακα συχνοτήτων ή του διαγράμματος. Για παράδειγμα, αν κατασκευάζαμε τον πίνακα συχνοτήτων της μεταβλητής «*Μηνιαίο εισόδημα*» του πίνακα 9.2.2, θα διαπιστώναμε ότι εμφανίζονται 20 διαφορετικές τιμές με συχνότητα 1, οπότε το αντίστοιχο διάγραμμα συχνοτήτων θα είχε τη μορφή που δίνεται στο σχήμα 9.3α και δεν θα παρείχε καμία χρήσιμη πληροφορία.

Το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά έντονο στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, η οποία μπορεί θεωρητικά να λάβει οποιαδήποτε τιμή σε συνεχή διαστήματα, με αποτέλεσμα οι τιμές της να είναι όλες ή σχεδόν όλες διαφορετικές μεταξύ τους και επομένως να μην έχει νόημα να καταγράψουμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε τιμής, αφού το πιθανότερο ενδεχόμενο είναι κάθε τιμή να εμφανίζεται μόνο μία φορά. Παρόμοιο πρόβλημα μπορεί να προκύψει και στην περίπτωση διακριτών μεταβλητών με πολύ μεγάλο εύρος τιμών.

Στις περιπτώσεις αυτές ακολουθούμε την τεχνική της ***ομαδοποίησης*** των παρατηρήσεων, σύμφωνα με την οποία τα δεδομένα ταξινομούνται (ομαδοποιούνται) σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται ***ομάδες*** ή ***κλάσεις***, έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει σε μία μόνο κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται ***όρια*** των κλάσεων. Προκειμένου να αποφευχθεί το φαινόμενο της ταξινόμησης μιας παρατήρησης σε περισσότερες από μία κλάσεις, μπορούμε να ακολουθήσουμε μία από τις επόμενες δύο τεχνικές:

α) Χρησιμοποιούμε ως όρια τιμές οι οποίες δεν μπορούν να ληφθούν από το χαρακτηριστικό που μελετάμε. Για παράδειγμα, αν το χαρακτηριστικό που μελετάμε λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές, χρησιμοποιούμε δεκαδικά όρια (0,5 1,5 2,5 κ.λπ.).

β) Θεωρούμε ότι κάθε κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), δηλαδή είναι της μορφής [,) ή αντίστροφα ότι κάθε κλάση περιέχει το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), αλλά όχι το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), δηλαδή είναι της μορφής (,].

Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι τιμές που εμπίπτουν σε κάθε κλάση θεωρούνται μεταξύ τους ισοδύναμες. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις μιας κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες (τοποθετημένες) εντός της κλάσης και μπορούν να «αντιπροσωπευθούν» από τις ***κεντρικές τιμές*** κάθε κλάσης, δηλαδή το ημιάθροισμα των δύο άκρων της κλάσης.

Η διαδικασία κατασκευής ενός πίνακα συχνοτήτων για ομαδοποιημένα δεδομένα είναι σχετικά απλή και συνοψίζεται στα επόμενα ***βήματα:***

B_1. Εντοπίζουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή στα δεδομένα μας.
B_2. Υπολογίζουμε το εύρος των δεδομένων, δηλαδή τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.
B_3. Υπολογίζουμε τον αριθμό των τάξεων (κλάσεων) που θα χρησιμοποιηθούν.
B_4. Υπολογίζουμε το εύρος (πλάτος) κάθε κλάσης και στη συνέχεια καθορίζουμε τα όρια της καθεμιάς.

B$_5$. Καταγράφουμε τον αριθμό των τιμών της μεταβλητής που ανήκουν σε κάθε μία από τις κλάσεις.
B$_6$. Συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων (με τη βοήθεια της διαδικασίας της επιλογής).

Προκειμένου να παρουσιάσουμε ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα για τη διαδικασία της ομαδοποίησης, θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, τα οποία αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση ενός πλοίου σε διάστημα 40 ημερών.

Πίνακας 9.3.1
Ημερήσια επιβατική κίνηση ενός πλοίου σε διάστημα 40 ημερών

252	255	263	276	265	276	275	279
265	256	264	277	285	277	277	281
277	256	265	277	**241**	289	265	265
247	258	267	287	265	253	277	292
300	262	270	264	272	273	278	277

Εξετάζοντας τα δεδομένα εντοπίζουμε την ελάχιστη τιμή $\min\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ και τη μέγιστη τιμή $\max\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$. Σύμφωνα με τα διαθέσιμα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, η μέγιστη τιμή είναι ίση με 300 και η ελάχιστη 241, και έτσι ολοκληρώνεται το **B**$_1$.

Σύμφωνα με το **B**$_2$, υπολογίζουμε στη συνέχεια το εύρος (*Range* - *R*) των δεδομένων ως τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατήρησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το εύρος είναι ίσο με $R = 300 - 241 = 59$.

Για την εκτέλεση του **B**$_3$ χρησιμοποιούμε τον εμπειρικό τύπο του Sturges, σύμφωνα με τον οποίο το πλήθος $\varkappa$ των κλάσεων δίνεται από την έκφραση:

$$\varkappa = 1 + 3{,}32 \log\nu = 1 + 1{,}44 \ln\nu,$$

όπου ν είναι το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιούμε. Ο τύπος αυτός δίνει έναν ενδεικτικό αριθμό κλάσεων και δεν είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιήσουμε ακριβώς το πλήθος κλάσεων που προκύπτει από αυτόν, ιδιαίτερα αν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος να έχουμε διαφορετικό αριθμό κλάσεων με βάση τη διαθέσιμη εμπειρία. Για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 έχουμε ν=40, οπότε:

$$\varkappa = 1 + 1{,}44 \ln 40 \cong 6{,}31$$

και για τη διαδικασία της ομαδοποίησης θα χρησιμοποιήσουμε $\varkappa = 6$ κλάσεις.

Το **B**$_4$ είναι ο προσδιορισμός του εύρους (πλάτους) των κλάσεων, δηλαδή της διαφοράς του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης. Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι κλάσεις έχουν το ίδιο εύρος. Για κλάσεις ίσου εύρους, το εύρος c των κλάσεων υπολογίζεται απλά ως ο λόγος του εύρους R προς τον αριθμό των κλάσεων $\varkappa$, δηλαδή:

$$c = \frac{\textit{εύρος των δεδομένων}}{\textit{αριθμός κλάσεων}} = \frac{R}{\varkappa}.$$

Αν χρειαστεί να γίνει στρογγύλευση του αποτελέσματος (ώστε να προκύψει ακέραιο αποτέλεσμα), θα πρέπει να γίνει προς τα επάνω, γιατί σε αντίθετη περίπτωση δεν θα είναι εφικτό να καλύψουμε όλες τις παρατηρήσεις του δείγματος. Για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 έχουμε $\varkappa = 6$ και $R = 59$, οπότε

$$c = \frac{R}{\kappa} = \frac{59}{6} \cong 9{,}83$$

και θα μπορούσαμε, για λόγους ευκολίας, να θεωρήσουμε $c = 10$ (έτσι ώστε αφενός το εύρος των κλάσεων να είναι ακέραιος αριθμός και αφετέρου να μπορούμε να καλύψουμε όλες τις παρατηρήσεις του δείγματός μας).

Στη συνέχεια προχωράμε στην κατασκευή των κλάσεων, δηλαδή στον καθορισμό των άκρων (ορίων) της καθεμιάς. Ξεκινώντας από τη μικρότερη παρατήρηση ή λίγο πιο κάτω από τη μικρότερη παρατήρηση και προσθέτοντας κάθε φορά το εύρος c, δημιουργούμε τα όρια των κ κλάσεων. Εφόσον η στρογγύλευση κατά τον υπολογισμό του c έχει γίνει προς τα επάνω, η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση και κάθε τιμή θα εμπίπτει σε μία και μόνο κλάση. Ορισμένες φορές, με στόχο την δημιουργία εύχρηστων ορίων στις κλάσεις, μπορούμε να ξεκινήσουμε την πρώτη κλάση από μία τιμή η οποία είναι μικρότερη από την ελάχιστη τιμή του δείγματος. Αυτό όμως θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή, ώστε να μην βρεθεί η μέγιστη τιμή του δείγματος εντός των κλάσεων που χρησιμοποιούμε. Για το παράδειγμα που επεξεργαζόμαστε θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως αρχή της πρώτης κλάσης το 240 και προσθέτοντας το εύρος $c = 10$ δημιουργούμε την πρώτη κλάση, η οποία ξεκινά από το 240 και καταλήγει στο $240 + 10 = 250$. Με την ίδια διαδικασία ορίζουμε και τις υπόλοιπες κλάσεις, χρησιμοποιώντας πάντα ως αριστερό όριο για κάθε κλάση το αντίστοιχο δεξί (άνω) όριο της προηγούμενης κλάσης. Τελικά λαμβάνουμε τα επόμενα όρια:

240, 250, 260, 270, 280, 290, 300.

Θεωρώντας ότι κάθε κλάση περιέχει το άνω άκρο της (κλειστή δεξιά) αλλά όχι το κάτω άκρο της (ανοικτή αριστερά), δηλαδή είναι της μορφής (,], εκτελούμε τέλος τη διαδικασία της διαλογής και λαμβάνουμε τον πίνακα συχνοτήτων 9.3.2 ($\mathbf{B}_5$ και $\mathbf{B}_6$). Το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i που ανήκουν στην κλάση i καλείται ***συχνότητα της κλάσης*** αυτής. Ως ***κεντρική τιμή***, $i = 1, 2, ..., \kappa$, της κλάσης i θεωρούμε το ημιάθροισμα των δύο της άκρων της κλάσης.

Για τη γραφική παράσταση ομαδοποιημένων δεδομένων χρησιμοποιούμε συνήθως το ***ιστόγραμμα*** συχνοτήτων. Σ' αυτό σημειώνουμε στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογώνιων αξόνων τα όρια των κλάσεων και στη συνέχεια κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το εύρος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής. Στο σχήμα 9.3β δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, όπως αυτά ομαδοποιήθηκαν στον πίνακα 9.3.2.

Πίνακας 9.3.2
Πίνακας συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1

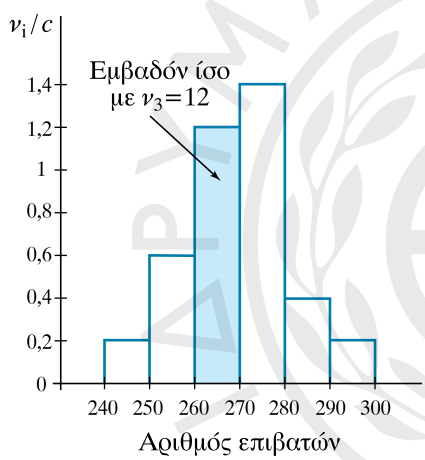
Κλάσεις (–]	*Κεντρικές τιμές*	ν_i	f_i %	N_i	F_i %
240–250	245	2	5	2	5
250–260	255	6	15	8	20
260–270	265	12	30	20	50
270–280	275	14	35	34	85
280–290	285	4	10	38	95
290–300	295	2	5	40	100
Σύνολο		**40**	**100**	**–**	**–**

Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το ***ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων***, δημιουργώντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το εύρος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσης. Προφανώς το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων θα έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων, με μοναδική διαφορά στην κλίμακα που χρησιμοποιείται στον κατακόρυφο άξονα (σχ. 9.3γ).

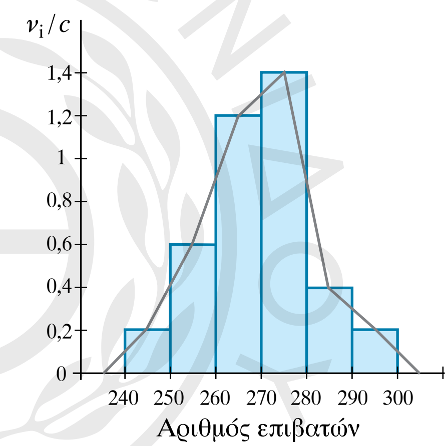
Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο επιπλέον υποθετικές κλάσεις με μηδενικές συχνότητες, μία πριν από την πρώτη και μία μετά από την τελευταία κλάση και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων όλων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο ***πολύγωνο συχνοτήτων*** (frequency polygon). Από τον τρόπο κατασκευής του είναι προφανές ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν. Στο σχήμα 9.3δ δίνεται το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1.

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται, από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, και το ***πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων***. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων, δηλαδή 1 (100%).

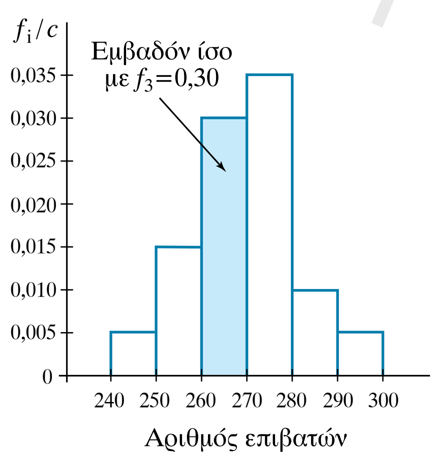
Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε κλάσεις ίσου εύρους, όπως στο παράδειγμά μας, είναι φανερό



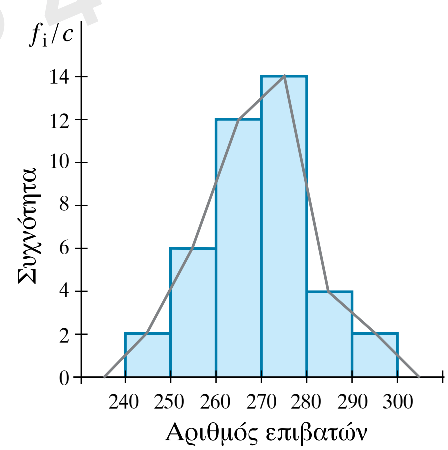
Σχ. 9.3β
Ιστόγραμμα συχνοτήτων



Σχ. 9.3δ
Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων



Σχ. 9.3γ
Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων



Σχ. 9.3ε
Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων

ότι το ύψος κάθε ορθογωνίου θα είναι ανάλογο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, οπότε το σχήμα που δημιουργείται θα είναι όμοιο με αυτό που θα λαμβάναμε αν στον κατακόρυφο άξονα τοποθετούσαμε απλά τις συχνότητες (χωρίς δηλ. να τις διαιρούμε με το εύρος, ώστε το εμβαδό να είναι ίσο με τη συχνότητα). Στο σχήμα 9.3ε δίνεται το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, όπου όμως τώρα στον κατακόρυφο άξονα έχουν σημειωθεί οι (απόλυτες) συχνότητες.

Για πρακτικούς λόγους (ελάττωση των απαιτούμενων υπολογισμών) στον κατακόρυφο άξονα ενός ιστογράμματος συχνοτήτων θα σημειώνουμε στη συνέχεια τις συχνότητες των κλάσεων, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό ή έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα με κλάσεις άνισου εύρους.

Με τον ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε και ***ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων*** και ***αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων***, στα οποία ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τις αθροιστικές ή τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες των κλάσεων. Αν μάλιστα σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων ενώσουμε τα δεξιά άκρα των άνω βάσεων των ορθογωνίων του με ευθύγραμμα τμήματα, τότε προκύπτει μια πολυγωνική γραμμή, η οποία ονομάζεται ***πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων***. Στο σχήμα 9.3στ δίνεται το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1. Σημειώνουμε ότι σε ένα διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων οι επάνω πλευρές των ορθογωνίων παραλληλογράμμων κινούνται προς υψηλότερες θέσεις όσο αυξάνονται οι τιμές της μεταβλητής που μελετάμε, αφού στην περίπτωση αυτή αυξάνονται συνεχώς οι τιμές της αθροιστικής συχνότητας. Επιπλέον, η πολυγωνική γραμμή του πολύγωνου αθροιστικών συχνοτήτων αντιστοιχεί σε μια αύξουσα συνάρτηση.

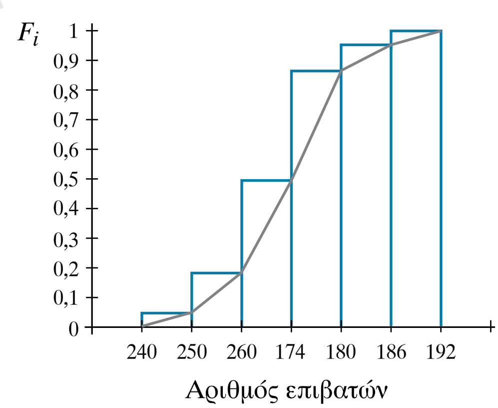
Μια εξαιρετικά απλή αλλά και ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική συνοπτικής παρουσίασης δεδομένων είναι τα λεγόμενα διαγράμματα κορμού-και-φύλλων ή ***φυλλογραφήματα*** (stem and leaf plots). Με την τεχνική αυτή ουσιαστικά οδηγούμαστε σε μια τεχνητή ομαδοποίηση των δεδομένων που διαθέτουμε και συγχρόνως δημιουργούμε μια σχηματική παράσταση παρόμοια μ’ αυτήν των ιστογραμμάτων, χωρίς όμως να έχουμε οποιαδήποτε απώλεια πληροφοριών από τη συγχώνευση διαφορετικών παρατηρήσεων σε κλάσεις. Αυτό συμβαίνει διότι το φυλλογράφημα παρέχει τη δυνατότητα ανασύστασης των μετρήσεων των αρχικών δεδομένων του δείγματος με απόλυτη ακρίβεια, πράγμα το οποίο δεν επιτυγχάνεται με τους πίνακες συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων ή τα ιστογράμματα συχνοτήτων. Η χρήση των φυλλογραφημάτων ενδείκνυται κατά κύριο λόγο για την επεξεργασία μέτριου πλήθους παρατηρήσεων.

Τα βασικά πλεονεκτήματα του φυλλογραφήματος είναι ότι:

α) Περιέχει όλα τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί.

β) Δείχνει τη μορφή της κατανομής συχνοτήτων.

γ) Εμφανίζει τυχόν ακραίες/έκτροπες παρατηρήσεις, δηλαδή παρατηρήσεις που είναι είτε υπερβολικά μεγάλες, είτε υπερβολικά μικρές σε σχέση με τον κύριο όγκο των δεδομένων.



Σχ. 9.3στ
Ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

Θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται ένα φυλλογράφημα μέσα από ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι έχουν συγκεντρωθεί οι επόμενες 25 μετρήσεις που αφορούν στην ηλικία (σε συμπληρωμένα έτη) των ατόμων που αποτελούν το πλήρωμα ενός πλοίου:

39 45 50 41 46   47 40 47 59 59   23 38 39 41 41

50 51 34 35 35   42 43 27 32 34

Διατάσσουμε για διευκόλυνση τα δεδομένα σε αύξουσα τιμή από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη:

23 27 32 34 34 35 35 38 39 39 40 41

41 41 42 43 45 46 47 47 50 50 51 59 59

Θεωρούμε ότι κάθε μία παρατήρηση αντιπροσωπεύεται από δύο τμήματα:

α) Αυτό που αποτελείται από ένα πρώτο ή αρχικό ψηφίο και

β) από το δεύτερο ή επόμενο ψηφίο, δηλαδή αυτό που έπεται του τμήματος που θεωρήσαμε ως αρχικό.

Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η πρώτη μέτρηση (η τιμή 23) έχει ως αρχικό ψηφίο (stem: κορμό ή μίσχο) το νούμερο 2 και ως επόμενο (leaf: φύλλο) το 3.

Το διάγραμμα ολοκληρώνεται τοποθετώντας όλα τα ψηφία που απαρτίζουν τον κορμό των παρατηρήσεων κατά αύξουσα τάξη καθέτως και θέτοντας τις τιμές των φύλλων ακριβώς δίπλα από το αντίστοιχο τμήμα κορμού, επίσης κατ’ αύξουσα τάξη μεγέθους. Το φυλλογράφημα του παραδείγματός μας θα έχει τελικά την εξής μορφή:

Κορμός – Stem (μονάδα = 10)	Φύλλο – Leaf (μονάδα = 1)
2	3 7
3	2 4 4 5 5 8 9 9
4	0 1 1 1 2 3 5 6 7 7
5	0 0 1 9 9

Σε γενικές γραμμές ως φύλλο κάθε στατιστικού στοιχείου λαμβάνεται το τελευταίο ή τα δύο τελευταία ψηφία της τιμής της παρατήρησης και ως κορμός το πρώτο ή τα εναπομείναντα πρώτα ψηφία. Ας σημειωθεί όμως ότι ο προσδιορισμός του κορμού και του φύλλου των παρατηρήσεων εξαρτάται από τη φύση και το εύρος των τιμών των δεδομένων. Για παράδειγμα, η τιμή 1234 θα μπορούσε, ανάλογα με την περίσταση, να αναπαρασταθεί είτε ως 1|234 είτε ως 12|34 είτε ως 123|4.

Είναι φανερό ότι αν περιστρέψουμε νοητά το παραπάνω φυλλογράφημα, έτσι ώστε τα ψηφία του κορμού να λάβουν οριζόντια θέση, θα ήταν σαν να σκιαγραφούσαμε τέσσερα παραλληλόγραμμα (ιστούς), το καθένα με 2, 8, 10 και 5 (συμβατικές) μονάδες ύψους αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό θα λαμβάναμε στην πραγματικότητα την εικόνα του ιστογράμματος συχνοτήτων όταν στα δεδομένα μας έχει γίνει ομαδοποίηση με κλάσεις τις δεκάδες ηλικιών [20, 30), [30, 40), [40, 50), [50, 60).

Ασκήσεις.

9.3.1. Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν στον αριθμό των ατόμων του πληρώματος σε 50 μεγάλα επιβατικά πλοία.

104	109	126	152	130	152	150	158	143	143
130	112	128	154	176	154	154	162	154	112
154	112	125	154	82	178	129	128	201	135
94	116	134	174	127	106	154	184	132	165
205	124	140	128	144	146	156	154	219	217

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα αυτά σε 5 κλάσεις.

β) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, καθώς και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

9.3.2. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 50 τεχνίτες για να συναρμολογήσουν (ο καθένας) ένα εξάρτημα πλοίου ήταν:

39	137	72	19	18	43	44	34	44	32
49	41	19	29	41	36	80	74	132	44
38	102	25	49	38	92	44	121	95	39
19	40	33	109	124	128	34	33	46	64
36	92	33	43	135	35	69	37	75	87

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων.

β) Να συντάξετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, απόλυτων και αθροιστικών.

γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

9.3.3. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ηλικίες 400 επιβατών που ταξίδεψαν με ένα πλοίο.

Ηλικίες [,)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
Αριθμός ατόμων	20	60	200	70	40	10

α) Να συνταχθούν οι πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, καθώς και των αντίστοιχων αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, καθώς και το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

δ) Τι ποσοστό επιβατών ήταν ηλικίας μικρότερης των 40 ετών και τι ποσοστό ανθρώπων ήταν ηλικίας από 25 έως 55 ετών;

9.3.4. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας (ΕΣΥΕ), η κατανομή ανά ηλικία και φύλο των θανάτων το έτος 1995 λόγω υπερτασικής νόσου ήταν αυτή που φαίνεται στον πίνακα 9.3.3.

α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία των συνολικών ατόμων που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995.

β) Να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τα ιστογράμματα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία των αντρών και των γυναικών, αντίστοιχα, που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995 και στη συνέχεια να τα συγκρίνετε.

Πίνακας 9.3.3

Ηλικία		50–54	55–59	60–64	65–69	70–74	75–79	80–84	85–89
Θάνατοι	***Άνδρες***	10	10	17	36	44	73	117	123
	Γυναίκες	7	4	21	57	61	109	162	195

9.3.5. Σε μία μεγάλη ναυτιλιακή εταιρεία εργάζονται συνολικά 100 υπάλληλοι. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των υπαλλήλων δίνεται από τον πίνακα 9.3.4.

α) Πόσοι υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

β) Με την προϋπόθεση ότι κάθε υπάλληλος θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια, πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;

γ) Με την προϋπόθεση ότι κάθε υπάλληλος θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια, πόσοι συνολικά υπάλληλοι πρέπει να προσληφθούν στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των υπαλλήλων να παραμένει ο ίδιος;

Πίνακας 9.3.4

Χρόνια υπηρεσίας [–)	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	30–35
Σχετική συχνότητα f_i %	10	15	12	15	18	18

9.4 Μέτρα θέσης.

Στην παρούσα παράγραφο και σ' αυτήν που θα ακολουθήσει, θα παρουσιάσουμε τα κυριότερα (στατιστικά) περιγραφικά μέτρα. Με τον όρο αυτό αναφερόμαστε σε κατάλληλες αριθμητικές ποσότητες, οι οποίες μπορούν να συνοψίζουν τις πληροφορίες που περιέχονται στα δεδομένα μας, παρέχοντάς μας μια πλήρη εικόνα για την κατανομή συχνοτήτων του χαρακτηριστικού που μελετάμε. Πιο συγκεκριμένα, τα στατιστικά περιγραφικά μέτρα παρέχουν έναν ακόμα πιο σύντομο τρόπο περιγραφής της κατανομής ενός συνόλου δεδομένων σε σχέση με τους πίνακες συχνοτήτων και τις γραφικές παραστάσεις που μελετήσαμε στις παραγράφους 9.2 και 9.3.

Διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες περιγραφικών μέτρων, τα ***μέτρα θέσης*** και τα ***μέτρα διακύμανσης*** ή ***μέτρα μεταβλητότητας***. Επίσης, ανάλογα με το αν τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε αφορούν σε ολόκληρο τον προς μελέτη πληθυσμό ή ένα δείγμα από αυτόν, αναφερόμαστε σε ***πληθυσμιακά μέτρα*** ή ***δειγματικά μέτρα***, αντίστοιχα.

> Τα μέτρα θέσης είναι τα περιγραφικά εκείνα μέτρα, τα οποία παρέχουν πληροφορίες για τη θέση του «κέντρου» της κατανομής των τιμών μιας μεταβλητής. Τα μέτρα διακύμανσης ποσοτικοποιούν την τάση των παρατηρήσεων να απομακρύνονται από το «κέντρο» τους.
> Τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσης είναι ο ***αριθμητικός μέσος*** ή ***μέση τιμή***, η ***διάμεσος*** και τα ***εκατοστημόρια*** και τέλος η ***κορυφή*** ή ***επικρατούσα τιμή***.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια αναλυτικά καθένα από τα μέτρα αυτά.

9.4.1 Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή $(\bar{x})$.

Ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων είναι στην πραγματικότητα ο γνωστός σε όλους από την καθημερινή πράξη μέσος όρος ενός αριθμού παρατηρήσεων. Αποτελεί το σπουδαιότερο και χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των διαθέσιμων παρατηρήσεων διά του πλήθους τους.

Συμβολικά, αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριστικό) X, τότε η μέση τιμή των παρατηρήσεων συμβολίζεται με $\bar{x}$ και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

Στον παραπάνω τύπο χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο $\sum_{i=1}^{\nu} x_i$ για να παραστήσουμε σε συντομογραφία το άθροισμα $x_1 + x_2 + ... + x_\nu$. Η συντομογραφία αυτή ή όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης, ο απλούστερος συμβολισμός $\sum x_i$, θα χρησιμοποιείται συχνά στη συνέχεια, προκειμένου να μπορούμε να γράφουμε με σύντομο και κομψό τρόπο ορισμένους τύπους που θα χρειαστούμε στην πορεία της παρουσίασης των στατιστικών περιγραφικών μέτρων, εξοικονομώντας έτσι χώρο.

Για παράδειγμα, η μέση τιμή της ημερήσιας επιβατικής κίνησης που δίνεται (για διάστημα 40 ημερών) στον πίνακα 9.3.1 βρίσκεται εύκολα ως εξής

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{40}}{40} = \frac{252 + 255 + 263 + ... + 277}{40} = \frac{10800}{40} = 270 .$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι με βάση τα δεδομένα που διαθέτουμε, η μέση ημερήσια επιβατική κίνηση για το διάστημα των 40 ημερών, το οποίο μελετήσαμε, ήταν 270 (επιβάτες ανά ημέρα).

Στην περίπτωση που για τα δεδομένα που συλλέξαμε έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας συχνοτήτων, η μέση τιμή μπορεί να υπολογισθεί πιο γρήγορα χρησιμοποιώντας τον εναλλακτικό τύπο:

$$\overline{x} = \frac{t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + ... + t_\varkappa \nu_\varkappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\varkappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \nu_i}{\sum_{i=1}^{\varkappa} \nu_i} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \nu_i = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i f_i ,$$

όπου $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\varkappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, ..., f_\varkappa$. Πολλές φορές αναφερόμαστε στον τελευταίο τύπο λέγοντας ότι έχουμε έναν ***σταθμικό*** ή ***σταθμισμένο μέσο όρο*** των τιμών $t_1, t_2, ..., t_\varkappa$, αφού για τον υπολογισμό του $\overline{x}$ σταθμίζονται οι τιμές t_i με τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i που ονομάζονται ***βάρη*** της στάθμισης. Για τον λόγο αυτό μάλιστα, στην ελληνική βιβλιογραφία ο σταθμικός μέσος όρος αναφέρεται και ως ***βαρυκεντρικός μέσος***.

Για παράδειγμα η μέση μηνιαία χρήση δρομολογίου που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 9.2.2 μπορεί να υπολογισθεί είτε απ' ευθείας μέσω του τύπου:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{20}}{20} = \frac{1 + 2 + 1 + 10 + ... + 6 + 2}{20} = \frac{68}{20} = 3,4$$

είτε χρησιμοποιώντας και τα στοιχεία του πίνακα συχνοτήτων 9.2.4, μέσω του τύπου:

$$\overline{x} = \frac{t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + ... + t_6\nu_6}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_6} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{20} = \frac{68}{20} = 3,4$$

(προφανώς τα δύο αποτελέσματα δεν διαφέρουν μεταξύ τους).

Ο τύπος

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\varkappa} t_i f_i$$

μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αριθμητικού μέσου ομαδοποιημένων δεδομένων, θεωρώντας ως t_i τις κεντρικές τιμές των αντίστοιχων κλάσεων. Έτσι, με βάση τον πίνακα συχνοτήτων 9.3.2, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ημερήσια επιβατική κίνηση για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 ως εξής:

$$\overline{x} = \frac{t_1\nu_1 + ... + t_6\nu_6}{\nu_1 + ... + \nu_6} = \frac{245 \cdot 2 + 255 \cdot 6 + 265 \cdot 12 + 275 \cdot 14 + 285 \cdot 4 + 195 \cdot 2}{40} = \frac{10780}{40} = 269{,}5 .$$

Κατά τον υπολογισμό της μέσης τιμής μέσω πίνακα συχνοτήτων είναι αρκετά σύνηθες να σχηματίζουμε τον πίνακα 9.4.1, ο οποίος διευκολύνει κατά πολύ τους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Πίνακας 9.4.1

i	***Κεντρικές τιμές t_i***	ν_i	$t_i\nu_i$
1	245	2	490
2	255	6	1530
3	265	12	3180
4	275	14	3850
5	285	4	1140
6	295	2	590
Σύνολο		$\nu = 40$	$\sum t_i\nu_i = 10780$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή που λάβαμε τώρα για τον αριθμητικό μέσο διαφέρει ελαφρώς από την τιμή ($\overline{x} = 270$) που είχαμε βρει προηγουμένως χρησιμοποιώντας τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα. Η μικρή αυτή διαφορά οφείλεται στο ότι κατά την ομαδοποίηση χάνουμε πλέον τις αρχικές παρατηρήσεις κάθε κλάσης και προχωρούμε στον υπολογισμό, θεωρώντας ότι οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και εκπροσωπούνται από την αντίστοιχη κεντρική τιμή t_i. Η υπόθεση αυτή σημαίνει απώλεια πληροφοριών για τις αρχικές τιμές και για τον λόγο αυτό χάνουμε λίγο ως προς την ακρίβεια (κερδίζουμε όμως σε υπολογιστικό χρόνο).

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στον αριθμητικό *μέσο*, παραθέτουμε τις επόμενες χρήσιμες ιδιότητές του:

M$_1$. Αν όλες οι τιμές των διαθέσιμων παρατηρήσεων είναι ίσες, δηλαδή $x_1 = x_2 = ... = x_\nu = c$, τότε ο αριθμητικός τους μέσος είναι ίσος επίσης με c.

M$_2$. Η τιμή του αριθμητικού μέσου βρίσκεται πάντοτε μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του.

M$_3$. Το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι πάντα ίσο με το μηδέν, δηλαδή ισχύει:

$$(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + ... + (x_\nu - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \overline{x}) = 0 .$$

M$_4$. Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής προσθέσουμε μία σταθερή ποσότητα, έστω c, τότε ο αριθμητικός τους μέσος θα αυξηθεί κατά c, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$ έχουν μέσο $\overline{x}$, τότε οι παρατηρήσεις $y_1 = x_1 + c, y_2 = x_2 + c, ..., y_\nu = x_\nu + c$ θα έχουν μέσο $\overline{y} = \overline{x} + c$.

Μ$_5$. Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε ο αριθμητικός τους μέσος πολλαπλασιάζεται με την ποσότητα αυτή, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$ έχουν μέσο $\overline{x}$, τότε ο αριθμητικός μέσος των παρατηρήσεων $y_1=cx_1$, $y_2=cx_2$, ..., $y_\nu=cx_\nu$ θα είναι ίσος με $\overline{y}=c\overline{x}$.

Μ$_6$. Έστω n σύνολα δεδομένων, εκ των οποίων το πρώτο περιλαμβάνει m_1 μετρήσεις με αριθμητικό μέσο $\overline{x}_1$, το δεύτερο περιλαμβάνει m_2 μετρήσεις με αριθμητικό μέσο $\overline{x}_2$ κ.ο.κ. και το τελευταίο περιέχει m_n μετρήσεις με αντίστοιχο αριθμητικό μέσο $\overline{x}_n$. Τότε ο αριθμητικός μέσος όλων των μετρήσεων, πλήθους $m=m_1+m_2+...+m_n$, είναι ίσος με:

$$\overline{x}=\frac{m_1\overline{x}_1+m_2\overline{x}_2+...+m_n\overline{x}_n}{m_1+m_2+...+m_n}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\overline{x}_i.$$

9.4.2 Διάμεσος (δ) και εκατοστημόρια.

Η διάμεσος ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή που χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων δεδομένων σε δύο ισοπληθή υποσύνολα, έτσι ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες με τη διάμεσο και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες ή ίσες μ' αυτήν. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι διάμεσος (δ) ενός συνόλου ν παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε ***αύξουσα σειρά,*** ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο ενός συνόλου ν παρατηρήσεων, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Διατάσσουμε τα δεδομένα κατά σειρά μεγέθους, από την παρατήρηση με τη μικρότερη τιμή μέχρι την παρατήρηση με τη μεγαλύτερη τιμή.

β) Εντοπίζουμε τον θετικό ακέραιο αριθμό

$$\nu_0=\begin{cases}\dfrac{\nu+1}{2}, & \text{αν } \nu \text{ περιττός,}\\[2ex] \dfrac{\nu}{2}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος.}\end{cases}$$

γ) Η διάμεσος (δ) των δεδομένων μας θα είναι η τιμή της παρατήρησης του διατεταγμένου δείγματος, η οποία κατέχει τη θέση ν_0, αν το ν είναι περιττός ή το ημιάθροισμα των παρατηρήσεων, οι οποίες κατέχουν τις θέσεις ν_0 και ν_0+1 του διατεταγμένου δείγματος, αν το ν είναι άρτιος.

Για παράδειγμα, η διάμεσος των επόμενων $\nu = 7$ παρατηρήσεων:

90 55 50 75 57 80 60,

για τις οποίες το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα είναι το:

50 55 57 **60** 75 80 90

βρίσκεται αν υπολογίσουμε τη θέση της διαμέσου:

$$\nu_0=\frac{\nu+1}{2}=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

και θεωρήσουμε την τέταρτη κατά σειρά παρατήρηση του διατεταγμένου δείγματος. Επομένως $\delta = 60$.

Ομοίως η διάμεσος των επόμενων $\nu = 8$ παρατηρήσεων

90 55 50 75 57 80 60 95,

για τις οποίες το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα είναι το:

50 55 57 **60** **75** 80 90 95,

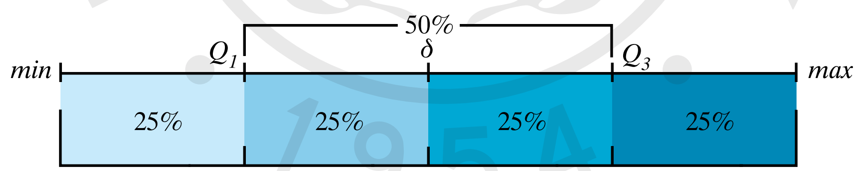
βρίσκεται αν υπολογίσουμε το ημιάθροισμα της 4ης και 5ης παρατήρησης του τελευταίου δείγματος, αφού τώρα το ν είναι άρτιος αριθμός και $\nu_0 = \nu/2 = 8/2 = 4$. Επομένως:

$$\delta = \frac{60 + 75}{2} = 67{,}5.$$

Παρατηρήστε ότι στη δεύτερη περίπτωση η προκύπτουσα τιμή της διαμέσου (67,5) δεν είναι μια τιμή που εμφανίζεται στις παρατηρήσεις μας.

Η διάμεσος είναι ένα πολύ χρήσιμο μέτρο θέσης, ιδιαίτερα στην περίπτωση που στα δεδομένα υπάρχουν έκτροπες (ακραίες) παρατηρήσεις, δηλαδή παρατηρήσεις που είναι είτε υπερβολικά μεγάλες είτε υπερβολικά μικρές σε σχέση με τον κύριο όγκο των δεδομένων. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να αποφεύγεται η χρήση του μέσου όρου, ο οποίος επηρεάζεται υπερβολικά από τις ακραίες τιμές και στη θέση του να χρησιμοποιείται η διάμεσος. Για παράδειγμα, αν στο τελευταίο παράδειγμα των οκτώ παρατηρήσεων αντικαταστήσουμε την τιμή 95 με την τιμή 9500, η διάμεσος των $\nu = 8$ παρατηρήσεων δεν θα αλλάξει, ενώ ο μέσος όρος θα εκτιναχθεί από την τιμή 70,25 (που είχε στα αρχικά δεδομένα) στην τιμή 1184!

Όπως ορίσαμε τη διάμεσο δ, έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες του δ και το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες του δ, μπορούμε ανάλογα να ορίσουμε και τα ***εκατοστημόρια*** p_a, $a = 1,2,...,99$ ως την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ $a\%$ των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του p_a και το πολύ $(100-a)\%$ των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν. Τα εκατοστημόρια p_{25}, p_{50}, p_{75} καλούνται ***τεταρτημόρια***, αφού χωρίζουν το διατεταγμένο δείγμα σε 4 ισομεγέθη τμήματα, και συμβολίζονται με Q_1, Q_2, Q_3, αντίστοιχα (σχ. 9.4α).



Σχ. 9.4α

Προφανώς ισχύει ότι $Q_2 = p_{50} = \delta$. Αρκετά συχνά, για λόγους ευκολίας, ο υπολογισμός των τεταρτημορίων Q_1 και Q_3 γίνεται κατά προσέγγιση, υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων αντίστοιχα.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις $\nu = 40$ παρατηρήσεις του πίνακα 9.3.1, οι οποίες αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση σε ένα επιβατικό πλοίο. Διατάσσοντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά παίρνουμε:

241, 247, 252, 253, 255, 256, 256, 258, 262, 263,
264, 264, 265, 265, 265, 265, 265, 265, 267, 270,
272, 273, 275, 276, 276, 277, 277, 277, 277, 277,
277, 277, 278, 279, 281, 285, 287, 289, 292, 300.

Δεδομένου ότι έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων, η διάμεσος θα βρίσκεται αν υπολογίσουμε το ημιάθροισμα της 20ής και 21ής παρατήρησης των διατεταγμένων δεδομένων, δηλαδή:

$$\delta = Q_2 = p_{50} = \frac{270+272}{2} = 271 .$$

Το πρώτο τεταρτημόριο μπορεί να βρεθεί θεωρώντας το πρώτο μισό τμήμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή τις πρώτες 20 παρατηρήσεις (τις δύο πρώτες γραμμές) και υπολογίζοντας τη διάμεσό τους, η οποία θα είναι ίση με το ημιάθροισμα της $10^{ης}$ και $11^{ης}$ παρατήρησης. Άρα:

$$Q_1 = p_{25} = \frac{263+264}{2} = 263{,}5 .$$

Ομοίως, θεωρώντας το δεύτερο μισό τμήμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή τις δύο τελευταίες γραμμές, βρίσκουμε

$$Q_3 = p_{75} = \frac{277+277}{2} = 277.$$

Αν θέλαμε να υπολογίσουμε τα εκατοστημόρια p_{10} και p_{90}, θα έπρεπε να ελέγξουμε πού αντιστοιχεί το 10% και 90% των $\nu = 40$ παρατηρήσεων του δείγματος, δηλαδή το $0{,}01 \cdot 40 = 4$ και $0{,}09 \cdot 40 = 36$. Το p_{10} θα είναι εκείνη η τιμή για την οποία το πολύ 4 παρατηρήσεις είναι μικρότερές της και το πολύ 40–4=36 είναι μεγαλύτερες, οπότε θα πρέπει να πάρουμε το ημιάθροισμα της $4^{ης}$ και $5^{ης}$ τιμής του διατεταγμένου δείγματος, δηλαδή:

$$p_{10} = \frac{253+255}{2} = 254.$$

Αντίστοιχα, το p_{90} θα είναι εκείνη η τιμή για την οποία το πολύ 36 παρατηρήσεις είναι μικρότερές της και το πολύ 40–36=4 είναι μεγαλύτερες, οπότε θα πρέπει να πάρουμε το ημιάθροισμα της $36^{ης}$ και $37^{ης}$ τιμής του διατεταγμένου δείγματος, δηλαδή:

$$p_{90} = \frac{285+287}{2} = 286 .$$

Όταν τα δεδομένα που μας ενδιαφέρουν δίνονται με τη μορφή πινάκων συχνοτήτων που έχουν προκύψει μετά από ομαδοποίηση (βλ. παράγρ. 9.3), τότε δεν γνωρίζουμε ούτε τις ακριβείς τιμές όλων των παρατηρήσεων, ούτε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι συχνότητες μέσα στα διαστήματα των τάξεων της κατανομής. Στην περίπτωση αυτή, δεν μπορούμε να διατάξουμε τις παρατηρήσεις μία προς μία κατά μέγεθος, ώστε να προσδιορίσουμε τη μεσαία διατεταγμένη παρατήρηση. Μπορούμε ωστόσο να χρησιμοποιήσουμε τις αθροιστικές συχνότητες (οι οποίες μας δίνουν το πλήθος ή το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή μέχρι κάποιο όριο) για να υποκαταστήσουμε αυτήν τη διαδικασία και να προσδιορίσουμε κατά προσέγγιση τη διάμεσο (υποθέτοντας ότι οι τιμές του χαρακτηριστικού που παρατηρούμε κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στις κλάσεις της ομαδοποίησης).

Τα βήματα υπολογισμού της διαμέσου στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων που έχουν προέλθει από ν παρατηρήσεις είναι τα εξής:

α) Υπολογίζουμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες που αντιστοιχούν στα ομαδοποιημένα δεδομένα.

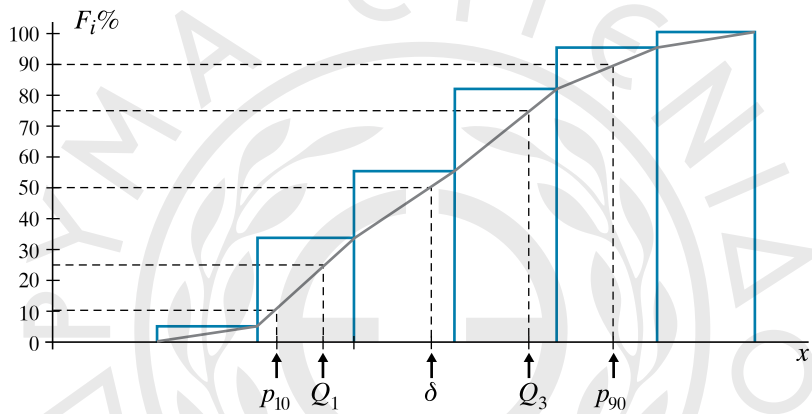
β) Εντοπίζουμε την κλάση η οποία περιέχει τη διάμεσο, δηλαδή τη μεσαία παρατήρηση αν το ν είναι περιττός ή τις δύο μεσαίες, αν το ν είναι άρτιος. Έστω ότι αυτή είναι η i κλάση και ας συμβολίσουμε με L_i το κάτω όριο (κάτω άκρο) της κλάσης αυτής, με F_i την αθροιστική σχετική συχνότητα της ίδιας κλάσης και με F_{i-1} την αθροιστική σχετική συχνότητα της προηγούμενης κλάσης απ' αυτήν στην οποία εντοπίστηκε η διάμεσος.

γ) Υπολογίζουμε τη διάμεσο με τον (προσεγγιστικό) τύπο:

$$\delta = L_i + \frac{0,5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} c = L_i + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} c ,$$

όπου c το εύρος της κλάσης τάξης στην οποία εντοπίστηκε η διάμεσος (εμείς θα εργαστούμε με κλάσεις ίσου εύρους, οπότε το c θα είναι το κοινό εύρος όλων των κλάσεων).

Με ανάλογο τύπο μπορούν να υπολογισθούν τα τεταρτημόρια και γενικότερα τα εκατοστημόρια P_a εντοπίζοντας την κλάση που περιέχει την αντίστοιχη παρατήρηση που μας ενδιαφέρει κάθε φορά και χρησιμοποιώντας στον παραπάνω τύπο την ποσότητα $a/100$ αντί του 0,5 που εμφανίζεται στον αριθμητή του κλάσματος. Η γεωμετρική ερμηνεία των τύπων υπολογισμού δίνεται στο σχήμα 9.4β, όπου έχει απεικονιστεί ένα ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Σχ. 9.4β

9.4.3 Επικρατούσα τιμή ή κορυφή (M_0).

Επικρατούσα τιμή ή ***κορυφή M_0*** ενός συνόλου δεδομένων ονομάζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης στο δείγμα, δηλαδή η τιμή που εμφανίζεται περισσότερες φορές σ' αυτό. Είναι φανερό ότι η επικρατούσα τιμή:

α) Δεν είναι απαραίτητα μοναδική (μάλιστα, όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή).

β) Μπορεί να οριστεί τόσο στην περίπτωση ποσοτικών, όσο και στην περίπτωση ποιοτικών δεδομένων, αντίθετα με τα άλλα μέτρα θέσης που έχουμε εξετάσει μέχρι τώρα, τα οποία ορίζονται μόνο για ποσοτικά δεδομένα.

γ) Δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη ακραίων παρατηρήσεων.

Για παράδειγμα η επικρατούσα τιμή για τη μεταβλητή «*Επάγγελμα*» του πίνακα 9.2.2 είναι η τιμή «*Δημόσιος υπάλληλος*» με συχνότητα 8 (και σχετική συχνότητα 40%), όπως φαίνεται στον πίνακα 9.2.3. Επίσης η επικρατούσα τιμή για τη μεταβλητή «*Μηνιαία χρήση δρομολογίου*» του πίνακα 9.2.2 είναι η τιμή t_2=2 επίσης με συχνότητα 8 (και σχετική συχνότητα 40%), όπως φαίνεται στον πίνακα 9.2.4.

Τα βήματα υπολογισμού της επικρατούσας τιμής στην περίπτωση που έχουμε ποσοτικά δεδομένα ομαδοποιημένα σε κλάσεις ίσου εύρους c είναι τα εξής:

α) Υπολογίζουμε τις σχετικές συχνότητες που αντιστοιχούν στα ομαδοποιημένα δεδομένα.

β) Εντοπίζουμε την ***επικρατούσα κλάση***, δηλαδή την κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Έστω ότι αυτή είναι η i κλάση. Ας συμβολίσουμε με L_i το κάτω όριο (κάτω άκρο) της κλάσης αυτής, με f_i τη σχετική συχνότητα της ίδιας κλάσης με f_{i-1} τη σχετική συχνότητα της προηγούμενης κλάσης και με f_{i+1} τη σχετική συχνότητα της επόμενης κλάσης.

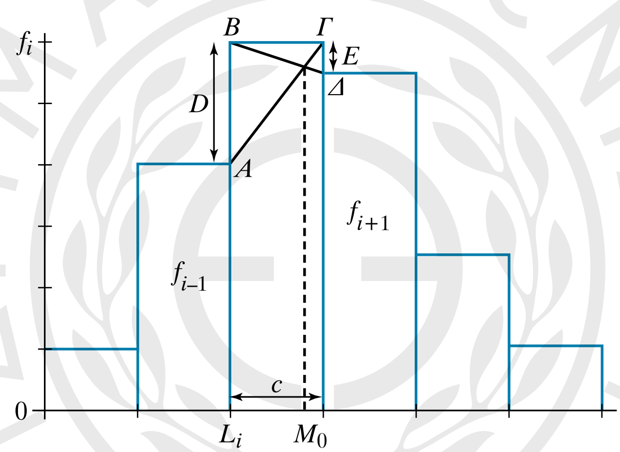
γ) Υπολογίζουμε την κορυφή ή την επικρατούσα τιμή M_0 με χρήση του (προσεγγιστικού) τύπου:

$$M_0 = L_i + \frac{D}{D+E}c,$$

όπου $D = f_i - f_{i-1}$ και $E = f_i - f_{i+1}$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω τύπου υπολογισμού δίνεται στο σχήμα 9.4γ όπου έχει απεικονιστεί ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις μέσα στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται ως η τετμημένη του σημείου τομής των ευθύγραμμων τμημάτων *ΑΓ* και *ΒΔ*.



Σχ. 9.4γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.4.1.

Ο πίνακας συχνοτήτων 9.4.2 δίνει την κατανομή του χρόνου X (σε min) που χρειάστηκαν 100 σπουδαστές της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού για να λύσουν ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο, τη διάμεσο και τον επικρατέστερο χρόνο για τη λύση του προβλήματος. Επίσης να βρείτε τον χρόνο εντός του οποίου το 25% των μαθητών είχε κατορθώσει να ολοκληρώσει τη λύση του προβλήματος.

Πίνακας 9.4.2

i	t_i	ν_i
1	30	6
2	35	14
3	45	20
4	50	36
5	60	10
6	75	12
7	90	2

Λύση.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής συμπληρώνουμε τις στήλες του πίνακα 9.4.3. Επομένως, ο μέσος χρόνος για τη λύση του προβλήματος είναι ίσος με:

$$\bar{x} = \frac{t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + \ldots + t_7\nu_7}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_7} = \frac{5050}{100} = 50,5.$$

Προκειμένου να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της διαμέσου, παρατηρούμε ότι έχουμε $\nu=100$ τιμές που βρίσκονται ήδη σε αύξουσα σειρά, οπότε η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα της $50^{ης}$ και της $51^{ης}$ παρατήρησης. Και οι δύο αυτές παρατηρήσεις είναι, σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων, ίσες με 50, οπότε

$$\delta = \frac{50+50}{2} = 50 \text{ min}.$$

Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, οπότε $M_0=50\text{min}$ (με αντίστοιχη συχνότητα $\nu_4=36$).

Για να βρεθεί σε πόσο χρόνο κατόρθωσε να λύσει το πρόβλημα το 25% των μαθητών, θα πρέπει να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 των δεδομένων. Αφού $\nu/4=100/4=25$, θα πρέπει να εξετάσουμε την $25^{η}$ και $26^{η}$ παρατήρηση του δείγματος. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων που δόθηκε, όλες οι παρατηρήσεις από την $21^{η}$ μέχρι την $40^{ή}$ είναι ίσες με 45, οπότε $Q_1=45$.

Πίνακας 9.4.3

i	t_i	ν_i	$t_i\nu_i$
1	30	6	180
2	35	14	490
3	45	20	900
4	50	36	1800
5	60	10	600
6	75	12	900
7	90	2	180
Σύνολο		**100**	**5050**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.4.2.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 9.3.2 (ομαδοποιημένα δεδομένα), να υπολογίσετε την κορυφή για τις $\nu = 40$ παρατηρήσεις του πίνακα 9.3.1, οι οποίες αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση ενός επιβατικού πλοίου.

Λύση.

Για τον υπολογισμό της κορυφής M_0 παρατηρούμε αρχικά ότι η επικρατούσα κλάση, δηλαδή η κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα (14), είναι η τέταρτη και έχει ως κάτω άκρο το $L_4=270$. ΄Εχουμε επίσης $f_4=14, f_3=12, f_5=4$, και $c=10$, οπότε:

$$D = f_i - f_{i-1} = f_4 - f_3 = 14-12 = 2\ ,\ \ E = f_i - f_{i+1} = f_4 - f_5 = 12-4 = 8$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο $M_0 = L_i + \dfrac{D}{D+E}c$ προκύπτει:

$$M_0 = L_4 + \frac{D}{D+E}c = 270 + \frac{2}{2+8}\cdot 10 = 272\,.$$

Ασκήσεις.

9.4.1. Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο, την επικρατούσα τιμή (αν υπάρχει) και τη διάμεσο των παρατηρήσεων:
α) 4 0 2 1 4 3 2 3 3 4 4 111 5 4 7 2
β) 20, 0, 7, 2, 7, 1, 90, 4
γ) 2, 3, 1, 5, 2, 7, 1, 2, 4, 1, 5, 9

9.4.2. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 9 άτομα για να λύσουν ένα απλό πρόβλημα ήταν: 3, 5, α, 36, 6, 7, 4, 7, 8 με μέση τιμή $\bar{x} = 9$. α) Να βρείτε τον χρόνο α που χρειάστηκε το $3^{ο}$ άτομο για να λύσει το πρόβλημα και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη διάμεσο και την κορυφή των δεδομένων.

9.4.3. Για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δύο αυτοκινήτων A και B μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το A και σε πέντε διαδρομές για το B. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 km) για το αυτοκίνητο A ήταν 9, 6, 7, 9, 9, 8, ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο B ήταν 8, 10, 7, 8, 12.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν στο αυτοκίνητο A.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν στο αυτοκίνητο B.

γ) Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο A και όχι το B, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο B και όχι το A, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

9.4.4. Μια εταιρεία απασχολεί 15 υπαλλήλους, εκ των οποίων οι 8 εργάζονται στο τμήμα A και οι 7 στο τμήμα B. Οι μισθοί (σε €) των 8 εργαζομένων στο τμήμα A είναι:

1350, 1450, 1470, 1370, 1410, 1390, 1430, 1410,

ενώ των 7 εργαζομένων στο τμήμα B είναι:

1390, 1150, 1310, 1510, 1230, 1470, 1390

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών

α) των εργαζομένων στο τμήμα A της εταιρείας.

β) των εργαζομένων στο τμήμα B της εταιρείας.

γ) όλων των εργαζομένων της εταιρείας.

9.4.5. Η μέση βαθμολογία ενός σπουδαστή της Ακαδημίας του Εμπορικού Ναυτικού σε 10 μαθήματα είναι 18. Ποια θα είναι η μέση βαθμολογία του:

α) Αν στα επόμενα δύο μαθήματα λάβει βαθμολογία 17 και 20;

β) Αν διαγράψει ένα από τα μαθήματά του, στο οποίο είχε επιτύχει βαθμολογία 16;

γ) Αν ξαναδώσει ένα μάθημα, στο οποίο είχε βαθμολογία 16 και η νέα βαθμολογία του είναι 18;

9.4.6. Η μέση ηλικία των ανδρών ενός πληρώματος πλοίου είναι 40 χρόνια, ενώ των γυναικών είναι 36 χρόνια. Ποια είναι η μέση ηλικία του πληρώματος του πλοίου αν:

α) Σε αυτό υπηρετούν 20 άντρες και 16 γυναίκες;

β) Το πλήθος των αντρών και των γυναικών που υπηρετούν στο πλοίο είναι ίδιο;

γ) Το πλήθος των αντρών που υπηρετούν στο πλοίο είναι διπλάσιο από το πλήθος των γυναικών;

δ) Υπολογίστε το μέσο όρο (δηλ. το ημιάθροισμα) της μέσης ηλικίας των ανδρών και της μέσης ηλικίας των γυναικών. Πώς συγκρίνεται η ποσότητα αυτή με τη μέση ηλικία του πληρώματος του πλοίου σε κάθε μία από τις περιπτώσεις (α), (β), (γ);

9.4.7. Ένα τουριστικό γραφείο απασχολεί 10 υπαλλήλους στο τμήμα A με μέσο (μηνιαίο) μισθό 1200€, 20 υπαλλήλους στο τμήμα B με μέσο μισθό 1500€ και 30 υπαλλήλους στο τμήμα Γ. Αν ο μέσος μισθός των 45 υπαλλήλων που απασχολούνται και στα τρία τμήματα του γραφείου είναι 1700€, να υπολογίσετε τον μέσο μισθό των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα Γ του γραφείου.

9.4.8. Ένας επιβάτης πλοίου αγόρασε 10 είδη από το κατάστημα που υπήρχε στο πλοίο, τα οποία κόστιζαν 50, 25, 25, 65, 70, 15, 25, 95, 37, 33€ αντίστοιχα (προ ΦΠΑ).

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

β) Πώς μεταβάλλονται οι τιμές που προέκυψαν από το ερώτημα (α), αν προσθέσουμε και τον ΦΠΑ, που είναι 19%;

γ) Αν όλα τα είδη είχαν προσφερθεί με έκπτωση 3€, ποια θα ήταν η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή;

9.4.9. Στον πίνακα 9.4.4 δίνεται η κατανομή της ηλικίας των ατόμων μιας πόλεως. Να υπολογίσετε:
α) τη μέση ηλικία των ατόμων της πόλης.
β) τη διάμεσο της ηλικίας των ατόμων της πόλης.
γ) την επικρατούσα τιμή για την ηλικία των ατόμων της πόλης.
Ποιες θα είναι οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων μετά από πάροδο 5 ετών;

9.4.10. Δίνεται ο πίνακας 9.4.5 συχνοτήτων μιας μεταβλητής X.
α) Να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν στον πίνακα.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.
γ) Να υπολογίσετε τη διασπορά των παρατηρήσεων.

Πίνακας 9.4.4

Ηλικία (σε έτη)	*Συχνότητα (σε χιλιάδες)*
0–20	8
20–40	12
40–60	17
60–80	6
80–100	1

Πίνακας 9.4.5

Τιμές της μεταβλητής x_i	*Συχνότητα ν_i*	*Σχετική Συχνότητα f_i*	*Αθροιστική Συχνότητα N_i*	$x_i\nu_i$
1				10
2			35	
3				
Άθροισμα	ν**=50**	**1**		

9.5 Μέτρα διακύμανσης.

Αφού παρουσιάσαμε τα κυριότερα μέτρα θέσης, θα προχωρήσουμε τώρα στην παρουσίαση των ***μέτρων διακύμανσης*** ή ***μεταβλητότητας***. Όπως αναφέρθηκε ήδη στην προηγούμενη παράγραφο, τα μέτρα διακύμανσης είναι αριθμητικά μέτρα, τα οποία μας παρέχουν συνοπτικές πληροφορίες σχετικά με το κατά πόσον οι τιμές μιας μεταβλητής έχουν την τάση να συγκεντρώνονται γύρω από ένα μέτρο θέσης ή να διασπείρονται (αποκλίνουν) μακριά από αυτό. Τα σπουδαιότερα μέτρα διακύμανσης είναι το ***εύρος***, η ***ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση***, η ***διασπορά*** και η ***τυπική απόκλιση***.

Το απλούστερο μέτρο διακύμανσης είναι το ***εύρος*** ή ***κύμανση*** (R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

Για παράδειγμα, στα δεδομένα επιβατικής κίνησης του πίνακα 9.3.1, κατά την υλοποίηση της διαδικασίας ομαδοποίησης είχαμε υπολογίσει το εύρος $r = 300 - 241 = 59$. Όταν μας δοθούν ομαδοποιημένα δεδομένα, χωρίς να είναι διαθέσιμες οι αρχικές μετρήσεις, ως εύρος θεωρούμε τη διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσης από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης (η τιμή αυτή μπορεί να διαφέρει ελαφρώς από το πραγματικό εύρος που θα λαμβάναμε αν είχαμε διαθέσιμα τα αρχικά δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν).

Ένα δεύτερο μέτρο διακύμανσης είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q ορίζεται ως η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3, δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1.$$

Μερικές φορές χρησιμοποιείται ως μέτρο διασποράς και η ημιδιαφορά $(Q_3 - Q_1)/2$ μεταξύ του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου, η οποία ονομάζεται ***ημιενδοτεταρτημοριακό εύρος***, ωστόσο στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου θα περιοριστούμε στη χρήση του Q μόνο. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q μάς δίνει το εύρος ενός διαστήματος που εκτείνεται αριστερά και δεξιά από τη διάμεσο δ των δεδομένων μας, στο οποίο περιλαμβάνεται το 50% των παρατηρήσεων. Συνεπώς, όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συγκέντρωση των τιμών γύρω από τη διάμεσο και άρα μικρότερη η διακύμανση των τιμών της μεταβλητής. Για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 βρήκαμε στην παράγραφο 14.4 ότι $Q_1=263{,}5$, $Q_3=277$, οπότε $Q=Q_3-Q_1=277-263{,}5=13{,}5$.

Το πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο μεταβλητότητας για ποσοτικές μεταβλητές είναι η ***διασπορά***, η οποία ορίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των τετραγώνων των διαφορών (αποκλίσεων) των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό μέσο $\overline{x}$ της μεταβλητής αυτής.

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριστικό) X, τότε η διασπορά της X θα συμβολίζεται με s_X^2 ή, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, με s^2, και θα υπολογίζεται από τον τύπο[1]

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\overline{x})^2 .$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στις ακόλουθες δύο μορφές, οι οποίες διευκολύνουν σημαντικά τους αριθμητικούς υπολογισμούς

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-(\overline{x})^2 \quad \text{ή} \quad s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2\right\}.$$

Στην περίπτωση που για τα δεδομένα που συλλέξαμε έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας συχνοτήτων, η διασπορά s^2 μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\varkappa}(t_i-\overline{x})^2\nu_i, \quad s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2\nu_i-(\overline{x})^2 , \quad s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2\nu_i-\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i\nu_i\right)^2\right\}$$

ή ισοδύναμα τους:

$$s^2=\sum_{i=1}^{\varkappa}(t_i-\overline{x})^2 f_i , \quad s^2=\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2 f_i-(\overline{x})^2 , \quad s^2=\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i^2 f_i-\left(\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i f_i\right)^2,$$

όπου $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ είναι οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$.

Οι τελευταίοι τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ομαδοποιημένα δεδομένα, θεωρώντας ότι τα $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ είναι τα αντίστοιχα κέντρα των κλάσεων. Στην περίπτωση αυτή η τιμή που θα προκύψει θα αποτελεί μια προσέγγιση της διακύμανσης και όχι την ακριβή τιμή, η οποία δεν μπορεί να υπολογιστεί αν δεν μας δοθούν οι πραγματικές παρατηρήσεις (η διαφορά οφείλεται φυσικά στην απώλεια πληροφορίας λόγω ομαδοποίησης των παρατηρήσεων).

Για παράδειγμα, η διασπορά της ημερήσιας επιβατικής κίνησης με βάση τα δεδομένα που δίνονται

1. Πολλές φορές, ιδιαίτερα όταν έχουμε μικρά δείγματα παρατηρήσεων, στον τύπο της διακύμανσης χρησιμοποιείται ως παρονομαστής η ποσότητα $\nu-1$ αντί του ν, για λόγους που έχουν να κάνουν με τις στατιστικές ιδιότητες του s^2 (αποδεικνύεται ότι τότε γίνεται πιο σωστή εκτίμηση της άγνωστης διασποράς που υπάρχει στον πληθυσμό από τον οποίο λήφθηκε το δείγμα). Στο παρόν εγχειρίδιο θα χρησιμοποιούμε παντού τον τύπο με το ν και όχι το $\nu-1$.

στον πίνακα 9.3.1 είναι ίση με (υπενθυμίζουμε ότι $\bar{x}$ = 269)

$$s^2 = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(252-270)^2 + (255-270)^2 + \ldots + (277-270)^2}{40} = \frac{6066}{40} = 151{,}65.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τα ομαδοποιημένα δεδομένα και τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων 9.3.2, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διασπορά της ημερήσιας επιβατικής κίνησης για τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1, κατασκευάζοντας τον πίνακα 9.5.1. με βάση τον οποίο έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{40}\left\{\sum_{i=1}^{6} t_i^2 \nu_i - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{6} t_i \nu_i\right)^2\right\} = \frac{1}{40}\left\{2910600 - \frac{10780^2}{40}\right\} = \frac{5390}{40} = 134{,}75.$$

Πίνακας 9.5.1

i	*Κεντρικές τιμές* t_i	ν_i	$t_i \nu_i$	$t_i^2\, \nu_i$
1	245	2	490	120050
2	255	6	1530	390150
3	265	12	3180	842700
4	275	14	3850	1058750
5	285	4	1140	324900
6	295	2	590	174050
	Σύνολο	**ν=40**	$\sum t_i \nu_i$ **= 10780**	$\sum t_i \nu_i$ **= 2910600**

Για τη *διασπορά* ισχύουν οι επόμενες χρήσιμες ιδιότητες:

Δ$_1$. Αν όλες οι τιμές των διαθέσιμων παρατηρήσεων είναι ίσες, δηλαδή $x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = c$, τότε η διασπορά τους είναι ίση με μηδέν.

Δ$_2$. Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι ίσο με νs^2, δηλαδή:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_\nu - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2 = \nu s^2.$$

Δ$_3$. Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής προσθέσουμε μία σταθερή ποσότητα, έστω c, τότε η διασπορά τους δεν θα μεταβληθεί, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ έχουν διασπορά s_X^2, τότε οι παρατηρήσεις $y_1 = x_1 + c,\ y_2 = x_2 + c, \ldots, y_\nu = x_\nu + c$ θα έχουν διασπορά $s_Y^2 = s_X^2$.

Δ$_4$ Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε η διασπορά τους πολλαπλασιάζεται με το τετράγωνο της ποσότητας αυτής, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ έχουν διασπορά s_X^2, τότε η διασπορά των παρατηρήσεων $y_1 = cx_1,\ y_2 = cx_2 \ldots, y_\nu = cx_\nu$ θα είναι ίση με $s_Y^2 = c^2 s_X^2$.

Δ_5. ΄Εστω n σύνολα δεδομένων, εκ των οποίων το πρώτο περιλαμβάνει m_1 μετρήσεις με διασπορά s_1^2, το δεύτερο περιλαμβάνει m_2 μετρήσεις με διασπορά s_2^2, κ.ο.κ. και το τελευταίο περιέχει m_n μετρήσεις με αντίστοιχη διασπορά s_n^2. Τότε η διασπορά s^2 όλων των μετρήσεων ($m = m_1 + m_2 + ... + m_m$) είναι ίση με:

$$s^2 = \frac{m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 + ... + m_n s_n^2}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i s_i^2 .$$

΄Ενα σημαντικό μειονέκτημα της διασποράς s^2 είναι ότι δεν εκφράζεται στις μονάδες, στις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις που μελετάμε. ΄Ετσι, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε m, η διασπορά θα εκφράζεται σε m^2, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε sec, η διασπορά θα εκφράζεται σε sec^2 κ.ο.κ. ΄Ενας τρόπος για να εξαλειφθεί το πρόβλημα αυτό είναι να θεωρήσουμε ως μέτρο διασποράς τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, η οποία προφανώς θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης με το χαρακτηριστικό που μελετάμε (όπως ακριβώς συμβαίνει και με όλα τα μέτρα θέσης που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο).

Τυπική απόκλιση s_X ή απλά s ονομάζεται η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, δηλαδή:

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Για παράδειγμα, η τυπική απόκλιση για την ημερήσια επιβατική κίνηση που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 9.3.1 είναι ίση με $s = \sqrt{151,65} \cong 12,3$, αν αυτή υπολογιστεί από τα πραγματικά δεδομένα ή $s = \sqrt{134,75} \cong 11,6$, αν υπολογιστεί από τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 9.3.2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.1.

Στο παράδειγμα 9.4.1. δόθηκε ο πίνακας συχνοτήτων που περιγράφει την κατανομή του χρόνου X (σε min) που χρειάστηκαν 100 σπουδαστές της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού για να λύσουν ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση του χρόνου για τη λύση του προβλήματος.

Λύση.

Αφού η μεγαλύτερη τιμή είναι το 90 και η μικρότερη το 30, το εύρος των παρατηρήσεων θα είναι ίσο με:

$$R = 90 - 30 = 60 \text{ min}.$$

Για τον υπολογισμό του ενδοτεταρτημοριακού εύρους $Q = Q_3 - Q_1$ χρειαζόμαστε τις τιμές του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 και του τρίτου τεταρτημορίου Q_3. Στη λύση του παραδείγματος 9.4.1 είχαμε ήδη βρει την τιμή Q_1=45. Επίσης, αφού $3\nu/4 = 3 \cdot 100/4 = 75$, για να υπολογίσουμε το Q_3 θα πρέπει να εξετάσουμε την 75^{η} και 76^{η} παρατήρηση του δείγματος. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων που δόθηκε, όλες οι παρατηρήσεις από την 31^{η} μέχρι την 76^{η} είναι ίσες με 50, οπότε Q_3=50. Άρα:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 50 - 45 = 5.$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης και στη συνέχεια της τυπικής απόκλισης θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} t_i^2 \nu_i - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} t_i \nu_i\right)^2\right\}, s = \sqrt{s^2}.$$

Με βάση τον πίνακα 9.5.2 βρίσκουμε:

$$s^2 = \frac{1}{100}\left\{\sum_{i=1}^{7} t_i^2 \nu_i - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{7} t_i \nu_i\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{100}\left\{272750 - \frac{5050^2}{100}\right\} = \frac{17725}{100} = 177,25.$$

Επομένως, η διασπορά της μεταβλητής X είναι $s^2 = 177,25$ και η τυπική της απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{177,25} = 13,31.$

Πίνακας 9.5.2

i	t_i	ν_i	$t_i \nu_i$	$t_i^2 \nu_i$
1	30	6	180	5400
2	35	14	490	17150
3	45	20	900	40500
4	50	36	1800	90000
5	60	10	600	36000
6	75	12	900	67500
7	90	2	180	16200
Σύνολο		**100**	**5050**	**272750**

Ασκήσεις.

9.5.1. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της άσκησης 9.4.2. Ποιο από τα μέτρα αυτά θεωρείτε ότι είναι το πλέον κατάλληλο για την περιγραφή της κύμανσης (μεταβλητότητας) των δεδομένων;

9.5.2. Δίνονται τα παρακάτω τρία σύνολα δεδομένων:

10, 30, 50, 60, 70, 90, 110
10, 59, 59, 60, 61, 61, 110
10, 11, 22, 60, 98, 109, 110.

α) Να επαληθεύσετε ότι καθένα από τα τρία σύνολα δεδομένων έχει την ίδια μέση τιμή.
β) Παρατηρώντας με το «μάτι» τα δεδομένα να αποφασίσετε σε ποιο από αυτά εμφανίζεται η μεγαλύτερη και σε ποιο η μικρότερη διασπορά.
γ) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση των δεδομένων αυτών το εύρος;
δ) Να υπολογίσετε όλα τα μέτρα διασποράς που γνωρίζετε και για τα τρία σύνολα δεδομένων.
ε) Ποιο μέτρο διασποράς θεωρείτε το πλέον κατάλληλο για τη σύγκριση των δεδομένων;

9.5.3. Να αποδείξετε ότι εάν από όλες τις τιμές ενός δείγματος αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική τους απόκλιση, τότε νέες τιμές που θα προκύψουν έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Οι μετασχηματισμένες τιμές που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο ονομάζονται τυποποιημένες τιμές. Να υπολογίσετε τις τυποποιημένες τιμές των τριών συνόλων δεδομένων που δόθηκαν στην άσκηση 9.5.2. Τι παρατηρείτε;

9.5.4. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της άσκησης 9.4.7. Στη συνέχεια, χωρίς να γίνουν ξανά αναλυτικοί υπολογισμοί, να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα που δίνονται στα ερωτήματα (α) και (β).

9.5.5. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της άσκησης 9.4.14. Ποιες θα είναι οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων μετά από πάροδο 5 ετών;

9.5.6. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της άσκησης 9.4.10. Ποιες θα ήταν οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων αν το ύψος το μετρούσαμε σε cm (αντί για m);

9.5.7. Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους αριθμούς α, β, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών α, β, 5, 7, 8 είναι ίσος με 6 και η τυπική τους απόκλιση είναι ίση με $\sqrt{2}$.

9.5.8. Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς τον χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο πίνακας 9.5.3.
α) Να βρείτε τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων.
β) Να υπολογίσετε τη μέση υπερωριακή απασχόληση.
γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση της υπερωριακής απασχόλησης.
δ) Να υπολογίσετε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και στη συνέχεια το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

9.5.9. Στον πίνακα 9.5.4 δίνεται η κατανομή του ύψους 50 ατόμων που επιλέχθηκαν τυχαία από το ακροατήριο μιας ομιλίας. Να υπολογίσετε:
α) Το μέσο ύψος των ατόμων του δείγματος.
β) Το διάμεσο ύψος των ατόμων του δείγματος.
γ) Την επικρατούσα τιμή για το ύψος των ατόμων του δείγματος.
δ) Το ύψος κάτω από το οποίο βρίσκεται το 25% των παρατηρήσεων του δείγματος.
ε) Το ύψος κάτω από το οποίο βρίσκεται το 75% των παρατηρήσεων του δείγματος.
στ) Το ύψος κάτω από το οποίο βρίσκεται το 90% των παρατηρήσεων του δείγματος.
ζ) Την τυπική απόκλιση του ύψους των ατόμων του δείγματος.
η) Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο για το ύψος των ατόμων του δείγματος.
θ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για το ύψος των ατόμων του δείγματος.

Πίνακας 9.5.3

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [–)	*Αθροιστική συχνότητα N_i*
0–2	5
2–4	15
4–6	20
6–8	35
8–10	40

Πίνακας 9.5.4

Κλάσεις [–)	*Κεντρικές τιμές*	*Συχνότητα ν_i*
162–168	165	8
168–174	171	18
174–180	177	20
180–186	183	7
186–192	189	3

9.6 Γραμμική παλινδρόμηση.

Αρκετά συχνά εμφανίζεται η ανάγκη ταυτόχρονης μελέτης δύο ή περισσοτέρων χαρακτηριστικών (μεταβλητών), με στόχο τον προσδιορισμό του τρόπου με τον οποίο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

α) Το πλήθος των επιβατών που θα προσελκύσει μια ακτοπλοϊκή εταιρεία σχετίζεται με το ύψος της διαφημιστικής δαπάνης που θα κάνει.

β) Ο χρόνος αλλοίωσης ενός γαλακτοκομικού προϊόντος επηρεάζεται αρνητικά από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλη είναι η θερμοκρασία, τόσο μικρότερος θα είναι ο χρόνος που θα υποστεί αλλοίωση το προϊόν.

γ) Η παραγωγή ενός αγροτικού προϊόντος εξαρτάται από την ποσότητα λιπάσματος που θα χρησιμοποιηθεί.

δ) Το ύψος των αποδοχών των υπαλλήλων μιας εταιρείας εξαρτάται από τον χρόνο υπηρεσίας τους.

Σε όλα τα παραπάνω προβλήματα παρουσιάζει ενδιαφέρον να εξεταστούν οι επιδράσεις που κάποια μεταβλητή ασκεί σε κάποια άλλη μεταβλητή. Αν μάλιστα θα μπορούσε να βρεθεί και ένα απλό μαθηματικό μοντέλο που να εκφράζει τη σχέση αυτή μέσω μιας συνάρτησης, τότε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των τιμών μιας μεταβλητής από τις γνώσεις που διαθέτουμε για τις άλλες μεταβλητές.

Ο τομέας της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών με στόχο την πρόβλεψη μίας από αυτές με χρήση των τιμών μίας ή περισσοτέρων άλλων, ονομάζεται ***ανάλυση παλινδρόμησης***.

Σε κάθε πρόβλημα παλινδρόμησης διακρίνουμε συνήθως δύο είδη μεταβλητών: τις ***ανεξάρτητες*** ή ***ελεγχόμενες μεταβλητές*** και τις ***εξαρτημένες μεταβλητές*** ή ***μεταβλητές απόκρισης***. Ανεξάρτητες μεταβλητές, οι οποίες συμβολίζονται συνήθως με X, είναι εκείνες στις οποίες μπορούμε να δίνουμε μια συγκεκριμένη τιμή (π.χ. τιμή πώλησης ενός προϊόντος, θερμοκρασία επεξεργασίας μιας ουσίας, ποσότητα λιπάσματος που θα χρησιμοποιηθεί σε έναν αγρό) ή λαμβάνουν τιμές που μπορούμε να παρατηρήσουμε, αλλά όχι να ελέγξουμε (π.χ. θερμοκρασία περιβάλλοντος, ηλιοφάνεια). Η εξαρτημένη μεταβλητή, η οποία συμβολίζεται συνήθως με Y, αντανακλά το αποτέλεσμα μεταβολών στις ελεγχόμενες μεταβλητές (π.χ. αριθμός πωλήσεων του προϊόντος, χρώμα-καθαρότητα της παραγόμενης ουσίας, παραγωγή του αγρού). Αξίζει να σημειωθεί ότι η διάκριση μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών δεν είναι πάντοτε σαφής, αφού μπορεί κάποιος παράγοντας, ο οποίος σε ένα ενδιάμεσο στάδιο θεωρείται εξαρτημένη μεταβλητή, σε ένα επόμενο να λάβει τον ρόλο της ανεξάρτητης.

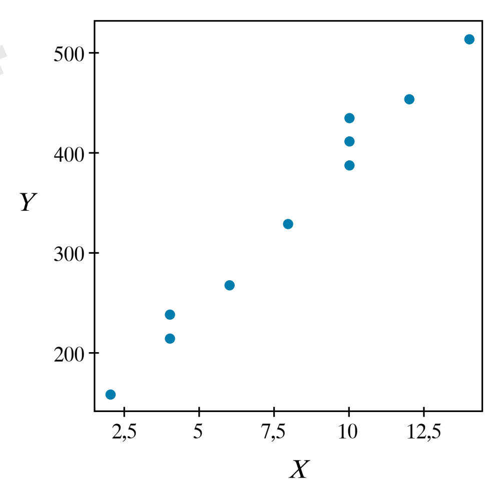
Η απλούστερη περίπτωση παλινδρόμησης είναι η ***απλή γραμμική παλινδρόμηση***, κατά την οποία υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή X και μία εξαρτημένη μεταβλητή Y, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία γραμμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής X.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Στον πίνακα 9.6.1 δίνεται η ετήσια επιβατική κίνηση Y (σε χιλιάδες επιβάτες) που αφορά σε μια ακτοπλοϊκή εταιρεία για $\nu=10$ έτη και το ποσό X (σε εκατομμύρια €) που δαπάνησε η συγκεκριμένη εταιρεία για διαφημιστική δαπάνη στην αρχή του έτους.

Αν παραστήσουμε τα ζεύγη (x_i, y_i) των παρατηρήσεων σε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, θα πάρουμε το σχήμα 9.6α, το οποίο ονομάζεται ***διάγραμμα διασποράς***.

Πίνακας 9.6.1
Ετήσια επιβατική κίνηση Y και διαφημιστική δαπάνη X μιας ακτοπλοϊκής εταιρείας για ν=10 έτη

i	x_i	y_i
1	4	225
2	2	156
3	10	390
4	14	516
5	6	267
6	8	330
7	10	411
8	4	213
9	12	450
10	10	402



Σχ. 9.6α
Διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1

Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται να υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ποσό X που δαπανά η εταιρεία για διαφήμιση στην αρχή του έτους και την ετήσια επιβατική κίνηση Y. Πιο συγκεκριμένα, τα σημεία (x_i, y_i), $i = 1, 2,..., 10$ δείχνουν να είναι συγκεντρωμένα γύρω από μία ευθεία, δηλαδή η σχέση μεταξύ των X και Y φαίνεται να είναι γραμμική (κατά προσέγγιση). Θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος της διαφημιστικής δαπάνης X και ως εξαρτημένη μεταβλητή την επιβατική κίνηση Y, η ευθεία που θα προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία αυτά (με βάση κάποιο κριτήριο που θα δούμε στη συνέχεια) θα ονομάζεται ***ευθεία παλινδρόμησης*** της Y πάνω στη X. Στο σχήμα 9.6β παρουσιάζεται το διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 μαζί με τρεις ευθείες που περνούν «ανάμεσα» στα 10 σημεία και φαίνεται να τα προσεγγίζουν ικανοποιητικά. Προφανώς η χάραξή της «με το μάτι», παρά την απλότητά της, έχει πολλά μειονεκτήματα, το κυριότερο από τα οποία είναι η έλλειψη αντικειμενικότητας, αφού διάφορα άτομα μπορούν να προτείνουν πολλές διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα αντικειμενικό (μάλλον μαθηματικό) κριτήριο επιλογής της βέλτιστης ευθείας προσέγγισης.

Ας θεωρήσουμε ότι η εξίσωση της ευθείας που προσεγγίζει τα δεδομένα μας έχει τη γενική μορφή:

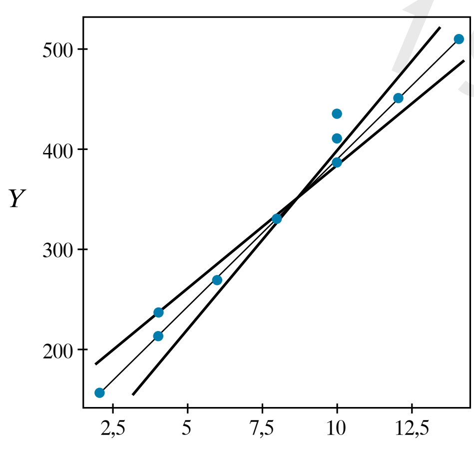
$$y = \alpha + \beta x.$$

Η παράμετρος α θα μας δίνει τότε τη θέση στην οποία η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$, ενώ η παράμετρος β παριστάνει την κλίση (συντελεστή διεύθυνσης) της ευθείας. Το ερώτημα που προκύπτει είναι με ποιον τρόπο μπορούμε να καθορίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους α και β έτσι ώστε η ευθεία που θα προκύψει να μας δίνει όσο το δυνατόν την καλύτερη περιγραφή της σχέσης (εξάρτησης) που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών X και Y. Η διαδικασία καθορισμού των α και β ονομάζεται ***εκτίμηση*** των παραμέτρων, ενώ οι τιμές που προκύπτουν γι' αυτές με την υλοποίηση της διαδικασίας εκτίμησης ονομάζονται ***εκτιμήτριες***.

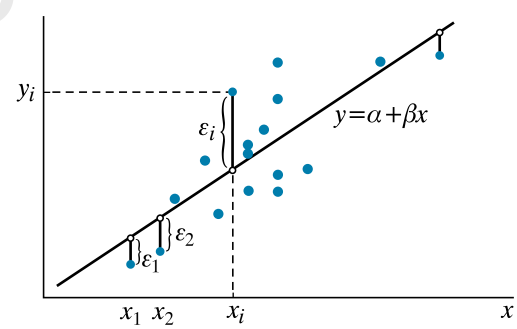
Η πιο συνηθισμένη μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β είναι η ***μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων***, η οποία προτάθηκε το 1805 σε μια εργασία του Γάλλου μαθηματικού Legendre (1752-1833) και αμέσως μετά από τον Γερμανό μαθηματικό Gauss (1777-1855). Σύμφωνα μ' αυτήν ο προσδιορισμός των παραμέτρων α, β, γίνεται έτσι, ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία $y = \alpha + \beta x$ (σχ. 9.6γ). Έτσι, εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι η ελαχιστοποίηση της ποσότητας



Σχ. 9.6β
Διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 και ευθεία προσέγγισης



Σχ. 9.6γ
Διάγραμμα διασποράς και κατακόρυφες αποστάσεις (ε_i) από την ευθεία προσέγγισης

$$AT = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2. \qquad (9.6.1)$$

Οι τιμές των παραμέτρων α και β, που ελαχιστοποιούν την (9.6.1), καλούνται ***εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων*** και συμβολίζονται $\hat{\alpha}$ με $\hat{\beta}$ και αντίστοιχα. Αποδεικνύεται[2] ότι οι εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i - \hat{\beta} \cdot \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i. \qquad (9.6.2)$$

Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$ καλείται ***ευθεία ελάχιστων τετραγώνων*** ή ***ευθεία παλινδρόμησης*** της Y (πάνω) στη X.

Αν συμβολίσουμε με
$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i$$

τους αριθμητικούς μέσους των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ και $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ αντίστοιχα, θα έχουμε

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\, \bar{x},$$

και αν αντικαταστήσουμε την έκφραση $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\, \bar{x}$ στην εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης, η τελευταία γράφεται στη μορφή

$$\hat{y} = \bar{y} - \hat{\beta}\, \bar{x} + \hat{\beta}\, x \Leftrightarrow \hat{y} - \bar{y} = \hat{\beta}(x - \bar{x}).$$

Είναι φανερό ότι η ευθεία ελάχιστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$ διέρχεται πάντοτε από το σημείο με συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y})$.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 μπορούμε να προχωρήσουμε εύκολα στους υπολογισμούς που δίνονται στον πίνακα 9.6.2 και αντικαθιστώντας στους τύπους (9.6.2) βρίσκουμε:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} = \frac{10 \cdot 30960 - 80 \cdot 3360}{10 \cdot 776 - 80^2} = 30$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i - \hat{\beta} \cdot \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \frac{1}{10} \cdot 3360 - 30 \cdot \frac{1}{10} \cdot 80 = 96.$$

Επομένως έχουμε τις εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων $\hat{\beta} = 30$ και $\hat{\alpha} = 96$ και η ευθεία ελάχιστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα είναι η:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x = 96 + 30x$$

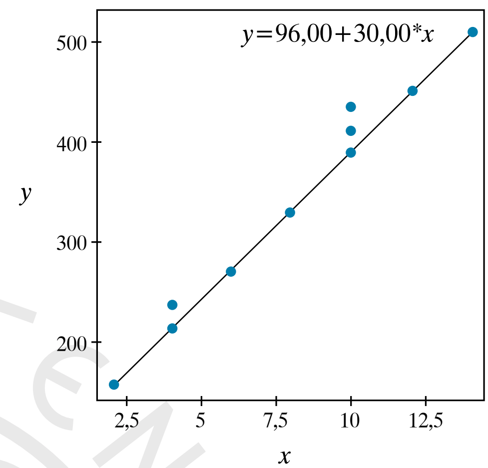
2. Η απόδειξη παραλείπεται, αφού απαιτεί τη γνώση αποτελεσμάτων που δεν έχουν καλυφθεί στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου.

(σχ. 9.6δ). Σύμφωνα με αυτήν, η εκτίμησή μας για την ετήσια επιβατική κίνηση Y (σε χιλιάδες επιβάτες) όταν δεν γίνει καμία διαφημιστική δαπάνη (x=0) είναι:

$$\hat{y} = 96 + 30 \cdot 0 = 96 .$$

Πίνακας 9.6.2

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	4	225	16	900
2	2	156	4	312
3	10	390	100	3900
4	14	516	196	7224
5	6	267	36	1602
6	8	330	64	2640
7	10	411	100	4110
8	4	213	16	852
9	12	450	144	5400
10	10	402	100	4020
	$\sum x_i = 80$	$\sum y_i = 3360$	$\sum x_i^2 = 776$	$\sum x_i y_i = 30960$



Σχ. 9.6δ
Διάγραμμα διασποράς και ευθεία προσέγγισης

Η ερμηνεία αυτή για την τιμή του $\hat{\alpha}$ μπορεί να διατυπωθεί γενικά και ως εξής:

> Στην εξίσωση ελάχιστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ (που αποτελεί την τεταγμένη του σημείου, στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$), μας δίνει την (αναμενόμενη, εκτιμώμενη) τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν x=0.

Προφανώς, αν προκύψει $\hat{\alpha} = 0$, τότε η ευθεία θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Προκειμένου να δώσουμε μια πρακτική ερμηνεία στην εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β, δηλαδή στον συντελεστή διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές τιμές x_1 και $x_2 = x_1 + 1$ της ανεξάρτητης μεταβλητής X. Τότε η διαφορά των αντίστοιχων προβλεπόμενων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής θα είναι ίση με:

$$\hat{y}_2 - \hat{y}_1 = (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x_2) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x_1) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_1 + 1) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x_1) = \hat{\beta} \ .$$

Συνεπώς $\hat{y}_2 = \hat{y}_1 + \hat{\beta}$ και μπορούμε να πούμε ότι:

> Η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\beta}$ παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta} > 0$ ή ελαττώνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta} < 0$.

Για παράδειγμα, με βάση την ευθεία ελάχιστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x = 96 + 30x$ που βρήκαμε προηγουμένως για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1, μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό ότι αν η διαφημιστική δαπάνη της ακτοπλοϊκής εταιρείας αυξηθεί κατά 1 μονάδα (1.000.000 €), εκτιμάμε ότι η ετήσια επιβατική κίνηση Y θα αυξηθεί κατά 30 μονάδες (30.000 επιβάτες).

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή αναφέροντας έναν δείκτη για την ποιότητα της προσέγγισης που προσφέρεται από την ευθεία ελάχιστων τετραγώνων. Η ποσότητα που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \bar{y})^2},$$

όπου

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i, \ \hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i \ \text{ για } i = 1,2,\ldots,\nu,$$

λέγεται ***συντελεστής προσδιορισμού*** (coefficient of determination) R^2 του μοντέλου παλινδρόμησης.

Ο συντελεστής προσδιορισμού λαμβάνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1 $(0 \le R^2 \le 1)$ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό. Τιμές του R^2 κοντά στο 1 σημαίνουν ότι η ευθεία παλινδρόμησης περνάει πολύ κοντά από τα περισσότερα σημεία, ενώ τιμές κοντά στο 0 σημαίνουν ότι όλα σχεδόν τα σημεία βρίσκονται μακριά από την ευθεία παλινδρόμησης και επομένως θα πρέπει να αναζητηθεί κάποια άλλη σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής (μη γραμμική).

Χρησιμοποιώντας τα αθροίσματα που υπολογίστηκαν στον πίνακα 9.6.3, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσδιορισμού για τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 ως εξής:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{540}{3360} = 0{,}9956.$$

Πίνακας 9.6.3

i	x_i	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}$	$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}$	$\hat{\varepsilon}_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$
1	4	225	–111	12321	216	9	81
2	2	156	–180	32400	156	0	0
3	10	390	54	2916	396	–6	36
4	14	516	180	32400	516	0	0
5	6	267	–69	4761	276	–9	81
6	8	330	–6	36	336	–6	36
7	10	411	75	5625	396	15	225
8	4	213	–123	15129	216	–3	9
9	12	450	114	12996	456	–6	36
10	10	402	66	4356	396	6	36
Άθροισμα			**0**	**122940**	**3360**	**0**	**540**

Με βάση την τιμή αυτή (99,6%) συμπεραίνουμε ότι η ευθεία παλινδρόμησης που δημιουργήσαμε προηγουμένως προσφέρει πολύ ικανοποιητική προσέγγιση των σημείων που διαθέτουμε και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματική πρόβλεψη της ετήσιας επιβατικής κίνησης με βάση τη διαφημιστική δαπάνη της εταιρείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.6.1.

Δίνονται ν σημεία (x_i, y_i) $i = 1, 2 \ldots \nu$ του επιπέδου. Από όλες τις ευθείες της μορφής $y = \beta x$ που περνάνε από την αρχή των αξόνων, ζητάμε να προσδιορίσουμε εκείνη που τα προσεγγίζει καλύτερα με βάση την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων.

α) Να εκτιμήσετε την παράμετρο β της ευθείας $y = \beta x$.

β) Να βρείτε την εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ για τα επόμενα δεδομένα.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	30	20	60	80	40	50	70	90
y_i	75	52	120	170	86	110	153	194

Λύση.

α) Ο υπολογισμός της εκτιμήτριας ελάχιστων τετραγώνων $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β θα γίνει με την ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$AT = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \beta x_i)^2.$$

Θεωρώντας την ποσότητα αυτή ως μια συνάρτηση του β, δηλαδή

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \beta x_i)^2 = (y_1 - \beta x_1)^2 + (y_2 - \beta x_2)^2 + \ldots + (y_\nu - \beta x_\nu)^2$$

αντιλαμβανόμαστε ότι, σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε στο κεφάλαιο 4, για να λάβει η $f(\beta)$ την ελάχιστη τιμή της θα πρέπει να ισχύει $f'(\beta) = 0$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(\beta) &= (y_1 - \beta x_1)^2 + (y_2 - \beta x_2)^2 + \ldots + (y_\nu - \beta x_\nu)^2 = \\ &= (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_\nu^2) - 2\beta(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu) + \beta^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2) \end{aligned}$$

ως προς β προκύπτει:

$$f'(\beta) = -2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu) + 2\beta(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2)$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της άθροισης

$$f'(\beta) = -2\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + 2\beta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 2(\beta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i).$$

Λύνοντας τέλος τη σχέση $f'(\beta) = 0$ ως προς β βρίσκουμε:

$$\beta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}.$$

Επομένως, η εκτιμήτρια ελάχιστων τετραγώνων $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β θα δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}.$$

β) Με βάση τους υπολογισμούς που δίνονται στον πίνακα 9.6.4.

Πίνακας 9.6.4

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
x_i	30	20	60	80	40	50	70	90	***Άθροισμα***
y_i	75	52	120	170	86	110	153	194	
x_i^2	900	400	3600	6400	1600	2500	4900	8100	28400
$x_i y_i$	2250	1040	7200	13600	3440	5500	10710	17460	61200

παίρνουμε $\hat{\beta} = \frac{61200}{28400} = 2{,}155$, οπότε η ευθεία παλινδρόμησης θα είναι η $y = \hat{\beta}\, x = 2{,}155x$.

Πολλές φορές μελετώντας δυο χαρακτηριστικά (μεταβλητές) x και y μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε κατά πόσον αυτά σχετίζονται με κάποιο τρόπο μεταξύ τους ή όχι. Στον όρο «σχετίζονται» θα μπορούσε να αποδοθεί η έννοια ότι «μεγάλες τιμές της μεταβλητής x αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές της y» και «μικρές τιμές της μεταβλητής x αντιστοιχούν σε μικρές τιμές της y» (θετική συσχέτιση) ή το αντίστροφο δηλαδή μεγάλες τιμές της μεταβλητής x αντιστοιχούν μικρές τιμές της y και «μικρές τιμές της μεταβλητής x αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές της y» (αρνητική συσχέτιση). Στο επόμενο ορισμό εισάγεται ένας δείκτης, ο οποίος μπορεί να μας βοηθήσει σε αυτήν την κατεύθυνση.

Έστω (x_i, y_i) $i = 1,2,..., \nu$ ένα σύνολο ν ζευγών παρατηρήσεων από δύο μεταβλητές x και y. Η ποσότητα:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \bar{y})^2}} \qquad (9.6.3)$$

ονομάζεται ***συντελεστής γραμμικής συσχέτισης*** των x και y και θα συμβολίζεται με $r(X,Y)$ ή απλά με r.

Αρκετά συχνά ο r αναφέρεται απλά ως συντελεστής συσχέτισης ή και ως συντελεστής του Pearson.

Από τον τρόπο ορισμού του r είναι φανερό ότι το πρόσημό του είναι το ίδιο με το πρόσημο του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. Από την άλλη μεριά για μεγάλες τιμές x_i της X και y_i της Y (μεγαλύτερες από τη μέση τιμή τους) οι διαφορές $x_i - \bar{x}$ και $y_i - \bar{y}$ θα είναι θετικές, οπότε το γινόμενό τους θα είναι θετικό. Αντίστοιχα για μικρές τιμές x_i και y_i οι διαφορές $x_i - \bar{x}$ και $y_i - \bar{y}$ θα είναι αρνητικές, οπότε το γινόμενό τους θα είναι πάλι θετικό. Επομένως, όταν σε μεγάλες τιμές της μεταβλητής X αντιστοιχούν και μεγάλες τιμές της Y, ή σε μικρές τιμές της X αντιστοιχούν μικρές τιμές της Y, τότε ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι X, Y είναι ***θετικά συσχετισμένες***. Ανάλογα, ο r παίρνει αρνητικές τιμές όταν σε μεγάλες τιμές της μιας μεταβλητής αντιστοιχούν μικρές τιμές της άλλης, οπότε θα λέμε ότι οι μεταβλητές αυτές είναι ***αρνητικά συσχετισμένες***.

Με την προσθήκη στον παρονομαστή του τύπου 9.6.3 των όρων

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{και} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \bar{y})^2}$$

επιτυγχάνονται δύο στόχοι.

α) Ο συντελεστής συσχέτισης να είναι ανεξάρτητος των μονάδων μέτρησης που χρημοποιούνται για τις μεταβλητες X και Y.

β) Ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει τιμές μέσα στο διάστημα $[-1, 1]$ δηλαδή ισχύει

$$-1 \le r \le 1$$

ή ισοδύναμα $|r| \le 1$. Για τον λόγο αυτό συνήθως τον συντελεστή συσχέτισης τον εκφράζουμε επί τις εκατό (%).

Σε σχέση με τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ δυο μεταβλητών όταν διαθέτουμε ένα σύνολο ν ζευγών τιμών (x_i, y_i), $i = 1,2,..., \nu$, σημειώνεται ότι πέραν του τύπου (9.6.3) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η εναλλακτική έκφραση

$$r = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu}x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu}y_i\right)}{\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu}y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu}y_i\right)^2}} \tag{9.6.4}$$

η οποία σε κάποιες περιπτώσεις διευκολύνει στις πράξεις.

Γενικά, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή συσχέτισης, θα χρησιμοποιούμε τις παρακάτω εκφράσεις:

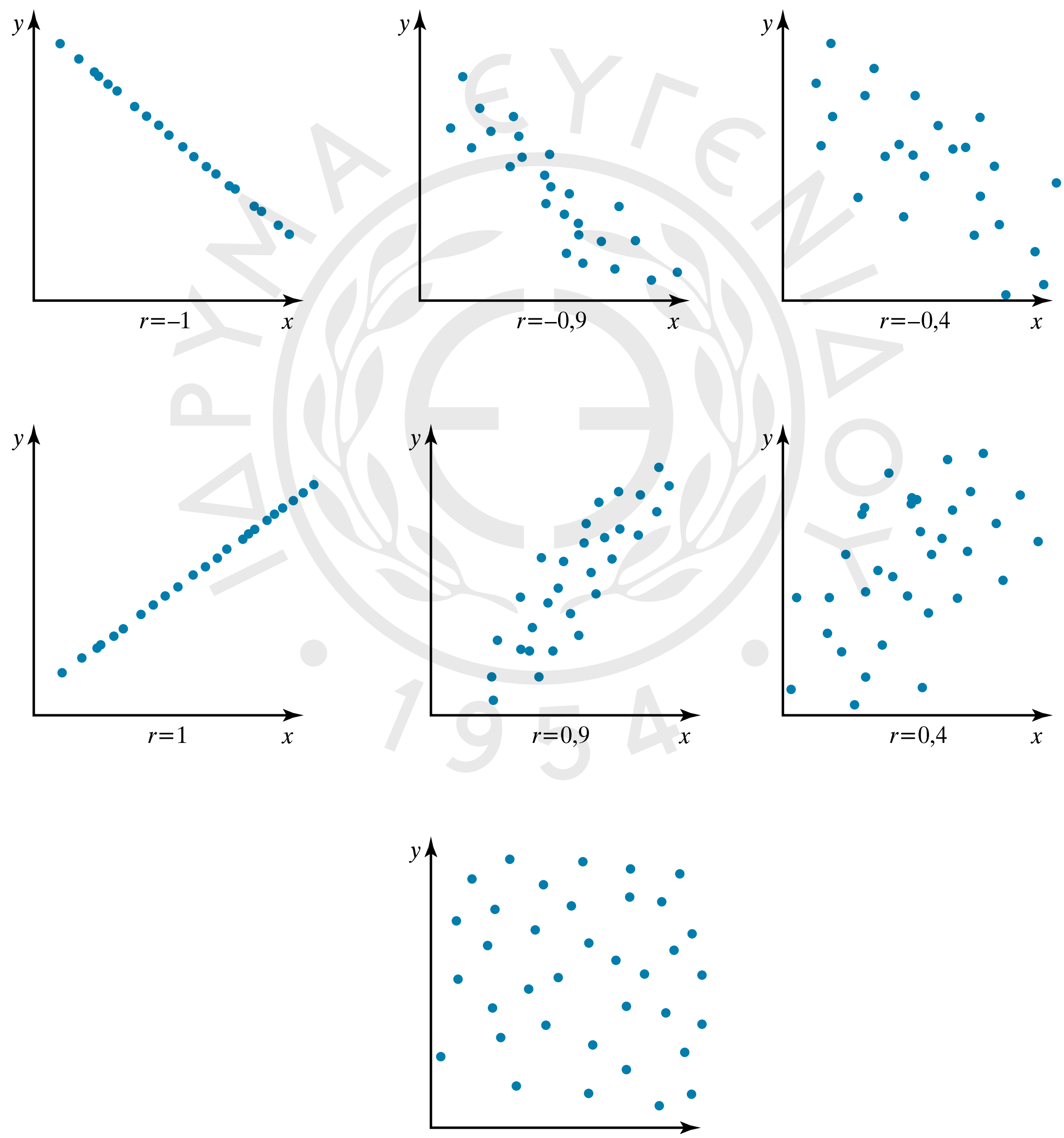
Αν

- $0 < r < 1$, τότε οι X, Y είναι ***θετικά*** συσχετισμένες.
- $-1 < r < 0$, τότε οι X, Y είναι ***αρνητικά*** συσχετισμένες.
- $r = 1$, τότε για τις X, Y ***έχουμε τέλεια θετική συσχέτιση***. Στην περίπτωση αυτή όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με θετική κλίση, δηλαδή για τις τιμές (x_i, y_i) $i = 1,2,...,\nu$ των μεταβλητών X, Y ισχύει μια σχέση της μορφής $y_2 = ax_2 + \beta$, όπου $a > 0$.
- $r = -1$, τότε ***τελεια αρνητική συσχέτιση*** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση δηλαδη για τις τιμές (x_i, y_i) $i = 1,2,...,\nu$ των μεταβλητών X, Y ισχύει μια σχέση της μορφής $y_2 = ax_2 + \beta$, όπου $a < 0$.
- $r = 0$, τότε ***δεν υπάρχει συσχέτιση*** μεταξύ των μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή οι μεταβλητές X, Y λέγονται ***ασυσχέτιστες***.

Οι γραμμικές σχέσεις $y_i = \alpha x_i + \beta$ που αναφέρθηκαν προηγουμένως ότι ισχύουν όταν ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει τις ακραίες τιμές του 1 και –1, ισχύουν προσσεγγιστικά όταν το r «πλησιάζει» τις τιμές αυτές.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις δικαιολογούν και την ονομασία του r ως συντελεστή ***γραμμικής*** συσχέτισης, έστω και αν, για λόγους συντομίας, συνήθως παραλείπουμε τον όρο «γραμμικής».

Στο σχήμα 9.6ε δίνεται η εικόνα που παρουσιάζουν τα σημεία (x_i, y_i) $i = 1,2,...,\nu$ ανάλογα με την τιμή του συντελεστή συσχέτισης.



Σχ. 9.6ε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.6.2

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 9.6.1 να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης r μεταξύ της επιβατικής κίνησης Y και της αντίστοιχης διαφημιστικής δαπάνης X μιας ακτοπλοϊκής εταιρείας. Να βρεθεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ του r και του συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0{,}9956$ που βρέθηκε για την ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στην X.

Λύση

Με βάση τον πίνακα 9.6.5 παίρνουμε

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{4080}{\sqrt{136}\sqrt{122.940}} = 0{,}9978$$

Πίνακας 9.6.5

	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	4	225	–4	–111	444	16	12.321
2	2	156	–6	–180	1.080	36	32.400
3	10	390	2	54	108	4	2.916
4	14	516	6	180	1.080	36	32.400
5	6	267	–2	-69	138	4	4.761
6	8	330	0	-6	0	0	36
7	10	411	2	75	150	4	5.625
8	4	213	–4	–123	492	16	15.129
9	12	450	4	114	456	16	12.996
10	10	402	2	66	132	4	4.356
Άθροισμα	**80**	**3.360**	**0**	**0**	**4.080**	**136**	**122.940**
Μέσος	**8**	**336**					

Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι μεταβλητές X και Y είναι ισχυρά θετικά συσχετισμένες. Το τελευταίο σημαίνει ότι μεταξύ των τιμών x, y των μεταβλητών X, Y υπάρχει μια σχέση της μορφής $y \cong ax + \beta$ με $\alpha > 0$. Πράγματι, η μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων οδήγησε στην ευθεία $y = 30x + 96$ και η «καλή ποιότητα» της προσέγγισης των ζευγών (x_i, y_i) $i = 1,2,\ldots\nu$ αντικατοπτρίζεται στον συντελεστή προσδιορισμού

$$R^2 = 0{,}9956$$

που βρέθηκε εκεί.

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι $r^2 = 0{,}9978^2 = 0{,}9956$, δηλαδή ισχύει ότι $R^2 = r^2$.

Σημειώνεται ότι αυτό που διαπιστώθηκε στο τέλος του παραδείγματος 9.6.2 ισχύει γενικά, δηλαδή:

Αν r είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών, όπως αυτός υπολογίστηκε με βάση τα σημεία (x_i, y_i) $i = 1,2,...\nu$ και R^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού για την ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στην X, η οποία βρίσκεται με χρήση των ίδιων σημείων, τότε ισχύει

$$R^2 = r^2$$

Ασκήσεις.

9.6.1. Στον πίνακα 9.6.6 φαίνονται οι μετρήσεις του βάρους Y και του ύψους X είκοσι βρεφών, τα οποία κατά τη γέννηση είχαν βάρος μικρότερο των 1500 gr (λιπόβαρα).

α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

β) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελάχιστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος βρεφών συγκεκριμένου ύψους.

γ) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελάχιστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το ύψος βρεφών συγκεκριμένου βάρους.

δ) Θα μπορούσε να προκύψει το ένα μοντέλο από το άλλο χωρίς να επαναλάβετε όλους τους υπολογισμούς;

ε) Να υπολογίσετε τον συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (α).

στ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (β). Τι παρατηρείτε;

9.6.2. Τα βάρη των δέκα πρώτων βρεφών του πίνακα 9.6.6 αφορούν σε αγόρια, ενώ τα βάρη των δέκα επόμενων αφορούν σε κορίτσια.

α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων, σημειώνοντας συγχρόνως ποια σημεία αντιστοιχούν σε αγόρια και ποια σε κορίτσια.

β) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελάχιστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος αγοριών συγκεκριμένου ύψους.

γ) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελάχιστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος κοριτσιών συγκεκριμένου ύψους.

δ) Να διαπιστώσετε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (β) είναι σημαντικά καλύτερος απ' αυτόν του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (γ).

ε) Αν μας ενδιαφέρει να εκτιμηθεί το βάρος ενός βρέφους συγκεκριμένου ύψους, ποια εκτίμηση είναι πιο αξιόπιστη, αυτή που αφορά σε αγόρια ή αυτή που αφορά σε κορίτσια;

στ) Ποιο βάρος προβλέπετε ότι θα έχει ένα κορίτσι ύψους 40 cm; Ποιο βάρος προβλέπετε ότι θα έχει ένα αγόρι ύψους 40 cm;

9.6.3. Ένα υλικό συσκευάζεται από ένα εργοστάσιο σε μεγάλα κουτιά, ο αριθμός των οποίων ποικίλλει ανάλογα με την παραγγελία. Ο πίνακας 9.6.7 δίνει τον αριθμό των κουτιών που συσκευάστηκαν (ώστε να καλυφθούν οι παραγγελίες που δέχτηκε το εργοστάσιο) και τις εργατοώρες που χρειάστηκαν για 10 πρόσφατες παραγγελίες που εκτελέστηκαν.

Πίνακας 9.6.6

Ύψος (σε cm)	Βάρος (σε gr)
41	1450
40	1490
38	1400
38	1410
38	1380
32	1100
33	1150
38	1420
30	1000
34	1150
32	1100
39	1450
38	1400
39	1450
37	1350
39	1450
38	1380
42	1490
39	1480
38	1450

Πίνακας 9.6.7

Αριθμός κουτιών	Εργατοώρες
60	230
40	161
120	365
160	515
80	263
100	335
100	335
140	464
180	587
70	245

α) Ποια από τις δύο μεταβλητές (αριθμός κουτιών, εργατοώρες) μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή X και ποια ως εξαρτημένη Y;
β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.
γ) Να υπολογίσετε με τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X και να χαραχθεί στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.
δ) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων που αφορούν στη μεταβλητή X και των παρατηρήσεων που αφορούν στη μεταβλητή Y. Στη συνέχεια να δώσετε ένα χαρακτηριστικό σημείο, απ' το οποίο διέρχεται η ευθεία παλινδρόμησης.
ε) Να δώσετε την ερμηνεία του συντελεστή του x, καθώς και του σταθερού όρου της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X.
στ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που αναπτύχθηκε.
ζ) Πόσες εργατοώρες προβλέπετε ότι θα χρειαστούν για να ικανοποιηθεί μια παραγγελία που απαιτεί τη συσκευασία 85 κουτιών;

9.6.4. Ας θεωρήσουμε και πάλι τα δεδομένα της άσκησης 9.6.3.
α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 9.6.1, να βρείτε την ευθεία της μορφής $y = \beta x$ (η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων), που προσεγγίζει τα δεδομένα καλύτερα με βάση τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων.
β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου και να τον συγκρίνετε με τον συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που αναπτύχθηκε στην άσκηση 9.6.3.
γ) Πόσες εργατοώρες προβλέπετε ότι θα χρειαστούν για να ικανοποιηθεί μία παραγγελία που απαιτεί τη συσκευασία 85 κουτιών;

9.6.5. Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι βαθμοί Κελσίου (μεταβλητή X) και σε αντίστοιχη βαθμοί Φαρενάιτ για 6 διαφορετικά επίπεδα θερμοκρασίας.

x	0	5	10	20	40	50
y	32	41	50	68	104	122

α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών X και Y.
β) Τι συμπέρασμα προκύπτει με βάση την τιμή που βρέθηκε στο ερώτημα (α);
γ) Να προσδιοριστεί η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές X και Y.

9.6.6. Στον επόμενο πίνακα δίνεται η βαθμολογία 7 σπουδαστών της σχολής Μηχανικών του Εμπορικού Ναυτικού στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικα Ι (μεταβλητή X) και στο μάθημα Μαθηματικά ΙΙ και Στατιστική (μεταβλητή Y). Η κλίμακα της βαθμολογίας είναι 0 – 20.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	15	18	13	19	16	12	17
y_i	13	17	11	18	14	11	15

α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο βαθμολογιών.
β) Οι διδάσκοντες των Μαθηματικών αποφάσισαν να προσθέσουν 1 μονάδα σε όλους τους μαθητές που εξετάστηκαν στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι, και 2 μονάδες σε όλους τους μαθητές που εξετάστηκαν στα Μαθηματικα ΙΙ και Στατιστική, ώστε και στις δύο περιπτώσεις ο καλύτερος σπουδαστής να βαθμολογηθεί με άριστα 20.
i) Να διαμορφωθεί ο νέος πίνακας βαθμολογιών.
ii) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης για τις νεες βαθμολογίες. Τι παρατηρείτε;

10

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Αρκετά συχνά, τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στις επιστήμες, εμφανίζεται η ανάγκη μελέτης φαινομένων, η έκβαση των οποίων είναι αβέβαιη και ως εκ τούτου δεν μπορεί να καθοριστεί εκ των προτέρων. Για παράδειγμα:

- *Κατά τη ρίψη ενός νομίσματος δεν μπορούμε να ξέρουμε ποια από τις δύο πλευρές του (κεφαλή ή γράμματα) θα εμφανιστεί.*
- *Όταν αγοράζουμε κάποια συσκευή, δεν γνωρίζουμε ποιος θα είναι ακριβώς ο χρόνος ζωής της.*
- *Όταν σκοπεύουμε κατά ενός στόχου, δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προσ-διορίσουμε το σημείο πρόσπτωσης της σφαίρας.*

Φαινόμενα στα οποία οι συνθήκες κάτω από τις οποίες εξελίσσονται δεν προκαθορίζουν την έκβασή τους, λέγονται ***τυχαία*** *ή* ***στοχαστικά****. Η μελέτη των νόμων και των κανόνων που διέπουν τέτοια φαινόμενα αποτελεί το κυριο αντικείμενο της θεωρίας πιθανοτήτων.*

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια σύντομη εισαγωγή στην ενδιαφέρουσα αυτή περιοχή, η οποία αποτελεί έναν σύγχρονο κλάδο των Μαθηματικών και βρίσκει ποικίλες εφαρμογές σε πάρα πολλές επιστήμες όπως στη Φυσική, στην Πληροφορική, στην Ιατρική, στην Μηχανολογία, στην Μοριακή Βιολογία, στην Οικονομία κ.τλ.

10.1 Πειράματα τύχης – Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενο.

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, το κύριο αντικείμενο της θεωρίας πιθανότητων είναι η μελέτη τυχαίων (η στοχαστικών) φαινομένων. Για τέτοια φαινόμενα θα χρησιμοποιείται συνήθως ο όρος ***πείραμα τύχης***, με την έννοια ότι όταν εκτελείται το πείραμα υπό τις ίδιες συνθήκες μπορεί να δίνει διαφορετικά αποτελέσματα.

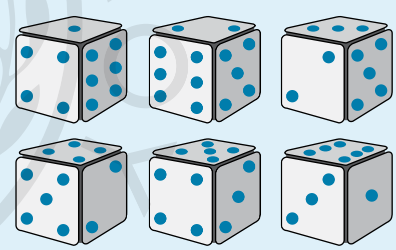
Το χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης είναι ότι, σε μια εκτέλεσή του, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί. Εκείνο όμως που θα μπορούσαμε να καταγράψουμε είναι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.

> Δειγματικός χώρος Ω ενος πειράματος τύχης καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων τα οποία μπορούν να εμφανιστούν σε μια εκτέλεσή του.

Τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου ονομάζονται ***δειγματικά σημεία***. Συγκεκριμένα υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω λέγονται ***ενδεχόμενα*** ή ***γεγονότα*** και συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ, ... Έτσι, αν $\omega \in \Omega$ είναι ένα δειγματικό σημείο, το υποσύνολο $A = \{\omega\}$ του Ω θα είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου. Τέτοια ενδεχόμενα που αποτελούνται από ένα μόνο δειγματικό σημείο λέγονται ***απλά*** ή ***στοιχειώδη ενδεχόμενα***. Στην περίπτωση που το ενδεχόμενο A περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία του δειγματικού χώρου λέγεται ***σύνθετο ενδεχόμενο***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.1.1.

Ρίχνουμε έναν κύβο (ζάρι) και καταγράφουμε την ένδειξη της επάνω έδρας του. Τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης είναι 1, 2, 3, 4, 5 ή 6 και επομένως ένας αντίστοιχος δειγματικός χώρος θα είναι ο $\Omega = \{1,2, 3, 4, 5, 6\}$.



Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6 αποτελούν τα δειγματικά σημεία του χώρου, ενώ τα σύνολα

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4\}, A_5 = \{5\}, A_6 = \{6\}$$

είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω. Ένα σύνθετο ενδεχόμενο δίνεται από το υποσύνολο $B_3 = \{2, 4, 6\}$, το οποίο με λόγια μπορεί να περιγραφεί ως το «σύνολο των άρτιων ενδείξεων», ή άπλα ως το «ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιας ένδειξης».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.1.2.

Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος 3 φορές. Σημειώνοντας με «K», «Γ» τα υποσύνολα «*κεφαλή*», «*γράμματα*» αντίστοιχα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα αποτελείται από τριάδες της μορφής

$$K\Gamma\Gamma,\ KK\Gamma,\ \Gamma\Gamma\Gamma,\ \dots$$

Υπάρχουν 8 διαφορετικά τέτοια αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι ο

$$\Omega = \{KKK,\ KK\Gamma,\ K\Gamma K,\ K\Gamma\Gamma,\ \Gamma KK,\ \Gamma K\Gamma,\ \Gamma\Gamma K,\ \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Το ενδεχόμενο «εμφανίζονται τρία ίδια αποτελέσματα» περιγράφεται από το υποσύνολο

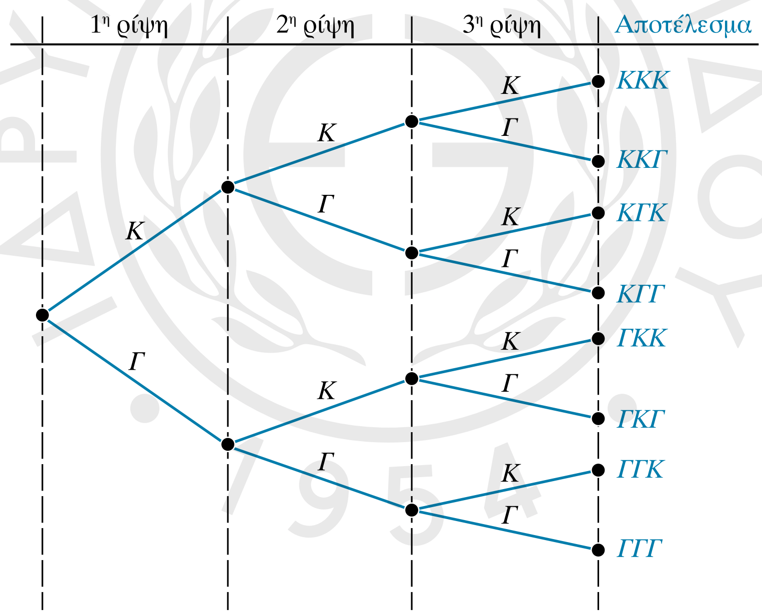
A = {*ΚΚΚ, ΓΓΓ*}, ενώ το ενδεχόμενο «εμφανίζονται δύο ακριβώς κεφαλές» από το B = {*ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ*}.

Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα το πλήθος των δειγματικών σημείων είναι πεπερασμένο (6 και 8 αντίστοιχα).

Δειγματικοί χώροι οι οποίοι περιέχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (δειγματικών σημείων) λέγονται ***πεπερασμένοι δειγματικοί χωροι***.

Στις περιπτώσεις πεπερασμένων δειγματικών χώρων, η διαδικασία καταγραφής των στοιχείων τους διευκολύνεται συνήθως αρκετά με χρήση των λεγομένων ***δενδροδιαγραμμάτων.*** Στο σχήμα 10.1α δίνεται το δενδροδιάγραμμα που αντιστοιχεί στο Παράδειγμα 10.1.2. Σύμφωνα με αυτό, κατά την πρώτη ρίψη μπορεί να εμφανιστεί Κεφαλή *(Κ)* ή Γράμματα (*Γ*), πράγμα το οποίο παριστάνεται με τα δύο «κλαδιά» που ξεκινούν από τη ρίζα του δέντρου. Για τη δεύτερη ρίψη, υπάρχουν 2 κλαδιά που ξεκινούν από το τέλος του πρώτου κλαδιού (και δηλώνουν τα δυνατά αποτελέσματα της δεύτερης ρίψης όταν η πρώτη ρίψη έδειξε *Κ)* και δύο που ξεκινούν από το τέλος του δεύτερου κλαδιού (και δηλώνουν τα δυνατά αποτελέσματα όταν η πρώτη ρίψη έδειξε *Γ*»). Με παρόμοιο τρόπο συμπληρώνονται τα κλαδιά που αντιστοιχούν στην τρίτη ρίψη του νομίσματος.

Με τη διαδικασία αυτή, δημιουργούνται 8 διαφορετικές διαδρομές, που η καθεμιά αντιστοιχεί σε διαφορετική σειρά αποτελεσμάτων (οι σειρές αυτές έχουν καταγραφεί στη στήλη «Αποτέλεσμα» του σχήματος 10.1α).



Σχ. 10.1α
Δενδροδιάγραμμα για ρίψη νομίσματος 3 φορές

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.1.3.

Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος μέχρις ότου φέρουμε για πρώτη φορά "γράμματα". Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα αποτελείται από ακολουθίες της μορφής *Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚΓ*,... δηλαδή Ω = {*Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚΓ*, ...}

Το ενδεχόμενο "εμφανίζονται για πρώτη φορά γράμματα στην τέταρτη δοκιμή" είναι το ενδεχόμενο A = {*ΚΚΚΓ*}

Ο δειγματικός χώρος του Παραδείγματος 10.1.3, σε αντίθεση με τα Παραδείγματα 10.1.1 και 10.1.2, περιέχει άπειρα δειγματικά σημεία. Ένας τέτοιος χώρος λέγεται απείρως ***αριθμήσιμος δειγματικός χώρος***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.1.4.

Προκειμένου να ελέγξουμε την ποιότητα των αντλιών νερού που εξέρχονται από μια γραμμή παραγωγής, παίρνουμε μία αντλία στην τύχη και καταγράφουμε τον χρόνο (σε ώρες) μέχρις ότου πάψει να λειτουργεί. Αν μπορούσαμε να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια τον χρόνο, η συνολική διάρκεια λειτουργίας θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε μη αρνητική πραγματική τιμή. Επομένως, ο δειγματικός χώρος Ω είναι ο

$$\Omega = \{t: t \geq 0\} = [0, +\infty).$$

Το υποσύνολο του Ω

$$A = \{t: 0 \leq t \leq 500\} = [0, 500]$$

περιγράφει το ενδεχόμενο «ο χρόνος ζωής της αντλίας είναι το πολύ 500 ώρες», ενώ το ενδεχόμενο «ο χρόνος ζωής της αντλίας υπερβαίνει τις 300 ώρες» αντιστοιχεί στο υποσύνολο

$$B = \{t: t > 300\}.$$

Ο δειγματικός χώρος Ω του τελευταίου παραδείγματος καλείται ***συνεχής δειγματικός χώρος.*** Η μελέτη ενός συνεχούς δειγματικού χώρου απαιτεί συνήθως τελείως διαφορετικούς χειρισμούς από εκείνους που χρειάζονται για τη μελέτη των πεπερασμένων δειγματικών χώρων ή άπειρων χώρων σαν αυτόν του Παραδείγματος 10.1.3, ο οποίος περιλαμβάνει μεν άπειρα σημεία, όχι όμως συνεχή διαστήματα πραγματικών αριθμών όπως ο δειγματικός χώρος του Παραδείγματος 10.1.4.

Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν θα ασχοληθούμε κυρίως με την περίπτωση των πεπερασμένων δειγματικών χώρων.

Ασκήσεις.

10.1.1. Σε ένα πορτοφόλι υπάρχουν τρία νομίσματα του ενός ευρώ, ένα νόμισμα των δύο ευρώ και τέσσερα νομίσματα των 50 λεπτών. Από το πορτοφόλι εξάγονται στην τύχη τέσσερα νομίσματα.

α) Να δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για την περιγραφή του πειράματος.

β) Να γραφούν αναλυτικά τα ενδεχόμενα:

A_1: η συνολική αξία των νομισμάτων που διαλέχτηκαν είναι 2,5 €.

A_2: η συνολική αξία των νομισμάτων που διαλέχτηκαν είναι 3,5 €.

10.1.2. Στο εστιατόριο ενός επιβατηγού πλοίου προσφέρεται menu που αποτελείται από τρία πιάτα: το κυρίως πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

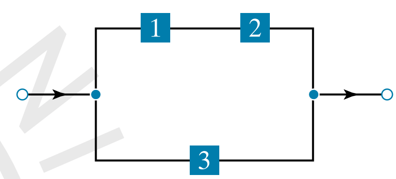
Γεύμα	*Επιλογές*
Κυρίως πιάτο	Κοτόπουλο ή κρέας
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωγό ή πάστα ή ζελέ

Ένα άτομο μπορεί να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.

α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Να βρείτε το ενδεχόμενο *A:* «το άτομο επιλέγει παγωτό».
γ) Να βρείτε το ενδεχόμενο *B:* «το άτομο επιλέγει κοτόπουλο».

10.1.3. Σε μια γραμμή παραγωγής κινητήρων πλοίων κάθε κινητήρας που παράγεται ελέγχεται κατά πόσο μπορεί να ξεκινήσει ή όχι. Αν βρεθούν δύο διαδοχικοί ελαττωματικοί κινητήρες, η παραγωγή κινητήρων σταματά και γίνεται διορθωτική παρέμβαση στα μηχανήματα της γραμμής παραγωγής. Σε αντίθετη περίπτωση συνεχίζεται η κατασκευή νέων κινητήρων.
α) Περιγράψτε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για τη μελέτη της διαδικασίας.
β) Να γράψετε αναλυτικά τα ενδεχόμενα:
A_i: χρειάζεται να γίνει διορθωτική παρέμβαση στα μηχανήματα της γραμμής παραγωγής κατά την ολοκλήρωση ελέγχου του i κινητήρα, για $i = 2, 3, 4$.

10.1.4 Ένα σύστημα αποτελείται από τρία εξαρτήματα (1, 2, 3), τα οποία είναι συνδεδεμένα όπως δείχνει το σχήμα 10.1β. Για τη λειτουργία του συστήματος απαιτείται είτε να λειτουργούν τα εξαρτήματα 1 και 2 συγχρόνως, είτε να λειτουργεί το εξάρτημα 3.
α) Να δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω σε μορφή δενδροδιαγράμματος για τις δυνατές καταστάσεις (λειτουργία: 1, μη λειτουργία: 0) κάθε εξαρτήματος του συστήματος.
β) Να γραφούν αναλυτικά τα ενδεχόμενα:
A_1: λειτουργεί τουλάχιστον ένα εξάρτημα,
A_2: λειτουργούν και τα τρία εξαρτήματα,
A_3: κανένα εξάρτημα δεν λειτουργεί,
A_4: λειτουργούν ακριβώς δύο εξαρτήματα.



Σχ. 10.1β

10.2 Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων.

Έστω $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω. Αν το αποτέλεσμα που πήραμε σε μια εκτέλεση (επανάληψη) του πειράματος ήταν ένα δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$, το οποίο ανήκει στο A, τότε θα λέμε ότι ***συνέβη*** το ενδεχόμενο, ή ***εμφανίστηκε*** το γεγονός (ενδεχόμενο) A, ή ***πραγματοποιήθηκε*** το γεγονός (ενδεχόμενο) Α. Έτσι, αν κατά τη ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές προκύψει η ακολουθία *ΚΓΚ,* τότε, αναφερόμενοι στο Παράδειγμα 10.1.2, μπορούμε να πουμε ότι:
α) συνέβη το ενδεχόμενο B, ενώ
β) δεν πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο A.

Κατά την ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων, ιδιαίτερο ρόλο παίζουν οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ ενδεχομένων που αφορούν στο ίδιο πείραμα τύχης. Στη συνέχεια θα δούμε πώς εκφράζονται οι σχέσεις αυτές με χρήση συμβόλων της θεωρίας συνόλων, υποθέτοντας ότι όλα τα ενδεχόμενα στα οποία αναφερόμαστε, ανήκουν στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω.

Αν όλα τα στοιχεία (δειγματικά σημεία) του ενδεχομένου A περιέχονται και στο σύνολο B, τότε θα χρησιμοποιούμε το γνωστό σύμβολο του υποσυνόλου και θα γράφουμε $A \subseteq B$. Αρκετά συχνά θα χρησιμοποιούμε επίσης την έκφραση «το ενδεχόμενο Α είναι υποσύνολο του ενδεχομένου *Β*».

Ολόκληρος ο δειγματικός χώρος Ω θεωρείται ότι είναι και αυτός ένα γεγονός το οποίο ονομάζεται ***βέβαιο γεγονός***. Ένα ενδεχόμενο το οποίο δεν πραγματοποιείται ποτέ, λέγεται ***αδύνατο ενδεχόμενο*** και συμβολίζεται, όπως και στη θεωρία συνόλων, με $\varnothing$. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει ότι $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται ***ίσα*** αν κάθε φορά που εμφανίζεται το A, εμφανίζεται και το B και αντίστροφα. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $A = B$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν ενδεχόμενα τα οποία προκύπτουν με πράξεις μεταξύ ενδεχομένων. Στη συνέχεια ορίζονται τα βασικότερα από τα ενδεχόμενα αυτά.

Ένωση δύο ενδεχομένων A, B λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα αυτά και συμβολίζεται με $A \cup B$.

Η πράξη της ένωσης μπορεί εύκολα να επεκταθεί για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι ν ενδεχόμενα, το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται αν και μόνο αν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ λέγεται "ένωση των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu$" και συμβολίζεται με

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_\nu = \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i.$$

Τομή δύο ενδεχομένων A, B λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα αυτά και συμβολίζεται με $A \cap B$ *ή* AB.

Στα πλαίσια του παρόντος εγχειρίδιου θα χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά ο δεύτερος συμβολισμός.

Οπως και η ένωση, έτσι και η πράξη της τομής ενδεχομένων, μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα από δύο σύνολα. Ως τομή των συνόλων $A_1 A_2, ...A_\nu$ ορίζουμε το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται αν και μόνο αν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα όλα τα ενδεχόμενα $A_1 A_2, ..., A_\nu$. Η τομή ν ενδεχομένων $A_1 A_2, ..., A_\nu$ συμβολίζεται με

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_\nu = \bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$$

ή συνηθέστερα με $A_1 A_2 \cdots A_\nu$.

Αν δύο ενδεχόμενα δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, λέγονται *ξένα* ή *ασυμβίβαστα* ενδεχόμενα. Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ο εξής:

Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται ***ξένα*** ή ***ασυμβίβαστα*** ή αμοιβαίως αποκλειόμενα αν η τομή τους είναι το αδύνατο ενδεχόμενο, δηλαδή αν ισχύει $AB = \varnothing$.

Στην περίπτωση που έχουμε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα $A_1 A_2, ...A_\nu$ και ισχύει

$$A_i A_j = \varnothing, \text{ για όλα τα } i \neq j \ (i, j = 1, 2, ..., \nu)$$

θα λέμε ότι έχουμε ***ξένα ανά δύο ενδεχόμενα***.

Δύο εξίσου σημαντικές έννοιες, οι οποίες έχουν επίσης προκύψει από τις αντίστοιχες έννοιες της θεωρίας συνόλων, είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο και η διαφορά ενδεχομένων.

Συμπλήρωμα (ή συμπληρωματικό ενδεχόμενο) του ενδεχομένου A λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται αν και μόνο αν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A.

Για το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A υπάρχουν τρεις τουλάχιστον διαφορετικοί συμβολισμοί, οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε διδακτικά εγχειρίδια: A' ή $\overline{A}$ η A^c.

Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τον πρώτο συμβολισμό.

Διαφορά του ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A (ή διαφορά των ενδεχομένων A και B) λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά δεν πραγματοποιείται το B. Η διαφορά των ενδεχομένων A και B συμβολίζεται με $A - B$.

Μια χρήσιμη έκφραση για τη διαφορά δύο συνόλων είναι η εξής

$$A - B = AB'.$$

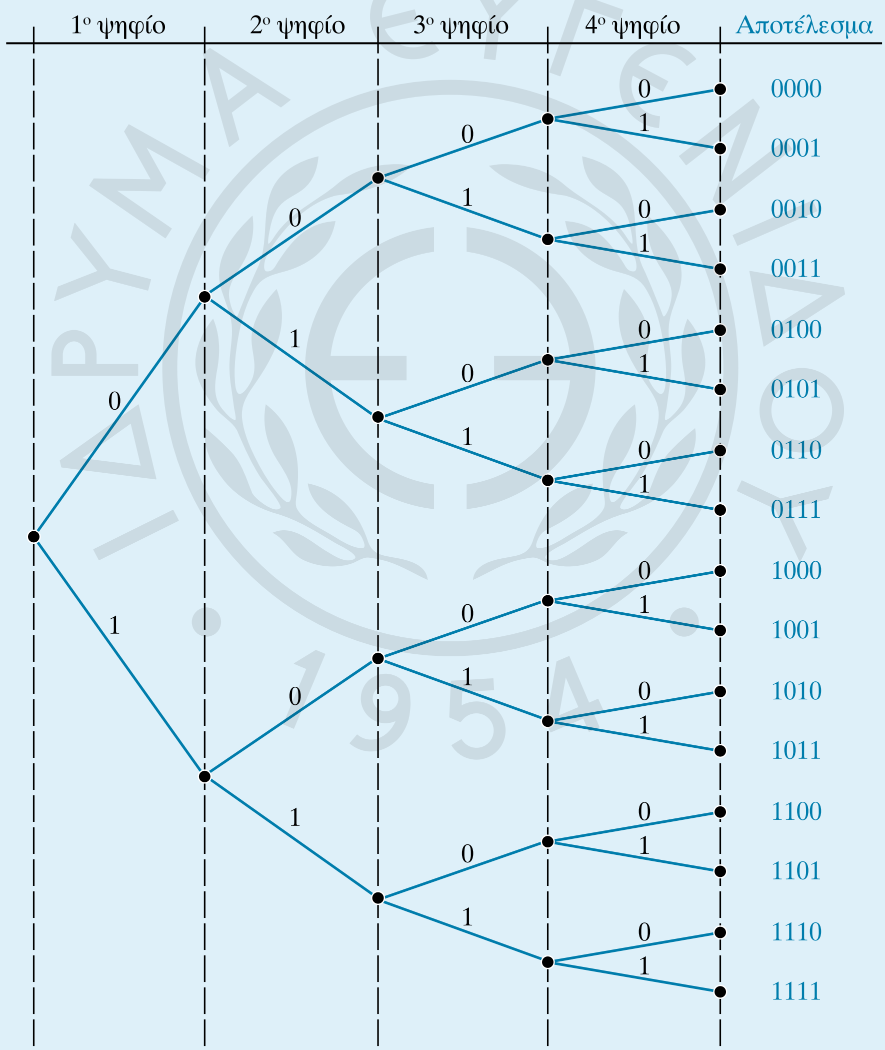
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.2.1.

Ας θεωρήσουμε έναν πομπό, ο οποίος εκπέμπει τριψήφια δυαδικά σήματα, δηλαδή κάθε σήμα του (λέξη) αποτελείται από 4 ψηφία τύπου 0-1 π.χ. 1010,0010,1110. Σύμφωνα με το επόμενο δενδροδιάγραμμα, ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από 16 στοιχεία, τα οποία δίνονται αναλυτικά στη στήλη «Αποτέλεσμα». Ας ορίσουμε στη συνέχεια τα εξής ενδεχόμενα:

A_i: το σήμα περιέχει ακριβώς i μηδενικά, $i = 0,1, 2, 3, 4$,

B: στο σήμα υπάρχουν τουλάχιστον δύο «0»,

Γ: το σήμα περιέχει ακριβώς τρία ίδια ψηφία,



Δ: το σήμα περιέχει τουλάχιστον ένα «1» και ένα «0»,

Εξετάζοντας προσεκτικά το δενδροδιάγραμμα, καταλήγουμε στις επόμενες αναλυτικές εκφράσεις για τα ενδεχόμενα A_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$A_0 = \{1111\}, A_1 = \{0111,1011, 1101, 1110\}, \ \ A_2 = \{0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100\},$$
$$A_3 = \{0001,0010,0100,1000\}, A_4 = \{0000\}$$

Είναι φανερό ότι τα ενδεχόμενα A_i, $i = 0,1,2,3,4$ είναι ανά δύο ξένα, δηλαδή

$$A_i A_j = \varnothing \text{ για } i, j = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ με } i \neq j$$

ενώ ισχύει επιπλέον ότι

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$$

(μια οικογένεια συνόλων με τις δύο αυτές ιδιότητες ονομάζεται ***διαμέριση*** του συνόλου Ω.

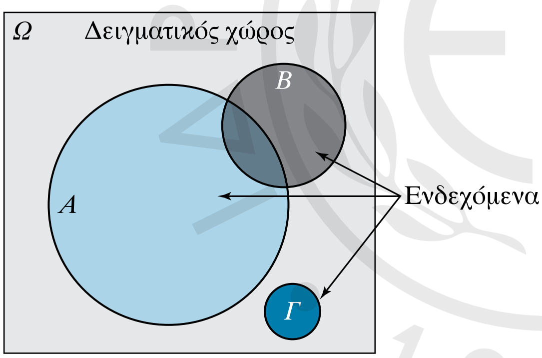
Τα ενδεχόμενα B, Γ, Δ εκφράζονται μέσω των ενδεχομένων A_i, $i = 0,1,2,3,4$ ως εξής:

$$B = A_2 \cup A_3 \cup A_4, \quad \Gamma = A_1 \cup A_3, \quad \Delta = A'_0 A'_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

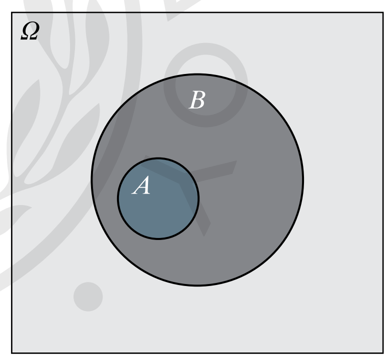
Αρκετά συχνά, αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη η εποπτική παράσταση σχέσεων μεταξύ ενδεχομένων, με σχηματικά διαγράμματα αντίστοιχα με τα γνωστά διαγράμματα Venn, τα οποία χρησιμοποιούνται στη θεωρία συνόλων. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης παριστάνεται με ένα ορθογώνιο πλαίσιο και, μέσα σε αυτό, σχεδιάζονται κύκλοι ή άλλα γεωμετρικά σχήματα, τα οποία δηλώνουν τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν (σχ. 10.2α).

Στα σχήματα 10.2β έως 10.2ζ δίνεται η διαγραμματική παράσταση των εννοιών (σχέσεων και πράξεων μεταξύ ενδεχομένων) οι οποίες ορίστηκαν στην παράγραφο αυτή.

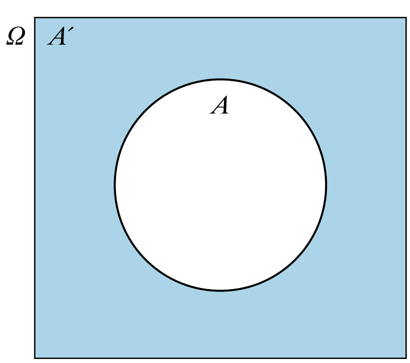
Συνδυάζοντας διαγράμματα μπορούμε να απεικονίσουμε γραφικά και διάφορα πιο πολύπλοκα εν-



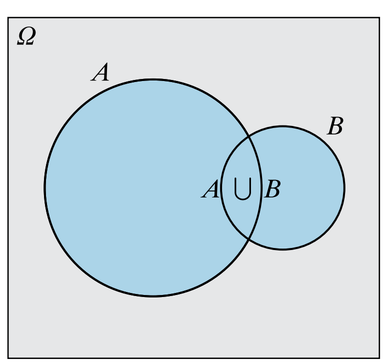
Σχ. 10.2α
Διαγράμματα Venn για ενδεχόμενα



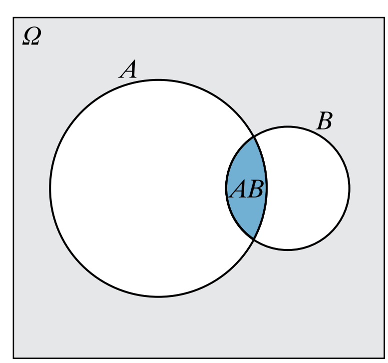
Σχ. 10.2β
$A \subseteq B$



Σχ. 10.2γ
Συμπληρωματικό ενδεχόμενο

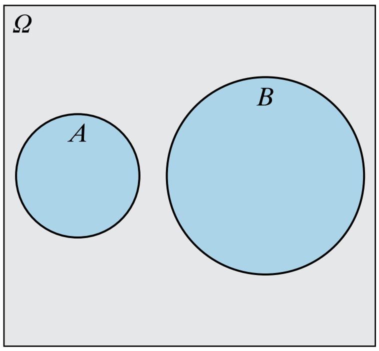


Σχ. 10.2δ
Ένωση ενδεχομένων

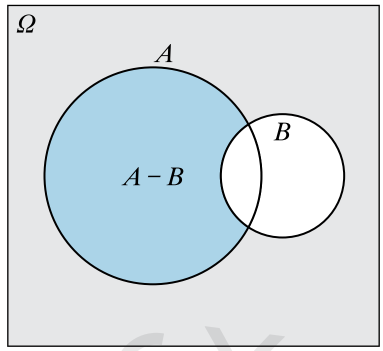


Σχ. 10.2ε
Τομή ενδεχομένων

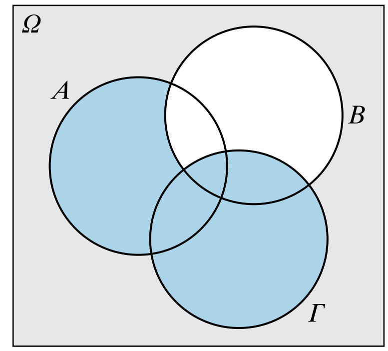
δεχόμενα. Για παράδειγμα, αν $A, B, Γ$ είναι τρία ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου $Ω$, το ενδεχόμενο «συμβαίνει το A και όχι το B ή συμβαίνει το $Γ$» αντιστοιχεί στο σύνολο $(A-B)\cup Γ$ και επομένως η διαγραμματική του παράσταση θα δίνεται από το σχήμα 10.2η.



Σχ. 10.2στ
Ξένα ενδεχόμενα



Σχ. 10.2ζ
Διαφορά ενδεχομένων



Σχ. 10.2η
$(A-B)\cup Γ$

Για τις πράξεις μεταξύ ενδεχομένων ισχύει ένας μεγάλος αριθμός ιδιοτήτων, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες όταν θέλουμε να απλοποιήσουμε πολύπλοκες παραστάσεις. Μερικές από αυτές δίνονται στη συνέχεια.

Ι1. $A\cup B = B\cup A$	$AB = BA$
Ι2. $A\cup(B\cup Γ) = (A\cup B)\cup Γ$	$A(BΓ) = (AB)Γ$
Ι3. $A\cup(BΓ) = (A\cup B)(A\cup Γ)$	$A(B\cup Γ) = (AB)\cup(AΓ)$
Ι4. $A\cup A' = Ω$	$AA' = \varnothing$
Ι5. $(A')' = A$	
Ι6. Αν $A\subseteq B$ και $B\subseteq Γ$, τότε $A\subseteq Γ$	
Ι7. Αν $A\subseteq B$, τότε $B'\subseteq A'$ και αντίστροφα.	
Ι8. Αν $A\subseteq B$, τότε $AB = A$ και $A\cup B = B$.	

Σημειώνουμε τέλος τους δύο επόμενους τύπους, οι οποίοι είναι γνωστοί με την ονομασία ***τύποι De Morgan***.

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου $Ω$, τότε ισχύουν οι τύποι

$$(A\cup B)' = A'B' \qquad (AB)' = A'\cup B'$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.2.2.

Έστω $A, B, Γ$ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $Ω$. Να εκφραστούν τα επόμενα ενδεχόμενα με χρήση πράξεων (ένωση, τομή, συμπλήρωμα) μεταξύ των $A, B, Γ$ και να παρασταθούν με διαγράμματα Venn.

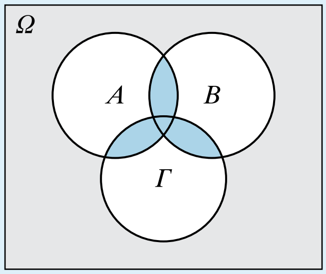
α) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα $A, B, Γ$.

β) Κανένα από τα ενδεχόμενα $A, B, Γ$ δεν συμβαίνει.

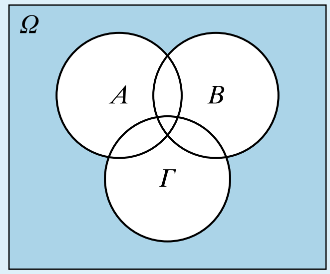
γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα $A, B, Γ$.

δ) Συμβαίνει ένα τουλάχιστον από τα A, B και ένα τουλάχιστον από τα $B, Γ$.

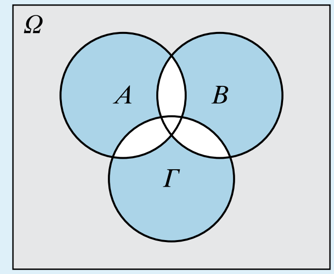
Λύση.



α) $AB \cup A\Gamma \cup B\Gamma$



β) $(A \cup B \cup \Gamma)' = A'B'\Gamma'$



γ) $AB'\Gamma' \cup A'B\Gamma' \cup A'B'\Gamma$

Ασκήσεις.

10.2.1. ΄Εστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Να εκφραστούν τα επόμενα ενδεχόμενα με χρήση πράξεων (ένωση, τομή, συμπλήρωμα) μεταξύ των A, B, και να παρασταθούν με διαγράμματα Venn.

α) Κανένα από τα ενδεχόμενα A, B δεν συμβαίνει.
β) Συμβαίνει μόνο το A.
γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B.
δ) ΄Η δεν συμβαίνει κανένα ή συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B.

10.2.2. Σε ένα ασφαλιστικό ναυτιλιακό γραφείο υπάρχουν προς διεκπεραίωση 4 δηλώσεις ναυτικών ατυχημάτων. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$A_i : \text{γίνεται διεκπεραίωση της } i \text{ δήλωσης,}$$

για $i = 1, 2, 3, 4$. Να εκφραστούν τα επόμενα ενδεχόμενα μέσω των A_1, A_2, A_3, A_4, χρησιμοποιώντας μόνο τις πράξεις της ένωσης, τομής και συμπληρώματος ενδεχομένων.

α) Μόνο η πρώτη δήλωση διεκπεραιώνεται.
β) Διεκπεραιώνεται τουλάχιστον μία από τις δηλώσεις.
γ) Διεκπεραιώνεται μία τουλάχιστον από τις τρεις πρώτες δηλώσεις, όχι όμως η τέταρτη.
δ) Διεκπεραιώνεται μία τουλάχιστον από τις δύο πρώτες και μία τουλάχιστον από τις δύο τελευταίες δηλώσεις.
ε) Ακριβώς μία από τις δηλώσεις διεκπεραιώνεται.
στ) Διεκπεραιώνεται ακριβώς μία από τις δύο πρώτες και ακριβώς μία από τις δύο τελευταίες δηλώσεις.

10.2.3. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω;

α) Αν τα A, B είναι ξένα και πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο, τότε δεν πρόκειται να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B.
β) Αν τα A, B είναι ξένα και πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B, τότε θα πραγματοποιηθεί και το ενδεχόμενο A.
γ) Αν $A \subseteq B$ και τα ενδεχόμενα A, Γ είναι ξένα, τότε θα είναι ξένα και τα B, Γ.
δ) Αν $A \subseteq B$ και τα ενδεχόμενα B, Γ είναι ξένα, τότε θα είναι ξένα και τα A, Γ.
ε) Αν τα ενδεχόμενα A, Γ είναι ξένα και τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα, τότε θα είναι ξένα και τα B, Γ.

10.2.4. Ένα σύστημα αποτελείται από τέσσερα εξαρτήματα (1,2,3,4), τα οποία είναι συνδεδεμένα όπως δείχνει το σχήμα 10.2θ. Για τη λειτουργία του συστήματος απαιτείται να λειτουργούν τα εξαρτήματα 1 και 2 συγχρόνως, είτε να λειτουργεί το εξάρτημα 3, είτε να λειτουργεί το εξάρτημα 4.

α) Να δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω για τις δυνατές καταστάσεις (λειτουργία : 1, μη λειτουργία : 0) κάθε εξαρτήματος του συστήματος.

β) Να γραφούν αναλυτικά τα επόμενα ενδεχόμενα:

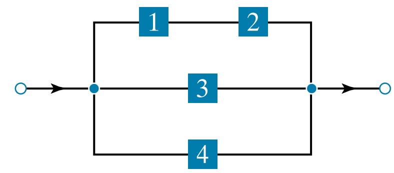
A_1 : λειτουργούν τουλάχιστον τρία εξαρτήματα,

A_2: κανένα εξάρτημα δεν λειτουργεί,

A_3: λειτουργεί τουλάχιστον ένα από τα εξαρτήματα 1, 2 και τουλάχιστον ένα από τα 3, 4,

A_4: το σύστημα δεν λειτουργεί.

γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα Λ_j : το εξάρτημα i λειτουργεί, για $i = 1,2,3,4$. Να εκφραστούν τα ενδεχόμενα του ερωτήματος (β) μέσω των $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ χρησιμοποιώντας τις πράξεις: συμπλήρωμα, ένωση και τομή ενδεχομένων.



Σχ. 10.2θ

10.3 Ο εμπειρικός ορισμός της πιθανότητας.

Όπως αναφέρθηκε στις προηγούμενες παραγράφους, το βασικό χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης είναι ότι, σε μια εκτέλεση του πειράματος, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα θα εμφανιστεί. Επομένως, αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος και $A \subseteq \Omega$ είναι ένα ενδεχόμενό του, δεν είναι δυνατό να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι σε μια εκτέλεση του πειράματος θα εμφανιστεί (πραγματοποιηθεί, συμβεί) ή δεν θα εμφανιστεί το ενδεχόμενο A. Παρ' όλα αυτά, θα ήταν αρκετά χρήσιμο, αν μπορούσαμε να ορίσουμε με κάποιο τρόπο μια ποσότητα, η οποία να εκφράζει τον «βαθμό βεβαιότητας» που έχουμε για την εμφάνιση κάθε ενδεχομένου. Η επιστήμη της θεωρίας πιθανοτήτων γεννήθηκε από την προσπάθεια του ανθρώπου να αντιμετωπίσει αυτό το πρόβλημα.

Ας ξεκινήσουμε αρχικά από τη διαπίστωση ότι αρκετά συχνά, έστω και διαισθητικά, για ορισμένα ενδεχόμενα αντιλαμβανόμαστε ότι είναι εξίσου πιθανό να συμβούν (π.χ. η εμφάνιση κεφαλής ή γραμμάτων σε μια ρίψη νομίσματος), ενώ για κάποια άλλα έχουμε «μεγαλύτερο βαθμό βεβαιότητας» ότι θα συμβούν έναντι κάποιων άλλων (π.χ. όταν δύο ισοδύναμες ποδοσφαιρικές ομάδες παίζουν έναν αγώνα, θεωρούμε ότι είναι «περισσότερο πιθανό» να νικήσει η γηπεδούχος απ' ότι να νικήσει η φιλοξενούμενη.

Οι παραπάνω ισχυρισμοί θα μπορούσαν να αποδοθούν στην μέχρι στιγμής εμπειρία ως προς την έκβαση των αντίστοιχων πειραμάτων. Για παράδειγμα, ο πρώτος ισχυρισμός βασίζεται στο γεγονός ότι αν ρίψουμε ένα νόμισμα πολλές φορές, στις μισές περίπου θα έρθει κεφαλή και στις υπόλοιπες γράμματα, ενώ ο δεύτερος μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της διαπίστωσης ότι στο τελευταίο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου «σε 100 αγώνες μεταξύ σχεδόν ισοδύναμων, ομάδων μόνο 28 φορές κέρδισε η φιλοξενούμενη».

Οι παρατηρήσεις αυτές μας δίνουν μια ιδέα για το πώς θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια ποσότητα η οποία να μας δηλώνει τον «βαθμό βεβαιότητας» για την πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου. Πιο συγκεκριμένα, ο βαθμός βεβαιότητας θα πρέπει να αυξάνει όσο πιο συχνά εμφανίζεται το συγκεκριμένο ενδεχόμενο.

Αν σε ν επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης κάτω από τις ίδιες συνθήκες, το ενδεχόμενο A εμφανίζεται ν_A φορές $(0 < \nu_A < \nu)$, τότε ο λόγος

$$f_A = \frac{\nu_A}{\nu}$$

ονομάζεται ***σχετική συχνότητα*** εμφάνισης του ενδεχομένου A (στις ν επαναλήψεις).

Από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας προκύπτει άμεσα ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Τότε
α) $f_A \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A του Ω,
β) $f_\Omega = 1$,
γ) αν τα ενδεχόμενα A, B του Ω είναι ξένα, ισχύει:

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B$$

Η τελευταία ιδιότητα της προηγούμενης πρότασης μπορεί να επεκταθεί για οποιονδήποτε αριθμό ξένων ανά δύο ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_k$, οπότε θα έχουμε:

$$f_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k} = f_{A_1} + f_{A_2} + \ldots + f_{A_k} = \sum_{i=1}^{k} f_{A_i} \qquad (10.3.1)$$

Επίσης, αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_k\} \subseteq \Omega$ είναι ένα (πεπερασμένο) ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω και συμβολίσουμε με

$$f_i = f_{\{\alpha_i\}},\ i = 1,2,\ldots,k$$

τις σχετικές συχνότητες των απλών ενδεχομένων $A_i = \{\alpha_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, τότε με απ' απευθείας εφαρμογή του τύπου (10.3.1) προκύπτει ότι

$$f_A = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.3.1.

Στον πίνακα 10.3.1 δίνονται τα αποτελέσματα της ρίψης ενός νομίσματος $\nu = 100$ φορές. Η στήλη (α) δίνει το αποτέλεσμα της i ρίψης, η στήλη (β) τον αριθμό εμφανίσεων ν_A του ενδεχομένου

A: εμφάνιση του αποτελέσματος κεφαλή K

μέχρι και την i επανάληψη (ρίψη) ενώ, τέλος, η στήλη (γ) τη σχετική συχνότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A, δηλαδή την f_A, μέχρι και την i επανάληψη του πειράματος τύχης.

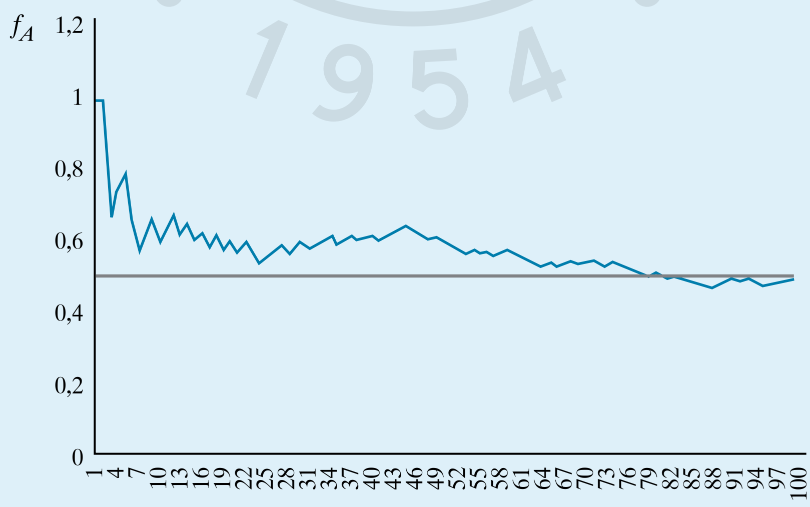
Τόσο από τον πίνακα 10.3.1 όσο και από το σχήμα 10.3α είναι φανερό ότι η σχετική συχνότητα f_A αλλάζει όταν αλλάζει το πλήθος των δοκιμών. Ωστόσο, όταν αυξάνεται αρκετά ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος τύχης (αριθμός ρίψεων), η f_A σταθεροποιείται γύρω από την τιμή ½ = 0,5 επιβεβαιώνοντας έτσι τον «διαισθητικό» ισχυρισμό μας ότι η εμφάνιση κεφαλής και η εμφάνιση γραμμάτων είναι εξίσου πιθανή.

Από το προηγούμενο παράδειγμα είναι φανερό ότι, όταν επαναλαμβάνουμε ένα πείραμα πολλές φορές, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ σταθεροποιείται γύρω από κάποια τιμή, η οποία λέγεται ***οριακή σχετική συχνότητα*** και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα μέτρο του βαθμού «βεβαιότητας» για την εμφάνιση του ενδεχομένου.

Μέχρι τις αρχές του 20^{ού} αιώνα, η οριακή σχετική συχνότητα χρησιμοποιούνταν για τον ορισμό της πιθανότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου. Πιο συγκεκριμένα, ο Richard von Mises (1883 - 1953) έδωσε τον επόμενο ορισμό, ο οποίος είναι γνωστός με το όνομα ***στατιστικός ορισμός της πιθανότητας.***

Πίνακας 10.3.1
Αποτελέσματα ρίψης ενός νομίσματος 100 φορές και αντίστοιχες σχετικές συχνότητες

i	*α*	*β*	*γ*	*i*	*α*	*β*	*γ*	*i*	*α*	*β*	*γ*	*i*	*α*	*β*	*γ*
1	*Κ*	1	1,00	26	*Κ*	15	0,58	51	*Γ*	30	0,59	76	*Γ*	40	0,53
2	*Κ*	2	1,00	27	*Κ*	16	0,59	52	*Γ*	30	0,58	77	*Γ*	40	0,52
3	*Γ*	2	0,67	28	*Γ*	16	0,57	53	*Γ*	30	0,57	78	*Γ*	40	0,51
4	*Κ*	3	0,75	29	*Κ*	17	0,59	54	*Κ*	31	0,57	79	*Γ*	40	0,51
5	*Κ*	4	0,80	30	*Κ*	18	0,60	55	*Γ*	31	0,56	80	*Κ*	41	0,51
6	*Γ*	4	0,67	31	*Γ*	18	0,58	56	*Κ*	32	0,57	81	*Γ*	41	0,51
7	*Γ*	4	0,57	32	*Κ*	19	0,59	57	*Γ*	32	0,56	82	*Γ*	41	0,50
8	*Κ*	5	0,63	33	*Κ*	20	0.61	58	*Κ*	33	0,57	83	*Κ*	42	0,51
9	*Κ*	6	0,67	34	*Κ*	21	0,62	59	*Κ*	34	0,58	84	*Γ*	42	0,50
10	*Γ*	6	0,60	35	*Γ*	21	0,60	60	*Γ*	34	0,57	85	*Γ*	42	0,49
11	*Κ*	7	0,64	36	*Κ*	22	0,61	61	*Γ*	34	0,56	86	*Γ*	42	0,49
12	*Κ*	8	0,67	37	*Κ*	23	0,62	62	*Γ*	34	0,55	87	*Γ*	42	0,48
13	*Γ*	8	0,62	38	*Γ*	23	0,61	63	*Γ*	34	0,54	88	*Γ*	42	0,48
14	*Κ*	9	0,64	39	*Κ*	24	0,62	64	*Γ*	34	0,53	89	*Κ*	43	0,48
15	*Γ*	9	0,60	40	*Κ*	25	0,63	65	*Κ*	35	0,54	90	*Κ*	44	0,49
16	*Κ*	10	0,63	41	*Γ*	25	0,61	66	*Γ*	35	0,53	91	*Κ*	45	0,49
17	*Γ*	10	0,59	42	*Κ*	26	0,62	67	*Κ*	36	0,54	92	*Γ*	45	0,49
18	*Κ*	11	0,61	43	*Κ*	27	0,63	68	*Κ*	37	0,54	93	*Κ*	46	0,49
19	*Γ*	11	0,58	44	*Κ*	28	0,64	69	*Γ*	37	0,54	94	*Γ*	46	0,49
20	*Κ*	12	0,60	45	*Κ*	29	0,64	70	*Κ*	38	0,54	95	*Γ*	46	0,48
21	*Γ*	12	0,57	46	*Γ*	29	0,63	71	*Κ*	39	0,55	96	*Γ*	46	0,48
22	*Κ*	13	0,59	47	*Γ*	29	0,62	72	*Γ*	39	0,54	97	*Κ*	47	0,48
23	*Γ*	13	0,57	48	*Γ*	29	0,60	73	*Γ*	39	0,53	98	*Κ*	48	0,49
24	*Γ*	13	0,54	49	*Κ*	30	0,61	74	*Κ*	40	0,54	99	*Κ*	49	0,49
25	*Κ*	14	0,56	50	*Γ*	30	0,60	75	*Γ*	40	0,53	100	*Κ*	50	0,50



Σχ. 10.3α
Σχετική συχνότητα του ενδεχομένου Α

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και A ένα ενδεχόμενο του Ω. Αν ν_A είναι ο αριθμός εμφανίσεων του ενδεχομένου A σε ν επαναλήψεις τον πειράματος $(0 \leq \nu_A < \nu)$, τότε ορίζουμε ως ***πιθανότητα*** (εμφάνισης) του ***ενδεχομένου A*** το όριο

$$P(A) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu_A}{\nu} = \lim_{\nu\to\infty} f_A.$$

Αν λάβουμε υπόψη τις ιδιότητες (α), (β), (γ) της σχετικής συχνότητας που αναφέρθηκαν προηγουμένως παίρνοντας το όριο για $\nu \to \infty$ (αφήνοντας δηλαδή τον αριθμό ν των επαναλήψεων να αυξηθεί απεριόριστα), προκύπτουν τα εξής:

P1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A του Ω.
P2. $P(\Omega) = 1$.
P3. Αν τα ενδεχόμενα A, B του Ω είναι ξένα, τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, οι τρεις αυτές ιδιότητες μπορούν να αποτελέσουν τη βάση επάνω στην οποία θα «οικοδομηθεί» ένα αυστηρό πλαίσιο για την αντιμετώπιση όλων των προβλημάτων (θεωρητικών και πρακτικών) που σχετίζονται με πειράματα τύχης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.3.2.

Από τους ελέγχους που έγιναν σε 5.000 κινητήρες ντήζελ, διαπιστώθηκε ότι οι 1.000 εξέπεμπαν καυσαέρια επάνω από το αποδεκτό όριο, οι 800 έκαναν υπερβολικό θόρυβο, ενώ σε 200 διαπιστώθηκαν και τα δύο προβλήματα. Θεωρώντας ότι οι $\nu = 5.000$ επαναλήψεις του πειράματος (του ελέγχου των κινητήρων) είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογιστεί η πιθανότητα σε έναν κινητήρα που εκλέγεται στην τύχη

α) να διαπιστωθεί εκπομπή καυσαερίων επάνω από το αποδεκτό όριο.
β) να βρεθεί ότι κάνει υπερβολικό θόρυβο.
γ) να διαπιστωθούν και τα δύο προβλήματα.

Λύση.

Αν ορίσουμε τα ενδεχόμενα
A : ο κινητήρας εκπέμπει καυσαέρια επάνω από το αποδεκτό όριο,
B : ο κινητήρας κάνει υπερβολικό θόρυβο,
τότε για τις συχνότητες και σχετικές συχνότητες (βασισμένες στις $\nu = 5000$ επαναλήψεις) των ενδεχομένων A, B, AB μπορούμε να γράψουμε

$$\nu_A = 1000, \quad \nu_B = 800, \quad \nu_{AB} = 200,$$

$$f_A = \frac{1000}{5000} = 0.2 = 20\%, \quad f_B = \frac{800}{5000} = = 0.16 = 16\%,$$

$$f_{AB} = \frac{200}{5000} = 0.04 = 4\%,$$

Αφού υποθέσαμε ότι στις $\nu = 5.000$ επαναλήψεις έχουμε σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, οι τιμές που υπολογίσαμε θα είναι οι αντίστοιχες οριακές σχετικές συχνότητες. Επομένως

$$P(A) = 0{,}2 = 20\%, \quad P(B) = 0{,}16 = 16\%, \quad P(AB) = 0{,}04 = 4\%$$

Ασκήσεις.

Σε όλες τις ασκήσεις που ακολουθούν, θεωρήστε ότι ο αναφερόμενος αριθμός επαναλήψεων του πειράματος είναι αρκετά μεγάλος ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των αντίστοιχων σχετικών συχνοτήτων.

10.3.1. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του πίνακα 10.3.1, να υπολογίσετε την πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος Γράμματα με βάση (α) τις 25 πρώτες ρίψεις, (β) τις 50 πρώτες ρίψεις, (γ) τις 25 τελευταίες ρίψεις και (δ) τις 50 τελευταίες ρίψεις. Τι παρατηρείτε;

10.3.2. Σε μια επαρχιακή πόλη κυκλοφορούν δύο τοπικές εφημερίδες α και β. Διαλέγοντας στην τύχη 1000 κατοίκους και ρωτώντας ποια εφημερίδα διαβάζουν τακτικά, βρέθηκε ότι, 200 ήταν αναγνώστες μόνο της εφημερίδας α, 300 ήταν αναγνώστες μόνο της εφημερίδας β, ενώ 50 ήταν αναγνώστες και των δύο εφημερίδων. Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν κάτοικο της πόλης, να υπολογιστεί η πιθανότητα:
α) Να είναι αναγνώστης της εφημερίδας α.
β) Να είναι αναγνώστης της εφημερίδας β.
γ) Να είναι αναγνώστης τουλάχιστον μίας από τις δύο εφημερίδες.

10.3.3. Στον δρόμο που ακολουθεί ένα άτομο, για να πάει με το αυτοκίνητό του από τη θέση α στη θέση β, συναντάει δύο φανάρια. Έχει παρατηρήσει ότι κατά τις 100 τελευταίες φορές που έκανε τη διαδρομή, στο 1$^{\text{ο}}$ φανάρι σταμάτησε 45 φορές, στο 2$^{\text{ο}}$ φανάρι 48 φορές, ενώ 47 φορές δεν σταμάτησε σε κανένα φανάρι. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες να χρειαστεί ο οδηγός να σταματήσει
α) Τουλάχιστον σε ένα από τα δύο φανάρια.
β) Μόνο στο 1$^{\text{ο}}$ φανάρι.
γ) Μόνο στο 2$^{\text{ο}}$ φανάρι.
δ) Ακριβώς σε ένα από τα δύο φανάρια.

10.3.4. Το ποσοστό των σπουδαστών της Σχολής Μηχανικών που παίρνουν βαθμολογία κάτω από τη βάση στο μάθημα «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι» και «Μαθηματικά ΙΙ» και «Στατιστική» είναι 10% και 20% αντίστοιχα, ενώ 5% των υποψηφίων παίρνει βαθμολογία κάτω από τη βάση και στα δύο μαθήματα. Να βρείτε το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει βαθμολογία κάτω από τη βάση:
α) Μόνο στα «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι».
β) Μόνο στα «Μαθηματικά ΙΙ» και «Στατιστική».
γ) Σε ένα τουλάχιστον από τα 2 μαθήματα.
δ) Σε ένα ακριβώς από τα 2 μαθήματα.

10.4 Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας.

Στην προσέγγιση του von Mises για τον ορισμό της πιθανότητας, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 10.3, υπάρχουν τρία βασικά μειονεκτήματα:

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου δεν είναι δυνατή ή λογική η επανάληψη του πειράματος πολλές φορές. Για παράδειγμα, υπάρχουν σπάνια φαινόμενα για τα οποία η λήψη επαρκούς αριθμού δεδομένων απαιτεί υπερβολικό χρόνο (π.χ. μελέτη της σεισμικής έντασης) ή φαινόμενα για τα οποία η επανάληψή τους έχει υψηλό κόστος (π.χ. καταστροφικά τεστ).

Ακόμη και αν είναι εφικτή η επανάληψη ενός πειράματος πολλές φορές, δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος να γίνεται ανάλυση του σφάλματος που εμφανίζεται κατά τη χρησιμοποίηση των σχετικών συχνοτήτων ως προσεγγίσεων της πιθανότητας ενδεχομένων.

Οι τελικές σχετικές συχνότητες επηρεάζονται τόσο από τον ερευνητή που εκτελεί το πείραμα όσο και από τη συγκεκριμένη «τυχαία σειρά» αποτελεσμάτων που παρατηρεί. Επομένως, σε κάποιες περιπτώσεις, ίσως να μην είναι δυνατόν να εντοπιστεί το όριο του λόγου $f_A = \frac{\nu_A}{\nu}$ όταν $\nu \to \infty$.

Οι παραπάνω προβληματισμοί οδήγησαν πολύ νωρίς τους επιστήμονες που ασχολήθηκαν με τον κλάδο των πιθανοτήτων, στην αναζήτηση εναλλακτικών τρόπων ορισμού της έννοιας της πιθανότητας, απαλλαγμένων από τον πειραματισμό (μελέτη επαναλαμβανόμενων πειραμάτων).

Ο Ρώσος μαθηματικός Andrei Kolmogorov (1903-1989) κατόρθωσε να δημιουργήσει το κατάλληλο πλαίσιο για έναν αυστηρό αξιωματικό ορισμό της έννοιας της πιθανότητας. Στο έργο του Kolmogorov, τρεις «προφανείς» και «αδιαμφισβήτητες» ιδιότητες της πιθανότητας εκλαμβάνονται ως ***αξιώματα***, και στη συνέχεια ολόκληρη η θεωρία πιθανοτήτων αναπτύσσεται αυστηρά με λογικούς μαθηματικούς συλλογισμούς, οι οποίοι ξεκινούν αποκλειστικά από τα αξιώματα αυτά. Οι τρεις βασικές ιδιότητες της προσέγγισης Kolmogorov, η οποία δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά το 1933, δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι ιδιότητες P1, P2, P3 που αναφέρθηκαν στο τέλος της ενότητας 10.3.

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος για ένα πείραμα τύχης. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αντιστοιχείται ένας πραγματικός αριθμός $P(A)$. Αν η $P(\cdot)$ ικανοποιεί τα επόμενα τρία αξιώματα, θα ονομάζεται ***πιθανότητα*** στον δειγματικό χώρο Ω, ενώ ο αριθμός $P(A)$ θα λέγεται ***πιθανότητα του ενδεχομένου*** A.

P1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A του Ω

P2. $P(\Omega) = 1$

P3. Αν τα ενδεχόμενα A, B του Ω είναι ξένα, τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ορισμός που δόθηκε από τον Kolmogorov διαφέρει από τον παραπάνω ορισμό ως προς την μορφή της τρίτης ιδιότητας.

Θα δούμε στη συνέχεια μερικές απλές ιδιότητες της πιθανότητας που προκύπτουν άμεσα από τα τρία αξιώματα P1, P2 και P3. Περισσότερες ιδιότητες θα δοθούν στην επόμενη παράγραφο.

Κατ' αρχάς μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η ιδιότητα P3 επεκτείνεται εύκολα για τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

I1. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι ν ξένα ανά δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα P3 για $A = B = \varnothing$ θα πάρουμε

$$P(\varnothing) = P(\varnothing \cup \varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing)$$

οπότε προκύπτει ότι

I2. $P(\varnothing) = 0$.

Ας θεωρήσουμε στην συνέχεια ένα (πεπερασμένο) ενδεχόμενο της μορφής $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\}$ και ας συμβολίσουμε με $P(\alpha_i)$ τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\alpha_i\}$,i=1,2,...ν. Εφαρμόζοντας την I_1 για $A_i=\{\alpha_i,\}$, $i=1,2,\dots\nu$ προκύπτει

I3. $P(A)=P\big(\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\}\big)=\sum_{i=1}^{\nu}P(\alpha_i)$

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι και η επόμενη ιδιότητα, η οποία αφορά τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στα απλά ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου.

I4. Αν $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,\dots, \omega_N\}$ είναι ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος, τότε για τις πιθανότητες $p_i = P(\{\omega_i\})$ των απλών ενδεχομένων $\{\omega_i\}$, i =1,2,3,..., N ισχύει η σχέση:

$$\sum_{i=1}^{N}p_i=1$$

Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή δίνοντας τον επόμενο τύπο, ο οποίος μας παρέχει την δυνατότητα να υπολογίσουμε την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου A' με χρήση της πιθανότητας εμφάνισης του ενδεχομένου A (προκύπτει άμεσα από την P3 θεωρώντας $B=A'$).

I5. $P(A') = 1 - P(A)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.4.1.

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και ότι για τις πιθανότητες $p_i = P(\{\omega_i\})$ των απλών ενδεχομένων $\{\omega_i\}$, i = 1,2,3,4, ισχύουν οι σχέσεις $P(\omega_1) = 2P(\omega_2)$, $P(\omega_3) = 3P(\omega_1)$, $P(\omega_4) = 4P(\omega_2)$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A)$, όπου $A = \{\omega_1,\omega_2\}$.

Λύση.

Αν θέσουμε $P(\omega_2) = p$, θα έχουμε $P(\omega_1) = 2p$, $P(\omega_3) = 3 \cdot 2p = 6p$, $P(\omega_4) = 4p$.
Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα I4 παίρνουμε

$$1 = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 2p + p + 6p + 4p = 13p$$

οπότε $13p = 1$, δηλαδή $p = 1/13$. Τέλος, εφαρμόζοντας την ιδιότητα I3, βρίσκουμε

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) = 2p + p = 3p = \frac{3}{13}$$

Ασκήσεις.

10.4.1. Για ένα ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να μην εμφανιστεί το A είναι κατά 0,8 μεγαλύτερη της πιθανότητας να εμφανιστεί. Να υπολογιστεί η πιθανότητα εμφάνισης του A.

10.4.2. Για δύο ξένα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} \text{ και } 3P(A') + 2P(B) = 3.$$

10.4.3. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$.
΄Εστω ότι για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι $P(A) = 0{,}8$ και $P(B) = 0{,}4$. Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ξένα ενδεχόμενα.

10.4.4. Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι ο $\Omega = \{1,2,...,20\}$ και ισχύει $P(\{i\}) = iP(\{1\})$ για όλα τα $i = 1,2,...20$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα
α) κάθε απλού ενδεχομένου του Ω.
β) του ενδεχομένου $A = \{1,2,...,10\}$.
γ) του ενδεχομένου $B = \{2,4,6,...,20\}$.
δ) του ενδεχομένου $\Gamma = \{1,3,5,...,19\}$.

10.4.5. Στον ανελκυστήρα ενός μεγάλου κρουαζιερόπλοιου υπάρχουν δύο άτομα τα οποία πρόκειται να αποβιβαστούν στον 2^{o}, 3^{o} ή 4^{o} όροφο.
α) Να καταγράψετε τους 9 διαφορετικούς τρόπους αποβίβασης των δύο ατόμων στην μορφή (i, j), όπου το i δηλώνει τον όροφο αποβίβασης για το πρώτο άτομο και το j τον όροφο αποβίβασης για το δεύτερο άτομο.
β) Υποθέτοντας ότι όλοι οι τρόποι αποβίβασης έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, να υπολογίσετε την πιθανότητα τα δύο άτομα να κατέβουν σε διαφορετικούς ορόφους.

10.5 Ιδιότητες των πιθανοτήτων.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μερικές ακόμη χρήσιμες ιδιότητες της πιθανότητας. Στις περισσότερες, το βασικό εργαλείο για την ανάπτυξη των νέων τύπων είναι η προσθετική ιδιότητα P3.

Ας ξεκινήσουμε με την εύρεση ενός τύπου για τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(B - A) = P(A'B)$, δηλαδή της πιθανότητας να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B αλλά όχι το ενδεχόμενο A. Από το σχήμα 10.5α είναι φανερό ότι τα ενδεχόμενα $A_1 = AB'$, $A_2 = AB$ είναι ξένα μεταξύ τους, ενώ συγχρόνως ισχύει $A_1 \cup A_2 = A$.

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $P3$ βρίσκουμε

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(AB') + P(AB)$$

απ’ όπου παίρνουμε αμέσως ότι

I6. $P(AB') = P(A) - P(AB)$

Στην ειδική περίπτωση που ισχύει $B \subseteq A$ έχουμε $AB = B$, οπότε

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

Από την τελευταία ισότητα, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει πάντοτε $P(A - B) \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι:

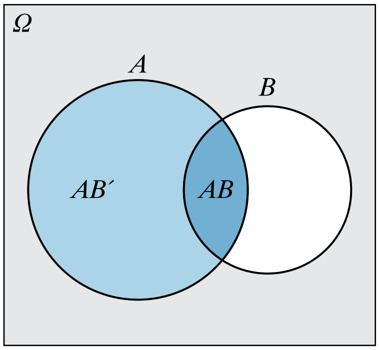
I7. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $B \subseteq A$, τότε

$$P(B) \leq P(A).$$

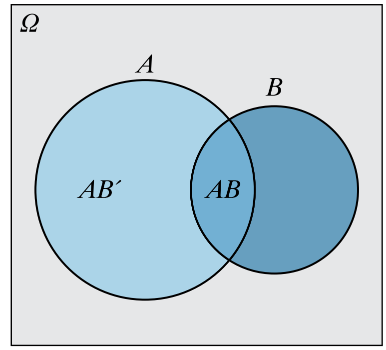
Εφαρμόζοντας την τελευταία ιδιότητα για $A = \Omega$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $P(\Omega) = 1$, προκύπτει ότι

I8. Για κάθε ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω, ισχύει

$$P(A) \leq 1$$



Σχ. 10.5α



Σχ. 10.5β

Η επόμενη ιδιότητα αποτελεί γενίκευση του αξιώματος P3 για περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα της ένωσης όχι απαραίτητα ξένων ενδεχομένων.

Ι9. Αν A, B είναι δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω, τότε η πιθανότητα της ένωσης $A \cup B$, δίνεται από τον τύπο

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Για την απόδειξη της ιδιότητας αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η ένωση $A \cup B$ μπορεί να γραφεί ως ένωση ξένων ενδεχομένων στην εξής μορφή (σχ. 10.5β):

$$A \cup B = AB' \cup B.$$

Επομένως, με βάση τις P2 και P6 μπορούμε να γράψουμε

$$P(A \cup B) = P(AB' \cup B) = P(AB') + P(B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.5.1.

Από τον έλεγχο που έγινε σε μία μέρα σε έναν μεγάλο αριθμό οδηγών (δείγμα) βρέθηκε ότι το 70% των οδηγών δεν φορούσε ζώνη ασφαλείας, το 40% των οδηγών δεν είχε πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητο, ενώ στο 30% των οδηγών διαπιστώθηκαν και οι δύο παραβάσεις. Την επόμενη μέρα ελέγχεται ένας οδηγός και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : ο οδηγός δεν φορά ζώνη ασφαλείας,

B : ο οδηγός δεν έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του.

Να υπολογιστεί η πιθανότητα των ενδεχομένων

$$A \cup B,\ A'B',\ AB',\ A \cup B',\ A'B.$$

Λύση.

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, προκύπτει ότι οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B και AB είναι (προσεγγιστικά) ίσες με $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}4$, $P(AB) = 0{,}3$. Επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8,\ P(A'B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 0{,}2,$$
$$P(AB') = P(A) - P(AB) = 0{,}4,\ P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(AB') = 0{,}9,$$
$$P(A'B) = P[(A \cup B')'] = 1 - P(A \cup B) = 0{,}1.$$

Ασκήσεις.

10.5.1. Αν A, B είναι δύο ξένα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $Ω$, να δείξετε ότι

$$P(A΄B) = P(A΄) + P(B΄) - 1.$$

10.5.2. Έστω A, B τα ενδεχόμενα ότι ένας επιβάτης πλοίου βρίσκεται στις 8 μ.μ. στην καμπίνα του ή στο εστιατόριο του πλοίου αντίστοιχα. Αν $P(A) = 0{,}30$, $P(B) = 0{,}60$, ποια είναι η πιθανότητα στις 8 μ.μ. να μην βρίσκεται ούτε στην καμπίνα του ούτε στο εστιατόριο;

10.5.3. Έστω ότι για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χωρου $Ω$ είναι γνωστό ότι

$$P(A) = 1/3, \quad P(B) = 1/4, \quad P(AB) = 1/10.$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A΄ \cup B΄)$, $P(A΄B΄)$, $P(AB΄)$, $P(A΄B)$, $P(A΄ \cup B)$.

10.5.4. Έστω ότι για τα ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου $Ω$ είναι γνωστό ότι

$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB) \quad \text{και} \quad P(A΄B) = 0{,}05.$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$.

10.5.5. Η πιθανότητα σε έναν χρόνο να συμβεί σεισμός έντασης άνω των 7 βαθμών της κλίμακας ρίχτερ σε μια συγκεκριμένη περιοχή είναι 0,005. Η αντίστοιχη πιθανότητα να πληγεί η περιοχή από έντονες βροχοπτώσεις είναι 0,020, ενώ υπάρχει πιθανότητα 0,001 στη διάρκεια ενός έτους να εμφανιστούν και τα δύο αυτά φαινόμενα. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες, σε ένα έτος η περιοχή να πληγεί (α) μονό από σεισμό, (β) μόνο από έντονες βροχοπτώσεις, (γ) τουλάχιστον από ένα από τα δύο φαινόμενα, (δ) από κανένα από τα δύο φαινόμενα.

10.6 Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας.

Όπως διαπιστώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο αξιωματικός ορισμός του Kolmogorov, δημιουργεί αποτελεσματικά εργαλεία για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων σύνθετων ενδεχομένων με βάση τις πιθανότητες απλούστερων ενδεχομένων ή στην καλύτερη περίπτωση τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων. Εκείνο, όμως, το οποίο μένει αναπάντητο ακόμη είναι πώς θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες κάποιων «απλών» ενδεχομένων, ώστε να ξεκινήσουμε από αυτά και να προχωρήσουμε στη συνέχεια.

Υπάρχει μια αρκετά μεγάλη οικογένεια δειγματικών χώρων, στους οποίους ο αξιωματικός ορισμός οδηγεί σε έναν εύκολο τύπο υπολογισμού της πιθανότητας.

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πείραμα ισχύουν τα εξής:

α) Ο δειγματικός χώρος $Ω$ είναι ***πεπερασμένος***, δηλαδή $Ω = \{ω_1, ω_2, \dots ω_N\}$.

β) Όλα τα απλά ενδεχόμενα $ω_i$, $i = 1,2,\dots N$ έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, δηλαδή $P(ω_1) = P(ω_2) = \dots = P(ω_{\mathrm{N}})$ (στην περίπτωση αυτή τα ενδεχόμενα λέγονται ***ισοπίθανα***).

Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του ορισμού του Kolmogorov (και μόνο αυτές), για να πάρουμε έναν απλό τύπο υπολογισμού της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου A σχετίζεται με το πείραμα. Πράγματι, θέτοντας $p = P(ω_1) = P(ω_2) = \dots = P(ω_N)$, θα έχουμε με βάση την ιδιότητα I_4

$$1 = P(Ω) = p + p + \dots + p = Np, \text{ οπότε } Np = 1 \text{ ή } p = 1/N.$$

Έστω τώρα $A = \{α_1, α_2, \dots α_ν\}$ ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου $Ω$. Αφού τα $α_i$, $i = 1,2,\dots,ν$ είναι κάποια από τα $ω_1, ω_2, \dots ω_N$, θα έχουμε

$$P(α_1) = P(α_2) = \dots = P(α_ν) = 1/N$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα I_3 παίρνουμε

$$P(A) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N} = \frac{\nu}{N}.$$

Επομένως, η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A εξαρτάται μόνο από το ***πλήθος*** $N(A) = \nu$ των στοιχείων του A και όχι από το ποια ακριβώς στοιχεία περιέχει. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής συμπέρασμα:

Αν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος είναι πεπερασμένος και όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενά του είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δίνεται από τον τύπο

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\textit{πλήθος των στοιχείων } A}{\textit{πλήθος των στοιχείων } \Omega}$$

Αρκετά συχνά, τα στοιχεία του ενδεχομένου A ονομάζονται ***ευνοϊκές περιπτώσεις*** ή ***ευνοϊκά αποτελέσματα*** για το ενδεχόμενο A, ενώ τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται ***δυνατές περιπτώσεις*** ή ***δυνατά αποτελέσματα***. Έτσι ο τύπος υπολογισμού της πιθανότητας παίρνει τη μορφή:

$$P(A) = \frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο } A}{\textit{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων (του πειράματος)}} \qquad (10.6.1)$$

Σημειώνουμε ότι, ξεκινώντας από την προσέγγιση του Kolmogorov, ο προηγούμενος τύπος αποτελεί λογικό συμπέρασμα των ιδιοτήτων (αξιώματα P1, P2, P3) που τέθηκαν για την πιθανότητα.

Επειδή όμως, πολύ πριν τεθούν οι βάσεις της αξιωματικής θεμελίωσης από τον Kolmogorov, ο Laplace είχε προτείνει (το 1812) τη χρήση του για τον ορισμό της πιθανότητας, συνήθως αναφερόμαστε σε αυτόν με την ονομασία ***κλασικός ορισμός της πιθανότητας***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.6.1.

Κατά τη ρίψη 2 ζαριών ποια είναι η πιθανότητα (α) να πάρουμε ίδια αποτελέσματα; (β) να φέρουμε άθροισμα μεγαλύτερο του 10;

Λύση.

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος δίνεται στον επόμενο πίνακα:

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα προκύπτει ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 (ισοπίθανα) δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega) = 36$.

α) Το ενδεχόμενο A: «φέρνουμε δύο ίδια αποτελέσματα» είναι το $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, δηλαδή $N(A) = 6$, οπότε

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

β) Το ενδεχόμενο B: «φέρνουμε άθροισμα μεγαλύτερο του 10» είναι το $B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$, οπότε $N(B) = 3$ και

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι το πρόβλημα του υπολογισμού πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό ανάγεται ουσιαστικά στην απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω και των υποσυνόλων-ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν (ευνοϊκές περιπτώσεις).

Ο τομέας των Μαθηματικών ο οποίος ασχολείται με μεθόδους απαρίθμησης σχηματισμών λέγεται ***συνδυαστική***. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε με συντομία μερικές βασικές αρχές και αποτελέσματα της συνδυαστικής, που θα μας φανούν χρήσιμα για τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Ένας από τους βασικότερους κανόνες της συνδυαστικής είναι η λεγόμενη ***πολλαπλασιαστική αρχή***:

> Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο) x_1 μπορεί να επιλεγεί με ν διαφορετικούς τρόπους, και ***για καθέναν*** από αυτούς τους τρόπους ένα στοιχείο x_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 τρόπους, ... , και ***για καθέναν*** από όλους αυτούς τους τρόπους ένα στοιχείο x_k μπορεί να επιλεγεί με ν_k τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία x_1 και x_2 και x_k μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά (με αυτή τη σειρά) κατά $\nu_1\ \nu_2 ... \nu_k$ τρόπους.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μια εταιρεία αυτοκινήτων προσφέρει δύο διαφορετικές εκδόσεις ενός μοντέλου της: πολυτελείας (L) και υπερπολυτελείας (XL). Κάθε έκδοση μπορεί να εφοδιαστεί με έναν από τους εξής τέσσερεις κινητήρες: 1.3lt, 1.6lt, 1.8lt και 2.0lt. Με πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει το αυτοκίνητό του ένας υποψήφιος αγοραστής; Εδώ υπάρχουν $\nu = 2$ διαφορετικές επιλογές για τον εξοπλισμό (έκδοση), ενώ για κάθε τέτοια επιλογή, μπορούν να γίνουν $\nu_2 = 4$ διαφορετικές επιλογές κινητήρα. Συνεπώς, το πλήθος των «διαφορετικών» αυτοκινήτων που μπορεί κανείς να παραγγείλει είναι $\nu_1 \cdot \nu_2 = 2 \cdot 4 = 8$ (βλ. σχ. 10.6α).

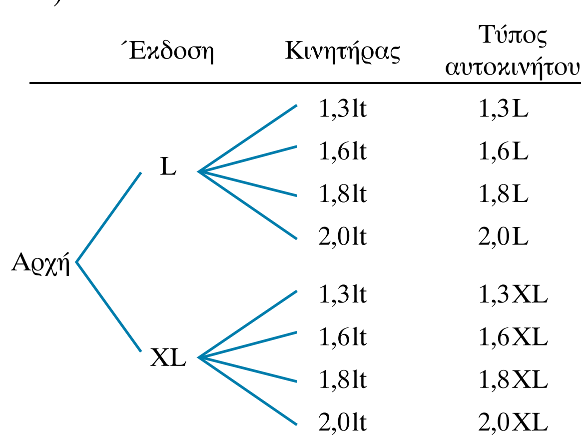
Αρκετά συχνά όμως η επιλογή των στοιχείων στα διάφορα βήματα γίνεται από το ίδιο σύνολο. Για παράδειγμα:

α) Στη ρίψη ενός ζαριού, πολλές φορές, τα αποτελέσματα των διαδοχικών ρίψεων «εκλέγονται» από το σύνολο $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

β) Στη ρίψη ενός νομίσματος πολλές φορές, οι ενδείξεις της κάθε ρίψης προέρχονται από το σύνολο $X = \{K, \Gamma\}$.

γ) Στον σχηματισμό της 6-άδας που παίζουμε στο Λόττο η επιλογή του κάθε αριθμού γίνεται από το σύνολο $X = \{1,2,...,49\}$.

Έστω γενικά X ένα σύνολο με ν στοιχεία. Τότε:



Σχ. 10.6α

Καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k από τα ν στοιχεία του συνόλου X ονομάζεται ***συνδυασμός των ν στοιχείων*** (του X) ***ανά k***.

ενώ

Καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k από τα ν στοιχεία του συνόλου X και να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά ονομάζεται ***διάταξη των ν στοιχείων*** (του X) ***ανά k***. Αν $\nu = k$, η διάταξη των ν στοιχείων του X ανά ν θα λέγεται ***μετάθεση των ν στοιχείων του X***.

Για παράδειγμα, έστω ότι σε ένα τουρνουά μπάσκετ παίρνουν μέρος οι ομάδες του Ολυμπιακού (ΟΣΦΠ), του Παναθηναϊκού (ΠΑΟ) και της ΑΕΚ (X= {ΟΣΦΠ, ΠΑΟ, ΑΕΚ}). Τότε

α) Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να καθοριστεί ποιες ομάδες θα παίξουν στον τελικό του τουρνουά είναι:

ΟΣΦΠ, ΠΑΟ ΟΣΦΠ, ΑΕΚ ΠΑΟ, ΑΕΚ.

Εδώ η σειρά καταγραφής των δύο ομάδων δεν μας ενδιαφέρει, οπότε έχουμε συνδυασμούς των 3 στοιχείων ανά 2.

β) Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να καταταχθούν οι δύο πρώτες ομάδες του τουρνουά είναι

ΟΣΦΠ, ΠΑΟ ΟΣΦΠ, ΑΕΚ ΠΑΟ, ΑΕΚ

ΠΑΟ, ΟΣΦΠ ΑΕΚ, ΟΣΦΠ ΑΕΚ, ΠΑΟ.

Εδώ η σειρά καταγραφής των δύο ομάδων έχει σημασία, επομένως, έχουμε διατάξεις των 3 στοιχείων ανά 2.

γ) Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να καταταχθούν οι 3 ομάδες είναι

ΟΣΦΠ, ΠΑΟ, ΑΕΚ ΠΑΟ, ΟΣΦΠ, ΑΕΚ ΑΕΚ, ΠΑΟ, ΟΣΦΠ

ΟΣΦΠ, ΑΕΚ, ΠΑΟ ΠΑΟ, ΑΕΚ, ΟΣΦΠ ΑΕΚ, ΟΣΦΠ, ΠΑΟ.

Εδώ έχουμε τις μεταθέσεις των 3 στοιχείων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι διατάξεις των 3 στοιχείων ανά 2 [περίπτωση (β)] προκύπτουν εύκολα από τους συνδυασμούς των 3 στοιχείων ανά 2 [περίπτωση (α)], αν μεταθέσουμε με όλους τους δυνατούς τρόπους τα δύο στοιχεία που διαλέχτηκαν. Σχηματικά έχουμε:

Οι δύο πρώτοι συνδυασμοί	*Σειρά βαθμολογίας(διατάξεις)*
ΟΣΦΠ, ΠΑΟ	(ΟΣΦΠ, ΠΑΟ) ή (ΠΑΟ, ΟΣΦΠ)
ΟΣΦΠ, ΑΕΚ	(ΟΣΦΠ, ΑΕΚ) ή (ΑΕΚ,ΟΣΦΠ)
ΠΑΟ, ΑΕΚ	(ΠΑΟ, ΑΕΚ) ή (ΑΕΚ, ΠΑΟ)

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $k \leq$ ν και ότι κάθε στοιχείο του συνόλου X μπορεί να επιλεγεί ***το πολύ μία φορά***.

Ας συμβολίσουμε με:

- $(\nu)_k$ το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k
- M_ν το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων
- $\binom{\nu}{k}$ το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k.

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$(\nu)k = \underbrace{\nu(\nu-1)\,(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}_{k\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}\,,\ M_\nu = 1\cdot 2\ldots\ \nu = \nu!$$

$$\binom{\nu}{k} = \frac{(\nu)_k}{k!} = \frac{\nu(\nu-1)\,(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}{k!}$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της τελευταίας έκφρασης με $(\nu-k)!$, μπορούμε να πάρουμε τον επόμενο εναλλακτικό τύπο

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{(\nu-k)!\,k!}$$

Είναι φανερό ότι $\binom{\nu}{\nu} = 1$, ενώ συμβατικά δεχόμαστε ότι ισχύει επίσης $\binom{\nu}{0} = 1$. Το σύμβολο ν! διαβάζεται «ν παραγοντικό».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.6.2.

Στο τμήμα επισκευών μιας εταιρείας ηλεκτρικών συσκευών υπάρχουν προς επισκευή 10 τηλεοράσεις και 12 βίντεο. Το προσωπικό που διαθέτει η εταιρεία επισκευάζει σε μία μέρα μόνο 6 συσκευές. Αν οι συσκευές που θα επισκευαστούν διαλέγονται τυχαία, να βρεθεί η πιθανότητα σε μία ημέρα να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο.

Λύση.

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς τρόπους επιλογής των 6 συσκευών που θα επισκευαστούν. Έστω A το ενδεχόμενο να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο. Αφού η επιλογή των συσκευών που θα επισκευαστούν γίνεται τυχαία, όλα τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Το $N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε τις 6 συσκευές που θα επισκευαστούν από τις $10+12 = 22$ συσκευές που περιμένουν για επισκευή. Επομένως

$$N(\Omega) = \binom{22}{6} = \frac{22!}{6!16!} = \frac{22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{6!} = 74.613.$$

Το $N(A)$ είναι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε (προς επισκευή) 3 από τις 10 τηλεοράσεις και 3 από τα 12 βίντεο. Οι τρόποι επιλογής των 3 τηλεοράσεων είναι $\binom{10}{3}$ και για κάθε τέτοια επιλογή υπάρχουν $\binom{12}{3}$ επιλογές των 3 βίντεο. Σύμφωνα λοιπόν με την πολλαπλασιαστική αρχή θα έχουμε

$$N(A) = \binom{10}{3}\ \binom{12}{3} = \frac{10!}{3!7!}\cdot\frac{12!}{3!9!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120\cdot 220 = 26.400$$

και η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}}{\dfrac{22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{26.400}{74.613} \cong 0{,}3538 \cong 35\%.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.6.3.

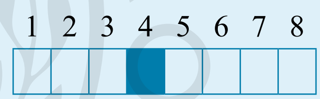
Ένα πλοίο έχει αγκυροβολήσει στην προβλήτα 4 ενός λιμανιού που διαθέτει 8 προβλήτες. Τα επόμενα 3 πλοία που αναμένονται στο λιμάνι θα αγκυροβολήσουν με εντελώς τυχαίο τρόπο σε 3 από τις διαθέσιμες 7 άδειες προβλήτες του λιμανιού. Ποια είναι η πιθανότητα κανένα από τα 3 πλοία να μην σταθμεύσει στις διπλανές προβλήτες;

Λύση.

Οι συνολικές περιπτώσεις του πειράματος που μελετάμε είναι όσοι οι τρόποι επιλογής των 3 από τις 7 διαθέσιμες προβλήτες (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8) από τα τρία πλοία που αναμένονται.

Επομένως

$$N(\Omega) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35.$$

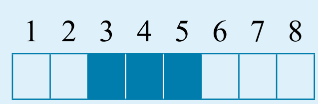


Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το ενδεχόμενο

A: Οι προβλήτες 3 και 5 μένουν κενές

είναι όσοι οι τρόποι επιλογής τριών (μία για κάθε πλοίο) από τις 5 διαθέσιμες προβλήτες 1, 2, 6, 7, 8, δηλαδή

$$N(\Omega) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 10.$$



Επομένως

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{35} \cong 0{,}29 = 29\%$$

Ασκήσεις.

10.6.1. Ένας ναυτικός διαθέτει 3 σακάκια, 4 παντελόνια, 7 πουκάμισα, 6 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια. Με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας ένα από το κάθε είδος; Ποια είναι η πιθανότητα να φοράει ένα ορισμένο παντελόνι;

10.6.2. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 6 επιβάτες στις 10 θέσεις που διαθέτει η πρώτη σειρά του σαλονιού VIP; Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση της σειράς να μείνει κενή;

10.6.3. Ο ηλεκτρολόγος ενός πλοίου ανοίγει ένα κουτί που περιέχει 24 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 4 είναι ελαττωματικές. Κατόπιν επιλέγει τυχαία 5 ασφάλειες και τις δοκιμάζει. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου το κουτί να γίνει αποδεκτό.

10.6.4. Ένας πομπός στέλνει 4 σήματα, καθένα από τα οποία είναι «0» ή «1».
α) Πόσα είναι τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω του πειράματος;
β) Αν όλα τα στοιχεία του Ω είναι ισοπίθανα, ποια είναι η πιθανότητα:
i. Να μην υπάρχουν στο σήμα καθόλου διαδοχικές εκπομπές από “0” ή “1”;
ii. Να υπάρχουν στο σήμα τρία διαδοχικά “1”;
iii. Να υπάρχουν ακριβώς τρία διαδοχικά “1”;

10.6.5. Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα λιμάνι με k επιβάτες. Μέχρι να φτάσει στο τέλος της διαδρομής του κάνει ν στάσεις (συμπεριλαμβανομένου του τέρματος).
α) Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να αποβιβαστούν οι k επιβάτες στις ν στάσεις.
β) Να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μία στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από ένας επιβάτες.

10.6.6. Σε ένα πλοίο έχουν επιβιβασθεί 25 φορτηγά, από τα οποία τα 4 είναι υπέρβαρα. Ο τεχνικός ασφαλείας του πλοίου διαλέγει στην τύχη 6 από τα 25 φορτηγά και τους κάνει έλεγχο καυσαερίων. Ποια είναι η πιθανότητα να εντοπίσει:
α) Ακριβώς 3 υπέρβαρα φορτηγά;
β) Το πολύ 2 υπέρβαρα φορτηγά;
γ) Τουλάχιστον 1 υπέρβαρο και 1 μη υπέρβαρο φορτηγό;

10.6.7. Σε μια συγκέντρωση σπουδαστών της σχολής Μηχανικών συμμετέχουν 100 πρωτοετείς, 80 δευτεροετείς και 70 τριτοετείς σπουδαστές. Αν από τους 250 σπουδαστές που είναι παρόντες επιλεγούν με τυχαίο τρόπο 6 άτομα για να συσταθεί μια επιτροπή, ποια είναι η πιθανότητα:
α) Να υπάρχουν ακριβώς δύο πρωτοετείς στην επιτροπή;
β) Όλα τα μέλη της επιτροπής να προέρχονται από το ίδιο έτος;

10.6.8. Αν παίξουμε μια στήλη ΛΟΤΤΟ (διαλέγουμε 6 από τους αριθμούς 1,2,..., 49), ποια είναι η πιθανότητα να πετύχουμε ακριβώς σωστούς αριθμούς, όπου $k = 4, 5, 6$;

10.7 Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία – Ο πολλαπλασιαστικός τύπος.

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε δύο από τις βασικότερες έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων: τη δεσμευμένη πιθανότητα και την ανεξαρτησία ενδεχομένων. Η χρήση των δεσμευμένων πιθανοτήτων κρίνεται απαραίτητη όταν μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός πιθανοτήτων στην περίπτωση που διαθέτουμε κάποιες πρόσθετες πληροφορίες σχετικά με την έκβαση του πειράματος το οποίο μελετάμε. Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα, το οποίο θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε την αναγκαιότητα που υπάρχει για την εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας.

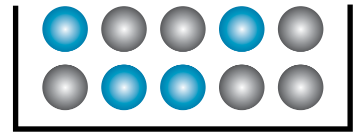
Θεωρούμε ένα δοχείο το οποίο περιέχει τέσσερεις μπλε και έξι γκρι σφαίρες (σχ. 10.7α). Εξάγουμε τυχαία μία από τις 10 σφαίρες και στη συνέχεια, χωρίς να επιστρέψουμε στο δοχείο τη σφαίρα που βγάλαμε[1], εξάγουμε μια δεύτερη.

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα:

A_i: στην i εξαγωγή διαλέγουμε γκρι σφαίρα,

---

[1] Η διαδικασία αυτή λέγεται δειγματοληψία χωρίς επανάθεση. Όταν η σφαίρα επιστρέφεται στο δοχείο πριν την επόμενη εξαγωγή σφαίρας, θα λέμε ότι έχουμε δειγματοληψία με επανάθεση.



Σχ. 10.7α

B_i: στην i εξαγωγή διαλέγουμε μπλε σφαίρα,

για $i = 1{,}2$. Αφού η εξαγωγή της πρώτης σφαίρας γίνεται εντελώς τυχαία, είναι φανερό ότι

$$P(A_1) = \frac{6}{10},\ P(B_1) = \frac{4}{10}$$

Θέλοντας να υπολογίσουμε στη συνέχεια τις πιθανότητες $P(A_2)$, $P(B_2)$, αντιμετωπίζουμε το εξής πρόβλημα: τη στιγμή της δεύτερης εξαγωγής, ενώ γνωρίζουμε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων (9, όσες και οι σφαίρες που απέμειναν στο δοχείο), δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων, αφού αυτό εξαρτάται από το αποτέλεσμα της πρώτης εξαγωγής (σχ. 10.7β).

α) Αν στην πρώτη εξαγωγή επιλέχτηκε γκρι σφαίρα, η πιθανότητα να επιλεγεί στη δεύτερη εξαγωγή γκρι είναι 5/9, ενώ η πιθανότητα να επιλεγεί μπλε είναι 4/9.

β) Αν στην πρώτη εξαγωγή επιλέχτηκε μπλε σφαίρα, η πιθανότητα να επιλεγεί στη δεύτερη εξαγωγή γκρι είναι 6/9, ενώ η πιθανότητα να επιλεγεί μπλε είναι 3/9.

Οι προηγούμενες πιθανότητες λέγονται ***δεσμευμένες πιθανότητες***, αφού αναφέρονται στην εμφάνιση ή μη ενός ενδεχομένου δοθέντος (υπό την προϋπόθεση) ότι συνέβη κάποιο άλλο ενδεχόμενο. Πιο συγκεκριμένα θα γράφουμε

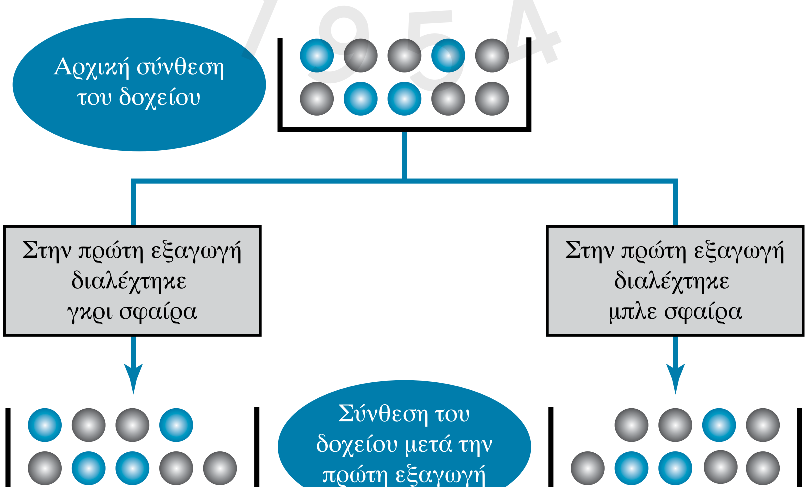
$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{5}{9}, \qquad P(B_2 \mid A_1) = \frac{4}{9}$$

$$P(A_2 \mid B_1) = \frac{6}{9}, \qquad P(B_2 \mid B_1) = \frac{3}{9}$$

Όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις τέσσερεις παραπάνω δεσμευμένες πιθανότητες για να υπολογίσει τις (μη δεσμευμένες) πιθανότητες $P(A_2)$, $P(B_2)$. Στο επόμενο πλαίσιο δίνεται ο τύπος υπολογισμού της δεσμευμένης πιθανότητας.

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο του Ω με $P(B) > 0$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A του Ω, η ***δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B*** δίνεται από τον τύπο

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (10.7.1)$$



Σχ. 10.7β

Αντίστοιχα ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του B δοθέντος του A (με την προϋπόθεση ότι ισχύει $P(A) > 0$) με τον τύπο

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{10.7.2}$$

Σε πολλά προβλήματα εμφανίζεται ανάγκη να μελετηθούν οικογένειες από ενδεχόμενα, τα οποία μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά (λογική, χρονική κτλ.). Αν πραγματοποιήσουμε μια τέτοια διάταξη, είναι συνήθως εύκολο να υπολογίσουμε απ' ευθείας δεσμευμένες πιθανότητες των οποίων η δέσμευση αφορά «προηγούμενα» ενδεχόμενα (ως προς τη λογική ή χρονική διάταξη). Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί κανείς να υπολογίσει την πιθανότητα να εμφανιστούν συγχρόνως δύο ενδεχόμενα A και B με χρήση των επόμενων τύπων, οι οποίοι είναι γνωστοί με την ονομασία ***πολλαπλασιαστικός τύπος των πιθανοτήτων*** και προκύπτουν άμεσα από τους τύπους (10.7.1) και (10.7.2).

$$P(AB) = P(B)\,P(A \mid B) \qquad P(AB) = P(A)\,P(B \mid A) \tag{10.7.3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.7.1.

Σε μια χώρα, η πιθανότητα να ζήσει ένας άντρας τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 80%, ενώ η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 80 χρόνια είναι 76%. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν 75χρονο άντρα από τη χώρα αυτή, ποια είναι η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον άλλα 5 χρόνια (ώστε να ξεπεράσει το 80^{ό} έτος σε ηλικία);

Έστω A, B τα ενδεχόμενα ένας άντρας ο οποίος επιλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό, να ζήσει περισσότερο από 80, 75 χρόνια αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε

$$P(A) = 0{,}76, \;\; P(B) = 0{,}8$$

και $AB = A$ (γιατί $A \subseteq B$). Η πιθανότητα που ζητάμε να υπολογίσουμε, είναι η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A \mid B)$, και προκύπτει εύκολα ως εξής:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}76}{0{,}80} = 0{,}95 = 95\%.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.7.2.

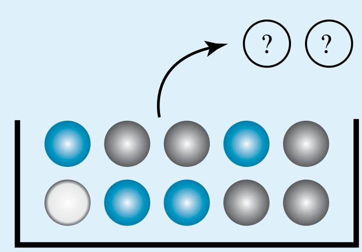
Από ένα δοχείο που περιέχει τέσσερεις μπλε και έξι γκρι σφαίρες, εξάγουμε τυχαία δύο σφαίρες χωρίς επανάθεση (σχ. 10.7γ). Ποια είναι η πιθανότητα να διαλέξουμε:

α) Στην πρώτη εξαγωγή μπλε σφαίρα και στη δεύτερη εξαγωγή γκρι;

β) Στην πρώτη εξαγωγή γκρι σφαίρα και στη δεύτερη μπλε;

γ) Γκρι σφαίρες και στις δύο εξαγωγές;

δ) Μπλε σφαίρες και στις δύο εξαγωγές;



Σχ. 10.7γ

Χρησιμοποιώντας τα ενδεχόμενα A_i, B_i, $i = 1, 2$ που ορίστηκαν στην αρχή της ενότητας αυτής και τις αντίστοιχες πιθανότητες που υπολογίστηκαν εκεί, θα έχουμε α) $P(B_1A_2) = P(B_1)P(A_2|B_1) = \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{6}{9} = \dfrac{24}{90}$

β) $P(A_1B_2) = P(A_1)\,P(B_2|A_1) = \dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{4}{9} = \dfrac{24}{90}$

γ) $P(A_1A_2) = P(A_1)\,P(A_2|A_1) = \dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{5}{9} = \dfrac{30}{90}$

δ) $P(B_1B_2) = P(B_1)\,P(B_2|B_1) = \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{3}{9} = \dfrac{12}{90}$

Οι τύποι (10.7.1), (10.7.2) και (10.7.3) μπορούν εύκολα να γενικευτούν για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν A, B, $Γ$ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και ισχύει $P(AB) > 0$ (οπότε θα ισχύει επίσης $P(A) > 0$), μπορούμε να γράψουμε

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad P(Γ|AB) = \frac{P(ABΓ)}{P(AB)},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$P(ABΓ) = P(Γ|AB)\,P(AB) = P(Γ|AB)\,P(B|A)\,P(A).$$

Στη συνέχεια θα εισάγουμε μία από τις σημαντικότερες έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, την έννοια της ανεξαρτησίας.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η γνώση ότι συνέβη (ή δεν συνέβη) ένα ενδεχόμενο B δεν δίνει καμία πληροφορία για την εμφάνιση ή μη ενός άλλου ενδεχομένου A. Μια τέτοια περίπτωση προκύπτει αν υποθέσουμε ότι $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ και ότι επιπλέον ισχύει

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Τότε θα έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \quad \text{και} \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

δηλαδή

α) Η γνώση ότι συνέβη το B δεν μεταβάλλει την πιθανότητα εμφάνισης του A.

β) Η γνώση ότι συνέβη το A μεταβάλλει την πιθανότητα εμφάνισης του B.

Τέτοια ενδεχόμενα ονομάζονται ανεξάρτητα. Γενικά έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου $Ω$ λέγονται ***ανεξάρτητα***, αν ισχύει

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή ισχύει $P(AB) \neq P(A)\,P(B)$, τα ενδεχόμενα A, B λέγονται ***εξαρτημένα***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.7.3.

Στους πρωτοετείς σπουδαστές της Σχολής Μηχανικών, δίνεται η δυνατότητα να προσέλθουν σε δύο εξετάσεις «προόδου», και να κατοχυρώνουν το μάθημα «Μαθηματικά ΙΙ και Στατιστική», με την προϋπόθεση ότι επιτυγχάνουν και στις δύο προόδους. Τα ποσοστά των σπουδαστών οι οποίοι πέτυχαν στις δύο προόδους ήταν 68% και 54% αντίστοιχα, ενώ το ποσοστό των σπουδαστών που κατοχύρωσε το μάθημα ήταν 45%. Αν ορίσουμε τα ενδεχόμενα

A: ο σπουδαστής πέτυχε στην πρώτη πρόοδο,

B: ο σπουδαστής πέτυχε στην δεύτερη πρόοδο,

θα έχουμε

$$P(A) = 0{,}68,\ P(B) = 0{,}54,\ P(AB) = 0{,}45$$

και αφού

$$P(A)\,P(B) = (0{,}68)(0{,}54) = 0{,}3672 \neq 0{,}45 = P(AB)$$

τα ενδεχόμενα A, B είναι εξαρτημένα.

Στην πράξη είναι πολύ σπάνιο να καταφεύγει κανείς στην ισότητα $P(AB) = P(A)P(B)$ για να αποδείξει ότι δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Συνήθως από τη φύση του πειράματος και την περιγραφή των ενδεχομένων είμαστε σε θέση να πούμε κατά πόσον δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα. Για παράδειγμα, τα ζευγάρια ενδεχομένων:

α) A : η πρώτη ρίψη ενός ζαριού έδωσε ένδειξη άρτια

B : η δεύτερη ρίψη ενός ζαριού έδωσε ένδειξη μεγαλύτερη από 2

β) A : η τιμή της αμόλυβδης βενζίνης δεν ξεπερνά τα 2 Ευρώ / lt

B : οι εισαγωγικές εξετάσεις για τις σχολές του Εμπορικού Ναυτικού θα γίνουν στο δεύτερο δεκαήμερο του Ιουνίου

είναι λογικό να θεωρηθούν ως ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Στην περίπτωση που έχουμε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα, θα λέμε ότι είναι ανεξάρτητα, αν η πιθανότητα της τομής οποιωνδήποτε (δύο, τριών,...κτλ.) από αυτά είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Έτσι, για τρία ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 του ίδιου δειγματικού χώρου έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Τα A_1, A_2, A_3 λέγονται (τελείως) ανεξάρτητα, αν ισχύουν οι ισότητες

$$P(A_1A_2) = P(A_1)\,P(A_2),\ P(A_1A_3) = P(A_1)\,P(A_3), P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.7.4.

Ένα πλοίο διαθέτει δύο κινητήρες και για να εκτελέσει επιτυχώς ένα ταξίδι του πρέπει τουλάχιστον ο ένας από τους δύο κινητήρες να είναι λειτουργικός. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάθει βλάβη ένας κινητήρας είναι 2%, να βρεθεί η πιθανότητα επιτυχούς ταξιδιού.

Λύση.

Σύμφωνα με την περιγραφή, αν ορίσουμε τα ενδεχόμενα

$$A_i : \text{ο κινητήρας παθαίνει βλάβη κατά τη διάρκεια του ταξιδιού}$$

για $i = 1,2$, θα έχουμε $P(A_1) = P(A_2) = 0{,}002$. Η πιθανότητα επιτυχούς ταξιδιού είναι ίση με

$$P = P(A'_1 \cup A'_2) = P((A_1A_2)') = 1 - P(A_1A_2)$$

και θεωρώντας ότι οι δύο κινητήρες λειτουργούν ανεξάρτητα, παίρνουμε

$$P = 1 - P(A_1)P(A_2) = 1 - (0{,}002)^2 = 0{,}99996.$$

Άρα υπάρχει πιθανότητα 99,996% να ολοκληρωθεί το ταξίδι με επιτυχία.

Ασκήσεις.

10.7.1. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου έχουμε

$$P(A) = \frac{1}{4},\ \ P(A\,|\,B) = \frac{1}{4},\ \ P(B\,|\,A) = \frac{1}{3}.$$

Να υπολογιστεί η $P(B)$ και στην συνέχεια να εξεταστεί αν τα A, B είναι ανεξάρτητα.

10.7.2. Αν A,B είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι θα είναι ανεξάρτητα και τα επόμενα τρία ζεύγη ενδεχομένων.
α) A και B', β) A' και B, γ) A' και B'.

10.7.3. Σε μία ιατρική μελέτη εξετάστηκαν 15.000 άτομα ηλικίας άνω των 40 ετών και βρέθηκε ότι 6.000 από αυτούς ήταν καπνιστές, 4.500 είχαν πνευμονικό πρόβλημα, ενώ 3.000 ήταν καπνιστές με πνευμονικό πρόβλημα. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
α) Να έχει ένα άτομο πνευμονικό πρόβλημα με δεδομένο ότι είναι καπνιστής.
β) Να έχει ένα άτομο πνευμονικό πρόβλημα με δεδομένο ότι δεν είναι καπνιστής.

10.7.4. Ο ποιοτικός έλεγχος *(QC)* των συσκευών που παράγει ένα εργοστάσιο, γίνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο ελέγχου η πιθανότητα να απορριφθεί μια ελαττωματική συσκευή είναι 0,7. Οι συσκευές που δεν απορρίπτονται δοκιμάζονται στο δεύτερο στάδιο ελέγχου, όπου η πιθανότητα να απορριφθεί μια ελαττωματική συσκευή είναι 0,8. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να μην απορριφθεί μια ελαττωματική συσκευή.

10.7.5. Ένα εξάρτημα παρουσιάζει δύο ειδών βλάβες, τύπου α και τύπου β, οι οποίες εμφανίζονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Η πιθανότητα να εμφανιστεί η βλάβη α είναι 12%, ενώ η πιθανότητα να εμφανιστεί η βλάβη β είναι 15%. Ποια είναι η πιθανότητα:
α) Να εμφανιστούν και οι δύο βλάβες συγχρόνως;
β) Να εμφανιστεί μία τουλάχιστον από τις δύο βλάβες;
γ) Να εμφανιστεί βλάβη τύπου β, αν είναι γνωστό ότι έχει ήδη εμφανιστεί βλάβη τύπου α;

10.7.6. Σε ένα δοχείο υπάρχουν δύο μαύρες σφαίρες (Μ) και τρεις άσπρες (Α). Αν διαλέξουμε δύο σφαίρες στης τύχη την μία κατόπιν της άλλης, να υπολογίσετε τις πιθανότητες για καθένα από τα αποτελέσματα *ΜΜ*, *ΜΑ*, *ΑΜ* και *ΑΑ*.

10.7.7. Σε μια χώρα, το ποσοστό άνεργων γυναικών είναι 8%, ενώ το ποσοστό ανέργων της χώρας είναι 10%. Αν διαλέξουμε στην τύχη ένα άτομο και διαπιστωθεί ότι είναι άνεργος, ποια είναι η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

10.8 Κανόνας του Bayes.

Κατά την μελέτη διαφόρων προβλημάτων τύχης εμφανίζεται η ανάγκη να υπολογισθεί η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A, για το οποίο είναι γνωστές οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(A \mid B)$ και $P(A \mid B')$, όπου B είναι ένα δεύτερο ενδεχόμενο, το οποίο έχει σχέση με το A. Γεννάται λοιπόν το εξής λογικό ερώτημα:

Θα μπορούσαμε, χρησιμοποιώντας αυτά τα στοιχεία, να υπολογίσουμε τη (μη δεσμευμένη) πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A; Η απάντηση είναι καταφατική και δίνεται από την επόμενη πρόταση, γνωστή με την ονομασία ***θεώρημα ολικής πιθανότητας***.

Έστω B ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $0 < P(B) < 1$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A τον ίδιου δειγματικού χώρου, ισχύει ο τύπος

$$P(A) = P(A \mid B)\,P(B) + P(A \mid B')P(B'). \qquad (10.8.1)$$

Για να διαπιστώσουμε την αλήθεια της (10.8.1), αρκεί να γράψουμε το ενδεχόμενο A στην μορφή $A = AB \cup AB'$ και να παρατηρήσουμε ότι τα ενδεχόμενα AB και AB' είναι ξένα. Επομένως

$$P(A) = P(AB) + P(AB') = P(A \mid B)\,P(B) + P(A \mid B')\,P(B'). \qquad (10.8.2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.8.1.

Θεωρούμε ένα δοχείο το οποίο περιέχει τέσσερεις μπλε και έξι γκρι σφαίρες (βλ. σχ. 10.7α). Εξάγουμε τυχαία μία από τις 10 σφαίρες και στη συνέχεια, χωρίς να επιστρέψουμε στο δοχείο τη σφαίρα που βγάλαμε, εξάγουμε μια δεύτερη.

Να υπολογισθεί η πιθανότητα στη δεύτερη εξαγωγή να επιλεχθεί γκρι σφαίρα.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που εισήχθησαν για το συγκεκριμένο πείραμα στο ξεκίνημα της ενότητας 10.7, εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(A_2)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο (10.8.1) για

$$A = A_2\,, B = A_1,\ B' = A_1' = B_1$$

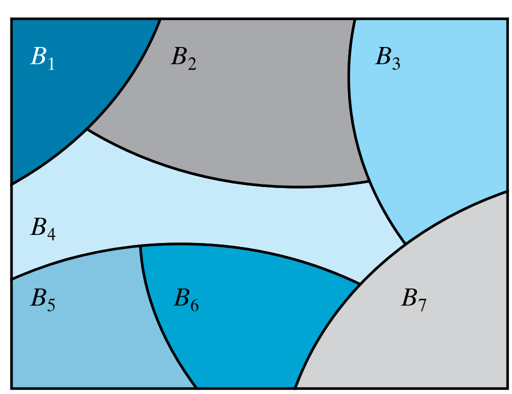
μπορούμε να γράψουμε

$$P(A_2) = P(A_2 \mid A_1)\,P(A_1) + P(A_2 \mid B_1)\,P(B_1) = \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10} + \frac{6}{9}\cdot\frac{4}{10} = \frac{54}{90} = 60\%.$$

Ο τύπος (10.8.1) μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση που διαθέτουμε ν μη κενά ενδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ του δειγματικού χώρου, τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu = \Omega \text{ και } B_i B_j = \varnothing \text{ για } i \neq j.$$

Τέτοιες οικογένειες λέγονται ***διαμερίσεις*** του Ω (σχ. 10.8α).



Σχ. 10.8α
Διαμέριση του δειγματικού χώρου

Έστω $\{B_1, B_2, \ldots, B_\nu\}$ μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε να ισχύει $P(B_i) > 0$ για όλα τα $i = 1,2, \ldots, \nu$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύει

$$P(A) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_\nu)\, P(B_\nu). \tag{10.8.3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.8.2.

Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν τρεις διαφορετικές γραμμές παραγωγής στις οποίες κατασκευάζεται το 50%, 30% και 20% των προϊόντων του εργοστασίου αντίστοιχα. Το 0,4% των προϊόντων της πρώτης γραμμής παραγωγής είναι ελαττωματικά, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τις άλλες δύο γραμμές είναι 0,6% και 1,2%. Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από το εργοστάσιο;

Λύση.

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα

A: το παραχθέν προϊόν είναι ελαττωματικό, και

B_i: το προϊόν κατασκευάστηκε στην γραμμή παραγωγής i,

για $i = 1, 2, 3$. Σύμφωνα με τα στοιχεία που δίνονται, θα έχουμε

$$P(B_1) = 0{,}5, \quad P(B_2) = 0{,}3, \quad P(B_3) = 0{,}2$$
$$P(A \mid B_1) = 0{,}004, \quad P(A \mid B_2) = 0{,}006, \quad P(A \mid B_3) = 0{,}012$$

ενώ είναι φανερό ότι ισχύουν και τα εξής:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega, \quad B_1B_2 = B_1B_3 = B_2B_3 = \varnothing,$$

δηλαδή η οικογένεια ενδεχομένων $\{B_1, B_2, B_3\}$ αποτελεί διαμέριση του δειγματικού χώρου του προβλήματος. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3) = \\ &= (0{,}004)(0{,}5) + (0{,}006)(0{,}3) + (0{,}012)(0{,}2) = 0{,}0062. \end{aligned}$$

Επομένως, το εργοστάσιο παράγει ελαττωματικά αντικείμενα σε ποσοστό 0,62%.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου. Συνδυάζοντας τους τύπους (10.7.2) και (10.7.3), δηλαδή

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(AB) = P(A \mid B)\, P(B)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A)}$$

και αντικαθιστώντας τον παρονομαστή με βάση τον τύπο (10.8.1) προκύπτει ο τύπος

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid B')\, P(B')} \tag{10.8.4}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως ***τύπος*** ή ***κανόνας του Bayes*** και χρησιμοποιείται όταν γνωρίζουμε (ή μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα) τις ποσότητες $P(A \mid B)$, $P(A \mid B')$, $P(B)$ και μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των δεσμευμένων πιθανοτήτων $P(B|A)$, $P(B'|A)$, όπου η δέσμευση έχει αντιστραφεί.

Στις πιο συνηθισμένες εφαρμογές του τύπου του Bayes, το ενδεχόμενο A μπορεί να συμβεί (λογικά ή χρονικά) μετά από το ενδεχόμενο B. Έτσι, όταν γνωρίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα να συμβεί το πιο πρόσφατο γεγονός A δοθέντος ότι συνέβη το χρονικά προγενέστερο γεγονός B, ο τύπος του Bayes μάς δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα να είχε συμβεί το (προγενέστερο) γεγονός B δοθέντος ότι εμφανίστηκε το γεγονός A.

Με άλλα λόγια, ο τύπος του Bayes έχει πρακτική αξία όταν γνωρίζουμε το ***αποτέλεσμα*** (A) και θέλουμε να διατυπώσουμε κάποια λογικά συμπεράσματα για την ***αιτία*** (B) που το προκάλεσε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.8.3.

Ένας φοιτητής απαντάει σε ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος πολλαπλής επιλογής με 4 απαντήσεις ανά ερώτηση (εκ των οποίων η μία είναι σωστή και οι άλλες τρεις λανθασμένες). Η πιθανότητα να γνωρίζει ο φοιτητής την απάντηση μιας ερώτησης, είναι 70%. Στις περιπτώσεις που ο φοιτητής δεν γνωρίζει την απάντηση σε μια ερώτηση, απαντάει εντελώς τυχαία διαλέγοντας μία από τις τέσσερεις απαντήσεις που δίνονται. Αν ο φοιτητής απαντήσει σωστά σε μία ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση;

Λύση.

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα

A : ο φοιτητής απαντάει σωστά στην ερώτηση,

B : ο φοιτητής γνωρίζει τη σωστή απάντηση της ερώτησης.

Το ζητούμενο είναι η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$, ενώ, σύμφωνα με την εκφώνηση, γνωρίζουμε τα εξής:

$$P(B) = 0{,}7, \quad P(B') = 1 - P(B) = 0{,}3, \quad P(A|B) = 1, \quad P(A|B') = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (10.8.4) βρίσκουμε

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{1 \cdot (0{,}7)}{1 \cdot (0{,}7) + (0{,}25) \cdot (0{,}3)} \cong 0{,}9$$

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε (έχουμε ως δεδομένο) κάποιο αποτέλεσμα, πιο συγκεκριμένα τη σωστή απάντηση του φοιτητή. Ο τύπος του Bayes μάς βοηθάει να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την αιτία που προκάλεσε το αποτέλεσμα αυτό. Πράγματι, το ποσοστό που βρέθηκε, μας πληροφορεί ότι υπάρχει πιθανότητα 90% η ερώτηση να απαντήθηκε σωστά, γιατί ο φοιτητής γνώριζε τη σωστή απάντηση και πιθανότητα μόλις 10% οι φοιτητής να ήταν «αρκετά τυχερός» ώστε, απαντώντας εντελώς τυχαία, να βρήκε τη σωστή απάντηση.

Όπως το θεώρημα ολικής πιθανότητας έτσι και ο τύπος του Bayes μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση που διαθέτουμε μια διαμέριση του δειγματικού χώρου σε ν υποσύνολα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ο επόμενος τύπος για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + \ldots + P(A|B_\nu)\,P(B_\nu)} \qquad (10.8.5)$$

Ασκήσεις.

10.8.1. Από τα πλοία που αναχωρούν καθημερινά για την Μύκονο, το 70% φεύγει από τον Πειραιά και το 30% από την Ραφήνα. Έχει παρατηρηθεί ότι το 15% των πλοίων που αναχωρούν από τον Πειραιά φτάνουν στο νησί με καθυστέρηση μεγαλύτερη της μίας ώρας, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τα πλοία που αναχωρούν από την Ραφήνα είναι 10%.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσει ένα πλοίο στην Μύκονο με καθυστέρηση μεγαλύτερη της μίας ώρας;

β) Αν ένα πλοίο διαπιστώσουμε ότι έφτασε με καθυστέρηση μεγαλύτερη της μίας ώρας, ποια είναι η πιθανότητα αυτό να ξεκίνησε από τον Πειραιά;

γ) Αν ένα πλοίο διαπιστώσουμε ότι έφτασε με καθυστέρηση μικρότερη της μίας ώρας, ποια είναι η πιθανότητα αυτό να ξεκίνησε από την Ραφήνα;

10.8.2. Η κατανομή «διαβασμένων» και «αδιάβαστων» σπουδαστών που προσήλθαν για εξέταση στις τρεις αίθουσες όπου εξετάζεται ένα μάθημα ήταν η εξής:
Αίθουσα I: 150 διαβασμένοι, 50 αδιάβαστοι
Αίθουσα II: 130 διαβασμένοι, 70 αδιάβαστοι
Αίθουσα III: 160 διαβασμένοι, 40 αδιάβαστοι
Επιλέγεται τυχαία μία από τις τρεις αίθουσες και στη συνέχεια ένας σπουδαστής από αυτή. Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί διαβασμένος σπουδαστής;

10.8.3. Ένα στα χίλια άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από κάποια σοβαρή ασθένεια. Το τεστ που χρησιμοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στις 2% των περιπτώσεων αν το άτομο που υποβάλλεται στο τεστ πράγματι πάσχει από την ασθένεια, και στο 5% των περιπτώσεων αν δεν πάσχει. Αν το τεστ βγει θετικό για κάποιο άτομο που διαλέχτηκε τυχαία από τον πληθυσμό, ποια είναι η πιθανότητα πράγματι να πάσχει από την ασθένεια;

10.8.4. Οι ασφάλειες ρεύματος που παράγονται από ένα εργοστάσιο, συσκευάζονται σε κουτιά των 100 λαμπτήρων. Η πιθανότητα να περιέχονται στο κουτί i ελαττωματικές είναι ίση με 1/10 για όλα τα $i = 0, 1, \ldots, 9$. Αν διαλέξουμε από το κουτί 10 ασφάλειες και διαπιστώσουμε ότι καμιά δεν είναι ελαττωματική, ποια είναι η πιθανότητα και οι 100 ασφάλειες του κουτιού να λειτουργούν;

10.9 Στοχαστικές μεταβλητές – Κατανομές πιθανότητας.

Γενικά, κατά τη μελέτη ενός πειράματος τύχης, μπορεί κανείς να αντιστοιχεί σε κάθε αποτέλεσμά του (δειγματικό σημείο) έναν αριθμό, χρησιμοποιώντας έναν προκαθορισμένο κανόνα αντιστοίχισης. Με άλλα λόγια υπάρχει η δυνατότητα εισαγωγής μιας συνάρτησης $X(\cdot)$, η οποία σε κάθε σημείο ω του δειγματικου χώρου Ω να αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό $X(\omega)$. Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται ***τυχαία μεταβλητή*** ή ***στοχαστική μεταβλητή.***

Για να καθοριστεί η (αριθμητική) τιμή της συνάρτησης, θα πρέπει να γνωρίζουμε ποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα του δειγματικού χώρου Ω εμφανίστηκε κατά την εκτέλεση του πειράματος. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί την προσθήκη του επιθέτου «τυχαία» στην ορολογία που χρησιμοποιούμε.

Για τις τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιούμε συνήθως τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, \ldots$. Τα αντίστοιχα μικρά γράμματα $x, y, z, \ldots$ χρησιμοποιούνται για να δηλώνουν τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών. Έτσι, ο συμβολισμός $X(\omega) = x$ θα σημαίνει ότι, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης ειναι το $\omega \in \Omega$, τότε η τιμή που θα πάρει η τυχαία μεταβλητή X ειναι x. Θα γράφουμε τότε σε συντομία $X = x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.1.

Κατά τη ρίψη ενός νομίσματος τρεις φορές ορίζουμε ως X τον αριθμό εμφανίσεων "γραμμάτων". Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

ενώ για τη συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$X(KKK) = 0, \quad X(KK\Gamma) = 1, \quad X(K\Gamma K) = 1, ..., \quad X(\Gamma\Gamma\Gamma) = 3$$

ή υπό μορφή πίνακα αντιστοιχίας

$\omega \in \Omega$	KKK	$KK\Gamma$	$K\Gamma K$	$K\Gamma\Gamma$	ΓKK	$\Gamma K\Gamma$	$\Gamma\Gamma K$	$\Gamma\Gamma\Gamma$
$X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3

Παίρνοντας υπόψη ότι τα 8 ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα, θα έχουμε

$$P(X=0) = P(KKK) = 1/8,$$
$$P(X = 1) = P(KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK) = 3/8 \text{ κτλ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.2.

Η ακτίνα μιας πετρελαιοκηλίδας που δημιουργεί ένα δεξαμενόπλοιο όταν βυθίζεται περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή X. Αν υποθέσουμε ότι η πετρελαιοκηλίδα λαμβάνει κυκλικό σχήμα με κέντρο το βυθισμένο πλοίο, τότε και το εμβαδό της πετρελαιοκηλίδας θα είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή Y, η οποία εκφράζεται μέσω της X ως $Y = \pi X^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.3.

Ζητάμε από έναν φίλο μας να μας πει έναν (πραγματικό) αριθμό στο διάστημα [0, 10], και συμφωνούμε να του δώσουμε σε ευρώ, το ποσό που προκύπτει μετά τη στρογγυλοποίηση (στον πλησιέστερο ακέραιο) του αριθμού που μας είπε. Αν ορίσουμε τις ποσότητες

X: ο αριθμός που διάλεξε ο φίλος μας,

Y: το ποσό που θα δώσουμε,

τότε θα έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές με τύπους

$$X(\omega) = \omega, \qquad Y(\omega) = [\omega]$$

για κάθε $\omega \in [0,10]$ (το σύμβολο $[\omega]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του αριθμού ω).

Εφόσον μια τυχαία μεταβλητή αντιστοιχίζει κάθε αποτέλεσμα του πειράματος τύχης (δειγματικό σημείο) σε έναν αριθμό, το σύνολο των τιμών που μπορεί να λάβει θα είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Το σύνολο αυτό θα λεγεται ***σύνολο τιμών*** ή ***πεδίο τιμών*** της τυχαίας μεταβλητής X και θα συμβολίζεται με R_X, R_Y κτλ.

Αν το σύνολο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο (συνήθως υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών), η X θα λέγεται ***διακριτή***. Αν το R_X αποτελείται από διαστήματα πραγματικών αριθμών [π.χ. $(-\infty, \alpha)$, (α, β) $(\alpha, +\infty)$ κτλ.], η X θα λέγεται συνεχής. Για παράδειγμα, η μεταβλητή X του παραδείγματος 10.9.1 είναι διακριτή, ενώ η μεταβλητή Y του παραδείγματος 10.9.2 και η μεταβλητή X του παραδείγματος 10.9.3 είναι συνεχείς.

Η περιγραφή της συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής γίνεται με χρήση της λεγόμενης ***κατανομής πιθανοτήτων***. Με τον όρο αυτό εννοούμε γενικά έναν τύπο υπολογισμού ή έναν πίνακα ή ένα γράφημα το οποίο περιγράφει τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής και τις αντίστοιχες πιθανότητες που σχετίζονται με αυτές.

Θα ασχοληθούμε αρχικά με τις κατανομές πιθανοτήτων των διακριτών (τυχαίων) μεταβλητών και στη συνέχεια θα δούμε τον τρόπο που αυτές ορίζονται για συνεχείς μεταβλητές.

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος περιγραφής διακριτών τυχαίας μεταβολής είναι με χρήση της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβολής X ορίζεται για κάθε $x \in R_X$ με τον τύπο

$$f(x) = P(X = x) \tag{10.9.1}$$

δηλαδή το $f(x)$ μας δίνει την πιθανότητα στο πείραμα τύχης με το οποίο σχετίζεται η X να πάρουμε αποτέλεσμα για το οποίο η X λαμβάνει την τιμή $x \in R_X$.

Στη περίπτωση που χρειάζεται να μελετήσουμε τις συναρτήσεις πιθανότητας περισσότερων της μίας τυχαίας μεταβλητής X, Y, Z,... θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_Z(z)$, αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.4.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο ζαριών και ας ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές

X: η μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις,

Y: η διαφορά της μικρότερης ένδειξης από τη μεγαλύτερη (απόλυτη διαφορά των δύο ενδείξεων).

Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 36 ισοπίθανα ενδεχόμενα της μορφής (i,j), όπου $i = 1,2,\ldots,6$ και $j = 1,2,\ldots, 6$ είναι οι ενδείξεις των δύο ζαριών. Στον διπλανό πίνακα, δίνεται η τιμή της τυχαίας μεταβλητής για κάθε ένα από τα 36 αυτά αποτελέσματα. Επομένως θα έχουμε

$$f_X(1) = P(X = 1) = P((1,1)) = \frac{1}{36}, \quad f_X(2) = P(X = 2) = P((1,2)\ (2,1)\ (2,2)) = \frac{3}{36}, \text{ κτλ.}$$

Όλες οι τιμές της συνάρτησης πιθανότητας $f_X(\cdot)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα που δίνονται στον παραπάνω πίνακα μπορούν να παρουσιαστούν και με χρήση ενός ενιαίου τύπου, πιο συγκεκριμένα

$$f_X(x) = \frac{2x - 1}{36}, \; x = 1,2,\ldots 6.$$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Εργαζόμενοι με τον ιδιο τρόπο για την τυχαία μεταβλητή Y, βρίσκουμε τον διπλανό πίνακα τιμών, απ' όπου προκύπτει:

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Για τις δύο συναρτήσεις πιθανότητας του παραδείγματος 10.9.4 παρατηρούμε ότι είναι μη αρνητικές και επιπλέον ότι, αθροίζοντας τις τιμές τους για όλες τις δυνατές τιμές της αντίστοιχης τυχαίας μεταβολής, το άθροισμα είναι ίσο με 1.0. Οι δύο αυτές ιδιότητες είναι χαρακτηριστικές για κάθε διακριτή τυχαία μεταβολή.

Μια συνάρτηση $f(x)$, για να μπορεί να περιγράψει κάποια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με σύνολο τιμών R_X, θα πρέπει να ικανοποιεί τις επόμενες δύο ιδιότητες:

Σ1. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R_X$

Σ2. $\sum_x f(x) = 1$, όπου η άθροιση λαμβάνεται για όλα τα $x \in R_X$

Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X, μπορούμε να υπολογίζουμε πιθανότητες που έχουν σχέση με τις τιμές που μπορεί να λάβει η X, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x) = \sum_{x \in A} f(x) \qquad (10.9.2)$$

όπου A είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του R_X.

Έτσι, με βάση αυτά που βρέθηκαν στο παράδειγμα 10.9.4, μπορούμε να γράψουμε

P(Η μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις είναι άρτιος αριθμός) =

$$= P(X = 2 \text{ ή } 4 \text{ ή } 6) = P(X \in \{2,4,6\}) = f_X(2) + f_X(4) + f_X(6) = \frac{3}{36} + \frac{7}{36} + \frac{11}{36} + \frac{21}{36} \cong 58\%.$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι με χρήση της ***αθροιστικής συνάρτησης κατανομής*** ή, πιο σύντομα της ***συνάρτησης κατανομής***.

Η συνάρτηση κατανομής $F(t)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με τον τύπο

$$F(t) = P(X \leq \mathrm{t}) \qquad (10.9.3)$$

δηλαδή το $F(t)$ μας δίνει την πιθανότητα να πάρουμε αποτέλεσμα για το οποίο η X λαμβάνει τιμή μικρότερη ή ίση του $t \in \mathbb{R}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (10.9.2) για $A = \{x \in R_X : x \leq t\}$ συμπεραίνουμε ότι η F μπορεί να υπολογισθεί μέσω της f από την έκφραση

$$F(t) = \sum_{x \in R_X : x \leq t} f(x) \qquad (10.9.4)$$

Έτσι, αναφερόμενοι και πάλι στο παράδειγμα 10.9.4, μπορούμε να γράψουμε ότι

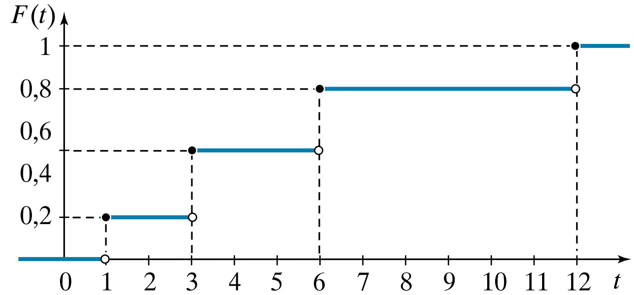
P(Η μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις είναι μικρότερη ή ίση του 3) = $P(X \leq 3)$ =

$$= F_X(3) = f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} \cong 25\%$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής $F(t)$ ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και όχι μόνο όταν $t \in R_X$, για παράδειγμα:

$$F_X(2{,}5) = P(X \le 2{,}5) = f_X(1) + f_X(2) = \frac{1}{9}$$

Είναι φανερό ότι η ίδια τιμή (1/9) προκύπτει αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα $F_X(2{,}1)$, $F_X(2{,}8)$ κ.λπ. Εκείνο το οποίο προκύπτει εδώ είναι ότι $F_X(t) = 1/9$ για όλα τα t με $2 \le t < 3$. Γενικά η συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 10.9α, δηλαδή είναι κατά τμήματα σταθερή και σε συγκεκριμένες θέσεις (οι οποίες αντιστοιχούν στα $x \in R_X$) παρουσιάζει "άλματα". Λόγω της μορφής που έχει η $F(t)$, είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται γι' αυτήν ο όρος ***σκαλωτή συνάρτηση***.



Σχ. 10.9α
Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.5.

΄Ενας υπάλληλος μιας εταιρείας ναυτασφαλίσεων ο οποίος απασχολείται στο τμήμα δηλώσεων ατυχημάτων μπορεί να διεκπεραιώσει σε μία ημέρα από 2 έως 5 δηλώσεις. Με βάση τα δεδομένα της εταιρείας που αφορούν 100 ημέρες, σχηματίστηκε ο πίνακας 10.9.1, στον οποίο έχει σημειωθεί ο αριθμός ημερών κατά τις οποίες διεκπεραίωσε 2, 3, 4, ή 5 δηλώσεις. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβολής

X: αριθμός δηλώσεων που διεκπεραιώνει ο υπάλληλος σε μία ημέρα.

Λύση.

Θεωρώντας ότι το πλήθος επαναλήψεων ($\nu = 100$) του πειράματος είναι αρκετά μεγάλο, μπορούμε να εκτιμήσουμε ικανοποιητικά τις πιθανότητες των ενδεχομένων "ο υπάλληλος διεκπεραιώνει X δηλώσεις σε μία ημέρα", για $x = 2, 3, 4$, μέσω των αντίστοιχων σχετικών συχνοτήτων. ΄Ετσι θα έχουμε (βλ. πίνακα 10.9.2):

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{15}{100} = 0{,}15, \qquad f(4) = P(X = 4) = \frac{35}{100} = 0{,}35,$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{30}{100} = 0{,}30, \qquad f(5) = P(X = 5) = \frac{20}{100} = 0{,}20.$$

Πίνακας 10.9.1

Αριθμός δηλώσεων	Πλήθος ημερών
2	15
3	30
4	35
5	20
Σύνολο	100

Πίνακας 10.9.2

x	$f(x) = P(X = x)$
2	0.15
3	0.30
4	0.35
5	0.20

Για την συνάρτηση κατανομής της X έχουμε

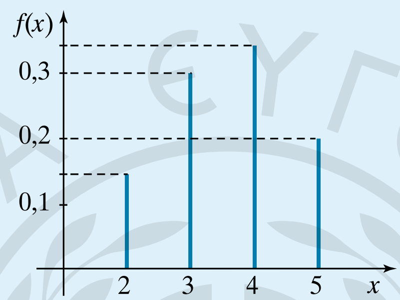
$$F(2) = P(X \leq 2) = f(2) = 0{,}15,\ F(3) = P(X \leq 3) = f(2) + f(3) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45,$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = f(2) + f(3) + f(4) = 0{,}80,\ F(5) = P(X \leq 5) = 1{,}00.$$

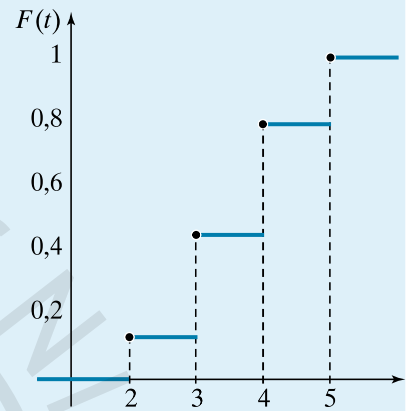
(βλ. πίνακα 10.9.3). Σημειώνεται ότι η $F(t)$ για τα ενδιάμεσα σημεία των 2, 3, 4, 5 παραμένει σταθερή, π.χ. για $2 \leq t < 3$ ισχύει $F(t) = F(2) = 0{,}15$, για $3 \leq t < 4$ έχουμε $F(t) = F(3) = 0{,}45$ κτλ. Στα σχήματα 10.9β και 10.9γ δίνεται η γραφική παράσταση των $f(x)$ και $F(t)$.

Πίνακας 10.9.3

t	$F(t) = P(X \leq t)$
2	0.15
3	0.30
4	0.35
5	0.20



Σχ. 10.9β



Σχ. 10.9γ

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, η συμπεριφορά μιας τυχαίας μεταβλητής, από άποψη πιθανοτήτων εμφάνισης των διαφόρων τιμών που μπορεί αυτή να πάρει, περιγράφεται είτε από τη συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{R}$, είτε από τη συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = P(X \leq t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Μια συνοπτική περιγραφή της συμπεριφοράς της τυχαίας μεταβλητής παρέχεται από τη μελέτη συγκεκριμένων ποσοτήτων, που ονομάζονται ***παράμετροι*** της κατανομής.

Η πρώτη παράμετρος που θα μελετήσουμε είναι η μέση τιμή μιας κατανομής, η οποία αποτελεί για τη θεωρία πιθανοτήτων το ανάλογο του μέσου όρου ή αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας αριθμών. Δίνει μια ένδειξη για τη ***θέση*** γύρω από την οποία είναι τοποθετημένες οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής X. Για τον λόγο αυτό λέγεται ***μέτρο θέσης*** της αντίστοιχης κατανομής.

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών R_X και συνάρτηση πιθανότητας f. Η ***μέση τιμή*** ή ***αναμενόμενη τιμή*** της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τον τύπο

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, P(X = x) = \sum_{x \in R_X} x\, f(x) \qquad (10.9.5)$$

Μερικές φορές για τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιούνται και οι όροι ***μέσος*** της X ή ***μαθηματική ελπίδα*** της Χ. Συνήθως, η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με το γράμμα μ, ενώ αν εμφανίζονται στο πρόβλημά μας περισσότερες από μία τυχαίες μεταβλητές $X, Y, Z, \ldots$ και υπάρχει ανάγκη διάκρισης, χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί $\mu_X, \mu_y, \mu_Z, \ldots$.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής X του παραδείγματος 10.9.5, θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε αρχικά τον πίνακα 10.9.4, απ' όπου βρίσκουμε:

$$E(X)=\sum_{x=2}^{5} x\,f(x)=\ 2\cdot(0{,}15)+3\cdot(0{,}30)+4\cdot(0{,}35)+5\cdot(0{,}20)=3{,}60.$$

Πίνακας 10.9.4

x	$f(x)$	$xf(x)$
2	0,15	0,30
3	0,30	0,90
4	0,35	1,40
5	0,20	1,00
Σύνολο	1,00	3,60

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο υπολογισμός που κάναμε μπορεί να πάρει και τη μορφή

$$E(X)=2\cdot\frac{15}{100}+3\cdot\frac{30}{100}+4\cdot\frac{35}{100}+5\cdot\frac{20}{100}=\frac{2\cdot15+3\cdot30+4\cdot35+5\cdot20}{100}.$$

Σύμφωνα με τον πίνακα 10.9α, ο αριθμητής στο τελευταίο κλάσμα είναι οι συνολικές δηλώσεις που διεκπεραίωσε ο υπάλληλος σε 100 ημέρες, οπότε διαιρώντας την ποσότητα αυτή με 100 βρίσκουμε τον (αριθμητικό) μέσο όρο των δηλώσεων ανά ημέρα. Δηλαδή η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής είναι στην πράξη ισοδύναμη με τον μέσο όρο των τιμών που θα λάβει αυτή σε πολύ μεγάλο (θεωρητικά άπειρο) αριθμό επαναλήψεων του πειράματος.

Πολλές φορές χρειάζεται να υπολογίσουμε τη μέση τιμή μιας ποσότητας που προκύπτει με πράξεις από μια τυχαία μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των υπολογιστών (Η/Υ) που πουλάει ένα μικρό κατάστημα σε διάστημα 3 μηνών, περιγράφεται απο μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X και θεωρήσουμε ότι το κέρδος ανά υπολογιστή για το κατάστημα είναι 200€, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = 200X$ θα δίνει το κέρδος του καταστήματος σε 3 μήνες και έχει ενδιαφέρον να υπολογίσουμε το μέσο κέρδος $E(Y) = E[g(X)]$, όπου $g(x) = 200x$.

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολα τιμών R_X και συνάρτηση πιθανότητας f. Τότε, για κάθε πραγματική συνάρτηση g η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$ δίνεται από τον τύπο

$$E[g(X)]=\sum_{x\in R_X} g(x)f(x) \qquad (10.9.6)$$

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου η πληροφορία που παρέχεται απο τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής δεν είναι αρκετή για να προσδιοριστεί ικανοποιητικά η πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη της ακρίβειας ενός ναυτικού οργάνου και ας συμβολίσουμε με X την τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το σφάλμα μέτρησης (δηλαδή η X είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ πραγματικής τιμής και ένδειξης του οργάνου).

Έστω λοιπόν ότι στην ελληνική αγορά υπάρχουν διαθέσιμα τρία ανταγωνιστικά όργανα Α, Β, Γ, για τα οποία έχουμε τις εξής πληροφορίες:

Όργανο Α: Το σφάλμα μέτρησης μπορεί να πάρει τις τιμές –0,99, –0,98, ... , –0,01, 0, 0,01, ..., 0,98, 0.99, με πιθανότητα 1/199 την καθεμία.

Όργανο Β: Το σφάλμα μέτρησης μπορεί να πάρει τις τιμές –0,50, –0,49,..., 0,49, 0,50, με πιθανότητες 1/101 την καθεμία.

Όργανο Γ: Το σφάλμα μέτρησης μπορεί να πάρει τις τιμές –0,01, 0, 0,01, με πιθανότητες 1/4,1/2,1/4 αντίστοιχα.

Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι και για τα τρία όργανα, το μέσο σφάλμα μέτρησης είναι μηδέν, ενώ η συμπεριφορά της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής είναι εντελώς διαφορετική. Κανείς δεν θα αγόραζε το όργανο A ή το όργανο B αν είχε τη δυνατότητα να αγοράσει το $Γ$!

Γίνεται επομένως φανερή η ανάγκη να εισαχθούν πέρα από τη μέση τιμή, και κάποια άλλα ποσοτικά μέτρα, τα οποία θα διαχωρίζουν περιπτώσεις σαν αυτές που εμφανίστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα. Μια τέτοια κατηγορία μέτρων είναι τα λεγόμενα ***μέτρα διασποράς***. Ένα μέτρο διασποράς θέλουμε να έχει τη δυνατότητα να εκτιμά τις δυνατές απομακρύνσεις (αποκλίσεις) των τιμών της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή της $\mu = E(X)$.

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $E(X) = \mu$. Η ποσότητα

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[(X-E(X))^2] \tag{10.9.7}$$

λέγεται ***διακύμανση*** ή ***διασπορά*** της τυχαίας μεταβλητής X.

Σύμφωνα με τον ορισμό της διακύμανσης, αν f είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και R_X είναι το σύνολο τιμών της, θα έχουμε

$$V(X) = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x) \geq 0 \tag{10.9.8}$$

Είναι φανερό ότι η μονάδα μέτρησης της διακύμανσης μιας τυχαίας μεταβλητής είναι το τετράγωνο της μονάδας μέτρησης της X. Έτσι αν η X μετριέται σε μέτρα, η $V(X)$ θα εκφράζεται σε τετραγωνικά μέτρα, ενώ αν η X μετριέται σε ώρες, η V(X) θα εκφράζεται σε τετραγωνικές ώρες! Για να αποφευχθεί το πρόβλημα αυτό, αρκετά συχνά χρησιμοποιείται ως μέτρο διασποράς η (θετική) τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης $\sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$.

Η τελευταία ονομάζεται ***τυπική απόκλιση*** της τυχαίας μεταβλητής και συμβολίζεται συνήθως με σ, ή, αν υπάρχει ανάγκη διάκρισης ανάμεσα σε διάφορες τυχαίες μεταβλητές, με σ_X. Κατ' αντιστοιχία, η διακύμανση της X θα συμβολίζεται με σ^2 ή σ_X^2.

Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι επόμενες ιδιότητες της μέσης τιμής και της διακύμανσης, οι οποίες παρατίθενται χωρίς απόδειξη (α, β είναι δύο οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί και X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές).

M1. $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$	Δ1. $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$
M2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	Δ1. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
M3. $[E(X)]^2 \leq E(X^2)$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.6.

Ο αριθμός των υπολογιστών (Η/Υ) που πουλάει ένα μικρό κατάστημα σε διάστημα 3 μηνών, περιγράφεται από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \frac{2x+3}{63}, \quad x = 0, 1, \ldots, 6.$$

α) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός Η/Υ που πουλάει το κατάστημα σε 3 μήνες, καθώς και η διακύμανση της X.

β) Για την κάλυψη των αναγκών του, το κατάστημα αγοράζει από τον προμηθευτή του στην αρχή του τριμήνου 6 Η/Υ προς 1.700€ τον έναν, με την εξής συμφωνία: αν στους 3 μήνες δεν πουληθούν κάποια κομμάτια, μπορούν να επιστραφούν στον κατασκευαστή, στην τιμή όμως των 1.000€. Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης ενός Η/Υ είναι 2.200€, ποιο θα είναι το αναμενόμενο κέρδος του εμπόρου σε 3 μήνες;

Λύση.

α) Σύμφωνα με τον τύπο (10.9.5) θα έχουμε

$$E(X) = \sum_{x=0}^{6} x f(x).$$

Στον πίνακα 10.9.5 δίνονται οι τιμές του $f(x)$, $x = 0,1, ..., 6$ καθώς και το άθροισμά τους. Επομενως $E(X) = 245/63 = 35/6 \cong 3{,}9$.

Η διακύμανση του X μπορεί να βρεθεί με χρήση του τύπου (βλ. ιδιότητα Δ2)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

όπου $E(X) = 35/9$ και [βλ. (10.9.6) για $g(x) = x^2$]

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{6} x^2 f(x)$$

Από την τρίτη στήλη του πίνακα 10.9.5, βρίσκουμε $E(X^2) = 1155/63$ οπότε

$$V(X) = \frac{1155}{63} - \left(\frac{35}{9}\right)^2 \cong 3{,}2.$$

Πίνακας 10.9.5

x	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$
0	3/63	0	0
1	5/63	5/63	5/63
2	7/63	14/63	28/63
3	9/63	27/63	81/63
4	11/63	44/63	176/63
5	13/63	65/63	325/63
6	15/63	90/63	540/63
Άθροισμα	1	245/63	1155/63

β) Αν συμβολίσουμε με Y το κέρδος του καταστήματος σε διάστημα 3 μηνών, είναι φανερό ότι το Y είναι συνάρτηση του αριθμού X του Η/Υ που θα πουλήσει, στο ίδιο διάστημα. Πιο συγκεκριμένα, από τους X υπολογιστές που πουλάει θα κερδίσει $(2200 - 1700)\,X = 500\,X$€ , ενώ από τους $6 - X$ υπολογιστές που μένουν απούλητοι θα χάσει $(1700 - 1000)(6 - X) = 700(6 - X)$€. ΄Ετσι, το τελικό κέρδος του καταστήματος θα είναι

$$Y = 500\,X - 700(6 - X) = 1200\,X - 4200$$

και το αναμενόμενο κέρδος του θα ισούται με

$$E(Y) = E(1200X - 4200) = 1200\,E(X) - 4200 = 1200 \cdot \frac{35}{9} - 4200 \cong 466{,}7 \text{ €}.$$

Μέχρι τώρα είδαμε τα «εργαλεία» με τα οποία μπορεί να περιγραφεί η συμπεριφορά μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής. Θα δούμε στη συνέχεια τα αντίστοιχα εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για συνεχεις τυχαίες μεταβλητές.

Σε αντίθεση με τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές, όταν έχουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X και ένα σημείο $x \in R_x$, η πιθανότητα $P(X = x)$ είναι μηδέν. Αυτό μπορεί κανείς να το αντιληφθεί διαισθητικά αφού, αν σκεφτεί ότι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης είναι όλα τα σημεία που περιέχονται σε διαστήματα πραγματικών αριθμών, οπότε ο παρονομαστής του τύπου (10.6.1) –αν μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας– θα γινόταν άπειρος.

Για την περιγραφή συνεχών τυχαίων μεταβλητών, αντί της συνάρτησης πιθανότητας που ορίζεται με τον τύπο (10.9.1), χρησιμοποιούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$, η οποία λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή πιο σύντομα ***συνάρτηση πυκνότητας*** και ορίζεται ως εξής:

Συνάρτηση πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, παίρνει μη αρνητικές τιμες, και όταν ολοκληρωθεί σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ δίνει ως αποτέλεσμα 1, δηλαδή

$$\Pi 1.\ f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

$$\Pi 2.\ \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Σημειώνουμε ότι, αν το σύνολο τιμών της X είναι το R_X, τότε θα ισχύει $f(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}$, οπότε οι συνθήκες Π1 και Π2 παίρνουν τη μορφή

$$\Pi'1.\ f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in R_X,$$

$$\Pi'2.\ \int_{R_X} f(x)dx = 1.$$

Οι τελευταίες είναι αντίστοιχες με τις ιδιότητες Ι1 και Ι2 της συνάρτησης πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, πολλές από τις σχέσεις που γνωρίσαμε για διακριτές τυχαίες μεταβλητές μεταφέρονται ανάλογα και στις συνεχείς αν αντικαταστήσουμε παντού το σύμβολο της άθροισης με το σύμβολο της ολοκλήρωσης.

Έτσι η σχέση (10.9.2) στην συνεχή περίπτωση παίρνει τη μορφή

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx. \tag{10.9.9}$$

Ορίζοντας τη συνάρτηση κατανομής της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής με τον τύπο (10.9.3) (δηλαδή όπως και στην διακριτή περίπτωση), ο τύπος υπολογισμού της, σε αναλογία με την (10.9.4), θα λάβει τη μορφή

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx,\ t \in \mathbb{R}. \tag{10.9.10}$$

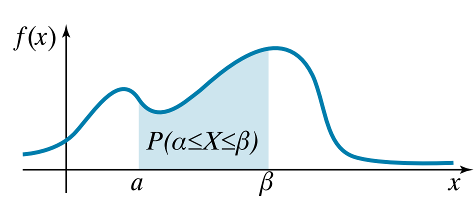
Εφαρμόζοντας τη σχέση (10.9.9) για $A = [\alpha, \beta]$ με $\alpha \leq \beta$, παίρνουμε

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(X \in A) = \int_A f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

η οποία σε συνδυασμό με την (10.9.10) δίνει

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha). \tag{10.9.11}$$

Κάνοντας χρήση και της γνωστής γεωμετρικής ερμηνείας του ορισμένου ολοκληρώματος, συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ εκφράζει το εμβαδό το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας της X, τον οριζόντιο άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (σχ. 10.9δ). Εφαρμόζοντας την (10.9.11) για $\beta = \alpha$, βρίσκουμε



Σχ. 10.9δ

Η πιθανότητα $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ ως εμβαδό

$$P(X=\alpha) = P(\alpha \le X \le \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

το οποίο συμφωνεί με ό,τι αναφέρθηκε στην εισαγωγή, πριν από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας, δηλαδή:

Για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X η πιθανότητα η X να πάρει οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή είναι ίση με μηδέν.

Άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ότι

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha). \quad (10.9.12)$$

Κατ' αναλογία με τους τύπους (10.9.5), (10.9.6), (10.9.8), στη συνεχή περίπτωση έχουμε τις εκφράσεις

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, \quad (10.9.13)$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx\,.$$

Σημειώνουμε ότι ο τύπος ορισμού της διακύμανσης (10.9.7) καθώς και οι ιδιότητες Μ1, Μ2, Μ3 της μέσης τιμής και Δ1, Δ2 της διακύμανσης εξακολουθούν να ισχύουν ως έχουν και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα, αναφέροντας ότι, παραγωγίζοντας τον τύπο (10.9.10) προκύπτει, με βάση τις σχέσεις (6.4.1), (6.4.2) ή την (6.4.3) του Κεφαλαίου 6,

$$f(x) = F'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (10.9.14)$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση κατανομής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.7.

Ο χρόνος X (σε 100-άδες εργατοώρες) που απαιτείται για την επισκευή μιας μεγάλης μηχανικής βλάβης ενός πλοίου είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

α) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος για την επισκευή;

β) Αν το κόστος επισκευής (σε 100-άδες ευρώ) εξαρτάται από τον χρόνο x που απαιτείται γι' αυτή και είναι ίσο με $40 + 30\sqrt{x}$, να βρεθεί το αναμενόμενο κόστος επισκευής.

Λύση.

α) Σύμφωνα με τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής έχουμε:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}=1$$

δηλαδή ο μέσος χρόνος επισκευής είναι 100 εργατοώρες.

β) Εφαρμόζοντας τον τύπο (10.9.13) για $g(x) = 40 + 30\sqrt{x}$ βρίσκουμε

$$E(40+30\sqrt{X})=\int_{-\infty}^{\infty}(40+30\sqrt{x})f(x)dx=\int_0^2(40+30\sqrt{x})\frac{1}{2}\,dx=$$

$$=20\int_0^2 dx+15\int_0^2\sqrt{x}dx=20[x]_0^2+15\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2=40+15\ \frac{2}{3}2\sqrt{2}=40+20\sqrt{2}\cong 68,3.$$

Επομένως, το αναμενόμενο κόστος επισκευής είναι 68.300€.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.9.8.

Ο χρόνος ζωής (σε 100-άδες ώρες) ενός GPS περιγράφεται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = 1-e^{-\theta t^2}, \quad t>0$$

όπου $\theta > 0$ είναι γνωστή παράμετρος. Η εταιρεία πουλάει τη συσκευή με κέρδος k ευρώ και δίνει στους πελάτες της εγγύηση α ωρών λειτουργίας. Σε περίπτωση που η συσκευή παρουσιάσει βλάβη πριν τη λήξη της εγγύησης, επισκευάζεται δωρεάν από την εταιρεία, η οποία και επιβαρύνεται με κόστος επισκευής k_0 ευρώ. Αν Y είναι το κέρδος της εταιρείας ανά συσκευή, να υπολογίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y και να δείξετε ότι το μέσο κέρδος δίνεται από τον τύπο

$$E(Y) = (k-k_0) + k_0 e^{-\theta t^2}.$$

Εφαρμογή: Έστω ότι $\theta = 1/10000$, $k = 120$ ευρώ, $k_0 = 20$€. Αν η εταιρεία θέλει να έχει μέσο κέρδος 105€ ανά συσκευή, ποιος είναι ο χρόνος εγγύησης που θα πρέπει να δίνει στους αγοραστές της συσκευής;

Λύση.

Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε, το κέρδος Y της εταιρείας θα δίνεται από τον τύπο

$$Y=\begin{cases}k, & \text{αν } X>\alpha\\ k-k_0, & \text{αν } X\le\alpha\end{cases}$$

δηλαδή το Y είναι μια (δίτιμη) τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_Y = \{k, k-k_0\}$.

Για τη συνάρτηση πιθανότητας

$$f_Y(y)=P(Y=y), \quad y\in R_Y=\{k,\ k-k_0\}$$

έχουμε

$$f_Y(k) = P(Y=k) = P(X>\alpha) = 1-P(X\le\alpha) = 1-F(\alpha) = e^{-\theta\alpha^2}$$

$$f_Y(k-k_0) = P(Y=k-k_0) = P(X\le\alpha) = F(\alpha) = 1-e^{-\theta\alpha^2}$$

οπότε

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y f_Y(y) = k f_Y(k) + (k - k_0)\, f_Y(k - k_0) =$$

$$= k e^{-\theta\alpha^2} + (k - k_0)\,(1 - e^{-\theta\alpha^2}) = (k - k_0) + k_0\, e^{-\theta\alpha^2}$$

Εφαρμογή: Αντικαθιστώντας τις τιμές

$$\theta = 1/10000, \quad k = 120, \quad k_0 = 20$$

βρίσκουμε

$$E(Y) = (120 - 20) + 20 e^{-\alpha^2/10000} = 100 + 20\, e^{-\alpha^2/10000}.$$

Για να ισχύει $E(Y) = 105$ θα πρέπει να έχουμε

$$100 + 20 e^{-\alpha^2/10000} = 105$$

απ’ όπου παίρνουμε

$$\alpha = \sqrt{10000 \ \ln 4} \cong 117{,}74 \text{ (100-άδες ώρες)}.$$

Ασκήσεις.

10.9.1. Ο αριθμός των σοβαρών ναυτικών ατυχημάτων εντός ενός έτους περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ c(10 - x), & x = 6, 7, 8, 9. \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να γίνουν σε ένα έτος: (i) ακριβώς 7 ατυχήματα; (ii) λιγότερα από 4 ατυχήματα; (iii) περισσότερα από 4 ατυχήματα; (iv) περισσότερα απο 5 ατυχήματα γνωρίζοντας ότι έχουν γίνει τουλάχιστον 3;

10.9.2. Ένας έμπορος αγοράζει στην αρχή του έτους 10 εξαρτήματα προς 20€ το ένα και τα πουλάει 30€. Ας υποθέσουμε ότι μετά από ένα έτος υπάρχει η δυνατότητα επιστροφής των απούλητων κομματιών προς 15€ το καθένα και ότι η κατανομή του αριθμού X των εξαρτημάτων που πουλιούνται (σε ένα έτος) δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{2x + 1}{9}, \quad x = 1,2, ..., 10.$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή X και το μέσο κέρδος του εμπόρου σε ένα έτος από τις πωλήσεις του συγκεκριμένου εξαρτήματος.

10.9.3. Δύο ομάδες, η α και η β, δίνουν μια σειρά αγώνων, η οποία τερματίζεται όταν κάποια ομάδα συμπληρώσει δύο νίκες. Αν η πιθανότητα να κερδίσει σε έναν αγώνα η ομάδα α είναι 0.7 και τα αποτελέσματα των αγώνων είναι ανεξάρτητα, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X που δηλώνει τον αριθμό των αγώνων που θα διεξαχθούν.

10.9.4. Η πιθανότητα ένας τεχνίτης να επισκευάσει σε μία μέρα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ηλεκτρικές συσκευές είναι αντίστοιχα 0,06, 0,21, 0,24, 0,18, 0,14, 0,10, 0,04, 0,02 και 0,01. Ποιος είναι ο μέσος (αναμενόμενος) αριθμός συσκευών που επισκευάζει ο τεχνίτης σε μία μέρα;

10.9.5. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_α, $\alpha > 3$, δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	1	2	3	α
$f(x)$	0.1	0.3	0.3	0.3

Να υπολογιστούν οι ποσότητες $E(X_\alpha)$, $V(X_\alpha)$ για $\alpha = 10, 50, 100$. Τι παρατηρείτε;

10.9.6. Σε κάθε μία από τις επόμενες περιπτώσεις να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c, έτσι ώστε οι αντίστοιχοι τύποι να ορίζουν συναρτήσεις πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.
α) $f(x) = ce^{-3x}$, $x > 0$
β) $f(x) = c/x^4$, $x > 3$

10.9.7. Ο χρόνος επισκευής X (σε ώρες) μιας βλάβης σε ένα μηχάνημα ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$F(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Αν το κόστος μη λειτουργίας του μηχανήματος για x ώρες είναι x^3, να βρεθεί το μέσο κόστος ανά βλάβη.

10.10 Οι κυριότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές.

Στις διάφορες εφαρμογές που σχετίζονται με τυχαίες μεταβλητές εμφανίζονται αρκετά συχνά ορισμένες συγκεκριμένες οικογένειες κατανομών. Η ομαδοποίηση και η εν συνεχεία ενιαία και συστηματική μελέτη των αντίστοιχων μοντέλων διευκολύνει σημαντικά, αφού έτσι θα έχουμε στη διάθεσή μας γενικά αποτελέσματα, τα οποία θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περιοριζόμενοι κάθε φορά στα δεδομένα του προβλήματος που μας ενδιαφέρει.

Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε τα γενικά μοντέλα των κυριότερων κατανομών, και θα παρουσιάσουμε χρήσιμες ιδιότητες για καθένα από αυτά. Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων που θα παρουσιαστούν, δεν θα δοθούν αναλυτικά (με εξαίρεση κάποια τα οποία προκύπτουν πολύ εύκολα), αφού ο κύριος στόχος αυτής της ενότητας είναι να δειχθεί πώς χρησιμοποιούνται τα γενικά μοντέλα στη λύση πραγματικών προβλημάτων.

10.10.1 Η διωνυμική κατανομή.

Οι ***δοκιμές Bernoulli***, των οποίων η ονομασία οφείλεται στον Ελβετό μαθηματικό James Bernoulli (1654-1705), οδηγούν στον ορισμό της απλούστερης ίσως διακριτής τυχαίας μεταβλητής. Με τον όρο *δοκιμή Bernoulli* αναφερόμαστε σε ένα πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα. Το ένα από τα δύο αποτελέσματα θα ονομάζεται επιτυχία (συμβολικά: ε), ενώ το άλλο αποτυχία (συμβολικά: α). Το πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος αποτελεί την κλασικότερη περίπτωση μιας δοκιμής Bernoulli. Αν εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι η ένδειξη «κεφαλή», θα βαπτίσουμε ως επιτυχία ε το αποτέλεσμα αυτό και θα ορίσουμε ως αποτυχία α την ένδειξη «γράμματα». Αντίστοιχα, το τυχαίο «πείραμα» της γέννησης ενός παιδιού αποτελεί επίσης δοκιμή Bernoulli με δύο δυνατά αποτελέσματα: αγόρι ή κορίτσι.

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας $q = 1 - p$ σε όλες τις δοκιμές. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p και συμβολίζεται με $b(\nu, p)$.

Είναι προφανές ότι η τιμή X μπορεί να πάρει τις τιμές $0,1,\ldots,\nu$. Αποδεικνύεται ότι:

- Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους ν και p δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, \nu. \tag{10.10.1}$$

- Η μέση τιμή και η διακύμανση της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους ν και p δίνεται από τους τύπους

$$\mu = E(X) = \nu p, \quad \sigma^2 = V(X) = \nu pq. \tag{10.10.2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10.1.

Σε ένα ερωτηματολόγιο υπάρχουν 10 ερωτήσεις και σε κάθε ερώτημα δίνονται 4 απαντήσεις, εκ των οποίων μόνο μία είναι σωστή. Ένας εξεταζόμενος που είναι απροετοίμαστος σημειώνει τυχαία μια απάντηση σε κάθε ερώτηση. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να απαντήσει σωστά:

α) Σε 6 ερωτήσεις.

β) Σε τουλάχιστον 5 ερωτήσεις.

Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των σωστών απαντήσεων;

Λύση.

Ας συμβολίσουμε με X τον αριθμό των σωστών απαντήσεων στις 10 ερωτήσεις. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή $b(10, 1/4)$, δηλαδή

$$P(X = x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}, \quad x = 0,1, \ldots, 10.$$

οπότε

α) $P(X = 6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cong 0{,}016.$

β) $P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \cong 0{,}078.$

Ο αναμενόμενος αριθμός των σωστών απαντήσεων είναι ίσος με

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10.2.

Ας υποθέσουμε ότι ένα πλοίο μπορεί να ολοκληρώσει το δρομολόγιό του αν και μόνο αν λειτουργούν τουλάχιστον οι μισές από τις μηχανές που διαθέτει. Αν η πιθανότητα να λειτουργεί μια μηχανή στη διάρκεια του ταξιδιού είναι p, για ποιες τιμές είναι προτιμότερο να ταξιδέψουμε με ένα πλοίο που διαθέτει $\nu = 4$ μηχανές από το να ταξιδέψουμε με πλοίο που έχει $\nu = 2$ μηχανές;

Λύση.

Ας συμβολίσουμε με X_ν, $\nu = 1,2,3\ldots$ τον αριθμό των μηχανών ενός πλοίου με ν κινητήρες, οι οποίες παραμένουν σε λειτουργία καθ' όλη τη διάρκεια του ταξιδιού. Η τυχαία μεταβλητή X_ν θα ακολουθεί την κατανομή $b(\nu,p)$ με συνάρτηση πιθανότητας την (10.10.2). Επομένως

$$P(X_4 = x) = \binom{4}{x} p^x q^{4-x}, x = 0,1,2 \quad \text{και} \quad P(X_2 = x) = \binom{2}{x} p^x q^{2-x}, x = 0,1,2$$

Η πιθανότητα να ολοκληρώσει το δρομολόγιό του ένα πλοίο με $\nu = 4$ κινητήρες είναι

$$P(X_4 \geq 2) = P(X_4 = 2) + P(X_4 = 3) + P(X_4 = 4) = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$$

ενώ για ένα πλοίο με $\nu = 2$ κινητήρες είναι

$$P(X_2 \geq 1) = P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2) = 2p(1-p) + p^2$$

Ζητάμε να ισχύει $P(X_2 \geq 1) \leq P(X_4 \geq 2)$, δηλαδή

$$2p(1-p) + p^2 \leq 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4,$$

το οποίο μετά από πράξεις οδηγεί στη συνθήκη

$$3p^3 - 8p^2 + 7p - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (p-1)^2(3p-2) \geq 0.$$

Άρα, για να συμβαίνει το ζητούμενο, θα πρέπει να ισχύει

$$p \geq \frac{2}{3} = 66{,}7\%.$$

10.10.2 Η γεωμετρική κατανομή.

Η κατανομή αυτή σχετίζεται επίσης με ακολουθίες (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli, το πλήθος των οποίων δεν είναι προκαθορισμένο.

Θεωρούμε μια ακολουθία (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1-p$) σταθερή για όλες τις δοκιμές. Έστω Χ ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Χ καλείται ***γεωμετρική κατανομή*** με παράμετρο p και συμβολίζεται με $G(p)$.

Η τυχαία μεταβλητή X μπορεί να πάρει τις τιμές 1,2,..., δηλαδή το σύνολο R_X δεν είναι πεπερασμένο. Για την συνάρτηση πιθανότητας, την μέση τιμή και την διακύμανση της X έχουμε τα επόμενα αποτελέσματα:

- Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής $G(p)$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, ..., \nu.$$

- Αν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2}. \qquad (10.10.3)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10.3.

´Ενα ζάρι ρίχνεται συνεχώς μέχρις ότου εμφανιστεί άσσος. Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτό (α) στην 10η ρίψη; (β) πριν από την 10η ρίψη;

Λύση.

Αν συμβολίσουμε με X τον αριθμό των ρίψεων μέχρις ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά άσσος, η τυχαία μεταβλητή X θα ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή $G(p)$ με $p = 1/6$, οπότε

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{6}, \quad x = 1,2,\ldots$$

α) $P(X = 10) = f(10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \cdot 1/6 \cong 3{,}2\%$.

β) $P(X < 10) = P(X \leq 9) = f(1) + f(2) + \ldots + f(9) = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^8\right] \cong 80{,}6\%$

10.10.3. Η ομοιόμορφη κατανομή.

Η κατανομή αυτή είναι η απλούστερη συνεχής κατανομή.

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

θα λέμε ότι ακολουθεί την ***ομοιόμορφη κατανομή*** στο διάστημα [α,β].

Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από τον τύπο

$$F(t) = \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

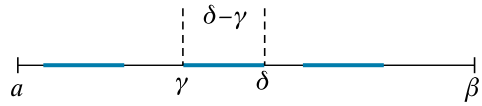
ενώ θα ισχύει επίσης ότι $F(t) = 0$ για $t < \alpha$ και $F(t) = 1$ για $t > \beta$. Για την μέση τιμή και την διακύμανση της X έχουμε τις εξής εκφράσεις:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

Είναι φανερό ότι αν θεωρήσουμε ένα διάστημα $[\gamma,\delta]$ εντός του αρχικού διαστήματος $[\alpha,\beta]$ (σχ. 10.10α), θα έχουμε

$$P[\gamma \leq X \leq \delta] = F(\delta) - F(\gamma) = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}.$$

Επομένως, η πιθανότητα να βρεθεί η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X εντός του διαστήματος $[\gamma, \delta]$ δεν εξαρτάται από το πού ακριβώς βρίσκεται αυτό, αλλά μόνο από το μήκος του. ´Ετσι η ομοιόμορφη κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί, μεταξύ άλλων για την μελέτη:



Σχ. 10.10α

α) Της χρονικής στιγμής άφιξης κάποιου (ατόμου, τρένου, πλοίου) όταν γνωρίζουμε τα όρια του χρόνου άφιξης, π.χ. μεταξύ 10:00 και 13:00.

β) Του αριθμού που επιλέγει κάποιος με τυχαίο τρόπο ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένα όρια, π.χ. στο διάστημα [12, 20].

γ) Των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης που οφείλονται στην περιορισμένη ακρίβεια των οργάνων μέτρησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10.4.

Ένας σπουδαστής που χρησιμοποιεί τον ηλεκτρικό σιδηρόδρομο για να μεταβεί στη σχολή του, παίρνει κάθε πρωί το τρένο που ξεκινάει από την αφετηρία στις 8:00 π.μ. Ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια του δρομολογίου μέχρι τον σταθμό αποβίβασης του σπουδαστή είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [58, 63] (οι αριθμοί αφορούν min). Αν ο σπουδαστής χρειάζεται επιπλέον 15 min για να περπατήσει από τον σταθμό αποβίβασης μέχρι την αίθουσα διδασκαλίας και η έναρξη της διδασκαλίας γίνεται στις 9:15 π.μ.:

α) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσει στην αίθουσα μετά την έναρξη του μαθήματος;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσει στην αίθουσα τουλάχιστον 1 min πριν από την έναρξη του μαθήματος;

Λύση.

Αν συμβολίσουμε με X τη διάρκεια του δρομολογίου του σιδηροδρόμου, η τυχαία μεταβλητή X θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [58, 63] με συνάρτηση κατανομής

$$f(t) = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}, \quad 58 \le \mathrm{t} < 63.$$

α) Ζητάμε την πιθανότητα $P(X > 60) = 1 - P(X \le 60) = 1 - F(60)$ και αφού

$$F(60) = \frac{60-58}{5} = \frac{2}{5}$$

η πιθανότητα να φτάσει ο σπουδαστής στην αίθουσα μετά την έναρξη του μαθήματος θα είναι

$$P(X > 60) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\%.$$

β) Έχουμε

$$P(X < 59) = F(59) = \frac{59-58}{5} = \frac{1}{5} = 20\%.$$

10.10.4 Η εκθετική κατανομή.

Η εκθετική κατανομή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την περιγραφή φαινομένων που σχετίζονται με χρόνους μεταξύ διαδοχικών συμβάντων όταν τα συμβάντα εμφανίζονται τυχαία στον χρόνο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα συνεχών τυχαίων μεταβλητών που η κατανομή τους περιγράφεται ικανοποιητικά από την εκθετική κατανομή είναι:

α) Ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο (ιδιαίτερα κατά τις ώρες αιχμής).

β) Ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών εκπομπών ηλεκτρονίων από έναν καθοδικό σωλήνα κενού.

γ) Ο χρόνος που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο διαδοχικών ατυχημάτων σε ένα συγκεκριμένο σημείο της εθνικής οδού κτλ.

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

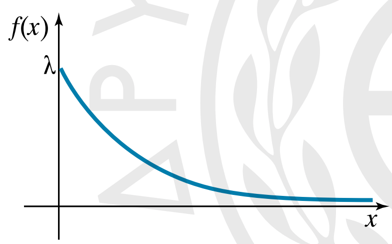
όπου $\lambda > 0$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται ***εκθετική κατανομή*** με παράμετρο λ.

Στο σχήμα 10.10β δίνεται η μορφή της συνάρτησης πυκνότητας της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής θα δίνεται από τον τύπο:

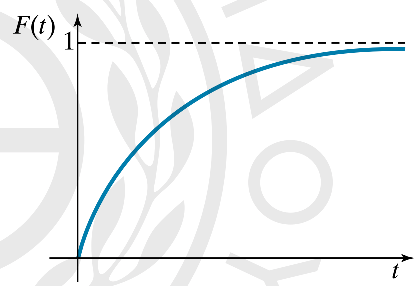
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \qquad (10.10.4)$$

και η μορφή της φαίνεται στο σχήμα 10.10γ. Η μέση τιμή και η διακύμανση της X θα δίνεται από τους τύπους:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$



Σχ. 10.10β
Συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής



Σχ. 10.10γ
Συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10.5.

Ο χρόνος ζωής X μιας συσκευής ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$.

α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο χρόνος ζωής της συσκευής:

i. Να υπερβεί τον μέσο χρόνο ζωής της.

ii. Να υπερβεί το διπλάσιο του μέσου χρόνου ζωής της.

β) Να βρεθεί ποιος είναι εκείνος ο χρόνος τον οποίο υπερβαίνουν το 95% των παραγόμενων συσκευών.

Λύση.

Αν συμβολίσουμε με F τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X, θα έχουμε

$$F(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

ενώ για τον μέσο χρόνο ζωής γνωρίζουμε ότι $E(X) = 1/\lambda$.

α) Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι ίσες με

i. $P(X > E(X)) = P\left(X > \dfrac{1}{\lambda}\right) = 1 - P\left(X \le \dfrac{1}{\lambda}\right) = 1 - F\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \cong 0{,}3679 \cong 37\%.$

ii. $P(X > 2E(X)) = P\left(X > \dfrac{2}{\lambda}\right) = 1 - F\left(\dfrac{2}{\lambda}\right) = e^{-2} \cong 0{,}1353 \cong 14\%.$

β) Εδώ ζητάμε έναν αριθμό $x_0 > 0$, για τον οποίο να ισχύει $P(X > x_0) = 0{,}95$ ή ισοδύναμα

$$1 - F(x_0) = 0{,}95$$

Αντικαθιστώντας την ποσότητα $F(x_0) = 1 - e^{-\lambda x_0}$ βρίσκουμε $e^{-\lambda x_0} = 0{,}95$, απ' όπου προκύπτει $-\lambda x_0 = \ln 0{,}95$ και τελικά

$$x_0 = -\frac{1}{\lambda}\ln 0{,}95 \cong \frac{0{,}05}{\lambda}.$$

Μια σημαντική ιδιότητα της εκθετικής κατανομής είναι η ιδιότητα του ***αμνήμονος*** ή η ιδιότητα της ***έλλειψης μνήμης***. Μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι έχει την αμνήμονα ιδιότητα αν, για κάθε $s, t > 0$, ισχύει

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) \qquad (10.10.5)$$

Αν η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει τον χρόνο ζωής κάποιας συσκευής, η προηγουμένη ισότητα δηλώνει ότι δεν υπάρχει φθορά της συσκευής με την πάροδο του χρόνου, αφού η πιθανότητα $P(X > t)$ μια καινούργια συσκευή να ζήσει περισσότερο από χρόνο t είναι η ίδια με την πιθανότητα $P(X > s + t|X > s)$ μια συσκευή που έχει χρησιμοποιηθεί ήδη για χρόνο s (χωρίς να χαλάσει), να ζήσει επιπλέον χρόνο t.

Η ιδιότητα του αμνήμονος, παρότι φαίνεται μη ρεαλιστική για την περιγραφή ολόκληρου του χρόνου ζωής μιας συσκευής, μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ισχύ για τη λεγόμενη ***χρήσιμη περίοδο*** της συσκευής. Ο όρος αυτής αναφέρεται σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα της ζωής της συσκευής, το οποίο ξεκινά από τη χρονική στιγμή που έχουν ξεπεραστεί οι βλάβες λόγω κατασκευαστικών ατελειών και εκτείνεται μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία εμφανίζονται τα πρώτα σημάδια κόπωσης της συσκευής. Το τμήμα της ζωής της συσκευής που προηγείται της χρήσιμης περιόδου λέγεται ***εμβρυϊκή περίοδος***, ενώ το τμήμα που έπεται αυτής λέγεται ***περίοδος φθοράς*** (σχ. 10.10δ). Οι ίδιοι συλλογισμοί ισχύουν για την περιγραφή χρόνων ζωής οργανισμών. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η εκθετική κατανομή παρέχει το κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή της χρήσιμης περιόδου συσκευών, έμβιων όντων κτλ.

Σχ. 10.10δ
Εμβρυϊκή περίοδος, χρήσιμη περίοδος και περίοδος φθοράς μιας συσκευής

10.10.5 Η κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή είναι η πιο σπουδαία κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, κυρίως λόγω της ευρείας χρησιμότητάς της σε ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών. Μερικοί από τους λόγους που εξηγούν την εξέχουσα θέση της είναι οι εξής:

α) Πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά (π.χ. ύψος, βάρος, βαθμολογία σε τεστ κτλ.) περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.

β) Τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις ακολουθούν (κατά προσέγγιση) την κανονική κατανομή. Για τον λόγο αυτό, η κανονική κατανομή αναφέρεται πολλές φορές και ως ***κατανομή σφαλμάτων***.

γ) Το άθροισμα και ο μέσος όρος ***μεγάλου αριθμού τυχαίων*** μεταβλητών ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή ανεξάρτητα από το ποια κατανομή ακολουθούν οι αρχικές μεταβλητές.

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X θα λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και σ^2 (όπου $\sigma > 0$), αν η συνάρτηση πυκνότητας f της X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (10.10.6)$$

Η κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 συμβολίζεται με $N(\mu, \sigma^2)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή x θα γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Η συνάρτηση κατανομής της $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, παρότι θα μπορούσε να εκφραστεί μέσω του τύπου (10.9.9) ως ολοκλήρωμα της $f(x)$, δεν μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή, πράγμα το οποίο δυσκολεύει την εύρεση πιθανοτήτων σχετικών με την X.

Ο υπολογισμός τέτοιων πιθανοτήτων διευκολύνεται σημαντικά από το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{X-\mu}{\lambda}$$

ακολουθεί την κανονική $N(0,1)$.

Η κατανομή $N(0,1)$, δηλαδή η κανονική κατανομή που αντιστοιχεί σε $\mu = 0, \sigma^2 = 1$, λέγεται ***τυποποιημένη κανονική*** κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας της $N(0,1)$ έχει την μορφή

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty. \qquad (10.10.7)$$

Και η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^{2/2}} dy$$

έχει πινακοποιηθεί και υπάρχει διαθέσιμη σε κάθε βιβλίο πιθανοτήτων ή στατιστικής.

Ο πίνακας Π1 του Παραρτήματος (στο τέλος του βιβλίου) δίνει τις τιμές της $\Phi(z) = P(Z \le z)$ για μη αρνητικές τιμές του z, ενώ για $z < 0$ μπορούν να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(Z \le z)$ με χρήση του τύπου

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \qquad (10.10.8)$$

Στον πίνακα 10.10.1 δίνεται ένα απόσπασμα από τον πίνακα Π1 του Παραρτήματος, το οποίο περιέχει τις τιμές $\Phi(z)$ για επιλεγμένες τιμές του z.

Πίνακας 10.10.1

Απόσπασμα από πίνακα τυποποιημένης κανονικής κατανομής

z	$\Phi(z)$
0,0	0,500
0,5	0,6915
1,0	0,8413
2,0	0,9332
2,5	0,9772
3,0	0,9987

Στο σχήμα 10.10ε φαίνεται η συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Η γραφική παράσταση της φ είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα, ενώ τα ποσοστά που έχουν σημειωθεί κάτω από τον οριζόντιο άξονα, αντιστοιχούν στις πιθανότητες [βλ. και (10.10.8)]:

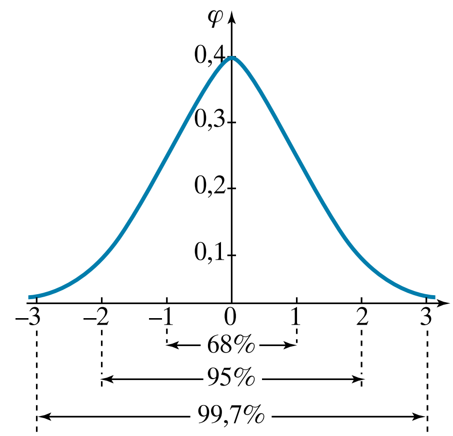
$$P(-k \le z \le k) = \Phi(k) - \Phi(-k) = \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) = 2\,\Phi(k) - 1$$

οι οποίες για κ=1,2,3 προκύπτουν από τον πίνακα 10.10α:

$$P(-1 \le z \le 1) = 2\,\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 68\%$$

$$P(-2 \le z \le 2) = 2\,\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 95\% \quad (10.10.9)$$

$$P(-3 \le z \le 3) = 2\,\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}9987 - 1 = 99{,}7\%.$$



Σχ. 10.10ε
Η συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια μια τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε ο υπολογισμός πιθανοτήτων της μορφής $P(\alpha \le X \le \beta)$ μπορεί να γίνει παρατηρώντας αρχικά ότι

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $Z = (X-\mu)/\sigma$ ακολουθεί την $N\,(0{,}1)$ με συνάρτηση κατανομής την $\Phi(z)$. Επομένως:

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right), \ \alpha \le \beta$$

$$P(X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right), \qquad P(X > \alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu-\alpha}{\sigma}\right)$$

(ο δεύτερος και ο τρίτος τύπος αποδεικνύονται ανάλογα). Για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της $N\,(\mu, \sigma^2)$, έχουμε:

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10.6.

Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο, ακολουθεί την κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες, ανακυκλώνονται. Πόση θα πρέπει να γίνει η διακύμανση του μήκους της εσωτερικής διαμέτρου των παραγόμενων σωλήνων (η μέση τιμή παραμένει σταθερή) έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0,06;

Λύση.

Έστω X η εσωτερική διάμετρος των παραγόμενων σωλήνων. Αφού $X \sim N(10, \sigma^2)$, η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα είναι ίση με

$$p = P(X > 10{,}1 \text{ ή } X < 9{,}9) = 1 - P(9{,}9 \leq X \leq 10{,}1)$$

$$= 1 - P\left(\frac{9{,}9-10}{\sigma} < \frac{X-10}{\sigma} < \frac{10{,}1-10}{\sigma}\right) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}1}{\sigma}\right)\right]$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right)\right)\right] = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right)\right]$$

και ζητάμε να ισχύει

$$2\left\{1 - \Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right)\right\} = 0{,}06 \text{ ή ισοδύναμα } \Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}97 = \Phi(1{,}88).$$

Επομένως $0{,}1/\sigma = 1{,}88$, απ' όπου βρίσκουμε $\sigma = 0{,}1/1{,}88 = 0{,}053$ και η διακύμανση της X θα είναι ίση με

$$V(X) = \sigma^2 = (0{,}053)^2 = 0{,}002089.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10.7.

Αν κάποιες παρατηρήσεις προέρχονται από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε το ποσοστό των παρατηρήσεων που απέχει από το μέσο μ λιγότερο από k τυπικές αποκλίσεις θα δίνεται από τον τύπο

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) = P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq k\right) = P(|Z|) \leq k) = P(-k \leq Z \leq k)$$

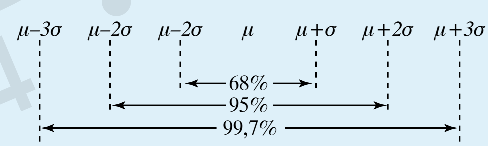
Χρησιμοποιώντας τις ισότητες (10.10.9) παίρνουμε

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(|X-\mu| \leq \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 68\%,$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(|X-\mu| \leq 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 95\%,$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 99{,}7\%$$

Επομένως, περίπου το 68% των τιμών ενός κανονικού πληθυσμού βρίσκονται σε απόσταση το πολύ μίας τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή μ, περίπου 95% σε απόσταση δύο τυπικών αποκλίσεων από το μ και περίπου 99,7% σε απόσταση τριών τυπικών αποκλίσεων από το μ (σχ. 10.10στ).



Σχ. 10.10στ

Τα προηγούμενα συμπεράσματα μας επιτρέπουν να δικαιολογήσουμε γιατί δεν υπάρχει στην πραγματικότητα πρόβλημα στο να χρησιμοποιούμε την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu > 3\sigma$ για τυχαίες μεταβλητές X, που από τη φύση τους παίρνουν μόνο θετικές τιμές. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $\mu - 3\sigma > 0$ και, σύμφωνα με το σχήμα 10.10στ, η πιθανότητα να παρατηρηθεί αρνητική τιμή για την X είναι πρακτικά αμελητέα (το πολύ 0,3%).

Ασκήσεις.

10.10.1 Ποσά παιδιά πρέπει να αποκτήσει μια οικογένεια ώστε να έχει ένα τουλάχιστον αγόρι και ένα τουλάχιστον κορίτσι με πιθανότητα μεγαλύτερη από 99%; Υποθέτουμε ότι σε κάθε γέννηση είναι εξίσου πιθανό να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.

10.10.2. Ένας παίκτης πληρώνει 100€ για να συμμετάσχει στο εξής παιχνίδι: Ρίχνει 3 ζάρια μία φορά και αν φέρει 1 άσσο κερδίζει 100€, αν φέρει 2 άσσους κερδίζει 200€, ενώ αν φέρει 3 άσσους κερδίζει 300€. Αν στις τρεις ρίψεις δεν εμφανιστεί άσσος, δεν κερδίζει τίποτε. Να βρεθεί το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη ανά παιχνίδι.

10.10.3. Πόσες φορές πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι έτσι ώστε η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη «5» ή η ένδειξη «6» τουλάχιστον μία φορά να είναι μεγαλύτερη από 90%;

10.10.4. Έστω ότι η πιθανότητα να δεχτεί μια ασφαλιστική εταιρεία μία τουλάχιστον αίτηση για αποζημίωση σε μία ημέρα (ενδεχόμενο A) είναι σταθερή και ίση με p. Έχει παρατηρηθεί ότι, σε 10 ημέρες, η πιθανότητα να συμβεί 5 φορές το ενδεχόμενο A είναι εξαπλάσια της πιθανότητας να συμβεί αυτό 4 φορές.
α) Να υπολογιστεί η τιμή του p.
β) Να βρεθεί η πιθανότητα σε 8 ημέρες να συμβεί το ενδεχόμενο A τουλάχιστον μία φορά.
γ) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ημερών εντός των οποίων το ενδεχόμενο A θα συμβεί τουλάχιστον μία φορά με πιθανότητα 90%;

10.10.5. Η πιθανότητα κανονικής λειτουργίας ενός συγκεκριμένου κινητήρα ενός πλοίου σε διάστημα μίας ώρας είναι 0,99.
α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να λειτουργήσει κανονικά ένας συγκεκριμένος κινητήρας αυτού του τύπου σε ένα ταξίδι διάρκειας το πολύ 4 ωρών.
β) Αν ένα πλοίο διαθέτει δύο τέτοιους κινητήρες και μπορεί να συνεχίσει το ταξίδι του και με έναν κινητήρα, να υπολογιστεί η πιθανότητα να φτάσει στον προορισμό του σε ταξίδι διάρκειας το πολύ 4 ωρών.
(Υπόδειξη: Ο αριθμός X των ωρών μέχρις ότου σταματήσει ο κινητήρας του πλοίου ακολουθεί την κατανομή $G(0{,}01)$. Στο ερώτημα (α) υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \geq 4)$).

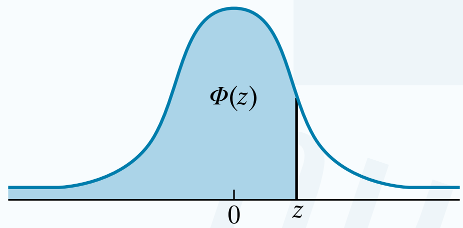
10.10.6. Ο χρόνος επισκευής Χ (σε ώρες) μιας βλάβης σε ένα μηχάνημα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1]. Αν το κόστος μη λειτουργίας του μηχανήματος για x ώρες είναι $5\sqrt{x}$, να βρεθεί το μέσο κόστος ανά βλάβη.

10.10.7. Κάθε 30 λεπτά αναχωρεί πλοίο από το λιμάνι του Πειραιά για την Σαλαμίνα. Κάποιος που δεν γνωρίζει την ώρα που αναχωρεί το πλοίο, έρχεται στο λιμάνι για να ταξιδέψει με αυτό. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος που θα χρειαστεί να περιμένει έως ότου αναχωρήσει το πλοίο.

10.10.8 Η διάρκεια λειτουργίας ενός προϊόντος τεχνολογίας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 10 (χιλιάδες ώρες). Το εργοστάσιο το οποίο κατασκευάζει τα προϊόντα επιθυμεί να δώσει στους πελάτες εγγύηση για ορισμένο αριθμό ωρών. Αν το προϊόν υποστεί βλάβη νωρίτερα, επιστρέφεται στο εργοστάσιο για αντικατάσταση. Ποιος αριθμός ωρών πρέπει να δοθεί ως εγγύηση έτσι ώστε το πολύ 1% των προϊόντων να επιστρέφονται στο εργοστάσιο;

10.10.9. Ο βαθμός πτυχίου X των σπουδαστών ενός τμήματος της Σχολής Μηχανικών ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 7$ και $\sigma^2 = 1$.
α) Ποιο είναι το ποσοστό αριστούχων ($X \geq 8{,}5$) σπουδαστών του τμήματος; Ποιο είναι το ποσοστό των σπουδαστών που παίρνει πτυχίο με «λίαν καλώς» ($6{,}5 \leq X < 8{,}5$);
β) Ποιο είναι το ποσοστό των σπουδαστών των οποίων ο βαθμός πτυχίου κυμαίνεται στο διάστημα $[7 - k, 7 + k]$ για $k = 1,2,3$;
γ) Τι βαθμολογία πρέπει να έχει ένας σπουδαστής για να βρίσκεται στο 10% των καλύτερων σπουδαστών του τμήματος;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$$

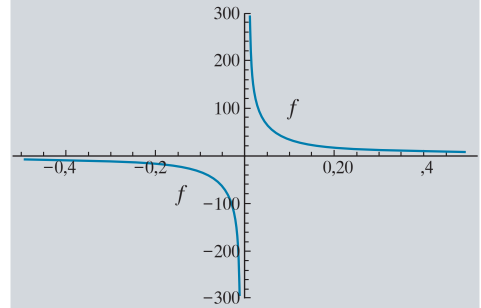
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

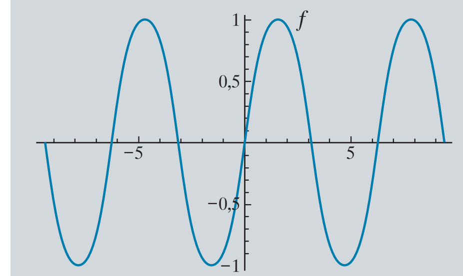
Πίνακας Π.1

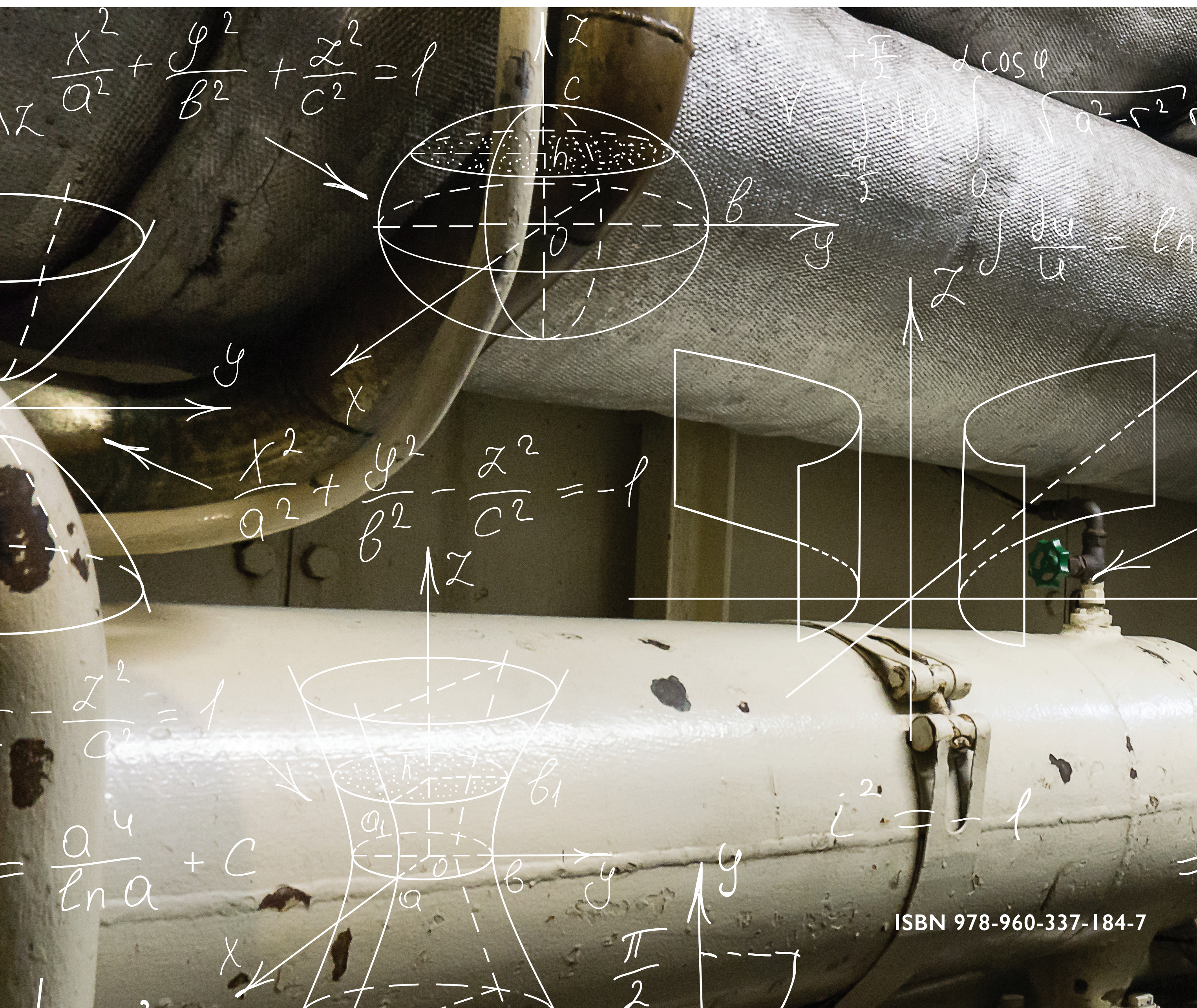
Συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
,0	,5000	,5040	,5080	5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
,1	,5398	,5438	,5478	5517	,5557	5596	5636	5675	,5714	,5753
,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	5987	,6026	,6064	,6103	,6141
,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	7794	,7823	,7852
,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
,9	,8159	8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9575	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9556	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986
3,0	,9987	,9987	,9987	,9988	,9988	,9989	,9989	,9989	,9990	,9990
3,1	,9990	,9991	,9991	,9991	,9992	,9992	,9992	,9992	,9993	,9993
3,2	,9993	,9993	,9994	,9994	,9994	,9994	,9994	,9995	,9995	,9995
3,3	,9995	,9995	,9995	,9996,	,9996	9996	,9996	,9996	,9996	,9997
3,4	,9997	,9997	,9997	,9997	,9997	,9997	9997	,9997	9,997	,9998
3,5	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998

Το βιβλίο *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά* απευθύνεται στους σπουδαστές των Σχολών Μηχανικών των Ακαδημιών Εμπορικού Ναυτικού (ΑΕΝ). Καλύπτει πολλά διαφορετικά αντικείμενα των μαθηματικών, τα οποία βρίσκουν εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα που είτε παρουσιάζουν ενδιαφέρον από μόνα τους είτε αποτελούν αντικείμενο μελέτης για τους Μηχανικούς στο πλαίσιο άλλων μαθημάτων των ΑΕΝ. Πέραν των κλασικών μεθόδων των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (θεωρία πινάκων, μιγαδικοί αριθμοί, συναρτήσεις, παράγωγοι και ολοκληρώματα, διαφορικές εξισώσεις), περιέχονται και δύο κεφάλαια με τα οποία γίνεται μια εισαγωγή στις περιοχές της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων.







ISBN 978-960-337-184-7