

Συγγραφείς

- Π. Μ. Βλάμος : Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε. Μ. Πολυτεχνείου.
- Α. Ν. Δούναβης : Μαθηματικός, Καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.
- Δ. Ε. Ζέρβας : Μαθηματικός, Καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Γλωσσική Επιμέλεια

Α. Α. Ταλάρη : Φιλολόγος, Καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Εποπτεία από μέρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π.Ι.)

Δημ. Καραγεώργος : Μαθηματικός, Λέκτορας Παν/μίου Αθηνών.
Τ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Κριτές

- Γ. Μ. Δημάκος : Μαθηματικός, Λέκτορας Παν/μίου Αθηνών.
- Α. Γ. Φελούρης : Επίκ. Καθηγητής Μαθηματικών Ε. Μ. Πολυτεχνείου.

Ηλεκτρονική Στοιχειοθεσία – Επιμέλεια: Δημήτρης Σταθόπουλος.

Πρόλογος

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται στον Β' Κύκλο των Τεχνικών Επαγγελματικών Εκπαιδευτηρίων (Τ.Ε.Ε.) και έχει μία συγκεκριμένη φιλοσοφία. Η φιλοσοφία αυτή επιδιώκει την άμεση κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που παρουσιάζονται και την ικανότητα χρήσης τους σε πραγματικά προβλήματα.

Ο στόχος της ανάπτυξης της θεωρίας, στην οποία αποφεύγονται οι αποδείξεις, είναι η κατανόηση των εννοιών μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα. Μετά την ολοκλήρωση κάθε θεματικής ενότητας δίνονται λυμένες εφαρμογές που αποτελούν συνδυαστικό κείμενο με τις ασκήσεις που ακολουθούν.

Οι ασκήσεις έχουν χωρισθεί ως προς τη δυσκολία και τη διαβάθμισή τους στις εξής κατηγορίες:

- (α) **Ασκήσεις Εμπέδωσης**, οι οποίες αποτελούν άμεση εξάσκηση στις μαθηματικές έννοιες που έχουν παρουσιασθεί στην αντίστοιχη θεματική ενότητα. Στόχος τους είναι να βοηθήσουν τους μαθητές στην εμπέδωση των θεωρητικών εννοιών. Είναι απλές και αποφεύγεται η επανάληψη.
- (β) **Σύνθετες Ασκήσεις**, οι οποίες αποτελούνται από θέματα που απέχουν μόνο κατά ένα βήμα στη δυσκολία σε σχέση με τις ασκήσεις εμπέδωσης. Οδηγούν τους μαθητές σε μεγαλύτερη εμπάθυνση των εννοιών και σε ένα απλό επίπεδο κριτικής ή συνδυαστικής σκέψης.
- (γ) **Πρακτικές Εφαρμογές**, οι οποίες συντελούν στον ιδιαίτερο χαρακτήρα του βιβλίου. Επιδιώχθηκε το μεγαλύτερο ποσοστό των προβλημάτων αυτών, να είναι πραγματικά μαθηματικά μοντέλα και όχι ειδικά κατασκευασμένα προβλήματα. Πρέπει να τονισθεί ότι δεν αποτελεί προϋπόθεση η γνώση των εννοιών (συχνά από άλλες επιστήμες) που παρουσιάζονται στις πρακτικές εφαρμογές. Για το λόγο αυτό είναι μεγαλύτερα σε έκταση και απαιτούν από τους μαθητές προσεκτική μελέτη και ικανότητα προσαρμογής στη «γλώσσα» των πρακτικών αυτών εφαρμογών, καθώς έτσι θα τα συναντήσουν και στην πραγματικότητα. Ωστόσο, οι μαθηματικές απαιτήσεις στις πρακτικές εφαρμογές συχνά είναι μικρότερες και από αυτές των ασκήσεων εμπέδωσης.
- (δ) **Γενικές Ασκήσεις**, οι οποίες παρουσιάζουν το μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας και προτείνεται είτε η παρουσίασή τους από τον κα-

θηγητή, είτε η ανάθεση στους μαθητές με υποδείξεις ή ως συνθετική εργασία.

Κάθε κεφάλαιο έχει εμπλουτισθεί με εισαγωγικό σημείωμα, ανακεφαλαίωση καθώς και ερωτήσεις κατανόησης. Τα δύο τελευταία συντελούν σημαντικά στην κατανόηση και συγκρότηση των γνώσεων από τον μαθητή. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων, ευρετήριο όρων και ενδεικτική βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη.

Ελπίζουμε το παρόν βιβλίο να εκπληρώσει κατά το δυνατόν καλύτερα τους διδακτικούς του στόχους και να αποτελέσει μία απλή γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και των προβλημάτων από την πραγματικότητα.

Ευχαριστούμε ιδιαίτερα τους κριτές και τον επιστημονικό υπεύθυνο για τη δημιουργική συμβολή τους στην τελική μορφή του βιβλίου καθώς και τον Δημήτρη Σταθόπουλο για την τεχνική υποστήριξη που παρείχε για την παρουσίαση του βιβλίου.

Τέλος, θεωρούμε ευπρόσδεκτα οποιαδήποτε σχόλια και διορθώσεις που θα συντελέσουν στη συνεχή βελτίωση και αναβάθμιση του βιβλίου. Οι παρατηρήσεις και υποδείξεις αυτές παρακαλούμε να αποστέλλονται προς το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 15310, Αγ. Παρασκευή.

Οι συγγραφείς:

Π. Μ. Βλάμος
Α. Ν. Δούναβης
Δ. Ε. Ζέρβας

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

| | |
|---|----|
| Εισαγωγή..... | 1 |
| 1.1. Η έννοια του Πίνακα | 1 |
| 1.2. Ισότητα Πινάκων | 3 |
| 1.3. Είδη Πινάκων | 4 |
| Εφαρμογές | 5 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης | 9 |
| Σύνθετες Ασκήσεις | 9 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 10 |
| 1.4. Πρόσθεση Πινάκων..... | 13 |
| Εφαρμογές | 15 |
| 1.5. Πολλαπλασιασμός αριθμού με Πίνακα..... | 18 |
| Εφαρμογές | 19 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης | 23 |
| Σύνθετες Ασκήσεις | 24 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 24 |
| 1.6. Πολλαπλασιασμός Πινάκων | 26 |
| Εφαρμογές | 31 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης | 35 |
| Σύνθετες Ασκήσεις | 36 |
| 1.7. Γραμμικά Συστήματα..... | 37 |
| Εφαρμογές | 45 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης | 50 |
| Σύνθετες Ασκήσεις | 51 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 52 |
| Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου | 52 |
| Ανακεφαλαίωση..... | 55 |
| Ερωτήσεις Κατανόησης..... | 57 |

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

| | |
|---------------------------------------|----|
| Εισαγωγή..... | 59 |
| 2.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί..... | 59 |
| 2.2. Συχνότητα Παρατηρήσεων | 62 |
| 2.3. Ομαδοποίηση Παρατηρήσεων | 72 |
| 2.4. Παράμετροι Θέσης..... | 76 |
| 2.5. Παράμετροι Διασποράς..... | 82 |

| | |
|---|-----|
| 2.6. Συντελεστής Μεταβλητότητας (CV)..... | 88 |
| Εφαρμογές..... | 89 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 97 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 99 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 100 |
| <i>Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου</i> | 102 |
| <i>Ανακεφαλαίωση</i> | 103 |
| <i>Ερωτήσεις Κατανόησης</i> | 105 |

Κεφάλαιο 3: 'Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

| | |
|--|-----|
| Εισαγωγή..... | 107 |
| 3.1. Η έννοια του Ορίου..... | 107 |
| 3.2. Ιδιότητες του Ορίου Συνάρτησης..... | 109 |
| 3.3. Πλευρικά 'Όρια Συνάρτησης..... | 110 |
| 3.4. Μη πεπερασμένο 'Όριο Συνάρτησης – Απροσδιόριστες Μορφές..... | 112 |
| 3.5. Κατακόρυφη Ασύμπτωτη Γραφ. Παράστασης Συνάρτησης.. | 116 |
| Εφαρμογές..... | 118 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 126 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 130 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 131 |
| 3.6. Η έννοια της Συνεχούς Συνάρτησης..... | 133 |
| 3.7. Συνέχεια Συνάρτησης σε Διάστημα..... | 138 |
| 3.8. Συνέχεια Βασικών συναρτήσεων..... | 138 |
| 3.9. Ιδιότητες Συνεχών συναρτήσεων..... | 140 |
| Εφαρμογές..... | 141 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 149 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 150 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 151 |
| 3.10. 'Όριο Συνάρτησης στο 'Απειρο..... | 152 |
| 3.11. Οριζόντια Ασύμπτωτη..... | 156 |
| Εφαρμογές..... | 158 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 163 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 164 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 165 |
| <i>Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου</i> | 165 |
| <i>Ανακεφαλαίωση</i> | 168 |
| <i>Ερωτήσεις Κατανόησης</i> | 172 |

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

| | |
|--|-----|
| Εισαγωγή..... | 173 |
| 4.1. Η έννοια της Παραγώγου ως Ρυθμός Μεταβολής..... | 173 |
| Εφαρμογές..... | 178 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 183 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 184 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 184 |
| 4.2. Παράγωγος Συνάρτηση..... | 186 |
| 4.3. Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων..... | 187 |
| 4.4. Κανόνες Παραγωγίσισης..... | 189 |
| 4.5. Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης..... | 189 |
| Εφαρμογές..... | 190 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 194 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 195 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 196 |
| 4.6. Παράγουσα Συνάρτηση..... | 197 |
| 4.7. Διαφορικές Εξισώσεις..... | 200 |
| Εφαρμογές..... | 202 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 207 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 208 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 208 |
| 4.8. Μονοτονία Συνάρτησης..... | 210 |
| 4.9. Ακρότατα Συνάρτησης..... | 211 |
| Εφαρμογές..... | 214 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 219 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 220 |
| Πρακτικές Εφαρμογές..... | 221 |
| Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου..... | 222 |
| Ανακεφαλαίωση..... | 226 |
| Ερωτήσεις Κατανόησης..... | 228 |

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

| | |
|---|-----|
| Εισαγωγή..... | 231 |
| 5.1. Η έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος..... | 231 |
| 5.2. Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος..... | 235 |
| Εφαρμογές..... | 236 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης..... | 239 |
| Σύνθετες Ασκήσεις..... | 240 |
| 5.3. Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος..... | 241 |
| Εφαρμογές..... | 243 |

| | |
|---|-----|
| Ασκήσεις Εμπέδωσης | 247 |
| Σύνθετες Ασκήσεις | 248 |
| Πρακτικές εφαρμογές | 249 |
| 5.4. Υπολογισμός Εμβαδού Επιπέδων Χωρίων..... | 250 |
| Εφαρμογές | 253 |
| Ασκήσεις Εμπέδωσης | 256 |
| Σύνθετες Ασκήσεις | 257 |
| Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου | 258 |
| Ανακεφαλαίωση..... | 261 |
| Ερωτήσεις Κατανόησης..... | 263 |

Υποδείξεις για τη λύση των Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

| | |
|------------------------|-----|
| § 1.1 – 1.3 | 265 |
| § 1.4 – 1.5 | 266 |
| § 1.6..... | 266 |
| § 1.7..... | 267 |
| Γενικές Ασκήσεις | 268 |

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

| | |
|------------------------|-----|
| § 2.1 – 2.6 | 270 |
| Γενικές Ασκήσεις | 270 |

Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

| | |
|------------------------|-----|
| § 3.1 – 3.5 | 271 |
| § 3.6 – 3.9 | 272 |
| § 3.10 – 3.11..... | 273 |
| Γενικές Ασκήσεις | 273 |

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

| | |
|------------------------|-----|
| § 4.1 | 275 |
| § 4.2 – 4.5 | 275 |
| § 4.6 – 4.7 | 276 |
| § 4.8 – 4.9 | 277 |
| Γενικές Ασκήσεις | 277 |

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

| | |
|------------------------|-----|
| § 5.1 – 5.2 | 279 |
| § 5.3..... | 279 |
| § 5.4..... | 280 |
| Γενικές Ασκήσεις | 280 |

| | |
|--------------------|-----|
| Βιβλιογραφία | 283 |
|--------------------|-----|

| | |
|---------------------|-----|
| Ευρετήριο Όρων..... | 285 |
|---------------------|-----|