2 *Περιγραφική Στατιστική*

§ 2.1 – 2.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Οι εισαγωγές – εξαγωγές της χώρας από το 1974 έως το 1993 δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

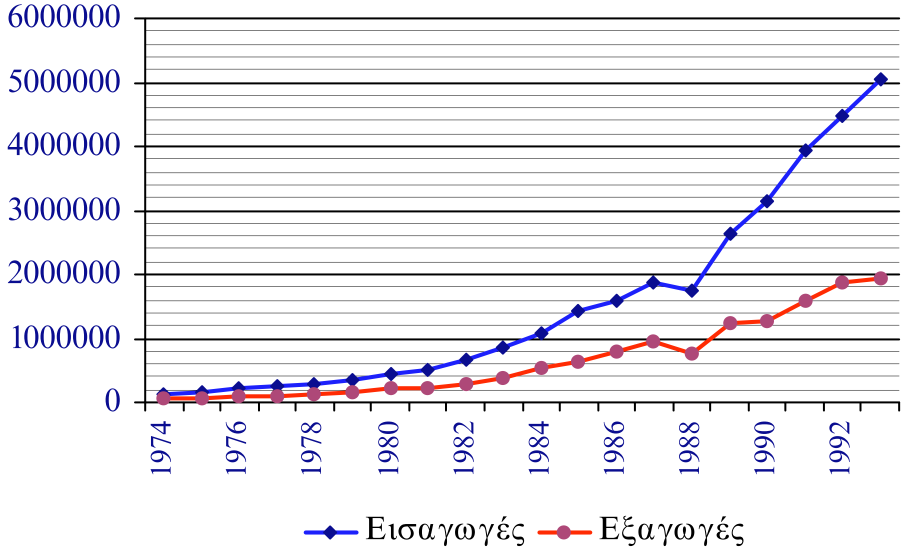
Εισαγωγές και Εξαγωγές 1974 – 1993

'Ετος	Εισαγωγές	Εξαγωγές	'Ετος	Εισαγωγές	Εξαγωγές
1974	132181	60980	1984	1083880	542676
1975	172041	74441	1985	1412797	629085
1976	223159	93811	1986	1582298	789995
1977	252150	101330	1987	1867354	955070
1978	287729	123727	1988	1756998	776434
1979	356820	144238	1989	2625714	1230942
1980	452881	221108	1990	3137524	1267507
1981	493764	237928	1991	3921522	1579967
1982	665920	286281	1992	4484059	1880763
1983	848295	392652	1993	5050531	1933422

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

Να γίνει η γραφική παράσταση αυτών με πολυγωνικές γραμμές στην ίδια γραφική παράσταση.

Λύση



'Ασκηση 2

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Λύση

$$\overline{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 x_1}{\nu} + \frac{\nu_2 x_2}{\nu} + \cdots + \frac{\nu_\kappa x_\kappa}{\nu} =$$

$$\frac{\nu_1}{\nu} x_1 + \frac{\nu_2}{\nu} x_2 + \cdots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} x_\kappa = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots f_\kappa x_\kappa$$

'Ασκηση 3

Το μέσο ύψος των 80 κατοίκων ενός νησιού είναι 172 cm. Στις καλοκαιρινές διακοπές φθάνουν στο νησί 60 τουρίστες με μέσο ύψος 187 cm. Ποιό είναι το μέσο ύψος των ατόμων που βρίσκονται στο νησί στις καλοκαιρινές διακοπές;

Λύση

Για τα ύψη $t_1, t_2, \ldots, t_{80}$ των 80 κατοίκων έχουμε ότι:

$$172 = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_{80}}{80}$$

'Αρα $t_1 + t_2 + \cdots + t_{80} = 80 \cdot 172$.

Για τα ύψη $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{60}$ των 60 τουριστών έχουμε ότι:

$$187 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{60}}{60}$$

'Αρα $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{60} = 60 \cdot 187$.

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_{80} + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{60}}{80 + 60} = \frac{80 \cdot 172 + 60 \cdot 187}{140} =$$

$$\frac{24980}{140} = 178{,}42 \text{ cm}$$

'Ασκηση 4

Σε ένα εργοστάσιο με 100 εργαζόμενους η μέση τιμή των αμοιβών είναι 185000. Το 45% των εργαζομένων στο εργοστάσιο πληρώνονται με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής και οι μισθοί τους έχουν μέση τιμή 165000. Αν οι αποδοχές των εργαζομένων με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής αυξηθούν στη μέση τιμή, ποιά θα είναι η νέα μέση τιμή;

Λύση

Πριν γίνει η αύξηση οι αποδοχές είναι $t_1, t_2, \ldots, t_{45}, t_{46}, t_{47}, \ldots, t_{100}$ και θα έχουμε $185000 = \dfrac{t_1 + t_2 + \cdots + t_{45} + t_{46} + t_{47} + \cdots + t_{100}}{100}$. 'Αρα:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{45} + t_{46} + t_{47} + \cdots + t_{100} = 185000 \cdot 100 \quad \text{ή}$$

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{45} + t_{46} + t_{47} + \cdots + t_{100} = 18500000 \quad (1)$$

Επιπλέον $165000 = \dfrac{t_1 + t_2 + \cdots + t_{45}}{45}$. 'Αρα:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{45} = 165000 \cdot 45 = 7425000$$

Από την (1) έχουμε $7425000 + t_{46} + t_{47} + \cdots + t_{100} = 18500000$, άρα $t_{46} + t_{47} + \cdots + t_{100} = 11075000$.

Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\frac{\overbrace{185000 + 185000 + \cdots + 185000}^{45 \text{ τιμές}} + t_{46} + t_{47} + \cdots + t_{100}}{100} =$$

$$\frac{45 \cdot 185000 + 1107500}{100} = \frac{19400000}{100} = 194000$$

'Ασκηση 5

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τη σχετική συχνότητα μιας μεταβλητής με μέση τιμή 2,1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να βρεθεί η διάμεσος.

x_i	1	2	3	4
$f_i\%$	26		23	

Λύση

Αν $f_2\%$, $f_4\%$ οι δύο άγνωστες σχετικές συχνότητες, θα έχουμε ότι $26 + f_2\% + 23 + f_4\% = 100$. 'Αρα $f_2\% + f_4\% = 51$ ή $f_2 + f_4 = 0{,}51$.

Επιπλέον, η μέση τιμή ισούται με:

$$\frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4}{\nu} = \frac{\nu_1}{\nu} x_1 + \frac{\nu_2}{\nu} x_2 + \frac{\nu_3}{\nu} x_3 + \frac{\nu_4}{\nu} x_4 =$$

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 = 2{,}1$$

'Αρα:

$$0{,}26 \cdot 1 + 2f_2 + 0{,}23 \cdot 3 + 4f_4 = 2{,}1 \quad ή \quad 2f_2 + 4f_4 = 1{,}6 \quad ή \quad f_2 + 2f_4 = 0{,}8$$

και $f_2 + f_4 = 0{,}51$. 'Αρα:

$$f_2 + 2f_4 - f_2 - f_4 = 0{,}8 - 0{,}51 \quad ή \quad f_4 = 0{,}29 \quad και \quad f_2 = 0{,}22$$

Επομένως, ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων είναι:

x_i	f_i	$f_i\%$	**Σχετική αθροιστική**
1	0,26	26%	26%
2	0,22	22%	48%
3	0,23	23%	71%
4	0,29	29%	100%
Αθροίσματα	1	100%	

Η διάμεσος αντιστοιχεί στην τιμή 50% που ανήκει στο διάστημα (48,71], δηλαδή η διάμεσος είναι 3.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές x, x + 2ω, x + 3ω, x + 4ω, x + 5ω με ω > 0. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση.

Λύση

Η μέση τιμή είναι:

$$\overline{x} = \frac{x + (x+\omega) + (x+2\omega) + (x+3\omega) + (x+4\omega)}{5} = \frac{5x + 10\omega}{5} = x + 2\omega$$

οπότε η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{(x-x-2\omega)^2 + (x-x-\omega)^2 + (x-x)^2 + (x-x+\omega)^2 + (x-x+2\omega)^2}{5} =$$

$$\frac{4\omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + 4\omega^2}{5} = \frac{6}{5}\omega^2$$

'Αρα $s = \omega\sqrt{\frac{6}{5}}$.

'Ασκηση 2

Μετράμε το βάρος των κατοίκων ενός χωριού και έχουμε μέση τιμή 72Kg και τυπική απόκλιση 5Kg. Η μέτρηση του βάρους έγινε με μια ζυγαριά που όπως αποδείχθηκε μετά τις μετρήσεις έδειχνε 2Kg λιγότερο σε κάθε μέτρηση. Ποιά είναι η πραγματική μέση τιμή και ποιά η πραγματική τυπική απόκλιση;

Λύση

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ και έχουν μέση τιμή 72, τότε έχουμε $72 = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu}$ και η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\overline{x} = \frac{t_1 + 2 + t_2 + 2 + \cdots + t_\nu + 2}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu + 2\nu}{\nu} =$$

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu} + 2 = 72 + 2 = 74 \text{ Kg}$$

Η διακύμανση για τις τιμές $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι:

$$\frac{(t_1 - 72)^2 + (t_2 - 72)^2 + \cdots + (t_\nu - 72)^2}{\nu} = 4$$

και η νέα διακύμανση θα είναι:

$$\frac{(t_1 + 2 - 74)^2 + (t_2 + 2 - 74)^2 + \cdots + (t_\nu + 2 - 74)^2}{\nu} =$$

$$\frac{(t_1 - 72)^2 + (t_2 - 72)^2 + \cdots + (t_\nu - 72)^2}{\nu} = 4$$

δηλαδή η διακύμανση δε μεταβάλλεται.

'Ασκηση 3

Οι απουσίες των μαθητών μιας τάξης Λυκείου κατά τον μήνα Σεπτέμβριο είναι 0, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 7, 2, 1, 0, 5, 6, 7, 4, 5, 2, 1, 0, 6, 7, 8, 9, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 9. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν περισσότερες από 6 απουσίες.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα των σχετικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων:

x_i	ν_i	**Αθροιστική**	f_i	**Σχετική αθροιστική**	**Σχετική αθροιστική %**
0	6	6	0,2000	0,2000	20,0000
1	5	11	0,1667	0,3667	36,6667
2	7	18	0,2333	0,6000	60,0000
3	1	19	0,0333	0,6333	63,3333
4	1	20	0,0333	0,6667	66,6667
5	2	22	0,0667	0,7333	73,3333
6	2	24	0,0667	0,8000	80,0000
7	3	27	0,1000	0,9000	90,0000
8	2	29	0,0667	0,9667	96,6667
9	1	30	0,0333	1,0000	100,0000
Αθροίσματα	30				

Απουσίες λιγότερες ή ίσες του 6 έχει το 80% και αυτό προκύπτει από την σχετική αθροιστική συχνότητα του 6. Οι υπόλοιποι, δηλαδή το 20% θα έχουν περισσότερες απουσίες από 6.

'Ασκηση 4

Οι απουσίες δύο Λυκείων Α, Β δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Απουσίες	**Α′ Λύκειο**	**Β′ Λύκειο**
[0, 10)	20	25
[10, 20)	16	11
[20, 30)	25	17
[30, 40)	26	22
[40, 50)	7	8
[50, 60)	8	20
[60, 80)	9	13
[80, 100)	12	4
[100, 125)	3	4

(α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των δύο κατανομών.
(β) Να σχεδιαστεί το πολύγωνο συχνοτήτων σε κοινό διάγραμμα.
(γ) Από τα Λύκεια Α, Β ποιό είναι πιο ομοιογενές ως προς τις απουσίες;

Λύση

x	ν_i	K_i **(Κέντρο)**	$\nu_i K_i$	$\nu_i(\bar{x} - K_i)^2$
[0, 10)	20	5	100	20637,76
[10, 20)	16	15	240	7830,845
[20, 30)	25	25	625	3674,188
[30, 40)	26	35	910	117,1871
[40, 50)	7	45	315	434,3282
[50, 60)	8	55	440	2556,692
[60, 80)	9	70	630	9728,065
[80, 100)	12	90	1080	33551,71
[100, 125)	3	112,5	337,5	17045,07
Αθροίσματα	126		4677,5	95575,84

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η μέση τιμή είναι:

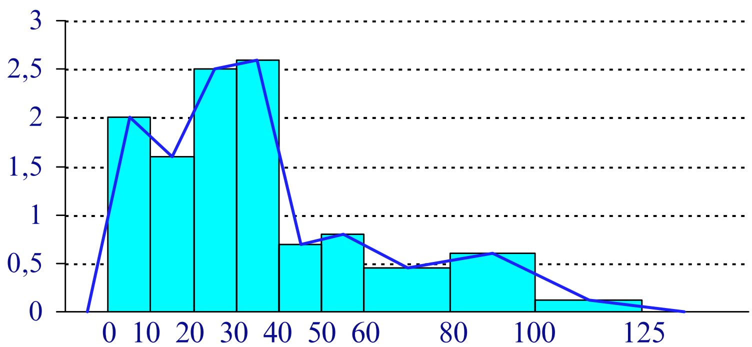
$$\bar{x} = \frac{4677,5}{126} = 37,12$$

ενώ η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{95575,84}{126} = 758,54$$

οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{758,54} = 27,54$.

Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα με ύψη ιστών τα πηλίκα των συχνοτήτων προς το πλάτος κάθε διαστήματος:



Για το Λύκειο Β′ έχουμε:

Χ	ν_i	K_i (Κέντρο)	$\nu_i K_i$	$\nu_i(\overline{x} - K_i)^2$
[0, 10)	25	5	125	25797,2
[10, 20)	11	15	165	5383,706
[20, 30)	17	25	425	2498,448
[30, 40)	22	35	770	99,15832
[40, 50)	9	45	405	558,4219
[50, 60)	20	55	1100	6391,731
[60, 80)	13	70	910	14051,65
[80, 100)	4	90	360	11183,9
[100, 125)	5	112,5	562,5	28408,45
Αθροίσματα	126		4822,5	94372,67

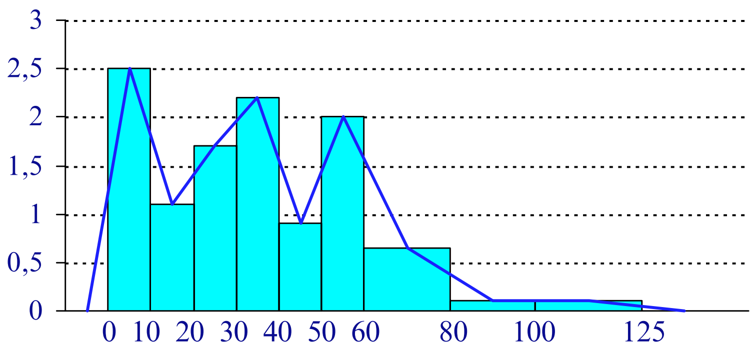
Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η μέση τιμή είναι:

$$\overline{x} = \frac{4822,5}{126} = 38,27$$

ενώ η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{94372,67}{126} = 748,99$$

οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{748,99} = 27,37$.



Ο συντελεστής μεταβλητότητας για τις απουσίες στο Α′ Λύκειο είναι:

$$CV = \frac{27,54}{37,12} 100\% = 74,19\%$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας για τις απουσίες στο Β′ Λύκειο είναι:

$$CV = \frac{27,37}{38,27} 100\% = 71,51\%$$

Δηλαδή και τα δύο Λύκεια εμφανίζουν μεγάλο βαθμό ανομοιογένειας, αλλά πιο ομοιογενές είναι το Β′ Λύκειο.

'Ασκηση 5

Οι 8 από τους 20 εργαζόμενους σε ένα εργοστάσιο έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 175000 και οι υπόλοιποι 215000. Ποιός είναι ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των εργαζόμενων;

Λύση

Αν t_1, t_2, …, t_8, t_9, t_{10}, …, t_{20} είναι οι μισθοί των 20 εργαζομένων από τους οποίους οι t_1, t_2, …, t_8 έχουν μέση τιμή 175000 και οι t_9, t_{10}, …, t_{20} 215000, τότε:

$$175000 = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_8}{8}, \text{ άρα } t_1 + t_2 + \cdots + t_8 = 8 \cdot 175000 = 1400000$$

$$215000 = \frac{t_9 + t_{10} + \cdots + t_{20}}{12}, \text{ άρα } t_9 + t_{10} + \cdots + t_{20} = 12 \cdot 215000 = 2580000$$

Η μέση τιμή όλων των εργαζομένων είναι:

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_8 + t_9 + t_{10} + \cdots + t_{20}}{20} = \frac{1400000 + 2580000}{20} =$$

$$\frac{3980000}{20} = 199000$$

'Ασκηση 6

Η ευστοχία μιας ομάδας Μπάσκετ στις ελεύθερες βολές είναι 70%. Οι 5 βασικοί παίκτες έχουν ευστοχία 75% και οι 3 επιθετικοί αναπληρωματικοί 60%. Πόση ευστοχία έχουν οι 2 αμυντικοί αναπληρωματικοί;

Λύση

Αν t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 είναι η ευστοχία των βασικών παικτών, t_6, t_7, t_8 των επιθετικών αναπληρωματικών και t_9, t_{10} των αμυντικών αναπληρωματικών, τότε:

$$70 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}}{10} \qquad (1)$$

$$75 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5}, \text{ άρα } t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 5 \cdot 75 = 375 \qquad (2)$$

$$60 = \frac{t_6 + t_7 + t_8}{3}, \text{ άρα } t_6 + t_7 + t_8 = 3 \cdot 60 = 180 \qquad (3)$$

Η (1) από τις (2), (3) γίνεται:

$$\frac{375 + 180 + t_9 + t_{10}}{10} = 70 \quad ή \quad t_9 + t_{10} = 700 - 375 - 180 \quad ή$$

$$t_9 + t_{10} = 145 \quad ή \quad \frac{t_9 + t_{10}}{2} = 72{,}5$$

'Αρα η μέση τιμή της ευστοχίας των δύο αμυντικών αναπληρωματικών είναι 72,5%.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων – αθροιστικών – σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της παρακάτω κατανομής:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΠΑΘΟΝΤΩΝ (οδηγοί – επιβάτες – πεζοί)
κατά το 1998 έως 50 ετών

Ηλικία	**'Ατομα**
Μέχρι 5 ετών	354
6 - 12 ετών	704
13 - 17 ετών	2.124
18 - 20 ετών	3.739
21 - 24 ετών	5.043
25 - 29 ετών	4.783
30 - 34 ετών	3.824
35 - 44 ετών	4.654
45 - 50 ετών	2.259

Πηγή: Υπουργείο Δημόσιας Τάξης

Κατόπιν να κατασκευαστεί το διάγραμμα συχνοτήτων.

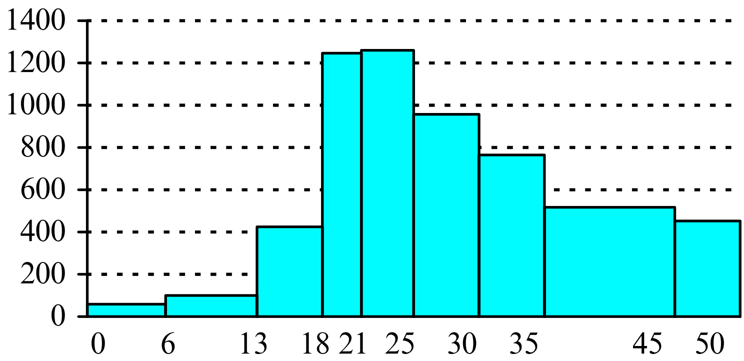
Λύση

Ο πίνακας των συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων – αθροιστικών – σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων είναι:

Ηλικία	**'Ατομα**	**f_i**	**Αθροιστική συχνότητα**	**Σχετική α-θροιστική**
[0, 6)	354	0,0129	354	0,0129
[6, 13)	704	0,0256	1058	0,0385
[13,18)	2124	0,0773	3182	0,1158
[18,21)	3739	0,1360	6921	0,2518
[21,25)	5043	0,1835	11964	0,4353
[25,30)	4783	0,1740	16747	0,6093
[30,35)	3824	0,1391	20571	0,7485
[35,44)	4654	0,1693	25225	0,9178
[45,50)	2259	0,0822	27484	1,0000
Αθροίσματα	27484	1,0000		

Για τη κατασκευή του διαγράμματος συχνοτήτων κατασκευάζουμε μια στήλη με το πλάτος κάθε κλάσης και μια άλλη με το πηλίκο της συχνότητας προς το πλάτος της κλάσης:

Ηλικία	**'Ατομα**	**Πλάτος κλάσης**	$\frac{\textbf{'Ατομα}}{\textbf{Πλάτος}}$
[0, 6)	354	6	59
[6, 13)	704	7	100,5714
[13,18)	2124	5	424,8
[18,21)	3739	3	1246,333
[21,25)	5043	4	1260,75
[25,30)	4783	5	956,6
[30,35)	3824	5	764,8
[35,45)	4654	9	517,1111
[45,50)	2259	5	451,8



'Ασκηση 2

Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει την κατανομή των μηχανοκίνητων αλιευτικών σκαφών ως προς την ιπποδύναμη τους:

Μηχανοκίνητα αλιευτικά σκάφη, κατά κλιμάκια ιπποδυνάμεως μέχρι 200 HP κατά το έτος 1991

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	ν_i
[0, 10)	10
[10, 20)	52
[20, 30)	1777
[30, 40)	1317
[40, 50)	856
[50, 60)	863
[60, 70)	434
[70, 80)	517
[80, 90)	486
[90, 100)	452
[100, 150)	1243
[150, 200)	410

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

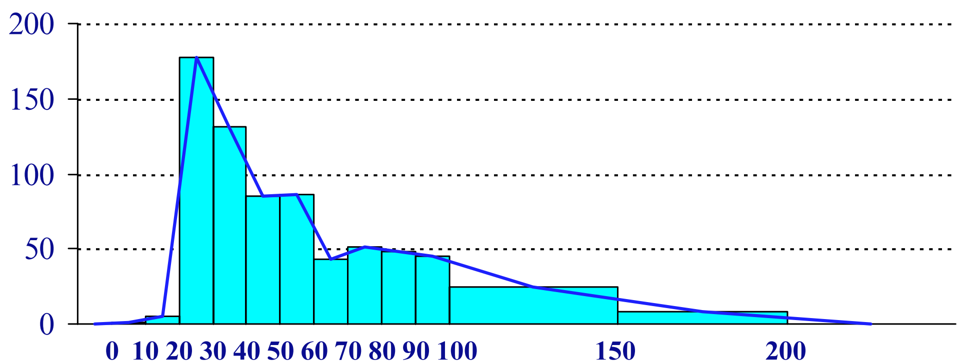
(α) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
(β) Να βρεθεί η μέση τιμή.
(γ) Να βρεθεί η διακύμανση και τυπική απόκλιση.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	ν_i	**Πλάτος κλάσης** c_i	$\frac{\nu_i}{c_i}$
[0, 10)	10	10	1
[10, 20)	52	10	5,2
[20, 30)	1777	10	177,7
[30, 40)	1317	10	131,7
[40, 50)	856	10	85,6
[50, 60)	863	10	86,3
[60, 70)	434	10	43,4
[70, 80)	517	10	51,7
[80, 90)	486	10	48,6
[90, 100)	452	10	45,2
[100, 150)	1243	50	24,86
[150, 200)	410	50	8,2

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι το ακόλουθο:



Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	ν_i	**Κέντρο κλάσης**	$\nu_i x_i$	$\nu_i(\overline{x} - x_i)^2$
[0, 10)	10	5	50	37235,08
[10, 20)	52	15	780	135361
[20, 30)	1777	25	44425	2990133
[30, 40)	1317	35	46095	1267316
[40, 50)	856	45	38520	378235,3
[50, 60)	863	55	47465	104813,6
[60, 70)	434	65	28210	452,0239
[70, 80)	517	75	38775	41685,95
[80, 90)	486	85	41310	175066,6
[90, 100)	452	95	42940	379593,4
[100, 150)	1243	125	155375	4323869
[150, 200)	410	175	71750	4869373
Αθροίσματα	8417		555695	14703133

Η μέση τιμή ισούται με $\frac{555695}{8417} = 66{,}02$.

Η διακύμανση με $\frac{14703133}{8417} = 1746{,}84$.

Η τυπική απόκλιση με $\sqrt{1746{,}84} = 41{,}8$.

'Ασκηση 3

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει την κατανομή των κατοίκων της Ελλάδας ως προς την ηλικία κατά το έτος 1992:

Κατανομή ηλικίας κατοίκων Ελλάδας κατά το 1992

Ηλικία	**'Ατομα**	**Ηλικία**	**'Ατομα**	**Ηλικία**	**'Ατομα**
[0, 5)	529501	[30, 35)	731310	[60, 65)	634154
[5, 10)	620540	[35, 40)	698124	[65, 70)	511206
[10, 15)	741210	[40, 45)	666503	[70, 75)	358530
[15, 20)	768765	[45, 50)	624437	[75, 80)	285435
[20, 25)	788764	[50, 55)	609587	[80, 85)	203942
[25, 30)	759301	[55, 60)	659035	85 και άνω	131539

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος (α) Να γίνει γραφική παράσταση των συχνοτήτων.

(β) Να γίνει γραφική παράσταση των σχετικών συχνοτήτων.

(γ) Να βρεθεί τι ποσοστό του πληθυσμού είχε ηλικία μικρότερη ή ίση των 23 ετών.

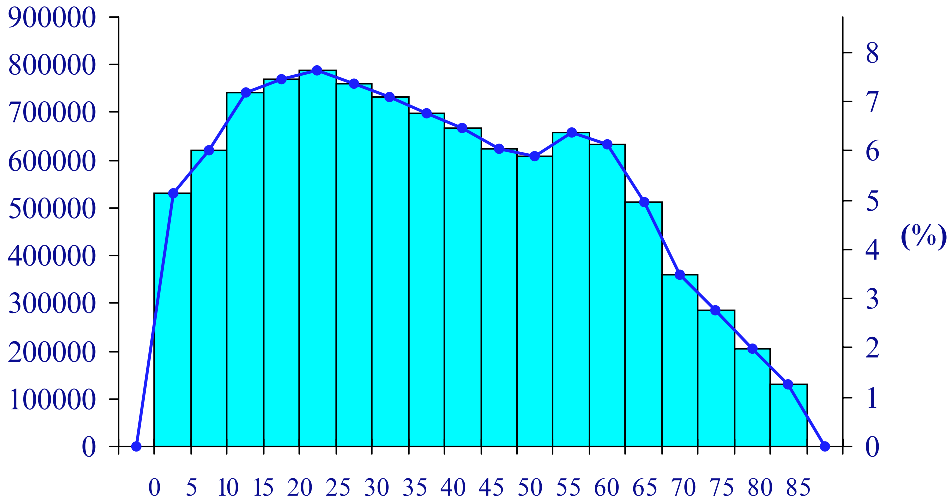
(δ) Να βρεθεί τι ποσοστό του πληθυσμού είχε ηλικία μεγαλύτερη ή ίση των 50 ετών.

Λύση

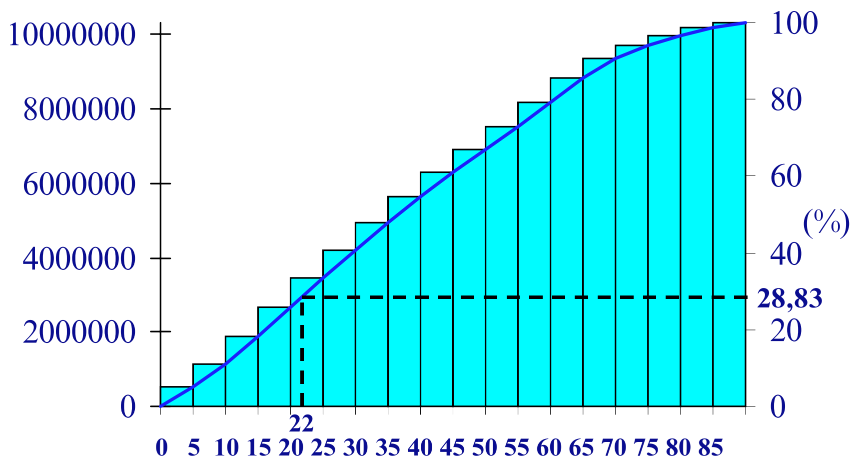
Κατασκευάζουμε τον πίνακα αθροιστικών, σχετικών, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων:

Ηλικία	**Συχνότητα ν_i**	**Σχετική συχνότητα**	**Αθροιστική συχνότητα**	**Σχετική αθροιστική**
[0, 5)	529501	0,0513	529501	0,0513
[5, 10)	620540	0,0601	1150041	0,1114
[10, 15)	741210	0,0718	1891251	0,1832
[15, 20)	768765	0,0745	2660016	0,2577
[20, 25)	788764	0,0764	3448780	0,3341
[25, 30)	759301	0,0736	4208081	0,4077
[30, 35)	731310	0,0709	4939391	0,4785
[35, 40)	698124	0,0676	5637515	0,5462
[40, 45)	666503	0,0646	6304018	0,6107
[45, 50)	624437	0,0605	6928455	0,6712
[50, 55)	609587	0,0591	7538042	0,7303
[55, 60)	659035	0,0638	8197077	0,7941
[60, 65)	634154	0,0614	8831231	0,8556
[65, 70)	511206	0,0495	9342437	0,9051
[70, 75)	358530	0,0347	9700967	0,9398
[75, 80)	285435	0,0277	9986402	0,9675
[80, 85)	203942	0,0198	10190344	0,9873
85 και άνω	131539	0,0127	10321883	1,0000
'Αθροισμα	10321883			

Οπότε τα διαγράμματα των συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων είναι:



Το διάγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων είναι:



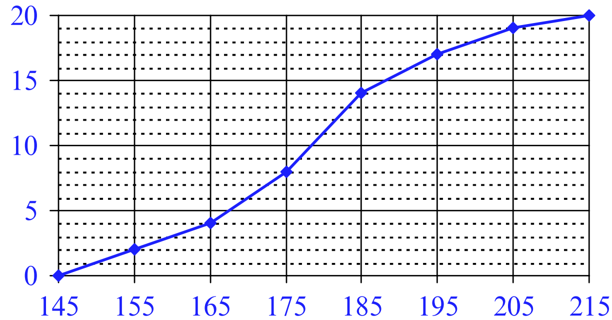
Για τον υπολογισμό του ποσοστού των ατόμων με ηλικία κάτω των 22 ετών από τη γραφική παράσταση των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων βάζουμε το 22 τιμή στον x′x και βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή της τεταγμένης που είναι 28,83%.

Από τον πίνακα των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων έχουμε ότι η σχετική αθροιστική συχνότητα του διαστήματος [45, 50) είναι 67,12%, δηλαδή το 67,12% έχει ηλικία μικρότερη του 50, επομένως το υπόλοιπο 100% – 67,12% = 32,88% έχει ηλικία μεγαλύτερη ή ίση του 50.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Σε σχολείο πραγματοποιήθηκε έρευνα για το ύψος των μαθητών. Κατόπιν όμως χάθηκαν τα στοιχεία μετρήσεων και βρέθηκε μόνο το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



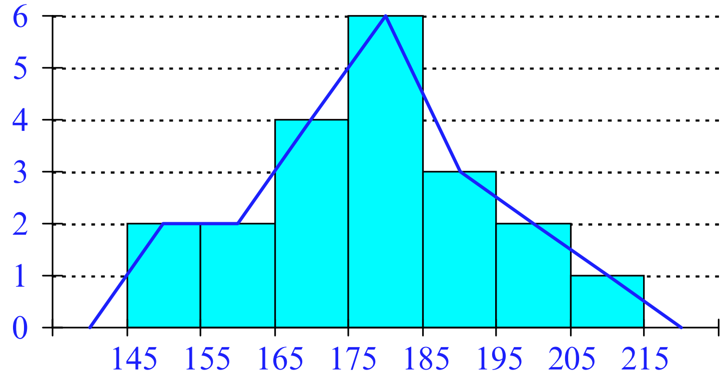
(α) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.
(β) Να βρείτε τη μέση τιμή.
(γ) Να βρείτε τη διάμεσο.
(δ) Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

Λύση

Αν αφαιρέσουμε δύο διαδοχικές τιμές αθροιστικών συχνοτήτων βρίσκουμε τη συχνότητα που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη αθροιστική συχνότητα. Δηλαδή $f_7 - f_6 = (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_7) - (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_6) = \nu_7$, άρα $\nu_7 = f_7 - f_6 = 20 - 19 = 1$. Γενικότερα έχουμε $f_{\kappa+1} - f_\kappa = \nu_\kappa$.

x	ν_i	**Αθροιστική συχνότητα**	K_i	$\nu_i K_i$	$\nu_i(\overline{x} - K_i)^2$
[145,155)	2	2	150	300	1568
[155,165)	2	4	160	320	648
[165,175)	4	8	170	680	256
[175,185)	6	14	180	1080	24
[185,195)	3	17	190	570	432
[195,205)	2	19	200	400	968
[205,215)	1	20	210	210	1024
	20			3560	4920

(α) Το μέγεθος του δείγματος είναι ν = 20. Οι κορυφές του πολυγώνου είναι τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων που ορίζονται από το ιστόγραμμα συχνοτήτων. 'Αρα θα έχουμε το εξής πολύγωνο συχνοτήτων:



(β) Η μέση τιμή $\overline{x}$ ισούται με το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των στοιχείων της στήλης $\nu_i K_i$ και παρανομαστή το πλήθος των στοιχείων, άρα $\overline{x} = \frac{3560}{20} = 178$ cm.

(γ) Η διάμεσος υπολογίζεται από το διάγραμμα της αθροιστικής συχνότητας. Με τιμή στον y′y 10 βρίσκουμε τη τιμή του άξονα των x που είναι 179 cm.

(δ) Η διακύμανση s^2 ισούται με το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των στοιχείων της στήλης $\nu_i(\overline{x} - K_i)^2$ και παρανομαστή το πλήθος των στοιχείων, άρα $s^2 = \frac{4920}{25} = 246$, οπότε τυπική απόκλιση $s = \sqrt{246} = 15{,}68$.

'Ασκηση 2

Αν οι τιμές μιας μεταβλητής αυξηθούν κατά L να δειχθεί ότι η μέση τιμή αυξάνεται κατά L ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει σταθερή.

Λύση

Αν η μεταβλητή παρουσιάζει $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ τιμές με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ όπου $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa = \nu$, τότε έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu}$$

Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\overline{y} = \frac{\nu_1(x_1 + L) + \nu_2(x_2 + L) + \cdots + \nu_\kappa(x_\kappa + L)}{\nu} =$$

$$\frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa + \nu_1 L + \nu_2 L + \cdots + \nu_\kappa L}{\nu} =$$

$$\frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa + (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa)L}{\nu} =$$

$$\frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa + \nu L}{\nu} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu} + \frac{\nu L}{\nu} = \overline{x} + L$$

'Αρα $\overline{y} = \overline{x} + L$. Για τη διακύμανση έχουμε:

$$s^2 = \frac{\nu_1(\overline{x} - x_1)^2 + \nu_2(\overline{x} - x_2)^2 + \cdots + \nu_\kappa(\overline{x} - x_\kappa)^2}{\nu}$$

Για τη νέα διακύμανση έχουμε:

$$\sigma^2 = \frac{\nu_1(\overline{y} - x_1 - L)^2 + \nu_2(\overline{y} - x_2 - L)^2 + \cdots + \nu_\kappa(\overline{y} - x_\kappa - L)^2}{\nu} =$$

$$\frac{\nu_1(\overline{x} + L - x_1 - L)^2 + \nu_2(\overline{x} + L - x_2 - L)^2 + \cdots + \nu_\kappa(\overline{x} + L - x_\kappa - L)^2}{\nu} =$$

$$\frac{\nu_1(\overline{x} - x_1)^2 + \nu_2(\overline{x} - x_2)^2 + \cdots + \nu_\kappa(\overline{x} - x_\kappa)^2}{\nu} = s^2$$

'Αρα $\sigma^2 = s^2$ και αφού σ, s μη αρνητικοί έχουμε $\sigma = s$.

'Ασκηση 3

(α) Ποιά είναι η μέση τιμή των γωνιών ενός τριγώνου;
(β) Ποιά είναι η μέση τιμή των γωνιών ενός ν-γωνου;

Λύση

(α) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°, άρα η μέση τιμή θα είναι $\frac{180°}{3} = 60°$.

(β) Το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου είναι $(\nu - 2)180°$, άρα η μέση τιμή είναι $\frac{(\nu - 2)180°}{\nu}$.

Για το τετράπλευρο η μέση τιμή θα είναι $\frac{(4-2)180°}{4} = 90°$.

Για το πεντάπλευρο η μέση τιμή θα είναι $\frac{(5-2)180°}{5} = 108°$.

'Ασκηση 4

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων μεταβλητής x πολλαπλασιασθούν με έναν αριθμό $\alpha > 0$, πώς μεταβάλλεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση;

Λύση

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ τότε έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu}$$

Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\overline{y} = \frac{\alpha t_1 + \alpha t_2 + \cdots + \alpha t_\nu}{\nu} = \alpha \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu} = \alpha\overline{x}$$

δηλαδή και η μέση τιμή πολλαπλασιάζεται με α.

Η διακύμανση για τις τιμές $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι:

$$s^2 = \frac{(\overline{x} - t_1)^2 + (\overline{x} - t_2)^2 + \cdots + (\overline{x} - t_\nu)^2}{\nu}$$

και η νέα διακύμανση θα είναι:

$$\sigma^2 = \frac{(\alpha\overline{x} - \alpha t_1)^2 + (\alpha\overline{x} - \alpha t_2)^2 + \cdots + (\alpha\overline{x} - \alpha t_\nu)^2}{\nu} =$$

$$\frac{\alpha^2(\overline{x} - t_1)^2 + \alpha^2(\overline{x} - t_2)^2 + \cdots + \alpha^2(\overline{x} - t_\nu)^2}{\nu} =$$

$$\alpha^2 \frac{(\overline{x} - t_1)^2 + (\overline{x} - t_2)^2 + \cdots + (\overline{x} - t_\nu)^2}{\nu} = \alpha^2 s^2$$

'Αρα $\sigma^2 = \alpha^2 s^2$ και επομένως $\sigma = \alpha s$.

Δηλαδή και η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται με α.

'Ασκηση 5

Οι οκτώ εργαζόμενοι μιας επιχείρησης έχουν μέσο μισθό 125000 και ο μέσος μισθός των υπολοίπων είναι 145000. Αν ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση είναι 137000, να βρεθεί πόσοι εργάζονται στην επιχείρηση.

Λύση

Αν το πλήθος των υπαλλήλων είναι ν και $t_1, t_2, \ldots, t_8, t_9, t_{10}, \ldots, t_\nu$ είναι οι μισθοί τους τότε $\dfrac{t_1 + t_2 + \cdots + t_8 + t_9 + t_{10} + \cdots + t_\nu}{\nu} = 137000$, άρα:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_8 + t_9 + t_{10} + \cdots + t_\nu = 137000\nu \qquad (1)$$

Οι οκτώ των υπάλληλοι με μισθούς t_1, t_2, …, t_8 έχουν μέσο μισθό 125000, άρα $\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_8}{8} = 125000$, οπότε:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_8 = 1000000 \qquad (2)$$

Οι υπόλοιποι $\nu - 8$ υπάλληλοι έχουν μέσο μισθό 145000, άρα $\frac{t_9 + t_{10} + \cdots + t_\nu}{\nu - 8} = 145000$, άρα:

$$t_9 + t_{10} + \cdots + t_\nu = (\nu - 8)145000 \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στην (1), οπότε:

$1000000 + (\nu - 8)145000 = 137000\nu$ ή

$1000000 + 145000\nu - 1160000 = 137000\nu$ ή

$145000\nu - 137000\nu = 160000$ ή $8000\nu = 160000$ ή $\nu = 20$