Βασική αρχή απαρίθμησης

Όταν μία εργασία μπορεί να χωρισθεί σε k διαδοχικές φάσεις, έτσι ώστε:

η 1^{η} φάση να εκτελεστεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους,

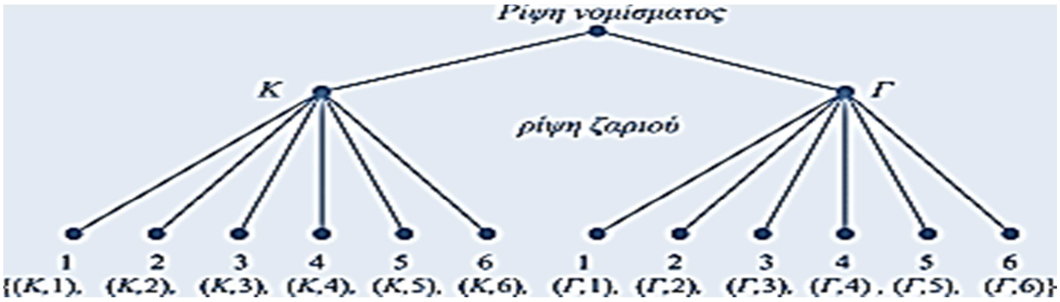
η 2^{η} φάση να εκτελεστεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους

…

η k^{η} φάση να εκτελεστεί με ν_k διαφορετικούς τρόπους,

τότε η όλη διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί κατά $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_k$ διαφορετικούς τρόπους.

Π.χ. 1 Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα προκύπτουν από τη ρίψη ενός δίκαιου νομίσματος και ενός τίμιου ζαριού; Απάντηση: 12



Π.χ. 2 Πόσες διαφορετικές παραγγελίες μπορούν να προκύψουν από το παρακάτω menu ενός εστιατορίου; Απάντηση: $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Ορεκτικά	Σούπες	Σαλάτες	Κυρίως πιάτα
Αυγοτάραχο	Ψαρόσουπα	Κινόα	Γαρίδες ψητές
Ταραμοσαλάτα	Αρακά	Πράσινη	Ψάρια
Στρείδια		Ζεστή	Καραβίδες
Κυδώνια			Ριζότο σουπιά
			Ροφομακαρονάδα

Π.χ. 3 Πόσα διαφορετικά ντυσίματα μπορούν να προκύψουν αν διαθέτεις τα παρακάτω; Απάντηση: $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 2.880$

Υποδήματα	Παντελόνια	Ζώνες	Πουκάμισα	Γραβάτες
Μαύρα	Μαύρο	Μαύρη	Άσπρο	Κόκκινη
Καφέ	Γκρι	Καφέ	Μπλε	Μπλε
Μπορντώ	Μπλε	Σκούρα μπλε	Ροζ	Κίτρινη
Μπλε	Καφέ	Πλεκτή	Καφέ	Μαύρη
	Πράσινο	Καστόρινη	Κίτρινο	
		Με αγκράφα	Μωβ	

Ορισμός ν παραγοντικού $(\nu!)$

Αν $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$, τότε το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu$ ονομάζεται ν παραγοντικό και συμβολίζεται ως $\nu!$. Είναι $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$, $1! = 1$, $0! \underset{o\rho}{=} 1$.

Το $0! = 1$ δεν έχει καμία συνδυαστική ερμηνεία. Ισχύει ότι $\nu! = (\nu-1)! \cdot \nu$ για $\nu \geq 1$. Επίσης για $\nu \geq k$ ισχύει ότι $\nu! = (\nu-k)!(\nu-k+1)(\nu-k+2)\ldots\nu$. Δηλαδή $9! = 6! 7 \cdot 8 \cdot 9$.

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.), Επίκουρος Καθηγητής.

Μεταθέσεις

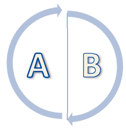
Η συνδυαστική ανάλυση κάνει την εμφάνιση της τον 17° αιώνα στις εργασίες των Fermat και Pascal τις σχετικές με τη συστηματική επίλυση των προβλημάτων που παρουσιάζονται στα τυχερά παίγνια. Μεγάλη εφαρμογή βρίσκει στη θεωρία πιθανοτήτων. Μεταθέσεις των ν στοιχείων ενός συνόλου, ονομάζονται οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε, με κάθε κατάταξη, σε μία σειρά (ή ευθεία γραμμή) τα ν αυτά στοιχεία. Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων ισούται με $\nu!$. Είναι προφανές ότι για ένα αντικείμενο, υπάρχει μόνο μία μετάθεση, δηλαδή $1!$. Για δυο αντικείμενα $\alpha,\ \beta$ υπάρχουν δυο δυνατές μεταθέσεις οι $\alpha,\ \beta$ και $\beta,\ \alpha$. Η μετάθεση είναι διαφορετική όταν ένα τουλάχιστον στοιχείο έχει διαφορετική τοποθέτηση.

Π.χ. 4 Δέκα μαθητές μπορούν να παραταχθούν σε μία σειρά με $10!$ τρόπους.
Δώδεκα εμπορευματοκιβώτια (containers) μπορούν να τοποθετηθούν με όλους τους δυνατούς τρόπους, επί μίας ευθείας γραμμής, κατά $12! = 479.001.600$ τρόπους.

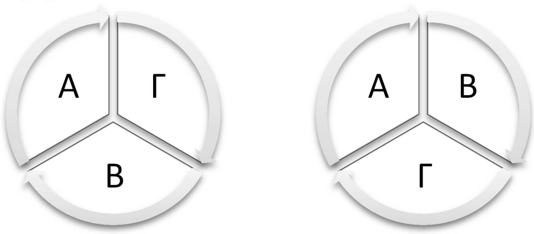
Κυκλικές μεταθέσεις

Κυκλική ονομάζεται η μετάθεση των ν στοιχείων, όταν αυτά, αντί να τοποθετηθούν πάνω σε ανοικτή ευθεία γραμμή, τοποθετούνται πάνω σε περιφέρεια κύκλου, με καθορισμένη φορά. Συνεπώς σε κάθε κυκλική μετάθεση η αρχή και το τέλος της θα συμπίπτουν. Κάθε κυκλική μετάθεση των ν στοιχείων, δίνει ν διαφορετικές απλές μεταθέσεις, διότι ως 1° στοιχείο μπορούμε να εκλάβουμε οποιοδήποτε από τα ν στοιχεία. Συνεπώς, το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων των ν στοιχείων είναι $(\nu-1)!$.

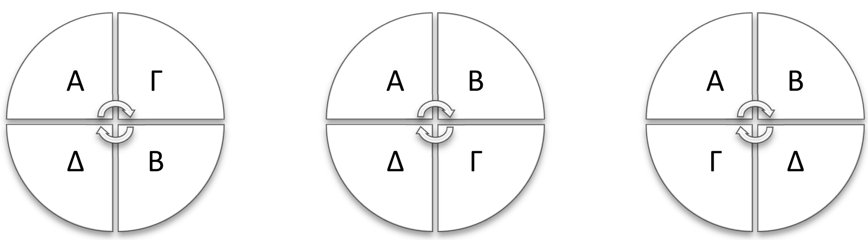
Δύο ναυτικοί, οι Α και Β μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα τραπέζι κατά $(2-1)!=1!=1$ τρόπο μόνο. Βλέπε διπλανό σχήμα.

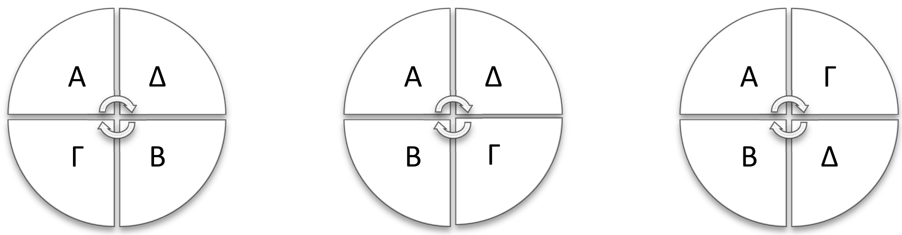


Τρεις ναυτικοί, οι Α, Β, Γ μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα τραπέζι κατά $(3-1)!=2!=2$ διαφορετικούς τρόπους. Βλέπε τα παρακάτω σχήματα.

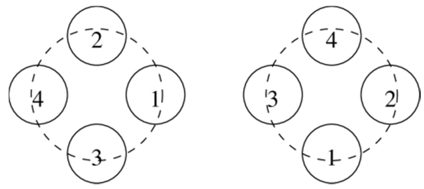


Τέσσερεις ναυτικοί, οι Α, Β, Γ, Δ μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα τραπέζι κατά $(4-1)!=3!=6$ διαφορετικούς τρόπους. Βλέπε τα παρακάτω σχήματα.





Παρατήρηση 1 Οι διπλανές μεταθέσεις δε θεωρούνται διαφορετικές μεταξύ τους.



Π.χ. 5 Επτά εμπορικοί αντιπρόσωποι μπορούν να καθίσουν γύρω από κυκλικό τραπέζι κατά $(7-1)!=6!=720$ τρόπους.

Επαναληπτικές μεταθέσεις

Έστω ν το πλήθος στοιχεία, τα ακόλουθα:

$$\underbrace{\alpha,\ \alpha,\ \ldots,\ \alpha}_{k_1} \quad \underbrace{\beta,\ \beta,\ \ldots,\ \beta}_{k_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underbrace{\xi,\ \xi,\ \ldots,\ \xi}_{k_\rho} \quad \text{με } k_1+k_2+\ldots+k_\rho=\nu$$

Το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων των ανωτέρω στοιχείων είναι

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_\rho)!}{k_1!k_2!\ldots k_\rho!}=\frac{\nu!}{k_1!k_2!\ldots k_\rho!}.$$

Π.χ. 6 Κάλπη περιέχει **3 κόκκινες**, 4 λευκές και 5 μαύρες μπίλιες. Με πόσους τρόπους τοποθετούνται αυτές σε σειρά; Το πλήθος των ζητούμενων τρόπων ισούται με τις επαναληπτικές μεταθέσεις των 12 στοιχείων με όμοια τα 3 τα 4 και τα 5. Δηλαδή $\dfrac{12!}{3!\ 4!\ 5!}$.

Π.χ. 7 Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ; Από αυτούς, τους αναγραμματισμούς, πόσοι αρχίζουν από το γράμμα Σ; Πόσοι εκ των αναγραμματισμών που αρχίζουν από το γράμμα Σ, τελειώνουν σε Α;

Η λέξη αποτελείται από 9 διαφορετικά γράμματα. Συνεπώς οι αναγραμματισμοί της είναι **9! = 362.880** το πλήθος. Για τον υπολογισμό του πλήθους των αναγραμματισμών που αρχίζουν από Σ, αρκεί να βρούμε τους αναγραμματισμούς των υπολοίπων 8 ψηφίων. Πρόκειται για το πλήθος των μεταθέσεων των υπολοίπων 8 γραμμάτων, δηλαδή **8! = 40.320**. Από αυτούς τους αναγραμματισμούς που αρχίζουν από Σ, σε Α τελειώνουν τόσοι όσο είναι το πλήθος των μεταθέσεων των υπολοίπων 7 γραμμάτων, δηλαδή **7! = 5.040** το πλήθος αναγραμματισμοί.

Π.χ. 8 Πόσοι αριθμοί μεγαλύτεροι από το 1.000 μπορεί να σχηματισθούν με τα ψηφία 0, 2, 3, 4 αν χρησιμοποιούνται όλα από μία μόνο φορά;

$$\left.\begin{array}{ll} -0-- & 3!=6 \text{ τρόποι}\\ --0- & 3!=6 \text{ τρόποι}\\ ---0 & 3!=6 \text{ τρόποι}\end{array}\right\}18 \text{ τρόποι}$$

2ος τρόπος. Όλες οι μεταθέσεις των 4 ψηφίων είναι 4! =24 το πλήθος. Πρέπει να αφαιρεθούν εκείνες οι μεταθέσεις που αρχίζουν από το ψηφίο 0, διότι είναι αριθμοί μικρότεροι του 1.000. Το πλήθος τους είναι 3!=6. Συνεπώς, το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι 24–6=18.

Π.χ. 9 Οι δυνατοί αναγραμματισμοί της λέξης **ΠΑΤΕΡΑΣ** είναι $\frac{7!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2.520$, διότι από τα 7 γράμματα που τη σχηματίζουν, υπάρχουν 2 ίδια γράμματα «α».

Π.χ. 10 Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 από τα 10 βιβλία το ένα πάνω στο άλλο; Οι δυνατοί τρόποι είναι όσες οι διατάξεις των 10 ανά 4, δηλαδή $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 90 \cdot 56 = 5.040$.

Π.χ. 11 Ναυτιλιακή εταιρεία πρόκειται να προσλάβει έναν πλοίαρχο και ένα μηχανικό. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συμπληρώσει τις κενές θέσεις, επιλέγοντας από τρείς πλοιάρχους και πέντε μηχανικούς;

Η επιλογή του υπό πρόσληψη πλοιάρχου μπορεί να γίνει κατά 3 διαφορετικούς τρόπους, ενώ του υπό πρόσληψη μηχανικού κατά 5 διαφορετικούς τρόπους και είναι ανεξάρτητη από την πρόσληψη του πλοιάρχου. Άρα, υπάρχουν 15 διαφορετικοί τρόποι προσλήψεων.

	Πλοίαρχος 1	Πλοίαρχος 2	Πλοίαρχος 3
Μηχανικός 1	✓	✓	✓
Μηχανικός 2	✓	✓	✓
Μηχανικός 3	✓	✓	✓
Μηχανικός 4	✓	✓	✓
Μηχανικός 5	✓	✓	✓

$M1\begin{cases}\Pi 1\\ \Pi 2\\ \Pi 3\end{cases}$ $M2\begin{cases}\Pi 1\\ \Pi 2\\ \Pi 3\end{cases}$ $M3\begin{cases}\Pi 1\\ \Pi 2\\ \Pi 3\end{cases}$ $M4\begin{cases}\Pi 1\\ \Pi 2\\ \Pi 3\end{cases}$ $M5\begin{cases}\Pi 1\\ \Pi 2\\ \Pi 3\end{cases}$

Π.χ. 12 Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά 5 εμπορευματοκιβώτια (containers);

Για την 1η θέση είναι υποψήφια 5 containers.
Για τη 2η θέση είναι υποψήφια 4 containers.
Για την 3η θέση είναι υποψήφια 3 containers.
Για την 4η θέση είναι υποψήφια 2 containers.
Για την 5η και τελευταία θέση είναι υποψήφιο το τελευταίο container.

Άρα, υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 20 \cdot 6 = 120$ διαφορετικοί τρόποι.

Θέσεις	1η	2η	3η	4η	5η
Υποψήφιοι	5	4	3	2	1

Π.χ. 13 Με πόσους τρόπους είναι δυνατό να ανεβούν στο βάθρο των νικητών, οι 3 πρώτες εντεκάδες, στο παγκόσμιο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου;
Όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι $11! \cdot 11! \cdot 11! \cdot 3! = \ldots$

Π.χ. 14 Με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μπουν σε μία σειρά, προκειμένου να βραβευθούν ως νικητές, 3 αναβάτες με το άλογο του ο καθένας, υπό τον περιορισμό ότι ο κάθε αναβάτης θα βρίσκεται δίπλα στο άλογο του;

Έστω Α, Β, Γ οι αναβάτες και α, β, γ τα άλογα.

Οι μεταθέσεις της $1^{ης}$ ομάδας (Α, α) είναι 2!
Οι μεταθέσεις της $2^{ης}$ ομάδας (Β, β) είναι 2!
Οι μεταθέσεις της $3^{ης}$ ομάδας (Γ, γ) είναι 2!
Οι μεταθέσεις των τριών ομάδων είναι 3!

Συνεπώς, μπορούν να μπουν στη σειρά με $2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3! = 48$.

$$\underbrace{\overset{2!}{\mathrm{A}\alpha}\quad \overset{2!}{\mathrm{B}\beta}\quad \overset{2!}{\Gamma\gamma}}_{3!}$$

Παρατήρηση 2 ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ.

Π.χ. 15 Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται από τα ψηφία 0, 2, 4, 6, 8, αν αυτά χρησιμοποιούνται μία μόνο φορά;

Για το **$1^{ο}$ ψηφίο** του τετραψήφιου αριθμού είναι υποψήφιοι οι ακόλουθοι **4** αριθμοί (2 ή 4 ή 6 ή 8), δηλαδή όλοι οι αρχικά δοθέντες αριθμοί πλην του 0. Π.χ. Έστω το 2.

Για το **$2^{ο}$ ψηφίο** του τετραψήφιου αριθμού είναι υποψήφιοι πάλι **4** αριθμοί, ένας εκ των οποίων είναι το 0. Π.χ. 0, 4, 6, 8. Έστω το 0.

Για το **$3^{ο}$ ψηφίο** του τετραψήφιου αριθμού, υποψήφιοι είναι **3** αριθμοί που απέμειναν από τους πέντε αρχικούς αριθμούς. Π.χ. 4, 6, 8. Έστω το 4.

Για το **$4^{ο}$ και τελευταίο ψηφίο** του τετραψήφιου αριθμού, υποψήφιοι είναι οι **2** αριθμοί που απέμειναν. Π.χ. 6, 8.

Συνεπώς, το ζητούμενο πλήθος των τετραψήφιων αριθμών είναι $4\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 16\cdot 6 = 96$.

$$2\begin{cases} 0\begin{cases} 4\begin{cases}6\\8\end{cases}\\ 6\begin{cases}4\\8\end{cases}\\ 8\begin{cases}4\\6\end{cases}\end{cases}\\ 4\ldots\\ 6\ldots\\ 8\ldots\end{cases}$$

Π.χ. 16 Πόσοι διψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματισθούν με διαφορετικά ψηφία και πόσοι με τα ίδια ψηφία;
(α) Για το **1ο ψηφίο** του διψήφιου αριθμού, είναι υποψήφιοι **9** το πλήθος αριθμοί (από 1 έως και 9). Για το **2ο ψηφίο** του διψήφιου αριθμού, είναι υποψήφιοι 10 αριθμοί (από 0 έως και 9) μείον αυτόν του πρώτου ψηφίου, άρα τελικώς **9** αριθμοί. Συνεπώς, το ζητούμενο πλήθος όλων των διψήφιων αριθμών είναι $9 \cdot 9 = 81$.

	1ο Ψηφίο	2ο Ψηφίο
Πλήθος υποψηφίων αριθμών	9	9
Υποψήφιοι αριθμοί	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Μείον αυτόν του 1ου ψηφίου.

(β) Αν οι διψήφιοι αριθμοί έχουν τα ίδια ψηφία, τότε τόσο για το πρώτο όσο και για το δεύτερο ψηφίο οι υποψήφιοι αριθμοί είναι εννέα. Όλοι οι δυνατοί αριθμοί της περίπτωσης αυτής, είναι οι ακόλουθοι: **11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	✓								
2		✓							
3			✓						
4				✓					
5					✓				
6						✓			
7							✓		
8								✓	
9									✓

Π.χ. 17 Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί έχουν το πρώτο τους ψηφίο περιττό;

Για τη θέση του 1ου ψηφίου οι υποψήφιοι αριθμοί είναι οι εξής **5** (1, 3, 5, 7, 9). Για κάθε μία από τα υπόλοιπες τρεις θέσεις (2ου, 3ου & 4ου ψηφίου), οι υποψήφιοι αριθμοί είναι **10** το πλήθος την κάθε φορά (από 0 έως και 9). Συνολικά, οι ζητούμενοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι 5.000 το πλήθος.

	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο
Πλήθος υποψηφίων αριθμών	5	10	10	10

Π.χ. 18 Τρία γράμματα και 4 αριθμοί τοποθετημένα στη σειρά έτσι ώστε τα γράμματα να καταλαμβάνουν τις άρτιες θέσεις, ενώ οι αριθμοί τις περιττές, θα αποτελέσουν ένα μήνυμα 7 ψηφίων. Με πόσους τρόπους μπορεί να γραφεί το μήνυμα αυτό; Όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$.

1	2	3	4	5	6	7
α_1	γ_1	α_2	γ_2	α_3	γ_3	α_4

Π.χ. 19 Πόσοι διαφορετικοί τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από τρία (03) τεσσάρια, **τέσσερα (04) τριάρια** και δύο (02) δυάρια;

Αν δίνονταν τρία (03) δυάρια, τρία (03) τριάρια και τρία (03) τεσσάρια, τότε για το σχηματισμό του τριψήφιου αριθμού, θα υπήρχαν από τρία (03) υποψήφια νούμερα για τη θέση του κάθε ενός εκ των τριών ψηφίων του. Συνεπώς, θα προέκυπταν $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ διαφορετικοί τριψήφιοι αριθμοί. Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα της ασκήσεως, παρατηρούμε ότι έχουμε ένα δυάρι λιγότερο και ένα τριάρι επιπλέον, σε σχέση με τον αρχικό υπολογισμό που κάναμε. Συνεπώς, μπορούμε να σχηματίσουμε όλους τους ως άνω περιγραφέντες τριψήφιους αριθμούς πλην του 222. Άρα, το ζητούμενο πλήθος των τριψήφιων αριθμών είναι 27–1=26.

444	434	424	344	334	324	244	234	224
443	433	423	343	333	323	243	233	223
442	432	422	342	332	322	242	232	-----

Π.χ. 20 Βρείτε τις μεταθέσεις των γραμμάτων των λέξεων
(**α**) ΥΔΡΑ, (**β**) ΣΥΡΟΣ, (**γ**) ΙΚΑΡΙΑ, (**δ**) MISSISSIPPI, (**ε**) ΚΑΤΑΡΤΙ,
(**Στ**) ΑΓΚΥΡΑ, (**ζ**) ΑΚΑΜΑΤΡΑ, (**η**) ΟΙΝΟΥΣΣΕΣ, (**θ**) ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΣ,
(**ι**) ΔΕΞΑΜΕΝΟΠΛΟΙΟ.

(**α**) Είναι οι μεταθέσεις των 4 γραμμάτων της λέξης, διότι είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Άρα, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ μεταθέσεις.

(**β**) Αν όλα τα γράμματα της λέξης ήταν διαφορετικά, τότε αφού είναι 5 το πλήθος, οι ζητούμενες μεταθέσεις θα ήταν 5! .Υπάρχουν όμως δυο ίδια γράμματα (Σ, Σ) άρα, η αλλαγή των μεταξύ τους θέσεων δε θεωρείται διαφορετική μετάθεση. Οι δυνατές αλλαγές των θέσεων των ίδιων γραμμάτων (Σ, σ) είναι όσες οι μεταθέσεις των δυο ψηφίων, δηλαδή $2!$.

Έστω x το πλήθος των ζητούμενων μεταθέσεων. Ισχύει ότι $2!x = 5! \Leftrightarrow x = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

(**γ**) **ΙΚΑΡΙΑ** Είναι $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 180$.

(**δ**) **MISSISSIPPI** Είναι $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{\cancel{2 \cdot 3} \cdot \cancel{4 \cdot 2}} = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$

(**ε**) **ΚΑΤΑΡΤΙ** Είναι $\frac{7!}{2! \cdot 2!}$ (**Στ**) **ΑΓΚΥΡΑ** Είναι $\frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

(**ζ**) **ΑΚΑΜΑΤΡΑ** Είναι $\frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 210 \cdot 8$, (**η**) **ΟΙΝΟΥΣΣΕΣ** Είναι $\frac{9!}{3! \cdot 2!}$,

(θ) **ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΣ** Είναι $\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$, (ι) **ΔΕΞΑΜΕΝΟΠΛΟΙΟ** Είναι $\frac{13!}{3! \cdot 2!}$

Επεξήγηση.

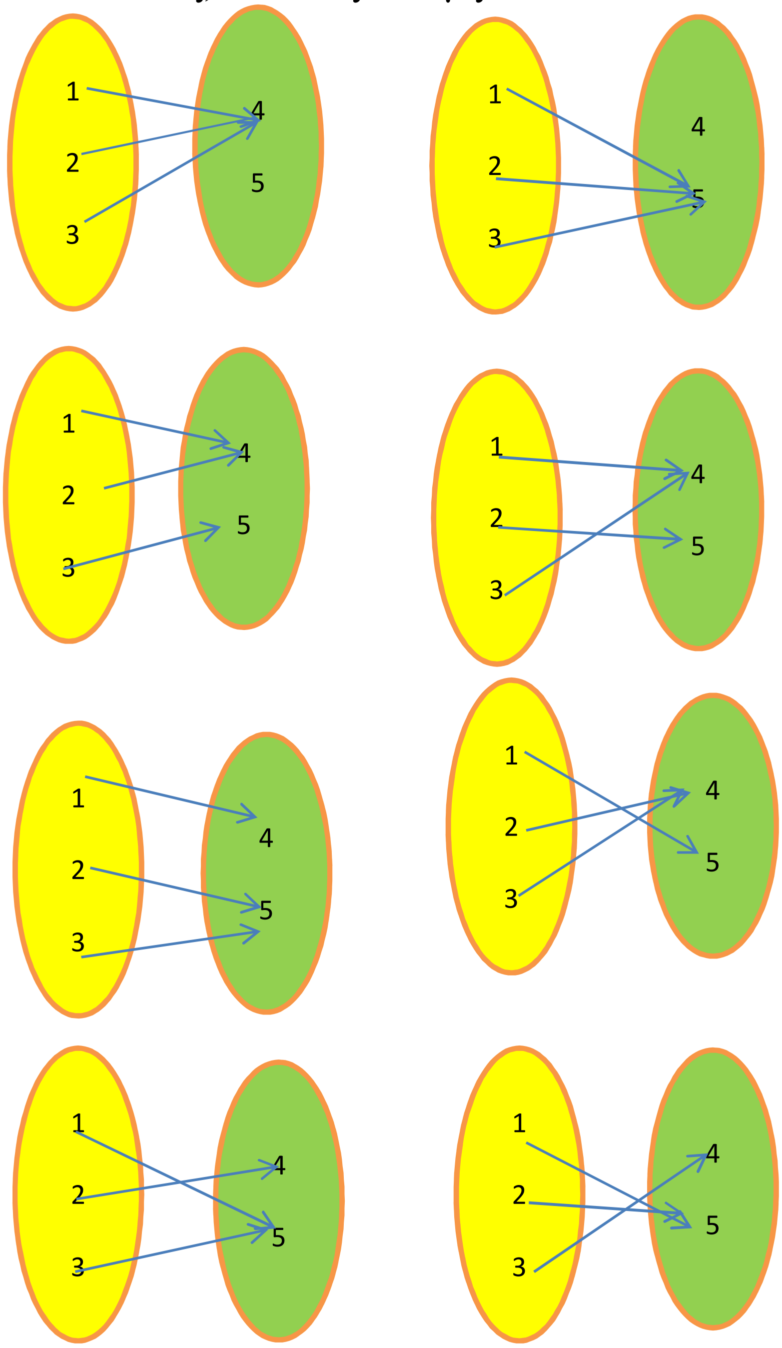
ΑΝ
ΝΑ - - 2 1=2

ΙΚΑ - - - 3 2 1=6 ΚΑΙ ΑΙΚ
ΙΑΚ ΚΙΑ ΑΚΙ

Π.χ. 21 Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις υπάρχουν με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ και πεδίο τιμών το σύνολο $B = \{4, 5\}$;

Προκειμένου να έχουμε συνάρτηση $f : A \to B$, πρέπει από κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου (δηλαδή του Α), να φεύγει ένα και μόνο ένα βέλος προς οποιοδήποτε στοιχείο του δευτέρου συνόλου (δηλαδή του Β). Για το κάθε ένα από τα τρία στοιχεία του συνόλου Α, υπάρχουν δύο υποψήφια στοιχεία, του συνόλου Β, για να αντιστοιχιστούν, το 4 και το 5.

Συνεπώς, οι δυνατές επιλογές είναι $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.



Ασκήσεις

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 4 διαφορετικά βιβλία, το ένα δίπλα στο άλλο, σε ράφι βιβλιοθήκης; (**Απάντηση** 4!=24)

2. Με πόσους τρόπους μπορούν να γραφούν τα 6 παγωτά ενός ζαχαροπλαστείου σε κατάλογο, το ένα κάτω από το άλλο; (**Απάντηση** 6!=720)

3. Αυτοκίνητο παράγεται σε 4 χρώματα (Λευκό, μαύρο, κόκκινο, μπλε) και 3 εκδόσεις (cabrio, sedan, 4X4). Πόσες τουλάχιστο φωτογραφίες του πρέπει να περιέχει ένα διαφημιστικό έντυπο ώστε να είναι πλήρες; (**Απάντηση** 12)

4. Πόσες διαφορετικές ενδυμασίες μπορούν να προκύψουν από 3 διαφορετικά παντελόνια, 4 σακάκια, 5 πουκάμισα και 2 ειδών παπούτσια; (**Απάντηση** 120)

5. Μαθητής δύναται να επιλέξει ένα από τα 2 βιβλία γεωμετρίας, ένα από τα 3 βιβλία άλγεβρας και ένα από τα 4 βιβλία φυσικής. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει τα βιβλία αυτά; (**Απάντηση** 24)

6. Ποιό το πλήθος των πινακίδων κυκλοφορίας αυτοκινήτων, αν αυτές αποτελούνται από 2 ή 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό; (**Απάντηση** $25\cdot 24^2\cdot 9.000$)

7. Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε μία γραμμή 4 αθλήτριες και 3 αθλητές, έτσι ώστε να είναι μαζί όλοι οι αθλητές και μαζί όλες οι αθλήτριες; (**Απάντηση** $2!\cdot 3!\cdot 4!$)

8. Ο τετραψήφιος κωδικός ασφαλείας χρηματοκιβωτίου αποτελείται από τα ψηφία 0, 1, 2, 5. Αν δεν τον γνωρίζουμε, πόσες το πολύ δοκιμές θα απαιτηθούν ώστε να ανοίξει το χρηματοκιβώτιο; (**Απάντηση** 4^4)

9. Γραπτή εξέταση αποτελείται από 4 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 2, 3, 3, 4 επιλογές, αντίστοιχα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να απαντηθεί;

Αν οι απαντήσεις γράφονται σε λευκή σελίδα με τυχαία σειρά, ποιό το πλήθος των δυνατών απαντήσεων; (**Απάντηση** 72 & 1728 αντίστοιχα)

10. Δελτίο ΠΡΟΠΟ 13 αγώνων, αποτελείται από 6 στάνταρ, 3 διπλές και 4 τριπλές. Πόσες συνολικά στήλες έχουν παιχθεί με το δελτίο αυτό; (**Απάντηση** $2^3\cdot 3^4 = 8\cdot 81 = 648$)

Ελληνικό μορσικό αλφάβητο

Γράμμα	Κώδικας Μορς	Γράμμα	Κώδικας Μορς	Γράμμα	Κώδικας Μορς
Α	• —	Ι	• •	Ρ	• — •
Β	— • • •	Κ	— • —	Σ	• • •
Γ	— — •	Λ	• — — • •	Τ	—
Δ	— • •	Μ	— —	Υ	— • — —
Ε	•	Ν	— •	Φ	• • — •
Ζ	— — • •	Ξ	— • • —	Χ	— — — —
Η	• • • •	Ο	— — —	Ψ	— — • —
Θ	— • — •	Π	• — — •	Ω	• — —

Διεθνής κώδικας Morse

Γράμμα	Κώδικας Μορς
A	• —
B	— • • •
C	— • — •
D	— • •
E	•
F	• • — •
G	— — •
H	• • • •
I	• •
J	• — — —
K	— • —
L	• — • •
M	— —
N	— •
O	— — —
P	• — — •
Q	— — • —
R	• — •
S	• • •
T	—
U	• • —
V	• • • —
W	• — —
X	— • • —
Y	— • — —
Z	— — • •
YU	— • — — • • —
YV	— • — — • • • —
YZ	— • — — — — • •
AA	• — • —
AB	• — — • • •
WA	• — — • —
WB	• — — — • • •
BN	— • • • — •

Αριθμός	Κώδικας Μορς
1	• — — — —
2	• • — — —
3	• • • — —
4	• • • • —
5	• • • • •
6	— • • • •
7	— — • • •
8	— — — • •
9	— — — — •
0	— — — — —

Σημείο στίξεως	Κώδικας Μορς
Τελεία	• — • — • —
Κόμμα	— — • • — —
Άνω-κάτω τελεία	— — — • • •
Ερωτηματικό	• • — — • •
Απόστροφος	• — — — — •
Παύλα	— • • • • —
Ίσον	— • • • —
Άνοιγμα παρενθέσεως	— • — — •
Κλείσιμο παρενθέσεως	— • — — • —
Εισαγωγικά	• • — • • — •

Έννοιες	Κώδικας Μορς
Από (DE)	— • • •
Προβείτε	— • —
($\overline{AS}$)	• — • • •
Κατανοητό	• • • — •
Ελήφθη (R)	• — •
Τέλος μηνύματος ($\overline{AR}$)	• — • — •
Τέλος εκπομπής ($\overline{VA}$)	• • • — • —
Ξεχωρίζει διαφορετικά τμήματα της ίδιας εκπομπής ($\overline{BT}$)	— • • • —

Διατάξεις

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά k, είναι ο κάθε ένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να λάβουμε k διαφορετικά στοιχεία του συνόλου και να τα θέσουμε σε μία σειρά, τοποθετώντας τα πάνω σε μία ευθεία γραμμή. Δύο διατάξεις των ν στοιχείων ανά k, είναι διαφορετικές αν τα στοιχεία είναι διαφορετικά ή αν η σειρά των στοιχείων είναι διαφορετική στις δυο διατάξεις. Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k είναι $\frac{\nu!}{(\nu-k)!}$.

Επίσης δίνεται και από τον τύπο $\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-k+1)$.

Π.χ. 22 Με πόσους τρόπους, μπορούν να συμπληρωθούν οι 3 πρώτες θέσεις ενός τουρνουά σκακιού, αν συμμετέχουν 12 σκακιστές; Είναι οι διατάξεις, χωρίς επανάληψη, των 12 ανά 3. Συνεπώς, είναι $\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12!}{9!}=10\cdot 11\cdot 12=110\cdot 12=\ldots$

Π.χ. 23 Με πόσους τρόπους, μπορούν από τα 7 εμπορευματοκιβώτια (containers) που βρίσκονται στο αμπάρι ενός πλοίου, να τοποθετηθούν τα 3, επ΄ ευθείας, πάνω στο κατάστρωμα; Είναι $\frac{\nu!}{(\nu-k)!}=\frac{7!}{(7-3)!}=5\cdot 6\cdot 7=30\cdot 7=210$.

Π.χ. 24 Με πόσους τρόπους μπορούν να μείνουν 5 ναυτικοί, σε 6 ξενοδοχεία, αν:

(**α**) μείνουν σε διαφορετικό ξενοδοχείο ο κάθε ένας,

(**β**) δεν υπάρχει περιορισμός;

Είναι (**α**) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120\cdot 6=720$ (**β**) $6^5=36\cdot 36\cdot 6=1.296\cdot 6=7.776$

Π.χ. 25 Με πόσους τρόπους τρεις επιβάτες, μπορούν να επιβιβασθούν στα πέντε βαγόνια μίας υπερταχείας, αν:

(**α**) επιλέξουν διαφορετικό βαγόνι ο κάθε ένας,

(**β**) δεν υπάρχει περιορισμός;

Είναι (**α**) $5\cdot 4\cdot 3=60$ (**β**) $5^3=125$.

Π.χ. 26 Με πόσους τρόπους μπορούν 5 σπουδαστές να καθίσουν σε 8 αριθμημένα καθίσματα; Είναι $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=8\cdot 42\cdot 20=8\cdot 840=6.720$.

Π.χ. 27 Με πόσους τρόπους μπορεί από μία τράπουλα (αποτελείται από 52 κάρτες) να ληφθούν διαδοχικά, χωρίς επανατοποθέτηση, 3 κάρτες; Είναι $52\cdot 51\cdot 50=2.652\cdot 50=132.600$.

Παρατήρηση 3 Στις διατάξεις των ν ανά k απαιτείται να είναι $k\le\nu$.
Όταν $k=\nu$, τότε έχουμε τις μεταθέσεις των ν στοιχείων που είναι $\nu!$.

Διατάξεις με επανάληψη

Διάταξη με επανάληψη των ν στοιχείων ανά k είναι κάθε ένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να λάβουμε k διαφορετικά στοιχεία, όχι κατ΄ ανάγκη διαφορετικά και να τα θέσουμε σε μία σειρά. Το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των ν στοιχείων ανά k είναι ν^k.

Παρατήρηση 4 Στις διατάξεις με επανάληψη των ν στοιχείων ανά k, μπορεί να είναι και $k\ge\nu$.

Π.χ. 28 Πόσες λέξεις, χωρίς να έχουν κατ΄ ανάγκη νόημα, με δύο διαφορετικά σύμφωνα και ένα φωνήεν, μπορούν να σχηματισθούν αν:

(**α**) το φωνήεν βρίσκεται ανάμεσα στα δυο σύμφωνα, (Σ_1 Φ Σ_2),

(**β**) δεν έχει σημασία η θέση που βρίσκεται το φωνήεν;

(**α**) Από τα 24 γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου, τα 17 είναι σύμφωνα και τα υπόλοιπα 7 φωνήεντα. Η επιλογή του μοναδικού φωνήεντος είναι μία διάταξη των 7 ανά 1. Η επιλογή των δύο συμφώνων είναι μία διάταξη των 17 ανά 2. Συνεπώς, μπορεί να σχηματισθούν 17 (17–1) 7=17·16·7=1.904 λέξεις των 3 ψηφίων με 1 φωνήεν ανάμεσα σε 2 σύμφωνα.

(**β**) Το φωνήεν μπορεί να βρίσκεται στην $1^η$ ή $2^η$ ή $3^η$ θέση της λέξης. Συνεπώς, μπορεί να σχηματισθούν 3 ·1904 = 5.712 λέξεις.

φ σ σ
σ φ σ
σ σ φ

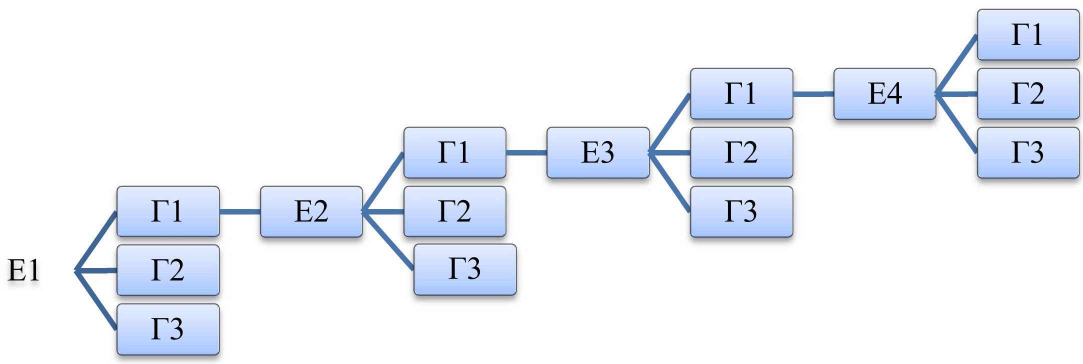
Π.χ. 29 Οι δυνατοί τρόποι κατά τους οποίους μπορεί να γραφεί ένας πενταψήφιος αριθμός με τα ψηφία του από το 1 έως και το 9, είναι όσες οι διατάξεις των 9 στοιχείων (αριθμών) ανά 5. Δηλαδή $9^5 = 59.049$. - - - - -

Π.χ. 30 Στο τυχερό παίγνιο ΠΡΟ.ΠΟ. (προγνωστικά ποδοσφαίρου) της ΟΠΑΠ ΑΕ ο παίκτης προσπαθεί να μαντέψει το νικητή 13 αγώνων τοποθετώντας δίπλα στα ονόματα των διαγωνιζομένων ομάδων τα σύμβολα 1 ή 2 ή Χ για νίκη της γηπεδούχου, της φιλοξενούμενης ομάδας ή για μεταξύ τους ισοπαλία αντίστοιχα.

Προκειμένου να επιτύχει οπωσδήποτε ο παίκτης το 13–άρι πρέπει να μαντέψει σωστά το αποτέλεσμα και των 13 αγώνων. Απαιτείται να συμπληρώσει $3^{13} = 1.567.323$ στήλες.

1	Χ	2
Χ	2	1
2	Χ	1
Χ	2	1

Π.χ. 31 Με πόσους τρόπους μπορεί ο κλητήρας να ρίξει 4 επιστολές σε 3 γραμματοκιβώτια; Η κάθε επιστολή μπορεί να ταχυδρομηθεί σε ένα μόνο (σε οποιοδήποτε) από τα τρία γραμματοκιβώτια. Δεχόμαστε ότι η κάθε επιστολή θα ταχυδρομηθεί από 1 μόνο γραμματοκιβώτιο. Από το ίδιο όμως γραμματοκιβώτιο μπορεί να ταχυδρομηθούν ή καμία ή μία ή περισσότερες ή και όλες οι επιστολές. Άρα, υπάρχουν $3^4 = 81$ τρόποι.



Π.χ. 32 Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν, που δεν έχουν το ψηφίο μηδέν;
Είναι $9^3 = 729$ τριψήφιοι. - - -

Π.χ. 33 Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μία 5-μελής επιτροπή από 9 υποψηφίους; Είναι $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\ 4!} = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{4!} = \frac{6\cdot7\cdot\cancel{8}\cdot9}{\cancel{2}\cdot3\cdot\cancel{4}} = \frac{6\cdot7\cdot9}{3} = 2\cdot7\cdot9 = 126$

Π.χ. 34 Ο ηλεκτρολόγος του πλοίου πρόκειται να βιδώσει στη σειρά 10 λάμπες πάνω σε ένα καλώδιο. Οι **5** είναι χρώματος **μπλε**, οι **3** είναι **κόκκινες** και οι υπόλοιπες λευκές. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να τις βιδώσει;

Είναι $\dfrac{10!}{5!\ 3!\ 2!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!\ 2!}=\dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2!}=7\cdot 4\cdot 9\cdot 10=28\cdot 90$

Π.χ. 35 Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματισθούν από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 αν τα ψηφία τους (- - -)

(i) είναι διαφορετικά,

(ii) μπορούν να επαναλαμβάνονται;

(i) Μας ενδιαφέρει η σειρά των ψηφίων. Δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενα ψηφία. Άρα, πρόκειται για τις διατάξεις των 5 ανά 3. Συνεπώς, μπορούν να σχηματισθούν $\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5=60$ αριθμοί.

$\underset{1^o}{\dots}\quad \underset{2^o}{\dots}\quad \underset{3^o}{\dots}$

(ii) Τα ψηφία των υπό σχηματισμό τριψήφιων αριθμών μπορούν να επαναλαμβάνονται. Άρα, πρόκειται για τις διατάξεις με επανάληψη των 5 ανά 3. Συνεπώς, μπορούν να σχηματισθούν $5^3=125$ αριθμοί.

$\underset{1^o}{\dots}\quad \underset{2^o}{\dots}\quad \underset{3^o}{\dots}$

Π.χ. 36 Πόσοι διαφορετικοί εξαψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματισθούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0 ή 1; (- - - - - -) Για την κάθε μία θέση του εξαψήφιου αριθμού είναι υποψήφιοι δυο αριθμοί, το 0 και το 1. Το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματισθούν, ισούται με τις διατάξεις, με επανάληψη, των 2 ανά 6. Συνεπώς είναι $2^6=64$.

Π.χ. 37 Ο συνδυασμός για την κλειδαριά ασφαλείας ενός χρηματοκιβωτίου σχηματίζεται επιλέγοντας 3 από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, χωρίς επανάληψη (μία φορά το καθένα). Πόσοι είναι οι (διατάξεις) δυνατοί συνδυασμοί που

(i) περιέχουν το ψηφίο 4,

(ii) δεν περιέχουν το ψηφίο 4.

(i)

$$\left.\begin{matrix} 4 & \dots & \dots \\ \dots & 4 & \dots \\ \dots & \dots & 4 \end{matrix}\right\}3\ \text{Περιπτώσεις} \qquad 3\frac{6!}{(6-2)!}=3\frac{6!}{4!}=3\cdot 5\cdot 6=90$$

(ii) $\dfrac{6!}{3!}=4\cdot 5\cdot 6=120$ $\quad \underset{1^o}{\dots}\quad \underset{2^o}{\dots}\quad \underset{3^o}{\dots}$

Π.χ. 38 Τίμιο (ή δίκαιο ή αμερόληπτο) κέρμα ρίχνεται 3 φορές. Πόσες τριάδες διαφορετικών αποτελεσμάτων μπορεί να προκύψουν; Σε κάθε ρίψη του κέρματος, τα πιθανά ενδεχόμενα είναι δύο, κεφάλι (Κ) ή γράμματα (Γ). Συνεπώς, $2^3=8$ διαφορετικές τριάδες αποτελεσμάτων μπορούν να εμφανισθούν.

$$\begin{matrix} K\begin{cases} K\begin{cases}K\\ \Gamma\end{cases}\\ \Gamma\begin{cases}K\\ \Gamma\end{cases}\end{cases} \\ \Gamma\begin{cases} K\begin{cases}K\\ \Gamma\end{cases}\\ \Gamma\begin{cases}K\\ \Gamma\end{cases}\end{cases}\end{matrix}$$

Δηλαδή: ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ.

Π.χ. 39 Τέσσερα σφαιρίδια, αριθμημένα από το 1 έως το 4, τοποθετούνται σε κάλπη. Λαμβάνουμε ένα σφαιρίδιο, καταγράφομε τον αριθμό του και το επανατοποθετούμε στην κάλπη. Αν η διαδικασία επαναληφθεί άλλες δυο φορές, πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορεί να σχηματισθούν;
Για τη θέση του $1^{ου}$ ψηφίου, είναι υποψήφιοι 4 το πλήθος αριθμοί.
Για τη θέση του $2^{ου}$ ψηφίου, είναι υποψήφιοι 4 το πλήθος αριθμοί.

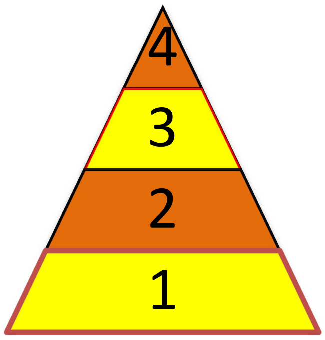
Για τη θέση του $3^{ου}$ ψηφίου, είναι υποψήφιοι 4 το πλήθος αριθμοί.

	Θέση $1^{ου}$ ψηφίου	Θέση $2^{ου}$ ψηφίου	Θέση $3^{ου}$ ψηφίου
Πλήθος υποψηφίων αριθμών	4	4	4

Άρα, $4^3 = 64$ είναι οι τριψήφιοι αριθμοί που μπορεί να σχηματισθούν.

Π.χ. 40 Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν, στους ορόφους τετραώροφου κτηρίου ναυτιλιακής εταιρείας, 5 ναυτικοί;

Ο κάθε ναυτικός έχει να επιλέξει ανάμεσα σε 4 ορόφους. Δεχόμαστε ότι την ίδια χρονική στιγμή δε μπορεί ένας ναυτικός να βρίσκεται συγχρόνως σε περισσότερους από έναν ορόφους. Δεν υπάρχει περιορισμός ως προς το πλήθος των ναυτικών που μπορούν να βρίσκονται συγχρόνως στον ίδιο όροφο. Συνεπώς, οι 5 ναυτικοί, μπορούν να κατανεμηθούν στους 4 ορόφους, με $4^5 = 1.024$ τρόπους.



$$
\mathrm{N1}\begin{cases}
\mathrm{O1}\to \mathrm{N2}\begin{cases}
\mathrm{O1}\to \mathrm{N3}\begin{cases}
\mathrm{O1}\to \mathrm{N4}\begin{cases}
\mathrm{O1}\to \mathrm{N5}\begin{cases}\mathrm{O1}\\ \mathrm{O2}\\ \mathrm{O3}\\ \mathrm{O4}\end{cases}\\
\mathrm{O2}\\ \mathrm{O3}\\ \mathrm{O4}
\end{cases}\\
\mathrm{O2}\\ \mathrm{O3}\\ \mathrm{O4}
\end{cases}\\
\mathrm{O2}\\ \mathrm{O3}\\ \mathrm{O4}
\end{cases}\\
\mathrm{O2}\\ \mathrm{O3}\\ \mathrm{O4}
\end{cases}
$$

Συνδυασμοί

Έστω σύνολο Α με ν το πλήθος στοιχεία. Κάθε υποσύνολο του Α με k το πλήθος στοιχεία ($k \le \nu$) ονομάζεται συνδυασμός των ν στοιχείων ανά k. Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k συμβολίζεται $\binom{\nu}{k}$ και ισχύει ότι $\binom{\nu}{k} = \dfrac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}$. Δυο συνδυασμοί είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν <u>τουλάχιστο σε ένα</u> στοιχείο. Στους συνδυασμούς <u>δεν</u> ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία λαμβάνονται τα στοιχεία.

Π.χ. 41 Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί μία τριμελής επιτροπή από 12 εκπαιδευτικούς που υπηρετούν στη σχολή;

Με $\binom{12}{3} = \dfrac{12!}{3!\;9!} = \dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{3!} = 10\cdot 11\cdot 2 = 220$ τρόπους.

Π.χ. 42 Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγούν οι 3 από τους 15 αριστούχους προκειμένου να βραβευθούν με έναν εξάντα έκαστος;

Είναι $\binom{15}{3} = \dfrac{15!}{3!\;12!} = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{3!} = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{2\cdot 3} = 13\cdot 7\cdot 5 = 13\cdot 35 = 455$ τρόποι.

Π.χ. 43 Στον πάγκο ποδοσφαιρικής ομάδος βρίσκονται 14 ποδοσφαιριστές. Ο προπονητής πρέπει να επιλέξει την εντεκάδα που θα παρατάξει στο γήπεδο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν ένας συγκεκριμένος ποδοσφαιριστής πρέπει κατόπιν αιτήματος του προέδρου και ιδιοκτήτη (**α**) οπωσδήποτε να αγωνισθεί, (**β**) να μην αγωνισθεί.

(**α**) Αν δεν υπήρχε καμία παρέμβαση εκ μέρους του προέδρου, ο προπονητής θα έπρεπε να επιλέξει από τους 14 ποδοσφαιριστές, εκείνους τους 11 που θα αγωνισθούν και αυτό μπορεί να γίνει κατά $\binom{14}{11}=\frac{14!}{11!\ 3!}=\frac{12\cdot 13\cdot 14}{3!}=2\cdot 13\cdot 14$ τρόπους.

Αν ο συγκεκριμένος παίκτης αγωνισθεί, καταλαμβάνει τη μία από τις 11 θέσεις, συνεπώς ο προπονητής πρέπει από τους υπολοίπους 13 εναπομείναντες ποδοσφαιριστές να επιλέξει τους 10. Αυτό μπορεί να γίνει κατά $\binom{13}{10}=\frac{13!}{10!\ 3!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13}{2\cdot 3}=11\cdot 2\cdot 13=286$ τρόπους.

(**β**) Αν ο συγκεκριμένος παίκτης δε λάβει μέρος στον αγώνα, πρέπει ο προπονητής να επιλέξει από τους υπολοίπους 13 εναπομείναντες ποδοσφαιριστές τους 11. Αυτό μπορεί να γίνει κατά $\binom{13}{11}=\frac{13!}{11!\ 2!}=\frac{12\cdot 13}{2}=6\cdot 13=78$ τρόπους.

Π.χ. 44 Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 φύλλα από τα 52 που έχει η τράπουλα; Είναι $\binom{52}{5}=\frac{52!}{5!\ 47!}=\frac{4\cancel{8}\cdot 49\cdot 5\cancel{0}\cdot 51\cdot 52}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=4\cdot 49\cdot 5\cdot 51\cdot 52=\ldots$

Συνδυασμοί με επανάληψη

Το πλήθος συνδυασμών των ν διαφορετικών στοιχείων ανά k, με επαναλήψεις, είναι ίσο με το πλήθος των απλών συνδυασμών των $(\nu+k-1)$ στοιχείων ανά k. Δηλαδή είναι $\binom{\nu+k-1}{k}$.

Π.χ. 45 Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματισθούν από τους αριθμούς 2, 4, 6, 8, 9, <u>με ελεύθερη επανάληψη των αριθμών αυτών</u>;

Είναι $\binom{\nu+k-1}{k}=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=5\cdot 7=35$

Π.χ. 46 Πόσοι είναι οι δυνατοί συνδυασμοί αν απαντάς σε 6 από τις 9 ερωτήσεις; Είναι $\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\ 3!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9}{3!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3}=7\cdot 4\cdot 3=7\cdot 12=84$.

Π.χ. 47 Στο τυχερό παίγνιο ΛΟΤΤΟ του ΟΠΑΠ ο παίκτης καλείται να επιλέξει 6 από τους 49 αριθμούς. Πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί;

Είναι $\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!\ 43!}=\frac{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{6!}=\frac{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=$

$$\frac{44\cdot 9\cdot 46\cdot 47\cdot 2\cdot 49}{6}=\frac{22\cdot 9\cdot 46\cdot 47\cdot 2\cdot 49}{3}=22\cdot 3\cdot 46\cdot 47\cdot 98=66\cdot 46\cdot 47\cdot 98=\ldots$$

Π.χ. 48 Από τους 30 σπουδαστές και τις 4 σπουδάστριες ενός τμήματος, θα συγκροτηθεί τετραμελής επιτροπή αποτελούμενη από 2 σπουδαστές και 2 σπουδάστριες. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί η επιτροπή;

Οι σπουδαστές επιλέγονται κατά $\binom{30}{2}$ τρόπους, και οι σπουδάστριες κατά $\binom{4}{2}$ τρόπους. Συνολικά, υπάρχουν $\binom{30}{2}\cdot\binom{4}{2}$ τρόποι συγκρότησης της επιτροπής.

Π.χ. 49 Πόσες διαφορετικές εξάδες προκύπτουν αν από 12 αριθμούς, επιλέξουμε τους 6;

$$\binom{12}{6}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{6!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot \cancel{12}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{3\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}}=\frac{7\cdot 2\cdot 9\cdot 2\cdot 11}{3}.$$

$$=7\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 11=7\cdot 12\cdot 11=77\cdot 12=924$$

Π.χ. 50 Πόσες τριάδες μπορούν να σχηματιστούν, με μπάλες του ιδίου χρώματος, από 4 μπλε, 6 λευκές και 9 κόκκινες λάμπες;

Από τις 4 χρώματος μπλε λάμπες, οι 3 επιλέγονται κατά $\binom{4}{3}$ τρόπους.

Από τις 6 χρώματος λευκού λάμπες, οι 3 επιλέγονται κατά $\binom{6}{3}$ τρόπους.

Από τις 9 χρώματος κόκκινου λάμπες, οι 3 επιλέγονται κατά $\binom{9}{3}$ τρόπους.

Είναι $\binom{4}{3}+\binom{6}{3}+\binom{9}{3}=4+20+84=108$ τριάδες.

Π.χ. 51 Πόσες πενταμελείς ομάδες μπορούν να συγκροτηθούν από 10 πλοιάρχους και 6 μηχανικούς, αν στην κάθε ομάδα περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας μηχανικός; Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις σχετικά με τη συγκρότηση της επιτροπής:

Μηχανικοί	Πλοίαρχοι	Σύνολο
1	4	5
2	3	5
3	2	5
4	1	5
5	0	5

Είναι $\binom{10}{4}\binom{6}{1}+\binom{10}{3}\binom{6}{2}+\binom{10}{2}\binom{6}{3}+\binom{10}{1}\binom{6}{4}+\binom{10}{0}\binom{6}{5}=$

$210\cdot 6+120\cdot 15+45\cdot 20+10\cdot 15+6=$

$1260+1800+900+150+6=3060+1056=4116$

Π.χ. 52 Κατά πόσους τρόπους μπορεί η Ζιζέλ να καλέσει από τους 11 γνωστούς της δευτεροετείς σπουδαστές/στριες, τους 5 για καφέ αν (**α**) οι 2 εξ αυτών είναι παντρεμένοι και ως εκ τούτου αν καλεστούν, πρέπει να καλεστούν μαζί, (**β**) οι 2 από τους 11 δεν πρέπει να καλεστούν μαζί διότι είναι τσακωμένοι;

(**α**) Αν καλεστούν οι 2 παντρεμένοι, τότε οι υπόλοιποι 3 καλεσμένοι επιλέγονται από το σύνολο των 9 σπουδαστών κατά $\binom{9}{3}$ τρόπους.

$$11\begin{cases} 5 \text{ Επιλέγονται}\begin{cases} 2 \text{ Έγγαμοι} \\ 3 \text{ Τυχεροί που επιλέγονται απο } 11-2=9 \end{cases} \\ 6 \text{ Δεν επιλέγονται} \end{cases}$$

Αν δεν κληθούν οι 2 παντρεμένοι, πρέπει από τους υπόλοιπους 9 σπουδαστές, να επιλεγούν οι 5 καλεσμένοι και αυτό μπορεί να γίνει κατά $\binom{9}{5}$ τρόπους.

$$11-2\text{έγγαμοι}=9\begin{cases} 5 \text{ Επιλέγονται} \\ 4 \text{ Δεν επιλέγονται} \end{cases}$$

Συνολικά, η επιλογή των καλεσμένων μπορεί να γίνει κατά $\binom{9}{3}+\binom{9}{5}$ τρόπους.

(**β**) Αν οι 2 τσακωμένοι σπουδαστές δεν κληθούν, τότε πρέπει από τους υπολοίπους 9 σπουδαστές, να επιλεγούν οι 5 καλεσμένοι και αυτό μπορεί να συμβεί κατά $\binom{9}{5}$ τρόπους. Αν από τους 2 τσακωμένους σπουδαστές κληθεί μόνον ο ένας, τότε πρέπει από τους υπολοίπους 9 σπουδαστές να επιλεγούν οι άλλοι 4 που θα προσκληθούν και αυτό μπορεί να γίνει κατά $\binom{9}{4}$ τρόπους την κάθε φορά, δηλαδή συνολικά $\binom{9}{4}+\binom{9}{4}=2\binom{9}{4}$ τρόπους. Τελικά, η επιλογή των καλεσμένων μπορεί να γίνει κατά $\binom{9}{5}+2\binom{9}{4}$ τρόπους.

Π.χ. 53 Με πόσους τρόπους σχηματίζεται μία τετραμελής επιτροπή εν τα μέλη της επιλεγούν από τους **10** μηχανικούς <u>και</u> ο ένας εξ΄ αυτών ορισθεί ως πρόεδρος της; Τα 4 μέλη της επιτροπής επιλέγονται από τα 10 υποψήφια μέλη κατά $\binom{10}{4}$ τρόπους. Επειδή πρέπει ο ένας εκ των 4 επιλεγέντων να ορισθεί πρόεδρος της επιτροπής, θέση που μπορεί να καταληφθεί από τον κάθε ένα εκ των 4 επιλεγέντων, έχομε 4 περιπτώσεις. Συνεπώς:

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{4}=4\binom{10}{4}=4\frac{10!}{4!\ 6!}=4\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!}=$$

$$\cancel{4}\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot \cancel{4}}=7\cdot 4\cdot 3\cdot 10=28\cdot 30=840$$

Π.χ. 54 Από 15 καθηγητές πρόκειται να μετατεθούν οι 5. Δυο εκ των 15 είναι σύζυγοι, άρα ή μετατίθενται και οι 2 μαζί ή κανένας τους. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των 5 καθηγητών που θα μετατεθούν; Έχουμε δυο περιπτώσεις.

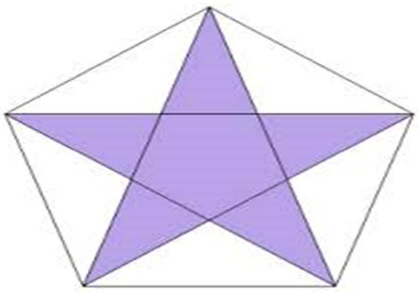
Στην **1η περίπτωση** παίρνουν μετάθεση και οι 2 έγγαμοι καθηγητές. Συνεπώς καταλαμβάνουν τις 2 από τις 5 προς μετάθεση θέσεις. Οι υπόλοιπες 3 θέσεις μετατεθειμένων, θα διεκδικηθούν από τους υπολοίπους 13 καθηγητές κατά $\binom{13}{3}$ τρόπους.

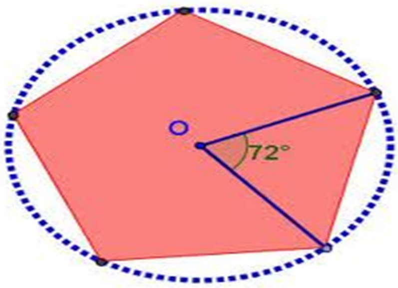
Στη **2η περίπτωση** το ζευγάρι των καθηγητών δε λαμβάνει μετάθεση. Συνεπώς οι υπόλοιποι 13 καθηγητές που απομένουν, θα διεκδικήσουν και τις 5 προς μετάθεση θέσεις. Αυτό συμβαίνει κατά $\binom{13}{5}$ τρόπους.

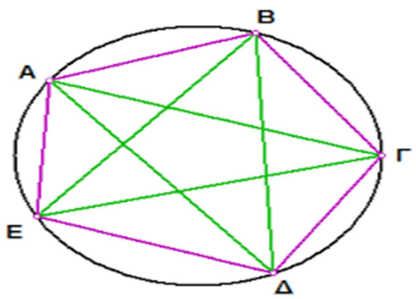
Συνολικά $\binom{13}{5}+\binom{13}{3}=\dfrac{13!}{5!\ 8!}+\dfrac{13!}{3!\ 10!}=99\cdot 13+22\cdot 13=121\cdot 13=1.573$

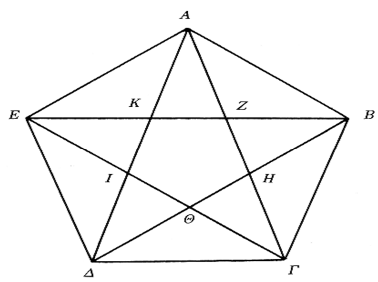
Π.χ. 55 Πόσοι δρόμοι πρέπει να κατασκευασθούν, προκειμένου να συνδεθούν οδικώς, μεταξύ τους πέντε πόλεις; Το πλήθος των δρόμων ισούται με το πλήθος των συνδυασμών των 5 αντικειμένων ανά 2.

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\ (5-2)!}=\frac{5!}{2!\ 3!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$$



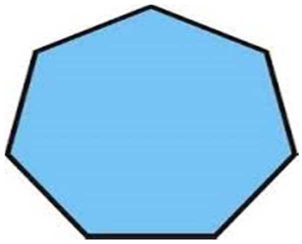


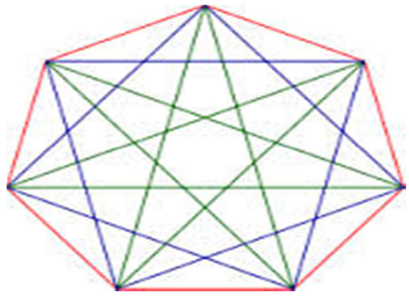




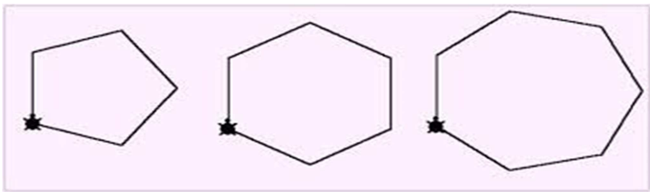
Π.χ. 56 Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν, 7 σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου; Πόσα τρίγωνα ορίζουν, τα ανωτέρω σημεία; Εφόσον τα 7 σημεία ανήκουν στην περιφέρεια του κύκλου, ανά 3 σημεία δεν είναι συνευθειακά. Συνεπώς, ανά 2 σημεία ορίζουν διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα και ανά 3 σημεία ορίζουν διαφορετικά τρίγωνα. Το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων είναι

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\ (7-2)!}=\frac{7!}{2!\ 5!}=\frac{6\cdot 7}{2!}=\frac{42}{2}=21$$





(β) Το πλήθος των τριγώνων είναι $\binom{7}{3}=\dfrac{7!}{3!\ (7-3)!}=\dfrac{7!}{3!\ 4!}=\dfrac{5\cdot 6\cdot 7}{3!}=5\cdot 7=35$



Π.χ. 57 Με πόσους τρόπους, μπορούν οι 11 ποδοσφαιριστές μίας ομάδος να χωρισθούν σε μία:

(**α**) εξαμελή και μία πενταμελή ομάδα,

(**β**) πενταμελή, μία τετραμελή και μία διμελή ομάδα;

(**α**) Η όλη διαδικασία χωρίζεται σε δυο φάσεις.

Κατά την **1η φάση** επιλέγονται από τα 11 άτομα τα 6 άτομα με $\binom{11}{6}$ τρόπους.

Κατά τη **2η φάση** από τα 5 εναπομείναντα άτομα επιλέγονται τα 5, με $\binom{5}{5}$ τρόπους.

Τελικά, υπάρχουν $\binom{11}{6}\binom{5}{5}=\binom{11}{6}\cdot 1=\binom{11}{6}=\dfrac{11!}{6!\ (11-6)!}=$

$\dfrac{11!}{6!\ 5!}=\dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{5!}=\dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot \cancel{10}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \cancel{5}}=\dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 11}{3\cdot 4}=7\cdot 2\cdot 3\cdot 11=14\cdot 33=462$ τρόποι.

(**β**) Η όλη διαδικασία χωρίζεται σε τρεις φάσεις.

Κατά την **1η φάση** επιλέγονται από τα 11 άτομα τα 5 άτομα με $\binom{11}{5}$ τρόπους. Κατά τη **2η φάση** από τα 6 εναπομείναντα άτομα επιλέγονται τα 4 άτομα με $\binom{6}{4}$ τρόπους.

Κατά την **3η φάση** από τα 11–5–4=2 άτομα επιλέγονται τα 2 άτομα με $\binom{2}{2}$ τρόπους.

Τελικά, υπάρχουν $\binom{11}{5}\binom{6}{4}\binom{2}{2}=\binom{11}{5}\cdot\binom{6}{4}\cdot 1=\binom{11}{5}\cdot\binom{6}{4}=$

$\dfrac{11!}{5!\ (11-5)!}\ \dfrac{6!}{4!\ (6-4)!}=\dfrac{11!}{5!\ 4!\ 2!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{4!\ 2!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2}=$

$7\cdot 9\cdot 10\cdot 11=630\cdot 11=6.930$ τρόποι

Παρατήρηση 5 $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\ 4!}$ $\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\ 3!}$ $\binom{11}{5}=\frac{11!}{5!\ 6!}$ $\binom{11}{6}=\frac{11!}{6!\ 5!}$

Π.χ. 58 Παγωτό προσφέρετε σε **5** είδη (σοκολάτα, βανίλια, φράουλα, μπανάνα, φιστίκι). Με πόσους τρόπους γεμίζει ένα κυπελάκι με **4** μπάλες παγωτού αν

(**α**) οι μπάλες είναι διαφορετικές,

(**β**) 2 μπάλες είναι ίδιες,

(**γ**) 3 μπάλες είναι σοκολάτα;

(**α**) Οι τρόποι είναι όσοι και οι συνδυασμοί των 5 αντικειμένων ανά 4, δηλαδή $\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!\ (5-4)!}=\frac{5!}{4!}=5$.

Σοκολάτα	Βανίλια	Φράουλα	Μπανάνα	Φιστίκι	Μπάλες
✓	✓	✓	✓		4
✓	✓	✓		✓	4
✓	✓		✓	✓	4
✓		✓	✓	✓	4
	✓	✓	✓	✓	4

(**β**) Από τα 5 είδη παγωτού επιλέγεις τα 4. Από τις 4 μπάλες οι 2 θα είναι ίδιες, άρα οι άλλες 2 θα είναι διαφορετικές τόσο με τις πρώτες όσο και μεταξύ τους. Η όλη διαδικασία χωρίζεται σε δυο φάσεις.

Κατά την **1η φάση**, επιλέγονται οι δυο διαφορετικές μπάλες παγωτού (έστω σοκολάτα και βανίλια) κατά $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{2!}=10$ τρόπους.

$$\sigma o\kappa\begin{cases}\beta\alpha\nu\\ \varphi\rho\\ \mu\pi\alpha\nu\\ \varphi\iota\sigma\end{cases},\ \beta\alpha\nu\begin{cases}\sigma o\kappa\\ \varphi\rho\\ \mu\pi\alpha\nu\\ \varphi\iota\sigma\end{cases},\ \varphi\rho\begin{cases}\beta\alpha\nu\\ \sigma o\kappa\\ \mu\pi\alpha\nu\\ \varphi\iota\sigma\end{cases},\ \mu\pi\alpha\nu\begin{cases}\beta\alpha\nu\\ \varphi\rho\\ \sigma o\kappa\\ \varphi\iota\sigma\end{cases},\ \varphi\iota\sigma\begin{cases}\beta\alpha\nu\\ \varphi\rho\\ \mu\pi\alpha\nu\\ \sigma o\kappa\end{cases}$$

Οι 20 περιπτώσεις των ως άνω σχημάτων διαιρούνται δια του 2, διότι π.χ. η επιλογή (συνδυασμός γεύσεων) σοκολάτα –βανίλια είναι ακριβώς ίδια με την επιλογή βανίλια –σοκολάτα.

Κατά τη **2η φάση**, επιλέγονται οι δυο ίδιες μπάλες παγωτού από τις τρεις γεύσεις – είδη που απέμειναν (φράουλα, μπανάνα και φιστίκι), κατά $\binom{3}{1}=3$ τρόπους.

Συνολικά, υπάρχουν $\binom{5}{2}\binom{3}{1}=10\cdot 3=30$ τρόποι.

Σοκολάτα	Βανίλια	Φράουλα	Μπανάνα	Φιστίκι
		✓	✓	✓
		✓	✓	✓

(**γ**) Αφού οι 3 μπάλες είναι σοκολάτα, η μία μπάλα παγωτού που απομένει, θα επιλεγεί από τις υπόλοιπες 4 γεύσεις κατά $\binom{4}{1}=4$ τρόπους.

Σοκολάτα	Βανίλια	Φράουλα	Μπανάνα	Φιστίκι
✓				
✓				
✓				
	✓	✓	✓	✓

Π.χ. 59 Δείξτε ότι, αν ν πλοιοκτήτες που συμμετέχουν σε επίσημο δείπνο, τσουγκρίσουν τα ποτήρια τους ανά δύο, θα ακουστούν $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ τσουγκρίσματα.

Το κάθε ένα άτομο ανταλλάσοντας από μία χειραψία με τον κάθε έναν από τους υπόλοιπους καλεσμένους, θα κάνει $(\nu-1)$ χειραψίες, όσοι είναι οι υπόλοιποι καλεσμένοι. Άρα, οι συνολικές χειραψίες που θα γίνουν από τους ν συνδαιτυμόνες είναι $\nu(\nu-1)$ το πλήθος. Επειδή όμως η χειραψία ανάμεσα στον 1^o και στον 2^o καλεσμένο είναι ακριβώς ίδια με τη χειραψία ανάμεσα στον 2^o και στον 1^o, ο πραγματικός αριθμός των χειραψιών που έγιναν είναι ο μισός του ανωτέρω συνολικού δηλαδή $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$.

Π.χ. 60 Πόσοι επιβάτες κρουαζιερόπλοιου συμμετείχαν σε δείπνο, αν ακούστηκαν συνολικά 120 τσουγκρίσματα, διότι τσούγκρισαν όλοι τα ποτήρια τους ανά δυο;

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2}=120 \Leftrightarrow \nu^2-\nu=240 \Leftrightarrow \nu=16$$

Π.χ. 61 Πόσες χειραψίες θα γίνουν, όταν 10 ναυτικοί ανταλλάξουν χειραψία ο κάθε ένας με όλους τους άλλους; $\frac{10(10-1)}{2}=5\cdot 9=45$.

Ασκήσεις

11 Δείξτε ότι $\binom{\nu}{k}=\binom{\nu}{\nu-k}$.

12 Πόσοι διψήφιοι αριθμοί υπάρχουν;

13 Πόσοι τριψήφιοι άρτιοι αριθμοί υπάρχουν;

14 Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν, με άθροισμα των δύο πρώτων ψηφίων τους 6;

15 Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε να κρεμαστούν 8 παλτά σε κρεμάστρα των 6 θέσεων;

16 Κάλπη περιέχει 4 λευκά και 5 μαύρα σφαιρίδια. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 4 σφαιρίδια, ώστε
(**α**) και τα 4 να είναι λευκά;
(**β**) 2 να είναι λευκά;
(**γ**) 1 τουλάχιστο να είναι λευκό;
(**δ**) το πολύ 1 να είναι λευκό;

17 Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΝΕΡΟ;

18 Με πόσους τρόπους μπορούν 6 σπουδαστές να τοποθετηθούν σε σειρά; Αν καθίσουν κυκλικά πόσοι τρόποι υπάρχουν;

19 Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί από 5 σπουδαστές 5-μελής επιτροπή (πρόεδρος, αντιπρόεδρος, γραμματέας, ταμίας, μέλος);

20 Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί, με διαφορετικά ψηφία, μπορούν να σχηματισθούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5;

21 Με πόσους τρόπους μοιράζονται σε 3 από τους 11 παίκτες, 3 φανέλες με τα νούμερα 0, -1, -2;

22 Με πόσους τρόπους 5 σπουδαστές μπορούν να καθίσουν σε 3 καρέκλες γύρω από κυκλικό τραπέζι;

23 Με πόσους τρόπους 8 αυτοκίνητα μπορούν να παρκάρουν σε 6 θέσεις στάθμευσης;

24 Με πόσους τρόπους 6 αυτοκίνητα μπορούν να παρκάρουν σε 8 θέσεις στάθμευσης;

25 Με πόσους τρόπους 6 άτομα μπορούν να διανυκτερεύσουν σε 8 ξενοδοχεία;

26 Πόσες διαφορετικές τριμελείς ομάδες σχηματίζονται από 7 σπουδαστές;

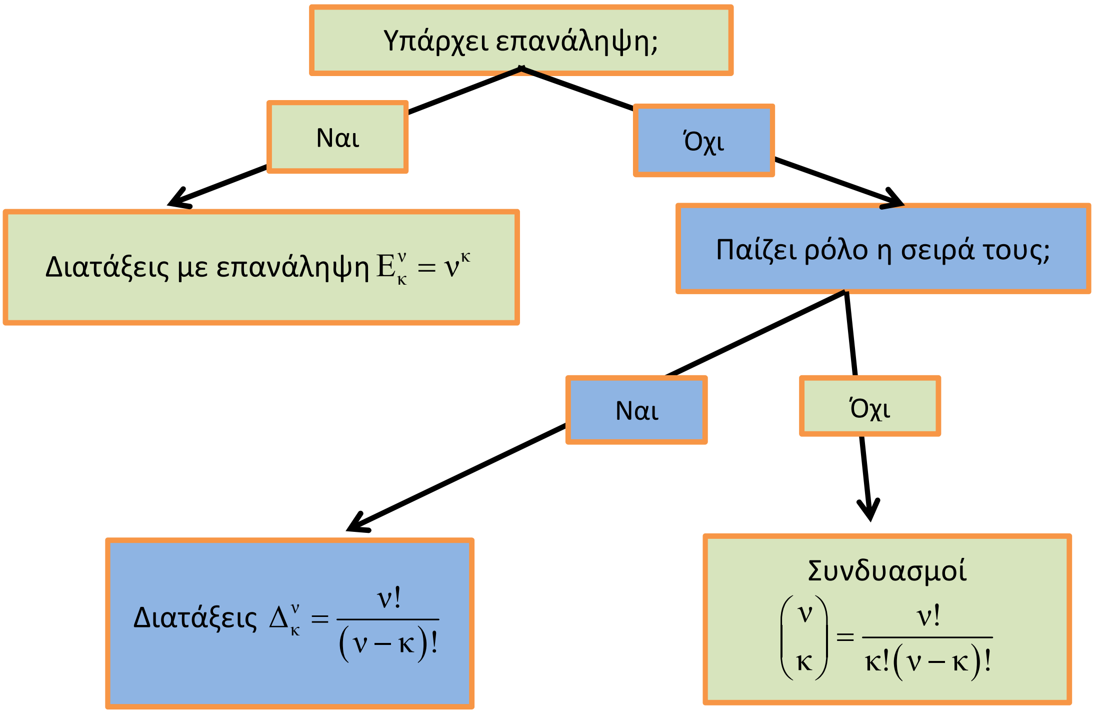
27 Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΑΚΑΜΑΤΡΑ;

28 Πόσες διαγώνιες έχει ένα ν –γωνο;

29 Με πόσους τρόπους μπορεί ο προπονητής 12 παικτών του basket να σχηματίσει 2 πεντάδες;

Παρατήρηση 6 Η τοποθέτηση σε ευθεία γραμμή των ν στοιχείων ενός συνόλου, γίνεται με $P_\nu = \nu!$ τρόπους, όσες και οι μεταθέσεις των ν στοιχείων. Η κυκλική μετάθεση των ν στοιχείων ενός συνόλου, γίνεται με $(\nu-1)!$ τρόπους. Η τοποθέτηση σε ευθεία γραμμή των στοιχείων των ν συνόλων $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ ...,\ \mathrm{A}_\nu$, που έχουν αντίστοιχα πληθαρίθμους $\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_\nu$, έτσι ώστε τα στοιχεία του κάθε συνόλου να είναι συνεχώς τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, γίνεται με $\nu!\ \cdot \sigma_1!\ \cdot \sigma_2!\ \cdot\ ...\ \cdot \sigma_\nu!$ τρόπους. Αρχικά, τα ν το πλήθος σύνολα τοποθετούνται σε σειρά με $\nu!$ τρόπους. Ακολούθως, τα στοιχεία του συνόλου A_1 τοποθετούνται σε σειρά κατά $\sigma_1!$, του συνόλου A_2 κατά $\sigma_2!$, κοκ. Η κυκλική μετάθεση των στοιχείων των ανωτέρω ν συνόλων γίνεται με $(\nu-1)!\ \cdot \sigma_1!\ \cdot \sigma_2!\ \cdot\ ...\ \cdot \sigma_\nu!$ τρόπους.

Παρατήρηση 7 Για την επιλογή του κατάλληλου τύπου που θα χρησιμοποιηθεί για την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου ισχύει:



Παρατήρηση 8 Για την εναλλάξ τοποθέτηση γραμμικά (ή κυκλικά) των στοιχείων των συνόλων A_1, A_2 με πληθαρίθμους σ_1, σ_2 αντίστοιχα ($\sigma_1 > \sigma_2$), τοποθετούνται αρχικά τα στοιχεία του A_1 (διότι $\sigma_1 > \sigma_2$), κατά $\sigma_1!$ (ή $(\sigma_1 - 1)!$) τρόπους και στη συνέχεια οι $(\sigma_1 - 1)$ το πλήθος ενδιάμεσες θέσεις καλύπτονται από τα στοιχεία του A_2 κατά $\Delta^{\sigma_1 - 1}_{\sigma_2}$ τρόπους.

Παρατήρηση 9 Το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου A (ν στοιχεία), σε k υποσύνολα A_1 (σ_1 στοιχεία), A_2 (σ_2 στοιχεία),…, A_k (σ_k στοιχεία), με $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k = \nu$, είναι $\Pi = \binom{\nu}{\sigma_1} \cdot \binom{\nu - \sigma_1}{\sigma_2} \cdot \cdots \cdot \binom{\nu - (\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_{k-1})}{\sigma_k}$ αν ενδιαφέρει και $\Pi' = \frac{\Pi}{k!}$ αν δεν ενδιαφέρει η σειρά των υποσυνόλων.

Παρατήρηση 10 (Το πρόβλημα του αναγραμματισμού) Το πλήθος αναγραμματισμών μίας λέξης ν γραμμάτων, που έχει σ_1, σ_2, ..., σ_k, αντίστοιχα, ίδια γράμματα, είναι

$$\Pi = \binom{\nu}{\sigma_1} \binom{\nu - \sigma_1}{\sigma_2} \cdots \binom{\nu - (\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_{k-1})}{\sigma_k} = \frac{\nu!}{\sigma_1!\ \sigma_2!\ \ldots\ \sigma_k!}$$

διότι ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου των ν στοιχείων σε υποσύνολα των σ_1, σ_2, ..., σ_k στοιχείων. Αν όλα τα γράμματα είναι ανόμοια, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξεως είναι $\Pi = \nu!$

Παρατήρηση 11 Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου που δημιουργείται αν από τα σύνολα A_1 (πληθαρίθμου ν_1),…, A_k (πληθαρίθμου ν_k), επιλεγούν, αντίστοιχα,

σ_1 ,..., σ_k στοιχεία είναι $\binom{\nu_1}{\sigma_1}\cdot\binom{\nu_2}{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot\binom{\nu_k}{\sigma_k}$. Αν ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων του νέου συνόλου, το πλήθος των στοιχείων του είναι

$$\binom{\nu_1}{\sigma_1}\cdot\binom{\nu_2}{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot\binom{\nu_k}{\sigma_k}\cdot \mathrm{P}_{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k}.$$

Παρατήρηση 12 (Ημερομηνίες γέννησης) Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων ώστε τα ν το πλήθος άτομα να έχουν γεννηθεί μία οποιαδήποτε ημέρα του έτους είναι $\mathrm{E}_{\nu}^{365}=365^{\nu}$. Υπάρχουν 365 περιπτώσεις προκειμένου τα ν το πλήθος άτομα να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, δηλαδή μία από τις 365 ημέρες του έτους.

Υπάρχουν Δ_{ν}^{365} τρόποι προκειμένου τα ν το πλήθος άτομα να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές, ανά δύο, ημερομηνίες. Υπάρχουν $\mathrm{E}_{\nu}^{365}-\Delta_{\nu}^{365}$ τρόποι προκειμένου από τα ν το πλήθος άτομα, δύο τουλάχιστον να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία.

Υπάρχουν $365\cdot\Delta_{\nu-\mu}^{364}$ τρόποι προκειμένου από τα ν το πλήθος άτομα, τα πρώτα μ το πλήθος (όπου $\mu<\nu$), να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία ενώ τα υπόλοιπα ($\nu-\mu$ το πλήθος άτομα), σε άλλες και διαφορετικές ανά δύο ημερομηνίες.

Υπάρχουν $\binom{\nu}{\mu}\cdot 365\cdot\Delta_{\nu-\mu}^{364}$ τρόποι προκειμένου από τα ν το πλήθος άτομα, τα μ το πλήθος (όπου $\mu<\nu$), να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία ενώ τα υπόλοιπα ($\nu-\mu$ το πλήθος άτομα), σε άλλες και διαφορετικές ανά δύο ημερομηνίες.

Ασκήσεις

30 Με πόσους τρόπους μπορούν, 3 Έλληνες, 4 Γάλλοι, 5 Πορτογάλοι και 6 Κύπριοι σύνεδροι να καθίσουν, ώστε τα μέλη κάθε χώρας να βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο:

(**α**) σε μία σειρά ενός αμφιθεάτρου,

(**β**) γύρω από κυκλικό τραπέζι;

31 Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα στοιχεία του συνόλου $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ k,\ s\}$ σε μία ευθεία γραμμή , ώστε τα δύο γράμματα να είναι συνεχώς μαζί; Ομοίως για κυκλική μετάθεση.

32 Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν σε ευθεία γραμμή 2 πλοίαρχοι και 4 μηχανικοί ώστε οι πλοίαρχοι να μην τοποθετούνται ο ένας δίπλα στον άλλο; Πόσοι τέτοιοι τρόποι υπάρχουν αν καθίσουν κυκλικά;

33 Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν σε ευθεία γραμμή (ή κυκλικά) 4 πλοίαρχοι και 4 μηχανικοί ώστε

(**α**) οι 4 πλοίαρχοι να κάθονται μαζί;

(**β**) οι πλοίαρχοι και οι μηχανικοί να κάθονται εναλλάξ;

34 Με πόσους τρόπους 8 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία μπορούν να μοιρασθούν σε 2 σχολές, ώστε η 1^{η} σχολή να λάβει 5 και η 2^{η} σχολή να λάβει 3 βιβλία;

35 Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 9 βιβλία σε 3 ράφια Α, Β, Γ με χωρητικότητες 4, 3, 2 αντίστοιχα;

36 Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιρασθούν εξίσου σε 3 παιδιά 12 διαφορετικά βιβλία;

37 Με πόσους τρόπους μπορούν 6 μηχανικοί να χωρισθούν σε 3 ισοπληθείς ομάδες;

38 Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί των λέξεων ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΦΥΣΙΚΗ;

39 Πόσοι τρόποι υπάρχουν για τίμιο νόμισμα που ρίχνεται 7 φορές να εμφανισθούν
(**α**) 5 κεφαλές (Κ) & 2 γράμματα (Γ),
(**β**) το πολύ 2 κεφαλές;

40 Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε, 4 άτομα να έχουν γενέθλια από 28 Μαρτίου έως 31 Μαΐου;

41 Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε, από 5 άτομα τουλάχιστον τα 2 να έχουν γεννηθεί την ίδια ημέρα της εβδομάδας;

42 Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε 3 άτομα να έχουν γενέθλια
(**α**) την ίδια ημέρα του έτους,
(**β**) διαφορετικές (ανά δύο) ημέρες του έτους,
(**γ**) τα 2 τουλάχιστον την ίδια ημέρα του έτους;

43 Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε από 5 άτομα τα 3 από τα 5 άτομα να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, ενώ τα άλλα 2 σε 2 άλλες και διαφορετικές μεταξύ τους ημερομηνίες;

Η ύπαρξη του τυχαίου

Η ύπαρξη του τυχαίου έχει γίνει αντιληπτή εδώ και χιλιετίες. Η εξήγηση του δεν έχει υπάρξει ακόμα. Στην πρώτη προσπάθεια τους να βάλουν τάξη στην ανεξήγητη ροή των γεγονότων, οι άνθρωποι δημιούργησαν την έννοια της μοίρας. Αρκετά αργότερα, επινόησαν τις πιθανότητες. Πρόκειται μάλλον για το μοναδικό κλάδο των μαθηματικών που δουλεύει πάνω στην απόλυτη αβεβαιότητα.

Για το λόγο αυτό, σε αντίθεση με κάθε άλλον επιστημονικό τομέα, τα αποτελέσματα που δίνει είναι απλά προβλέψεις. Οι πιθανότητες δεν είναι ένα εργαλείο που μπορεί να εξουδετερώσει την έννοια του τυχαίου. Το μόνο που κατάφεραν οι μαθηματικοί με τη δημιουργία αυτής της θεωρίας, ήταν να περιορίσουν την ισχύ του. Να φτιάξουν διαβαθμίσεις ανάλογα με τις πιθανότητες του. Είναι ενδιαφέρον το ότι οι πιθανότητες δεν ανακαλύφθηκαν για να καταπολεμήσουν την έννοια της μοίρας. Ακόμα και οι επιστήμονες αντιλαμβάνονται πως ορισμένα θέματα θα παραμείνουν ανεξήγητα και τυχαία. Η θεωρία των πιθανοτήτων δημιουργήθηκε για χάρη των τυχερών παιχνιδιών, ενώ πέρασαν αρκετά χρόνια ώστε οι μαθηματικοί να αντιληφθούν την πραγματική δύναμη αυτού του κλάδου και να τον χρησιμοποιήσουν για επιστημονικά ζητήματα.

Η έννοια του τυχαίου είναι πολύ βαθειά ριζωμένη στη ζωή μας. Η ύπαρξη μας οφείλεται σε τυχαία γεγονότα. Κάθε σπερματοζωάριο έχει τις ίδιες πιθανότητες, αλλά μήπως τα δύο που προπορεύονταν στον αγώνα δρόμου τράκαραν μεταξύ τους, αφήνοντας μοιραία τη θέση τους στο τρίτο της σειράς; Μπορούμε να βρούμε αμέτρητα αντίστοιχα παραδείγματα που αποδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο του τυχαίου στη ζωή. Οι μαθηματικοί προτιμούν να αποφεύγουν αυτές τις περιπτώσεις, γιατί ως γνωστό, δε μπορούν να αποδεχτούν πως είναι ανίκανοι να τις αντιμετωπίσουν. Παρόλα αυτά, ο κλάδος των πιθανοτήτων, που έχει εμφανιστεί εδώ και μόλις λίγους αιώνες, έχει κάνει τεράστιες προόδους. Πλέον, η έννοια της πιθανότητας είναι ικανή να εξηγήσει πολλά φαινόμενα που διαχρονικά θεωρούνταν τυχαία. Το πιο απλό παράδειγμα των πιθανοτήτων είναι η ρίψη ζαριού, διότι δε μπορεί να προβλεφθεί ποιά από τις 6 πλευρές θα εμφανισθεί. Οι νόμοι των πιθανοτήτων λένε πως αν συνεχίσουμε να ρίχνουμε το ζάρι αρκετές φορές, θα εμφανιστούν όλες οι πλευρές με την ίδια συχνότητα. Κάθε πλευρά έχει περίπου 16,66% πιθανότητα εμφάνισης, που αντιστοιχεί στο ένα έκτο. Δεν είναι όλοι οι υπολογισμοί αντίστοιχης ευκολίας. Στην προηγούμενη περίπτωση τα πιθανά σενάρια ήταν ισοπίθανα. Δεν υπήρχε κάποιος παράγοντας που να επηρεάζει τον υπολογισμό.

Κάθε πλευρά είχε ίσες πιθανότητες με τις υπόλοιπες. Τα σενάρια που θέλουν να προβλέψουν οι επιστήμονες έχουν αρκετούς παράγοντες και τυχαίες μεταβλητές που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Κάθε ξεχωριστός παράγοντας έχει ένα μοναδικό τρόπο που επηρεάζει τα ποσοστά των πιθανοτήτων και επειδή κάθε αποτέλεσμα είναι ουσιαστικά μια πρόβλεψη, αν δεν υπολογιστεί έστω και ένας, όλη η διαδικασία δεν έχει κανένα νόημα. Η αυστηρή θεμελίωση του κλάδου των πιθανοτήτων χάρισε στους επιστήμονες, κάθε κλάδου, μια νέα μέθοδο να διαχειρίζονται τα προβλήματα τους.

Όσο οι πιθανότητες εξελίσσονταν, εισάγονταν όλο και βαθύτερα στην επιστημονική διαδικασία. Ο πρώτος τομέας που επωφελήθηκε από τη δημιουργία των πιθανοτήτων ήταν η **στατιστική**, που βρήκε το καταλληλότερο εργαλείο για να προβλέψει ποσοστά. Αυτό είναι ένα μικρό δείγμα της συνεισφοράς των πιθανοτήτων στις υπόλοιπες επιστήμες. Η **σύγχρονη φυσική** βασίζεται σε πιθανότητες. Η **κβαντομηχανική** και οι νόμοι γύρω από την κίνηση των υποατομικών σωματιδίων, στηρίζονται στα ποσοστά των πιθανοτήτων. Οι τυχαίες κινήσεις των μικρών σωμάτων, δεν είναι δυνατό να προβλεφθούν ξεχωριστά. Οι μαθηματικοί είναι ικανοί να υπολογίσουν τη συνολική κίνηση τους, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που βρίσκουν τα ποσοστά που μπορεί κάποιος να φέρει εξάρες. Η σύγχρονη φυσική βασίζεται στην τύχη, έχοντας περιθώρια μικρών σφαλμάτων, όμως πλέον οι επιστήμονες έχουν βρει τον τρόπο να την κοντρολάρουν. Πιθανότατα η εξήγηση των τυχαίων γεγονότων δε θα μπορέσει να επιτευχθεί ποτέ, αφού όσο εμβαθύνει κάποιος στο χώρο των πιθανοτήτων τόσο πιο πολύ χάνεται. Ο κλάδος των πιθανοτήτων δεν είναι ικανός να λύσει τα μυστήρια που ανέκαθεν απασχολούσαν τους ανθρώπους. Για αυτό το λόγο άλλωστε έχει επινοηθεί η έννοια του τυχαίου και η λέξη μοίρα. Με αυτό το μαθηματικό εργαλείο όμως, η χαοτική φύση του τυχαίου μπορεί να μπει σε μια τάξη.

Η ιστορία της τράπουλας

Η λέξη «τράπουλα», προέρχεται από την ιταλική λέξη "**trappola**" που σημαίνει παγίδα ή δόλος. Η τράπουλα αποτελείται από τα τραπουλόχαρτα. Παιχνίδια με χαρτιά τράπουλας είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα παγκοσμίως. Η καταγωγή της είναι ασιατική, πιθανολογείται ότι γεννήθηκε κάπου μεταξύ Ινδίας και Κίνας περί τον 10^{o} αιώνα. Μερικές κινεζικές τράπουλες χρησιμοποιούν ένα σύστημα που έχει τις ρίζες του στο ντόμινο και στο σκάκι. Τα κινέζικα τραπουλόχαρτα ήταν συγχρόνως και χαρτονομίσματα. Ακόμη και σήμερα, ορισμένες κινεζικές τράπουλες απεικονίζουν νομίσματα. Στην Ευρώπη εμφανίστηκε η τράπουλα, πρώτη φορά, τον 14^{o} αιώνα.

Επικράτησε το γαλλικό σύστημα που έχει τις ρίζες του στον 14^{o} αιώνα και για το λόγο αυτό οι φιγούρες φορούν ενδυμασίες της εποχής αυτής. Η φιγούρα της βασίλισσας προστέθηκε αργότερα, σε αυτές του βασιλιά, του ιππότη και του υπηρέτη.

Στα γαλλικά τραπουλόχαρτα οι φιγούρες πήραν τα ονόματα μεγάλων προσωπικοτήτων της ιστορίας.

- Ο ρήγας κούπα είναι ο **Καρλομάγνος**.
- Ο ρήγας καρό είναι ο **Ιούλιος Καίσαρας**.
- Ο ρήγας σπαθί είναι ο **Μέγας Αλέξανδρος**.
- Ο ρήγας μπαστούνι είναι ο **Δαυίδ**.
- Η ντάμα μπαστούνι είναι η **Παλλάδα Αθηνά**. Οι υπόλοιπες ντάμες είναι η **Ιουδίθ**, η **Ραχήλ** και η **Αρζίν**.
- Ο βαλές καρό είναι ο **Έκτορας**. Οι υπόλοιποι βαλέδες είναι ο **Λάνσελοτ**, ο **Οζιέ** και ο **Λαΐρ**.

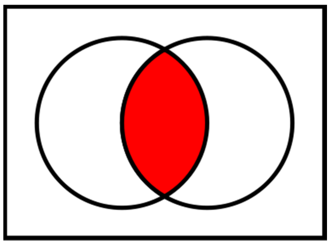
Τα σύμβολα μπαστούνι (**bastoni**), νομίσματα (**denari**), σπαθί (**spade**) και κούπα (**coppe**) συμβολίζουν, αντίστοιχα, τους αγρότες, τους εμπόρους, τους ευγενείς και τον κλήρο.

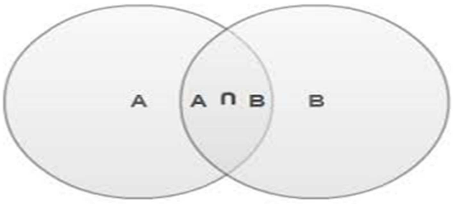
Η τράπουλα έχει συνολικά:

- **365** σύμβολα σε όλα τα χαρτιά της, όσες είναι και οι ημέρες του έτους,
- **12** φιγούρες, όσοι είναι και οι μήνες του έτους,
- **52** φύλλα, όσες είναι και οι εβδομάδες του έτους,
- **4** σύμβολα, όσες είναι και οι εποχές του έτους
- **13** φύλλα με το ίδιο σύμβολο, όσες είναι και οι εβδομάδες κάθε εποχής.

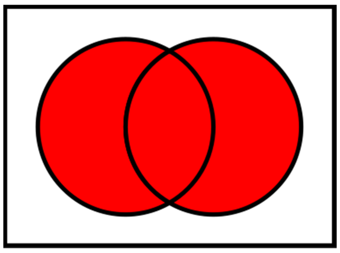
Διαγράμματα του John Venn

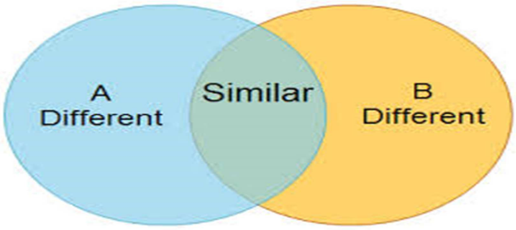
Τομή συνόλων $A \cap B$

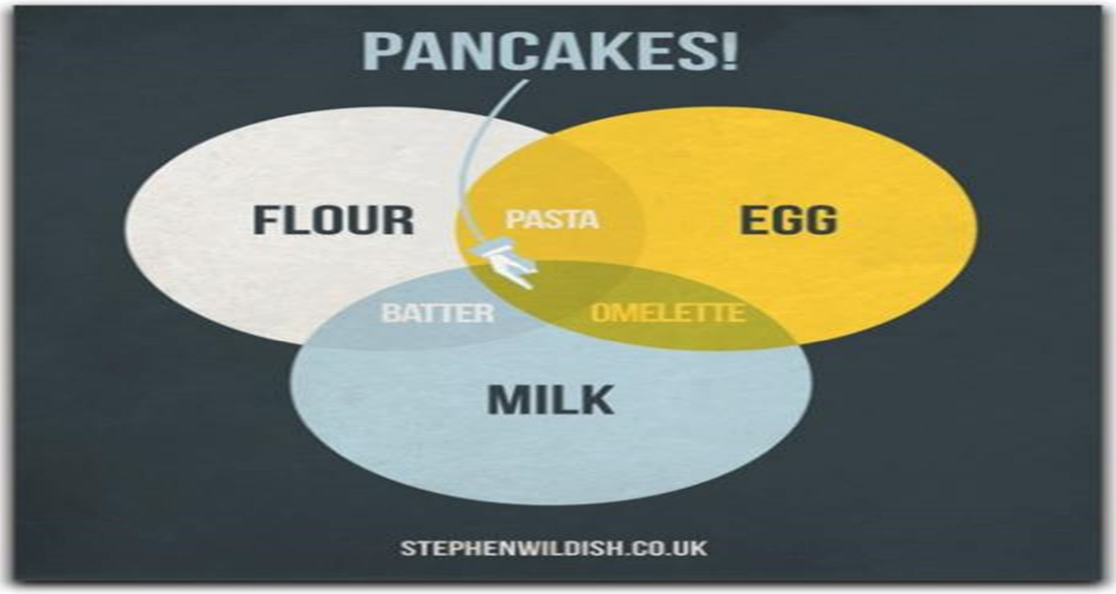


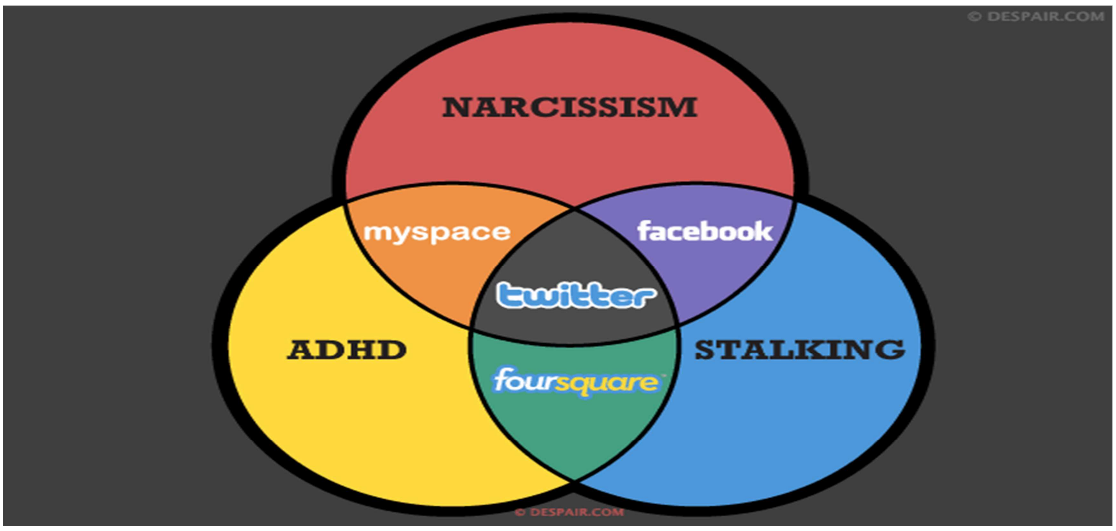


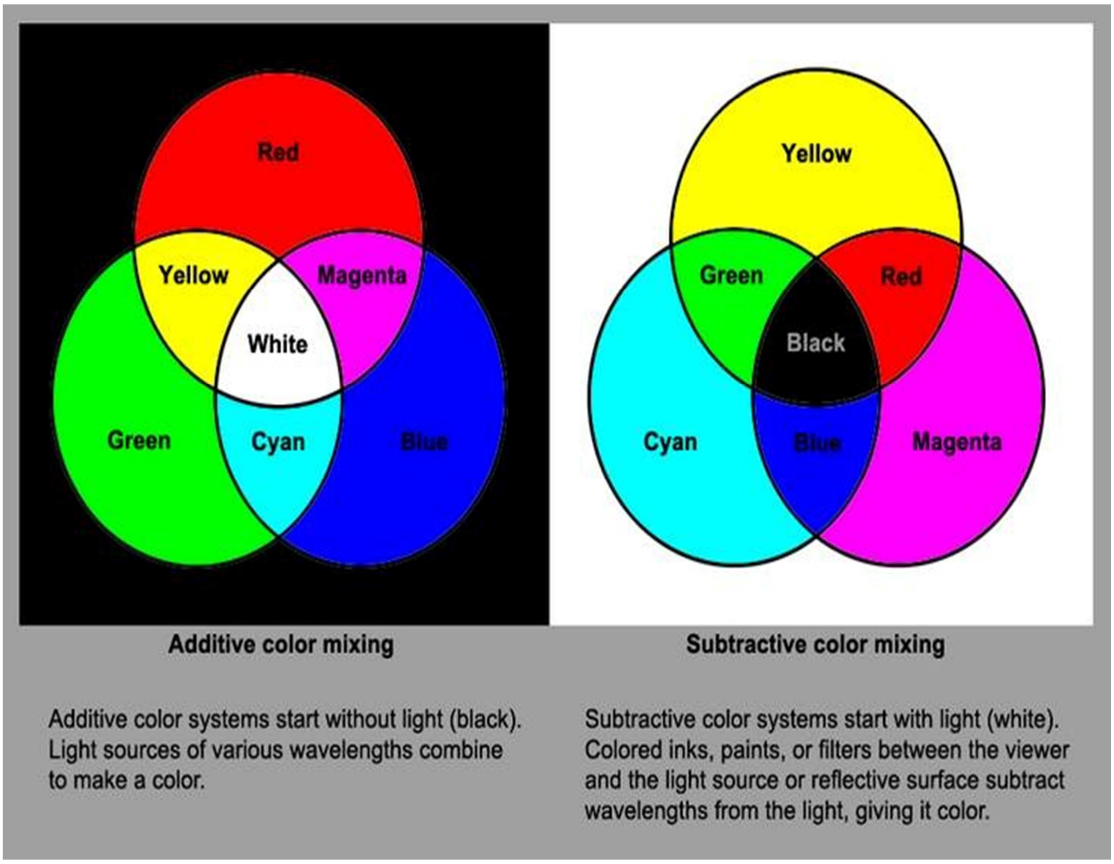
Ένωση συνόλων $A \cup B$



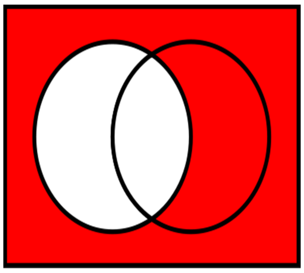




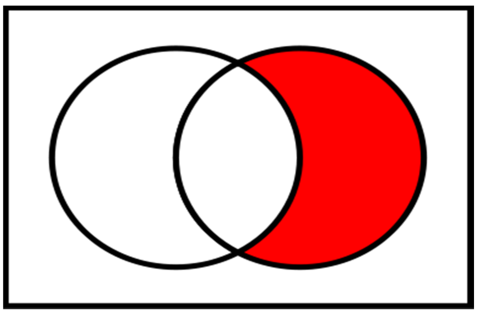


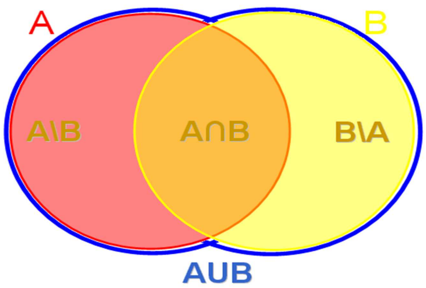


Συμπλήρωμα συνόλου $A^C = A' = \overline{A}$

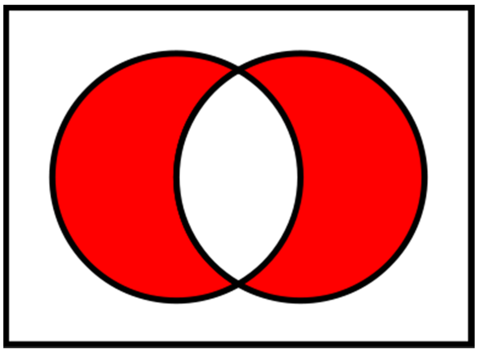


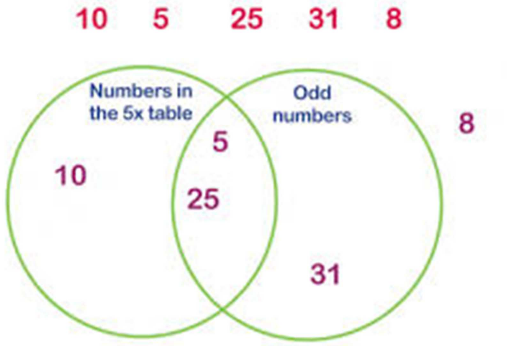
Διαφορά συνόλων $(A-B),\ (B-A)$



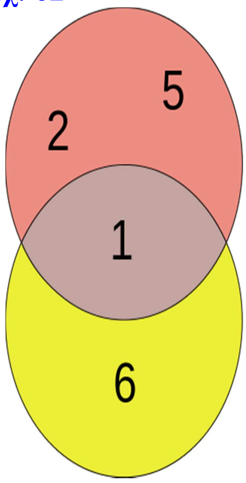


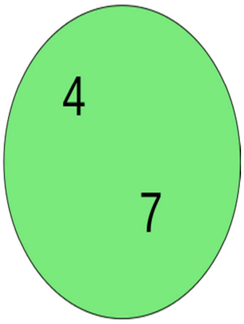
Συμμετρική διαφορά συνόλων $(A-B)\cup(B-A)$

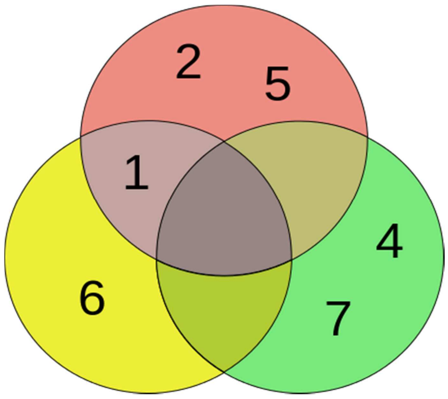


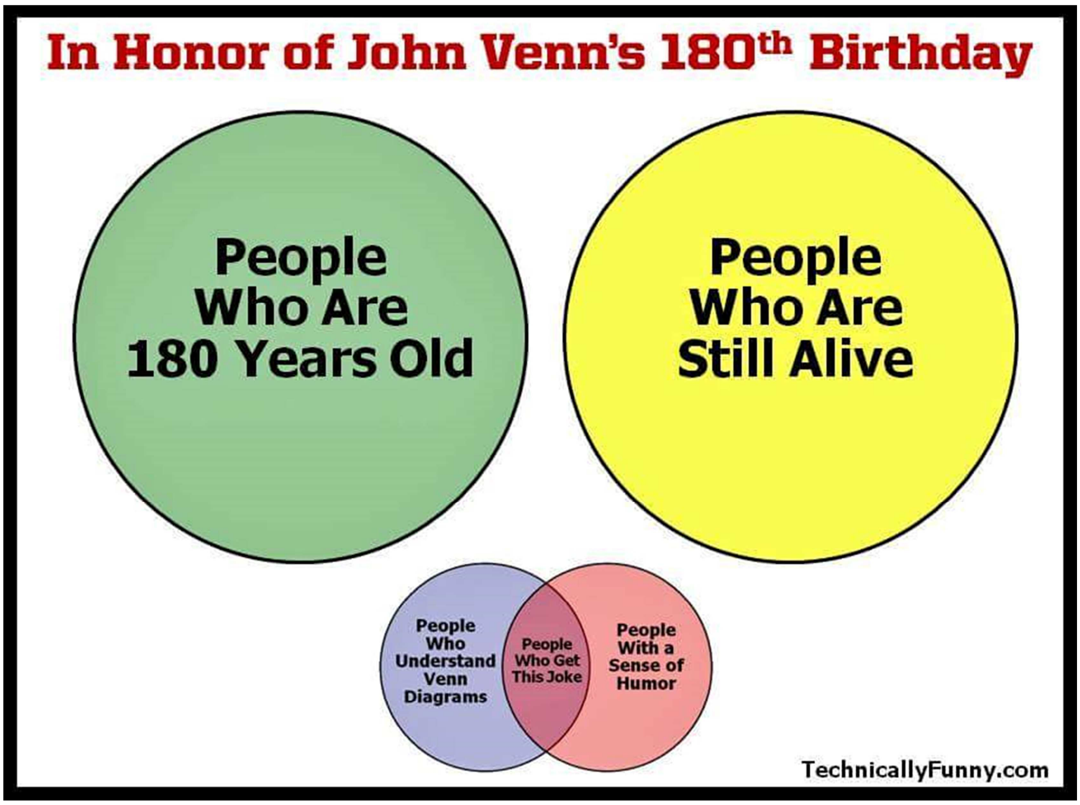

10 5 25 31 8
Numbers in the 5x table
Odd numbers
8
5
10
25
31

Π.χ. 62


2
5
1
6

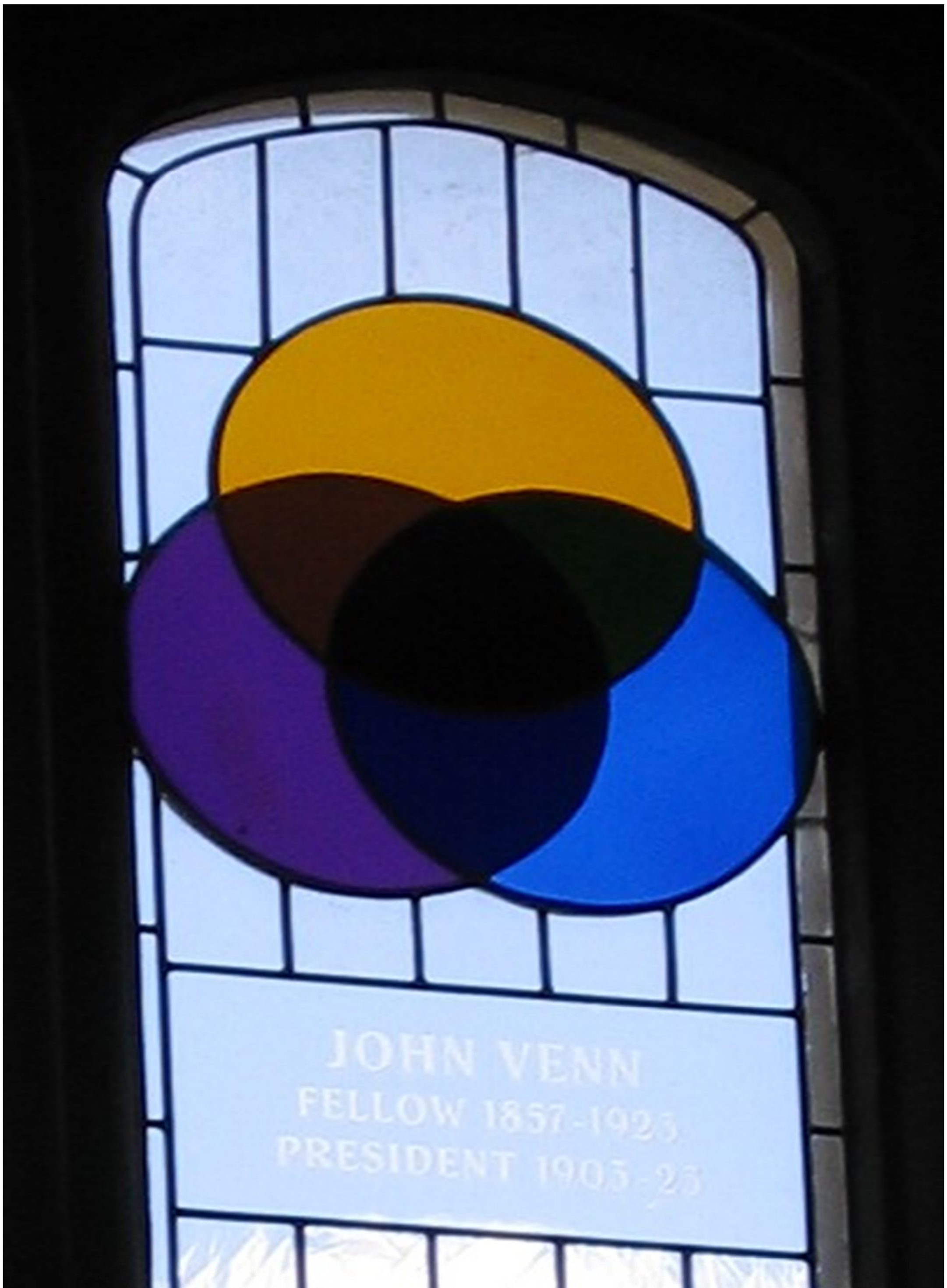

4
7


2
5
1
4
6
7


In Honor of John Venn's 180th Birthday
People Who Are 180 Years Old
People Who Are Still Alive
People Who Understand Venn Diagrams
People Who Get This Joke
People With a Sense of Humor
TechnicallyFunny.com


Google
Vegetation
Mythical
John Venn's 180th Birthday

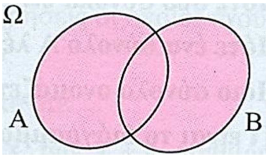

John Venn

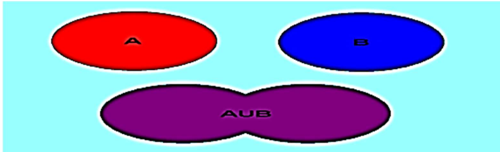

JOHN VENN
FELLOW 1857-1923
PRESIDENT 1903-23

Στοιχεία θεωρίας συνόλων

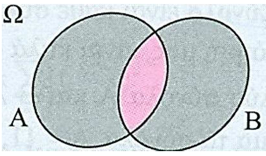
Αξίωμα επεκτατικότητας. Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια στοιχεία. $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{B})$

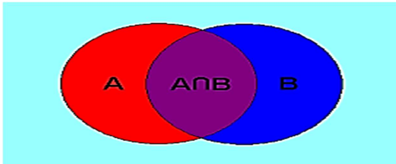
Ένωση δύο συνόλων. $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \{x : (x \in \mathrm{A}) \vee (x \in \mathrm{B})\}$



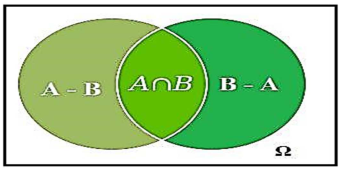


Τομή δύο συνόλων. $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} = \{x : (x \in \mathrm{A}) \wedge (x \in \mathrm{B})\}$



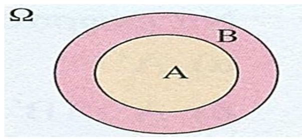


Διαφορά δύο συνόλων. $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{x : (x \in \mathrm{A}) \wedge (x \notin \mathrm{B})\}$



Το κενό σύνολο. $\varnothing = \{\ \}$ Είναι το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Ισχύει ότι $\varnothing \subseteq \mathrm{A}$ για κάθε σύνολο A.

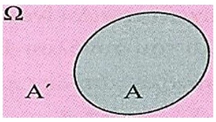
Υποσύνολο. $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{B})$



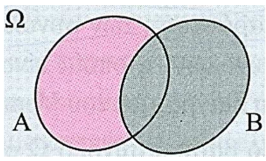
Ισότητα συνόλων. $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow (\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \ \wedge \ \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A})$

Δυναμοσύνολο του A. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{B} : \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}\}$ Είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A.

Συμπλήρωμα. $\overline{\mathrm{A}} = \{x \in \Omega \ \wedge \ x \notin \mathrm{A}\}$



Συμμετρική διαφορά. $\mathrm{A} \ \Delta \ \mathrm{B} = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \bigcup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$



Νόμοι της άλγεβρας Boole

Προσεταιριστικοί νόμοι

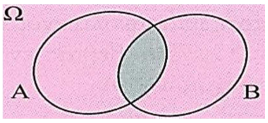
$\mathrm{A} \bigcap (\mathrm{B} \bigcap \Gamma) = (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \bigcap (\mathrm{A} \bigcap \Gamma)$, $\quad \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \bigcup \Gamma) = (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \bigcup (\mathrm{A} \bigcup \Gamma)$

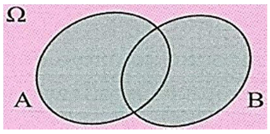
Αντιμεταθετικοί νόμοι $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} = \mathrm{B} \bigcap \mathrm{A}$, $\quad \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \mathrm{B} \bigcup \mathrm{A}$

Επιμεριστικοί νόμοι

$\mathrm{A} \bigcap (\mathrm{B} \bigcup \Gamma) = (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \bigcup (\mathrm{A} \bigcap \Gamma)$, $\quad \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \bigcap \Gamma) = (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \bigcap (\mathrm{A} \bigcup \Gamma)$

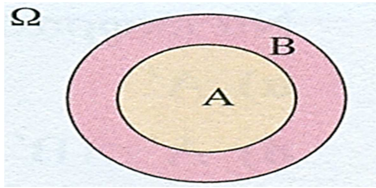
Νόμοι De Morgan $\overline{\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \bigcup \overline{\mathrm{B}}$, $\qquad \overline{\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \bigcap \overline{\mathrm{B}}$





Νόμοι αυτοδυναμίας. $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$

Θεωρήματα



- $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \bigcup B) = B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \bigcap B) = A$
- $A \bigcap \{\ \} = \{\ \}$
- $A \bigcup \{\ \} = A$
- $\overline{\{\ \}} = \Omega$
- $\overline{\Omega} = \{\ \}$
- $A \bigcap \Omega = A$
- $A \bigcup \Omega = \Omega$
- $A \bigcup \overline{A} = \Omega$
- $A \bigcap \overline{A} = \{\ \}$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $(A \Delta B) \Delta \Gamma = A \Delta (B \Delta \Gamma)$
- $A \Delta A = \{\ \}$
- $A \bigcup B = A \bigcap B \Leftrightarrow A = B$
- Αν $\left\{ \begin{matrix} A \bigcup B = A \bigcup \Gamma \\ A \bigcap B = A \bigcap \Gamma \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow B = \Gamma$
- Οι ακόλουθες 4 προτάσεις είναι ισοδύναμες.

$A \subseteq B$, $A \bigcap B = A$, $A - B = \{\ \}$, $A \bigcup B = B$.

Γενικεύσεις νόμων De Morgan $\overline{\bigcup_{\iota \in I} A_\iota} = \bigcap_{\iota \in I} \overline{A_\iota}$, $\overline{\bigcap_{\iota \in I} A_\iota} = \bigcup_{\iota \in I} \overline{A_\iota}$.

Η θεωρία πιθανοτήτων οφείλει τη γέννηση της στην τάση των ανθρώπων να παίζουν τυχερά παιχνίδια παρά τους κάθε φορά ισχύοντες περιοριστικούς νόμους των κοινωνιών. Δημοφιλέστερο παίγνιο είναι οι κύβοι ή ζάρια. Η λέξη προέρχεται από την αραβική λέξη az–zahr (κύβοι για παίξιμο) από την οποία προκύπτουν η γαλλική hazard, η αγγλική hazard και η γερμανική hasardpiel.

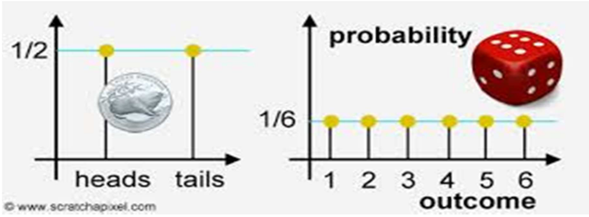
Με τη θεωρία πιθανοτήτων ασχολήθηκαν πριν τον 16^{o} αιώνα οι Ιταλοί μαθηματικοί Faccioli (1494), Tartaglia (1556), Peverone (1558) και μεταγενέστερα από τους James Bernoulli (1654–1705), Pascal (1623–1662) και Fermat (1608–1665). Ο Laplace εργάσθηκε για την ανάπτυξη του λογισμού των πιθανοτήτων. Σημαντική ήταν η συμβολή των μαθηματικών Chebychev, Markov, Andrei Nikolaevic Kolmogorov (1903–1988), Borel.

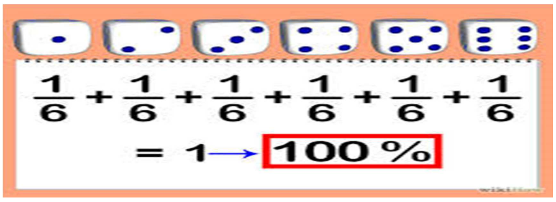
Κλασικός ορισμός πιθανότητας

$0 \le P(A) \le 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$, Αν $A \subseteq B \subseteq \Omega$ τότε $P(A) \le P(B)$

Π.χ. 63 Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή όταν ρίχνεται ένα κέρμα, είναι $\frac{1}{2}$.

Η πιθανότητα να έλθει στην πάνω επιφάνεια κύβου που στρίβεται 4 είναι $\frac{1}{6}$.





Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Δυο ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα αν και μόνο αν $A \cap B = \{\ \}$. Άρα Α, Β ασυμβίβαστα αν και μόνο αν $P(A \cap B) = P(\{\ \}) = 0$. Συνεπώς αν Α, Β ασυμβίβαστα ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Δεσμευμένη πιθανότητα. Αν Α, Β δυο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) \neq 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του Β με δεδομένο το Α συμβολίζεται ως $P(B/A)$ και ορίζεται ως $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων. $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$ Η πιθανότητα να συμβούν και το ενδεχόμενο Α και το ενδεχόμενο Β, δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$, ισούται με την πιθανότητα του ενός από τα δυο ενδεχόμενα, πολλαπλασιασμένη επί την πιθανότητα του άλλου, όταν το πρώτο έχει πραγματοποιηθεί.

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Δυο ενδεχόμενα Α, Β με $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν $P(A/B) = P(A)$ και $P(B/A) = P(B)$.

Παρατήρηση 13 Δυο ενδεχόμενα Α, Β με $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A/B) = P(A)$
- $P(B/A) = P(B)$

Παρατήρηση 14 (Ανισότητα Bonferroni)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$$

Παρατήρηση 15 (Ανισότητα Boole ή ιδιότητα υποπροσθετικότητας)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$
$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

		AND	OR	XOR
p	q	p∧q	p∨q	p<u>∨</u>q
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

Τυπολόγιο πιθανοτήτων

• Για οποιοδήποτε γεγονός (ή ενδεχόμενο ή συμβάν) Α του δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $0\le p(A)\le 1$.

• Η πιθανότητα του βέβαιου γεγονότος είναι $p(\Omega)=1$.

• Εξ΄ ορισμού δεχόμαστε ότι η πιθανότητα του κενού συνόλου είναι μηδέν, δηλαδή $p(\varnothing)=0$.

• Για οποιοδήποτε γεγονός Α του δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $p(A)+p(A')=1$.

• Αν τα γεγονότα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω είναι ξένα μεταξύ τους (ή αμοιβαίως αποκλειόμενα ή ασυμβίβαστα) τότε $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

• Αν τα γεγονότα Α, Β,Γ του δειγματικού χώρου Ω είναι ξένα μεταξύ τους ανά δυο, τότε $p(A\cup B\cup \Gamma)=p(A)+p(B)+p(\Gamma)$.

• Αν Α, Β οποιαδήποτε τυχαία γεγονότα του δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B).$$
$$p(A-B)=p(A)-p(A\cap B)=p(A\cap B').$$
$$p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)=p(B\cap A').$$

• Για οποιαδήποτε τυχαία γεγονότα Α, Β, Γ του δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}p(A\cup B\cup \Gamma)=p(A)+p(B)+p(\Gamma)\\ -p(A\cap B)-p(A\cap \Gamma)-p(B\cap \Gamma)\\ +p(A\cap B\cap \Gamma)\end{aligned}$$

• Αν Α, Β γεγονότα του δειγματικού χώρου Ω και $A\subset B$ τότε $p(A)<p(B)$.

• Αν Α, Β γεγονότα του δειγματικού χώρου Ω και $A\subseteq B$ τότε $p(A)\le p(B)$.

• Για τη δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη ή a posteriori ή εκ των υστέρων) πιθανότητα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} p(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}\Leftrightarrow p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \\ \\ p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}\Leftrightarrow p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \end{array}\right\} p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{A}/\mathrm{B})$$

• Αν τα γεγονότα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω είναι ανεξάρτητα τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B})$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{p(\mathrm{A})\cdot \cancel{p(\mathrm{B})}}{\cancel{p(\mathrm{B})}}=p(\mathrm{A})$$

$$p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}=\frac{\cancel{p(\mathrm{A})}\cdot p(\mathrm{B})}{\cancel{p(\mathrm{A})}}=p(\mathrm{B})$$

• Αν τα γεγονότα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω είναι ανεξάρτητα τότε θα είναι ανεξάρτητα και τα γεγονότα:

$$\mathrm{A}',\ \mathrm{B}' \text{ δηλαδή } p(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}')=p(\mathrm{A}')\cdot p(\mathrm{B}')$$

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B}' \text{ δηλαδή } p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}')=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}')$$

$$\mathrm{A}',\ \mathrm{B} \text{ δηλαδή } p(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A}')\cdot p(\mathrm{B})$$

• Για οποιαδήποτε γεγονότα Α, Β, Γ του δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A})\cdot p(\Gamma/\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

• Τα γεγονότα Α, Β, Γ του δειγματικού χώρου Ω λέγονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύουν όλες οι παρακάτω σχέσεις: $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B})\cdot p(\Gamma)$

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}),\quad p(\mathrm{A}\cap\Gamma)=p(\mathrm{A})\cdot p(\Gamma),\quad p(\mathrm{B}\cap\Gamma)=p(\mathrm{B})\cdot p(\Gamma)$$

Παρατήρηση 16 Η ανεξαρτησία τριών συμβάντων ανά δυο λαμβανομένων, δεν εξασφαλίζει την τέλεια ανεξαρτησία τους.

• Για οποιαδήποτε τυχαία γεγονότα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le p(\mathrm{A})\le p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}),\quad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le p(\mathrm{B})\le p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$$

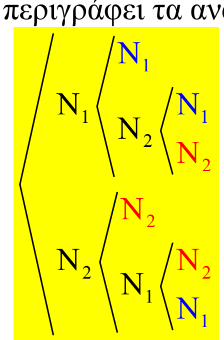

Cool Key Ring!
Be greater than average..
$B > \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
(be greater than average)
Kennedy Space Center
NASA

Π.χ. 64 Δύο παίκτες παίζουν σκάκι και νικητής ανακηρύσσεται εκείνος που θα κερδίσει δυο παιχνίδια. Να γραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

Αν N_1 σημαίνει νίκη του $1^{ου}$ και N_2 νίκη του $2^{ου}$ παίκτη, τότε όλα τα πιθανά ενδεχόμενα είναι τα παρακάτω:

$1^{ος}$ Αγώνας	$2^{ος}$ Αγώνας	$3^{ος}$ Αγώνας	Νικητές
N_1	N_1		N_1
N_1	N_2	N_1	N_1
N_1	N_2	N_2	N_2
N_2	N_2		N_2
N_2	N_1	N_2	N_2
N_2	N_1	N_1	N_1

Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι ο ακόλουθος:
$\Omega=\{N_1-N_1,\ N_1-N_2-N_1,\ N_1-N_2-N_2, N_2-N_2, N_2-N_1-N_2, N_2-N_1-N_1\}$.
Το σχετικό δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τα ανωτέρω είναι το ακόλουθο.



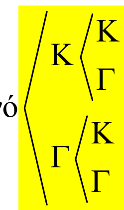
Παρατήρηση 17 Η πιθανότητα να κερδίσει ο κάθε παίκτης το τουρνουά, δοθέντος ότι έχει κερδίσει τον $1^{ο}$ αγώνα, είναι $\frac{2}{3}$. Δηλαδή ορίζω τα ακόλουθα γεγονότα:

Γεγονός Α: $\{$Νίκη στον $1^{ο}$ αγώνα$\}$, Γεγονός Β: $\{$Νίκη στο τουρνουά$\}$

Και από το δεντροδιάγραμμα προκύπτει ότι $p(B/A)=\frac{2}{3}$

Π.χ. 65 Να γραφεί ο δειγματικός χώρος για τίμιο νόμισμα που ρίχνεται δυο φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρξουν δύο ίδιες ενδείξεις;

Ο δειγματικός χώρος του ανωτέρω πειράματος τύχης είναι $\Omega=\{ΚΚ,\ ΓΓ,\ ΚΓ,\ ΓΚ\}$. Θεωρώ το ευνοϊκό ενδεχόμενο να υπάρξουν 2 ίδιες ενδείξεις $A=\{ΚΚ,\ ΓΓ\}$. Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5$. Το δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τα ανωτέρω είναι

το διπλανό 

Π.χ. 66 Από μία τράπουλα των 52 καρτών, τραβάω μία κάρτα. Υπολογίστε την πιθανότητα των ακόλουθων ενδεχομένων:

Α: «Εμφάνιση κάρτας κούπα»,

Β: «Εμφάνιση κάρτας με τον αριθμό 5»,

Γ: «Εμφάνιση κάρτας κούπα με τον αριθμό 5».

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}=0,25 \qquad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{1}{52}$$

Π.χ. 67 Ποιά είναι η πιθανότητα στη ρίψη ενός δίκαιου ζαριού να εμφανισθεί το 4;

Ο δειγματικός χώρος του ανωτέρω πειράματος τύχης είναι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Όλα τα απλά γεγονότα του δειγματικού χώρου θεωρούνται ισοπίθανα.

Άρα, αν γεγονός $A=\{\text{εμφάνιση του αριθμού } 4\}$ τότε θα είναι $P(A)=\frac{1}{6}$

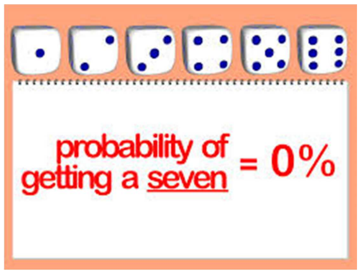
Π.χ. 68 Τίμιο ζάρι ρίχνεται μία φορά. Βρείτε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης και υπολογίστε τις πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:

Α: «Εμφάνιση άρτιου αριθμού»,

Β: «Εμφάνιση περιττού αριθμού»,

Γ: «Εμφάνιση αριθμού μικρότερου του 5»,

Δ: «Εμφάνιση αριθμού μεγαλύτερου από 7».



Ο δειγματικός χώρος του ανωτέρω πειράματος τύχης είναι $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

$$A=\{2,\ 4,\ 6\} \qquad P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$B=\{1,\ 3,\ 5\} \qquad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$\Gamma=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \qquad P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\Delta=\{\ \} \qquad P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{0}{6}=0$$

Π.χ. 69 Κάλπη περιέχει 20 λευκά και 12 μαύρα μπαλάκια. Λαμβάνω τυχαία, 2 μπαλάκια το ένα μετά το άλλο χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να βγει πρώτα λευκό και μετά μαύρο;

20 Λευκές
12 Μαύρες

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

Λ: «το μπαλάκι είναι λευκό», Μ: «το μπαλάκι είναι μαύρο»

Συνολικά, περιέχονται 32 μπαλάκια στην κάλπη.

Η πιθανότητα να είναι το 1^{o} μπαλάκι λευκό είναι $\frac{20}{32}$

Η πιθανότητα να είναι το 2^{o} μπαλάκι μαύρο ενώ το 1^{o} μπαλάκι ήταν λευκό είναι $\frac{12}{31}$

Ισχύει ότι $p(\Lambda \cap \mathrm{M}) = p(\Lambda)p(\mathrm{M}/\Lambda) = \frac{20}{32}\frac{12}{31} = \frac{5}{8}\frac{12}{31} = \frac{5}{2}\frac{3}{31} = \frac{15}{62}$

Π.χ. 70 Σε κατάστημα ηλεκτρικών ειδών υπάρχουν προς πώληση **600** ηλεκτρικοί λαμπτήρες. Από αυτούς, οι **200** κατασκευάστηκαν στο εργοστάσιο Α, οι **250** στο εργοστάσιο Β και οι **150** στο εργοστάσιο Γ. Αν η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να μην είναι ελαττωματικός είναι 0.93, 0.96 και 0.88 για τα εργοστάσια Α, Β και Γ αντίστοιχα, τότε ποιά είναι η πιθανότητα αν πωληθεί ένας από τους 600 λαμπτήρες αυτός να μην είναι ελαττωματικός (λειτουργικός);

Εργοστάσιο Α	**Εργοστάσιο Β**	**Εργοστάσιο Γ**	**Σύνολο**
200 λαμπτήρες	**250** λαμπτήρες	**150** λαμπτήρες	**600** λαμπτήρες
93% λειτουργικοί	**96%** λειτουργικοί	**88%** λειτουργικοί	
186 Λειτουργικοί	**240** Λειτουργικοί	**132** Λειτουργικοί	**558** Λειτουργικοί λαμπτήρες

Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \frac{186+240+132}{600} = \frac{558}{600} = \frac{93}{100} = 0,93$

Π.χ. 71 Από τις τρίτεκνες οικογένειες επιλέγεται μία στην τύχη. Με βάση τη σειρά γέννησης των παιδιών, υπολογίστε τις πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:

Α: «Η οικογένεια έχει ακριβώς ένα αγόρι»,
Β: «Η οικογένεια έχει το πρώτο παιδί αγόρι»,
Γ: «Η οικογένεια έχει τουλάχιστον ένα αγόρι»,
Δ: «Η οικογένεια έχει το πολύ ένα αγόρι».

Ο δειγματικός χώρος του ανωτέρω πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{\mathrm{AAA},\ \mathrm{AAK},\ \mathrm{AKK},\ \mathrm{AKA},\ \mathrm{KKK},\ \mathrm{KAA},\ \mathrm{KKA},\ \mathrm{KAK}\}$, όπου Α η γέννηση αγοριού και Κ η γέννηση κοριτσιού.

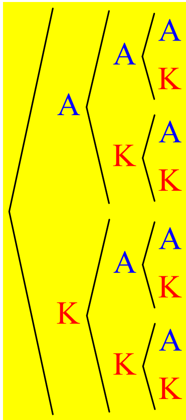
$\mathrm{A} = \{\mathrm{AKK},\ \mathrm{KAK},\ \mathrm{KKA}\}$ $\qquad P(\mathrm{A}) = \frac{N(\mathrm{A})}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$

$\mathrm{B} = \{\mathrm{AAA},\ \mathrm{AAK},\ \mathrm{AKK},\ \mathrm{AKA}\}$ $\qquad P(\mathrm{B}) = \frac{N(\mathrm{B})}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$

$\Gamma = \Omega - \{\mathrm{KKK}\}$ $\qquad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{7}{8}$

$\Delta = \{\mathrm{AKK},\ \mathrm{KAK},\ \mathrm{KKA},\mathrm{KKK}\}$ $\qquad P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$

Το αντίστοιχο δεντροδιάγραμμα είναι το ακόλουθο.



Π.χ. 72 Από κάλπη που περιέχει 2 κόκκινες, 3 κίτρινες και 2 πράσινες μπάλες, λαμβάνω διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση δυο. Ποιά είναι η πιθανότητα:

(**α**) και οι δυο μπάλες να είναι κίτρινες

(**β**) η μία μπάλα να είναι κίτρινη και η άλλη κόκκινη;

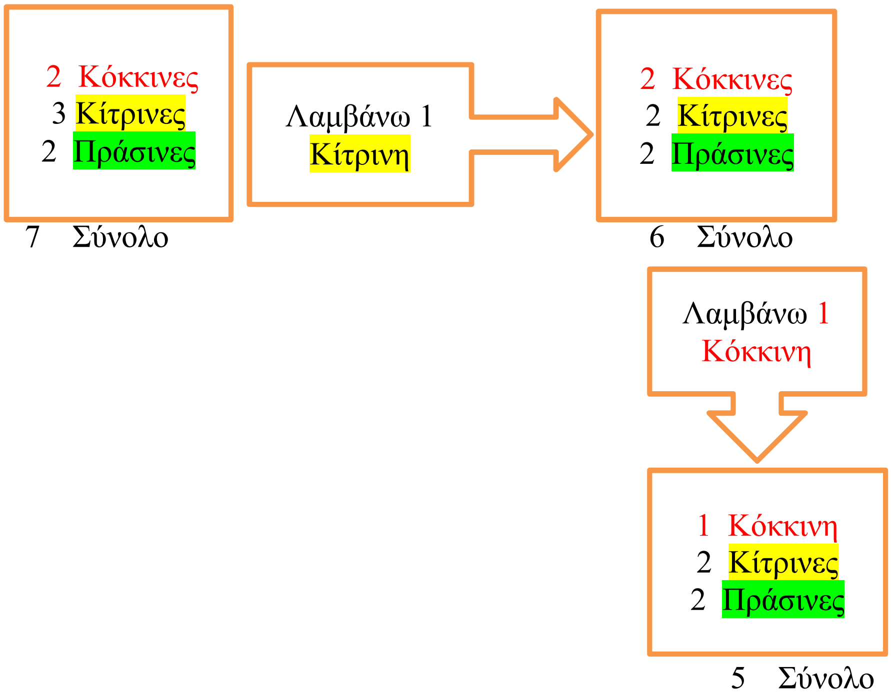
Συνολικά όλες οι μπάλες που περιέχονται στην κάλπη είναι 7. Η επιλογή των 2 από τις 7 μπάλες μπορεί να γίνει κατά $\binom{7}{2}$ τρόπους.

(**α**) Η επιλογή των δυο κίτρινων από τις τρεις συνολικά κίτρινες μπάλες που περιέχονται στην κάλπη, μπορεί να γίνει κατά $\binom{3}{2}$ τρόπους. Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι $p = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \dfrac{\frac{3!}{2!\,1!}}{\frac{7!}{2!\,5!}} = \dfrac{3}{\frac{6\cdot 7}{2}} = \dfrac{1}{7}$

2^{ος} τρόπος Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{7}$ διότι αρχικά από τις 7 μπάλες (εκ των οποίων οι 3 κίτρινες), επιλέγεται η μία κίτρινη με πιθανότητα $\frac{3}{7}$

Ακολούθως, από τις 6 μπάλες που απομένουν (εκ των οποίων οι 2 κίτρινες), η πιθανότητα επιλογής μίας κίτρινης είναι $\frac{2}{6}$

(**β**) Η επιλογή της μίας κίτρινης από τις τρεις συνολικά κίτρινες μπάλες που περιέχονται στην κάλπη, μπορεί να γίνει κατά $\binom{3}{1}$ τρόπους. Ομοίως, η επιλογή της μίας κόκκινης από τις δύο συνολικά κόκκινες μπάλες που περιέχονται στην κάλπη, μπορεί να γίνει κατά $\binom{2}{1}$ τρόπους. Η επιλογή της κίτρινης δεν εξαρτάται ούτε επηρεάζει την επιλογή της κόκκινης μπάλας. Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι $p = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \dfrac{3\cdot 2}{\frac{7!}{2!\,5!}} = \dfrac{3\cdot 2}{\frac{6\cdot 7}{2}} = \dfrac{2}{7}$



2^{ος} τρόπος

$$p(\text{κίτρινη} \cap \text{κόκκινη}) + p(\text{κόκκινη} \cap \text{κίτρινη}) =$$

$$p(\text{κίτρινη})\, p(\text{κόκκινη}/\text{κίτρινη}) + p(\text{κόκκινη})\, p(\text{κίτρινη}/\text{κόκκινη}) =$$

$$\frac{3}{7}\,\frac{2}{6} + \frac{2}{7}\,\frac{3}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

Π.χ. 73 Από 8 ηλεκτρονικές πλακέτες εκ των οποίων οι 2 είναι ελαττωματικές (άρα οι υπόλοιπες 6 λειτουργούν κανονικά) επιλέγονται στην τύχη δύο. Ποιά είναι η πιθανότητα η μία ακριβώς πλακέτα να είναι ελαττωματική (άρα η άλλη πλακέτα να λειτουργεί κανονικά);

Οι 2 από τις 8 ηλεκτρονικές πλακέτες μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{8}{2}$ τρόπους. Η μία ελαττωματική πλακέτα μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο των 2 ελαττωματικών με $\binom{2}{1}$ τρόπους. Ομοίως, η μία κανονική πλακέτα μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο των 6 κανονικών πλακετών κατά $\binom{6}{1}$ τρόπους.

$$8\left\langle\begin{matrix} 2E & \leftarrow 1E \\ 6K & \leftarrow 1K \end{matrix}\right\rangle 2$$

Η επιλογή της ελαττωματικής πλακέτας είναι ανεξάρτητη από την επιλογή αυτής που λειτουργεί κανονικά. Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι

$$p = \frac{\binom{6}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{6 \cdot 2}{\frac{8!}{2!\,6!}} = \frac{6 \cdot 2}{\frac{7 \cdot 8}{2}} = \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 4} = \frac{6}{7 \cdot 2} = \frac{3}{7}$$

2^{ος} τρόπος

$$
\begin{aligned}
&p(\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{E}_2) \qquad + p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{K}_2) = \\
&p(\mathrm{K}_1)\,p(\mathrm{E}_2/\mathrm{K}_1) + p(\mathrm{E}_1)\,p(\mathrm{K}_2/\mathrm{E}_1) = \\
&\frac{6}{8}\quad\frac{2}{7} + \frac{2}{8}\quad\frac{6}{7} = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} = \frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

Π.χ. 74 Από κάλπη που περιέχει 6 κάρτες, αριθμημένες από 1 έως 6, επιλέγονται τυχαία οι 2 κάρτες. Ποιά είναι η πιθανότητα στη μία ρίψη να υπάρχει άρτιος αριθμός και στην άλλη ρίψη να υπάρχει περιττός αριθμός;

$$
\left.
\begin{aligned}
P(\mathrm{A} \cap \Pi) &= P(\mathrm{A})\,P(\Pi/\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\frac{3}{5} = \frac{3}{10} \\
P(\Pi \cap \mathrm{A}) &= P(\Pi)\,P(\mathrm{A}/\Pi) = \frac{1}{2}\frac{3}{5} = \frac{3}{10}
\end{aligned}
\right\} P_{\mathrm{O\Lambda}} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}
$$

2^{ος} τρόπος Οι 2 κάρτες μπορούν να επιλεγούν από τις συνολικές 6, κατά $\binom{6}{2}$ τρόπους και τόσα είναι τα δυνατά ενδεχόμενα. Για τον υπολογισμό των ευνοϊκών ενδεχομένων, ισχύει ότι η επιλογή της μίας άρτιας, από τις συνολικά 3 άρτιες κάρτες, μπορεί να γίνει κατά $\binom{3}{1}$ τρόπους. Οι δυνατοί τρόποι επιλογής της μίας περιττής, από τις συνολικά 3 κάρτες που υπάρχουν, μπορεί να γίνει κατά $\binom{3}{1}$ τρόπους. Η επιλογή της άρτιας δεν έχει σχέση με την επιλογή της περιττής κάρτας. Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι

$$
p = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3\cdot 3}{\dfrac{6!}{2!\,4!}} = \frac{3\cdot 3}{\dfrac{5\cdot 6}{2!}} = \frac{3\cdot \cancel{3}}{5\cdot \cancel{3}} = \frac{3}{5}
$$

Π.χ. 75 Πέντε τίμια ζάρια ρίχνονται ταυτόχρονα. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθούν πέντε διαφορετικές ενδείξεις;

Σε κάθε ρίψη του τίμιου ζαριού υπάρχουν 6 ισοπίθανα δυνατά ενδεχόμενα. Άρα, συνολικά μετά τις πέντε ρίψεις ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης θα έχει 6^5 δυνατά ενδεχόμενα, διότι τα αποτελέσματα της μίας ρίψης δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα των υπολοίπων ρίψεων. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι 6! διότι:

Κατά την 1^η ρίψη οι υποψήφιοι προς εμφάνιση αριθμοί είναι 6 το πλήθος.

Κατά τη 2^η ρίψη οι υποψήφιοι προς εμφάνιση αριθμοί είναι 5 το πλήθος.

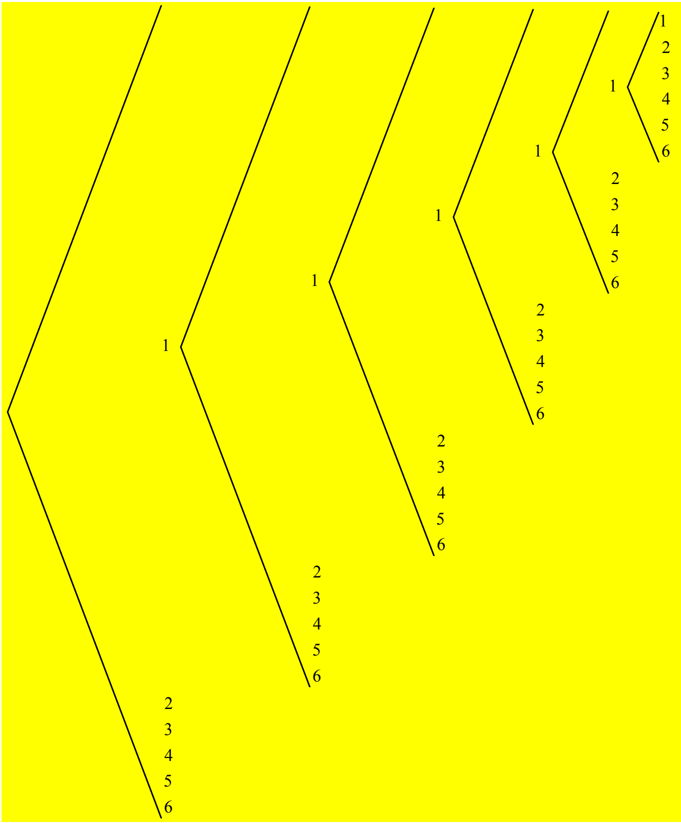
Κατά την 3^η ρίψη οι υποψήφιοι προς εμφάνιση αριθμοί είναι 4 το πλήθος.

Κατά την 4^η ρίψη οι υποψήφιοι προς εμφάνιση αριθμοί είναι 3 το πλήθος.

Κατά την 5^η και τελευταία ρίψη οι υποψήφιοι προς εμφάνιση αριθμοί είναι 2 το πλήθος. Συνεπώς, από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι:

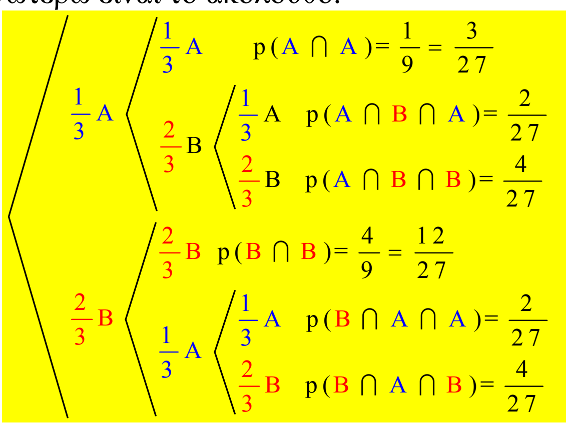
$$
p = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{6}\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot \cancel{6}} = \frac{5\cdot 4}{6\cdot 6\cdot 6} = \frac{5}{6\cdot 3\cdot 3} = \frac{5}{54}
$$

Το σχετικό δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τις ανωτέρω ρίψεις είναι το ακόλουθο.



Π.χ. 76 Η πιθανότητα να κερδίσει σε ένα σετ στο τένις ο παίκτης Α τον παίκτη Β είναι 1/3. Αν νικητής του αγώνα θεωρείται όποιος κερδίσει δύο συνεχόμενα σετ, ποιά είναι η πιθανότητα ο Α να κερδίσει τον αγώνα εναντίον του Β, νικώντας τον στα δυο πρώτα σετ;

Η ενδεχόμενη νίκη του παίκτη Α, σε ένα σετ δεν επηρεάζει την έκβαση του δεύτερου σετ. Συνεπώς, η πιθανότητα νίκης δηλαδή το 1/3 παραμένει σε κάθε σετ ίδια. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Το σχετικό δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τα ανωτέρω είναι το ακόλουθο.



Π.χ. 77 Από τους 6 αρχιπλοιάρχους και 6 αρχιμηχανικούς μίας ναυτιλιακής εταιρείας, θα συγκροτηθούν 2 εξαμελείς ομάδες. Ποιά είναι η πιθανότητα η κάθε ομάδα να έχει τον ίδιο αριθμό αρχιπλοιάρχων και αρχιμηχανικών;

Η κάθε μία ομάδα θα αποτελείται από 3 αρχιπλοιάρχους και από 3 αρχιμηχανικούς. Η επιλογή των 6 ατόμων της $1^{ης}$ ομάδας, από τους συνολικά 12 υπαλλήλους, μπορεί να γίνει κατά $\binom{12}{6}$ τρόπους και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των ατόμων που θα απαρτίζουν τη $2^{η}$ ομάδα. Μετά τη συμπλήρωση της $1^{ης}$ ομάδας, απομένουν 6 υπάλληλοι προκειμένου να συμπληρώσουν τη $2^{η}$ ομάδα και αυτό μπορεί να γίνει κατά $\binom{6}{6}=1$ τρόπους. Οι 3 αρχιπλοίαρχοι επιλέγονται από τους συνολικά 6 αρχιπλοιάρχους κατά $\binom{6}{3}$ τρόπους. Οι 3 αρχιμηχανικοί επιλέγονται από τους συνολικά 6 αρχιμηχανικούς κατά $\binom{6}{3}$ τρόπους. Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$p=\frac{\binom{6}{3}\binom{6}{3}}{\binom{12}{6}\binom{6}{6}}=\frac{\frac{6!}{3!\ 3!}\ \frac{6!}{3!\ 3!}}{\frac{12!}{6!\ 6!}1}=\frac{\frac{4\cdot5\cdot6}{3!}\ \frac{4\cdot5\cdot6}{3!}}{\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot\cancel{12}}{\cancel{2}\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\cancel{6}}}=$$

$$\frac{\cancel{4}\cdot5\cdot4\cdot5}{7\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot11}=\frac{100}{231}=0,432900\cong0,433$$

Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι περίπου $43,3\ \%$.

Π.χ. 78 Ποιά είναι η πιθανότητα ένα τίμιο νόμισμα που ρίχνεται 11 φορές, να φέρει ακριβώς 5 φορές κεφαλή;
Εφόσον το νόμισμα είναι τίμιο, η πιθανότητα εμφάνισης κεφαλής είναι 0,5 και ισούται με την πιθανότητα εμφάνισης γραμμάτων (συμπληρωματικά ενδεχόμενα).

Από τις 11 συνολικές ρίψεις του νομίσματος, κεφαλή εμφανίζεται τις 5 φορές, συνεπώς γράμματα εμφανίζονται τις υπόλοιπες 6 φορές.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα, από τις δοκιμές Bernoulli, είναι

$$p=\binom{11}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^6=\binom{11}{5}\frac{1}{2^{11}}=\frac{11!}{5!\ \cdot6!\ \cdot2^{11}}=\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{5!\ \cdot2^{11}}=\frac{7\cdot9\cdot5\cdot11}{5!\ \cdot2^{7}}=$$

$$\frac{7\cdot9\cdot\cancel{5}\cdot11}{2\cdot3\cdot4\cdot\cancel{5}\cdot2^{7}}=\frac{7\cdot3\cdot11}{2^{11}}$$

Π.χ. 79 Ποιά είναι η πιθανότητα ένα τίμιο ζάρι που ρίχνεται 11 φορές, να φέρει την ένδειξη 3 ακριβώς 5 φορές;
Η πιθανότητα εμφάνισης της ένδειξης 3 κατά την κάθε μία ρίψη του αμερόληπτου ζαριού είναι $\frac{1}{6}$, οπότε η συμπληρωματική της πιθανότητα, δηλαδή της μη εμφάνισης της ένδειξης 3 είναι $\frac{5}{6}$. Σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή, η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από τον τύπο $\binom{11}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^6$

Π.χ. 80 Δύο τίμια κέρματα ρίχνονται ταυτόχρονα. Αν το ένα κέρμα έφερε «γράμματα», ποιά είναι η πιθανότητα να φέρει και το άλλο «γράμματα»;

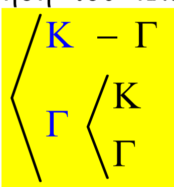
Ο δειγματικός χώρος Ω του ανωτέρω πειράματος τύχης που προκύπτει από τη ρίψη 2 δίκαιων κερμάτων είναι $\Omega=\{\text{ΚΚ, ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ}\}$. Έστω τα γεγονότα:

Α: «το ένα από τα δυο κέρματα φέρνει την ένδειξη γράμματα»
Β: «και τα δυο κέρματα φέρνουν την ένδειξη γράμματα»
Είναι $\text{Α}=\{\text{ ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ}\}$ και $\text{Β}=\{\text{ ΓΓ}\}$. Άρα $\text{Α}\cap\text{Β}=\{\text{ΓΓ}\}$.

Από τον τύπο της δεσμευμένης (ή υπό συνθήκη ή εκ των υστέρων) πιθανότητας προκύπτει ότι $\text{P}(\text{Β}/\text{Α})=\dfrac{\text{P}(\text{Α}\cap\text{Β})}{\text{P}(\text{Α})}=\dfrac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{3}{\cancel{4}}}=\dfrac{1}{3}$

2^{ος} τρόπος Με χρήση του κλασσικού ορισμού της πιθανότητας προκύπτει ότι

$p=\dfrac{\text{N}(\text{Β})}{\text{N}(\text{Α})}=\dfrac{1}{3}$



Π.χ. 81 Ποιά είναι η πιθανότητα από τράπουλα των 52 καρτών, να τραβήξω 2 κάρτες συγχρόνως και να είναι κούπες;

Όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι $\dbinom{52}{2}$. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις, ώστε και τα 2 χαρτιά που επέλεξα να είναι κούπες, είναι $\dbinom{13}{2}$, διότι η τράπουλα έχει 13 κούπες συνολικά. Συνεπώς, από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι

$$p=\frac{\dbinom{13}{2}}{\dbinom{52}{2}}=\frac{\frac{13!}{2!\;11!}}{\frac{52!}{2!\;50!}}=\frac{\frac{12\cdot13}{\cancel{2!}}}{\frac{51\cdot52}{\cancel{2!}}}=\frac{12\cdot13}{51\cdot52}=\frac{6\cdot13}{51\cdot26}=\frac{6}{51\cdot2}=\frac{3}{51}$$

2^{ος} τρόπος Ορίζω τα ενδεχόμενα Κ_1 : «Εμφάνιση κούπας την 1^{η} φορά»
Κ_2 : «Εμφάνιση κούπας τη 2^{η} φορά»

$$p(\text{Κ}_1\cap\text{Κ}_2)=p(\text{Κ}_1)\,p(\text{Κ}_2/\text{Κ}_1)=\frac{13}{52}\frac{12}{51}=\frac{1}{4}\frac{12}{51}=\frac{3}{51}$$

Π.χ. 82 Παρατήρησα ότι από τις 7 Ferrari που πέρασαν το πρωί έξω από τη σχολή, οι 2 ήταν κόκκινου χρώματος. Ποιά είναι η πιθανότητα να διήλθαν διαδοχικά η μία ακριβώς μετά την άλλη;

Υπάρχουν $\dbinom{7}{2}=\dfrac{7!}{2!\;5!}=\dfrac{6\cdot7}{2}=21$ διαφορετικοί τρόποι να διέλθουν τα αυτοκίνητα έξω από τη σχολή. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις, δηλαδή να διέλθουν διαδοχικά το ένα μετά το άλλο, είναι 6 (θέσεις 1^{ου}–2^{ου} αυτοκινήτου 1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6, 6–7).

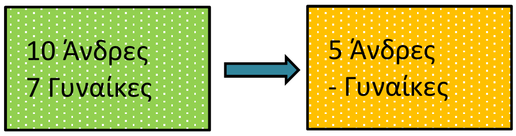
Συνεπώς, από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι $p=\dfrac{6}{\binom{7}{2}}=\dfrac{6}{\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}}=\dfrac{\cancel{6}}{\dfrac{\cancel{6}\cdot 7}{2!}}=\dfrac{2}{7}$

Π.χ. 83 Από κατάλογο 10 αντρών και 7 γυναικών επιλέγονται τυχαία 5 ένορκοι σε δικαστήριο. Ποιά η πιθανότητα οι ένορκοι να είναι

(**i**) όλοι άντρες,
(**ii**) 3 άντρες και 2 γυναίκες,
(**iii**) τουλάχιστον 3 γυναίκες;

(i) $$\frac{\binom{10}{5}}{\binom{17}{5}}=\frac{\dfrac{10!}{5!\ 5!}}{\dfrac{17!}{5!\ 12!}}=\frac{\dfrac{10!}{5!}}{\dfrac{17!}{12!}}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}=\frac{6\cdot 1\cdot 1\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 2\cdot 15\cdot 2\cdot 17}=$$

$$\frac{6\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 2\cdot 15\cdot 2\cdot 17}=\frac{60\cdot 9}{13\cdot 60\cdot 17}=\frac{9}{13\cdot 17}$$

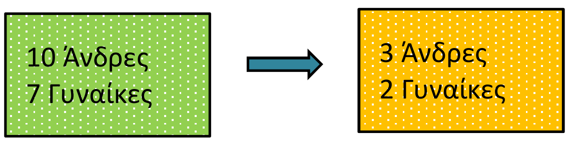


2^{ος} τρόπος Ορίζω τα ενδεχόμενα A_1: «Ο πρώτος ένορκος είναι άνδρας»
A_2: «Ο δεύτερος ένορκος είναι άνδρας»
A_3: «Ο τρίτος ένορκος είναι άνδρας»
A_4: «Ο τέταρτος ένορκος είναι άνδρας»
A_5: «Ο πέμπτος ένορκος είναι άνδρας»

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)=$$
$$p(A_1)\,p(A_2/A_1)\,p(A_3/A_1\cap A_2)\,p(A_4/A_1\cap A_2\cap A_3)\,p(A_5/A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=$$
$$\frac{10}{17}\ \frac{9}{16}\ \frac{8}{15}\ \frac{7}{14}\ \frac{6}{13}=$$
$$\frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{7}\cdot 6}{17\cdot \cancel{16}\cdot 15\cdot \cancel{14}\cdot 13}=\frac{\cancel{10}\cdot 9\cdot \cancel{6}}{17\cdot \cancel{2}\cdot 15\cdot \cancel{2}\cdot 13}=\frac{5\cdot 9\cdot 3}{17\cdot 15\cdot 13}=\frac{9}{17\cdot 13}$$

(ii)
$$\frac{\binom{10}{3}\binom{7}{2}}{\binom{17}{5}}=\frac{\dfrac{10!}{3!\ 7!}\ \dfrac{7!}{2!\ 5!}}{\dfrac{17!}{5!\ 12!}}=\frac{\dfrac{10!}{3!}\ \dfrac{1}{2!}}{\dfrac{17!}{12!}}=\frac{\dfrac{10!}{3!\ 2!}}{\dfrac{17!}{12!}}=\frac{\dfrac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2!}}{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}=\frac{2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}=$$

$$\frac{5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 15\cdot 16\cdot 17}=\frac{1\cdot 6\cdot 1\cdot 90}{13\cdot 3\cdot 2\cdot 17}=\frac{90}{13\cdot 17}$$



2^{ος} τρόπος Ορίζω τα ενδεχόμενα Α: «Επιλέγεται άνδρας ένορκος»
Γ: «Επιλέγεται γυναίκα ένορκος»

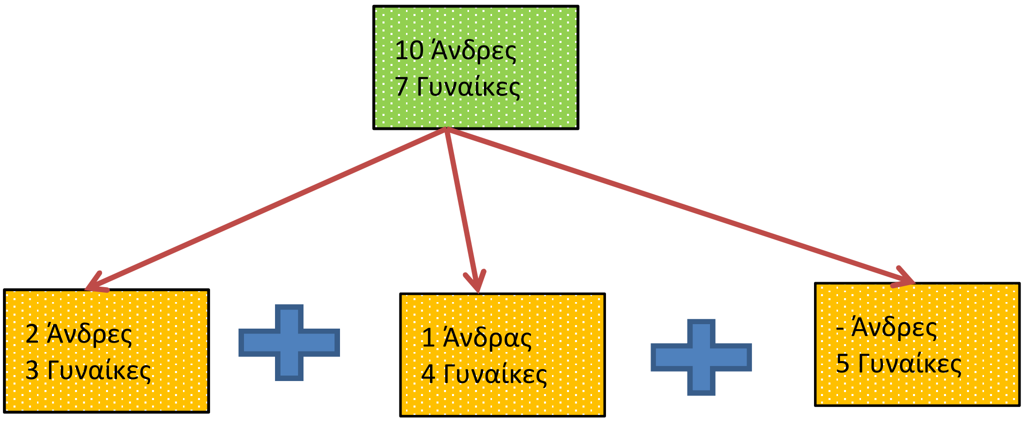
Η παράμετρος $\frac{5!}{3!\ 2!}=\frac{4\cdot 5}{2!}=10$ περιγράφει όλους τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή των 3 ανδρών και 2 γυναικών ενόρκων. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{5!}{3!\ 2!}p\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{A}\cap\mathrm{A}\cap\Gamma\cap\Gamma\right)=10\frac{10}{17}\ \frac{9}{16}\ \frac{8}{15}\ \frac{7}{14}\ \frac{6}{13}=\frac{90}{17\cdot 13}$$

(iii) $$\frac{\binom{7}{3}\binom{10}{2}+\binom{7}{4}\binom{10}{1}+\binom{7}{5}\binom{10}{0}}{\binom{17}{5}}=\frac{\frac{7!}{3!\ 4!}\ \frac{10!}{2!\ 8!}+\frac{7!}{4!\ 3!}\ \frac{10!}{1!\ 9!}+\frac{7!}{5!\ 2!}\ \frac{10!}{0!\ 10!}}{\frac{17!}{5!\ 12!}}=$$

$$\frac{\frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!}\ \frac{9\cdot 10}{2!}+\frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!}\ 10+\frac{6\cdot 7}{2!}\ 1}{\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{5!}}=\frac{5\cdot 7\cdot\ 45+5\cdot 7\cdot 10+21}{\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=\frac{1575+350+21}{\frac{13\cdot 14\cdot 16\cdot 17}{2\cdot 4}}=$$

$$\frac{1575+350+21}{13\cdot 14\cdot 2\cdot 17}=\frac{1575+371}{182\cdot 34}=\frac{1946}{6188}=\frac{973}{3094}=0,31447964\cong 31,4\%$$



Π.χ. 84 Ποιά είναι η πιθανότητα από τράπουλα των 52 καρτών, αν τραβήξω 6 κάρτες ταυτόχρονα, να περιλαμβάνονται σε αυτές και οι 4 άσσοι της τράπουλας;

Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί επιλογής των 6 από τις 52 κάρτες είναι $\binom{52}{6}$

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{4}{4}\binom{52-4}{2}=\binom{4}{4}\binom{48}{2}=\binom{48}{2}$ διότι οι 4 άσσοι θα επιλεγούν από τους συνολικά 4 άσσους της τράπουλας κατά $\binom{4}{4}=1$ τρόπο και οι υπόλοιπες 2 κάρτες (που απομένουν προς συμπλήρωση της εξάδας) θα επιλεγούν από τις εναπομείνασες 52 – 4 = 48 κάρτες κατά $\binom{48}{2}$ τρόπους.

Ω
N(Ω)=52

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $p=\dfrac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{6}}=\dfrac{\dfrac{48!}{2!\,46!}}{\dfrac{52!}{6!\,46!}}=\dfrac{\dfrac{\cancel{47}\cdot\cancel{48}}{2}}{\dfrac{\cancel{47}\cdot\cancel{48}\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}}=\dfrac{\dfrac{1}{\cancel{2}}}{\dfrac{49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}}=$

$$\frac{\cancel{3}\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}=\frac{4\cdot 6}{49\cdot 10\cdot 17\cdot 52}=\frac{\cancel{2}\cdot 3}{49\cdot 5\cdot 17\cdot 26}=\frac{3}{49\cdot 5\cdot 17\cdot 13}=\ldots$$

2^{ος} τρόπος Οι 6 κάρτες (4 άσσοι και 2 οποιεσδήποτε άλλες) εξάγονται τυχαία κατά $\dfrac{6!}{4!\,2!}=\dfrac{5\cdot 6}{2!}=15$ διαφορετικούς τρόπους. Για 4 φύλλα, από τα 52 της τράπουλας, που τυχαία εξάγονται, η πιθανότητα να είναι και τα 4 άσσοι είναι $\dfrac{4}{52}\,\dfrac{3}{51}\,\dfrac{2}{50}\,\dfrac{1}{49}$

Τα υπόλοιπα 2 φύλλα, προς συμπλήρωση της εξάδας, δύναται να είναι οποιαδήποτε από τα 48 (52 – 4 = 48) που απομένουν. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$15\left[\frac{4}{52}\,\frac{3}{51}\,\frac{2}{50}\,\frac{1}{49}\right]\frac{\cancel{48}}{\cancel{48}}\,\frac{\cancel{47}}{\cancel{47}}=15\frac{1}{13}\,\frac{1}{17}\,\frac{1}{25}\,\frac{1}{49}=\frac{15}{13\cdot 17\cdot 25\cdot 49}=\frac{3}{13\cdot 17\cdot 5\cdot 49}$$

Π.χ. 85 Κούτα περιέχει 12 ηλεκτρονικές πλακέτες εκ των οποίων οι 4 είναι ελαττωματικές (άρα οι υπόλοιπες 8 λειτουργούν κανονικά). Επιλέγω τυχαία 3 πλακέτες, τη μία μετά την άλλη. Ποιά είναι η πιθανότητα και οι 3 πλακέτες να λειτουργούν κανονικά;

Η πιθανότητα η 1^{η} επιλεγείσα πλακέτα να λειτουργεί κανονικά, είναι $\dfrac{8}{12}$

Η πιθανότητα η 2^{η} επιλεγείσα πλακέτα να λειτουργεί κανονικά, εφόσον η 1^{η} επιλεγείσα πλακέτα λειτουργεί κανονικά, είναι $\dfrac{7}{11}$

Αν οι δύο πρώτες επιλεγείσες πλακέτες λειτουργούν κανονικά, τότε η πιθανότητα να λειτουργεί κανονικά και η 3^{η} επιλεγείσα πλακέτα είναι $\dfrac{6}{10}$

Θεωρώ τα γεγονότα

Α: «Η 1^{η} επιλεγείσα πλακέτα λειτουργεί κανονικά»,
Β: «Η 2^{η} επιλεγείσα πλακέτα λειτουργεί κανονικά»,
Γ: «Η 3^{η} επιλεγείσα πλακέτα λειτουργεί κανονικά».

Από τη γενικευμένη πρόταση του πολλαπλασιασμού, είναι

$$P(A\cap B\cap \Gamma)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(\Gamma/A\cap B)=$$

$$\frac{8}{12}\,\frac{7}{11}\,\frac{6}{10}=\frac{2}{\cancel{3}}\,\frac{7}{11}\,\frac{\cancel{3}}{5}=\frac{14}{55}$$

$$12\left\langle\begin{matrix}4E\\ 8K-3K\end{matrix}\right.$$

2^{ος} τρόπος $p=\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}}=\dfrac{\frac{8!}{3!\cdot 5!}}{\frac{12!}{3!\cdot 9!}}=\dfrac{\frac{8!}{5!}}{\frac{12!}{9!}}=\dfrac{\cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{10\cdot 11\cdot 12}=\dfrac{7\cdot 8}{10\cdot 11\cdot \cancel{2}}=\dfrac{7\cdot 4}{10\cdot 11}=\dfrac{7\cdot 2}{5\cdot 11}=\dfrac{14}{55}$

Π.χ. 86 Τρεις μηχανές (Α, Β, Γ) εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων παράγουν τα 50%, 30% και 20% αντίστοιχα του προϊόντος. Τα ποσοστά των ελαττωματικών λαμπτήρων ανά μηχανή, αντίστοιχα είναι 3%, 4% και 5%.

(**α**) Ποιά είναι η πιθανότητα αν λάβω στην τύχη ένα λαμπτήρα, αυτός να είναι ελαττωματικός;

(**β**) Αν ένας λαμπτήρας επιλεγεί τυχαία και είναι ελαττωματικός, ποιά είναι η πιθανότητα να έχει κατασκευασθεί από τη μηχανή Α;

(**α**) Ορίζω τα παρακάτω ενδεχόμενα:
Χ: «ο λαμπτήρας είναι ελαττωματικός»,
Α: «ο λαμπτήρας κατασκευάστηκε από τη μηχανή Α»,
Β: «ο λαμπτήρας κατασκευάστηκε από τη μηχανή Β»,
Γ: «ο λαμπτήρας κατασκευάστηκε από τη μηχανή Γ».

Αν ο λαμπτήρας που επελέγη είναι ελαττωματικός, αυτός μπορεί να προέρχεται από την Α, ή τη Β ή τη Γ μηχανή. Από τον τύπο του Bayes ισχύει ότι

$$\mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{X}/\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{X}/\mathrm{B})+\mathrm{P}(\Gamma)\mathrm{P}(\mathrm{X}/\Gamma)$$

$$=\frac{5\cancel{0}}{100}\frac{3}{10\cancel{0}}+\frac{3\cancel{0}}{100}\frac{4}{10\cancel{0}}+\frac{\cancel{20}}{100}\frac{\cancel{5}}{\cancel{100}}=0,015+0,012+0,010=0,037$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 3,7 %.

Μηχανή	Ποσοστά παραγωγής	Ποσοστά ελαττωματικών ανά μηχανή	Πιθανότητα ελαττωματικών ανά μηχανή	Τελική πιθανότητα ελαττωματικών
Α	50%	3%	$\frac{150}{100\cdot 100}$	$\frac{370}{100\cdot 100}=\frac{37}{1.000}=0,037$
Β	30%	4%	$\frac{120}{100\cdot 100}$	
Γ	20%	5%	$\frac{100}{100\cdot 100}$	

(**β**) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ότι

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{X})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{X})}{p(\mathrm{X})}=\frac{\frac{15\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}\cdot 1\cancel{0}\cancel{0}}}{\frac{37}{1.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}}=\frac{15}{37}$$

2^{ος} τρόπος Από τον τύπο του Bayes ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{X})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}/\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}/\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}/\mathrm{B})+\mathrm{P}(\Gamma)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}/\Gamma)}=$$

$$\frac{0,50\cdot 0,03}{0,50\cdot 0,03+0,30\cdot 0,04+0,20\cdot 0,05}=\frac{15}{37}$$

Π.χ. 87 Δύο ιδανικά ζάρια ρίχνονται ταυτόχρονα. Αν το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι 6, ποιά είναι η πιθανότητα ένα από τα δύο ζάρια να έχει φέρει την ένδειξη 2;
Ο δειγματικός χώρος Ω του ανωτέρω πειράματος τύχης, αποτελείται από 36 στοιχεία.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:
A: «το άθροισμα των ενδείξεων είναι 6», άρα $A=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$, συνεπώς $P(A)=\frac{5}{36}$
B: «το 2 εμφανίζεται σε ένα τουλάχιστον ζάρι». Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της $P(B/A)=$; Είναι $A\cap B=\{(2,4),(4,2)\}$, άρα $P(A\cap B)=\frac{2}{36}$
Από τον τύπο της δεσμευμένης (υπό συνθήκη) πιθανότητας, ισχύει ότι:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{\cancel{36}}}{\frac{5}{\cancel{36}}}=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=0,4$$

Π.χ. 88 Δοχείο περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 5. Επιλέγονται τυχαία 2 σφαιρίδια, χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα να μην επιλεγεί το σφαιρίδιο με το ψηφίο 4;
Θεωρώ τα γεγονότα:
A: {Δεν επιλέγεται το υπ. αριθμόν 4 σφαιρίδιο την $1^{η}$ φορά}
B: {Δεν επιλέγεται το υπ. αριθμόν 4 σφαιρίδιο την $2^{η}$ φορά}
Τα γεγονότα Α, Β είναι ανεξάρτητα δηλαδή η πραγματοποίηση ή μη πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει τη πραγματοποίηση ή μη πραγματοποίηση του άλλου.

Συνεπώς ισχύει ότι $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{\cancel{4}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{3}{5}$

Π.χ. 89 Αν τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα και $p(A)=\frac{1}{5}$, $p(B)=\frac{1}{2}$, υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα $p(A/A\cup B)$.
Γνωρίζω από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας ότι ισχύει η σχέση $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Συνεπώς κατά αντιστοιχία είναι:

$$P\left(A/(A\cup B)\right)=\frac{P\left[A\cap(A\cup B)\right]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{10}+\frac{5}{10}-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{6}{10}}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

Π.χ. 90 Ιδανικό κέρμα ρίχνεται 3 συνεχόμενες φορές. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι $\Omega=\{\text{ΚΚΚ, ΓΓΓ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ}\}$

Θεωρώ τα ενδεχόμενα

Α: «στην 1^{η} ρίψη εμφανίζεται Κ», άρα $A=\{\text{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ}\}$, συνεπώς $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Β: «στη 2^{η} ρίψη εμφανίζεται Κ», άρα $B=\{\text{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ}\}$, συνεπώς $P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Γ: «εμφανίζονται διαδοχικά, ακριβώς δυο Κ», άρα $\Gamma=\{\text{ΚΚΓ, ΓΚΚ}\}$, συνεπώς $P(\Gamma)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

- Είναι $A\cap B=\{\text{ΚΚΚ, ΚΚΓ}\}$, άρα $P(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ Ισχύει ότι $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, συνεπώς τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα.
- Είναι $A\cap\Gamma=\{\text{ΚΚΓ}\}$, άρα $P(A\cap\Gamma)=\frac{1}{8}$ Ισχύει ότι $P(A\cap\Gamma)=P(A)P(\Gamma)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, συνεπώς τα ενδεχόμενα Α, Γ είναι ανεξάρτητα.
- Είναι $B\cap\Gamma=\{\text{ΚΚΓ, ΓΚΚ}\}$, άρα $P(B\cap\Gamma)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ Ισχύει ότι $P(B\cap\Gamma)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\frac{1}{4}=P(B)P(\Gamma)$, δηλαδή $P(B\cap\Gamma)\neq P(B)P(\Gamma)$, συνεπώς τα ενδεχόμενα Β, Γ δεν είναι ανεξάρτητα.

Π.χ. 91 Από τράπουλα των 52 φύλλων λαμβάνω 2 φύλλα συγχρόνως. Ποια η πιθανότητα να είναι

(**i**) το ένα φύλλο 2 και το άλλο βαλές,

(**ii**) και τα δυο φύλα μπαστούνι;

Ο δειγματικός χώρος του ανωτέρω πειράματος τύχης, έχει τόσα στοιχεία όσα είναι οι συνδυασμοί $\binom{52}{2}$ διότι κατά τόσους τρόπους μπορώ να τραβήξω 2 από τα συνολικά 52 φύλλα.

(**i**) Στην τράπουλα υπάρχουν 4 βαλέδες και 4 φύλλα με τον αριθμό 2. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{4}{1}\binom{4}{1}=4\cdot 4=16$ διότι κάθε ευνοϊκή περίπτωση εξαγωγής του φύλλου 2 που είναι $\binom{4}{1}$ το πλήθος, πρέπει να συνδυασθεί με τις $\binom{4}{1}$ φορές που μπορεί να εξαχθεί βαλές. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}}=\frac{4\cdot 4}{51\cdot 26}=\frac{8}{663}$$

2^{ος} τρόπος Ορίζω τα γεγονότα Α: «Εμφάνιση φύλλου 2»
Β: «Εμφάνιση φύλλου βαλέ»

$$p(\mathrm{A})\,p(\mathrm{B/A})+p(\mathrm{B})\,p(\mathrm{A/B})=$$

$$\frac{4}{52}\,\frac{4}{51}+\frac{4}{52}\,\frac{4}{51}=2\frac{4\cdot 4}{52\cdot 51}=2\frac{4}{13\cdot 51}=\frac{8}{13\cdot 51}$$

(**ii**) Από τα 52 φύλλα της τράπουλας τα 13 είναι μπαστούνια. Ομοίως, η ζητούμενη πιθανότητα, σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό, είναι

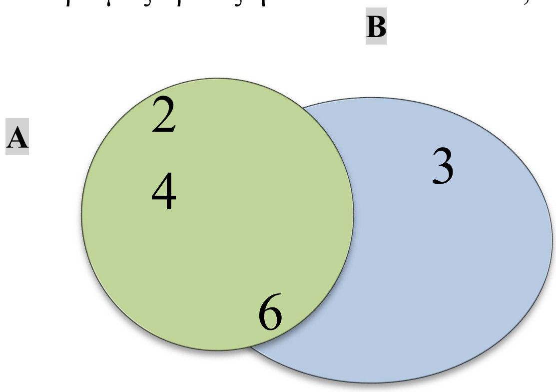
$$\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{\frac{13!}{2!\cdot 11!}}{\frac{52!}{2!\cdot 50!}}=\frac{\frac{12\cdot 13}{\cancel{2!}}}{\frac{51\cdot 52}{\cancel{2!}}}=\frac{12\cdot 13}{51\cdot 52}=\frac{12}{51\cdot 4}=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$$

2^{ος} τρόπος Ορίζω τα γεγονότα M_1: «Εμφάνιση φύλλου μπαστούνι την 1^{η} φορά»
M_2: «Εμφάνιση φύλλου μπαστούνι την 2^{η} φορά»

$$p(\mathrm{M}_1\cap \mathrm{M}_2)=p(\mathrm{M}_1)\,p(\mathrm{M}_2\cap \mathrm{M}_1)=$$

$$\frac{13}{52}\qquad\frac{12}{51}\qquad=\frac{1}{4}\,\frac{12}{51}=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$$

Π.χ. 92 Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός τίμιου ζαριού να είναι αριθμός άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3;



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Θεωρώ τα ενδεχόμενα

Α: «εμφανίζεται άρτιος αριθμός» $\quad \mathrm{A}=\{2,4,6\} \quad \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{3}{6}$

B: «εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 3» $B=\{3,\ 6\}$ $P(B)=\frac{2}{6}$

Είναι $A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, άρα από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας $P(A\cup B)=\frac{4}{6}$

2ος τρόπος Είναι $A\cap B=\{6\}\neq\{\ \}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$, συνεπώς ισχύει ότι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$$

Π.χ. 93 Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το αποτέλεσμα της ρίψης ενός δίκαιου ζαριού να είναι αριθμός άρτιος ή η ένδειξη 5;

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

A: «εμφανίζεται άρτιος αριθμός» $A=\{2,4,6\}$ $P(A)=\frac{3}{6}$

B: «εμφανίζεται ο αριθμός 5» $B=\{5\}$ $P(B)=\frac{1}{6}$

Ζητώ την πιθανότητα $P(A\cup B)$. Είναι $A\cap B=\{\ \}$, δηλαδή τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα μεταξύ τους. Συνεπώς ισχύει ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$

Π.χ. 94 Αν ισχύει ότι $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{5}$, υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(A')$.

Είναι $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{P(A)}{1-P(A)}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow 5P(A)=3-3P(A)\Leftrightarrow 8P(A)=3\Leftrightarrow P(A)=\frac{3}{8}$

Άρα, $P(A')=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

Π.χ. 95 Κατά τη διάρκεια των γραπτών εξετάσεων, η πιθανότητα να «ξεχάσουν» το κινητό τους τηλέφωνο ανοικτό, δίπλα τους ή κάτω από το θρανίο, οι σπουδαστές A, B είναι $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου ένας τουλάχιστον από τους A, B να έχει «ξεχάσει ανοικτό» το κινητό του τηλέφωνο;

Έστω τα ενδεχόμενα

A: «ο σπουδαστής A ξεχνά ανοικτό το κινητό του τηλέφωνο»

B: «ο σπουδαστής B ξεχνά ανοικτό το κινητό του τηλέφωνο»

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

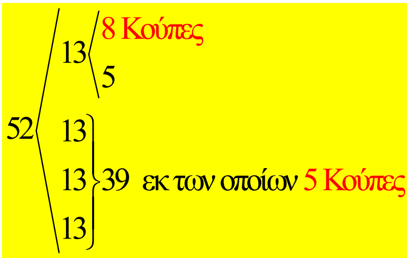
Π.χ. 96 Μία τράπουλα των 52 φύλλων μοιράζεται εξίσου σε 4 παίκτες. Ο 1ος παίρνει 8 κούπες. Ποιά είναι η πιθανότητα ένας άλλος παίκτης να πάρει τουλάχιστον μία κούπα;

Οι τρεις υπόλοιποι παίκτες έχουν λάβει συνολικά 39 κάρτες. Ο κάθε ένας από αυτούς μπορεί να πάρει τις κάρτες που του αντιστοιχούν κατά $\binom{39}{13}$ τρόπους. Όλες οι κούπες είναι 13. Αφού ο $1^{ος}$ παίκτης έλαβε 8 κούπες, οι υπόλοιποι 3 παίκτες συνολικά θα μοιρασθούν τις υπόλοιπες 5 κούπες που απομένουν. Δηλαδή από τα 39 φύλλα, των 3 παικτών, τα 5 είναι κούπες και τα υπόλοιπα 34 καρό, μπαστούνια και σπαθιά. Η πιθανότητα ένας παίκτης να πάρει τουλάχιστο μία κούπα είναι συμπληρωματική της πιθανότητας να μη λάβει καμία κούπα. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p=1-\frac{\binom{34}{13}}{\binom{39}{13}}=1-\frac{\frac{34!}{13!\ 21!}}{\frac{39!}{13!\ 26!}}=1-\frac{\frac{34!}{21!}}{\frac{39!}{26!}}=1-\frac{34!\ 26!}{39!\ 21!}=1-\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26}{35\cdot 36\cdot 37\cdot 38\cdot 39}=$$

$$1-\frac{11\cdot 23\cdot 2\cdot 5\cdot 2}{7\cdot 3\cdot 37\cdot 19\cdot 3}=1-\frac{22\cdot 230}{63\cdot 37\cdot 19}=1-\frac{5060}{44289}=1-0,114=0,886$$

Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $88,6\ \%$.



Π.χ. 97 Το 60% των κατοίκων μίας πόλης, είναι γυναίκες και το 40 % άνδρες. Έστω ότι το 1% των γυναικών και το 5% των ανδρών έχει ζάχαρο.

(**α**) Ποιά είναι η πιθανότητα αν επιλεγεί τυχαία ένα πρόσωπο, αυτό να έχει ζάχαρο;

(**β**) Ένα τυχαίο πρόσωπο έχει ζάχαρο. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι άνδρας ή γυναίκα;

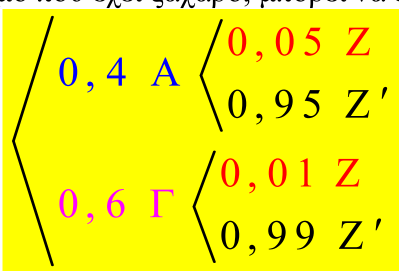
(**α**) Έστω τα ενδεχόμενα

Α: «Το τυχαία επιλεγέν άτομο είναι άνδρας» $\quad P(A)=\frac{40}{100}=0,4$

Γ: «Το τυχαία επιλεγέν άτομο είναι γυναίκα» $\quad P(\Gamma)=\frac{60}{100}=0,6$

Ζ: «Το τυχαία επιλεγέν άτομο έχει ζάχαρο» $\quad P(Z/A)=\frac{5}{100} \quad P(Z/\Gamma)=\frac{1}{100}$

(**α**) Το τυχαία επιλεγέν άτομο που έχει ζάχαρο, μπορεί να είναι άνδρας ή γυναίκα.



$$P(Z)=P(A)\cdot P(Z/A)+P(\Gamma)\cdot P(Z/\Gamma)$$

$$=\frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}}\frac{5}{100}+\frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}}\frac{1}{100}=\frac{20}{1.000}+\frac{6}{1.000}=\frac{26}{1.000}$$

(**β**) $P(A/Z)=\dfrac{P(A\cap Z)}{P(Z)}=\dfrac{P(A)\cdot P(Z/A)}{P(A)\cdot P(Z/A)+P(\Gamma)\cdot P(Z/\Gamma)}=$

$$\dfrac{\dfrac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}}\,\dfrac{5}{100}}{\dfrac{26}{1.000}}=\dfrac{20}{26}=\dfrac{10}{13}=0,7692$$

Επίσης είναι $P(\Gamma/Z)=1-P(A/Z)=1-0,7692=0,2308$

Υπενθύμιση $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B/A)$

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)P(A/B)$

$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_\nu)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots P(A_\nu/A_1\cap A_2\cap\ldots A_{\nu-1})$

Π.χ. 98 Παίκτης ρίχνει ταυτόχρονα 2 τίμια ζάρια και το άθροισμα των ενδείξεων που φέρνει είναι 10. Ποιά είναι η πιθανότητα ο αντίπαλος παίκτης να φέρει μεγαλύτερο άθροισμα;

Αν Α είναι το γεγονός «ο αντίπαλος παίκτης να φέρει άθροισμα μεγαλύτερο από 10», μπορεί να χωρισθεί σε δυο υποπεριπτώσεις

A_1: «ο αντίπαλος παίκτης φέρνει άθροισμα 11», $A_1=\{(5,6),(6,5)\}$

A_2: «ο αντίπαλος παίκτης φέρνει άθροισμα 12», $A_2=\{(6,6)\}$

Είναι $A=A_1\cup A_2\Rightarrow P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\dfrac{2}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}=0,08\bar{3}$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 8,3%.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Παρατήρηση 18 Όταν διασπάω ένα γεγονός και κατόπιν χρησιμοποιώ τα γεγονότα, αυτά πρέπει να είναι ασυμβίβαστα. Όταν όμως χρησιμοποιώ το γινόμενο πρέπει τα γεγονότα να είναι ανεξάρτητα.

Π.χ. 99 Από τράπουλα των 52 φύλλων, λαμβάνω τυχαία 6 φύλλα. Ποιά είναι η πιθανότητα τα 2 φύλλα να είναι κόκκινα και τα άλλα 4 μαύρα;

Το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων επιλογής των 6 από τα 52 φύλλα της τράπουλας είναι $\binom{52}{6}$. Από τα 52 φύλλα της τράπουλας τα 26 είναι μαύρα και τα άλλα 26 κόκκινα. Τα 2 κόκκινα επιλέγονται από τα 26 κόκκινα φύλλα της τράπουλας κατά $\binom{26}{2}$ τρόπους. Τα 4 μαύρα επιλέγονται από τα 26 μαύρα φύλλα της τράπουλας κατά $\binom{26}{4}$ τρόπους. Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $\binom{26}{2}\binom{26}{4}$

Η ζητούμενη πιθανότητα από τον κλασσικό ορισμό της, είναι

$$p=\frac{\binom{26}{2}\binom{26}{4}}{\binom{52}{6}}=\frac{\frac{26!}{2!\cdot 24!}\cdot\frac{26!}{4!\cdot 22!}}{\frac{52!}{6!\cdot 46!}}=\frac{\frac{25\cdot 26}{2}\cdot\frac{23\cdot\cancel{24}\cdot 25\cdot 26}{\cancel{2\cdot 3\cdot 4}}}{\frac{47\cdot\cancel{48}\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{6}}}=\frac{25\cdot 13\cdot 23\cdot 25\cdot\cancel{26}}{\frac{47\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot\cancel{52}}{3\cdot 5}}=\frac{25\cdot 13\cdot 23\cdot 25}{47\cdot 49\cdot 10\cdot 17\cdot 2}$$

$$=\frac{5\cdot 13\cdot 23\cdot 25}{47\cdot 49\cdot 68}=\frac{65\cdot 575}{2303\cdot 68}=\frac{37.375}{156.604}=0,2386592\cong 0,2387$$

Δηλαδή είναι $p=23,87\ \%$

$$52\left\langle\begin{matrix}26\ \text{Κόκκινα}-\ 2\ \text{Κόκκινα}\\ 26\ \text{Μαύρα}\ -\ \ 4\ \text{Μαύρα}\end{matrix}\right\rangle 6$$

2^{ος} τρόπος Όλοι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν σε μία σειρά οι 6 κάρτες της τράπουλας είναι $\frac{6!}{4!\ 2!}=\frac{5\cdot 6}{2!}=15$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$15\left(\frac{26}{52}\frac{25}{51}\right)\left(\frac{26}{50}\frac{25}{49}\frac{24}{48}\frac{23}{47}\right)=15\left(\frac{1}{2}\frac{\cancel{25}}{51}\right)\left(\frac{13}{\cancel{25}}\frac{25}{49}\frac{1}{2}\frac{23}{47}\right)=\frac{15\cdot 13\cdot 25\cdot 23}{102\cdot 49\cdot 94}=\frac{5\cdot 13\cdot 25\cdot 23}{34\cdot 49\cdot 94}$$

Π.χ. 100 Πλοίο διαθέτει κονσέρβες προέλευσης ατλαντικού ή ειρηνικού ωκεανού. Στον πίνακα φαίνεται η κατανομή των κονσερβών και η ταξινόμηση τους με κριτήριο την ποιότητα τους. Ποιά είναι η πιθανότητα για μία κονσέρβα που επιλέγεται τυχαία, να είναι προέλευσης ατλαντικού, δοθέντος ότι είναι καλή;

Ποιότητα	**Ατλαντικού**	**Ειρηνικού**	**Σύνολο**
Καλές	1.400	1.000	2.400
Χαλασμένες	40	20	60
Σύνολο	**1.440**	**1.020**	**2.460**

Θεωρώ τα γεγονότα:

Α: «η κονσέρβα είναι προέλευσης ατλαντικού», $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1.440}{2.460}$

Β: «η κονσέρβα είναι καλή», $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{2.400}{2.460}$

Είναι $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1.400}{2.460}$ Από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας είναι

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1.400}{2.460}}{\frac{2.400}{2.460}}=\frac{1400}{2400}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}=0,58\overline{3}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 58,33 %.

Π.χ. 101 Πλοίο διαθέτει τεσσάρων ειδών (α, β, γ, δ) κονσέρβες. Στον πίνακα φαίνεται η κατανομή των κονσερβών ανά είδος και η ταξινόμηση τους με κριτήριο την ποιότητα τους. Ποιά είναι η πιθανότητα για μία κονσέρβα που επιλέγεται τυχαία, να είναι του β είδους, δοθέντος ότι είναι καλή;

Είδη κονσερβών	**Καλές**	**Χαλασμένες**	**Σύνολο**
α	1.300	20	1.320
β	850	15	865
γ	700	10	710
δ	550	5	555
Σύνολο	**3.400**	**50**	**3.450**

Θεωρώ το γεγονός Α: «η κονσέρβα είναι καλή». Συνολικά υπάρχουν 3.450 κονσέρβες και από τα 4 είδη. Δηλαδή ο δειγματικός χώρος έχει 3.450 στοιχεία κατανεμημένα σε 4 υποσύνολα α, β, γ, δ με αντίστοιχες πιθανότητες $P(\alpha)=P(\beta)=P(\gamma)=P(\delta)=\frac{1}{4}$

Είναι $P(A/\alpha)=\frac{1.300}{1.320}$, $P(A/\beta)=\frac{850}{865}$, $P(A/\gamma)=\frac{700}{710}$, $P(A/\delta)=\frac{550}{555}$

Είναι $P(\beta/A)=\frac{P(\beta\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{850}{\cancel{3.450}}}{\frac{3.400}{\cancel{3.450}}}=\frac{850}{3.400}=\frac{85}{340}=\frac{17}{68}=0,25$

2^{ος} τρόπος Από τον τύπο του Bayes υπολογίζεται η πιθανότητα η κονσέρβα να είναι του β είδους, δοθέντος ότι είναι καλή, είναι

$$P(\beta/A)=\frac{P(\beta)\cdot P(A/\beta)}{P(\alpha)\cdot P(A/\alpha)+P(\beta)\cdot P(A/\beta)+P(\gamma)\cdot P(A/\gamma)+P(\delta)\cdot P(A/\delta)}=$$

$$\frac{\frac{1}{4}\frac{850}{865}}{\frac{1}{4}\frac{130\cancel{0}}{132\cancel{0}}+\frac{1}{4}\frac{850}{865}+\frac{1}{4}\frac{70\cancel{0}}{71\cancel{0}}+\frac{1}{4}\frac{550}{555}}=\frac{\frac{850}{865}}{\frac{130}{132}+\frac{850}{865}+\frac{70}{71}+\frac{550}{555}}=\frac{\frac{170}{173}}{\frac{65}{66}+\frac{170}{173}+\frac{70}{71}+\frac{110}{111}}=$$

$$\frac{0,9826589}{0,9848484+0,9826589+0,9859154+0,9909909}=\frac{0,9826589}{3,9444136}=0,2491267\cong 0,25$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι περίπου 25%.

Π.χ. 102 Ιδανικό ζάρι ρίχνεται 4 φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα να
(i) μην έλθει κανένα 6,
(ii) έλθει τουλάχιστον ένα 6;

(i) $p=\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{25\cdot 25}{36\cdot 36}=\frac{625}{1.296}=0,482253$

(ii) $p'=1-p=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-0,482253=0,517747$

Π.χ. 103 Από ράφι βιβλιοθήκης στο οποίο βρίσκονται 4 βιβλία μαθηματικών, 3 φυσικής και 1 λεξικό, λαμβάνω τυχαία 3 βιβλία. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι

(i) ένα από τα τρία βιβλία το λεξικό,

(ii) τα 2 βιβλία μαθηματικών και το 1 φυσικής;

4 Μαθηματικά
3 Φυσική
1 Λεξικό

(i) $\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}}$ **(ii)** $\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}$

Π.χ. 104 Ποιά είναι η πιθανότητα 5 παίκτες basket να έχουν γεννηθεί, ανά δυο, σε διαφορετικούς μήνες; Ποιά είναι η πιθανότητα δύο τουλάχιστον παίκτες να έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα;

$$\frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{\cancel{12}\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}=\frac{11\cdot 5\cdot \cancel{3}\cdot 2}{12\cdot 6\cdot 4\cdot \cancel{3}}=\frac{55\cdot 2}{72\cdot 4}=\frac{55}{72\cdot 2}\cong 0,382,\quad 1-0,382=0,618$$

Π.χ. 105 Από κάλπη που περιέχει 4 άσπρες και 2 μαύρες μπάλες λαμβάνω διαδοχικά 2 μπάλες:

(i) με επανατοποθέτηση,

(ii) χωρίς επανατοποθέτηση.

Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και οι 2 μπάλες άσπρες;

4 Λευκές
2 Μαύρες

(i) $\frac{4}{6}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ **(ii)** $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{6!}{4!\,2!}}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 6}=\frac{2}{5}$

$2^{ος}$ τρόπος Ορίζω τα γεγονότα Λ_1: «Η πρώτη μπάλα είναι λευκή»
Λ_2: «Η πρώτη μπάλα είναι λευκή»

Είναι $p(\Lambda_1\cap\Lambda_2)=p(\Lambda_1)\,p(\Lambda_2/\Lambda_1)=\frac{4}{6}\frac{3}{5}=\frac{2}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{5}=\frac{2}{5}$

Π.χ. 106 Ποιά είναι η πιθανότητα μεταξύ 4 καρτών που επιλέγονται τυχαία, από τράπουλα 52 καρτών, <u>τουλάχιστον</u> οι 3 κάρτες να είναι σπαθιά;

$$52\text{ κάρτες}\begin{cases}4\text{ κάρτες}\begin{cases}4\text{ κάρτες σπαθιά}\\ 3\text{ κάρτες σπαθιά }\&\ 1\text{ κάρτα άλλο χαρτί}\end{cases}\\ 48\text{ κάρτες}\end{cases}.$$

Από τις 52 κάρτες της τράπουλας, οι 4 κάρτες μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{52}{4}$ τρόπους. Από τις 52 κάρτες της τράπουλας σπαθιά είναι οι 13 κάρτες, ενώ οι υπόλοιπες 39 κάρτες είναι κούπες, καρό και μπαστούνια.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p=\dfrac{\binom{13}{4}+\binom{13}{3}\binom{39}{1}}{\binom{52}{4}}=\dfrac{\binom{13}{4}+\binom{13}{3}39}{\binom{52}{4}}$

Π.χ. 107 Αν σπουδαστής που απαντά σε 2 ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών, με 4 δυνατές απαντήσεις εκάστη, επιλέγει στην τύχη την απάντηση που θα δώσει και στις 2 ερωτήσεις, ποιά είναι η πιθανότητα να απαντήσει σωστά:

(**i**) και στις δυο ερωτήσεις,

(**ii**) ακριβώς στη μία ερώτηση,

(**i**) $p=\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(**ii**) $$\mathrm{P}=\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{2}{4}-\frac{2}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

Π.χ. 108 Σε μία κλήρωση ΛΟΤΤΟ τοποθετούνται στην κληρωτίδα 49 όμοιες σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το 49 και επιλέγονται τυχαία οι 6 αριθμοί που κερδίζουν.

Ποιά είναι η πιθανότητα παίζοντας:

(**α**) μία μόνο στήλη να πετύχεις ακριβώς 5 σωστά νούμερα;

(**β**) μόνο μία εξάδα αριθμών, να πετύχεις και τους 6 αριθμούς που θα κληρωθούν;

(**γ**) 40 αριθμούς να πετύχεις <u>τουλάχιστον</u> 5 από τους 6 αριθμούς που θα κληρωθούν;

(**α**) Οι 6 αριθμοί που έπαιξες επιλέγονται από το σύνολο των 49 αριθμών κατά $\binom{49}{6}$ τρόπους. Τα 5 σωστά νούμερα επιλέγονται από τα 6 τυχερά νούμερα κατά $\binom{6}{5}=6$ τρόπους. Το εναπομείναν λάθος νούμερο επιλέγεται από τα 43 άτυχα νούμερα κατά $\binom{43}{1}=43$ τρόπους. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p=\dfrac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}=\dfrac{6\cdot 43}{\binom{49}{6}}$

(**β**) Οι 6 αριθμοί που έπαιξες επιλέγονται από το σύνολο των 49 αριθμών κατά $\binom{49}{6}$ τρόπους. Η ζητούμενη πιθανότητα, από τον κλασσικό ορισμό, είναι

$$p=\frac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}}=\frac{1}{\frac{49!}{6!\;43!}}=\frac{1}{\frac{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{6!}}=\frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{4}\cdot 5\cdot \cancel{6}}{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot \cancel{48}\cdot 49}=\frac{1}{44\cdot 3\cdot 46\cdot 47\cdot 49}$$

(γ) Οι 40 αριθμοί που έπαιξες επιλέγονται από το σύνολο των 49 αριθμών κατά $\binom{49}{40}$ τρόπους. Από τους 49 αριθμούς, οι 6 αριθμοί που κληρώνονται είναι οι τυχεροί, ενώ οι υπόλοιποι 43 αριθμοί που δεν κληρώνονται, είναι οι άτυχοι αριθμοί. Για να πετύχεις τουλάχιστον 5 από τους 6 τυχερούς αριθμούς, σημαίνει ότι υπάρχουν οι ακόλουθες δυο υποπεριπτώσεις:

(i) Να πετύχεις και τους 6 τυχερούς αριθμούς, δηλαδή από τους 40 αριθμούς που επέλεξες να είναι οι 6 αριθμοί τυχεροί και οι υπόλοιποι 34 αριθμοί άτυχοι.

Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $p_1=\frac{\binom{6}{6}\binom{43}{34}}{\binom{49}{40}}=\frac{1\binom{43}{34}}{\binom{49}{40}}=\frac{\binom{43}{34}}{\binom{49}{40}}$

(ii) Να πετύχεις τους 5 τυχερούς αριθμούς από το σύνολο των 6 τυχερών αριθμών που κληρώθηκαν και να χάσεις τους υπόλοιπους 35 αριθμούς (από το σύνολο των 40 αριθμών που έπαιξες), οι οποίοι επιλέγονται από το σύνολο των 43 άτυχων αριθμών που δεν κληρώθηκαν.

Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $p_2=\frac{\binom{6}{5}\binom{43}{35}}{\binom{49}{40}}=\frac{6\binom{43}{35}}{\binom{49}{40}}$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p=p_1+p_2=\frac{\binom{43}{34}}{\binom{49}{40}}+\frac{6\binom{43}{35}}{\binom{49}{40}}=\frac{\binom{43}{34}+6\binom{43}{35}}{\binom{49}{40}}$

Π.χ. 109 Από κλουβί που περιέχει 8 αρσενικούς και 6 θηλυκούς παπαγάλους επιλέγονται στην τύχη, συγχρόνως, 2 παπαγάλοι. Ποιά η πιθανότητα και οι δυο να είναι (i) διαφορετικού φύλλου, (ii) του ίδιου φύλλου.

(i) $p=\frac{\binom{8}{1}\binom{6}{1}}{\binom{14}{2}}=\frac{8\cdot 6}{91}=\frac{48}{91}$

2ος τρόπος Ορίζω τα γεγονότα A_1: «Ο 1ος παπαγάλος είναι αρσενικός»
A_2: «Ο 2ος παπαγάλος είναι αρσενικός»
$Θ_1$: «Ο 1ος παπαγάλος είναι θηλυκός»
$Θ_2$: «Ο 2ος παπαγάλος είναι θηλυκός»

$$p(A_1 \cap \Theta_2) \quad + p(\Theta_1 \cap A_2) =$$
$$p(A_1)p(\Theta_2/A_1) + p(\Theta_1)p(A_2/\Theta_1) =$$
$$\frac{8}{14} \quad \frac{6}{13} \quad + \quad \frac{6}{14} \quad \frac{8}{13} \quad = \frac{48}{14\cdot 13} + \frac{48}{14\cdot 13} = \frac{24}{7\cdot 13} + \frac{24}{7\cdot 13} = \frac{48}{91}$$

(**ii**) Έστω τα ενδεχόμενα Α: «Και οι 2 παπαγάλοι είναι αρσενικοί»
Β: «Και οι 2 παπαγάλοι είναι θηλυκοί»
Επειδή $A \cap B = \{\ \}$ και $A \cup B = \Omega$, είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$p' = P(A) + P(B) = \frac{\binom{8}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{28+15}{91} = \frac{43}{91}$$

2ος τρόπος $\quad p' = 1 - p = 1 - \dfrac{48}{91} = \dfrac{43}{91}$

3ος τρόπος

$$p(A_1 \cap A_2) \quad + p(\Theta_1 \cap \Theta_2) =$$
$$p(A_1)p(A_2/A_1) + p(\Theta_1)p(\Theta_2/\Theta_1) =$$
$$\frac{8}{14} \quad \frac{7}{13} \quad + \quad \frac{6}{14} \quad \frac{5}{13} \quad = \frac{56+30}{14\cdot 13} = \frac{86}{14\cdot 13} = \frac{43}{7\cdot 13} = \frac{43}{91}$$

Π.χ. 110 Κάλπη περιέχει 3 άσπρες και 4 μαύρες μπάλες. Λαμβάνω στην τύχη 2 εξ αυτών. Ποιά η πιθανότητα να είναι: (**i**) διαφορετικού χρώματος,
(**ii**) ιδίου χρώματος;
Στην κάλπη περιέχονται συνολικά 7 μπάλες. Μπορούν να επιλεγούν οι 2 εξ αυτών κατά $\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!\ 5!} = \dfrac{6\cdot 7}{2!} = 21$ τρόπους (δυνατές περιπτώσεις). Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 3\cdot 4 = 12$ Άρα, $p = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$

2ος τρόπος Ορίζω τα γεγονότα Λ_1: «Η 1η μπάλα είναι λευκή»
Λ_2: «Η 2η μπάλα είναι λευκή»
M_1: «Η 1η μπάλα είναι μαύρη»
M_2: «Η 2η μπάλα είναι μαύρη»

$$p(\Lambda_1 \cap M_2) + p(M_1 \cap \Lambda_2) =$$
$$p(\Lambda_1)p(M_2/\Lambda_1) + p(M_1)p(\Lambda_2/M_1) =$$
$$\frac{3}{7} \quad \frac{4}{6} \quad + \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{6} \quad = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

(**ii**) Είναι $p' = 1 - p = 1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$

2^{ος} τρόπος Για να είναι και οι 2 επιλεγείσες μπάλες ιδίου χρώματος αρκεί να είναι και οι 2 άσπρες ή και οι 2 μαύρες. Αυτό μπορεί να γίνει κατά $\binom{3}{2}=3$ ή $\binom{4}{2}=6$ τρόπους αντίστοιχα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p' = p_1 + p_2 = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{\binom{3}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

3^{ος} τρόπος

$$p(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \qquad + p(\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2) =$$
$$p(\Lambda_1)\, p(\Lambda_2/\Lambda_1) + p(\mathrm{M}_1)\, p(\mathrm{M}_2/\mathrm{M}_1) =$$
$$\frac{3}{7} \qquad \frac{2}{6} \quad + \quad \frac{4}{7} \qquad \frac{3}{6} \quad = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

Π.χ. 111 Ποιά είναι η πιθανότητα παίζοντας μία απλή στήλη στο τυχερό παίγνιο ΠΡΟΠΟ, να επιτύχεις (**α**) 13άρι, (**β**) 12άρι, (**γ**) 11άρι;

Σε κάθε μία ποδοσφαιρική αναμέτρηση υπάρχουν τρία δυνατά ενδεχόμενα που είναι τα ακόλουθα: 1 (νίκη της γηπεδούχου ομάδας), X (ισοπαλία) και 2 (νίκη της φιλοξενούμενης ομάδας). Επειδή όλοι οι ποδοσφαιρικοί αγώνες που περιλαμβάνονται σε ένα δελτίο ΠΡΟΠΟ είναι 13, όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι 3^{13} το πλήθος.

(**α**) Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι: $p = \frac{1}{3^{13}}$

(**β**) Για να επιτύχεις 12άρι στο ΠΡΟΠΟ σημαίνει ότι μάντεψες σωστά όλους τους αγώνες εκτός από έναν, στον οποίο αν π.χ. βγήκε 1, εσύ είχες εσφαλμένως ποντάρει στα άλλα δύο ενδεχόμενα δηλαδή στα X και 2.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $p = \frac{\binom{13}{12}+\binom{13}{12}}{3^{13}} = \frac{2\binom{13}{12}}{3^{13}} = \frac{2\cdot 13}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}}$

(**γ**) Αντιστοίχως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p = \frac{\binom{13}{11}+\binom{13}{11}+\binom{13}{11}+\binom{13}{11}}{3^{13}} = \frac{4\binom{13}{11}}{3^{13}} = \frac{4\frac{12\cdot 13}{2}}{3^{13}} = \frac{24\cdot 13}{3^{13}} = \frac{8\cdot 13}{3^{12}}$$

Π.χ. 112 Ένα δείγμα προϊόντων A, περιέχει 8 αντικείμενα από τα οποία 3 είναι ελαττωματικά και ένα άλλο δείγμα B, περιέχει 5 αντικείμενα από τα οποία 2 είναι ελαττωματικά. Για 2 αντικείμενα που λαμβάνονται τυχαία, ένα από κάθε δείγμα, ποιά η πιθανότητα (**α**) να είναι και τα δυο μη ελαττωματικά,

(**β**) το ένα να είναι ελαττωματικό και το άλλο όχι,

(**γ**) αν το ένα είναι ελαττωματικό και το άλλο όχι, το ελαττωματικό να προέρχεται από το δείγμα A;

(**α**) Η πιθανότητα να επιλεγεί ένα μη ελαττωματικό αντικείμενο από το δείγμα Α είναι $\frac{5}{8}$ και από το δείγμα Β είναι $\frac{3}{5}$. $\text{A } 8\begin{cases}3\text{E}\\5\text{K}\end{cases}$ $\text{B } 5\begin{cases}2\text{E}\\3\text{K}\end{cases}$

Επειδή τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\text{P}(\text{K}_1 \cap \text{K}_2) = \text{P}(\text{K}_1)\cdot\text{P}(\text{K}_2) = \frac{\cancel{5}}{8}\cdot\frac{3}{\cancel{5}} = \frac{3}{8}$

(**β**) Το συμβάν μπορεί να σπάσει σε δυο υποσυμβάντα.

$$\begin{array}{ccc} & 1\text{E},\ 1\text{K} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{E}_1\text{K}_2 & & \text{K}_1\text{E}_2 \end{array}$$

Η πιθανότητα να επιλεγεί ένα ελαττωματικό από το δείγμα Α και ένα μη ελαττωματικό από το Β δείγμα είναι $p_1 = \frac{3}{8}\frac{3}{5} = \frac{9}{40}$. Η πιθανότητα να επιλεγεί ένα μη ελαττωματικό από το δείγμα Α και ένα ελαττωματικό από το Β δείγμα είναι $p_2 = \frac{5}{8}\frac{2}{5} = \frac{1}{4}$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = p_1 + p_2 = \frac{9}{40} + \frac{1}{4} = \frac{19}{40}$

2^{ος} τρόπος

$P(E_1 \cap K_2) + P(K_1 \cap E_2) =$

$P(E_1)\cdot P(K_2 / E_1) + P(K_1)\cdot P(E_2 / K_1) =$

$\frac{3}{8} \qquad \frac{3}{5} \quad + \quad \frac{5}{8} \qquad \frac{2}{5} \quad = \frac{19}{40}$

(**γ**) Θεωρώ τα ενδεχόμενα

E_1: «επιλέγεται ελαττωματικό αντικείμενο από το δείγμα Α»

E_2: «ένα προϊόν είναι ελαττωματικό και το άλλο όχι»

Είναι $p(E_2) = \frac{19}{40}$, $p(E_1 \cap E_2) = \frac{9}{40}$. Άρα $p(E_1 / E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{19}{40}} = \frac{9}{19}$

Π.χ. 113 Ένα στα χίλια άτομα του πληθυσμού πάσχει από κάποια σοβαρή ασθένεια. Η εξέταση που χρησιμοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση πράγματι πάσχει από την ασθένεια και στο 2% των περιπτώσεων, αν δεν πάσχει.

Ποιά είναι η πιθανότητα να προκύψει θετική η εξέταση σε κάποιο άτομο που επιλέχθηκε τυχαία από τον πληθυσμό;

Αν για κάποιο άτομο του πληθυσμού η εξέταση ήταν θετική, ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από την ασθένεια;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα: Α: «Η εξέταση είναι θετική»

Β: «Το άτομο πάσχει από την ασθένεια»,

Είναι $p(\text{B}) = \frac{1}{1.000}$, $p(\text{B}') = \frac{999}{1.000}$, $1.000 \text{ άτομα}\begin{cases}1 \text{ νοσεί}\\999 \text{ υγιείς}\end{cases}$,

100 ασθενείς$\begin{cases} \mathrm{A}: 99 \text{ ασθενείς} \\ \mathrm{A}': \ 1 \text{ υγιής} \end{cases}$, 100 υγιείς$\begin{cases} \mathrm{A}': 98 \text{ υγιείς} \\ \mathrm{A}: \ 2 \text{ ασθενείς} \end{cases}$, $\mathrm{A}\begin{cases} \mathrm{A}_1 \text{ ασθενής} \\ \mathrm{A}_2 \text{ υγιής} \end{cases}$,

$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2)$. Είναι $p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{99}{100}$, $p(\mathrm{A}/\mathrm{B}') = \dfrac{2}{100}$

Είναι $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}/\mathrm{B})p(\mathrm{B}) + p(\mathrm{A}/\mathrm{B}')p(\mathrm{B}') = \dfrac{99}{100}\dfrac{1}{1.000} + \dfrac{2}{100}\dfrac{999}{1.000} = \dfrac{2,097}{100}$

Είναι $p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\frac{2,097}{100}} = \dfrac{p(\mathrm{A}/\mathrm{B})p(\mathrm{B})}{\frac{2,097}{100}} = \dfrac{\frac{99}{100}\frac{1}{1000}}{\frac{2,097}{100}} = \dfrac{99}{2097}$

Π.χ. 114 Η πιθανότητα ναυτολόγησης σε Δ/Ξ, για τον σπουδαστή Α είναι 50% ενώ για τον σπουδαστή Β είναι 25%. Αν η πιθανότητα να μη ναυτολογηθεί κανείς τους στο συγκεκριμένο πλοίο είναι 30%, ποιά είναι η πιθανότητα να:

(i) ναυτολογηθούν και οι δυο σπουδαστές Α, Β σε Δ/Ξ,

(ii) ναυτολογηθεί μόνο ο σπουδαστής Α στο Δ/Ξ;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα

Α: «ναυτολογείται ο σπουδαστής Α σε Δ/Ξ», $p(\mathrm{A}) = 0,50$

Β: «ναυτολογείται ο σπουδαστής Β σε Δ/Ξ», $p(\mathrm{B}) = 0,25$

Δίνεται ότι $p(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}') = p\left[(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'\right] = 0,30$. Άρα, $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 0,70$

(i) Από $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ προκύπτει ότι

$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 0,50 + 0,25 - 0,70 = 0,05$

(ii) $p(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 0,50 - 0,05 = 0,45$

Π.χ. 115 Έστω Α, Β γεγονότα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $p(\mathrm{A}) = \dfrac{3}{4}$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{5}{8}$. Εξετάστε αν τα Α, Β είναι ξένα μεταξύ τους. Δείξτε ότι $\dfrac{3}{4} \le p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ και $\dfrac{3}{8} \le p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le \dfrac{5}{8}$

Αν τα γεγονότα Α, Β ήταν αμοιβαίως αποκλειόμενα θα έπρεπε να ισχύει η σχέση $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{8} = \dfrac{11}{8} > 1$ άτοπο. Άρα δεν είναι ξένα μεταξύ τους.

- Είναι $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, άρα $p(\mathrm{A}) \le p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} \le p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$
- Είναι $\mathrm{A}\cap\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}$ άρα $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le p(\mathrm{B}) \Leftrightarrow p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le \dfrac{5}{8}$
- $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \le 1 \Leftrightarrow p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{8} - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{8} - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{8} \le p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

Π.χ. 116 Έστω Α, Β γεγονότα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $p(\mathrm{A})=0,8$ και $p(\mathrm{B})=0,4$. Εξετάστε αν τα Α, Β είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Δείξτε ότι ισχύει η σχέση $0,2 \le p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le 0,4$.

Αν τα γεγονότα Α, Β ήταν αμοιβαίως αποκλειόμενα θα έπρεπε να ισχύει η σχέση $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})=0,8+0,4=1,2>1$ άτοπο.

Άρα, δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα.

- Από $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{B}$ έπεται ότι $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le p(\mathrm{B}) \Leftrightarrow p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 0,4$
- Είναι

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le 1 \Leftrightarrow p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 1 \Leftrightarrow$$
$$0,8+0,4-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 1 \Leftrightarrow 0,2\le p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

Π.χ. 117 Για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $p(\mathrm{A})=\frac{1}{4}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{5}$ και $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{3}{10}$. Εξετάστε αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα. Ποια είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης μόνο του γεγονότος Α;

Αν τα γεγονότα Α, Β ήταν ασυμβίβαστα θα έπρεπε να ισχύει ότι $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B}) \Leftrightarrow \frac{3}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{6}{20}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}$ που προφανώς δεν ισχύει.

Άρα, είναι $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \Leftrightarrow \frac{3}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \Leftrightarrow$

$$\frac{6}{20}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \Leftrightarrow p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{20}$$

$$p(\mathrm{A}-\mathrm{B})=p(\mathrm{A})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}-\frac{3}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

Π.χ. 118 Τρία τίμια κέρματα ρίχνονται ταυτόχρονα σε ένα πείραμα τύχης με 8 απλά ενδεχόμενα. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης.

1^{o} κέρμα	2^{o} κέρμα	3^{o} κέρμα	Απλό ενδεχόμενο
Κ	Κ	Κ	ΚΚΚ
Κ	Κ	Γ	ΚΚΓ
Κ	Γ	Γ	ΚΓΓ
Γ	Γ	Γ	ΓΓΓ
Κ	Γ	Κ	ΚΓΓ
Γ	Γ	Κ	ΓΓΚ
Γ	Κ	Κ	ΓΚΚ
Γ	Κ	Γ	ΓΚΓ

Π.χ. 119 Δυο δίκαια ζάρια ρίχνονται ταυτόχρονα και το 1^{o} φέρνει την ένδειξη 4. Ποιά η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων των 2 ζαριών να είναι μεγαλύτερο του 8;

Από την ταυτόχρονη ρίψη των 2 τίμιων ζαριών προκύπτουν 36 δυνατά ενδεχόμενα. Έστω τα ενδεχόμενα:

Α: «το 1^{ο} ζάρι φέρνει 4», $P(A)=\frac{1}{6}$

Β: «το άθροισμα των 2 ζαριών είναι μεγαλύτερο του 8»

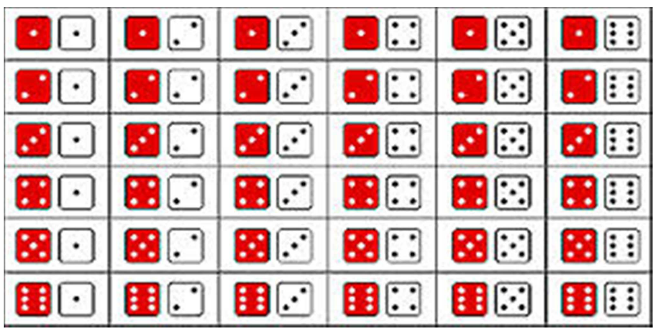
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Προφανώς $A\cap B=\{(4,\ 5),(4,\ 6)\}$,

άρα $P(A\cap B)=\frac{2}{36}$. Είναι, $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

Π.χ. 120 Δύο ιδανικά ζάρια ρίχνονται ταυτόχρονα και εξετάζω τις ενδείξεις τους. Βρείτε το δειγματικό χώρο Ω αυτού του πειράματος τύχης.

		White Die					
		1	2	3	4	5	6
Red Die	1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
	4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
	5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)



Π.χ. 121 Ποιά η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων δυο ιδανικών ζαριών που ρίχνονται ταυτόχρονα, να είναι μικρότερο ή ίσο του 11;

Έστω το ενδεχόμενο
Α: «άθροισμα των ενδείξεων μικρότερο ή ίσο του 11».
Για το συμπληρωματικό του ενδεχόμενο A', είναι
Α΄: «το άθροισμα των ενδείξεων είναι 12», δηλαδή $\mathrm{A}'=\{(6,\ 6)\}$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος περιέχει 36 στοιχεία. Άρα, $\mathrm{P}(\mathrm{A})=1-\mathrm{P}'(\mathrm{A})=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$

Π.χ. 122 Δύο ιδανικά ζάρια ρίχνονται ταυτόχρονα και εξετάζω το άθροισμα των ενδείξεών τους. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος Ω του ανωτέρω πειράματος τύχης.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Π.χ. 123 Εταιρεία αγοράζει λιπαντικά από τρεις πετρελαϊκές βιομηχανίες με πιθανότητες $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Τα λιπαντικά ικανοποιούν τις απαιτήσεις του αγοραστή με πιθανότητες k, l, m αντίστοιχα. Αν επιλεγεί τυχαία ένα λιπαντικό, ποια η πιθανότητα να πληροί τις απαιτήσεις του αγοραστή;
Θεωρώ τα γεγονότα:

Α: «το επιλεγέν λιπαντικό ικανοποιεί τις απαιτήσεις του αγοραστή»
Β: «επιλέγεται λιπαντικό μίας πετρελαϊκής βιομηχανίας».

Το γεγονός Β διαμελίζεται στα γεγονότα:

B_1: «επιλέγεται λιπαντικό της $1^{\eta\varsigma}$ πετρελαϊκής βιομηχανίας», $p(\mathrm{B}_1)=\frac{1}{3}$

B_2: «επιλέγεται λιπαντικό της $2^{\eta\varsigma}$ πετρελαϊκής βιομηχανίας», $p(\mathrm{B}_2)=\frac{1}{3}$

B_3: «επιλέγεται λιπαντικό της $3^{\eta\varsigma}$ πετρελαϊκής βιομηχανίας», $p(\mathrm{B}_3)=\frac{1}{3}$

Ισχύει ότι $p(\mathrm{A})=p(\mathrm{B}_1)\,p(\mathrm{A}/\mathrm{B}_1)+p(\mathrm{B}_2)\,p(\mathrm{A}/\mathrm{B}_2)+p(\mathrm{B}_3)\,p(\mathrm{A}/\mathrm{B}_2)$

$$=\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}l+\frac{1}{3}m=\frac{k+l+m}{3}$$

Π.χ. 124 Από τους 40 σπουδαστές, οι 20 ναυτολογήθηκαν σε φορτηγό (Φ), οι 10 σε δεξαμενόπλοιο (Δ) και οι υπόλοιποι σε ακτοπλοϊκό (Α) ή κρουαζιερόπλοιο (Κ). Για σπουδαστή που επιλέγεται τυχαία είναι $p(\mathrm{A})=\dfrac{x}{3x+4}$ και $p(\mathrm{K})=\dfrac{x-1}{9x+2}$ όπου $x\in\mathbb{N}$. Υπολογίστε την τιμή του αριθμού x, τις $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{K})$ και το πλήθος των σπουδαστών που ναυτολογήθηκαν σε κρουαζιερόπλοιο και σε ακτοπλοϊκό.

Έστω τα ενδεχόμενα:

Φ: «ο σπουδαστής που επιλέγεται τυχαία ναυτολογήθηκε σε φορτηγό»
Δ: «ο σπουδαστής που επιλέγεται τυχαία ναυτολογήθηκε σε δεξαμενόπλοιο»
Α: «ο σπουδαστής που επιλέγεται τυχαία ναυτολογήθηκε σε ακτοπλοϊκό»
Κ: «ο σπουδαστής που επιλέγεται τυχαία ναυτολογήθηκε σε κρουαζιερόπλοιο»

Είναι $p(\Phi)=\dfrac{1}{2}$, $p(\Delta)=\dfrac{1}{4}$, $p(\Phi)+p(\Delta)+p(\mathrm{A})+p(\mathrm{K})=1 \Leftrightarrow p(\mathrm{A})+p(\mathrm{K})=\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3x+4}+\frac{x-1}{9x+2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 & \text{Δεκτή} \\ x=-\dfrac{4}{7} & \text{Απορρίπτεται διότι οδηγεί σε } \mathrm{P}(\mathrm{A})<0 \end{cases}$$

Είναι $p(\mathrm{A})=\dfrac{x}{3x+4}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$, άρα 8 σπουδαστές ναυτολογήθηκαν σε ακτοπλοϊκό

και $p(\mathrm{K})=\dfrac{x-1}{9x+2}=\dfrac{1}{20}$, άρα 2 σπουδαστές ναυτολογήθηκαν σε κρουαζιερόπλοιο.

Π.χ. 125 Μαθηματικός επιστρέφει τυχαία τα γραπτά σε 30 σπουδαστές. Ποιά είναι η πιθανότητα:

(**α**) ο κάθε ένας σπουδαστής να λάβει το δικό του γραπτό
(**β**) ο σπουδαστής Αρχιμήδης να λάβει το δικό του γραπτό
(**γ**) οι σπουδαστές Αρχιμήδης και Ευκλείδης να λάβουν ο κάθε ένας το γραπτό του
(**δ**) οι σπουδαστές Αρχιμήδης ή Ευκλείδης να λάβουν το γραπτό του ο κάθε ένας.

(**α**) Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι $30!$ και υπάρχει μόνο μία περίπτωση να πάρει ο κάθε σπουδαστής το δικό του γραπτό. Συνεπώς $p_1=\dfrac{1}{30!}=\dfrac{1}{30}\dfrac{1}{29}\dfrac{1}{28}\dfrac{1}{27}\ldots$.

(**β**) Έστω ότι ο σπουδαστής Αρχιμήδης έλαβε το δικό του γραπτό. Ισχύει ότι $p_2=\dfrac{29!}{30!}=\dfrac{1}{30}$

(**γ**) Έστω τα γεγονότα

Α: «ο σπουδαστής Αρχιμήδης έλαβε το γραπτό του», $p(\mathrm{A})=\dfrac{1}{30}$

Β: «ο σπουδαστής Ευκλείδης έλαβε το γραπτό του», $p(\mathrm{B})=\dfrac{1}{30}$

Είναι $p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\dfrac{1}{29}$ Είναι $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\,p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\dfrac{1}{30}\dfrac{1}{29}=\dfrac{1}{870}\cong 0{,}0011$

Δηλαδή η ζητούμενη πιθανότητα είναι $0{,}11\ \%$.

(**δ**) Είναι $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{870}=\dfrac{57}{870}\cong 0{,}0655$

Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $6{,}55\ \%$

Π.χ. 126 Τέσσερεις πλοιοκτήτες φθάνουν, την ίδια ημέρα, σε πόλη που βρίσκονται τρία ναυπηγία και τηλεφωνούν σε ένα ναυπηγείο ο κάθε ένας, προκειμένου να το επισκεφθούν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.
(**α**) Ποια η πιθανότητα και οι 4 να έχουν τηλεφωνήσει στο ίδιο ναυπηγείο;
(**β**) Ποια η πιθανότητα και οι 4 να επισκεφθούν ταυτόχρονα όλα τα ναυπηγεία;

(**α**) Ο κάθε πλοιοκτήτης μπορεί να τηλεφωνήσει σε ένα οποιοδήποτε από τα τρία ναυπηγεία. Άρα, έχει 3 δυνατές επιλογές. Συνολικά, υπάρχουν $3^4 = 81$ δυνατές επιλογές. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις, δηλαδή να τηλεφωνήσουν και οι 4 πλοιοκτστο ίδιο ναυπηγείο είναι όσες και τα ναυπηγεία, δηλαδή 3.

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι $p = \dfrac{3}{81} = \dfrac{1}{27} \cong 0,037$

Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $3,7\ \%$

(**β**) Αν και οι 4 πλοιοκτήτες επισκέφθηκαν ταυτόχρονα τα 3 ναυπηγεία, σημαίνει ότι οι 2 από αυτούς επισκέφθηκαν, συγχρόνως, το ίδιο ναυπηγείο. Δεχόμαστε ότι για την κάθε χρονική στιγμή, ο κάθε ένας πλοιοκτήτης μπορεί να βρίσκεται σε ένα μόνο ναυπηγείο. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι όσες το πλήθος των μεταθέσεων των 4 (πλοιοκτητών) εκ των οποίων οι 2 (πλοιοκτήτες) είναι ίδιοι (ή ίσοι αφού φτάνουν στο ίδιο ναυπηγείο συγχρόνως), δηλαδή $3\dfrac{4!}{2!} = 3\dfrac{3\cdot 4}{1} = 36$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \dfrac{36}{81} = \dfrac{4}{9} \cong 0,\overline{4}$

Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $44,\overline{4}\ \%$

Π.χ. 127 Από τράπουλα 52 φύλλων, λαμβάνονται τυχαία 3 φύλλα. Ποιά η πιθανότητα
(**α**) ένα ακριβώς φύλλο από τα τρία να είναι άσσος
(**β**) τουλάχιστον ένα φύλλο από τα τρία να είναι άσσος;

(**α**) Τα 3 φύλλα μπορούν να επιλεγούν από τα 52 κατά $\binom{52}{3}$ τρόπους. Για τον υπολογισμό των ευνοϊκών περιπτώσεων ισχύει ότι σε κάθε τρία φύλλα θα υπάρχει ένας άσσος που επιλέγεται από τους 4 συνολικά άσσους κατά $\binom{4}{1} = 4$ τρόπους. Ο κάθε άσσος που επιλέγεται, συνδυάζεται με τα υπόλοιπα 2 φύλλα, που επιλέγονται από τα υπόλοιπα 52 – 4 = 48 φύλλα, κατά $\binom{48}{2}$ τρόπους.

$$p = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{2}}{\binom{52}{3}} = \frac{4\cdot 1.128}{22.100} = \frac{4.512}{22.100} = 0,2041$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $20,41\ \%$

(**β**) Θεωρώ το ενδεχόμενο
Α: «ένα τουλάχιστο φύλλο είναι άσσος» το οποίο διασπάται στα παρακάτω συμβάντα:

A_1: «ένα φύλλο από τα 3 φύλλα είναι άσσος»
A_2: «δυο φύλλα από τα 3 φύλλα είναι άσσοι»
A_3: «και τα 3 φύλλα από τα 3 φύλλα είναι άσσοι»

Το ενδεχόμενο Α ισούται με το άθροισμα των συμβάντων A_1, A_2, A_3, δηλαδή $A = A_1 + A_2 + A_3$, συνεπώς $p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$.

$$p = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{2} + \binom{4}{2}\binom{48}{1} + \binom{4}{3}\binom{48}{0}}{\binom{52}{3}} = \frac{4.512 + 288 + 4}{22.100} = 0,2174$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $21,74\ \%$

Π.χ. 128 Σε εργοστάσιο κατασκευής εξαρτημάτων, λειτουργούν 3 μηχανές διαφορετικής απόδοσης και ακρίβειας. Η ημερήσια παραγωγή και τα ποσοστά ελαττωματικών εξαρτημάτων είναι 10.000 & 4% για την 1η, 15.000 & 6% για την 2η και 20.000 & 2% για την 3η. Ποιά είναι η πιθανότητα για εξάρτημα που επιλέγεται τυχαία και διαπιστώνεται ότι είναι ελαττωματικό, να προέρχεται από την 1η μηχανή;
Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

A_1: «το εξάρτημα κατασκευάστηκε από την 1η μηχανή», $p(A_1) = \frac{10.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{45.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{2}{9}$

A_2: «το εξάρτημα κατασκευάστηκε από την 2η μηχανή», $p(A_2) = \frac{15.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{45.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{1}{3}$

A_3: «το εξάρτημα κατασκευάστηκε από την 3η μηχανή», $p(A_3) = \frac{20.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{45.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{4}{9}$

B: «το εξάρτημα είναι ελαττωματικό»

Είναι $p(B/A_1) = \frac{4}{100}$, $p(B/A_2) = \frac{6}{100}$, $p(B/A_3) = \frac{2}{100}$

Μηχανή	**Ποσοστά παραγωγής**	**Ποσοστά ελαττωματικών ανά μηχανή**	**Πιθανότητα ελαττωματικών ανά μηχανή**	**Τελική πιθανότητα ελαττωματικών**
1η	$\frac{2}{9}$	4%	$\frac{8}{900}$	
2η	$\frac{1}{3}$	6%	$\frac{6}{300} = \frac{18}{900}$	$\frac{34}{900}$
3η	$\frac{4}{9}$	2%	$\frac{8}{900}$	

Ισχύει ότι $P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{\cancel{900}}}{\frac{34}{\cancel{900}}} = \frac{8}{34} = \frac{4}{17} = 0,2352941 \cong 0,235$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 23,5 %

2ος τρόπος Σύμφωνα με τον τύπο του Thomas Bayes (1763 μΧ), η πιθανότητα ένα ελαττωματικό εξάρτημα να προέρχεται από την 1η μηχανή είναι:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1)\,p(B/A_1)}{p(A_1)\,p(B/A_1) + p(A_2)\,p(B/A_2) + p(A_3)\,p(B/A_3)}$$

$$=\frac{\frac{2}{9}\frac{4}{100}}{\frac{2}{9}\frac{4}{100}+\frac{1}{3}\frac{6}{100}+\frac{4}{9}\frac{2}{100}}=\frac{\frac{2}{9}4}{\frac{2}{9}4+\frac{1}{3}6+\frac{4}{9}2}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{9}+2+\frac{8}{9}}$$
$$=\frac{8}{8+18+8}=\frac{4}{4+9+4}=\frac{4}{17}\cong 0,235$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 23,5 %

Π.χ. 129 Ρίχνω ένα τίμιο ζάρι και ένα δίκαιο νόμισμα. Ποιά είναι η πιθανότητα το κέρμα να φέρει γράμματα και το ζάρι 5 ή 6;

Το παραπάνω πείραμα τύχης είναι σύνθετο και ο δειγματικός του χώρος είναι το σύνολο Ω που προκύπτει από το ακόλουθο καρτεσιανό γινόμενο.

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\,\mathrm{X}\{\mathrm{K},\Gamma\}=$$
$$\{(1,\mathrm{K}),(1,\Gamma),(2,\mathrm{K}),(2,\Gamma),(3,\mathrm{K}),(3,\Gamma),(4,\mathrm{K}),(4,\Gamma),(5,\mathrm{K}),(5,\Gamma),(6,\mathrm{K}),(6,\Gamma)\}.$$

Τα δυνατά αποτελέσματα είναι 12. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι 2.
Τα αποτελέσματα ρίψης ζαριού και κέρματος είναι ανεξάρτητα. Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι $p=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Π.χ. 130 Έστω $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν $p(\omega_1)=p(\omega_2)$, $p(\omega_1)=\frac{p(\omega_3)}{2}$, $p(\omega_1)=\frac{p(\omega_4)}{6}$, υπολογίστε τις τιμές των πιθανοτήτων $p(\omega_1)$, $p(\omega_2)$, $p(\omega_3)$, $p(\omega_4)$.

Έστω ότι $p(\omega_1)=x$. Είναι $p(\omega_2)=x$, $p(\omega_3)=2x$, $p(\omega_4)=6x$

Από $\sum_{i=1}^{4}p(\omega_i)=1 \Leftrightarrow x+x+2x+6x=1 \Leftrightarrow x=0,1$ προκύπτει ότι

$p(\omega_1)=p(\omega_2)=x=0,1$ $\quad p(\omega_3)=2x=0,2$ $\quad p(\omega_4)=6x=0,6$

Π.χ. 131 Έστω τα ενδεχόμενα
Α: «ο ναυπηγός στις 11 πμ. βρίσκεται στο σχεδιαστήριο», $p(\mathrm{A})=0,50$
Β: «ο ναυπηγός στις 11 πμ. βρίσκεται στο μηχανουργείο», $p(\mathrm{B})=0,30$
Ποιά είναι η πιθανότητα στις 11 πμ ο ναυπηγός να μη βρίσκεται ούτε στο σχεδιαστήριο ούτε στο μηχανουργείο; Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}')=p\left[(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'\right]=1-p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=1-\left[p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})\right]=$$
$$1-[0,50+0,30]=0,20$$

Τα γεγονότα Α, Β είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$

Π.χ. 132 Για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $p(\mathrm{A})=\frac{17}{30}$, $p(\mathrm{B})=\frac{7}{15}$, $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{2}{3}$. Υπολογίστε τις $p(\mathrm{B}')$, $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, $p(\mathrm{A}-\mathrm{B})$, $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}')$

$p(B') = 1 - p(B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\frac{2}{3} = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - p(A \cap B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = \frac{11}{30}$$

- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{17}{30} - \frac{11}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
- $p(A \cup B') = p(A) + p(B') - p(A \cap B') =$

$$\frac{17}{30} + \frac{8}{15} - \frac{6}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

Π.χ. 133 Δίνονται δυο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου για τα οποία ισχύουν $p(A - B) = \frac{1}{4}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$, $p(B' - A) = \frac{1}{2}$

(**i**) Υπολογίστε την $p(A)$.

(**ii**) Αποδείξτε ότι $p(B) = \frac{1}{4}$

(**iii**) Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα δυο ενδεχόμενα Α, Β;

(**i**) $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = p(A) - \frac{1}{20} \Leftrightarrow p(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

(**ii**) $p(B' - A) = p(B') - p(B' \cap A) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = [1 - p(B)] - p(A - B) \Leftrightarrow$

$$0 = \frac{1}{2} - p(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow p(B) = \frac{1}{4}$$

(**iii**) $p[(A - B) \cup (B - A)] = p(A - B) + p(B - A) =$

$$\frac{1}{4} + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

Π.χ. 134 Τρία δοχεία περιέχουν χρωματιστά σφαιρίδια όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Επιλέγεται στην τύχη ένα δοχείο από το οποίο λαμβάνεται ένα σφαιρίδιο. Αν το σφαιρίδιο είναι ερυθρό, ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το 2^o δοχείο;

Δοχείο	**Ερυθρές**	**Λευκές**	**Μαύρες**	**Σύνολο**
1^o	3	4	1	**8**
2^o	1	2	3	**6**
3^o	4	3	2	**9**
Σύνολο	**8**	**9**	**6**	**23**

Θεωρώ τα ενδεχόμενα

Ε: «το σφαιρίδιο που επιλέγεται είναι ερυθρό»

E_1: «το σφαιρίδιο προέρχεται από το 1^o δοχείο», $p(E_1) = \frac{1}{3}$

E_2: «το σφαιρίδιο προέρχεται από το 2^o δοχείο», $p(E_2)=\frac{1}{3}$

E_3: «το σφαιρίδιο προέρχεται από το 3^o δοχείο», $p(E_3)=\frac{1}{3}$

Ισχύει ότι $p(E/E_1)=\frac{3}{8}$, $p(E/E_2)=\frac{1}{6}$, $p(E/E_3)=\frac{4}{9}$

Τα ενδεχόμενα E_1, E_2, E_3 θεωρούνται ασυμβίβαστα (ή ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα). Από τον τύπο του Bayes προκύπτει ότι:

$$p(E_2/E)=\frac{p(E_2\cap E)}{p(E)}=\frac{p(E_2)p(E/E_2)}{p(E_1)p(E/E_1)+p(E_2)p(E/E_2)+p(E_3)p(E/E_3)}$$

$$=\frac{\cancel{\frac{1}{3}}\frac{1}{6}}{\cancel{\frac{1}{3}}\frac{3}{8}+\cancel{\frac{1}{3}}\frac{1}{6}+\cancel{\frac{1}{3}}\frac{4}{9}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{6}+\frac{4}{9}}=\frac{36}{213}=\frac{12}{71}=0{,}169014$$

Π.χ. 135 Δύο δοχεία περιέχουν άσπρα και μαύρα σφαιρίδια, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Από το 1^o δοχείο λαμβάνεις τυχαία ένα σφαιρίδιο και το ρίχνεις στο 2^o δοχείο. Ακολούθως από το 2^o δοχείο λαμβάνεις τυχαία ένα σφαιρίδιο. Ποιά είναι η πιθανότητα αυτό που έριξες από το 1^o δοχείο στο 2^o δοχείο να είναι μαύρο, αν αυτό που έβγαλες από το 2^o δοχείο ήταν άσπρο;

Δοχείο	Άσπρα	Μαύρα	Σύνολο
1°	2	1	**3**
2°	1	5	**6**
Σύνολο	**3**	**6**	**9**

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

E_1: «επιλέγεται άσπρο σφαιρίδιο από το 1^o δοχείο», $p(E_1)=\frac{2}{3}$

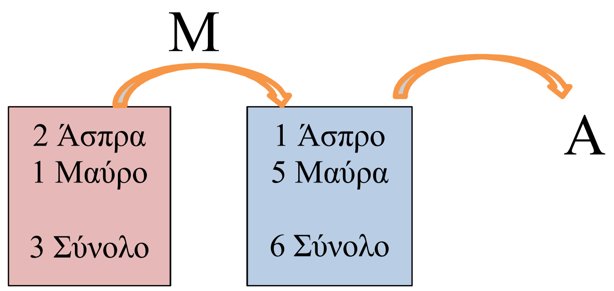
E_2: «επιλέγεται μαύρο σφαιρίδιο από το 1^o δοχείο», $p(E_2)=\frac{1}{3}$

A: «επιλέγεται άσπρο σφαιρίδιο από το 2^o δοχείο» Είναι $p(A/E_1)=\frac{2}{7}$, $p(A/E_2)=\frac{1}{7}$

$$p(E_2/A)=\frac{p(E_2\cap A)}{p(A)}=\frac{p(E_2)p(A/E_2)}{p(E_1)p(A/E_1)+p(E_2)p(A/E_2)}=\frac{\frac{1}{\cancel{3}}\frac{1}{\cancel{7}}}{\frac{2}{\cancel{3}}\frac{2}{\cancel{7}}+\frac{1}{\cancel{3}}\frac{1}{\cancel{7}}}=\frac{1}{5}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 20 %

Παρατήρηση 19 $p(A/E_2)=\frac{p(A\cap E_2)}{p(E_2)}\Leftrightarrow p(A\cap E_2)=p(E_2)\cdot p(A/E_2)$



Π.χ. 136 Ποιά είναι η πιθανότητα να φέρεις τρεις διαδοχικούς αριθμούς αν ρίξεις ταυτόχρονα τρία τίμια ζάρια;
Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι όσο το πλήθος όλων των διατεταγμένων τριάδων με επαναλήψεις των έξι ενδεχομένων που μπορεί να φέρει το κάθε ζάρι. Δηλαδή είναι 6^3. Οι ευνοϊκές τριάδες είναι οι εξής τέσσερεις $(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)$. Κάθε τριάδα π.χ. η $(1,2,3)$ δίνει $3!=6$ μεταθέσεις. Συνεπώς οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $4\cdot 3!=4\cdot 6$
Η ζητούμενη πιθανότητα κατά Laplace είναι $p=\dfrac{4\cdot 6}{6^3}=\dfrac{4}{6\cdot 6}=\dfrac{1}{3\cdot 3}=\dfrac{1}{9}\simeq 11\ \%$

Π.χ. 137 Τοποθετούνται σε ένα ράφι 6 βιβλία άλγεβρας και 4 βιβλία γεωμετρίας. Ποιά είναι η πιθανότητα τρία συγκεκριμένα βιβλία άλγεβρας να είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο;
Όλα τα βιβλία είναι 10 και μπορούν να τοποθετηθούν κατά 10! τρόπους. Τα τρία συγκεκριμένα βιβλία άλγεβρας μπορούν να θεωρηθούν ως ένα, οπότε θεωρώ ότι υπάρχουν 8 βιβλία που μπορούν να διαταχθούν κατά 8! τρόπους. Τα τρία συγκεκριμένα βιβλία άλγεβρας μπορούν να διαταχθούν μεταξύ τους, το ένα δίπλα στο άλλο κατά 3! τρόπους. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{8!3!}{10!}=\frac{3!}{9\cdot 10}=\frac{2\cdot 3}{9\cdot 10}=\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{15}$$

$$\underbrace{[A_1]-[A_2]-[A_3]}_{1\ \text{Βιβλίο}}-[A_4]-[A_5]-[A_6]-[\Gamma_1]-[\Gamma_2]-[\Gamma_3]-[\Gamma_4]$$

Π.χ. 138 Μηχανή κατασκευάζει 12.000 βίδες ημερησίως και το 3% αυτών είναι ελαττωματικές. Ποιά η πιθανότητα από τυχαίο δείγμα 600 βιδών, οι 12 να είναι ελαττωματικές;

Από την ημερήσια παραγωγή των 12.000 βιδών, οι 360 είναι ελαττωματικές άρα οι υπόλοιπες 11.640 βίδες είναι κανονικές. Από το τυχαίο δείγμα των 600 βιδών, αν οι 12 είναι ελαττωματικές, οι υπόλοιπες 588 βίδες είναι κανονικές.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p=\dfrac{\dbinom{360}{12}\dbinom{11.640}{588}}{\dbinom{12.000}{600}}=\ldots$

$$12.000\left\{\begin{matrix}3\% & 360\ \text{E}\rightarrow 12\ \text{E}\\ \\ 97\% & 11.640\ \text{K}\rightarrow 588\ \text{K}\end{matrix}\right\}600$$

Π.χ. 139 Ποιά είναι η πιθανότητα στις 5 ρίψεις ενός δίκαιου ζαριού να εμφανιστεί το 6 τρεις φορές; Είναι $p=\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}=\frac{25}{6^5}$

Π.χ. 140 Το 1^{ο} δοχείο περιέχει 4 κόκκινα και 5 μπλε σφαιρίδια ενώ το 2^{ο} δοχείο περιέχει 6 κόκκινα και 7 μπλε σφαιρίδια. Τίμιο νόμισμα ρίχνεται και αν έλθει κεφαλή, επιλέγεται σφαιρίδιο από το 1^{ο} δοχείο, ενώ αν έλθουν γράμματα, επιλέγεται σφαιρίδιο από το 2^{ο} δοχείο. Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινο σφαιρίδιο;

4 Κόκκινα 5 Μπλε 9 Σύνολο	6 Κόκκινα 7 Μπλε 13 Σύνολο

Ορίζω τα γεγονότα
Κ: «Επιλέγω κόκκινο σφαιρίδιο»,
Δ_1: «Επιλέγω σφαιρίδιο από το 1^{ο} δοχείο»
Δ_2: «Επιλέγω σφαιρίδιο από το 2^{ο} δοχείο»

$$P(K)=P(\Delta_1)P(K/\Delta_1)+P(\Delta_2)P(K/\Delta_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{13}=\frac{2}{9}+\frac{3}{13}=\ldots$$

Π.χ. 141 Ποιά είναι η πιθανότητα να έλθει ένα τουλάχιστον 4 σε δύο ρίψεις ενός αμερόληπτου ζαριού;
Θεωρώ τα ενδεχόμενα: A_1: «εμφάνιση 4 στην πρώτη ρίψη»
A_2: «εμφάνιση 4 στη δεύτερη ρίψη»

$A_1\cup A_2$: «εμφάνιση 4 στην πρώτη ή στη δεύτερη ή και στις δυο ρίψεις»

$$p(A_1\cup A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{2}{6}-\frac{1}{36}=\frac{12}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

	1	2	3	4	5	6
1				✓		
2				✓		
3				✓		
4	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5				✓		
6				✓		

Π.χ. 142 Στο τμήμα επισκευών καταστήματος ηλεκτρονικών ειδών, υπάρχουν προς επισκευή 10 κινητά τηλέφωνα και 12 ταμπλέτες. Ημερησίως υπάρχει η δυνατότητα επισκευής το πολύ 6 συσκευών συνολικά. Οι προς επισκευή συσκευές επιλέγονται κάθε πρωί στην τύχη. Ποια η πιθανότητα σε μία εργάσιμη ημέρα
(**α**) να επισκευασθούν το πολύ 4 συσκευές κινητών τηλεφώνων,
(**β**) να επισκευασθούν 5 κινητά και μία ταμπλέτα;

(**α**) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των υποενδεχομένων στα οποία διαμελίσθηκε το υπό μελέτη ενδεχόμενο.
Συνεπώς, $p=0,0124+0,1062+0,2985+0,3538+0,1858=0,9567$
Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 95,67 %

Πλήθος κινητών	Πλήθος ταμπλετών	Πιθανότητα	Σύνολο συσκευών
0	6	$\dfrac{\binom{10}{0}\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}}=\dfrac{\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}}=0,0124$	6
1	5	$\dfrac{\binom{10}{1}\binom{12}{5}}{\binom{22}{6}}=\dfrac{10\binom{12}{5}}{\binom{22}{6}}=0,1062$	6
2	4	$\dfrac{\binom{10}{2}\binom{12}{4}}{\binom{22}{6}}=0,2985$	6
3	3	$\dfrac{\binom{10}{3}\binom{12}{3}}{\binom{22}{6}}=0,3538$	6
4	2	$\dfrac{\binom{10}{4}\binom{12}{2}}{\binom{22}{6}}=0,1858$	6

2^{ος} τρόπος Ζητείται να υπολογισθεί η πιθανότητα του γεγονότος που είναι συμπληρωματικό του να επισκευασθούν στη διάρκεια μίας εργάσιμης ημέρας 5 ή 6 συσκευές κινητών τηλεφώνων.

Άρα, $p=1-\left[\dfrac{\binom{10}{5}\binom{12}{1}}{\binom{22}{6}}+\dfrac{\binom{10}{6}\binom{12}{0}}{\binom{22}{6}}\right]=1-\left[\dfrac{\binom{10}{5}12}{\binom{22}{6}}+\dfrac{\binom{10}{6}}{\binom{22}{6}}\right]=1-0,0433=0,9567$

(**β**) Είναι $\dfrac{\binom{10}{5}\binom{12}{1}}{\binom{22}{6}}=0,0405$ Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 4,05 %

Π.χ. 143 Έστω $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ ένας δειγματικός χώρος. Ποιοί από τους παρακάτω τύπους μπορεί να θεωρηθούν κατάλληλοι προκειμένου να εκφράζουν την πιθανότητα κάθε απλού ενδεχομένου k του Ω;

(i) $p(k)=\dfrac{1}{k}$ (ii) $p(k)=\dfrac{1}{2^k}$ (iii) $p(k)=\dfrac{1}{2k}$

	p_1	p_2	p_3	p_6	$p_1+p_2+p_3+p_6$
$p(k)=\dfrac{1}{k}$	$p_1=\dfrac{1}{1}$	$p_2=\dfrac{1}{2}$	$p_3=\dfrac{1}{3}$	$p_6=\dfrac{1}{6}$	>1
$p(k)=\dfrac{1}{2^k}$	$p_1=\dfrac{1}{2}=\dfrac{32}{64}$	$p_2=\dfrac{1}{4}=\dfrac{16}{64}$	$p_3=\dfrac{1}{8}=\dfrac{8}{64}$	$p_6=\dfrac{1}{64}$	$\dfrac{57}{64}$
$p(k)=\dfrac{1}{2k}$	$p_1=\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{12}$	$p_2=\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{12}$	$p_3=\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{12}$	$p_6=\dfrac{1}{12}$	1

Συνεπώς, δεκτή είναι μόνο η (γ).

Π.χ. 144 Η πιθανότητα να ζουν μετά από μισό αιώνα ένας άνδρας και μία γυναίκα είναι 0,8 και 0,9 αντίστοιχα. Ποιά είναι η πιθανότητα μετά από μισό αιώνα

(i) να ζουν και οι δυο,
(ii) να μη ζει κανένας από τους δυο,
(iii) να ζει τουλάχιστον ο ένας από τους δυο;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα: Α: «μετά από μισό αιώνα ζει ο άντρας»
Γ: «μετά από μισό αιώνα ζει η γυναίκα»

Θεωρώ ότι τα γεγονότα Α, Γ είναι ανεξάρτητα.

(i) $p(\mathrm{A}\cap\Gamma)=p(\mathrm{A})\cdot p(\Gamma)=\dfrac{8}{10}\dfrac{9}{10}=\dfrac{72}{100}=0,72$

(ii) $p(\mathrm{A}'\cap\Gamma')=p(\mathrm{A}')\cdot p(\Gamma')=\dfrac{2}{10}\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{100}=0,02$

(iii) $P(\text{Τουλάχιστον ένας ζει})=1-P(\text{Κανείς απο τους 2 δε ζει})=1-0,02=0,98$

Παρατήρηση 20 Αν σε ένα πείραμα τύχης οι πιθανότητες να κερδίσω (ή χάσω) τις ποσότητες $x_1,x_2,...,x_k$ είναι αντίστοιχα $p_1,p_2,...,p_k$ (με $\sum_{i=1}^{k}p_i=1$) τότε η μέση τιμή ή **μαθηματική ελπίδα** ή αναμενόμενη τιμή δίνεται από τον τύπο $E=x_1p_1+x_2p_2+...+x_kp_k=\sum_{i=1}^{k}x_ip_i$. Αν $E=0$, δηλαδή το αναμενόμενο κέρδος είναι μηδέν, το παιχνίδι ονομάζεται **δίκαιο**. Η ονομασία οφείλεται στο ότι μετά από πολλές επαναλήψεις του παιχνιδιού κανείς από τους συμμετέχοντες δεν κερδίζει ούτε χάνει.

Π.χ. 145 Έστω ν άτομα που το καθένα αγοράζει από ένα λαχνό. Οι λαχνοί είναι αριθμημένοι από το 1 έως το ν . Αν η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι κατά 0,8 % μεγαλύτερη από την πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος αριθμός, υπολογίστε την τιμή του αριθμού ν .

Αποκλείεται η περίπτωση να είναι το ν άρτιος αριθμός διότι τότε η πιθανότητα κλήρωσης άρτιου αριθμού θα ήταν ίση με την πιθανότητα κλήρωσης περιττού αριθμού. Άρα το ν είναι περιττός αριθμός. Συνεπώς το πλήθος των άρτιων αριθμών θα είναι $\frac{\nu-1}{2}$ και το πλήθος των περιττών αριθμών θα είναι $\frac{\nu+1}{2}$.

ν αριθμοί $\begin{cases} \text{άρτιος } \frac{\nu-1}{2} \\ \text{περιττός } \frac{\nu+1}{2} \end{cases}$ Ισχύει ότι $\nu-\frac{\nu-1}{2}=\frac{2\nu}{\nu}-\frac{\nu-1}{2}=\frac{\nu+1}{2}$

Αν $\nu=7\begin{cases} 4 \text{ περιττοί} \\ 3 \text{ άρτιοι} \end{cases}$ 1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7 $\frac{\nu-1}{2}=\frac{7-1}{2}=3$

Αν $\nu=5\begin{cases} 3 \text{ περιττοί} \\ 2 \text{ άρτιοι} \end{cases}$ 1, **2**, 3, **4**, 5 $\frac{\nu-1}{2}=\frac{5-1}{2}=2$

$$p(\pi)=\frac{0,8}{100}+p(\alpha)\Leftrightarrow\frac{\nu+1}{2\nu}=\frac{8}{1.000}+\frac{\nu-1}{2\nu}\Leftrightarrow\nu=125$$

Π.χ. 146 Κάθε φορά που το ζάρι φέρνει 1 ή 2 ή 3 ή 4 ο Αρχιμήδης χάνει από 100 £, αλλά κάθε φορά που έρχεται η ένδειξη 5 ή 6 κερδίζει από 200 £.

(**i**) Ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος του;

(**ii**) Αν έλθει το 1 τρεις φορές και το 6 δυο φορές, χάνει 300 £ αλλά κερδίζει 400 £. Ποιό ήταν το αναμενόμενο κέρδος του;

(**i**) Είναι $E=-\frac{4}{6}100+\frac{2}{6}200=0$.

(**ii**) $E=-\frac{4}{6}300+\frac{2}{6}400=-200+\frac{400}{3}=-\frac{600}{3}+\frac{400}{3}=-\frac{200}{3}\cong-66,\overline{6}$.

Π.χ. 147 Από ελέγχους που διενήργησε λιμενική αρχή, σε 100 σκάφη, διαπιστώθηκε ότι:

30 στερούνταν καταλλήλων πιστοποιητικών αξιοπλοΐας,

40 είχαν σοβαρές ελλείψεις στα σωστικά & πυροσβεστικά τους μέσα και

15 στερούνταν καταλλήλων πιστοποιητικών αξιοπλοΐας & επιπλέον είχαν ελλείψεις στα σωστικά & πυροσβεστικά τους μέσα.

Αν επιλεγεί τυχαία ένα από τα 100 σκάφη, ποιά είναι η πιθανότητα να

(**i**) έχει διαπράξει τουλάχιστον μία από τις δύο παραβάσεις,

(**ii**) μην έχει υποπέσει σε καμία από τις ανωτέρω δύο παραβάσεις,

(**iii**) έχει κάνει μόνο μία από τις δύο παραβάσεις;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα

Α: «το σκάφος στερείται κατάλληλου πιστοποιητικού αξιοπλοΐας», $p(\mathrm{A})=0,30$

Β: «το σκάφος έχει σοβαρές ελλείψεις στα σωστικά & πυροσβεστικά του μέσα», $p(\mathrm{B})=0,40$

(**i**) $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0,30+0,40-0,15=0,55$.

(**ii**) $p\left[(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'\right]=1-p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=1-0,55=0,45$.

(**iii**)

$$p\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=p(A-B)+p(B-A)=p(A)-p(A\cap B)+p(B)-p(A\cap B)=$$
$$0,30-0,15+0,40-0,15=0,40$$

Π.χ. 148 Βαθμό κάτω από τη βάση έλαβε το:
60 % των μαθητών στην άλγεβρα,
40 % των στη γεωμετρία και
35 % και στα δυο ανωτέρω μαθήματα.
Ποιό είναι το ποσοστό των μαθητών που έλαβε βαθμό κάτω από τη βάση σε ένα
(**i**) τουλάχιστον από τα δυο μαθήματα,
(**ii**) μόνο από τα δυο μαθήματα;

Θεωρώ τα γεγονότα
Α: «ο μαθητής έλαβε βαθμό κάτω από τη βάση στην άλγεβρα», $p(A)=0,60$
Γ: «ο μαθητής έλαβε βαθμό κάτω από τη βάση στη γεωμετρία», $p(\Gamma)=0,40$

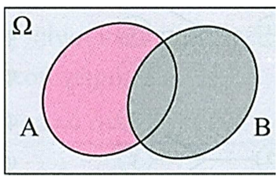
$A\cap\Gamma$: «ο μαθητής έλαβε βαθμό κάτω από τη βάση στην άλγεβρα & στη γεωμετρία», $p(A\cap\Gamma)=0,35$

(**i**) $p(A\cup\Gamma)=p(A)+p(\Gamma)-p(A\cap\Gamma)=0,60+0,40-0,35=0,65$

(**ii**)

$$p\left[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)\right]=p(A-\Gamma)+p(\Gamma-A)=p(A)-p(A\cap\Gamma)+p(\Gamma)-p(A\cap\Gamma)$$
$$=0,60-0,35+0,40-0,35=0,30$$

Π.χ. 149 Για τα ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $p(A)=\frac{2}{5}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ και $p(A\cup B)=\frac{1}{2}$. Υπολογίστε τις $p(A')$, $p(B')$, $p(A\cup B)'$, $p(A\cap B)$, $p(A-B)$, $p(B-A)$.



- $p(A')=1-p(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
- $p(B')=1-p(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
- $p(A\cup B)'=1-p(A\cup B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)\Leftrightarrow$
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-p(A\cap B)\Leftrightarrow p(A\cap B)=\frac{3}{20}$$
- $p(A-B)=p(A)-p(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{3}{20}=\frac{8}{20}-\frac{3}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$
- $p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{3}{20}=\frac{5}{20}-\frac{3}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

Π.χ. 150 Αν σπουδαστής που απαντά σε 2 ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών, με 4 δυνατές απαντήσεις εκάστη, επιλέγει στην τύχη την απάντηση που θα δώσει και στις δυο ερωτήσεις, ποιά είναι η πιθανότητα να απαντήσει σωστά

(**α**) και στις δυο ερωτήσεις,
(**β**) ακριβώς στη μία ερώτηση;

(**α**) $p=\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(**β**) $p=p(A-B)+p(B-A)=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{2}{4}-\frac{2}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

Π.χ. 151 Αν τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα και $p(\mathrm{A})=\frac{1}{5}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $p(\mathrm{A}/\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$.

Γνωρίζω από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας ότι ισχύει η σχέση $\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$. Συνεπώς, θα είναι

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))=\frac{\mathrm{P}[\mathrm{A}\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})]}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}}=$$

Π.χ. 152 Ποιά είναι η πιθανότητα τίμιο νόμισμα που ρίχνεται 11 φορές, να φέρει ακριβώς 5 φορές κεφαλή;

Εφόσον το νόμισμα είναι τίμιο, η πιθανότητα εμφανίσεως κεφαλής είναι 0,5 και ισούται με την πιθανότητα εμφανίσεως γραμμάτων (συμπληρωματικά ενδεχόμενα). Από τις 11 συνολικές ρίψεις του νομίσματος, κεφαλή εμφανίζεται τις 5 φορές, συνεπώς γράμματα εμφανίζονται τις υπόλοιπες 6 φορές.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα, από τις δοκιμές Bernoulli, είναι

$$p=\binom{11}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^6=\binom{11}{5}\frac{1}{2^{11}}=\frac{11!}{5!\cdot 6!\cdot 2^{11}}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{5!\cdot 2^{11}}=\frac{7\cdot 9\cdot 5\cdot 11}{5!\cdot 2^{7}}=$$
$$\frac{7\cdot 9\cdot \cancel{5}\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \cancel{5}\cdot 2^{7}}=\frac{7\cdot 3\cdot 11}{2^{11}}.$$

Ασκήσεις

44 Δίκαιο νόμισμα ρίχνεται και τις 7 πρώτες φορές φέρνει γράμματα. Ποιά είναι η πιθανότητα την 8^{η} φορά να φέρει γράμματα;

45 Θα πας Ικαρία & θες να ξέρεις αν πρέπει να πάρεις μαζί σου ομπρέλα. Τηλεφωνείς σε 3 φίλους σου που ζουν εκεί και ρωτάς αν βρέχει. Κάθε ένας έχει 66 % πιθανότητες να λέει αλήθεια και 34 % να θέλει να σε κοροϊδέψει. Και οι τρεις σου λένε ότι βρέχει. Ποιά είναι η πιθανότητα να βρέχει;

46 Εργοστάσιο διαθέτει 100 ελαστικά εκ των οποίων τα 5 παρουσιάζουν ελάττωμα. Κατάστημα παραγγέλνει 5 ελαστικά που επιλέγονται τυχαία. Ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένα ελαττωματικό ελαστικό να σταλεί στο κατάστημα;

47 Δίκαιο ζάρι ρίχνεται 3 φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα το 6 να
(**α**) μην έλθει ποτέ,
(**β**) έλθει τουλάχιστον μία φορά;

48 Εκ των 20 πλοίων, τα 8 εκπέμπουν θείο και παράγωγα του, πάνω από τα φυσιολογικά όρια. Νηογνώμονας επιλέγει στην τύχη 5 πλοία και κάνει έλεγχο. Ποιά είναι η πιθανότητα
(**α**) τα 4 ακριβώς να είναι ρυπογόνα,
(**β**) κανένα να μην είναι ρυπογόνο,
(**γ**) τουλάχιστον ένα να είναι ρυπογόνο;

49 Σύλλογος έχει ως μέλη 20 αντρόγυνα, εκ των οποίων 3 άτομα επιλέγονται τυχαία προκειμένου να αποτελέσουν το προεδρείο. Ποιά είναι η πιθανότητα στο προεδρείο να:
(**α**) μετέχουν μόνο άντρες,
(**β**) μετέχουν μόνο γυναίκες,
(**γ**) μετέχουν δυο γυναίκες και ένας άντρας,
(**δ**) μη μετέχουν άντρας και γυναίκα που είναι αντρόγυνο;

50 Σε σχολείο το 25% των μαθητών απορρίπτονται στην άλγεβρα, το 15% στη γεωμετρία και το 10% και στα δυο μαθήματα. Για μαθητή που επιλέγεται τυχαία, ποιά είναι η πιθανότητα:
(**α**) αν έχει απορριφθεί στη γεωμετρία, να έχει απορριφθεί και στην άλγεβρα,
(**β**) αν έχει απορριφθεί στην άλγεβρα, να έχει απορριφθεί και στη γεωμετρία
(**γ**) να έχει απορριφθεί στην άλγεβρα ή στη γεωμετρία;

51 Τρεις σκοπευτές Α, Β, Γ που παίρνουν μέρος σε αγώνα σκοποβολής, έχουν πιθανότητες $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ αντίστοιχα να πετύχουν το στόχο. Ποιά είναι η πιθανότητα ώστε ένα βλήμα μόνο, να πετύχει το στόχο, αν οι 3 σκοπευτές πυροβολήσουν ταυτόχρονα;

52 Ταξιτζής έχει ένα ατύχημα κάθε k έτη. Ποιά είναι η πιθανότητα να μην έχει ατύχημα επί λ έτη;

53 Μηχανή τροφοδοτείται από 3 όμοιες μπαταρίες και λειτουργεί αν 2 τουλάχιστον από αυτές είναι εντάξει. Η πιθανότητα κάθε μπαταρίας να «πέσει» στις πρώτες 8 ώρες λειτουργίας της, είναι $\frac{1}{5}$. Ποιά είναι η πιθανότητα να λειτουργεί η μηχανή επί 8 ώρες;

54 Μηχανικός παρέλαβε 100 κιβώτια ηλεκτρικών λαμπτήρων, με τα 70 να περιέχουν 50 λαμπτήρες έκαστο και τα υπόλοιπα 30 να περιέχουν 60 λαμπτήρες έκαστο. Το ποσοστό των ελαττωματικών λαμπτήρων, σε κιβώτιο των 50 λαμπτήρων είναι 4% και 5% σε κιβώτιο των 60 λαμπτήρων. Επιλέγεται τυχαία ένα κιβώτιο και από αυτό εκλέγεται στην τύχη ένας λαμπτήρας που αποδεικνύεται ελαττωματικός. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει επιλεγεί από κιβώτιο των 50 λαμπτήρων;

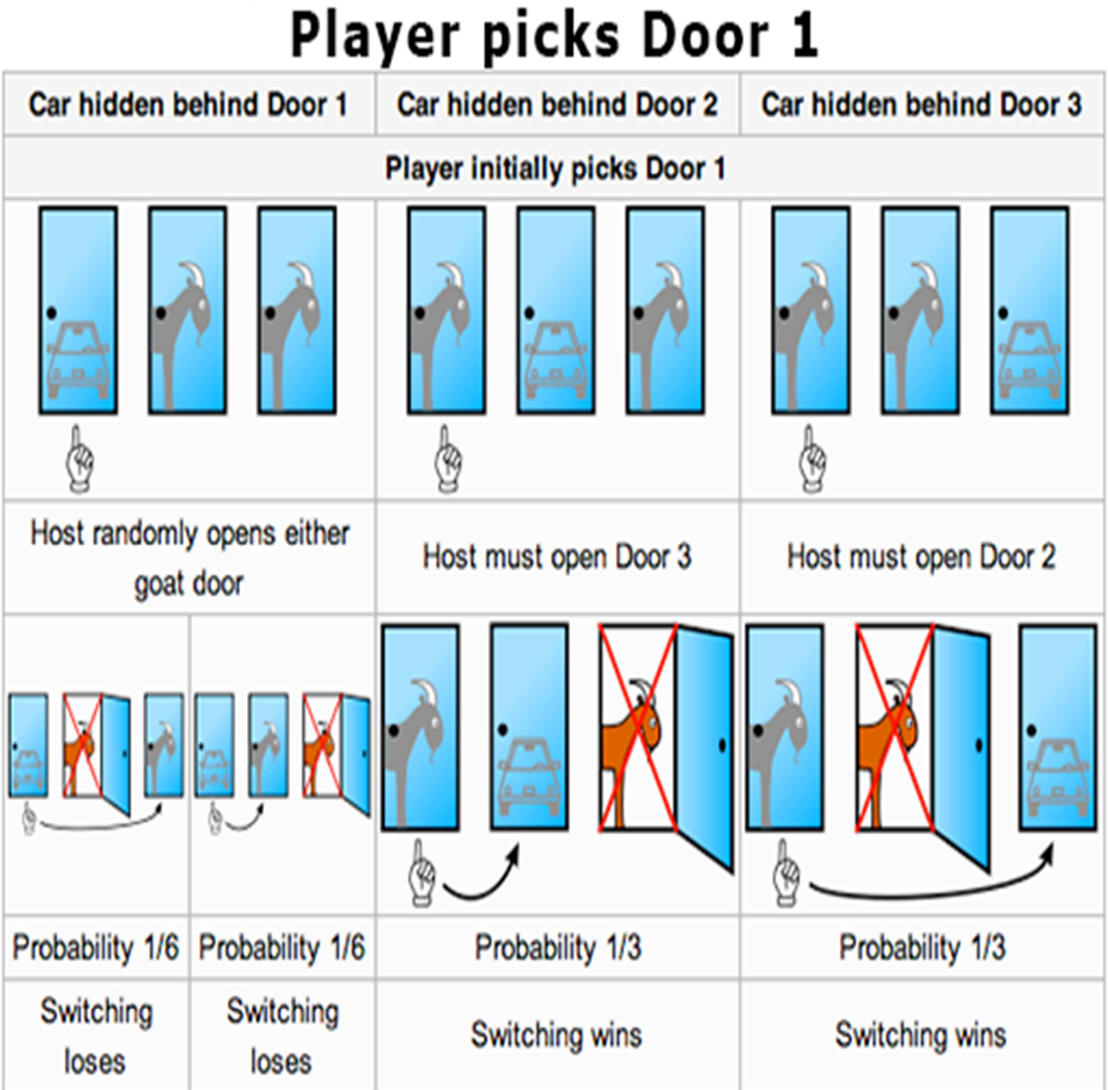
55 Η πιθανότητα να πετύχουν στόχο οι σκοπευτές Α, Β είναι $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η πιθανότητα να πληγεί ο στόχος αν οι Α, Β στοχεύσουν συγχρόνως; **Απάντηση**. $\frac{11}{20}$

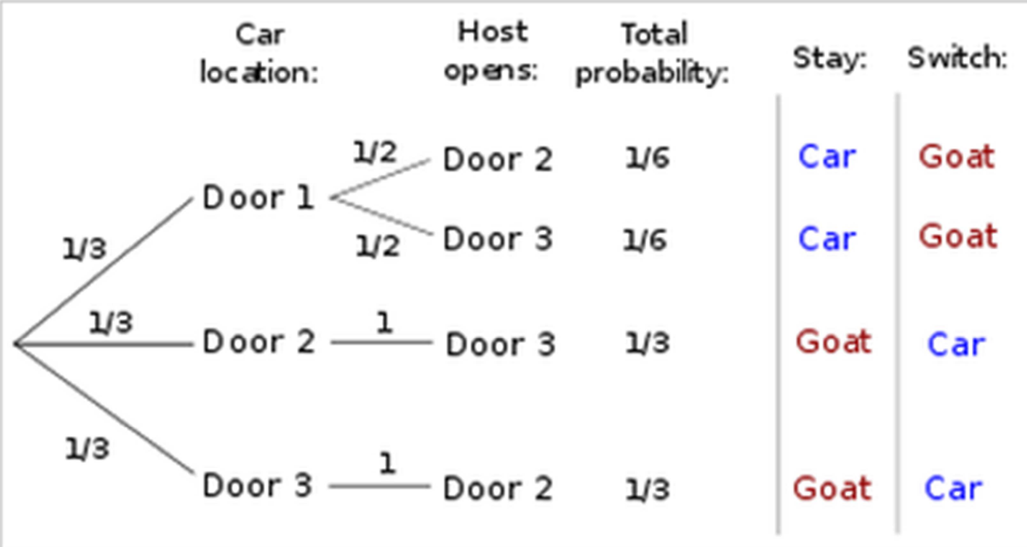
56 Σε κάλπη περιέχονται 17 σφαιρίδια αριθμημένα από 1 έως 17. Σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία. Ποιά είναι η πιθανότητα να φέρει αριθμό πολλαπλάσιο του 3 ή του 7;

57 3 άλογα Α, Β, Γ είναι έτοιμα να τρέξουν στον ιππόδρομο. Το Α έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει από το Β και το Β διπλάσια από το Γ. Ποιά είναι η πιθανότητα του κάθε αλόγου να κερδίσει;

58 Δύο άντρες m_1, m_2 και τρεις γυναίκες w_1, w_2, w_3 συμμετέχουν σε αγώνες. Έστω ότι τα άτομα του ιδίου φύλλου έχουν ίσες πιθανότητες να κερδίσουν, αλλά κάθε άντρας έχει διπλάσιες πιθανότητες από ότι κάθε γυναίκα, να κερδίσει.
(**α**) Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά μία γυναίκα;
(**β**) Αν οι m_1, w_1 είναι παντρεμένοι, ποιά είναι η πιθανότητα ένας εκ των δυο να κερδίσει το τουρνουά;

Το πρόβλημα του Monty Hall



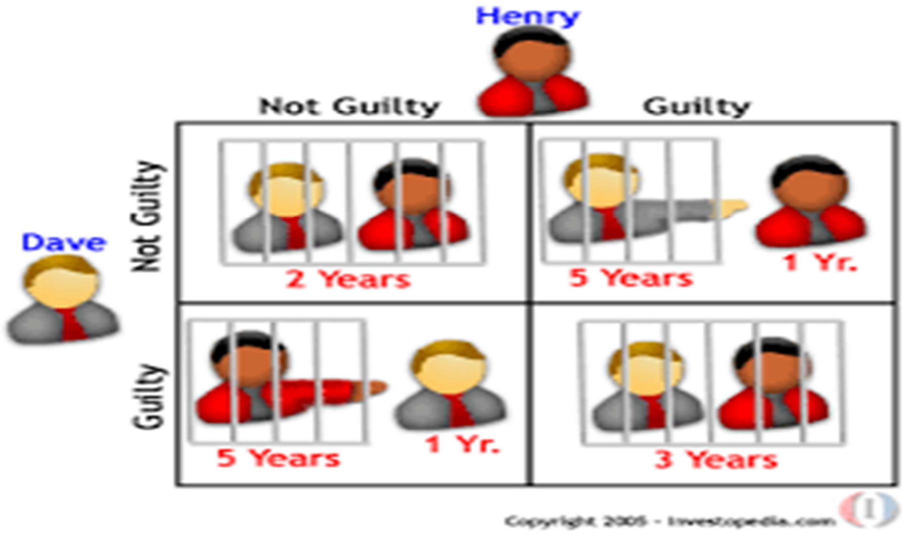


Tree showing the probability of every possible outcome if the player initially picks Door 1

Το δώρο είναι στην	Πόρτα Α	Πόρτα Β	Πόρτα Γ
Επιλέγετε	Πόρτα Α	Πόρτα Α	Πόρτα Α
Ο Monty Hall ανοίγει την	Πόρτα Β ή Γ	Πόρτα Γ	Πόρτα Γ
Τελική έκβαση	Παραμένετε στην πόρτα Α, κερδίζετε	Παραμένετε στην πόρτα Α, χάνετε	Παραμένετε στην πόρτα Α, χάνετε

Το δώρο είναι στην	Πόρτα Α	Πόρτα Β	Πόρτα Γ
Επιλέγετε	Πόρτα Α	Πόρτα Α	Πόρτα Α
Ο Monty Hall ανοίγει την	Πόρτα Β	Πόρτα Γ	Πόρτα Β
Τελική έκβαση	Αλλάζετε με την πόρτα Γ, χάνετε	Αλλάζετε με την πόρτα Β κερδίζετε	Αλλάζετε με την πόρτα Γ κερδίζετε

Το δίλημμα του φυλακισμένου



	ο Μιτσάρας κάνει του μπέκι	ο Μιτσάρας με ~~καρφώνει~~ καρφώνει
Δε χέο τίποτις	1 χρονάκι ο καθείς	ο Μιτσάρας ελεύθερος, εγώ 12 χρονάκια
Καρφώνο το Μίτσο	ο Μιτσάρας 12 χρονάκια, εγώ ελεύθερο πουλί	Και οι δύο τρώμε από 4 χρονάκια.

Η ιστορία της ασφάλειας ζωής

Θα μπορούσαμε να πούμε πως η ασφάλιση είναι τόσο παλιά όσο και ο άνθρωπος. Από την εμφάνισή του, ο άνθρωπος οργάνωνε τη ζωή του σε κοινωνίες, επειδή διαπίστωσε ότι από μόνος του δε μπορούσε να αντεπεξέλθει στους κινδύνους της προϊστορικής εποχής. Οργανωμένος σε κοινωνίες μέσα σε σπηλιές, μπόρεσε να βρει την απαραίτητη ασφάλεια. Την έννοια της ασφάλισης, τη βρίσκουμε με σαφήνεια διατυπωμένη στα αρχαία κείμενα, ή τη συμπεραίνουμε από διάφορα περιστατικά. Οι αρχές του θεσμού της ασφάλισης χάνονται γύρω στη $2^{η}$ π.Χ. χιλιετία. Η ασφάλιση στα πρώτα της στάδια, εμφανίστηκε με τη μορφή «**αλληλοβοήθειας**», μεταξύ ατόμων που εκτελούσαν ένα παρεμφερές είδος εργασίας.

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες «δούλευαν» οι εργάτες των πυραμίδων στην αρχαία Αίγυπτο, ήταν άθλιες. Πολλά «εργατικά» ατυχήματα και πολλές ασθένειες τους μάστιζαν. Έτσι, δημιουργήθηκε το πρώτο γνωστό «**ταμείο αλληλοβοήθειας**», όπως προκύπτει από πάπυρο που βρίσκεται στο μουσείο του Καΐρου. Οι πληρωμές των εργατών γίνονταν τότε σε είδος (λάδι, σιτάρι και άλλα τρόφιμα) την πρώτη κάθε μήνα. Από αυτή την αμοιβή, κατέβαλαν από κοινού κάποια ποσότητα τροφίμων, ώστε να εξασφαλιστεί φαγητό για όσους δε μπορούσαν να δουλέψουν. Επιπλέον, το «ταμείο αλληλοβοήθειας» προέβλεπε αποζημίωση σε περίπτωση θανάτου, για να πληρωθούν τα έξοδα κηδείας. Παρόμοιες «ασφαλίσεις» υπάρχουν και σε άλλους νεότερους κώδικες των χωρών της Μεσοποταμίας.

Αρχαία Ελλάδα

Στην αρχαία Ελλάδα, ήταν διαδεδομένη η ασφαλιστική κάλυψη των εξόδων κηδείας, σύστημα που αναπτύχθηκε μέσω θρησκευτικών, μη κερδοσκοπικών οργανώσεων. Αργότερα, με νόμο του Σόλωνα, τον 6^{o} π.Χ. αιώνα, θεσπίστηκε ο όρος των «**ομοτάφων**», ο πρώτος ασφαλιστικός νόμος που καθόριζε τη λειτουργία εταιριών που είχαν σαν αντικείμενο την κάλυψη των εξόδων κηδείας.

Τα διάφορα σωματεία και ενώσεις της εποχής, διεύρυναν την έννοια της ασφάλισης δημιουργώντας εταιρίες που είχαν ως αντικείμενο την αλληλοβοήθεια, την αμοιβαιότητα και τον καταμερισμό των κινδύνων, πέρα από τα έξοδα κηδείας και είχαν πλέον κερδοσκοπικό χαρακτήρα. Στην Κύπρο τον 5^{o} π.Χ. αιώνα, εμφανίσθηκε **το πρώτο νοσοκομειακό πρόγραμμα της ιστορίας**. Ήταν η συμφωνία μεταξύ του βασιλιά Ιδαλίου και του γιατρού Ονάσιλλου και των αδελφών του. Η συμφωνία αυτή όριζε ότι ο Ονάσιλλος και οι αδελφοί του θα αναλάμβαναν την περίθαλψη των στρατιωτών που θα τραυματιζόντουσαν σε επερχόμενη μάχη. Σαν αντάλλαγμα, ο βασιλιάς Ιδάλιος πρόσφερε χρήματα και γη.

Αρχαία Ρώμη

Στους πρώτους Ρωμαϊκούς χρόνους, η επίδραση των αρχαίων Ελλήνων στους Ρωμαίους ήταν μεγάλη. Φυσικά δε θα μπορούσε η ασφάλιση να αποτελεί εξαίρεση. Έτσι, όλη η «τεχνογνωσία» της ασφάλισης, πέρασε αυτούσια στους αρχαίους Ρωμαίους και φυσικά εξελίχθηκε. Από τους λεγεωνάριους θεσπίστηκε το πρώτο **συνταξιοδοτικό σύστημα** της ανθρωπότητας. Σύμφωνα με αυτό το σύστημα, όποιος λεγεωνάριος αποχωρούσε από την υπηρεσία έπαιρνε χρηματική αποζημίωση, ή αν σκοτωνόταν σε κάποια μάχη, η αποζημίωση καταβαλλόταν στην οικογένειά του.

Με την ανάπτυξη των Τεχνών και των Επιστημών, οι Ρωμαίοι δημιούργησαν πίνακες που καθόριζαν τις παροχές και τις συντάξεις, ανάλογα με τις εισφορές των ενδιαφερομένων. Η φιλοσοφία αυτής της οργάνωσης, δε διαφέρει καθόλου από το πνεύμα των σημερινών τιμολογίων των ασφαλιστικών εταιριών.

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.), Επίκουρος Καθηγητής.

Βυζάντιο

Στο Βυζάντιο υπάρχουν πολλά ιστορικά στοιχεία που φανερώνουν την έννοια της ασφάλισης και τα βρίσκομε κατά κύριο λόγο στους «**Πανδέκτες**» του Ιουστινιανού. Τα πιο χαρακτηριστικά στοιχεία της ασφάλισης αναφέρονται στο 14ο βιβλίο που αναφέρεται στην κοινή αβαρία των Ροδίων και στα ναυτοδάνεια των Αθηναίων και στο 15ο βιβλίο που αναφέρεται η δωρεά αιτία θανάτου, που είχε ως σκοπό την οικονομική εξασφάλιση της χήρας, κάτι ανάλογο με τη σημερινή ασφάλιση ζωής. Από τον 14ο μέχρι τον 17ο αιώνα, σημειώθηκαν ραγδαίες εξελίξεις για το θεσμό της ασφάλειας ζωής. Το **1435**, στη Βαρκελώνη της Ισπανίας εκδόθηκε ο πρώτος νόμος που αφορούσε τη σύνταξη των ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Έτσι, άρχισε να δημιουργείται το ασφαλιστικό δίκαιο. Η ασφάλιση γινόταν με εμπειρικό τρόπο και εξαρτιόνταν πολύ από τον παράγοντα της τύχης. Πολλοί ασφαλιστές καταστράφηκαν οικονομικά, γιατί δε μπόρεσαν να αντέξουν τις αποζημιώσεις. Έτσι γεννήθηκε η ιδέα του συνεταιρισμού.

Οι ασφαλιστές, άρχισαν να συνεταιρίζονται και να ευθύνονται για πολλούς κινδύνους, αλλά με συγκεκριμένο ποσοστό και όχι για ολόκληρο τον κίνδυνο. Με αυτό τον τρόπο, άρχισε να εφαρμόζεται η θεωρία των μεγάλων αριθμών, να περιορίζεται ο παράγοντας της τύχης και να εξουδετερώνεται ο κίνδυνος της χρεοκοπίας του ασφαλιστή. Το **1650**, ο Φλωρεντιανός γιατρός **Lorento Tonti**, ίδρυσε την πρώτη τοντίνα. Οι τοντίνες ήταν σωματεία που συγκέντρωναν, από τα μέλη, εισφορές για τη δημιουργία κεφαλαίου και μοίραζε τα κέρδη στα μέλη που επιζούσαν κάθε χρόνο. Η διάρκεια του σωματείου ήταν ορισμένη, οπότε με τη λήξη της το κεφάλαιο διανέμονταν στα μέλη που επιζούσαν ή ήταν αόριστης διάρκειας και το κεφάλαιο το έπαιρνε ο τελευταίος επιζών. Ήταν μια μορφή ασφάλισης επιβίωσης, αλλά οδηγούσε στον πλουτισμό εκείνου που είχε την τύχη να επιβιώσει.

Από το θεσμό των τοντίνων ξεκίνησαν οι έρευνες για τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου, οι οποίες βασίζονταν σε στατιστικές παρατηρήσεις, που με τον υπολογισμό της πιθανότητας ζωής για κάθε ηλικία, θεμελίωσαν τη σύγχρονη ασφάλιση ζωής. Το 1654 ο μαθηματικός **Pascal** διατυπώνει τον νόμο των πιθανοτήτων, ο οποίος με τους συσχετισμούς του βοήθησε στην δημιουργία των τιμολογίων των ασφαλιστικών εταιριών και φυσικά εφαρμόζεται ακόμα και σήμερα.

Οι άγγλοι αστρονόμοι **Edmond Halley** και **James Dotson** διαμόρφωσαν τον πρώτο επίσημο πίνακα θνησιμότητας το 1693. Σκοπός τους ήταν να καθορίσουν διαφορετικό ασφάλιστρο, ανάλογα με την ηλικία του ασφαλισμένου και συνέλαβαν αυτή την ιδέα όταν μία ασφαλιστική εταιρία αρνήθηκε να ασφαλίσει τον Dotson, λόγω μεγάλης ηλικίας. Ο νόμος των πιθανοτήτων του Pascal, σε συνδυασμό με τον πίνακα θνησιμότητας των Halley και Dotson, δημιούργησε μία νέα επιστήμη, την αναλογιστική, στην οποία στηρίζεται η σύγχρονη ασφάλιση.

Η ασφάλεια ζωής σήμερα

Σήμερα, η ασφάλιση έχει εξελιχθεί σε επιστήμη. Με την ασφαλιστική μελέτη της οικογένειας ή της επιχείρησης, ο επαγγελματίας ασφαλιστικός σύμβουλος μπορεί να προσφέρει τέτοια ασφαλιστική κάλυψη που είναι ικανή να αποτρέψει οποιαδήποτε οικονομική ζημιά ή καταστροφή.