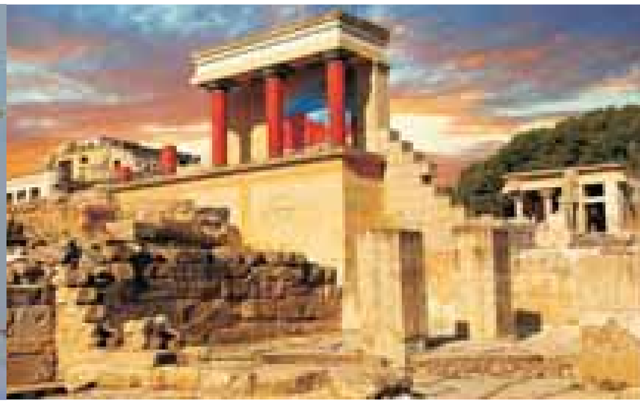
127

Μαθηματικό περιοδικό για το

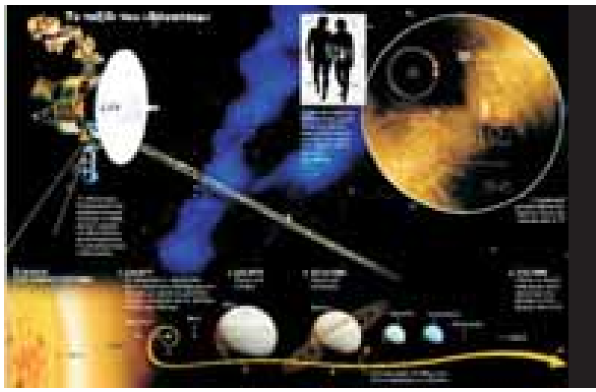
Ευκλείδης Α' Γυμνάσιο

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2023 ευρώ 3,00



ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ (Χ+7) ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 127
Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2023
Τιμή Τεύχους 3,00 Εύρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ιωάννης Εμμανουήλ
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

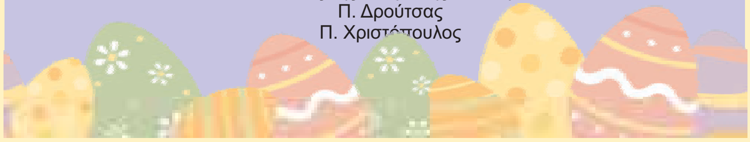
Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Στο τρίτο τεύχος του περιοδικού που έχετε στα χέρια σας, έχουμε δημοσιεύσει άρθρα για τα πιο σημαντικά θέματα της ύλης που διδάσκεστε τη φετινή χρονιά. Στο επόμενο τεύχος θα δημοσιευθούν θέματα από όλη την ύλη της φετινής τάξης, ώστε να σας βοηθήσουν στις τελικές εξετάσεις. Περιμένουμε την αλληλογραφία σας με τις απορίες σας, τις επιθυμίες σας ή τις παρατηρήσεις σας. Η συντακτική μας επιτροπή κάνει μεγάλες προσπάθειες για να σας δίνει με απλό και κατανοητό τρόπο όλα τα μαθηματικά θέματα.

Καλό Πάσχα.

Οι Συντονιστές της επιτροπής του περιοδικού
Π. Δρούτσας
Π. Χριστόπουλος



Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Πρoύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα** τα **άθρα** υπόκειται **σε κρίση**

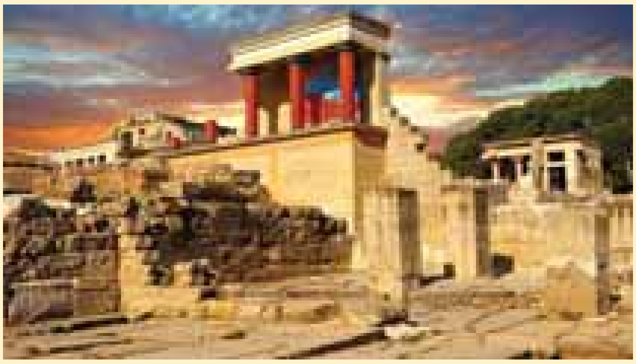
Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Η Ελληνική μυθολογία, οι Γρίφοι και το διάστημα

== Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Η ιστορία για τη ζωή, το έργο, την παράδοση, τους θεούς και τους ήρωες των αρχαίων Ελλήνων έχει επικρατήσει να αναφέρεται ως μύθος. Τα γεγονότα αυτά είναι τόσο παλιά και με τόσες υπερβολές που δυσκολεύονταν κάποτε να τα θεωρήσουν ακριβή και αληθή και βόλευε να ονομαστούν μύθοι. Όμως είναι γεγονότα που διασώθηκαν με αυτό τον ιδιαίτερο τρόπο διήγησης. Μέσα από αυτή τη συγκεκριμένη αφήγηση των ιστορημάτων που δημιούργησαν οι αρχαίοι Έλληνες και αφορούσαν την φύση, τον κόσμο, τους θεούς, τους ήρωες και άρχοντες, τις τελετές και τις συνήθειες, μαθαίνουμε πολλά από τις γνώσεις που είχαν.



Μινωικά παλάτια

Οι σύγχρονοι ερευνητές μελετούν τους μύθους για να κατανοήσουν τον συμβολισμό τους και να μάθουν τους θρησκευτικούς και πολιτικούς θεσμούς και γενικά τον αρχαίο Ελληνικό πολιτισμό. Οι μύθοι είναι μια πλούσια συλλογή αφηγημάτων που αναφέρονται στην προέλευση του κόσμου και τη ζωή θεών, ημίθεων, ηρώων, και πολλών άλλων πλασμάτων. Πριν διαδοθούν με γραπτά κείμενα τον 8ο π.Χ. αιώνα από τον Όμηρο και Ησίοδο, οι ιστορίες αυτές διαδόθηκαν με την προφορική και ποιητική παράδοση. Οι αρχαιολόγοι στα μνημεία που αποκάλυψαν (Μυκήνες, Μινωικά παλάτια, παλάτια Νέστωρα) βοήθησαν να κατανοήσουμε ακόμα περισσότερα. Τα μουσεία μας είναι γεμάτα με αντικείμενα και αγγεία στα οποία απεικονίζεται η μυθολογία.

Μυκήνες

Η ελληνική μυθολογία έχει συμβάλει για τον δυτικό πολιτισμό. Η ιστορία, η φιλοσοφία, η λογοτεχνία, η πολιτική, οι τέχνες, αλλά και τα Μαθηματικά έχουν επηρεαστεί από την Ελληνική μυθολογία. Από την ελληνική μυθολογία εμπνέονται ποιητές, καλλιτέχνες και διανοούμενοι που με σύγχρονες έννοιες εκφράζουν ιδέες των αρχαίων Ελλήνων.

παλάτια Νέστωρα

Υπήρχαν πολλοί θεοί, πολλά μυθικά τέρατα και πρόσωπα. Ο Διόνυσος ήταν ο θεός της ψυχαγωγίας αλλά στην ακολουθία του υπήρχαν και οι δαίμονες (όχι με την σημερινή έννοια). Ένα τέτοιο μυθικό πρόσωπο είχε την ψυχαγωγία με Γρίφους, ήταν ο δαίμων Κόβαλος. Ο Κόβαλος ήταν λάτρης των γρίφων και των αινιγμάτων για την ψυχαγωγία μεταξύ αυτών των πλασμάτων και των ανθρώπων. Είναι γνωστό ότι για τους αρχαίους Έλληνες οι γρίφοι ήταν μια ευχάριστη ασχολία. Μύθος και φαντασία ήταν και τα ταξίδια στο Φεγγάρι, ήταν ένας δύσκολος γρίφος μέχρι τη δεκαετία του 60.





Το διάστημα

Στις 4 Οκτωβρίου 1957 **ο Σπούτνικ-1** έγινε ο πρώτος τεχνητός δορυφόρος της Γης που εκτοξεύτηκε από τους Ρώσους και μπήκε σε ελλειπτική τροχιά **300 χιλιόμετρα γύρο από τη Γη**. Ακολούθησε ο 2ος με τη **σκυλίτσα Λάικα** και πολλές δοκιμές ακόμα με 8 πτήσεις μέχρι που τέσσερα χρόνια αργότερα στις 12-4-1961 μέσα στο **Βοστόκ-1** σε μια σφαιρική κάψουλα πήγε στο διάστημα ο πρώτος άνθρωπος, ο Γιούρι Γκαγκάριν.


Μέσα σε αυτή την κάψουλα πήγε ο Γιούρι Αλεξέγιεβιτς Γκαγκάριν στο διάστημα.

Ο **Γιούρι Γκαγκάριν**, εικοσιπέντε λεπτά μετά την εκτόξευση, μπήκε σε τροχιά με ταχύτητα 27.400 χιλιόμετρα την ώρα. Επειδή κανείς δεν ήξερε αν οι συνθήκες κατά την πτήση θα επηρέαζαν τον άνθρωπο βιολογικά και ψυχολογικά, τον έλεγχο του σκάφους είχε επιτελείο επιστημόνων και τεχνικών στη Γη. Ο Γκαγκάριν βέβαια, αν χρειαζόταν, είχε το συνδυασμό για το ξεκλείδωμα του χειριστηρίου μέσα σ' ένα σφραγισμένο φάκελο.

Μετά από μια ώρα στο διάστημα πυροδότησαν τους πυραύλους για επιβράδυνση, επανήλθε στην ατμόσφαιρα και λίγα χιλιόμετρα ψηλά εκτινάχθηκε έξω από την κάψουλα και προσγειώθηκε με το αλεξίπτωτο στην πόλη Τακτάροβα δίπλα σε μια γυναίκα με την εγγονή της. Συνολικά το ταξίδι είχε διάρκεια περίπου δύο ώρες. Το όνομά **Γιούρι Γκαγκάριν** έγινε αμέσως γνωστό σε όλο τον πλανήτη ως ο πρώτος άνθρωπος που τόλμησε να βγει στο διάστημα. Έγινε διάσημος παγκοσμίως και εξαιρετικά δημοφιλής.

Ο **Γκαγκάριν** ταξίδεψε σε πολλές χώρες. Τιμήθηκε με μετάλλια και εκλέχθηκε σε διάφορα αξιώματα. Στην περιοδεία του αυτή επισκέφθηκε και την Ελλάδα στις 12-2-1962. Μεγάλο πλήθος κόσμου τον επευφημούσε σε μια θερμή υποδοχή ήρωα. Τον υποδέχτηκε ο πρωθυπουργός, η Ακαδημία Αθηνών, ανακηρύχθηκε επίτιμος δημότης της Αθήνας και πριν αναχωρήσει επισκέφθηκε την Ακρόπολη.

Η εκτόξευση του **Σπούτνικ** ήταν πρωτοφανές επίτευγμα της ανθρωπότητας που συγκέντρωνε όλη σχεδόν τη γνώση που είχαμε από τις επιστήμες των μαθηματικών, ηλεκτρονικών υπολογιστών, της φυσικής, χημείας, της αστρονομίας, κλπ. Αντίγραφα του Σπούτνικ υπάρχουν στο μουσείο Αστροναυτικής και διαστήματος, σε μουσεία άλλων χωρών και στη νέα Υόρκη κοσμεί την είσοδο του κτιρίου των Ηνωμένων Εθνών. Το κατόρθωμα της Ρωσίας το 1961 με το ταξίδι του **Γκαγκάριν**, ήταν το πρώτο βήμα της ανθρωπότητας στο διάστημα αλλά δημιούργησε μια κούρσα ανταγωνισμού μεταξύ των αντιπάλων.

Οι Αμερικάνοι (υπήρχε ο ψυχρός πόλεμος τότε) ανησυχούν, το γεγονός τρόμαξε την Αμερική και ο **Τζον Κένεντι** το 1961 έσπευσε να δηλώσει: «Πριν το τέλος της δεκαετίας θα γίνει μετάβαση ενός ανθρώπου στη Σελήνη και ασφαλής επιστροφή του στη Γη», έτσι ξεκίνησε η κούρσα για το διάστημα. Στις 20-2-1962 οι Αμερικάνοι έβαλαν σε τροχιά γύρο από τη Γη τον **Τζον Γκλεν** τον πρώτο Αμερικανό κοσμοναύτη.

Η τρελή αυτή κούρσα των δύο αντιπάλων συνεχίστηκε όλη τη δεκαετία του 1960. Δαπανήθηκαν τεράστια κεφάλαια και χάθηκαν πολλοί άνθρωποι. Ήταν ένας επιστημονικός ψυχρός πόλεμος για το ποιος θα είναι ο κυρίαρχος του διαστήματος. Όλα αυτά βέβαια βοήθησαν την ανθρωπότητα με τα τεχνολογικά επιτεύγματα(καλά ή κακά) που έχουμε σήμερα.

Στις 20 Ιουλίου το 1969 δύο Αμερικανοί ο **Νιλ Άρμστρονγκ** και ο **Μπαζ Όλντριν**, προσεδάφισαν τη σεληνάκατο **Eagle (αετός)** στη Σελήνη.

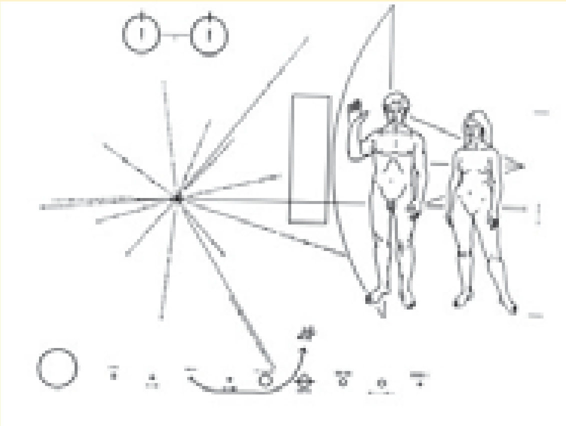
Ο Νιλ Άρμστρονγκ βγήκε από τη σεληνάκατο και έγινε ο πρώτος άνθρωπος που πάτησε στην επιφάνειά της. Μάλιστα τη στιγμή εκείνη είπε και τη συμβολική φράση: «Ένα μικρό βήμα για τον άνθρωπο, ένα τεράστιο άλμα για την ανθρωπότητα» ("one small step for [a] man, one giant leap for mankind"). Η προσσελήνωση μεταδόθηκε ζωντανά στην τηλεόραση παγκοσμίως και όλοι βουβοί και έκπληκτοι παρακολουθούσαμε το γεγονός. Τα πετρώματα που έφεραν από τη Σελήνη εκτέθηκαν σε πολλές χώρες. Εκτέθηκαν και στην Αθήνα, έτσι είχαμε την ευκαιρία να τα θαυμάσουμε.

Από την ημέρα εκείνη που πήγαν οι Αμερικάνοι στη Σελήνη σταμάτησε και η κούρσα για το διάστημα μεταξύ Ρωσίας και Αμερικής. Οι άνθρωποι συνέχισαν να κάνουν νέα όνειρα για το μέλλον και άφησαν πίσω τους μύθους χιλιάδων ετών για τη Σελήνη και τα αστέρια.

Τα επόμενα χρόνια έγιναν πάρα πολλά για το διάστημα και σε συνεργασία Ρώσων και Αμερικανών. Έστησαν εξέδρες στο διάστημα, έστειλαν διαστημόπλοια να εξερευνήσουν τους πλανήτες του Ηλιακού συστήματος και αλλά ουράνια σώματα.

Η **NASA** από το 1970 αποφάσισε να επικοινωνήσει και με εξωγήινους.

Πρώτα κατασκεύασαν δυο δίδυμα σκάφη τα Pioneer (πρωτοπόρος) **10 και 11**. Η αποστολή τους ήταν να συγκεντρώσουν και να μεταβιβάσουν πληροφορίες διανύοντας μεγαλύτερη απόσταση από κάθε προηγούμενη αποστολή. Επίσης να διαπιστώσουν αν ένα σκάφος μπορούσε να ταξιδέψει πέρα από τη ζώνη των αστεροειδών προς τους εξωτερικούς πλανήτες χωρίς κίνδυνο ώστε να προγραμματιστούν μελλοντικές αποστολές. Στη συνέχεια τα **Πάιονηρ 10 και 11** που κινούνται με πυρηνική ενέργεια θα ταξιδέψουν πέρα από το ηλιακό σύστημα και αν τύχει να τα βρουν εξωγήινοι έχουν και σχετικές πληροφορίες χαραγμένες σε πλάκες σαν αυτές του Μωυσή με τις 10 εντολές.




Οι επιστήμονες της NASA, όταν συνειδητοποίησαν ότι στην αρχή της δεκαετίας του 1980 θα συνέβαινε ένα σπάνιο(γίνεται κάθε 176 χρόνια) αστρονομικό φαινόμενο που ο Δίας, ο Κρόνος, ο Ουρανός και ο Ποσειδώνας θα σχημάτιζαν ένα τόξο με τη Γη αποφάσισαν να το εκμεταλλευτούν. Ήταν ευκαιρία να εκτοξευτεί ένα διαστημόπλοιο που θα τα εξερευνούσε από κοντά. Μάλιστα το διαστημόπλοιο θα εκμεταλλευόταν την επίσκεψη στον πρώτο πλανήτη, ώστε να δεχτεί βαρυτική ώθηση, η οποία θα το έστελνε στον επόμενο κ.ο.κ. και το ταξίδι έως τον Ποσειδώνα θα γινόταν σε 12 χρόνια αντί 30.

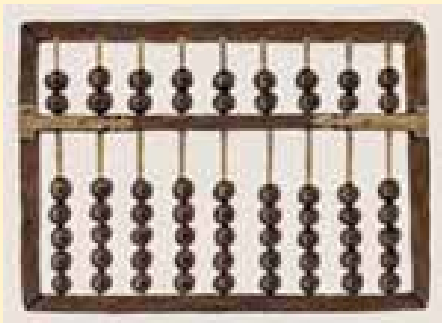
Έτσι η NASA κατασκεύασε δύο ολόιδια σκάφη, τα **«Βόγιατζερ» 1 και 2**, που εκτοξεύτηκαν με δύο βδομάδες διαφορά το καλοκαίρι του 1977. Αφού πέρασαν από το τόξο των πλανητών και έστειλαν πληροφορίες από αυτούς συνέχεια έστειλαν πληροφορίες από το περιβάλλον του Ήλιου και έφυγαν προς το διάστημα. Σήμερα, με 46 χρόνια ταξίδι, αυτές οι δίδυμες διαστημοσυσκευές βρίσκονται έξω από το Ηλιακό σύστημα, ταξιδεύουν «στο άγνωστο με βάρκα την ελπίδα». Η ελπίδα είναι να τα εντοπίσουν κάποια νοήμονα εξωγήινα όντα και να διαβαστεί ο **χρυσός τους δίσκος** που έβαλαν μέσα τους οι επιστήμονες. Ο **«χρυσός δίσκος»** έχει τις πληροφορίες που έχουν και τα Pioneer αλλά και πολλές ακόμα, πληροφορίες σχετικά με τη ζωή στη Γη και την ύπαρξή μας.

Το τρίγωνο του Pascal

Γιώργος Γάλαρης

Η βιογραφία του Pascal

Ο Μπλεζ Πασκάλ (Blaise Pascal, 19 Ιουνίου 1623 - 19 Αυγούστου 1662) ήταν Γάλλος μαθηματικός. Γεννήθηκε στο Κλερμόν-Φεράν το 1623. Ο Μπλεζ Πασκάλ ήταν ένα παιδί θαύμα. Η μητέρα του πέθανε όταν ήταν τριών μόλις χρονών, και λίγο αργότερα, ο πατέρας του Πασκάλ, Ετιέν Πασκάλ, ένας πλούσιος φοροεισπράκτορας και παθιασμένος ερασιτέχνης μαθηματικός, μετακόμισε από το Κλερμόν, στο Παρίσι, όπου προσωπικά επέβλεψε την κατ' οίκον εκπαίδευση του υιού του. Σε αυτόν αποδίδεται το τρίγωνο του Pascal το οποίο χρησιμοποιείται για την εύρεση του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^{\nu}$. Από μία σύγχρονη οπτική, το Τρίγωνο του Πασκάλ φαίνεται να είναι μαθηματικώς απλό και το ίδιο ισχύει και για πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες που όπως ανακάλυψε ο Πασκάλ συσχετίζουν τους αριθμούς του τριγώνου. Από το 1641 και για περίπου 3 χρόνια εργάστηκε για την κατασκευή μιας αριθμομηχανής που μπορούσε να κάνει πρόσθεση και αφαίρεση που ονομάστηκε «Πασκαλίνα». Παρόλη την ενασχόλησή του, δεν πέτυχε ως επιχειρηματίας αριθμομηχανών: η μηχανή του δεν έκανε μεγάλες πωλήσεις και, τελικά, σταμάτησε να παράγεται. έμοιαζε πολύ με τις αριθμομηχανές που κυκλοφορούσαν σε όλο τον κόσμο στις δεκαετίες του 1940 και 1950.Ηταν εξέλιξη του Άβακα. Πέθανε στο Παρίσι το 1662, σε ηλικία 39 ετών. Προς τιμήν του δόθηκε το όνομά του στη μονάδα μέτρησης της πίεσης στο SI (1 Pa).



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

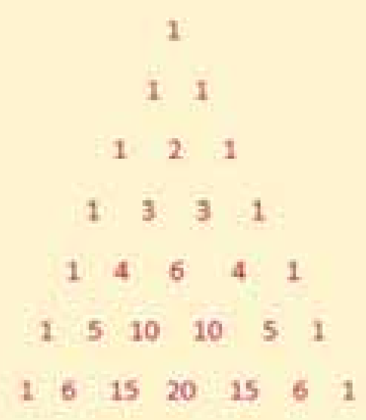
1 5 10 10 5 1

Το τρίγωνο του Pascal

Για να φτιάξω το τρίγωνο του Pascal, ξεκινάω στην 1^{η} γραμμή με μία μονάδα(1). Στην δεύτερη γραμμή έχω 2 μονάδες. Έπειτα κάθε αριθμός της κάτω γραμμής ισούται με το άθροισμα των 2 αριθμών από πάνω του, συμπληρώνοντας με μονάδες στα άκρα. Έτσι στην 3^{η} γραμμή έχω 1+1=2 και μονάδες στα άκρα. Όμοια στην 4^{η} γραμμή 1+2=3 , 2+1=3, οπότε έχω 2 φορές το 3 και τις μονάδες στα άκρα. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί επ' άπειρον.

Το τρίγωνο του Pascal και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του α+β

Ισχύει $(\alpha+\beta)^1$=α+β=1α+1β , συντελεστές προκύπτουν από την 2^{η} σειρά. Όμοια $(\alpha+\beta)^2=1\alpha^2+2\alpha\beta+1\beta^2$ και οι συντελεστές προκύπτουν από την 3^{η} σειρά. Ο τρόπος που προκύπτουν οι σειρές (από την Τρίτη και μετά) είναι με πρόσθεση των προηγούμενων αριθμών,



συμπληρώνοντας με μονάδα, αριστερά και δεξιά. Εάν για παράδειγμα θέλω να βρω το ανάπτυγμα $(\alpha+\beta)^4$ αρκεί να πάω στην 5^{η} σειρά και θα έχω:

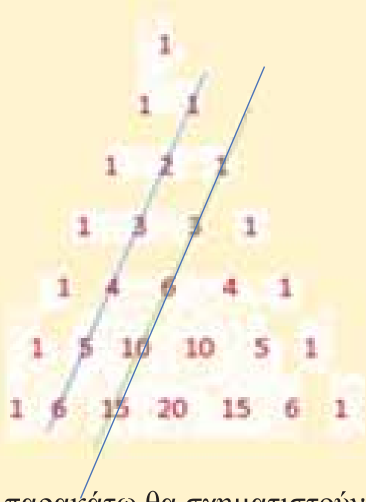
$$(\alpha+\beta)^4 = 1a^4 + 4a^3\beta + 6a^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$$

Η διαδικασία στο τρίγωνο του Pascal μπορεί να συνεχιστεί επ΄ άπειρον για να βρίσκουμε ανάπτυγμα μεγαλύτερων δυνάμεων.

Παρόμοια λογική μπορούμε να εφαρμόσουμε και για αναπτύγματα δυνάμεων του α-β. Για τα αναπτύγματα αυτά χρησιμοποιούμε το τρίγωνο του Pascal και τα πρόσημα στους συντελεστές των αναπτυγμάτων πάνε εναλλάξ ξεκινώντας με +.

Έτσι το $(\alpha-\beta)^4 = 1a^4 - 4a^3\beta + 6a^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$

Το τρίγωνο του Pascal και άλλες χρήσιμες Ιδιότητες



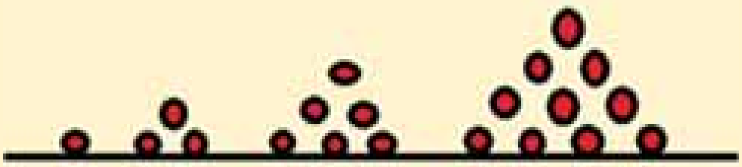
Το μαγικό με το τρίγωνο του Pascal είναι ότι μας δίνει πολλά αριθμητικά μοτίβα.

Στην πρώτη διαγώνιο είναι οι φυσικοί αριθμοί. Όπως μαθαίνουμε στην Α’ Γυμνασίου:

$\mathrm{N} = \{1,2,3,4\ldots\}$. Στην δεύτερη διαγώνιο είναι όλοι οι τριγωνικοί αριθμοί, δηλαδή οι {1,3,6,10…}.

Γιατί όμως οι αριθμοί αυτοί λέγονται τριγωνικοί?

Ας αναπαραστήσουμε τους αριθμούς αυτούς με κουκκίδες. Για τον αριθμό 1 έχω 1 κουκκίδα για το 3 έχω 3, για το 6 έχω 6 κουκίδες κοκ, τοποθετώντας αυτές τις κουκκίδες όπως φαίνεται παρακάτω θα σχηματιστούν τρίγωνα.



Ισχύει ότι $T_\nu = 1+2+3+\ldots\nu$ έτσι

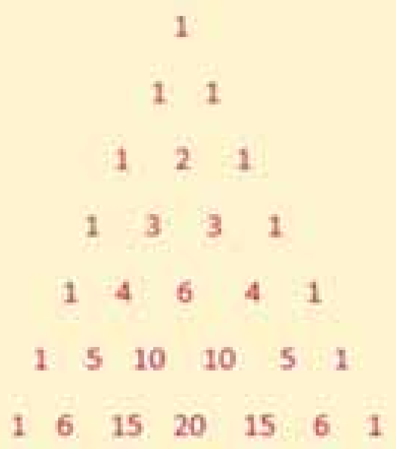
$T_1 = 1$

$T_2 = 1+2 = 3$

$T_3 = 1+2+3 = 6$

$T_4 = 1+2+3+4$

Ένα άλλο αριθμητικό μοτίβο είναι αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για παράδειγμα ξεκινάμε από την πρώτη διαγώνιο και φτάνουμε μέχρι τον αριθμό 3, τότε το αποτέλεσμα, 1+2+3=6. Το ίδιο προκύπτει αν ξεκινήσουμε από την δεύτερη διαγώνιο, που 1+1+1+1+1=5. Ουσιαστικά ξεκινάμε από όποιον αριθμό θέλουμε και κινούμαστε διαγώνια για όσους αριθμούς θέλουμε. Ο αριθμός που βρίσκεται διαγώνια προς τα κάτω από εκεί που σταματήσαμε, δίνει το άθροισμα όλων των προηγούμενων αριθμών. Ουσιαστικά το κοινό σε αυτές τις διαγώνιες είναι ότι σχηματίζουν ένα μπαστούνι του χόκεϊ.



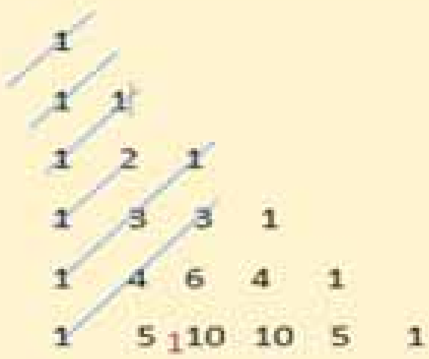
Ένα ακόμα αριθμητικό μοτίβο είναι το άθροισμα των (αριθμών) της κάθε γραμμής:

- 1η γραμμή 1=$2^0 = 2^{1-1}$
- 2η γραμμή 1+1=2^1
- 3η γραμμή 1+2+1=2^2
- 4η γραμμή 1+3+3+1=2^3

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των συντελεστών της ν γραμμής ακολουθεί το εξής μοτίβο: είναι ίσο με $2^{\nu-1}$, όπου ν το σύνολο των ψηφίων της κάθε γραμμής

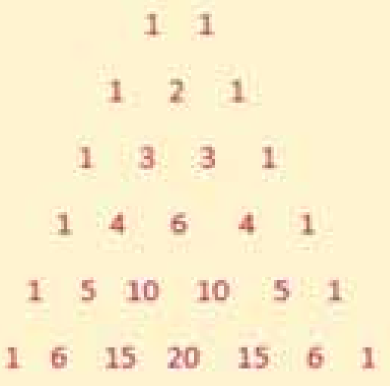
Ας δούμε μία ορθογώνια διάταξη του παραπάνω τριγώνου για να δούμε πως προκύπτουν ξανά οι υπέροχοι αριθμοί Fibonacci. Η ακολουθία Fibonacci είναι μια σειρά από αριθμούς όπου ο πρώτος και ο δεύτερος είναι μονάδες και από τον τρίτο και μετά κάθε όρος είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγουμένων.

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}, \text{ για ν=3, 4, 5....} \quad ή \quad \alpha_\nu = \begin{cases} 1, & \nu = 1 \\ 1, & \nu = 2 \\ \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \end{cases}$$



Οι αριθμοί Fibonacci παράγονται από το τρίγωνο Pascal με την παρακάτω διαδικασία:

- 1η Διαγώνιος $\alpha_1 = 1$
- 2η Διαγώνιος $\alpha_2 = 1$
- 3η Διαγώνιος $\alpha_3 = 2$ είναι $\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1$
- 4η Διαγώνιος $\alpha_4 = 3$ είναι $\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_2$



Οι αριθμοί που βρίσκονται σε κάθε γραμμή του τριγώνου μας δίνουν τις δυνάμεις του 11, ξεκινώντας από 11^0 και αυξάνοντας διαδοχικά στην κάθε επόμενη σειρά κατά μία μονάδα τον εκθέτη. Το μόνο που χρειάζεται είναι να γράψουμε κάθε αριθμό με το δεκαδικό του ανάπτυγμα.

- 1η γραμμή $11^0 = 1$
- 2η γραμμή $11^1 = 1 * 10 + 1 = 11$
- 3η γραμμή $11^2 = 1 * 10^2 + 2 * 10 + 1 = 121$
- 4ηγραμμή $11^3 = 1 * 10^3 + 3 * 10^2 + 3 * 10 + 1 = 1331$

Ας δούμε αναλυτικά πως προκύπτει το δεκαδικό ανάπτυγμα.

Στην 2η γραμμή έχω 11=10+1=$1 * 10 + 1$ άρα το 11 αποτελείται από μία δεκάδα και μία μονάδα. Έτσι συμπληρώνω την 2η γραμμή με τα ψηφία: 1,1. Στην 3η γραμμή έχω το 11^2και από ιδιότητες των δυνάμεων $11^2 = 121$. Όμως το 121 γράφεται $121 = 100 + 20 + 1 = 1 * 10^2 + 2 * 10 + 1$. Άρα το 121 αποτελείται από μία εκατοντάδα , 2 δεκάδες και μία μονάδα, έτσι προκύπτουν τα ψηφία 1,2,1. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η 6η γραμμή $11^5 = 11 * 11 * 11 * 11 * 11 = 161051$. Όμως $161051 = 100000 + 60000 + 1000 + 50 + 1$.

Α΄ Τάξη # Προτεινόμενες ασκήσεις

Λέοντας Κουτσούρης

Άσκηση 1: Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$A = 3(-7+6):6 - 5(-10+11):10$

$B = \left(-\frac{1}{5}\right):\frac{3}{5} - 6:\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\Gamma = 1 - 3(5-2)(-3) - \frac{1}{2}]:\left(2-\frac{5}{2}\right)$

$\Delta = \left(1-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right):1\frac{1}{5}$

$E = \dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{-2}\right)}{\frac{5}{-2}+\frac{-7}{2}-1}$

Άσκηση 2: **α)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $N = -5 - 2[-3 - 2(\chi+1) + 6] - 5(-2\cdot 3 + \chi)$

Αν $\chi = -\{-[-(-2\cdot 3)]\}$

β) Αν $\chi = -3 + 9:(-5+2) - 4\cdot(-2) - 3$ $\kappa\alpha\iota$ $y = [-5 + 15:(-4+1)]:[2 + 6\cdot(-2)]$

Να υπολογίσετε την παράσταση

$\Lambda = -(\chi-2)\cdot(y-2) + [x\cdot(x-1)] - [(y+1):(\chi-1)]$

γ) Αν $\chi = -\frac{1}{3}$ $\kappa\alpha\iota$ $y = \frac{3}{2}$

Να υπολογίσετε την παράσταση

$\Pi = \left(\frac{1}{\chi}-\frac{3}{y}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$

Άσκηση 3: **α)** Αν $\chi - y = -3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$K = -5\cdot(3-\chi) + 2[-3 - 5(y+1)] + 5(\chi+1)$

β) Αν $\chi + y = -7$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $M = -2 - [\alpha - (\beta - \chi)] - (y - \alpha) - (\beta - 2)$

Άσκηση 4: Δίνονται οι ρητοί αριθμοί

$\alpha = (-9) + (+7), \beta = (-|-3|) + (-|+7|), \gamma = -4 + 6$

α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους α,β,γ

β) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα $|\alpha+\beta+\gamma|$ και $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ και να τα συγκρίνετε.

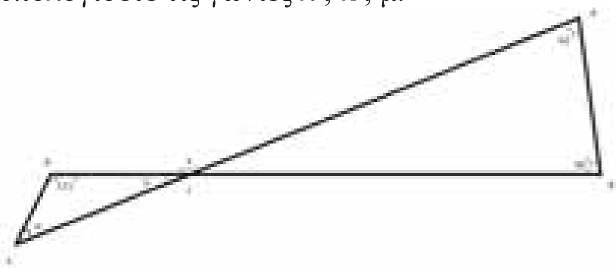
Άσκηση 5: **α)** Αν οι αριθμοί χ,y είναι αντίθετοι και οι αριθμοί ω, φ είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Z = 3(2y+1) + \omega(2-3\varphi) - 2(\omega - 3\chi)$

β) Αν $\chi = -(-3-1+2) + 3\cdot(-3+2) - 6:(-5+2)$ $\kappa\alpha\iota$ $y = -\{-[-(-8:2)]\}$ τότε να υπολογιστούν : **i)** οι αριθμοί χ και y

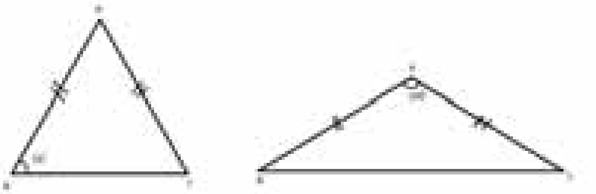
ii) έστω α=-χ και β=-y να υπολογίσετε την παράσταση

$\Theta = \beta:(-\chi) - y:(-\alpha) - [-\beta\cdot\chi - \alpha\cdot y - 2(\alpha-\beta)] + (y-\chi):(\beta-\alpha)$

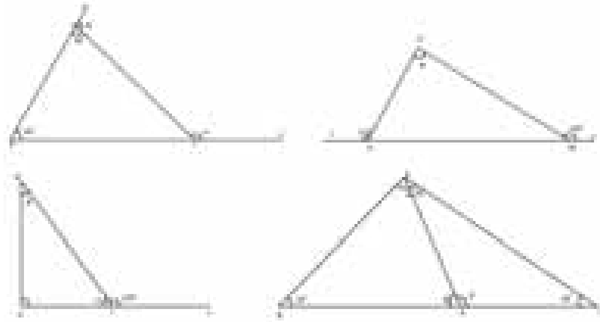
Άσκηση 6: **α)** Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες λ , κ , μ.



β) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α, Β και Γ σε κάθε ένα από τα παρακάτω τρίγωνα.



Άσκηση 7: Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ, ω, θ



Άσκηση 8

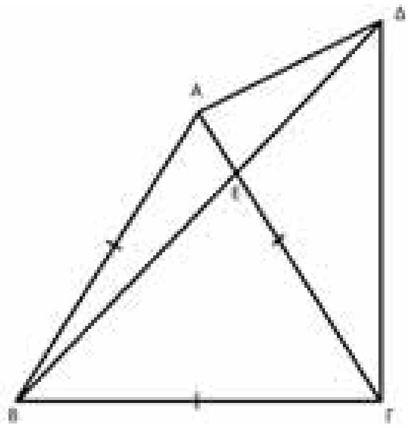
i) Να σχεδιάσετε ένα κύκλο με κέντρο Ο και μια χορδή του ΑΒ. Αν είναι η απόσταση του Ο από την ΑΒ.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ΑΓ=ΒΓ

β) Να δικαιολογήσετε γιατί $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma$

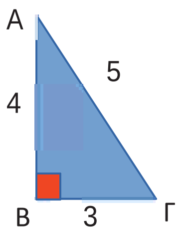
ii) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι μεσοκάθετοι των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τέμνονται στο σημείο Κ. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΑΓ και ΚΒΓ είναι ισοσκελή.

Άσκηση 9: Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ από την κορυφή Γ φέρουμε κάθετη στην ΒΓ και παίρνουμε σ' αυτήν ΓΔ=ΒΓ. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.



Άσκηση 10: Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο που τέμνονται οι διαγώνιες του. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (Κ,ΚΑ) και να εξηγήσετε γιατί ο κύκλος αυτός περνάει από όλες τις κορυφές του ορθογωνίου. Ισχύει το ίδιο στην περίπτωση του πλάγιου παραλληλογράμμου.

Αλληλογραφία



Από τον μαθητή **Ίντριτ Μάμαϊ** λάβαμε την εξής Παρατήρηση σε ορθογώνια τρίγωνα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3κ, 4κ και 5κ ισχύει ότι:
4κ/2 + 3κ = 5κ. Όπου κ>0 (Ο τύπος μας βοηθάει κι όταν έχουμε άγνωστη μία από τις 3 πλευρές του τριγώνου, πχ: έστω χ μία από τις κάθετες πλευρές, τότε 4κ/2 + x = 5κ οπότε x=3κ)

Γεια σας, είμαι ο Ίντριτ Μάμαϊ. Είμαι μαθητής της Β' Γυμνασίου και φοιτώ στο 1ο Ιπποκράτειο Γυμνάσιο Κω. Στο επισυναπτόμενο αρχείο σας αποστέλνω τη παρατήρηση μου. Περιμένω απάντησή σας, όπου θα μου επιβεβαιώσετε αν ισχύει ή όχι η παρατήρηση μου. (Την παρατήρησή μου την διαπίστωσα στο μάθημα των Μαθηματικών, όταν μου εξηγήθηκε για πρώτη φορά το Πυθαγόρειο Θεώρημα.)
Ευχαριστώ.

Προς μαθητή Ίντριτ από την Κω

Πρώτα να ευχηθώ σε σένα Ίντριτ και τους Συμμαθητές σου καλή πρόοδο.
Ίντριτ μπράβο για το ενδιαφέρον σου στα μαθηματικά. Το ότι έχεις απορίες και τις διατυπώνεις είναι θετικό. Καλό είναι να συζητάς τις απορίες σου και με τους καθηγητές σου.
Το Πυθαγόρειο θεώρημα που έμαθες, αναφέρεται σε εμβαδά τετραγώνων που τα δημιουργούμαι με πλευρές τις πλευρές του τριγώνου. Αυτό που παρατήρησες εσύ είναι σχέση μηκών(αριθμών) όχι εμβαδών και δεν είναι κάτι που ισχύει με τις πλευρές κάθε ορθογωνίου τριγώνου. Για παράδειγμα πάρε το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές (5, 12, 13), βλέπεις ότι δεν ισχύει αυτό. Συνέχισε τις προσπάθειες σου.

Η Μαρία Ελευθερίου μας ρωτάει:

Καλημέρα,
Στον Ευκλείδη Α (Τεύχος 125) σελ. 129, πρόβλημα 2, γράφει:
(...) « Ο Γιάννης προσθέτει το διπλάσιο του αριθμού που βρήκε ο Ανδρέας με τον αριθμό 4 ». Επομένως Γ = 2Α + 4. Στη λύση όμως, γράφει «Γ = Α2 + 2Α + 4». Μήπως είναι λάθος;
Ευχαριστώ

Απάντηση

Μαρία, δεν υπάρχει αυτό στο τεύχος 125, ίσως είναι σε άλλο τεύχος.

Α΄ Τάξη Στα χνάρια του… ΠΥΘΑΓΟΡΑ

Βαρβάρα Καμπουρίδη

Βρείτε τη σωστή απάντηση σε καθένα από τα παρακάτω προβλήματα, κυκλώνοντας το σωστό, και να εξηγήσετε κάνοντας την κατάλληλη πράξη:

1. Η Μαρία έχει 10 ευρώ για να αγοράσει γάλα, αυγά και ψωμί

2,86 ευρώ

3,25 ευρώ

2,90 ευρώ

Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις έχει νόημα να υπολογίσει η Μαρία το κόστος των αγορών της κατά προσέγγιση και όχι ακριβώς;

α) Όταν ο υπάλληλος της δώσει ρέστα
β) Όταν ο ταμίας περνάει τις τιμές στην αριθμομηχανή
γ) Όταν την ρωτούν πόσα θα πληρώσει
δ) Όταν χρειάζεται να αποφασίσει αν της φτάνουν τα χρήματα για την αγορά και των τριών προϊόντων.

2. Ένα εκατοστόμετρο (cm) στον χάρτη ισοδυναμεί με δώδεκα χιλιόμετρα (km) στην πραγματικότητα.

Πόσο περίπου απέχει το χωριό Πλάκα από το χωριό Καμάρα σε ευθεία στην πραγματικότητα;

α) 6 km **β)** 24 km **γ)** 36 km **δ)** 46 km

3. Βρείτε το αποτέλεσμα της πράξης : $\frac{12}{45} : \frac{6}{25}$

α) $\frac{1}{2}$ **β)** $\frac{10}{9}$ **γ)** $\frac{9}{10}$ **δ)** $\frac{3}{5}$

Ποια από τα παρακάτω χρονικά διαστήματα είναι το μεγαλύτερο

α) 18.000 δευτερόλεπτα **β)** μισή μέρα **γ)** 9 ώρες **δ)** 350 λεπτά

4. Ποιο από τα παρακάτω είναι ίσο με $α^3$;

α) $α + α + α$ **β)** $α \cdot α \cdot α$ **γ)** $3α$ **δ)** $α^2 + α$

5. Παιχνίδι με κάρτες: Ο Γιάννης έχει 6 κάρτες λιγότερες από την Γεωργία. Ο Γιώργος έχει τετραπλάσιες κάρτες από τον Γιάννη. Η Γεωργία έχει ψ κάρτες. Πόσες κάρτες έχει ο Γιώργος;

α) ψ - 6 **β)** 4ψ **γ)** 4ψ - 6 **δ)** 4 (ψ - 6)

6. Πόσα μπουκάλια των 750 ml γεμίζουμε με 603 λίτρα νερό;

α) 794 **β)** 800 **γ)** 804 **δ)** 810

7. Τα 3/5 μιας ομάδας τουριστών είναι άνδρες. Αν προστεθούν στην ομάδα 5 άνδρες και 5 γυναίκες, ποια από τις παρακάτω προτάσεις θα ισχύει;

α) Δεν έχω αρκετά δεδομένα για να απαντήσω.
β) Οι άδρες θα είναι περισσότεροι από τις γυναίκες.
γ) Οι γυναίκες θα είναι περισσότερες από τους άνδρες.
δ) Οι γυναίκες θα είναι όσες και οι άνδρες.

9. Στον καλλιτεχνικό όμιλο η Νάντια θέλησε να φτιάξει ένα νέο χρώμα αναμειγνύοντας 300 ml κόκκινης μπογιάς με 200 ml κίτρινης κι 200 ml μπλε μπογιάς.
Ποια είναι η αναλογία της κόκκινης μπογιάς προς τη συνολική ποσότητα μπογιάς που χρησιμοποίησε η Νάντια;

α) 300 : 200 (300 προς 200) **β)** 700 : 400 (700 προς 400)

γ) 300 : 400 (300 προς 400) **δ)** 300 : 700 (300 προς 700)

10. Ο Μάριος θέλει να βρει 3 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που το άθροισμά τους να είναι 108. Γράφει την παρακάτω εξίσωση:

$$(X - 1) + X + (X + 1) = 108$$

Ποιον αριθμό συμβολίζει ο Μάριος με Χ;

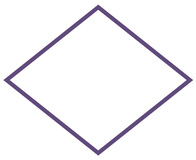
α) Τον μεγαλύτερο από τους τρεις αριθμούς
β) Τον μικρότερο από τους τρεις αριθμούς
γ) Τον μεσαίο από τους τρεις αριθμούς
δ) Τη διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου από τους τρεις αριθμούς

11. Στον πίνακα οι αριθμοί α και β συνδέονται με κάποια σχέση. Ποιος αριθμός λείπει;

α	1	3	5	7
β	2	8	;	20

α) 10 **β)** 12 **γ)** 14 **δ)** 16

12. Ποιος είναι ο λόγος της πλευράς ενός ρόμβου προς την περίμετρό του;

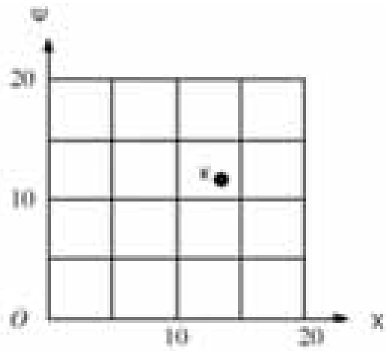


α) 1 : 1 **β)** 1 : 2 **γ)** 1 : 3 **δ)** 1 : 4

13. Μια χορτόπιτα μπαίνει στο φούρνο στις 8:20. Χρειάζεται τρία τέταρτα για να ψηθεί. Ποια ώρα πρέπει να βγει από τον φούρνο;

α) 9: 10 **β)** 9: 05 **γ)** 9: 15 **δ)** 9: 00

14. Ποιες μπορεί να είναι οι συντεταγμένες του σημείου Κ;



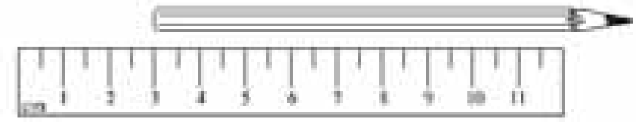
α) (12, 14)
β) (14, 14)
γ) (14, 12)
δ) (12, 12)

15. Η Α΄ τάξη του $1^{ου}$ Γυμνασίου με 120 παιδιά και η αντίστοιχη του $2^{ου}$ Γυμνασίου με 90 παιδιά διοργανώνουν επίσκεψη σε Μουσείο. Από το $1^{ο}$ Γυμνάσιο συμμετέχουν τα 2/3 των παιδιών και από το $2^{ο}$ τα 4/5 των παιδιών. Σε ποιο Γυμνάσιο έμειναν πίσω τα λιγότερα παιδιά και πόσα λιγότερα;

α) Στο $2^{ο}$, 22 λιγότερα από το $1^{ο}$
β) Στο $1^{ο}$, 22 λιγότερα από το $2^{ο}$
γ) Στο $2^{ο}$, 18 λιγότερα από το $1^{ο}$
δ) Στο $1^{ο}$,18 λιγότερα από το $1^{ο}$

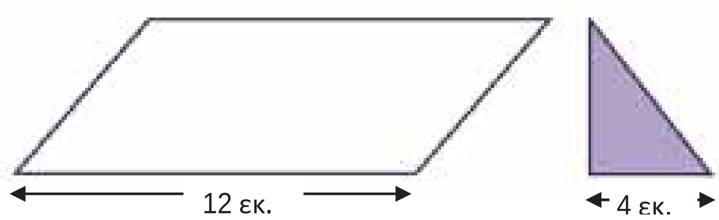
16. Σε έναν αδιαφανή σάκο υπάρχουν μπίλιες ίδιου μεγέθους αλλά διαφόρων χρωμάτων. Από αυτές 1/4 είναι πράσινες, 1/2 είναι λευκές, 1/12 κίτρινες, 1/6 γαλάζιες. Η Μαίρη βγάζει τυχαία μία μπίλια. Ποιο χρώμα είναι το πιο πιθανό να έχει η μπίλια;
α) λευκή **β)** γαλάζια **γ)** πράσινη **δ)** κίτρινη

17. Ποιο μπορεί να είναι το μήκος του μολυβιού;



α) 9,5 εκ. **β)** 10 εκ. **γ)** 11,5 εκ. **δ)** 13,5 εκ.

18. Με πόσα μοβ τρίγωνα καλύπτω πλήρως το παραλληλόγραμμο;
α) 4 **β)** 6
γ) 5 **δ)** 3



Αναστοχασμός:

- Εάν έλυσες τα προβλήματα, σκέψου ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποίησες για το καθένα.
  Μερικές φορές χρειάστηκε να χρησιμοποιήσεις περισσότερες από μία.
  Μπορείς να ανατρέξεις στο σχολικό σου βιβλίο και να βρεις περισσότερες παρόμοιες ασκήσεις και να τις δουλέψεις απολαμβάνοντας την πρόκληση και τη διαδρομή ως τη λύση.

Βοήθεια:

- Εάν δυσκολεύτηκες, να κάποιες ιδέες που μπορούν να σε βοηθήσουν.

Για το πρόβλημα 5, επισκέψου και μελέτησε το κεφάλαιο του βιβλίου σου που αφορά στις δυνάμεις των φυσικών αριθμών.

Για το πρόβλημα 9, χρειάζεσαι την ενότητα για τους λόγους και τις αναλογίες. Ενώ για το πρόβλημα 12, εκτός από αυτήν την ενότητα, χρειάζεται να θυμηθείς τον ορισμό και τις ιδιότητες του ρόμβου. Στην ενότητα με τους λόγους και τις αναλογίες βρίσκεται και η έννοια της κλίμακας για να σε βοηθήσει να λύσεις το πρόβλημα 2.

Για το πρόβλημα 3 θα πρέπει να ξεσκονίσεις τις γνώσεις σου για πράξεις μεταξύ κλασμάτων και ειδικότερα τη διαίρεση κλάσματος με κλάσμα που διδάχτηκες ήδη από το Δημοτικό σχολείο.

Το ίδιο και για το 4, το 7, το 13 και το 17 για τις μονάδες μέτρησης ώρας, μήκους κλπ.

Για να λύσεις ένα λεκτικό πρόβλημα, όπως το 15, ίσως χρειάζεται να κάνεις ένα πινακάκι με τα δεδομένα και, χρησιμοποιώντας τα σύμφωνα με τις προτάσεις του προβλήματος, να οδηγηθείς στη λύση και το αποτέλεσμα. Κατόπιν, επαληθεύεις το αποτέλεσμα για να βεβαιωθείς ότι η λύση σου είναι σωστή.

Υπόδειξη:

- Όταν έχεις ασκήσεις ή προβλήματα με απαντήσεις πολλαπλής επιλογής, δεν προχωράς να επιλέξεις μια απάντηση, χωρίς να βρεις πρώτα τη λύση.
  Κατόπιν, ελέγχεις αν το αποτέλεσμα που βρήκες βρίσκεται μεταξύ των δοσμένων απαντήσεων. Αν δεν βρίσκεται, θα πρέπει να ξανακάνεις τους υπολογισμούς ή να αλλάξεις τρόπο λύσης.

Καλή επιτυχία.

Β΄ Τάξη Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$

Χρήστος Κουστέρης

Βασικές επισημάνσεις

1) Κάθε ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ έχει κλίση τον αριθμό α και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \beta)$

Κλίση μιας ευθείας ή ***συντελεστής διεύθυνσής*** ονομάζεται η τιμή της εφαπτομένης της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$

Σχόλιο : Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ (κατακόρυφη) τότε σε αυτή την περίπτωση δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

2) Για να βρω τα σημεία τομής με τους άξονες μιας ευθείας κάνω τα εξής:

- Θέτω στην εξίσωση της ευθείας $x = 0$ και βρίσκω το αντίστοιχο y, επομένως βρίσκω ένα σημείο της μορφής $A(0, y)$ το οποίο και είναι το σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

- Θέτω στην εξίσωση ευθείας $y = 0$ και βρίσκω το αντίστοιχο x, επομένως βρίσκω ένα σημείο της μορφής $B(x, 0)$ το οποίο και είναι το σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$.

3) Για να εξετάσω αν ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία τότε αντικαθιστώ τις συντεταγμένες του στην εξίσωση της ευθείας και εξετάζω αν την επαληθεύει .

4) Αν γνωρίζω ότι ένα σημείο ανήκει στην εξίσωση μιας ευθείας τότε είναι βέβαιο ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της .

5) Για να σχεδιάσω μία ευθεία αρκεί να βρω δύο οποιαδήποτε σημεία της .

Μας << βολεύει>> να βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες

6) Δύο ευθείες $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$, $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες όταν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$

7) Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$ ενώ ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$

8) Κάθε εξίσωση της μορφής $x = \alpha$ παριστάνει στο επίπεδο ευθεία παράλληλη στον $y'y$ που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(\alpha, 0)$

9) Κάθε εξίσωση της μορφής $y = \beta$ παριστάνει στο επίπεδο ευθεία παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, \beta)$

10) Γενικά κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ παριστάνει στο επίπεδο εξίσωση ευθείας .

Λυμένα παραδείγματα

1) Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $4x-3y=12$

(α) Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

(β) Να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων

(γ) Να βρείτε την κλίση της ευθείας

Απάντηση

(α) Για τον άξονα $y'y$ θέτουμε $x=0$ στην εξίσωση της ευθείας ,οπότε :

$$4\cdot 0-3y=12 \quad ή \quad -3y=12 \quad ή \quad y=-\frac{12}{3} \quad ή \quad y=-4$$

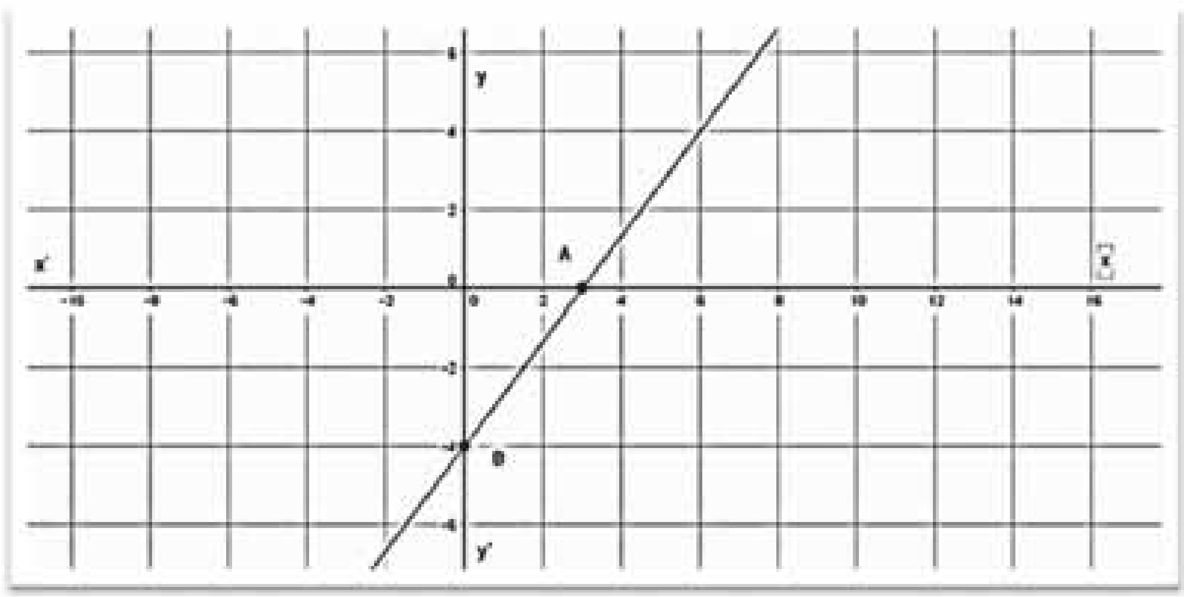
Άρα ,τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-4)$

Για τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας ,οπότε :

$$4x-3\cdot 0=12 \quad ή\ 4x=12 \quad ή \quad x=\frac{12}{4} \quad ή \quad x=3$$

Άρα ,τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3,0)$

(β) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων σημειώνουμε τα σημεία Α και Β του προηγούμενου ερωτήματος ,τα ενώνουμε και προεκτείνουμε και προς τις δύο κατευθύνσεις . Η γραφική παράσταση της ευθείας $4x-3y=12$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα .



(γ) Για να βρω την κλίση της ευθείας λύνω την εξίσωσης της ως προς y

Δηλαδή τη φέρνουμε στη μορφή $y=\alpha x+\beta$. Επομένως έχουμε :

$4x-3y=12$ ή $-3y=-4x+12$ ή $y=\frac{-4x}{-3}+\frac{12}{-3}$ ή $y=\frac{4}{3}x-4$

Άρα η κλίση της ευθείας είναι $\alpha=\frac{4}{3}$

2) Η ευθεία $(\varepsilon): y=(3\lambda-2)x+\frac{\mu+1}{2}$ είναι παράλληλη στην ευθεία $8x-2y+20=0$ και διέρχεται από το σημείο $E\left(\frac{1}{2},3\right)$

(α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$, $\mu=1$

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες στην (ε) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $8m^2$

Απάντηση

(α) Η ευθεία $8x-2y+20=0$ γράφεται στη μορφή $y=4x+10$, επομένως η κλίση της είναι 4. Αφού η (ε) είναι παράλληλη θα ισχύει $3\lambda-2=4$ οπότε $\lambda=3$

Για $\lambda=3$ έχουμε $(\varepsilon): y=4x+\frac{\mu+1}{2}$

Το σημείο $E\left(\frac{1}{2},3\right)$ ανήκει στην (ε) άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Αντικαθιστώ στην εξίσωση της (ε) όπου $x=\frac{1}{2}$ και $y=3$

$3=4\cdot\frac{1}{2}+\frac{\mu+1}{2}$ ή $3=2+\frac{\mu+1}{2}$ ή $1=\frac{\mu+1}{2}$ ή $\mu=1$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y=4x+1$

(β) Η ζητούμενη ευθεία έχει κλίση ίση με την κλίση της (ε) άρα είναι της μορφής

$y=4x+\beta$

Βρίσκω τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

Για $x=0$ έχουμε $y=4\cdot 0+\beta$ άρα $y=\beta$, ενώ για $y=0$ έχουμε $0=4x+\beta$ άρα $x=-\frac{\beta}{4}$

Επομένως η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(0,\beta)$ και $\Gamma\left(-\frac{\beta}{4},0\right)$

Αν $\beta > 0$ τότε $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \frac{\beta}{4}$ άρα $8 = \frac{\beta^2}{8}$ οπότε $\beta^2 = 64$ άρα $\beta = 8$

Αν $\beta < 0$ τότε $E = \frac{1}{2}(-\beta)\cdot\left(-\frac{\beta}{4}\right)$ άρα $8 = \frac{\beta^2}{8}$ οπότε $\beta^2 = 64$ άρα $\beta = -8$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι $y = 4x + 8$ και $y = 4x - 8$

Άσκηση 1

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): x - y + 6 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - y + 2 = 0$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής Α και Β της ευθείας $(\varepsilon_1): x - y + 6 = 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής Γ και Δ της ευθείας $(\varepsilon_2): x - y + 2 = 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες .

(δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ .

Άσκηση 2

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις $y = -2x + 12$ και $y = 3x + 12$

(α) Να βρείτε τα σημεία Α και Γ στα οποία οι ευθείες τέμνουν τον άξονα $x'x$

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$

(γ) Να σχεδιάσετε τις δύο ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων

(δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ , όπου Β το κοινό σημείο των δύο ευθειών .

Άσκηση 3

(α) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας η οποία έχει κλίση ίση με 3 και διέρχεται από το σημείο $A(0,12)$

(β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(-4,0)$ και $\Gamma(0,-6)$

(γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες των ερωτημάτων (α) και (β)

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(ε) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ.

Άσκηση 4

Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + (\beta + 4)$ η οποία έχει κλίση 4 και διέρχεται από το σημείο $K(3,4)$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -12$

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ όπου Α και Β τα σημεία που τέμνει η ευθεία τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα .

(γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΟΔ του τριγώνου ΟΑΒ

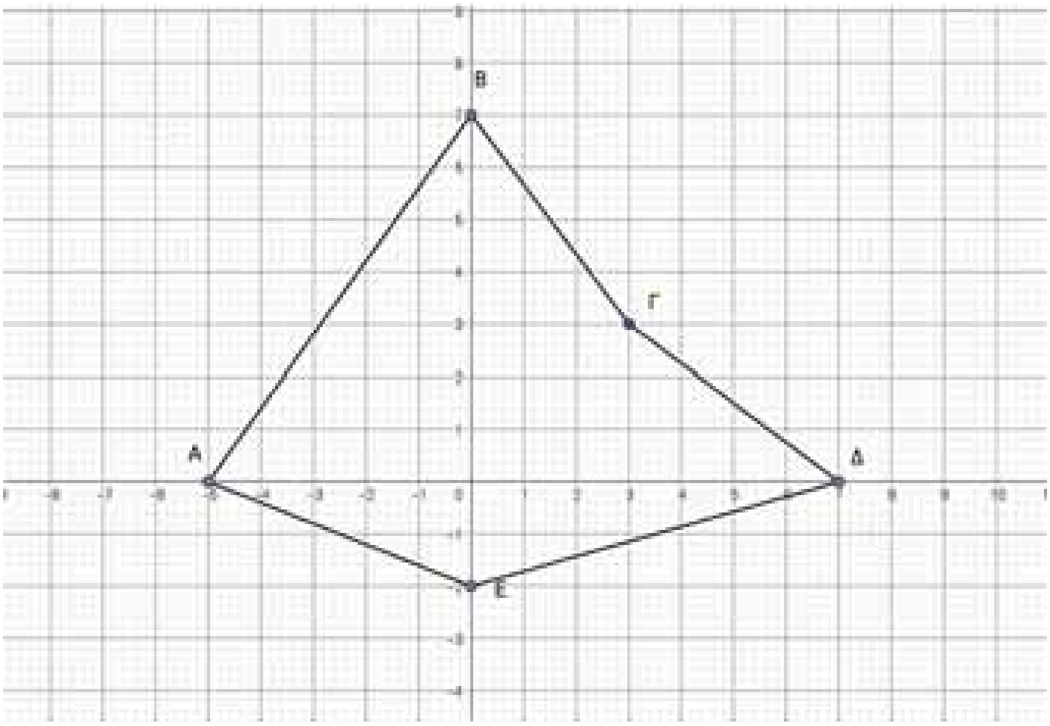
Άσκηση 5

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων είναι σημειωμένα 5 σημεία , τα Α,Β,Γ,Δ και Ε

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες τους

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΔΕ

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ



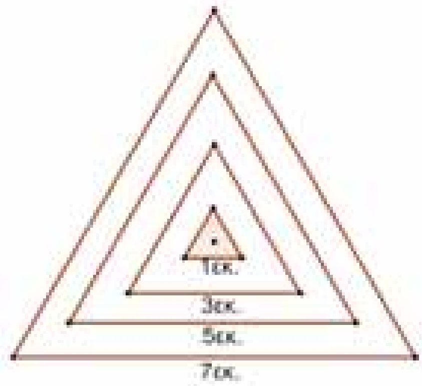
Β΄ Τάξη Στρατηγική Επίλυσης προβλήματος

Βρίσκω ένα μοτίβο, καταγράφω και οργανώνω τα δεδομένα

Στυλιανός Μαραγκάκης Ανδρέας Τριανταφύλλου

➢ Στα δεξιά, είναι το μέρος ενός σχεδίου, που αποτελείται από ομόκεντρα ισόπλευρα τρίγωνα (δηλαδή τρίγωνα με το ίδιο κέντρο).

Ολόκληρο το σχέδιο, αποτελείται από 50 τρίγωνα. Πόσο είναι το άθροισμα των περιμέτρων και των 50 τριγώνων;



Διαβάστε προσεκτικά, για να καταλάβετε τι ζητάει το πρόβλημα.

Καταγράψτε τα δεδομένα, και επαναλάβετε το/α ζητούμενο/α.

Δεδομένα	Ολόκληρο το σχέδιο αποτελείται από 50 ομόκεντρα ισόπλευρα τρίγωνα με μήκη πλευρών 1 εκ., 3 εκ., 5 εκ., 7 εκ., 9 εκ., κ.ο.κ.
Ζητούμενο/α	Πόσο είναι το άθροισμα των περιμέτρων και των 50 ισόπλευρων τριγώνων στο σχέδιο;

Επιλέξτε μια στρατηγική.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι προσέγγισης αυτού του προβλήματος.

Εδώ θα παρουσιάσουμε δύο τρόπους επίλυσης:

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στρατηγική «βρίσκω ένα κανόνα, μια κανονικότητα, ένα μοτίβο».
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στρατηγική «καταγραφή και οργάνωση όλων των δεδομένων» αναλύοντας τα δεδομένα.

Μέθοδος 1η, *βρίσκω ένα μοτίβο*

Ξεκινώντας από το μικρότερο τρίγωνο στο εσωτερικό και προχωρώντας προς τα έξω, διαπιστώνουμε ότι τα μήκη των πλευρών σε εκατοστά είναι η ακολουθία των 50 περιττών αριθμών: **1, 3, 5, 7, . . . , 99**.

Επειδή κάθε τρίγωνο έχει τρεις πλευρές, αν προσθέσουμε τους αριθμούς που αντιπροσωπεύουν το μήκος της καθεμίας πλευράς σε αυτήν την ακολουθία και στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε το άθροισμα επί 3, το αποτέλεσμα θα είναι το συνολικό άθροισμα των περιμέτρων των ισοπλεύρων τριγώνων.

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το άθροισμα 1 + 3 + 5 + 7 . . . + 99.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα, ξεκινώντας από τον πρώτο όρο και προσθέτοντας κάθε φορά τον επόμενο όρο της ακολουθίας.

Δηλαδή βρίσκουμε τον πρώτο όρο, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων, το άθροισμα των τριών πρώτων όρων, το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων και ούτω καθεξής.

Έτσι έχουμε:

Άθροισμα 1 όρου $1 = 1 = \mathbf{1}^2$

Άθροισμα 2 όρων $1 + 3 = 4 = \mathbf{2}^2$

Άθροισμα 3 όρων $1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3}^2$

Άθροισμα 4 όρων $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = \mathbf{4}^2$

Άθροισμα 5 όρων $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = \mathbf{5}^2$

Άθροισμα 6 όρων $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = \mathbf{6}^2 \ \ldots$

Επεκτείνοντας αυτή την ακολουθία όρων, διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα και των 50 όρων θα είναι 50^2 δηλαδή 2.500.

Οπότε, άθροισμα **50** όρων: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + 95 + 97 + 99 = \mathbf{50}^2$

Επομένως το άθροισμα των περιμέτρων και των 50 ισοπλεύρων τριγώνων είναι, 3(2.500εκ.) =7.500εκ. =75μ.

Μέθοδος 2η, *οργανώνω τα δεδομένα*

Με ανάλογο συλλογισμό, όπως κάναμε όταν χρησιμοποιήσαμε τη *Μέθοδο 1*, καταλήγουμε ότι πρέπει να βρούμε πρώτα το άθροισμα 50 περιττών αριθμών:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ \ldots \ + 93 + 95 + 97 + 99.$$

Η προσθήκη αυτών των αριθμών με τη σειρά μπορεί να διαρκέσει πολύ ώρα.

Ωστόσο, εάν κοιτάξουμε προσεκτικά, μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο να οργανώσουμε τους όρους (τέχνασμα Gauss) για να κάνουμε, ο υπολογισμός του αθροίσματος, να είναι πολύ απλός.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα του πρώτου όρου και του τελευταίου όρου, 1 + 99, είναι 100. Το άθροισμα του δεύτερου όρου και του προ- τελευταίου όρου, 3 + 97, είναι επίσης 100. Μπορούμε να συνδυάσουμε όλους τους όρους, ανά δύο με αυτόν τον τρόπο για να σχηματιστούν αθροίσματα 100.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 93 + 95 + 97 + 99$$

100

Υπάρχουν 50 περιττοί αριθμοί από το 1 έως το 99, άρα υπάρχουν 25 ζευγάρια αριθμών, το καθένα με άθροισμα 100. Άρα το σύνολο είναι 25(100), ή 2.500.

Το άθροισμα ενός συνόλου μηκών πλευρών (δηλαδή το μήκος της μιας πλευράς καθενός από τα 50 τρίγωνα) είναι 2.500 εκ.

Όπως κάναμε όταν χρησιμοποιήσαμε τη *Μέθοδο 1*, μπορούμε να βρούμε τη συνολική περίμετρο πολλαπλασιάζοντας αυτό το άθροισμα επί 3: 3(2.500 εκ.) = 7.500 εκ.

Η συνολική η περίμετρος είναι 7.500εκ. = 75μ.

Παραλλαγή του τεχνάσματος Gauss.

Γράφουμε τα μήκη των πλευρών των τριγώνων από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο και σε δεύτερη σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο:

1 3 5 7 . . . 93 95 97 99

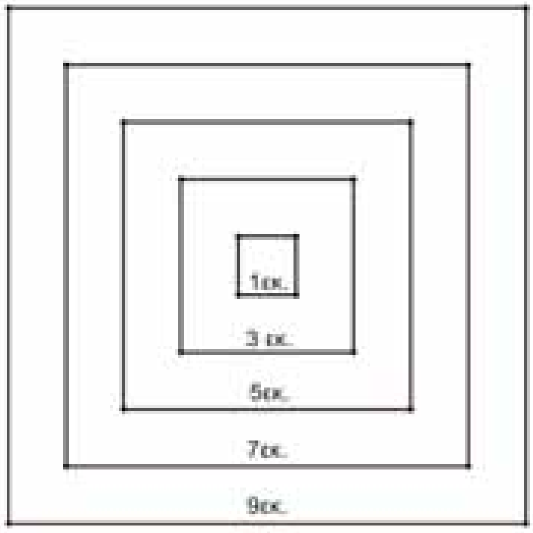
99 97 95 93 . . . 7 5 3 1 και προσθέτουμε (1 + 99) + (1 + 99) + (1 + 99) + . . . (1 + 99) + (1 + 99) + (1 + 99)

Στο παραπάνω άθροισμα, υπάρχουν 50 περιττοί αριθμοί από το 1 έως το 99, άρα υπάρχουν 50 ζευγάρια αριθμών, το καθένα με άθροισμα 100. Επειδή πήραμε 2 φορές τους περιττούς αριθμούς, το άθροισμά τους θα είναι $\frac{50\cdot 100}{2} = 25\cdot 100 = 2.500$.

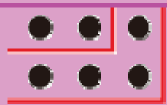
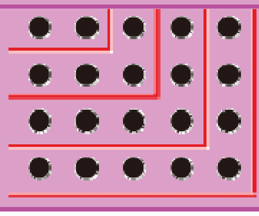
Όπως κάναμε όταν χρησιμοποιήσαμε τη *Μέθοδο 1*, μπορούμε να βρούμε τη συνολική περίμετρο πολλαπλασιάζοντας αυτό το άθροισμα επί 3: 3(2.500 εκ.) = 7.500 εκ.
Η συνολική η περίμετρος είναι 7.500εκ. = 75μ.

Δραστηριότητες

➢ Στα δεξιά, είναι το μέρος ενός σχεδίου, που αποτελείται από ομόκεντρα τετράγωνα (δηλαδή τετράγωνα με το ίδιο κέντρο). Ολόκληρο το σχέδιο, αποτελείται από 50 τετράγωνα. Πόσο είναι το άθροισμα των περιμέτρων και των 50 τετραγώνων;



➢ Στον επόμενο πίνακα φαίνονται διαδοχικά τα αθροίσματα των 4 πρώτων αρτίων αριθμών.

	2
	2 + 4 =
	2 + 4 + 6 =
	2 + 4 + 6 + 8 =

1. Πόσο είναι το άθροισμα των 6 πρώτων αρτίων αριθμών, δηλαδή το άθροισμα
   2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12;
2. Πόσο είναι το άθροισμα των 50 πρώτων αρτίων αριθμών, δηλαδή το άθροισμα
   2 + 4 + 6 + . . . + 96 + 98 + 100

Ρεαλιστικά Μαθηματικά και Μοντελοποίηση

« Μέθοδος μέτρησης ενός απρόσιτου ύψους -Επαναδιαπραγμάτευση της πρότασης του Ευκλείδη με νεότερα μαθηματικά αλλά και τεχνολογικά εργαλεία »

ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ $2^{ου}$ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΧΑΛΚΙΔΑΣ ΑΝΑΒΙΩΝΟΥΝ ΤΑ « ΟΠΤΙΚΑ » ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

(Με συμμετοχή του $2^{ου}$ ΓΕΛ Χαλκίδας)

Ιωάννης Δ. Αλεξίου-MSc Μαθηματικός $2^{ου}$ Γυμνασίου Χαλκίδας

Ο Θαλής (624 π.Χ. - 546 π.Χ) όταν ταξίδεψε στην Αίγυπτο μέτρησε το ύψος της κάθε πυραμίδας και απέσπασε το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου Άμασι. Για τη μέτρηση του ύψους των πυραμίδων χρησιμοποίησε το μήκος της σκιάς ενός ραβδιού, **δηλαδή χρησιμοποίησε τις ηλιακές ακτίνες**.

Ο Ευκλείδης (325 π.Χ. - 270 π.Χ).επιλύει το πρόβλημα της μέτρησης ενός απρόσιτου ύψους ***“ σαν να μην υπήρχε ήλιος ”*** (**όπως περιγράφει στο έργο του « Οπτικά »**) δηλαδή χωρίς την βοήθεια των ηλιακών ακτινών και της σκιάς που προκύπτει από αυτές. **Χρησιμοποιεί όμως τις οπτικές ακτίνες.**

Η παρακάτω δραστηριότητα υλοποιήθηκε σε διδακτική ώρα των μαθηματικών της Γ΄ τάξης του $2^{ου}$ Γυμνασίου Χαλκίδας την **$14^{η}$ εβδομάδα του έτους 2022**. Όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητές μας, εφαρμόσαμε τις αρχές της **Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης – ΡΜΕ,** εμπνευστής και θεμελιωτής της οποίας θεωρείται ο **Hans Freudenthal (1905 – 1990)**. ***Στη δραστηριότητα συμμετείχαν και δύο τμήματα της Β΄ Λυκείου του $2^{ου}$ ΓΕΛ Χαλκίδας, ύστερα από πρόσκλησή μας.***

Η κατάσταση προβλήματος

Βρισκόσαστε μπροστά σε ένα κτήριο και στο έδαφος υπάρχει ένα μικρός καθρέφτης. Προχωράτε μπρος πίσω, μέχρι να δείτε την κορυφή του κτηρίου στον καθρέφτη. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου; **(Πρόταση 19 από τα οπτικά του Ευκλείδη)**

Στα « ***Οπτικά*** » του Ευκλείδη καταγράφεται η πρώτη συστηματική προσπάθεια μέτρησης με ένα απλό εργαλείο, **έναν απλό καθρέπτη**. Στην επόμενη δραστηριότητα θα εξερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να κάνουμε μία τέτοια μέτρηση και το πιο σημαντικό, ποια μαθηματικά τεκμηριώνουν την αξιοπιστία των μετρήσεων, **μέσα από την προσομοίωση των εργαλείων αυτών**.

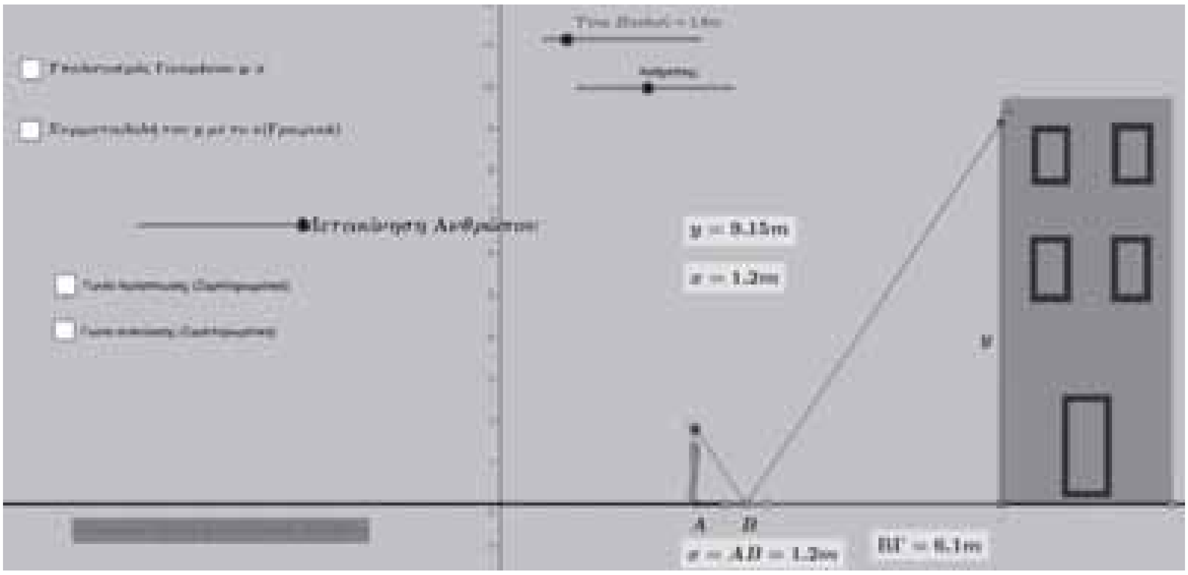
Μεθοδολογία Εργασίας

Περίοδος υλοποίησης της δραστηριότητας: $14^{η}$ εβδομάδα του έτους 2022

1ο στάδιο (Στη τάξη)

- **(Ιστορία των Μαθηματικών)** Έγινε συζήτηση στη τάξη για τον Ευκλείδη, τον Έλληνα μαθηματικό, που δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Έγινε αναφορά στο γνωστότερο έργο του που είναι τα **Στοιχεία**, το οποίο αποτελείται από 13 βιβλία. Στη συνέχεια μιλήσαμε για το άλλο έργο του, τα «οπτικά», ένα από τα ελάχιστα διασωζόμενα κείμενα γεωμετρικής οπτικής το οποίο αποτελείται από 58 προτάσεις. Στις προτάσεις 18-21 επιλύονται διάφορα προβλήματα μέτρησης ύψους ή βάθους με τη βοήθεια των ακτινών του ήλιου ή των οπτικών ακτινών. **Συγκεκριμένα, στη πρόταση 19, ο Ευκλείδης επιλύει το πρόβλημα της μέτρησης ενός απρόσιτου ύψους "σαν να μην υπήρχε ήλιος" , δηλαδή χωρίς την βοήθεια των ηλιακών ακτινών και της σκιάς που προκύπτει από αυτές. Χρησιμοποιεί όμως τις οπτικές ακτίνες με την παραδοχή ότι προέρχονται από το μάτι του παρατηρητή, τις οποίες οδηγεί να ανακλασθούν σ' ένα οριζόντιο επίπεδο κάτοπτρο και μετά την εκτροπή να συναντήσουν το ανώτατο σημείο του αντικειμένου που θέλει να μετρήσει.**

- Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία στη συνέχεια να δούνε μια **προσομοίωση της δραστηριότητας** που αναπτύχθηκε με το **λογισμικό geogebra (εικόνα 1**)



Εικόνα 1: Προσομοίωση του προβλήματος με το λογισμικό geogebra (Δημιουργήθηκε από τον Αλεξίου Ιωάννη, Μαθηματικό του 2ου Γυμνασίου Χαλκίδας)

- **Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με το πρόβλημα:** Βρισκόσαστε μπροστά σε ένα κτήριο και στο έδαφος υπάρχει ένα μικρός καθρέφτης. Προχωράτε μπρος πίσω, μέχρι να δείτε την κορυφή του κτηρίου στον καθρέφτη. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου; **(Πρόταση 19 από τα οπτικά του Ευκλείδη)**
- Με χρήση του λογισμικού geogebra και φύλλο εργασίας οι μαθητές πραγματοποιούν **προσομοίωση** του προβλήματος και **ανακαλύπτουν** ποια μαθηματικά τεκμηριώνουν την αξιοπιστία των μετρήσεων.

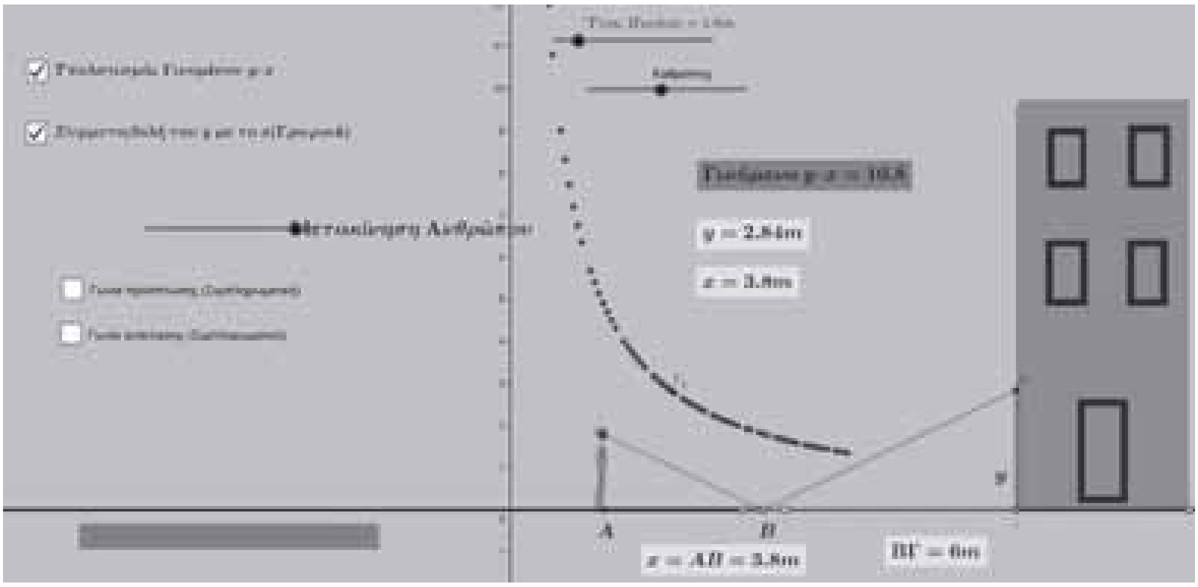
  Γνωστικά αντικείμενα: α) Η έννοια της γραφικής παράστασης συνάρτησης (*Β΄ Λυκείου*) **β)** Αντιστρόφως ανάλογα ποσά (*Β Λυκείου και Γ΄ Γυμνασίου*) και **γ) Ομοιότητα τριγώνων** (*Β΄ Λυκείου και Γ΄ Γυμνασίου*)

2ο στάδιο δραστηριότητας (υλοποίηση προσομοίωσης)

Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με τους μαθητές να εφαρμόζουν τα συμπεράσματα της προσομοίωσης σε πραγματικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, το τμήμα χωρίστηκε σε ομάδες, χρησιμοποίησαν ένα μικρό καθρέφτη, ένας μαθητής από κάθε ομάδα τοποθετήθηκε σε μια απόσταση x από αυτόν και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της προσομοίωσης, υπολόγισαν το ύψος του κτηρίου στο οποίο φτάνει η οπτική τους ακτίνα, **μέσω της ομοιότητας των τριγώνων** ή **της συνάρτησης που ανακάλυψαν στην προσομοίωση**.

Τα υλικά που χρειάστηκαν ήταν:

1. Κάτοπτρο (καθρεφτάκι)
2. Πινέζα και κλωστή
3. Βαρελάκι - Βαρίδι
4. Μονωτική ταινία και μετροταινία
    - Οι **μαθητές της Γ΄ Τάξης Γυμνασίου** μετά τις απαραίτητες μετρήσεις που πήραν υπολόγισαν, αρχικά, το ύψος της μπασκέτας του Γηπέδου μπάσκετ το οποίο είχαν αρχικά μετρήσει με την βοήθεια της μετροταινίας. Παρατήρησαν ότι με ένα καθρεπτάκι και λίγα Μαθηματικά κατάφεραν να υπολογίσουν με μεγάλη ακρίβεια το πραγματικό ύψος. Έτσι προχώρησαν στον υπολογισμό του απρόσιτου ύψους του σχολικού κτιρίου **μέσω της ομοιότητα τριγώνων**.
    - Στη συνέχεια, **μαθητές της Β΄ Τάξης Λυκείου** υπολόγισαν το ύψος του σχολικού κτιρίου μέσω της συνάρτησης της υπερβολής (<u>κατά την διάρκεια της προσομοίωσης με το λογισμικό geogebra κατάφεραν να « ανακαλύψουν » την **συμμεταβολή** του ύψους y που βλέπουν μέσα από το κάτοπτρο και της απόστασής τους x από το κάτοπτρο, μια υπερβολή όπως στην εικόνα 2</u>)



Εικόνα 2: Συμμεταβολή του y με το x

Συμπεράσματα

1. Οι μαθητές έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον για την δραστηριότητα, **αναγνωρίζοντας τη σημασία των Μαθηματικών στην καθημερινή πραγματικότητα**.
2. Οι μαθητές εργάστηκαν με έννοιες καθημερινές και κατάφεραν να τις συνδέσουν με τα μαθηματικά.
3. **Η χρήση υπολογιστή, εκτός από την οπτικοποίηση, επέτρεψε στο μαθητή να πειραματιστεί και να αναζητήσει ακραίες καταστάσεις του προβλήματος μέσα από μετρήσεις, συγκρίσεις, δυναμικές αλλαγές.**
4. Το μάθημα των Μαθηματικών έγινε πιο **ελκυστικό**, μέσα από αυτήν την βιωματική δραστηριότητα.

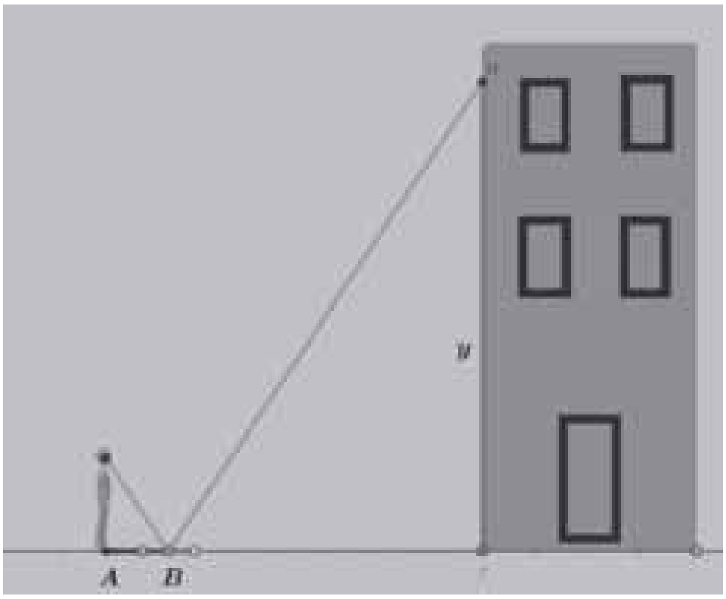
5. Οι μαθητές **διαπίστωσαν** την σπουδαιότητα της **ομοιότητας** και της **συνάρτησης** στον υπολογισμό του ύψους κτιρίων.
6. Οι μαθητές πήραν **πρωτοβουλίες** και μετατράπηκαν σε **μικρούς ερευνητές** και **ανακάλεσαν** εκείνες τις μαθηματικές γνώσεις που χρειάστηκαν για την επίτευξη του στόχου τους.
7. Οι μαθητές **ανακάλυψαν,** μέσα από την συζήτηση των αποτελεσμάτων τους **(Ιδεοθύελλα**), τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να προσεγγίσουν το πρόβλημα (μέσω της συνάρτησης ή της ομοιότητας)
8. **Η Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών** είχε θετική επίδραση στην κατάκτηση της έννοιας που είχαν διδαχθεί, την ομοιότητα των τριγώνων.

Φύλλο εργασίας των μαθητών στην αυλή

Φύλλο Εργασίας Μαθητή – Υπολογισμός Ύψους Κτιρίου

Πείραμα στην αυλή

2ο Γυμνάσιο Χαλκίδας (με την συμμετοχή του 2ου ΓΕΛ Χαλκίδας)



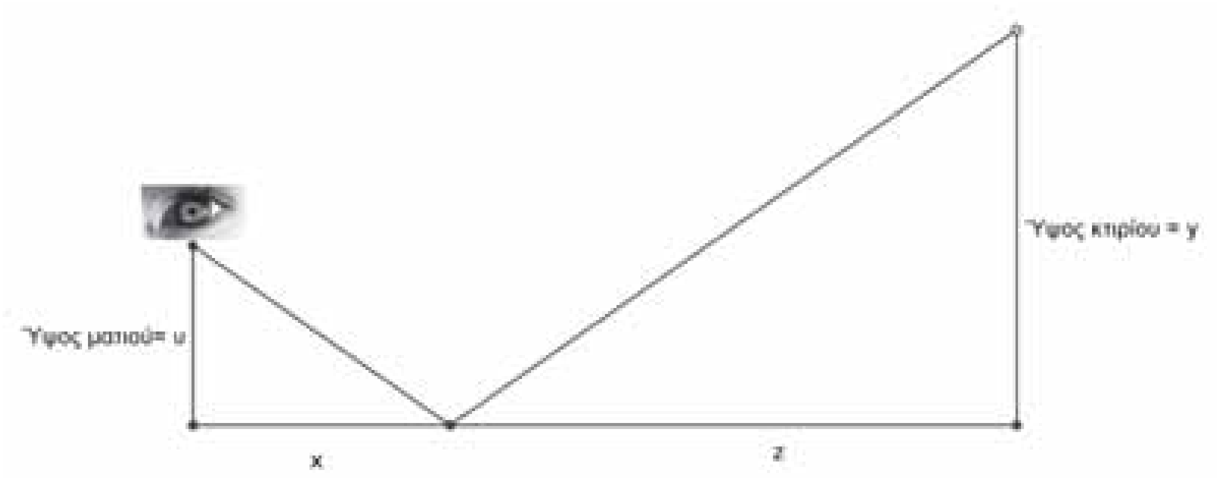
1η Προσέγγιση (Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$)

1. Για συγκεκριμένη τιμή του y που θα ορίσει η κάθε ομάδα (*σημαδέψτε τον τοίχο και μετρήστε το y με την μετροταινία*) μετακινηθείτε μέχρι να δείτε το σημάδι στον καθρέπτη και βρείτε την τιμή του x, όπου x = *AB* η απόστασή σας από τον καθρέπτη. Υπολογίστε την τιμή του a.
   - Είναι ίδια η τιμή για κάθε ομάδα;………………………………….
   - Από τι εξαρτάται; ………………………………………………..
   - Τελικά, a = …….

2. Στη συνέχεια, μετακινηθείτε μέχρι να δείτε το ψηλότερο σημείο του κτιρίου στον καθρέπτη και βρείτε την νέα τιμή του x (όπου x = AB η απόστασή σας από τον καθρέπτη)
   - x = ………………..

Τελικά, το ύψος του κτιρίου είναι:

$y = \text{——} =$…………



2η Προσέγγιση (Ομοιότητα τριγώνων)

1. Μετακινηθείτε μέχρι να δείτε το ψηλότερο σημείο του κτιρίου στον καθρέπτη και βρείτε την τιμή του x (όπου x η απόστασή σας από τον καθρέπτη)
   - x = ………………..
2. Μετρήστε την απόσταση z του καθρέπτη από το κτίριο.
   - Είναι ίδια η τιμή για κάθε ομάδα;………………………………
   - Τελικά, z = …….
3. Χρησιμοποιώντας το ζύγι και την μετροταινία υπολογίστε την τιμή του υ.
   - υ = ……..

Τα δύο τρίγωνα είναι ………… οπότε προκύπτει η παρακάτω ισότητα:

—— = —— ⇔ ……….. =………… ⇔ y =………

Τελικά, το ύψος του κτιρίου είναι ………………

Με ένα καθρέπτη και λίγα Μαθηματικά…..υπολογίσαμε το ύψος του σχολικού κτιρίου!!!

Γ΄ Τάξη

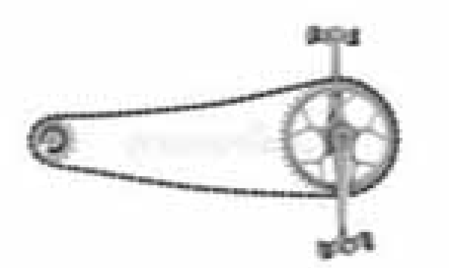
Ποδήλατο με 18 ταχύτητες

Στυλιανός Μαραγκάκης - Ανδρέας Τριανταφύλλου

Το θεωρούμε δεδομένο τώρα, αλλά ο εξοπλισμός ποδηλάτων, είναι ένα καταπληκτικό επίτευγμα. Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στη δεκαετία του 1880. Η κίνηση αλυσίδας σε ένα ποδήλατο: δημιουργεί ένα μηχανικό πλεονέκτημα έτσι, ώστε τα πετάλια και οι τροχοί στο ποδήλατο, να μπορούν να κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες. Αλλάζοντας ταχύτητες, ρυθμίζετε αυτό το μηχανικό πλεονέκτημα και αλλάζετε την κίνηση που μεταδίδεται στον πίσω τροχό, στο ποδήλατό σας.

Είναι μια απίστευτα αποτελεσματική εφαρμογή απλής φυσικής.

Καθώς πιέζουμε τα πετάλια, η δύναμη μας μεταδίδεται στο στρόφαλο του ποδήλατού μας (τα οδοντωτά γρανάζια ανάμεσα στα πετάλια μας), στην αλυσίδα, και τελικά σε ένα άλλο γρανάζι, που συνδέεται με τον άξονα του πίσω τροχού σας. Γρανάζι είναι ένας τροχός με δόντια, στα οποία μπορεί να κινηθεί μια αλυσίδα.



Τα περισσότερα ποδήλατα έχουν δύο γρανάζια **με 34 έως 50 δόντια** για την αλυσίδα, καθώς και πολλαπλά γρανάζια, **με 11 έως 32 δόντια** (11,12,13,14,16,18,20,22,25,27,29,32), διατεταγμένα σε ένα σύμπλεγμα που ρυθμίζεται από τον επιλογέα ταχυτήτων. Ο επιλογέας, μετακινεί την αλυσίδα μεταξύ διαφορετικών συνδυασμών αλυσίδας και γραναζιού, κάθε φορά που τον μετατοπίζομε.

Κάθε συνδυασμός αλυσίδας και γραναζιού, έχει ένα συγκεκριμένο μηχανικό πλεονέκτημα. Αυτό ονομάζεται «***σχέση μετάδοσης***», και είναι ο λόγος του αριθμού των δοντιών που έχει το μπροστινό γρανάζι, προς τον αριθμό των δοντιών που έχει το πίσω γρανάζι.

$$\textit{σχέση μετάδοσης} = \frac{\textit{μπροστινό γρανάζι}}{\textit{πίσω γρανάζι}}$$

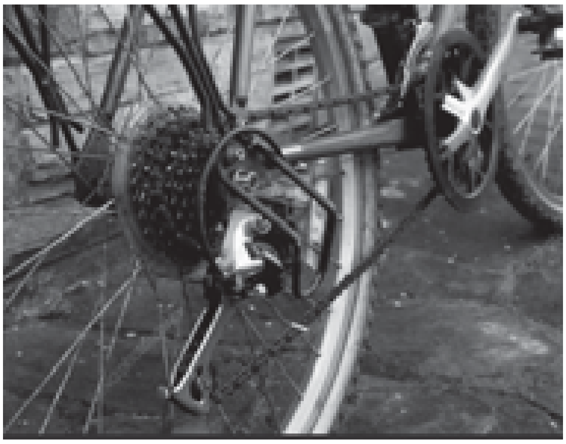
Για παράδειγμα, εάν το μπροστινό γρανάζι σας έχει 52 δόντια και το πίσω γρανάζι 16 δόντια, η σχέση μετάδοσης είναι 3,25, επειδή,

$$\textit{σχέση μετάδοσης} = \frac{\textit{μπροστινό γρανάζι}}{\textit{πίσω γρανάζι}} = \frac{52}{16} = 3{,}25$$

Η σχέση μετάδοσης μας λέει πόσες φορές το πίσω γρανάζι περιστρέφεται κάθε φορά, που κάποιο από τα μπροστινά γρανάζια γυρίζει μία φορά.

Όσο υψηλότερη είναι η σχέση μετάδοσης, τόσο μεγαλύτερη είναι η κίνηση που μεταδίδεται στον πίσω τροχό μας, άρα τόσο πιο γρήγορα θα περιστραφεί. Οι υψηλές σχέσεις μετάδοσης είναι χρήσιμες όταν θέλουμε να κινηθούμε γρήγορα. Οι χαμηλές σχέσεις μετάδοσης κινούν τον τροχό μας πιο αργά, αλλά με αυξημένη ισχύ, ιδανική για αναβάσεις.

Ένας εξοπλισμός ποδηλάτου, είναι ένας συνδυασμός ενός μπροστινού γραναζιού και ενός οπίσθιου γραναζιού, που συνδέονται με αλυσίδα. Έτσι, ένα ποδήλατο 18 (2x9) ταχυτήτων έχει, 2 μπροστινά γρανάζια προσαρτημένα στα πετάλια και 9 πίσω γρανάζια, προσαρτημένα στον άξονα του πίσω τροχού.



Ας υποθέσουμε ότι ένα ποδήλατο με τροχούς διαμέτρου 70 εκατοστών, έχει τοποθετηθεί σε μια ταχύτητα, για την οποία το μπροστινό γρανάζι έχει 38 δόντια, και το πίσω γρανάζι έχει 19 δόντια.

Όπως έχουμε δει η σχέση μετάδοσης δίνεται από τον τύπο:.

$$\text{σχέση μετάδοσης} = \frac{\text{μπροστινό γρανάζι}}{\text{πίσω γρανάζι}} = \frac{38}{19} = 2$$

Εάν γνωρίζουμε τη σχέση μετάδοσης και τη διάμετρο των τροχών, μπορούμε να υπολογίσουμε, πόση απόσταση διανύει το ποδήλατο, με κάθε περιστροφή του πεταλιού.

Κάθε φορά που περιστρέφεται το πίσω γρανάζι μια φορά, το ποδήλατο **μετακινείται σε μήκος, όσο η περιφέρεια του τροχού.**

Η περιφέρεια c ενός τροχού ποδηλάτου με διάμετρο δ = 70 εκατοστά, είναι

π • δ.= 3,14 • 70 εκ.= 219,8εκ., **περίπου 2,2 μέτρα.**

Πόσο μακριά ταξιδεύει το ποδήλατο, σε κάθε περιστροφή του πεταλίου;

Αν λ είναι η απόσταση που διανύεται από το ποδήλατο σε κάθε περιστροφή του πεταλίου, τότε λ = **σχέση μετάδοσης**

• περιφέρεια τροχού = 2 x 3,14 x 70 εκ = 2 x 2,2 μ. = περίπου 4,4 μέτρα.

Το ποδήλατο **μετακινείται** περίπου 4,4μ., **με κάθε περιστροφή των πεταλιών.**

Καθώς αυξάνεται η σχέση μετάδοσης, αυξάνεται και η δύναμη που πρέπει να καταβάλουμε, για τη μετακίνηση του ποδηλάτου. Είναι πιο δύσκολο να κάνουμε πετάλι στο ποδήλατο, στις υψηλότερες σχέσεις μετάδοσης, αλλά συχνά ένας ποδηλάτης, χρησιμοποιεί την υψηλότερη σχέση μετάδοσης, για να μπορεί να ταξιδεύει πιο μακριά, με λιγότερες κινήσεις στα πετάλια.

Δραστηριότητες

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα για αυτό το ποδήλατο με τις 18 ταχύτητες και με τροχούς διαμέτρου 70 εκατοστών.

Δόντια στο μπροστινό γρανάζι	Δόντια στο πίσω γρανάζι	Σχέση μετάδοσης	Απόσταση που διανύει το ποδήλατο με μία στροφή του πεταλιού (κατά προσέγγιση εκατοστού)
48	12		
48	14		
48	16		
48	18		
52	12		
52	14		
52	16		
52	18		
52	20		

2. Όπως δείχνει ο πίνακας, μερικές φορές δύο διαφορετικοί συνδυασμοί γραναζιών δίνουν την ίδια σχέση μετάδοσης (*ποιοι συνδυασμοί γραναζιών είναι;*).

3. Σχεδίασε ένα σύστημα γραναζιών για ένα ποδήλατο 18 ταχυτήτων **ώστε να μην έχει** διπλές σχέσεις μετάδοσης.

4. Πώς διάλεξες τους αριθμούς που χρησιμοποιείς;

Δόντια στο μπροστινό γρανάζι	Δόντια στο πίσω γρανάζι	Σχέση μετάδοσης
48		
48		
48		
48		
48		
48		
48		
48		
48		

Δόντια στο μπροστινό γρανάζι	Δόντια στο πίσω γρανάζι	Σχέση μετάδοσης
52		
52		
52		
52		
52		
52		
52		
52		
52		

Πηγή: Fundamentals of Algebra, Source Book, SALDIER - OXFORD

Γ΄ Τάξη Σύνολα και Πιθανότητες

Φώτης Κουνάδης

Σύνολα

Η έννοια του συνόλου είναι μία *πρωταρχική* έννοια των Μαθηματικών που μπορεί να χρησιμοποιείται στο καθημερινό λεξιλόγιο ακόμη και από ανθρώπους που δεν έχουν μαθηματικές γνώσεις προκειμένου να ομαδοποιήσουν ή να κατατάξουν κάποια άτομα, στοιχεία ή αντικείμενα.

Έτσι ακούμε συχνά για το σύνολο των μαθητών ή το σύνολο των βιβλίων ή το σύνολο των φυσικών αριθμών ή το σύνολο των φωνηέντων ή το σύνολο των ενώσεων του άνθρακα κ.λπ.

Πρωταρχική έννοια είναι αυτή που μπορούμε να δεχτούμε χωρίς τη βοήθεια κάποιου αυστηρού ορισμού. Τέτοιες έννοιες είναι για παράδειγμα το σημείο, η ευθεία, το επίπεδο, ο αριθμός. Δεν είναι τυχαίο ότι ενώ τα σύνολα και οι ιδιότητές τους, ιδιαίτερα των αριθμών και των σημείων, χρησιμοποιούνταν από την αρχαιότητα χρειάστηκαν πολλοί αιώνες ώστε η θεωρία των συνόλων να αποτελέσει μία ξεχωριστή ενότητα των μαθηματικών που να έχει όμως δομημένη και θεμελιωμένη επιστημονικά προσέγγιση.

Πρωτεργάτης αυτής της προσπάθειας θεωρείται ο Γερμανός μαθηματικός Georg Cantor (1845-1918). Από τότε η θεωρία των συνόλων αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης καθώς με τη χρήση της διευρύνθηκαν άλλες μαθηματικές ενότητες όπως η λογική , η άλγεβρα, η τοπολογία, η ανάλυση κ.λπ.

Σύμφωνα λοιπόν με τον Cantor: **Σύνολο** είναι κάθε **συλλογή** αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι **καλά ορισμένα , διακρίνονται το ένα από το άλλο** και συνδέονται με μία κοινή ιδιότητα.

Αντικείμενα **καλά ορισμένα**: δηλαδή να είμαστε σε θέση να πούμε αν ένα δοσμένο αντικείμενο είναι μεταξύ των αντικειμένων του συνόλου που μελετάμε. Έτσι για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το σύνολο των καλών μαθητών μιας τάξης, δεν είναι σαφές αν ένας μαθητής με μέσο βαθμό τετραμήνου 15 συμπεριλαμβάνεται ή όχι σε αυτό.

Αντικείμενα που **διακρίνονται το ένα από το άλλο**: δηλαδή για δύο στοιχεία α και β να μπορούμε να πούμε αν αυτά είναι ίσα, $\alpha = \beta$ ή διαφορετικά, $\alpha \neq \beta$.

Όμως στο ίδιο τον ορισμό του συνόλου υπάρχει ατέλεια αφού χρησιμοποιήθηκε μία συνώνυμη λέξη: **συλλογή**. Για το λόγο αυτό από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα με πρωταγωνιστή τον Βρετανό μαθηματικό, φιλόσοφο και φιλειρηνιστή Bertrand Russell ξεκίνησε η αμφισβήτηση της θεωρίας των συνόλων του Cantor. Αυτό που κλόνισε τη θεωρία των συνόλων ήταν το **παράδοξο του κουρέα.**

Μία μικρή πόλη έχει ένα μόνο κουρέα, ο κανονισμός λέει ότι ένας άντρας θα ξυρίζεται υποχρεωτικά είτε μόνος του είτε στον κουρέα. **[1]** . Ποιος ξυρίζει όμως τον κουρέα;

- Αν υποθέσουμε ότι ο κουρέας ξυρίζεται μόνος του, τότε λόγω της κατάστασης **[1]** , αυτός δεν ξυρίζεται στον κουρέα, που όμως είναι ο ίδιος.
- Αν υποθέσουμε ότι ο κουρέας δεν ξυρίζεται μόνος του, τότε από την **[1]**, πρέπει να πάει στον κουρέα, που είναι ο ίδιος.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των συνόλων μπορούμε να ονομάσουμε με

- Α το σύνολο των ανδρών που ξυρίζονται μόνοι τους.

- Β το σύνολο των ανδρών που δεν ξυρίζονται μόνοι τους και επομένως είναι υποχρεωμένοι να ξυριστούν από τον κουρέα.

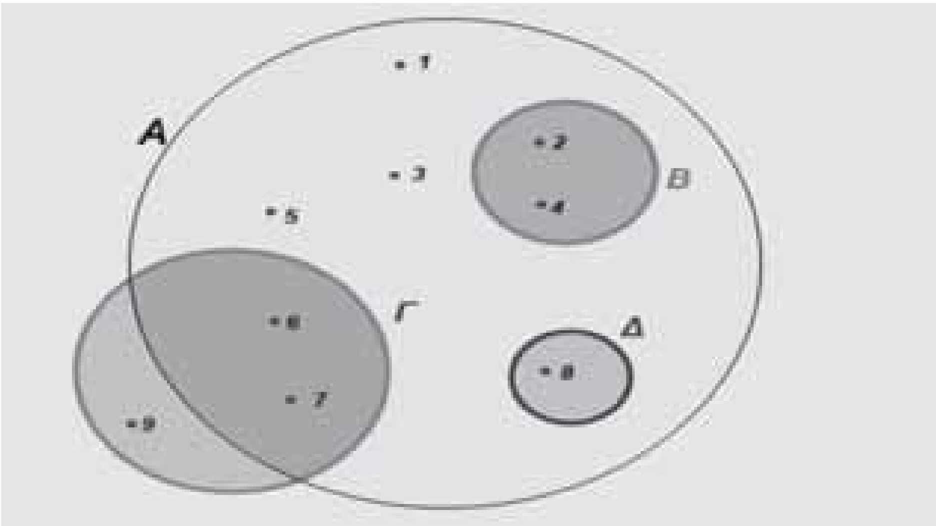
Τότε, ο κουρέας σε ποιο από τα δύο σύνολα ανήκει; Μπορούμε να πούμε ότι ανήκει συγχρόνως και στο Α και στο Β. Αλλά αυτό είναι αδύνατο γιατί τα δύο αυτά σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία αφού ένας άντρας που ανήκει στο σύνολο Α αποκλείεται να ανήκει και στο Β και αντίστροφα.

Το παράδοξο αυτό δε μπορεί να εξηγηθεί στα πλαίσια της θεωρίας του Cantor , γι' αυτό και αργότερα επιχειρήθηκε μια διαφορετική προσέγγιση της μελέτης των συνόλων.

Ας ασχοληθούμε όμως με πιο χειροπιαστά πράγματα όπως τα σύνολα με αριθμούς. Θεωρούμε το σύνολο Α={1,2,3,4,5,6,7,8} όπου παρουσιάζουμε τα στοιχεία του γράφοντάς τα. Τότε το σύνολο Β με όλους του άρτιους θετικούς ακέραιους από το Α που είναι μικρότεροι του 5, που τώρα όμως περιγράψαμε τα στοιχεία του, είναι το Β={2,4}. Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι κάθε στοιχείο του Β υπάρχει και στο Α, λέμε τότε ότι το Β είναι υποσύνολο του Α και γράφουμε $B \subseteq A$.

Αντίθετα το σύνολο Γ={6,7,9} δεν είναι υποσύνολο του Α αφού ο αριθμός 9 που ανήκει σε αυτό δεν περιέχεται στο Α. Επίσης τα σύνολα Β και Δ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Δύο τέτοια σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους.

Η γραφική παρουσίαση των συνόλων γίνεται μέσω των διαγραμμάτων του Venn (John Venn Άγγλος μαθηματικός 1834 – 1923).



Πιθανότητες

Θυμάμαι όταν ήμουν παιδί τον πατέρα μου να σχολιάζει τον καιρό. Κοίταζε ψηλά, τον ουρανό και μετά αν για παράδειγμα ταίριαζε, έλεγε: «σήμερα είναι **πιθανό** να βρέξει».

Τι ήταν αυτό που τον έκανε να πει αυτή τη φράση;

- Απλά είχε παρατηρήσει ότι ο ουρανός ήταν συννεφιασμένος;
- Είχε μήπως ακούσει το δελτίο καιρού στις ειδήσεις;
- Είχε ένα παλιό τραύμα που τον πονούσε με την υγρασία και τη βροχή;
- Η΄ μήπως απλά το είπε, έτσι για να πει κάτι και να ταράξει την αμηχανία της σιωπής.

Γενικά, μιλάμε για γεγονότα **πιθανά** ή **απίθανα** όταν δεν είμαστε σίγουροι αν αυτά τελικά θα πραγματοποιηθούν. Αυτό συμβαίνει γιατί τα γεγονότα αυτά εξαρτώνται από διάφορους παράγοντες , παράγοντες που εμείς δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε ή να μετρήσουμε.

Από ποιους παράγοντες εξαρτάται το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος στον αέρα; Αν δηλαδή θα προκύψει η όψη που αποκαλούμε κεφάλι ή αυτή που λέμε γράμματα; Μπορούμε να πούμε ότι εξαρτάται από το πως ρίχνουμε το νόμισμα, πόση δύναμη βάζουμε, τη γωνία που σχηματίζει το χέρι μας με το έδαφος, την τριβή του αέρα, κ.λπ.

Προφανώς είναι εξ' ίσου **πιθανό** όταν το νόμισμα πέσει στο έδαφος η πάνω όψη του να δείχνει κεφάλι ή γράμματα. Από τη στιγμή που εμείς δε μπορούμε να προσδιορίσουμε και να μετρήσουμε με ακρίβεια όλους τους παράγοντες που παρεμβαίνουν σε αυτό το πείραμα, αφήνουμε το όποιο αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος στην τύχη. Μιλάμε λοιπόν για ένα **πείραμα τύχης**.

Μπορεί να μην είναι πολύ παιδαγωγικό, αλλά είναι σωστό, ότι η θεωρία των πιθανοτήτων οφείλει την ύπαρξή της από τα αρχαία χρόνια στα τυχερά παιχνίδια.

Από τον Ευαγγελιστή Ιωάννη γράφεται πως μοιράστηκαν οι στρατιώτες τα ρούχα του Ιησού, και ειδικά τον χιτώνα Του που δεν είχε ραφές:

Εἶπον οὖν πρὸς ἀλλήλους· μὴ σχίσωμεν αὐτόν, ἀλλὰ λάχωμεν περὶ αὐτοῦ τίνος ἔσται· ἵνα ἡ γραφὴ πληρωθῇ ἡ λέγουσα· διεμερίσαντο τὰ ἱμάτιά μου ἑαυτοῖς, καὶ ἐπὶ τὸν ἱματισμόν μου ἔβαλον κλῆρον.

Είπαν τότε μεταξύ τους: «Ας μην τον σκίσουμε, αλλά να ρίξουμε κλήρο για να δούμε ποιος θα τον πάρει». Έτσι εκπληρώθηκε η Γραφή, που έλεγε: Τα ρούχα μου μοίρασαν μεταξύ τους και το ιμάτιό μου το ’βαλαν στον κλήρο.

Η γέννηση όμως της θεωρίας των πιθανοτήτων, ως μαθηματικής επιστήμης, οφείλεται στον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623-1662). Αφορμή στάθηκε το ερώτημα που του απεύθυνε ο φίλος του και μανιώδης παίκτης των ζαριών, ιππότης de Mere:

«*Αν στοιχηματίσω ότι ρίχνοντας ένα ζάρι 4 συνεχόμενες φορές θα φέρω 6 τουλάχιστον μία φορά, γνωρίζω από την εμπειρία μου ότι θα κερδίζω τις περισσότερες φορές. Αν όμως στοιχηματίσω ότι ρίχνοντας δύο ζάρια για 24 συνεχόμενες φορές θα φέρω εξάρες (2 εξάρια ταυτόχρονα), γνωρίζω από την εμπειρία μου ότι θα χάνω τις περισσότερες φορές. Ρωτώ λοιπόν, πρέπει να εμπιστευτώ την εμπειρία μου; Οι υποθέσεις μου είναι σωστές; Και ποιες είναι οι πιθανότητες νίκης σε κάθε περίπτωση;*».

Ας δούμε ένα **πείραμα τύχης**: Σε ένα κλειστό και αδιαφανές κουτί υπάρχουν 8 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως και το 8. Οι μπάλες είναι ακριβώς ίδιες, δηλαδή έχουν το ίδιο χρώμα, μέγεθος, βάρος, υλικό κατασκευής κ.λπ. Χωρίς να βλέπουμε επιλέγουμε μία από αυτές. Ποια είναι η πιθανότητα η μπάλα που έχουμε επιλέξει να έχει αριθμό 2 ή 4 ή 6;

Λύση. Οι δυνατές περιπτώσεις συμπίπτουν με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7,8, όσες δηλαδή είναι οι αριθμημένες μπάλες. Έχουμε δηλαδή το σύνολο Α={1,2,3,4,5,6,7,8}. Οι επιθυμητές ή οι ευνοϊκές για μας περιπτώσεις περιέχονται στο σύνολο Β={2,4}. Αν ορίσουμε ως **πιθανότητα** $\boldsymbol{p}$ να πραγματοποιηθεί η επιθυμία μας ως το πηλίκο της διαίρεσης του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων, που είναι 2, δια των δυνατών περιπτώσεων που είναι 8, έχουμε $\boldsymbol{p} = \frac{2}{8}$. Πιο απλά η πιθανότητα να κερδίσουμε είναι 2:8=0,25 ή 25%.

Στις μέρες μας η θεωρία των πιθανοτήτων, άσχετα πως προήλθε, βρίσκει πολλές εφαρμογές στην οικονομία, στην ιατρική, στις φυσικές επιστήμες.

Γ΄Τάξη Επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων

Παναγιώτης Κυλάφης Ανδρέας Τριανταφύλλου

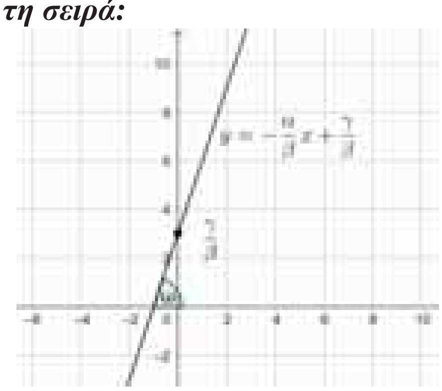
Α. Γραμμική Εξίσωση με δυο Αγνώστους

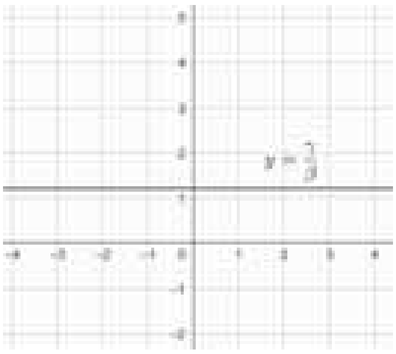
Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους ονομάζεται κάθε εξίσωση α΄ βαθμού της μορφής:
αx + βy = γ (1), με α, β, και γ, πραγματικούς αριθμούς π.χ. 3x – y = 1, με , x = 2, y = 5, κλπ.
Λύσεις της εξίσωσης αυτής (αν υπάρχουν) είναι κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.
Παράδειγμα:
Η εξίσωση: 3**x – y = 1** έχει **άπειρες λύσεις** π.χ. τα ζεύγη: (1, 2), (2, 5), . . .
Όλα αυτά τα ζεύγη απεικονιζόμενα στο καρτεσιανό επίπεδο παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας: **ε: y = 3x – 1**
Γενικά
Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας και αντίστροφα.
Ας δούμε όμως τις περιπτώσεις των γραμμικών εξισώσεων με τη σειρά:

1η περίπτωση:
Αν α≠0 ή β ≠ 0, δηλαδή αν οι συντελεστές α, β δεν είναι συγχρόνως μηδέν, τότε:

- Αν **β ≠ 0** τότε η εξίσωση (1) γίνεται: βy = – αx + γ , δηλαδή

$y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x + \dfrac{\gamma}{\beta}$ και έχει λύσεις όλα τα ζεύγη των αριθμών (x, y) που είναι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας ε, με συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ και που τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο $B(0, \dfrac{\gamma}{\beta})$.

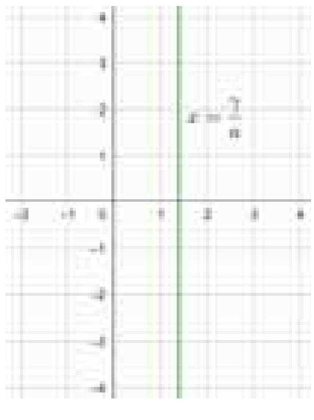




Λέμε τότε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση την: αx + βy = γ ή ότι η εξίσωση αx + βy = γ παριστάνει την ευθεία ε.
Προσοχή !

- Αν **β ≠ 0 και α = 0** τότε η εξίσωση (1) γίνεται: $y = \dfrac{\gamma}{\beta}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα xx΄.

- Αν **β = 0 τότε α ≠ 0** και η εξίσωση (1) γίνεται: $x = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα yy΄.



2η περίπτωση:
Αν α = 0 και β = 0 τότε η εξίσωση (1) γίνεται: **0x + 0y = γ** (2), οπότε:

- Αν $\gamma = 0$ τότε η εξίσωση (2) γίνεται $0x + 0y = 0$ και επαληθεύεται από οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών και παριστάνει όλο το **επίπεδο.**
- Αν $\gamma \neq 0$ τότε η εξίσωση (2) γίνεται $0x + 0y = \gamma$ και δεν επαληθεύεται από κανένα ζεύγος αριθμών είναι δηλαδή αδύνατη και παριστάνει το **κενό σύνολο**.

Συμπεράσματα

Μια γραμμική εξίσωση με δυο αγνώστους $\boldsymbol{\alpha x + \beta y = \gamma}$, παριστάνει ευθεία μόνο αν οι συντελεστές α και β δεν μηδενίζονται συγχρόνως δηλαδή αν **$\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.**

Παράδειγμα:

Η εξίσωση $\lambda x + (\lambda + 1)y = 5$ παριστάνει ευθεία για κάθε λ πραγματικό αριθμό, αφού τα λ, $\lambda + 1$ δεν μηδενίζονται συγχρόνως, για καμία πραγματική τιμή του λ.

B. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους

Σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε δυο γραμμικές εξισώσεις μαζί, των οποίων ζητάμε, αν υπάρχουν, τις κοινές λύσεις.

Μια γραμμική εξίσωση με 2 αγνώστους έχει γενικά, άπειρο αριθμό λύσεων (για παράδειγμα, σκεφτείτε πως (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3,3), κλπ. είναι όλα λύσεις της εξίσωσης $x + y = 6$).

Ωστόσο ένα **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** είναι συνήθως ένα σύνολο δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, που μπορούν να έχουν μία μόνο λύση που να ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Σύμφωνα με τα παραπάνω ένας τρόπος επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος του οποίου οι εξισώσεις παριστάνουν ευθείες είναι ο **γραφικός** δηλαδή η παράσταση σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του και στη συνέχεια,

✓ είτε ο προσδιορισμός του **κοινού τους σημείου**

✓ είτε η διαπίστωση ότι οι ευθείες είναι **παράλληλες** δηλαδή ότι το σύστημα είναι αδύνατο

✓ είτε ακόμη ότι οι ευθείες **ταυτίζονται** δηλαδή ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Επειδή, σύμφωνα με τη Γεωμετρία, μια ευθεία προσδιορίζεται από 2 σημεία, για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας γραμμικής εξίσωσης αρκεί να προσδιορίσουμε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες, δηλαδή τα σημεία με συντεταγμένες (0, y) και (x, 0).

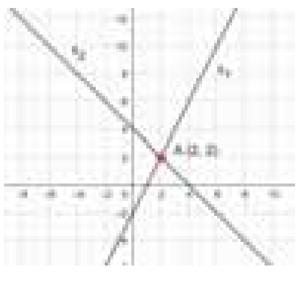
π.χ. για το γραμμικό σύστημα:

$$2x - y = 2 \quad (1)$$

$$x + y = 4 \quad (2)$$

Σχεδιάζουμε την ευθεία ε_1: $y = 2x - 2$ βρίσκοντας τα σημεία, για $x = 0 \Rightarrow$ λόγω (1) $y = -2$ και για $y = 0 \Rightarrow$ λόγω (1) $x = 1$. Οπότε η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία: (0, –2) και (1, 0)

Σχεδιάζουμε την ευθεία ε_2: $y = 4 - x$ βρίσκοντας τα σημεία, για $x = 0 \Rightarrow$ λόγω (2) $y = 4$ και για $y = 0 \Rightarrow$ λόγω (2) $x = 4$. Οπότε η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία: (0, 4) και (4, 0)



Το Α(2, 2) είναι η *μόνη* λύση και για τις δύο εξισώσεις $2x - y = 2$ και $x + y = 4$.

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού πολλές φορές οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.

Αξιόλογες επισημάνσεις:

Αν οι εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν ευθείες τότε αν :

✓ Οι ευθείες **τέμνονται,** το σύστημα έχει **μια μόνο λύση,** τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών.
✓ Οι ευθείες είναι **παράλληλες**, το σύστημα είναι **αδύνατο** και δεν έχει λύση.
✓ Οι ευθείες **ταυτίζονται,** το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** τις συντεταγμένες των σημείων της μιας εκ των δύο ευθειών.

Η αλγεβρική επίλυση ενός συστήματος, όπως θα δούμε παρακάτω μας οδηγεί πάντοτε στη λύση (αν υπάρχει) του συστήματος, σε οποιαδήποτε περίπτωση.

Ο στόχος μας όταν λύνουμε αλγεβρικά ένα σύστημα εξισώσεων είναι να μειώσουμε τις **δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους** σε **μία εξίσωση με ένα άγνωστο**.

- Δείτε δύο βασικούς αλγεβρικούς τρόπους για να λύσετε συστήματα γραμμικών εξισώσεων με **αντικατάσταση** και με **εξάλειψη μέσω αντιθέτων συντελεστών**.

Πώς λειτουργεί η μέθοδος της αντικατάστασης;

Με δεδομένο ότι κάθε εξίσωση στο σύστημα έχει δύο αγνώστους, ένας τρόπος για να μειώσουμε τον αριθμό των αγνώστων σε μια εξίσωση είναι, να *αντικαταστήσουμε τον έναν άγνωστο με* μια έκφραση του άλλου αγνώστου.

Για να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Απομονώνουμε έναν από τους δύο αγνώστους σε μία από τις εξισώσεις.
2. Αντικαθιστούμε την έκφραση που είναι ίση με τον απομονωμένο άγνωστο από το Βήμα 1 στην άλλη εξίσωση. Αυτό θα πρέπει να μας οδηγήσει σε μια γραμμική εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο.
3. Λύνουμε τη γραμμική εξίσωση για και υπολογίζουμε άγνωστο.
4. Χρησιμοποιούμε τη λύση του Βήματος 3 για να υπολογίσουμε την τιμή του άλλου αγνώστου στο σύστημα, χρησιμοποιώντας μία από τις αρχικές εξισώσεις.

π.χ. να λυθεί αλγεβρικά το σύστημα, με τη μέθοδο της αντικατάστασης

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \ (1) \\ x + y = 4 \ (2) \end{cases} \textit{λύνουμε την εξίσωση (1) ως πρός y και το αντικαθιστούμε στη (2)}$$

$$\overset{\text{Βήμα 2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x + (2x - 2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x + 2x - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 3x = 6 \end{cases} \overset{\text{Βήμα 3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\overset{\text{Βήμα 4}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2 \cdot 2 - 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Πώς λειτουργεί η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Ο στόχος μας είναι ίδιος, όπως και στη μέθοδο της αντικατάστασης, να μειώσουμε τις **δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους** σε **μία εξίσωση με ένα άγνωστο**. Με δεδομένο ότι κάθε εξίσωση στο σύστημα έχει δύο αγνώστους, ένας τρόπος για να μειώσουμε τον αριθμό των αγνώστων είναι να **προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις** του συστήματος για να ακυρώσουμε ή να *εξαλείψουμε έναν* από τους αγνώστους.

Ας λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Θυμηθείτε ότι όταν λύνουμε εξισώσεις, μπορούμε να εκτελέσουμε τις ίδιες πράξεις και στις δύο πλευρές της εξίσωσης ώστε να διατηρήσουμε την ισότητα. Αφού η δεύτερη εξίσωση μας λέει ότι $2x+ y$ είναι ίσο με 8, μπορούμε να προσθέσουμε $2x+y$ στην αριστερή πλευρά της πρώτης εξίσωσης, και συγχρόνως να προσθέσουμε 8 στη δεξιά πλευρά της πρώτης εξίσωσης ώστε να διατηρηθεί η ισότητα:

Παρατηρήστε ότι οι όροι y και –y ακυρώνονται και εξαλείφονται *ως* αποτέλεσμα της πρόσθεσης των δύο εξισώσεων. Όταν λύνουμε συστήματα εξισώσεων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, πάντα αναζητούμε τέτοιες ευκαιρίες για να εξαλείψουμε όρους.

- Αν δύο όροι έχουν *αντίθετους* συντελεστές όπως στο παραπάνω σύστημα ($-y$, και y), μπορούμε να *προσθέσουμε* τις δύο εξισώσεις για να ακυρώσουμε τους όρους.
- Εάν δύο όροι έχουν τους *ίδιους* συντελεστές, μπορούμε *να αφαιρέσουμε* τις δύο εξισώσεις για να ακυρώσουμε τους όρους.

Οπότε $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2x + y = 7+8 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

Από εδώ, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $5x = 15$, και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε την τιμή του x για να υπολογίσουμε την τιμή του y.

Ας λύσουμε και το παρακάτω σύστημα εξισώσεων με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \ (1) \ \textit{παρατηρούμε ότι ο άγνωστος } y \textit{ έχει αντίθετους συντελεστές } 1, -1 \textit{ οπότε} \\ x + y = 4 \ (2) \ \textit{προσθέτουμε τις εξισώσεις } (1) \textit{ και } (2) \textit{ κατά μέλη} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y + (2x - y) = 4 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2x = 4 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 - y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ας εξετάσουμε και το παρακάτω παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Σε ένα σύστημα εξισώσεων, και οι δύο εξισώσεις είναι *ταυτόχρονα αληθείς*. Με άλλα λόγια, αφού η πρώτη εξίσωση μας λέει ότι x =2, τότε επίσης και στη δεύτερη εξίσωση το x είναι ίσο με 2. Επομένως, μπορούμε να τοποθετήσουμε το 2, ως *υποκατάστατο του* x στη $2^{η}$ εξίσωση:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Μερικές φορές, το σύστημα εξισώσεων δεν έχει συντελεστές που ακυρώνονται άμεσα. Ας εξετάσουμε αυτό το παράδειγμα: $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 21 \end{cases}$

Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να βρούμε τρόπους να ταιριάξουμε ένα ζεύγος συντελεστών ξαναγράφοντας μία από τις εξισώσεις. Υπάρχουν δύο τρόποι για να γίνει αυτό.

Επιλογή 1: Μπορούμε να ρυθμίσουμε το σύστημα για την εξάλειψη του όρου y *μέσω πρόσθεσης* πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της πρώτης εξίσωσης επί 2.

$$\begin{cases}3x-y=7\\x+2y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(3x-y)=2\cdot 7\\x+2y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-2y=14\\x+2y=21\end{cases},$$

Από εδώ, μπορούμε να προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις για να εξαλείψουμε τον y όρο:
(6x–2y) + (x+2y) = 14 + 21

$$\begin{cases}7x=35\\x+2y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\x+2y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\5+2y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\2y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=8\end{cases}$$

Επιλογή 2: Μπορούμε επίσης να ρυθμίσουμε το σύστημα για την εξάλειψη του x όρου *μέσω αφαίρεσης*, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της δεύτερης εξίσωσης με 3.

$$\begin{cases}3x-y=7\\x+2y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=7\\3(x+2y)=3\cdot 21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=7\\3x+6y=63\end{cases}$$

Από εδώ, μπορούμε να αφαιρέσουμε την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη εξίσωση για να εξαλείψουμε τον x όρο:

$$\begin{cases}3x-y=7\\3x+6y=63\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y-(3x+6y)=7-63\\3x+6y=63\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7y=-56\\3x+6y=63\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\3x+6y=63\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\3x+6\cdot 8=63\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\3x+48=63\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\3x=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\x=5\end{cases}$$

Για να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

1. Προσδιορίζουμε ένα ζεύγος όρων στο σύστημα που έχουν τον ίδιο άγνωστο και οι συντελεστές του το ίδιο ή αντίθετο μέγεθος (π.χ. 2x και 2x, ή 3x και −3x). Εάν είναι απαραίτητο, ξαναγράφουμε τη μία ή και τις δύο εξισώσεις έτσι ώστε ένα ζεύγος όρων να έχει και την ίδια μεταβλητή και συντελεστές με το ίδιο μέγεθος.
2. Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις δύο εξισώσεις στο σύστημα για να εξαλείψουμε τους όρους που προσδιορίζονται στο Βήμα 1. Αυτό θα πρέπει να οδηγήσει σε μια γραμμική εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο.
3. Λύνουμε τη γραμμική εξίσωση και βρίσκουμε την τιμή του αγνώστου.
4. Τώρα που έχουμε βρει την τιμή του ενός αγνώστου, τοποθετούμε αυτήν την τιμή σε οποιαδήποτε εξίσωση για να βρούμε την τιμή του άλλου αγνώστου.

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases}3x+2y=10\\2x+2y=5\end{cases}$, ποια είναι η λύση (x, y) του συστήματος;

Όλα τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων μπορούν να λυθούν *είτε* με αντικατάσταση *είτε* με απαλοιφή. Για την επίλυση ενός συστήματος θα πρέπει να χρησιμοποιήστε όποια μέθοδο, με την οποία, αισθάνεστε πιο άνετα.

Η μέθοδος της αντικατάστασης είναι μερικές φορές ευκολότερη όταν:

- Ένας από τους αγνώστους είναι ήδη απομονωμένος: $x = 3y + 5$
- Μπορούμε να απομονώσουμε έναν από τους αγνώστους σε ένα μόνο βήμα: $5x + y = 15$

Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών είναι μερικές φορές ευκολότερη όταν:

- Και οι δύο εξισώσεις έχουν έναν άγνωστο με τους ίδιους συντελεστές:
  $5x + y = 15$ και $4x + y = 13$
- Και οι δύο εξισώσεις έχουν έναν άγνωστο με αντίθετους συντελεστές:
  $5x + y = 15$ και $3x - y = 1$
- Το σύστημα περιέχει έναν άγνωστο στη μια εξίσωση και ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του ίδιου αγνώστου στην άλλη εξίσωση: $5x + y = 15$ και $2x + 3y = 19$

Παραλλαγή της μεθόδου της αντικατάστασης:

- Απομονώνουμε έναν από τους δύο αγνώστους σε μία από τις εξισώσεις.
- Απομονώνουμε τον ίδιο άγνωστο και στην άλλη εξίσωση.
- Εξισώνουμε τις δύο εκφράσεις του αγνώστου (γιατί;). Αυτό μας οδηγεί σε μια γραμμική εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο.
- Λύνουμε τη γραμμική εξίσωση για και υπολογίζουμε άγνωστο.
- Χρησιμοποιούμε μια από τις εκφράσεις του αγνώστου που απομονώσαμε αρχικά, για να υπολογίσουμε την τιμή του άλλου αγνώστου στο σύστημα, χρησιμοποιώντας μία από τις αρχικές εξισώσεις.

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 12 - 3x \\ 2y = 10 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (12 - 3x)/2 \\ y = (10 - 2x)/2 \end{cases}.$$

$$\text{Οπότε } \begin{cases} y = (12 - 3x)/2 \\ y = (10 - 2x)/2 \\ 12 - 3x = 10 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (12 - 3x)/2 \\ y = (10 - 2x)/2 \\ 12 - 10 = 3x - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (12 - 3x)/2 \ (1) \\ y = (10 - 2x)/2 \ \ (2) \\ 2 = x \end{cases}.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $x = 2$ σε μια από τις (1) ή (2) έχουμε και $y = 3$.
Άρα λύση του συστήματος είναι το $(x, y) = (2, 3)$

Ασκήσεις προς λύση

Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x + 2y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x + y) - y = 7 \\ x + 2y = 2(x - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x + 5y = -8 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6x - 0,8y = 1,2 \\ -0,3x + 0,4y = 0,8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(x - y) + 5(x + y) = 2 \\ -2(x + y) - (x - y) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-5}{3} - 2y = -6 \\ x + \frac{7-y}{5} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{2}{15} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Για ποιες τιμές των α, β οι ευθείες με εξισώσεις αντίστοιχα:

Α. ε_1: $(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y = 4\beta - 2\alpha$, ε_2: ε_3: $2(\alpha - \beta)x - (\alpha + \beta)y = 2 - 2\beta$ τέμνονται στο σημείο Μ(2, –3).

Β. ε_3: $(\alpha + 2)x + (\beta - 1)y = 26$ και ε_4: $(\alpha + 4)x - \beta y = 6$ τέμνονται στο σημείο Ν(2, 4).

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

40η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

18 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2023

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{a+b+c=0} \\ \boldsymbol{ab^3+bc^3+ca^3=0} \end{matrix}\right\}$.

(*Σ. Μπραζιτίκος*)

Λύση (1ος τρόπος)

Γράφουμε $c=-a-b$, και αντικαθιστώντας στην δεύτερη σχέση παίρνουμε:

$$0=ab^3+b(-a-b)^3+(-a-b)a^3=-(-ab^3+b(a+b)^3+(a+b)a^3)$$

$$=-(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)=-(a^2(a+b)^2+b^2(a+b)^2+a^2b^2)=$$

$$=-a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2.$$

Επειδή έχουμε άθροισμα τετραγώνων, θα πρέπει καθένας όρος του αθροίσματος να είναι μηδέν, δηλαδή $ab=bc=ca=0$. Άρα, δύο από τους αριθμούς πρέπει να είναι μηδέν και από την $a+b+c=0$, προκύπτει ότι και ο τρίτος θα είναι μηδέν, δηλαδή $a=b=c=0$.

2ος τρόπος

Οι όροι ab^3, bc^3 και ca^3 προκύπτουν, αν πολλαπλασιάσουμε το $a+b+c$ με το $a^3+b^3+c^3$:

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)=a^4+b^4+c^4+ab^3+bc^3+ca^3+ac^3+ba^3+cb^3 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$(ab^3+bc^3+ca^3)-(ac^3+ba^3+cb^3)=ab(b^2-a^2)+bc(c^2-b^2)+ca(a^2-c^2)$$

Με το δεξί μέλος να είναι ίσο με

$$ab(a+b)(b-a)+bc(b+c)(c-b)+ca(a+c)(a-c)=-abc(b-a+c-b+a-c)=0.$$

Άρα $ac^3+ba^3+cb^3=ab^3+bc^3+ca^3=0$, και αφού $a+b+c=0$, η (1) δίνει $a^4+b^4+c^4=0$. Συνεπώς, $a=b=c=0$.

Πρόβλημα 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, αντίστοιχα. Θεωρούμε δύο σημεία Δ και Ε πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, έτσι ώστε ΓΔ ∥ ΜΕ και ΒΔ < ΒΕ. Να αποδείξετε ότι: ΒΔ = 2 · ΕΝ.

(*Μ. Ψαρράς*)

Λύση

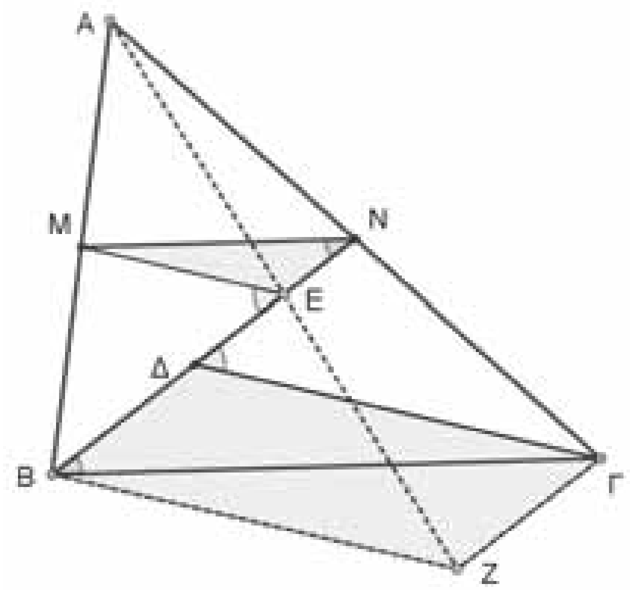
1ος τρόπος.

Επειδή ΜΕ ∥ ΓΔ έπεται ότι $\Gamma\hat{\Delta}E=M\hat{E}\Delta$, ως εντός εναλλάξ γωνίες. Επομένως,

$$180^0-\Gamma\hat{\Delta}E=180^0-M\hat{E}\Delta \Rightarrow B\hat{\Delta}\Gamma=M\hat{E}N \quad (1)$$

Επειδή τα σημεία Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, αντίστοιχα έπεται ότι

$$MN \parallel B\Gamma, \quad MN=\frac{B\Gamma}{2}. \qquad (2)$$



Σχήμα 1

οπότε με τέμνουσα την ευθεία ΒΝ, έχουμε $\Delta\widehat{B}\Gamma = M\widehat{N}E$, (3)

ως εντός εναλλάξ γωνίες. Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΜΕΝ είναι όμοια, οπότε $\frac{B\Delta}{EN} = \frac{B\Gamma}{MN} = 2 \Rightarrow B\Delta = 2 \cdot EN$.

2ος τρόπος

Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ΒΝ, η οποία τέμνει την ευθεία ΑΕ στο σημείο Ζ. Επειδή Ν μέσο ΒΓ και $NE \parallel \Gamma Z$, έπεται ότι: Ε μέσο ΑΖ και $\Gamma Z = 2 \cdot EN$.

Επειδή Μ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΖ, αντίστοιχα, έπεται ότι: $ME \parallel B\Gamma$.
Επομένως το τετράπλευρο ΒΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τα δύο ζεύγη των απέναντι πλευρών του ευθείες παράλληλες. Τότε θα είναι και $B\Delta = \Gamma Z = 2 \cdot EN$.

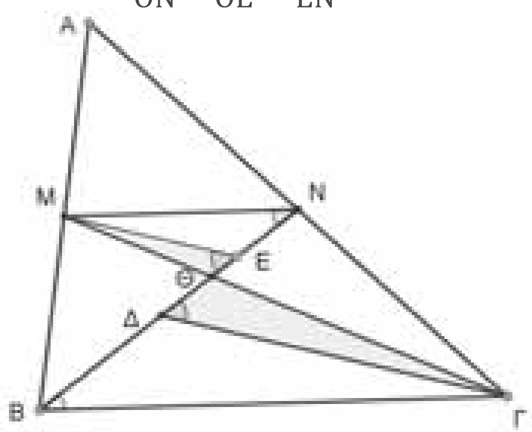
3ος τρόπος

Έστω Θ το σημείο τομής των διαμέσων ΒΝ και ΜΓ, δηλαδή το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε $\frac{B\Theta}{\Theta N} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta M} = 2$.

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΜΕΘ και ΓΔΘ προκύπτει ότι: $\frac{\Delta\Theta}{\Theta E} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta M} = 2$.

Συνεπώς $\frac{B\Theta}{\Theta N} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta E}$ και άρα, από τις ιδιότητες των αναλογιών, έπεται ότι

$$\frac{B\Theta - \Delta\Theta}{\Theta N - \Theta E} = \frac{B\Delta}{EN} = 2.$$



Σχήμα 2

Πρόβλημα 3

Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) **Έχουν κορυφές σημεία $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ του επιπέδου $\boldsymbol{Oxy}$, με $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ μη αρνητικούς ακεραίους και $\boldsymbol{x}\leq \mathbf{8}$, $\boldsymbol{y}\leq \mathbf{8}$.**

(β) **Έχουν πλευρές παράλληλες στους άξονες.**

(γ) **Έχουν εμβαδόν $\boldsymbol{E}$, με $\mathbf{30}<\boldsymbol{E}\leq \mathbf{40}$.**

(*Σ. Μπραζιτίκος*)

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι τα μήκη των πλευρών των ορθογωνίων πρέπει να είναι μικρότερα ή ίσα του 8.

Θα εξετάσουμε αρχικά ποιες τιμές για το εμβαδόν είναι δεκτές: Το 40 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο (με $x,y\leq 8$) ως $40=5\cdot 8$. Τώρα ένα 5×8 ορθογώνιο μπορεί να μπει στο 8×8 με 4 τρόπους οριζόντια και 4 τρόπους κάθετα, άρα συνολικά έχουμε 8 ορθογώνια.

Τα 39, 38, 37, 34, 33, 31 έχουν κάποιον πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του 8, οπότε δεν μπορούν να γραφούν ως γινόμενο δύο αριθμών μικρότερων του 8. Το 36 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο (με $x,y\leq 8$) ως $36=6\cdot 6$. Τώρα ένα 6×6 ορθογώνιο (τετράγωνο) μπορεί να μπει στο 8×8 με 3^2 τρόπους, άρα συνολικά έχουμε 9.

Το 35 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $35=5\cdot 7$. Ένα 5×7 ορθογώνιο μπαίνει με $2\cdot(4\cdot 2)=16$ τρόπους.

Το 32 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $32=4\cdot 8$. Ένα 4×8 ορθογώνιο μπορεί να μπει με $2\cdot 5=10$ τρόπους.

Τελικά έχουμε $8+9+16+10=43$ οθρογώνια με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, με $\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{1}$, που είναι τέτοιοι ώστε ο $\boldsymbol{\beta}$ είναι διαιρέτης του $\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}$ και ο $\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}$ είναι διαιρέτης του $\mathbf{5}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{3}$. (*Α. Φελλούρης*)

Λύση

Επειδή ο β είναι διαιρέτης του $\alpha-1$ και ο $2\alpha+1$ είναι διαιρέτης του $5\beta-3$, με $\alpha>1$, οι

$$x=\frac{\alpha-1}{\beta}\ \text{ και }\ y=\frac{5\beta-3}{2\alpha+1}$$

είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε: $0<xy=\frac{\alpha-1}{\beta}\cdot\frac{5\beta-3}{2\alpha+1}<\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{5\beta}{2\alpha}=\frac{5}{2}\Rightarrow xy\in\{1,2\}$.

- Αν $xy=1$, τότε $x=y=1$, οπότε προκύπτει το σύστημα:
$$\left\{\begin{matrix}\alpha-1=\beta\\ 2\alpha+1=5\beta-3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=\beta+1\\ 2(\beta+1)+1=5\beta-3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{3},\boldsymbol{\beta}=\mathbf{2}.$$
- Αν $xy=2$, τότε $x=1, y=2$ ή $x=2, y=1$, οπότε προκύπτουν τα συστήματα:
$$\left\{\begin{matrix}\alpha-1=\beta\\ 4\alpha+2=5\beta-3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=\beta+1\\ 4(\beta+1)+2=5\beta-3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{10},\boldsymbol{\beta}=\mathbf{9}.$$
$$\left\{\begin{matrix}\alpha-1=2\beta\\ 2\alpha+1=5\beta-3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=2\beta+1\\ 2(2\beta+1)+1=5\beta-3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{13},\boldsymbol{\beta}=\mathbf{6}.$$

2ος τρόπος (Α. Συνεφακόπουλος).

Αφού $\beta|\alpha-1$, θα έχουμε ότι: $\alpha-1=\beta\kappa$ (1),

για κάποιον θετικό ακέραιο κ. Επιπλέον, $2\alpha+1|\,5\beta-3$, άρα υπάρχει $\lambda\in\mathbb{N}^+$ ώστε

$$5\beta - 3 = (2\alpha + 1)\lambda.$$

Η τελευταία, λόγω της (1), γίνεται:

$$5\beta - 3 = \lambda(2\beta\kappa + 3) \Rightarrow \beta(2\lambda\kappa - 5) = -3\lambda - 3 \qquad (2)$$

Το δεξί μέλος στην τελευταία είναι αρνητικό, άρα $2\lambda\kappa - 5 < 0$, οπότε

$$2\lambda\kappa \leq 4 \Leftrightarrow \lambda\kappa \leq 2.$$

Επομένως, έχουμε: $\lambda = \kappa = 1$ ή $\lambda = 2, \kappa = 1$, ή $\lambda = 1, \kappa = 2$.

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε στην πρώτη περίπτωση $\beta = 2$, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε $a = 3$.

Στην δεύτερη περίπτωση βρίσκουμε $b = 9$, οπότε από την (1), έχουμε: $a = 10$.

Στην δεύτερη περίπτωση βρίσκουμε $b = 6$, οπότε από την (1), έχουμε: $a = 13$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 126

A75. **Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:**

(1) $\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta+\gamma}} \geq \frac{4\alpha}{2\alpha+\beta+\gamma}$,

(2) $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta+\gamma}} + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma+\alpha}} + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha+\beta}} \geq 3$.

ΜΟ Ρουμανίας, 2022

Λύση

(α) Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι θετικά, με ύψωσή τους στο τετράγωνο η ανισότητα γίνεται ισοδύναμη με

$$\frac{2\alpha}{\beta+\gamma} \geq \left(\frac{4\alpha}{2\alpha+\beta+\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow 2\alpha(2\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 16\alpha^2(\beta+\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\beta+\gamma-2\alpha)^2 \geq 0, \text{που ισχύει.}$$

(β) Με χρήση του (α) προκύπτει ότι:

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta+\gamma}} + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma+\alpha}} + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha+\beta}} \geq \frac{4\beta}{2\alpha+\beta+\gamma} + \frac{4\gamma}{2\beta+\gamma+\alpha} + \frac{4\alpha}{2\gamma+\alpha+\beta} = A.$$

Από την ανισότητα του Bergstrom (άμεση συνέπεια της ανισότητας των Cauchy-Schwarz) προκύπτει ότι:

$$A = \frac{(2\beta)^2}{\beta(2\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{(2\gamma)^2}{\gamma(2\beta+\gamma+\alpha)} + \frac{(2\alpha)^2}{\alpha(2\gamma+\alpha+\beta)} \geq \frac{(2\alpha+2\beta+2\gamma)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\gamma\alpha}.$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+2\beta+2\gamma)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\gamma\alpha} \geq 3$$

που είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \text{που ισχύει.}$$

N44. **Δίνεται ότι ο αριθμός $\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta$ είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος του οποίου το τετράγωνο ισούται με $\overline{\alpha\alpha\beta\beta}$.**

ΜΟ Ολλανδίας, 2021

Λύση

Έστω ότι:

$$\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta = \overline{xy}^2 = (10x+y)^2, 33 \le \overline{xy} \le 99.$$

Ισοδύναμα, έχουμε:

$$1100\alpha + 11\beta = (10x+y)^2, \quad 33 \le \overline{xy} \le 99 \Leftrightarrow$$
$$11 \cdot (100\alpha + \beta) = (10x+y)^2, \quad 33 \le \overline{xy} \le 99.$$

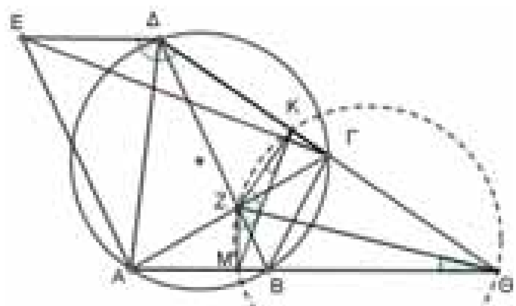
Επειδή ο 11 είναι πρώτος, από την τελευταία ισότητα πρέπει $100\alpha + \beta = 11 \cdot \kappa^2$, με $3 \le \kappa \le 9$, οπότε:

$$(10x+y)^2 = (11\kappa)^2 \Rightarrow 10x + y = 11\kappa, \quad 3 \le \kappa \le 9.$$

Επομένως, $10x + y \in \{33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$, από τους οποίους μόνο ο 88 ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος.

Γ60. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι τέτοια ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ζ και οι ημιευθείες ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι: $A\hat{\Theta}Z = E\hat{\Gamma}\Delta$.

Λύση



Από το σημείο Ζ φέρουμε κάθετες προς τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ που τις τέμνουν, έστω στα Μ και Κ, αντίστοιχα. Τότε το τετράπλευρο ΜΘΚΖ είναι εγγράψιμο και : $A\hat{\Theta}Z = Z\hat{K}M$.

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $Z\hat{K}M = \Delta\hat{\Gamma}E$. Αυτό προκύπτει από τα όμοια τρίγωνα ΖΜΚ και ΕΔΓ.

Πράγματι, από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΓΖ είναι όμοια και τα τμήματα ΖΜ και ΖΚ είναι αντίστοιχα ύψη τους, οπότε έχουμε: $\frac{ZM}{ZK} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{E\Delta}{\Gamma\Delta}$

Όμως, από το παραλληλόγραμμο ΑΒΔΕ έχουμε ότι $AB = \Delta E$, οπότε έχουμε: $\frac{ZM}{ZK} = \frac{E\Delta}{\Gamma\Delta}$.

Επίσης, $M\hat{Z}K = 180^0 - A\hat{\Theta}\Delta = E\hat{\Delta}\Theta = E\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε από την προηγούμενη ισότητα τα τρίγωνα ΖΜΚ και ΕΔΓ είναι όμοια. Επομένως, θα έχουμε και την ισότητα $Z\hat{K}M = \Delta\hat{\Gamma}E$.

Ασκήσεις για λύση

Ν45. Δίνεται ο θετικός ακέραιος $N = 2^n \cdot p$, όπου $n, p \in \mathbb{N}^*$ και ο p είναι πρώτος. Να προσδιορίσετε τον πρώτο αριθμό p, έτσι ώστε ο αριθμός N να ισούται με το άθροισμα των θετικών διαιρετών του που είναι μικρότεροι του N.

Ν46. Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους ν για τους οποίους ο αριθμός $\nu^2+3\nu+5$ είναι πολλαπλάσιο του 11. Υπάρχουν ακέραιοι ν για τους οποίους ο αριθμός $\nu^2+3\nu+5$ είναι πολλαπλάσιο του 121;

Γ61. Δίνεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^0$. Θεωρούμε τα σημεία Μ, Ρ στην πλευρά ΑΒ έτσι ώστε ΑΜ = ΒΡ και με διάταξη Α, Μ, Ρ, Β. Θεωρούμε σημείο Ε στο τμήμα ΓΜ και σημείο Ζ στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε τα σημεία Α, Ε, Ζ να είναι συνευθειακά και η ΑΖ να είναι κάθετη στη ΓΜ. Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
(α) $A\hat{Z}\Gamma = P\hat{Z}B$. (β) $\Delta\hat{E}Z = 45^0$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ
στα θέματα Γυμνασίου του διαγωνισμού
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

Βαρούχας Αλέξανδρος, Κεΐσογλου Στέφανος, Φερεντίνος Σπύρος

Η νοημοσύνη μας, δηλαδή η ικανότητά μας να μαθαίνουμε, να αντιλαμβανόμαστε αυτά που συμβαίνουν γύρω μας, να οργανώνουμε τη σκέψη μας και να επικοινωνούμε με το περιβάλλον διαθέτει ορισμένες πτυχές, οι οποίες μάλιστα σχετίζονται με συγκεκριμένες εγκεφαλικές λειτουργίες. Μία από τις πλέον σημαντικές πτυχές είναι η αριθμητική ικανότητα ή ικανότητα αριθμητικού συλλογισμού, όπως συνηθίζεται να αποκαλείται σήμερα.

Αριθμητική ικανότητα είναι η ικανότητα να χειριζόμαστε αριθμητικές ποσότητες και κυρίως να λύνουμε προβλήματα αριθμητικών ποσοτήτων.

Η συγκεκριμένη ικανότητα τώρα θα μπορούσε με τη σειρά της να διακριθεί σε μία σειρά ειδικές δεξιότητες του ατόμου. Ας δούμε μερικές με βάση τη διεθνή βιβλιογραφία:

1) Οι νοεροί υπολογισμοί δηλαδή οι υπολογισμοί χωρίς χαρτί και μολύβι.

2) Η ικανότητα εκτίμησης. Η ικανότητα αυτή είναι πολύ σημαντική στην καθημερινότητα των πολιτών, καθώς συχνά είναι υποχρεωμένοι να πάρουν κάποια απόφαση χωρίς να μπορούν να υπολογίσουν ακριβώς μία ποσότητα.

3) Η ικανότητα του ατόμου να λύνει προβλήματα αποτελεί την πλέον σημαντική πτυχή του αριθμητικού συλλογισμού.

4) Η ικανότητα να βρίσκει κάποιος μία λογική συσχέτιση μεταξύ μίας σειράς αριθμών είναι πολύ σημαντική. Ειδική περίπτωση εδώ είναι η εύρεση ενός μοτίβου, ενός κανόνα ο οποίος χαρακτηρίζει μία σειρά αριθμών.

5) Μία εξίσου σημαντική με τις άλλες είναι η ικανότητα ερμηνείας πινάκων δεδομένων και διαγραμμάτων καθώς καθημερινά ο πολίτης είναι αναγκασμένος να μελετά πίνακες και ερμηνεύει διαγράμματα.

Αυτές τις ιδιαίτερες πτυχές λαμβάνει υπόψιν ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας σε όλο το φάσμα της πρωτοβάθμιας και της Γυμνασιακής εκπαίδευσης.

Κάθε χρόνο τα θέματα που εξετάζουν την αριθμητική ικανότητα είναι κυρίαρχα σε όλο το φάσμα των θεμάτων του διαγωνισμού, πάντα συνδυασμένα και με άλλες ικανότητες όπως είναι η συνδυαστική ικανότητα, η ικανότητα μετάφρασης και η επαγωγική ικανότητα.
Στη συνέχεια παραθέτουμε μία σειρά θεμάτων του διαγωνισμού ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ που εκτιμούμε ότι είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικά για το πως ο διαγωνισμός αυτός υποστηρίζει την αριθμητική ικανότητα στο Γυμνάσιο.

Α΄ Γυμνασίου

1) Τα $\frac{2}{5}$ των θεατών μιας θεατρικής παράστασης είναι παιδιά.

Την παράσταση παρακολουθούν συνολικά 150 άτομα.

Πόσοι από τους θεατές δεν είναι παιδιά;

Α) 40 **Β)** 90 **Γ)** 80 **Δ)** 70 **Ε)** 100

2) Το τελικό αποτέλεσμα των πράξεων $(314 \times 28) + (314 \times 22) + (50 \times 314)$ είναι ο αριθμός:

Α) 3.140 **Β)** 31.400 **Γ)** 341.000 **Δ)** 341.100 **Ε)** τίποτε από τα προηγούμενα

3) Ανοίγεις ένα βιβλίο και παρατηρείς ότι οι δύο αριθμοί των σελίδων που έχεις μπροστά σου έχουν άθροισμα 49. Τι αριθμό έχει η επόμενη σελίδα;

Α) 50
Β) 48
Γ) 24
Δ) 25
Ε) 26

Β΄ Γυμνασίου

1) Ποιόν αριθμό θα πρέπει να τοποθετήσεις στις τελείες για να είναι σωστή η ισότητα:
330-33 = …….. × 33

Α) 11 **Β)** 10 **Γ)** 9 **Δ)** 8 **Ε)** δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε

2) Ποιός από τους αριθμούς 197, 398, 932, 1293, 5476 μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο;

Α) 197 **Β)** 398 **Γ)** 932 **Δ)** 1293 **Ε)** 5476

3) Το άθροισμα των 100 πρώτων θετικών ακεραίων, δηλαδή το 1+2+3+4+…….+99+100, είναι ίσο με 5.050. Με ποιον από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσο το άθροισμα των 200 πρώτων θετικών ακεραίων;

Α) 10.100 **Β)** 15.050 **Γ)** 15.150 **Δ)** 20.100 **Ε)** 21.500

Γ΄ Γυμνασίου

1) Πόσοι ακέραιοι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι του 100 αλλά μικρότεροι του 200;

Α) 100 **Β)** 99 **Γ)** 98 **Δ)** 101 **Ε)** 200

2) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι πιο κοντά στο αποτέλεσμα της: $\sqrt{24\times 10^8}$

Α) 50.000 **Β)** 40.000 **Γ)** 500.000 **Δ)** 150.000 **Ε)** 240.000

3) Ο Γιώργος καθημερινά πηγαίνει στο σχολείο του με το ποδήλατό του. Το σχολείο απέχει από το σπίτι του 2 χιλιόμετρα. Ποιος από τους παρακάτω είναι ο πιθανότερος χρόνος που κάνει για να φτάσει στο σχολείο;

Α) 5 δευτερόλεπτα **Β)** 1 λεπτό **Γ)** 8 λεπτά **Δ)** 35 λεπτά **Ε)** 60 λεπτά

Αναλυτικές απαντήσεις Α΄ Γυμνασίου

Ερώτηση 1

Παρατηρώ: Γνωρίζω το μέρος (κλάσμα) των 150 ατόμων που είναι παιδιά.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Εργάζομαι με το $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ των ατόμων, δηλαδή με τα $\frac{3}{5}\times 150=90$

Εναλλακτικά: Μπορώ να υπολογίσω πόσα είναι τα παιδιά, δηλαδή να υπολογίσω το $\frac{2}{5}\times 150=60$ οπότε οι μεγάλοι θα είναι 150–60=90.

Απάντηση: Β)

Ερώτηση 2

Παρατηρώ: Σε όλα τα γινόμενα υπάρχει ο αριθμός 314.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Η επιμεριστική ιδιότητα όταν εφαρμόζεται δίνει παραστάσεις όπως η δοσμένη, δηλαδή η 314×(28+22+50)=314×100=31.400

Απάντηση: Β)

Παρατήρηση: Η εκτέλεση των τριών πολλαπλασιασμών και η πρόσθεση των αποτελεσμάτων είναι επίπονη, χρονοβόρα και εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση που δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάποια ιδιότητα ή κάποιο τέχνασμα. Παράδειγμα τεχνάσματος έχουμε και στην περίπτωση: 998×24 όπου υπολογίζουμε το 1.000×24 και αφαιρούμε 48.

Ερώτηση 3

Παρατηρώ: Το άθροισμα δύο διαδοχικών ακεραίων είναι 49.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Αναζητώ δύο διαδοχικούς ακέραιους με άθροισμα 49. Αυτοί θα πρέπει να αναζητηθούν κοντά στο μισό του 49, οπότε η μία σελίδα είναι η 24 και η άλλη η 25 και η επόμενη σελίδα θα είναι η 26.

Απάντηση: Ε)

Αναλυτικές απαντήσεις Β΄ Γυμνασίου

Ερώτηση 1

Παρατηρώ: Όλοι οι αριθμοί περιέχουν το 33.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Εξετάζω τη σχέση που έχει ο αριθμός 330 με το 33 και στη συνέχεια θα προσπαθήσω να την αξιοποιήσω.

330–33=10×33-33 = 9×33. Αυτό σημαίνει ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9.

Εναλλακτικά: *Προφανώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον ζητούμενο αριθμός κάνοντας πράξεις. Συγκεκριμένα θα έπρεπε να υπολογίσουμε το 330-33=297 και στη συνέχεια να διαιρέσουμε το 297 με το 33.*

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε μέσω της παρατηρητικότητάς μας και τις απλές ιδιότητες των πράξεων να αποφεύγουμε τις επίπονες και χρονοβόρες πράξεις.

Απάντηση: Γ)

Ερώτηση 2

Παρατηρώ: Υπάρχουν κάποιοι αριθμοί που μάλλον δεν μπορεί να είναι τέλεια τετράγωνα.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Τα τέλεια τετράγωνα λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9. Μόνο μία από τις προτεινόμενες απαντήσεις λήγει σε ένα από τους παραπάνω αριθμούς, ο αριθμός 5476.

Ερώτηση 3

Παρατηρώ: Μου δίνεται το άθροισμα των 100 πρώτων θετικών ακεραίων και με βάση αυτό θα πρέπει να υπολογίσω και το άθροισμα των 200 πρώτων θετικών αριθμών.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Εξετάζω πως το άθροισμα 1+2+3+4+…….+99+100 εμφανίζεται μέσα στο άθροισμα 101+102+103+ ……. +200.

Το άθροισμα 101+102+103+ ……. +200=(100+1)+(100+2)+(100+3)+…. +(100+100). Έτσι είναι φανερό ότι επαναλαμβάνεται και πάλι το άθροισμα 1+2+3+4+…….+99+100 και επιπλέον 100 εκατοντάδες.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι ίσο με 2×5.050+100×100=10.100+10.000=20.100

Εναλλακτικά: *Θα μπορούσε κάποιος να αξιοποιήσει το γεγονός ότι στο ζητούμενο άθροισμα 1+2+3+ ….. +198+199+200 έχουμε 100 ζεύγη αριθμών που έχουν άθροισμα 201 αφού 1+200=201, 2+199=201, 3+198=201 ………..κ.λ.π οπότε 100×201=20.100*

Απάντηση: Δ)

Αναλυτικές απαντήσεις Γ΄ Γυμνασίου

Ερώτηση 1

Παρατηρώ: Αναζητώ το πλήθος διαδοχικών αριθμών που βρίσκονται σε κάποιο διάστημα.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Λύνω ένα απλούστερο πρόβλημα π.χ βρίσκω τους ακέραιους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 10 αλλά μικρότεροι του 20. Αυτοί είναι 9, δηλαδή ένας λιγότερος από τη διαφορά 20–10. Κάνοντας αναγωγή στο διάστημα 100 έως 200 συμπεραίνω ότι το πλήθος των αριθμών που μου ζητούν είναι κατά 1 μικρότερο από της διαφορά 200–100

Απάντηση: Β)

Ερώτηση 2

Παρατηρώ: Έχω τετραγωνική ρίζα ενός γινομένου δύο αριθμών.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Εκτιμώ ή υπολογίζω ακριβώς τις ρίζες των δύο αριθμών του υπόριζου. Επιπλέον εξετάζω μία προς μία τις τιμές των απαντήσεων.

Η $\sqrt{24}$ βρίσκεται κοντά στο 5 και είναι λίγο μικρότερή του. Η $\sqrt{10^8}$ είναι ίση με 10.000 και επομένως ο αριθμός 50.000 είναι περισσότερο κοντά στην ποσότητα $\sqrt{24\times10^8}$ από οποιονδήποτε άλλον αριθμό των απαντήσεων.

Απάντηση: Α)

Ερώτηση 3

Παρατηρώ: Πρόκειται περισσότερο για εκτίμηση του χρόνου παρά για ακριβή υπολογισμό.

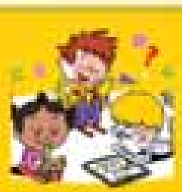
Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Καθώς οι αριθμοί των απαντήσεων συσχετίζονται εύκολα με την απόσταση, θα εκτιμήσω ή και θα υπολογίσω την ταχύτητα του ποδηλάτου σε κάθε περίπτωση.

Για την απάντηση Α) βλέπω ότι είναι εντελώς αφύσικο σε 1 δευτερόλεπτο να διανύσει 2km.

Για την απάντηση Β) σκέπτομαι ότι αφού σε 1 λεπτό θα διανύσει 2km άρα σε 60 λεπτά θα διανύσει 120km, δηλαδή θα έχει την αφύσικη ταχύτητα για ποδήλατο 120km/h.

Οι απαντήσεις Δ) και Ε) αντιστοιχούν σε ταχύτητες ανθρώπου όταν βαδίζει κανονικά (η Δ) ή όταν προχωρά ιδιαίτερα αργά (η Ε).

Απάντηση: Γ)



Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Απαντήσεις στους γρίφους του τεύχους 126

Προσανατολισμός

1. Αριστερά, 2. Το νότο, 3. Νότια 4. Πίσω δεξιά, 5. Μπροστά δεξιά
6. Μετά.

Το δέντρο των Χριστουγέννων

Ο Χρίστος $27=3^3$ και η Βάσω $25=5^2$ Σύνολο 52 στολίδια.

Ο Κώστας και η Βάσω

Λάθος το 1/3 είναι ίσο με 0,333333… όμως το 0,666666…=2/3 , το 0,999999… =1 ενώ το 0,111111…=1/9.

Ο 5ψήφιος

Το γινόμενο είναι μηδέν γιατί ο 5ψήφιος (1,2,3,4,0) θα περιέχει και το μηδέν.

Το Τρίγωνο

Στις κορυφές 1, 2, 3 και στις πλευρές 9,5 – 8,4 – 6,7 έτσι (1+9+5+2=2+8+4+3=3+6+7+1=17)

Ποιος χρόνος

Όλα τα έτη αυτού του αιώνα περιέχουν το μηδέν άρα το γινόμενο των ψηφίων τους είναι μηδέν.

Μάντεψε τρείς διαδοχικούς αριθμούς

Από τον διψήφιο αφαιρέστε 6 και θα έχετε τον μεσαίο αριθμό από τους ζητούμενους.

Μαθηματικό σταυρόλεξο

1	2	3	4	5	6	
#	1	0	8	9	#	1
1	6	1	8	#	0	2
2	0	1	#	8	0	3
3	0	**Π**	**Π**	**Χ**	#	4
2	0	0	4	#	3	5
1	0	2	3	#	2	6