ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

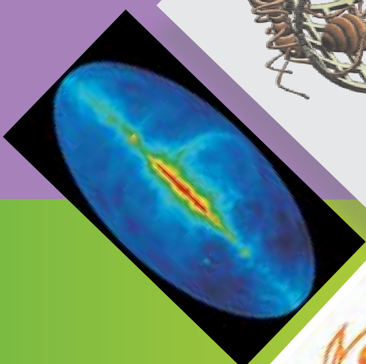
116

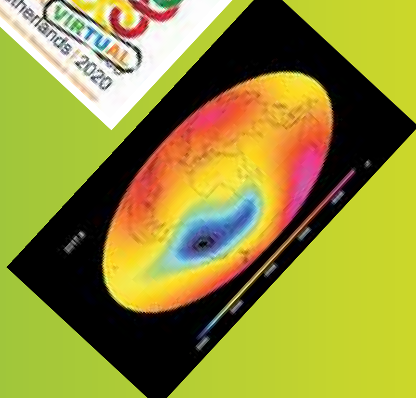
ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

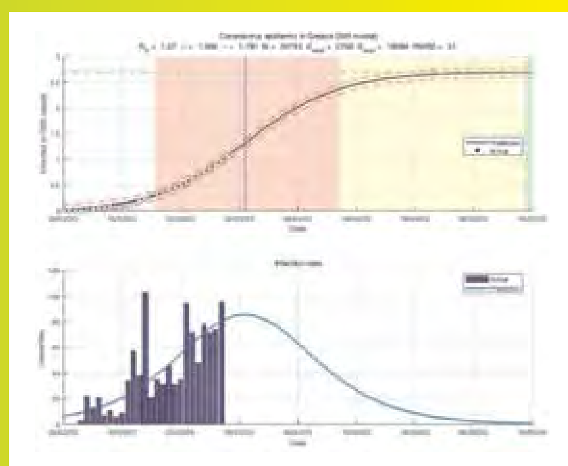
Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΙΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2020 ευρώ 3,5







ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 116 - Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2020 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στην πρόσφατη επικαιρότητα των Μαθηματικών

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	9 Νοεμβρίου	2019
Ευκλείδης:	18 Ιανουαρίου	2020
Αρχιμήδης:	22 Φεβρουαρίου	2020

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
ευχόμαστε ότι το καλύτερο,
σε προσπάθειες, προσδοκίες, όνειρα ...
μένουμε με επιμονή στη ψυχολογική στήριξη,
και στην καλή διαχείριση της μαθησιακής διαδικασίας
από όλους ...
δίπλα στους μαθητές και ειδικά σ' αυτούς που δίνουν
πανελλήνιες εξετάσεις ...
είμαστε συγκρατημένα αισιόδοξοι
και περιμένουμε η νέα σχολική χρονιά να είναι
πιο ξέγνοιαστη και πιο δημιουργική.

Υ.Γ. 1) Η **χαρά** μας είναι πολύ μεγάλη για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις πολλές **εργασίες** συναδέλφων και μαθητών ,από όλη την Ελλάδα και τους ευχαριστούμε και από αυτό το σημείο. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις περισσότερες. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες.

2) Τα πολλά απρόοπτα, η επικαιρότητα και ο επανασχεδιασμός του τεύχους, μαζί με τις **δυσκολίες** της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται αδύνατη ...

Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

καλό καλοκαίρι

"Λέει τον καημό του,
στον ίσκιο του, πιο πολύ
παρά στους περαστικούς ..."

ΕΓΝΟΙΑ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΓΝΟΙΑ [1984]
Βάσκο Πόπα [1922 - 1991]
Σέρβος ποιητής

Η επιτροπή σύνταξης του περιοδικού

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

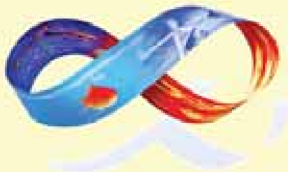
Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δε επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.** Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος



Η λωρίδα του Möbius

Στάμη Τσικοπούλου

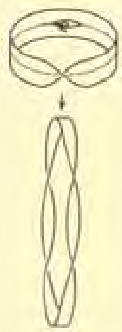
Η λωρίδα ή ταινία ή κορδέλα του Μέμπιους (Möbius strip), είναι μια επιφάνεια με μια μόνο πλευρά και μία μόνο άκρη. Οφείλει την ονομασία της στον Γερμανό μαθηματικό Αύγουστο Φερδινάνδο Μέμπιους. Δεν ήταν όμως ο Μέμπιους ο μόνος που ανακάλυψε, τον Σεπτέμβριο του **1858**, το εν λόγω σχήμα. Την ίδια χρονιά, τον Ιούλιο του **1858**, ένας ακόμα Γερμανός μαθηματικός, ο **Γιόχαν Μπενεντίκτ Λίστινγκ** ανακάλυψε το μυστηριώδες σχήμα της και την περιέγραψε ανεξάρτητα από τον **Μέμπιους**. Η λωρίδα είναι γνωστή με το όνομα του Μέμπιους επειδή εκείνος ασχολήθηκε επισταμένως μαζί της, εξετάζοντας τις ιδιότητές της.

August Ferdinand Möbius
(1790–1868)

Για να φτιάξουμε μια λωρίδα Μέμπιους κόβουμε μια μακρόστενη λωρίδα χαρτιού, γυρίζουμε ανάποδα τη μια άκρη της (στροφή κατά 180^o) και την κολλάμε με την άλλη. Αυτό που προκύπτει είναι ένας βρόχος σε σχήμα «8», δίχως αρχή και τέλος, δίχως συγκεκριμένη κατεύθυνση και φορά, που αν ακολουθήσουμε την επιφάνειά του, ενώ τη μια στιγμή νομίζουμε ότι βρισκόμαστε στην εξωτερική πλευρά, αυτομάτως νοιώθουμε πως έχουμε περάσει στην άλλη.

Η λωρίδα Μέμπιους είναι ένα ιδιότυπο μαθηματικό αντικείμενο με **ασυνήθιστες τοπολογικές ιδιότητες,** τις οποίες μπορούμε να διαπιστώσουμε πολύ εύκολα :

- Έχει **μια μόνο** πλευρά τη στιγμή που κάθε επίπεδο γεωμετρικό σχήμα (κυρτό ή μη κυρτό) έχει δύο και μια μόνο άκρη (ακμή, όριο). Αν την διατρέξουμε με το δάκτυλό μας, ή μ ένα μολύβι, τότε θα συνειδητοποιήσουμε ότι διατρέχουμε τόσο το εξωτερικό όσο και το εσωτερικό της, επιστρέφοντας τελικά εκεί από όπου αρχίσαμε. Το ίδιο θα συμβεί και αν διατρέξουμε μιαν ακμή της.
- Αν **κόψουμε** μια λωρίδα του Μέμπιους κατά μήκος της, παράλληλα με την ακμή της, δεν παίρνουμε, όπως είναι αναμενόμενο δύο λωρίδες, **αλλά μία** μακριά λωρίδα που έχει υποστεί δύο φορές μισή στροφή (διπλ. εικόνα). Αν κόψουμε τη νέα λωρίδα κατά μήκος του επιμήκους αξονά της, έχοντας δει το προηγούμενο αποτέλεσμα, αναμένουμε να πάρουμε μια ακόμα μεγαλύτερη λωρίδα, παίρνουμε όμως δύο, μια μεγαλύτερη και μια μικρότερη, την μία μέσα στην άλλη, όπως δύο διαδοχικοί κρίκοι αλυσίδας. Αν την κόψουμε κατά μήκος στα τρία, παίρνουμε μια μακρυά ταινία που έχει υποστεί δύο πλήρεις στροφές (360^0).



Η ταινία πρωτοανακαλύφθηκε το 1858;

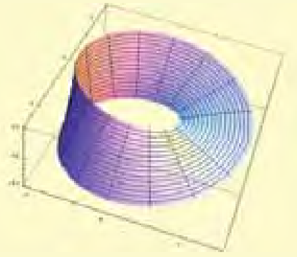
Η διπλανή εικόνα είναι το κεντρικό μέρος ενός μεγάλου μωσαϊκού δαπέδου του 200-250 περίπου π.Χ., από μια ρωμαϊκή βίλα στο Sentinum της Ιταλίας. Ο **Αιών**, ο θεός της αιωνιότητας, στέκεται στο εσωτερικό μιας ουράνιας σφαίρας διακοσμημένης με τα σύμβολα του ζωδιακού κύκλου, μεταξύ δύο δέντρων ενός με φύλλα και ενός χωρίς φύλλα (το καλοκαίρι και ο χειμώνας αντίστοιχα). Η θεά Μητέρα Γη, **Tellus** (το Ρωμαϊκό αντίστοιχο της Γαίας) κάθεται μπροστά του με τα τέσσερα παιδιά της, τα οποία πιθανότατα εκπροσωπούν τις τέσσερις εποχές. Στο αρχαίο ρωμαϊκό μωσαϊκό απεικονίζεται μια δομή παρόμοια με την λωρίδα του Μέμπιους. [1]

Οι μαθηματικοί και οι καλλιτέχνες, που χρησιμοποιούν υπολογιστές, καταφεύγουν συχνά στις παραμετρικές αναπαραστάσεις, για να περιγράψουν εκλεπτισμένα γεωμετρικά σχήματα επειδή ορισμένες γεωμετρικές μορφές περιγράφονται εξαιρετικά δύσκολα με μια μόνο εξίσωση, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με τον κύκλο. Από τις παρακάτω **παραμετρικές εξισώσεις** [1], δημιουργείται μια λωρίδα Μέμπιους πλάτους 1 και ακτίνας 1, με κέντρο το (0,0,0):

$$x(u,\upsilon)=\left(1+\frac{\upsilon}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u$$

$$y(u,\upsilon)=\left(1+\frac{\upsilon}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u$$

$$z(u,\upsilon)=\frac{\upsilon}{2}\sin\frac{u}{2},\ 0<u\le 2\pi,\ -1<\upsilon<1$$



Εφαρμογές της λωρίδας του Μέμπιους

Αυτή η τόσο απλή, κλειστή λωρίδα, που δείχνει ότι δύο επιφάνειες μπορούν να μετατραπούν σε μία ενιαία, αναστατώνει τη δημιουργική σκέψη και τη φαντασία. Στον ενάμιση αιώνα από την ανακάλυψή της, η “ταινία του Μέμπιους” άνοιξε καινούργιους δρόμους στα σύγχρονα Μαθηματικά, στη βιομηχανία, στη νανοτεχνολογία καθώς και στην Αστρονομία (έρευνα σχετικά με τη δομή του σύμπαντος). Γονιμοποίησε χρήσιμες εφαρμογές, κέντρισε τη δημιουργικότητα καλλιτεχνών, ακόμη και παραγωγών ταινιών επιστημονικής φαντασίας.

Η πιο αναγνωρίσιμη μορφή της ταινίας του Μέμπιους έχει γίνει το παγκόσμιο **σύμβολο της ανακύκλωσης.** Με το σχέδιο αυτό, ο Gary Anderson, κέρδισε το 1979 το βραβείο στον διαγωνισμό για το σχέδιο-σήμα που θα συμβόλιζε τη διαδικασία της ανακύκλωσης που οράνωσε μια εταιρεία ανακύκλωσης. Ο ίδιος ο Gary Anderson σε μια συνέντευξή του το Μάιο του 1999 στο εμπορικό περιοδικό Resource Recycling είπε:

"*Το σύμβολο σχεδιάστηκε ως μια ταινία Mobius, για να συμβολίσει τη συνέχεια μέσα σε μια πεπερασμένη οντότητα. Χρησιμοποίησα τα βέλη για να δώσω κατεύθυνση στο σύμβολο. Το οραματίστηκα με την άκρη του τριγώνου στο κάτω μέρος. Ήθελα να συνδυάζει τη δυναμικότητα (τα πράγματα αλλάζουν) αλλά και τη στατικότητα (είναι μια στατική ισορροπία, κάτι το μόνιμο). Τα βέλη, όσο ανοιχτά κι αν είναι, επανέρχονται πίσω στη στατική πλευρά*".

Η λωρίδα του Μέμπιους έχει γίνει αναγνωρίσιμο εικαστικό στοιχείο σε πολλά κοσμήματα (δακτυλίδια, βραχιόλια), μαντήλια λαιμού ή στις δυο ενωμένες καρδούλες που τα παιδιά φτιάχνουν συχνά κόβοντας στη μέση δύο χάρτινες ταινίες του Μέμπιους που τις έχουν προηγουμένως κολήσει μεταξύ τους.

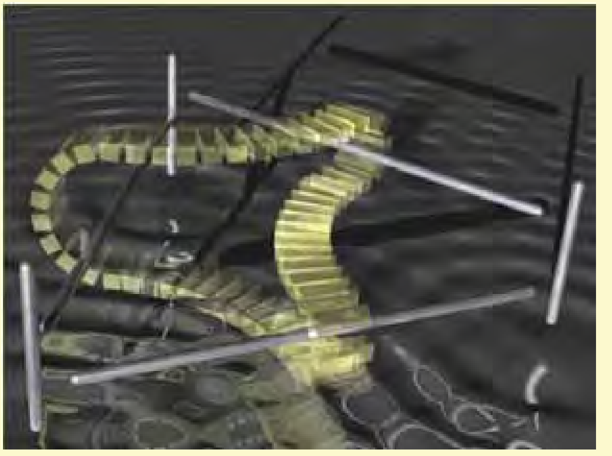
Υπάρχει μια υπόθεση ότι η έλικα DNA, η οποία μεταβάλλεται συνεχώς, έχει επίσης ένα κομμάτι μιας λωρίδας Mobius και επομένως ο γενετικός κώδικας είναι δύσκολο να διαβαστεί και να αποκρυπτογραφηθεί.

Τεχνολογικές εφαρμογές της λωρίδας

Η ταινία Μέμπιους, ως αποτέλεσμα της μελέτης των ιδιοτήτων μιας μονόπλευρης επιφάνειας βρήκε σημαντικές τεχνικές εφαρμογές οι οποίες αποτέλεσαν αφετηρία για δεκάδες τεχνολογικές ευρυσιτεχνίες. Σε αυτές περιλαμβάνονται εφευρέσεις που χρησιμοποιούνται σε παιδικά παζλ και παιχνίδια (ηλεκτρικό τρενάκι), λούνα παρκ, αλυσοπρίονα, υπεραγωγοί, ταινίες γραφομηχανής ακόμα και σε κυκλικό επιταχυντή σωματιδίων.

Παραθέτουμε στη συνέχεια ορισμένα παραδείγματα [1] τεχνολογικών καινοτομιών όπως:

- Ιμάντες μεταφοράς βιομηχανικών προϊόντων, που φθείρονται πιο αργά από τους συμβατικούς, αφού υπόκεινται στη μισή από την αναμενόμενη φθορά.
- Φιλμ-λωρίδα Μέμπιους που ηχογραφούσε ήχο και στις δύο πλευρές, για το οποίο δόθηκε δίπλωμα ευρεσιτεχνίας στον Λι ντε Φόρεστ το 1923. Παρόμοια ιδέα εφαρμόστηκε αργότερα στις μαγνητοταινίες και στους εκτυπωτές Η/Υ.
- Ταινίες στίλβωσης για φινίρισμα και στίλβωση των επιφανειών.
- Ταινίες λειαντικού υλικού (π.χ ταινίες λειάνσεως ξύλου και μετάλου)



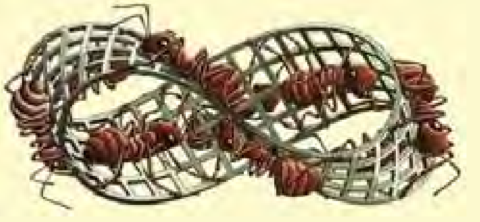
Möbius Conveyor Belt (ιμάντας μεταφοράς)

Πριν από μερικές δεκαετίες, η ασυνήθιστη αυτή ταινία βρήκε μια νέα χρήση. Ως γνωστόν, το συνηθισμένο ελατήριο λειτουργεί πάντα προς την αντίθετη κατεύθυνση, όταν για παράδειγμα το πιέζουμε προς τα κάτω εκτινάζεται προς τα πάνω. Η χρήση της λωρίδας του Mobius επέτρεψε να δημιουργηθεί ένα ελατήριο που δεν αλλάζει την κατεύθυνση της λειτουργίας του. Ο μηχανισμός αυτός βρίσκει εφαρμογή στη **συσκευή του σταθεροποιητή διεύθυνσης τιμονιού**, παρέχοντας μια επιστροφή στην αρχική του θέση.[3]

Η λωρίδα του Μέμπιους στην τέχνη

Ο Ολλανδός καλλιτέχνης **Μάουριτς Κορνέλις Έσερ** γοητεύθηκε από την ταινία Μέμπιους και βάσισε πάνω σ' αυτή διάσημες λιθογραφίες του. Πιο γνωστή είναι η Λωρίδα του Μέμπιους ΙΙ (Κόκκινα μυρμήγκια) (ξυλογραφία σε τρία χρώματα, 1963). Ο **Έσσερ** αφού μελέτησε τοπολογία και έμαθε πρόσθετες έννοιες στα μαθηματικά από τον Βρετανό μαθηματικό **Ρότζερ Πένροουζ**, δημιούργησε τις λιθογραφίες του που δεν είναι παρά μια παραμετρική γραφική παράσταση της λωρίδας του Μέμπιους. Τα έργα αυτά επέδειξαν την ικανότητα του Έσερ να ενσωματώσει τα μαθηματικά στην τέχνη.Αν ένα μυρμήγκι περπατούσε κατά μήκος της λωρίδας, θα επέστρεφε στο σημείο από όπου ξεκίνησε έχοντας διασχίσει και τις δύο πλευρές της χωρίς ποτέ να διασχίσει μια ακμή της. Είπε το μυρμήγκι [1]:

Ολοένα γυρνάμε από εδώ και από εκεί
και το μόνο που έχουμε βρει
είναι πως η άλλη πλευρά δεν είναι εκεί.



Στη λογοτεχνία

Ο συγγραφέας δημοφιλών μυθιστορημάτων επιστημονικής φαντασίας **Αρθουρ Κλαρκ** άντλησε έμπνευση από το Γερμανό μαθηματικό στο έργο του ″Το Τείχος του Σκότους″, όπου το Σύμπαν εμφανίζεται ως γιγαντιαία ταινία Μέμπιους και ο κύριος χαρακτήρας του έργου ταξιδεύει γύρω από έναν πλανήτη που είναι κυρτός με τη μορφή μιας ταινίας Μέμπιους.

Το επιστημονικό μυθιστόρημα του Αμερικανού αστρονόμου και συγγραφέα επιστημονικής φαντασίας **Armin Joseph Deutsch**, ″Ένα τραίνο που το έλεγαν **Mobius**″ (1950), είναι μια ιστορία που βασίζεται στα Μαθηματικά και ιδιαίτερα στην τοπολογία.

Στον κινηματογράφο

Δύο κινηματογραφικές ταινίες, έχουν αναφορές στην λωρίδα του Μέμπιους ″Ο κύκλος του **Möbius**″ (Éric Rochant – 2013) και ″**Möbius**″ (Gustavo Mosquera – 1996). Στην ταινία του Mosquera ένας υπόγειος σιδηρόδρομος στο Μπουένος Άιρες έχει γιγαντωθεί τόσο πολύ, μετά από συνεχείς προσθήκες, που κανείς πλέον, ούτε οι μηχανικοί των τρένων, δεν μπορεί να απεικονίσει. Μια μέρα ένα τρένο με 30 επιβάτες εξαφανίζεται και παρότι ο κόσμος εξακολουθεί να το ακούει να κινείται στις ράγες, δεν μπορεί ποτέ να το δει. Και εδώ εμφανίζεται η λωρίδα του Möbius. Το σενάριο εμφανίζει πολλές ομοιότητες με την ιστορία του Deutsch, αλλά αποτελεί **μια αλληγορία** για τους τριάντα χιλιάδες που εξαφανίστηκαν κατά τη διάρκεια των δικτατοριών στην Αργεντινή.

Στη γλυπτική

Πολλοί καλλιτέχνες δημιούργησαν πληθώρα έργων εμπνεόμενοι από την ταινία του Μέμπιους. Ένας από αυτούς ο John Robison (1935–2007), ο οποίος δημιούργησε μια ολόκληρη σειρά έργων με τίτλο "**Immortality** (Αθανασία), διηγείται:

" Όταν έγινα παππούς, άρχισα να σκέφτομαι να φτιάξω ένα γλυπτό που θα αιχμαλωτίσει το πέρασμα της βασικής φλόγας της ύπαρξης μέσα σε μια οικογένεια, και χρειαζόμουν ένα σύμβολο. Πειραματιζόμενος με ένα κομμάτι σωλήνα από χαλκό σύντομα οδηγήθηκα σε έναν κόμπο με ***τρεις βρόχους****. Εδώ ήταν που οι τρεις γενιές εκφράστηκαν ως βρόχοι. Πώς θα μπορούσα όμως να κάνω την επιφάνεια να κινείται μέσα στο χρόνο και να γίνεται άπειρη; Η απάντηση μου ήρθε όταν ένωσα 100 κουτιά από σπίρτα που τα κόλλησα ανά τρία και αφού τα έστριψα προς τα δεξιά τα ένωσα φτιάχνοντας έναν τρίδιπλο κόμπο. Ήταν μια μαγική στιγμή όταν συνειδητοποίησα ότι δημιούργησα την αιωνιότητα (ETERNITY). Πιστεύω ότι η Αθανασία αποτελείται από τις μνήμες μας του παρελθόντος, καθώς και από αυτές που αφήνουμε πίσω μας. Είδα αυτή τη συμβολική Γλυπτική ως ένα συνεχές ταξίδι ανάμεσα στις γενιές, αλλά επίσης και σαν έναν πάπυρο πάνω στον οποίο αποτυπώνονται όλες οι εμπειρίες (DNA) της ζωής."*

(Από www.bradshawfoundation.com immortality)

JOHN ROBINSON : **Immortality** (1982)
Γλυπτό από μπρούτζο ύψους 2μ.
Centre for the Popularisation of Mathematics University of Wales, Bangor

Η σχέση της λωρίδας Möbius με τη μουσική

Αν ταξιδεύαμε μέσα σε ένα σύμπαν Möbius, θα επιστρέφαμε στο σημείο από το οποίο ξεκινήσαμε με τη δεξιά και αριστερά πλευρά μας αντεστραμμένες. Αν κάναμε έναν ακόμα γύρο της λωρίδας, όταν επιστρέφαμε στο σημείο εκκίνησης θα είχαμε πάρει πάλι τον αρχικό προσανατολισμό μας. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δημιουργήσουμε μουσική Μέμπιους. Η μουσική παίζεται κανονικά την πρώτη φορά. Όταν ο μουσικός φτάσει στο σημείο απ' όπου ξεκίνησε, παίζει πάλι τη μουσική, αλλά με κάποιες παραλλαγές. Για παράδειγμα, τη δεύτερη φορά η παρτιτούρα μπορεί να είναι κατοπτρική της πρώτης, ή να παίζεται ανάποδα. [2]

Η "Μουσική Προσφορά" (1747) του Μπαχ περιέχει ένα κλασσικό παράδειγμα "καρκινικού κανόνα": δύο μουσικοί παίζουν την ίδια μελωδία ταυτόχρονα, αλλά ο ένας την παίζει ανάποδα, από το τέλος προς την αρχή. Ο Ρωσο – αμερικανός συνθέτης και γλωσσολόγος **Νίκολας Σλονίμσκι**, εμπνεύστηκε άμεσα από τη λωρίδα του Μέμπιους. Το έργο "Möbius Striptease" εκτελέστηκε για πρώτη φορά από δυο τραγουδιστές και έναν πιανίστα το 1965 στο Λος Άντζελες.

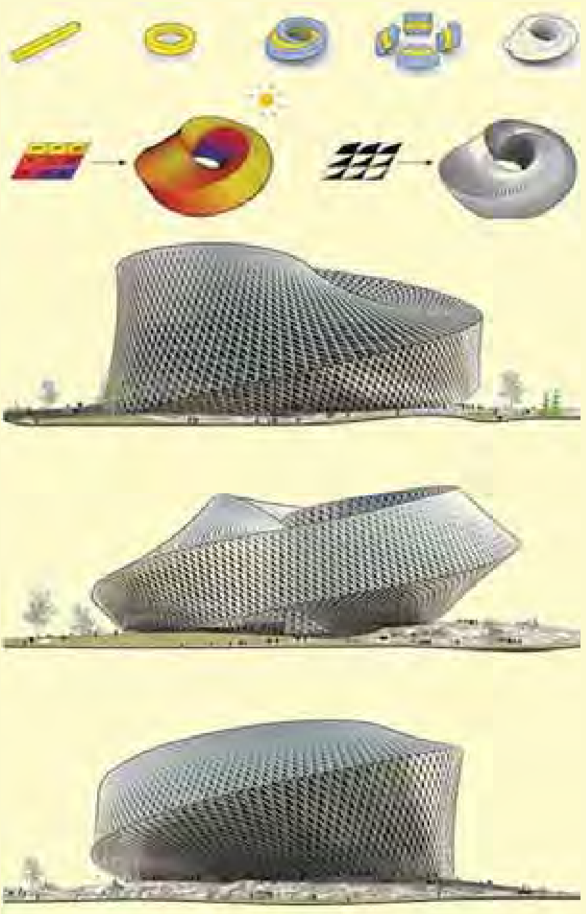
Η δυναμική της λωρίδας Mobius στην αρχιτεκτονική και τη διακόσμηση

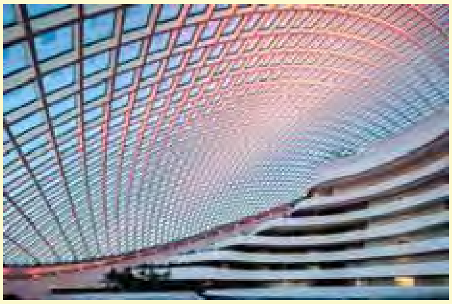
Τα τελευταία χρόνια τα υπολογιστικά εργαλεία έχουν εισάγει καινοτόμες προτάσεις μορφογένεσης δημιουργώντας επανάσταση στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό, π.χ. παραμετρικός, αλγοριθμικός σχεδιασμός, και τις ψηφιακές κατασκευές χωρίς ωστόσο να υποβαθμίζεται ο ρόλος του αρχιτέκτονα. Ενδιαφέρον στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό παρουσιάζει η λωρίδα Mobius, της οποίας οι δυνατότητες ανάδειξης ως αρχιτεκτονική μορφή μπορούν να απεικονιστούν και να διερευνηθούν με τη βοήθεια ψηφιακών τεχνολογιών. [4]

Η λωρίδα Mobius αποτελεί πηγή έμπνευσης και γοητείας για τους σχεδιαστές, καθώς στοιχεία του εσωτερικού χώρου, π.χ. σκάλες αλλά και χρηστικά αντικείμενα, έπιπλα, φωτιστικά αξιοποιούν το παράδοξο της λωρίδας. Στο Mobius House (διπλανή εικόνα) ο Antony Gibbon διερευνά τη χωρίς εσωτερική και εξωτερική πλευρά λωρίδα και τις χωρικές συνέπειες της εφαρμογής της, στο μπετονένιο κέλυφος της δομής.

Η εξαιρετικά όμορφη αυτή επιφάνεια δίνει το παρόν σε μία ακόμη εφαρμογή, στη μόδα με τη μορφή ενός ενδύματος ή ενός παπουτσιού. Το παπούτσι Mobius του αρχιτέκτονα Rem D. Koolhaas, είναι φτιαγμένο από μία μόνο λωρίδα που διαμορφώνει τη σόλα, το τακούνι, το πέλμα και το πάνω μέρος του παπουτσιού και είναι εμπνευσμένο από την καρέκλα Barcelona του Mies Van Der Rohe. [4]

Η λωρίδα Mobius μπορεί να αποτελέσει **περίβλημα δομής** για πολλαπλές χρήσεις. Πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι **η Νέα Εθνική Βιβλιοθήκη** του **Καζακστάν** στην πρωτεύουσα **του Αστάνα** [3]. Το κτίριο, συνολικής έκτασης περίπου 33.000 m2, σχεδιάστηκε ως συνεχής κυκλοφορία σε λωρίδα Möbius και είναι το αποτέλεσμα δύο αλληλο-συνδεόμενων δομών: του κύκλου και της σπείρας.





Σπίτι χωρίς αρχή ή τέλος από ... τρισδιάστατο εκτυπωτή

Ο Ολλανδός αρχιτέκτονας, Janjaap Ruijssenaars της Αρχιτεκτονικής Σύμπαντος του **Πανεπιστημίου του Άμστερνταμ** σχεδίασε ένα **σπίτι** "χωρίς αρχή ή τέλος" που θα κτιστεί χρησιμοποιώντας τον μεγαλύτερο τρισδιάστατο εκτυπωτή του κόσμου, αξιοποιώντας τεχνολογία

που μπορεί κάποια μέρα να χρησιμοποιηθεί για να τυπώσει σπίτια στο φεγγάρι. Ο Ruijssenaars, θέλει να εκτυπώσει ένα κτίριο σε σχήμα λωρίδας του Μέμπιους με περίπου 1.100 τετραγωνικά μέτρα (12.000 τετραγωνικά πόδια) χρησιμοποιώντας έναν τεράστιο εκτυπωτή D-Shape, που είναι σχεδιασμένος από τον Ιταλό Ενρίκο Ντίνι.

"Το κτίριο θα μπορούσε να λειτουργήσει ως σπίτι ή μουσείο και να έχει μέρη από σκυρόδεμα τυπωμένα με σπασμένα βράχια και ένα συνδετικό γαλάκτωμα, ενώ η πρόσοψη θα είναι από ατσάλι και γυαλί. Το σχέδιο δεν ήταν αρχικά για να τυπωθεί το κτίριο αλλά το μέσο υψηλής τεχνολογίας (ο 3D εκτυπωτής) αποδείχθηκε το πιο κατάλληλο για την πραγμάτωσή του. Το Εθνικό πάρκο της Βραζιλίας έχει εκφράσει ενδιαφέρον για το κτίριο το οποίο θα κοστίσει περίπου τέσσερα

εκατομύρια ευρώ (5,3 εκ.δολάρια) για την κατασκευή του ή θα μπορούσε να κατασκευαστεί ως ιδιωτικό σπίτι στις ΗΠΑ" δήλωσε ο Ruijssenaars. [6]

Η μορφή της λωρίδας Μέμπιους με μια μόνο εξίσωση

Για περισσότερο από ενάμιση αιώνα από την ανακάλυψή της, η ταινία του Μέμπιους, αποτελούσε έναν άλυτο γρίφο για τους επιστήμονες, οι οποίοι αδυνατούσαν να περιγράψουν στη γλώσσα των Μαθηματικών τη δομή και τις ιδιότητές της. Σύμφωνα, όμως, με ένα άρθρο που δημοσιεύθηκε το **2007** στο περιοδικό **Nature Materials**, δύο επιστήμονες πέτυχαν να αποκωδικοποιήσουν την απλούστατη, στη μορφή της, ταινία. Πρόκειται για τους Γκερτ βαν ντερ Χάιζντεν και Γιουτζίν Σταρόστιν από το University College London, οι ποίοι παρουσίασαν το πρώτο μαθηματικό μοντέλο της ταινίας, μια εξήγηση του δηλαδή του σχήματός της στη μορφή μιας αλγεβρικής εξίσωσης.

Η ιδέα-κλειδί είναι ότι το σχήμα της ταινίας Μέμπιους καθορίζεται από ***περιοχές διαφορετικής ενεργειακής πυκνότητας*****:** Οι περιοχές της λωρίδας που κάμπτονται και διπλώνονται περιέχουν περισσότερη ελαστική ενέργεια από τις επίπεδες και τείνουν να επανέλθουν στο αρχικό τους σχήμα, όπως ένα λάστιχο που έχει τεντωθεί. Το σχήμα της λωρίδας εξαρτάται από το μήκος και το πλάτος του παραλληλόγραμμου από το οποίο κατασκευάστηκε. Αν το πλάτος μεταβάλλεται ανάλογα με το μήκος, οι περιοχές ενεργειακής πυκνότητας μετατοπίζονται και αυτές. Έτσι, μια φαρδιά λωρίδα θα δώσει μια πιο «επίπεδη» και τριγωνική λωρίδα του Μέμπιους.Το μαθηματικό τους οικοδόμημα, θα μπορούσε να ανοίξει το δρόμο για καινούργιες πρακτικές εφαρμογές, ιδιαίτερα στη βιομηχανία υφασμάτων, προβλέποντας τα ευάλωτα σε σχισίματα σημεία τους και στην παραγωγή νέων φαρμακευτικών προϊόντων από την μοντελοποίηση μορίων. [7]

Βιβλιογραφία:

[1] Larison, Lorraine L. (1973). «The Möbius band in Roman mosaics». American Scientist 61 (5): 544–547.

[2] Κλίφορντ Πικόβερ: Η Λωρίδα του Μέμπιους, εκδ. Τραυλός 2011.

[3] Πού χρησιμοποιείται η ταινία Mobius | Διαφορετικά – 2019 https://el.verdauung-info.com › 3237504-where-is-the-mobius-strip-used

[4] Η δυναμική της λωρίδας Mobius στην αρχιτεκτονική και τη διακόσμηση ...https://www.decobook.gr/.../h dynamikh-ths-lwridas-mobius-sthn-architektonikh-kai-t...

[5] https://divisare.com/projects/105362-Kazakhstan-s-new-National-Library

[6] https://pursuitist.com/architect-janjaap-ruijssenaars-to-use-3d-printer-to-build-a-house

[7] https://www.kathimerini.gr/292416/article/epikairothta/kosmos/h-tainia-mempioys-apokalyye-telikws-to-mysthrio-ths

9η ΕΥΡΩΠΑΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΓΙΑ ΚΟΡΙΤΣΙΑ

15-21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2020 Egmond aan Zee (virtual), ΟΛΛΑΝΔΙΑ

Η 9η Ευρωπαϊκή μαθηματική Ολυμπιάδα για κορίτσια διοργανώθηκε από 15 μέχρι 21 Απριλίου με ηλεκτρονικές διαδικασίες. Την οργάνωση είχε η Ολλανδία και οι διαγωνιζόμενες απάντησαν στα θέματα του διαγωνισμού από το σπίτι τους στο προβλεπόμενο χρονικό διάστημα των 4,5 ωρών. Η Ελλάδα συμμετείχε με τις μαθήτριες:

Αθανασίου Μαρία,	[1ο Ενιαίο Λύκειο Αιγάλεω]
Αλεξανδρίδου Κωνσταντίνα,	[Α. Κ. ΑΝΑΤΟΛΙΑ Θεσσαλονίκης]
Καραφύλλια Χριστίνα,	[Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη]
Παυλίδου Στυλιανή,	[2ο Ενιαίο Λύκειο Σερρών]

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος**, ο οποίος έχει επιμεληθεί και των λύσεων των προβλημάτων που ακολουθούν, και υπαρχηγός η μαθηματικός **Ευαγγελία Λώλη**.

Πρόβλημα 1 (Αυστραλία). Οι θετικοί ακέραιοι $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ διαιρείται με το 2^{2020}.

Λύση. Θα αποδείξουμε με επαγωγή επί του $k \geq 1$ τον παρακάτω ισχυρισμό

Δοθέντων θετικών ακεραίων $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3k}$ τέτοιων ώστε

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n,$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots, 3k-2$, ο 2^{2k} διαιρεί τουλάχιστον έναν από τους $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3k}$.

Πράγματι, για $k = 1$ έχουμε $2a_2 = a_1 + 4a_0$ και $2a_3 = a_2 + 4a_1$. Η δεύτερη ισότητα δίνει ότι ο a_2 είναι άρτιος, οπότε από την πρώτη, ο a_1 διαιρείται με το $4 = 2^2$. Άρα ο ισχυρισμός μας αληθεύει για $k = 1$.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $k \geq 1$ ο ισχυρισμός μας αληθεύει για κάθε ακολουθία $3k+1$ θετικών ακεραίων οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις. Θεωρούμε $3(k+1)+1 = 3k+4$ θετικούς ακεραίους $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3k+3}$ τέτοιους ώστε

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n,$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots, 3k+1$. Τότε όλοι οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{3k+2}$ είναι άρτιοι, οπότε $a_i = 2b_i$ για κάποιους θετικούς ακεραίους b_i για $i = 1, 2, \ldots, 3k+2$. Η σχέση $2a_2 = a_1 + 4a_0$ γίνεται

$$2b_2 = b_1 + 2a_0.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$2b_{n+2} = b_{n+1} + 4b_n,$$

για $n = 1, 2, \ldots, 3k$.

Άρα οι θετικοί ακέραιοι $b_1, b_2, \ldots, b_{3k+1}$ είναι άρτιοι, οπότε είναι $b_i = 2c_i$ για κάποιους θετικούς ακεραίους c_i για $i = 1, 2, \ldots, 3k+1$. Η σχέση $2b_2 = b_1 + 2a_0$ γίνεται $2c_2 = c_1 + a_0$, η οποία δεν μας δίνει τίποτα, αλλά έχουμε

$$2c_{n+2} = c_{n+1} + 4c_n,$$

για $n = 1, 2, \ldots, 3k-1$.

Έτσι η ακολουθία $c_1, c_2, \ldots, c_{3k+1}$ είναι μια ακολουθία $3k+1$ θετικών ακεραίων που ικανοποιούν αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις με αυτές του προβλήματος.

Από την επαγωγική υπόθεση, ο 2^{2k} διαιρεί τουλάχιστον έναν εκ των $c_1, c_2, \ldots, c_{3k+1}$. Αφού $a_i = 4c_i$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, 3k+1$, έπεται ότι ο $4 \cdot 2^{2k} = 2^{2(k+1)}$ διαιρεί τουλάχιστον έναν εκ των $a_1, \ldots, a_{3k+1}$. Το συμπέρασμα αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή, κι άρα και την απόδειξη.

Πρόβλημα 2 (Σλοβακία). Να βρείτε όλες τις λίστες $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών τέτοιων ώστε να ικανοποιούνται όλες οι παρακάτω συνθήκες:

(i) $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{2020}$,

(ii) $x_{2020} \le x_1 + 1$,

(iii) υπάρχει μετάθεση $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ της $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i+1)(y_i+1)\right)^2 = 8\sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Μετάθεση μιας λίστας είναι μια λίστα ίδιου μήκους, με τα ίδια στοιχεία, τα οποία επιτρέπεται να είναι σε οποιαδήποτε σειρά. Για παράδειγμα, η $(2, 1, 2)$ είναι μια μετάθεση της $(1, 2, 2)$. Επιπλέον, και οι δύο είναι μεταθέσεις της $(2, 2, 1)$. Παρατηρήστε ότι κάθε λίστα είναι μετάθεση του εαυτού της.

Λύση. Είναι $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020}) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$ με 1010 μηδενικά και 1010 μονάδες ή $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020}) = (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2)$ με 1010 μονάδες και 1010 δυάρια.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι την παρακάτω βοηθητική ανισότητα.

Βοηθητική Ανισότητα. Για όλους τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς x, y με $|x-y| \le 1$, έχουμε

$$((x+1)(y+1))^2 \ge 4(x^3+y^3)$$

με την ισότητα να αληθεύει αν και μόνο αν $|x-y| = 1$ και $(x-1)(y-1) = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $\{x, y\} = \{0, 1\}$ ή $\{x, y\} = \{1, 2\}$.

Απόδειξη Βοηθητικής Ανισότητας. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
((x+1)(y+1))^2 &\ge ((x+1)(y+1))^2 - ((x-1)(y-1))^2 \\
&= (xy+x+y+1)^2 - (xy-x-y+1)^2 && \text{(διαφορά τετραγώνων)} \\
&= (2xy+2)(2x+2y) && \text{(κοινός παράγοντας)} \\
&= 4(xy+1)(x+y) \\
&\ge 4(xy+(x-y)^2)(x+y) && \text{(ταυτότητα αθροίσματος κύβων)} \\
&= 4(x^3+y^3),
\end{aligned}$$

με την ισότητα να αληθεύει αν και μόνο αν $|x-y| = 1$ και $(x-1)(y-1) = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $\{x, y\} = \{0, 1\}$ ή $\{x, y\} = \{1, 2\}$. Η απόδειξη της Βοηθητικής Ανισότητας ολοκληρώθηκε.

Έστω, λοιπόν, μια λίστα $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών τέτοιων ώστε να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες (i), (ii), και (iii), και έστω $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ μια μετάθεση της $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$. Αφού $0 \le \min\{x_i, y_i\} \le \max\{x_i, y_i\} \le \min\{x_i, y_i\} + 1$ για $1 \le i \le 2020$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω Βοηθητική Ανισότητα για όλα τα $1 \le i \le 2020$ και να πάρουμε

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i+1)(y_i+1)\right)^2 \ge 4\sum_{i=1}^{2020} (x_i^3+y_i^3) = 8\sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Έτσι, για να αληθεύει η ισότητα στην συνθήκη (iii), θα πρέπει να ισχύει $((x_i+1)(y_i+1))^2 = 4(x_i^2+y_i^2)$ για όλα τα $1 \le i \le 2020$. Επομένως, για όλα τα $1 \le i \le 2020$ πρέπει να έχουμε $\{x_i, y_i\} = \{0,1\}$ ή $\{x_i, y_i\} = \{1,2\}$. Από τη συνθήκη (ii), βλέπουμε ότι αυτό ισχύει είτε εάν $\{x_i, y_i\} = \{0,1\}$ για όλα τα $1 \le i \le 2020$ είτε εάν $\{x_i, y_i\} = \{1,2\}$ για όλα τα $1 \le i \le 2020$.

Εάν $\{x_i, y_i\} = \{0,1\}$ για όλα τα $1 \le i \le 2020$, τότε οι λίστες $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ και $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ αποτελούνται από 2020 μονάδες και 2020 μηδενικά. Αφού η $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ είναι μια μετάθεση της $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, έπεται ότι $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020}) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$ με 1010 μηδενικά και 1010 μονάδες. Αντίστροφα, μια τέτοια λίστα ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii), καθώς και την (iii) με $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020}) = (x_{2020}, x_{2019}, \ldots, x_1)$, κι άρα αυτή η λίστα ισχύει. Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμαστε όταν $\{x_i, y_i\} = \{1,2\}$ για όλα τα $1 \le i \le 2020$, και παίρνουμε $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020}) = (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2)$ με 1010 μονάδες και 1010 δυάρια.

Πρόβλημα 3 (Ουκρανία). Έστω κυρτό εξάγωνο $ABCDEF$ τέτοιο ώστε $\angle A = \angle C = \angle E$ και $\angle B = \angle D = \angle F$ και οι (εσωτερικές) διχοτόμοι των $\angle A$, $\angle C$, και $\angle E$ συντρέχουν.

Να αποδειχθεί ότι οι (εσωτερικές) διχοτόμοι των $\angle B$, $\angle D$, και $\angle F$ επίσης συντρέχουν.

Παρατηρήστε ότι $\angle A = \angle FAB$. Οι άλλες εσωτερικές γωνίες του εξαγώνου ορίζονται ομοίως.

Λύση: Θέτουμε $\angle A = \angle C = \angle E = 2\omega$ και $\angle B = \angle D = \angle F = 2\varphi$. Από το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού εξαγώνου παίρνουμε $6\omega + 6\varphi = 720^\circ$, οπότε $\omega + \varphi = 120^\circ$.

Έστω K το σημείο τομής των προεκτάσεων των AB και DC (βλ. Σχήμα 1). Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου KBC παίρνουμε

$$\widehat{K} = 180^\circ - K\widehat{B}C - K\widehat{C}B = 180^\circ - (180^\circ - 2\varphi) - (180^\circ - 2\omega) = 2(\omega + \varphi) - 180^\circ = 60^\circ.$$

Εάν L είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και EF, και M είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των CD και FE, τότε βρίσκουμε ομοίως ότι $\widehat{L} = \widehat{M} = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο KLM είναι ισόπλευρο. Ορίζοντας τα σημεία X, Y, Z παρομοίως (βλ. Σχήμα 1), βρίσκουμε ότι το τρίγωνο XYZ είναι επίσης ισόπλευρο. Θα αποδείξουμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Οι (εσωτερικές) διχοτόμοι των $\angle A$, $\angle C$, και $\angle E$ συντρέχουν αν και μόνο αν τα ισόπλευρα τρίγωνα KLM και XYZ είναι ίσα.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα. Εάν P είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός ισόπλευρου τριγώνου XYZ, τότε το άθροισμα των αποστάσεων του P από τις πλευρές του τριγώνου XYZ είναι σταθερό και ισούται με το ύψος του τριγώνου XYZ.

Απόδειξη του Λήμματος. Έστω s το μήκος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου XYZ, και έστω h το ύψος του. Το εμβαδό του τριγώνου XYZ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων XPY, YPZ και ZPX. Συνεπώς,

$$\frac{XY}{2} d(P, XY) + \frac{YZ}{2} d(P, YZ) + \frac{ZX}{2} d(P, ZX) = \frac{sh}{2}.$$

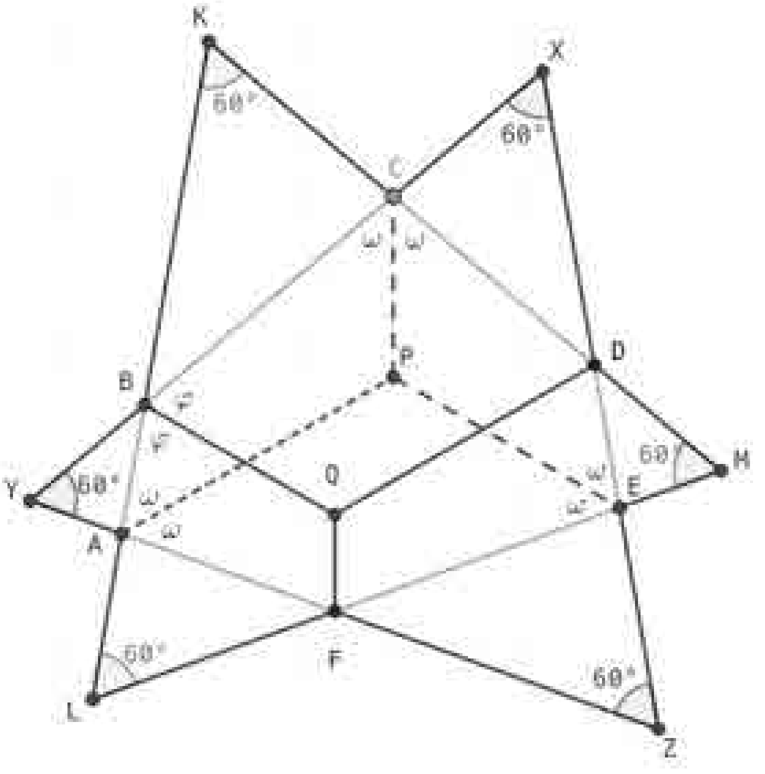
Αφού $XY = YZ = ZX = s$, παίρνουμε

$$d(P, XY) + d(P, YZ) + d(P, ZX) = h,$$

όπως θέλαμε.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Αφού η διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας, έπεται ότι οι διχοτόμοι των $\angle A$, $\angle C$, και $\angle E$ συντρέχουν σε ένα εσωτερικό σημείο του εξαγώνου, έστω P, εάν και μόνο εάν

$$d(P, AB) = d(P, AF),$$
$$d(P, CD) = d(P, CB), \quad \text{και}$$
$$d(P, EF) = d(P, ED).$$



Σχήμα 1: Πρόβλημα 3

όπου το $d(W, \ell)$ συμβολίζει την απόσταση του σημείου W από την ευθεία ℓ.

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$d(P, AB) + d(P, CD) + d(P, EF) = d(P, AF) + d(P, CB) + d(P, ED),$$

δηλ.

$$d(P, KL) + d(P, KM) + d(P, LM) = d(P, YZ) + d(P, XY) + d(P, XZ).$$

Από το παραπάνω λήμμα, η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνο αν το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου KLM ισούται με το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου XYZ, δηλ. αν και μόνο αν τα δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι ίσα.

Προφανώς, λοιπόν, εάν οι διχοτόμοι των $\angle A$, $\angle C$, και $\angle E$ συντρέχουν στο P, τότε τα δύο ισόπλευρα τρίγωνα KLM και XYZ είναι ίσα. Αντίστροφα, έστω ότι τα δύο ισόπλευρα τρίγωνα KLM και XYZ είναι ίσα με το ύψος του να είναι ίσο με h, και έστω P το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\angle A$ και $\angle C$. Τότε

$$d(P, AB) = d(P, AF) \quad \text{και} \quad d(P, CD) = d(P, CB).$$

Άρα

$$d(P, EF) = h - (d(P, AB) + d(P, CD)) = h - (d(P, AF) + d(P, CB)) = d(P, ED).$$

Δηλαδή, το P ανήκει και στη διχοτόμο της γωνίας $\angle E$. Η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Λόγω συμμετρίας, οι (εσωτερικές) διχοτόμοι των γωνιών $\angle B$, $\angle D$, και $\angle F$ συντρέχουν (σε ένα σημείο Q) αν και μόνο αν τα ισόπλευρα τρίγωνα KLM και XYZ είναι ίσα, δηλ. αν και μόνο αν οι (εσωτερικές) διχοτόμοι των $\angle A$, $\angle C$, και $\angle E$ συντρέχουν. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 4 (Σλοβακία). Μια μετάθεση των ακεραίων $1, 2, \ldots, m$ ονομάζεται φρέσκια εάν δεν υπάρχει θετικός ακέραιος $k < m$ τέτοιος ώστε οι πρώτοι k αριθμοί στη μετάθεση να είναι οι $1, 2, \ldots, k$ σε κάποια σειρά. Έστω f_m το πλήθος των φρέσκων μεταθέσεων των ακεραίων $1, 2, \ldots, m$. Να αποδειχθεί ότι $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ για κάθε $n \geq 3$.

Για παράδειγμα, αν $m = 4$, τότε η μετάθεση $(3, 1, 4, 2)$ είναι φρέσκια, ενώ η μετάθεση $(2, 3, 1, 4)$ δεν είναι.

Λύση. Έστω $m \geq 2$ και έστω $a_1, a_2, \ldots, a_m$ μια φρέσκια μετάθεση των ακεραίων $1, 2, \ldots, m$. Παρατηρούμε ότι $a_m \neq m$ αφού αλλιώς οι $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ θα αποτελούσαν μετάθεση των $1, 2, \ldots, m-1$, άτοπο από την υπόθεση μας.

Για να πάρουμε μια φρέσκια μετάθεση των $1, 2, \ldots, m+1$, τοποθετούμε τον αριθμό $m+1$ πριν το a_1 ή ανάμεσα στο a_j και το a_{j+1} για $j = 1$ έως $j = m-1$. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε τέτοια μετάθεση είναι φρέσκια.

Καμιά από τις παραπάνω φρέσκιες μεταθέσεις των $1, 2, \ldots, m+1$ δεν έχει τον m ως τελευταίο στοιχείο. Έστω $a_i = m$ για κάποιο $1 \leq i < m$. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $a_i = m$ με $m+1$ και να τοποθετήσουμε το m στην τελευταία θέση:

$$a_1, \ldots, a_{i-1}, m+1, a_{i+1}, \ldots, a_m, m.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε τέτοια μετάθεση των $1, 2, \ldots, m+1$, είναι φρέσκια και διαφορετική από τις m φρέσκιες μεταθέσεις που πήραμε παραπάνω (οι οποίες λήγουν σε $a_m \neq m$).

Επομένως κάθε φρέσκια μετάθεση των $1, 2, \ldots, m$ παράγει τουλάχιστον $m+1$ φρέσκιες μεταθέσεις των $1, 2, \ldots, m+1$, που σημαίνει ότι

$$f_{m+1} \geq (m+1) f_m$$

για κάθε $m \geq 2$, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 5 (Ηνωμένο Βασίλειο). Θεωρούμε τρίγωνο ABC με $\angle BCA > 90°$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος Γ του ABC έχει ακτίνα R. Υπάρχει σημείο P στο εσωτερικό του τμήματος AB τέτοιο ώστε $PB = PC$ και το μήκος του PA ισούται με R. Η μεσοκάθετος του PB τέμνει τον Γ στα σημεία D και E. Να αποδειχθεί ότι το P είναι το έγκεντρο του τριγώνου CDE.

Λύση. Έστω ότι η προέκταση της CP τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του $\triangle ABC$ στο F. Αφού $PB = PC$, έχουμε $\angle FAB = \angle FCB = \angle ABC$, και $FB = AC$. Άρα το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ACBF$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $FA // BC$.

Αφού η ευθεία OP είναι η μεσοκάθετος της χορδής BC και η FA είναι παράλληλη στη BC, έπεται ότι η FA είναι κάθετη στην OP. Αφού $PA = OA$, η ευθεία FA είναι η μεσοκάθετος του OP.

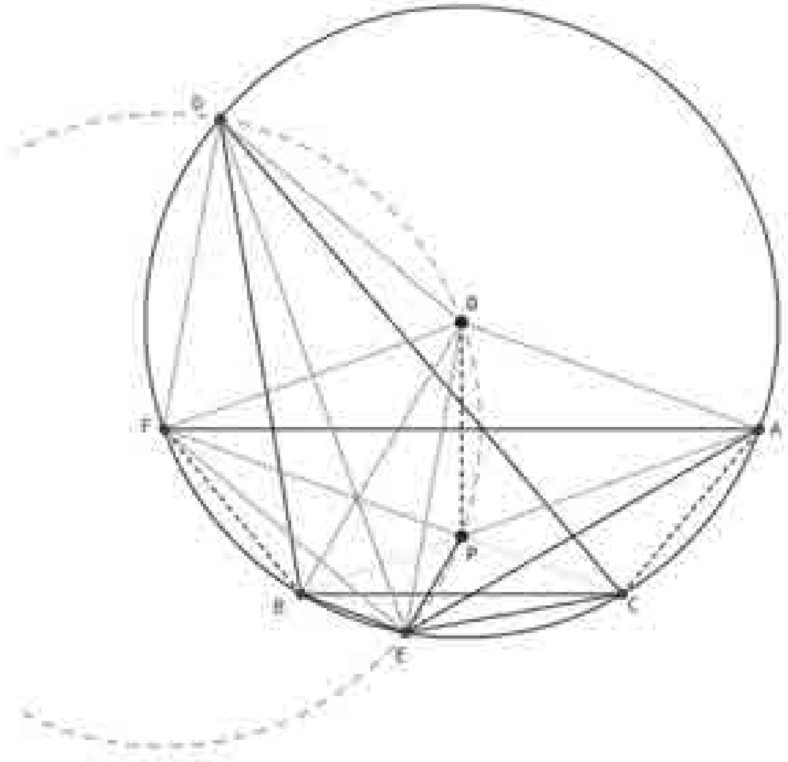
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο $OAPF$ είναι ρόμβος, αφού έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Αφού η FO είναι παράλληλη στην PA και $FP = FO = OB$, το τετράπλευρο $FOPB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Έτσι, η μεσοκάθετος της βάσης του FO θα συμπίπτει με την μεσοκάθετο της βάσης του BP, δηλ. με την ευθεία DE. Άρα

$$FD = DO = OE = EF,$$

που σημαίνει ότι $\angle DCF = \angle FCE$, ή ισοδύναμα ότι η CP διχοτομεί την $\angle DCE$, αφού τα σημεία C, P, F είναι συνευθειακά.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι τα σημεία D, O, P, και E ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το F και ακτίνα $DF = R$. Επομένως,

$$\angle DEP = \frac{\angle DFP}{2} = \frac{\angle DFC}{2} = \frac{\angle DEC}{2},$$



Σχήμα 2: Πρόβλημα 5

που σημαίνει ότι η EP διχοτομεί την $\angle DEC$.

Αφού η CP διχοτομεί την $\angle DCE$ και η EP διχοτομεί την $\angle DEC$, το P είναι το έγκεντρο του τριγώνου DEC.

Πρόβλημα 6 (Δανία). Έστω ακέραιος $m > 1$. Η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ορίζεται με $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, και για κάθε $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι m τέτοιοι ώστε κάθε όρος της ακολουθίας να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση. Οι μοναδικοί τέτοιοι ακέραιοι m είναι $m = 2$ και $m = 10$. Ας υποθέσουμε ότι κάθε όρος της ακολουθίας είναι τέλειο τετράγωνο. Υπολογίζοντας τους πρώτους όρους της ακολουθίας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_4 &= 5m - 1, \\ a_5 &= 5m^2 + 3m - 1, \quad \text{και} \\ a_6 &= 5m^3 + 8m^2 - 2m - 4. \end{aligned}$$

Αφού οι όροι a_4 και a_6 είναι τέλεια τετράγωνα, το ίδιο ισχύει για το γινόμενό τους

$$a_4a_6 = (5m - 1)(5m^3 + 8m^2 - 2m - 4) = 25m^4 + 35m^3 - 18m^2 - 18m + 4,$$

καθώς και για το γινόμενο

$$4a_4a_6 = 100m^4 + 140m^3 - 72m^2 - 72m + 16.$$

Είναι

$$(10m^2 + am + b)^2 = 100m^4 + 20am^3 + (a^2 + 20b)m^2 + 2abm + b^2.$$

Με $n=7$ παίρνουμε

$$(10m^2+7m+b)^2 = 100m^4+140m^3+(49+20b)m^2+14bm+b^2.$$

Θέτοντας $b=-5$ στην τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned}(10m^2+7m-5)^2 &= 100m^4+140m^3-51m^2-70m+25\\ &= 4a_4a_6+21m^2+2m+9\\ &> 4a_4a_6,\end{aligned}$$

ενώ με $b=-7$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}(10m^2+7m-7)^2 &= 100m^4+140m^3-91m^2-98m+49\\ &= 4a_4a_6-19m^2-26m+33\\ &< 4a_4a_6,\end{aligned}$$

αφού $m>1$. Άρα $4a_4a_6=(10m^2+7m-6)^2$, δηλ.

$$\cancel{100m^4+140m^3}-72m^2-72m+16=\cancel{100m^4+140m^3}-71m^2-84m+36,$$

οπότε

$$m^2-12m+20=0.$$

Συνεπώς, $m=2$ ή $m=10$.

Για $m=2$, θεωρούμε την ακολουθία (b_n) με $b_1=b_2=1$ και $b_n=b_{n-1}+b_{n-2}$ για $n\geq 3$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $a_n=b_n^2$ για κάθε $n\geq 1$. Πράγματι, ο ισχυρισμός μας αληθεύει για $n=1$, $n=2$ και $n=3$ (αφού $b_3^2=(1+1)^2=4=a_3$). Ας υποθέσουμε ότι αληθεύει για $n=k-2$ και $n=k-1$ για κάποιο $k\geq 4$. Αφού

$$2\left(b_{k-1}^2+b_{k-2}^2\right)=(b_{k-1}+b_{k-2})^2+(b_{k-1}-b_{k-2})^2=b_k^2+b_{k-3}^2,$$

είναι

$$\begin{aligned}a_k &= 2\left(a_{k-1}+a_{k-2}\right)-a_{n-3}\\ &= 2\left(b_{k-1}^2+b_{k-2}^2\right)-b_{k-3}^2\\ &= b_k^2+b_{k-3}^2-b_{k-3}^2\\ &= b_k^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $a_n=b_n^2$ για κάθε $n\geq 1$.

Για $m=10$, θεωρούμε την ακολουθία (c_n) με $c_1=-1$, $c_2=1$ και $c_n=3c_{n-1}+c_{n-2}$ για $n\geq 3$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $a_n=c_n^2$ για κάθε $n\geq 1$. Πράγματι, ο ισχυρισμός μας αληθεύει για $n=1$, $n=2$ και $n=3$ (αφού $c_3^2=(3-1)^2=4=a_3$). Ας υποθέσουμε ότι αληθεύει για $n=k-2$ και $n=k-1$ για κάποιο $k\geq 4$. Αφού

$$10\left(c_{k-1}^2+c_{k-2}^2\right)=(3c_{k-1}+c_{k-2})^2+(c_{k-1}-3c_{k-2})^2=c_k^2+c_{k-3}^2,$$

είναι

$$\begin{aligned}a_k &= 10\left(a_{k-1}+a_{k-2}\right)-a_{n-3}\\ &= 10\left(c_{k-1}^2+c_{k-2}^2\right)-c_{k-3}^2\\ &= c_k^2+c_{k-3}^2-c_{k-3}^2\\ &= c_k^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $a_n=c_n^2$ για κάθε $n\geq 1$.

Οι Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 115

Ν45. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακέραιων (μ,ν) που έχουν την ιδιότητα: $\mu^2\nu \mid \nu^2+3\mu$.

Κροατία 2018

Λύση

Αν ισχύει $\mu^2\nu \mid \nu^2+3\mu$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος κ έτσι ώστε

$$\mu^2\nu\kappa=\nu^2+3\mu \qquad (1)$$

η οποία γράφεται $(\mu\nu\kappa-3)\mu=\nu^2$ ή και ως $\nu(\mu^2\kappa-\nu)=3\mu$. Από αυτές τις ισότητες προκύπτει ότι:

$$\mu \mid \nu^2 \text{ και } \nu \mid 3\mu.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $\text{ΜΚΔ}(\nu,3)=1$. Τότε $\nu \mid \mu$, οπότε υπάρχει θετικός ακέραιος ρ έτσι ώστε $\mu=\nu\rho$ και

$$\nu^2+3\rho\nu=\rho^2\nu^3\kappa \Rightarrow \nu+3\rho=\rho^2\nu^2\kappa \Rightarrow \begin{cases} \nu=(\rho\nu^2\kappa-3)\rho \Rightarrow \rho \mid \nu \\ 3\rho=(\rho^2\nu\kappa-1)\nu \overset{(3,\nu)=1}{\Rightarrow} \nu \mid \rho \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε $\rho=\nu$, οπότε $\mu=\nu^2$ και η σχέση (1) γίνεται:
$\nu^5\kappa=4\nu^2 \Rightarrow \nu^3 \mid 4 \Rightarrow \nu=1$, οπότε προκύπτει ότι: $\mu=\nu=1$, δηλαδή $(\mu,\nu)=(1,1)$.

2. $\text{ΜΚΔ}(\nu,3)=3$. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος ρ τέτοιος ώστε $\nu=3\rho$, οπότε η σχέση (1) δίνει:

$$3\rho\mu^2 \mid 9\rho^2+3\mu \Rightarrow \rho\mu^2 \mid 3\rho^2+\mu \Rightarrow \rho \mid \mu \Rightarrow \mu=\lambda\rho,\ \rho \text{ θετικός ακέραιος}$$

$$\Rightarrow \rho\cdot\lambda^2\rho^2 \mid 3\rho^2+\lambda\rho=\rho(3\rho+\lambda) \Rightarrow \lambda^2\rho^2 \mid 3\rho+\lambda \Rightarrow \rho \mid \lambda \Rightarrow \lambda=\tau\rho, \tau \text{ θετικός ακέραιος}$$

$$\Rightarrow \tau^2\rho^2\cdot\rho^2 \mid 3\rho+\tau\rho \Rightarrow \tau^2\rho^3 \mid 3+\tau \Rightarrow \tau \mid 3 \Rightarrow \tau=1 \text{ ή } \tau=3.$$

Αν $\tau=1$, τότε $\lambda=\rho,\ \mu=\rho^2,\ \nu=3\rho$, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε:
$3\rho^5 \mid 12\rho^2 \Rightarrow \rho^3 \mid 4 \Rightarrow \rho=1$, οπότε $(\mu,\nu)=(1,3)$.

Αν $\tau=3$, τότε $\lambda=3\rho,\ \mu=3\rho^2,\ \nu=3\rho$, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε:
$27\rho^5 \mid 18\rho^2 \Rightarrow 3\rho^3 \mid 2$, άτοπο.

Δ23. Σε έναν διαγωνισμό παίρνουν μέρος 300 μαθητές. Για κάθε ζεύγος μαθητών θεωρούμε ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω: γνωρίζονται μεταξύ τους ή δεν γνωρίζονται μεταξύ τους. Δίνεται επίσης ότι δεν υπάρχουν τρεις μαθητές που να γνωρίζονται ανά δύο. Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ν για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- **Κάθε μαθητής γνωρίζεται με ν το πολύ άλλους μαθητές.**
- **Για κάθε θετικό ακέραιο μ τέτοιο ώστε $1\le\mu\le\nu$, υπάρχει ένας τουλάχιστον μαθητής ο οποίος γνωρίζεται με μ ακριβώς άλλους μαθητές.**

Μογγολία 2017

Λύση

Έστω $M_1, M_2, \ldots, M_{300}$ οι 300 μαθητές. Συμβολίζουμε με $|M_i|$ τον αριθμό των μαθητών που γνωρίζονται με το μαθητή M_i. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μαθητής που γνωρίζεται με 201 άλλους μαθητές. Με κατάλληλη αναδιάταξη του συμβολισμού μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο μαθητής M_{202} γνωρίζεται με τους μαθητές $M_1, M_2, ..., M_{201}$. Επειδή από τις υποθέσεις μας δεν υπάρχει τρίγωνο με κορυφή στα σημεία M_i, $i = 1,2,...,202$, έπεται ότι $|M_i| \le 99$, για $i \le 201$. Επομένως πρέπει να έχουμε:

$$\{|M_i| : i = 202, 203, ..., 300\} \supseteq \{100.101, ..., 201\},$$ το οποίο είναι αδύνατο.

Άρα πρέπει $\nu \le 200$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η τιμή $\nu = 200$ ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Πράγματι, αρκεί να συνδέσουμε με γνωριμία κάθε μαθητή M_{200+i} με τους μαθητές $M_i, ..., M_{200}$, για $i = 1,2,...,100$. Τότε: $|M_{200+i}| = 201 - i$ και $|M_i| = i$, $i = 1,2,...,100$.

A60. Να προσδιορίσετε όλα τα τριώνυμα $f(x) = \alpha x^2 + bx + c$, με $\alpha, b, c \in \mathbb{Z}$, για τα οποία ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2016 \le f(x) \le \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2020.$$

Ουκρανία 2014

Λύση

Οι δεδομένες ανισώσεις γράφονται:

$$\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2014 \le f(x) = ax^2 + bx + c \le \frac{3}{2}(x+2)^2 + 2014 \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) έπεται ότι:

$$2014 \le f(-2) \le 2014 \Rightarrow f(-2) = 2014 \Rightarrow$$
$$4a - 2b + c = 2014 \qquad (2)$$

Επιπλέον, από τις σχέσεις (1) για $x = -1$ και $x = -3$ λαμβάνουμε:

$$2014 + \frac{1}{2} \le a - b + c \le 2015 + \frac{1}{2} \Rightarrow a - b + c = 2015 \qquad (3)$$

$$2014 + \frac{1}{2} \le 9a - 3b + c \le 2015 + \frac{1}{2} \Rightarrow a - b + c = 2015. \qquad (4)$$

Από τις (2) – (4) λαμβάνουμε: $a = 1$, $b = 4$, $c = 2018$, οπότε

$$f(x) = x^2 + 4x + 2018 = (x+2)^2 + 2014.$$

Η συνάρτηση $f(x) = (x+2)^2 + 2014$ είναι φανερό ότι ικανοποιεί τις σχέσεις (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ49. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψη ΑΝ , ΓΚ και ορθόκεντρο το σημείο Η. Συμβολίζουμε με γ_1 τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ και με γ_2 τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΝΒΚ. Οι κύκλοι γ_1 και γ_2 τέμνονται ξανά στο σημείο Θ. Οι ευθείες ΓΑ και ΒΘ τέμνονται στο σημείο Σ. Η ευθεία ΣΗ τέμνει τον κύκλο γ_2 στο σημείο Τ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΝΤ, ΘΚ και ΓΑ συντρέχουν ή είναι παράλληλες.

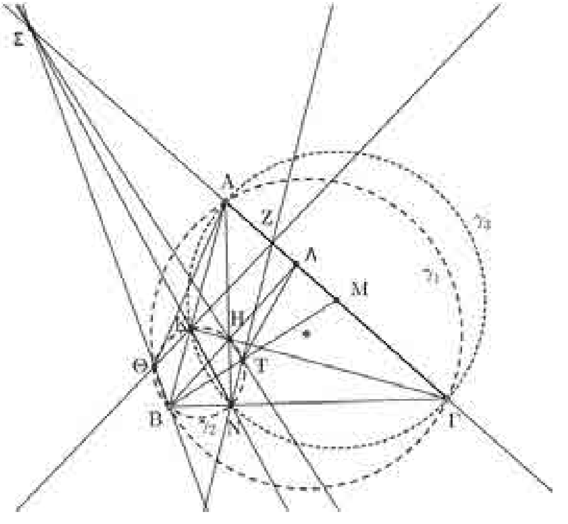
Ουκρανία 2014

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες ΝΤ, ΘΚ και ΓΑ συντρέχουν ή είναι παράλληλες, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι οι ριζικοί άξονες τριών κύκλων.

Παρατηρούμε καταρχήν ότι τα σημεία Α, Κ, Ν, Γ είναι ομοκυκλικά, έστω στον κύκλο γ_3, αφού $\hat{AK\Gamma} = \hat{AN\Gamma} = 90^0$. Επειδή οι ριζικοί άξονες των ζευγών κύκλων (γ_1, γ_2) και (γ_1, γ_3) τέμνονται στο Σ, έπεται ότι και η ευθεία ΚΝ (ριζικός άξονας του ζεύγους (γ_2, γ_3) περνάει από το Σ, δηλαδή τα σημεία Κ, Ν, Σ είναι συνευθειακά.

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι τα σημεία Β, Θ, Κ, Η, Τ και Ν ανήκουν στο κύκλο γ_2.
Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Α, Κ, Θ και Σ είναι ομοκυκλικά. Πράγματι, από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΓΒΘ και ΑΓΝΚ έπεται ότι: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\Sigma = \mathrm{A}\hat{\Theta}\Sigma = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$, οπότε το τετράπλευρο ΑΚΘΣ είναι εγγράψιμο, έστω σε κύκλο γ_4.



Παρατηρούμε επίσης ότι η ΒΗ είναι διάμετρος του κύκλου γ_2, οπότε $\mathrm{ATB} = 90^0 = \Sigma\hat{\Lambda}\mathrm{B}$, οπότε, αν Λ είναι το ίχνος του ύψους από την κορυφή Β, και τα σημεία Β, Τ, Λ, Σ είναι ομοκυκλικά. Τότε έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\Sigma}\mathrm{T} = \Lambda\hat{\Sigma}\mathrm{T} = \Lambda\hat{\mathrm{B}}\mathrm{T} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{T} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{T} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{T},$$

οπότε και τα σημεία Σ, Α, Τ, Ν είναι ομοκυκλικά, έστω σε κύκλο γ_5.

Τελικά παρατηρούμε ότι η ευθεία ΑΓ είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων γ_4 και γ_5, η ευθεία ΚΘ είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων γ_4 και γ_2, ενώ η ευθεία ΝΤ είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων γ_2 και γ_5, Επομένως οι ευθείες ΝΤ, ΘΚ και ΓΑ συντρέχουν ή είναι παράλληλες.

Ασκήσεις για λύση

Γ50. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB}$. Πάνω στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τα σημεία B_1 και Γ_1 έτσι ώστε $\mathrm{BB}_1 = \mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A}\Gamma_2$. Πάνω στην πλευρά ΓΑ παίρνουμε το σημείο B_2 έτσι ώστε $\Gamma\mathrm{B}_2 = \mathrm{B\Gamma}$ και στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β παίρνουμε σημείο Γ_1 έτσι ώστε $\Gamma\Gamma_1 = \Gamma\mathrm{A}$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$ είναι παράλληλες.

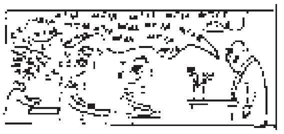
Α61. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\left(x_n\right), n \in \mathbb{N}^*$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{x_n}}{n^2},\ n \geq 1,$$

είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη

Ν46. Έστω $a_1 < a_2 < \ldots$ οι θετικοί διαιρέτες του θετικού ακέραιου a και $b_1 < b_2 < \ldots$ οι θετικοί διαιρέτες του θετικού ακέραιου b. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς a, b που ικανοποιούν το σύστημα:

$$a_{10} + b_{10} = a,\quad a_{11} + b_{11} = b.$$



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

προλεγόμενα … θεωρούμε απαραίτητο να κάνουμε λόγο γι αυτό που λέμε «αισθητική έλξη των Μαθηματικών».

«...Τα μαθηματικά σχεδιάσματα, όπως και εκείνα ενός ζωγράφου ή ποιητή, πρέπει να είναι *όμορφα*. Οι ιδέες, όπως τα χρώματα ή οι λέξεις, πρέπει να ταιριάζουν μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο: δεν υπάρχει μόνιμη θέση στον κόσμο για άσχημα Μαθηματικά. Και σ' αυτό το σημείο πρέπει να ασχοληθώ με μια εσφαλμένη άποψη που εξακολουθεί να είναι πλατειά διαδεδομένη (αν και, κατά πάσα πιθανότητα, σε μικρότερο βαθμό απ' ό,τι ήταν πριν από είκοσι χρόνια). Είναι αυτό που ο **Whitehead** είχε αποκαλέσει «λογοτεχνική προκατάληψη», ότι δηλαδή η αγάπη και η αναγνώριση της αισθητικής των Μαθηματικών είναι «μια μονομανία που περιορίζεται μεταξύ λίγων εκκεντρικών της κάθε γενιάς».

Δύσκολα θα βρίσκαμε σήμερα έναν μορφωμένο άνθρωπο εντελώς αναίσθητο ως προς την αισθητική έλξη των Μαθηματικών. Μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να *ορισθεί* η μαθηματική ομορφιά, αλλά αυτό είναι εξ ίσου αληθινό για την κάθε είδους ; ομορφιά - μπορεί να μη γνωρίζουμε ακριβώς τι εννοούμε λέγοντας ότι ένα ποίημα είναι όμορφο, αλλά αυτό δεν μας εμποδίζει να αναγνωρίσουμε την ομορφιά του όταν το διαβάσουμε. Ακόμη και ο Καθηγητής **Hogben**, ο οποίος επιδιώκει πάση θυσία να ελαχιστοποιήσει την σημασία του αισθητικού στοιχείου στα Μαθηματικά, δεν διακινδυνεύει μια άρνηση του γεγονότος αυτού. «Υπάρχουν, βέβαια, άτομα στα οποία τα Μαθηματικά ασκούν μια παγερά απρόσωπη έλξη... Η αισθητική έλξη των Μαθηματικών μπορεί να είναι εντελώς αληθινή μόνο για λίγους εκλεκτούς». Αλλά υπάρχουν «λίγοι» -υπαινίσσεται - και αισθάνονται «παγερά» (και είναι πράγματι μάλλον γελοίοι άνθρωποι, που ζουν σε ανόητες μικρές πανεπιστημιουπόλεις, προφυλαγμένοι από το φρέσκο αεράκι των ανοικτών χώρων). Σ' αυτά που ισχυρίζεται, απλώς επαναλαμβάνει την κατά Whitehead "λογοτεχνική προκατάληψη"...».

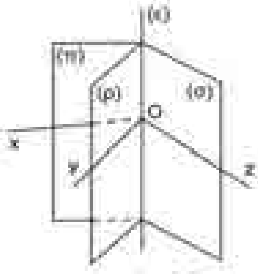
σημείωμα 01: *Lancelot Thomas Hogben (1895-1975), είναι ο συγγραφέας του «Mathematics for the Million» (σε ελεύθερη απόδοση: «Μαθηματικά για πολλούς»)*

σημείωμα 02***:*** Alfred North Whitehead (1891-1947), *Άγγλος μαθηματικός, από τους θεμελιωτές της σύγχρονης Μαθηματικής Λογικής.*

[***πηγή:*** Godfrey Harold Hardy (1877-1947), «*Η ΑΠΟΛΟΓΙΑ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ*», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (1993)]

II. Γεωμετρία αγάπη μου

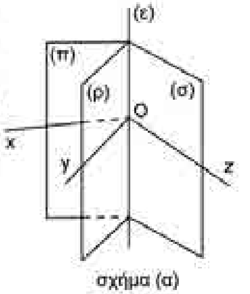
προλεγόμενα … συνεχίζουμε με μερικά ακόμη στοιχεία πάνω στις δίεδρες γωνίες, που είναι απαραίτητα για να κατανοήσουμε διάφορα στερεά σχήματα.



σχήμα (α)

εφεξής δίεδρες (σχήμα (α)) Δυο δίεδρες θα λέγονται εφεξής αν έχουν μια έδρα κοινή και οι μη κοινές έδρες τους βρίσκονται απ' τη μια και την άλλη μεριά του επιπέδου της κοινής τους έδρας.

παρατήρηση Είναι φανερό ότι σε δύο εφεξής γωνίες, οι αντίστοιχες επίπεδές τους θα είναι (σχήμα (α)), επίσης εφεξής. Αυτό το τελευταίο σημαίνει ότι μπορούμε να διατυπώσουμε την παρακάτω πρόταση:



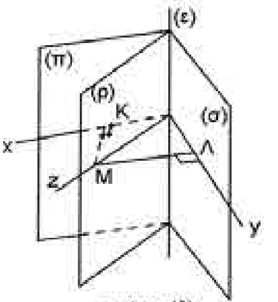
σχήμα (α)

«Δύο δίεδρες γωνίες, θα είναι εφεξής, αν οι αντίστοιχες επίπεδες γωνίες τους είναι εφεξής».
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πούμε ότι:
«Δυο δίεδρες θα είναι εφεξής και παραπληρωματικές, αν οι αντίστοιχες επίπεδές τους είναι εφεξής και παραπληρωματικές»

συμπληρωματικές δίεδρες Δύο δίεδρες γωνίες θα λέγονται *συμπληρωματικές*, αν, οι αντίστοιχες επίπεδές τους γωνίες, είναι συμπληρωματικές γωνίες.

παραπληρωματικές δίεδρες Δύο δίεδρες γωνίες θα λέγονται *παραπληρωματικές*, αν, οι αντίστοιχες επίπεδές τους γωνίες, είναι παραπληρωματικές γωνίες.

διχοτόμο ημιεπίπεδο δίεδρης γωνίας (σχήμα (β)) Δίνεται μια δίεδρη γωνία ΠεΣ, και ένα ημιεπίπεδο (ε,ρ). Το ημιεπίπεδο αυτό θα λέγεται *διχοτόμο ημιεπίπεδο*, αν χωρίζει τη δοσμένη δίεδρη σε δυο άλλες ίσες δίεδρες.



σχήμα (β)

θεώρημα Ο γ.τ. των σημείων που ισαπέχουν από τις έδρες μιας δίεδρης γωνίας, είναι το διχοτόμο ημιεπίπεδο της δοσμένης δίεδρης (σχήμα (β))

III. Αυτό το ξέρατε;

Σ' ένα βιβλίο διαβάσαμε:

″…Ο G.H.H. είχε πάει στο **Putney** με ταξί, το συνηθισμένο του μέσο μεταφοράς. Μπήκε στο δωμάτιο που ήταν ξαπλωμένος ο S.I.R..

Ο G.H.H. πάντα σε αμηχανία για το πώς να ξεκινήσει μια συζήτηση, είπε, ίσως χωρίς να χαιρετήσει και ασφαλώς σαν την πρώτη του παρατήρηση, ότι,

– «νομίζω πως ο αριθμός κυκλοφορίας του ταξί μου ήταν 1729. Μου φάνηκε ανιαρός αριθμός».

Ο S.I.R. απάντησε,

– «Όχι, G.H.H! Όχι, G.H.H! Είναι πολύ ενδιαφέρων αριθμός. Είναι ο μικρότερος αριθμός που εκφράζεται σαν το άθροισμα δύο κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους»...″

Ποιοι μαθηματικοί κρύβονται πίσω από τις δύο συντομογραφίες του παραπάνω διαλόγου;

[η απάντηση στο τέλος της στήλης]

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. ***τα μαθηματικά υδρεύουν τη Σάμο****(από Μάνθος)*


Γεωμορφολογία της περιοχής του Ορύγματος

Το **Ευπαλίνειο Όρυγμα** της Σάμου είναι ένα αξεπέραστο θαύμα της μηχανικής. Φτιάχτηκε τον **6ο π.Χ.** αιώνα, είχε μήκος 1,03 χλμ. και ξεκινούσε από δύο αντίθετες πλευρές, που συναντήθηκαν χωρίς καμία απόκλιση. Μια τέτοια περίπτωση είναι το Ευπαλίνειο Όρυγμα της Σάμου. Ένα αξεπέραστο θαύμα της μηχανικής και της τοπογραφίας το οποίο δημιουργήθηκε τον 6ο αιώνα π.Χ. και ακόμα και σήμερα προκαλεί τον θαυμασμό τόσο για το σχεδιασμό του όσο και για την αρτιότητα της εκτέλεσης του έργου.

Δεν είναι τυχαίο, άλλωστε, πως τον Ιούνιο του 2015, η Διεθνής Ένωση Σηράγγων (ITA – AITES) ανακήρυξε το Ευπαλίνειο Όρυγμα της Σάμου ως «Παγκόσμιο Σηραγγολογικό Τοπόσημο» (International Tunneling Landmark). Μιλάμε για ένα έργο που ήδη από το 1992 έχει περιληφθεί στον κατάλογο των μνημείων παγκόσμιας πολιτιστικής κληρονομιάς της **UNESCO**. Για περίπου 10 χρόνια, τα δυο συνεργεία άνοιγαν τη σήραγγα με βαριοπούλες, σφήνες και καλέμια. Χρειάστηκε να εξορυχτούν 12.500 τόνοι βράχου, να τοποθετηθούν 5.000 πήλινοι σωλήνες και να δαπανηθούν πολλά χρήματα από το κρατικό ταμείο, ώστε, άφθονο νερό να αρχίσει να ρέει στις κρήνες της πόλης!

Η αρχή της τήρησης των αναλογιών που εισήγαγε ο Ευπαλίνος επιστρατεύτηκε την περίοδο της Αναγέννησης και ακολουθείται και σήμερα στην κατασκευή των σηράγγων. Μέσα στη σήραγγα ο Ευπαλίνος έγραψε τη λέξη «παράδειγμα», που σημαίνει υπόδειγμα.

το Ευπαλίνειο Όρυγμα σήμερα

2ο θέμα. πλήθος των σπουδαιότερων εκδόσεων των "ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ" του Ευκλείδη

προλεγόμενα από τον φίλο της στήλης Πέτρο Δουκάκη λάβαμε εκτεταμένο σημείωμα με θέμα πόσες εκδόσεις των ″Στοιχείων″ του Ευκλείδη, έγιναν στην Ευρώπη. Εμείς, λόγω μόνιμης έλλειψης χώρου, θα δημοσιεύσουμε μόνο το τελικό συμπέρασμά του

«Η πρώτη προσπάθεια έκδοσης των *Στοιχείων* στη Δυτική Ευρώπη έγινε από τον **Regiomontanus** τη δεκαετία του **1460**, η οποία όμως έμεινε ημιτελής. Τελικά η πρώτη τυπωμένη έκδοση των *Στοιχείων* έγινε το 1482 στη Βενετία από τον γερμανό Erhard Ratdolt στα λατινικά και ακολούθησαν έκτοτε, πολλές εκδόσεις σε διάφορες χώρες και γλώσσες. Στη συνέχεια παραθέτουμε το πλήθος των σπουδαιότερων από αυτές τις εκδόσεις.

αιώνας: 15ος (01), 16ος (13), 17ος (21), 18ος (21), 19ος (21), 20ος (05)

3ο θέμα. "Hagia Sophia Journal o f Geometry"

προλεγόμενα από τον φίλο, Ανδρέα Χατζηπολάκη, λάβαμε ένα σημείωμα με το οποίο μας γνωρίζει με ένα τούρκικο μαθηματικό περιοδικό.

Γράφει ο Αντρέας: «από ανάρτηση του φίλου Kadir Altintas έμαθα για την ύπαρξη του Τούρκικου μαθηματικού περιοδικού ″**Hagia Sophia Journal o f Geometry**″. Προφανώς διάλεξαν το όνομα Αγία Σοφία γιατί ο ομώνυμος ναός "κρύβει" πολλή Γεωμετρία».

Ενώ μερικές από τις σχεδιαστικές του έννοιες είναι γνωστές, πολλές παραμένουν κρυμμένες. Τέλος, η έλλειψη ψηφιακών εργαλείων εμπόδισε έως τώρα την επαλήθευση και την ανάλυση προηγούμενων ευρημάτων. Σε αυτή την εργασία, εστιάζουμε στη Γεωμετρία του σχεδίου, στη Γεωμετρία της αψίδας και στη συμπεριφορά του φωτός στον αρχικό θόλο. Τα ευρήματα μας δείχνουν τη δυνατότητα ψηφιακών εργαλείων στην ανακάλυψη κρυφών χαρακτηριστικών και κανόνων σχεδίασης μιας δομής.

[(Wassim Jabi and Iakovos Potamianos, ″Geometry, Light, and Cosmology in the Church of Hagia Sophia″), (http://papers.cumincad.org//att/ijac 20075207 .content.pdf)] *περισσότερα στη διεύθυνση: https://dergipark.org.tr/tr/pub/hsjg)*

Ένα επτάγωνο επάνω από το σχέδιο της αψίδας της Αγίας Σοφίας

4^{o} θέμα. Το Fields Medal κι οι χώρες που τιμήθηκαν

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Αικατερίνης Δημήτρης, μας έστειλε τη λίστα με τις χώρες που, μαθηματικοί τους, τιμήθηκαν με το Fields Medal (το αποκαλούμενο και Nobel των Μαθηματικών). Οι αριθμοί μέσα στις παρενθέσεις δηλώνουν πόσες φορές αυτές οι χώρες τιμήθηκαν με το βραβείο αυτό. Προηγείται μια ολιγόλογη ιστορία του βραβείου.

«Το Fields Medal, επίσημα γνωστό ως ″Διεθνές Μετάλλιο για Εξαιρετικές Ανακαλύψεις στα Μαθηματικά″ (″International Medal for Outstanding Discoveries in Mathematics″) είναι ένα βραβείο που απονέμεται σε δύο, τρεις ή τέσσερις μαθηματικούς κάτω των 40 ετών, σε κάθε διεθνές συνέδριο της Διεθνούς Μαθηματικής Ένωσης (IMU), το οποίο διεξάγεται κάθε τέσσερα χρόνια. Θεσπίστηκε το 1924, η πρώτη βράβευση έγινε το 1936 κι η τελευταία το 2018. Το όνομα του βραβείου είναι προς τιμή του Καναδού μαθηματικού John Charles Fields (1863-1932), καθηγητής των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο.

Πλήθος μαθηματικών που βραβεύτηκαν: United States (13), France (12), Russia (8), United Kingdom (5), Japan (3), Germany (2), Iran (2), Italy (2), Belgium (2), Australia (2), China (01), Norway (01), Sweden(01), Finland (01), Canada (01), Israel (01), Austria (01), Switzerland (01), Ukraine (01), New Zealand (01), Brazil (01), Vietnam (01), South Africa (01)»

[**πηγή:**http://en.wikipwdia.org/wiki/List of countries by number of Fields_Medalists]

5ο θέμα Διαμάχη δύο σπουδαίων μαθηματικών μας, το...1932 !

προλεγόμενα από το «Ιστορικό Αρχείο Φροντιστών» (του Γιώργου Κωνσταντάρα, 4/02/2020), διαβάζουμε:

«Ένα αξιόλογο ντοκουμέντο ανήρτησε σήμερα ο Αντρέας Χατζηπολάκης στην σελίδα του. Το 1932 ο Ι.Γρ. Αυδής είναι φοιτητής στην Αθήνα και επικρίνει τον Αρ. Πάλλα για «λάθος άσκηση» και συνεχίζει ο Α.Χ.:

«Ο μαθηματικός Αριστείδης Πάλλας εξέδωσε τον μεσοπόλεμο ένα βιβλίο Γεωμετρίας. Ο τότε φοιτητής Μαθηματικών Ι. Γρ. Αυδής βρήκε ότι υπήρχε λάθος σε μια γεωμετρική πρόταση. Απάντησε ο Πάλλας ότι έγινε αλλοίωσή της κατά την εκτύπωση κι έδωσε την ορθή. Εδώ είναι η ανταπάντηση του Αυδή, στην οποία επισημαίνει ότι και η διορθωμένη πρόταση είναι λάθος.

Δεν έχω την πρώτη έκδοση της Γεωμετρίας του Πάλλα ούτε όσα προηγήθηκαν της ανταπάντησης αυτής. Από το κείμενο πάντως δεν είναι σαφές για ποια άσκηση πρόκειται».

Τέλος, παρατίθεται (σκαναρισμένο), το δακτυλογραφημένο πρωτότυπο της επιστολής Ι.Γρ. Αυδή, όπως το δημοσίευσε ο Α. Χατζηπολάκης. Εμείς, λόγω έλλειψης χώρου, αναδημοσιεύουμε μόνο την εισαγωγή της επιστολής:

«ΑΝΤΑΠΑΝΤΗΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΝ Κον ΑΡ. ΠΑΛΛΑΝ

ΕΠΙΚΡΙΣΙΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΗΣΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ

υπό Ι. ΓΡ. ΑΥΔΗ (φοιτητού)

Ο κ. Π. απήντησεν εις την χαρακτηρίζουσαν τους πρωτοπείρους βεβιασμένην (;) επίκρισίν μου. Δεν ηννόησα, γράφει, την αλλοίωσιν της προτάσεως κατά την εκτύπωσιν, που ηννόησαν και αρχάριοι μαθηταί του.

Ως υπεραρχάριος, μη εννοών ό,τι εννοούν αρχάριοι, αφού δεν είχον την τιμήν να γίνω μαθητής του, δεν εννοώ ούτε την συμπληρωθείσαν πρότασιν. Με την προστεθείσαν φράσιν υπό του κ. Π. περιορίσθη η γενικότης της προτάσεως και ισχύει και δια τα πεντακόρυφα. Αλλά εις τα εξακόρυφα; Τζίφος!……………………………………………

Ι. ΓΡ. ΑΥΔΗΣ

Αθήναι, Δεκέμβριος 1932»

6ο θέμα το πρόβλημα των τριών σωμάτων

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Κών/νος Κέκης, μας έστειλε κάποιες ιδέες που αφορούν το λεγόμενο "πρόβλημα των τριών σωμάτων". Σημειώνει: «...συνήθως η ολοκληρωμένη επίλυση ενός προβλήματος στα Μαθηματικά ανοίγει δρόμους για την επίλυση και άλλων προβλημάτων, για νέες ανακαλύψεις. Όμως, υπάρχουν προβλήματα που έχει αποδειχτεί ότι είναι μη πλήρως επιλύσιμα (δεν μπορούν να βρεθούν όλες οι λύσεις τους). Είναι δυνατόν ένα τέτοιο πρόβλημα να βοηθά στην πρόοδο τόσο των ίδιων των Μαθηματικών, όσο και των άλλων επιστημών, οι οποίες τα χρησιμοποιούν για την επίλυση των δικών τους προβλημάτων;»

Η πρώτη περιοδική λύση στο πρόβλημα των τριών σωμάτων, που ανακάλυψαν οι Μουρ, Σενσινέρ και Μοντγκόμερι. Τα τρία σώματα ίσης μάζας κινούνται πάνω σε τροχιά σχήματος 8, κυνηγώντας το ένα το άλλο χωρίς να συγκρούονται

«Ο μαθηματικός γρίφος, που ονομάστηκε **"πρόβλημα των τριών σωμάτων"**, ένα μη πλήρως επιλύσιμο πρόβλημα, αποδεικνύει πάλι και πάλι, στην ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης ότι κάτι τέτοιο είναι πράγματι δυνατό.

Το "πρόβλημα των τριών σωμάτων" πάει πολύ πίσω στο χρόνο. Ο Ισαάκ Νεύτων αρχικά διατύπωσε και έλυσε το πρόβλημα των δύο σωμάτων, στην περίφημη δημοσίευσή του «Principia», το 1687. Αναρωτήθηκε: «Πώς θα κινηθούν δύο μάζες στο χώρο αν η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω τους είναι η μεταξύ τους βαρυτική έλξη;» Ο Νεύτων μορφοποίησε το ερώτημα ως πρόβλημα επίλυσης ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, που προσδιορίζουν την κίνηση ενός αντικειμένου, με βάση την τρέχουσα θέση και ταχύτητά του. Το σύστημα αυτό το έλυσε πλήρως, βρήκε αυτό που λέγεται στα Μαθηματικά: αναλυτική λύση. Στην ουσία οι λύσεις, που αποκαλούνται και τροχιές, προβλέπουν ότι τα δύο σώματα θα κινούνται σε κωνικές τομές (καμπύλες που προκύπτουν ως τομές ενός επιπέδου και ενός κώνου), δηλαδή κύκλο, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή. Μπορεί η NASA να ικανοποιείται με τις προσεγγίσεις των λύσεων στο «πρόβλημα των τριών σωμάτων», αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο με τους μαθηματικούς, οι οποίοι συνέχισαν και συνεχίζουν να αναζητούν κι άλλες οικογένειες ακριβών λύσεων. Ετσι το 1993, ο Κρις Μουρ, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους και το 2000 με αναλυτικό τρόπο ο Αλέν Σενσινέρ και ο Ρίτσαρντ Μοντγκόμερι ανακάλυψαν την πρώτη γνωστή περιοδική λύση στο πρόβλημα των τριών σωμάτων, για την περίπτωση που έχουν και τα τρία την ίδια μάζα, οπότε κινούνται πάνω σε ένα επίπεδο, ακολουθώντας τροχιά σχήματος 8, κυνηγώντας το ένα το άλλο, χωρίς ποτέ να συγκρούονται. Η γνωστοποίηση αυτής της ανακάλυψης οδήγησε τον Κάρλες Σιμό να ανακαλύψει εκατοντάδες τροχιές για το γενικότερο πρόβλημα των ν-σωμάτων ίσης μάζας, τις οποίες ονόμασε «χορογραφίες». Η λύση του σχήματος 8 χρησιμοποιήθηκε μάλιστα και στην τριλογία επιστημονικής φαντασίας «Το Πρόβλημα των Τριών Σωμάτων» του Κινέζου Λιου Σιξίν, που πήρε το 2015 το βραβείο Χιούγκο, αντίστοιχο του Νόμπελ Λογοτεχνίας στην κατηγορία της επιστημονικής φαντασίας.

Οι μαθηματικοί που ασχολούνται με το «πρόβλημα των τριών σωμάτων», άνθρωποι με υπομονή και επιμονή, γνωρίζουν ότι δεν βρίσκονται πιο κοντά στην επίλυσή του με τη συμβατική έννοια, αλλά στο μεταξύ έχουν μάθει πολλά. Το πρόβλημα αυτό συνδέει τρεις κλάδους των Μαθηματικών: την Τοπολογία, τη Γεωμετρία και τη Δυναμική και η αναζήτηση λύσεων οδηγεί σε προόδους και στους τρεις. Αρκετή από τη νέα γνώση δεν έχει βρει ακόμη εφαρμογή. Αυτό όμως είναι συχνό φαινόμενο στα σύγχρονα Μαθηματικά, όπου αφηρημένες έννοιες και δυσνόητα θεωρήματα αναπτύσσονται καιρό πριν κάποιος βρει πρακτική χρήση γι' αυτά»

V. ειδήσεις – ειδησούλες

1. από συνέντευξη του Τεύκρου Μιχαηλίδη στην Ελένη Γκίκα (22-01-2020), μεταξύ άλλων διαβάζουμε: «***ερώτηση:*** Τι άλλο συνδέει τα Μαθηματικά με το αστυνομικό μυθιστόρημα;
–Ο όρος «**απόδειξη**» είναι το κοινό σημείο αναφοράς ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Λογοτεχνία του μυστηρίου. «Τα συμπεράσματά του ήταν το ίδιο αδιαμφισβήτητα με τις προτάσεις του Ευκλείδη», λέει για τον Scherlock Holmes ο Watson, γεμάτος θαυμασμό. Και όταν ο Arthur Conan Doyle θέλει να βρει έναν κακοποιό ικανό να τα βάλει με τον ήρωά του, επιλέγει τον Moriarity που ήταν «…Ιδιαίτερα ταλαντούχος στα Μαθηματικά·στα είκοσι ένα του χρόνια δημοσίευσε μια μελέτη σχετικά με το διώνυμο του Νεύτωνα που του εξασφάλισε μια έδρα σ' ένα από τα πανεπιστήμιά μας…»

2. στις (24.02.2020), στην επιστημονική σελίδα αθηναϊκής εφημερίδας, διαβάζουμε: ″Ο Γιάννης Ηλιόπουλος, είναι μέλος της γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών και έχει τιμηθεί με τουλάχιστον επτά μεγάλα διεθνή βραβεία. Το όνομά του έχει συνδεθεί και με τη θεωρία της Υπερσυμμετρίας″. Ο ίδιος μεταξύ των άλλων, τόνιζε: «...η Επιστήμη είναι ίσως το μόνο πεδίο που ενώνει τους ανθρώπους. Για όλους, …, για όλους 1+1=2. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα δεν έχει εθνικότητα, ούτε θρησκεία. Ίσως γι' αυτό σε όλες τις χώρες και σε όλες τις ιδεολογίες κάνουμε την ίδια Επιστήμη»

3. να γιατί η 14 Μάρτη έχει ανακηρυχθεί ως παγκόσμια ημέρα του ″αριθμού π″: Όλοι μας γνωρίζουμε ότι ο αριθμός π=3,14. Γνωρίζουμε, επίσης ότι για να γράψουμε συντομογραφικά την ημερομηνία ″14 Μάρτη″, γράφουμε ″14/3″ (δηλ. πρώτα γράφουμε την ημέρα και μετά το μήνα). Οι Αγγλοσάξονες, αυτή την ημερομηνία, την γράφουν 3/14 (πρώτα τον μήνα και μετά την ημέρα). Αν, σ' αυτή τη γραφή, αντικαταστήσουμε το ″/″ με το κόμμα (,), παίρνουμε το ″3,14″, δηλ. τον γνωστό μας αριθμό ″π″.

4. Από την έγκριτη Μαθηματική Ιστοσελίδα ″mathematica.gr″, δανειζόμαστε την παρακάτω είδηση που δημοσιοποιήθηκε «από **mick7**» (Παρ. Φεβ 28, 2020 8:44 pm) και αφορά την έκδοση του νέου βιβλίου, του Amol Sasane (Professor of Mathematics - London School of conomics). Εμείς ευχαρίστως αναδημοσιεύουμε την πληροφορία. Όσοι σπουδάσουν ″Οικονομία″, μπορεί να τους βοηθήσει. «Ο Amol Sasane είναι καθηγητής στο London School of Economics (LSE). Έχει γράψει κάποια βιβλία στα Μαθηματικά σε Πανεπιστημιακό Επίπεδο ιδιαίτερα ***αναλυτικά*** για αρχάριους. Μπορείτε να τα δείτε στην ιστοσελίδα που διατηρεί...» (http://personal.lse.ac.uk/sasane/)

$$\boxed{1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3}$$

5. Φαίνεται, πως τα Μαθηματικά μπορούν να εμπνέουν τις καλές Τέχνες και, τελευταία, τον κινηματογράφο. Έτσι, μπορεί να εξηγηθεί ο μαθηματικός τίτλος της τηλεοπτικής σειράς «***Trigonometry***». Η σειρά της Αθηνάς Τσαγγάρη στο BBC είναι ακριβώς ό,τι θα έπρεπε να έχει η ελληνική τηλεόραση. Στην Ιστοσελίδα ″Επιστολή Νέων της Σταγόνας″, διαβάζουμε: Βρισκόμαστε στην 70ή Berlinale. Όπως είπαμε, πρόκειται για ένα φεστιβάλ που είναι εν γένει ανοιχτό προς τις τηλεοπτικές σειρές, δίνοντάς τους χώρο να απλωθούν και να εκτιμηθούν στη μεγάλη οθόνη πριν κατευθυνθούν προς τη μικρή. Μια απ' αυτές που είδαμε φέτος εδώ είναι και το ″***Trigonometry***″, συμπαραγωγή του BBC και του HBO που πρόκειται να προβληθεί φέτος στα δύο τηλεοπτικά δίκτυα. Ανάμεσα στα ονόματα των συντελεστών ξεχωρίζει φυσικά η Αθηνά Τσαγγάρη, η σκηνοθέτρια των Attenberg και Chevalier, που έχει γυρίσει τα πρώτα πέντε επεισόδια της σειράς (από τα 8 συνολικά)»

*(**πηγή:**https://mail.yahoo.com/d/folders/4/messages/36107?.intl=gr&.lang=el-GR&.partner=none&src=fp)*

6. «...Μπορεί να μην θυμάστε με ακρίβεια τα μαθήματα Φυσικής στο σχολείο, πιθανότατα, όμως, θυμάστε ότι μαζί με αυτά δεν μαθαίνατε ιστορίες, γράφει ο αρθρογράφος **Colin Marshall** στη διαδικτυακή πλατφόρμα *Open Culture*. Και υπενθυμίζει ότι πίσω από κάθε θεωρία και εξίσωση που προσπαθούσατε να κατανοήσετε στα σχολικά χρόνια κρύβεται μια ενδιαφέρουσα ιστορία. Όλη η επιστήμη, άλλωστε, είναι συνδεδεμένη με ιστορίες και αφηγήσεις τις οποίες, τις περισσότερες φορές, οι εκπαιδευτικοί και τα προγράμματα σπουδών παραβλέπουν» (***πηγή:*** Open Culture)

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;

Πίσω απ' αυτές τις συντομογραφίες κρύβονται δυο μεγάλοι μαθηματικοί·οι Godfrey Harold Hardy (1877-1947) και Srinivasa Iyengar Ramanujan (1887-1920), αντίστοιχα. Η λύση του προβλήματος:

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3.$$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΥΖΗΤΗΣΕΙΣ Ι

Νίκος Αντωνόπουλος

Καθηγητής: Παιδιά γειά σας. Σήμερα θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή της παραγοντοποίησης του τριωνύμου στην απλοποίηση κλασματικών παραστάσεων.

Μαθητής Β: Ωραία!

Καθηγητής: Φαντάζομαι ότι θυμάστε τα σχετικά με την παραγοντοποίηση του τριωνύμου.

Μαθητής Α: Φυσικά, δεν είναι και τίποτα δύσκολο.

Καθηγητής: Μάλιστα… Ας ξεκινήσουμε με την παράσταση $A = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - x}$

Τι λέτε. Μπορείτε να δουλέψετε;

Μαθητής Β: Ναι. Να ξεκινήσω να λέω εγώ;

Καθηγητής: Βεβαίως.

Μαθητής Β: Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25 - 24 = 1$ και ρίζες τους αριθμούς

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{4} = \frac{3}{2} \text{ και } x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{4} = 1$$

Μαθητής Α: Περίμενε λίγο, … για να καταλάβω. Λύνεις εξίσωση και ανάμεσα στις ρίζες βάζεις το **«και»;**

Μαθητής Γ: Μήπως θα ήταν καλύτερα να έβαζες το **«ή».**

Μαθητής: Έχει δίκιο.

Καθηγητής: Για να δούμε λίγο καλύτερα τι έχουμε. Εδώ, ο συμμαθητής σας έχει δώσει χωριστό όνομα σε κάθε ρίζα και αυτό που κάνει ουσιαστικά είναι να γράψει τα στοιχεία που περιέχει το σύνολο λύσης της αντίστοιχης εξίσωσης, οπότε δεν βλέπω κάποιο πρόβλημα. Φυσικά και θα ήταν πρόβλημα αν έγραφε

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } x = \frac{3}{2}$$

Μαθητής Α: Να συνεχίσω εγώ;

Καθηγητής: Ναι

Μαθητής Α: Ο αριθμητής γράφεται

$$(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Μαθητής Γ: Είσαι σίγουρος ότι δεν έχεις ξεχάσει κάτι;

Μαθητής Γ: Α… ναι. Ο αριθμητής γράφεται

$$2(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Καθηγητής: Μπορούμε να περάσουμε τον συντελεστή στο εσωτερικό ώστε να μην έχουμε κλάσμα;

Μαθητής Α: Αυτό είναι εύκολο. Τον αριθμητή μπορούμε να τον γράψουμε $(2x-2)(2x-3)$

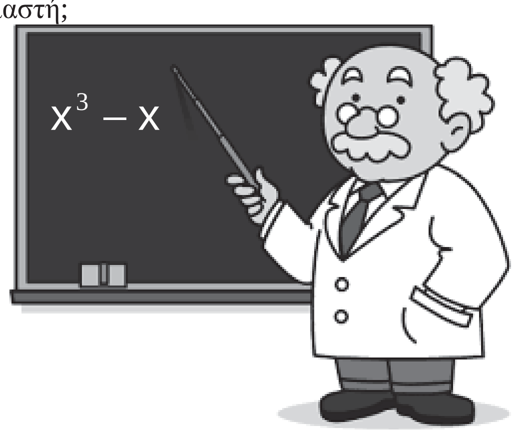
Μαθητής Γ: Δηλαδή, … αν εγώ κάνω τώρα την επιμεριστική θα καταλήξω στο αρχικό τριώνυμο;

Μαθητής Β: Όχι βέβαια, αφού από το πρώτο ήδη αποτέλεσμα παίρνουμε $4x^2$ και δεν ξαναπαρουσιάζεται όρος με x^2.

Καθηγητής: Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα γινόμενο παραγόντων με κάποιο αριθμό, τότε πολλαπλασιάζουμε μόνο έναν όρο του γινομένου με αυτόν.

Μαθητής Α: Άρα, αυτό που μας εξυπηρετεί είναι να γράψουμε τον αριθμητή $(x-1)(2x-3)$

Καθηγητής: Ωραία, να δούμε λίγο και τον παρονομαστή;



Μαθητής Α: Να λέω εγώ;

Καθηγητής: Ναι.

Μαθητής Α: Ισχύει, $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

Καθηγητής: Φαντάζομαι τώρα είναι εύκολο να συνεχίσετε.

Μαθητής Β: Αν δεν υπάρχει αντίρρηση, να συνεχίσω εγώ;

Καθηγητής: Πάμε.

Μαθητής Β: Είναι $A = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{x(x+1)}$

Μαθητής Γ: Καλά περιορισμούς δεν θα πάρουμε;

Μαθητής Β: Α… ναι ο αριθμός x δεν πρέπει να είναι 0, ούτε -1.

Καθηγητής: Ας θεωρήσουμε ότι έχετε δίκιο. Αν τώρα σας έδινα να λύσετε την εξίσωση $A=-\frac{1}{2}$, τι θα κάνατε;

Μαθητής Β: Θα έγραφα ότι με $x\neq 0$ και $x\neq -1$ έχω

$$\frac{2x-3}{x(x+1)}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x-6=-x^2-x\Leftrightarrow x^2+5x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-6$$

Καθηγητής: Μάλιστα. Και δεν μου λέτε οι λύσεις που βρήκαμε δεν πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση αν θεωρήσω την παράσταση Α στην αρχική της μορφή;

Μαθητής Α: Εννοείται.

Καθηγητής: Μπορείτε να αντικαταστήσετε την πρώτη ρίζα στην αρχική παράσταση να δούμε αν θα πάρουμε αποτέλεσμα ίσο με $-\frac{1}{2}$;

Μαθητής Β: Ναι… Ωχ, μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Καθηγητής: Γιατί πιστεύετε ότι συμβαίνει αυτό;

Μαθητής Γ: Μάλλον έχει να κάνει με την απλοποίηση.

Καθηγητής: Όταν μας δίνουν μια παράσταση που περιέχει μεταβλητές, πρέπει πριν κάνουμε οτιδήποτε άλλο, να ξεκαθαρίσουμε ποιο είναι το σύνολο στο οποίο η παράσταση αυτή έχει νόημα πραγματικού αριθμού, δηλαδή να βρούμε, ή να περιγράψουμε ποιες είναι οι επιτρεπόμενες τιμές για την μεταβλητή μας.

Μπορείτε τώρα να μου βρείτε ποιες είναι οι επιτρεπόμενες τιμές για το x

Μαθητής Γ: Η παράσταση Α ορίζεται μόνο όταν:

$$x^3-x\neq 0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\neq 0 \text{ και } x\neq 1 \text{ και } x\neq -1$$

Άρα, ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$, οπότε

$$A=\frac{2x+3}{x(x+1)},\ x\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$$

Έτσι, τώρα εξηγείται και γιατί ο αριθμός 1 μας δημιούργησε πρόβλημα όταν επιχειρήσαμε να τον αντικαταστήσουμε στη θέση του x στην αρχική παράσταση.

Καθηγητής: Φαντάζομαι τώρα που ξεκαθαρίσαμε μερικά πράγματα, δεν θα υπάρξει πρόβλημα με το επόμενο παράδειγμα.

Μαθητής Β: Μπορώ να ρωτήσω κάτι;

Καθηγητής: Εννοείται.

Μαθητής Β: Τι εννοούσατε παραπάνω όταν λέγατε να περιγράψουμε τις επιτρεπόμενες τιμές;

Καθηγητής: Όταν μιλούσαμε για σύνολα είχαμε πει ότι ένα σύνολο μπορούμε να το παρουσιάσουμε είτε γράφοντας όλα τα στοιχεία του, είτε περιγράφοντας μια ιδιότητα που τα χαρακτηρίζει. Στην περίπτωσή μας δεν είναι πάντα εύκολο να είμαστε σε θέση να προσδιορίζουμε για ποιες τιμές του x μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Μαθητής Α: Και τότε τι κάνουμε;

Καθηγητής: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{x^2-x}{x^4-x^3-2x^2+8x-6}=\frac{1}{x^2+1},\quad (1)$$

Μαθητής Α: Μπορούμε να λύνουμε εμείς τέτοιες εξισώσεις;

Καθηγητής: Ας μην βιαζόμαστε. Πάντως αυτό που δεν μπορούμε να κάνουμε είναι να βρούμε το σύνολο στο οποίο ορίζεται η εξίσωση.

Μαθητής Β: Και τι κάνουμε;

Καθηγητής: Το περιγράφουμε. Δηλαδή γράφουμε

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $A=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^4-x^3-2x^2+8x-6=0\}$

Μαθητής Γ: Κατάλαβα, και μετά δουλεύουμε στο Α.

Καθηγητής: Ακριβώς! Μπορείς να τη λύσεις;

Μαθητής Γ: Με $x\in A$ έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow (x^3-x)(x^2+1)=x^4-x^3-2x^2+8x-6$$

$$\Leftrightarrow x^4-x^3+x^2-x=x^4-x^3-2x^2+8x-6$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-9x+6=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2$$

Εξετάζουμε τώρα, αν οι λύσεις που βρήκαμε περιέχονται στο Α. Εύκολα βρίσκουμε ότι ο αριθμός 1 μηδενίζει τον παρονομαστή, οπότε δεν περιέχεται στο Α και συνεπώς δεν είναι αποδεκτή. Ο αριθμός 2 περιέχεται στο Α και είναι λύση της (1).

Καθηγητής: Πολύ σωστά.

Μαθητής Α: Γιατί ενώ ο περιορισμός πρέπει να έχει διαφορετικό από το μηδέν, πιο πάνω που γράψαμε το Α βάλαμε: $x^4-x^3-2x^2+8x-6=0$;

Καθηγητής: Αν κοιτάξεις προσεκτικά, θα δεις ότι τις τιμές αυτές τις έχουμε εξαιρέσει.

Μαθητής Β: Από περιέργεια, αν εγώ ήμουν καλός στις παραγοντοποιήσεις, δεν θα μπορούσα να βρω τις ρίζες του παρονομαστή και να τις εξαιρέσω; Γιατί να κάνω την περιγραφή που κάναμε;

Καθηγητής: Εδώ, ο παρονομαστής που έχω γράψει έχει δυο ρίζες, τη μονάδα και έναν άλλο αριθμό πολύ κοντά στο $-2{,}18$. Φαντάζομαι είναι λίγο δύσκολο να κάνεις παραγοντοποίηση και να βρεις κάπου παράγοντα που να δίνει τη δεύτερη ρίζα. Αλλά, ας τελειώνουμε με την παρεμβολή και ας πάρουμε την παράσταση $A=\dfrac{x^2-3\alpha x+2\alpha^2}{x^3-\alpha^3}$

Τι λέτε μπορείτε να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία; Ξεκινάτε με τους περιορισμούς.

Μαθητής Γ: Εδώ ο περιορισμός είναι

$$x^3-\alpha^3\neq 0 \Leftrightarrow x^3\neq\alpha^3 \Leftrightarrow x\neq\alpha$$

Μαθητής Β: Εγώ έχω ξεκινήσει λίγο διαφορετικά

$$x^3-\alpha^3\neq 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\neq\alpha \text{ και } x^2+\alpha x+\alpha^2\neq 0$$

Μαθητής Α: Τι λίγο διαφορετικά μας λες! Εσύ βγάζεις ένα κάρο περιορισμούς!

Καθηγητής: Πως εξηγείται το αποτέλεσμα;

Μαθητής Β: Εγώ πως πρέπει να συνεχίσω τώρα;

Μαθητής Γ: Μήπως τελικά οι περιορισμοί δεν διαφέρουν;

Μαθητής Α: Δεν ξέρω πως φαίνονται από εκεί που είσαι εσύ, πάντως εμένα μου φαίνονται περισσότεροι οι δεύτεροι περιορισμοί.

Καθηγητής: Μπορεί κάποιος να δουλέψει λίγο τον περιορισμό με το τριώνυμο;

Μαθητής Β: Ναι. Το τριώνυμο $x^2+\alpha x+\alpha^2$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2-4\alpha^2=-3\alpha^2$

που είναι αρνητική οπότε δεν μηδενίζεται και ο περιορισμός τελικά είναι ίδιος με τον δικό μου.

Καθηγητής: Τι έχουμε πει ότι είναι πάντα ένα τέλειο τετράγωνο;

Μαθητής Α: Θετικό.

Καθηγητής: Όχι ακριβώς.

Μαθητής Α: Α, … ναι. Μη αρνητικό.

Καθηγητής: Οπότε η διακρίνουσα που βρήκαμε τι είναι;

Μαθητής Β: Μη θετική!

Καθηγητής: Άρα, μπορεί να είναι και μηδέν. Τι θα συμβεί αν είναι μηδέν;

Μαθητής Γ: Τότε θα είναι $\alpha=0$ οπότε ο παρονομαστής είναι x^3 και ο περιορισμός είναι $x\neq 0$

Καθηγητής: Να συνοψίσουμε:

Αν $\alpha\neq 0$ τότε και στις δυο περιπτώσεις ο περιορισμός είναι $x\neq\alpha$, ενώ αν $\alpha=0$, ο περιορισμός πάλι και στις δυο περιπτώσεις είναι, $x\neq 0$. Επομένως, έχουμε σε κάθε περίπτωση τον ίδιο περιορισμό. Να πάμε λίγο και στον αριθμητή;

Μαθητής Γ: Να το λέω εγώ.

Καθηγητής: Εντάξει μπορείς να ξεκινήσεις.

Μαθητής Γ: Ο αριθμητής είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=9\alpha^2-8\alpha^2=\alpha^2$ και ρίζες

$$x=\frac{3\alpha\pm\alpha}{2}$$

Μαθητής Α: Πως το έκανες αυτό; Έχω βαρεθεί να ακούω ότι το « η ρίζα δεν απλοποιεί τετράγωνο» και εσύ το απλοποίησες; Δεν έχουμε πει ότι βάζουμε απόλυτο;

Καθηγητής: Έχει δίκιο. Γενικά αυτή η «απλοποίηση» που ανέφερες δεν είναι επιτρεπτή και πραγματικά ισχύει $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$. Μήπως θυμάσαι με τι είναι ίση η απόλυτη τιμή του α;

Μαθητής Α: Ναι. Η απόλυτη τιμή του α είναι ίση με τον α, αν $\alpha\geq 0$, ή με τον $-\alpha$, αν $\alpha<0$

Καθηγητής: Μπορεί κάποιος να μας το πει ποιο συνεπτυγμένα;

Μαθητής Γ: Ναι. $|\alpha|=\pm\alpha$

Καθηγητής: Απ' ότι βλέπετε η ύπαρξη του διπλού προσήμου $(\pm)$ δικαιώνει τον συμμαθητή σας, οπότε σ΄ αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται να βάλουμε απόλυτο. Ας προχωρήσουμε λοιπόν.

Μαθητής Γ: Συνεχίζω. Οι ρίζες του αριθμητή είναι οι $x_1=2\alpha$ και $x_2=\alpha$, οπότε ο αριθμητής παραγοντοποιείται $x^2-3\alpha x+2\alpha^2=(x-\alpha)(x-2\alpha)$

Καθηγητής: Άρα, η παράσταση που είχαμε πως γράφεται;

Μαθητής Γ: Η παράσταση γράφεται

$$A=\frac{(x-\alpha)(x-2\alpha)}{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}=\frac{x-2\alpha}{x^2+\alpha x+\alpha^2},\ x\in\mathbb{R}-\{\alpha\}$$

Μαθητής Β: Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τον αριθμητή ως τριώνυμο του α;

Καθηγητής: Φυσικά, για τις ανάγκες της παραγοντοποίησης μπορούσαμε να το κάνουμε. Επίσης μπορούμε να δουλέψουμε και με άλλους τρόπους.

Μαθητής Γ: Τι εννοείται; Θα μπορούσαμε εδώ να κάνουμε κάτι άλλο;

Καθηγητής: Φυσικά. Δεν πρέπει να ξεχνάμε τους κλασικούς τρόπους παραγοντοποίησης που έχετε συναντήσει παλιότερα.

Μαθητής Α: Εννοείται με διάσπαση όρου;

Καθηγητής: Ακριβώς!

Μαθητής Α: Πραγματικά. Ο αριθμητής γράφεται

$$x^2-3\alpha x+2\alpha^2=x^2-\alpha x-2\alpha x+2\alpha^2$$
$$=x(x-\alpha)-2\alpha(x-\alpha)=(x-\alpha)(x-2\alpha)$$

οπότε η συνέχεια είναι ίδια με την προηγούμενη.

Καθηγητής: Τι θα λέγατε τώρα να δούμε κάτι λίγο διαφορετικό.

Μαθητής Α: Αυτά είναι τα καλύτερα.

Καθηγητής: Ωραία λοιπόν. Μπορείτε να μου βρείτε για ποιες τιμές του ακέραιου κ, ο αριθμός

$$\alpha=\frac{5\kappa-10}{2\kappa^2-7\kappa+6}$$ είναι ακέραιος;

Μαθητής Β: Πως ξεκινάμε εδώ;

Μαθητής Α: Μα είναι απλό! Με παραγοντοποίηση τριωνύμου.

Μαθητής Γ: Πως το κατάλαβες;

Μαθητής Α: Μα αυτά δεν κάνουμε τώρα;

Μαθητής Γ: Έχεις δίκιο… Αφοπλιστικό επιχείρημα. Ας ξεκινήσουμε από τον παρονομαστή. Το τριώνυμο $2\kappa^2-7\kappa+6$ του παρονομαστή έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και $\frac{3}{2}$, οπότε γράφεται:

$$2\kappa^2-7\kappa+6=2(\kappa-2)\left(\kappa-\frac{3}{2}\right)=(\kappa-2)(2\kappa-3)$$

οπότε το κ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός εκτός από το 2 και το $\frac{3}{2}$

Μαθητής Β: Μα δεν είπαμε ότι ο αριθμός κ είναι ακέραιος;

Μαθητής Γ: Σωστά. Έχεις δίκιο. Το σύνολο ορισμού της παράστασης είναι το $\mathbb{Z}-\{2\}$. Σε ότι αφορά στον αριθμό $\frac{3}{2}$, αυτός δεν περιέχεται στο σύνολο στο οποίο αναφερόμαστε δηλαδή το $\mathbb{Z}$, οπότε δεν αποτελεί περιορισμό.

Καθηγητής: Πολύ σωστά. Ας δούμε λίγο όλο το κλάσμα.

Μαθητής Α: Ο αριθμητής δεν έχει καμία δυσκολία, αφού $5\kappa-10=5(\kappa-2)$. Άρα το κλάσμα απλοποιείται, οπότε έχουμε:

$$\alpha=\frac{5\kappa-10}{2\kappa^2-7\kappa+6}=\frac{5(\kappa-2)}{(\kappa-2)(2\kappa-3)}=\frac{5}{2\kappa-3}$$

με $\kappa\in\mathbb{Z}-\{2\}$. Και τώρα τι κάνουμε;

Καθηγητής: Μήπως υπάρχει κάποια ιδέα;

Μαθητής Α: Τι ιδέα! Φαντάζομαι θα υπάρχουν πολλοί αριθμοί και πώς να τους βρούμε;

Καθηγητής: Εδώ αρκεί να σκεφτούμε λίγο απλά. Σε όλοι τη διάρκεια της λύσης πρέπει να θυμόμαστε τι μας ζητάνε και τι εργαλεία έχουμε στα χέρια μας.

Μαθητής Γ: Ωραία. Εδώ μας ζητάνε ο αριθμός α να είναι ακέραιος, και ο κ είναι επίσης ακέραιος, αλλά εμείς βρήκαμε ένα κλάσμα

Καθηγητής: Το κλάσμα, όπως αποκαλείς το αποτέλεσμα, θα μπορούσε να είναι ακέραιος;

Μαθητής Β: Μόνο αν ο παρονομαστής του είναι ίσος με τη μονάδα, δηλαδή αν $2\kappa-3=1\Leftrightarrow\kappa=2$ αυτό όμως αποκλείεται. Ααα ... δεν είναι σωστό αυτό που κάνετε... Δηλαδή βρήκαμε μια τιμή και πέσαμε πάνω στον περιορισμό!

Καθηγητής: Μην βιάζεσαι. Δεν έχουμε τελειώσει.

Μαθητής Α: Δεν θα μπορούσε ο παρονομαστής να είναι ίσος με -1;

Μαθητής Β: Γιατί όχι. Τότε θα είχαμε

$$2\kappa-3=-1\Leftrightarrow\kappa=1$$

Με $\kappa=1$ έχουμε $\alpha=-5$ που είναι ακέραιος.

Καθηγητής: Εξακολουθώ να πιστεύω ότι δεν έχουμε τελειώσει. Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση;

Μαθητής Γ: Τώρα κατάλαβα. Ο α είναι ακέραιος σε κάθε περίπτωση που ο παρονομαστής είναι διαιρέτης του 5 δηλαδή είναι ±1 ή ±5

Καθηγητής: Πολύ σωστά.

Μαθητής Γ: Την περίπτωση με τις μονάδες την πήραμε, οπότε απομένουν οι περιπτώσεις

- $2\kappa-3=5\Leftrightarrow\kappa=4$
- $2\kappa-3=-5\Leftrightarrow\kappa=-1$

Άρα, όλες οι τιμές του κ που ψάχναμε περιέχονται στο σύνολο $\{-1, 1, 4\}$.

Μαθητής Β: Τόσο απλό ήταν τελικά.

Καθηγητής: Πολλές φορές τα Μαθηματικά είναι εύκολα όταν σκεπτόμαστε **απλά**. Απλώς, το δύσκολο στα Μαθηματικά είναι να σκεφτόμαστε απλά.

Θέματα για εξάσκηση ...

Λαζαρίδης Χρήστος

Στο παρακάτω άρθρο παρουσιάζουμε δύο διαγωνίσματα **ευρύτερου ενδιαφέροντος** για την εμπέδωση της ύλης. Σκοπός είναι ο μαθητής να μπορεί να έχει μέσα από τη σχολική πραγματικότητα ένα πρώτο βαθμό **αυτοαξιολόγησής του** σε κανονικές συνθήκες.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ $\boxed{1}$

ΘΕΜΑ Α

Α1) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$, έχει ρίζες x_1, x_2, να αποδείξετε ότι:

$x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$. **Μονάδες 13**

Α2) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το γράμμα (A), αν η πρόταση είναι αληθής, ή (Ψ) αν η πρόταση είναι ψευδής.

a) Αν $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ τότε:
$\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow (\alpha\neq 0\, \kappa\alpha\iota\, \beta\neq 0)$.

b) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

c) **Αν** $\rho>0$, **τότε:** $|x|>\rho \Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x<\rho$.

d) Αν $\alpha\geq 0$, τότε, $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$.

e) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$ έχει ρίζες x_1, x_2, τότε σε κάθε περίπτωση:
$\alpha x^2+\beta x+\gamma=(x-x_1)(x-x_2)$.

f) Αν $A(\alpha,\beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου τότε το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων το είναι $B(-\alpha,-\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Β

Β1) Να λύσετε την ανίσωση, $|x-1|\geq 3$. **Μονάδες 8**

Β2) Να λύσετε την ανίσωση, $5x-x^2\geq 0$. **Μονάδες 8**

Β3) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x)=\sqrt{|x-1|-3}-\dfrac{1}{\sqrt{5x-x^2}}$. **Μονάδες 9**

Ο μαθητής να μπορεί να έχει μέσα από τη σχολική πραγματικότητα ένα πρώτο βαθμό αυτο αξιολόγησης του σε πραγματικές συνθήκες.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ο πραγματικός α, τέτοιος, ώστε:

$$\alpha=\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{2}.$$

Γ1) Να αποδείξετε ότι: $\alpha=2$. **Μονάδες 8**

Γ2) Να λύσετε την εξίσωση:

$\dfrac{|x-\alpha|}{2}-\dfrac{|\alpha-x|-3}{4}=\dfrac{3}{2}$. **Μονάδες 8**

Γ3) Να λύσετε την εξίσωση:

$x^{11}+\alpha x^6-\alpha x^5+\alpha^2=0$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-2}$.

Δ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

Δ2) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=|x|-3, x\in A$. **Μονάδες 6**

Δ3) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

Δ4) Να λύσετε την ανίσωση:

$f(x)\leq 2x^2-4, x\in A$. **Μονάδες 7**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ $\boxed{2}$

ΘΕΜΑ Α

Α1) Να αποδείξετε ότι: $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα; **Μονάδες 13**

Α2) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το γράμμα (A), αν η πρόταση είναι αληθής, ή (Ψ) αν η πρόταση είναι ψευδής.

a) $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) Αν $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος τότε, $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$.

c) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ είναι μία ευθεία γραμμή.

d) Με $[\alpha,\beta]$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών x με $\alpha<x<\beta$.

e) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$, έχει διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2.$$

f) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0,$ γίνεται ετερόσημο του α μόνο όταν $\Delta>0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.
Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Β

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις- ανισώσεις:

Β1) $x^2+3x-4=0$ και $x^2+3x-4<0.$
Μονάδες 8

Β2) $x^2+3|x|-4=0$ και $x^2+3|x|-4<0.$
Μονάδες 8

Β3) $\dfrac{x^2+3|x|-4}{x^2+3x-4}=1.$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση

$A=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}.$

Γ1) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}.$
Μονάδες 8

Γ2) Αν $A=0,$ να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}.$
Μονάδες 8

Γ3) Αν ισχύει $1<x<2,$ να αποδείξετε ότι: η εξίσωση $A=3$ είναι αδύνατη. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω το τριώνυμο $4x^2-4\lambda x+(4\lambda-3), \lambda\in\mathbb{R}.$

Δ1) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=16(\lambda-1)(\lambda-3).$ **Μονάδες 6**

Δ2) Να βρείτε τις τιμές του λ έτσι ώστε το τριώνυμο να έχει δύο ρίζες άνισες. **Μονάδες 6**

Δ3) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 και

$4x_1+4x_2+4x_1x_2-29=0,$ να αποδείξετε ότι:

$\lambda=4.$ **Μονάδες 6**

Δ4) Αν $\lambda=2,999$ να λύσετε την ανίσωση,

$4x^2-4\lambda x+(4\lambda-3)\geq 0.$ **Μονάδες 7**

Απαντήσεις Διαγωνίσματος $\boxed{1}$

ΘΕΜΑ Α

Α2)

a) A **b)** Ψ **c)** A
d) A **e)** Ψ **f)** A.

ΘΕΜΑ Β

Β1) $(x\leq -2\, ή\, x\geq 4)$

Β2) $0\leq x\leq 5$

Β3) $A=[4,5)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $\alpha=2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{6}}=\ldots$

Γ2) $(x=-1\, ή\, x=5)$

Γ3) $(x^5+2)(x^6-2)=0 \Leftrightarrow$

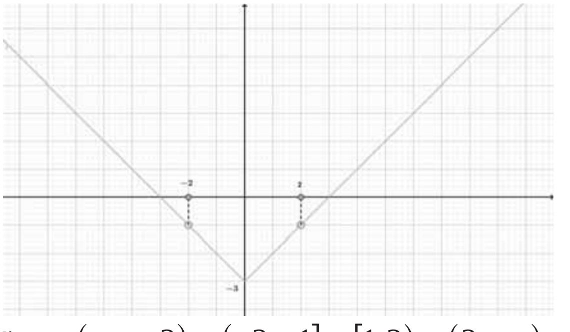
$(x=-\sqrt[5]{2} x=\sqrt[6]{2} x=-\sqrt[6]{2}).$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $A=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Δ2) $f(x)=|x|-3, x\in A$

Δ3) $f(x)=\begin{cases} x-3, x\geq 0 \\ -x-3, x<0\end{cases}$



Δ4) $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$

Απαντήσεις Διαγωνίσματος $\boxed{2}$

ΘΕΜΑ Α

Α2)

a) Ψ **b)** A **c)** A
d) Ψ **e)** A **f)** A

ΘΕΜΑ Β

Β1) $(x=1\, ή\, x=-4), -4<x<1.$

Β2) $(x=1\, ή\, x=-1), -1<x<1.$

Β3) $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). $A=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$

Γ2) $x=\dfrac{3}{2}$

Γ3) $A=|x-1|-|x-2|$ **και** $1<x<2.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $A=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Δ2) $\Delta>0\Leftrightarrow(\lambda<1\, ή\, \lambda>3)$

Δ3) $x_1+x_2=4, x_1x_2=\dfrac{4\lambda-3}{4}.$

Δ4) Αν $1<2,999<3,$ άρα, το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}.$ Η ανίσωση είναι αδύνατη.

Επαναληπτικά Θέματα Γεωμετρίας

Κατσούλης Γεώργιος

A1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με μικρή βάση ΑΒ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε $ME \parallel A\Delta$ (Ε σημείο της ΓΔ). Να αποδείξετε οτι:

α) $A\Delta = 2ME$ **β)** $AB = \Delta E - E\Gamma$

γ) Το τμήμα ΓΕ ισούται με το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου.

Λύση:

α) Έστω Ζ το σημείο τομής των ΑΒ και ΕΜ. Τότε το ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\Delta = ZE$ (1) και $AZ = \Delta E$ (2).

Επίσης τα τρίγωνα $M\overset{\Delta}{E}\Gamma$ και $M\overset{\Delta}{B}Z$ είναι ίσα ($BM = M\Gamma$ και όλες οι γωνίες τους είναι ίσες), οπότε $ME = MZ$ (3) και $E\Gamma = BZ$ (4). Από (1) και (3) προκύπτει οτι $A\Delta = 2ME$.

β) Από (2) και (4) είναι :

$AB + BZ = \Delta E \Rightarrow AB + E\Gamma = \Delta E \Rightarrow AB = \Delta E - E\Gamma$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Gamma E = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2}$.

Πράγματι $\Gamma E = \Delta\Gamma - \Delta E \Rightarrow \Gamma E = \Delta\Gamma - AZ \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma E = \Delta\Gamma - (AB + BZ) \Rightarrow \Gamma E = \Delta\Gamma - AB - \Gamma E \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\Gamma E = \Delta\Gamma - AB \Rightarrow \Gamma E = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2}$$

A2. Δίνεται τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90^\circ$ και το ύψος του ΑΔ.

α) Αν το Μ είναι το μέσο της ΑΒ να αποδείξετε οτι $M\Delta = MB$.

β) Αν το Κ είναι το μέσο της ΒΓ να αποδείξετε οτι το τρίγωνο $K\overset{\Delta}{M}\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ να αποδείξετε οτι το ΑΜΔΚ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

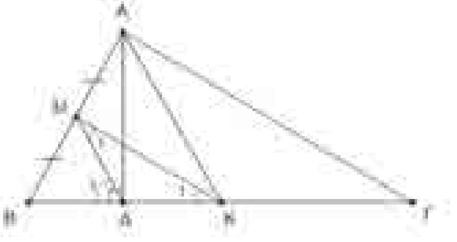
Λύση :

α) Η ΜΔ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $A\overset{\Delta}{\Delta}B$, οπότε $M\Delta = MB = MA$ (1).

β) Είναι $M\Delta = MB$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = 2\hat{\Gamma}$ (2).

Επίσης $MK \parallel A\Gamma$ (διότι Μ, Κ μέσα των ΑΒ, ΒΓ) συνεπώς $\hat{K}_1 = \hat{\Gamma}$ (3) (εντός – εκτός και επι τα αυτά). Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $M\overset{\Delta}{\Delta}K$ οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{M}_1 + \hat{K}_1$ (4). Από (2), (3), (4) έχουμε $2\hat{\Gamma} = \hat{M}_1 + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{\Gamma} = \hat{K}_1$. Άρα το τρίγωνο $K\overset{\Delta}{M}\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $\hat{\Gamma} = 30^o$ τότε $\hat{B} = 60^o$ οπότε $B\Delta = M\Delta = \Delta K = MA$ (5). Επιπλέον $M\Delta \parallel AK$ (διότι Μ, Δ μέσα των ΑΒ και ΒΚ) Άρα το ΑΜΔΚ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



A3. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και διάμετρο του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β παίρνουμε σημείο Γ ώστε $B\hat{\Gamma}O = 30^\circ$. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

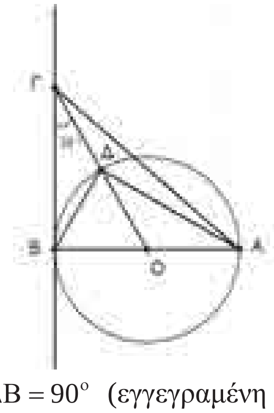
α) $O\Gamma = 2AO$ **β)** $B\Gamma = A\Delta$ **γ)** $A\Gamma < 3\rho$

Λύση :

α) Είναι $O\hat{B}\Gamma = 90^o$ (διότι ΒΓ εφαπτομένη) οπότε

$OB = \dfrac{O\Gamma}{2}$ (αφού $\hat{\Gamma} = 30^o$) $\Rightarrow$

$O\Gamma = 2BO = 2AO = 2\rho$ (1)



β) Είναι $A\hat{\Delta}B = 90^o$ (εγγεγραμένη σε ημικύκλιο) (2) και $B\Delta = OB = \rho$ (3) (διότι το τρίγωνο $O\overset{\Delta}{B}\Delta$ είναι ισόπλευρο, αφού $\hat{O} = 60^o$). Τα ορθογώνια τρίγωνα $O\overset{\Delta}{B}\Gamma$ και $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ είναι ίσα διότι $OB = B\Delta$ και $O\Gamma = AB = 2\rho$. Άρα $B\Gamma = A\Delta$.

γ) Από (1) και (3) προκύπτει οτι $\Gamma\Delta = O\Delta = \rho$. Από τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα $O\overset{\Delta}{A}\Delta$ και $A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ έχουμε $A\Delta < OA + O\Delta \Rightarrow A\Delta < 2\rho$ και $A\Gamma < A\Delta + \Delta\Gamma \Rightarrow A\Gamma < A\Delta + \rho$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $A\Gamma < 3\rho$.

Α$_4$. Θεωρούμε τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ) και το ύψος του ΑΔ. Αν Μ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ στο οποίο δεν ανήκει το Α, να αποδείξετε οτι: α) $ΟΜ \parallel ΑΔ$

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ο\hat{Α}Δ$

γ) $Ο\hat{Γ}Α = 90^o - \hat{Β}$

Λύση :

α) Το ΟΜ είναι το απόστημα της χορδής ΒΓ. Άρα $ΟΜ \perp ΒΓ$ οπότε $ΟΜ \parallel ΑΔ$ (1)

β) $ΟΜ = ΟΑ = ρ$ οπότε $\hat{Μ}_1 = \hat{Α}_2$ (2).

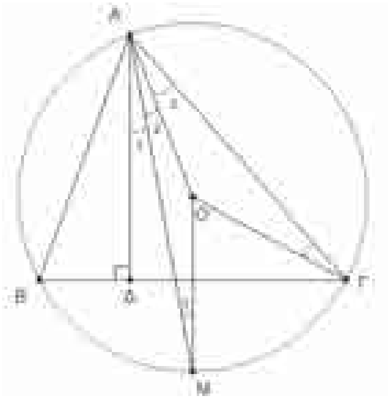
Επίσης $\hat{Μ}_1 = \hat{Α}_1$ (3) (εντός – εναλλάξ από (1)).

Επομένως $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της $Ο\hat{Α}Δ$.

γ) Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΟΑΓ}$ έχουμε $\hat{Ο} = 2\hat{Β}$ (4) (επίκεντρη και εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΓ) και $Ο\hat{Γ}Α = \hat{Α}_3$ $(ΟΓ = ΟΑ = ρ)$ (5). Άρα

$\hat{Ο} + \hat{Α}_3 + Ο\hat{Γ}Α = 180^o \Rightarrow 2\hat{Β} + 2Ο\hat{Γ}Α = 180^o \Rightarrow$

$\Rightarrow Ο\hat{Γ}Α = 90^o - \hat{Β}$



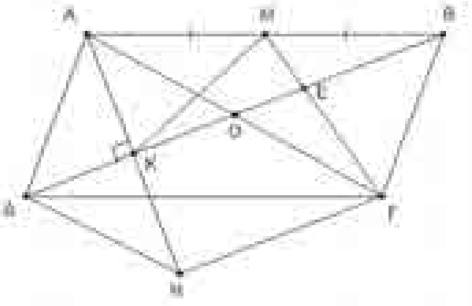
Α$_5$. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και Μ το μέσο της ΑΒ.
α) Αν η ΓΜ τέμνει την ΒΔ στο Ε να αποδείξετε οτι $ΓΕ = 2ΕΜ$.
β) Αν Κ η προβολή του Α στην ΒΔ να αποδείξετε οτι $ΓΔ = 2ΚΜ$.
γ) Προεκτείνουμε την ΑΚ κατα $ΚΗ = ΑΚ$. Να αποδείξετε οτι το ΒΓΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση :

α) Το Ε είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ (ΓΜ, ΒΟ διάμεσοι) οπότε $ΓΕ = 2ΕΜ$.

β) Η ΚΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\Delta}{ΑΚΒ}$, οπότε $ΚΜ = \frac{ΑΒ}{2} \Rightarrow ΑΒ = 2ΚΜ \Rightarrow ΓΔ = 2ΚΜ$

γ) Είναι $ΚΟ \parallel ΗΓ$ (διότι Κ και Ο μέσα των ΑΗ και ΑΓ). Άρα $ΒΔ \parallel ΗΓ$ (1). Επίσης $ΔΗ = ΑΔ$ (διότι ΔΚ ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΔΗ}$), οπότε $ΔΗ = ΒΓ$ (2). Από (1), (2) προκύπτει οτι το ΒΓΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Α$_6$. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και $ΓΕ \perp ΒΔ$.

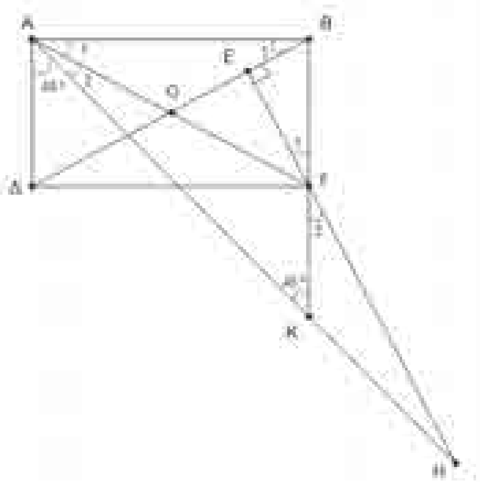
α) Να αποδείξετε οτι $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$.

β) Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Κ και την προέκταση της ΕΓ στο Η να αποδείξετε οτι:

i) $Α\hat{Κ}Γ = 45^o$ ii) $ΓΗ = ΑΓ$

Λύση :

α) $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ (εντός εναλλάξ) και $\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).
Άρα $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$ (1)



β) i) Επειδή ΑΚ διχοτόμος της ορθής γωνίας $\hat{Α}$ το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΚ}$ είναι και ισοσκελές. Άρα $Α\hat{Κ}Γ = 45^o$

ii) $ΟΑ = ΟΒ$, οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$ από (1), (2).

Άρα $\hat{Α}_2 = 45^o - \hat{Α}_1 = 45^o - \hat{Γ}_1$ (3)

Η γωνία $Α\hat{Κ}Γ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΚΓΗ}$ οπότε

$45^o = \hat{Η} + \hat{Γ}_2 \Rightarrow 45^o = \hat{Η} + \hat{Γ}_1 \Rightarrow \hat{Η} = 45^o - \hat{Γ}_1$ (4).

Από (3), (4) προκύπτει οτι $\hat{Α}_2 = \hat{Η}$.

Επομένως το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΓΗ}$ είναι ισοσκελές, οπότε $ΓΗ = ΑΓ$.

Τάξη Α΄

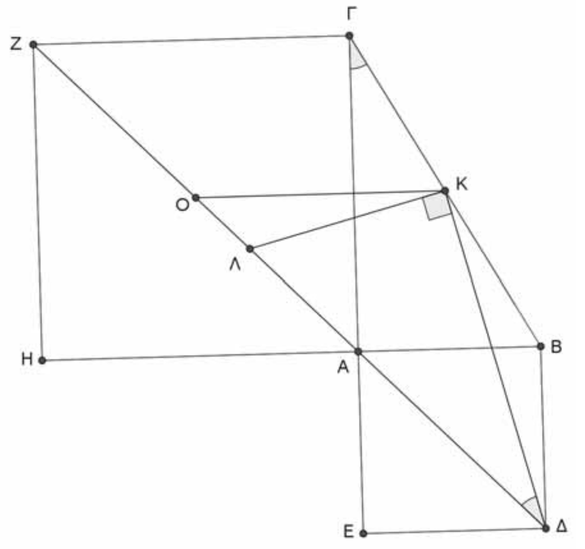
Θέματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Θέμα 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^0\right)$ με $\hat{\Gamma}=30^0$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.
Δείξτε ότι:
α. Τα σημεία Ζ,Α,Δ είναι συνευθειακά.
β. Αν Κ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετη ευθεία στο ΚΔ στο σημείο Κ η οποία τέμνει τη ΖΔ στο σημείο Λ, τότε ΛΔ=2ΚΛ.
γ. Αν Ο το κέντρο του τετραγώνου ΑΓΖΗ, τότε $\Gamma E=2KO$.

Λύση



α. Έχουμε $Z\hat{A}\Gamma+\hat{A}+B\hat{A}\Delta=45^0+90^0+45^0=180^0$, που σημαίνει ότι τα σημεία Ζ,Α,Δ είναι συνευθειακά.

β. $\hat{\Gamma}=30^0 \Rightarrow \hat{B}=60^0$ και $AB=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow$ $AB=KB \Leftrightarrow KB=B\Delta$. Το τρίγωνο ΒΚΔ είναι ισοσκελές με $B\hat{K}\Delta=B\hat{\Delta}K=\hat{\omega}$. Στο τρίγωνο ΒΚΔ έχουμε: $K\hat{B}\Delta=60^0+90^0=150^0$.

Άρα $2\hat{\omega}+150^0=180^0 \Leftrightarrow \hat{\omega}=15^0$.

$K\hat{\Delta}\Lambda=45^0-15^0 \Leftrightarrow K\hat{\Delta}\Lambda=30^0$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ θα είναι $K\Lambda=\dfrac{\Lambda\Delta}{2} \Leftrightarrow \Lambda\Delta=2K\Lambda$.

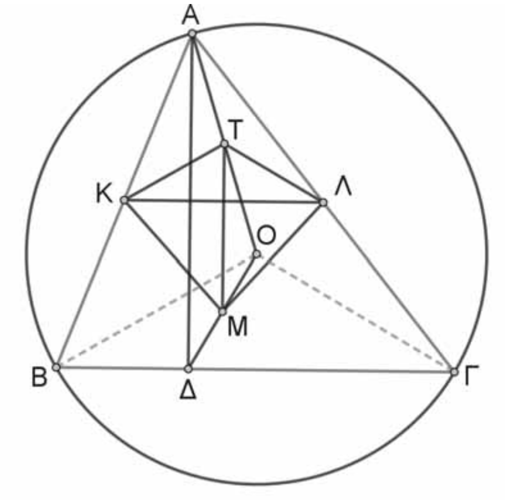
γ. Το ΚΟ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΖ, οπότε $KO=\dfrac{AB+\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow KO=\dfrac{AE+A\Gamma}{2} \Leftrightarrow$ $KO=\dfrac{\Gamma E}{2} \Leftrightarrow \Gamma E=2KO$.

Θέμα 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ,ΑΔ το ύψος του και Ο το περίκεντρό του. Αν Μ,Κ,Λ τα μέσα των ΔΟ,ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα ,να δείξετε ότι : ΜΚ=ΜΛ.

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $K\Lambda // = \dfrac{B\Gamma}{2}$ και $A\Delta \perp B\Gamma \Rightarrow A\Delta \perp K\Lambda$ (1). Έστω Τ το μέσο του ΟΑ. Στο τρίγωνο ΑΟΔ έχουμε $TM // = \dfrac{A\Delta}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$ $TM \perp K\Lambda$.



Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $TK=\dfrac{OB}{2}$ και στο τρίγωνο ΟΑΓ είναι $T\Lambda=\dfrac{O\Gamma}{2}$. Δεδομένου ότι $OB=O\Gamma$ ως ακτίνες του κύκλου είναι $TK=T\Lambda$. Επειδή $TM \perp K\Lambda$ και $TK=T\Lambda$ η ΤΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΚΛ ,οπότε $MK=M\Lambda$.

Θέμα 3

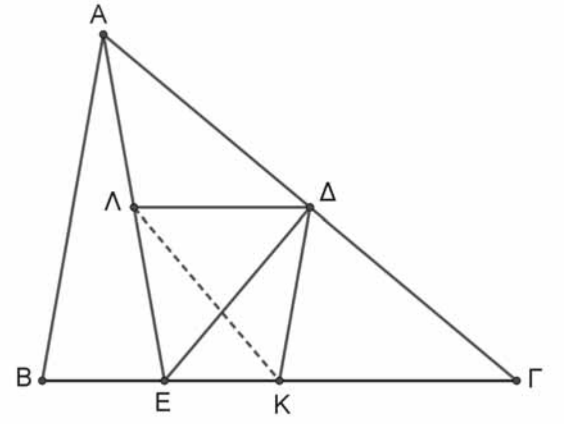
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Η μεσοκάθετος της ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ,ΑΕ αντίστοιχα να δείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.
ii. ΔΛ=ΔΚ.   iii. ΔΕ=ΚΛ.

Λύση

i. Έστω Δ το μέσο της ΑΓ. Αφού το ΕΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ έχουμε $ΕΑ=ΕΓ \Leftrightarrow Ε\hat{Α}Γ=\hat{Γ}$ (1).

Η $Α\hat{Ε}Β$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΕΓ, οπότε $Α\hat{Ε}Β=Ε\hat{Α}Γ+\hat{Γ}\overset{(1)}{\Rightarrow}Α\hat{Ε}Β=2\hat{Γ}=\hat{Β}$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.



ii. Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Δ με διάμεσο την ΔΛ.

Είναι $ΔΛ=\frac{ΑΕ}{2} \Leftrightarrow ΔΛ=\frac{ΑΒ}{2}$ (2) αφού ΑΕ=ΑΒ

Το τμήμα ΔΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ,ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι $ΔΚ=\frac{ΑΒ}{2}$.

Από την τελευταία ισότητα και την (2),προκύπτει ότι ΔΛ=ΔΚ .

iii. Το τμήμα ΔΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΕ, ΑΓ του τριγώνου ΑΕΓ, οπότε είναι $ΛΔ//ΕΓ \Rightarrow ΛΔ//ΕΚ$ και δεδομένου ότι τα τμήματα ΔΚ,ΛΕ δεν είναι παράλληλα, το τετράπλευρο ΛΕΚΔ είναι τραπέζιο. Επιπλέον είναι ΔΚ=ΛΕ. Άρα το τραπέζιο ΛΕΚΔ είναι ισοσκελές, οπότε θα έχει ίσες διαγωνίους, δηλαδή ΔΕ=ΚΛ.

Θέμα 4

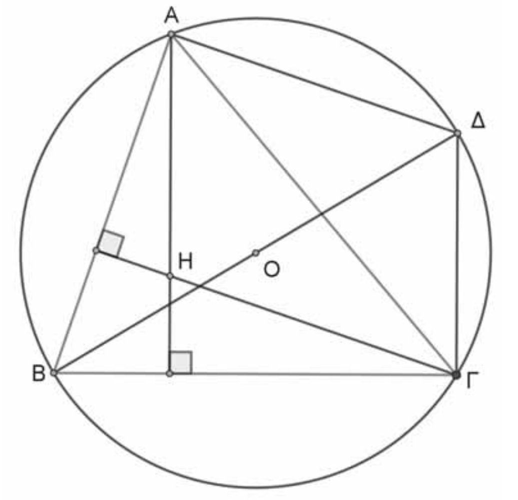
Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) .Στο σημείο Γ υψώνουμε κάθετη ημιευθεία στη ΒΓ στο ημιεπίπεδο που περιέχει την κορυφή Α η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι: $ΑΗ=ΓΔ$.

Λύση

Επειδή το Η είναι ορθόκεντρο του τριγώνου έχουμε $ΑΗ \perp ΒΓ$ και $ΓΗ \perp ΑΒ$.

Είναι $ΑΗ//ΔΓ$ ως κάθετες στη ΒΓ.

Έχουμε $Β\hat{Γ}Δ=90^0$.Άρα τα σημεία Β,Δ είναι αντιδιαμετρικά σημεία, οπότε $Β\hat{Α}Δ=90^0 \Rightarrow$ $ΔΑ \perp ΑΒ \Rightarrow ΔΑ//ΓΗ$.



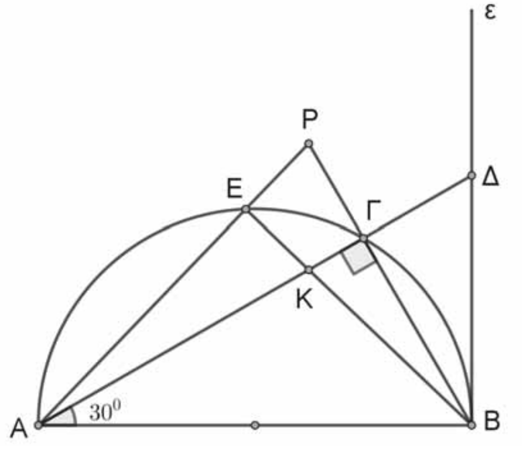
Άρα το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $ΓΔ=ΑΗ$

Θέμα 5

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και η εφαπτομένη ε του ημικυκλίου στο Β.
Θεωρούμε τη χορδή ΑΓ του ημικυκλίου έτσι ώστε $Β\hat{Α}Γ=30^0$.Η ΑΓ τέμνει την ε στο Δ.
Παίρνουμε ένα σημείο Ε του τόξου ΑΓ και έστω Ρ το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΓ και Κ το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΕ. Δείξτε ότι:
i. $ΑΔ=4ΓΔ$ ii. $ΡΚ \perp ΑΒ$
iii. Αν Σ το σημείο τομής του ΡΚ με την ΑΒ,τότε το τετράπλευρο ΓΣΑΡ είναι εγγράψιμο.
iv. Αν Τ είναι το μέσο του ΡΚ,τότε το τρίγωνο ΤΓΚ είναι ισόπλευρο.

Λύση

i.



Η γωνία $Α\hat{Γ}Β$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι $Α\hat{Γ}Β=90^0$.Η $Δ\hat{Β}Γ$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Άρα $Δ\hat{Β}Γ=Β\hat{Α}Γ=30^0$.Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ έχουμε $\Gamma\Delta=\dfrac{B\Delta}{2}$ (1).

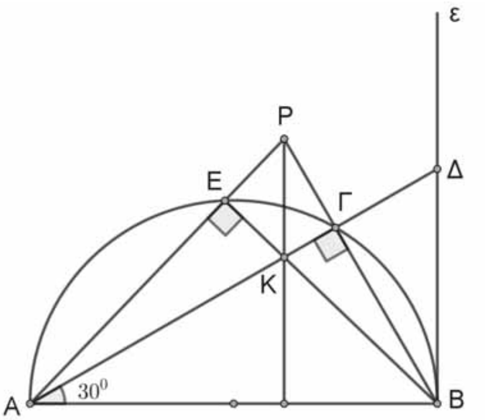
Αφού η ε είναι εφαπτομένη του ημικυκλίου στο Β θα είναι $\varepsilon\perp AB$.Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ είναι $B\Delta=\dfrac{A\Delta}{2}$ (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta=\dfrac{A\Delta}{4}\Leftrightarrow$

$A\Delta=4\Gamma\Delta$.

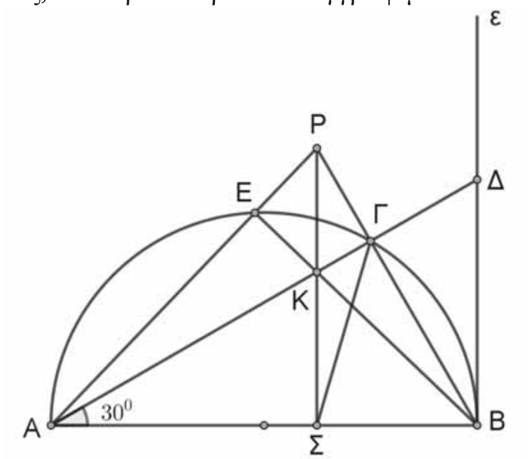
ii. Η γωνία $A\hat{E}B$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα $BE\perp AP$

Το Κ είναι σημείο τομής δύο υψών του τριγώνου ΡΑΒ, οπότε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΡΑΒ.

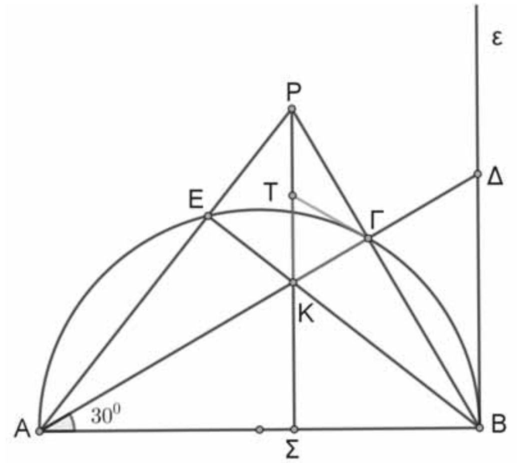


Άρα το ΡΚ βρίσκεται πάνω στο τρίτο ύψος του τριγώνου ΡΑΒ και επομένως είναι $PK\perp AB$.

iii. Είναι $B\hat{A}\Gamma=\Sigma\hat{P}\Gamma$ ως οξείες με πλευρές κάθετες. Αφού η πλευρά ΣΓ του τετραπλεύρου ΓΣΑΡ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α,Ρ υπό ίσες γωνίες, το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.



iv. Στο πιο πάνω ερώτημα είδαμε ότι $K\hat{P}\Gamma=\Gamma\hat{A}B=30^0$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΡ έχουμε $K\Gamma=\dfrac{PK}{2}=TK$ και επειδή $\Gamma\hat{K}T=60^0$ το τρίγωνο ΤΚΓ είναι ισόπλευρο.



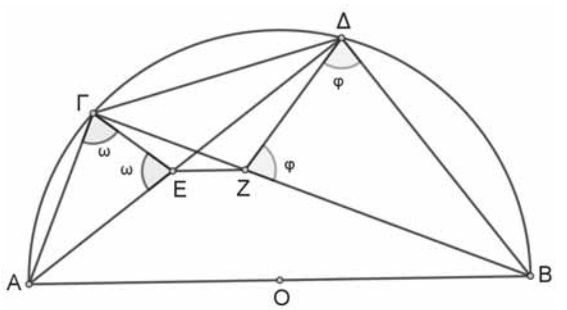
Θέμα 6

Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο και δύο σημεία του Γ,Δ. Στο τμήμα ΑΔ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ και στο τμήμα ΒΓ παίρνουμε σημείο Ζ έτσι ώστε ΒΖ=ΒΔ. Δείξτε ότι ΕΖ//ΑΒ.

Λύση

Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με κορυφή Α. Άρα $\Gamma\hat{A}E+2\hat{\omega}=180^0\Leftrightarrow\Gamma\hat{A}E=180^0-2\hat{\omega}$ (1).

Όμοια από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΖΔ έχουμε: $Z\hat{B}\Delta=180^0-2\hat{\varphi}$ (2).



Όμως $\Gamma\hat{A}E=Z\hat{B}\Delta$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε από τις (1),(2) έχουμε $180^0-2\hat{\omega}=180^0-2\hat{\varphi}\Leftrightarrow\hat{\omega}=\hat{\varphi}$.

$A\hat{\Gamma}B=90^0$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Όμοια $A\hat{\Delta}B=90^0$.

$E\hat{\Gamma}Z=90^0-\hat{\omega}=90^0-\hat{\varphi}=Z\hat{\Delta}E$. Άρα το τετράπλευρο ΕΓΔΖ είναι εγγράψιμο οπότε

$\Delta\hat{E}Z=B\hat{\Gamma}\Delta$ (3).

Όμως $B\hat{\Gamma}\Delta=B\hat{A}\Delta$ (4) ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Από τις (3),(4) προκύπτει ότι $\Delta\hat{E}Z=B\hat{A}\Delta\Rightarrow EZ//AB$

διαγωνίσματα αυτοαξιολόγησης

ΑΛΓΕΒΡΑ

Στέλιος Μπακούλας

ΘΕΜΑ 1ο

α) Η νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός

β) Να δείξετε ότι |α+β|≤|α|+|β| για κάθε α,β∈ ℝ.Πότε ισχύει η ισότητα;

γ) i)Αν αγ=βγ τότε α=β Σ-Λ

ii) Αν α>β και γ<0 τότε αγ<βγ Σ-Λ

iii) Αν α<β τότε $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$ για κάθε α,β∈ $\mathbb{R}-\{0\}$ Σ-Λ

iv) Αν χ<y<0 τότε $\chi^2>y^2$ Σ-Λ

v) Αν $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$ α=0 και β=0 Σ-Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Δείξτε ότι: $(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}):(\frac{x^2}{x-y}-y)=1$

β) Δείξτε ότι: $(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})(\sqrt{63}-\sqrt{32})=31$

γ) Να λυθεί η εξίσωση λ(λ-1)χ=λ-1, με λ∈ ℝ.

δ) Να βρεθούν οι τιμές του χ όταν i) $2\leq |x-5|\leq 4$

ii) x^2-2x-15=0 iii) x^2-x-2>0,

ε) Δίνεται η εξίσωση:χ^2+2λχ-8=0 (1)

i) Δείξτε ότι: η (1) έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε χ∈ ℝ

ii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρείτε τις ρίζες και την τιμή του λ∈ ℝ.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου (°C) με τους βαθμούς Φαρενάιτ(°F) είναι η F=$\frac{9}{5}$ C+32.Στη διάρκεια μίας νύχτας η θερμοκρασία σε μία πόλη κυμάνθηκε από 41°F μέχρι 50°F.Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε °C. [Απ.: 5≤c≤10]

β) Μία στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δύο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη; [Απ.: α_{15}=25, S_{15}=585]

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αν χ=$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, y=$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ και z=$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ να δείξετε ότι: xyz=1

β) Θεωρούμε την εξίσωση

(λ+5)x^2-(2λ+3)χ+λ-1=0,λ≠-5

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ∈ ℝ για τις οποίες έχει:

i) ρίζα το 0 ii) διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε

iii) δύο άνισες ρίζες χ_1,χ_2∈ ℝ

δ) Αν λ=-1 να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, $B={x_1}^2+{x_2}^2$, $\Gamma=\frac{x_2}{{x_1}^2}+\frac{x_1}{{x_2}^2}$

ε) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες ρ_1,ρ_2 όπου ρ_1=Α και ρ_2=Β.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα ως την βαθμολόγηση

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γεώργιος Κατσούλης

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες .

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις **Σ** ή **Λ**

α. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά αν ΚΛ=R+ρ.

β. Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο.

γ. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

δ. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

ε. Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το άθροισμα τους. **[15-10 μ.]**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ με ΑΒ<ΓΔ και τα ύψη του ΑΚ και ΒΗ.Να αποδείξετε ότι: α) ΔΚ=ΓΗ β) 2ΔΚ=ΓΔ-ΑΒ **[13-12 μ.]**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ). Αν το ύψος του ΒΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^o - A\hat{E}B$ **[13 μ.]**

β) $B\hat{A}\Gamma = 2\Delta\hat{B}\Gamma$ **[12 μ.]**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και Μ το μέσο της ΑΒ.

α) Αν η ΓΜ τέμνει την ΒΔ στο Ε να αποδείξετε ότι ΓΕ=2ΕΜ.

β) Αν Κ η προβολή του Α στην ΒΔ να αποδείξετε ότι ΓΔ=2ΚΜ.

γ) Προεκτείνουμε το ΑΚ κατά ΚΗ=ΑΚ. Να αποδείξετε ότι το ΒΓΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο **[7-8-10 μ.]**

Λογάριθμοι

Απόστολος Σπύρου - Θανάσης Χριστόπουλος

Επισημαίνουμε δυο πολύ χρήσιμες ταυτότητες που προκύπτουν από τον ορισμό λογαρίθμου: $x=\alpha^{\log_\alpha x}$ και $x=\log_\alpha \alpha^x$. Επίσης θα κάνουμε χρήση του τύπου αλλαγής βάσης: $\log_\beta x=\dfrac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta}$ για να εργαζόμαστε ελεύθερα με λογαρίθμους σε οποιαδήποτε βάση, έχοντας υπ' όψη μας τις δυο συμβάσεις γραφής λογαρίθμων:

i) *Αν η βάση ενός λογαρίθμου είναι το10 τότε αντί να γράψουμε: $\log_{10} x$ γράφουμε απλά: $\log x$*

ii) *Αν η βάση ενός λογαρίθμου είναι το e τότε αντί να γράψουμε: $\log_e x$ γράφουμε απλά: $\ln x$*

Ασκήσεις

A1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις

i) $\mathbf{A=2\log_3 12-\log_3 80+\log_3 45}$

ii) $\mathbf{B=3\log 2+2\log 30-\log 72}$

iii) $\mathbf{\Gamma=\log 2\cdot\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdots\log_{99} 100}$

Λύση

i) $A=2\log_3 12-\log_3 80+\log_3 45=$

$=\log_3\dfrac{144\cdot 45}{80}=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

ii) $B=\log 2^3+\log 30^2-\log 72=$

$=\log\dfrac{2^3\cdot 30^2}{72}=\log 100=\log 10^2=2$

iii) $\Gamma=\log 2\cdot\dfrac{\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{\log 4}{\log 3}\cdot\dfrac{\log 5}{\log 4}\cdots\dfrac{\log 100}{\log 99}=$

$=\log 100=2$.

iv)

A2. Να δειχτεί ότι: $\mathbf{\ln(1+e^x)-\ln(1+e^{-x})=x}$

Λύση

$\ln(1+e^x)-\ln(1+e^{-x})=\ln\dfrac{1+e^x}{1+e^{-x}}=$

$=\ln\dfrac{1+e^x}{1+\dfrac{1}{e^x}}=\ln\dfrac{1+e^x}{\dfrac{e^x+1}{e^x}}=\ln e^x=x$

A3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\mathbf{x+\log(1+5^x)=(x+1)\log 2}$

ii) $\mathbf{x^{\ln x}=\ln e^x}$

iii) $\mathbf{\log_4(\log_4 x)=\log_2(\log_2 x)-1}$

Λύση

i) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και παίρνει ισοδύναμη μορφή:

$\log[10^x(1+5^x)]=\log 2^{x+1}\Leftrightarrow$

$10^x(1+5^x)=2^{x+1}\Leftrightarrow 2^x\cdot 5^x(1+5^x)=2^x\cdot 2\Leftrightarrow$

$5^x(1+5^x)=2$. Θέτουμε $5^x=\omega>0$, οπότε γίνεται $\omega(1+\omega)=2\Leftrightarrow\omega^2+\omega-2=0\Leftrightarrow\omega=1$ ή $\omega=-2$ η οποία απορρίπτεται, άρα $\omega=1$ επομένως $5^x=1\Leftrightarrow x=0$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για $x>0$ και παίρνει ισοδύναμη μορφή: $x^{\ln x}=x$.

Τα μέλη της ισότητας είναι θετικοί αριθμοί, οπότε έχουν ίσους λογαρίθμους δηλαδή, $\ln x^{\ln x}=\ln x\Leftrightarrow\ln x\cdot\ln x=\ln x\Leftrightarrow\ln x(\ln x-1)=0\Leftrightarrow$

$\ln x=0$ ή $\ln x=1$ επομένως $x=1$ ή $x=e$, και οι δύο είναι δεκτές.

iii) Η εξίσωση ορίζεται για $\log_4 x>0\Leftrightarrow x>1$ και με αλλαγή βάσης, παίρνει ισοδύναμη μορφή: $\dfrac{\log_2(\log_4 x)}{\log_2 4}=\log_2(\log_2 x)-1\Leftrightarrow$

$\dfrac{\log_2(\log_4 x)}{2}=\log_2(\log_2 x)-1\Leftrightarrow$

$\log_2(\log_4 x)=2\log_2(\log_2 x)-2\Leftrightarrow$

$\log_2(\log_4 x)=\log_2(\log_2 x)^2-\log_2 2^2\Leftrightarrow$

$\log_2(\log_4 x)=\log_2\dfrac{(\log_2 x)^2}{4}\Leftrightarrow$

$\log_4 x=\dfrac{(\log_2 x)^2}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\log_2 x}{2}=\dfrac{(\log_2 x)^2}{4}\Leftrightarrow$

$2\log_2 x=(\log_2 x)^2$. Θέτουμε $\log_2 x=\omega$ οπότε $2\omega=\omega^2\Leftrightarrow\omega=0$ ή $\omega=2$, επομένως

$\log_2 x=0\Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται, ή

$\log_2 x=2\Leftrightarrow x=4$, δεκτή.

A4. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$\mathbf{f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)}$$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού

ii) Ποια είναι η μονοτονία της f

iii) Να δειχτεί ότι η f είναι περιττή

iv) Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f

v) Να λυθεί η ανίσωση $\mathbf{f(x)<\ln(4x-1)}$

Λύση

i) Η f ορίζεται μόνο αν $1-x>0$ και $1+x>0$ οπότε $x<1$ και $x>-1$ άρα για $-1<x<1$ ή $A=(-1,1)$

ii) Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ με

$-1<x_1<x_2<1\Rightarrow 1>-x_1>-x_2>-1\Rightarrow$

$2>1-x_1>1-x_2>0$ οπότε ισχύει

$\ln(1-x_1)>\ln(1-x_2)$ **(1)** επίσης από $-1<x_1<x_2<1 \Rightarrow 0<1+x_1<1+x_2<2$ άρα $\ln(1+x_1)<\ln(1+x_2) \Rightarrow -\ln(1-x_1)>-\ln(1-x_2)$ **(2)**
Από (1), (2) προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη: $\ln(1-x_1)-\ln(1+x_1)>\ln(1-x_2)-\ln(1+x_2) \Rightarrow$ $f(x_1)>f(x_2)$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο A

iii) Για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και $f(-x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$
$=-[\ln(1-x)-\ln(1+x)]=-f(x)$, άρα f περιττή.

iv) $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(1-x)-\ln(1+x)=0 \Leftrightarrow$
$\ln(1-x)=\ln(1+x) \Leftrightarrow 1-x=1+x \Leftrightarrow x=0$
άρα $f(0)=0$ και αφού f γνησίως φθίνουσα, θα είναι για $x<0 \Leftrightarrow f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$ και για $x>0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$

v) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in A$, και $4x-1>0$ οπότε $x \in (\frac{1}{4},1)$. Η ανίσωση γράφεται: $\ln(1-x)-\ln(1+x)<\ln(4x-1) \Leftrightarrow$
$\ln(1-x)<\ln(1+x)+\ln(4x-1) \Leftrightarrow$
$1-x<(1+x)(4x-1) \Leftrightarrow$
$1-x<4x-1+4x^2-x \Leftrightarrow 4x^2+4x-2>0 \Leftrightarrow$
$2x^2+2x-1>0$, $\alpha=2>0$, $\Delta=4+8=12$,
$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, άρα
$x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ή $x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ η ανίσωση θα ισχύει εκτός των ριζών x_1, x_2

$-\infty \quad x_1 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad x_2 \quad 1 \quad +\infty$

επομένως $x \in ((-\infty,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty)) \cap (\frac{1}{4},1)$
$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},1\right)$ (είναι $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$-2+2\sqrt{3}>1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}>3 \Leftrightarrow 12>9$)

A_5. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$\mathbf{f(x)=\ln\sqrt{x^2}-\ln x^2+\ln(x+1)-\ln 2}$$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της A και να δειχτεί ότι $f(x)=\ln\frac{x+1}{2|x|}$ για κάθε $x \in A$

ii) Να βρεθούν οι ρίζες της f

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\ln(3x)$

Λύση

i) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $\sqrt{x^2}>0$ και $x^2>0$ επίσης $x+1>0$ οπότε $x \neq 0$ και $x>-1$, άρα $A=(-1,0)\cup(0,+\infty)$
$f(x)=\ln|x|-2\ln|x|+\ln(x+1)-\ln 2=$
$-\ln|x|+\ln(x+1)-\ln 2=$
$\ln(x+1)-(\ln 2+\ln|x|)=\ln\frac{x+1}{2|x|}$, $x \in A$

ii) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2|x|}=1 \Leftrightarrow x+1=2|x|$, για $x>0$ είναι $x+1=2x \Leftrightarrow x=1$ δεκτή, ενώ αν $x \in (-1,0)$ τότε $x+1=-2x \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$, δεκτή.

iii) $f(x)=\ln(3x) \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{2|x|}=\ln 3x \Leftrightarrow$
$\frac{x+1}{2|x|}=3x \Leftrightarrow x+1=6x|x|$ επομένως, για $x>0$ είναι $x+1=6x^2 \Leftrightarrow 6x^2-x-1=0$, $\Delta=25>0$,
$x_1,x_2=\frac{1\pm 5}{12}$, άρα $x_1=\frac{1}{2}$ δεκτή και $x_2=-\frac{1}{3}$ μη δεκτή, ενώ αν $x \in (-1,0)$ τότε $x+1=-6x^2 \Leftrightarrow$ $6x^2+x+1=0$, $\Delta=-23<0$, αδύνατη.

A_6. Δίνεται το πολυώνυμο

$$\mathbf{P(x)=x^4+3x^3\cdot\ln^2\alpha-4x^2\ln\alpha}$$

Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-1$

Λύση

Αρχικά, πρέπει $\alpha>0$ και για να είναι το $x-1$ παράγοντας αρκεί

$P(1)=0 \Leftrightarrow 1+3\cdot\ln^2\alpha-4\ln\alpha=0 \Leftrightarrow$

$1+3\cdot\ln^2\alpha-4\ln\alpha=0$, θέτω $\ln\alpha=\omega$ οπότε $3\omega^2-4\omega+1=0 \overset{\Delta=4>0}{\Leftrightarrow} \omega=1$ ή $\omega_2=\frac{1}{3}$, οπότε

$\ln\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=e$ ή $\ln\alpha=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{e}$

A_7. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{2^{3-\log_2 x}-e^{\ln(x+1)}=\log 1,25+\log 8}$$

Λύση

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x>0$, οπότε γίνεται $\frac{2^3}{2^{\log_2 x}}-(x+1)=\log(1,25\cdot 8) \Leftrightarrow$

$\frac{8}{x}-x-1=\log 10 \Leftrightarrow 8-x^2-x=x \Leftrightarrow$

$x^2+2x-8=0 \overset{\Delta=36}{\Leftrightarrow} x_{1,2}=\frac{-2\pm 6}{2} \Leftrightarrow x=-4$ (απορ.) ή $x=2$ (δεκτή)

A_8. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\ln(2-e^x)$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

ii) Να βρεθεί η μονοτονία της f

iii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(2x)=\ln 7+f(x)$

iv) Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(\ln 2)$ και $f(1)$

Λύση

i) Πρέπει $2-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<2 \Leftrightarrow x<\ln 2$. Πεδίο Ορισμού $A=(-\infty,\ln 2)$

ii) Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2<\ln 2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}<2 \Rightarrow$ $-e^{x_1}>-e^{x_2}>-2 \Rightarrow 2-e^{x_1}>2-e^{x_2}>0 \Rightarrow$ $\ln(2-e^{x_1})>\ln(2-e^{x_2})$ άρα $f(x_1)>f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A

iii) $f(2x)=\ln 7+f(x) \Leftrightarrow \ln(2-e^{2x})=\ln 7+\ln(2-e^x) \Leftrightarrow$

$2-e^{2x}=7(2-e^x) \Leftrightarrow e^{2x}-7e^x+12=0 \overset{e^x=\omega}{\Leftrightarrow}$

$\omega^2-7\omega+12=0 \Leftrightarrow \omega=3 \vee \omega=4$. Άρα

$e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3$ ή $e^x=4 \Leftrightarrow x=2\ln 2$

iv) Έχουμε ότι $2<e \Leftrightarrow \ln 2<\ln e \Leftrightarrow \ln 2<1$ και αφού η f είναι γν. φθίνουσα θα είναι $f(\ln 2)>f(1)$

A₉. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{e^\alpha-1}{2e^\alpha}\right)^{-x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Αν $\alpha=\ln 8\cdot\log\sqrt[3]{100}+\ln(\log 0{,}001)^2-\ln 4$

i) Να δειχτεί ότι $f(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}$

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(2x-\frac{1}{2})-f(x)-f(-\frac{1}{2})=0$

Λύση

i) $\alpha=\ln 2^3\cdot\log 10^{\frac{2}{3}}+\ln(\log 10^{-3})^2-\ln(2^2)=$

$3\ln 2\cdot\dfrac{2}{3}+\ln(-3)^2-2\ln 2=2\ln 2+\ln 9-2\ln 2=$

$2\ln 2+2\ln 3-2\ln 2=2\ln 3$, οπότε

$e^\alpha=e^{\ln 9}=9$ και $f(x)=\left(\dfrac{8}{18}\right)^{-x}=\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}$

ii) $f(2x-\frac{1}{2})-f(x)-f(-\frac{1}{2})=0$. Επομένως

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2(2x-\frac{1}{2})}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{4x-1}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=0 \Leftrightarrow$$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4x}\left(\dfrac{2}{3}\right)-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1}=0$, με

αντικατάσταση $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}=\omega>0$, η εξίσωση παίρνει μορφή $\omega^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)-\omega-\left(\dfrac{2}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$

$2\omega^2-3\omega-2=0 \overset{\Delta=25>0}{\Leftrightarrow} \omega=2$ ή $\omega=-\dfrac{1}{2}$, μη δεκτή ρίζα. Άρα $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}=2 \Leftrightarrow 2x\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln 2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 2}{2(\ln 3-\ln 2)}$

A₁₀. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\ln(\ln(e^{2x}-2e^x+2))=0$

ii) $\dfrac{\ln x-2}{\ln x}+\dfrac{\ln x+3}{\ln x+1}=1$

Λύση

i) Η εξίσωση ορίζεται όταν $e^{2x}-2e^x+2>1$, άρα $x\neq 0$, οπότε $\ln\left(\ln(e^{2x}-2e^x+2)\right)=0 \Leftrightarrow$

$\ln(e^{2x}-2e^x+2)=1 \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+2=e \Leftrightarrow$

$e^{2x}-2e^x+2-e=0$ με αντικατάσταση $e^x=\omega>0$, η εξίσωση παίρνει μορφή:

$\omega^2-2\omega+2-e=0 \overset{\Delta=4(e-1)>0}{\Leftrightarrow} \omega=1-\sqrt{e-1}<0$ μη δεκτή ρίζα ή $\omega=1+\sqrt{e-1}$, άρα $e^x=1+\sqrt{e-1} \Leftrightarrow x=\ln(1+\sqrt{e-1})$.

ii) Η εξίσωση ορίζεται όταν: $x>0$ και $\ln x\neq -1$ $\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{e}$, επίσης $\ln x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, άρα

$x\in(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},1)\cup(1,+\infty)$, οπότε

$\dfrac{\ln x-2}{\ln x}+\dfrac{\ln x+3}{\ln x+1}=1 \Leftrightarrow$

$(\ln x-2)(\ln x+1)+\ln x(\ln x+3)=\ln x(\ln x+1) \Leftrightarrow$

$2\ln^2 x+2\ln x-2=\ln^2 x+\ln x \Leftrightarrow$

$\ln^2 x+\ln x-2=0 \Leftrightarrow \ln x=1$ ή $\ln x=-2 \Leftrightarrow$

$x=e$ ή $x=\dfrac{1}{e^2}$

A₁₁. Να δειχτεί ότι οι $\dfrac{1}{\log_2 3},\dfrac{1}{\log_4 3},\dfrac{1}{\log_8 3}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση

Οι α,β,γ είναι αριθμητική πρόοδος αν και μόνο αν $2\beta=\alpha+\gamma$ οπότε πρέπει $\dfrac{2}{\log_4 3}=\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_8 3}$,

Είναι (με αλλαγή βάσης)

$\log_4 3=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 3}{2}$ και $\log_8 3=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}=\dfrac{\log_2 3}{3}$

οπότε $\dfrac{4}{\log_2 3}=\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{3}{\log_2 3} \Leftrightarrow \dfrac{4}{\log_2 3}=\dfrac{4}{\log_2 3}$.

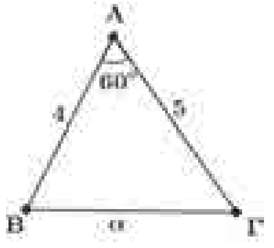
Τάξη:Β Επαναληπτικά Θέματα Γεωμετρίας

Σπύρος Καρδαμίτσης

Θέματα μιας άλλης φιλοσοφίας. Η γεωμετρία ως μάθημα έχει απαξιωθεί από το Λύκειο, ύστατη προσπάθεια όλων μας είναι να δώσουμε μια νέα πνοή στις αξίες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μάθημα ***καλλιέργειάς της σκέψης των μαθητών****, απαλλαγμένο από τις αγκυλώσεις του παρελθόντος που πρόσδιδαν στο μάθημα της γεωμετρίας το χαρακτηρισμό του «στριφνού» μαθήματος. Στους μαθητές θα πρέπει να τους προσφέρουμε θέματα – γεωμετρικές προσκλήσεις- για την* ***εξάσκηση του μυαλού και την ανάπτυξη*** *της μαθηματικής λογικής. Το άρθρο αυτό αρχικά περιέχει τις γεωμετρικές προσκλήσεις και στη συνέχεια παραθέτονται οι απαντήσεις σύντομες και απαλλαγμένες από την αυστηρότητα των διατυπώσεων που απαιτούνται σε γραπτές εξετάσεις.*

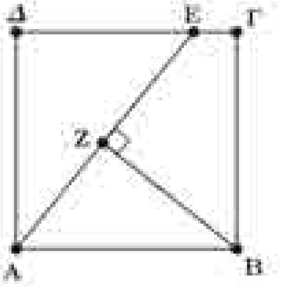
Θέμα 1ο

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = 5$, $\gamma = 4$ και $\hat{A} = 60^\circ$ να υπολογίσετε την πλευρά α του τριγώνου.



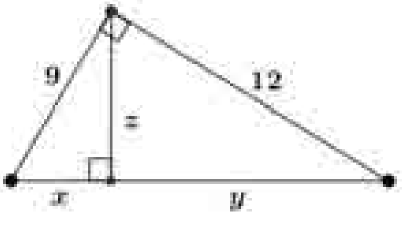
Θέμα 2ο

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 8. Αν $E\Gamma = 2$ και η $\Delta Z \perp AE$, να υπολογίσετε το μήκος της ΒΖ.



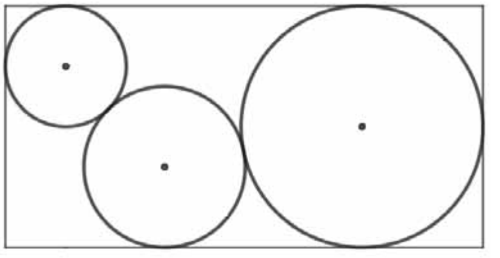
Θέμα 3ο

Στο παρακάτω τρίγωνο, με την βοήθεια των στοιχείων που δίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε το άθροισμα $x + y + z$



Θέμα 4ο

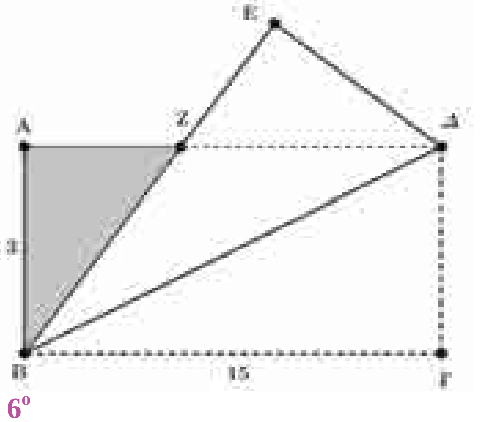
Στο παρακάτω σχήμα στο εσωτερικό του ορθογωνίου βρίσκονται τρεις κύκλοι με ακτίνες 1,5, 2 και 3 αντίστοιχα, όπου εφάπτονται ο πρώτος με τον δεύτερο και ο δεύτερος με τον τρίτο. Όλοι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στις πλευρές του ορθογωνίου όπως φαίνεται στο σχήμα.



Υπολογίστε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

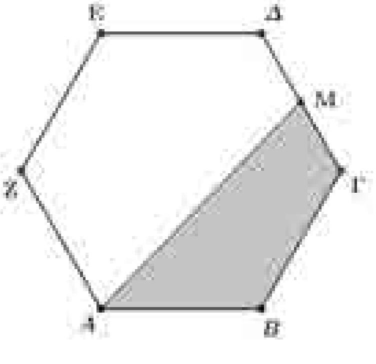
Θέμα 5ο

Διπλώσαμε ένα χαρτί διαστάσεων 15 και 3 κατά μήκος μιας διαγωνίου του και προέκυψε το παρακάτω σχήμα. Να υπολογίστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΖ



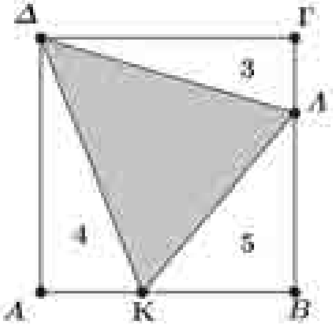
Θέμα 6ο

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε κανονικό εξάγωνο πλευράς α και Ν το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος του.



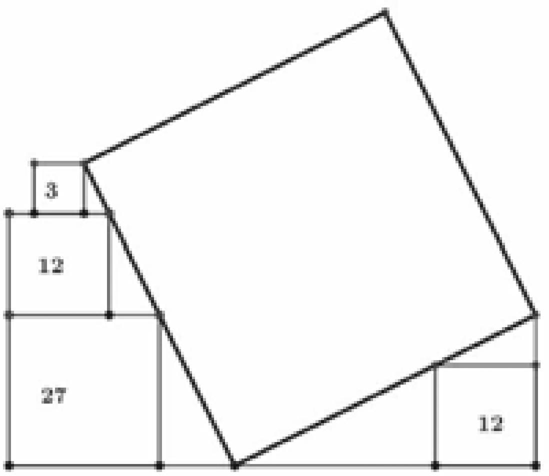
Θέμα 7^{o}

Το παρακάτω σχήμα είναι τετράγωνο και τα εσωτερικά σχηματιζόμενα ορθογώνια τρίγωνα έχουν εμβαδά 3, 4 και 5. Να βρεθεί το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.



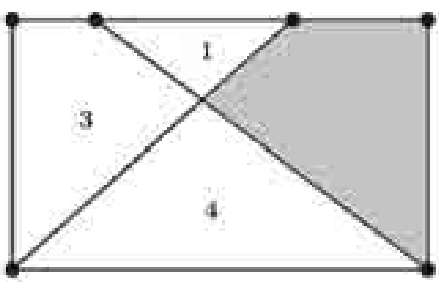
Θέμα 8^{o}

Στο παρακάτω σχήμα όλα τα τετράπλευρα είναι τετράγωνα και οι αριθμοί δηλώνουν το εμβαδόν τους. Να υπολογίστε το εμβαδό του μεγαλύτερου τετραγώνου.



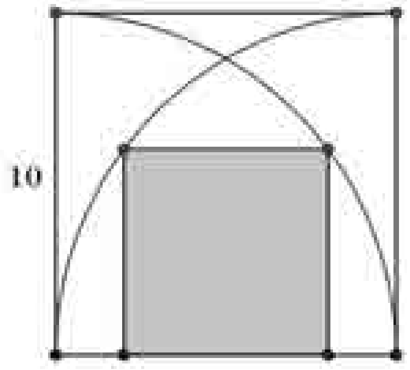
Θέμα 9^{o}

Το παρακάτω σχήμα είναι ορθογώνιο κάθε αριθμός μέσα σε κάθε σχήμα δηλώνει το εμβαδόν του. Ζητείται το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος του ορθογωνίου.



Θέμα 10^{o}

Στο παρακάτω τετράγωνο πλευράς 10 να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τετραγώνου.



Απαντήσεις

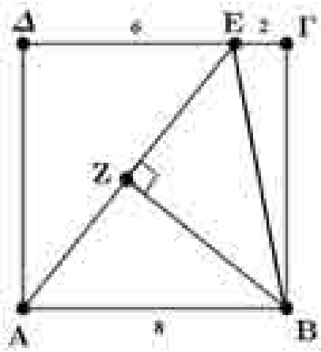
Θέμα 1^{o}

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=$$
$$=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\sigma\upsilon\nu60=$$
$$=25+16-40\cdot\frac{1}{2}=21\Rightarrow \alpha=\sqrt{21}$$

Θέμα 2^{o}

Από τα ορθογώνια τρίγωνα έχουμε, $\Delta E=6$, $AE=\sqrt{8^2+6^2}=10$ και $EB=\sqrt{8^2+2^2}=\sqrt{68}$



Με το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ αφού η $E\hat{A}B$ είναι οξεία έχουμε:

$$EB^2=AB^2+AE^2-2AE\cdot AZ\Rightarrow$$
$$\sqrt{68}^2=8^2+10^2-2\cdot10\cdot AZ\Rightarrow AZ=4{,}8$$

Θέμα 3^{o}

Με πυθαγόρειο έχουμε $x+y=\sqrt{9^2+12^2}=15$ επειδή το z είναι ύψος $9\cdot12=z\cdot5\Rightarrow z=\frac{108}{5}$

άρα $x+y+z=15+\frac{108}{5}=\frac{183}{5}$

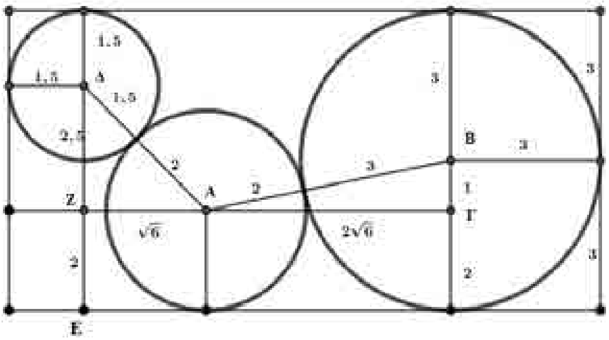
Θέμα 4^{o}

$AB=5$, $A\Delta=3{,}5$, $A\Gamma=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\Delta Z=6-2-1{,}5=2{,}5$, $A\Delta=3{,}5$

$$ZA=\sqrt{(3{,}5)^2-(2{,}5)^2}=\sqrt{\left(\frac{35}{10}\right)^2-\left(\frac{25}{10}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{35^2-25^2}}{10}=\frac{\sqrt{(35-25)(35+25)}}{10}=\sqrt{6}$$



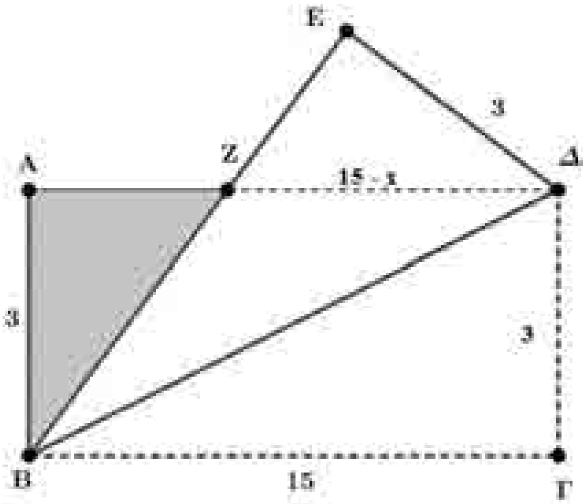
Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι

$$1,5+\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3=4,5+3\sqrt{6} \text{ και } 3+3=6$$

Θέμα 5ο

Αν ονομάσουμε το μήκος $ΑΖ=x$ έχουμε

$$ΒΖ=\sqrt{9+x^2} \text{ και } ΖΔ=15-x$$



Από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΕΔ (ορθογώνια, $ΑΒ=ΕΔ=3$ και οι γωνίες στο Ζ κατακορυφήν) έχουμε

$$ΒΖ=ΖΔ \Leftrightarrow \sqrt{9+x^2}=15-x \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} 9+x^2=(15-x)^2 \\ x<15 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=\frac{54}{5}$$

επομένως το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΖ είναι

$$(ΑΒΖ)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{54}{5}=16,2 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

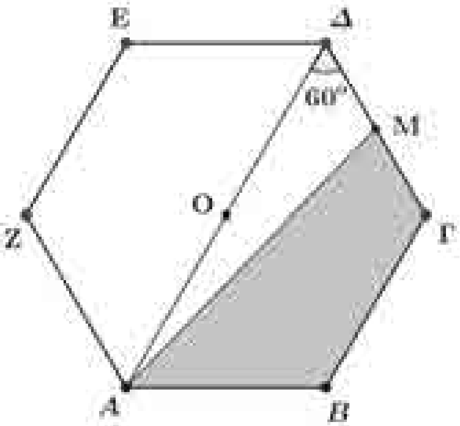
Θέμα 6ο

Η ΑΓ είναι διάμετρος του περιγγεγραμμένου στο κανονικό πολύγωνο κύκλου. Επειδή η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα του περιγγεγραμμένου κύκλου προκύπτει ότι

$$ΑΔ=2α,\quad ΔΜ=\frac{α}{2}.$$

Η γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι

$$φ_6=180^o-ω_6=120^o \text{ άρα } Α\hat{Δ}Μ=60^o$$



Η γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι:

$$φ_6=180^o-ω_6=120^o \text{ άρα } Α\hat{Δ}Μ=60^o$$

Το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΜ είναι

$$(ΑΔΜ)=\frac{1}{2}ΑΔ\cdot ΔΜ\cdot ημ60^o=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$$

Το εμβαδό του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ είναι

$$(ΑΒΓΔΕΖ)=6\cdot\frac{1}{2}λ_6\cdot α_6=3\cdot α\cdot\frac{α\sqrt{3}}{2}=\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}$$

Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τετραπλεύρου είναι ίσο με

$$Ε=\frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{2}-(ΑΔΜ)=\frac{3α^2\sqrt{3}}{4}-\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$$

Δηλαδή $Ε=\dfrac{α^2\sqrt{3}}{2}$

Θέμα 7ο

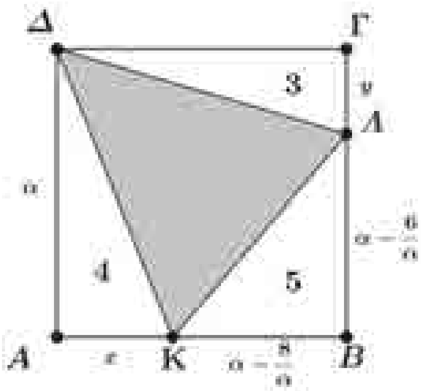
Αν ονομάσουμε με α την πλευρά του τετραγώνου και x,y τα μήκη των τμημάτων ΑΚ και ΓΛ τότε:

Από το εμβαδό του τριγώνου ΑΚΔ είναι:

$$αx=8 \Rightarrow x=\frac{8}{α} \text{ και } ΚΒ=α-\frac{8}{α}$$

Από το εμβαδό του τριγώνου ΓΛΔ είναι:

$$αy=6 \Rightarrow y=\frac{6}{α} \text{ και } ΛΒ=α-\frac{6}{α}$$



Επομένως από το εμβαδό του τριγώνου ΚΒΛ έχουμε: $\left(\alpha-\frac{8}{\alpha}\right)\left(\alpha-\frac{6}{\alpha}\right)=10$ που μετά τις πράξεις μετασχηματίζεται σε

$$\alpha^4-24\alpha^2+48=0$$

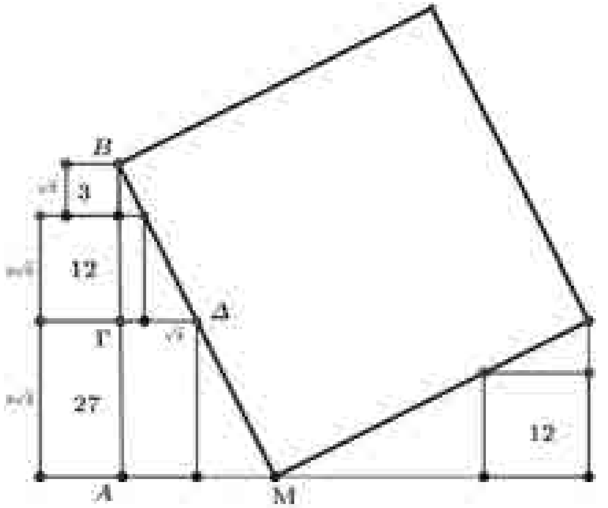
που είναι δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το α^2 και έχει ρίζες $12+4\sqrt{6},\ 12-4\sqrt{6}$ η μικρότερη ρίζα απορρίπτεται γιατί το α^2 εκφράζει το εμβαδό του τετραγώνου που πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των τριών τριγώνων άρα $\alpha^2=12+4\sqrt{6}$
και το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου είναι $(\Delta K\Lambda)=12+4\sqrt{6}-(3+4+5)=4\sqrt{6}$ τ.μ.

Θέμα 8ο

Από τα γνωστά εμβαδά των μικρών τετραγώνων έχουμε:

$$AB=\sqrt{27}+\sqrt{12}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

$$B\Gamma=3\sqrt{3},\ \Gamma\Delta=\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε:

$$B\Delta=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5(3\sqrt{3})^2}{4}}=\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}$$

Επειδή $B\Gamma=\Gamma A=3\sqrt{3}$ το Γ είναι μέσο της ΑΒ και η ΓΔ παράλληλη της ΑΜ, άρα το Δ είναι μέσο της ΒΜ και είναι

$$BM=2\Delta M=2\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{3}\sqrt{2}$$

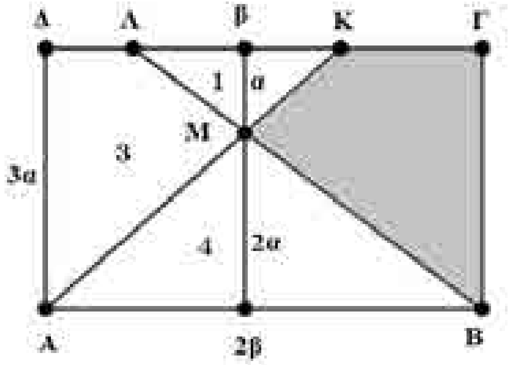
Επομένως το εμβαδό του μεγάλου του τετραγώνου είναι $BM^2=(3\sqrt{3}\sqrt{5})^2=135$ τετρ. μονάδες.

Θέμα 9ο

Τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΑΜΒ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ άρα

$$\frac{(K\Lambda M)}{(AMB)}=\lambda^2\Rightarrow\frac{1}{4}=\lambda^2,\text{ άρα }\lambda=\frac{1}{2}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω λόγο ομοιότητας μπορούμε τις πλευρές των τριγώνων να τις συμβολίσουμε β και 2β και τα αντίστοιχα ύψη τους α και 2α, άρα έχουμε $A\Delta=3\alpha$ και $AB=2\beta$



Από το εμβαδό του τριγώνου ΑΜΒ έχουμε

$$\frac{1}{2}2\alpha\cdot 2\beta=4\Leftrightarrow 2\alpha\beta=4\Leftrightarrow\alpha\beta=2$$

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$$2\beta\cdot 3\alpha=6\alpha\beta=6\cdot 2=12$$

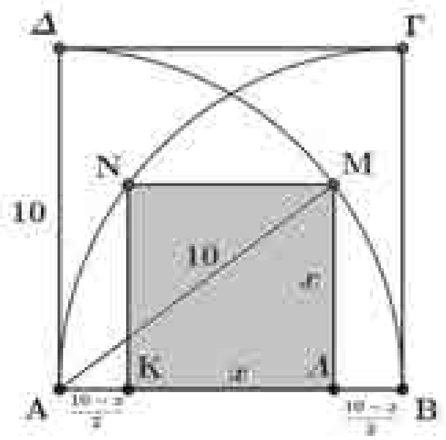
και το γραμμοσκιασμένο σχήμα έχει εμβαδό $12-(1+3+4)=4$ τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα 10ο

Αν ονομάσουμε με x την πλευρά του γραμμοσκιασμένου τετραγώνου τότε $AK=\Lambda B=\frac{10-x}{2}$

και στο τρίγωνο ΑΜΛ έχουμε:

$$10^2=x^2+\left(x+\frac{10-x}{2}\right)^2\Leftrightarrow x^2+4x-60=0$$



Η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες $x=6$ (δεκτή) και $x=-10$ (απορρίπτεται) άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι: $(K\Lambda MN)=6^2=36$ τετρ. μονάδες.

Τάξη: Β΄ Επαναληπτικές ασκήσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας

Βασίλης Μποζατζίδης – Χρήστος Π. Τσιφάκης

Άσκηση 1η. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=1$ και $C_2: (x-3)^2+(y-2)^2=4$

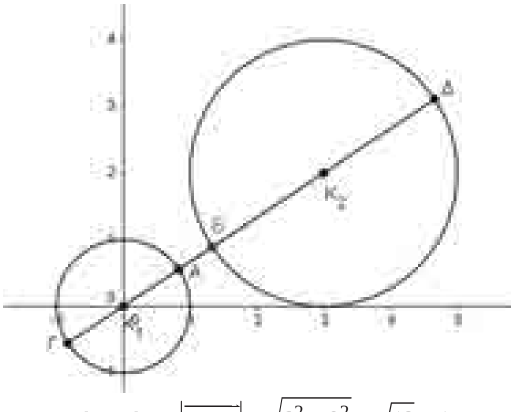
α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου (K_1K_2).

γ) Αν το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2 να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Α, Β), για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Όμοια να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ), (το Γ στον C_1, το Δ στον C_2) που έχουν τη μεγαλύτερη απόσταση.

Λύση: α) $C_1: x^2+y^2=1$, άρα $K_1(0,0)$ και $R_1=1$. Όμοια για τον C_2 έχουμε $K_2(3,2)$ και $R_2=2$.



Παρατηρούμε ότι $|\overrightarrow{K_1K_2}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}>1=R_2-R_1$, άρα οι κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β) Η εξίσωση της διακέντρου (K_1K_2), αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $y=\lambda_{K_1K_2}\cdot x$ και εφόσον $\lambda_{K_1K_2}=\frac{2}{3}$ έχουμε ότι (K_1K_2): $y=\frac{2}{3}x$.

γ) Η διάκεντρος τέμνει τους κύκλους C_1, C_2 στα σημεία Α,Γ και Β,Δ αντίστοιχα. Αν Μ και Μ' σημεία των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα, έχουμε ότι $|\overrightarrow{AB}|\le|\overrightarrow{M_1M_2}|\le|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$ Λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}(C_1): x^2+y^2=1\\ (K_1K_2): y=\frac{2}{3}x\end{array}\right\}$$ βρίσκουμε τα σημεία

$$A\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13}\right),\ \Gamma\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13},-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right).$$

Άρα $|\overrightarrow{M_1M_2}|_{min}=|\overrightarrow{AB}|$.

Έτσι το ζεύγος σημείων (Α, Β) που απέχουν την μικρότερη απόσταση είναι

$$A\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) \text{ και } B\left(3-\frac{6\sqrt{13}}{13},2-\frac{4\sqrt{13}}{13}\right)$$

δ) Όμοια από το σύστημα $$\left.\begin{array}{l}(C_2): (x-3)^2+(y-2)^2=4\\ (K_1K_2): y=\frac{2}{3}x\end{array}\right\}$$

προκύπτουν τα σημεία

$$B\left(3-\frac{6\sqrt{13}}{13},2-\frac{4\sqrt{13}}{13}\right),\Delta\left(3+\frac{6\sqrt{13}}{13},2+\frac{4\sqrt{13}}{13}\right).$$

Άρα $|\overrightarrow{M_1M_2}|_{max}=|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$ και το ζεύγος σημείων (Γ,Δ) που απέχουν την μεγαλύτερη απόσταση είναι

$$\Gamma\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13},-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) \text{ και } \Delta\left(3+\frac{6\sqrt{13}}{13},2+\frac{4\sqrt{13}}{13}\right).$$

Άσκηση 2η. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και τα σημεία $A(-2t,t+3)$, $t\in\mathbb{R}$,

$$B\left(|\vec{\alpha}|-1,|\vec{\beta}|+2\right) \text{ και } \Gamma\left(3-|\vec{\beta}|,|\vec{\alpha}|+1\right).$$

i. Να δείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $t\in\mathbb{R}$ το σημείο Α κινείται σε ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): x+2y-6=0$.

ii. Αν Β και Γ είναι σημεία της (ε) να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$.

iii. Για ποια τιμή του $t\in\mathbb{R}$ ισχύει $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{B\Gamma}$;

iv. Για $t=2$ να δείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το Α και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελή τρίγωνα είναι οι $(\varepsilon_1): y=x+9$ και $(\varepsilon_2): y=-x+1$.

v. Αν το σημείο $\Delta\left(|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|,-1\right)$ ανήκει στην (ε_2) να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση: i. Θέτουμε $x=-2t$ και $y=t+3$. Οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}x=-2t\\ y=t+3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=-2t\\ 2y=2t+6\end{array}\right\}\overset{+}{\Leftrightarrow}x+2y-6=0$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε): $x+2y-6=0$.

ii. Τα Β και Γ ανήκουν στην ευθεία, άρα οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της.

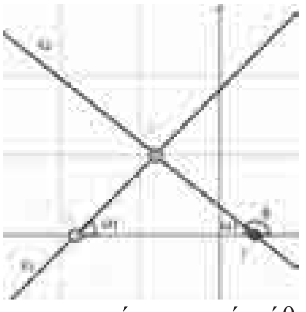
$$B\in(\varepsilon)\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|-1+2\left(|\vec{\beta}|+2\right)-6=0\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|+2|\vec{\beta}|=3$$

$$\Gamma\in(\varepsilon)\Leftrightarrow 3-|\vec{\beta}|+2\left(|\vec{\alpha}|+1\right)-6=0\Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=1$$

Από το σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$.

iii. Είναι $\overrightarrow{AB}=(2t,-t)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=(2,-1)$. Οπότε $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow(2t,-t)=(4,-2)\Leftrightarrow t=2$.

iv. Για $t=2$ είναι $A(-4,5)$.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, αφού κάθε μια από τις ζητούμενες ευθείες σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελή τρίγωνα, το κάθε τρίγωνο θα είναι ταυτόχρονα και ορθογώνιο, οπότε είναι $\hat{\omega}_1=\hat{\omega}_2=45^o$ και $\hat{\theta}=135^o$. Επομένως είναι $\lambda_1=\varepsilon\varphi 45^o=1$ και $\lambda_2=\varepsilon\varphi 135^o=-1$.

Οπότε είναι: $(\varepsilon_1): y-5=1(x+4)\Leftrightarrow y=x+9$

και $(\varepsilon_2): y-5=-1(x+4)\Leftrightarrow y=-x+1$.

v. Είναι $\Delta\in(\varepsilon_2)\Leftrightarrow -|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+1=-1\Leftrightarrow|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$

και διαδοχικά έχουμε: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2\Leftrightarrow(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=4\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=4\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

Επομένως είναι $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi$.

Άσκηση 3η. Δίνεται η σχέση

$$(\varepsilon_\alpha):(2\alpha+3)x+(\alpha-1)y-3\alpha-2=0.$$

i. Να βρείτε για ποια $\alpha\in R$ η σχέση παριστάνει ευθεία.

ii. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας ευθειών διέρχονται από σταθερό σημείο K, το οποίο να βρείτε.

iii. Να βρείτε τις ευθείες της οικογένειας οι οποίες εφάπτονται στον μοναδιαίο κύκλο C.

iv. Να βρείτε τη σχετική θέση του K ως προς τον κύκλο C.

v. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων ακτίνας 1 οι οποίες εφάπτονται στον άξονα x'x και στην ευθεία $(\eta_1): x=1$.

Λύση: i. Για να παριστάνει ευθεία θα πρέπει

$2\alpha+3\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq-\dfrac{3}{2}$ ή $\alpha-1\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq1$.

Αφού δεν υπάρχει κοινή τιμή του α που μηδενίζει τους συντελεστές των x και y, η σχέση παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in R$.

ii. Για $\alpha=0$ προκύπτει η ευθεία $(\varepsilon_1): 3x-y-2=0$, ενώ για $\alpha=-1$ η ευθεία $(\varepsilon_2): x-2y+1=0$.

Οι δύο ευθείες τέμνονται στο $K(1,1)$. Θα ελέγξουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου K επαληθεύουν όλες τις ευθείες της οικογένειας

$$(2\alpha+3)\cdot1+(\alpha-1)\cdot1-3\alpha-2=...=0.$$

Οπότε όλες οι ευθείες συντρέχουν στο K.

iii. Για να εφάπτεται μια ευθεία της οικογένειας σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 θα πρέπει να ισχύει: $d(O,(\varepsilon_\alpha))=1\Leftrightarrow$

$$\frac{|(2\alpha+3)\cdot0+(\alpha-1)\cdot0-3\alpha-2|}{\sqrt{(2\alpha+3)^2+(\alpha-1)^2}}=1\Leftrightarrow$$

$|3\alpha+2|=\sqrt{5\alpha^2+10\alpha+10}\Leftrightarrow4\alpha^2+2\alpha-6=0\Leftrightarrow$

$2\alpha^2+\alpha-3=0\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{3}{2}$ ή $\alpha=1$

Οπότε υπάρχουν δύο ευθείες που εφάπτονται στον μοναδιαίο κύκλο με εξισώσεις $(\eta_1): x=1$ και $(\eta_2): y=1$.

iv. Η απόσταση του K από την αρχή των αξόνων είναι $|\overrightarrow{OK}|=\sqrt{2}>1$, οπότε το K είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

v. Έστω C_1 κύκλος κέντρου $\Lambda(x_o,y_o)$ και ακτίνας $\rho=1$ που πληροί τις προϋποθέσεις. Αφού εφάπτεται στον x'x και στην ευθεία $(\eta_1): x=1$ θα ισχύουν: $|x_o|=1+\rho\Leftrightarrow|x_o|=2\Leftrightarrow x_o=\pm2$ και

$|y_o|=\rho\Leftrightarrow|y_o|=1\Leftrightarrow y_o=\pm1$

Επομένως οι ζητούμενοι κύκλοι είναι οι εξής:

$C_1:(x+2)^2+(y+1)^2=1$,

$C_2:(x-2)^2+(y+1)^2=1$

$C_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$,

$C_4:(x-2)^2+(y-1)^2=1$

Άσκηση 4η. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2+(3k+2)x+(2-4k)y+27-k=0,\ (1)$$

με k πραγματικό αριθμό.

α) Για ποιες τιμές του k η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

γ) Να βρείτε την γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των κύκλων, που παριστάνει η εξίσωση (1), για τις διάφορες τιμές του k.

Λύση: α) Για να παριστάνει η εξίσωση (1) κύκλο πρέπει και αρκεί: $A^2+B^2-4\Gamma>0\Leftrightarrow$

$\left(3\kappa+2\right)^2+\left(2-4\kappa\right)^2-4\left(27-\kappa\right)>0\Leftrightarrow$

$9\kappa^2+12\kappa+4+4-16\kappa+16\kappa^2-108+4\kappa>0\Leftrightarrow$

$25\kappa^2-100>0\Leftrightarrow 25\left(\kappa^2-4\right)>0\Leftrightarrow \kappa^2>4\Leftrightarrow$

$\kappa<-2$ ή $\kappa>2$.

β) Με $\kappa<-2$ ή $\kappa>2$ ο κύκλος έχει κέντρο το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K\left(-\frac{3\kappa+2}{2},2\kappa-1\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{5\sqrt{\kappa^2-4}}{2}$.

γ) Αν $K\left(x,y\right)$ τότε: $\begin{cases}x=-\dfrac{3\kappa+2}{2}\\ y=2\kappa-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=-3\kappa-2\\ y=2\kappa-1\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}4x=-6\kappa-4 & (1)\\ 3y=6\kappa-3 & (2)\end{cases}$ Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε: $4x+3y=-7$ (3).

Όμως αν $\kappa<-2\Leftrightarrow 3\kappa<-6\Leftrightarrow 3\kappa+2<-4\Leftrightarrow$

$\frac{3\kappa+2}{2}<-2\Leftrightarrow -\frac{3\kappa+2}{2}>2\Leftrightarrow x>2$

και αν $\kappa>2\Leftrightarrow 3\kappa>6\Leftrightarrow 3\kappa+2>8\Leftrightarrow$

$\frac{3\kappa+2}{2}>4\Leftrightarrow -\frac{3\kappa+2}{2}<-4\Leftrightarrow x<-4$

Αν $x=2$ από τη (3) βρίσκουμε ότι $y=-5$ ενώ αν $x=-4$ από τη (3) βρίσκουμε ότι $y=3$. Άρα η γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα K είναι η ημιευθεία με φορέα την ευθεία $\left(\varepsilon\right):4x+3y=-7$, με αρχή το σημείο $M\left(2,-5\right)$ και $x>2$ και η ημιευθεία με φορέα την ευθεία $\left(\varepsilon\right):4x+3y=-7$, με αρχή το σημείο $N\left(-4,3\right)$ και $x<-4$ χωρίς τα σημεία M και N.

Άσκηση 5η. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2+\psi^2-2\lambda x-2(\lambda-1)\psi+(\lambda-1)^2=0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η εξίσωση (1) είναι εξίσωση οικογένειας κύκλων.

β) Να βρείτε αν υπάρχουν κύκλοι αυτής της οικογένειας και ποιοι, οι οποίοι εφάπτονται της ευθείας $(\varepsilon): 3x+4\psi-8=0$.

Λύση: α) Παρατηρούμε ότι

$A^2+B^2-4\Gamma=4\lambda^2+4(\lambda-1)^2-4(\lambda-1)^2=4\lambda^2\geq 0$.

- Αν $\lambda=0$ τότε η εξίσωση παριστάνει το σημείο $K\left(0,-1\right)$.
- Αν $\lambda\neq 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(\lambda,\lambda-1\right)$ και ακτίνα.

  $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{4\lambda^2}}{2}=\left|\lambda\right|$.

β) Για να εφάπτεται κύκλος της (1) στην ευθεία (ε) πρέπει και αρκεί

$d(K,(\varepsilon))=R\Leftrightarrow\frac{\left|3\lambda+4(\lambda-1)-8\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\left|\lambda\right|\Leftrightarrow$

$\frac{\left|7\lambda-12\right|}{5}=\left|\lambda\right|\Leftrightarrow\left|7\lambda-12\right|=5\left|\lambda\right|\Leftrightarrow\lambda=6$ ή $\lambda=1$.

Για $\lambda=6$ ο κύκλος είναι $(C_6): x^2+\psi^2-12x-10\psi+25=0$, ενώ για $\lambda=1$ ο κύκλος είναι $(C_1): x^2+\psi^2-2x=0$

Άσκηση 6η. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι $B\left(-1,1\right)$, η πλευρά ΑΓ βρίσκεται στην ευθεία $2x+y-5=0$ και το ύψος ΑΔ στην ευθεία $-x+y+1=0$. Να βρείτε: i. Την ευθεία ΒΓ.

ii. Την κορυφή Α και το σημείο Δ.

iii. Το σημείο Ε ώστε το ΑΒΔΕ να είναι παραλληλόγραμμο.

iv. Το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

v. Το συμμετρικό του Α ως προς την ΒΓ.

Λύση: i. Είναι $A\Delta\perp B\Gamma$ και $\lambda_{A\Delta}=-2$, οπότε $\lambda_{B\Gamma}=\frac{1}{2}$. Επομένως η ευθεία $\left(B\Gamma\right)$ έχει εξίσωση

$\left(B\Gamma\right): y-1=\frac{1}{2}\left(x+1\right)\Leftrightarrow x-2y+3=0$.

ii. Για να βρούμε τις συντεταγμένες της κορυφής Α λύνουμε το σύστημα των $\left(A\Delta\right)$ και $\left(A\Gamma\right)$.

$\left.\begin{matrix}2x+y-5=0\\ -x+y+1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left(x,y\right)=\left(2,1\right)$, άρα είναι $A\left(2,1\right)$.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Δ λύνουμε το σύστημα των $\left(A\Delta\right)$ και $\left(B\Gamma\right)$.

$\left.\begin{matrix}2x+y-5=0\\ x-2y+3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left(x,y\right)=\left(\frac{7}{5},\frac{11}{5}\right)$, άρα $\Delta\left(\frac{7}{5},\frac{11}{5}\right)$.

iii. Αρχικά βρίσκουμε το μέσο Ο του ΑΔ το οποίο αποτελεί κέντρο του παραλληλογράμμου.

$x_O=\frac{x_A+x_\Delta}{2}=\frac{17}{10}$, $y_O=\frac{y_A+y_\Delta}{2}=\frac{16}{10}$, άρα $O\left(\frac{17}{10},\frac{16}{10}\right)$.

Το Ο είναι μέσο και της διαγωνίου ΒΕ οπότε:

$x_O=\frac{x_B+x_E}{2}\Leftrightarrow x_E=\frac{22}{5}$ και

$y_O=\frac{y_B+y_E}{2}\Leftrightarrow y_E=\frac{11}{5}$, άρα είναι $E\left(\frac{22}{5},\frac{11}{5}\right)$.

iv. Το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ είναι διπλάσιο από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΔ.

Όμως $\overrightarrow{AB}=\left(-3,0\right)$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\left(-\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$, οπότε

$\left(AB\Delta\right)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5}\end{vmatrix}\right|=\frac{9}{5}$ τ.μ. Άρα $\left(AB\Delta E\right)=\frac{18}{5}$ τ.μ.

v. Έστω Z το συμμετρικό του Δ ως προς την πλευρά $(B\Gamma)$. Τότε το Δ είναι μέσο του ΑΖ και ισχύει: $x_\Delta = \dfrac{x_A + x_Z}{2} \Leftrightarrow x_Z = \dfrac{4}{5}$ και

$y_\Delta = \dfrac{y_A + y_Z}{2} \Leftrightarrow y_Z = \dfrac{17}{5}$, άρα είναι $Z\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{17}{5}\right)$.

Άσκηση 7η. Δίνεται η σχέση

$$\mathbf{x^2 + y^2 + \left|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right| x + \left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right| y + \frac{25}{4}\left|\vec{\beta}\right|^2 = 0 \quad (1),}$$

όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα.

A. Να δείξετε ότι η σχέση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

B. Αν ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται στους δύο άξονες να δείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **ii.** $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$

iii. Τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Λύση:

A. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \left|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right|^2 + \left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right|^2 - 4\cdot\dfrac{25}{4}\left|\vec{\beta}\right|^2 =$

$= \left(3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right)^2 + \left(4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right)^2 - 25\vec{\beta}^2 = 25\vec{\alpha}^2 > 0$, αφού $\vec{\alpha}$ μη μηδενικό διάνυσμα. Άρα για οποιαδήποτε $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο

$K\left(-\dfrac{\left|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right|}{2}, -\dfrac{\left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right|}{2}\right)$ και $\rho = \dfrac{\sqrt{25\vec{\alpha}^2}}{2} = \dfrac{5}{2}\left|\vec{\alpha}\right|$.

B. i. Αφού ο κύκλος εφάπτεται στους άξονες θα ισχύουν: $\left|-\dfrac{\left|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right|}{2}\right| = \rho \Leftrightarrow \dfrac{\left|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right|}{2} = \dfrac{5\left|\vec{\alpha}\right|}{2} \Leftrightarrow (\ldots) \Leftrightarrow$

$16\vec{\alpha}^2 + 24\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 16\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0 \quad (1)$

και $\left|-\dfrac{\left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right|}{2}\right| = \rho \Leftrightarrow \dfrac{\left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right|}{2} = \dfrac{5\left|\vec{\alpha}\right|}{2} \Leftrightarrow (\ldots) \Leftrightarrow$

$9\vec{\alpha}^2 - 24\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 9\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{cases} 2\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0 \\ 3\vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \end{cases} \underset{\cdot(-2)}{\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 6\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 0 \\ -6\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 6\vec{\beta}^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$25\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ αφού τα διανύσματα είναι μη μηδενικά.

ii. Αντίστοιχα απαλείφοντας το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ από τις (1) και (2) έχουμε: $\begin{cases} 2\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0 \\ 3\vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \end{cases} \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 8}{\Leftrightarrow}}$

$$\begin{cases} 16\vec{\alpha}^2 + 24\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 16\vec{\beta}^2 = 0 \\ 9\vec{\alpha}^2 - 24\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 9\vec{\beta}^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$25\vec{\alpha}^2 - 25\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$

iii. Διαδοχικά έχουμε:

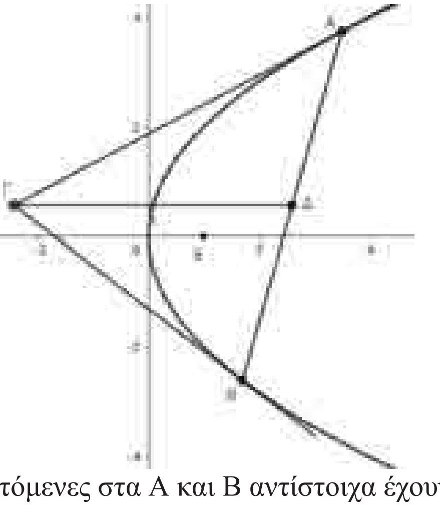
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right)\cdot\left(4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right) = (\ldots) =$

$12\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2 - \left|\vec{\beta}\right|^2\right) = 0$, αφού $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$, οπότε $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Άσκηση 8η. Οι εφαπτόμενες στα σημεία Α,Β της παραβολής $y^2 = 2px$, τέμνονται στο σημείο Γ. Η παράλληλη από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει την ευθεία (AB), στο σημείο Δ. Να δειχθεί ότι: $(A\Gamma\Delta) = (B\Gamma\Delta)$

Λύση: Η παραβολή έχει εξίσωση $C: y^2 = 2px$. Εάν Α,Β τα σημεία της παραβολής με $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ έχουμε $y_B^2 = 2px_B$ και $y_A^2 = 2px_A$

- Αν $x_A = x_B$ είναι προφανές.
- Αν $x_A \neq x_B$ έχουμε ότι



Οι εφαπτόμενες στα Α και Β αντίστοιχα έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): y\cdot y_A = p\cdot(x + x_A)$ και $(\varepsilon_2): y\cdot y_B = p\cdot(x + x_B)$ Αφού διέρχονται και οι δύο από το $\Gamma(x_o, y_o)$ έχουμε ότι:

$y_o\cdot y_B = p\cdot(x_o + x_B)$ και $y_o\cdot y_A = p\cdot(x_o + x_A)$, άρα επαληθεύουν την ευθεία με εξίσωση $(AB): y_o\cdot y = p\cdot(x_o + x)$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2p}{y_B + y_A} = \dfrac{p}{y_o} \Rightarrow y_o = \dfrac{y_B + y_A}{2}$

Δηλαδή η ευθεία $y = y_o$ διέρχεται από το μέσο Δ του ΑΒ, οπότε τα τρίγωνα έχουν ίδια βάση ΓΔ και ίδιο ύψος.

Τάξη: Β΄   Θέματα για εξάσκηση …

Μπατέλης Γεώργιος

Θέμα Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση λέγεται περιττή;

Ι. Να δείξετε ότι, αν η περιττή συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R τότε $f(0)=0$.

ΙΙ. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι άρτια και περιττή τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τους παρακάτω ισχυρισμούς:

Α2. «Η $f(x)=\begin{cases}-x-1 & ,x\le -1\\ -x+1 & ,x\ge 1\end{cases}$ είναι περιττή».

Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Α4. «Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της». Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α5. «Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,3)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα». Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α6. Αν $\dfrac{\pi}{6}<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{3}$ τότε $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2$

Σωστό ή λάθος; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α7. Η εξίσωση: $\eta\mu x=\dfrac{\pi}{3}, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ έχει λύση το $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Σωστό ή λάθος; Αιτιολογήστε την απάντηση της.

Α8. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις e^x και $\ln x$.

Ποια τα πεδία ορισμού και ποια τα σύνολα τιμών τους με βάση τα γραφήματα που σχεδιάσατε; Ένας μαθητής παρατηρώντας τα γραφήματα των δύο συναρτήσεων διατυπώνει την παρακάτω πρόταση: «για κάθε $x\in[1,2]$ ισχύει η σχέση $\ln x<x<e^x$».

Μπορείτε να τον βοηθήσετε να αποδείξει τον ισχυρισμό του;

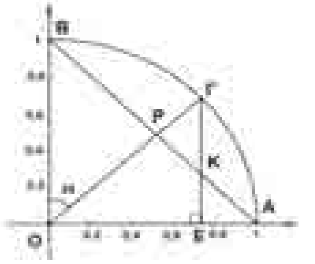
Θέμα Β

Στο τεταρτοκύκλιο δίνονται τα εξής:

$\Gamma E\perp OA, BO\perp OA$, $B\hat{O}\Gamma=2\theta$ και τα σημεία $A(1,0), B(0,1)$.

Β1. Να δείξετε: $\Gamma E=\sigma\upsilon\nu 2\theta$

Β2. Να δείξετε: $E_{OE\Gamma}=\dfrac{1}{2}\cdot\eta\mu 2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta$

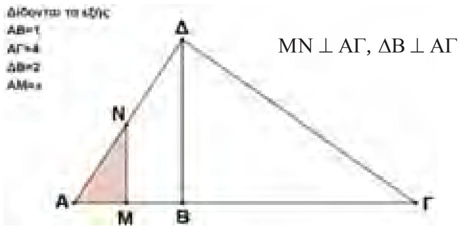


Β3. Να δείξετε ότι: $E_{E\Gamma A}=\dfrac{1}{2}\cdot(1-\eta\mu 2\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta$

Β4. Αν $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta$, $g(\theta)=1-\eta\mu 2\theta$ να τις σχεδιάσετε και να περιγράψετε μέσω των γραφημάτων τους, την μονοτονία τους σε διάστημα μιας περιόδου.

Θέμα Γ

Με βάση το σχήμα και τα δεδομένα που δίνονται για αυτό να απαντήσετε τα ερωτήματα που ακολουθούν:

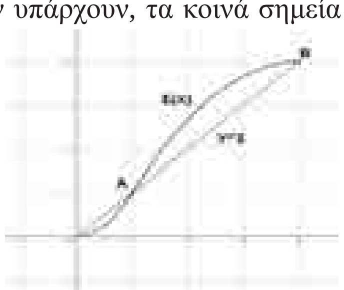


Γ1. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x=AM$, καθώς το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$.

Γ2. Αν το εμβαδόν εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x\le 1\\ \dfrac{-x^2+8x-4}{3}, & 1<x\le 4\end{cases}$ δείξτε ότι είναι «ένα προς ένα».

Δίδεται επιπλέον: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0<x\le 1\\ 4-\sqrt{12-3x}, & 1<x\le 4\end{cases}$

Γ3. Προσδιορίστε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των $f(x), E(x)$.



Γ4. Ι. Να δείξετε ότι $f\uparrow(0,1)$

ΙΙ. Να δείξετε ότι $f\downarrow(1,4)$

Γ5. Δίνεται παραπάνω, το κοινό γράφημα των $E(x)$ και $y=x$. Να συμπληρώσετε σε αυτό, με βάση τις μέχρι τώρα πληροφορίες, προσεγγιστικά το γράφημα της $f(x)$. Ποιες δύο σημαντικές παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε;

Θέμα Δ

Δίδεται το σύστημα (Σ_1) στο οποίο α,β είναι ομόσημοι και το σύστημα (Σ_2):

$$(\Sigma_1)\ \left.\begin{matrix} 3^{\alpha^2}+5^{\beta^2-2} & = & 106 \\ 3^{\alpha^2-1}+5^{\beta^2-1} & = & 152 \end{matrix}\right\}\quad (\Sigma_2)\ \left.\begin{matrix} \omega^2+\theta^2 & = & 1 \\ 2\omega\theta & = & 1 \end{matrix}\right\},$$

καθώς και η συνάρτηση: $f(\kappa)=\ln(\kappa+\sqrt{\kappa^2+1})$

Επιπλέον, θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x)=(\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi})x^4+\ln(e+\kappa)x^3-$$
$$-(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\theta)x^2-(e^{\ln a}-\beta+1)x+\ln 1+1$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(\kappa)$

Δ2. Να δείξετε ότι η $f(\kappa)\uparrow$ για $\kappa\geq 0$.

Δ3. Να λυθεί η $f(\kappa)=0, \kappa\geq 0$.

Δ4. Να δείξετε ότι $\alpha-\beta=0$

Δ5. Να δείξετε ότι $\omega=\theta$

Δ6. Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-x^2-x+1$

Δ7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

I. $\dfrac{P(\eta\mu\lambda)}{1-\eta\mu\lambda}=1, \lambda\in[0,\frac{\pi}{2})$

II. $\sqrt{P(\lambda)-1}+2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sqrt{\eta\mu^2 x+1}=\sqrt{2\eta\mu^2 2x+1}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, όπου λ είναι η λύση του ερωτήματος **I.**

Απαντήσεις με σύντομες υποδείξεις

Α1. Ορισμός σχολικού βιβλίου

I. Η συνάρτηση f είναι περιττή, οπότε για κάθε $x\in R$ θα ισχύει $f(-x)=-f(x)$, οπότε για $x=0$ θα έχουμε $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

II. Η συνάρτηση f είναι άρτια και περιττή οπότε για κάθε $x\in R$ θα έχουμε

$$\left.\begin{matrix} f(x)=f(-x) \\ f(x)=-f(-x)\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2f(x)=0\Rightarrow f(x)=0$$

Α2. Συμφωνώ. $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, άρα για κάθε $x\in A$ και $-x\in A$.

Για $x\leq -1$ το $-x\geq 1$, οπότε έχουμε $f(x)=-x-1$ και $f(-x)=-(-x)+1=x+1=-f(x)$

Για $x\geq 1$ το $-x\leq -1$, οπότε έχουμε $f(x)=-x+1$ και $f(-x)=-(-x)+1=x+1=-f(x)$ Για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(-x)=-f(x)$, άρα περιττή.

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου.

I. $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, οπότε θα μελετήσουμε την μονοτονία της f σε καθένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in A_1$ με $x_1<x_2$ έχουμε $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$, άρα η $f\downarrow A_1$. Όμοια για κάθε $x_1,x_2\in A_2$ με $x_1<x_2$ προκύπτει ότι $f\downarrow A_2$. Έστω τώρα $x_1<0<x_2\Rightarrow$ $\frac{1}{x_1}<0<\frac{1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα! Σε αυτή την περίπτωση η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της (ένωση διαστημάτων) αλλά κατά διαστήματα μονότονη, σε καθένα από τα A_1, A_2.

II. Διαφωνώ. Δεν διευκρινίζεται αν η f είναι γνησίως μονότονη.

Α4. **I.** Σωστό **II.** $\eta\mu x\downarrow\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

Α5. **I.** Λάθος **II.** $\left\{\begin{matrix} -1\leq\eta\mu x\leq 1 \\ \frac{\pi}{3}>1\end{matrix}\right.\Rightarrow$ αδύνατη

Α6. $\left\{\begin{matrix} 1\leq x\leq 2 \\ 1\leq x\leq 2\end{matrix}\right.\underset{e^x<[1,2]}{\overset{\ln x<[1,2]}{\Rightarrow}}\left\{\begin{matrix}\ln 1\leq\ln x\leq\ln 2 \\ e^1\leq e^x\leq e^2\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow\left\{\begin{matrix} 0\leq\ln x\leq\ln 2<\ln e=1 \\ 2<e\leq e^x\leq e^2\end{matrix}\right.$

αφού για $2<e\Rightarrow\ln 2<\ln e\Rightarrow\ln x<1\leq x\leq 2<e^x$ $\Rightarrow\ln x<x<e^x, x\in[1,2]$

Β1. $\left\{\begin{matrix}\eta\mu(\widehat{\Gamma O E})=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\sigma\upsilon\nu 2\theta \\ \eta\mu(\widehat{\Gamma O E})=\frac{\Gamma E}{O\Gamma}=\frac{\Gamma E}{1}=\Gamma E\end{matrix}\right.\Rightarrow\Gamma E=\sigma\upsilon\nu 2\theta$

Β2. $\left\{\begin{matrix}\sigma\upsilon\nu\widehat{\Gamma O E}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\eta\mu 2\theta \\ \sigma\upsilon\nu\widehat{\Gamma O E}=\frac{OE}{O\Gamma}=\frac{OE}{1}=OE\end{matrix}\right.\Rightarrow$

$OE=\eta\mu 2\theta$, άρα $E_{OE\Gamma}=\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\sigma\upsilon\nu 2\theta$

Β3. **1η λύση:** $E_{E\Gamma A}=E_{O\Gamma A}-E_{O\Gamma E}$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta-\frac{1}{2}\cdot\eta\mu 2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta$

Συνεπώς: $E_{E\Gamma A}=\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta\cdot(1-\eta\mu 2\theta)$

2η: $E_{E\Gamma A}=\frac{1}{2}\cdot\Gamma E\cdot EA=\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta\cdot(1-OE)$

$=\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta\cdot(1-\eta\mu 2\theta)$

3^{η}: $B\hat{O}\Gamma=2\theta$, επίκεντρη γωνία, άρα $B\hat{A}\Gamma=\theta$ ως εγγεγραμμένη, $O\hat{\Gamma}E=B\hat{O}\Gamma=2\theta$ ως εντός εναλλάξ.

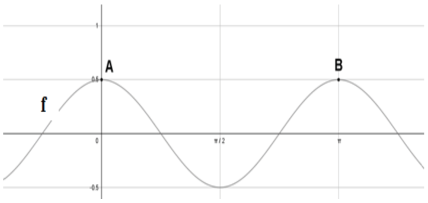
$$E_{O\Gamma A}=\frac{1}{2}\cdot O\Gamma\cdot OA\cdot \eta\mu\widehat{\Gamma OA}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \eta\mu(90-2\theta)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta$$

$E_{O\Gamma E}=\frac{1}{2}\cdot \eta\mu 2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta$. Επομένως:

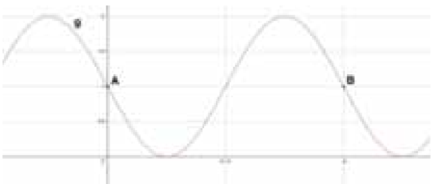
$$E_{E\Gamma A}=\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta\cdot(1-\eta\mu 2\theta)$$

Β4. $f(\theta)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta, T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Το τμήμα του γραφήματος που μας ενδιαφέρει είναι από το Α μέχρι το Β. Ως προς την μονοτονία έχω: $f\downarrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $f\uparrow\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$



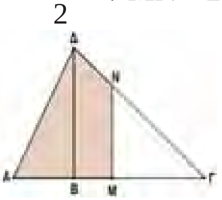
Για $g(\theta)=1-\eta\mu 2\theta, T=\pi$



Το τμήμα του γραφήματος που μας ενδιαφέρει είναι από το Α μέχρι το Β. Ως προς την μονοτονία έχω ότι η g $\downarrow$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\downarrow$ στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ ενώ είναι $\uparrow$ στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

Γ1. Για $0<x\le 1$ έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΒΔ είναι όμοια, άρα:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{B\Delta}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{MN}{2}\Rightarrow MN=2x, \text{ άρα}$$



$$E(x)=\frac{1}{2}x\cdot 2x=x^2, 0<x\le 1$$

$$\bullet 1<x\le 4:\begin{cases}(AB\Delta)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1\\ (BMN\Delta)=\frac{(B\Delta+MN)BM}{2}\end{cases}$$

Τα τρίγωνα ΜΝΓ και ΒΔΓ είναι όμοια και $BM=x-1$, επομένως: $\frac{MN}{B\Delta}=\frac{M\Gamma}{B\Gamma}\Rightarrow\frac{MN}{2}=\frac{3-BM}{3}\Rightarrow$

$$\frac{MN}{2}=\frac{3-(x-1)}{3}\Rightarrow MN=2\frac{4-x}{3}$$

και $BM=x-1, B\Delta=2$. Επομένως:

$$(BMN\Delta)=\frac{\left(2+2\frac{4-x}{3}\right)(x-1)}{2}=$$

$$\left(1+\frac{4-x}{3}\right)(x-1)=\frac{7-x}{3}(x-1)=$$

$=\frac{-x^2+8x-7}{3}$. Άρα $(BMN\Delta)=\frac{-x^2+8x-7}{3}$

επομένως: $E(x)=(AB\Delta)+(BMN\Delta)=1+\frac{-x^2+8x-7}{3}$

$=\frac{-x^2+8x-4}{3}, 1<x\le 4$. Επομένως

$$E(x)=\begin{cases}x^2 & ,0<x\le 1\\ \frac{-x^2+8x-4}{3} & ,1<x\le 4\end{cases}$$

Γ2. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

$\bullet x_1,x_2\in(0,1]$ με $x_1\ne x_2\Rightarrow x_1^2\ne x_2^2\Rightarrow E(x_1)\ne E(x_2)$

$\bullet x_1,x_2\in(1,4]$ με $x_1\ne x_2\Rightarrow$

$$\begin{cases}x_1^2\ne x_2^2\\ 8x_1\ne 8x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1^2\ne -x_2^2\\ 8x_1-4\ne 8x_2-4\end{cases}\Rightarrow$$

$$-x_1^2+8x_1-4\ne -x_2^2+8x_2-4\Rightarrow$$

$$\frac{-x_1^2+8x_1-4}{3}\ne\frac{-x_2^2+8x_2-4}{3}\Rightarrow E(x_1)\ne E(x_2)$$

$\bullet x_1\in(0,1]$ και $x_2\in(1,4]$ με $x_1\ne x_2$ έχω:

για $x_1\in(0,1]: 0<x_1\le 1\Rightarrow 0<x_1^2\le 1\Rightarrow 0<E(x_1)\le 1$

για $x_2\in(1,4]: E(x_2)=-\frac{1}{3}x_2{}^2+\frac{8}{3}x_2-\frac{4}{3}$, η οποία ως β΄ βαθμού με $\alpha=-\frac{1}{3}<0$ έχει μέγιστο στο $M(-\frac{\beta}{2\alpha}=4,-\frac{\Delta}{4\alpha}=4)$ και η $E(x)=\frac{-x^2+8x-4}{3}$ $\uparrow$ στο $(-\infty,4]$ και $\downarrow$ στο $[4,+\infty)$. Άρα στο διάστημα ενδιαφέροντος $(1,4]$ η $E(x)$ $\uparrow$ για $1<x_2\le 4\Rightarrow E(1)<E(x_2)\le E(4)\Rightarrow 1<E(x_2)\le 4\Rightarrow$ $0<E(x_1)\le 1<E(x_2)\le 4$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση $E(x_1)\ne E(x_2)$. Άρα για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,4]$ με $x_1\ne x_2$ έχουμε $E(x_1)\ne E(x_2)$, άρα είναι «ένα προς ένα».

Γ3. •$0<x\le 1$: $x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x^4=x\Rightarrow x\left(x^3-1\right)=0$ $\Rightarrow x=0\notin(0,1]$ απορρίπτεται ή $x=1\in(0,1]$ δεκτή, άρα το κοινό σημείο είναι το $A(1,1)$.

•$1<x\le 4$: $\dfrac{-x^2+8x-4}{3}=4-\sqrt{12-3x}\Rightarrow$

$-x^2+8x-4=12-3\sqrt{12-3x}\Rightarrow\ldots$

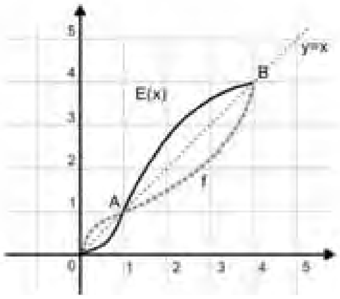
$\Rightarrow(x-4)^2=3\sqrt{12-3x}\ \Rightarrow(x-4)^4+27(x-4)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=4 \text{ άρα } B(4,4)\\ \text{ή}\\ x=1\notin(1,4] \text{ απορ.}\end{cases}$$

Γ4.Ι. Πράγματι $f\uparrow(0,1]$

ΙΙ. Πράγματι $f\downarrow(1,4]$.

Γ5. Εκμεταλλευόμενοι τις πληροφορίες περί



κοινών σημείων, μονοτονίας, καθώς και το πώς περίπου είναι το γράφημα μιας βασικής συνάρτησης, όπως η $\sqrt{x}$ θα προκύψει κατά προσέγγιση το τελικό σχήμα. Κάνουμε λοιπόν της εξής δύο παρατηρήσεις:

1ον Τα μόνα κοινά σημεία των $E(x), f(x)$ είναι στην πάνω στην ευθεία $y=x$.

2ον Η $f(x)$ είναι συμμετρική κατασκευή της $E(x)$ ως προς την $y=x$.

Δ1. $0<1\Rightarrow\kappa^2<\kappa^2+1\Rightarrow$

$\sqrt{\kappa^2+1}>|\kappa|\ge-\kappa\Rightarrow\sqrt{\kappa^2+1}+\kappa>0. A=R$

Δ2. Έστω $\kappa_1,\kappa_2\in[0,+)$ με $\begin{cases}0\le\kappa_1<\kappa_2\\ \kappa_1<\kappa_2\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\kappa_1^2<\kappa_2^2\\ \kappa_1<\kappa_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\kappa_1^2+1<\kappa_2^2+1\\ \kappa_1<\kappa_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\kappa_1^2+1}<\sqrt{\kappa_2^2+1}\\ \kappa_1<\kappa_2\end{cases}$$

$\Rightarrow\ldots\Rightarrow f(\kappa_1)<f(\kappa_2)$, άρα $f\uparrow[0,+\infty)$

Δ3. $f(\kappa)=0\Leftrightarrow\ln(\kappa+\sqrt{\kappa^2+1})=\ln1\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sqrt{\kappa^2+1}=1-\kappa\\ 1-\kappa\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\kappa^2+1=\kappa^2-2\kappa+1\\ 0\le\kappa\le1\end{cases}\Leftrightarrow\kappa=0$$

και αφού η $f\uparrow[0,+\infty)$ το $\kappa=0$ είναι η μοναδική λύση.

Δ4. $$(\Sigma_1):\left.\begin{array}{rcl}3^{\alpha^2}+5^{\beta^2}\cdot\dfrac{1}{25}&=&106\\ 3^{\alpha^2}\cdot\dfrac{1}{3}+5^{\beta^2}\cdot\dfrac{1}{5}&=&152\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

Δ5. $$\left.\begin{array}{rcl}25\cdot3^{\alpha^2}+5^{\beta^2}&=&25\cdot106\\ 5\cdot3^{\alpha^2}+3\cdot5^{\beta^2}&=&15\cdot152\end{array}\right\}\ \text{Θέτω}\ \begin{cases}3^{\alpha^2}=\mu\\ 5^{\beta^2}=\nu\end{cases}$$

οπότε: $$\left.\begin{array}{rcl}25\cdot\mu+\nu&=&25\cdot106\\ 5\cdot\mu+3\cdot\nu&=&15\cdot152\end{array}\right\}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\pm2$$

Επειδή α,β ομόσημοι: έχουμε $\alpha-\beta=0$

Δ6. $(\Sigma_2)\Rightarrow\omega^2-2\omega\theta+\theta^2=0\Rightarrow\omega=\theta$

Δ7. Γνωρίζουμε ότι:

$\sigma\upsilon\nu^2\varphi=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}=0$

$\ln(e+\kappa)=\ln(e+0)=\ln e=1$

$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\theta=\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

$e^{\ln a}-\beta+1=\alpha-\beta+1=1$ και $\ln1+1=0+1=1$

Συνεπώς: $P(x)=0x^4+1x^3-1x^2-1x+1$

Δ8.Ι. $$\begin{cases}\dfrac{P(\eta\mu\lambda)}{1-\eta\mu\lambda}=1\\ \lambda\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(\eta\mu\lambda)=1-\eta\mu\lambda\\ 0\le\eta\mu\lambda<1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\eta\mu^3\lambda-\eta\mu^2\lambda-\eta\mu\lambda+1=1-\eta\mu\lambda\\ 0\le\eta\mu\lambda<1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\eta\mu^3\lambda-\eta\mu^2\lambda=0\\ 0\le\eta\mu\lambda<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta\mu^2\lambda(\eta\mu\lambda-1)=0\\ 0\le\eta\mu\lambda<1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\eta\mu^2\lambda=0\ \text{ή}\ \eta\mu\lambda=1\ \text{απορ.}\\ 0\le\eta\mu\lambda<1\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=0$$

ΙΙ. $\lambda=0: P(\lambda)-1=1-1=0$, άρα:

$2\sigma\upsilon\nu x\sqrt{\eta\mu^2x+1}=\sqrt{2\eta\mu^2 2x+1}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2\sigma\upsilon\nu x\sqrt{\eta\mu^2x+1}=\sqrt{\eta\mu^2 2x+1}\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}4\sigma\upsilon\nu^2x\left(\eta\mu^2x+1\right)=\eta\mu^2 2x+1\\ 0<\eta\mu x<1\\ 0<\sigma\upsilon\nu x<1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}4\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu^2x+4\sigma\upsilon\nu^2x=(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)^2+1\\ 0<\eta\mu x<1\wedge0<\sigma\upsilon\nu x<1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\sigma\upsilon\nu^2x=1\\ 0<\sigma\upsilon\nu x<1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$$

Τάξη: Γ΄

Επαναληπτικά Θέματα

Κώστας Τηλέγραφος

Θέμα 1

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$

Αν για κάθε $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2f(x)-x_0^2f(x_0)}{x-x_0}=\sigma\upsilon\nu x_0-1$$

τότε:

Ε1. **Να δείξετε ότι $\left(x^2f(x)\right)'=\sigma\upsilon\nu x-1$,**

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Ε2. **Να δείξετε ότι**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right].\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Ε3. **Να βρείτε τη παράγωγο της συνάρτησης f**

Ε4. **Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

Ε5. **Να δείξετε ότι**

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(\alpha x)}{f\left(x-\frac{1}{2}\right)-f\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}=-\infty,\ \alpha\in(0,1).$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Ε1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $A(x)=x^2\cdot f(x)$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2f(x)-x_0^2f(x_0)}{x-x_0}=\sigma\upsilon\nu x_0-1\Leftrightarrow$$

$$\overset{(A(x)=x^2f(x))}{\Leftrightarrow}\ \lim_{x\to x_0}\frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}=\sigma\upsilon\nu x_0-1\in\mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση A είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $A'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1\Leftrightarrow$

$$\left(x^2\cdot f(x)\right)'=\sigma\upsilon\nu x-1,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Ε2. Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$\left(x^2f(x)\right)'=(\eta\mu x-x)'$ και αφού οι συναρτήσεις $A(x)=x^2f(x)$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και $B(x)=\eta\mu x-x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχείς σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right],\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

$$\begin{cases}x^2\cdot f(x)=\eta\mu x-x+c_1, x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\\ x^2\cdot f(x)=\eta\mu x-x+c_2, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$\begin{cases}0^2\cdot f(0)=\eta\mu0-0+c_1\Leftrightarrow c_1=0\\ 0^2\cdot f(0)=\eta\mu0-0+c_2\Leftrightarrow c_2=0\end{cases}$$

οπότε

$$\begin{cases}x^2\cdot f(x)=\eta\mu x-x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\\ x^2\cdot f(x)=\eta\mu x-x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2\cdot f(x)=\eta\mu x-x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα $f(x)=\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

Ακόμη αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x-x}{x^2}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(\eta\mu x-x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{-\eta\mu x}{2}=0$$

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Ε3.

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι:

$$f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot x^2 - (\eta\mu x - x) \cdot 2x}{x^4} =$$
$$= \frac{x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x^2 - 2x \cdot \eta\mu x + 2x^2}{x^4} =$$
$$= \frac{x(x \cdot \sigma\upsilon\nu x - x - 2\eta\mu x + 2x)}{x^4} =$$
$$= \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2\eta\mu x}{x^3}$$

- Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\eta\mu x - x}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^3} =$$
$$\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{(\eta\mu x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{3x^2} \underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)'}{(3x^2)'}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\eta\mu x}{6x} = -\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = -\frac{1}{6} \cdot 1 = -\frac{1}{6}.$$

Οπότε

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2\eta\mu x}{x^3}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\dfrac{1}{6}, & x = 0 \end{cases}$$

Ε4.

- Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι:

$$f'(x) = \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2\eta\mu x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

Όπου $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$g(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2\eta\mu x$$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$

- Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι

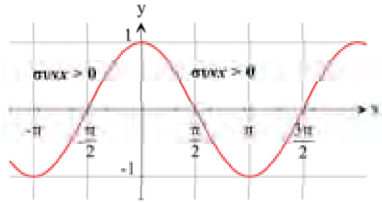
$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x + x \cdot (-\eta\mu x) + 1 - 2\sigma\upsilon\nu x =$$
$$= -\sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x + 1.$$

Ακόμη είναι $g'(0) = 0$ και

$$g''(x) = \eta\mu x - \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x = -x \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ και}$$

$g''(0) = 0$, $g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $g''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

- Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, είναι $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$, οπότε $-x \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0 \Rightarrow g''(x) > 0$



- Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$, οπότε $-x \cdot \sigma\upsilon\nu x < 0 \Rightarrow g''(x) < 0$

Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της g'' και μονοτονίας της συνάρτησης g'

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
g'	τ.ε.	1	$g'(0) = 0$ τ.μ.	2	τ.ε.
	$1 - \frac{\pi}{2}$				$1 - \frac{\pi}{2}$

Από το πρόσημο της $g''(x)$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και επειδή η συνάρτηση g' είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, έχουμε ότι η συνάρτηση g':

- ✓ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και
- ✓ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

οπότε η συνάρτηση g' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 0$, το $g'(0) = 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$g'(x) \leq g'(0) = 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $g'(x) < 0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχουμε: $x < 0 \overset{g \searrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow}$

$$g(x) > g(0) = 0 \overset{(\div x^3 < 0)}{\Rightarrow} \frac{g(x)}{x^3} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε: $x > 0 \overset{g \searrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow}$

$$g(x) < g(0) = 0 \overset{(\div x^3 > 0)}{\Rightarrow} \frac{g(x)}{x^3} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Επομένως για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $f'(x) < 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{\pi}{2}$ το

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\frac{2-\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4 - 2\pi}{\pi^2}$$

και ολικό μέγιστο στη θέση $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ το

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{-1 + \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\frac{-2+\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{2\pi - 4}{\pi^2}$$

Ε5. Είναι

$$\lim_{x \to 1^+} f(\alpha x) \underset{\left(\lim\limits_{x \to 1^+}(\alpha x) = \alpha\right)}{\overset{(\omega = \alpha x)}{=}} \lim_{\omega \to \alpha^+} f(\omega) \overset{(f:\text{συνεχής})}{=} f(\alpha) < 0$$

αφού για κάθε $\alpha \in (0,1)$ είναι

$$\alpha > 0 \overset{\left(f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(0) \Rightarrow f(\alpha) < 0.$$

Ακόμη, είναι:

$$\lim_{x \to 1^+}\left(f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\right) \overset{(f:\text{συνεχής})}{=} f\left(1 - \frac{1}{2}\right) - f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Δηλαδή προέκυψε η μορφή $\frac{\kappa}{0}, \kappa \neq 0$. Θα αναζητήσουμε το πρόσημο του παρονομαστή $f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ κοντά στο $x_0 = 1$, με $x > 1$.

Έχουμε: $x > 1 \overset{(\cdot x > 1 > 0)}{\Rightarrow} x^2 > x \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} > x - \frac{1}{2}$

$$\underset{\left(\left(x^2-\frac{1}{2}\right), \left(x-\frac{1}{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{\overset{\left(f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{\Rightarrow}} f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) < f\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) > 0$$

Ακόμη, είναι $\lim\limits_{x \to 1^+}\left(f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$, οπότε

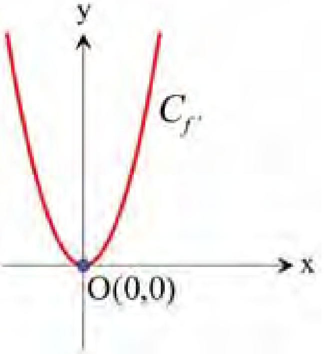
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)} \overset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=} +\infty$$

Άρα, $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(\alpha x)}{f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)} =$

$$= \lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)} \cdot f(\alpha x)\right) \underset{(f(\alpha) < 0)}{\overset{((+\infty)\cdot f(\alpha))}{=}} -\infty$$

Θέμα 2

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f'.



Ε1. **Να λύσετε την εξίσωση $2^x = 3x - 1$.**

Ε2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

Ε3.

Αν επιπλέον η f έχει τύπο $f(x)=x^{\nu}, \nu\in\mathbb{N}^*$ όπου ν περιττός αριθμός και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha,f(\alpha))$, $\alpha\neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο $N(-2\alpha,f(-2\alpha))$ εκτός του Μ.

Ε4. Να δείξετε ότι $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$.

Ε5. Ένα σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3, x\geq 1$, ξεκινώντας από το σημείο $A(1,1)$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ, ως προς τον χρόνο t δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=\alpha(t)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής, ως προς τον χρόνο t της τετμημένης του σημείου τομής Β της εφαπτόμενης της C_f στο $M(\alpha,f(\alpha))$ με τον άξονα των x, τη χρονική στιγμή $t_0=3$ sec.

Ε6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την εφαπτόμενη ευθεία (δ) της C_f στο σημείο της $(1,f(1))$ τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $(-\infty,0]$, και τον άξονα των x.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Ε 1. Διακρίνουμε:

- $3x-1\leq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{3}$. Για κάθε $x\leq\frac{1}{3}$, ισχύει: $3x-1\leq 0<2^x \Rightarrow 2^x\neq 3x-1$, οπότε, στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$, εξίσωση $2^x=3x-1$ δεν έχει λύση.

- Για $x>\frac{1}{3}$ έχουμε: $\begin{cases}2^x=3x-1\\ x>\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}g(x)=0\\ x>\frac{1}{3}\end{cases}$, όπου $g(x)=2^x-3x+1$, $x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. Είναι $g(1)=2-3+1=0$ και $g(3)=2^3-3\cdot 3+1=0$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ είναι $g'(x)=2^x\ln 2-3$ και $g''(x)=2^x(\ln 2)^2>0$. Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$, με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$

- Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (ρ_1,ρ_2) και (ρ_2,ρ_3) με $g'(x)=2^x\ln 2-3$.
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)$ και $g(\rho_2)=g(\rho_3)$

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1)=0$ και $g'(\xi_2)=0$.

- Η g' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$
- Η g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1,ξ_2) με $g''(x)=2^x(\ln 2)^2$
- $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

Άρα η συνάρτηση g' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi)=0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $g''(x)=2^x(\ln 2)^2>0$ για κάθε $x>\frac{1}{3}$. Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$, οπότε και η εξίσωση $2^x=3x-1$, έχει το πολύ δυο ρίζες, που όπως αναφέραμε προηγουμένως, είναι οι αριθμοί $x_1=1$ και $x_2=3$.

Ε 2. Παρατηρώντας το σχήμα διαπιστώνουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (ανοικτό διάστημα) και δεν έχει ακρότατα. Παρατηρώντας το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Από τα παραπάνω συντάσσουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	2	0	1
f	4	Σ.Κ.	3

Από τον πίνακα μονοτονίας της f' για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f έχουμε ότι

- είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$
- είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$
- ακόμη, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, οπότε η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $M(0,f(0))$ (είναι $f(0)=0$). Άρα το σημείο $M(0,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Ε 3. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η εφαπτομένη της C_f στο $M(\alpha,f(\alpha))$ διέρχεται από το σημείο $N(-2\alpha,f(-2\alpha))$ ισχύει:

$$\lambda_{MN}=f'(\alpha)\Leftrightarrow\frac{f(-2\alpha)-f(\alpha)}{-2\alpha-\alpha}=f'(\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(-2\alpha)^\nu-\alpha^\nu}{-3\alpha}=\nu\alpha^{\nu-1}\Leftrightarrow(-2)^\nu\alpha^\nu-\alpha^\nu=-3\alpha\nu\alpha^{\nu-1}$$

$$\Leftrightarrow(-2)^\nu\alpha^\nu-\alpha^\nu=-3\nu\alpha^\nu\overset{(\alpha^\nu\neq0)}{\Leftrightarrow}(-2)^\nu-1=-3\nu$$

$\Leftrightarrow 3\nu-1=-(-2)^\nu\ :(1)$. Όμως ο ν είναι περιττός, οπότε $(-2)^\nu=-2^\nu$ και η (1) γράφεται:

$$3\nu-1=2^\nu\Leftrightarrow g(\nu)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\nu=1\\\nu=3\end{cases}\quad\text{(Από το Ε1)}$$

✓ Αν $\nu=1$, τότε $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=1$, δηλαδή η $C_{f'}$ είναι η οριζόντια ευθεία $(\eta):y=1$, το οποίο από το σχήμα απορρίπτεται.

✓ Άρα $\nu=3$ και επομένως $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

Ε 4. Για κάθε $t\in[0,+\infty)$ ισχύει $\alpha'(t)=\alpha(t)$, οπότε από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε: $\alpha(t)=c\cdot e^t$, $t\in[0,+\infty)$.

Είναι
$\alpha(0)=1\Leftrightarrow c\cdot1=1\Leftrightarrow c=1$, άρα $\alpha(t)=e^t, t\geq0$.

Για κάθε $x\in[1,+\infty)$ είναι $f'(x)=3x^2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο $A(\alpha,\alpha^3)$ είναι: $(\varepsilon):y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

Αν β η τετμημένη του σημείου B, έχουμε $B(\beta,0)$, οπότε: $0=3\alpha^2\beta-2\alpha^3\Leftrightarrow\beta=\frac{2}{3}\alpha$. Είναι $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$ οπότε:

$\beta(t)=\frac{2}{3}\alpha(t)\overset{(\alpha(t)=e^t)}{\Leftrightarrow}\beta(t)=\frac{2}{3}e^t$. Για κάθε $t\in[0,+\infty)$, ο ρυθμός μεταβολής, ως προς τον χρόνο t, της τετμημένης β του σημείου B είναι $\beta'(t)=\left(\frac{2}{3}e^t\right)'=\frac{2}{3}e^t$ μ.μ./sec, οπότε ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής, τη χρονική στιγμή $t_0=3$ sec, είναι $\beta'(3)=\frac{2}{3}e^3$ μ.μ./sec.

Ε 5. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (δ) της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της $(1,f(1))$, είναι $(\delta):y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

Είναι: $f(1)=1$ και $f'(1)=3\cdot1^2=3$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) είναι

$y-1=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-2$.

Άρα είναι $(\delta):y=3x-2$.

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x)=x^3$, $x\in(-\infty,0]$
- $h(x)=3x-2, x\in\mathbb{R}$ (η h είναι η εφαπτομένη $(\delta):y=3x-2$ της C_f)
- $\varphi(x)=0, x\in\mathbb{R}$

(η συνάρτηση φ έχει γραφική παράσταση την ευθεία $(\varepsilon):y=0$, (άξονας $x'x$))

❖ Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης: $f(x)=h(x)$, $x\in(-\infty,0]$. Είναι:

$$\begin{cases}f(x)=h(x)\\x\in(-\infty,0]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=3x-2\\x\in(-\infty,0]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+2=0\\x\in(-\infty,0]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+2=0\\x\in(-\infty,0]\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x+x+2=0\\x\in(-\infty,0]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2-4)+(x+2)=0\\x\in(-\infty,0]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)(x+2)+(x+2)=0\\x\in(-\infty,0]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)(x(x-2)+1)=0\\x\in(-\infty,0]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-2x+1)=0 \\ x\in(-\infty,0] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, x=1 \\ x\in(-\infty,0] \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x\le 0$, το σημείο $A(-2,-8)$.

❖ Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης: $h(x)=\varphi(x), x\in\mathbb{R}$.

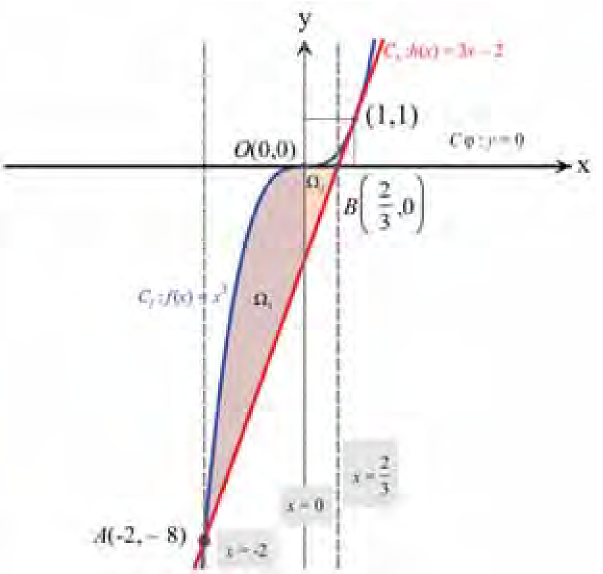
Έχουμε: $h(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow 3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h,φ τέμνονται στο σημείο $B\left(\frac{2}{3},0\right)$.

❖ Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης: $f(x)=\varphi(x), x\in(-\infty,0]$.

Έχουμε $:f(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow x^3=0\Leftrightarrow x=0$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,φ τέμνονται στο σημείο $O(0,0)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων f,h,φ



Ε6. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των C_f, C_h, C_φ δίνεται από τον τύπο:

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2),$$

όπου $E(\Omega_1)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τις C_h, C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-2$ και $x=0$ και $E(\Omega_2)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω_2 που περικλείεται από τις C_h, C_φ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=\frac{2}{3}$. Είναι:

$$E(\Omega_1)=\int_{-2}^{0}(f(x)-h(x))dx==\int_{-2}^{0}(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}$$

$$=\left[\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{3}{2}\cdot 0^2+0\right]-\left[\frac{1}{4}\cdot(-2)^4-\frac{3}{2}\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)\right]$$

$=0-(4-6-4)=6$τ.μ. και

$$E(\Omega_2)=\int_{0}^{2/3}(\varphi(x)-h(x))dx=$$

$$\int_{0}^{2/3}(0-3x+2)dx=\left[-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{2/3}$$

$$=\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{2^2}{3^2}+2\cdot\frac{2}{3}\right]-\left[-\frac{3}{2}\cdot 0^2+0\right]=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\text{τ.μ.}$$

Επομένως,

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}\text{τ.μ}$$

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} &, x<0 \\ 0 &, x=0 \\ \frac{1}{\ln x} &, 0<x<1 \end{cases}$$

Ε1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$.

Ε2. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f.

Ε3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Στη συνέχεια να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να την παραστήσετε γραφικά.

Ε4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση και ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Ε5. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): x=-1$, $(\varepsilon_2): x=\frac{1}{e}$ είναι μικρότερο από $\frac{2}{e}$ τετρ. μονάδες.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Ε1. Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, οπότε η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, οπότε η f είναι συνεχής στο $(0,1)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}\overset{\left(\frac{1}{-\infty}\right)}{=}0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}\underset{\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\right)}{\overset{\left(\frac{1}{x}=y\right)}{=}}\lim\limits_{y\to-\infty}e^{y}=0$ και
- $f(0)=0$

Επομένως,
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $x_0=0$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$.

Ε2. Έχουμε:

- Για κάθε $x\in(-\infty,0)$, είναι

$$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

- Για κάθε $x\in(0,1)$, είναι

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=-\frac{1}{\ln^2 x}(\ln x)'=\frac{-1}{x\ln^2 x}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\ln x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x\ln x}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\underset{(\text{D.L.H.})}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

οπότε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άρα είναι $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ -\dfrac{1}{x\ln^2 x}, & 0<x<1\end{cases}$.

Έχουμε:

- Για κάθε $x\in(-\infty,0)$, είναι

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(-x^{-2}\right)'e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=$$

$$=2x^{-3}e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)=\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\left(2+\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{1}{x}}\frac{2x+1}{x^4}$$

- Για κάθε $x\in(0,1)$, είναι

$$f''(x)=\left(\frac{-1}{x\ln^2 x}\right)'=\frac{1}{\left(x\ln^2 x\right)^2}\left(x\ln^2 x\right)'=$$

$$=\frac{1}{\left(x\ln^2 x\right)^2}\left((x)'\ln^2 x+x\left(\ln^2 x\right)'\right)$$

$$=\frac{1}{\left(x\ln^2 x\right)^2}\left(\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(x\ln^2 x\right)^2}\left(\ln^2 x+2\ln x\right)$$

Άρα είναι $f''(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}\dfrac{2x+1}{x^4}, & x<0\\ \dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{\left(x\ln^2 x\right)^2}, & 0<x<1\end{cases}$.

Ε3. Είναι $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ -\dfrac{1}{x\ln^2 x}, & 0<x<1\end{cases}$. Έχουμε:

- Για κάθε $x\in(-\infty,0)$, είναι

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}<0$$

- Για κάθε $x\in(0,1)$, είναι $f'(x)=\dfrac{-1}{x\ln^2 x}<0$

και η f είναι συνεχής στο 0, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$.

Είναι $f''(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{2x+1}{x^4}, & x<0\\ \dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{\left(x\ln^2 x\right)^2}, & 0<x<1\end{cases}$.

- για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι: $f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{2x+1}{x^4}$ έχουμε:

✓ $\begin{cases} f''(x)=0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{2x+1}{x^4}=0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

✓ $\begin{cases} f''(x)>0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{2x+1}{x^4}>0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<0$

✓ $\begin{cases} f''(x)<0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{2x+1}{x^4}<0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{2}$

- Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι:

$f''(x)=\dfrac{\ln x(\ln x+2)}{(x\ln^2 x)^2}$. Είναι $(x\ln^2 x)^2>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $x<1 \overset{(\ln x:\mathbf{1}\,(0,+\infty))}{\Rightarrow} \ln x<0$ ακόμη

■ $\ln x+2=0\Leftrightarrow \ln x=-2\Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{-2}\Leftrightarrow x=e^{-2}$

■ $\ln x+2>0\Leftrightarrow \ln x>-2 \overset{(e^x:\mathbf{1}\,(0,+\infty))}{\Leftrightarrow} e^{\ln x}>e^{-2}\Leftrightarrow x>e^{-2}$

■ $\ln x+2<0\Leftrightarrow 0<x<e^{-2}$ οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	**0**		e^{-2}		1
$\ln x$	‖	−		−	‖
$\ln x+2$	‖	−	0	+	‖
Γινόμενο	‖	+	0	−	‖

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε

- $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e^{-2})$ και
- $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(e^{-2},1)$.

Συνοψίζοντας κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της $f''(x)$ και κυρτότητας της f.

x	$-\infty$		$-1/2$		0		e^{-2}		1
$f''(x)$		−	0	+	⋮	+	0	−	‖
$f(x)$		4		3		3		4	‖

Από το πρόσημο της f'' που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:

- η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right] \text{ και } \left[e^{-2},1\right)$$

- η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα

$$\left[-\frac{1}{2},0\right],\left[0,e^{-2}\right]$$

- η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία $x_1=-\dfrac{1}{2}$ και $x_2=e^{-2}$

Είναι $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}}=e^{-2}$ και $f\left(e^{-2}\right)=\dfrac{1}{\ln e^{-2}}=-\dfrac{1}{2}$

οπότε τα σημεία καμπής της C_f είναι :

$A\left(-\dfrac{1}{2},e^{-2}\right)$ και $B\left(e^{-2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

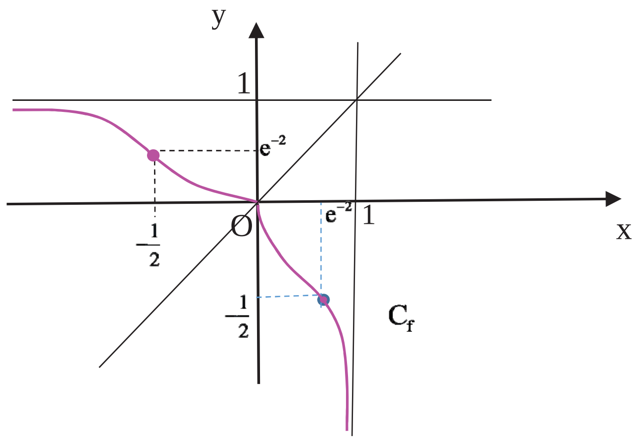
Για τις ασύμπτωτες έχουμε:

- η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$.
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\ln x}\overset{\left(\frac{1}{0^-}\right)}{=}-\infty$, οπότε η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$, οπότε η ευθεία με εξίσωση $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f συνοψίζοντας τα συμπεράσματα από τα ερωτήματα Ε1,Ε2 ,Ε3

x	$-\infty$		$-1/2$		0		e^{-2}		1
$f''(x)$		−	0	+	⋮	+	0	−	‖
$f'(x)$		−		−	⋮	−		−	‖
$f(x)$		8	e^{-2}	7		7	$-1/2$	8	‖

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα χαράσσουμε τη C_f.



Ε4. Η συνάρτηση f είναι 1−1 ,ως γνησίως φθίνουσα στο $D_f=(-\infty,1)$, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της $f\left((-\infty,1)\right)$ της f .Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$, οπότε το σύνολο τιμών της συνεχούς και γνησίως φθίνουσας, στο $(-\infty,1)$, συνάρτησης f είναι το $f\left((-\infty,1)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right)=(-\infty,1)$.

Για την εύρεση του τύπου της f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$, ως προς x, με $x\in D_f=(-\infty,1)$ και $y\in D_{f^{-1}}=f\left((-\infty,1)\right)=(-\infty,1)$.

- Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ με $f\left((-\infty,0)\right)\underset{f\,2\,(-\infty,0)}{\overset{f:\text{συνεχής στο}(-\infty,0)}{=}}\left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right)=(0,1)$

Έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in(-\infty,0) \\ y\in f\left((-\infty,0)\right)=(0,1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}=y \\ x<0,\ y\in(0,1)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\ln y \\ x<0,\ y\in(0,1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln y} \\ y\in(0,1)\end{cases}$$

- Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, με $f\left((0,1)\right)\underset{f\,2(0,1)}{\overset{f:\text{συνεχής στο}(0,1)}{=}}\left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,0)$

Έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in(0,1) \\ y\in f\left((0,1)\right)=(-\infty,0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\ln x}=y \\ x\in(0,1),\ y\in(-\infty,0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=\dfrac{1}{y} \\ x\in(0,1),\ y\in(-\infty,0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^{\frac{1}{y}} \\ y\in(-\infty,0)\end{cases}$$

- Είναι $f(0)=0$, οπότε $f^{-1}(0)=0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln y}, & y\in(0,1) \\ 0, & y=0 \\ e^{\frac{1}{y}}, & y<0\end{cases}.$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}:(-\infty,1)\to\mathbb{R},\ \text{με}\ f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln x}, & x\in(0,1) \\ 0, & x=0 \\ e^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f=f^{-1}$.

Ε5. Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): x=-1$, $(\varepsilon_2): x=\dfrac{1}{e}$ δίνεται από τον τύπο

$$E=\int_{-1}^{\frac{1}{e}}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}|f(x)|\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{e}}|f(x)|\,dx=$$

$$\underset{\left(f(x)\le 0\ \text{για κάθε}\ x\in\left[0,\frac{1}{e}\right]\right)}{\overset{(f(x)\ge 0\ \text{για κάθε}\ x\in[-1,0])}{=}}\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{e}}\left(-f(x)\right)dx\cdot$$

$$=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx-\int_{0}^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx.$$

■ Για κάθε $x\in[-1,0]$ έχουμε:

$$-1\le x\le 0\overset{(f\,2\,(-\infty,1))}{\Rightarrow} f(-1)\ge f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^{-1}\ge f(x)\ge 0$$

$\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e}$, με την ισότητα $f(x)=\dfrac{1}{e}$ να ισχύει μόνο για $x=-1$, οπότε έχουμε:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx<\int_{-1}^{0}\frac{1}{e}\,dx=\left[\frac{1}{e}x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{e}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{0} f(x)\,dx<\frac{1}{e}:(1)$$

■ Για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$ έχουμε:

$$0\le x\le\frac{1}{e}\overset{(f\,2\,(-\infty,1))}{\Rightarrow} f(0)\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\ge f(x)\ge\frac{1}{\ln\frac{1}{e}}=\frac{1}{\ln\left(e^{-1}\right)}=-1\Rightarrow f(x)\ge -1$$

με την ισότητα $f(x)=-1$ να ισχύει μόνο για $x=\dfrac{1}{e}$, οπότε έχουμε:

$$\int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx > \int_0^{\frac{1}{e}}(-1)dx = [-x]_0^{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx > -\frac{1}{e} \Rightarrow -\int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx < \frac{1}{e} : (2)$$

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx < \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \Rightarrow \boxed{E < \frac{2}{e}\ \text{τ.μ.}}$$

Θέμα 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-x^2+x}{x+1} = 1$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2, x\in[0,+\infty)$.

Ε2. Να βρείτε το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha \geq 0$ για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται ελάχιστο, όπου Β και Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας $(\varepsilon): y = x-1$ με τους άξονες.

Ε3. Αν Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y=x-1$, $x=0$ και $x=1$, να βρείτε τις ευθείες με εξισώσεις

1. **$y=y_0$ και**
2. **$y=kx$**

οι οποίες χωρίζουν το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Ε1. Έστω η ρητή συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)-x^2+x}{x+1}, x\in[0,+\infty), \text{ με}$$

$$g(0) = \frac{f(0)-0^2+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

Όταν ζητάμε όριο ρητής συνάρτησης στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ πρέπει να γνωρίζουμε ποιος είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του αριθμητή και ποιος του παρονομαστή. Στον παρονομαστή $\Pi(x)=x+1$, ο μεγιστοβάθμιος όρος είναι το x. Στον αριθμητή

$$A(x) = f(x) - x^2 + x =$$

$$= \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0, \alpha_\nu \neq 0, \nu\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}$$

ο μεγιστοβάθμιος όρος είναι ο $\alpha_\nu x^\nu$ (είναι φανερό ότι το $A(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, αφού αν $A(x)=0$, τότε είναι $g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0 \neq 1$, που είναι άτοπο). Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-x^2+x}{x+1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^{\nu-1}\right)$$

Έτσι διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\nu>1$ δηλαδή $\nu-1>0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^{\nu-1}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha_\nu>0 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha_\nu<0 \end{cases}$$

Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται, αφού δόθηκε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

- Αν $\nu<1$ δηλαδή $\nu=0$ (αφού $\nu\in\mathbb{N}$), τότε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_0 x^0}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_0}{x}\right) = 0.$$

Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται, αφού δόθηκε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

- Άρα πρέπει $\nu=1$. Για $\nu=1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_1 x^1}{x} = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1, \text{ οπότε}$$

$$A(x) = x+\alpha_0 \Leftrightarrow f(x) - x^2 + x = x + \alpha_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 + \alpha_0.$$

Ακόμη, είναι $f(0)=0 \Leftrightarrow 0^2+\alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = 0$.

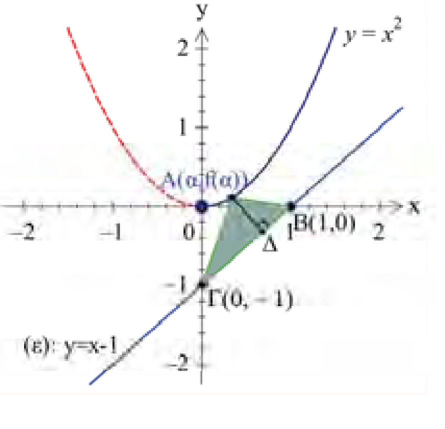
Επομένως $f(x)=x^2, x\in[0,+\infty)$.

Ε2. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}\cdot(A\Delta)\cdot(B\Gamma)$, όπου:

- $(A\Delta) = d(A,(\varepsilon): x-y-1=0) =$

$$= \frac{|\alpha - f(\alpha) - 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|\alpha-\alpha^2-1|}{\sqrt{2}} \text{ και}$$

- $(B\Gamma) = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} =$
$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



Άρα $E(\alpha)=\frac{1}{2}\left|\alpha-\alpha^2-1\right|=\frac{1}{2}\left|\alpha^2-\alpha+1\right|=$

$\overset{\left(\substack{\alpha^2-\alpha+1>0 \\ \text{αφού } \Delta=-3<0}\right)}{=} \frac{1}{2}\left(\alpha^2-\alpha+1\right)$ με $\alpha\ge 0$

Είναι $E'(\alpha)=\frac{1}{2}(2\alpha-1)=\alpha-\frac{1}{2}$.

Έχουμε:

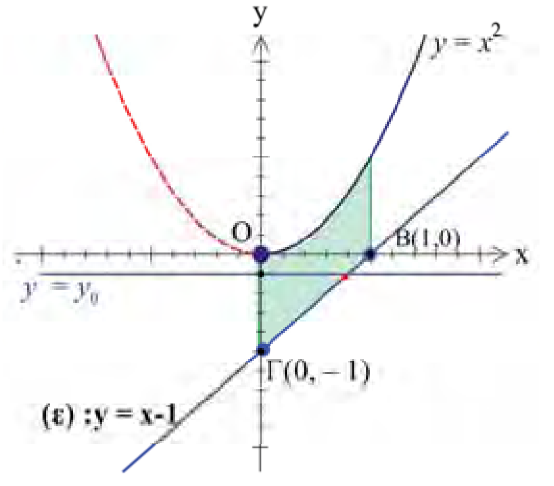
- $E'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$
- $E'(\alpha)<0 \Leftrightarrow \alpha-\frac{1}{2}<0 \Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{2}$ και
- $E'(\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow \alpha>\frac{1}{2}$

Σύμφωνα με τα παραπάνω επειδή η συνάρτηση E είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ προκύπτει ότι η συνάρτηση E είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$,
- γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, οπότε η E

παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=\frac{1}{2}$, το $E\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{8}$τ.μ. Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $A_0\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ δηλαδή στη θέση $A_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Ε3.



Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

✓ τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

✓ την ευθεία με εξίσωση $y=x-1$ και

✓ τις κατακόρυφες ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=1$είναι:

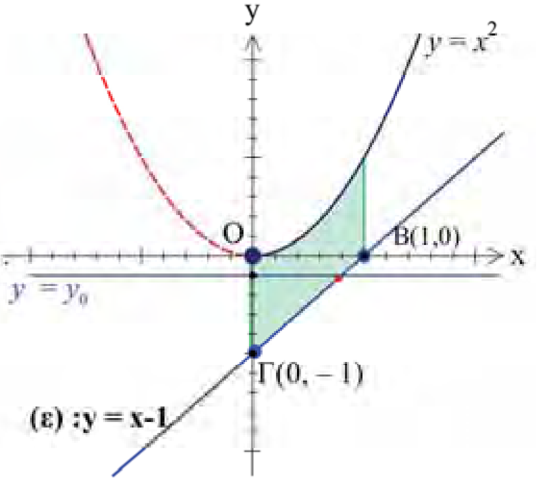
$$E=\int_0^1\left|f(x)-(x-1)\right|dx=\int_0^1\left|x^2-x+1\right|dx=$$

$$\overset{\left(\substack{x^2-x+1>0 \\ \text{αφού } \Delta=-3<0}\right)}{=}\int_0^1\left(x^2-x+1\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}\text{ τ.μ.}$$

1. Υπολογίζουμε το εμβαδό του τριγώνου ΟΒΓ, είναι $(ΟΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot(ΟΒ)\cdot(ΟΓ)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι $(ΟΒΓ)=\frac{1}{2}>\frac{E}{2}=\frac{5}{12}$, δηλαδή το τμήμα του εμβαδού του αρχικού χωρίου που βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ είναι μεγαλύτερο από το μισό του συνολικού εμβαδού.



Επομένως η ζητούμενη (οριζόντια) ευθεία με εξίσωση $y=y_0$ που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$

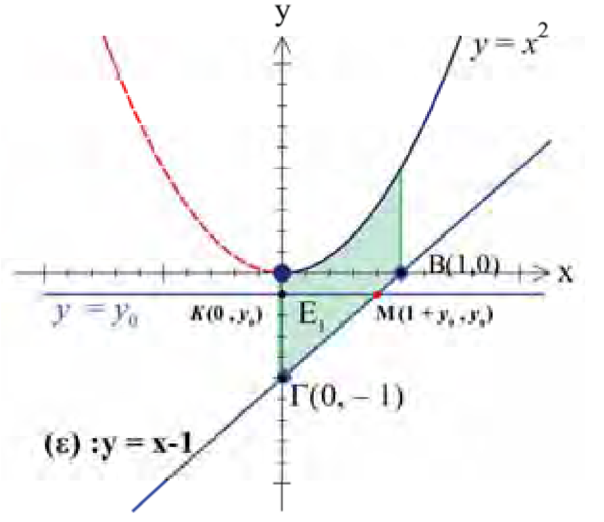
Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε $-1<y_0<0$.

Έστω Κ το σημείο τομής της ευθείας με εξίσωση $y=y_0$ και του άξονα $y'y$, τότε είναι $K(0,y_0)$.

Θα βρούμε το σημείο τομής Μ των ευθειών με εξισώσεις $y=y_0, y=x-1$, λύνοντας το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} y=y_0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y_0 \\ y_0=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y_0 \\ x=y_0+1 \end{cases} \Rightarrow M(y_0+1,y_0)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε το παρακάτω σχήμα



Το εμβαδόν E_1, του τριγώνου ΓΜΚ, είναι:

$$E_1=\frac{1}{2}\cdot(\Gamma K)\cdot(KM)=\frac{1}{2}\left|y_0-(-1)\right|\cdot\left|y_0+1\right|=$$

$=\frac{1}{2}\left|y_0+1\right|^2=\frac{1}{2}(y_0+1)^2$. Αναζητούμε το $y_0\in(-1,0)$ ώστε να ισχύει $E_1=\frac{E}{2}$.

Έχουμε:

$$E_1=\frac{E}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(y_0+1)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\Leftrightarrow(y_0+1)^2=\frac{5}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y_0+1=\sqrt{\frac{5}{6}}\quad ή\quad y_0+1=-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(y_0=-1+\sqrt{\frac{5}{6}}\quad ή\quad y_0=-1-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$$

Η τιμή $y_0=-1-\sqrt{\frac{5}{6}}\notin(-1,0)$, και απορρίπτεται ενώ η τιμή $y_0=-1+\sqrt{\frac{5}{6}}\in(-1,0)$ είναι δεκτή.

Επομένως η ζητούμενη οριζόντια ευθεία που χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y=x-1$, $x=0$ και $x=1$, σε δυο ισεμβαδικά χωρία είναι η ευθεία με εξίσωση $y=-1+\sqrt{\frac{5}{6}}$.

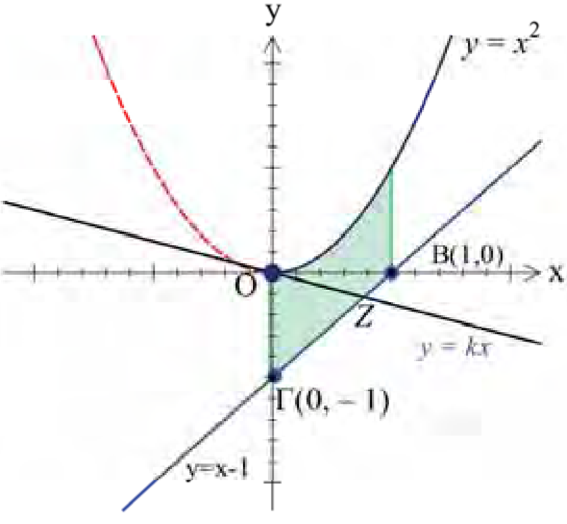
2. Επειδή $(OB\Gamma)>\frac{E}{2}$, η ζητούμενη ευθεία με εξίσωση $y=kx$ τέμνει το αρχικό χωρίο στο τμήμα του κάτω από τον $x'x$.
Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε $k<0$.

Το σημείο τομής της Ζ των ευθειών με εξισώσεις $y=kx$ και $y=x-1$ προκύπτει από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}y=x-1\\y=kx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-1\\kx=x-1\end{cases}\overset{k\neq1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=\frac{1}{1-k}-1\\x=\frac{1}{1-k}\end{cases}$$

$$\Rightarrow Z\left(\frac{1}{1-k},\frac{1}{1-k}-1\right)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε το παρακάτω σχήμα



Το ύψος του τριγώνου ΟΖΓ που άγεται από την κορυφή Ζ είναι $d(Z,y'y)=\frac{1}{1-\kappa}$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΖΓ, πρέπει να είναι ίσο με $\frac{E}{2}$. Έχουμε:

$$(OZ\Gamma)=\frac{E}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(O\Gamma)\cdot d(Z,(y'y))=\frac{5}{12}\Leftrightarrow$$

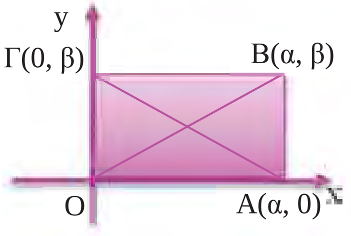
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{1-\kappa}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow1-\kappa=\frac{6}{5}\Leftrightarrow\kappa=1-\frac{6}{5}\Leftrightarrow\kappa=-\frac{1}{5}$$

Επομένως η ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{5}x$ χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y=x-1$, $x=0$ και $x=1$, σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

Θέμα 5

Δίνεται το ορθογώνιο ΟΑΒΓ του παρακάτω σχήματος και μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση στο $[0,\alpha]$ βρίσκεται μέσα στο

ορθογώνιο ΟΑΒΓ χωρίς να διέρχεται από τα σημεία Ο,Α,Β,Γ.



Ε1. Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΟΒ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ και να αποδείξετε, ότι η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΟΒ.

Δίνεται ότι το ορθογώνιο ΟΑΒΓ του παραπάνω σχήματος έχει εμβαδόν $4\,cm^2$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι, το μήκος της διαγωνίου ΟΒ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ δίνεται από τη συνάρτηση $P(\alpha)=\sqrt{\alpha^2+\frac{16}{\alpha^2}}$, $\alpha>0$.

Ε3.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση Ρ, με $P(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$, $x>0$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Για την τιμή του x για την οποία το μήκος της διαγωνίου ΟΒ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ γίνεται ελάχιστο, να υπολογίσετε τις πλευρές ΟΑ,ΟΒ του ορθογωνίου. Τι παρατηρείται;

Ε4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της Ρ.

Ε5. Να λύσετε την ανίσωση:

$$P\left(\frac{4}{x+1}\right)<P\left(\frac{4}{e}\right), x\in(0,1).$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Ε1. Αφού η C_f στο διάστημα $[0,\alpha]$ βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο ΟΑΒΓ, χωρίς να διέρχεται από τα σημεία Ο, Α, Β, Γ, έπεται ότι για κάθε $x\in[0,\alpha]$ ισχύει: $0<f(x)<\beta \quad :(1)$.

Επειδή η ευθεία ΟΒ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η εξίσωσή της είναι της μορφής $y=\lambda x, \lambda\in\mathbb{R}$. Επίσης επειδή η ευθεία ΟΒ διέρχεται από το σημείο $B(\alpha,\beta)$ έχουμε $\beta=\lambda\alpha \overset{(\alpha\neq 0)}{\Leftrightarrow} \lambda=\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε είναι $OB: y=\frac{\beta}{\alpha}x$.

Για να τέμνει η C_f τη διαγώνιο ΟΒ θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\alpha)$ το οποίο είναι λύση της εξίσωσης

$f(x)=\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow f(x)-\frac{\beta}{\alpha}x=0 \Leftrightarrow g(x)=0$. Όπου $g(x)=f(x)-\frac{\beta}{\alpha}x, x\in[0,\alpha]$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη, είναι $g(0)=f(0)>0$, λόγω της (1) και $g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha=f(\alpha)-\beta<0$, λόγω της (1), οπότε $g(0)g(\alpha)<0$

Επομένως η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,\alpha]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$. Άρα η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΟΒ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,\alpha)$.

Ε2. Αφού το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ είναι $4\,cm^2$ έχουμε:

$$(OA)(AB)=4 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=4 \Leftrightarrow \beta=\frac{4}{\alpha}$$

Το μήκος της διαγωνίου ΟΒ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$(OB)=\sqrt{(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2}=$$
$$=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$
$$=\sqrt{\alpha^2+\left(\frac{4}{\alpha}\right)^2}=\sqrt{\alpha^2+\frac{16}{\alpha^2}}.$$

Άρα η συνάρτηση $P(\alpha)=\sqrt{\alpha^2+\frac{16}{\alpha^2}}$, $\alpha>0$ δίνει το μήκος της διαγώνιου ΟΒ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ για οποιοδήποτε $\alpha>0$.

Ε3.

i. Για κάθε $\alpha>0$, είναι

$$P'(\alpha)=\left(\sqrt{\alpha^2+\frac{16}{\alpha^2}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2+\frac{16}{\alpha^2}}}\left(2\alpha-32\alpha^{-3}\right)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\frac{16}{\alpha^2}}}\cdot\frac{\alpha^4-16}{\alpha^3}$$

Έχουμε:

- $P'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^4-16=0 \overset{(\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \alpha=2$
- $P'(\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha^4-16>0$
  $\Leftrightarrow (\alpha^2-4)(\alpha^2+4)>0 \overset{(\alpha^2+4>0)}{\Leftrightarrow}$
  $\Leftrightarrow \alpha^2-4>0 \Leftrightarrow \alpha^2>4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2}>\sqrt{4}$

$$\Leftrightarrow |\alpha| > 2 \overset{(\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \alpha > 2$$

- $P'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$, γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $\alpha_0 = 2$, το $P(2) = \sqrt{2^2 + \frac{16}{2^2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

ii. Σύμφωνα με το ερώτημα (Ε₃i.) το μήκος της διαγωνίου ΟΒ του ορθογωνίου ΟΑΒΓ γίνεται ελάχιστο για $\alpha = 2$ και η ελάχιστη τιμή του μήκους της είναι: $\min(OB) = 2\sqrt{2}$.

Για $\alpha = 2$ έχουμε $\beta = \frac{4}{\alpha} = \frac{4}{2} = 2$, οπότε $(AB) = \beta = 2$. Άρα, για $\alpha = 2$ είναι $(OA) = (AB) = 2$, οπότε το ορθογώνιο ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο.

Ε4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης P είναι το $(0,+\infty)$ και η συνάρτηση P είναι συνεχής, οπότε η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_P είναι η ευθεία $(\varepsilon_1): x = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} P(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} = +\infty$ οπότε η ευθεία $(\varepsilon_1): x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_P.

Στο $+\infty$ θα αναζητούμε ασύμπτωτη με εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \kappa$, $(\lambda, \kappa \in \mathbb{R})$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}}{x} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{16}{x^4}}}{x} \overset{\left(\sqrt{x^2}=|x|=x,\ x>0\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{16}{x^4}}}{x} = \lim_{\alpha\to+\infty} \sqrt{1+\frac{16}{x^4}} = \sqrt{1+0} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Άρα είναι $\lambda = 1$. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} (P(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} + x} == \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \frac{16}{x^2} - x^2}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{16}{x^4}} + x}$$

$$\overset{\left(\sqrt{x^2}=|x|=x,\ x>0\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{16}{x^2}}{x\cdot\sqrt{1+\frac{16}{x^4}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{16}{x^2}}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{16}{x^4}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{16}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{x^4}} + 1}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0 \in \mathbb{R}$$

Άρα είναι $\kappa = 0$. Επομένως η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_P στο $+\infty$.

Ε5. Θα λύσουμε στο διάστημα $(0,1)$ την ανίσωση $P\left(\frac{4}{x+1}\right) < P\left(\frac{4}{e}\right)$.

Είναι $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < x+1 < 2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x+1} > \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x+1} < 1 \Rightarrow 2 < \frac{4}{x+1} < 4$, οπότε $\frac{4}{x+1} \in (2,+\infty)$.

Ακόμη

$$P\left(\frac{4}{e}\right) = \sqrt{\left(\frac{4}{e}\right)^2 + \frac{16}{\left(\frac{4}{e}\right)^2}} = \sqrt{\frac{16}{e^2} + \frac{16}{\frac{16}{e^2}}} = \sqrt{\frac{16}{e^2} + e^2} = P(e)$$

Παρατηρούμε επίσης, ότι $e \in (2,+\infty)$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} P\left(\frac{4}{x+1}\right) < P\left(\frac{4}{e}\right) \\ x \in (0,1) \end{cases} \overset{\left(P\left(\frac{4}{e}\right)=P(e)\right)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} P\left(\frac{4}{x+1}\right) < P(e) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{(P\uparrow(2,+\infty))}{\overset{\left(\frac{4}{x+1},\, e\in(2,+\infty)\right)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \frac{4}{x+1} < e \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{e} < x+1 \\ x \in (0,1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{e} - 1 \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{4-e}{e}, 1\right)$$

Άρα η δοθείσα ανίσωση αληθεύει αν και μόνο αν $x \in \left(\frac{4-e}{e}, 1\right)$

Τάξη: Γ΄

Θέματα και ιδέες για επανάληψη

Δημήτρης Απατσίδης

Θέμα 1

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g,G:[1,2]\to\mathbb{R}$ και $h:(1,2]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- **Η f είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και κυρτή.**
- **Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.**
- **Η G είναι αρχική της g.**
- $h(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(x)>\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$**, για κάθε** $x\in(1,2)$.

ii) **Η h είναι γνησίως αύξουσα στο** $(1,2]$.

iii) $f(x)\le(f(2)-f(1))(x-1)+f(1)$**, για κάθε** $x\in[1,2]$

iv) $\int_1^2 f(x)dx<\dfrac{f(1)+f(2)}{2}$

v) $\int_1^2(2x-3)g(x)dx=G(1)+G(2)-2\int_1^2 G(x)dx$.

vi) $\int_1^2(2x-3)g(x)dx>0$.

Λύση

i) Έστω $1<x<2$. Τότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,x]$, άρα θα υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Όμως η f είναι κυρτή, άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,2)$ και έχουμε:

$$1<\xi<x<2\Rightarrow f'(x)>f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

ii) Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x)=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-f(1))}{(x-1)^2},\ x\in(1,2)$$

Από την (i) παίρνουμε ότι:

$$f'(x)(x-1)-(f(x)-f(1))>0,\ x\in(1,2)$$

$$\Leftrightarrow h'(x)>0,\ \ x\in(1,2)$$

και επειδή η h είναι συνεχής στο $(1,2]$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,2]$.

iii) Για x=1 ή x=2 ισχύει η ισότητα. Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,2]$, ισχύει:

$$1<x<2\Rightarrow h(x)<h(2)\Rightarrow\ f(x)<(f(2)-f(1))(x-1)+f(1).$$

iv) Επειδή στην (iii) η ισότητα δεν ισχύει παντού στο διάστημα $[1,2]$, έχουμε:

$$\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2[(f(2)-f(1))(x-1)+f(1)]dx$$

$$=(f(2)-f(1))\int_1^2(x-1)dx+\int_1^2 f(1)dx$$

$$=(f(2)-f(1))\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2+f(1)$$

$$=\frac{(f(2)-f(1))}{2}+f(1)=\frac{f(1)+f(2)}{2}.$$

v) Επειδή G'(x)=g(x) για κάθε $x\in[1,2]$, έχουμε:

$$\int_1^2(2x-3)g(x)dx=\int_1^2(2x-3)G'(x)dx=$$

$$=[(2x-3)G(x)]_1^2-2\int_1^2 G(x)dx=G(1)+G(2)-2\int_1^2 G(x)dx.$$

vi) Επειδή G'=g και g γνησίως αύξουσα, η G θα είναι κυρτή. Άρα από την (iv) παίρνουμε:

$$\int_1^2 G(x)dx<\frac{G(1)+G(2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow G(1)+G(2)-2\int_1^2 G(x)dx>0\overset{(v)}{\Leftrightarrow}\int_1^2(2x-3)g(x)dx>0.$$

Θέμα 2

Δίνεται κυρτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ένα προς ένα.

i) **Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.**

ii) **Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο.**

iii) **Αν α, β $\in\mathbb{R}$ με $\alpha<x_0<\beta$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία Α(α,f(α)) και Β(β,f(β)), και να αποδείξετε ότι:**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\ \text{και}\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

iv) **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x+2020)=f(x)$ έχει μοναδική λύση.**

Λύση

i) Η f δεν είναι ένα προς ένα, άρα θα υπάρχουν $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\ne x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$.

Έστω ότι $x_1<x_2$. Τότε η f ως κυρτή στο $\mathbb{R}$ θα είναι παραγωγίσιμη, άρα θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$. Επομένως υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ με $f'(x_0)=0$.

ii) Η f είναι κυρτή οπότε η f′ είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς, $x<x_0\Rightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$

$$x>x_0\Rightarrow f'(x)>f'(x_0)=0$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, θα παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο.

iii) Οι εξισώσεις των εφαπτομένων ε_A και ε_B της C_f στα σημεία στα σημεία Α(α,f(α)) και

$B(\beta, f(\beta))$ αντίστοιχα είναι:

$\varepsilon_A: y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$

και $\varepsilon_B: y - f(\beta) = f'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y = f'(\beta)(x-\beta) + f(\beta)$

Επειδή η f είναι κυρτή παίρνουμε:

$f(x) \geq f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και

$f(x) \geq f'(\beta)(x-\beta) + f(\beta)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2).

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f'(\alpha)x] = +\infty$, γιατί $f'(\alpha)<0$, ενώ

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[f'(\beta)x] = +\infty$, γιατί $f'(\beta)>0$. Επομένως από (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x+2020) - f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Τότε $x_0 - 2020 < x_0$ και η g είναι συνεχής στο

$$[x_0 - 2020\ ,\ x_0]$$

ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Από την απόδειξη του ερωτήματος (ii) γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$.

Άρα έχουμε:

- $x_0 - 2020 < x_0 \Rightarrow f(x_0) < f(x_0 - 2020)$
  $\Rightarrow f(x_0) - f(x_0 - 2020) < 0 \Rightarrow g(x-2020) < 0$
- $x_0 < x_0 + 2020 \Rightarrow f(x_0) < f(x_0 + 2020)$
  $\Rightarrow f(x_0 + 2020) - f(x_0) > 0 \Rightarrow g(x_o) > 0$

Τότε $g(x_0 - 2020)g(x_0) < 0$ και από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(x_0 - 2020\ ,\ x_0)$. Όμως η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x) = f'(x+2020) - f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γιατί $x < x+2020$ και f' γνησίως αύξουσα, οπότε:

$f'(x) < f'(x+2020) \Leftrightarrow f'(x+2020) - f'(x) > 0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα και άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση, ισοδύναμα, η εξίσωση $f(x+2020) = f(x)$ έχει μοναδική λύση.

Σχόλιο: Στο ερώτημα (iv) για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $f(x+2020) = f(x)$, χρησιμοποιήσαμε τη γνώση της μονοτονίας της f. Στην ουσία αυτό που χρειάζεται είναι η ύπαρξη ελάχιστης τιμής. Συγκεκριμένα ισχύει η παρακάτω πολύ ενδιαφέρουσα πρόταση η οποία αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, τότε η εξίσωση $f(x+c) = f(x)$ έχει λύση για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

Σημαντικές απώλειες

† Θεόφιλος Κάκουλλος

Έφυγε πρόσφατα από τη ζωή, **ο εξαίρετος συνάδελφος** και Ομότιμος Καθηγητής Θεόφιλος Κάκουλλος την Παρασκευή 4 Απριλίου 2020.

Υπήρξε πρώτος Καθηγητής Πιθανοτήτων και Στατιστικής στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, διετέλεσε μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ στις αρχές της δεκαετίας του 1970 και Αντιπρόεδρος του ΔΣ της ΕΜΕ το 1972.

† Νικόλαος Καρκανιάς

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία ανακοίνωσε το θλιβερό γεγονός της απώλειας ενός εξαίρετου συνάδελφου, του καθηγητή του Πανεπιστημίου του Λονδίνου Νικόλαου Καρκανιά που έφυγε από τη ζωή στις 17 Απριλίου 2020.

Ο Νικόλαος Καρκανιάς ήταν **ειδικός στη Θεωρία Ελέγχου** και είχε ανακηρυχθεί Επίτιμος Διδάκτορας από το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Υπήρξε φίλος της Ε.Μ.Ε. και πολύτιμος συνεργάτης πολλών Ελλήνων μαθηματικών και ειδικών ερευνητών.

† Γιάννης Ράλλης

Με μεγάλη θλίψη πληροφορηθήκαμε την απώλεια του εκλεκτού συναδέλφου και προέδρου του Παραρτήματος Χίου της ΕΜΕ, Γιάννη Ράλλη στις 27 Απριλίου 2020.

Ήταν ο δάσκαλος που **ζούσε** και **ανέπνεε για τα Μαθηματικά** και την διδασκαλία τους. Τίμησε το λειτούργημά του και υπερασπίστηκε την εκπαίδευση. Φανατικός υπερασπιστής της διαθεματικότητας και διεπιστημονικότητας, άφησε σημαντικό επιστημονικό έργο μέσα απο τις εισηγήσεις του, στα συνέδρια της Ε.Μ.Ε και τις ημερίδες του Παραρτήματος.

Τον συνόδευε η φιλία των συναδέλφων και η αγάπη των μαθητών του.

Από τις θέσεις του Διευθυντή του 4ου Γυμνασίου, του Συμβούλου Εκπαίδευσης και στη συνέχεια Συντονιστή Εκπαίδευσης αλλά και του Προέδρου του Παραρτήματος επι σειρά ετών, προσέφερε πολλά στην Μαθηματική Εκπαίδευση. Η απουσία του θα είναι φανερή σε όλους εμάς, που συνεργαστήκαμε μαζί του, όλα αυτά τα χρόνια.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Η Ανισότητα του Ky Fan

Διονύσης Γιάνναρος

Το παρόν άρθρο, αφιερώνεται στη μνήμη του **Γιώργου Τριάντου**, ενός εξαιρετικού συναδέλφου και αγαπητού φίλου, που έφυγε από κοντά μας τις τελευταίες μέρες του 2019. Όσοι τον γνωρίσαμε θα θυμόμαστε πάντα τη **μεγάλη αγάπη** του για τα Μαθηματικά και το **ζεστό, εγκάρδιο χαμόγελό του**.

Σε άρθρο του κ$^{\text{ου}}$ Νεστορίδη (Ευκλείδης Β΄τ.112) αναφέρεται η ανισότητα Jensen.Συγκεκριμένα: Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}$, τότε ισχύει η ανισότητα:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\ldots+\lambda_nf(x_n)\quad(1)$$

όπου $x_1,x_2,\ldots,x_n$ σημεία του διαστήματος I και $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ τυχόντες μη αρνητικοί με $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1$. Η ισότητα στην (1) ισχύει μόνο τότε όταν $x_1=x_2=\ldots=x_n$ ή όταν η f είναι γραμμική συνάρτηση. Στο παρόν άρθρο, θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Jensen προκειμένου να αποδείξουμε μία όχι και τόσο γνωστή ανισότητα του **Ky Fan (1914-2010)** , καθηγητή για πολλά χρόνια στο πανεπιστήμιο Santa Barbara της Καλιφόρνιας (Η.Π.Α). Η ανισότητα αυτή, ίσως για πρώτη φορά, εμφανίστηκε το 1961 στο βιβλίο των Beckenbach E.F, Bellman R. "Inequalities" Berlin, Springer 1961 και διατυπώνεται ως εξής: Έστω $a_1,a_2,\ldots,a_n\ (n\ge2)$ θετικοί αριθμοί του διαστήματος $\left(0,\frac12\right]$.

Θεωρούμε το μέσο αριθμητικό $A_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ και τον μέσο γεωμετρικό $G_n=(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^{\frac1n}$ αυτών. Επίσης θεωρούμε τους ανάλογους μέσους:

$$A_n'=\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_n)}{n}$$

και $\qquad G_n'=\left((1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)\right)^{\frac1n}$

των αριθμών $\qquad 1-a_1,1-a_2,\ldots,1-a_n$.

Η ανισότητα Ky Fan για τους αριθμούς $a_1,a_2,\ldots,a_n$ είναι η ανισότητα της μορφής:

$$\frac{G_n}{G_n'}\le\frac{A_n}{A_n'}$$

στην οποία η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$a_1=a_2=\ldots=a_n$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x)=\ln\frac{1-x}{x}$. Στο διάστημα $\left(0,\frac12\right]$ η f είναι κυρτή, επειδή

$$f''(x)=\frac{1-2x}{x^2(1-x)^2}>0 \text{ για } x\in\left(0,\frac12\right).$$

Εφαρμόζουμε στην f την ανισότητα Jensen θεωρώντας $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\frac1n$, $n\in\mathbb{N}^*$ και $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left(0,\frac12\right]$. Είναι

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\ldots+\lambda_nf(x_n)$$

απ' όπου

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \text{ ή}$$

$$\ln\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\le\ln\left[\left(\frac{1-x_1}{x_1}\right)^{\frac1n}\cdot\left(\frac{1-x_2}{x_2}\right)^{\frac1n}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1-x_n}{x_n}\right)^{\frac1n}\right]$$

Η τελευταία για όλους τους $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left(0,\frac12\right]$ και $n\in\mathbb{N}^*$, είναι ισοδύναμη με τις:

$$\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\le\frac{\left[(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)\right]^{\frac1n}}{(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac1n}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac1n}}{\left[(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)\right]^{\frac1n}}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots(1-x_n)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac1n}}{\left[(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)\right]^{\frac1n}}\le\frac{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)}{n}}$$

δηλαδή τελικά $\frac{G_n}{G_n'}\le\frac{A_n}{A_n'}$ Η ισότητα στην τελευταία θα ισχύει όταν $x_1=x_2=\ldots=x_n$ επειδή η f δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

Μερικές εφαρμογές της ανισότητας Ky Fan

1. Αν $a,b\in\left(0,\frac12\right]$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{a\cdot b}{(a+b)^2}\le\frac{(1-a)\cdot(1-b)}{(2-a-b)^2}$$

Λύση

Η αποδεικτέα γράφεται $\frac{a\cdot b}{(1-a)\cdot(1-b)}\le\frac{(a+b)^2}{(2-a-b)^2}$

ή $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(1-a)\cdot(1-b)}} \le \dfrac{a+b}{(1-a)+(1-b)}$

η οποία είναι απλή εφαρμογή της ανισότητας **Ky Fan** για τους αριθμούς a και b

2. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{\frac{x}{x^2-x+1}} = \frac{(x+1)^2}{3x^2-2x+3}$$

Λύση

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $[0,+\infty)$ και επειδή ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα της εργαζόμαστε με $x>0$. Θεωρούμε τους αριθμούς $\dfrac{x}{x^2+1}$ και $\dfrac{1}{2}$. Ισχύει $0<\dfrac{x}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$, επομένως η ανισότητα **Ky Fan** για τους αριθμούς αυτούς μας δίνει:

$$\frac{G_2}{G_2'} = \frac{\sqrt{\dfrac{x}{2(x^2+1)}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{x}{x^2+1}\right)}} = \frac{\sqrt{\dfrac{x}{2(x^2+1)}}}{\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{2(x^2+1)}}} = \sqrt{\frac{x}{x^2-x+1}}$$

και

$$\frac{A_n}{A_n'} = \frac{\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}}{\left(1-\dfrac{x}{x^2+1}\right)+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{\dfrac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)}}{\dfrac{2(x^2-x+1)+1}{2(x^2+1)}} = \frac{(x+1)^2}{2x^2-2x+3}$$

δηλαδή τελικά $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-x+1}} \le \dfrac{(x+1)^2}{3x^2-2x+3}$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η ισότητα στην τελευταία ισχύει όταν: $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση: $x=1$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\dfrac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} < \dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{\eta\mu^2 x+2\eta\mu^2\frac{x}{2}}$

Λύση

Η δοσμένη είναι ισοδύναμη με την:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} < \frac{2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{\eta\mu^2x+2\eta\mu^2\frac{x}{2}},\ x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$$ ή την

$$\frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x)}} < \frac{2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{\eta\mu^2x+2\eta\mu^2\frac{x}{2}},\ x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$$

Με την βοήθεια των τύπων

$$2\sigma\upsilon\nu^2x=1+\sigma\upsilon\nu 2x,\ 2\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu 2x$$

τελικά καταλήγουμε στην

$$\frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x)}} < \frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x}{(1-\sigma\upsilon\nu^2x)+(1-\sigma\upsilon\nu x)} \quad (1)$$

Από την μονοτονία της συνάρτησης συνημίτονο στο $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ οι τιμές των $\sigma\upsilon\nu x$ και $\sigma\upsilon\nu^2x$ θα ανήκουν στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, οπότε η (1) είναι εφαρμογή της ανισότητας Ky Fan για αυτούς τους αριθμούς στο συγκεκριμένο διάστημα. Το «=» δεν ισχύει, γιατί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu^2x$ δεν έχει λύση στο διάστημα $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Αν A,B,Γ είναι γωνίες οξυγώνιου τριγώνου, να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$1+\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{\Gamma}{2}} \le \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}}$$

Λύση

Επειδή το τρίγωνο είναι οξυγώνιο θα είναι:

$$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{4},\quad 0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{4},\quad 0<\frac{\Gamma}{2}<\frac{\pi}{4},$$

συνεπώς οι τιμές των $\eta\mu^2\dfrac{A}{2}$, $\eta\mu^2\dfrac{B}{2}$, $\eta\mu^2\dfrac{\Gamma}{2}$ θα ανήκουν στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ λόγω της μονοτονίας σ' αυτό το διάστημα της συνάρτησης ημίτονο. Ισχύει:

$$\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{\Gamma}{2}} = \frac{\sqrt[3]{\eta\mu^2\frac{A}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{B}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}}}{\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\eta\mu^2\frac{A}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{B}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}}}{\sqrt[3]{\left(1-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)\cdot\left(1-\eta\mu^2\frac{B}{2}\right)\cdot\left(1-\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}\right)}}$$

Από την ανισότητα **Ky Fan** θα έχουμε

$$\frac{\sqrt[3]{\eta\mu^2\frac{A}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{B}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}}}{\sqrt[3]{\left(1-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)\cdot\left(1-\eta\mu^2\frac{B}{2}\right)\cdot\left(1-\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}\right)}}$$

$$\le \frac{\eta\mu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{B}{2}+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}}{\left(1-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)+\left(1-\eta\mu^2\frac{B}{2}\right)+\left(1-\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}\right)} =$$

$$=\frac{3-\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}}=$$

$$=\frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}}-1$$

οπότε τελικά λαμβάνουμε

$$1+\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{\Gamma}{2}}\le\frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}}$$

5. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν $0<a\le\frac{1}{2}$, $0<b\le\frac{1}{2}$, τότε

$$\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

(ii) Αν $0<a\le\frac{1}{2}$, $0<b\le\frac{1}{2}$, $0<c\le\frac{1}{2}$, τότε

$$\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)\cdot\left[(1-a)+(1-b)+(1-c)\right]\le$$

$$\le\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot(a+b+c)$$

Λύση

(i) Γνωρίζουμε (άσκηση 1) ότι:

$$\frac{ab}{(1-a)(1-b)}\le\frac{(a+b)^2}{\left[2-(a+b)\right]^2}$$

Έτσι έχουμε: $\frac{\left[(1-a)+(1-b)\right]^2}{(1-a)(1-b)}\le\frac{(a+b)^2}{ab}$

$$\Leftrightarrow\frac{(1-a)^2}{(1-a)(1-b)}+\frac{(1-b)^2}{(1-a)(1-b)}+2\le\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+2$$

και τελικά $\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

(ii) Είναι:

$$\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)\cdot\left[(1-a)+(1-b)+(1-c)\right]$$

$$=3+\left(\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a}\right)+\left(\frac{1-b}{1-c}+\frac{1-c}{1-b}\right)+\left(\frac{1-c}{1-a}+\frac{1-a}{1-c}\right)$$

οπότε σύμφωνα με το (i) θα είναι:

$$3+\left(\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a}\right)+\left(\frac{1-b}{1-c}+\frac{1-c}{1-b}\right)+\left(\frac{1-c}{1-a}+\frac{1-a}{1-c}\right)$$

$$\le3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

6. Να αποδείξετε την ανισότητα

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^1-1}\cdot\frac{1}{2^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2^n-1}}<\frac{2^n-1}{1+(n-1)\cdot2^n}$$

Λύση Είναι:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^1-1}\cdot\frac{1}{2^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2^n-1}}=\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2^n}}}{\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}}$$

οπότε από την ανισότητα **Ky Fan** έχουμε:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^1-1}\cdot\frac{1}{2^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2^n-1}}<\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}{n-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{2^n-1}{1+(n-1)\cdot2^n}$$

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2+\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu^2x)\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\right)}}=\frac{2-\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{|\eta\mu x|\cdot\left|\eta\mu\frac{x}{2}\right|}$$

Λύση Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\ne k\pi$, $k\in\mathbb{Z}^*$. Στο πεδίο ορισμού ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{|\eta\mu x|\cdot\left|\eta\mu\frac{x}{2}\right|}{\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu^2x)\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\right)}}=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu^2x)+\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\right)}{2+\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{\eta\mu^2x\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}}}{\sqrt{(2-\eta\mu^2x)\cdot\left(2-\eta\mu^2\frac{x}{2}\right)}}=\frac{\eta\mu^2x+\eta\mu^2\frac{x}{2}}{2+(1-\eta\mu^2x)+\left(1-\eta\mu^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\eta\mu^2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\eta\mu^2x\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{x}{2}\right)}}=$$

$$=\frac{\eta\mu^2x+\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\eta\mu^2x\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{x}{2}\right)}}$$

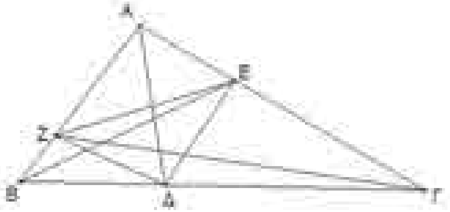
Επειδή $x\ne k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ οι αριθμοί $\frac{1}{2}\eta\mu^2x$, $\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{x}{2}$ ανήκουν στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, άρα η εξίσωση είναι εφαρμογή της ανισότητας Ky Fan με την ισότητα να ισχύει όταν: $\frac{1}{2}\eta\mu^2x=\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{x}{2}$, $x\ne k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Οι λύσεις της τελευταίας, άρα και της αρχικής είναι: $x=4k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $x=4k\pi\pm\frac{4\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

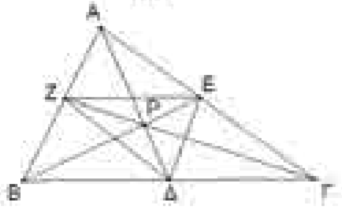
Ισότητες και Ανισότητες για το Τρίγωνο Ceva*

Γιώργος Κοντογιάννης

*Οι **ισότητες** και **ανισότητες** στο Τρίγωνο είναι ένα εξαιρετικά **ενδιαφέρον κεφάλαιο της Γεωμετρίας**, με τεράστια ποικιλία θεωρημάτων και ασκήσεων. Έλληνες μαθηματικοί, όπως ο Δ. Κοντογιάννης (στον οποίο οφείλεται η Πρόταση 3 παρακάτω) και ο Γ. Τζίντζιφας, είχαν σημαντική διεθνή παρουσία σε αυτό τον κλάδο των Μαθηματικών. Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα ότι σε δυο τρίγωνα που έχουν μια γωνία ίση ή παραπληρωματική, ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες.*



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε,Ζ σημεία των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα (Σχήμα 1).

Θέτω $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{x}, \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{EA}}=\frac{1}{y}, \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZB}}=\frac{1}{z}$ και

$\mathrm{E}=(\mathrm{AB\Gamma}),\ \mathrm{E}'=(\Delta\mathrm{EZ}),$

$\mathrm{E}_1=(\mathrm{AZE}),\ \mathrm{E}_2=(\mathrm{B\Delta Z}),\ \mathrm{E}_3=(\Gamma\Delta\mathrm{E}),$

$\mathrm{A}_1=(\mathrm{AB\Delta}),\ \mathrm{A}_2=(\mathrm{B\Gamma E}),\ \mathrm{A}_3=(\Gamma\mathrm{AZ}).$

Πρόταση 1. $\mathbf{\frac{E'}{E}=\frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}}$

Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{E}-(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3)}{\mathrm{E}}=1-\left(\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}}+\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}}+\frac{\mathrm{E}_3}{\mathrm{E}}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}+\frac{\mathrm{BZ}\cdot\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{B\Gamma}}+\frac{\Gamma\Delta\cdot\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{B}\cdot\Gamma\mathrm{A}}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{y}{(y+1)(z+1)}+\frac{z}{(z+1)(x+1)}+\frac{x}{(x+1)(y+1)}\right)=$$

$$=\frac{1+xyz}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Θεώρημα Ceva

Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο Ρ (Σχήμα 2), τότε ισχύει: $\mathbf{\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\Gamma E}{EA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1}$.

Απόδειξη: Ισχύει

$$\frac{\mathrm{B\Delta}}{\Delta\Gamma}=\frac{(\mathrm{B\Delta P})}{(\Gamma\Delta\mathrm{P})}=\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})}=\frac{(\mathrm{AB\Delta})-(\mathrm{B\Delta P})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})-(\Gamma\Delta\mathrm{P})}=\frac{(\mathrm{ABP})}{(\mathrm{A\Gamma P})}.$$

Ομοίως $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{EA}}=\frac{(\mathrm{B\Gamma P})}{(\mathrm{BAP})}$ και $\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZB}}=\frac{(\Gamma\mathrm{AP})}{(\Gamma\mathrm{BP})}$.

Άρα $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZB}}=\frac{(\mathrm{ABP})}{(\mathrm{A\Gamma P})}\cdot\frac{(\mathrm{B\Gamma P})}{(\mathrm{BAP})}\cdot\frac{(\Gamma\mathrm{AP})}{(\Gamma\mathrm{BP})}=1.$

Παρατήρηση. Τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ που διέρχονται από το ίδιο σημείο Ρ (Σχήμα 2) ονομάζονται σεβιανές του τριγώνου ΑΒΓ και το τρίγωνο ΔΕΖ λέγεται σεβιανό τρίγωνο του ΑΒΓ ως προς το Ρ.

Πρόταση 2.

Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι σεβιανές, τότε ισχύει $\mathbf{\frac{E'}{E}=\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}}$.

Απόδειξη: Προκύπτει εύκολα από την [**Πρόταση 1**], αφού από το θεώρημα Ceva έχουμε xyz=1.

Πρόταση 3.

Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι σεβιανές, τότε ισχύει $\mathbf{E'\le\frac{E}{4}}$**. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι σεβιανές ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι διάμεσοι.**

Απόδειξη: Ως γνωστόν ισχύει ότι αν x,y,z>0 και xyz=1, τότε $(x+1)(y+1)(z+1)\ge 8$ (το ίσον για x=y=z=1). Άρα, από την [**Πρόταση 2**] έχουμε $\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}}\le\frac{2}{8}\Leftrightarrow \mathrm{E}'\le\frac{\mathrm{E}}{4}$. Αν $x=y=z=1$, οι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι διάμεσοι.

Πρόταση 4.

Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι σεβιανές, τότε ισχύει $\mathbf{E^2\cdot E'=2\cdot A_1\cdot A_2\cdot A_3}$.

Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{1}{x+1},\ \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{E}}=\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{A}}=\frac{1}{y+1},$$

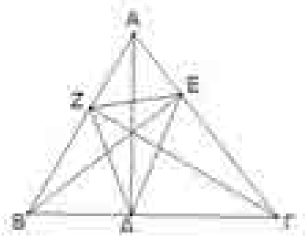
$$\frac{\mathrm{A}_3}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{z+1}.$$

* **Τρίγωνο Ceva ή Σεβιανό τρίγωνο**

Άρα, $\dfrac{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}{E^3} = \dfrac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}$. Όμως, από την **[Πρόταση 2]**, έχουμε $\dfrac{E'}{E} = \dfrac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$. Διαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.

Εφαρμογή.

Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει $E' = 2E \cdot συνA \cdot συνB \cdot συνΓ$.



Σχήμα 3

Απόδειξη: Από την **[Πρόταση 4]** έχουμε $E \cdot E \cdot E' = 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΒΕ \cdot \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΓΖ \cdot (ΔΕΖ) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ΑΔ \cdot ΒΔ \cdot \frac{1}{2} \cdot ΒΕ \cdot ΓΕ \cdot \frac{1}{2} \cdot ΓΖ \cdot ΑΖ \Leftrightarrow$$

$$(ΔΕΖ) = \frac{ΑΖ \cdot ΒΔ \cdot ΓΕ \cdot ΑΔ}{ΑΓ \cdot ΑΒ} \Leftrightarrow (ΔΕΖ) =$$

$$= \frac{ΑΓσυνΑ \cdot ΑΒσυνΒ \cdot ΒΓσυνΓ \cdot ΑΔ}{ΑΓ \cdot ΑΒ} \Leftrightarrow$$

$$(ΔΕΖ) = ΒΓ \cdot ΑΔ \cdot συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ΔΕΖ) = 2 \cdot (ΑΒΓ) \cdot συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ$$

Παρατήρηση. Το τρίγωνο ΔΕΖ που ορίζουν τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ονομάζεται ορθικό τρίγωνο του ΑΒΓ.

Πρόταση 5.

Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι σεβιανές, τότε ισχύει $E' \leq \dfrac{A_1 + A_2 + A_3}{6}$ και $E \geq \dfrac{6}{\dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2} + \dfrac{1}{A_3}}$. Οι ισότητες ισχύουν μόνο αν οι σεβιανές είναι διάμεσοι. **Απόδειξη**

Ισχύει ότι αν α, β, γ θετικοί αριθμοί, τότε $\dfrac{α+β+γ}{3} \geq \sqrt[3]{αβγ} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{α} + \dfrac{1}{β} + \dfrac{1}{γ}}$ (Ανισότητα Αριθμητικού – Γεωμετρικού - Αρμονικού Μέσου). Το ίσον, αν και μόνο αν $α = β = γ$. Από την **Πρόταση 3**,

$$4E' \leq E \Rightarrow 16(E')^3 \leq E^2 \cdot E' \Rightarrow 16(E')^3 \leq 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

[Πρόταση 4], άρα $2E' \leq \sqrt[3]{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}$, και λόγω της ανισότητας Αριθμητικού – Γεωμετρικού Μέσου, έχουμε

$$2E' \leq \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \Rightarrow E' \leq \frac{A_1 + A_2 + A_3}{6}.$$

Από την **[Πρόταση 3]**,

$$E \geq 4E' \Rightarrow E^3 \geq 4 \cdot E^2 \cdot E' \Rightarrow E^3 \geq 8 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

[Πρόταση 4], άρα $E \geq 2\sqrt[3]{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}$, και λόγω της ανισότητας Γεωμετρικού – Αρμονικού Μέσου, έχουμε $E \geq 2 \cdot \dfrac{3}{\dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2} + \dfrac{1}{A_3}} \Rightarrow E \geq \dfrac{6}{\dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2} + \dfrac{1}{A_3}}$.

Η ανισότητα Αριθμητικού – Γεωμετρικού – Αρμονικού Μέσου ισχύει σαν ισότητα αν και μόνο αν $A_1 = A_2 = A_3$, δηλαδή μόνο αν οι σεβιανές είναι διάμεσοι.

Προτεινόμενες ασκήσεις

1) Να δείξετε ότι αν $x, y, z > 0$ και $xyz = 1$, τότε $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 8$.

Υπόδειξη: Ισχύει ότι $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$ κλ.π

2) Να δείξετε ότι αν α,β,γ θετικοί αριθμοί, τότε $\dfrac{α+β+γ}{3} \geq \sqrt[3]{αβγ} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{α} + \dfrac{1}{β} + \dfrac{1}{γ}}$.

Υπόδειξη: Για την ανισότητα $\dfrac{α+β+γ}{3} \geq \sqrt[3]{αβγ}$ αν θέσουμε $α = x^3$, $β = y^3$, $γ = z^3$, και παραγοντοποιήσουμε την παράσταση $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. κλ.π.

3) Θεώρημα van Aubel Αν οι σεβιανές ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται από σημείο Ρ, να δείξετε ότι

$$\frac{ΑΡ}{ΡΔ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ} + \frac{ΑΖ}{ΖΒ}.$$

4) Αν ΑΔ ύψος τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο, να δείξετε ότι $\dfrac{ΑΗ}{ΗΔ} = \dfrac{συνΑ}{συνΒ \cdot συνΓ}$.

Υπόδειξη: Αν εφαρμόστουμε το Θεώρημα van Aubel και απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες στα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται.

5) Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οι διχοτόμοι τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι

$$\frac{E'}{E} = \frac{2αβγ}{(α+β)(β+γ)(γ+α)}.$$

6) Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, να δείξετε ότι $συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ \leq \dfrac{1}{8}$.

Βιβλιογραφία: **Δ.Γ. Κοντογιάννης,** *Ισότητες και ανισότητες στο τρίγωνο*, [Έκδοση: Αθήνα 1996]

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

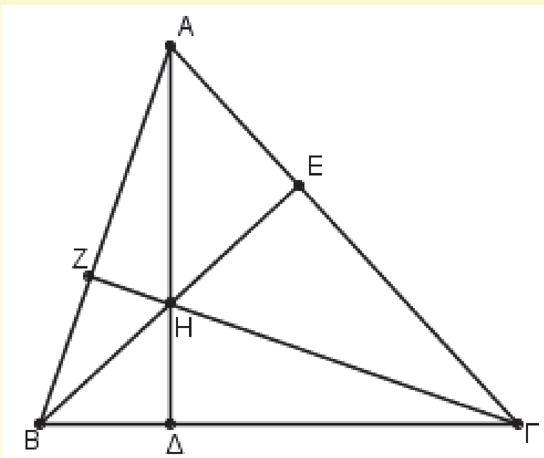
Επιμέλεια: **Νίκος Θ. Αντωνόπουλος – Γιάννης Λουριδάς**

ΑΣΚΗΣΗ 332$_{Β}$. (ΤΕΥΧΟΣ 112)

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ και έστω Η το ορθόκεντρό του. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ακτίνων των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΑΗΒ, ΑΗΓ είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Ανδρής Ιωάννης - Αθήνα)



Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, τότε τα τρίγωνα ΑΗΒ, ΒΗΓ, ΓΗΑ έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους και ας υποθέσουμε ότι η κοινή ακτίνα είναι ίση με R. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΗΒ και ΑΗΓ, τότε έχουμε:

$$\rho_1=4R\eta\mu\frac{H\hat{A}B}{2}\eta\mu\frac{H\hat{B}A}{2}\eta\mu\frac{A\hat{H}B}{2}$$
$$=4R\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

διότι

$$H\hat{A}B=\frac{\pi}{2}-B,\ H\hat{B}A=\frac{\pi}{2}-A \text{ και } A\hat{H}B=\pi-\Gamma$$

Ομοίως,

$$\rho_2=4R\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$$

οπότε για την απόδειξη του ζητούμενου, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\left\{\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\right\}=\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

Η τελευταία ισότητα γράφεται

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}-\eta\mu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}-\eta\mu\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}-\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=1$$

και για την απόδειξη της, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2}\left(\sigma\varphi\frac{A}{2}-1\right)\left\{\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\left(\sigma\varphi\frac{B}{2}-1\right)+\sigma\varphi\frac{B}{2}\left(\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}-1\right)\right\}=1$$

Αλλά, $\sigma\varphi\frac{A}{2}=2$, οπότε αρκεί

$$2\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}-\left(\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)=2,\ (1)$$

που ισχύει, αφού

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}-1=\frac{1}{2}\left(\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα η (1)

Λύση έστειλαν επίσης οι Αποστολόπουλος Γιώργος – Αγρίνιο, Λαλογιάννης Βασίλειος – Αγ. Παρασκευή, Γιάνναρος Διονύσης –Πύργος και Ιωαννίδης Αντώνης - Λάρισα

Σημείωμα σύνταξης

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\alpha=\alpha'$ και $\hat{A}=\hat{A}'$ ή $\hat{A}+\hat{A}'=180^{o}$ τότε έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.

Στην περίπτωση των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΗΓ ισχύει $B\hat{H}\Gamma+\hat{A}=180^{o}$ αφού οι γωνίες αυτές έχουν τις πλευρές τους μια προς μια κάθετες. Αυτό, με δεδομένο ότι έχουν και κοινή την πλευρά α, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΗΓ έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και τα τρίγωνα ΑΗΒ και ΑΗΓ έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους με το ΑΒΓ.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΗΒ, ΒΗΓ και ΓΗΑ έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.

- Τα τρία τρίγωνα που αναφέραμε μαζί με το αρχικό σχηματίζουν όπως λέμε μια **ορθοκεντρική τετράδα** τριγώνων και αποδεικνύεται ότι έχουν τον ίδιο **ορθικό τρίγωνο**, τον ίδιο **κύκλο Euler** και ίσους τους περιγεγραμμένους κύκλους τους (με ακτίνα ίση με τη διάμετρο του κύκλου του Euler)
- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\rho = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

Από αυτή και την ανισότητα Cauchy

$$\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \le \eta\mu^3\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \le \frac{1}{8}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$R \ge 2\rho$$

που είναι η γνωστή ανισότητα Euler

ΑΣΚΗΣΗ 333. (ΤΕΥΧΟΣ 112)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ακτίνες των κύκλων των εγγεγραμμένων στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΔ και υ_α το ύψος ΑΔ, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$\Pi = \upsilon_\alpha \cdot \frac{\rho_1 + \rho_2 + \sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1\rho_2}$$

Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

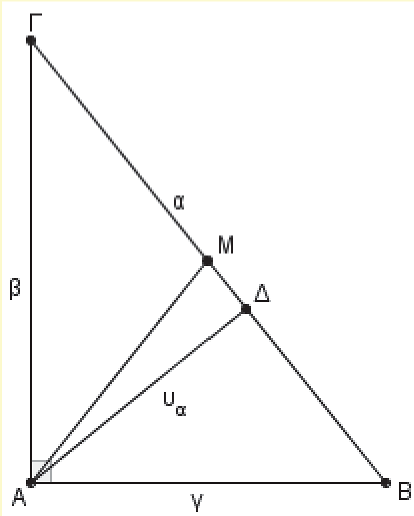
Είναι γνωστό ότι

$$AM = \frac{\alpha}{2} \text{ και } \alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$$

και από την προφανή ανισότητα $(\beta-\gamma)^2 \ge 0$ με δεδομένο ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\beta + \gamma \le \alpha\sqrt{2}, \quad (1)$$

Επίσης,



$$(ABM) = \frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}+\gamma}{2}\rho_1 \Rightarrow \rho_1(\alpha+\gamma) = 2(ABM) = (AB\Gamma)$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{\beta\gamma}{2(\alpha+\gamma)}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\rho_2 = \frac{\beta\gamma}{2(\alpha+\beta)}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\rho_1\rho_2 = \frac{\beta^2\gamma^2}{4(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} \ge \frac{\beta^2\gamma^2}{(\alpha+\beta+\alpha+\gamma)^2} = \frac{\beta^2\gamma^2}{(2\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

$$\ge \frac{\beta^2\gamma^2}{\left(2\alpha+\alpha\sqrt{2}\right)^2} = \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^2\frac{1}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την προφανή ανισότητα $(\alpha+\beta)^2 \ge 4\alpha\beta$ και την (1)

Οι ισότητες ισχύουν μόνο όταν $\beta = \gamma$.

Έχουμε λοιπόν,

$$\sqrt{\rho_1\rho_2} \ge \frac{\upsilon_\alpha}{2+\sqrt{2}}$$

Επίσης,

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2\alpha+\beta+\gamma}{(AB\Gamma)} \le \frac{2\alpha+\alpha\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\upsilon_\alpha}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\beta = \gamma$

Επομένως, ισχύουν:

$$\frac{\upsilon_\alpha}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \le 2+\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \upsilon_\alpha\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right) \le 2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

οπότε

$$\Pi=\frac{\rho_1+\rho_2+\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1\rho_2}\upsilon_\alpha=\upsilon_\alpha\left(\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\right)$$

$$=\upsilon_\alpha\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)+\frac{\upsilon_\alpha}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\le 3\left(2+\sqrt{2}\right)$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι ίση με $3\left(2+\sqrt{2}\right)$ και επιτυγχάνεται όταν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

Λύση έστειλαν επίσης και οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα και Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΑΣΚΗΣΗ 334. (ΤΕΥΧΟΣ 112)

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$. Να αποδείξετε ότι

$$\boldsymbol{\alpha^4+\alpha(\beta+\gamma)^3\le 9}$$

(Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι)

ΛΥΣΗ (Ηλιόπουλος Γιάννης – Καλαμάτα)

Είναι:

$$\alpha^4+\alpha(\beta+\gamma)^3\le 9$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4+\alpha(\beta+\gamma)^3\le \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta+\gamma)^3\le \beta^4+\gamma^4+2\beta^2\gamma^2+2\alpha^2\left(\beta^2+\gamma^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta+\gamma)^3\le \left(\beta^2+\gamma^2\right)^2+2\alpha^2\left(\beta^2+\gamma^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta+\gamma)^3\le \left(\beta^2+\gamma^2\right)\left(\beta^2+\gamma^2+2\alpha^2\right),\ (1)$$

Από την προφανή ανισότητα

$$\beta^2+\gamma^2\ge\frac{(\beta+\gamma)^2}{2}$$

προκύπτει ότι

$$\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}}\ge\frac{\beta+\gamma}{2}$$

οπότε για το δεύτερο μέλος της (1) έχουμε

$$\left(\beta^2+\gamma^2\right)\left(\beta^2+\gamma^2+2\alpha^2\right)\ge\frac{(\beta+\gamma)^2}{2}\left(\beta^2+\gamma^2+2\alpha^2\right)$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$\frac{(\beta+\gamma)^2}{2}\left(\beta^2+\gamma^2+2\alpha^2\right)\ge\alpha(\beta+\gamma)^3$$

ή αρκεί,

$$\frac{\beta^2+\gamma^2+2\alpha^2}{2}\ge\alpha(\beta+\gamma)$$

που προκύπτει άμεσα από την προφανή

$$(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2\ge 0$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα και Λαλογιάννης Βασίλειος - Αγ. Παρασκευή.

Σημείωση σύνταξης

Οι πολύ ωραίες λύσεις του συνεργάτη της στήλης Λαλογιάννη Βασίλειου (Ηλεκτρολόγος Μηχανικός ΕΜΠ) στην προηγούμενη και την επόμενη άσκηση ήταν ιδιαίτερα μακροσκελείς.

Στην πρώτη, θεώρησε συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(\alpha,\beta,\gamma)$ την οποία στη συνέχεια μετέτρεψε σε συνάρτηση δυο $f(\alpha,\beta)$ και θεωρώντας ότι $\alpha=\beta$ κατέληξε στην ανισότητα $f(\alpha)\le 9$ αποδεικνύοντας στη συνέχεια ότι $f(\alpha,\beta)\le f(\alpha)$

Στην δεύτερη, χρησιμοποίησε την ανηγμένη τριτοβάθμια μορφή $x^3+dx+e=0$ της δοσμένης εξίσωσης, όπου d, e κατάλληλοι συντελεστές.

ΑΣΚΗΣΗ 335. (ΤΕΥΧΟΣ 112)

Θεωρούμε την εξίσωση $x^3-2x^2-x+1=0$ και έστω α, β, γ οι ρίζες της με $\alpha>\beta>\gamma$. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2$

(Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον)

ΛΥΣΗ (Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι)

Θεωρούμε τις τρεις ισότητες

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right],\ (1)$$

$$\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2+\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma,\ (2)$$

και

$$\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2-\left(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha\right)$$

$$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha),\ (3)$$

οι οποίες προκύπτουν εύκολα με πράξεις και παραγοντοποιήσεις.

Από τη δοσμένη ισότητα έχουμε:

$$\alpha+\beta+\gamma=2$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$$

$$\alpha\beta\gamma=1$$

Έστω

$$A=\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2 \text{ και } B=\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$$

Από την (2) προκύπτει ότι

$$A+B=2(-1)-3(-1)=1$$

Επίσης, έχουμε:

$$AB=(\alpha\beta)^3+(\beta\gamma)^3+(\gamma\alpha)^3+\alpha\beta\gamma\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)+3(\alpha\beta\gamma)^2$$

με

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3+2(4+3)=11$$

λόγω της (1). Από την (1) επίσης, αν θέσουμε αντί για α,β,γ αντίστοιχα $\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\alpha$ παίρνουμε

$$(\alpha\beta)^3+(\beta\gamma)^3+(\gamma\alpha)^3$$

$$=3(\alpha\beta\gamma)^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\left[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\right]$$

$$=3-(1+3\cdot 2)=-4$$

οπότε

$$AB=-4-11+3=-12$$

Έτσι, οι αριθμοί Α, Β είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-x-12=0$$

που έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και 4

Όμως, λόγω της (3) ισχύει

$$A-B=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)<0$$

αφού $\alpha>\beta>\gamma$.

Επομένως, $A=-3$

Σημείωση σύνταξης

Επισημαίνουμε ότι αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι οι ρίζες του πολυωνύμου,

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha\neq 0$$

τότε ισχύουν οι επόμενοι τύποι (Vieta)

- $\rho_1+\rho_2+\rho_3=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
- $\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\dfrac{\gamma}{\alpha}$
- $\rho_1\rho_2\rho_3=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$

που χρησιμοποιήθηκαν στην παραπάνω λύση. Η χρήση τους συχνά οδηγεί σε άμεσες και «κομψές» λύσεις.

Παράδειγμα

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\mathbf{8x^3+2012x+2013=0}$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathbf{A=(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3}$$

Υπόδειξη

Το άθροισμα των ριζών είναι ίσο με το μηδέν (Vieta), οπότε

$$A=-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$$

με τους α, β, γ να επαληθεύουν την εξίσωση.

Τελικά βρίσκουμε ότι $A=\dfrac{6039}{8}$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ηλιόπουλος Γιάννης – Καλαμάτα, Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι, Ανδρής Ιωάννης Αθήνα , Λαλογιάννης Βασίλειος – Αγ. Παρασκευή, Μπασδάκας Παναγιώτης – Σκάλα Ωρωπού και Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΑΣΚΗΣΗ 336 (ΤΕΥΧΟΣ 113)

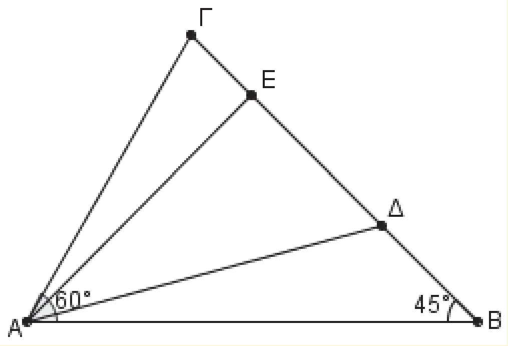
Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}=60^\circ$ και $\hat{B}=45^\circ$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ ώστε $B\Delta=\frac{1}{3}B\Gamma$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{AB^4}{9}+\frac{A\Gamma^4}{36}=A\Delta^4\cdot \varepsilon\varphi 15^\circ$$

(Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι)

ΛΥΣΗ (Γιάννης Σταματογιάννης- Πετρούπολη)



Είναι:

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ=1-2\eta\mu^2 15^\circ \Rightarrow \eta\mu^2 15^\circ=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

και $\sigma\upsilon\nu^2 15^\circ=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$, οπότε

$$\varepsilon\varphi 15^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

Από το νόμο των ημιτόνων:

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\beta,\ (1)$$

και από το νόμο των συνημιτόνων,

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma,\ (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{3}{2}\beta^2=\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma\Rightarrow\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+2\frac{\beta}{\gamma}-2=0\Rightarrow\frac{\beta}{\gamma}=\sqrt{3}-1$$

Από το Θ. Stewart στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{1}{3}\alpha\cdot\beta^2+\frac{2}{3}\alpha\cdot\gamma^2=\alpha\left(ΑΔ^2+\frac{1}{3}\alpha\cdot\frac{2}{3}\alpha\right)\overset{(1)}{\Rightarrow}ΑΔ^2=\frac{2}{3}\gamma^2$$

$$\Rightarrow ΑΔ^4=\frac{4}{9}\gamma^4$$

οπότε $$ΑΔ^4\cdot εφ15^o=\frac{4\gamma^4}{9}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Επιπλέον,

$$\frac{\gamma^4}{9}+\frac{\beta^4}{36}=\frac{4\gamma^4}{36}+\frac{1}{36}\left(28-16\sqrt{3}\right)\gamma^4=\frac{4\gamma^4}{9}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Έτσι, από τις δυο τελευταίες ισότητες, έχουμε:

$$\frac{ΑΒ^4}{9}+\frac{ΑΓ^4}{36}=ΑΔ^4\cdot εφ15^o$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλε επίσης οι Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια,

Προτεινόμενα Θέματα

351. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$ημ2x<\frac{2}{3x-x^2}$$

Καμπούκος Κυριάκος - Αθήνα

352. Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=3$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{5-\alpha}{3-\alpha}\right)^{\alpha^3}\left(\frac{5-\beta}{3-\beta}\right)^{\beta^3}\left(\frac{5-\gamma}{3-\gamma}\right)^{\gamma^3}\geq 8$$

Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι

353. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Λ, Κ σημεία των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν τα τμήματα ΒΚ και ΓΛ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΚΛ)}=\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΚΛ)}$$

Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι

354. **α.** Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:

i. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0, 1]

ii. $f(0)=0,\ f(1)=1$

iii. $f'(0)=f'(1)=0$

Να αποδείξετε ότι $|f''(\xi)|\geq 4$ για κάποιο $\xi\in(0,1)$

Τα παραπάνω στην περίπτωση κίνησης «μεταφράζεται» ως εξής:

Αν ένα κινητό διατρέξει μοναδιαίο διάστημα σε μοναδιαίο χρόνο με αρχική και τελική ταχύτητα μηδέν, τότε σε κάποια στιγμή της κίνησής του έχει επιτάχυνση ή επιβράδυνση $\alpha\geq 4$

β. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $|f''(\xi)|>4$

γ. Έστω $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη και μη σταθερή συνάρτηση με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

και να εξάγεται το ερώτημα (β) ως συνέπεια της παραπάνω ανισότητας.

Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια

355. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ο. Αν Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$ΚΛ\cdot ΒΔ=ΚΝ\cdot ΑΓ$$

Τσιλιακός Λευτέρης - Χαλάνδρι

356. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Ι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του. Αν Χ, Υ, Ζ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΒΙΓ, ΓΙΑ και ΑΙΒ αντίστοιχα και το τρίγωνο ΧΥΖ είναι ισόπλευρο, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι επίσης ισόπλευρο.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

Σημείωση σύνταξης

Στην αρίθμηση των προτεινόμενων θεμάτων του προηγούμενου τεύχους, εκ παραδρομής γράφτηκε λάθος η δεκάδα κάθε αριθμού. Για λόγους ενιαίας αρίθμησης, παρακαλούμε να αντικατασταθεί στην αρίθμηση των ασκήσεων 3**3**6-3**4**0 στο ορθό 3**4**6-3**5**0.

Λόγω της **μεταφοράς** του αρχείου της στήλης και λόγω του **απρόοπτου** γεγονότος, προέκυψαν κάποιες παροδικές αρρυθμίες, σε προηγούμενα τεύχη. Έτσι δεν αναφέρθηκαν, ως λύτες κάποιοι «μόνιμοι συνεργάτες» της στήλης, όπως οι κ. Δεληστάθης Γιώργος και Καρτσακλής Δημήτρης για τον οποίο δεν έγινε αναφορά στις λύσεις κάποιων ασκήσεων (όπως οι 313, 317, 318, 321, 325, 326 κλπ).

Ζητάμε την κατανόηση των αναγνωστών και ελπίζουμε να αποφευχθούν στο μέλλον παρόμοιες αστοχίες και παραλείψεις.

Ευχόμαστε υγεία και καλό καλοκαίρι.

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Η επιστήμη χωρίς ηθική καταστρέφει πολιτισμούς

Με μια ματιά

Οι Φυσαλίδες και οι Σαπουνόφουσκες

Στις σαπουνόφουσκες δόθηκε το 2019 το βραβείο Abel. Οι φυσαλίδες έχουν σχήμα σφαίρας και τούτο γιατί όπως ξέρουμε από τη φυσική τα ουράνια σώματα, οι σταγόνες της βροχής, οι

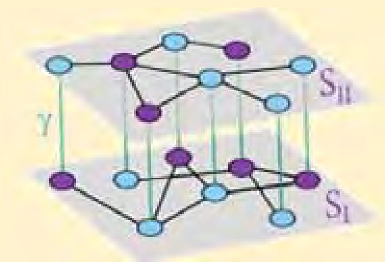
φυσαλίδες παίρνουν το σχήμα που χρειάζεται το μικρότερο ποσό ενέργειας. Η ενέργεια αυτή είναι ανάλογη με το εμβαδό της επιφάνειας του σχήματος. Το 1884 ο Herman Schwartz απέδειξε ότι η σφαίρα έχει το μικρότερο επιφανειακό εμβαδό για δεδομένο όγκο, που σημαίνει ότι για τη δημιουργία της χρειάζεται η μικρότερη ποσότητα ενέργειας. Πριν λίγα χρόνια αποδείχθηκε το **διπλό θεώρημα φυσαλίδων**, δηλαδή συνένωση φυσαλίδων και δημιουργία παράξενων σχημάτων. Το 2019 το βραβείο Abel δόθηκε στην μαθηματικό Κάρεν Ούλενμπεκ (Karen Keskulla Ulenbeck) που γεννήθηκε το 1942 στο Οχάιο και είναι η πρώτη γυναίκα που της απονεμήθηκε το βραβείο το οποίο θεσπίστηκε πρώτη φορά το 2003. Η Κάρεν έχει σπουδαίο έργο στα Μαθηματικά και πολλά βραβεία.

Οι Σαπουνόφουσκες: Όλοι γνωρίζουμε το παιχνίδι αυτό. Η μαθηματική ιδέα της Κάρμεν, έχει να κάνει με το πλαστικό πλαίσιο που βυθίζουμε στο μπουκαλάκι με το σαπουνόνερο και πάνω του φυσάμε για να βγουν οι φυσαλίδες και πιο συγκεκριμένα, με τη μεμβράνη που εμφανίζεται στο πλαστικό πλαίσιο. Η Κάρεν πήρε το βραβείο για το θεμελιώδες έργο της στις Γεωμετρικές διαφορικές εξισώσεις και στη θεωρία μέτρησης. «*Οι θεωρίες της ανέτρεψαν την αντίληψή μας για τις ελάχιστες επιφάνειες, όπως αυτές που σχηματίζονται από σαπουνόφουσκες και πιο γενικά προβλήματα ελαχιστοποίησης σε πολυδιάστατους χώρους …*», έλεγε η ανακοίνωση.

Η τυχαιότητα των δυναμικών συστημάτων

Οι μαθηματικοί, **Η.** Furstenberg από το Ισραήλ και ο Ρώσο-Αμερικανός G Margulis, θα μοιραστούν το Βραβείο Abel 2020 για το ευρύ και καινοτόμο έργο τους. Εφάρμοσαν και οι δύο, χωρίς ποτέ να συνεργαστούν, από τις δεκαετίες του 1960 και του 1970 θεωρίες των πιθανοτήτων της τυχαιότητας και των δυναμικών συστημάτων στη θεωρία των αριθμών και στη θεωρία των ομάδων.

Ο **Η.** Furstenberg γεννήθηκε στο Βερολίνο το 1935, ήταν καθηγητής έως το 2003 στο Εβραϊκό Πανεπιστήμιο της Ιερουσαλήμ. Ο G Margulis γεννήθηκε στη Μόσχα το 1946, είναι καθηγητής ακόμη



στο Πανεπιστήμιο Yale των ΗΠΑ και είναι κάτοχος, από τα 32 του, του βραβείου Fields, που είναι για νέους μαθηματικούς. Οι δύο μαθηματικοί θα μοιραστούν 7,5 εκατομμύρια νορβηγικές κορώνες (περίπου 700.000 Ευρώ). Όμως λόγω της πανδημίας του κορωνοϊού, η Νορβηγική Ακαδημία των Επιστημών και των Γραμμάτων, ανακοίνωσε ότι αποφάσισε να ματαιώσει την τελετή απονομής του βραβείου, που θα γινόταν στο Όσλο τον Ιούνιο 2020, και θα απονείμει τα φετινά βραβεία μαζί με εκείνα του 2021.

Δυο μαθηματικά αστέρια σε μια δύσκολη εποχή

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα γεννήθηκε ο Abel και 10 χρόνια μετά ο Galois. Οι δυο αυτοί νεαροί μαθηματικοί, που και οι δύο πέθαναν νέοι, ήταν άνθρωποι ανώτερης ευφυΐας.

Ο Abel από πολύ μικρός έδειξε κλίση στα Μαθηματικά και στα 21 του ως φοιτητής στο Όσλο κατάφερε να αποδείξει ότι οι ρίζες της γενικής εξίσωσης 5ου βαθμού δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν με ριζικά(όπως συμβαίνει με τις ρίζες των εξισώσεων μικρότερου βαθμού). Ο παππούς του και ο πατέρας του ήταν πάστορες και ο ίδιος ξεκίνησε από τη θεολογική σχολή. Με δυσκολίες εξασφάλισε το 1825 υποτροφία και ταξίδεψε σε Γερμανία και Γαλλία. Εκεί γνώρισε μεγάλους μαθηματικούς της εποχής και μαζί τους θεμελίωσε τη θεωρία των «αβελιανών» συναρτήσεων και ομάδων, μελέτησε τις «αβελιανές» εξισώσεις, διατύπωσε κριτήρια σύγκλισης των δυναμοσειρών και πολλά άλλα θέματα που φέρουν το όνομά του. Κατά τη διάρκεια της παραμονής του στο Παρίσι, ο Abel, είχε κολλήσει φυματίωση. Τα Χριστούγεννα 1828 ο Abel επέστρεψε στην πατρίδα του, τη Νορβηγία, αλλά η φυματίωση λίγους μήνες μετά έκοψε το νήμα της ζωής του, μόλις στα 27 του χρόνια, τον Απρίλη του 1829. Δυο μέρες μετά το θάνατό του έφτασε η είδηση ότι στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, του είχε δοθεί θέση καθηγητού. Το 2002 προς τιμή του θεσμοθετήθηκε, το αντίστοιχο του Νόμπελ, βραβείο για μαθηματικούς, που φέρει το όνομά του.

Ο Galois, από ηλικία 15 ετών, ήταν ικανός να προσδιορίσει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να γνωρίζει αν ένα πολυώνυμο επιλύεται με ριζικά. Αυτό ήταν ένα αναπάντητο πρόβλημα για αιώνες. Ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη λέξη ομάδα για να εκφράσει ένα **σύνολο μεταθέσεων**. Σημαντική ήταν η προσφορά του για τα Μαθηματικά, γιατί με τη γνωστή «θεωρία Galois», έθεσε τα θεμέλια της Άλγεβρας.

Στη διάρκεια της μοναρχίας του Λουδοβίκου Φίλιππου στη Γαλλία ο Galois ήταν ριζοσπάστης δημοκρατικός. Τον Οκτώβριο του 1825 σε ηλικία 14 ετών, πήγε στο Βασιλικό Κολέγιο με υποτροφία. Εκεί ήταν ένας από τους καλύτερους σπουδαστές στον ανώτερο κύκλο σπουδών στην τάξη της **ρητορικής**. Μάλιστα βραβεύθηκε για μεταφράσεις **Ελληνικών κειμένων** λαμβάνοντας και επαίνους για άλλα θέματα. Γρήγορα Galois έστρεψε το ενδιαφέρον του στα Μαθηματικά. Ξεκίνησε την προπαρασκευαστική τάξη των μαθηματικών με καθηγητή τον M. Vernier. Οι εξαιρετικές μαθηματικές του ικανότητες αποκαλύφθηκαν αμέσως. Είναι χαρακτηριστική η διαπίστωση του καθηγητή του M. Vernier: «*Τον έχει καταλάβει ένα απέραντο πάθος για τα Μαθηματικά. Νομίζω θα ήταν καλύτερο, αν συμφωνούν οι γονείς του,* *να σπουδάσει μόνο αυτή την επιστήμη: ως σπουδαστής στην τάξη ρητορικής σπαταλά τον χρόνο του, ενοχλεί τους καθηγητές και επισύρει την οργή και την τιμωρία*.»

Το 1828 ο Galois ζήτησε να εισαχθεί στην Πολυτεχνική Σχολή, που ήταν το πιο πρωτοπόρο πανεπιστήμιο του Παρισιού. Στους φοιτητικούς του κύκλους υπήρχαν ισχυρές πολιτικές κινήσεις και ο Galois ήθελε να συνεχίσει τον παράδειγμα των γονιών του που ήταν δημοκράτες. Η προσπάθεια του αυτή απέτυχε και από αυτό στεναχωρήθηκε πολύ. Παρέμεινε στο κολέγιο στην τάξη των εξειδικευμένων Μαθηματικών.

Τον Απρίλιο του 1829 με την επίβλεψη του Louis Paul Richartd, ο Galois έκανε την πρώτη του δημοσίευσή σχετικά με τα συνεχή κλάσματα στο “*Annales de mathématiques*”. *Για την* εργασία αυτή, κριτής ήταν ένα σπουδαίος μαθηματικός ο Cauchy, ο οποίος όμως, είπε ότι, την έχασε!!!

Προετοιμαζόταν να δώσει για δεύτερη φορά στην Πολυτεχνική σχολή αλλά ο πατέρας του κυνηγημένος από τον τοπικό κλήρο και τους Ιησουίτες αυτοκτόνησε, αλλά και ο ίδιος για μια ακόμα φορά κόπηκε στις εξετάσεις. Το εμπόδιο προφανώς ήταν οι δημοκρατικές του απόψεις. Στις εξετάσεις είπε, τον διέκοπταν οι καθηγητές, όταν απαντούσε και γελούσαν.

«Ένας υποψήφιος ανώτερης ευφυΐας είναι χαμένος,
αν βρει μπροστά του έναν εξεταστή μέτριας ευφυΐας ...»

Στο κολέγιο ο Galois γνωρίστηκε με τον Auguste Chevalier, έγιναν στενοί φίλοι έγραψε και τρεις εργασίες τις οποίες υπέβαλε στην Ακαδημία για να συμμετάσχει σε ένα διαγωνισμό. Για άλλη μία φορά τα χειρόγραφα του Galois χάθηκαν!!! Ευτυχώς ο Galois, αυτή τη φορά είχε κρατήσει αντίγραφα και δημοσίευσε τις εργασίες του στο “*Bulletin de Férussac*”. Δεν μπορούσε να πιστέψει ότι οι επαναλαμβανόμενες ατυχίες ήταν απλές συμπτώσεις. Έτσι με όλη την ορμή της νιότης ο Evarist Galois προσχώρησε στον αγώνα για την **πολιτική αναμόρφωση της κοινωνίας**. Το 1830 τον έδιωξαν από τη σχολή, γιατί σε άρθρο του, έκανε κριτική στον διευθυντή. Κατατάχτηκε στο πυροβολικό της εθνοφρουράς, το οποίο γρήγορα διαλύθηκε από την κυβέρνηση του Λουδοβίκου και ο Galois κατέληξε χωρίς κανένα μέσο βιοπορισμού, μόνο λίγα ιδιαίτερα μαθήματα, σε δεινή θέση. Μετά από όλες αυτές τις περιπέτειες βρήκε το κουράγιο και έστειλε για άλλη μία φορά το χειρόγραφο που είχε χαθεί στην Ακαδημία. Αυτή τη φορά κριτές ήταν οι Lacroix και Poisson. Έπειτα από μεγάλη καθυστέρηση πληροφορήθηκε ότι η εργασία του είχε απορριφθεί! Τον Ιούνιο του 1831, δικάστηκε με την κατηγορία, ότι οι δημόσιες δηλώσεις του προκαλούσαν σε απόπειρα κατά της ζωής του βασιλιά. Το δικαστήριο τον αθώωσε. Σε ένα μήνα συλλαμβάνεται σε πορεία και οδηγείται στην φυλακή. Εκεί προσπάθησε να αυτοκτονήσει με ένα μαχαίρι αλλά τον εμπόδισαν οι συγκρατούμενοί του. Στα 1832, για αδιευκρίνιστους λόγους, ίσως για τα μάτια μιας κοπέλας, ένας αξιωματικός τον κάλεσε σε μονομαχία κατά την οποία ο μεγάλος μαθηματικός σκοτώθηκε. Όλη την προηγούμενη νύχτα έμεινε άγρυπνος και **αποτύπωσε βιαστικά** στο χαρτί την επιστημονική του διαθήκη. Μέσα από αυτό το έργο έθεσε τις βάσεις της «θεωρίας των ομάδων» που αποτελεί σήμερα βασικό κορμό της σύγχρονης Άλγεβρας. Ο νεαρός Evarist Galois, 20 ετών, διάσημος μαθηματικός, πέθανε από οξεία περιτονίτιδα, οφειλόμενη στη σφαίρα, που τον πέτυχε από απόσταση 25 βημάτων.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ

Η Σύνοδος: Σύνοδος στην Αστρονομία σημαίνει συγκέντρωση σωμάτων στην ίδια περιοχή του ουρανού. Έγινε σύνοδος όλων των πλανητών Τετάρτη 9-3-1982 σε γωνία περίπου 98^o .

Λέων Τολστόι (1828-1910), **Ρώσος συγγραφέας**: «Ο άνθρωπος μοιάζει με κλάσμα όπου ο αριθμητής είναι ο πραγματικός εαυτός του και ο παρονομαστής η ιδέα που έχει για τον εαυτό του. Όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής, τόσο μικρότερη η αξία του κλάσματος. Και όσο ο παρονομαστής διογκώνεται προς το άπειρο, τόσο το κλάσμα τείνει προς το μηδέν.»

Το ρολόι: Το ρολόι έχει ηλικία 2500 χρόνια. Μπορεί σήμερα να έγινε ηλεκτρονικό αλλά δημιουργήθηκε από τον **Αναξίμανδρο**. Οι αρχαίοι Έλληνες πρώτοι μέτρησαν το χρόνο, αυτό ήταν μια μεγάλη ανακάλυψη. Ο Αναξίμανδρος (610-547 π.χ.) μαθητής του Θαλή επινόησε το γνώμονα, το ηλιακό ρολόι, το χάρτη κλπ. ακόμα και για το άπειρο έδωσε διαστάσεις. Το άπειρο για τον Αναξίμανδρο ήταν 9 έτη φωτός.

Το παράδοξο της κάρτας: Υποθέτουμε ότι έχουμε μια κάρτα που στην μια πλευρά της γράφει: «Η πρόταση στην άλλη πλευρά της κάρτας είναι Αληθινή.» Ενώ στην άλλη πλευρά της κάρτας γράφει: «Η πρόταση στην άλλη πλευρά της κάρτας είναι Ψευδής.» Πως προκύπτει το παράδοξο: -Αν η πρόταση στην μπροστά όψη της κάρτας είναι αληθινή τότε θα είναι αληθινή και η πρόταση στην πίσω όψη της κάρτας, αν όμως είναι αληθινή η πίσω όψη της κάρτας τότε η πρόταση της μπροστά κάρτας είναι ψευδής.

-Αν η πρόταση της μπροστά όψης της κάρτας είναι ψευδής τότε είναι ψευδής και η πρόταση της πίσω όψης της κάρτας, αυτό όμως σημαίνει ότι η πρόταση της μπροστινής όψης της κάρτας είναι αληθής κ.ο.κ.

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις: Ο Σωκράτης έχει προετοιμαστεί για τις Πανελλήνιες, αλλά έχει αγωνία και λέει στο φίλο του τον Περικλή Σωκράτης: **Δεν ξέρω τίποτα**

Περικλής: **Αυτό πώς το ξέρεις**;

Τι βαθμό θα πάρει στις Πανελλήνιες; Ο Αρίστος ήταν υποψήφιος στις εξετάσεις, αλλά δεν ξέρει αν θα περάσει στη σχολή που διάλεξε και αυτό εξαρτάται αν πάρει καλό βαθμό στο παρακάτω θέμα. Είναι μια απλή εφαρμογή των παραγώγων. Έχει την ισότητα $x^2 = x * x$ Γράφει το δεύτερο μέλος $x + x + x +...+ x$ (x φορές το x) πολύ σωστά, άρα έχει τώρα $x^2 = x + x + x +...+ x$ (x φορές το x). Παίρνει την παράγωγο ως προς x και των δύο μελών: $(x^2)' = (x + x + x +...+ x)'$ Από το πρώτο μέλος έχει $(x^2)' =2x$ και από το δεύτερο με την παράγωγο του κάθε προσθετέου έχει: $(x + x + x +...+ x)' = x' + x' + x' +...+ x'$ (x φορές) Άρα μετά τον υπολογισμό των παραγώγων στα δύο μέλη γράφει: $2x = 1 + 1 + 1 +...+ 1$ (x φορές) Άρα $2x = x$. Αφού $x \neq 0$ απλοποιεί και $2 = 1$. Τι βαθμό θα πάρει ο Αρίστος;

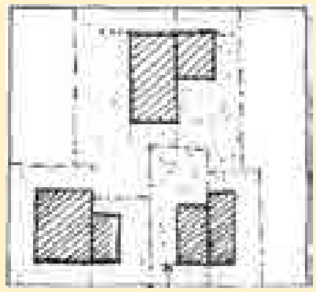
Το ηλικιωμένο ζεύγος: Ο παππούς, η γιαγιά, η μικρή εγγονή και ο μεγάλος αδελφός της, το 2015 διαπίστωσαν ότι αν βάλουν δίπλα δίπλα το έτος, την ηλικία της εγγονής και την ηλικία του αδελφού της θα πάρουν 8ψήφιο αριθμό που είναι το τετράγωνο της ηλικίας του παππού. Επίσης αν στη μέση των ψηφίων μπει το σύμβολο της πρόσθεσης, το άθροισμα θα είναι το τετράγωνο της ηλικίας της γιαγιάς. Η διαφορά της ηλικίας του παππού μείον της γιαγιάς είναι η ηλικία της εγγονής που είναι 10 χρόνια μικρότερη του αδελφού της. Μπορείτε να βρείτε όλες τις ηλικίες;

Μπορεί να γίνει αληθής σχέση; Η σχέση αυτή 2+7-118=129 μπορεί να γίνει αληθής σχέση, μόνο με ένα ευθύγραμμο τμήμα;

Η Ισότητα: Δίνεται η ψευδής ισότητα: 574=10. Μπορείτε να μετακινήσετε κατάλληλα μόνο ένα ψηφίο και να κάνετε την ισότητα αυτή αληθή;

Το κόψιμο της τούρτας: Πως γίνεται να κόψουμε μια στρογγυλή τούρτα σε οκτώ ίσα κομμάτια κάνοντας με το μαχαίρι μόνο τρεις ευθείες τομές;

Με μια γραμμή 3 τριάδες	Με μια γραμμή 2 τριάδες
• • • • • • • • • Μπορείτε χωρίς να σηκώσετε το μολύβι να κάνετε μια γραμμή που να περνάει από όλα τα σημεία;	• • • • • • Μπορείτε να ενώσετε κάθε σημείο με όλα τα άλλα χωρίς να τέμνονται οι γραμμές;



Το οικόπεδο: Τέσσερα αδέλφια έχουν κληρονομήσει ένα οικόπεδο τετράγωνο πλευράς 100 μέτρων. Πούλησαν σε μια γωνία ένα τετράγωνο οικόπεδο ίσο με το ένα τέταρτο του συνολικού οικοπέδου. Μπορείτε να μοιράσετε το υπόλοιπο στα 4 αδέλφια;

Ο Φρειδερίκος ο 2^{ος}: Το 1225, ο αυτοκράτορας **Φρειδερίκος ο 2ος** ταξίδεψε μέχρι την Πίζα της Ιταλίας συνοδευόμενος από ένα επιτελείο διακεκριμένων μαθηματικών της εποχής, για να διαπιστώσει αν ο **Λεονάρντο Φιμπονάτσι** ήταν αντάξιος της φήμης του. Του ζήτησε να λύσει ένα πρόβλημα του **Διόφαντου**. Ο Φιμπονάτσι με ευκολία έλυσε το πρόβλημα και δικαίωσε τη φήμη του. Το πρόβλημα ήταν το εξής: «*Να βρεθεί ένα τέλειο τετράγωνο, τέτοιο ώστε, είτε του αφαιρέσουμε 5 μονάδες, είτε του προσθέσουμε 5 μονάδες να παραμένει τέλειο τετράγωνο.*» Εσείς μπορείτε να βρείτε αυτόν τον αριθμό;

Από μνήμης: Ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν αυτές τις δύσκολες διαφορές $857^2 - 757 \cdot 957 =$; και $7453^2 - 6453 \cdot 8453 =$; από μνήμης. Η Ηλέκτρα το βρήκε αμέσως εσείς μπορείτε;

Το κλάσμα: Η διαφορά μεταξύ των όρων ενός κλάσματος είναι 21. Το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 4/5 και μικρότερο από το 9/11 .Ποιο είναι το κλάσμα;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 115

Η άνωση: Θα κατέβει η στάθμη του νερού διότι ο σίδηρος είναι 8 φορές βαρύτερος από το νερό. Όταν βρίσκεται μέσα στη βάρκα εκτοπίζει όγκο νερού οκταπλάσιο από τον όγκο που εκτοπίζει όταν είναι μέσα στο νερό.

Η αφαίρεση: Α. 77777-7777=70000
Β. 55777-5577=50200

Οι λήγοντες: Όταν ο αριθμός λήγει σε μηδέν τα πολλαπλάσιά του λήγουν σε 0, όταν ο αριθμός λήγει σε 5 τα πολλαπλάσια του λήγουν σε 0 ή 5, όταν λήγουν σε 2,4,6,8 τα πολλαπλάσια λήγουν σε 0,2,4,6,8, και όταν λήγουν σε 3 ή 9 τα πολλαπλάσιά τους λήγουν σε όλα τα ψηφία.

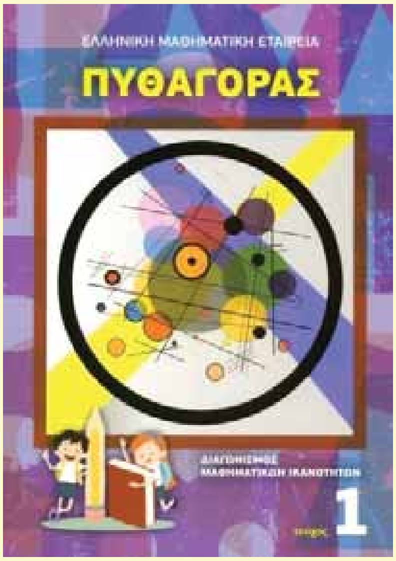
Τέχνες: Καλές Τέχνες είναι αυτές που υπηρετούν το ωραίο, το κάλλος και προσφέρουν αισθητική απόλαυση. Μέχρι τώρα εννέα από αυτές λέγονται καλές τέχνες και είναι οι: 1η Αρχιτεκτονική, 2η Γλυπτική, 3η Εικαστικές τέχνες (Ζωγραφική, Χαρακτική), 4η Λογοτεχνία και Ποίηση, 5η Μουσική, 6η Θέατρο, (Όπερα, Χορός, Παντομίμα), 7η Κινηματογράφος, 8η Φωτογραφία, 9η Κόμικς, 10η Δεν συμφώνησαν ακόμα, ποια λέτε να ονομαστεί για δέκατη καλή τέχνη; Υπάρχουν και οι Εφαρμοσμένες τέχνες που υπηρετούν πρακτικές μας ανάγκες, όπως: Μαγειρική, Διακοσμητική, Γραφιστική, Επιπλοποιία, Μικροτεχνία (Αργυροχρυσοχοΐα, κλπ), Αγγειοπλαστική, Ηθοποιία, Οπτικοακουστικές Τέχνες, Υφαντουργία, Πλέξιμο και Ραπτική, Μόδα, Κομμωτική, κλπ.

Οι πλάκες: Το πλάτος στον πεζόδρομο είναι 7 πλάκες

Το παιχνίδι: Το σκορ είναι 33, 55 με λόγο 33/55 που είναι ίσος με 3/5. Άρα το άθροισμα των πόντων είναι 88.

Η Ρίζα: Η 3^η ρίζα του 3

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας



Περιοδικό 10€

Περιοδικό 10€

Βιβλίο 15€

Βιβλίο 12€

Βιβλία που λάβαμε ...

500 **Ασκήσεις Μαθηματικών με τις λύσεις τους**
του Αντώνη Κ. Κυριακόπουλου
[Εκδ. 2020 Ζανταρίδης, Τηλέγραφος]

Ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων: ποιος, που, πότε και γιατί τον κατασκεύασε ...
των Νίκου Παν. Αραχώβα, Μαρίας Παν. Θεοδόση –Παλιμέρη
[Εκδ. 2020]

Ουσιώδη Προβλήματα Στοιχειακών Μαθηματικών [3 **τόμοι**]
των Μανόλη Γ. Μαραγκάκη και Μιχάλη Ν. Μεταξά
[Αυτοέκδοση 2020]

Τα Μαθηματικά είναι παιχνίδι!!!
των Χριστίνα Δ. Καρποντίνη και Ιωάννη Δ. Καραντζή
[Εκδ. Γκότση 2020]

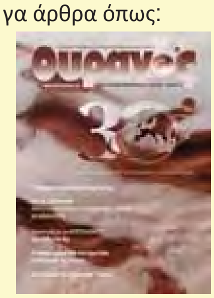
Μαθηματικός Περίπατος
σε ένα πρωτότυπο ερευνητικό έργο (1990-2019)
του Γιώργου Ι. Μηλιάκου [Εκδ. Σπάρτη 2019]

Γεωμετρικές Καμπύλες (**Α΄ τόμος**)
του Στράτου Παντελίδη [Εκδ. 2019, Βριλήσσια Αττικής]

... και περιοδικά

Ουρανός: Πήραμε από την **Εταιρεία Αστρονομίας και Διαστήματος**, το πολύ καλό και επετειακό τεύχος 114

Με αφορμή από το επίκαιρο γεγονός για τα 30 χρόνια της Εταιρείας (1990 – 2020). Μεταξύ άλλων, διαβάζουμε αξιόλογα άρθρα όπως:



- Από τον Πλούτωνα με αγάπη
- Τα χιόνια στις οροσειρές ... του Άρη.
- Από την Γη στον Άρη – Ένα ταξίδι μόνο για θαρραλέους.
- Η Ουράνια Σφαίρα στον Καθεδρικό Ναό του Βεστέρος της Σουηδίας.
- 10 πράγματα που δεν ξέρατε για τον Άρη.
- Οι αστερισμοί του Καλοκαιριού και άλλα σημαντικά άρθρα που έχουν σχέση με την επικαιρότητα και τους **διαγωνισμούς** της Αστρονομίας.