ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

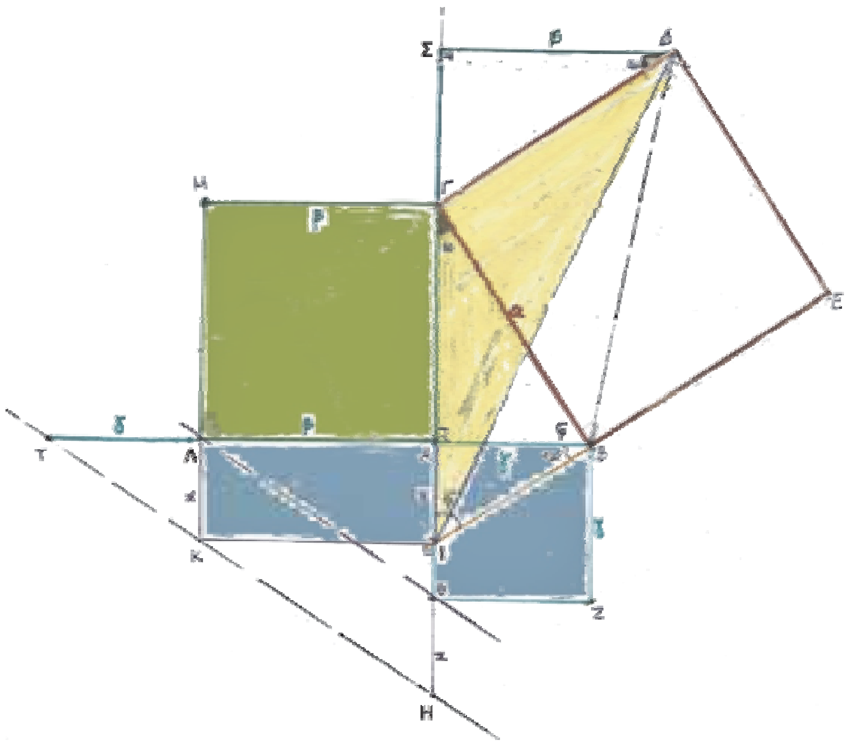
130

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2023 ευρώ 3,5



ΕΛΤΑ Hellenic Post

ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Κ.+7) ΕΚΔΟΤΩΝ

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Θέματα Θαλή 2023 και 40^{ης} ΒΜΟ

Μηχανική μέθοδος του Αρχιμήδη

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 130 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2023 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

πολλές ευχές για
χαρούμενη χρονιά
το 2024
με υγεία,
με αισιοδοξία
και με πείσμα παντού…

Και όπως λέει και ο δάσκαλος

… η ζωή δημιουργήθηκε
επειδή κάποιος, έπρεπε
να παρατηρήσει
το θαύμα του σύμπαντος,
αν υπήρξε ένας ευφυής σχεδιασμός,
απ' ότι νομίζω, ακόμα
και αν εμφανιστεί μπροστά μας,
η απάντηση θα είναι ότι,
δεν θα έχουμε εκείνη την αντιληπτική
ικανότητα να την κατανοήσουμε…

Γιώργος Γραμματικάκης
[Ηράκλειο Κρήτης: 1939 - 2023] ,
καθηγητής Φυσικής και πρύτανης
του Πανεπιστημίου Κρήτης - ευρωβουλευτής

Η επιτροπή σύνταξης του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** …
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

$$[20+24]^2 + 2[20+24]=2024$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	4 Νοεμβρίου	2023
Ευκλείδης:	20 Ιανουαρίου	2024
Αρχιμήδης:	24 φεβρουαρίου	2024

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Φελλούρης Ανάργυρος
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών,** αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε. ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2023

ΠΡΟΣΚΛΗΣΗ

Αθήνα, 26–1–2024

Καλούνται όλα τα τακτικά και αντεπιστέλλοντα μέλη της Ε.Μ.Ε. σε τακτική Γενική Συνέλευση, την **Κυριακή** ***25 Φεβρουαρίου 2024***, ώρα **10.00** το πρωί, **στην αίθουσα διαλέξεων της ΕΜΕ (Πανεπιστημίου 34, Αθήνα, 1ος όροφος).**

ΘΕΜΑΤΑ

1. Απολογισμός του Δ.Σ. για το έτος 2023
2. Ισολογισμός και απολογισμός της διαχείρισης για το 2023
3. Έκθεση της Εξελεγκτικής Επιτροπής
4. Έγκριση του ισολογισμού, απολογισμού και πεπραγμένων του Δ.Σ.
5. Έγκριση του προϋπολογισμού για το 2024
6. Ρύθμιση χρεών των μελών
7. Εξουσιοδότηση για την αγορά αποθηκευτικού χώρου ή γραφείου ή και πώληση αυτών
8. Προτάσεις μελών

Σε περίπτωση που δεν υπάρξει απαρτία (πρέπει να παρίσταται τουλάχιστον το 1/3 των μελών της Ε.Μ.Ε., που έχουν εκπληρώσει τις **ταμειακές** τους υποχρεώσεις τουλάχιστον και για το 2023 ή έχουν εγγραφεί στα μητρώα της ΕΜΕ το 2024), η Γενική Συνέλευση θα γίνει την

Κυριακή 3 ΜΑΡΤΙΟΥ 2024

στις 10 το πρωί στην αίθουσα διαλέξεων της ΕΜΕ (Πανεπιστημίου 34, Αθήνα, 1ος όροφος), οπότε σύμφωνα με το καταστατικό, θεωρείται σε απαρτία με όσα μέλη κι αν παρίστανται.

Τα πλήρη στοιχεία του απολογισμού δράσης του Δ. Σ., ο ισολογισμός και απολογισμός της **διαχείρισης 2023**, **ο προϋπολογισμός** για το **2024** και η έκθεση της **Εξελεγκτικής Επιτροπής** θα ανακοινωθούν στο δικτυακό τόπο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, www.hms.gr.

Με συναδελφικούς χαιρετισμούς

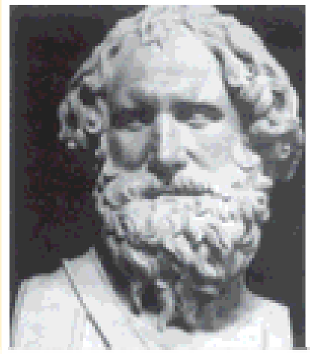
Ο Πρόεδρος	Ο Γενικός Γραμματέας
Ανάργυρος Φελλούρης	**Ιωάννης Τυρλής**

Η μηχανική μέθοδος του Αρχιμήδη

και ο Bonaventura Cavalieri

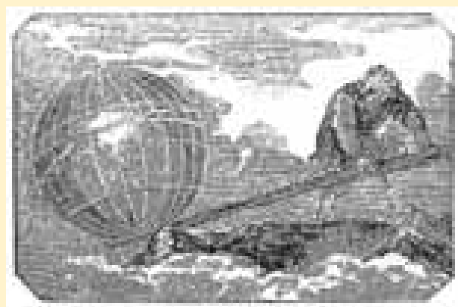
Γιώργος Λαγουδάκος

Αρχιμήδης [287-212 π.Χ.]



Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.)

Γεννήθηκε στις Συρακούσες, στη Σικελία. Ο πατέρας του ονομαζόταν Φειδίας και ήταν αστρονόμος. Νέος σπουδάζει στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου όπου γνωρίζεται με τους **Κόνωνα** τον Σάμιο και τον **Ερατοσθένη** τον Κυρηναίο. Πέθανε το 212 π.Χ. κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Καρχηδονιακού Πολέμου μετά την άλωση των Συρακουσών από τους Ρωμαίους. Οι τελευταίες λέξεις που του αποδίδονται είναι «**μη μου τους κύκλους τάραττε**», απευθυνόμενος σε Ρωμαίο στρατιώτη που βρέθηκε μπροστά του. Ο Αρχιμήδης ήταν τόσο αφοσιωμένος στην επίλυση του προβλήματος που αντιμετώπιζε, ώστε αυτό που πρωτίστως τον ένοιαζε ήταν να μη του χαλάσει τα σχήματα που είχε φτιάξει. Ο άξεστος στρατιωτικός δεν αντελήφθη ποιον είχε μπροστά του και τον σκότωσε.



Άλλη διάσημη πρόταση που του αποδίδεται είναι η «**δος μοι πας τω και ταν γαν κοινάσω**», αναφερόμενος στις δυνατότητες που του παρέχουν οι μοχλοί.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο πανεπιστήμονας αυτός πέρα από τις πολλές ανακαλύψεις του σε όλο το εύρος των επιστημών, διακρινόταν, σε αντίθεση με τα μέχρι τότε συμβατά και καθιερωμένα, επειδή χρησιμοποιούσε και «**μηχανικές** » **μεθόδους** για να ανακαλύψει κρυμμένες σχέσεις και αναλογίες. Πιο χαρακτηριστική περίπτωση είναι ο τρόπος με τον οποίο κατέληξε στο ότι ο όγκος ενός κώνου είναι το 1/3 του αντίστοιχου κυλίνδρου. Λέγεται ότι κατασκεύασε από κερί έναν κύλινδρο και τον ζύγησε, μετά έξισε το παραπανίσιο κερί και σχημάτισε έναν κώνο. Ξαναζύγησε και διαπίστωσε ότι το βάρος του ήταν το 1/3 του κυλίνδρου. Αφού τα δύο στερεά ήταν κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό, ίδια σχέση έπρεπε να υπάρχει και για τους όγκους των δύο στερεών. Μετά απέδειξε τη σχέση με αυστηρό μαθηματικό τρόπο.

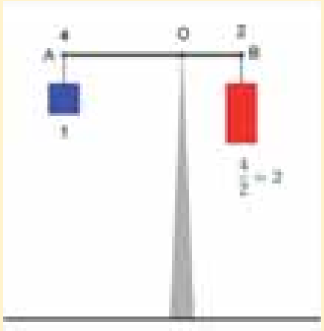
Όταν αναφερόμαστε σε μηχανική μέθοδο εννοούμε πρωτίστως την εφαρμογή της **συνθήκης ισορροπίας** στην επίλυση καθαρά Γεωμετρικών – Αλγεβρικών προβλημάτων.

Η συνθήκη ισορροπίας λέει ότι αν έχουμε δύο σώματα διαφορετικού βάρους για να ισορροπήσουν στα άκρα μιας ζυγαριάς πρέπει ανάμεσα στα βάρη των σωμάτων και τις αποστάσεις τους από το σημείο ισορροπίας να ισχύει η αναλογία :

$$\frac{W_B}{W_A} = \frac{AO}{BO}$$

Δηλαδή αν έχουμε δύο βάρη όπως στο διπλανό σχήμα όπου $W_B = 2W_A$ τότε για να ισορροπήσουν στην ζυγαριά θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{AO}{BO} = \frac{2}{1} = \frac{W_B}{W_A}$$

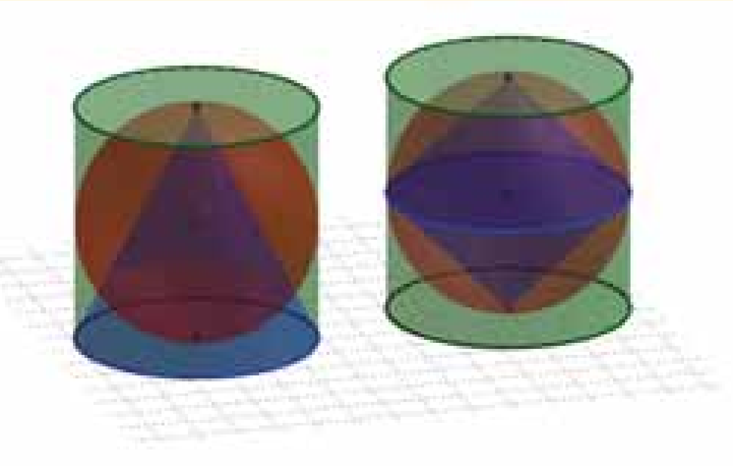


Ανοίξτε τον σύνδεσμο : https://www.geogebra.org/m/fgdbyr3p

Η σχέση που αγάπησε περισσότερο από όλες ο Αρχιμήδης ήταν αυτή που λέει :

« ο όγκος μιας σφαίρας είναι ίσος με τα 2/3 του όγκου του μικρότερου κυλίνδρου που την περιβάλλει»

Ο τύπος αυτός του έκανε τόσο εντύπωση, ώστε ζήτησε να χαράξουν στην ταφόπετρά του ένα σχήμα σαν το διπλανό.
Την σχέση αυτή θα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την μηχανική μέθοδο του Αρχιμήδη, χρησιμοποιώντας σύγχρονους τρόπους συμβολισμού και εργαλεία προσομοιώσεων. Για να γίνει κατανοητή η όλη εργασία χρησιμοποιούμε εφαρμογές **GeoGebra** τις οποίες μπορείτε να τις «ανοίξετε» και να μεταβάλετε δρομείς και σημεία…



Αν ξαναδούμε το πρόβλημα …

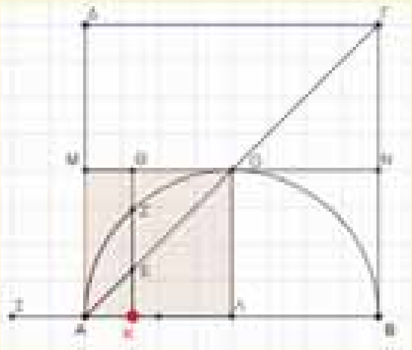
Στο 1^{ο} σχήμα παρουσιάζεται ένας κύλινδρος και η σφαίρα που εγγράφεται σε αυτόν και ο (ορθός) κώνος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με τον κύλινδρο.

Θα αποδείξουμε ότι ανάμεσα στους όγκους των τριών στερεών ισχύει η ισότητα :

$$\frac{\text{Κύλινδρος}}{3} = \frac{\text{Σφαίρα}}{2} = \frac{\text{Κώνος}}{1}$$

Παρατηρείστε το 2^{ο} σχήμα … Έχουμε τον ίδιο κύλινδρο τον οποίο τον χωρίζουμε στη μέση σε δύο ίσους κυλίνδρους. Μέσα σε αυτόν υπάρχει η σφαίρα η οποία χωρίζεται σε δύο ημισφαίρια και ο κώνος έχει αντικατασταθεί με δύο κώνους ίδιας βάσης και μισού ύψους. Άρα οι δύο κώνοι μαζί μας κάνουν τον κώνο του 1^{ου} σχήματος.

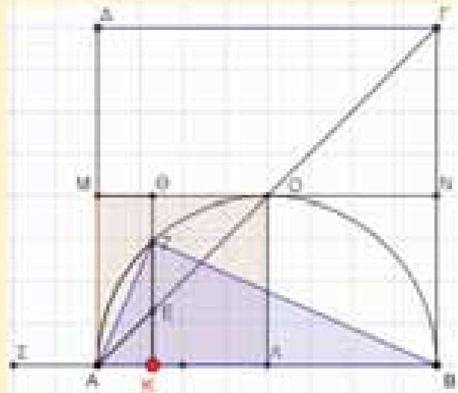
Στα παρακάτω θα αποδείξουμε ότι ο μισός κύλινδρος έχει όγκο όσο το άθροισμα ενός μικρού κώνου και της μισής σφαίρας. Ισότητα που είναι ισοδύναμη με την αρχική.



Όλα θα ξεκινήσουν από το εξής Γεωμετρικό σχήμα …

Έχουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, την διαγώνιο του ΑΓ και ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.

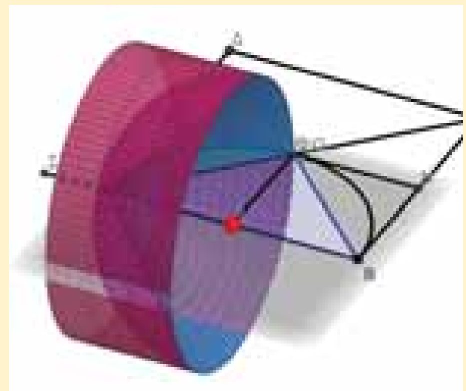
Εμείς θα ασχοληθούμε με το τετράγωνο ΑΛΟΜ. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ της ΑΛ (Λ μέσο του ΑΒ) και φέρνουμε κάθετη της ΑΒ στο Κ. Η κάθετος τέμνει το τμήμα ΑΟ, το τόξο ΑΟ και το τμήμα ΟΜ στα σημεία Ε,Ζ και Θ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει:



$$\frac{K\Theta^2}{KE^2+KZ^2}=\frac{\frac{\alpha}{4}}{AK}$$

Απόδειξη

Έχουμε διαδοχικά:



$$\frac{K\Theta^2}{KE^2+KZ^2}\ \underset{AK=KE}{\overset{AKE\ \text{ισοσκελές}}{=}}\ \frac{K\Theta^2}{AK^2+KZ^2}\ \underset{AKZ}{\overset{\Pi\Theta}{=}}\ \frac{K\Theta^2}{AZ^2}=$$

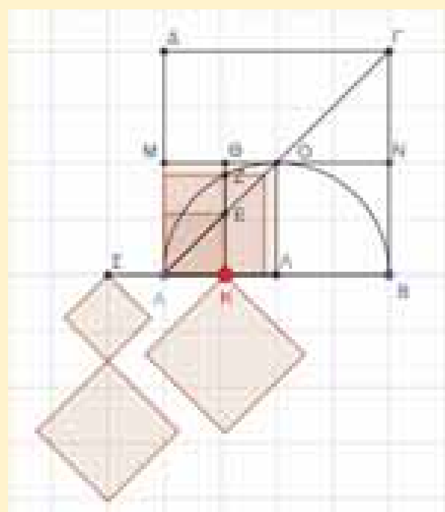
$$\underset{\text{ορθογώνιο}}{\overset{AZB}{=}}\ \frac{K\Theta^2}{AK\cdot AB}=\frac{(\frac{\alpha}{2})^2}{AK\cdot\alpha}=\frac{\frac{\alpha^2}{4}}{AK\cdot\alpha}=\frac{\frac{\alpha}{4}}{AK}$$

Γιατί όμως δουλεύουμε στο σχήμα αυτό;

Εδώ θέλω την φαντασία σας.

Φανταστείτε λοιπόν … το τμήμα ΑΕ, το τόξο ΑΖ και το τμήμα ΜΘ να περιστρέφονται γύρω από την ΑΛ και συγχρόνως το σημείο Κ να κινείται από το σημείο Α προς το σημείο Λ, τι παράγεται;

Σωστά !



Παράγεται ο κύλινδρος με το μισό ύψος, η μισή σφαίρα και ο κώνος με το μισό ύψος. Για τα τρία αυτά στερεά θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ισότητα :

Κύλινδρος = Σφαίρα/2 + Κώνος
https://www.geogebra.org/m/dzushb5g

Τι εκφράζει όμως η ισότητα $\frac{K\Theta^2}{KE^2+KZ^2}=\frac{\frac{\alpha}{4}}{AK}$ και που θα μας βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε;

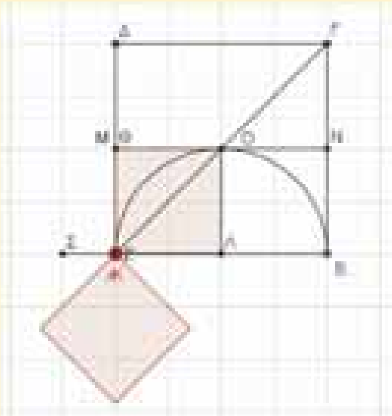
Η ισότητα εκφράζει «την συνθήκη ισορροπίας του τετραγώνου πλευράς α/2 με το άθροισμα των τετραγώνων πλευρών ΚΖ και ΚΕ»

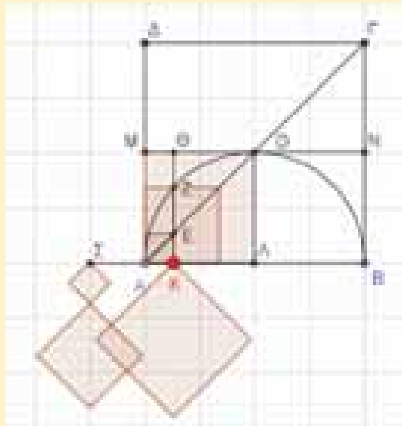
Τι σημαίνει αυτό; Παρατηρείστε το σχήμα …

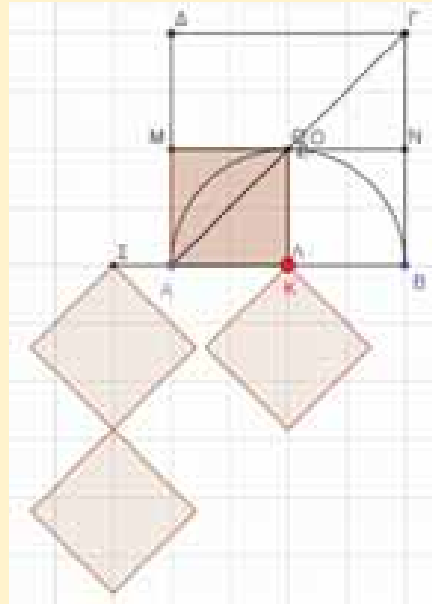
Το τετράγωνο πλευράς ΚΘ=α/2 ισορροπεί με το σύστημα τετράγωνο πλευράς ΚΕ και τετράγωνο πλευράς ΚΖ. Οι θέσεις Σ και Κ ορίζονται από την ισότητα: $\frac{K\Theta^2}{KE^2+KZ^2}=\frac{\frac{\alpha}{4}}{AK}$

Οπότε το σημείο Σ θα είναι τέτοιο ώστε ΣΑ=α/4

Παρατηρείστε την ισορροπία όπως εξελίσσεται ανάμεσα στα τρία τετράγωνα σε διαφορετικές θέσεις του σημείου Κ.
https://www.geogebra.org/m/euvkyzss



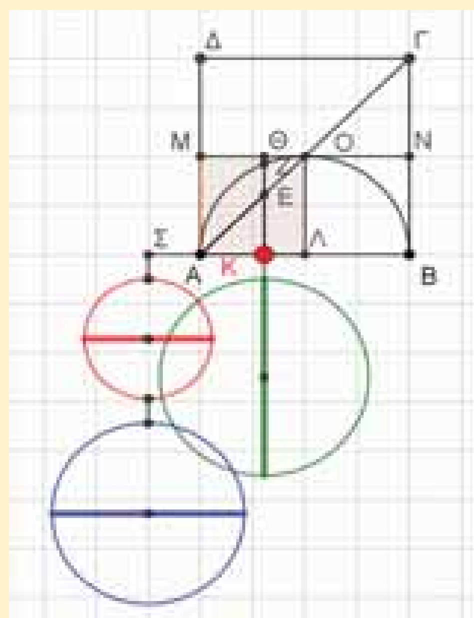




Στο $1^{ο}$ σχήμα το σημείο Κ ταυτίζεται με το Α, στο $2^{ο}$ σχήμα το σημείο Κ βρίσκεται σε τυχαία θέση και τέλος στο $3^{ο}$ σχήμα το σημείο Κ βρίσκεται στο σημείο Λ.

Η ισότητα που αποδείξαμε μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\frac{\pi \cdot \mathrm{K\Theta}^2}{\pi \cdot \mathrm{KE}^2 + \pi \cdot \mathrm{KZ}^2} = \frac{\frac{\alpha}{4}}{\mathrm{AK}}$$



Τι παριστάνει τώρα;

Για παράδειγμα στον αριθμητή αυτό το π που εμφανίστηκε ως παράγοντας παραπέμπει σε συνδυασμό με το γινόμενο ενός τετραγώνου, σε εμβαδόν κύκλου.

Άρα η ισότητα παριστάνει «την συνθήκη ισορροπίας κύκλου ακτίνας α/2 με το άθροισμα των κύκλων ακτίνων ΚΖ και ΚΕ»

Δηλαδή …

Το σύστημα των κύκλων ακτίνων ΚΕ και ΚΖ ισορροπεί με τον κύκλο ακτίνας ΚΘ σε σημεία Σ και Κ για τα οποία ισχύει ΣΑ=α/4

https://www.geogebra.org/m/g2wpcwzb

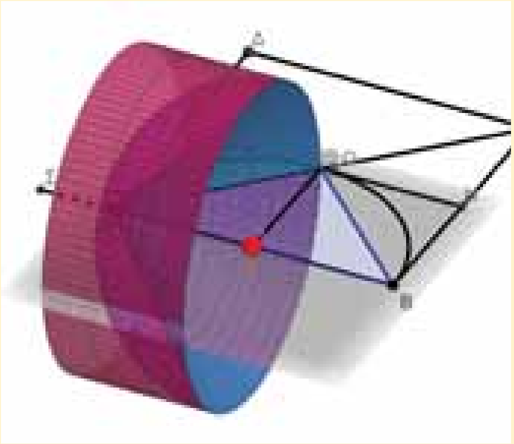
Μα τώρα γιατί μπλέκουμε κύκλους;

Που θέλουμε να καταλήξουμε;

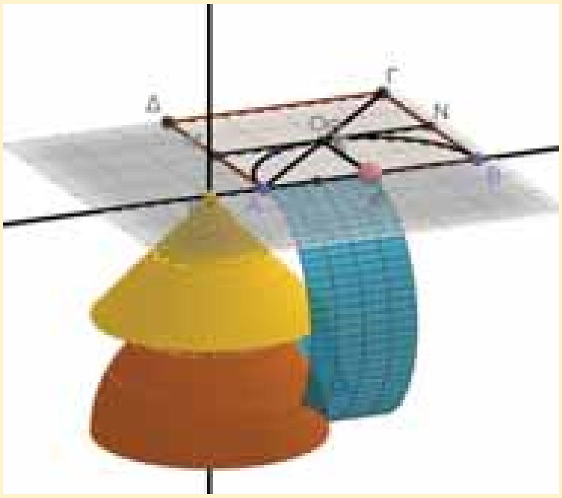
Το προηγούμενο σχήμα το οποίο μας οδήγησε στην ισότητα:

(Διατομή Κυλίνδρου) = (Διατομή μισής σφαίρας) + (Διατομή Κώνου)

τώρα θέλω να το δείτε ως ένα άθροισμα πάρα πολλών κύκλων. Διότι για παράδειγμα ο κύλινδρος δεν είναι παρά ένα σχήμα που παράγεται βάζοντας πολλούς – πάρα πολλούς κύκλους τον έναν πάνω στον άλλον.



Το ίδιο ισχύει και για τον κώνο και για την μισή σφαίρα.



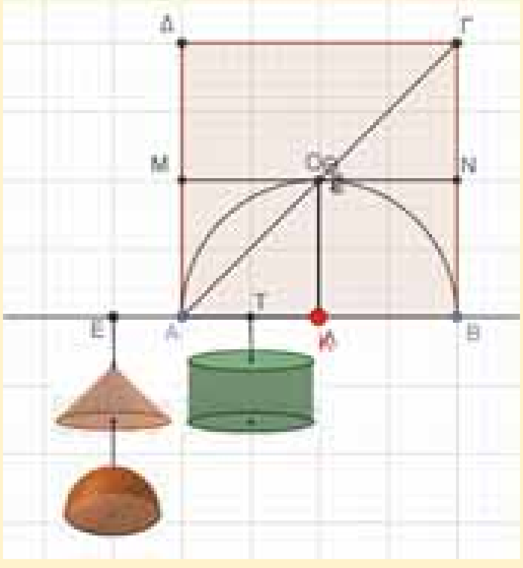
Το να δούμε για παράδειγμα τον κύλινδρο ως ένα άθροισμα πολλών κυκλικών διατομών αποτελεί μία ευφυή προσέγγιση της έννοιας του ολοκληρώματος μέσω άπειρου αθροίσματος. Η μέθοδος αυτή λέγεται **μέθοδος εξάντλησης** του Ευδόξου και ήταν γνωστή στον Αρχιμήδη και την εφάρμοζε σε συνδυασμό με την μηχανική τεχνική της ισορροπίας του.

Ας δούμε πως (;) στο πρόβλημα που μας απασχολεί …

Στην εικόνα έχουμε:

- τους κύκλους τον έναν κάτω από τον άλλο να «κρέμονται» στο σημείο Σ σχηματίζοντας τον κώνο και το ημισφαίριο
- τους κύκλους ακτίνας α/2 τον έναν δίπλα στον άλλο να σχηματίζουν τον κύλινδρο ακτίνας ΚΘ και ύψους α/2. Ο κύλινδρος «απλώνεται» σε όλο το μήκος του τμήματος ΑΛ.

https://www.geogebra.org/m/nukvc2bg



Τον κύλινδρος μπορούμε να τον θεωρήσουμε αντί να είναι προσαρτημένος στην πλευρά ΑΛ, να κρέμεται από το μέσο Τ της ΑΛ.

Δηλαδή η όλη εικόνα είναι σαν αυτήν που παρουσιάζουμε στο διπλανό σχήμα.

Επειδή ΕΑ=ΑΤ=α/4 από την ισορροπία των στερεών καταλήγουμε στην ισότητα :

Κύλινδρος = Σφαίρα/2 + Κώνος

Οπότε απαλείφοντας το 2 καταλήγουμε στο ότι:

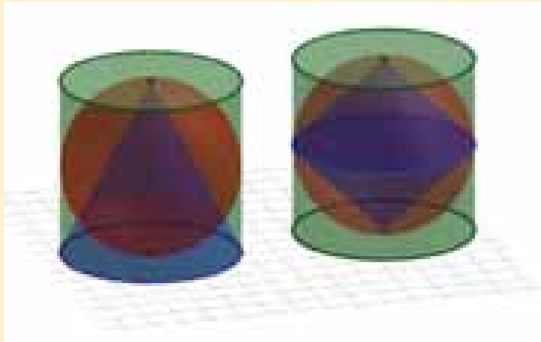
ο διπλάσιος (σε ύψος) Κύλινδρος θα είναι ίσος με την Σφαίρα που εγγράφεται σε αυτόν και τον Κώνο που έχει διπλάσιο ύψος.

Θυμηθείτε την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα στερεά στο διπλανό σχήμα …

Και που έχουμε φθάσει μέχρι τώρα;

Έχουμε φθάσει στην ισότητα : "Κύλινδρος" = "Σφαίρα" + "Κώνος"

ή οποία επειδή γνωρίζουμε ότι : $\text{"Κώνος"} = \frac{1}{3}\text{"Κύλινδρος"}$



Καταλήγει τελικά στην ισότητα : $\text{"Σφαίρα"} = \frac{2}{3}\text{"Κύλινδρος"}$

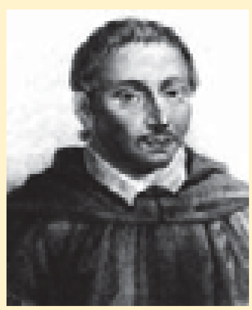
Ή ισοδύναμα ότι :

$$\frac{\text{Κύλινδρος}}{3} = \frac{\text{Σφαίρα}}{2} = \frac{\text{Κώνος}}{1}$$

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στην μηχανική μέθοδο του Αρχιμήδη θα προσεγγίσουμε την σχέση:

$V_{\text{σφαίρας}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{κυλίνδρου}}$ με την βοήθεια του …

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

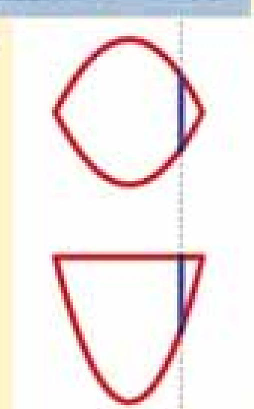


GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
MARTIVM VRSINVM

Γεννήθηκε στο Μιλάνο και από νωρίς εντάχθηκε στο τάγμα των Ιησουιτών όπου σπούδασε μαθηματικά, τα οποία δίδαξε στο πανεπιστήμιο της Μπολόνια.

Στο έργο του «**Μέθοδος για την ανάπτυξη της νέας γεωμετρίας των συνεχών αδιαιρέτων**», ισχυριζόταν ότι:

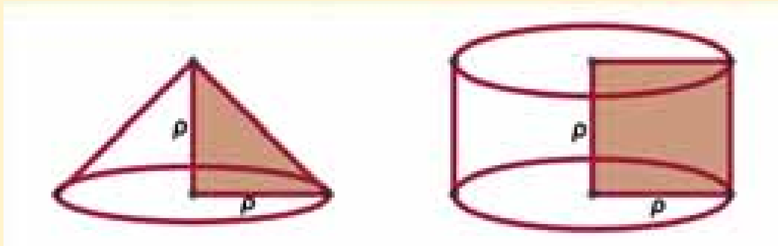
«αν κάθε οριζόντια γραμμή τέμνει δύο επίπεδα σχήματα έτσι, ώστε οι τομές να έχουν το ίδιο μήκος, τότε τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν, αντίστοιχα αν κάθε οριζόντια επιφάνεια τέμνει δύο στερεά σχήματα έτσι ώστε οι τομές να έχουν το ίδιο εμβαδόν, τότε τα δύο στερεά έχουν το ίδιο όγκο.»



Παρατηρείτε τις ομοιότητες της μεθόδου με όσα αναφέραμε παραπάνω με τον Αρχιμήδη;

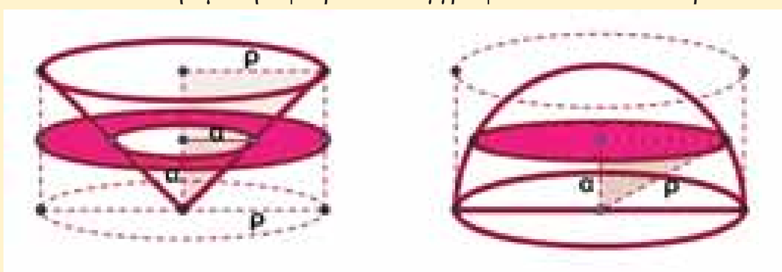
Θα αποδείξουμε λοιπόν με την βοήθεια **των συνεχών αδιαίρετων του Cavalieri** οτι :

« ο όγκος μιας σφαίρας είναι ίσος με τα 2/3 του όγκου του μικρότερου κυλίνδρου που την περιβάλλει»



Θεωρούμε τον μισό κύλινδρο στον οποίο μπορεί να εγγραφεί σφαίρα ακτίνας ρ και τον κώνο που μπορεί να εγγραφεί σε αυτόν.

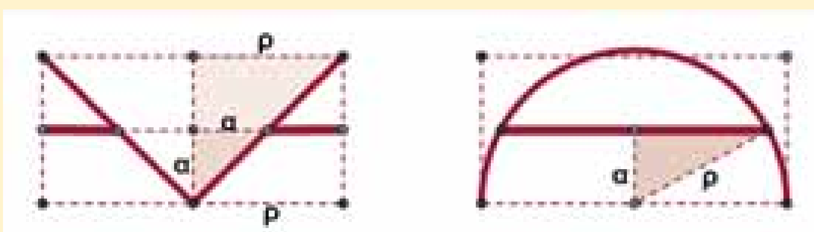
Στο σχήμα έχουμε τον κώνο και την μισή σφαίρα που εγγράφεται στον κύλινδρο διαστάσεων ρxρ.



Θεωρούμε μία τυχαία επιφάνεια που τέμνει τα στερεά.

Οι χρωματισμένες με κόκκινο επιφάνειες έχουν το ίδιο εμβαδόν διότι : για τον δακτύλιο ισχύει:

$E = \pi\rho^2 - \pi\alpha^2 = \pi(\rho^2 - \alpha^2)$ και για την κυκλική διατομή στη σφαίρα ισχύει $E = \pi r^2 \overset{r^2=\rho^2-\alpha^2}{\underset{\Pi\Theta}{=}} \pi(\rho^2 - \alpha^2)$



Άρα σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri το στερεό που προκύπτει αφαιρώντας από τον κύλινδρο τον κώνο και η μισή σφαίρα έχουν το ίδιο όγκο. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$V_{\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon} - V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}}{2} \Leftrightarrow (\pi\cdot\rho^2)\cdot\rho - \frac{1}{3}(\pi\cdot\rho^2)\cdot\rho = \frac{V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi\cdot\rho^3 = \frac{V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}}{2}$$

Οπότε $V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{4}{3}\pi\cdot\rho^3 = \frac{2}{3}\cdot(\pi\cdot\rho^2)\cdot 2\rho = \frac{2}{3}\cdot V_{\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon}$

Βιβλιογραφία :

1. Η Ευκλείδεια απόδειξη του νόμου ισορροπίας των μοχλών από τον Αρχιμήδη», Αθανάσιου Στράτζαλου. «Θέματα Μαθηματικής Εκπαίδευσης και Επιμόρφωσης», Τόμος 1ος, εκδόσεις ΒΙΒΛΙΟΤΡΟΠΙΑ.
2. Διπλωματική εργασία «Διδακτική προσέγγιση του εμβαδού της έλλειψης με αναφορά στο έργο Σφαιροειδή και Κωνοειδή του Αρχιμήδη» της Στεφανάκη Σταματίνας.
3. Διπλωματική εργασία «Η μέθοδος της εξάντλησης των Ευδόξου – Αρχιμήδη» Βασιλείου Ν. Γεωργίου ΕΚΠΑ Μαθηματικό τμήμα 2009.
4. «Το έργο του Αρχιμήδη και η συμβολή του στην εξέλιξη της μηχανικής και της τεχνολογίας» Διδακτορική διατριβή ΕΚΠΑ Ι. Εξαρχάκου 1995.
5. « Η μέθοδος του Αρχιμήδη» Διπλωματική εργασία Βαγγέλη Παππά ΕΜΠ – 2012.
6. Ανοικτά Ακαδημαϊκά μαθήματα Ιστορίας Μαθηματικών, Χαράς Χαραλάμπους ΑΠΘ.

84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
4 Νοεμβρίου 2023

Ενδεικτικές λύσεις

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{a, b, c}$ έτσι ώστε οι αριθμοί $\boldsymbol{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}}$ και $\boldsymbol{\frac{c}{a}}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης**

$$\boldsymbol{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ έχουν γινόμενο $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$
Συνεπώς, είτε και οι τρεις θα είναι ίσοι με 1 είτε ένας εξ αυτών θα ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1.

(1ος τρόπος) Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a=b=c$, οπότε

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3a\cdot\frac{3}{a}=9.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, λόγω κυκλικής συμμετρίας, ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\frac{a}{b}=1,\ \frac{b}{c}=\frac{c}{a}=-1 \implies a=b=-c \implies b+c=0=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$,
οπότε $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=a\cdot\frac{1}{a}=1$.

(2ος τρόπος) Ισχύει ότι $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)+1$

Έτσι, αν και οι τρεις αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ είναι ίσοι με 1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $2\cdot 2\cdot 2+1=9$, ενώ αν ένας εξ αυτών ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $0+1=1$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ είναι το 9 και το 1.

Πρόβλημα 2. **Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{x, y}$, με $\boldsymbol{y\neq -2}$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις: $\boldsymbol{x^2-4x+\frac{5}{y+2}=2}$ και $\boldsymbol{3(x-2)^2-\frac{4}{y+2}=-1}$.**

Λύση

Αν θέσουμε $\alpha=(x-2)^2$ και $\beta=\frac{1}{y+2}$

προκύπτει το σύστημα: $\{\alpha+5\beta=6,\ 3\alpha-4\beta=-1\} \Leftrightarrow \alpha=1, \beta=1$.

Άρα έχουμε: $\alpha=(x-2)^2=1$ και $\beta=\frac{1}{y+2}=1 \Leftrightarrow x-2=\pm 1, y=-1$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(1,-1) \text{ ή } (x,y)=(3,-1).$$

Πρόβλημα 3. **Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος $\boldsymbol{n}$ τέτοιος, ώστε ο αριθμός $\boldsymbol{A=2023\cdot 10^n+1}$, να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.**

Λύση. **(1ος τρόπος).** Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

Έστω $A=2023\cdot 10^n+1=x^2$, για κάποιο ακέραιο x. Το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι ίσο με 8, οπότε ο Α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άρα ούτε και ο x. Τότε

$$A-1=2023\cdot 10^n=x^2-1=(x-1)(x+1).$$

με $x-1$ ή $x+1$ πολλαπλάσιο του 3, άτοπο, αφού το άθροισμα των ψηφίων του Α -1 είναι ίσο με 7.

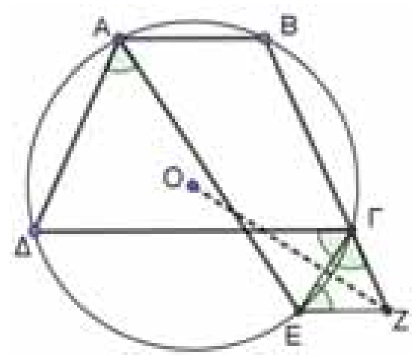
(2ος τρόπος) Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x=3k, x=3k+1, x=3k+2$, με k ακέραιο, βλέπουμε ότι το τετράγωνο x^2 ενός ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 3. Αφού

$$A = 2022999\dots9 + 2 = \pi o\lambda.3 + 2$$

όπου το 9 εμφανίζεται n φορές, ο Α δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. **Σε ένα κύκλο $\mathbf{c(O,R)}$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ τέτοια ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ||ΔΓ. Έστω Ε το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας Α του τραπεζίου με τον κύκλο $\mathbf{c(O,R)}$. Αν η παράλληλη από το Ε στην ΔΓ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ, να δειχθεί ότι η ευθεία ΟΖ είναι κάθετη στην ΕΓ.**

Λύση



Δίνεται ότι η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{A}$, και ΕΖ||ΔΓ, ενώ γνωρίζουμε ότι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες . Έτσι, έχουμε

$$Z\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{A}E = \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Αφού το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε

$\widehat{A} = \widehat{B}$, και αφού ΕΖ||ΔΓ είναι

$$E\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B = 180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A}.$$

Άρα στο τρίγωνο ΕΖΓ είναι $E\hat{\Gamma}Z = 180^\circ - E\hat{Z}\Gamma - Z\hat{E}\Gamma = 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{A}\right) - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} = Z\hat{E}\Gamma$.
Επομένως, το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές με ΕΖ = ΓΖ. Αφού ΟΕ = ΟΓ, τα σημεία Ο και Ζ ορίζουν την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΕΓ. Συνεπώς, η ευθεία ΟΖ είναι κάθετη στην ΕΓ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{a, b, c, d}$ έτσι ώστε οι αριθμοί $\boldsymbol{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}}$ και $\boldsymbol{\frac{d}{a}}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης**

$$\boldsymbol{(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a} = 1$.
Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1.
Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a=b=c=d$, οπότε

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) = 4a\cdot\frac{4}{a} = 16.$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1, αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \quad \text{ή} \quad \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a+b+c+d=0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.
Σε κάθε άλλη υποπερίπτωση, π.χ. αν $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = -1$ και $\frac{c}{d} = \frac{d}{a} = 1$

Παίρνουμε $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=2a\cdot\frac{2}{a}=4$. Στην τρίτη περίπτωση όπου $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=-1$, παίρνουμε $a+b=b+c=c+d=d+a=0$, οπότε $a=c$ και $b=d$ και η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0, αφού $a+b+c+d=0$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ είναι το 16, το 4 και το 0.

Πρόβλημα 2. **Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε κάποιος από τους αριθμούς $\mathrm{A}=2023\cdot 10^n+6$, να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.**

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος θετικός ακέραιος. Έστω ότι

$$\mathrm{A}=2023\cdot 10^n+6=x^2, \text{ για κάποιο ακέραιο } x.$$

(1ος τρόπος) Αφού ο Α είναι άρτιος, θα είναι $x=2y$ για κάποιο ακέραιο y, οπότε θα έχουμε $2023\cdot 10^n+6=4y^2$

ή ισοδύναμα, αφού διαιρέσουμε με το 2, $10115\cdot 10^{n-1}+3=2y^2$

Εάν $n=1$, η τελευταία σχέση δίνει $y^2=5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2<5059<72^2$).

Εάν $n>1$, το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι περιττός αριθμός, ενώ το δεξί είναι άρτιος, άτοπο. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(2ος τρόπος) Αν $n=1$, τότε $\mathrm{A}=20236=4\cdot 5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2<5059<72^2$).

Εάν $n>1$, τότε ο αριθμός $\mathrm{A}-2=2023\cdot 10^n+4$ διαιρείται με το 4. Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x=4k+\upsilon$, με k ακέραιο και $0\le\upsilon\le 3$ βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 4. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(3ος τρόπος) Αφού το 2023 είναι πολλαπλάσιο του 7, βλέπουμε ότι ο Α αφήνει υπόλοιπο 6 κατά τη διαίρεσή του με το 7. Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x=7k+\upsilon$, με k ακέραιο και $0\le\upsilon\le 6$, βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0, 1, 2 ή 4 κατά τη διαίρεσή του με το 7. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3. **Δίνονται τα τριώνυμα $P(x)=x^2+\alpha x+\beta$ και $Q(x)=x^2+\gamma x+\delta$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ακέραιους, τέτοια ώστε $P(1)=Q(2022)$ και $P(2022)=Q(1)$. Να δειχθεί ότι το άθροισμα $\alpha+\gamma$ και η διαφορά $\beta-\delta$ είναι πολλαπλάσια του 2023.**

Λύση. **(1ος τρόπος)** Αφού $P(2022)=Q(1)$ παίρνουμε $2022^2+2022\alpha+\beta=1+\gamma+\delta$, οπότε $\gamma+\delta+\alpha-\beta=2023\alpha+2022^2-1=2023(\alpha+2021)$.

και αφού $Q(2022)=P(1)$ παίρνουμε $2022^2+2022\gamma+\delta=1+\alpha+\beta$, οπότε

$$\alpha+\beta+\gamma-\delta=2023\gamma+2022^2-1=2023(\gamma+2021).$$

Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε $2(\beta-\delta)=2023(\gamma-\alpha)$, οπότε

$$\beta-\delta=\frac{2023(\gamma-\alpha)}{2}.$$

Αφού το 2023 είναι περιττός αριθμός και η διαφορά $\beta-\delta$ είναι ακέραιος, θα πρέπει η διαφορά $\gamma-\alpha$ να είναι άρτιος. Συνεπώς η διαφορά $\beta-\delta$ είναι πολλαπλάσιο του 2023, και το άθροισμα $\alpha+\gamma=2023(\gamma+2021)-(\beta-\delta)$ είναι πολλαπλάσιο του 2023.

(2ος τρόπος) Αφού $P(1)=Q(2022)$ και $P(2022)=Q(1)$, η εξίσωση $Q(x)=P(2023-x)$, έχει λύσεις $x=1$ και $x=2022$. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$x^2+\gamma x+\delta=(2023-x)^2+\alpha(2023-x)+\beta,$$

ή, κάνοντας τις πράξεις, ισοδύναμα $(\alpha+\gamma+4046)x=2023\alpha+\beta-\delta+2023^2$.

Αν $\alpha+\gamma+4046\neq 0$, τότε η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x, άτοπο. Άρα

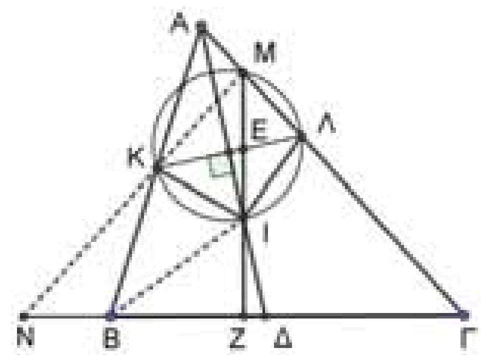
$$\alpha+\gamma+4046=0 \quad \text{και} \quad 2023\alpha+\beta-\delta+2023^2=0.$$

Συνεπώς, $\alpha+\gamma=-4046$ και $\beta-\delta=-2023\alpha-2023^2$,

δηλ. πολλαπλάσια του 2023.

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και το σημείο τομής των διχοτόμων του Ι. Έστω ότι η ευθεία ΑΙ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Θεωρούμε σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΚ = ΒΔ, και σημείο Λ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΛ = ΑΚ. Αν Μ είναι το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΚΙΛ με την ΑΔ (διαφορετικό από το Λ), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ είναι κάθετη στην ΒΓ.

Λύση



Τα τρίγωνα ΚΒΙ και ΔΒΙ είναι ίσα από ΠΓΠ (ΒΙ κοινή, ΒΚ = ΒΔ, ΚΒΙ = ΔΒΙ), οπότε $I\widehat{K}B = I\widehat{\Delta}B = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}$, ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ.

Έτσι στο τετράπλευρο ΚΙΔΒ είναι

$$K\widehat{I}\Delta = 360° - \widehat{B} - 2\left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 360° - \widehat{B} - 2\widehat{\Gamma} - \widehat{A} = 180° - \widehat{\Gamma}.$$

Τα τρίγωνα ΑΚΙ και ΑΛΙ είναι ίσα από ΠΓΠ (ΑΙ κοινή, ΑΚ = ΑΛ, ΚΑΙ = ΛΑΙ), οπότε

$$\Lambda\widehat{I}A = K\widehat{I}A = 180° - K\widehat{I}\Delta = \widehat{\Gamma}.$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΚΙΛΜ παίρνουμε $A\widehat{M}K = K\widehat{I}\Lambda = 2 \cdot \Lambda\widehat{I}A = 2 \cdot \widehat{\Gamma}$.

Από αυτό στο σημείο μπορούμε να συνεχίσουμε με δύο τρόπους:

(**1ος τρόπος**) Παρατηρούμε ότι ΑΙ ⊥ ΚΛ, οπότε $M\widehat{\Lambda}K = 90° - \widehat{A}/2$, και

$$M\widehat{I}\Lambda = M\widehat{K}\Lambda = A\widehat{M}K - M\widehat{\Lambda}K = 2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90° - \widehat{A}/2).$$

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΜΙ με την ΒΓ. Τότε έχουμε

$$Z\widehat{I}\Delta = A\widehat{I}M = A\widehat{I}\Lambda - M\widehat{I}\Lambda = \widehat{\Gamma} - (2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90° - \widehat{A}/2)) = 90° - \widehat{A}/2 - \widehat{\Gamma}.$$

Έτσι $Z\widehat{I}\Delta + I\widehat{\Delta}Z = \left(90° - \widehat{A}/2 - \widehat{\Gamma}\right) + \left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 90°$ και άρα $I\widehat{Z}\Delta = 90°$, όπως θέλαμε.

(**2ος τρόπος**) Έχουμε $M\widehat{K}I = 180° - M\widehat{\Lambda}I = 180° - A\widehat{\Lambda}I = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2} = I\widehat{K}B$, δηλαδή, το Ι είναι παράκεντρο του τριγώνου ΑΚΜ, και άρα η ΜΙ είναι η διχοτόμος της γωνίας $K\widehat{M}\Gamma$. Έτσι, αν Ν είναι το σημείο τομής της ευθείας ΜΚ με την ευθεία ΓΒ, σχηματίζεται το ισοσκελές τρίγωνο ΝΜΓ με $\widehat{N} = A\widehat{M}N - M\widehat{\Gamma}N = A\widehat{M}K - \widehat{\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Gamma} - \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}$.

Αφού η ΜΙ διχοτομεί τη γωνία $N\widehat{M}\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου ΝΜΓ, είναι κάθετη στην ΒΓ.

Σχόλιο. Ένας άλλος τρόπος για τη σχέση $K\widehat{I}A = \widehat{\Gamma}$ είναι ο εξής:

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΔ, βρίσκουμε ΒΚΔ = ΒΔΚ = $90° - \widehat{B}/2 = \widehat{A}/2 + \widehat{\Gamma}/2$.

Επειδή $B\widehat{\Delta}I = \widehat{A}/2 + \widehat{\Gamma}$, έχουμε ότι $I\widehat{\Delta}K = I\widehat{K}\Delta = \widehat{\Gamma}/2$. Άρα $K\widehat{I}A = \widehat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{a, b, c, d}$ έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης**

$$\left(\boldsymbol{a^3+b^3+c^3+d^3}\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^3}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b^3}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c^3}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d^3}}\right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}=1$.

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a=b=c=d$, οπότε

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{e}\right)=16$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1, αν

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=-1 \text{ ή } \frac{b}{c}=\frac{d}{a}=-1,$$

τότε $a=-b$ και $c=-d$ ή $c=-b$ και $d=-a$ οπότε

$$a^3+b^3=0 \text{ και } c^3+d^3=0 \text{ ή } b^3+c^3=0 \text{ και } a^3+d^3=0$$

Επομένως έχουμε $a^3+b^3+c^3+d^3=0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Σε κάθε άλλη υποπερίπτωση, π.χ. αν $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=-1$ και $\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=1$

Παίρνουμε $a^3+b^3=0=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}$ και $c=d$,

Οπότε $(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\right)=2c^3\cdot\frac{2}{c^3}=4.$

Στην τρίτη περίπτωση όπου $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=-1,$

παίρνουμε $a+b=b+c=c+d=d+a=0$, οπότε $a=c$ και $b=d$ και $a^3+b^3=0$ από τις οποίες προκύπτουν οι ισότητες $a^3=c^3$ και $b^3=d^3$, οπότε

$$a^3+b^3+c^3+d^3=2\cdot(a^3+b^3)=0$$

και η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Άρα, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{e}\right)$ είναι το 16, το 4 και το 0.

Πρόβλημα 2. **Ένα πολυώνυμο είναι βαθμού 2024 και έχει ακριβώς 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει;**

Λύση

Αν έχει μόνον έναν μη μηδενικό συντελεστή, τότε το πολυώνυμο είναι της μορφής $P(x)=ax^{2024}$, $a\neq 0$, το οποίο τη μόνο τη ρίζα $x=0$ με πολλαπλότητα 2024. Αν έχει μόνο δύο μη μηδενικούς συντελεστές, τότε το πολυώνυμο είναι είτε της μορφής $P(x)=x^{2024}-c$, το οποίο έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες, είτε της μορφής $P(x)=x^{2024}-cx^k=x^k(x^{2024-k}-c)$, το οποίο έχει μια ρίζα το 0 και το πολύ δύο ακόμη από το $x^{2024-k}-c$. Επομένως, το πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει 2023 μηδενικούς συντελεστές. Αν έχει 2022 μηδενικούς συντελεστές, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο με 4 διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Πράγματι, το πολυώνυμο

$$Q(x)=(x^{1012}-1)(x^{1012}-2)=x^{2024}-3x^{1012}+2,$$

έχει 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες και έχει 2022 μηδενικούς συντελεστές. Προφανώς το πολυώνυμο $Q(x)$ δεν είναι μοναδικό. Άρα το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει το δεδομένο πολυώνυμο είναι 2022.

Πρόβλημα 3. **Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος $\boldsymbol{n}$ τέτοιος, ώστε ο αριθμός**

$$\mathbf{A = 2023 \cdot 10^n + 5,}$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

Έστω $A = 2023 \cdot 10^n + 5 = x^2$ για κάποιο ακέραιο x. Αφού ο αριθμός A λήγει σε 5, είναι περιττός και πολλαπλάσιο του 5. Αναγκαστικά, λοιπόν, και ο αριθμός x θα είναι περιττός και μάλιστα θα λήγει σε 5, δηλ. θα είναι πολλαπλάσιο του 5. Διαφορετικά, αν ο x λήγει σε 1, 3, 7 ή 9, το τετράγωνο του θα λήγει σε 1, 9, 9, ή 1, αντίστοιχα. Σε καμμιά περίπτωση, δηλαδή, δε λήγει σε 5, άτοπο.

(**1ος τρόπος**) Έστω $x = 10y + 5$ για κάποιο θετικό ακέραιο y. Τότε

$$x^2 = (10y+5)^2 = 100y^2 + 100y + 25.$$

Επομένως, ο αριθμός x^2 λήγει σε 25, ενώ ο αριθμός A λήγει σε 35 (αν $n = 1$) ή 05 (αν $n > 1$). Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(**2ος τρόπος**) Έστω $x = 5y$ για κάποιο ακέραιο y. Τότε θα έχουμε $2023 \cdot 10^n + 5 = 25y^2$, ή ισοδύναμα, αφού διαιρέσουμε με το 5, $4046 \cdot 10^{n-1} + 1 = 5y^2$.

Εάν $n = 1$, η τελευταία σχέση δίνει $5y^2 = 4047$, ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του 5.

Εάν $n > 1$, το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι ίσο με (ένα πολ/σιο του 5) $+1$, ενώ το δεξί είναι πολλαπλάσιο του 5, άτοπο. Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. **Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ < ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}} = 60^\circ$. Αν Ι είναι το έγκεντρο του ΑΒΓ, Ο είναι το περίκεντρό του και Ε είναι το μέσο του τόξου ΑΒ του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ που δεν περιέχει το Γ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΙ είναι κάθετη στη χορδή ΒΕ.**

Λύση.

Αφού η ΓΙ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$ και το Ε είναι το μέσο του τόξου ΒΑ, παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε, Ι και Γ είναι συνευθειακά. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = 180^\circ - \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{B} =$$

$$180^\circ - \hat{\mathrm{B}}/2 - \hat{\Gamma}/2 = 90^\circ + \hat{\mathrm{A}}/2 = 120^\circ.$$

Αφού μια επίκεντρη γωνία κύκλου είναι διπλάσια από κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο του κύκλου έχουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 2\hat{\mathrm{A}} = 120^\circ = \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

Άρα ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΙΓ περνάει από το σημείο Ο. οπότε

$$\mathrm{I}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΒΙ με τον περιγεγραμμένο κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το τετράπλευρο ΕΙΟΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού το τόξο ΕΑΓ έχει μέτρο 120°, οπότε

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = 120^\circ = \mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}.$$

Άρα έχουμε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{I} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{I} = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{Z}\mathrm{E}} = \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \mathrm{I}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$,

οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΕΒ με ΟΕ = ΟΒ η ευθεία ΟΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ και συνεπώς θα είναι και ευθεία του ύψους από την κορυφή Ο, δηλαδή η ευθεία ΟΙ είναι κάθετη στη χορδή ΒΕ.

$40^{η}$ Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα,

Αττάλεια Τουρκία 2023

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία έχει την ιδιαίτερη χαρά να ανακοινώσει τη νέα μεγάλη επιτυχία των Ελλήνων μαθητών που συμμετείχαν στην 40η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (BMO), η οποία διοργανώθηκε στην Αττάλεια της Τουρκίας στις 8-13 Μαΐου 2023.
Οι Βαλκανικές Μαθηματικές Ολυμπιάδες είναι ένας σημαντικός θεσμός διεθνούς αναγνώρισης στις οποίες συμμετέχουν ομάδες από χώρες της Νοτιοανατολικής Ευρώπης με παράδοση επιτυχιών σε Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Ευρωπαϊκές χώρες με σημαντικές επιδόσεις στα Μαθηματικά, όπως το Ηνωμένο Βασίλειο, η Γαλλία και η Ιταλία συμμετείχαν επίσης στην 40η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα. Για μια ακόμη χρονιά όλοι οι Έλληνες μαθητές κατάφεραν να διακριθούν σε αυτόν τον ιδιαίτερα δύσκολο και απαιτητικό διαγωνισμό, κατακτώντας 3 Αργυρά και 3 Χάλκινα Μετάλλια, φέρνοντας την Ελληνική ομάδα στη 4η θέση της γενικής κατάταξης ανάμεσα σε 23 χώρες. Συγκεκριμένα:

Λιάμπας Παναγιώτης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Λιγνός Ορέστης	**Εκπαιδευτήρια Ελληνική Παιδεία**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Τζαχρήστας Γεώργιος	**Δωδωναία Εκπαιδευτήρια Ιωαννίνων**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Φωτιάδης Πρόδρομος	**Γυμνάσιο –Λ.Τ. Νικηφόρου Δράμας**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Τσουρεκάς Κυριάκος	**Σχολή Μωραΐτη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Μαυρίκος Ιωάννης	**Πρότυπο ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο μαθηματικός Αλέξανδρος Συγκελάκης και υπαρχηγός ο μαθηματικός Αθανάσιος Μάγκος, που είχαν και την επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων.

Θέματα και Λύσεις

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι $$\mathbf{x f(x + f(y)) = (y - x) f(f(x))}.$$

$1^{η}$ Λύση: Συμβολίζουμε με $P(x,y)$ τη συνθήκη της εκφώνησης. Από την $P(0,1)$ προκύπτει ότι $f\big(f(0)\big) = 0$, ενώ από την $P(x,x)$ έχουμε $xf\big(x+f(x)\big) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τις δύο αυτές συνθήκες συμπεραίνουμε ότι $f\big(x + f(x)\big) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ας είναι τώρα t ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $f(t) = 0$ και ας είναι y τυχαίος πραγματικός αριθμός. Από την $P(t - f(y), y)$ λαμβάνουμε $(y + f(y) - t)f\Big(f\big(t - f(y)\big)\Big) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Θέτοντας σε αυτήν $y = f(0)$ προκύπτει $(f(0) - t)f(0) = 0 \quad (1)$
Δεδομένου ότι ως τέτοιο t μπορούμε να θέσουμε οποιονδήποτε από τους αριθμούς $x + f(x)$, αν ισχύει $x + f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = c - x$, για κάποιον πραγματικό αριθμό c και είναι άμεσο ότι όλες οι συναρτήσεις αυτής της μορφής επαληθεύουν την αρχική συνθήκη. Διαφορετικά, μπορούμε να βρούμε $a \neq 0$, ώστε $a + f(a) \neq f(0)$. Θέτουμε στην (1) $t = a + f(a)$ και προκύπτει $f(0) = 0$. Τότε, η $P(x, 0)$ δίνει $f\big(f(x)\big) = -x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από αυτήν, η $P\big(x, x + f(x)\big)$ δίνει $xf(x) = -f(x)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = 0$ ή $f(x) = -x$.
Ας υποθέσουμε τότε ότι υπάρχει $b \neq 0$, με $f(b) = -b$. Για τον τυχαίο πραγματικό y, από την $P(b, y)$ και την $f\big(f(b)\big) = -f(b) = b$, λαμβάνουμε $bf\big(b + f(y)\big) = (y - b)b$, δηλαδή $f\big(b + f(y)\big) = y - b$ για κάθε y. Αν $y \neq b$, επειδή $y - b \neq 0$, από την τελευταία ισότητα έχουμε

$f\big(b+f(y)\big)=-b-f(y)$, οπότε και $-b-f(y)=y-b$, δηλαδή $f(y)=-y$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$, οπότε καταλήγουμε σε λύση που έχουμε ήδη βρει. Αν λοιπόν δεν υπάρχει τέτοιο b, τότε πρέπει να ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η οποία επίσης επαληθεύει την αρχική συνθήκη.

Τελικά, οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι: $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=c-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2η Λύση: Θα δείξουμε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=c-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αρχικά, δεν είναι δύσκολο να ελεγχθεί ότι οι παραπάνω ικανοποιούν την εξίσωση. Γράφουμε $P(x,y)$ για την πρόταση $xf(x+f(y))=(y-x)f\big(f(x)\big)$.

Η $P(0,1)$ δίνει $f\big(f(0)\big)=0$. Η $P(x,x)$ δίνει $xf\big(x+f(x)\big)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f\big(x+f(x)\big)=0$ για κάθε $x\neq 0$. Όμως $f\big(x+f(x)\big)=0$ και για $x=0$, άρα $f\big(x+f(x)\big)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Περίπτωση 1: Υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ ώστε $f\big(f(a)\big)\neq 0$.

Τότε η f είναι 1 - 1. Πράγματι, αν $f(y_1)=f(y_2)$ τότε οι $P(a,y_1)$ και $P(a,y_2)$ δίνουν

$$y_1=\frac{af\big(a+f(y_1)\big)}{f\big(f(a)\big)}+a=\frac{af\big(a+f(y_2)\big)}{f\big(f(a)\big)}+a=y_2$$

Αφού η f είναι 1 - 1 τότε από της $f\big(x+f(x)\big)=0=f\big(f(0)\big)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ παίρνουμε $x+f(x)=f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θέτοντας $c=f(0)$ παίρνουμε $f(x)=c-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

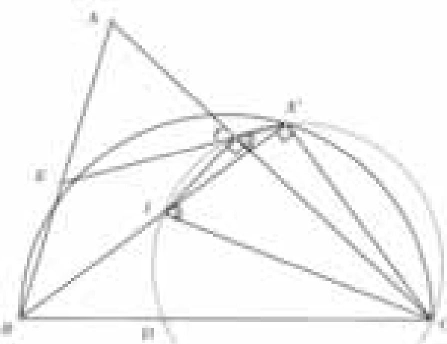
Περίπτωση 2: Έχουμε $f\big(f(x)\big)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε η $P\big(x,f(0)\big)$ δίνει $xf(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$. Επίσης, αφού $f\big(f(x)\big)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για $x=0$ και $x=f(0)$ παίρνουμε $0=f\big(f(0)\big)\Rightarrow f(0)=f\Big(f\big(f(0)\big)\Big)=0$

Άρα $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

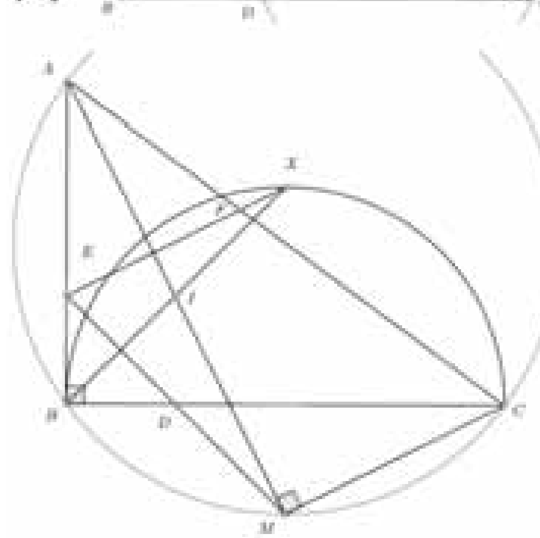
Δίνεται τρίγωνο ABC, του οποίου ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στις πλευρές BC, CA, AB στα σημεία D, E, F αντίστοιχα. Δίνεται επιπλέον ότι υπάρχει σημείο X στην ευθεία EF τέτοιο, ώστε $\angle XBC=\angle XCB=45^\circ$.

Έστω M το μέσο του τόξου BC του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC το οποίο δεν περιέχει το σημείο A. Να αποδείξετε ότι η ευθεία MD διέρχεται από το σημείο E ή από το σημείο F.



Απόδειξη: Θα αποδείξουμε και θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα: Έστω τρίγωνο ABC του οποίου ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στις πλευρές BC, CA, AB στα σημεία D, E, F αντίστοιχα. Αν I το έγκεντρο του τριγώνου, τότε οι EF και BI τέμνονται στον κύκλο με διάμετρο BC.



Απόδειξη Λήμματος: Έστω X′ το σημείο τομής των EF και BI. Έχουμε $\widehat{CFX'}=\widehat{AFE}=\frac{180^o-\hat{A}}{2}$ και $\widehat{CIX'}=\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{180^o-\hat{A}}{2}=\widehat{CFX'}$

Άρα το τετράπλευρο CIFX′ είναι εγγράψιμο.

Τότε έχουμε $\widehat{IX'C}=\widehat{IFC}=90^\circ$ οπότε όντως το X′ ανήκει στον κύκλο με διάμετρο BC. □

Αφού $\widehat{BXC}=90^\circ$, το X ανήκει στον κύκλο με διάμετρο BC. Αφού επίσης το X ανήκει στην EF, τότε από το λήμμα πρέπει να έχουμε $X=EF\cap BI$

ή $X = EF \cap CI$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $X = EF \cap BI$.
Τότε η BX είναι διχοτόμος της γωνίας B και συνεπώς πρέπει $\widehat{B} = 90°$. Επειδή το M είναι επίσης το άλλο σημείο τομής της AI με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC, τότε $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 90°$. Πάλι από το λήμμα, ξέρουμε ότι οι DE και AI τέμνονται πάνω στον κύκλο με διάμετρο AC. Το σημείο τομής τους είναι το δεύτερο σημείο τομής της AI με τον κύκλο διαμέτρου AC, δηλαδή το M. Άρα τα D, E, M είναι συνευθειακά όπως θέλαμε να αποδείξουμε.

Πρόβλημα 3

Για κάθε θετικό ακέραιο n, συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n (για παράδειγμα, $\omega(1) = 0$ και $\omega(12) = 2$). Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές τέτοια, ώστε όταν ο n είναι θετικός ακέραιος με $\omega(n) > 2023^{2023}$, τότε ο $P(n)$ είναι επίσης θετικός ακέραιος με $\omega(n) > \omega\big(P(n)\big)$.

Λύση: Προφανώς τα πολυώνυμα $P(x) = x^m$ για m θετικό ακέραιο, καθώς και τα σταθερά πολυώνυμα $P(x) = k$ με k θετικό ακέραιο τέτοιο ώστε $\omega(k) \leq 2023^{2023} + 1$ ικανοποιούν τη συνθήκη. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλα πολυώνυμα. Γράφουμε $P(x) = x^m Q(x)$ όπου m μη αρνητικός ακέραιος και $Q(x)$ πολυώνυμο με $Q(0) \neq 0$ και θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα του Schur:

Λήμμα: Έστω μη σταθερό πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές. Τότε το σύνολο των πρώτων p που διαιρούν τουλάχιστον έναν μη μηδενικό αριθμό από τους $f(1), f(2), f(3), \ldots$, είναι άπειρο.

Απόδειξη Λήμματος: Γράφουμε $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$

Αν $a_0 = 0$, τότε $p \mid f(p)$ για κάθε πρώτο p. Επίσης για άπειρους πρώτους p θα έχουμε $f(p) \neq 0$ οπότε το ζητούμενο έπεται. Αν $a_0 \neq 0$, τότε θεωρούμε το πολυώνυμο

$$g(x) = \frac{f(a_0 x)}{a_0} = 1 + a_1 x + a_0 a_2 x + \cdots + a_0^{k-1} a_k x^k$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι p ώστε $p \mid g(n)$ για κάποιον θετικό ακέραιο n με $g(n) \neq 0$. Έστω προς άτοπο ότι μόνο για τους $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ισχύει το ζητούμενο. Θέτουμε $n = Np_1 p_2 \cdots p_r$, όπου N αρκετά μεγάλος ώστε $|g(n)| > 1$. Τότε υπάρχει πρώτος p ώστε $p \mid g(n)$. Αλλά $g(n) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p_i)$ για κάθε i, άρα $p \neq p_i$ για κάθε i, άτοπο. □

Θέτουμε $M = 2023^{2023} + 1$. Από το παραπάνω λήμμα, μπορούμε να βρούμε πρώτους $p_1, \ldots, p_{M+1}$ και θετικούς ακεραίους $n_1, \ldots, n_{M+1}$ ώστε για κάθε $1 \leq i \leq M$ να ισχύει ότι $p_i > |Q(0)|$ και $p_i \mid Q(n_i)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq M$ ισχύει επίσης ότι $p_i \nmid n_i$ αφού αν είχαμε $p_i \mid n_i$ τότε από την $p_i \mid Q(n_i)$ θα είχαμε επίσης ότι $p_i \mid Q(0)$ που είναι άτοπο.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θεώρημα Dirichlet:

Θεώρημα Dirichlet: Αν a, d πρώτοι μεταξύ τους, τότε υπάρχουν άπειροι πρώτοι p ώστε $p \equiv a (\mathrm{mod}\, d)$. Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι προχωρημένης δυσκολίας και παραλείπεται.

Από το Θεώρημα Dirichlet, υπάρχουν άπειροι πρώτοι q με $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p_1 \cdots p_{M+1})$. Έστω $q_1, q_2, \ldots, q_{M-1}$ διακεκριμένοι πρώτοι με την παραπάνω ιδιότητα.

Από το Κινέζικο Θεώρημα μαζί με το Θεώρημα Dirichlet μπορούμε επίσης να βρούμε ακόμη έναν πρώτο q διαφορετικό από τους $q_1, \ldots, q_{M-1}$ ώστε $q \equiv n_i (\mathrm{mod}\, q_i)$ για κάθε i.

Θέτουμε $n = qq_1 \cdots q_{M-1}$ και παρατηρούμε ότι $n \equiv n_i (\mathrm{mod}\, q_i)$ για κάθε i.

Τότε έχουμε $\omega\big(P(n)\big) \geq \omega\big(Q(n)\big) \geq M + 1 > M = \omega(n)$ το οποίο είναι άτοπο.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το $Q(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο και άρα $P(x) = kx^m$ για κάποιον ακέραιο k. Πρέπει $k \geq 1$ αφού σε διαφορετική περίπτωση ο $P(n)$ είναι πάντα μη αρνητικός ακέραιος και παίρνοντας n ώστε $\omega(n) > 2023^{2023}$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $m = 0$ τότε $P(x) = k$ και πρέπει $\omega(k) \leq 2023^{2023} + 1$ αλλιώς καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας n με $\omega(n) = 2023^{2023} + 1$.

Αν τέλος $m \geq 1$ τότε πρέπει $k = 1$ αφού αλλιώς πάλι καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας n σχετικά πρώτο ως προς το k με $\omega(n) > 2023^{2023}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τον μέγιστο ακέραιο $\mathbf{k \leq 2023}$ για τον οποίο ισχύει το εξής: Οποτεδήποτε η Αλίκη χρωματίσει κόκκινους, k ακριβώς αριθμούς από το σύνολο $\mathbf{\{1,2,\dots,2023\}}$, ο Βασίλης μπορεί να χρωματίσει μπλε, κάποιους από τους υπόλοιπους αχρωμάτιστους αριθμούς έτσι, ώστε το άθροισμα όλων των κόκκινων αριθμών να είναι ίσο με το άθροισμα όλων των μπλε αριθμών.

Λύση: Η απάντηση είναι 592. Για $k \geq 593$, η Αλίκη μπορεί να χρωματίσει τους 593 αριθμούς 1431, 1432,…,2023 και οποιουσδήποτε άλλους $(k-593)$ αριθμούς ώστε το άθροισμά τους S να ικανοποιεί τη σχέση $S \geq \frac{2023\cdot2024}{2} - \frac{1430\cdot1431}{2} > \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2023\cdot2024}{2}\right)$,
κι έτσι όπως και να επιλέξει ο Βασίλης τα νούμερά του, το άθροισμά τους θα είναι μικρότερο από εκείνο της Αλίκης.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο αριθμός $k = 592$ ικανοποιεί τη συνθήκη. Έστω S το άθροισμα των 592 αριθμών της Αλίκης (ας σημειωθεί ότι $S < \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2023\cdot2024}{2}\right)$). Παρακάτω βρίσκεται η στρατηγική του Βασίλη για να βρει κάποιους από τους υπόλοιπους 1431 αριθμούς ώστε το άθροισμά τους να είναι $S_0 = \min\left\{S, \frac{2023\cdot2024}{2} - 2S\right\} \leq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2023\cdot2024}{2}\right)$

(Είναι φανερό ότι αν ο Βασίλης βρει μερικούς αριθμούς των οποίων το άθροισμα είναι $\frac{2023\cdot2024}{2} - 2S$, τότε το άθροισμα των υπόλοιπων αριθμών θα είναι S).

Περίπτωση 1: $S_0 \geq 2024$. Έστω $S_0 = 2024a + b$, όπου $0 \leq b \leq 2023$. Ο Βασίλης βρίσκει δύο από τους υπόλοιπους αριθμούς με άθροισμα b ή $2024 + b$ και έπειτα βρίσκει α (ή $\alpha - 1$) ζεύγη μεταξύ των υπόλοιπων αριθμών με άθροισμα 2024.

Ας σημειωθεί ότι $\alpha \leq 337$ καθώς $S_0 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2023\cdot2024}{2}\right)$.

Τα $\left\lfloor\frac{b-1}{2}\right\rfloor$ ζεύγη $(1, b-1), (2, b-2), \dots, \left(\left\lfloor\frac{b-1}{2}\right\rfloor, b - \left\lfloor\frac{b-1}{2}\right\rfloor\right)$ έχουν άθροισμα συντεταγμένων ίσο με b και τα $\left\lfloor\frac{2023+b}{2}\right\rfloor - b$ ζεύγη $(2023, b+1), (2022, b+2), \dots, \left(2024 + b - \left\lfloor\frac{2023+b}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{2023+b}{2}\right\rfloor\right)$ έχουν άθροισμα συντεταγμένων ίσο με $2024 + b$. Το πλήθος αυτών των ζευγών είναι ίσο με

$$\left\lfloor\frac{2023+b}{2}\right\rfloor - b + \left\lfloor\frac{b-1}{2}\right\rfloor \geq \frac{2022+b}{2} + \frac{b-2}{2} - b = \frac{2020}{2} = 1010 > 592,$$

συνεπώς μερικά από αυτά τα ζεύγη δεν έχουν χρωματισμένη κόκκινη κάποια από τις συντεταγμένες τους, άρα ο Βασίλης μπορεί να επιλέξει ένα από αυτά τα ζεύγη και να χρωματίσει μπλε τις συντεταγμένες του. Έτσι, έχουν χρωματιστεί 594 αριθμοί μέχρι στιγμής. Επιπλέον τα 1011 ζεύγη $(1,2023), (2,2022), \dots, (1011,1013)$ έχουν άθροισμα συντεταγμένων ίσο με 2024. Μεταξύ αυτών, τουλάχιστον $1011 - 594 = 417 > 337 \geq \alpha$ ζεύγη δεν έχουν καμία από τις συντεταγμένες τους χρωματισμένη, συνεπώς ο Βασίλης μπορεί να επιλέξει α (ή $\alpha - 1$) μη χρωματισμένα ζεύγη και να τα χρωματίσει όλα μπλε ώστε να επιτύχει ένα σύνολο χρωματισμένων μπλε αριθμών των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με S_0.

Περίπτωση 2: $S_0 \leq 2023$. Ας σημειωθεί ότι $S \geq 1 + 2 + \dots + 592 > 2023$, άρα έχουμε:

$$S_0 = \frac{2023\cdot2024}{2} - 2S, \text{ δηλαδή } S = \frac{2023\cdot2024}{4} - \frac{S_0}{2}.$$

Αν $S_0 > 2\cdot593$, τότε τουλάχιστον ένα από τα 593 ζεύγη

$$(1, S_0 - 1), (2, S_0 - 2), \dots, (593, S_0 - 593)$$

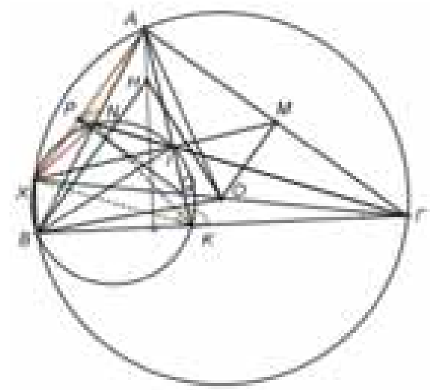
δεν έχουν καμία από τις συντεταγμένες τους χρωματισμένη κόκκινη, άρα ο Βασίλης μπορεί να επιλέξει αυτούς τους δύο αριθμούς και να επιτύχει άθροισμα s_0. Αν $S_0 \leq 2\cdot593$, τότε:

$$S = \frac{2023\cdot2024}{4} - \frac{S_0}{2} \geq (1432 + 1433 + \dots + 2023) - 593 = 839 + (1433 + 1434 + \dots + 2023)$$

και έτσι η Αλίκη δε θα μπορούσε να έχει χρωματίσει οποιονδήποτε από τους αριθμούς 1,2, …,838. Τότε ο Βασίλης μπορεί εύκολα να επιλέξει ένα ή δύο από αυτούς τους αριθμούς που να έχουν άθροισμα S_0.

Οι Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 129

Γ64. Δίνεται οξυγώνιο μη ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι διχοτόμοι του $ΑΚ$ και $ΓΝ$ που τέμνονται στο $Ι$. Έστω ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΚΒΝ$ τέμνονται για δεύτερη φορά στο σημείο $Χ$. Αν $Μ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ$, να αποδείξετε ότι η ευθεία Euler του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι κάθετη προς την ευθεία $ΒΙ$, αν, και μόνον αν, τα σημεία $Χ$, $Ι$ και $Μ$ είναι συνευθειακά.



Λύση (Ορέστης Λιγνός). Αποδεικνύουμε τα εξής Λήμματα:

Λήμμα 1: Έστω τα μη συνευθειακά σημεία $N, K, A, Γ$ και X σημείο του επιπέδου, ώστε τα τρίγωνα XNA και $XKΓ$ να είναι όμοια (με αυτόν τον προσανατολισμό), όπως στο σχήμα. Τότε, αν οι ευθείες AK και $NΓ$ τέμνονται στο I και M το μέσον της $AΓ$, ισχύει η ισοδυναμία: το τετράπλευρο $XNIK$ είναι εγγράψιμο $\Leftrightarrow$ τα σημεία X, I, M είναι συνευθειακά.

Απόδειξη: Έστω ότι το σχήμα είναι όπως πιο κάτω. Έστω ότι η $ΓN$ τέμνει την XA στο P και η AK τέμνει την $XΓ$ στο Q.

Ευθύ: Έστω ότι το τετράπλευρο $XNIK$ είναι εγγράψιμο. Τότε, ισχύει ότι $X\hat{N}P = X\hat{K}Q$, και αφού τα τρίγωνα XNA και $XKΓ$ είναι όμοια, έχουμε ότι και τα τρίγωνα XNP και XKQ είναι όμοια, οπότε $\frac{XP}{XA} = \frac{XP/XN}{XA/XN} = \frac{XQ/XK}{XΓ/XK} = \frac{XQ}{XΓ}$, και άρα από το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή προκύπτει ότι $PQ \parallel AΓ$. Επομένως, από το θεώρημα του Ceva στο τρίγωνο $XAΓ$ συνάγουμε ότι η XI περνά από το μέσον της $AΓ$, όπως θέλαμε.

Αντίστροφο: Έστω ότι τα σημεία X, I, M είναι συνευθειακά. Από το αντίστροφο του θεωρήματος Ceva στο τρίγωνο $XAΓ$ προκύπτει ότι $PQ \parallel AΓ$, και άρα από τις πιο πάνω ισότητες λόγων προκύπτει ότι τα τρίγωνα XNP και XKQ είναι όμοια, το οποίο σημαίνει ότι το τετράπλευρο $XNIK$ είναι εγγράψιμο, όπως θέλαμε.

Λήμμα 2: Έστω τρίγωνο $ABΓ$, I, το σημείο τομής των διχοτόμων του και $AK, ΓN$ διχοτόμοι. Τότε, ισχύει η ισοδυναμία: η ευθεία Euler του τριγώνου $ABΓ$ είναι κάθετη στην ευθεία BI $\Leftrightarrow$ το τετράπλευρο $XNIK$ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ότι και οι δύο προτάσεις ισοδυναμούν με την συνθήκη $\hat{B} = 60^0$.

Πρώτη Ισοδυναμία: Αν $\hat{B} = 60^0$, τότε, αν O και H το περίκεντρο και το ορθόκεντρο, αντίστοιχα. του $ABΓ$, είναι $BH = 2 \cdot OM = BO$ καθώς $A\hat{O}M = \hat{B} = 60^0$ οπότε $O\hat{A}M = 30^0$. Συνεπώς, $BH = BO$, άρα η διχοτόμος της γωνίας B, που είναι και διχοτόμος της γωνίας $H\hat{B}O$ (λόγω ισογωνιότητας), είναι κάθετη στην ευθεία Euler .

Αντίστροφα, αν η ευθεία Euler είναι κάθετη στην ευθεία BI , τότε δουλεύοντας αντίστροφα προκύπτει ότι $BH = BO$ και από εδώ ότι $\hat{B} = 60^0$.

Δεύτερη Ισοδυναμία: Αν $\hat{B} = 60^0$, τότε $N\hat{I}K = A\hat{I}Γ = 90^0 + \frac{\hat{B}}{2} = 120^0 = 180^0 - N\hat{B}K$, συνεπώς το τετράπλευρο $BNIK$ είναι εγγράψιμο, και αφού και το $BNKX$ είναι εγγράψιμο, έπεται ότι το $XNIK$ είναι εγγράψιμο.

Αντίστροφα, αν το $XNIK$ είναι εγγράψιμο, τότε προκύπτει ότι το $BNIK$ είναι εγγράψιμο, άρα δουλεύοντας όπως πριν προκύπτει ότι $\hat{B} = 60^0$.

Πίσω στο πρόβλημα μας, τα τρίγωνα XNA και $XKΓ$ είναι όμοια, αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες: $X\hat{A}N = X\hat{Γ}B$ και $X\hat{N}A = 180^0 - X\hat{N}B = 180^0 - X\hat{K}B = X\hat{K}Γ$.

Επομένως, από τα Λήμματα 1 και 2 έχουμε τις εξής ισοδυναμίες: η ευθεία Euler είναι κάθετη στην $BI \Leftrightarrow$ το τετράπλευρο $XNIK$ είναι εγγράψιμο $\Leftrightarrow$ τα σημεία X, I, M είναι συνευθειακά, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

N55. Να βρείτε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο n ο οποίος έχει ακριβώς τέσσερις θετικούς ακέραιους διαιρέτες (μαζί με τους 1 και n), των οποίων το άθροισμα S είναι τέτοιο ώστε $40 \le S \le 42$.

Λύση

Ο θετικός ακέραιος n μπορεί να έχει ένα πρώτο διαιρέτη p ή δύο πρώτους διαιρέτες $p, q,\ p < q$. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $n = p^3$ με διαιρέτες τους $1, p, p^2$ και p^3. Τότε έχουμε την εξίσωση:

$$1 + p + p^2 + p^3 = a, a \in \{40, 41, 42\} \Leftrightarrow (1 + p)(1 + p^2) = a, a \in \{40, 41, 42\}$$

Επειδή $3 \le 1 + p < 1 + p^2$, αν $a = 41$ πρώτος η εξίσωση $(1 + p)(1 + p^2) = a = 41$ είναι αδύνατη.
Αν $a = 40$, τότε η εξίσωση $(1 + p)(1 + p^2) = a = 40$ είναι ισοδύναμη με τα συστήματα:

$$1 + p = 4, 1 + p^2 = 10 \text{ ή } 1 + p = 5, 1 + p^2 = 8,$$

από τα οποία προκύπτει η λύση $p = 3$, οπότε $n = p^3 = 27$.
Αν $a = 42$, τότε η εξίσωση $(1 + p)(1 + p^2) = a = 42$ είναι ισοδύναμη με τα συστήματα:

$$1 + p = 3,\ 1 + p^2 = 14 \text{ ή } 1 + p = 6,\ 1 + p^2 = 7,$$

από τα οποία δεν προκύπτει λύση.

2. $1 < p < q < pq = n^2, p, q$ πρώτοι. Τότε έχουμε την εξίσωση:

$$(1 + p)(1 + q) = a, a \in \{40, 41, 42\}.$$

Επειδή $3 \le 1 + p < 1 + q$, αν $a = 41$ πρώτος η εξίσωση $(1 + p)(1 + q) = a = 41$ είναι αδύνατη. Αν$a = 40$, τότε η εξίσωση $(1 + p)(1 + q) = a = 40$ είναι ισοδύναμη με τα συστήματα: $1 + p = 4, 1 + q = 10$ ή $1 + p = 5, 1 + q = 8$,
από τα οποία προκύπτει η λύση $p = 3, q = 9$, οπότε $n = pq = 27$.
Αν $a = 42$, τότε η εξίσωση $(1 + p)(1 + q) = a = 42$ είναι ισοδύναμη με τα συστήματα:

$$1 + p = 3,\ 1 + q = 14 \text{ ή } 1 + p = 6,\ 1 + q = 7,$$

από τα οποία προκύπτει η λύση $p = 2, q = 13$, οπότε $n = 26$.
Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n είναι το 27.

A78. Έστω ν ένας θετικός ακέραιος. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να εκφράσουμε κάθε θετικό ρητό αριθμό στη μορφή $\frac{\alpha^\nu + \beta^{\nu+2}}{\gamma^{\nu+1} + \delta^{\nu+3}}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί ακέραιοι.

ΜΟ Ρουμανίας, 2022

Λύση

Θεωρούμε το θετικό ρητό αριθμό $\frac{p}{q}$ και αναζητάμε θετικούς ακέραιους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ της μορφής

$$\alpha = p^{\mu_0} q^{\nu_0}, \beta = p^{\mu_2} q^{\nu_2}, \gamma = p^{\mu_1} q^{\nu_1}, \delta = p^{\mu_3} q^{\nu_3},$$

όπου οι αριθμοί $\mu_\kappa, \nu_\kappa, \kappa = 0,1,2,3$ είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε:

$$\nu\mu_0 - (\nu + 1)\mu_1 = 1, \quad (\nu + 1)\nu_1 - \nu\nu_0 = 1,$$
$$(\nu + 2)\mu_2 - (\nu + 3)\mu_3 = 1, \quad (\nu + 3)\nu_3 - (\nu + 2)\nu_2 = 1.$$

Σημειώνουμε ότι τέτοιοι αριθμοί $\mu_\kappa, \nu_\kappa, \kappa = 0,1,2,3$ υπάρχουν, γιατί οι παραπάνω Διοφαντικές εξισώσεις έχουν ακέραιες λύσεις, αφού $(\nu, \nu + 1) = 1$ και $(\nu + 2, \nu + 3) = 1$.
Με την παραπάνω επιλογή των αριθμών $\mu_\kappa, \nu_\kappa, \kappa = 0,1,2,3$, έχουμε:

$$\frac{\alpha^\nu + \beta^{\nu+2}}{\gamma^{\nu+1} + \delta^{\nu+3}} = \frac{p^{\nu\mu_0} q^{\nu\nu_0} + p^{(\nu+2)\mu_2} q^{(\nu+2)\nu_2}}{p^{(\nu+1)\mu_1} q^{(\nu+1)\nu_1} + p^{(\nu+3)\mu_3} q^{(\nu+3)\nu_3}} =$$

$$\frac{p^{1+(\nu+1)\mu_1} q^{\nu\nu_0} + p^{1+(\nu+3)\mu_3} q^{(\nu+2)\nu_2}}{p^{(\nu+1)\mu_1} q^{1+\nu\nu_0} + p^{(\nu+3)\mu_3} q^{1+(\nu+2)\nu_2}} = \frac{p\left[p^{(\nu+1)\mu_1} q^{\nu\nu_0} + p^{(\nu+3)\mu_3} q^{(\nu+2)\nu_2}\right]}{q\left[p^{(\nu+1)\mu_1} q^{\nu\nu_0} + p^{(\nu+3)\mu_3} q^{(\nu+2)\nu_2}\right]} = \frac{p}{q}.$$

Ασκήσεις για λύση

A79. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ικανοποιούν την ισότητα

$$f\big(f(x)\big) + yf(x) \le x + xf\big(f(y)\big), \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Γ65. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ., τέτοιο ώστε τα σημεία Α, Η, Ι και Γ να είναι ομοκυκλικά, όπου Η και Ι το ορθόκεντρό του και το έκκεντρό του, αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΗΓ στο σημείο Τ και η ευθεία ΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΗΓ στο σημείο Ρ. Αν οι ευθείες ΡΤ και ΗΙ είναι παράλληλες, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

προλεγόμενα ***ένας καλός φίλος, μας έστειλε ένα κείμενο με αναφορά στην εξέλιξη της επιστήμης των Μαθηματικών. Το κείμενο αυτό έχει μια ιδιαίτερη αξία γιατί φέρει την υπογραφή ενός από τους "ημίθεους" των Μαθηματικών, του 20ού αιώνα, του Α.Ν. Κολμογκόροφ***

Μαθηματικά:

(προέλευση ελληνική: από το ***«μάθημα»=γνώση, επιστήμη***). *Επιστήμη των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου του πραγματικού κόσμου.*

«Τα καθαρά Μαθηματικά έχουν για αντικείμενό τους τις **μορφές του χώρου** και τις ποσοτικές σχέσεις του πραγματικού κόσμου, κατά συνέπεια – παντελώς ρεαλιστικό υλικό. Το γεγονός ότι το υλικό αυτό αποκτά εξαιρετικά **αφηρημένη μορφή**, μπορεί μόνο ελαφρώς να επισκιάσει την προέλευσή του από τον πραγματικό κόσμο. Για να είμαστε όμως σε θέση να μελετήσουμε τις μορφές και τις σχέσεις αυτές σε καθαρή μορφή, είναι αναγκαίο τελείως να διαχωριστούν από το περιεχόμενό τους, να μπει στην άκρη σαν κάτι αδιάφορο»

Η αφηρημένη εικόνα των Μαθηματικών εντούτοις δεν σημαίνει απόσπασή τους από την υλική πραγματικότητα. Σε αδιάσπαστη σύνδεση με τις αναζητήσεις της τεχνολογίας και της φυσιογνωσίας το απόθεμα των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου που μελετούν τα Μαθηματικά συνεχώς πλαταίνει, με αποτέλεσμα ο παραπάνω ορισμός των Μαθηματικών να γεμίζει με όλο και πιο πλούσιο περιεχόμενο.

Τα Μαθηματικά και οι άλλες επιστήμες

Οι εφαρμογές των Μαθηματικών είναι εξαιρετικά πολύμορφες. Από την αρχή το πεδίο των μαθηματικών μεθόδων είναι απεριόριστο: όλα τα είδη της κίνησης της ύλης μπορούν να μελετηθούν με μαθηματικό τρόπο. Όμως ο ρόλος και η σημασία της μαθηματικής μεθόδου διαφέρουν κατά περίπτωση.

Τυπικό παράδειγμα πλήρους κυριαρχίας της μαθηματικής μεθόδου αποτελεί η Ουράνια Μηχανική, ειδικότερα η διδασκαλία για την κίνηση των πλανητών.

Ιστορία των Μαθηματικών μέχρι το 19ο αιώνα

Στην προτεινόμενη στη συνέχεια περιοδοποίηση των Μαθηματικών δίνεται μόνο ο καθολικός χαρακτηρισμός τους, που αφορά τα πρώιμα στάδια στην Ευρώπη, την Ασία και τη Βόρεια Αφρική, και δεν παίρνει υπ' όψη ούτε τις περιφερειακές ιδιαιτερότητες, που ορισμένες φορές είναι αρκετά ουσιαστικές, ούτε τη συχνά εμφανιζόμενη έλλειψη συγχρονισμού της προόδου των μαθηματικών γνώσεων στις διάφορες περιφέρειες και χώρες.

Σαφή κατανόηση της αυτοτελούς θέσης των Μαθηματικών, ως ειδικής επιστήμης που έχει δικό της αντικείμενο και μέθοδο, έγινε δυνατή μόνο μετά από συσσώρευση αρκετά μεγάλου χειροπιαστού υλικού και εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην Αρχαία Ελλάδα στον 6^{ο} και 5^{ο} πΧ αιώνα. Η ανάπτυξη των Μαθηματικών μέχρι αυτούς τους χρόνους είναι φυσικό να καταταχθεί στην ***περίοδο της γέννησης των Μαθηματικών***, ενώ στον 6^{ο} και 5^{ο} πΧ αιώνα να συμπεριληφθεί η αρχή της ***περιόδου των στοιχειωδών Μαθηματικών***, που συνεχίζεται μέχρι τον 16^{ο} μΧ, αιώνα. Στη διάρκεια αυτών των δύο πρώτων περιόδων οι μαθηματικές μελέτες έχουν να κάνουν κυρίως με πολύ περιορισμένο απόθεμα βασικών εννοιών, που είχαν εμφανιστεί ακόμη στα πρώιμα στάδια της ιστορικής ανάπτυξης σε σχέση με τις πιο απλές απαιτήσεις της οικονομικής ζωής

Τα πρώτα προβλήματα της **Μηχανικής και Φυσικής** με εξαίρεση μεμονωμένων μελετών του Αρχιμήδη (3^{ος} αιώνας πΧ), που απαιτούσαν τις πρώτες μορφές του λογισμού των απείρως ελαχίστων, μπορούσαν ακόμη να ικανοποιούνται από το ίδιο απόθεμα των βασικών μαθηματικών εννοιών. Μοναδική επιστήμη, η οποία πολύ νωρίτερα από την πλατειά ανάπτυξη της μαθηματικής μελέτης των φαινομένων της φύσης στον 17^{ο} και 18^{ο} αιώνα πρόβαλε συστηματικά στα Μαθηματικά τις δικές της ιδιαίτερες και πολύ μεγάλες απαιτήσεις της, ήταν η **Αστρονομία**, που εξολοκλήρου καθόρισε, για παράδειγμα, την πρώιμη ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας.

Τον 17^{ο} αιώνα οι νέες απαιτήσεις της φυσιογνωσίας και της τεχνολογίας αναγκάζουν τους μαθηματικούς να συγκεντρώσουν όλη την προσοχή τους στη δημιουργία μεθόδων που επιτρέπουν με μαθηματικό τρόπο να μελετηθούν η κίνηση, οι διαδικασίες μεταβολής των μεγεθών, οι μετασχηματισμοί των γεωμετρικών σχημάτων (κατά την παραβολή κ.ο.κ.). Από τη χρήση των μεταβλητών μεγεθών στην **Αναλυτική Γεωμετρία του Ρ. Ντεκάρτ** και τη δημιουργία του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού αρχίζει η ***περίοδος των Μαθηματικών των μεταβλητών μεγεθών***.

Η παραπέρα επέκταση του κύκλου των ποσοτικών σχέσεων και μορφών του χώρου, που μελετάνε τα Μαθηματικά, οδήγησε στις αρχές του 19^{ου} αιώνα στην ανάγκη να αντιμετωπίζεται συνειδητοποιημένα η διαδικασία επέκτασης του αντικειμένου ων μαθηματικών ερευνών, θέτοντας μπροστά το πρόβλημα για συστηματική μελέτη από μια γενική σκοπιά των δυνατών τύπων των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου.

Η δημιουργία από τον **Ν.Ι. Λομπατσέφσκι** της «***φαντασιώδους γεωμετρίας***» του, που στη συνέχεια απόχτησε καθ' όλα πραγματικές εφαρμογές, ήταν το πρώτο σημαντικό βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Η ανάπτυξη αυτού του είδους των μελετών εισήγαγε στη δομή των Μαθηματικών τόσο σημαντικά χαρακτηριστικά, ώστε τα Μαθηματικά του 19^{ου} και 20^{ου} αιώνα είναι φυσικό να καταταχθούν στην ***περίοδο των σύγχρονων Μαθηματικών***. Ο καθολικός αυτός χαρακτηρισμός των τεσσάρων βασικών περιόδων θα συμπληρωθεί στην παραπέρα έκθεση

Σύγχρονα Μαθηματικά: Διεύρυνση του αντικειμένου ων Μαθηματικών

Το τεράστιο, συσσωρευμένο, κατατεθειμένο υλικό οδήγησε στην αναγκαιότητα για εμβάθυνση στη λογική ανάλυση και τη συνένωσή του από νέες σκοπιές.

Η σύνδεση των Μαθηματικών με την φυσιογνωσία, εξακολουθώντας στην ουσία να είναι όχι λιγότερο στενή, αποχτά τώρα πιο πολύπλοκες μορφές. Νέες μεγάλες θεωρίες εμφανίζονται, όχι μόνο σαν αποτέλεσμα άμεσων απαιτήσεων της Φυσιογνωσίας και της Τεχνολογίας, αλλά επίσης και από τις εσωτερικές ανάγκες των ίδιων των Μαθηματικών. Τέτοια κατά βάση ήταν η ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής, που κατείχε στις αρχές και τα μέσα του 19^{ου} αιώνα κεντρική θέση σε όλη τη μαθηματική ανάλυση.

Ακόμα πιο αξιοσημείωτο παράδειγμα θεωρίας, που εμφανίστηκε ως αποτέλεσμα ανάπτυξης των ίδιων των Μαθηματικών, αποτέλεσε η «***φαντασιώδης γεωμετρία***» του Λομπατσέφσκι. Τη δυνατότητα του νέου αυτού συστήματος γεωμετρίας είχε διανοηθεί ο Λομπατσέφσκι στη βάση της αποσαφήνισης της προέλευσης των βασικών γεωμετρικών εννοιών από την υλική πραγματικότητα και τη λογική ανάλυση της συνήθους Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο ίδιος ο Λομπατσέφσκι κατάφερε να εφαρμόσει τη γεωμετρία του μόνο για τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων. Αργότερα ανακαλύφθηκαν οι σχέσεις της Γεωμετρίας του με τη **Θεωρία των επιφανειών** και με τη **Θεωρία ομάδων μετασχηματισμών**. Η γεωμετρία αυτή βρήκε εφαρμογή στη μελέτη σπουδαίων κλάσεων **αναλυτικών συναρτήσεων** κτλ.

Μόνο στον 20^{ο} αιώνα, με τη δημιουργία της θεωρίας της σχετικότητας, πραγματοποιήθηκε η υπόθεση του Ν.Ι. Λομπατσέφσκι για τη δυνατότητα εφαρμογής των γεωμετρικών ιδεών του στη μελέτη του πραγματικού φυσικού χώρου.

Ο ουσιαστικός νεωτερισμός, της φάσης ανάπτυξης των Μαθηματικών που ξεκίνησε με τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, συνίσταται ότι τα ζητήματα αναγκαιότητας επέκτασης του κύκλου των υποκείμενων στη μελέτη ποσοτικών σχέσεων και μορφών του χώρου γίνονται αντικείμενο συνειδητού και ενεργητικού ενδιαφέροντος των Μαθηματικών. Εάν προηγούμενα, για παράδειγμα, η εισαγωγή για χρήση των αρνητικών και μιγαδικών αριθμών και η ακριβής διατύπωση των κανόνων των πράξεών τους απαιτούσαν μακρόχρονη δουλειά, η ανάπτυξη των Μαθηματικών τώρα απαίτησε την επεξεργασία τεχνασμάτων συνειδητής και προσχεδιασμένης δημιουργίας νέων γεωμετρικών συστημάτων, νέων «*αλγεβρών*» με «*μη-αντιμεταθετικό*» ή ακόμη και «*μη-προσεταιριστικό*» πολλαπλασιασμό κτλ. στο βαθμό που εμφανίζεται γι' αυτό κάποια ανάγκη.

Είναι δύσκολο, όμως, να υπερεκτιμηθεί η σπουδαιότητα εκείνης της μετατροπής ολόκληρης της σύνθεσης της μαθηματικής σκέψης, η οποία έπρεπε για το σκοπό αυτό να διαρκέσει ολόκληρο τον 19^{ο} αιώνα. Από την πλευρά αυτή των ιδεών πιο σημαντική μεταξύ των ανακαλύψεων των αρχών του 19^{ου} αιώνα εμφανίζεται η ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λομπατσέφσκι. Με το παράδειγμα ακριβώς αυτής της γεωμετρίας φαίνεται ότι είχε ξεπεραστεί η πίστη στα ευλογημένα από τη χιλιετή ανάπτυξη των Μαθηματικών αξιώματα, είχε κατανοηθεί η δυνατότητα δημιουργίας νέων στην ουσία μαθηματικών θεωριών με τον τρόπο της σωστά εφαρμοζόμενης αφαίρεσης από τους επιβαλλόμενους προηγούμενα περιορισμούς, που δεν έχουν εσωτερική λογική αναγκαιότητα, και, τέλος, είχε ανακαλυφθεί πως μια τέτοιου είδους αφηρημένη θεωρία μπορεί με το χρόνο ν' αποκτήσει όλο και πιο εκτεταμένες, καθ' όλα συγκεκριμένες εφαρμογές.

*«**Α. Ν. ΚΟΛΜΟΓΟΡΟΦ** [(25/04/1903)-(20/10/1987)], «ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - [στο "Μαθηματικό Εγκυκλοπαιδικό Λεξικό" (επιμέλεια Γ.Β. Προχόροφ).1988, Μετάφραση από τα ρώσικα: Κ. Φιλιππίδης]. Περιοδικό: "ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΙΔΕΙΑΣ", τεύχος 23-24, σελ.48-50*

.

ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου

στο σημείωμα τούτο αναφερόμαστε σε μια επιφάνεια, από την οποία με κατάλληλες επίπεδες τομές παίρνουμε "κωνικές επιφάνειες", δηλ. επιφάνειες από τις οποίες "γεννιούνται τα διάφορα είδη κώνων"

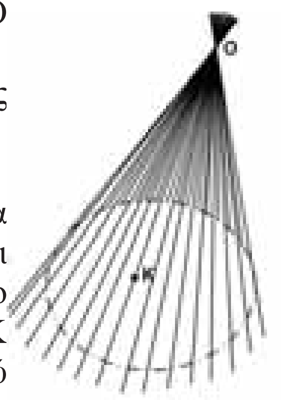
(α) μια επιφάνεια που γεννά κώνους. δίνεται κύκλος (Κ) κι ένα σημείο Ο του χώρου. (σχ. 28.01). Κάθε σημείο της περιφέρειας (Κ) και το σημείο Ο, ορίζουν μια ευθεία. Το σύνολο όλων αυτών των ευθειών, αποτελούν μια επιφάνεια. (σχήμα 28.01)

(β) γεννήτρια κώνων. η επιφάνεια του σχήματος (28.01), λέγεται "*γεννήτρια κώνων*".

στοιχεία της γεννήτριας κώνων.

- ο δοσμένος κύκλος (Κ), ονομάζεται *οδηγός της γεννήτριας,*

- κάθε μια από τις ευθείες που αποτελούν τη γεννήτρια επιφάνεια, λέγεται *γενέτειρα*.
- το σημείο Ο ονομάζεται *κορυφή* της γεννήτριας κώνων,
- η ευθεία που ορίζεται από το κέντρο Κ της οδηγού και την κορυφή Ο, λέγεται άξονας της γεννήτριας,



σχήμα 28.01

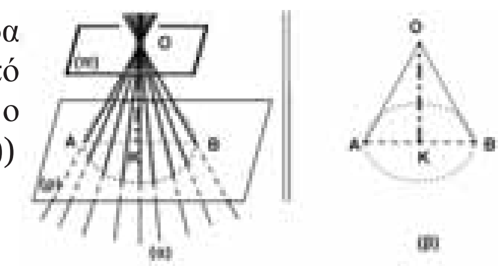
- μια γεννήτρια θα λέγεται *ορθή*, αν ο άξονάς της είναι κάθετος στο επίπεδο της οδηγού.

σύμβαση. οι γεννήτριες που θα σπουδάσουμε, από 'δω και πέρα, θα είναι *ορθές*.

τι είναι ο κώνος. δίνεται μια γεννήτρια κώνων την οποία τέμνουμε με δυο επίπεδα, παράλληλα προς την οδηγό (στο εξής: τέμνοντα επίπεδα). Το μέρος της γεννήτριας που βρίσκεται ανάμεσα από τις δυο τομές αυτές τομές καθώς και τα εσωτερικά σημεία αυτών των τομών, λέγεται *κώνος*.

ΕΙΔΗ ΚΩΝΩΝ

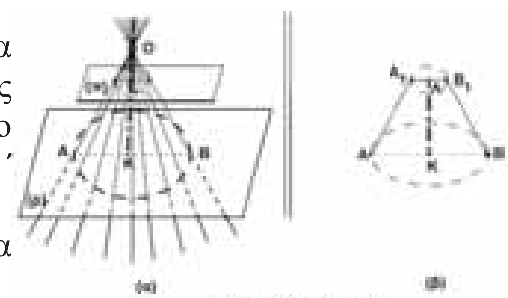
πλήρης κώνος. αν ένα από τα δύο τέμνοντα επίπεδα (της προηγούμενης παραγράφου), περνά από την κορυφή Ο της γεννήτριας κώνων, τότε ο κώνος λέγεται ***πλήρης κώνος***. (σχ.28.02(α,β))



σχήμα 28.02(α,β)

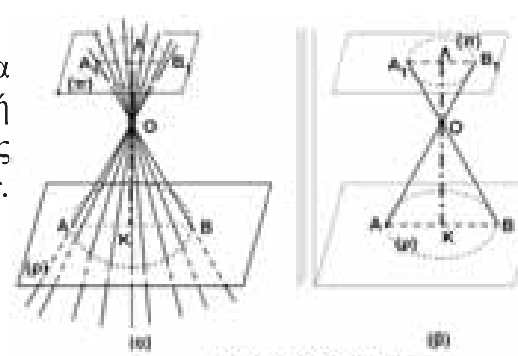
κόλουρος κώνος α΄ είδους. Αν τα δυο τέμνοντα επίπεδα, αφήνουν την κορυφή Ο της γεννήτριας κώνων προς το ίδιο μέρος, τότε ο κώνος λέγεται ***κόλουρος κώνος α΄ είδους.***(σχ.28.03(α,β))

σύμβαση. Στο εξής, τον κόλουρο κώνο α΄ είδους, θα τον ονομάζουμε απλά, ***κόλουρο κώνο.***



σχήμα 28.03(α,β)

κόλουρος κώνος β΄ είδους. Αν τα δυο τέμνοντα επίπεδα, αφήνουν μεταξύ τους την κορυφή Ο της γεννήτριας κώνων, τότε ο κώνος λέγεται ***κόλουρος κώνος β΄ είδους***. (σχ.28.04(α,β).)



σχήμα 28.04(α,β)

III. Αυτό το ξέρατε;

ποιά είναι τα περίφημα άλυτα προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ;

IV. Διαχρονικά οι κυριότερες απόψεις για τη φύση των Μαθηματικών (από την διδακτορική εργασία του Βασίλη Λιόση)

πυθαγόρεια άποψη [590-495 π.Χ.] Η σχολή του Πυθαγόρα, δεν μπορούσε παρά να είναι φορέας του μυστικισμού του αιγυπτιακού ιερατείου, στην υπηρεσία του οποίου ανδρώθηκε ο ιδρυτής της. Το πιστεύω τους για τα Μαθηματικά ήταν: «Τα Μαθηματικά είναι **υπερβατικά** κι ενδεδυμένα με ένα μυστικισμό, είναι ένας **μετακώδικας**, υπάρχουν έξω από εμάς και άρα δεν αποτελούν προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας»

δοξασίες του Πλάτωνα για τα Μαθηματικά [427-347 π.Χ.]. Ο Πλάτωνας, συνεπής προς το φιλοσοφικό του πιστεύω (αντικειμενικός ιδεαλισμός), θεωρούσε:

α) την ύπαρξη των αντικειμένων γνώσης ανεξάρτητα από το υποκείμενο-γνώστη καθώς και ανεξάρτητα από τον τρόπο γνώσης τους,

β) ότι αυτά τα αντικείμενα γνώσης ήταν αντίγραφα των ιδεατών οντοτήτων, δηλαδή των ιδεών.

γ) ότι οι μαθηματικές οντότητες ήταν ένα υποσύνολο των ιδεών.

Δηλ. οι μαθηματικές ιδέες είναι μέρος του κόσμου των ιδεών και πρώτα και κύρια πρέπει να τα βλέπουμε υπό αυτό το πρίσμα.

ορισμός των Μαθηματικών κατά Αριστοτέλη [384-322 π.Χ.] Η άποψη του Αριστοτέλη για το τι είναι Μαθηματικά, προσεγγίζει σε σημαντικό βαθμό τον ορισμό που δόθηκε στην αρχή της μελέτης μας (στο: ''Ένας ορισμός''). Τα Μαθηματικά προκύπτουν από την παρατήρηση των αντικειμένων και των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ τους και μάλιστα μέσα από την αφαιρετική διαδικασία. Οι ομοιότητες είναι προφανείς. Ο ρεαλισμός του Αριστοτέλη σε αυτό το σημείο είναι διαφορετικός από του Πλάτωνα. Είναι ρεαλισμός υλιστικής φύσης και όχι ιδεαλιστικής και μεταφυσικού προσανατολισμού.

Η κριτική που ασκεί σε άλλα σημεία του έργου του στις απόψεις του Πλάτωνα είναι οξεία, σχεδόν ειρωνική.: «…[οι υπέρμαχοι των ειδών] τοποθετούν τα Μαθηματικά αντικείμενα ανάμεσα στα είδη και τα αισθητά πράγματα ως μια τρίτη κατηγορία πραγμάτων πέρα από τα είδη και τα πράγματα του κόσμου τούτου, πλην όμως δεν υπάρχει τρίτος άνθρωπος και τρίτος ίππος παράλληλα με τον καθ' αυτό και τους εξατομικευμένους ανθρώπους και ίππους»

τα Μαθηματικά, κατά Γαλιλαίο [1564-1642] Ο Γαλιλαίος ήταν αντι-Αριστοτελικός και πιθανόν πρέπει να ενταχθεί στην πλατωνική παράδοση. Κατά τον Γαλιλαίο: «η φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του σύμπαντος, το οποίο... είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών και οι γλωσσικοί χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μια λέξη. Χωρίς αυτά κανείς περιπλανιέται σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο»

Επειδή ο αριθμός των φιλοσόφων και των μαθηματικών που "σημάδεψαν" την επιστήμη των Μαθηματικών, είναι τεράστιος, εμείς θα παραθέσουμε, σχεδόν "συνθηματικά" την άποψη ορισμένων. Η παράθεση των ονομάτων δεν σημαίνει πως οι άλλοι είναι "κατώτεροι":

Nikołaj Kopernik [1473-1543]– ***Johannes Kepler*** [1571-1630] Κατά την εποχή του Κοπέρνικου και του Κέπλερ πραγματοποιείται μια επιστημονική επανάσταση της οποίας ένα χαρακτηριστικό είναι «η **γεωμετρικοποίηση του χώρου**....». Έτσι, τα Μαθηματικά μπορεί να χρησιμοποιούνται για να ερμηνεύουν, ωστόσο η βάση πάνω στην οποία εδράζονται είναι θεολογική

René Descartes [1596-1650] Ο Καρτέσιος υιοθετεί μια ρεαλιστική άποψη για την ύπαρξη των Μαθηματικών, βλέποντας ότι εφαρμοσμένα και θεωρητικά Μαθηματικά επικοινωνούν μέσω συγκοινωνούντων δοχείων, αλλά δεν την φτάνει μέχρι τέλους. Το ένα δοχείο είναι ο νους μέσα στον οποίο ανασύρονται οι έμφυτες ιδέες των θεωρητικών Μαθηματικών, το άλλο δοχείο είναι η πραγματικότητα όπου τα **θεωρητικά Μαθηματικά** μεταφράζουν αυτή την πραγματικότητα και μετατρέπονται σε **εφαρμοσμένα**

Isaac Newton [1642-1726] Χωρίς να είναι ρητά διατυπωμένο από την πλευρά του Νεύτωνα, προκύπτει αβίαστα από τη γενικότερη άποψή του ότι τα Μαθηματικά μπορούν να **περιγράφουν τα πάντα στη φύση** και μάλιστα φαίνεται ότι τα Μαθηματικά εκείνης της εποχής θεωρούνται επαρκή

Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716] Τα Μαθηματικά θεωρήθηκαν από τον Leibniz ως το τέλειο παράδειγμα της λογικής απόδειξης. Σε όλα τα πράγματα οφείλουμε να εφαρμόσουμε τη μαθηματική μορφή. Ο Leibnitz πίστευε ότι μπορεί όλη η ανθρώπινη σκέψη να τυποποιηθεί

George Berkeley [1685-1753] Ο (επίσκοπος) Berkeley είναι συνεπής με το φιλοσοφικό του πλαίσιο, δηλ. του **υποκειμενικού ιδεαλισμού**. Επιδιώκει να δείξει ότι τα Μαθηματικά αναφέρονται σε ανύπαρκτα αντικείμενα, κάτι που το θεωρεί σαν συνέπεια του ότι η ύλη δεν υπάρχει, άρα πώς θα μπορούσαν τα Μαθηματικά να έχουν μια οντολογική δικαίωση;

David Hume [1711-1776] Ο αγνωστικιστής Hume πίστευε ότι: «οι αποδείξεις δεν είναι σαν τις πιθανότητες, όπου μπορούν να ανακύψουν δυσκολίες και το ένα επιχείρημα να αντικρούει το άλλο και να μειώσει την ισχύ του. **Μια απόδειξη** αν **είναι ορθή**, δεν επιδέχεται **καμία αμφισβήτηση**. Εάν, πάλι, η απόδειξη δεν είναι ορθή, τότε αποτελεί καθαρή σοφιστεία, συνεπώς δεν μπορεί να γίνεται λόγος για δυσκολία απάντησης σε αυτήν. Είναι είτε ακαταμάχητη είτε τελείως ανίσχυρη...» ***(στο επόμενο η συνέχεια)***

V. οι συνάδελφοι που γράφουν βιβλία, μας πληροφορούν:

από τον σημαντικό συνάδελφο Γιώργο Απ. Μήτσιο (Τρίκαλα Θεσσαλίας), λάβαμε το νεότευκτο βιβλίο του, με τίτλο: «ΑΛΓΕΒΡΑ, Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ» (Α΄ τόμος, σελίδες 517). Εμείς, γνωρίζοντας την πολυχρόνια ενασχόληση και αφοσίωση του Γ. Α. Μήτσιου, στην Μαθηματική Εκπαίδευση, αισθανόμαστε την ανάγκη να τον ευχαριστήσουμε για την ευγενική του χειρονομία

VI. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε";

όταν μιλάμε για "άλυτα προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας", εννοούμε δυνατότητα κατασκευής του αντίστοιχου σχήματος χρησιμοποιώντας ***μόνο*** κανόνα (χάρακα) και διαβήτη. Διαφορετικά το αντίστοιχο πρόβλημα λέμε ότι είναι άλυτο. Υπάρχουν, από την εποχή της Αρχαιότητας, τέσσερα τέτοια προβλήματα:

1. ο τετραγωνισμός του κύκλου

το πρόβλημα: «να κατασκευαστεί, με κανόνα και διαβήτη, τετράγωνο που το εμβαδό του ναείναι ίσο προς το εμβαδό δοσμένου κύκλου»

2. ο διπλασιασμός του κύβου

το πρόβλημα: «να κατασκευαστεί, με κανόνα και διαβήτη, κύβος που ο όγκος του να είναι διπλάσιος ως προς τον όγκο του δοσμένου κύβου»

3. η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας

το πρόβλημα: «να τριχοτομηθεί, με χάρακα και διαβήτη τυχαία γωνία»

4. κατασκευή τυχαίου κανονικού πολυγώνου

το πρόβλημα: «να κατασκευαστεί κανονικό επίπεδο πολύγωνο τυχαίου αριθμού πλευρών»

απαραίτητη πληροφόρηση

τα στοιχεία δανειστήκαμε από το περίφημο βιβλίο του αείμνηστου καθηγητή Αναλυτικής και της Προβολικής, Γεωμετρίας, στο ΕΚΠΑ, Μαυρικίου Μπρίκα, με τίτλο «**Τα Περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητος**» (εκδ: Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΣ – Αθήνα 1970).

Ο Μ, Μπρίκας σημειώνει: «Η απόδειξη του **αδυνάτου** της επιλύσεως του τετραγωνισμού του κύκλου επετεύχθη μόλις το **1882...** του διπλασιασμού του κύβου το **1829...** της τριχοτομήσεως της γωνίας το **1837...** της κατασκευής τυχαίου κανονικού πολυγώνου δόθηκε κατά τα έτη **1830-1832…**»

Τάξη: Α΄

Εξισώσεις - Ανισώσεις

του Κονόμη Άρτι

Άσκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση ($1^{ου}$ βαθμού)

$$\frac{x+2}{4}-\left[\frac{x-1}{3}-\left(\frac{4-x}{12}+3\right)-2\right]=10$$

Λύση

Πρώτα κάνουμε απαλοιφή των παρενθέσεων και στη συνέχεια απαλοιφή των παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με το Ε.Κ.Π (4,3,12)=12. Έχουμε

$$\frac{x+2}{4}-\left[\frac{x-1}{3}-\frac{4-x}{12}-3-2\right]=10\Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{4}-\frac{x-1}{3}+\frac{4-x}{12}+3+2=10\Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{4}-\frac{x-1}{3}+\frac{4-x}{12}=5\Leftrightarrow$$

$$12\cdot\frac{x+2}{4}-12\cdot\frac{x-1}{3}+12\cdot\frac{4-x}{12}=12\cdot 5\Leftrightarrow$$

$$3\cdot(x+2)-4\cdot(x-1)+4-x=60\Leftrightarrow$$

$$3x+6-4x+4+4-x=60\Leftrightarrow$$

$$3x-4x-x=60-6-4-4\Leftrightarrow$$

$$3x-5x=60-14\Leftrightarrow -2x=46\Leftrightarrow x=\frac{46}{-2}\Leftrightarrow \boxed{x=-23}$$

Άσκηση 2

Να λυθεί η παραμετρική εξίσωση για της διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\lambda^2\cdot(x-1)-5x\cdot(\lambda-1)+10=6-x$$

Λύση

Έχουμε: $\lambda^2\cdot(x-1)-5x\cdot(\lambda-1)+10=6-x\Leftrightarrow$

$\lambda^2\cdot x-\lambda^2-5x\cdot\lambda+5x+10=6-x\Leftrightarrow$

$\lambda^2\cdot x-5x\cdot\lambda+5x+x=\lambda^2-10+6\Leftrightarrow$

$\lambda^2\cdot x-5x\cdot\lambda+6x=\lambda^2-4\Leftrightarrow$

$(\lambda^2-5x+6)\cdot x=\lambda^2-4\Leftrightarrow$

$(\lambda-2)\cdot(\lambda-3)\cdot x=(\lambda-2)(\lambda+2) \quad (1)$

Για τη διερεύνηση του πλήθος των ριζών της (1) διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq 3$ έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow x=\frac{\cancel{(\lambda-2)}\cdot(\lambda+2)}{\cancel{(\lambda-2)}\cdot(\lambda-3)}\Leftrightarrow x=\frac{\lambda+2}{\lambda-3}$$

Η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση.

- Αν $\lambda=2$ έχουμε:

$(1)\Leftrightarrow(2-2)\cdot(2-3)\cdot x=(2-2)\cdot(2+2)\Leftrightarrow 0\cdot x=0$

Άρα η εξίσωση (1) είναι αόριστη ή ταυτότητα (έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό x).

Αν $\lambda=3$ έχουμε:

$(1)\Leftrightarrow(3-2)\cdot(3-3)\cdot x=(3-2)\cdot(3+2)\Leftrightarrow 0\cdot x=5$

Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

Άσκηση 3

Να λυθεί η κλασματική εξίσωση:

$$\frac{4x+3}{x^2+5x+6}-\frac{3-2x}{x+2}=\frac{3x-2}{x+3} \qquad (1)$$

Λύση

Επειδή $x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3)$ το Ε.Κ.Π των παρονομαστών είναι το γινόμενο $(x+2)\cdot(x+3)$

Για να ορίζεται η κλασματική εξίσωση (1) πρέπει και αρκεί $x\neq-2$ και $x\neq-3$. Άρα το σύνολο ορισμού της είναι το $A=\mathbb{R}-\{-2,-3\}$.

Για κάθε $x\in A$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\overset{1}{\cup}}{}\frac{4x+3}{x^2+5x+6}-\overset{x+3}{\cup}\frac{3-2x}{x+2}=\overset{x+2}{\cup}\frac{3x-2}{x+3}$$

$\Leftrightarrow 4x+3-(x+3)\cdot(3-2x)=(x+2)\cdot(3x-2)$

$\Leftrightarrow 4x+3-(3x-2x^2+9-6x)=3x^2-2x+6x-4$

$\Leftrightarrow 4x+3-3x+2x^2-9+6x=3x^2-2x+6x-4$

$\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow -x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow$

$(x-1)\cdot(x-2)=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.

Επειδή οι τιμές αυτές ανήκουν στο σύνολο ορισμού A είναι και λύσεις της εξισώσεις (1).

Άσκηση 4

Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεις $2x^2+3x-4=0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις χωρίς να βρείτε τις ρίζες της:

i) x_1+x_2 ii) $x_1\cdot x_2$ iii) $x_1^2+x_2^2$

iv) $x_1^3+x_2^3$ v) $(3+2x_1)\cdot(3+2x_2)$

vi) $\dfrac{3x_1}{x_2}+\dfrac{3x_2}{x_1}$

Λύση

Επειδή $\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot(-4)=...=41>0$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες x_1 και x_2. Από τους τύπους του VIETA έχουμε.

i) $x_1+x_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}=\dfrac{-3}{2}$

ii) $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-4}{2}=-2$

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων :

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\cdot\beta$ και

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)$ υπολογίζουμε το iii) και το iv). Έχουμε:

iii) $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2\cdot x_1\cdot x_2=$

$=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-2\cdot(-2)=\dfrac{9}{4}+4=\dfrac{25}{4}$

iv) $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2)=$

$=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3-3\cdot(-2)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{27}{8}-9=...=-\dfrac{99}{8}$

v) $(3+2x_1)\cdot(3+2x_2)=9+6x_2+6x_1+4x_1\cdot x_2=$

$=9+6\cdot(x_1+x_2)+4x_1\cdot x_2=$

$=9+6\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+4\cdot(-2)=...=-8$

vi) $\dfrac{3x_1}{x_2}+\dfrac{3x_2}{x_1}=\dfrac{3x_1^{\,2}}{x_2}+\dfrac{3x_2^{\,2}}{x_1}=$

$=\dfrac{3\cdot(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{25}{4}\right)}{-2}=\dfrac{-75}{8}$

Άσκηση 5

α) Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{x+2}{8}-\frac{7\cdot(x+1)}{24}\geq\frac{x-2}{8}-\frac{x-1}{3}\quad(1)$$

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (2) και (3) που ακολουθούν:

$$\frac{x+2}{5}-\frac{x+1}{10}\geq-\frac{x-2}{5}-\frac{3}{2}\quad(2)\text{ και}$$

$$\frac{2x-1}{5}-\frac{x-2}{6}\leq-\frac{x-3}{2}+\frac{5}{3}\quad(3)$$

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων (1),(2) και (3).

Λύση

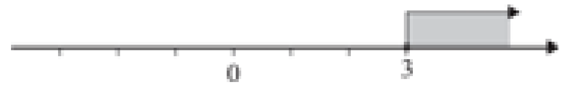
α) Το Ε.Κ.Π των παρονομαστών της ανίσωσης είναι 24.

Έχουμε:

$$\cancel{24}^{3}\cdot\frac{x+2}{\cancel{8}}-\cancel{24}^{1}\frac{7\cdot(x+1)}{\cancel{24}}\geq\cancel{24}^{3}\cdot\frac{x-2}{\cancel{8}}-\cancel{24}^{8}\cdot\frac{x-1}{3}$$

$\Leftrightarrow 3\cdot(x+2)-7\cdot(x+1)\geq 3\cdot(x-2)-8\cdot(x-1)$

$\Leftrightarrow 3x+6-7x-7\geq 3x-6-8x+8\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x\geq 3$



Η (1) αληθεύει για κάθε $x\in[3,+\infty)$

β) Το Ε.Κ.Π στην ανίσωση (2) είναι το 10. Έχουμε:

$$\frac{x+2}{5}-\frac{x+1}{10}\geq-\frac{x-2}{5}-\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{10}^{2}\cdot\frac{x+2}{\cancel{5}}-\cancel{10}^{1}\cdot\frac{x+1}{\cancel{10}}\geq-\cancel{10}\cdot\frac{x-2}{\cancel{5}}-\cancel{10}^{5}\cdot\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$2\cdot(x+2)-(x+1)\geq-2\cdot(x-2)-15\Leftrightarrow$

$2x+4-x-1\geq-2x+4-15\Leftrightarrow...\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{14}{3}$.

- Το Ε.Κ.Π της ανισώσεις (3) είναι το 30. Έχουμε:

$$\frac{2x-1}{5}-\frac{x-2}{6}\leq-\frac{x-3}{2}+\frac{5}{3}\Leftrightarrow$$

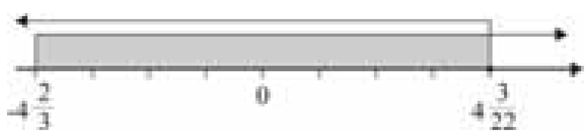
$$3\cancel{0}\cdot\frac{2x-1}{\cancel{5}}-3\cancel{0}^{5}\frac{x-2}{\cancel{6}}\leq-3\cancel{0}\cdot\frac{x-3}{\cancel{2}}+3\cancel{0}^{10}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}\Leftrightarrow$$

$6\cdot(2x-1)-5\cdot(x-2)\leq-15\cdot(x-3)+10\cdot5\Leftrightarrow$

$12x-6-5x+10\leq-15x+45+50\Leftrightarrow..$

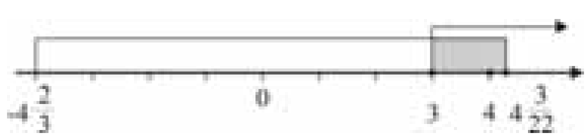
$..\Leftrightarrow 22x\leq 91\Leftrightarrow x\leq\dfrac{91}{22}$

Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων (2) και (3) είναι οι τιμές του διαστήματος $\left[-\dfrac{14}{3},\dfrac{91}{22}\right]$



γ) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) , (2) και (3) ανήκουν στην τομή

$[3,+\infty]\cap\left[-4\dfrac{2}{3},4\dfrac{3}{22}\right]=\left[3,4\dfrac{3}{22}\right]$.Οι ακέραιες λύσεις που ανήκουν στο διάστημα $\left[3,4\dfrac{3}{22}\right]$ είναι $x\in\{3,4\}$.



Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση $x^2-x-3\lambda\cdot\mu+1=0$ (1) που έχει ρίζα τον αριθμό $\lambda+\mu$, οπού $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=\mu=1$

β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

Λύση

α) Επειδή ο αριθμός $\lambda+\mu$ είναι ριζά της (1) ισχύει: $(\lambda+\mu)^2-(\lambda+\mu)-3\lambda\cdot\mu+1=0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2+2\lambda\cdot\mu+\mu^2-\lambda-\mu-3\lambda\cdot\mu+1=0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2-\lambda\cdot\mu+\mu^2-\lambda-\mu+1=0$

Πολλαπλασιάζοντας με 2 την παραπάνω σχέση έχουμε:

$2\lambda^2-2\lambda\cdot\mu+2\mu^2-2\lambda-2\mu+2=0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2-2\lambda\cdot\mu+\mu^2+\lambda^2-2\lambda+1+\mu^2-2\mu+1=0$

$\Leftrightarrow(\lambda-\mu)^2+(\lambda-1)^2+(\mu-1)^2=0 \Leftrightarrow ..$

$.. \Leftrightarrow \lambda=\mu$ και $\lambda=1$ και $\mu=1 \Leftrightarrow \lambda=\mu=1$.

β) Για $\lambda=\mu=1$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$

Άρα η άλλη λύση της εξίσωσης (1) είναι $x=-1$

Άσκηση 7

Να λυθεί η εξίσωση:

$$|x-3|-x^2+6x-9=0 \quad (1)$$

Λύση

Έχουμε: $|x-3|-x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow$

$|x-3|-(x^2-6x+9)=0 \Leftrightarrow$

$|x-3|-|x-3|^2=0 \Leftrightarrow$

$|x-3|-(x-3)^2=0 \Leftrightarrow$

$|x-3|\cdot(1-|x-3|)=0 \Leftrightarrow$

$|x-3|=0$ ή $1-|x-3|=0 \Leftrightarrow$

$x-3=0$ ή $|x-3|=1 \Leftrightarrow x-3=0$

ή $x-3=1$ ή $x-3=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3$ ή $x=4$ ή $x=2$.

Άσκηση 8

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\big||x|+x\big|=|5-x|-\big|x-|x|\big| \quad (1)$

β) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-10x+25}=0 \quad (2)$

Λύση

α) Από τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ισχύει:

$|x|\geq -x$ και $|x|\geq x \Leftrightarrow |x|+x\geq 0$ και $x-|x|\leq 0$

Άρα για την εξίσωση (1) έχουμε:

$\big||x|+x\big|=|5-x|-\big|x-|x|\big| \Leftrightarrow$

$|x|+x=|5-x|+x-|x| \Leftrightarrow$

$2|x|=|5-x| \Leftrightarrow |2x|=|5-x| \Leftrightarrow ...$

$... \Leftrightarrow x=-5$ ή $x=\frac{5}{3}$

β) Έχουμε:

$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-10x+25}=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{x^2-10x+25} \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2} \Leftrightarrow$

$|x-2|=|x-5| \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$

Άσκηση 9

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\big||2x+1|-11\big|+x^2-10x+25=0 \quad (1)$

β) $3x+\sqrt{x^2-10x+25}=2 \quad (2)$

Λύση

α) Έχουμε:

$\big||2x+1|-11\big|+x^2-10x+25=0 \Leftrightarrow$

$\big||2x+1|-11\big|+(x-5)^2=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \big||2x+1|-11\big|=0 \\ (x-5)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x+1=11 \text{ ή } 2x+1=-11 \\ \chi=5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=5 \text{ ή } x=-6 \\ \chi=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$

β) Η εξίσωση (2) γράφεται:

$3x+\sqrt{x^2-10x+25}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-10x+25}=2-3x$

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι οι τιμές $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει:

- $x^2-10x+25\geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$
- $2-3x\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -2 \Leftrightarrow x\leq\frac{2}{3}$

Άρα για $x\leq\frac{2}{3}$ έχουμε:

$\sqrt{x^2-10x+25}=2-3x \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-5)^2}=2-3x \Leftrightarrow |x-5|=2-3x \Leftrightarrow$

$|x-5|^2=(2-3x)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2=(2-3x)^2 \Leftrightarrow$

$x^2-10x+25=4-12x+9x^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$

$-8x^2+2x+21=0 \overset{\Delta=2^2-4(-8)\cdot 21=676}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm 26}{-16} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ (δεκτή) ή

$x=\frac{7}{4}$ (απορρίπτεται)

Άσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-7)x-\lambda+6=0 \quad (1)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει

πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει:

i. μια διπλή ρίζα
ii. δυο ρίζες αντίθετες
iii. δυο ρίζες αντίστροφες
iv. δυο αρνητικές ρίζες

Λύση

α) Έχουμε: $\Delta=\left[-(\lambda-7)\right]^2-4\cdot1\cdot(-\lambda+6)=$

$=(\lambda-7)^2-4\cdot(-\lambda+6)\Leftrightarrow$

$\Delta=\lambda^2-2\cdot\lambda\cdot7+7^2+4\lambda-24=$

$=\lambda^2-14\lambda+49+4\lambda-24\Leftrightarrow$

$\Delta=\lambda^2-10\lambda+25\Leftrightarrow\Delta=(\lambda-5)^2\geq0\Leftrightarrow$

Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Έχουμε:

i. Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow(\lambda-5)^2=0\Leftrightarrow\lambda-5=0\Leftrightarrow\lambda=5$.

ii. Η εξίσωση (1) έχει αντίθετες ρίζες $\Leftrightarrow\Delta\geq0$ και $S=0\Leftrightarrow\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lambda-7=0\Leftrightarrow\lambda=7$

iii. Η εξίσωση (1) έχει αντίστροφες ρίζες $\Leftrightarrow\Delta\geq0$ και $P=1$ $\Leftrightarrow$ $\lambda\in\mathbb{R}$ και $-\lambda+6=0\Leftrightarrow\lambda=6$

iv. Η εξίσωση (1) έχει δυο αρνητικές ρίζες αν και μόνο αν $\begin{cases}\Delta\geq0\\P>0\\S<0\end{cases}$ δηλαδή $\begin{cases}\lambda\in R\\-\lambda+6>0\\\lambda-7<0\end{cases}$

δηλαδή $\begin{cases}-\lambda+6>0\\\lambda-7<0\end{cases}$ δηλαδή $\begin{cases}\lambda<6\\\lambda<7\end{cases}$

δηλαδή $\lambda<6$

Άσκηση 11

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσής: $x^2+(\lambda-3)\cdot x+6-\lambda=0$ (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$\Delta=(\lambda-3)^2-4\cdot1\cdot(6-\lambda)\Leftrightarrow$

$\Delta=\lambda^2-2\cdot\lambda\cdot3+3^2-4\cdot(6-\lambda)\Leftrightarrow$

$\Delta=\lambda^2-6\lambda+9-24+4\lambda\Leftrightarrow$

$\Delta=\lambda^2-2\lambda-15.$ (2)

Έχουμε: $\Delta=0\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda-15=0$

$\Leftrightarrow(\lambda-5)\cdot(\lambda+3)=0\Leftrightarrow$

$\lambda-5=0$ ή $\lambda+3=0\Leftrightarrow\lambda=5$ ή $\lambda=-3$

Το πρόσημο του τριώνυμου (2) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

λ	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$\lambda^2-2\lambda-15$		+	0	−	0	+	

Τότε:

- Η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες αν και μόνο αν $\Delta>0$ δηλαδή για $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$
- Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν $\Delta=0$ δηλαδή για $\lambda=-3$ ή $\lambda=5$
- Η εξίσωση (1) είναι αδύνατη αν και μόνο αν $\Delta<0$ δηλαδή για $\lambda\in(-3,5)$

Άσκηση 12

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(\lambda-1)\cdot x^2+(\lambda-1)\cdot x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Λύση

- Για $\lambda=1$ έχουμε: $(1-1)\cdot x^2+(1-1)\cdot x+2=2>0$ που ισχύει.
- Για $\lambda\neq1$ έχουμε ότι το τριώνυμο $(\lambda-1)\cdot x^2+(\lambda-1)\cdot x+2$ είναι θετικό αν και μόνο αν $\alpha=\lambda-1>0$ και $\Delta<0$ δηλαδή $\lambda>1$ και $\Delta=(\lambda-1)^2-4\cdot(\lambda-1)\cdot2<0$ δηλαδή $\lambda>1$ και $\lambda^2-10\lambda+9<0$.
- Ισχύει $\lambda^2-10\lambda+9=0\Leftrightarrow(\lambda-1)\cdot(\lambda-9)=0$ $\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=9$ και το πρόσημο του τριώνυμου $\lambda^2-10\lambda+9$ φαίνεται στο παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$\lambda^2-10\lambda+9$		+	0	−	0	+	

Τελικά για $\lambda>1$ και $\lambda^2-10\lambda+9<0$ δηλαδή για $1<\lambda<9$

Άσκηση 13

i. **Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων**

$$x^2-7x+6\leq0 \text{ και } x^2-7x+10>0$$

ii. **Να λυθεί η ανίσωση:**

$$6x-32<x^2-6x\leq7x-12$$

Λύση

i. Το τριώνυμο x^2-7x+6 έχει $\alpha=1>0$ και $\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot6=...=25>0$ και ρίζες

$$x=\frac{-(-7)\pm5}{2}=\frac{7\pm5}{2}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=6$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
x^2-7x+6		+	0	−	0	+	

Άρα $x^2-7x+6\leq0\Leftrightarrow x\in[1,6]$ (1)

- Το τριώνυμο $x^2-7x+10>0$ έχει $\alpha=1$ και $\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot10=...=9>0$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-(-7)\pm3}{2}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x=2$ ή $x=5$

  Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$x^2-7x+10$	+	0	-	0	+

Άρα: $x^2-7x+10>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$ (2)

Οι κοινές λύσεις των (1) και (2) όπως φαίνονται στον παρακάτω άξονα είναι: $x\in[1,2)\cup(5,6]$

ii. Έχουμε: $6x-32<x^2-6x\le7x-22\Leftrightarrow$
$\begin{cases}x^2-12x+32>0\\x^2-13x+22\le0\end{cases}$

Για το τριώνυμο: $x^2-12x+32$ έχουμε ότι έχει $\Delta=16$ και ρίζες $x=4$ ή $x=8$

Το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	4		8	$+\infty$
$x^2-12x+32$	+	0	-	0	+

Άρα: $x^2-12x+32>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,4)\cup(8,+\infty)(1)$

Για το τριώνυμο $x^2-13x+22$ έχουμε ότι έχει $\Delta=81$ και ρίζες $x=2$ ή $x=11$

Το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2		11	$+\infty$
$x^2-12x+32$	+	0	-	0	+

Άρα : $x^2-13x+22\le0\Leftrightarrow x\in[2,11](2)$

Οι κοινές λύσεις των (1) και (2) όπως φαίνονται στον παρακάτω άξονα είναι: $x\in[2,4)\cup(8,11]$

Άσκηση 14

Μια τεχνική εταιρία ανέλαβε την ασφαλτόστρωση ενός δρόμου με μήκος 80 km. Είχε προγραμματίσει κάθε μέρα το έργο να είχε την ίδια πρόοδο σε km. Όμως, κατάφερε κάθε μέρα να στρώσει 2 km περισσότερο άσφαλτο από όσα είχε προγραμματίσει με αποτέλεσμα το έργο να τελειώνει 2 ημέρες νωρίτερα. Σε πόσες ημέρες ολοκλήρωσε το έργο η εταιρεία;

Λύση

Έστω ότι η εταιρεία ολοκλήρωσε το έργο σε x ημέρες. Επειδή σε x ημέρες η εταιρία θα ολοκλήρωνε 80 km (όλο το έργο), σε 1 ημέρα η εταιρεία θα ολοκλήρωνε $\dfrac{80}{x}$ km (1) του έργου.

Αν όμως η εταιρία ολοκλήρωνε το έργο συμφώνα με τον αρχικό προγραμματισμό θα χρειαζόταν $x+2$ ημέρες. Άρα σε 1 ημέρα θα ολοκλήρωνε $\dfrac{80}{x+2}$ km. Επειδή το έργο προχωρούσε 2 km παραπάνω κάθε μέρα, η εταιρεία τελείωνε $\dfrac{80}{x+2}+2$ km (2) την ημέρα.

Έχουμε:

$$(2)=(1)\Leftrightarrow\frac{80}{x+2}+2=\frac{80}{x}\Leftrightarrow$$

$$x\cdot(x+2)\cdot\frac{80}{x+2}+x\cdot(x+2)\cdot2=x\cdot(x+2)\frac{80}{x}\Leftrightarrow$$

$$80x+2x\cdot(x+2)=80\cdot(x+2)\Leftrightarrow$$

$$x^2+2x-80=0\Leftrightarrow x=-10\text{ (απορρ.) ή } x=8$$

Άσκηση 15

Μια παρέα που αποτελείται από ορισμένα άτομα θέλουν να μοιραστούν το ποσό των 3600€. Αν τα άτομα ήταν 5 λιγότερα ,ο καθένας θα έπαιρνε 24€ περισσότερα. Να βρείτε πόσα ήταν τα άτομα της παρέας και πόσο πήρε ο καθένας.

Λύση

Έστω x όλα τα άτομα της παρέας. Άρα το κάθε άτομο της παρέας πήρε $\dfrac{3600}{x}$ €.Αν τα άτομα ήταν 5 λιγότερα δηλαδή $x-5$, ο καθένας θα έπαιρνε $\dfrac{3600}{x-5}$ € και 24€ περισσότερα .

Έχουμε :

$$\frac{3600}{x}+24=\frac{3600}{x-5}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{x}\cdot(x-5)\cdot\frac{3600}{\cancel{x}}+x\cdot(x-5)\cdot24=x\cdot(x-5)\cdot\frac{3600}{x-5}\Leftrightarrow$$

$$(x-5)\cdot3600+24x\cdot(x-5)=3600\cdot x\Leftrightarrow$$

$$3600x-5\cdot3600+20x^2-120x=3600x\Leftrightarrow...\Leftrightarrow$$

$$x^2-5x-750=0\Leftrightarrow(x-30)\cdot(x+25)=0\Leftrightarrow$$

$$x-30=0\text{ ή }x+25=0\Leftrightarrow x=30\text{ ή}$$

$$x=-25\text{ (απορρ.) }\Leftrightarrow x=30\text{ άτομα.}$$

Το κάθε άτομο πήρε το ποσό $\frac{360\cancel{0}}{3\cancel{0}}=120$ €.

Άσκηση 16

Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε, ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 306 αγώνες, πόσες ήταν η ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

Λύση

Έστω x οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα. Η κάθε ομάδα έπαιξε με τις υπόλοιπες x-1 ομάδες και έγιναν συνολικά $x\cdot(x-1)$ αγώνες σε όλες τις έδρες. Άρα η κάθε ομάδα έπαιξε δυο παιχνίδια με τις υπόλοιπες, ένας εντός και ένας εκτός έδρας. Έτσι ο εκτός έδρας αγώνας της ομάδας Α με την ομάδα Β μπορεί να θεωρηθεί σαν εντός έδρας της ομάδας Β.

Έχουμε: $x\cdot(x-1)=306 \Leftrightarrow x^2-x=306 \Leftrightarrow$

$x^2-x-306=0 \overset{\Delta=1225}{\Leftrightarrow}$

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1225}}{2\cdot 1}=\frac{+1\pm 35}{2}\Leftrightarrow$

$x=18$ ή $x=-17$ (απορρ.) $\Leftrightarrow x=18$.

Άσκηση 17

Να βρείτε δυο διαδοχικούς άρτιους ακέραιους αριθμούς που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσων με 340.

Λύση

Έστω x ο μικρότερος από τους ζητούμενους άρτιους ακεραίους αριθμούς. Τότε ο επόμενος άρτιος ακέραιος αριθμός είναι ο $x+2$.

Ισχύει :

$x^2+(x+2)^2=340 \Leftrightarrow x^2+(x+2)^2-340=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=12$ ή $x=-14$.

- Αν $x=12$, τότε ο επόμενος άρτιος $x+2=14$. Άρα λύση είναι το ζεύγος $(12,14)$
- Αν $x=-14$, τότε ο επόμενος άρτιος $x+2=-12$. Άρα λύση είναι το ζεύγος $(-14,-12)$

Άσκηση 18

Μια δεξαμενή μπορεί να γεμίσει νερό από τρεις βρύσες .Η πρώτη βρύση μονή της γεμίζει τη δεξαμενή σε 6 ώρες, η δεύτερη βρύση μόνη της γεμίζει τη δεξαμενή σε 4 ώρες και η τρίτη βρύση μόνη της γεμίζει τη δεξαμενή σε 12 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή και τις τρεις βρύσες μαζί;

Λύση

Έστω ότι η δεξαμενή θα γεμίσει σε x ώρες αν ανοίξουν και οι τρεις βρύσες μαζί.

- Η πρώτη βρύση μόνη της γεμίζει τη δεξαμενή σε 6 ώρες, άρα σε 1 ώρα γεμίζει το $\frac{1}{6}$ της δεξαμενής και σε x ώρες θα γεμίζει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής.
- Η δεύτερη βρύση μόνη της γεμίζει τη δεξαμενή σε 4 ώρες, άρα σε 1 ώρα γεμίζει $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής και σε x ώρες γεμίζει το $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής.
- Η τρίτη βρύση μόνη της γεμίζει τη δεξαμενή σε 12 ώρες, άρα σε 1 ώρα γεμίζει το $\frac{1}{12}$ δεξαμενής και σε x ώρες γεμίζει τα $\frac{x}{12}$ της δεξαμενής.

- Ισχύει:

$\frac{x}{6}+\frac{x}{4}+\frac{x}{12}=1\Leftrightarrow \cancel{12}^{2}\cdot\frac{x}{6}+\cancel{12}^{3}\cdot\frac{x}{4}+\cancel{12}^{1}\cdot\frac{x}{12}=12\cdot 1$

$\Leftrightarrow 2x+3x+x=12 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=12:6 \Leftrightarrow x=2$ ώρες. Η δεξαμενή γεμίζει σε 2 ώρες αν ανοίξουν και οι τρεις βρύσες μαζί.

Τυπογραφικές Διορθώσεις Τεύχους 129

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α9: Στην εκφώνηση είναι πλευρών όχι τριγώνων

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α2: Εκ παραδρομής δεν γράφτηκε η άλλη λύση

$(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)=51\cdot 7\Rightarrow$

$\begin{cases}\kappa-\lambda=51\\ \kappa+\lambda=7\end{cases}$ ή $\begin{cases}\kappa-\lambda=7\\ \kappa+\lambda=51\end{cases}$ ή

$\begin{cases}\kappa-\lambda=-51\\ \kappa+\lambda=-7\end{cases}$ ή $\begin{cases}\kappa-\lambda=-7\\ \kappa+\lambda=-51\end{cases}$ ή

επίσης και η

$(\kappa=29$ και $\lambda=-22)$ ή $(\kappa=29$ και $\lambda=22)$ ή

$(\kappa=-29$ και $\lambda=22)$ ή $(\kappa=-29$ και $\lambda=-22)$

Α7: Στην εκφώνηση το πρόσημο είναι **(–)**

Να απλοποιηθεί η διαφορά:

$A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Τάξη: Α΄ Παράλληλες Ευθείες - Παραλληλόγραμμα

Ντόρβας Νίκος

Άσκηση 1η: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}<90^\circ$ και ΑΔ ύψος του. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο ώστε $MB=M\Delta$. Από το σημείο Α φέρνουμε παράλληλη στην ΜΔ που τέμνει την ΒΓ στο Κ. Να δείξετε ότι:

α) $\hat{B}=A\hat{K}\Delta$.

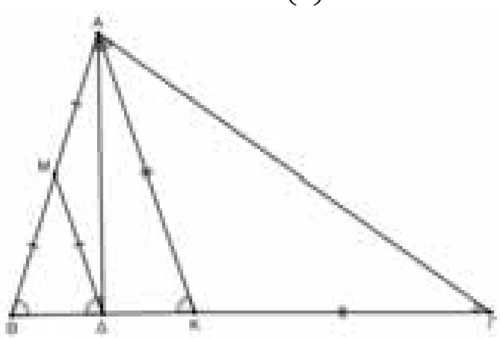
β) Το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

γ) $AK=\Gamma K$. δ) $\Delta\hat{A}\Gamma=45^\circ+\dfrac{\Delta\hat{A}K}{2}$.

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, τότε:

ε) Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση : α) Αφού $MB=M\Delta$ έπεται ότι το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ισοσκελές, συνεπώς $M\hat{B}\Delta=M\hat{\Delta}B$ (1) (ως προσκείμενες στη βάση ΒΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΜ). Επιπλέον $B\hat{\Delta}M=A\hat{K}\Delta$ (2) ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των $M\Delta\parallel AK$ με τέμνουσα την ΒΓ. Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $M\hat{B}\Delta=A\hat{K}\Delta$ (3).



β) Επειδή $M\hat{B}\Delta=A\hat{K}\Delta$, το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές με $AB=AK$ (4) και ΑΔ διχοτόμο (αφού Δ ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΒΚ του ισοσκελούς ΑΒΚ), άρα $B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}K$ (5). Επιπλέον $M\hat{\Delta}A=\Delta\hat{A}K$ (6) ως εντός εναλλάξ των $M\Delta\parallel AK$ με τέμνουσα την ΑΔ. Από (5), (6) $M\hat{\Delta}A=B\hat{A}\Delta$ (7), άρα το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισοσκελές με $MA=M\Delta$ (8).

γ) Η γωνία $A\hat{K}\Delta$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΓΚ, άρα ισχύει: $A\hat{K}\Delta=K\hat{A}\Gamma+\hat{\Gamma}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\hat{B}=K\hat{A}\Gamma+\hat{\Gamma}$ $\overset{\hat{B}=2\hat{\Gamma}}{\Leftrightarrow}K\hat{A}\Gamma=\hat{\Gamma}$ (9). Από (9) έπεται ότι ΑΚΓ ισοσκελές με $AK=K\Gamma$ (10).

δ) Από (γ) το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{\Gamma}=K\hat{A}\Gamma$ (11). Επιπλέον $\hat{\Gamma}+K\hat{A}\Gamma+A\hat{K}\Gamma=180^\circ$ και από (11) προκύπτει $\hat{\Gamma}=90^\circ-\dfrac{A\hat{K}\Gamma}{2}$ (12). Η γωνία $A\hat{K}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΚ άρα $A\hat{K}\Gamma=\Delta\hat{A}K+A\hat{\Delta}K$ (13). Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει ότι: $\Delta\hat{A}\Gamma=180^\circ-\hat{\Gamma}-A\hat{\Delta}\Gamma$ (14). Άρα,

$$(14)\overset{(12)}{\Rightarrow}\Delta\hat{A}\Gamma=90^\circ+\frac{A\hat{K}\Gamma}{2}-A\hat{\Delta}\Gamma\overset{(13)}{\Rightarrow}\Delta\hat{A}\Gamma=45^\circ+\frac{\Delta\hat{A}K}{2}$$

διότι $A\hat{\Delta}K=A\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$.

ε) Αφού $\hat{B}=2\hat{\Gamma}<90^\circ$ η ΒΓ είναι αδύνατο να είναι βάση του ισοσκελούς τριγώνου. Οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν η βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι η ΑΓ τότε $B\hat{A}\Gamma=\hat{\Gamma}$ και $A\hat{B}\Gamma=2\hat{\Gamma}$. Οπότε $B\hat{A}\Gamma+A\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}=180^\circ\Rightarrow\hat{\Gamma}=45^\circ$ και $A\hat{B}\Gamma=90^\circ$, άτοπο (από υπόθεση)

2η περίπτωση: Τελικά η βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΑΒ και έχουμε $A\hat{B}\Gamma=B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma=2\hat{\Gamma}$. Άρα $\hat{\Gamma}=36^\circ$ και $A\hat{B}\Gamma=B\hat{A}\Gamma=72^\circ$.

Άσκηση 2η :Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A\Gamma=2B\Gamma$, $B\hat{A}\Gamma=\dfrac{1}{2}\Delta\hat{A}\Gamma$ και κέντρο Ο. Αν Ε, Ζ οι προβολές των Α, Ο στις ΒΔ και ΑΒ (αντίστοιχα), να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΑΕ, ΑΓ τριχοτομούν τη γωνία $\Delta\hat{A}B$. β) $OZ=\dfrac{OB}{2}$

γ) Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Αν από την κορυφή Δ φέρουμε κάθετη στη διαγώνιο που τέμνει τις διχοτόμους των γωνιών $\Gamma\hat{A}B$ και $B\hat{\Gamma}A$ στα σημεία Η, Θ αντίστοιχα, να δείξετε ότι: δ) $AB-\Delta H=\Delta\Theta-A\Delta$

Λύση: α) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παρ/μο με κέντρο Ο τότε $A\Delta\,\|\!=B\Gamma$ (1) και $AO=O\Gamma=\dfrac{A\Gamma}{2}$ (2). Άρα:

$A\Gamma=2B\Gamma\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}}AO=A\Delta$ (3). Το ΑΕ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΔ (από (3)), άρα είναι και διάμεσος και διχοτόμος, οπότε ισχύει ότι: $\Delta E=OE=\dfrac{O\Delta}{2}$ (4) και $\dfrac{\Delta\hat{A}\Gamma}{2}=\Delta\hat{A}E=E\hat{A}O=B\hat{A}\Gamma$ (5). Από την (5) προκύπτει ότι τα τμήματα ΑΓ, ΑΕ τριχοτομούν τη γωνία $\Delta\hat{A}B$.

β) Αφού $OZ\perp AB$, $OE\perp AE$ (από υπόθεση) και Ο σημείο της διχοτόμου ΑΟ της γωνίας $E\hat{A}Z$ (από σχέση (5)), έπεται ότι $OZ=OE$ (6). Από τις (4), (6) $OZ=\frac{O\Delta}{2}\overset{O\Delta=OB}{=}\frac{OB}{2}$ (7) (διότι οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται).

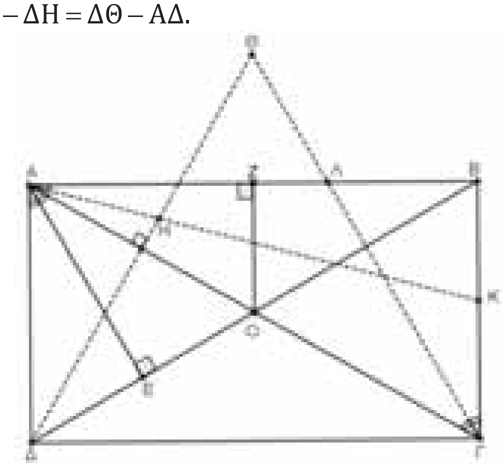
γ) Αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΒ ισχύει ότι $OZ=\frac{OB}{2}$ παίρνουμε $O\hat{B}Z=30^\circ$, οπότε για το ορθογώνιο ΑΕΒ προκύπτει ότι $E\hat{A}B=60^\circ$ (8). Από (5), (8) $\Delta\hat{A}\Gamma=90^\circ$ επομένως ΑΒΓΔ ορθογώνιο.

δ) Αν οι ΑΚ, ΓΛ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\Gamma\hat{A}B$, $B\hat{\Gamma}A$ αντίστοιχα, παίρνουμε:

$$\Delta\hat{A}H=\Delta\hat{A}\Gamma+\Gamma\hat{A}H=\Delta\hat{A}\Gamma+\frac{\Gamma\hat{A}B}{2} \quad (9)$$

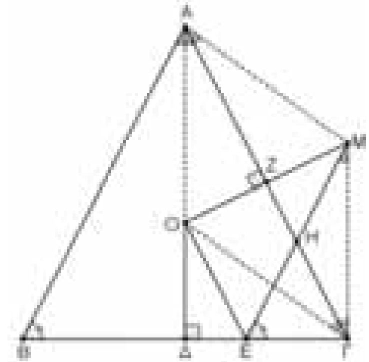
$$A\hat{H}\Delta=90^\circ-\Gamma\hat{A}H=90^\circ-\frac{\Gamma\hat{A}B}{2} \quad (10).$$

Όμως $\Delta\hat{A}\Gamma+\frac{\Gamma\hat{A}B}{2}=90^\circ-\frac{\Gamma\hat{A}B}{2}$, οπότε $\Delta A=\Delta H$ (αφού $\Delta\hat{A}H=A\hat{H}\Delta$). Ομοίως $\Delta\Theta=\Delta\Gamma=AB$. Άρα $AB-\Delta H=\Delta\Theta-A\Delta$.



Άσκηση 3η : Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=A\Gamma$) και Ο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του. Παίρνουμε το σημείο Μ που είναι συμμετρικό του Ο ως προς την πλευρά ΑΓ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι: α) Το τετράπλευρο ΑΟΓΜ είναι ρόμβος.
β) $EH=\Gamma H$ γ) Το τρίγωνο ΗΜΓ είναι ισοσκελές.
δ) Το σημείο Η είναι μέσο του ΜΕ.
ε) $E\hat{O}M=90^\circ$

Λύση: α) Έστω Ζ η προβολή του Ο στην πλευρά ΑΓ. Το τετράπλευρο ΑΟΓΜ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι αυτού διχοτομούνται (διότι $OZ=OM$ και $AZ=Z\Gamma$). Επίσης από υπόθεση, οι διαγώνιοι του παρ/μου ΑΟΓΜ τέμνονται κάθετα ($A\Gamma\perp OM$, αφού ΟΜ μεσοκάθετος της ΑΓ), άρα το ΑΟΓΜ είναι ρόμβος.



β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma=A\hat{\Gamma}B$ (1) (ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς ΑΒΓ). Επιπλέον $M\hat{E}\Gamma=A\hat{B}\Gamma$ (2) ως εντός εκτός και επί τα αυτά (διότι $ME\parallel AB$ με τέμνουσα την ΒΓ). Από (1), (2) $H\hat{E}\Gamma=A\hat{\Gamma}B$ (3), άρα το τρίγωνο ΓΕΗ είναι ισοσκελές με $\Gamma H=EH$ (4).

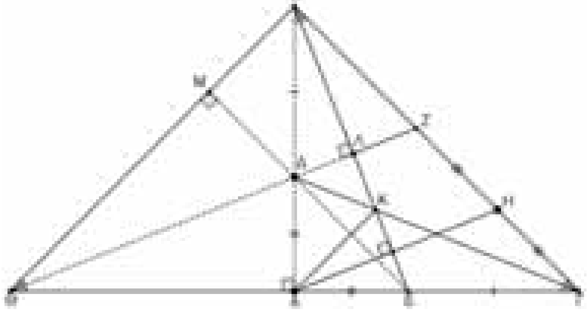
γ) Αφού ΑΟΓΜ ρόμβος ισχύει ότι $OA\parallel=\Gamma M$ και αφού $OA\perp B\Gamma$ (από υπόθεση) θα έχουμε ότι $M\Gamma\perp B\Gamma$, δηλαδή $M\hat{\Gamma}B=90^\circ$ (5). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΕ έχουμε ότι $H\hat{M}\Gamma+\Gamma\hat{E}M=90^\circ$ αλλά και $E\hat{\Gamma}H+H\hat{\Gamma}M=90^\circ$, άρα $H\hat{M}\Gamma=H\hat{\Gamma}M$ (6) δηλαδή το τρίγωνο ΗΜΓ είναι ισοσκελές και ισχύει $HM=H\Gamma$ (7).

δ) Από τις (4), (7) προκύπτει ότι $HM=HE$, άρα το σημείο Η είναι το μέσο του ΜΕ.

ε) Τα σημεία Ζ, Η είναι τα μέσα των πλευρών ΟΜ, ΜΕ (αντίστοιχα) του τριγώνου ΜΟΕ, άρα $ZH\parallel OE$ ή $OE\parallel A\Gamma$ (8). Αφού $OM\perp A\Gamma$ (από υπόθεση) και $OE\parallel A\Gamma$, έπεται ότι $OM\perp OE$.

Άσκηση 4η : Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=A\Gamma$) με $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta=AE$. Οι κάθετες από τα Δ και Α προς την ΒΕ τέμνουν την ΒΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Προεκτείνοντας την ΖΔ τέμνει την ευθεία ΓΑ στο σημείο Θ. Αν Κ το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ να αποδείξετε ότι: α) Η ΑΚ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ.
β) Η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Theta\hat{\Delta}\Gamma$.
γ) $ZH=H\Gamma$. δ) $B\hat{\Theta}\Delta=90^\circ-Z\hat{\Delta}E$.

Λύση: α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ ($B\hat{A}E=90^\circ$) και ΑΓΔ ($\Gamma\hat{A}\Delta=90^\circ$) είναι ίσα αφού έχουν τις ομόλογες κάθετες πλευρές τους ίσες (διότι από $AB=A\Gamma$ (1) και $A\Delta=AE$ (2)). Επομένως τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα, άρα: $ΒΕ=ΓΔ$ (3), $Α\hat{Β}Ε=Α\hat{Γ}Δ$ (4), $Β\hat{Ε}Α=Γ\hat{Δ}Α$ (5). Από υπόθεση το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$, άρα $Α\hat{Β}Γ=Α\hat{Γ}Β$ (6) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του τριγώνου ΑΒΓ.

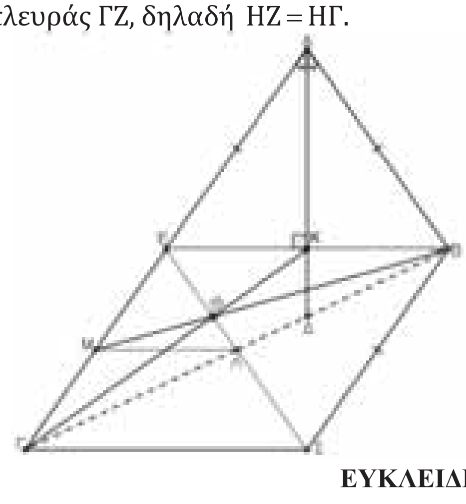


Από τις (5), (6) προκύπτει ότι:

$Γ\hat{Β}Ε=Α\hat{Β}Γ-Α\hat{Β}Ε\overset{(5)}{\underset{(6)}{=}}Α\hat{Γ}Β-Α\hat{Γ}Δ=Β\hat{Γ}Δ$ (7), άρα το τρίγωνο ΒΚΓ ισοσκελές με $ΒΚ=ΚΓ$ (8). Από τις (3), (8) έπεται ότι $ΚΔ=ΚΕ$ (9). Αφού $ΑΔ=ΑΕ$ (από υπόθεση) και $ΚΔ=ΚΕ$ (από (9)) έπεται ότι τα σημεία Α και Κ ισαπέχουν από τα άκρα του ευθ. τμήματος ΔΕ, οπότε η ευθεία ΑΚ είναι η μεσοκάθετος του ΔΕ.

β) Από την υπόθεση ισχύει ότι $ΘΖ\perp ΒΕ$ και $ΘΓ\perp ΑΒ$. Άρα $Γ\hat{Θ}Ζ=Α\hat{Β}Ε$ (10) ως οξείες γωνίες (αφού ανήκουν σε ορθογώνια τρίγωνα) που έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Προκύπτει ότι το τρίγωνο ΓΔΘ είναι ισοσκελές με ΔΘ=ΔΓ (αφού από (4), (10) παίρνουμε $Α\hat{Γ}Δ=Γ\hat{Θ}Ζ$). Άρα η ΑΔ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΓΔΘ, άρα είναι και διχοτόμος και διάμεσος. Άρα ΔΑ διχοτόμος της $Θ\hat{Δ}Γ$.

γ) Από ερώτημα (β) ισχύει ότι ΑΔ διάμεσος, άρα το σημείο Α είναι μέσο της ΓΘ. Επιπλέον $ΑΗ\parallel ΘΖ$ (αφού από υπόθεση $ΒΕ\perp ΘΖ$ και $ΒΕ\perp ΑΗ$). Στο τρίγωνο ΓΖΘ, το Α είναι μέσο της πλευράς ΓΘ και $ΑΗ\parallel ΘΖ$, άρα το Η είναι μέσο της πλευράς ΓΖ, δηλαδή $ΗΖ=ΗΓ$.



δ) Στο τρίγωνο ΒΕΘ, τα ΒΑ και ΘΛ (όπου Λ το σημείο τομής των ΒΕ και ΘΖ) είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους Δ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΕΘ. Επομένως είναι και $ΔΕ\perp ΒΘ$. Αν Μ η προβολή του Ε επί της πλευράς ΒΘ τότε για το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΜΘ ισχύει ότι: $Μ\hat{Θ}Δ+Μ\hat{Δ}Θ=90°$ (11). Αντίστοιχα για το ορθογώνιο ΔΛΕ ισχύει $Ε\hat{Δ}Λ+Λ\hat{Ε}Δ=90°$ (12). Όμως $Ε\hat{Δ}Λ=Μ\hat{Δ}Θ$ (ως κατακορυφήν), άρα $Μ\hat{Θ}Δ+Ε\hat{Δ}Λ=90°$ ή $Β\hat{Θ}Δ=90°-Ζ\hat{Δ}Ε$.

Άσκηση 5η: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ=2ΑΒ$ και ΑΔ διχοτόμος. Από την κορυφή Β φέρω κάθετη στην ΑΔ, η οποία τέμνει την ΑΔ στο Κ και την ΑΓ στο Ε. Επιπλέον θεωρούμε Λ το μέσο του ΒΓ και στην προέκταση του ΕΛ παίρνουμε τμήμα $ΛΣ=ΛΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ε είναι μέσο του ΑΓ. β) $ΑΒ=ΒΣ$

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΣΕ είναι ρόμβος.

Έστω Θ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΓΚ και ΕΣ.

δ) Αν η ΒΘ τέμνει την ΑΓ στο Μ τότε το τρίγωνο ΕΛΜ είναι ισοσκελές.

ε) Τα σημεία Α, Δ, Σ είναι συνευθειακά.

Λύση. α) Στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος. Άρα το ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΕ$ (1). Από υπόθεση ισχύει ότι $2ΑΒ=ΑΓ$ (2), άρα προκύπτει ότι:

$$ΑΓ=ΑΕ+ΕΓ\overset{(2)}{\Rightarrow}2ΑΒ=ΑΕ+ΕΓ\overset{(1)}{\Rightarrow}2ΑΕ=ΑΕ+ΕΓ$$

$\Rightarrow ΑΕ=ΕΓ$ (3). Άρα το Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΓ.

β) Το τετράπλευρο ΕΒΣΓ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του ΕΣ και ΒΓ διχοτομούνται, διότι $ΕΛ=ΛΣ$ (4) (από υπόθεση) και $ΓΛ=ΛΒ$ (5) (αφού Λ μέσο της πλευράς ΒΓ).

Άρα, $ΒΣ=ΓΕ\overset{(1)}{\underset{(3)}{=}}ΑΕ=ΑΒ$ (6).

γ) Από το ερώτημα (β) το ΕΒΣΓ είναι παρ/μο, άρα $ΒΣ\parallel= ΓΕ$, οπότε και $ΒΣ\parallel= ΑΕ$ (7). Άρα το τετράπλευρο ΑΒΣΕ είναι παρ/μο αφού από την (7) έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες και ίσες. Επιπλέον, οι διαδοχικές πλευρές ΑΕ και ΑΒ είναι ίσες, οπότε το παρ/μο ΑΒΣΕ είναι ρόμβος.

δ) Στο τρίγωνο ΒΓΕ οι διάμεσοι ΓΚ και ΕΛ τέμνονται στο Θ. Άρα το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΓΕ. Αφού η ΒΜ διέρχεται από το Θ, έπεται ότι η ΒΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΓΕ, οπότε Μ μέσο του ΓΕ.

Τότε, $ΕΜ=\frac{ΓΕ}{2}=\frac{ΑΒ}{2}=\frac{ΕΣ}{2}=ΕΛ$, (αφού το ΑΒΣΕ είναι ρόμβος και άρα $ΑΒ=ΕΣ$). Επομένως το τρίγωνο ΕΛΜ είναι ισοσκελές.

ε) Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου ΑΒΣΕ τέμνονται κάθετα προκύπτει ότι $ΕΒ \perp ΑΣ$. Από υπόθεση ισχύει ότι $ΕΒ \perp ΑΔ$. Όμως από το Α άγεται μοναδική κάθετη στην ΒΕ, οπότε τα σημεία Α, Δ, Σ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 6η: **Έστω Μ τυχαίο σημείο της διαγωνίου ΑΓ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Από το Μ φέρνουμε $ΜΕ \perp ΑΒ$ και ευθεία παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει τις ΑΔ, ΒΓ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

α) **Το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι τετράγωνο.**

β) **Η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $Ε\hat{Γ}Ζ$.**

γ) **$ΜΔ = ΕΗ$.** δ) **Η ευθεία ΔΜ τέμνει κάθετα την ΕΗ.**

Λύση: α) Από υπόθεση ισχύει ότι $ΖΜ \parallel ΑΕ$ και $ΖΑ \perp ΑΕ$, άρα $ΖΜ \perp ΖΑ$. Συνεπώς το ΑΕΜΖ είναι ορθογώνιο παρ/μο ως τετράπλευρο με τρεις ορθές γωνίες. Επιπλέον η διαγώνιος ΑΜ διχοτομεί την γωνία $Ζ\hat{Α}Ε$ (αφού η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί την ορθή γωνία της κορυφής Α του τετραγώνου ΑΒΓΔ). Άρα το ΑΕΜΖ είναι τετράγωνο, αφού είναι ορθογώνιο και η διαγώνιός του ΑΜ διχοτομεί την $Ζ\hat{Α}Ε$.

β) Φέρνουμε την ΖΕ, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Λ. Ισχύει ότι $ΖΕ \perp ΑΜ$ με Λ κοινό μέσο των ΑΜ, ΖΕ (ως διαγώνιες του τετραγώνου ΑΕΜΖ). Άρα το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισοσκελές με $ΓΖ = ΓΕ$, αφού ΓΛ διάμεσος και ύψος (που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΓΕΖ), άρα και διχοτόμος της $Ε\hat{Γ}Ζ$.

γ) Το ΑΒΗΖ είναι ορθογώνιο παρ/μο, ως τετράπλευρο με τρεις ορθές $(Ζ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Η = Α\hat{Ζ}Η = 90°)$ άρα $ΑΒ = ΖΗ$. Επομένως $ΑΒ = ΖΗ = ΑΔ$. Οπότε,

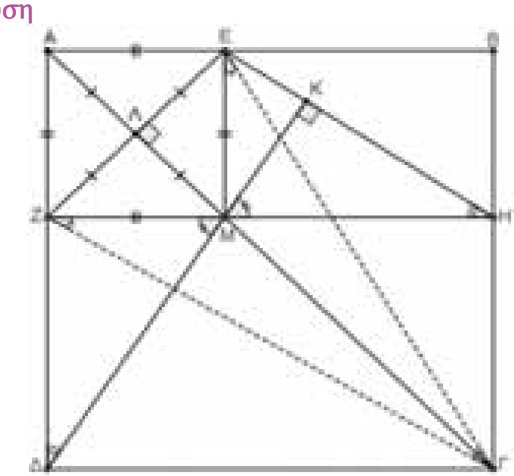
$$ΖΗ = ΑΔ \Rightarrow ΖΜ + ΜΗ = ΑΖ + ΖΔ \overset{ΑΖ=ΖΜ}{\Rightarrow} ΜΗ = ΖΔ.$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΖΜ $(Δ\hat{Ζ}Μ = 90°)$ και ΕΜΗ $(Ε\hat{Μ}Η = 90°)$ είναι ίσα αφού έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ίσες (διότι $ΜΗ = ΖΔ$ και $ΕΜ = ΜΖ$), άρα $ΜΔ = ΕΗ$.

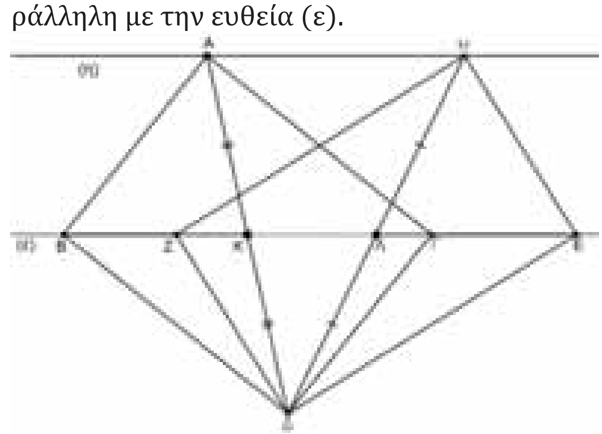
δ) Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΔΖΜ και ΕΜΗ παίρνουμε $Ζ\hat{Δ}Μ = Ε\hat{Η}Μ$. Η προέκταση της ΔΜ τέμνει την ΕΗ στο σημείο Κ. Όμως $Κ\hat{Μ}Η = Ζ\hat{Μ}Δ$ (ως κατακορυφήν γωνίες). Αλλά στο τρίγωνο ΔΖΜ ισχύει $Ζ\hat{Δ}Μ + Ζ\hat{Μ}Δ = 90°$, άρα $Μ\hat{Κ}Η = 90°$ (αφού $Κ\hat{Μ}Η + Κ\hat{Η}Μ = 90°$). Τελικά η ΔΜ τέμνει κάθετα την ΕΗ.

Άσκηση 7η: **(Leningrad, 1987) Ένας γεωμέτρης έχει στη διάθεσή του ένα όργανο με το οποίο μπορεί να χαράσει: α) Μια ευθεία που να διέρχεται από δύο δοσμένα σημεία και β) μια ευθεία κάθετη προς δοσμένη ευθεία σε δοσμένο σημείο της. Πώς θα καταφέρει ο γεωμέτρης με τη βοήθεια αυτού του οργάνου να φέρει από ένα σημείο εκτός ευθείας κάθετη προς την ευθεία αυτή;**

Λύση



Έστω μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Ζητείται να φέρουμε από το Α κάθετη προς την (ε). Δεδομένης της δυνατότητας του οργάνου να χαράξουμε κάθετη προς δοσμένη ευθεία σε δοσμένο σημείο της, αρκεί να φέρουμε παράλληλη ευθεία (η) προς την (ε). Έστω τυχαίο σημείο Β της (ε). Η κάθετη προς την ΑΒ στο Α τέμνει την (ε) στο Γ. Σχηματίζουμε το ορθογώνιο παρ/μο ΑΒΓΔ και προσδιορίζουμε έτσι το σημείο Δ. Έστω Ε ένα επιπλέον τυχαίο σημείο της (ε). Με τον ίδιο τρόπο (μέσω του οργάνου) φέρνουμε $ΔΖ \perp ΔΕ$, $ΖΗ \perp ΖΔ$ και $ΕΗ \perp ΔΕ$. Το ΔΕΗΖ είναι επίσης ορθογώνιο. Αλλά στο ορθογώνιο οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Επομένως τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΔΗ (αντίστοιχα). Άρα στο τρίγωνο ΑΔΗ το τμήμα ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΔΗ. Συνεπώς $ΑΗ \parallel ΚΛ$, δηλαδή η ευθεία ΑΗ είναι παράλληλη με την ευθεία (ε).



Συνεπώς φέραμε από το Α ευθεία παράλληλη προς την (ε), άρα πλέον μπορούμε με τη βοήθεια του οργάνου να φέρουμε κάθετη στο σημείο Α της (η) που θα είναι κάθετη (γιατί;) και στην ευθεία (ε).

Τάξη: Β΄

Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις

Σωτήρης Ε. Λουρίδας

Μια εισαγωγή:

*Είναι προφανές, ότι θα στηριχτούμε στους ορισμούς, την θεωρητική βάση και το πνεύμα του σχολικού βιβλίου, αφού από εκεί αντλούν τη διδακτική τους μέθοδο οι διδάσκοντες, αλλά και τις βασικές τους γνώσεις οι μαθητές μας. Επιδίωξη μας είναι η μεθοδολογική συμπλήρωση με έμφαση στην διαδικασία της **Σκέψης ή Ανάλυσης** (Διαδικασία που απαντά στο ερώτημα: πως το σκέφτηκες; κάτω βέβαια από τη δημιουργία εικασιών και ευρύτερης ανίχνευσης και που θα την ενσωματώσουμε στην Λύση) πριν τη **Σύνθεση** που θα αποτελεί τη **Λύση** και που τελικά θα παρουσιάζεται ως μία λιτή, αλλά ακριβής διαδικασία. Αυτά επειδή όπως ήδη αναφέραμε η λύση είναι αποτέλεσμα της «καθοδήγησης» από την Ανάλυση ή Σκέψη.*

1. Πολυώνυμα

Ορισμός:

Το σχολικό βιβλίο έχει τον ορισμό:

Πολυώνυμο του x είναι κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, που συμβολίζεται ως $P(x)$, όπου ν είναι φυσικός αριθμός και οι **συντελεστές** $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν έχουμε $\alpha_\nu\neq 0$, τότε ο ν καλείται **βαθμός του πολυωνύμου** και γράφουμε $\beta\alpha\theta(P(x))=\nu$. Εδώ κάνοντας μία «υπέρβαση» θα αναφερθούμε και στον αυστηρότερο ορισμό του πολυωνύμου: **Πολυώνυμο ή πολυωνυμική συνάρτηση** είναι η συνάρτηση P με **πεδίο ορισμού** το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, όπου ν είναι φυσικός αριθμός και οι **συντελεστές** $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Θεωρήσαμε σκόπιμο να αναφερθούμε και στον αυστηρότερο ορισμό, αφού έτσι έχουμε επαφή με την γραφική παράσταση (ή γράφημα) της συνάρτησης αυτής που λόγω του πεδίου ορισμού της και του τύπου της είναι συνεχής γραμμή που την «χαράσσεις χωρίς να σηκώσεις τη μύτη του μολυβιού», αλλά και για να κατανοήσουμε την ισότητα δύο πολυωνύμων μέσα από την ισότητα δύο συναρτήσεων.

Αν λοιπόν ένα πολυώνυμο $P(x)$, ν βαθμού παίρνει την ίδια τιμή α για τουλάχιστον $\nu+1$ διαφορετικές ανά δύο τιμές της μεταβλητής x, τότε αυτό θα είναι το **σταθερό πολυώνυμο** $P(x)=\alpha$, που ως γνωστόν είναι πολυώνυμο **μηδενικού βαθμού**. Επομένως αν έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $\nu>0$, τότε κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ μπορεί να τέμνει την γραφική του παράσταση σε ν το πολύ σημεία.

Επισήμανση 1:

Έχουμε $x^\nu-\alpha^\nu=(x-\alpha)H(x)$,
$H(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^2+\ldots+x\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-1}$,
επίσης ισχύει $x^{2\nu+1}+\alpha^{2\nu+1}=(x+\alpha)L(x)$,
$L(x)=x^{2\nu}-x^{2\nu-1}\alpha+x^{2\nu-2}\alpha^2-\ldots-x\alpha^{2\nu-1}+\alpha^{2\nu}$.

Γνωρίζουμε ότι αν $\alpha\neq 0$ και ν άρτιος φυσικός, τότε το πολυώνυμο $g(x)=x+\alpha$ δεν είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x)=x^\nu+\alpha^\nu$.

Αυτό δεν σημαίνει ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+\alpha^\nu$, $\alpha\neq 0$ δεν παραγοντοποιείται για κανένα φυσικό ζυγό ν. Πράγματι π.χ. έχουμε:
$x^6+\alpha^6=(x^2)^3+(\alpha^2)^3=(x^2+\alpha^2)(x^4-\alpha^2x^2+\alpha^2)$.

Επισήμανση 2:

Για τα πολυώνυμα

$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και

$Q(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\beta_1 x+\beta_0$,

μπορούμε να πούμε ότι το γινόμενο τους εκτελείται με βάση την επιμεριστική ιδιότητα αρχίζοντας από τα τελευταία μονώνυμα του πολυωνύμου για λόγους ευκολίας ως εξής:

$P(x)Q(x)=\alpha_0\beta_0+(\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1)x+$

$+(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0)x^2+...$

Θέμα 1

Α) Να αποδειχτεί ότι ένα πολυώνυμο $P(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0\ (\alpha_3\neq 0)$ τρίτου βαθμού με πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3, διαφορετικές ανά δύο γράφεται και ως $P(x)=\alpha_3(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$. Ποια θα είναι η σχέση μεταξύ των συντελεστών του πολυωνύμου αυτού με τις ρίζες του;

Β) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$,

επιλύστε το σύστημα $\left.\begin{aligned}\alpha^3+\alpha^2x+ay+z=\delta\\ \beta^3+\beta^2x+\beta y+z=\delta\\ \gamma^3+\gamma^2x+\gamma y+z=\delta\end{aligned}\right\}$

Απάντηση

Α) Μπορούμε να θεωρήσουμε την ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης $P(x)=(x-\rho_1)\pi(x)$ με το πηλίκο $\pi(x)$ να είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Επειδή έχουμε $P(\rho_2)=0$ και $\rho_2\neq\rho_1$ προκύπτει ότι

$(\rho_2-\rho_1)\pi(\rho_2)=0\Leftrightarrow\pi(\rho_2)=0$, επομένως παίρνουμε $\pi(x)=(x-\rho_2)\pi_1(x)$ με το $\pi_1(x)$ να είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, άρα θα ισχύει $P(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\pi_1(x)$.

Επειδή έχουμε $P(\rho_1)=P(\rho_2)=0$, και $(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1)\neq 0$ θα ισχύει $\pi_1(\rho_3)=0$ και έτσι καταλήγουμε στην ισότητα $\pi_1(x)=(x-\rho_3)k$, με k πραγματική σταθερά διάφορη του μηδέν. Θα ισχύει λοιπόν για τη σταθερά αυτή k,

$P(x)=k(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$. Έτσι προκύπτει ότι $P(x)=kx^3-k(\rho_1+\rho_2+\rho_2)x^2+$

$+k(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)x-k\rho_1\rho_2\rho_3$.

Οπότε θα έχουμε: $k=\alpha_3$ και $\rho_1+\rho_2+\rho_3=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3}$

$\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $\rho_1\rho_2\rho_3=-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_3}$ (1).

Επισήμανση 3:

Αν έχουμε $\rho_1=\rho_2=\rho\neq\rho_3$, τότε θα ισχύει $P(x)=\alpha_3(x-\rho)^2(x-\rho_3)$ και αν $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho$ θα ισχύει $P(x)=\alpha_3(x-\rho)^3$.

Επισήμανση 4:

Οι τύποι (1) ονομάζονται τύποι του Vieta.

Β) Αν το σύστημα αυτό έχει ως λύση την (x_0,y_0,z_0), τότε θα ισχύει

$\alpha^3+\alpha^2x_0+\alpha y_0+z_0-\delta=0$

$\beta^3+\beta^2x_0+\beta y_0+z_0-\delta=0$.

$\gamma^3+\gamma^2x_0+\gamma y_0+z_0-\delta=0$

Αν σκεφτούμε λίγο θα διαπιστώσουμε ότι ο «μηχανισμός» παραγωγής των εξισώσεων του συστήματος είναι ο ίδιος και είναι το πολυώνυμο, ας πούμε ως προς t για λόγους οπτικής διαφοροποίησης από τις x,y,z με τύπο $P(t)=t^3+x_0t^2+y_0t+z_0-\delta$. Εδώ παρατηρούμε ότι οι α,β,γ είναι οι ρίζες του αφού $P(\alpha)=P(\beta)=P(\gamma)=0$. Από τους προηγούμενους τύπους που είδαμε (Vieta) άμεσα έχουμε $x_0=-\alpha-\beta-\gamma$, $y_0=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,

$z_0=\delta-\alpha\beta\gamma$

Με επαλήθευση τεκμηριώνουμε ότι πράγματι αυτές είναι οι λύσεις.

Θέμα 2

Να αποδείξετε ότι τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων με τύπο $y=kx^2-(5k-1)x+6k-1$, όταν το k διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου xOy.

Απάντηση

Αν υπάρχει σημείο (x_0,y_0) που να ανήκει σε όλες αυτές τις συναρτήσεις, τότε, το πολυώνυμο ως προς k, $P(k)=(x_0^2-5x_0+6)k+(x_0-y_0-1)$ θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο (θα είναι δηλαδή εκ ταυτότητας μηδέν). Αυτό ισχύει όταν και μόνο όταν $\begin{cases} x_0^2-5x_0+6=0 \\ x_0-y_0-1=0 \end{cases}$. Επιλύοντας το σύστημα η πρώτη από τις εξισώσεις μας καταλήγει $x_0=2$ ή $x_0=3$. Από την δεύτερη των εξισώσεων αντίστοιχα παίρνουμε $y_0=1, y_0=2$.

Με εύκολη επαλήθευση τεκμηριώνουμε ότι τα σταθερά σημεία είναι τα $A(2,1)$ και $B(3,2)$.

Θέμα 3

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^{2\nu+1}+(x-1)^{\nu+2}$, όπου ν φυσικός αριθμός διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-x+1$.

Απάντηση

Θα επιχειρήσουμε να παραγοντοποιήσουμε το $P(x)$, ώστε το $Q(x)$ να είναι παράγοντας του.

Αν σκεφτούμε λίγο βλέποντας τα $x^{2\nu+1},(x-1)^{\nu+2}$ του $P(x)$, θα δούμε ότι το $Q(x)$ μπορεί να προκύψει με βάση την **επισήμανση 1**, από τη διαφορά

$$x^{2\nu}-(x-1)^{\nu}=(x^2)^{\nu}-(x-1)^{\nu}=(x^2-x+1)K(x).$$

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να «κτίσουμε» τη διαφορά αυτή.

Έχουμε

$$P(x)=x\cdot x^{2\nu}-x(x-1)^{\nu}+x(x-1)^{\nu}+(x-1)^{\nu+2}$$
$$=x(x^2-x+1)K(x)+(x-1)^{\nu}(x+x^2-2x+1)$$
$$=x(x^2-x+1)K(x)+(x-1)^{\nu}(x^2-x+1)$$
$$=(x^2-x+1)\left[xK(x)+(x-1)^{\nu}\right].$$

Άρα το $P(x)$ διαιρείται με το (x^2-x+1)

Θέμα 4

Αν οι $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ είναι ακέραιοι διάφοροι μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)^2(x-\alpha_4)^2+1$ δεν είναι δυνατό να αναλυθεί σε γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές εκτός βέβαια της περίπτωσης το ένα από πολυώνυμα αυτά να είναι το 1 ή το −1.

Απάντηση

Καταρχάς παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού 8 και ότι $P(x)\geq 1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το γεγονός ότι $P(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, σημαίνει ότι το $P(x)$ δεν δέχεται πραγματικές ρίζες. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν δύο πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές $Q(x),K(x)$ τέτοια ώστε $P(x)=Q(x)\cdot K(x)$ (1). Τότε θα ισχύει $Q(x)>0$ και $K(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $Q(x)<0$ και $K(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι ισχύει $Q(x)>0$ και $K(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε θα ισχύουν οι ισότητες

$$Q(\alpha_1)K(\alpha_1)=1,\ Q(\alpha_2)K(\alpha_2)=1,$$
$$Q(\alpha_3)K(\alpha_3)=1,\ Q(\alpha_4)K(\alpha_4)=1.$$

Επειδή οι παράγοντες των προηγούμενων γινομένων είναι ακέραιοι, (αφού οι συντελεστές των πολυωνύμων $Q(x),K(x)$ είναι ακέραιοι και ταυτόχρονα οι εδώ τιμές της μεταβλητής x είναι επίσης ακέραιοι) προκύπτουν οι ισότητες

$$Q(\alpha_1)=K(\alpha_1)=Q(\alpha_2)=K(\alpha_2)=$$
$$=Q(\alpha_3)=K(\alpha_3)=Q(\alpha_4)=K(\alpha_4)=1.$$

Αν τώρα υποθέσουμε επιπλέον ότι οι βαθμοί των $Q(x),K(x)$ είναι ίσοι (δηλαδή είναι 4^ου^ βαθμού), τότε θα έχουμε ότι

$$Q(\alpha_1)=Q(\alpha_2)=Q(\alpha_3)=Q(\alpha_4)=1 \text{ και}$$
$$K(\alpha_1)=K(\alpha_2)=K(\alpha_3)=K(\alpha_4)=1.$$

Αυτό οδηγεί στο ότι τα πολυώνυμα $Q_1(x)=Q(x)-1, K_1(x)=K(x)-1$, θα έχουν ρίζες τους ακέραιους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

Άρα ισχύουν οι ισότητες:

$Q(x)=\alpha(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)+1$ και $K(x)=\beta(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)+1$, με α,β σταθερούς ακέραιους. Από την σχέση (1) προκύπτει ότι το πολυώνυμο $(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)^2(x-\alpha_4)^2+1$ θα ισούται εκ ταυτότητας με το $\alpha\beta(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)^2(x-\alpha_4)^2+$ $+(\alpha+\beta)(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)^2(x-\alpha_4)^2+1$. Αυτό μας οδηγεί στις σχέσεις $\alpha\beta=1$ και $\alpha+\beta=0$, πράγμα άτοπο.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι ο βαθμός π.χ. του πολυωνύμου $Q(x)$ είναι μικρότερος από εκείνο του $K(x)$, άρα του 4 αλλά θα παίρνει τη τιμή 1 για τέσσερις τιμές, οπότε $Q(x)=1$, που δεν είναι αποδεκτή από την υπόθεση. Για την περίπτωση τώρα που, $Q(x)<0$ και $K(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα καταλήγαμε επίσης σε άτοπο $(\ldots Q(x)=-1)$. Άρα πράγματι δεν είναι δυνατό να αναλυθεί σε γινόμενο ...

2. Πολυωνυμικές εξισώσεις

Εδώ οι κυρίαρχες σκέψεις είναι: η σκέψη για κατάληξη σε παραγοντοποιημένη μορφή ίση με το μηδέν ή σκέψη για συμπλήρωση (όπως αυτή της συμπλήρωσης τετραγώνου που έχουμε δει στο τριώνυμο), ώστε να έχουμε κατάλληλο ανάπτυγμα ή αλγεβρικό άθροισμα για να ισούται με σταθερό αριθμό ή το μηδέν κτλ.

Ας επισημάνουμε εδώ ότι αν δεν εργαστούμε αυστηρά με ισοδυναμίες, αλλά κάτω από το σκεπτικό «αν η εξίσωση ... έχει λύση, τότε,...», πρέπει να επαληθεύουμε. Ας επισημάνουμε εδώ με έμφαση ότι η εύρεση του Πεδίου ή Συνόλου Ορισμού μίας εξίσωσης ή ανίσωσης είναι μέρος της επίλυσης. Επίσης στις εξισώσεις ή ανισώσεις με ριζικά διευκολύνει η κατάλληλη αντικατάσταση, π.χ. για εξισώσεις της μορφής $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\pm\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\delta}=\varepsilon$ μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\geq 0$, $\lambda=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\delta}\geq 0$, οπότε παίρνουμε $\begin{cases}\mu\pm\lambda=\varepsilon\\ \mu^2-\lambda^2=\gamma-\delta\end{cases}$ και βρίσκουμε τα μ,λ...

Θέμα 5

Να λυθεί (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών) η εξίσωση

$$x^6-3\sqrt{2}x^4+6x^2-2\sqrt{2}=8.$$

Απάντηση

Αν σκεφτούμε λίγο θα διαπιστώσουμε ότι εδώ «κρύβεται» ταυτότητα μέσω αναπτύγματος. Έτσι επιλύουμε τελικά την $\left(x^2-\sqrt{2}\right)^3-8=0$ ή την $\left(x^2-\sqrt{2}-2\right)\left[\left(x^2-\sqrt{2}\right)^2+2\left(x^2-\sqrt{2}\right)+4\right]=0$, με $\left(x^2-\sqrt{2}\right)^2+2\left(x^2-\sqrt{2}\right)+4=$ $\left(x^2-\sqrt{2}+1\right)^2+3>0$.

Άρα επιλύουμε την $x^2-\sqrt{2}-2=0$, από την οποία παίρνουμε $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Θέμα 6

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$\left(2x^2-x+1\right)^2=\left(-x^2+x+2\right)\left(x^2+2x-1\right).$$

Απάντηση

Μετά την εκτέλεση των πράξεων καταλήγουμε στην επίλυση της $5x^4-3x^3-5x+3=0$ ή της $5x^4-3x^3-5x+3=0$ ή $5x\left(x^3-1\right)-3\left(x^3-1\right)=0$ ή $\left(x^3-1\right)(5x-3)=0$ ή $(x-1)\left(x^2+x+1\right)(5x-3)=0$, με $x^2+x+1>0$ αφού η διακρίνουσα του είναι αρνητική (μπορούμε να το δούμε και με συμπλήρωση όπως στο θέμα 5). Άρα οι μοναδικές λύσεις είναι οι $x_1=1$ και $x_2=\dfrac{3}{5}$

Θέμα 7

Βρείτε την ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε η εξίσωση $\varepsilon: x^3-\alpha x+\beta=0$, να έχει διπλή ρίζα.

Απάντηση

Καταρχάς θεωρούμε ότι η εξίσωση δέχεται μία διπλή ρίζα και μία μονή, αφού το αντίστοιχο πολυώνυμο $P(x)=x^3-ax+\beta$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Αν θεωρήσουμε ως ρ τη διπλή ρίζα και λ τη μονή θα έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$x^3-\alpha x+\beta=(x-\rho)^2(x-\lambda)\Leftrightarrow$$

$$x^3-\alpha x+\beta=x^3-(2\rho+\lambda)x^2+$$

$$+(2\rho\lambda+\rho^2)x-\rho^2\lambda$$

Από την ισότητα αυτή παίρνουμε

$$\begin{cases}2\rho+\lambda=0\\ 2\rho\lambda+\rho^2=-\alpha\\ \rho^2\lambda=-\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-2\rho\\ 3\rho^2=\alpha\geq 0.\\ 2\rho^3=\beta\end{cases}$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες θα απαλείψουμε το ρ. Ισχύει $27\rho^6=\alpha^3$ και $4\rho^6=\beta^2$, άρα καταλήγουμε στη συνθήκη $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3$.

Αντίστροφα αν ισχύει η $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3$, τότε θα υπάρχει πραγματικός αριθμός k τέτοιος ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3=k^6$, από όπου προκύπτουν οι σχέσεις $\alpha=3k^2$ και $\beta=2k^3$. Αντικαθιστώντας, η εξίσωση γίνεται $x^3-3k^2x+2k^3=0$. Για την επίλυση της χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner ή ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

Η εξίσωση γράφεται

$$x^3-3k^2x+2k^3=0\Leftrightarrow x^3-k^3-3k^2x+3k^3=0\Leftrightarrow$$
$$(x-k)(x^2+kx+k^2)-3k^2(x-k)=0\Leftrightarrow$$
$$(x-k)(x^2+kx-2k^2)=0\Leftrightarrow(x-k)^2(x+2k)=0.$$

Έτσι διαπιστώνουμε ότι έχουμε ως λύσεις τη διπλή $x=k$ και την $x=-2k$. Εδώ μπορούμε να τεκμηριώσουμε με επαλήθευση.

Θέμα 8

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός που επαληθεύει τις $x^{2\nu+1}-x^\nu+\alpha=0$ και $x^3-(1+|\alpha|)x^2-|\alpha|\geq 0$, αν ν τυχόν φυσικός αριθμός και α σταθερά διάφορη του μηδενός». Να χαρακτηριστεί ο ισχυρισμός αυτός ως ΑΛΗΘΗΣ ή ΨΕΥΔΗΣ, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

Απάντηση

Η ανίσωση γράφεται

$$x^3-(1+|\alpha|)x^2-|\alpha|\geq 0\Leftrightarrow(x-1-|\alpha|)x^2\geq|\alpha|$$

με $|\alpha|>0$, άρα

$$(x-1-|\alpha|)x^2>0\Rightarrow x>1+|\alpha|\Rightarrow|x|>1+|\alpha|\ (1).$$

Αν τώρα ο τυχόν $x>1$ επαλήθευε την εξίσωση θα είχαμε τελικά για αυτόν $x>1$ και $x^{2\nu+1}-x^\nu+\alpha=0$.

Έτσι θα ίσχυε $x^{2\nu+1}-x^\nu+\alpha=0\Leftrightarrow x^{2\nu+1}=x^\nu-\alpha$, από όπου προκύπτει

$$|x|^{2\nu+1}=|x^\nu-\alpha|\Rightarrow|x|^{2\nu+1}\leq|x|^\nu+|\alpha|\Rightarrow$$
$$|x|^{2\nu+1}\leq|x|^{2\nu}+|\alpha||x|^{2\nu}\Rightarrow|x|\leq 1+|\alpha|$$

πράγμα άτοπο λόγω της (1). Επομένως ο ισχυρισμός χαρακτηρίζεται ως ΨΕΥΔΗΣ.

Θέμα 9

Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{2x}<\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}$.

Απάντηση

Υπόδειξη: Για να ορίζεται η ανίσωση αυτή, πρέπει και αρκεί $x\geq 0$ και $x\geq 2$ και $x\geq -3$.

Άρα ορίζεται στο σύνολο $[2,+\infty)$.

Επομένως η ανίσωση περιέχει τις λύσεις του συστήματος $\begin{cases}x\geq 2\\ 2x=\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}\right)^2\end{cases}$ και τελικά του $\begin{cases}x\geq 2\\ 2\sqrt{(x-2)(x+3)}+1=0\end{cases}$, που είναι αδύνατο.

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης είναι το κενό σύνολο.

Θέμα 10

α) Να επιλυθεί η εξίσωση
$\left(4+4\alpha^2\right)x^4-\left(8\alpha^2+\alpha+1\right)x^3-\left(\alpha^2-16\alpha+1\right)x^2+$
$\left(2\alpha^2+2\alpha+2\right)x-4\alpha=0$, **με** $\alpha\in\mathbb{R}$ **παράμετρο, και να αποδειχτεί ότι έχει ρητές ρίζες ανεξάρτητες της παραμέτρου** α **.**

β) Να αποδείξετε ότι είναι δυνατό η εξίσωση αυτή να έχει διπλή ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι μόνο μία από τις ρίζες της εξίσωσης αυτής, δεν ανήκει στο διάστημα $[-1,1]$**.**

Απάντηση

α) Εδώ κάνοντας την **Ανάλυση** πριν την **Σύνθεση ή Επίλυση**, θα πρέπει να δώσουμε έμφαση στο ότι η εκφώνηση μας ζητά να έχουμε ρητές ρίζες ανεξάρτητες της παραμέτρου α, και **όχι** να έχουμε **όλες** τις ρίζες ρητές ανεξάρτητες της παραμέτρου α. Αυτό μας οδηγεί καταρχάς, στο ότι θα πρέπει το αντίστοιχο πολυώνυμο της εξίσωσης, να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο πολυωνύμων που το ένα να μην περιέχει τη παράμετρο α. Έτσι διατάσσουμε την εξίσωση κατά τις δυνάμεις του α και προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση

$x\left(4x^3-8x^2-x+2\right)\alpha^2-2\left(4x^3-8x^2-x+2\right)\alpha+$
$x\left(4x^3-8x^2-x+2\right)=0$ ή
$\left(x\alpha^2+x-2\alpha\right)\left(4x^3-8x^2-x+2\right)=0$.

Άρα έχουμε ως λύσεις, την $x=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ και αυτές που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $4x^3-8x^2-x+2=0$, που ισοδύναμα γράφεται

$4x^2(x-2)-(x-2)=0\Leftrightarrow(x-2)\left(4x^2-1\right)=0$,

από την οποία έχουμε $x=2$ ή $x=\dfrac{1}{2}$ ή $x=-\dfrac{1}{2}$.

Παρατήρηση: Η εξίσωση $4x^3-8x^2-x+2=0$ επιλύεται και με βάση το σχήμα Horner.

β) Παρατηρούμε ότι $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}\neq 2$, αφού αν

$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}=2\Leftrightarrow\alpha=\alpha^2+1\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha+1=0$ ή

$\alpha^2+(\alpha-1)^2+1=0$, πράγμα άτοπο.

Αρκεί λοιπόν να υπάρχουν α τέτοια που να ισχύει μία από τις $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}=\dfrac{1}{2}$ (1) ή $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}=-\dfrac{1}{2}$ (2).

Η (1) αποδεικνύεται εύκολα (δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς α), ότι ισχύει όταν $\alpha=2\pm\sqrt{3}$ ενώ η (2) ισχύει όταν $\alpha=-2\pm\sqrt{3}$.

γ) Οι ρίζες $-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}$ ανήκουν στο διάστημα $[-1,1]$. Αν σκεφτούμε λίγο θα δούμε ότι για την ρίζα $x=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$-1\leq\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\leq 1\Leftrightarrow\frac{2|\alpha|}{\alpha^2+1}\leq 1\Leftrightarrow$$

$2|\alpha|\leq|\alpha|^2+1\Leftrightarrow 0\leq\left(|\alpha|-1\right)^2$ που ισχύει, άρα στο διάστημα αυτό δεν ανήκει μόνο η ρίζα 2.

Θέμα 11

Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{4x^2-1}<x+1$**.**

Απάντηση

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα $\Sigma\begin{cases}4x^2-1\geq 0\\ x+1>0\\ 4x^2-1<(x+1)^2\end{cases}$. Η πρώτη από τις εξισώσεις μας δίνει $x\leq-\dfrac{1}{2}$ ή $x\geq\dfrac{1}{2}$, από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $x>-1$ και από τη τρίτη έχουμε: $4x^2-1<(x+1)^2\Leftrightarrow 3x^2-2x-2<0$ με το αριστερό μέλος να είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού που το «θέλουμε» ετερόσημο του συντελεστή 3 του δευτεροβάθμιου όρου του και ρίζες τις $x_1=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$, άρα ισχύει $\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}<x<\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

Επομένως η λύση είναι

$$\frac{1-\sqrt{7}}{3}<x\leq-\frac{1}{2}\ \text{ ή }\ \frac{1}{2}\leq x<\frac{1+\sqrt{7}}{3}.$$

Τάξη: Β΄

Μετρικές Σχέσεις – Εμβαδά

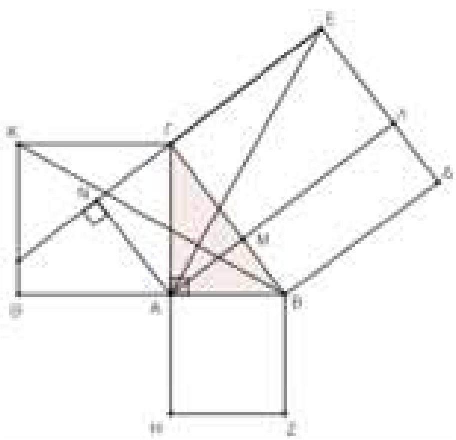
Κανάβης Χρήστος

«ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις»

Βασική Άσκηση (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία $\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο πλευράς ΒΓ είναι ισοδύναμο με τα δύο τετράγωνα που έχουν πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Προτεινόμενη διδακτική λύση (Ευκλείδεια απόδειξη)



Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΓΕΔΒ, ΓΚΘΑ και ΑΗΖΒ με πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Φέρουμε ΑΛ παράλληλη στη ΒΔ άρα και στην ΓΕ. Τα σημεία Γ,Α,Η και τα Θ,Α,Β είναι συνευθειακά. Επίσης φέρουμε το ύψος ΑΝ του τριγώνου ΑΓΕ από την κορυφή Α στη πλευρά ΒΓ. Είναι, $(\text{ΓΕΛΜ}) = \text{ΜΛ} \cdot \text{ΜΓ} = \text{ΕΓ} \cdot \text{ΑΝ} = 2(\text{ΕΓΑ})$ και ανάλογα (ΑΓΚΘ)=2(ΚΓΒ).

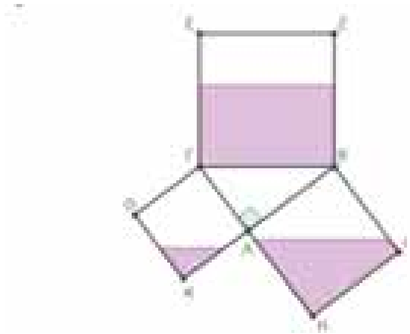
Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΕΓΑ είναι ίσα διότι έχουν,

1) ΑΓ=ΚΓ 2) ΒΓ=ΓΕ 3) $\text{Β}\hat{\Gamma}\text{Κ} = 90^{\circ} + \hat{\Gamma} = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$

Άρα (ΓΕΛΜ)=(ΑΓΚΘ). Ομοίως αποδεικνύεται (ΛΜΒΔ)=(ΑΒΖΗ) και άρα προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή ότι:

$$(\text{ΓΕΛΜ}) + (\text{ΛΜΒΔ}) = (\text{ΓΕΔΒ}) = (\text{ΑΓΚΘ}) + (\text{ΑΒΖΗ})$$

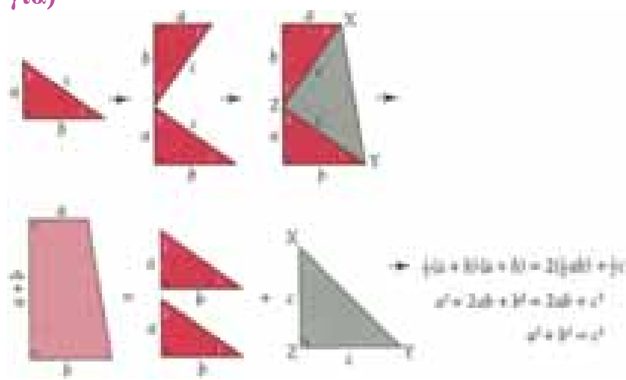
<u>Δραστηριότητα</u>: Μια διδακτική εφαρμογή με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra.



Πηγή: https://www.geogebra.org/m/jZbpk3JY

Σχόλιο – Εργασία: Υπάρχουν πολλές αποδείξεις για το πυθαγόρειο θεώρημα. Μπορεί να δοθεί εργασία στους μαθητές – μαθήτριες να αναζητήσουν και να συγκεντρώσουν κάποιες από αυτές ή και γιατί όχι να ανακαλύψουν μία.

Εφαρμογή 1 (Απόδειξη πυθαγορείου χωρίς λόγια)

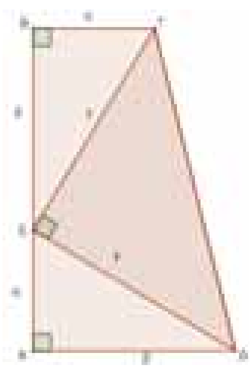


Προτεινόμενη διδακτική λύση

Είναι,

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{\text{ΑΔ} + \text{ΒΓ}}{2} \cdot \text{ΑΒ} = \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot (\alpha + \beta) = \frac{(\alpha + \beta)^2}{2}$$

και



$$(\text{ΕΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΕ} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta$$

$$(\text{ΕΑΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΕ} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta$$

$$(\text{ΓΕΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΕΔ} \cdot \text{ΕΓ} = \frac{1}{2}\gamma \cdot \gamma = \frac{1}{2}\gamma^2$$

Όμως είναι,

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΕΒΓ}) + (\text{ΕΑΔ}) + (\text{ΓΕΔ})$$

Επομένως,

$$\frac{(\alpha + \beta)^2}{2} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta + \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta + \frac{1}{2}\gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta + \gamma^2 \Leftrightarrow$$

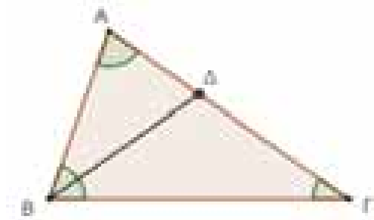
$$\alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta + \beta^2 = 2\alpha \cdot \beta + \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Εφαρμογή 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Να δείξετε ότι $\text{ΑΓ}^2 - \text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$

Προτεινόμενη διδακτική λύση (1ος τρόπος)

Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ. Από υπόθεση είναι $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \Delta\hat{B}\Gamma$. Επομένως το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΔΒ=ΔΓ.



Η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ επομένως ισχύει ότι,

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma} = \hat{B}$$

Επομένως, $\dfrac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{A\Delta \cdot B\Delta}{AB \cdot B\Gamma}$ (1)

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουν και το ίδιο ύψος ΒΔ, συνεπώς

$$\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}A\Delta \cdot B\Delta}{\frac{1}{2}A\Gamma \cdot B\Delta} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει,

$$\frac{A\Delta \cdot B\Delta}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot B\Gamma \overset{(*)}{\underset{B\Delta=\Delta\Gamma}{\Leftrightarrow}}$$

$$A\Gamma \cdot \frac{B\Gamma \cdot A\Gamma}{B\Gamma + AB} = AB \cdot B\Gamma \Leftrightarrow$$

$$A\Gamma^2 = AB^2 + AB \cdot B\Gamma \Leftrightarrow AB \cdot B\Gamma = A\Gamma^2 - AB^2$$

<u>Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου</u> (*): Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και ΒΔ διχοτόμο ισχύει ότι,

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\alpha}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A + \Delta\Gamma} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta\Gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Delta\Gamma = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha+\gamma} \text{ και } A\Delta = A\Gamma - \Delta\Gamma = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha+\gamma}$$

Προτεινόμενη διδακτική λύση (2ος τρόπος)

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι έχουν κοινή γωνία την $\hat{B}$ και $A\hat{B}\Delta = \dfrac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma}$. Επομένως έχουν πλευρές ανάλογες. Δηλαδή,

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = A\Delta \cdot A\Gamma.$$

Είναι όμως $A\Delta = \dfrac{\beta \cdot \gamma}{\alpha+\gamma}$ επομένως,

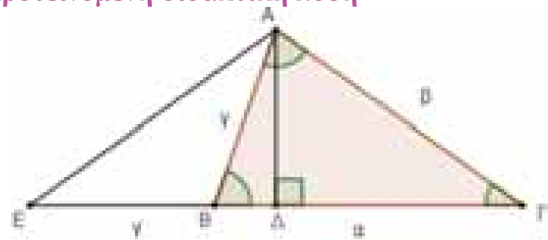
$$AB^2 = A\Delta \cdot A\Gamma \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha+\gamma} \cdot \beta \Leftrightarrow \gamma^2 \cdot \alpha + \gamma^3 = \beta^2 \cdot \gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma \cdot \alpha + \gamma^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 - \gamma^2 = \alpha \cdot \gamma$$

Εφαρμογή 3

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Προεκτείνουμε την ΒΓ κατά ΒΕ=ΑΒ. Να δείξετε ότι $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha \cdot \gamma$

Προτεινόμενη διδακτική λύση



Είναι ΒΕ=ΒΑ άρα το ΑΒΕ είναι ισοσκελές. Η γωνία $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΕ επομένως ισχύει ότι $\hat{B} = 2A\hat{E}B = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = A\hat{E}B$ άρα και το ΑΕΓ είναι ισοσκελές. Συνεπώς το ύψος του ΑΔ είναι και διάμεσος άρα $\Gamma\Delta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Επίσης είναι,

$$\hat{B} < 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} < 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} < 90^o$$

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία $\hat{\Gamma}$ προκύπτει ότι,

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

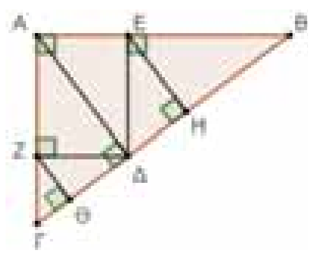
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow \gamma^2 = \beta^2 - \alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = \alpha \cdot \gamma$$

<u>Σχόλιο:</u> Ουσιαστικά η εφαρμογή 3 αποτελεί έναν τρίτο τρόπο λύσης της εφαρμογής 2 χωρίς χρήση του θεωρήματος εσωτερικής διχοτόμου που είναι εκτός διδακτέας ύλης.

Εφαρμογή 4

Στο σχήμα που ακολουθεί να δείξετε ότι $\Delta H = \Delta\Theta$.



Προτεινόμενη διδακτική λύση

Τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι έχουν γωνία $\hat{B}$ κοινή και $B\hat{E}\Delta = \hat{A} = 90^o$. Επομένως $\dfrac{EB}{\Delta B} = \dfrac{AB}{\Gamma B}$ (1) και $\dfrac{Z\Gamma}{\Delta\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{\Gamma B}$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι,

$$\Delta E^2 = EA \cdot EB \ (3)$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ έχουμε,

$$\Delta E^2 = \Delta H \cdot \Delta B \Leftrightarrow \Delta H = \frac{\Delta E^2}{\Delta B} \overset{(3)}{=} \frac{EA \cdot EB}{\Delta B} \overset{(1)}{=} EA\frac{AB}{\Gamma B}$$

Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι, $\Delta Z^2 = ZA \cdot Z\Gamma$ (4) ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΓ έχουμε,

$$\Delta Z^2 = \Delta\Theta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Theta = \frac{\Delta Z^2}{\Delta\Gamma} \overset{(4)}{=} \frac{ZA \cdot Z\Gamma}{\Delta\Gamma} \overset{(2)}{=} ZA \cdot \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$$

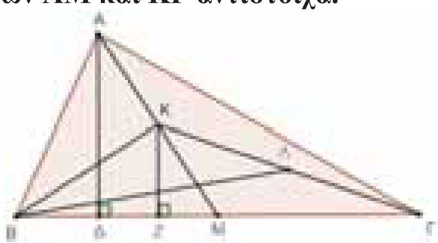
Τέλος τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι είναι ορθογώνια και $A\hat{Z}E = A\hat{\Delta}E = \hat{B}$ ως συμπληρωματικές της $E\hat{\Delta}B$. Συνεπώς,

$$\frac{EA}{ZA} = \frac{A\Gamma}{AB} \Leftrightarrow EA \cdot AB = ZA \cdot A\Gamma \overset{:\Gamma B}{\Leftrightarrow}$$

$$EA \cdot \frac{AB}{\Gamma B} = ZA \cdot \frac{A\Gamma}{\Gamma B} \Leftrightarrow \Delta H = \Delta\Theta$$

Εφαρμογή 5 (Βασική άσκηση)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΜ διάμεσο, Κ και Λ μέσα των ΑΜ και ΚΓ αντίστοιχα.



Να δείξετε ότι:

Α)

Ι) α) η διάμεσος ΑΜ χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο ισεμβαδικά μέρη.

β) Για κάθε σημείο Ο της διαμέσου ΑΜ ισχύει ότι $(AOB) = (AO\Gamma)$

ΙΙ) $(AK\Gamma) = (MK\Gamma)$

ΙΙΙ) $(BK\Gamma) = 2(MK\Gamma)$

IV) $(B\Lambda K) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$

Β) α) Από το σημείο Α φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ, όπου Ε τυχαίο σημείο της (ε), είναι ισεμβαδικό με το τρίγωνο ΑΒΓ.

β) Έστω Ι μέσο της ΑΕ. Τότε να δείξετε ότι το τμήμα ΜΙ χωρίζει το τραπέζιο ΑΒΓΕ σε δύο ισεμβαδικά σχήματα.

Προτεινόμενη διδακτική λύση

Α)

Ι) α) Είναι,

$$(AM\Gamma) = \frac{1}{2} M\Gamma \cdot A\Delta \overset{MB=M\Gamma}{=} \frac{1}{2} MB \cdot A\Delta = (AMB)$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} 2 \cdot M\Gamma \cdot A\Delta = M\Gamma \cdot A\Delta = 2(AM\Gamma)$$

Επομένως $(AM\Gamma) = (AMB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$

β) Έστω Ο τυχαίο σημείο της διαμέσου ΑΜ. Τότε ΟΜ διάμεσος του ΒΟΓ.

Επομένως είναι $(AMB) = (AM\Gamma)$ και $(BOM) = (MO\Gamma)$. Άρα,

$$(AOB) = (AMB) - (BOM) =$$
$$(AM\Gamma) - (MO\Gamma) = (AO\Gamma)$$

ΙΙ) Είναι $A\hat{K}\Gamma + M\hat{K}\Gamma = 180^o$. Επομένως

$$\frac{(AK\Gamma)}{(KM\Gamma)} = \frac{AK \cdot K\Gamma}{MK \cdot K\Gamma} \overset{AK=KM}{=} 1 \Leftrightarrow (AK\Gamma) = (KM\Gamma)$$

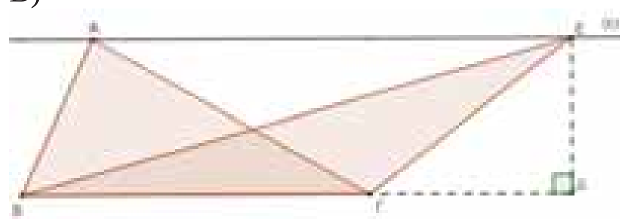
ΙΙΙ) Σύμφωνα με το Α) ερώτημα η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά μέρη επομένως αφού ΚΜ διάμεσος του ΒΚΓ θα είναι και $(BK\Gamma) = 2(MK\Gamma)$.

Διαφορετικά: Τα τρίγωνα ΒΓΚ και ΜΚΓ έχουν την ίδια βάση ΒΓ επομένως είναι $\frac{(BK\Gamma)}{(MK\Gamma)} = \frac{B\Gamma}{M\Gamma} = \frac{2M\Gamma}{M\Gamma} = 2$ άρα $(BK\Gamma) = 2(MK\Gamma)$.

IV) Οι ΒΛ, ΚΜ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΑΚΓ, η ΒΚ του τριγώνου ΑΒΜ και η ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως έχουμε,

$$(B\Lambda K) = \frac{(BK\Gamma)}{2} = \frac{1}{2}(2(BKM)) = (BKM) =$$
$$\frac{1}{2}(ABM) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB\Gamma\right) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$$

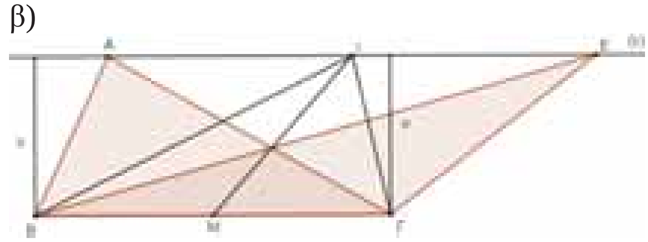
Β)



Είναι,

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot E\Theta = (EB\Gamma)$$

β)



Είναι ΑΜ διάμεσος του ΙΒΓ άρα (ΒΙΜ)=(ΙΜΓ). Επομένως,

$$(ABMI) = (ABI) + (IBM) = \frac{1}{2} AI \cdot \upsilon + (IM\Gamma) \overset{AI=IE}{=}$$
$$\frac{1}{2} IE \cdot \upsilon + (IM\Gamma) = (IM\Gamma) + (I\Gamma E) = (IM\Gamma E)$$

Εφαρμογή 6

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ και η ημί-περίμετρος του τ.

Ι) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από το τύπο,

$$(\mathrm{AB\Gamma})=(\tau-\alpha)R_\alpha=(\tau-\beta)R_\beta=(\tau-\gamma)R_\gamma$$

Όπου $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ οι ακτίνες των παραγγεγραμμένων κύκλων του.

ΙΙ) Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=\dfrac{1}{2\rho R}$ όπου ρ, R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ αντίστοιχα.

β) $\dfrac{1}{\upsilon_\alpha}+\dfrac{1}{\upsilon_\beta}+\dfrac{1}{\upsilon_\gamma}=\dfrac{1}{\rho}$ όπου $\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma$ τα ύψη του ΑΒΓ.

ΙΙΙ) Να δείξετε ότι:

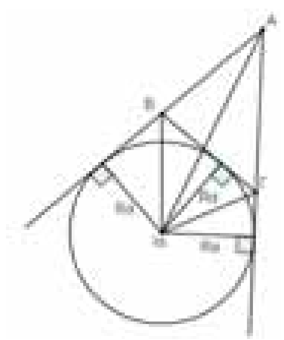
$$\alpha)\ (\mathrm{AB\Gamma})=\tau(\tau-\alpha)\Leftrightarrow \hat{A}=90^o$$

$$\beta)\ (\mathrm{AB\Gamma})<\tau(\tau-\alpha)\Leftrightarrow \hat{A}<90^o$$

$$\gamma)\ (\mathrm{AB\Gamma})>\tau(\tau-\alpha)\Leftrightarrow \hat{A}>90^o$$

Προτεινόμενη διδακτική λύση

Ι)



$$(\mathrm{AB\Gamma})=(I_\alpha \mathrm{BA\Gamma})-(I_\alpha \mathrm{B\Gamma})=$$

$$(I_\alpha \mathrm{BA})+(I_\alpha \mathrm{\Gamma A})-(I_\alpha \mathrm{B\Gamma})=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot R_\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot R_\alpha-\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}\cdot R_\alpha=$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{B\Gamma})\cdot R_\alpha=\frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha)\cdot R_\alpha=$$

$$\frac{1}{2}2(\tau-\alpha)\cdot R_\alpha=(\tau-\alpha)\cdot R_\alpha$$

ΙΙ) α) Είναι $(\mathrm{AB\Gamma})=\tau\rho$ και $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$. Άρα

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2\tau}{(\mathrm{AB\Gamma})4R}=\frac{2\tau}{\tau\cdot\rho\cdot 4R}$$

$$=\frac{1}{2\rho\cdot R}$$

β) Είναι, $\dfrac{1}{\upsilon_\alpha}+\dfrac{1}{\upsilon_\beta}+\dfrac{1}{\upsilon_\gamma}=\dfrac{1}{\frac{2(\mathrm{AB\Gamma})}{\alpha}}+\dfrac{1}{\frac{2(\mathrm{AB\Gamma})}{\beta}}+\dfrac{1}{\frac{2(\mathrm{AB\Gamma})}{\gamma}}=$

$$\frac{\alpha}{2(\mathrm{AB\Gamma})}+\frac{\beta}{2(\mathrm{AB\Gamma})}+\frac{\gamma}{2(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\tau\rho}=$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\rho}=\frac{1}{\rho}$$

ΙΙΙ) α) Είναι,

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\tau(\tau-\alpha)\Leftrightarrow(\mathrm{AB\Gamma})^2=\tau^2(\tau-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=\tau^2(\tau-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=\tau(\tau-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+(\gamma-\beta))\cdot(\alpha-(\gamma-\beta))=((\beta+\gamma)+\alpha)\cdot((\beta+\gamma)-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-(\gamma-\beta)^2=(\beta+\gamma)^2-\alpha^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-\gamma^2+2\beta\gamma-\beta^2=\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2-\alpha^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow\hat{A}=90^o$$

Ομοίως αποδεικνύονται τα ερωτήματα β και γ.

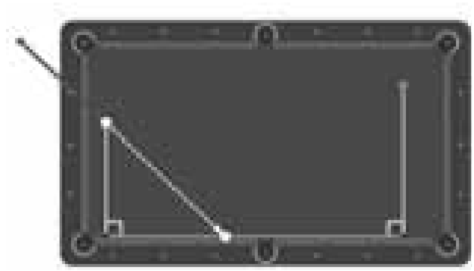
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Βάζουμε το σχήμα βάζετε την Άσκηση;

Δοκιμάστε, βάζοντας την προσωπική σας πινελιά, να δώσετε τη δική σας εκφώνηση φτιαχνοντας τη δική σας άσκηση με βάση τα σχήματα των περιπτώσεων Α, Β και Γ.

Α)

Β)



Γ)

Τάξη: Β΄ — Ασκήσεις Μαθηματικών προσανατολισμού

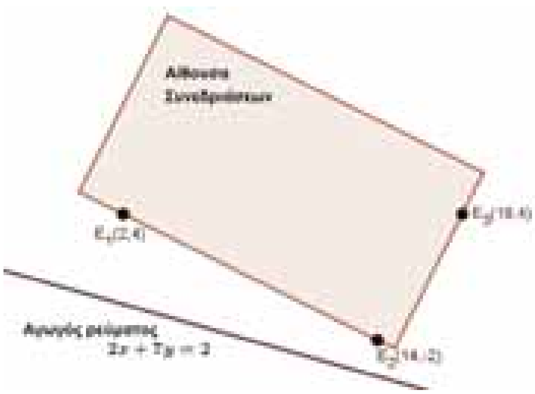
Μπαλτσαβιάς Β. – Τσακιρτζής Σ. – Τσιφάκης Χ.

Θέμα 1

Μια αίθουσα συνεδριάσεων σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει τρεις εξόδους $E_1(2,4)$, $E_2(14,-2)$ και $E_3(18,4)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε σημείο Φ θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα φως δαπέδου το οποίο να ισαπέχει και από τις τρεις εξόδους.

i. Βρείτε τις συντεταγμένες του Φ.

ii. Ο κεντρικός αγωγός ρεύματος με τον οποίο θα



συνδεθεί υπόγεια, μέσω καλωδίου, το φως Φ βρίσκεται επί της ευθείας $(\rho): 2x+7y=2$.

Αν προτιθέμεθα να αγοράσουμε το λιγότερο δυνατό μήκος καλωδίου, βρείτε το σημείο Σ της ευθείας $(\rho): 2x+7y=2$ με το οποίο θα συνδεθεί το φως Φ καθώς και το μήκος του καλωδίου.

Απάντηση

i. Σκέψη: Το ζητούμενο σημείο Φ θα είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του τριγώνου $E_1E_2E_3$, δηλαδή το περίκεντρο. Αρκεί να βρούμε δυο μεσοκαθέτους, αφού όλες διέρχονται από το Φ.

Λύση: Η μεσοκάθετος (μ_1) της πλευράς E_1E_3 διέρχεται από το μέσο $\Lambda\left(\frac{18+2}{2},\frac{4+4}{2}\right)$ ή $\Lambda(10,4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (E_1E_3). Η (E_1E_3), έχει κλίση $\lambda_{E_1E_3}=\frac{4-4}{18-2}=0$, άρα η (μ_1) είναι κατακόρυφη και αφού διέρχεται από το Λ έχει εξίσωση $x=10$.

Η μεσοκάθετος (μ_2) της πλευράς E_1E_2 διέρχεται από το μέσο $M\left(\frac{14+2}{2},\frac{4-2}{2}\right)$ ή $M(8,1)$ του E_1E_2 και είναι κάθετη στην (E_1E_2). Η κλίση της (E_1E_2) είναι $\lambda_{E_1E_2}=\frac{4-(-2)}{2-14}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2}$, άρα η (μ_2) έχει κλίση ίση με $\lambda_{\mu_2}=2$ και αφού διέρχεται από το Μ έχει εξίσωση:

$$y-1=2(x-8)\Leftrightarrow -2x+y=-15.$$

Λύνουμε το σύστημα των (μ_1) και (μ_2):

$$\begin{cases}x=10\\-2x+y=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\-20+y=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\y=5\end{cases}$$

Άρα $\Phi(10,5)$

ii. Σκέψη: το σημείο Σ της ευθείας (ρ) που απέχει ελάχιστα από το Φ είναι το σημείο τομής της κάθετης ευθείας, έστω (ζ), από το Φ προς τη (ρ) με την ευθεία $(\rho): 2x+7y=2$.

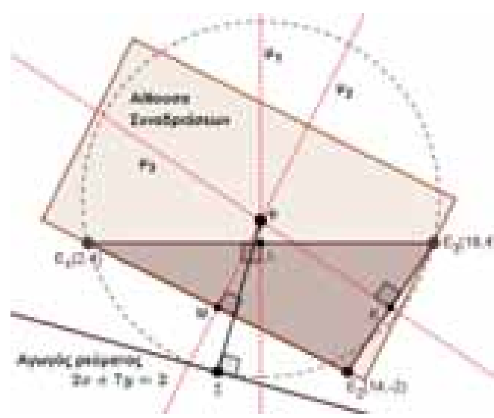
Λύση:

Αφού $(\zeta)\perp(\rho)$ έχουμε:

$$\lambda_\zeta\cdot\lambda_\rho=-1\Rightarrow\lambda_\zeta\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=-1\Rightarrow\lambda_\zeta=\frac{7}{2}$$

και η (ζ) διέρχεται από το $\Phi(10,5)$, άρα

$$(\zeta): y-5=\frac{7}{2}(x-10)\Leftrightarrow -7x+2y=-60$$



$$\begin{cases}7x-2y=60\\2x+7y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x-4y=120\\-14x-49y=-14\end{cases},$$

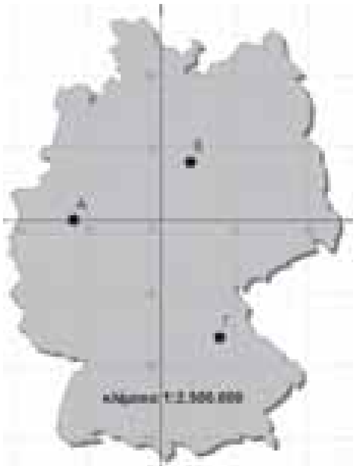
αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε $-53y=106$, άρα $y=-2$ και $x=8$.

Απάντηση: Είναι $\Sigma(8,-2)$ και το μήκος του καλωδίου είναι ίσο με

$$(\Phi\Sigma)=\sqrt{(10-8)^2+(5+2)^2}=\sqrt{53}$$

Θέμα 2

Ας υποθέσουμε ότι τρία σεισμολογικά εργαστήρια, τα οποία βρίσκονται στα σημεία $A(-6,0)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(4,-8)$ του χάρτη και καταγράφουν ένα σεισμό μεγέθους 5 βαθμών της κλίμακας Ρίχτερ.



Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Εργαστήριο	Απόσταση επίκεντρου
Α	250χλμ.
Β	$50\sqrt{5}$ χλμ.
Γ	200 χλμ.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε που προσδιορίζει το επίκεντρο του σεισμού στο χάρτη. (Δίνεται η κλίμακα του χάρτη, 1: 2.500.000 εκ)

Απάντηση

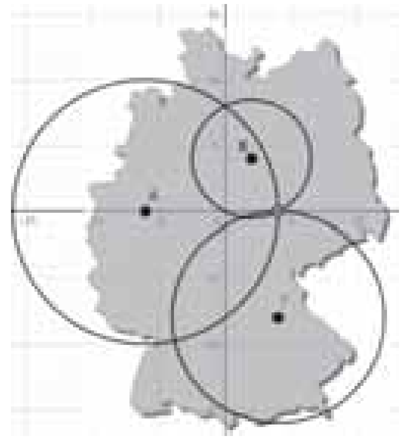
Σκέψη:

Θα βρούμε τις εξισώσεις των κύκλων με κέντρα Α,Β και Γ και έπειτα το σημείο τομής τους (αν υπάρχει) θα είναι το επίκεντρο Ε.

Λύση:

Το 1εκ. στο χάρτη αντιστοιχεί σε 2.500.000 : 100000 = 25 χλμ. στην πραγματικότητα.

Κέντρο	Ακτίνα	Εξίσωση κύκλου
$A(-6,0)$	250:25= 10 εκ.	$C_A: (x-6)^2+y^2=100$
$B(2,4)$	$50\sqrt{5}$:25 $=2\sqrt{5}$ εκ	$C_B: (x-2)^2+(y-4)^2=20$
$\Gamma(4,-8)$	200:25 =8 εκ.	$C_\Gamma: (x-4)^2+(y+8)^2=64$



Λύνουμε το σύστημα των (C_A) και (C_B) :

$$\begin{cases}(x+6)^2+y^2=100\\(x-2)^2+(y-4)^2=20\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+12x-64=0\ (1)\\x^2+y^2-4x-8y=0\ (2)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}16x+8y-64=0\\x^2+y^2-4x-8y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+8\\x^2+y^2-4x-8y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=-2x+8\\x^2+(-2x+8)^2-4x-8(-2x+8)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=-2x+8\\5x^2-20x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+8\\x=0 \text{ ή } x=4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$(x,y)=\{(0,8),(4,0)\}$$

Άρα τα σημεία $K(0,-8)$ και $E(0,4)$ είναι τα κοινά σημεία των κύκλων με εξισώσεις (C_A) και (C_B). Από τα σημεία Κ και Ε μόνο οι συντεταγμένες του σημείου Ε ικανοποιούν την εξίσωση (C_Γ). Συνεπώς το επίκεντρο του σεισμού είναι στο σημείο $E(0,4)$.

Θέμα 3

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

(ε_1): $3x-4y=12$ και (ε_2): $3x-4y=24$.

i. **Αποδείξτε ότι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες και βρείτε την απόσταση τους.**

ii. **Αν Α, Β τα σημεία τομής της (ε_1) με τους άξονες x΄x και ψ΄ψ αντίστοιχα και Δ, Γ τα σημεία τομής της (ε_2) με τους άξονες x΄x και** ψ΄ψ αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

iii. Να βρείτε την εξίσωση (μ) της μεσοπαράλληλου των ευθειών (ε_1) και (ε_2)

iv. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει το κέντρο του στη διάμεσο του τραπεζίου ΑΒΓΔ, εφάπτεται στον άξονα ψ΄ψ καθώς και στις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Απάντηση

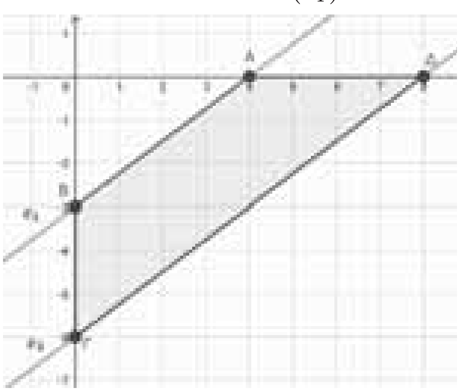
i. Είναι $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{3}{4}$, άρα $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Σ της (ε_1):

Για $x=2$ είναι $y=-\dfrac{3}{2}$, άρα $\Sigma\left(2,-\dfrac{3}{2}\right)$.

$$d\big((\varepsilon_1),(\varepsilon_2)\big)=d\big(B,(\varepsilon_2)\big)=\frac{\left|3\cdot 2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-24\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{12}{5}$$

ii. Για $x=0$ στην (ε_1) είναι $y=-3$, άρα $B(0,-3)$, ενώ για $y=0$ στην (ε_1) είναι $x=4$,



άρα $A(4,0)$.

Για $x=0$ στην (ε_2) είναι $y=-6$, άρα $\Gamma(0,-6)$, ενώ για $y=0$ στην (ε_2) είναι $x=8$, άρα $\Delta(8,0)$

Το ύψος του τραπεζίου είναι ίσο με

$\upsilon=d\big((\varepsilon_1),(\varepsilon_2)\big)=\dfrac{12}{5}$, επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου είναι ίσο με $E=\dfrac{(AB)+(\Gamma\Delta)}{2}\cdot\upsilon=$

$$\frac{\sqrt{4^2+(-3)^2}+\sqrt{8^2+(-6)^2}}{2}\cdot\frac{12}{5}=18$$

Εναλλακτικά,

$$E=(O\Delta\Gamma)-(OAB)=\frac{1}{2}\cdot\big(|8|\cdot|-6|\big)-\frac{1}{2}\cdot\big(4\cdot|-3|\big)=18$$

iii. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στη μεσοπαράλληλο των (ε_1) και (ε_2) αν και μόνο αν $d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{|3\cdot x-4\cdot y-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3\cdot x-4\cdot y-24|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\Leftrightarrow$$

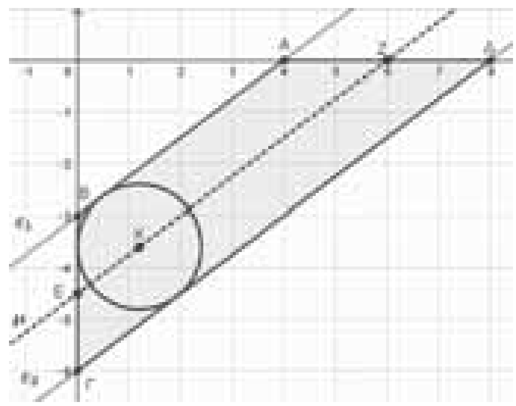
$|3x-4y-12|=|3x-4y-24|\Leftrightarrow$

$3x-4y-12=3x-4y-24$ ή

$3x-4y-12=-(3x-4y-24)\Leftrightarrow$

$-12=-24$ (αδύνατο) ή $3x-4y-18=0$

Άρα η μεσοπαράλληλος έχει εξίσωση $(\mu):3x-4y-18=0$



iv. Εφόσον ο κύκλος εφάπτεται στις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, το κέντρο του θα ανήκει στη μεσοπαράλληλο και η ακτίνα του ισούται με $\rho=\dfrac{d\big((\varepsilon_1),(\varepsilon_2)\big)}{2}=\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}$.

Το μέσο του ΒΓ είναι το σημείο $E\left(0,-\dfrac{9}{2}\right)$ και το μέσο του ΑΔ είναι το σημείο $Z(6,0)$. Τα Ε και Ζ εύκολα βρίσκουμε ότι ανήκουν στη μεσοπαράλληλο (μ), άρα η διάμεσος ΕΖ είναι το τμήμα της $(\mu):3x-4y-18=0$ για το οποίο ισχύει $0\le x\le 6$. Αν $K(\alpha,\beta)$ το κέντρο του κύκλου τότε

$$\begin{cases}0\le\alpha\le 6\\ 3\alpha-4\beta-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\alpha\le 6\\ \beta=\dfrac{3\alpha-18}{4}\end{cases}$$, οπότε

$K\left(\alpha,\dfrac{3\alpha-18}{4}\right), 0\le\alpha\le 6$.

iv. Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x-\alpha)^2+\left(y-\frac{3\alpha-18}{4}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2, \text{ όπου } 0\le\alpha\le 6.$$

Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $\psi'\psi$, αν και μόνο αν: $|x_k|=\rho \Leftrightarrow |\alpha|=\frac{6}{5} \Leftrightarrow$

$\alpha=\frac{6}{5}$ (δεκτή) ή $\alpha=-\frac{6}{5}$ (απορρίπτεται)

Οπότε $\alpha=\frac{6}{5}$, άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση: $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{18}{5}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2$.

Θέμα 4

Δίνονται ο κύκλος (C_1) με εξίσωση $x^2+y^2-2x-4y-13=0$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y+9=0$.

i. **Να δείξετε ότι ο κύκλος (C_1) και η ευθεία (ε) έχουν δυο κοινά σημεία (έστω) Α και Β.**

ii. **Να βρείτε το μήκος της χορδής ΑΒ που αποκόπτει ο κύκλος (C_1) από την ευθεία (ε)**

Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $(C): x^2+y^2-2x-4y-13+\lambda\cdot(3x+4y+9)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

iii. **Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (C) παριστάνει κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α και Β του (i) ερωτήματος.**

iv. **Να βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των κύκλων, που ορίζονται από την εξίσωση (C)**

Απάντηση

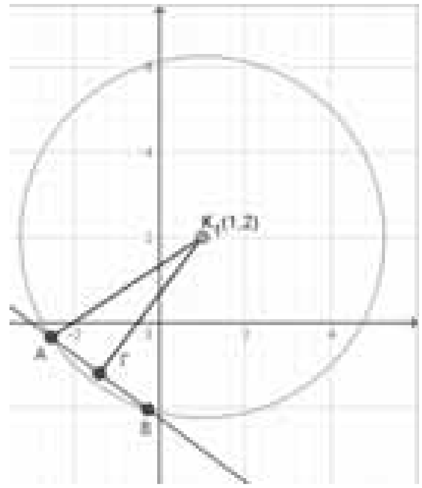
i. Έχουμε $A=-2, B=-4$ και $\Gamma=-13$. Ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K_1(1,2)$ και ακτίνα

$$\rho_1=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{72}}{2}=3\sqrt{2}=\sqrt{18}.$$

Είναι $d\left(K_1,(\varepsilon)\right)=\frac{|3+4\cdot 2+9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4=\sqrt{16}<\rho_1$, άρα η ευθεία (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου (C_1).

ii. Στη χορδή ΑΒ φέρνουμε το απόστημα $K_1\Gamma$. Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο $K_1A\Gamma$ έχουμε:

$$(A\Gamma)^2=(K_1A)^2-(K_1\Gamma)^2=\rho_1^{\,2}-\left[d\left(K_1,(\varepsilon)\right)\right]^2=18-16=2$$



Άρα η χορδή έχει μήκος $(AB)=2(A\Gamma)=2\sqrt{2}$.

iii. Έχουμε:

$$x^2+y^2-2x-4y-13+\lambda\cdot(3x+4y+9)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-2x-4y-13+3\lambda x+4\lambda y+9\lambda=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-(2+3\lambda)x+(-4+4\lambda)y-13+9\lambda=0$$

Είναι $A=-2+3\lambda, B=-4+4\lambda$ και $\Gamma=-13+9\lambda$ οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=(3\lambda-2)^2+(4\lambda-4)^2-4\cdot(-13+9\lambda)=25\lambda^2-80\lambda+72$ τριώνυμο με $\Delta=(-80)^2-4\cdot 25\cdot 72=-800<0$.

Άρα $A^2+B^2-4\Gamma>0$ οπότε η εξίσωση (C) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

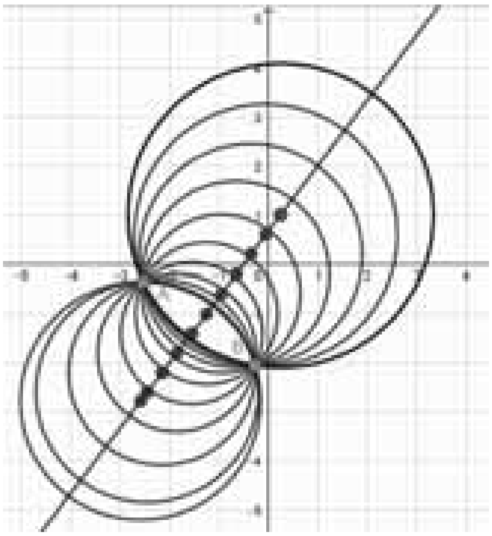
Έστω $A(x_A,y_A)$ και $B(x_B,y_B)$.

Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία (ε), άρα $3x_A+4y_A+9=0$ και στον κύκλο (C_1), άρα $x_A^{\,2}+y_A^{\,2}-2x_A-4y_A-13=0$, οπότε είναι:

$$x_A^{\,2}+y_A^{\,2}-2x_A-4y_A-13+$$
$$+\lambda(3x_A+4y_A+9)=0+\lambda\cdot 0=0$$

Δηλαδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση (C). Όμοια δείχνουμε ότι ο κύκλος (C) διέρχεται και από το σημείο Β.

iv. Το κέντρο του κύκλου έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2-3\lambda}{2}, 2-2\lambda\right)$. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στη ζητούμενη γραμμή, αν και μόνο αν



$$\begin{cases} x=\dfrac{2-3\lambda}{2} \\ y=2-2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2-3\lambda \\ \lambda=\dfrac{2-y}{2} \end{cases}$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν,

$$2x=2-3\cdot\frac{2-y}{2} \Leftrightarrow 4x-3y+2=0$$

Άρα η γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση C, είναι η ευθεία $4x-3y+2=0$.

Θέμα 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,2)$, $B(1,6)$. Μια διάμεσος του έχει εξίσωση $(\mu): y=2$.και ένα ύψος του έχει εξίσωση $(\upsilon): -3x+4y=14$.

i. **Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.**

ii. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ και απέχει απόσταση ίση με 2 μονάδες από την αρχή των αξόνων.**

iii. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που βρίσκεται η διχοτόμος της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ.**

iv. **Δίνεται σημείο Ζ τέτοιο ώστε το ΑΒΖΓ να είναι παραλληλόγραμμο. Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΖ.**

Απάντηση

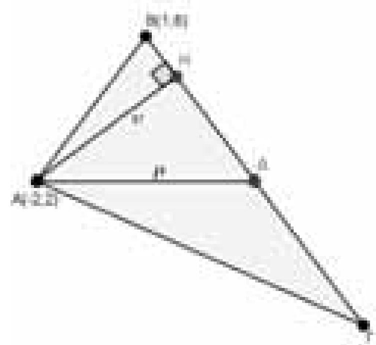
i. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Α ικανοποιούν αμφότερες τις εξισώσεις (μ) και (υ). Φέρνουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΔ (βλ. σχήμα).

Είναι $(\upsilon)\perp(\text{ΒΓ})$ άρα

$$\lambda_{\upsilon}\cdot\lambda_{\text{ΒΓ}}=-1 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot\lambda_{\text{ΒΓ}}=-1 \Rightarrow \lambda_{\text{ΒΓ}}=-\frac{4}{3}$$

και η (ΒΓ) διέρχεται από το $B(1,6)$, επομένως,

$$(\text{ΒΓ}): y-6=-\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow 4x+3y-22=0$$



Το μέσο Δ του ΒΓ θα το βρούμε λύνοντας το σύστημα των ευθειών (ΒΓ) και (ΑΔ):

$$\begin{cases} 4x+3y-22=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-16=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases},$$

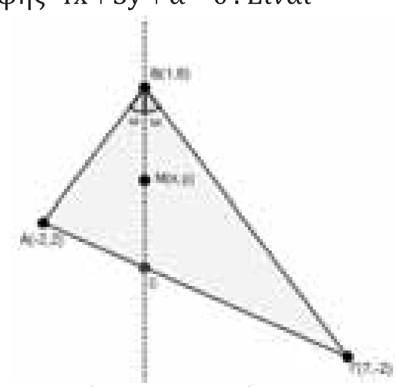
άρα $\Delta(4,2)$.

Το Δ είναι μέσο του ΒΓ επομένως,

$$\begin{cases} \dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=x_\Delta \Leftrightarrow \dfrac{1+x_\Gamma}{2}=4 \Leftrightarrow x_\Gamma=7 \\ \dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=y_\Delta \Leftrightarrow \dfrac{6+y_\Gamma}{2}=2 \Leftrightarrow y_\Gamma=-2 \end{cases}$$

άρα $\Gamma(7,-2)$.

ii. Αφού $(\zeta)//(\text{ΒΓ})$, η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση της μορφής $4x+3y+\alpha=0$. Είναι



$$d(O,(\zeta))=2 \Leftrightarrow \frac{|4\cdot 0+3\cdot 0+\alpha|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \Leftrightarrow$$

$|\alpha|=10 \Leftrightarrow \alpha=10$ ή $\alpha=-10$

Οι ζητούμενες ευθείες είναι οι $4x+3y+10=0$ και $4x+3y-10=0$

iii. Έστω ένα σημείο Μ (διαφορετικό του Β). Αν $M(x,y)$ τότε $M\in(\delta) \Leftrightarrow A\hat{B}M=M\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\left(A\hat{B}M\right)=\sigma\upsilon\nu\left(M\hat{B}\Gamma\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|}=\frac{\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(-3,-4)\cdot(x-1,y-6)}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|}=\frac{(6,-8)\cdot(x-1,y-6)}{\sqrt{6^2+(-8)^2}\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|}\Leftrightarrow$$

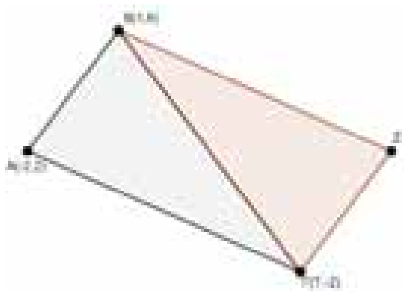
$$\frac{-3(x-1)-4(y-6)}{5}=\frac{6(x-1)-8(y-6)}{10}\Leftrightarrow$$

$$-3x+3-4y+24=\frac{6x-6-8y+48}{2}\Leftrightarrow$$

$$-3x-4y+24+3=3x-3-4y+24\Leftrightarrow$$

$6x=6\Leftrightarrow x=1$. Άρα $(\delta):x=1$.

iv. Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(9,-4)$.



Λόγω της ισότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΖΓ είναι

$$(AB Z\Gamma)=2(AB\Gamma)=2\cdot\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|=\left\|\begin{matrix}3 & 4\\ 9 & -4\end{matrix}\right\|=48$$

Θέμα 6

Δίνεται Οxy σύστημα συντεταγμένων και η εξίσωση $x+\lambda(y-1)+y-3=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).

i. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α, το οποίο και να βρείτε.

iii. Να βρείτε τις ευθείες της εξίσωσης (1) που σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iv. Να βρείτε ποια από τις ευθείες της εξίσωσης (1) απέχει μέγιστη απόσταση από το Ο(0,0).

Απάντηση

i. $x+\lambda(y-1)+y-3=0\Leftrightarrow x+(1+\lambda)y-\lambda-3=0$.

Είναι $A=1$ και $B=1+\lambda$. Αφού $A\neq 0$ η (1) παριστάνει εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. **1ος τρόπος**

$x+\lambda(y-1)+y-3=0\Leftrightarrow(y-1)\lambda+(\chi+y-3)=0$

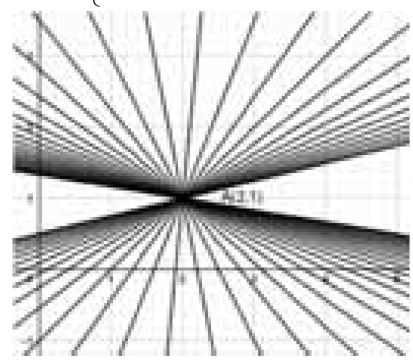
για κάθε $\lambda\in R$. Άρα : $y-1=0$ και $x+y-3=0$. Άρα: $y=1$ και $x=2$. Άρα όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $A(2,1)$.

2ος τρόπος

Επιλέγουμε δυο τυχαίες ευθείες. Για $\lambda=0$, στην (1) έχουμε $(\varepsilon_1):x+y-3=0$ και για $\lambda=1$, στην (1) έχουμε $(\varepsilon_2):x+2y-4=0$. Λύνουμε το σύστημα των (ε_1) και (ε_2):

$$\begin{cases}x+y-3=0\\ x+2y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x+3\\ x+2(-x+3)=4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=-x+3\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=2\end{cases}$$



Επομένως οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο $A(1,2)$. Για $x=2$ και $y=1$ στην (1) έχουμε: $2+\lambda(1-1)+1-3=0$

Αφού οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το σημείο Α.

iii. Οι ζητούμενες ευθείες δεν μπορεί να

α) είναι κατακόρυφες (άρα $\lambda\neq-1$),

β) είναι οριζόντιες ή

γ) διέρχονται από την αρχή των αξόνων, διότι διαφορετικά δεν θα σχηματιζόταν τρίγωνο.

Για $x=0$ στην (1) έχουμε: $y=\dfrac{\lambda+3}{\lambda+1}$ και προκύπτει το σημείο $\Gamma\left(0,\dfrac{\lambda+3}{\lambda+1}\right)$.

Για $y=0$ στην (1) έχουμε: $x=\lambda-3$ και προκύπτει το σημείο $\Delta(\lambda-3,0)$.

Για να είναι ισοσκελές το τρίγωνο ΟΓΔ αρκεί $O\Gamma=O\Delta$.

Άρα

$$(O\Gamma)=(O\Delta)\Leftrightarrow\left|\frac{\lambda+3}{\lambda+1}\right|=|\lambda+3|\Leftrightarrow$$

$$|\lambda+3|=|\lambda+1|\cdot|\lambda+3|\Leftrightarrow|\lambda+3|\cdot(1-|\lambda+1|)=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda=3 \text{ ή } |\lambda+1|=1\Leftrightarrow\lambda=-3 \text{ ή } \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-2$$

Για $\lambda=-3$ στην (1) προκύπτει η ευθεία $x-2y=0$, η οποία απορρίπτεται, διότι διέρχεται από το την αρχή των αξόνων.

Για $\lambda=0$ στην (1) προκύπτει η $x+y-3=0$.

Για $\lambda=-2$ στην (1) προκύπτει η $x-y-1=0$.

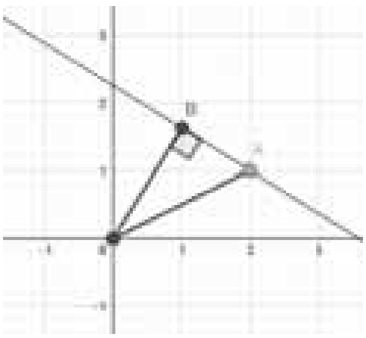
Οι ευθείες $x+y-3=0$, $x-y-1=0$ είναι οι ζητούμενες.

2ος τρόπος:
Πρέπει και αρκεί να σχηματίζουν με τους άξονες γωνία 45° ή 135°, δηλαδή $-\dfrac{1}{\lambda+1}=1$ ή $-\dfrac{1}{\lambda+1}=-1$ δηλαδή $\lambda=-2$ ή $\lambda=0$

Για $\lambda=-2$ η ευθεία γίνεται: $x-y-1=0$

Για $\lambda=0$ η ευθεία γίνεται: $x+y-3=0$

iv. Από τις ευθείες της (1) επιλέγουμε μια τυχαία ευθεία και έστω ΟΒ η απόσταση της από το Ο.



Αν το Β είναι διαφορετικό του σημείου Α σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ. Όμως στο τρίγωνο ΟΑΒ η υποτείνουσα ΟΑ είναι μεγαλύτερη της ΟΒ. Άρα η ζητούμενη ευθεία προκύπτει όταν το σημείο Β ταυτίζεται με το Α δηλαδή αναζητούμε την ευθεία ε της (1) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ. Είναι $\lambda_{OA}=\dfrac{1}{2}$ άρα η κλίση της (ε) θα είναι ίση με -2. Από την (1) έχουμε $-\dfrac{A}{B}=-2\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\lambda+1}=-2\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{1}{2}$, οπότε είναι η ευθεία $x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{5}{2}=0$.

Θέμα 7

Σε ένα τμήμα της Β΄ Λυκείου δόθηκε η εξής άσκηση:

«*Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες* $(\varepsilon):(\lambda-1)x+\lambda y+1=0$ και $(\eta):\lambda x+3y+1=0$ *να είναι κάθετες.*»

Από τις λύσεις των μαθητών/μαθητριών επιλέχθηκαν οι παρακάτω:

• *Λύση Α*:

$\lambda_\varepsilon=-\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$ και $\lambda_\eta=-\dfrac{\lambda}{3}$, άρα

$(\eta)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow\lambda_\eta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow-\dfrac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\left(-\dfrac{\lambda}{3}\right)=-1\Leftrightarrow$

$(\lambda-1)\lambda=-3\lambda\Leftrightarrow\lambda^2+2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda+2)=0\Leftrightarrow$

$\lambda=0$ ή $\lambda=-2$

• *Λύση Β*:

Από την εξίσωση της (ε) έχουμε:

$A=\lambda-1, B=\lambda$, άρα ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_1=(\lambda,1-\lambda)$

Από την εξίσωση της (η) έχουμε:

$A=\lambda, B=3$, άρα ένα διάνυσμα παράλληλο στην (η) είναι το $\vec{\delta}_2=(3,-\lambda)$

Είναι:

$(\eta)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow\vec{\delta}_1\perp\vec{\delta}_2\Leftrightarrow\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=0\Leftrightarrow$

$3\lambda-\lambda(1-\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda^2+2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda+2)=0$

$\lambda=0$ ή $\lambda=-2$

Συμφωνείτε με κάποια από τις παραπάνω λύσεις; Υπάρχει λάθος ή παράλειψη σε κάποια λύση;

Απάντηση:

Αρχικά, στην λύση Α πρέπει $\lambda\neq0$ ώστε να ορίζεται η κλίση λ_ε της ευθείας (ε). Άρα η περίπτωση όπου $\lambda=0$ απορρίπτεται ενώ η $\lambda=-2$ είναι δεκτή.

Εντούτοις επειδή περιορίσαμε τις τιμές του λ θα πρέπει να εξετάσουμε και την περίπτωση όπου $\lambda=0$. Τότε $(\varepsilon):-x+1=0\Leftrightarrow x=1$ και $(\eta):3y+1=0\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}$, άρα $(\eta)\perp(\varepsilon)$. Τελικά $\lambda=0$ ή $\lambda=-2$. Η λύση Β είναι ορθή.

Θέμα 8

Στην άσκηση «*Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και απέχουν από το σημείο* $A(-1,3)$ *απόσταση ίση με 1.*» δόθηκε η παρακάτω λύση:

Λύση:

Έστω λ η κλίση της ζητούμενης ευθείας (ε). Αφού η (ε) διέρχεται από το την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση $(\varepsilon):y=\lambda x\Leftrightarrow\lambda x-y=0$.

Είναι:

$$d(A,(\varepsilon))=1\Leftrightarrow\frac{|-\lambda-3|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow|\lambda+3|=\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$$

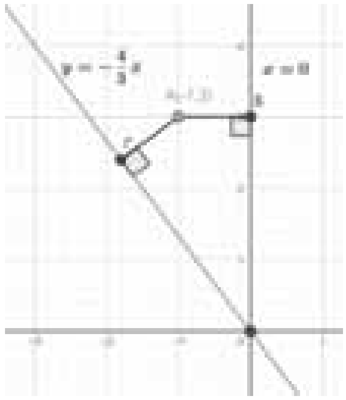
$$(\lambda+3)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow6\lambda+8=0\Leftrightarrow\lambda=-\frac{4}{3}$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y=-\dfrac{4}{3}x$.

Συμφωνείτε με τη λύση; Αν όχι, που εντοπίζετε λάθος ή παράλειψη;

Απάντηση:

Θα πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία δεν ορίζεται κλίση για την ευθεία (ε), δηλαδή η (ε) να είναι κατακόρυφη.



Τότε έχει εξίσωση της μορφής $x=x_0$ και αφού διέρχεται από το $O(0,0)$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): x=0 \Leftrightarrow 1x+0y=0$.

Αφού $d(A,x=0)=\dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2+0}}=1$, η $x=0$ απέχει από το A απόσταση ίση με 1. Τελικά οι ζητούμενες ευθείες είναι οι:

$y=-\dfrac{4}{3}x$ και $x=0$.

Θέμα 9

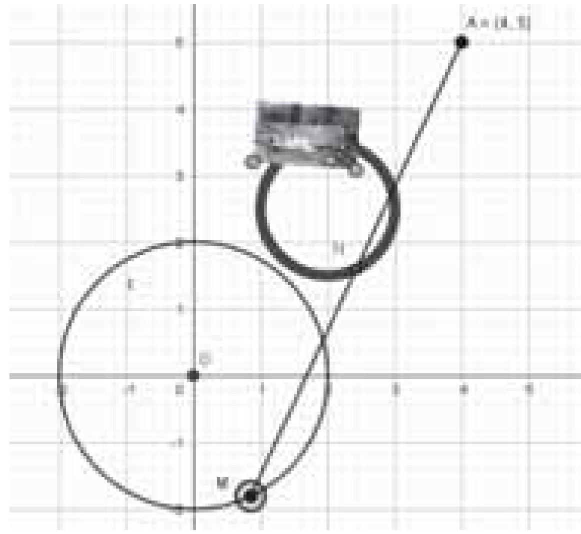
Ένας δρομέας, κινείται σε κυκλική διαδρομή με εξίσωση $x^2+y^2=4$. Ο προπονητής του βρίσκεται στο σημείο $A(4,5)$ και τον παρακολουθεί. Ο σκύλος του δρομέα βρίσκεται δεμένος στο μέσο Ν της απόστασης ΑΜ και προσπαθεί να τον ακολουθήσει. Να βρεθεί η γραμμή που διαγράφει ο σκύλος ακολουθώντας τον δρομέα.

Απάντηση:

Έστω $M(x_1,y_1)$ η τυχαία θέση του δρομέα και $N(x,y)$ οι συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται ο σκύλος. Τότε έχουμε: $x=\dfrac{x_1+4}{2}$ (1) και $y=\dfrac{y_1+5}{2}$ (2). Λύνοντας τις (1) και (2) ως προς x_1 και y_1 αντίστοιχα παίρνουμε: $x_1=2x-4$ και $y_1=2y-5$.

Το σημείο $M(x_1,y_1)$ είναι σημείου του κύκλου και συνεπώς οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή του. Έχουμε επομένως:

$$(2x-4)^2+(2y-5)^2=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1.$$

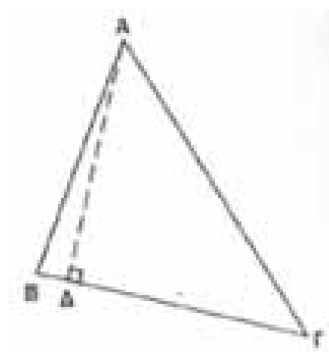


Άρα ο σκύλος θα διαγράφει κυκλική διαδρομή με κέντρο $K(2,\frac{5}{2})$ και ακτίνα $\rho=1$.

Θέμα 10

Παραθέτουμε ένα παράδοξο από το βιβλίο του Ευάγγελου – Ρούλας Σπανδάγου.

« Η κορυφή ενός τριγώνου ταυτίζεται με ... το ίχνος της κάθετης που άγεται από αυτή την κορυφή προς την απέναντι πλευρά.»



Θεωρούμε τρίγωνο με πλευρές:

$(AB): 2x-y+1=0$, $(A\Gamma): 3x-y+2=0$,

$(B\Gamma): y=4x+3$.

Από το σημείο τομής των δύο πρώτων έχουμε $A(-1,-1)$ φέρνουμε την $(A\Delta)\perp(B\Gamma)$ που έχει εξίσωση $(A\Delta): y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$. Λύνοντας το σύστημα των $(A\Delta),(B\Gamma)$ βρίσκουμε το σημείο $\Delta(-1,-1)$ που ταυτίζεται με το Α.

Παρακαλώ να βρείτε το λάθος.

Τάξη: Γ΄

Διαφορικός λογισμός

Χρήστος Λαζαρίδης

Μια συλλογή ασκήσεων σε θέματα του διαφορικού λογισμού που χρειάζονται μεγαλύτερη προσοχή!

Άσκηση 1

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h\to x_0}\frac{\left[f(2x_0-h)-f(x_0)\right]\eta\mu(x_0-h)}{(h-x_0)^2}=f'(x_0).$$

Λύση

Θέτουμε $x=x_0-h$ οπότε, $x+x_0=2x_0-h$.

$$\lim_{h\to x_0}\frac{\left[f(2x_0-h)-f(x_0)\right]\eta\mu(x_0-h)}{(h-x_0)^2}=$$

$$\lim_{h\to x_0}\frac{f(2x_0-h)-f(x_0)}{x_0-h}\cdot\frac{\eta\mu(x_0-h)}{x_0-h}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[f(x+x_0)-f(x_0)\right]}{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}=f'(x_0)\cdot 1=f'(x_0).$$

Άσκηση 2

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f(0)=0$ και τέτοια ώστε $f(x)\geq \eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1). Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\quad (2).$$

$$\text{Αλλά, }(1)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}\geq\dfrac{\eta\mu x}{x}, x>0\ (3)\\[2mm] \dfrac{f(x)}{x}\leq\dfrac{\eta\mu x}{x}, x<0\ (3')\end{cases}.$$

Από την (3), επειδή τα επί μέρους όρια υπάρχουν, συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\geq\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\geq 1\overset{(2)}{\Rightarrow}f'(0)\geq 1.$$

Από την $(3')$, αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}\leq\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}\leq 1\overset{(2)}{\Rightarrow}f'(0)\leq 1.$$

Τελικά, $f'(0)=1$.

Άσκηση 3

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και είναι τέτοια ώστε:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2024xy,$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (1).

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η (1) για $x=y=0$, γίνεται:

$$f(0)=f(0)+f(0)+0\Rightarrow f(0)=0.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε για $x\neq x_0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{h=x-x_0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(x_0)-f(x_0)+2024hx_0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+2024x_0\right)=f'(0)+2024x_0=f'(x_0).$$

Δηλαδή $f'(x)=2024x+f'(0), x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 4

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο 1 και

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2024}{x-1}=2024.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(1)=2024$.

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 και

$g'(1)=2024$.

γ) $h'(1)=0$, όπου

$h(x)=\left[(c-2)x^2+(3-2c)x+c\right]g(x), c\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Είναι:

$$\lim_{x\to1}(g(x)-2024)=\lim_{x\to1}\left(\frac{g(x)-2024}{x-1}(x-1)\right)=2024\cdot0=0$$

οπότε $\lim_{x\to1}g(x)=2024$ και αφού η g είναι συνεχής στο 1, παίρνουμε $g(1)=2024$.

β) $\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)-2024}{x-1}=2024\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=2024\Rightarrow g'(1)=2024$$

γ) Θέτουμε $t(x)=(c-2)x^2+(3-2c)x+c, c\in\mathbb{R}$ οπότε, $t(1)=c-2+3-2c+c=1$ και

$$h(1)=t(1)\cdot g(1)=g(1).$$

$$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{t(x)\cdot g(x)-g(1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{t(x)\cdot g(x)-g(1)+t(x)g(1)-t(x)g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[t(x)\frac{g(x)-g(1)}{x-1}+g(1)\frac{t(x)-1}{x-1}\right]\overset{(*)}{=}$$

$$\lim_{x\to1}\left[t(x)\cdot\frac{g(x)-g(1)}{x-1}+g(1)\cdot\left[(c-2)x+1-c\right]\right]=$$

$$t(1)g'(1)+g(1)(-1)=$$

$$1\cdot2024+2024(-1)=0.$$

$$^{*}t(x)-1=(c-2)x^2+(3-2c)x+c-1=$$

$$(x-1)\cdot\left[(c-2)x+(1-c)\right].$$

Η άσκηση επιλύεται ευκολότερα με την βοήθεια των κανόνων παραγώγισης αφού η h είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Άσκηση 5

α) Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο x_0.

Αν $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-(\alpha x+\beta)}{x-x_0}=0$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

β) Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο 2. Αν $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-3x+4}{x-2}=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-(\alpha x+\beta)]=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-(\alpha x+\beta)}{x-x_0}(x-x_0)\right)=0$$

οπότε $f(x_0)=\alpha x_0+\beta$. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(\alpha x_0+\beta)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(\alpha x_0+\beta)+(\alpha x+\beta)-(\alpha x+\beta)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(\alpha x+\beta)+\alpha(x-x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-(\alpha x+\beta)}{x-x_0}+\alpha\right]=0+\alpha=\alpha, \text{ οπότε}$$

$$f'(x_0)=\alpha$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο x_0, έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$y-(\alpha x_0+\beta)=\alpha(x-x_0)\Leftrightarrow y=\alpha x+\beta$$

β)

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3x+4}{x-2}=0\Rightarrow\lim_{x\to2}\frac{f(x)-(3x-4)}{x-2}=0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2, από το α, προκύπτει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι η ευθεία: $y=3x-4$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$.

α) Να βρείτε τον παράγωγο της f, στο 2024π

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x)+f''(x)=0, x\in\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα $0,\pi$ είναι κάθετες.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=συνx, x\in\mathbb{R}$.

α) Είναι:
$f'(2024\pi)=συν(2024\pi)=συν(2\cdot 1012\pi)=1$.

β) $f''(x)=(συνx)'=-ημx, x\in\mathbb{R}$, άρα,

$$f''(x)+f(x)=-ημx+ημx=0, x\in\mathbb{R}.$$

γ) Οι εφαπτόμενες C_f στα $0,\pi$ έχουν αντίστοιχα συντελεστές διεύθυνσης $f'(0), f'(\pi)$. Έχουμε:

$$f'(0)f'(\pi)=συν0\cdot συν\pi=1(-1)=-1$$

επομένως οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

Άσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων,

α) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

β) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Λύση

α) $A_f=[0,+\infty)$. Αν $x\in(0,+\infty)$, έχουμε,

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Αν $x=0$, έχουμε,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty,$$

επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Τελικά έχουμε, $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x\in(0,+\infty)$.

β) Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Μετασχηματίζουμε τον τύπο της συνάρτησης. Με $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}=|x-1|^{\frac{2}{3}}=$$

$$\begin{cases}(1-x)^{\frac{2}{3}}, x\in(-\infty,1)\\(x-1)^{\frac{2}{3}}, x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

Αν $x\in(-\infty,1)$, έχουμε,

$$f'(x)=\left((1-x)^{\frac{2}{3}}\right)'=-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{2}{3}-1}=$$

$$-\frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}$$

Αν $x\in(1,+\infty)$, έχουμε,

$$f'(x)=\left((x-1)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1}=$$

$$\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

Αν $x=1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(1-x)^{\frac{3}{3}}}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}-\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}=-\infty,$$

επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Τελικά έχουμε, $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}, x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}, x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

Άσκηση 8

Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$ και $f'(1)=2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\sqrt{f(x)}$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Αν επιπλέον $\sqrt{2}g'(1)=1$, να υπολογίσετε το $f(1)$.

Λύση

α) Η g είναι σύνθεση της f με την $h(x)=\sqrt{x}$ δηλαδή, $g=hof$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $h'(1)=\dfrac{1}{2}$, διότι $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $f(1)$, διότι

$$f(1)>0,\ με\ h'(f(1))=\frac{1}{2\sqrt{f(1)}}.$$

Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Έχουμε,

$$g(1)=(hof)(1)\Rightarrow g'(1)=(hof)'(1)\Rightarrow$$

$$g'(1)=h'(f(1))f'(1)\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{f(1)}}2\Rightarrow f(1)=2$$

Άσκηση 9

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ με $|f(1)|<1$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $2xf'(x^2)\neq 1$, για κάθε $x\in(-1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0{}^2)=x_0$.

β) Το $x_0\in(-1,1)$ είναι μοναδικό.

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x^2)-x, x\in[-1,1].$$

Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$, ως διαφορά συνεχών. Η $f(x^2)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως σύνθεση των συνεχών $f(x), x^2$.

$$g(-1)g(1)=(f(1)+1)(f(1)-1)=f^2(1)-1<0,$$

διότι $|f(1)|<1$.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0{}^2)-x_0=0\Leftrightarrow f(x_0{}^2)=x_0.$$

β) Έστω ότι υπάρχει $x_0'\neq x_0$ με $x_0'<x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_0'^2)=x_0'$.

Η g είναι συνεχής στο $[x_0',x_0]$, παραγωγίσιμη στο (x_0',x_0) με

$$g'(x)=2x\cdot f'(x^2)-1, x\in(x_0',x_0)$$

και $g(x_0')=g(x_0)=0$. Από το Θεώρημα Rolle, η εξίσωση $g'(x)=0$ η οποία διαδοχικά είναι ισοδύναμη με τις,

$$2xf(x^2)-1=0\Leftrightarrow 2xf(x^2)=1,$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$, πράγμα άτοπο, διότι $2xf'(x^2)\neq 1$, για κάθε $x\in(-1,1)$. Επομένως ο αριθμός x_o είναι μοναδικός.

Άσκηση 10

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με f' γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι:

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\alpha)+f(\beta).$$

β) Να αποδείξετε ότι: $2\varepsilon\varphi\frac{12\pi}{35}>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{7}+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}$.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, επομένως από Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιοι ώστε,

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Επειδή $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\xi_1<\xi_2$. Η f' γνησίως φθίνουσα, επομένως $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Rightarrow$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}>\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)>f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\beta)+f(\alpha).$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ για την οποία ικανοποιούνται όλες οι απαιτήσεις του α) ερωτήματος στο $\left[\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{5}\right]$.

Εφαρμόζουμε το συμπέρασμα, οπότε,

$$2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{5}\right)>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{7}+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}\Rightarrow$$
$$2\varepsilon\varphi\frac{12\pi}{35}>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{7}+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}.$$

Άσκηση 11

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι τέτοια ώστε $f''(x)+f'(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1, f'(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι, $f'(x)+f(x)=x+1$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης xe^x και τη συνάρτηση f.

Λύση

α) Από υπόθεση έχουμε,

$f''(x)+f'(x)=1\Rightarrow\left(f'(x)+f(x)\right)'=(x)'$

$\Rightarrow f'(x)+f(x)=x+c$.

Για $x=0$: $f'(0)+f(0)=0+c\Rightarrow c=1$, επομένως,

$f'(x)+f(x)=x+1$.

β) $\left(xe^x\right)'=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=$

$e^x+xe^x=e^x(1+x)$.

Από το πρώτο ερώτημα έχουμε,

$$f'(x)+f(x)=x+1\Rightarrow$$
$$e^xf'(x)+e^xf(x)=e^x(x+1)\Rightarrow\left(e^xf(x)\right)'=\left(xe^x\right)'$$
$$\Rightarrow e^xf(x)=xe^x+c_1.$$

Για $x=0$: $f(0)=0+c_1\Rightarrow c_1=1$, επομένως,

$$e^xf(x)=xe^x+1\Rightarrow f(x)=\frac{xe^x+1}{e^x}.$$

Άσκηση 12

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=f'(1)=0$ και $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=0$.

β) Να εξετάσετε τη f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι, $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Λύση

α) Η εξίσωση ,ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f''(x)>0$, άρα, f' είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και "$1-1$".

Έχουμε, $f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(1)\Leftrightarrow x=1$.

β) Η μονοτονία της f εξαρτάται από το πρόσημο της f'. Είναι:

$$x\in(-\infty,1)\Rightarrow x<1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}$$
$$f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0,$$

άρα, f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.

$$x\in(1,+\infty)\Rightarrow x>1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}$$
$$f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0,$$

άρα, f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

γ) $x\in(-\infty,1)\Rightarrow x<1\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0$

$x\in(1,+\infty)\Rightarrow x>1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0$.

Τελικά, $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Άσκηση 13

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=3$ και $f(x)-\eta\mu 3x\le 3e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, $f'(0)=6$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=f(x)-\eta\mu 3x-3e^x, x\in\mathbb{R}$.

Από τη σχέση της υπόθεσης προκύπτει,

$$f(x)-\eta\mu 3x-3e^x\le 0\Rightarrow g(x)\le 0, x\in\mathbb{R}\ (1).$$

Παρατηρούμε ότι,

$$g(0)=f(0)-\eta\mu 0-3e^0=3-3=0,$$

άρα η σχέση (1) γίνεται, $g(x)\le g(0)$.

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο 0 και επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο 0, από θεώρημα Fermat, έχουμε $g'(0)=0$.

Αλλά, $g'(x)=f'(x)-3\sigma\upsilon\nu 3x-3e^x, x\in\mathbb{R}$.

Τελικά,

$g'(0)=0\Rightarrow f'(0)-3\sigma\upsilon\nu 0-3e^0=0\Rightarrow f'(0)=6$.

Άσκηση 14

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f τρίτου βαθμού με
$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

β) Αν η f έχει δύο θέσεις τοπικών ακρότατων στα x_1, x_2, να αποδείξετε ότι:

$$f''(x_1)+f''(x_2)=0.$$

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma, x\in\mathbb{R}$

και
$f''(x)=6\alpha x+2\beta=2(3\alpha x+\beta), x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2(3\alpha x+\beta)=0 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$.

Αν $\alpha>0$, τότε:

x	$-\infty$	$-\dfrac{\beta}{3\alpha}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩		∪

Αν $\alpha<0$, τότε:

x	$-\infty$	$-\dfrac{\beta}{3\alpha}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	∪		∩

Σε κάθε περίπτωση η C_f παρουσιάζει καμπή στο $-\dfrac{\beta}{3\alpha}$.

β) Η f έχει τοπικά ακροτάτων στα x_1, x_2 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτά, επομένως από θεώρημα Fermat, $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Οι x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0.$$

Από τις σχέσεις του Vieta, έχουμε:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{2\beta}{3\alpha} \quad (1).$$

$$f''(x_1)+f''(x_2)=2(3\alpha x_1+\beta)+2(3\alpha x_2+\beta)$$

$$=6\alpha(x_1+x_2)+4\beta \overset{(1)}{=} 6\alpha\left(-\frac{2\beta}{3\alpha}\right)+4\beta=0$$

Άσκηση 15

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x+1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο 0.

β) Να αποδείξετε ότι $\ln\dfrac{e^x+1}{2}\geq\dfrac{x}{2}, x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0, x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι κυρτή. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(0, f(0))$, είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\ln 2.$$

β) Η f είναι κυρτή, άρα η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της, επομένως και στο 0, θα βρίσκεται κάτω από τη C_f. Δηλαδή έχουμε:

$$f(x)\geq\frac{1}{2}x+\ln 2 \Leftrightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}x+\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x+1)-\ln 2\geq\frac{x}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{e^x+1}{2}\geq\frac{x}{2}.$$

Άσκηση 16

Να βρείτε τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{συν}x-1)\ln x$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\text{ημ}x\ln^2 x$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3\ln x-2e^x)$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - x^{\nu}\right), \nu\in\mathbb{N}^*$.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sigma\upsilon\nu x-1)\ln x \overset{(0\cdot(+\infty))}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\cdot(x\ln x)$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(*)}{=} 0\cdot0=0.$

$^*\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}-x=0.$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}\eta\mu x\ln^2 x \overset{(0\cdot(+\infty))}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot(x\ln^2 x)=$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{(*)}{=} 1\cdot0=0$

$^*\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}$

$\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}2x=0$

γ)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln x-2e^x\right) \overset{((+\infty)-(+\infty))}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(3\frac{\ln x}{e^x}-2\right)$

$\overset{(*)}{=}(+\infty)(3\cdot0-2)=-\infty$

$^*\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0.$

δ) Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-x^{\nu}\right) \overset{((+\infty)-(+\infty))}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu}\left(\frac{\ln x}{x^{\nu}}-1\right)$

$\overset{(*)}{=}(+\infty)(0-1)=-\infty$

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β) Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι και εφαπτομένη της C_f.

Λύση

α) Αναζητούμε την οριζόντια ασύμπτωτη με την βοήθεια του ορισμού.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2e^x \overset{(+\infty)0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

Συμπεραίνουμε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=e^x\left(x^2+2x\right), x\in\mathbb{R}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο τυχαίο σημείο x_0 είναι,

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

Η εφαπτομένη και η ασύμπτωτη ταυτίζονται αν και μόνο αν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=0 \end{cases} (\Sigma).$$

Το σύστημα είναι ισοδύναμο,

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0}\left(x_0^2+2x_0\right)=0 \\ x_0e^{x_0}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=0$$

Δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο 0 συμπίπτει με την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2\cdot e^{-x}+1$ εφάπτεται και στην C_f.

Λύση

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot e^{-x}+1}{x}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{x}\right)\overset{(*)}{=}0+0=0=\lambda$$
$$^{*}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+e^x}{e^x}$$
$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+e^x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1=\beta.$$

Η συνάρτηση f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$. Η εφαπτομένη της C_f τυχαίο σημείο $M\left(x_0 f(x_0)\right)$ έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$$
$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$$

και $f'(x)=-xe^{-x}(x-2), x\in\mathbb{R}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει x_0, τέτοιο ώστε: $\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f(x_0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\,\acute{\eta}\,x_0=2\\ f(x_0)=1\end{cases}\Leftrightarrow x_0=0.$

Δηλαδή η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι και εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,1)$.

Άσκηση 19

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, η οποία είναι τέτοια ώστε: $4f(x^2)-f^2(3x-2)\ge 4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=f(4)$.

β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

γ) $f'(1)=f'(4)$

δ) Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(1,4)$.

Λύση

α) Η (1) για $x=1$ γίνεται:

$$4f(1)-f^2(1)\ge 4\Rightarrow f^2(1)-4f(1)+4\le 0\Rightarrow$$
$$\left(f(1)-2\right)^2\le 0\Rightarrow f(1)-2=0\Rightarrow f(1)=2$$

Όμοια η (1) για $x=2$ γίνεται

$$4f(4)-f^2(4)\ge 4\Rightarrow f^2(4)-4f(4)+4\le 0\Rightarrow$$
$$\left(f(4)-2\right)^2\le 0\Rightarrow f(4)-2=0\Rightarrow f(4)=2$$

β) Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[1,4]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=4f(x^2)-f^2(3x-2)-4, x\in\mathbb{R}.$$

Από υπόθεση έχουμε:

$$g(x)\ge g(1)=0,$$
$$g(x)\ge g(2)=0$$

δηλαδή η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στα σημεία 1 και 2 επομένως από Θεώρημα Fermat προκύπτει ότι: $g'(1)=0$ και $g'(2)=0$.

Όμως για κάθε $x\in R$

$$g'(x)=8xf'(x^2)-6f(3x-2)f'(3x-2).$$

Για $x=1$:

$$g'(1)=0\Rightarrow f'(1)\left(8-6f(1)\right)=0\Rightarrow -4f'(1)=0$$
$$\Rightarrow f'(1)=0$$

Όμοια για $x=2$:

$$g'(2)=0\Rightarrow f'(4)\left(16-6f(4)\right)=0\Rightarrow 4f'(4)=0$$
$$\Rightarrow f'(4)=0$$

δ)

- η f' παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[1,x_0]\subseteq R$ και $[x_0,4]\subseteq R$ και
- $f'(1)=f'(x_0)=f'(4)=0$

Από θεώρημα Rolle στα διαστήματα: $[1,x_0]$ και $[x_0,4]$ προκύπτει ότι υπάρχει

- ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(1,x_0)\subseteq(1,4)$ και
- ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x_0,4)\subseteq(1,4)$

τέτοια ώστε:

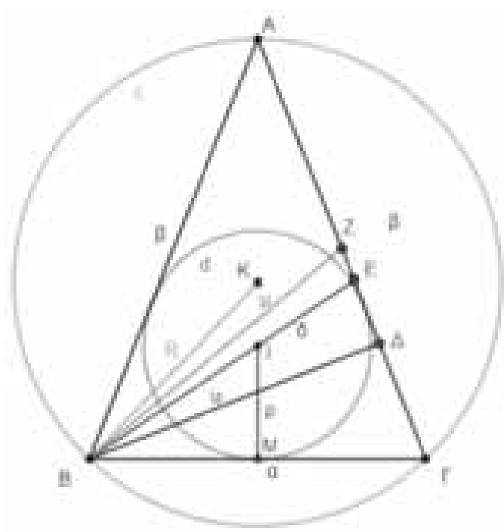
$$f''(\xi_1)=0 \text{ και } f''(\xi_2)=0.$$

Άρα η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1,4)$.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Ακρότατα λόγων μεγεθών στα Ισοσκελή Τρίγωνα

Βασίλειος Α. Λαγογιάννης



Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και έστω ΙΜ=ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, ΒΔ=υ το παρά την βάση ύψος, ΒΕ=δ η παρά την βάση διχοτόμος, ΒΖ=μ η παρά την βάση διάμεσος και ΚΒ=R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, σύμφωνα με το παράπλευρο σχήμα.

Ζητείται να υπολογιστούν οι μέγιστες τιμές που μπορούν να λάβουν οι λόγοι $w_1=\frac{\rho}{\delta}$, $w_2=\frac{\rho}{\mu}$, $w_3=\frac{\upsilon}{R}$, $w_4=\frac{\delta}{R}$ και $w_5=\frac{\mu}{R}$.

Λύση:

Βήμα 1ο: Λαμβάνοντας υπόψη ότι για κάθε ισοσκελές τρίγωνο όπου α=ΒΓ και β=ΑΒ=ΑΓ ισχύει $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\hat{B}$ και χρησιμοποιώντας τον βασικό μετασχηματισμό $x=\sigma\upsilon\nu\hat{B}$, υπολογίζουμε κάθε ένα από τα μεγέθη ρ, υ, δ, μ, R ως συνάρτηση των μεταβλητών β και x:

$$2(\mathrm{AB\Gamma})= 2E \Rightarrow \rho(\alpha+\beta+\gamma) = \beta\gamma\,\eta\mu\hat{A}$$

$$\xRightarrow{(\beta=\gamma,\ \hat{A}=2\pi-\hat{B})} \rho(\alpha+2\beta)= \beta^2\eta\mu 2\hat{B} \Rightarrow 2\rho\beta\left(1+\frac{\alpha}{2\beta}\right)=2\beta^2\eta\mu\hat{B}\sigma\upsilon\nu\hat{B} \xRightarrow{\sigma\upsilon\nu\hat{B}=\frac{\alpha}{2\beta}} \rho = \frac{\beta\,\sigma\upsilon\nu\hat{B}\eta\mu\hat{B}}{1+\sigma\upsilon\nu\hat{B}} = \frac{\beta\,\sigma\upsilon\nu\hat{B}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\hat{B}}}{1+\sigma\upsilon\nu\hat{B}}$$

$$\xRightarrow{\mu\varepsilon\tau\alpha\sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma} \boldsymbol{\rho=\frac{\beta\, x\sqrt{1-x^2}}{1+x}}\ (1).$$

$$\upsilon=\alpha\eta\mu\hat{B} = \alpha\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\hat{B}} \xRightarrow{\alpha=2\beta\sigma\upsilon\nu\hat{B}} \upsilon = 2\beta\sigma\upsilon\nu\hat{B}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\hat{B}} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\mu\varepsilon\tau\alpha\sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma} \boldsymbol{\upsilon = 2\beta x\sqrt{1-x^2}\ (2).}$$

Στο τρίγωνο ΕΒΓ από θεώρημα ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu B\hat{E}\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{B\Delta} \xRightarrow[B\hat{E}\Gamma=2\pi-\hat{\Gamma}-\frac{\hat{B}}{2})]{(\hat{B}=\hat{\Gamma},\ B\Gamma=\alpha,\ B\Delta=\delta,} \frac{\eta\mu\frac{3\hat{B}}{2}}{\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\delta} \Rightarrow \delta= \frac{\alpha\,\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\frac{3\hat{B}}{2}} = = \frac{2\alpha\,\eta\mu\frac{\hat{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\hat{B}}{2}}{3\eta\mu\frac{\hat{B}}{2}-4\eta\mu^3\frac{\hat{B}}{2}} \Rightarrow \delta = \frac{2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\frac{\hat{B}}{2}}{3-4\eta\mu^2\frac{\hat{B}}{2}}$$

$$\xRightarrow{\alpha=2\beta\sigma\upsilon\nu\hat{B}} \delta= \frac{4\beta\sigma\upsilon\nu\hat{B}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\hat{B}}{2}}{1+2\sigma\upsilon\nu\hat{B}} \Rightarrow \delta= \frac{4\beta\sigma\upsilon\nu\hat{B}\,\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\hat{B}}}{\sqrt{2}(1+2\sigma\upsilon\nu\hat{B})} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\mu\varepsilon\tau\alpha\sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma} \delta= \boldsymbol{\frac{4\beta x\,\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}(1+2x)}\ (3).}$$

Από θεώρημα διαμέσου

$$BM^2=\mu^2=\frac{2AB^2+2B\Gamma^2-A\Gamma^2}{4} \xRightarrow{AB=A\Gamma=\beta,\ B\Gamma=\alpha}$$

$$\xRightarrow{AB=A\Gamma=\beta,\ \ B\Gamma=\alpha} \mu=\frac{\sqrt{\beta^2+2\alpha^2}}{2} \xRightarrow{\sigma\upsilon\nu\widehat{B}=\frac{\alpha}{2\beta}} \mu=\frac{\beta\sqrt{1+8\sigma\upsilon\nu^2\widehat{B}}}{2} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\mu\varepsilon\tau\alpha\sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma} \boldsymbol{\mu}=\frac{\boldsymbol{\beta\sqrt{1+8x^2}}}{\mathbf{2}}\ (4).$$

$$\beta=2R\eta\mu\widehat{B}=2R\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\widehat{B}} \xRightarrow{\mu\varepsilon\tau\alpha\sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma} R=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2\sqrt{1-x^2}}}\ (5).$$

Βήμα 2ο: Εκτελώντας διαιρέσεις κατά μέλη μεταξύ των σχέσεων (1), (2), (3), (4), και (5) απαλείφεται η μεταβλητή β και οι λόγοι w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 εκφράζονται αποκλειστικά ως συναρτήσεις του x:

$$(1)/(3) \Rightarrow \mathbf{w_1}=\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\delta}}=\frac{\mathbf{(2x+1)\sqrt{1-x}}}{\mathbf{2\sqrt{2}(x+1)}}\ (6\alpha).$$

$$(1)/(4) \Rightarrow \mathbf{w_2}=\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\mu}}=\frac{\mathbf{2x\sqrt{1-x}}}{\sqrt{\mathbf{(1+x)(1+8x^2)}}}\ (7\alpha).$$

$$(2)/(5) \Rightarrow \mathbf{w_3}=\frac{\boldsymbol{\upsilon}}{\mathbf{R}}=\mathbf{4\,x\left(1-x^2\right)}\ (8\alpha)$$

$$(3)/(5) \Rightarrow w_4=\frac{\delta}{R}=\frac{\mathbf{4\sqrt{2}\,x(1+x)\,\sqrt{1-x}}}{\mathbf{1+2x}}\ (9\alpha)$$

$$(4)/(5) \Rightarrow w_5=\frac{\mu}{R}=\sqrt{\mathbf{(1+8x^2)(1-x^2)}}\ (10\alpha).$$

Βήμα 3ο: Παραγωγίζοντας τις w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 ως προς x, έχουμε:

$$(6\alpha) \Rightarrow \frac{\mathbf{dw_1}}{\mathbf{dx}}=\frac{\mathbf{-2x^2-5x+1}}{\mathbf{4(x+1)\sqrt{2-2x}}}\ (11).$$

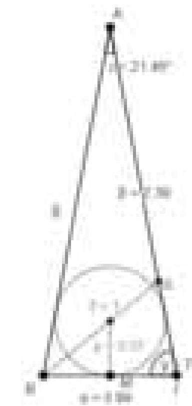
$$(7\alpha) \Rightarrow \frac{\mathbf{dw_2}}{\mathbf{dx}}=-\frac{\mathbf{2\left(8x^3+x^2+x-1\right)^{3/2}}}{\mathbf{\sqrt{1-x}(1+x)^2(1+8x^2)^2}}\ (12).$$

$$(8\alpha) \Rightarrow \frac{\mathbf{dw_3}}{\mathbf{dx}}=\mathbf{4\left(1-3x^2\right)}\ (13).$$

$$(9\alpha) \Rightarrow \frac{\mathbf{dw_4}}{\mathbf{dx}}=-\frac{\mathbf{2\sqrt{2}\left(6x^3+3x^2-x-2\right)}}{\mathbf{\sqrt{1-x}(1+2x)^2}}\ (14).$$

$$(10\alpha) \Rightarrow \frac{\mathbf{dw_5}}{\mathbf{dx}}=-\frac{\mathbf{x\left(-16x^2+7\right)}}{\sqrt{\mathbf{-8x^4+7x^2+1}}}\ (15).$$

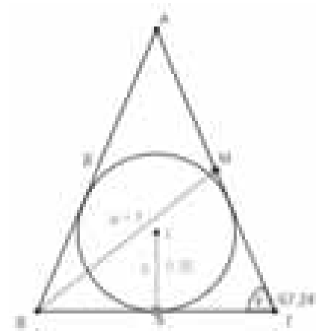
Για καθεμία από τις παραπάνω παραγώγους αποδεικύεται ότι υπάρχει μία και μόνο μία τιμή του x που ανήκει στο πεδίο ορισμού (0,1), για την οποία μηδενίζεται. Αν συμβολίσουμε με $x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, x_{M4}, x_{M5}$ τις παραπάνω τιμές μηδενισμού στο (0,1) που αντιστοιχούν στις πρώτες παραγώγους των w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, τότε διαπιστώνουμε ότι, επειδή οι παράγωγοι αυτές είναι θετικές στα διαστήματα $(0, x_{M1})$, $(0, x_{M2})$, $(0, x_{M3})$, $(0, x_{M4})$ και $(0, x_{M5})$ και αρνητικές στα $(x_{M1}, 1)$, $(x_{M2}, 1)$, $(x_{M3}, 1)$, $(x_{M4}, 1)$ και $(x_{M5}, 1)$, οι $w_1(x_{M1})$, $w_2(x_{M2})$, $w_3(x_{M3})$, $w_4(x_{M4})$, $w_5(x_{M5})$ αποτελούν τις μέγιστες τιμές των λόγων w_1, w_2, w_3, w_4, w_5. Με βάση τα παραπάνω, υπολογίζουμε παρακάτω τους μέγιστους λόγους και σχεδιάζουμε τα αντίστοιχα ισοσκελή τρίγωνα.



$(11) \xRightarrow{0<x_{M1}<1} -2{x_{M1}}^2-5x_{M1}+1=0 \xRightarrow{0<x_{M1}<1} x_{M1}=\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\widehat{B_1}=\frac{\sqrt{33}-5}{4}} \Rightarrow$

$\boldsymbol{\widehat{B_1}\cong 79,27^0}$ και $w_1(x_{M1})=\left(\frac{\rho}{\delta}\right)_{\max}\boldsymbol{=\frac{\sqrt{207-33\sqrt{33}}}{8\sqrt{2}}}$ $\boldsymbol{\cong 0,36901}$

Η κατασκευή του τριγώνου δεξιά έγινε με πρόγραμμα GEOGEBRA επιβεβαιώνοντας την ορθότητα των υπολογισμών. Η κατασκευή ισοσκελούς μεγίστου λόγου $\frac{\rho}{\delta}$ με κανόνα και διαβήτη είναι επίσης εφικτή.



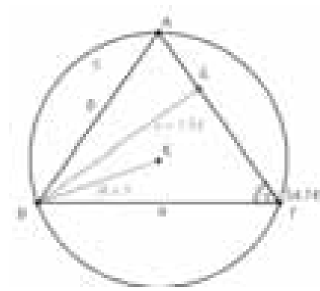
$(12) \xRightarrow{0<x_{M2}<1} 8{x_{M2}}^3+{x_{M2}}^2+x_{M2}-1=0 \xRightarrow{0<x_{M2}<1}$

$$\boldsymbol{x_{M2}}=\frac{1}{24}\sqrt[3]{899+\sqrt{23^3+899^2}}+\frac{1}{24}\sqrt[3]{899-\sqrt{23^3+899^2}}-\frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_{M2}=\sigma\upsilon\nu\widehat{B_2}}\ \ \boldsymbol{\cong 0,38692}\Rightarrow \boldsymbol{\widehat{B_2}\cong 67,24^0} \text{ και}$$

$$w_2(x_{M2})=\left(\frac{\rho}{\mu}\right)_{\max} \boldsymbol{\cong 0,34706.}$$

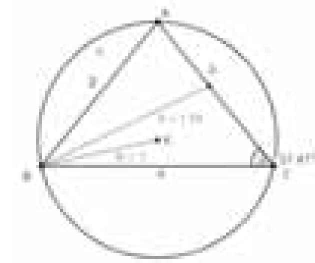
Η κατασκευή του τριγώνου δεξιά έγινε με πρόγραμμα GEOGEBRA επιβεβαιώνοντας την ορθότητα των υπολογισμών. Η κατασκευή ισοσκελούς μεγίστου λόγου $\frac{\rho}{\mu}$ με κανόνα και διαβήτη δεν είναι εφικτή.



$$(13) \xRightarrow{0<x_{M3}<1} 4\left(1-3{x_{M3}}^2\right)=0 \xRightarrow{0<x_{M3}<1} x_{M3}=\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\widehat{B_3}=\frac{\sqrt{3}}{3}}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\widehat{B_3}\cong 54,74^0} \text{ και } w_3(x_{M3})=\left(\frac{\upsilon}{R}\right)_{\max}\boldsymbol{=\frac{8\sqrt{3}}{9}\cong 1,5396.}$$

Η κατασκευή του τριγώνου δεξιά έγινε με πρόγραμμα GEOGEBRA επιβεβαιώνοντας την ορθότητα των υπολογισμών. Η κατασκευή ισοσκελούς μεγίστου λόγου $\frac{\upsilon}{R}$ με κανόνα και διαβήτη είναι επίσης εφικτή.



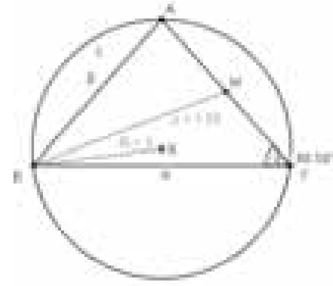
$$(14) \xRightarrow{0<x_{M4}<1} 6{x_{M4}}^3+3{x_{M4}}^2-x_{M4}-2=0$$

$$\xRightarrow{0<x_{M4}<1} \boldsymbol{x_{M4}=\sqrt[3]{\frac{4}{27}+\frac{\sqrt{3988}}{432}}+\sqrt[3]{\frac{4}{27}-\frac{\sqrt{3988}}{432}}-\frac{1}{6}\cong 0,6238=\sigma\upsilon\nu\widehat{B_4}}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\widehat{B_4}\cong 51,41^0}$$

και $w_4(x_{M4})=\left(\frac{\delta}{R}\right)_{\max}$ $\boldsymbol{\cong 1,56366.}$

Η κατασκευή του τριγώνου δεξιά έγινε με πρόγραμμα GEOGEBRA επιβεβαιώνοντας την ορθότητα των υπολογισμών. Η κατασκευή ισοσκελούς μεγίστου λόγου $\frac{\delta}{R}$ με κανόνα και διαβήτη δεν είναι εφικτή.



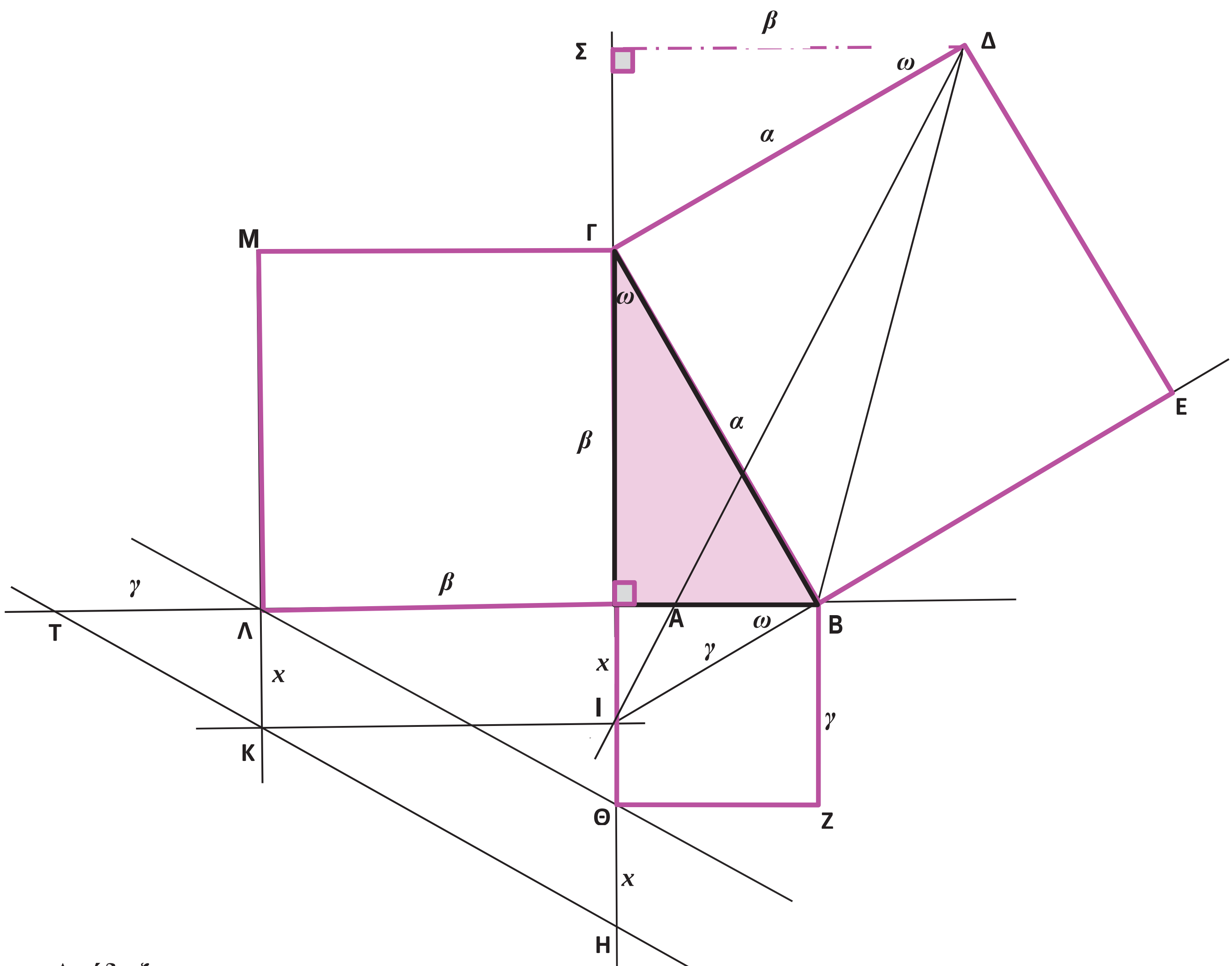
$$(15) \xRightarrow{0<x_{M5}<1} -16{x_{M5}}^2+7=0 \xRightarrow{0<x_{M5}<1} x_{M5}=\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\widehat{B_5}=\frac{\sqrt{7}}{4}}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\widehat{B_5}\cong 48,59^0} \text{ και } w_5(x_{M5})=\left(\frac{\mu}{R}\right)_{\max}\boldsymbol{=\frac{9\sqrt{2}}{8}}\ \boldsymbol{\cong 1,59099}$$

Η κατασκευή του τριγώνου δεξιά έγινε με πρόγραμμα GEOGEBRA επιβεβαιώνοντας την ορθότητα των υπολογισμών. Η κατασκευή ισοσκελούς μεγίστου λόγου $\frac{\mu}{R}$ με κανόνα και διαβήτη είναι επίσης εφικτή.

Μια απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Νικόλαος Στ. Δασκαλόπουλος –



Απόδειξη

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\widehat{A}=90^o$ και τα τετράγωνα **ΒΓΔΕ, ΑΓΜΛ** και **ΑΒΖΘ** με μήκη πλευρών ***α, β*** και ***γ*** αντίστοιχα.

Στην ημιευθεία **ΑΛ** θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα **ΑΛ=*β*** και **ΛΤ=*γ***, ενώ στην **ΑΘ** το τμήμα **ΑΘ=*γ***. Αν η παράλληλη της **ΛΘ** από το **Τ** τέμνει την ημιευθεία **ΑΘ** στο **Η** και θέσουμε **ΘΗ=*x***, τότε έχουμε:i) (1) $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{x} \Leftrightarrow \beta x=\gamma^2$, ii) το τετράπλευρο **ΛΚΗΘ** είναι παραλληλόγραμμο και iii) αν το ίχνος της κάθετης από το **Κ** στην **ΑΘ** είναι το σημείο **Ι**, τότε το **ΑΙ=*x***.

Επομένως στο τρίγωνο **ΔΓΙ** είναι: **ΓΙ= *β*+*x*** και το ύψος του **ΔΣ=*β***, γιατί τρίγωνα **ΔΣΓ** και **ΓΑΒ** είναι ίσα, ως ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και $\widehat{\Sigma\Delta\Gamma}=\widehat{I\Gamma B}$,ως οξείες με κάθετες πλευρές. Οπότε: $2\cdot(\Delta\Gamma I)=\Gamma I\cdot\Delta\Sigma=(\beta+x)\cdot\beta=\beta^2+\beta\cdot x=\beta^2+\gamma^2$ (2)

Στην συνέχεια, από την σχέση (1), συμπεραίνουμε πως τα ορθογώνια **ΒΑΙ** και **ΓΑΒ** είναι όμοια, οπότε :$\widehat{ABI}=\widehat{A\Gamma B}$. Άρα $\widehat{\Gamma BI}=90^o$ και κατά συνέπεια τα σημεία **Ε,Β** και **Ι** είναι συνευθειακά , δηλαδή, η ευθεία **ΕΙ** είναι παράλληλη της **ΔΓ**.

Οπότε είναι: $(I\Gamma\Delta)=(B\Gamma\Delta) \Leftrightarrow 2\cdot(I\Gamma\Delta)=2\cdot(B\Gamma\Delta)=\alpha^2$ (3)

Από (2) και (3) προκύπτει : $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$.

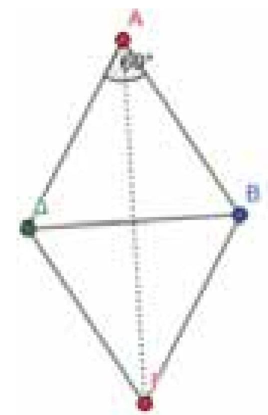
Χρωματισμένα Σημεία

Γιώργος Τσαπακίδης-Μάριος Καμμένος (μαθητής Γ' Λυκείου)

Είναι προφανές ότι με τη διδασκαλία απλοϊκών και τετριμμένων προβλημάτων μιας περιορισμένης ύλης δεν προάγεται **η μαθηματική εκπαίδευση** μιας χώρας, πράγμα που έχει ως επακόλουθο τη μη επιστημονική και τεχνολογική της ανάπτυξη, άρα και την ευημερία της. Ένα δείγμα "**ασυνήθιστων**" προβλημάτων, που η λύση τους δεν είναι εφαρμογές γνωστών θεωρημάτων και τεχνικών, αλλά αποτέλεσμα έντονης πνευματικής **προσπάθειας** και **αναζήτησης** είναι και τα προβλήματα που μελετάμε σε αυτό το άρθρο. Ο συνδετικός τους κρίκος είναι ότι αναφέρονται σε σημεία που έχουν χρωματισθεί με διάφορα χρώματα. Με την πρόταση:" το σημείο Α χρωματίζεται κόκκινο" εννοείται ότι στο σημείο Α αντιστοιχεί το κόκκινο χρώμα, αφού ένα σημείο είναι αδιάστατο, οπότε είναι αδύνατο να χρωματισθεί.

1. **Κάθε σημείο του επιπέδου χρωματίζεται κόκκινο, μπλε ή πράσινο. Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία του επιπέδου του ίδιου χρώματος, που απέχουν απόσταση 1.**

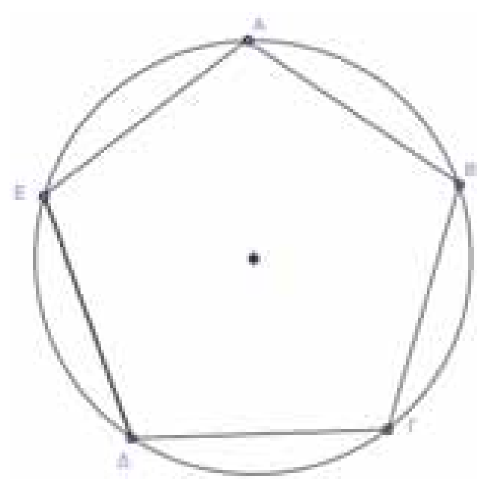
Απόδειξη



Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν δύο σημεία του επιπέδου του ίδιου χρώματος, που να έχουν απόσταση 1. Ένα καθορισμένο σημείο Α θα έχει ένα από τα τρία χρώματα, έστω κόκκινο. Κατασκευάζουμε ρόμβο ΑΒΓΔ Με $\hat{\mathrm{A}}=60^{\mathrm{o}}$ και $(\mathrm{AB})=1$. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΔΒ είναι ισόπλευρα των οποίων τα μήκη των πλευρών τους είναι 1. Επειδή $(\mathrm{AB})=1$ το Β, έχει διαφορετικό χρώμα από το Α, έστω μπλε. Επειδή $(\Delta\mathrm{A})=1=(\Delta\mathrm{B})$ το Δ έχει διαφορετικό χρώμα από τα Α, Β, άρα πράσινο. Επειδή $(\Gamma\mathrm{B})=1=(\Gamma\Delta)$, το Γ έχει διαφορετικό χρώμα από τα Β και Δ, άρα κόκκινο. Περιστρέφουμε τον ρόμβο γύρω από το Α ώστε το Γ να διαγράψει κύκλο. Σε κάθε θέση του ΑΒΓΔ η κορυφή Α ως σταθερή είναι κόκκινη, ενώ μια από τις κορυφές Β, Δ είναι μπλε και η άλλη πράσινη, οπότε η Γ θα έχει πάντοτε κόκκινο χρώμα. Έτσι το Γ, κατά την περιστροφή του ΑΒΓΔ γύρω από το Α, διαγράφει κύκλο του οποίου όλα τα σημεία είναι κόκκινα. Ο κύκλος έχει κέντρο το Α και ακτίνα $(\mathrm{A}\Gamma)=\sqrt{3}$, άρα έχει χορδή μήκους 1, που τα άκρα της έχουν το ίδιο χρώμα (κόκκινο), **Άτοπο.** Επομένως υπάρχουν δύο σημεία του επιπέδου του ίδιου χρώματος απόστασης 1.

2. **Χρωματίζουμε κάθε σημείο ενός κύκλου κόκκινο ή μπλε. Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία του κύκλου του ίδιου χρώματος τέτοια, ώστε το ένα να είναι το μέσο του τόξου που ορίζουν τα δύο άλλα.**

Απόδειξη



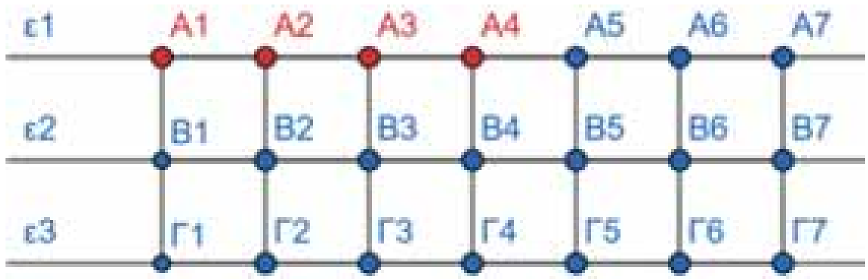
Εγγράφουμε στον κύκλο το κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Τρεις τουλάχιστον από τις κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα (αρχή περιστεροφωλιάς), έστω κόκκινο. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Οι κόκκινες κορυφές είναι οι Α,Β,Γ, τότε το Β είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}\Gamma}$.
- Οι κόκκινες κορυφές είναι οι Α,Β,Δ, τότε το Δ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AE}\Delta\Gamma\mathrm{B}}$.

Όλες οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται στις δύο προηγούμενες.

3. Κάθε σημείο του επιπέδου χρωματίζεται κόκκινο ή μπλε. Δείξτε ότι υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου όλες οι κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα.

Απόδειξη



Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$. Πάνω στην $ε_1$ παίρνουμε τα σημεία $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$, $Α_4$, $Α_5$, $Α_6$, $Α_7$, από τα οποία φέρνουμε κάθετες στις $ε_2$, $ε_3$. Οι κάθετες τέμνουν τις $ε_2$, $ε_3$ στα $Β_1$, $Β_2$, … , $Β_7$ και στα $Γ_1$, $Γ_2$, … , $Γ_7$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τέσσερα τουλάχιστον από τα σημεία $Α_1$, $Α_2$, … , $Α_7$ έχουν το ίδιο χρώμα (αρχή περιστεροφωλιάς). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι τα $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$, $Α_4$ είναι κόκκινα και τα $Α_5$, $Α_6$, $Α_7$ είναι μπλε. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Δύο τουλάχιστον από τα $Β_1$, $Β_2$, $Β_3$, $Β_4$, έστω τα $Β_1$, $Β_2$, είναι κόκκινα, τότε το ορθογώνιο $Α_1Α_2Β_2Β_1$ έχει κόκκινες κορυφές.
- Τα $Β_1$, $Β_2$, $Β_3$ $Β_4$ είναι μπλε και δύο τουλάχιστον από τα $Β_5$, $Β_6$, $Β_7$, έστω τα $Β_5$, $Β_6$ είναι μπλε, τότε το ορθογώνιο $Α_5Α_6Β_6Β_5$ έχει μπλε κορυφές.
- Τα $Β_1$, $Β_2$, $Β_3$, $Β_4$ είναι μπλε και τα $Β_5$, $Β_6$, $Β_7$ είναι κόκκινα, τότε υπάρχουν οι υποπεριπτώσεις:
  - $Γ_1$ μπλε και $Γ_2$, $Γ_3$, $Γ_4$ κόκκινα, τότε το $Α_2Α_3Γ_3Γ_2$ έχει κορυφές κόκκινες.
  - $Γ_1$, $Γ_2$ μπλε τότε το $Β_1Β_2Γ_2Γ_1$ έχει μπλε κορυφές.

Όλες οι άλλες περιπτώσεις τελικά ανάγονται στις προηγούμενες.

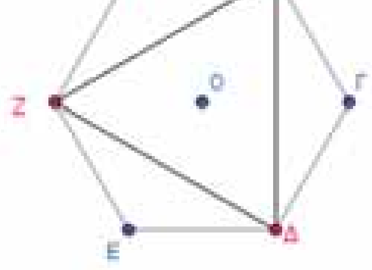
Έτσι σε κάθε περίπτωση υπάρχει ορθογώνιο που οι κορυφές του έχουν ίδιο χρώμα.

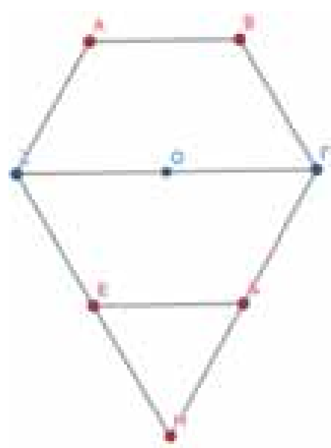
4. Κάθε σημείο του επιπέδου χρωματίζεται κόκκινο ή μπλε. Δείξτε ότι υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο, που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα.

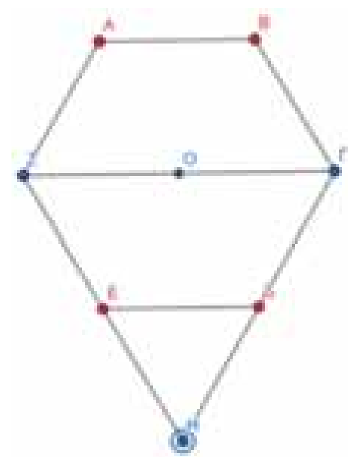
Απόδειξη

Κατασκευάζουμε το κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και ονομάζουμε Ο το κέντρο του. Τέσσερα τουλάχιστον από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ , Ο έχουν το ίδιο χρώμα (αρχή περιστεροφωλιάς), έστω κόκκινο. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

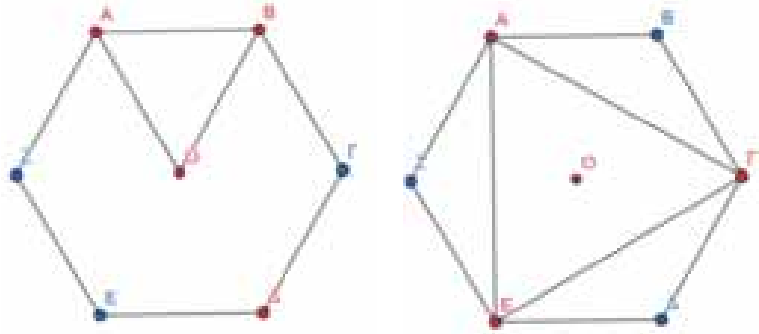
- Τα τέσσερα κόκκινα σημεία είναι κορυφές του κανονικού εξαγώνου, οπότε τουλάχιστον δύο από αυτές είναι διαδοχικές, έστω οι Α, Β. Αν το Ο κόκκινο το ζητούμενο τρίγωνο είναι το ΟΑΒ. Αν το Ο είναι μπλε έχουμε:







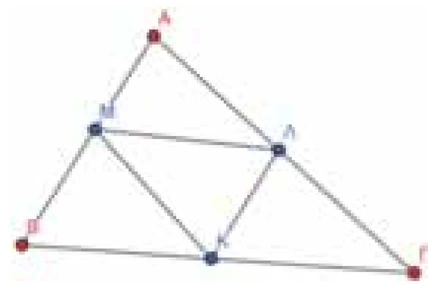
- Τρεις κορυφές και το Ο είναι κόκκινα, τότε:



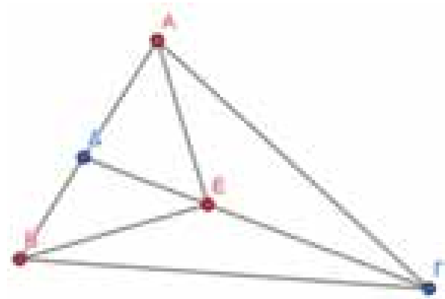
5. **Έστω Κ, Μ δύο μη κενά πεπερασμένα σύνολα σημείων. Τα σημεία του Κ τα βάφουμε κόκκινα και τα σημεία του Μ μπλε. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα του ίδιου χρώματος περιέχει ένα σημείο του άλλου χρώματος. Δείξτε ότι τα σημεία και των δύο συνόλων είναι συνευθειακά.**

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν μη συνευθειακά σημεία του $K \cup M$. Επειδή το $K \cup M$ έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων, τα τρίγωνα που έχουν κορυφές τα σημεία είναι πεπερασμένα στο πλήθος (το πολύ $\binom{n+m}{3}$ με $|K| = n$ και $|M| = m$). Ονομάζουμε ΑΒΓ το τρίγωνο ελάχιστου εμβαδού. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:



- Τα Α, Β, Γ να έχουν το ίδιο χρώμα, έστω κόκκινο. Τότε στα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ υπάρχουν σημεία Μ, Κ, Λ μπλε και $(ΚΛΜ) < (ΑΒΓ)$, άτοπο.

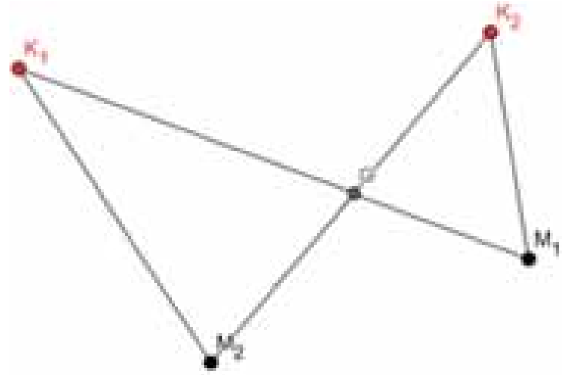


- Δύο σημεία έχουν το ίδιο χρώμα, έστω ότι τα Α, Β είναι κόκκινα και το Γ μπλε, τότε στο ΑΒ υπάρχει μπλε σημείο Δ και στο ΓΔ υπάρχει κόκκινο σημείο Ε, έτσι $(ΑΒΕ) < (ΑΒΓ)$, άτοπο.

Συμπέρασμα: Δεν υπάρχουν μη συνευθειακά σημεία του $K \cup M$, άρα όλα τα σημεία του $K \cup M$ είναι συνευθειακά.

6. **Στο επίπεδο δίνονται 2n σημεία, που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Τα n από αυτά τα βάφουμε κόκκινα και τα υπόλοιπα n μπλε. Δείξτε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε n ευθύγραμμα τμήματα που το ένα άκρο τους να είναι μπλε και το άλλο κόκκινο, έτσι ώστε ανά δύο να μην τέμνονται.**

Απόδειξη



Έστω $M_1, M_2, \dots, M_n$ τα μπλε και $K_1, K_2, \dots, K_n$ τα κόκκινα σημεία. Οι τρόποι με τους οποίος μπορούμε να σχηματίσουμε τα τμήματα του προβλήματος είναι n! (όσες οι μεταθέσεις των $M_1, M_2, \dots, M_n$, αν στη διατεταγμένη n-άδα $(K_1, K_2, \dots, K_n)$ αντιστοιχίσουμε τις μεταθέσεις των $(M_1, M_2, \dots, M_n)$). Σε κάθε τέτοια αντιστοιχία δημιουργούνται n τμήματα με το ένα άκρο μπλε και το άλλο κόκκινο, ονομάζουμε S_i το άθροισμα των n αυτών τμημάτων. Το σύνολο με στοιχεία τα αθροίσματα S_i είναι πεπερασμένο, άρα έχει ελάχιστο στοιχείο. Το σύνολο των τμημάτων που αντιστοιχεί στο ελάχιστο άθροισμα είναι το ζητούμενο, καθώς αλλιώς δύο τουλάχιστον τμήματα, έστω M_1K_1 και M_2K_2 θα τέμνονταν στο O.

Τότε: $K_1M_1 + K_2M_2 = K_1O + OM_1 + K_2O + OM_2 = (K_1O + OM_2) + (K_2O + OM_1) > K_1M_2 + K_2M_1$

(από τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα OM_2K_1, OM_1K_2), ΑΤΟΠΟ, γιατί θα υπήρχε μικρότερο άθροισμα τμημάτων από το ελάχιστο.

7. Θεωρούμε 1004 διαφορετικά σημεία του επιπέδου και τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ορίζουν ανά δύο. Βάφουμε μαύρα τα μέσα αυτών των τμημάτων. Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2005 διαφορετικά μαύρα σημεία. Να επιλέξετε ένα σύνολο 1004 διαφορετικών σημείων του επιπέδου έτσι, ώστε τα μέσα των τμημάτων που ορίζουν ανά δύο να είναι ακριβώς 2005 μαύρα σημεία.

Απόδειξη

Τα 1004 διαφορετικά σημεία ανά δύο ορίζουν $\binom{1004}{2}$ διαφορετικά τμήματα. Ονομάζουμε ΑΒ το τμήμα που έχει μέγιστο μήκος. Τα μέσα των τμημάτων που ενώνουν το Α με τα υπόλοιπα 1002 (εκτός του Β) σημεία βρίσκονται μέσα στον κύκλο $\left(A, \frac{1}{2}AB\right)$. Όμοια τα μέσα των τμημάτων που ενώνουν το Β με τα υπόλοιπα 1002 (εκτός του Α) σημεία βρίσκονται μέσα στον κύκλο $\left(B, \frac{1}{2}BA\right)$.

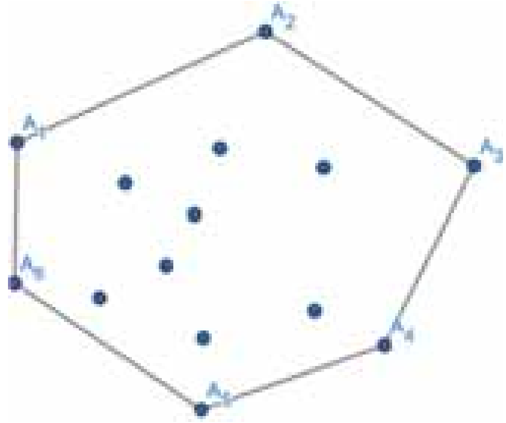
Αυτά τα 1002 + 1002 = 2004 σημεία είναι διαφορετικά και μαύρα. Αν στα 2004 αυτά μαύρα σημεία προσθέσουμε και το μέσο του ΑΒ παίρνουμε 2005 μαύρα σημεία. Υπάρχουν και άλλα μαύρα σημεία, για παράδειγμα το μέσο του ΓΔ, όπου Γ, Δ δύο από τα υπόλοιπα 1002 σημεία (εκτός των Α και Β). Επομένως υπάρχουν τουλάχιστον 2005 μαύρα σημεία.

Για το δεύτερο μέρος θεωρούμε τα σημεία του άξονα x'x με τετμημένες 0, 2, 4, … , 2006. Το τμήμα με άκρα που έχουν τετμημένες 0, 2 το συμβολίζουμε με 0-2, το τμήμα με άκρα που έχουν τετμημένες 0, 4 το συμβολίζουμε με 0-4, κ.ο.κ. Τα μέσα των τμημάτων 0-2, 0-4, 0-6, … , 0-2006, 2-4, 2-6, … , 2004-2006 έχουν τετμημένες 1, 2, 3, 4 , … , 2005. Άρα τα μαύρα σημεία είναι ακριβώς 2005.

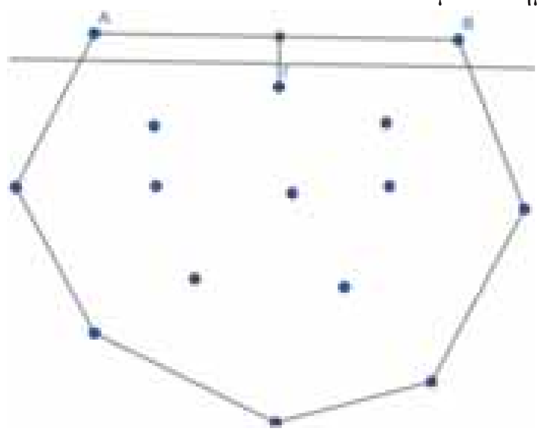
8. Έστω 2n σημεία του επιπέδου που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Βάφουμε τα n από αυτά κόκκινα και τα υπόλοιπα n μπλε. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία ε τέτοια ώστε σε καθένα από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο να υπάρχουν τόσα κόκκινα όσα και μπλε σημεία, και ένα από τα ημιεπίπεδα να περιέχει τουλάχιστον δύο από τα 2n σημεία.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι τα σημεία είναι καρφιά καρφωμένα στο επίπεδο.

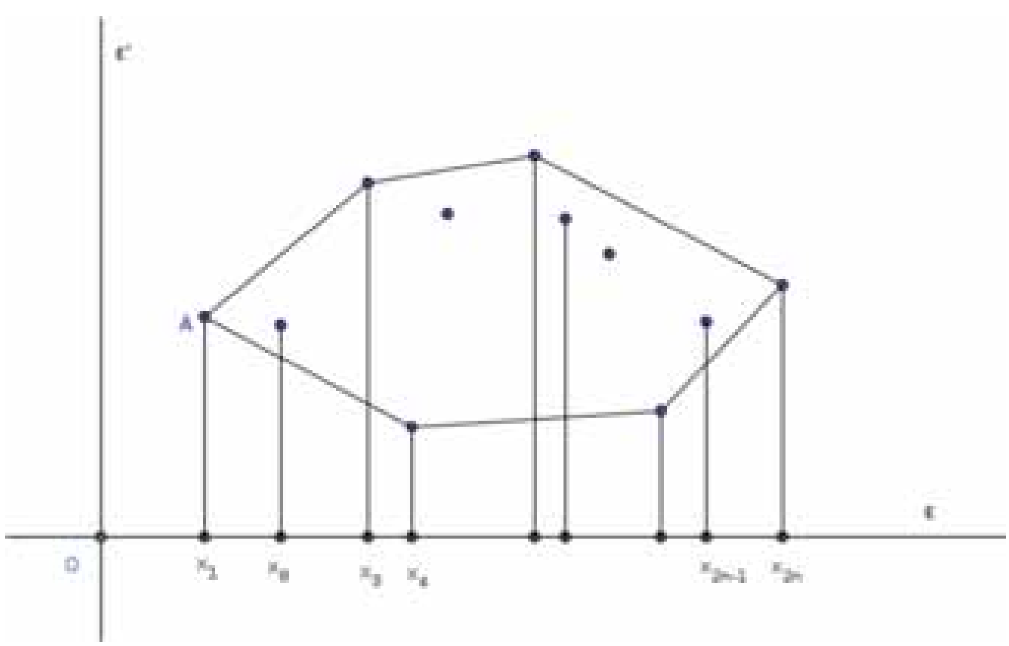


Ένα λάστιχο τεντωμένο γύρω από τα καρφιά σχηματίζει κυρτό πολύγωνο, που έχει κορυφές κάποια από τα 2n καρφιά, με τα υπόλοιπα να είναι εσωτερικά του πολυγώνου. Το πολύγωνο που σχηματίζει το λάστιχο το λέμε κυρτό περίβλημα του συνόλου των 2n σημείων.
Το πολύγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ είναι το κυρτό περίβλημα του συνόλου των σημείων του σχήματος.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
1η) Το κυρτό περίβλημα έχει κορυφές και των δύο χρωμάτων. Τότε το κυρτό περίβλημα έχει πλευρά ΑΒ της οποίας το ένα άκρο είναι κόκκινο και το άλλο μπλε. Θεωρούμε τις αποστάσεις των υπολοίπων 2n-2 σημείων από την ευθεία ΑΒ και έστω Γ το σημείο με την ελάχιστη απόσταση από την ΑΒ. Κάθε κάθετη σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της απόσταση του Γ από την ΑΒ αφήνει στο ένα ημιεπίπεδο τα Α,Β και στο άλλο n – 1 κόκκινα και n – 1 μπλε σημεία.



2η) Όλες οι κορυφές του κυρτού περιβλήματος έχουν το ίδιο χρώμα, έστω κόκκινο. Τα 2n σημεία ανά δύο ορίζουν $\binom{2n}{2}$ διαφορετικές ευθείες (αφού ανά τρία δεν είναι συνευθειακά).

Έστω (ε) ευθεία κάτω από το κυρτό περίβλημα που δεν είναι παράλληλη σε καμία από τις $\binom{2n}{2}$ ευθείες, αλλά και οι κάθετες σε αυτή να μην είναι παράλληλες σε αυτές.
Θεωρούμε την ευθεία ε άξονα με αρχή το Ο, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$ τις τετμημένες των 2n σημείων ενώ την κάθετή της ε στο Ο ονομάζουμε ε’.



Μετακινούμε προς τα δεξιά την ευθεία ε’ που κάθε φορά συναντά ένα μόνο από τα 2n σημεία του προβλήματος. Το Ο δε μετακινείται με την ε’, παραμένει σταθερό. Θεωρούμε και τη συνάρτηση f η οποία σε κάθε $x \in (0,+\infty)$ αντιστοιχεί τη διαφορά πλήθους των μπλε από τα κόκκινα σημεία που βρίσκονται αριστερά της ε’. Έτσι για $x_1 < x < x_2$ είναι $f(x)=1$, γιατί τότε ένα μόνο κόκκινο σημείο βρίσκεται αριστερά της ε’, το Α. Για $x_{2n-1} < x < x_{2n}$ είναι $f(x)=-1$, γιατί αριστερά της ε’ βρίσκονται n-1 κόκκινα σημεία $f(x)=n-(1-n)=-1$ (όλα εκτός από το Β) και όλα τα n μπλε σημεία, άρα . Η μετάβαση της ε’ από σημείο σε σημείο αυξάνει ή μειώνει την τιμή της f κατά μονάδα, επομένως για να μεταβεί από την τιμή 1, όταν $x_1<x<x_2$ στην τιμή -1, όταν $x_{2n-1}<x<x_{2n}$ θα πάρει αναγκαστικά για κάποιο x με $x_i < x < x_{i+1}$ όταν i=1, 2, … , 2n-1 την τιμή μηδέν, οπότε γι’ αυτό το x η διαφορά των μπλε από τα κόκκινα θα είναι μηδέν δηλαδή αριστερά της ε’ θα είναι τόσα κόκκινα όσα μπλε σημεία. Το ίδιο θα συμβαίνει και για τα σημεία που βρίσκονται δεξιά της ε’.

Σχόλια

1. Τα προηγούμενα θέματα βρίσκονται διάσπαρτα στη βιβλιογραφία, κάποια από αυτά έχουν προταθεί σε διάφορους μαθηματικούς διαγωνισμούς.
2. Στα προβλήματα 2, 3 και 4 έγινε χρήση της “αρχής της περιστεροφωλιάς”: Αν $kn+1$ περιστέρια καθίσουν σε n φωλιές, τότε σε μια τουλάχιστον από αυτές κάθονται τουλάχιστον k+1 περιστέρια.
3. Στα προβλήματα 5, 6 και 7 έγινε χρήση της “αρχής ακροτάτου”: Αν το μη κενό σύνολο Σ έχει ως στοιχεία πεπερασμένο πλήθος πραγματικών αριθμών, τότε το Σ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο δηλαδή υπάρχουν α, β $\in$ Σ τέτοια, ώστε $\alpha \leq x \leq \beta$ για κάθε x $\in$ Σ.
4. Στο τελευταίο πρόβλημα γίνεται η εισαγωγή του “κυρτού περιβλήματος” n σημείων του επιπέδου, μιας θεμελιώδους έννοιας της Υπολογιστικής Γεωμετρίας, όπως μπορεί να δει κάποιος, για παράδειγμα, στο βιβλίο M.Berg κ.α., Υπολογιστική Γεωμετρία, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2011.
5. Οι χρωματισμοί στα Μαθηματικά θα μπορούσαν να χωριστούν σε τρεις υποκατηγορίες:
   Α) Χρωματισμένα σημεία (όπως τα προβλήματα αυτού του άρθρου).
   Β) Προβλήματα που λύνονται με χρωματισμό. Τέτοια προβλήματα αναφέρονται στο άρθρο: Επίλυση Προβλημάτων με Χρωματισμό του Αλέξανδρου Γ. Συγκελάκη (υπάρχει στο διαδίκτυο).
   Γ) Χρωματισμός γραφημάτων, που είναι κεφάλαιο στα βιβλία ή τις σημειώσεις θεωρίας γραφημάτων, όπως για παράδειγμα στις σημειώσεις του Δ.Μ. Θηλυκού: Σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων(υπάρχει στο διαδίκτυο).

Βιβλιογραφία

1. A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York, 1998
2. D. Fomin, S. Genkin, I.V. Itenberg, Μαθηματικοί Κύκλοι, η Ρωσική Εμπειρία, Εφαλτήριο, Αθήνα, 2022.
3. D. Fomin, L. Kurlyandchik, Φως στην άκρη του τούνελ, περιοδικό QUANTUM, τόμος 1, τεύχος 1, Αθήνα 1994.
4. R. Honsberger, Mathematical Morsels, M.A.A., USA, 1978
5. R. Honsberger, From Erdős to Kiev, M.A.A., USA, 1996
6. R. Honsberger, In Polya’s Footsteps, M.A.A., USA, 1997
7. Δ.Γ. Κοντογιάννης, Γεωμετρία, Αθήνα, 1997
8. K.V. Li, Coloring Problems, Mathematical Excalibur, Volume 20, Number 3, Hong Kong,2016
9. Α. Πούλος, Συνδυαστική Απαρίθμηση και Συνδυαστική Γεωμετρία, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2015

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 410 (ΤΕΥΧΟΣ 128)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{R}{\rho} \geq \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\alpha\beta\gamma}$$

όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του.

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός)

Από την ανισότητα του Cauchy έχουμε:

$$\sqrt[3]{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} \leq \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{3}$$

$$=\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{2}{3}\cdot 2\tau=\frac{4\tau}{3}$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \tau^3$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\alpha\beta\gamma} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\tau^3}{4\alpha\beta\gamma},\ (1)$$

Για την απόδειξη της ζητούμενης, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\tau^3}{4\alpha\beta\gamma} \leq \frac{R}{\rho} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\tau^3}{4\cdot 4RE} \leq \frac{R}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^3}{3^3}\frac{\tau^2}{4^2 R} \leq R \Leftrightarrow \frac{4}{27}\tau^2 \leq R^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}}\tau \leq R$$

$$\Leftrightarrow 2\tau \leq 3R\sqrt{3},\ (2)$$

Απόδειξη της (2).

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2,\ (3)$$

Επιπλέον, σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq 9R^2,\ (4)$$

Από τις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 \leq 27R^2 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \leq 3\sqrt{3}R \Rightarrow 2\tau \leq 3\sqrt{3}R$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο, Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα, Νερούτσος Κώστας - Γλυφάδα.

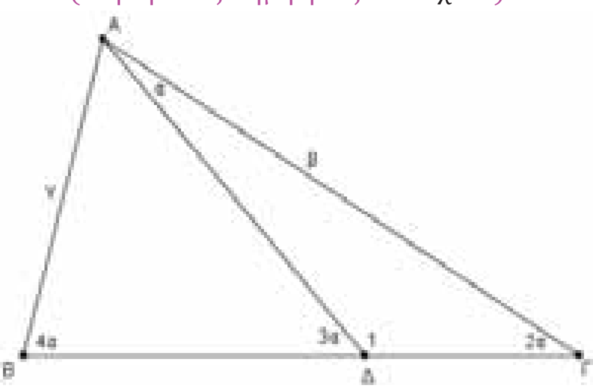
ΑΣΚΗΣΗ 411 (ΤΕΥΧΟΣ 128)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ Στην πλευρά του ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε να είναι $\hat{\Gamma}=2\cdot \Gamma\hat{A}\Delta$. Αν β και γ είναι τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$A\Delta=\frac{\beta}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma+2\gamma^2}$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι .

ΛΥΣΗ (Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα)



Με τον συμβολισμό των γωνιών όπως φαίνονται στο σχήμα, αν ονομάσουμε x το μήκος του τμήματος ΑΔ, τότε από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{\beta}{\eta\mu 4\alpha}=\frac{\gamma}{\eta\mu 2\alpha} \text{ ή } \frac{\beta}{2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{\gamma}{\eta\mu 2\alpha}$$

$$\text{και } \gamma=2\gamma\sigma\upsilon\nu 2\alpha$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\frac{\beta}{2\gamma} \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=\frac{\beta}{2\gamma} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{\beta+2\gamma}{4\gamma},\ (1)$$

οπότε

$$\eta\mu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{2\gamma-\beta}{4\gamma} \Rightarrow \eta\mu\alpha = \sqrt{\frac{2\gamma-\beta}{4\gamma}}, (2)$$

(Προφανώς η γωνία α είναι οξεία, αφού ισχύει $4\alpha < 180^o$).

Από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\frac{x}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{\beta}{\eta\mu\Delta_1} \Rightarrow \frac{x}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{\beta}{\eta\mu(180-3\alpha)} = \frac{\beta}{\eta\mu 3\alpha}$$

οπότε

$$x = \frac{\beta\eta\mu 2\alpha}{\eta\mu 3\alpha} = \frac{2\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{3-4\eta\mu^2\alpha} = \frac{2\beta\sqrt{\frac{\beta+2\gamma}{4\gamma}}}{3-4\frac{2\gamma-\beta}{4\gamma}} = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\beta+2\gamma}{4\gamma}}$$

$$= \frac{\beta}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma+2\gamma^2}$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Νερούτσος Κώστας – Γλυφάδα, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός, Σταματογιάννης Γιάννης – Ν. Κηφισιά, Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα, Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός, και Στασινός Μηνάς – Αθήνα.

ΑΣΚΗΣΗ 412 (ΤΕΥΧΟΣ 128)

Έστω $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε να ισχύει

$$2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu^2 y = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$2\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi y + 2\varepsilon\varphi x + 2\varepsilon\varphi y < 3$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο.

ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός)

Με $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu^2 y = 1 \Leftrightarrow \frac{2\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} + \frac{2\varepsilon\varphi^2 y}{1+\varepsilon\varphi^2 y} = 1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 y = 1 - 3\varepsilon\varphi^2 x\cdot\varepsilon\varphi^2 y,\ (1)$$

Από την δοσμένη ισότητα προκύπτει επίσης ότι

$$\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y = \frac{1}{2}$$

με $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Έτσι, έχουμε $\varepsilon\varphi x, \varepsilon\varphi y \in (0, 1)$, οπότε

$$\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y > 0 \text{ και } 3 - 2\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y > 0$$

Είναι:

$$2\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi y + 2\varepsilon\varphi x + 2\varepsilon\varphi y < 3$$

$$\Leftrightarrow 2\varepsilon\varphi x + 2\varepsilon\varphi y < 3 - 2\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y$$

$$\Leftrightarrow (2\varepsilon\varphi x + 2\varepsilon\varphi y)^2 < (3 - 2\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\varepsilon\varphi^2 x + 4\varepsilon\varphi^2 y + 8\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y < 9 + 4\varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi^2 y - 12\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 4(1-3\varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi^2 y) + 8\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y < 9 + 4\varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi^2 y - 12\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y$$

$$\Leftrightarrow 16\varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi^2 y - 20\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y + 5 > 0$$

Αν θεωρήσουμε το πρώτο μέλος ως τριώνυμο του $t = \varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y$, τότε αυτό έχει ρίζες τους αριθμούς

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ και } \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

Επειδή $\varepsilon\varphi x, \varepsilon\varphi y \in (0, 1)$ και $\frac{5+\sqrt{5}}{8} > 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi y < \frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

Πραγματικά, έχουμε:

$$2(\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y) \geq 4\sqrt{\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu^2 y} \Rightarrow 1 \geq 4\eta\mu x\cdot\eta\mu y$$

$$\Rightarrow 1 \geq 16\eta\mu^2 x\eta\mu^2 y \Rightarrow 1 \geq \frac{4\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\frac{4\varepsilon\varphi^2 y}{1+\varepsilon\varphi^2 y}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 y + 1 + \varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi^2 y \geq 16\varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi^2 y$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 1 - 3\varepsilon\varphi^2 x\cdot\varepsilon\varphi^2 y + 1 + \varepsilon\varphi^2 x\cdot\varepsilon\varphi^2 y \geq 16\varepsilon\varphi^2 x\cdot\varepsilon\varphi^2 y$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi^2 y \leq \frac{1}{9} \Rightarrow \varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y \leq \frac{1}{3}$$

και $\frac{1}{3} < \frac{5-\sqrt{5}}{8}$, οπότε $\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi y < \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Σταματογιάννης Γιάννης – Ν. Κηφισιά, Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια, Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα.

ΑΣΚΗΣΗ 413 (ΤΕΥΧΟΣ 128)

Στο επίπεδο θεωρούμε το κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και έστω A_1, A_2 σημεία της ΑΒ, B_1, B_2 σημεία της ΒΓ, Γ_1, Γ_2 σημεία της ΓΔ, Δ_1, Δ_2 σημεία της ΔΕ και E_1, E_2 σημεία της ΕΑ.

Αν καθεμιά από τις τετράδες σημείων (A_1,A_2,B_1,B_2), $(A_1,A_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$, $(B_1,B_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$, $(B_1,B_2,\Delta_1,\Delta_2)$, $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2)$, $(E_1,E_2,\Delta_1,\Delta_2)$ και

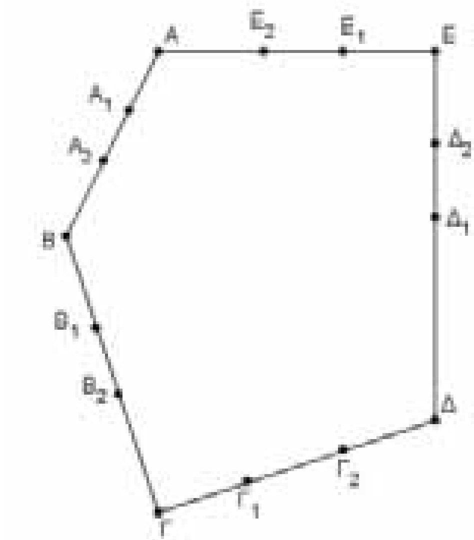
$(E_1,E_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$ περιέχει ομοκυκλικά σημεία, να αποδείξετε ότι τα σημεία

$$A_1,A_2,B_1,B_2,\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2,E_1,E_2$$

ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Καζακόπουλος Απόστολος – Θεσσαλονίκη.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)



Οι κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία (A_1,A_2,B_1,B_2), $(A_1,A_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$, $(B_1,B_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$ συμπίπτουν διότι διαφορετικά οι ριζικοί άξονες, που είναι οι A_1A_2, $\Gamma_1\Gamma_2$, B_1B_2 ανά δυο θα συνέκλιναν ή θα ήταν παράλληλοι που δεν συμβαίνει.

Ομοίως οι κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία $(B_1,B_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$, $(B_1,B_2,\Delta_1,\Delta_2)$, $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2)$ και αυτοί που διέρχονται από τα $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2)$, $(E_1,E_2,\Delta_1,\Delta_2)$ και $(E_1,E_2,\Gamma_1,\Gamma_2)$.

Έτσι τελικά έχουμε τρεις κύκλους που ανά δυο έχουν 4 κοινά σημεία οπότε ταυτίζονται, άρα τα σημεία $A_1,A_2,B_1,B_2,\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2,E_1,E_2$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

ΑΣΚΗΣΗ 414 **(ΤΕΥΧΟΣ 128)**

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$\alpha(\alpha-12)\le\beta(16-\beta)-99$$

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A=|3\alpha+4\beta-3|+\left|\frac{5}{3}\alpha-\beta-\frac{9}{5}\right|$$

Τζαφέρης Σωτήρης – Πετρούπολη.

ΛΥΣΗ Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι,

Έστω $x=\alpha-6$ και $y=\beta-8$. Τότε η υπόθεση γράφεται $x^2+y^2\le 1,\ (x,\ y\in[-1,\ 1])$. Έχουμε:

$$A=|3x+4y+47|+\left|\frac{5}{3}x-y+\frac{1}{5}\right|$$

$$=3x+4y+47+\left|\frac{5}{3}x-y+\frac{1}{5}\right|\ge 3x+4y+47$$

Από την ανισότητα CBS έχουμε:

$$5\ge\sqrt{(3^2+5^2)(x^2+y^2)}\ge 3|x|+4|y|\ge -3x-4y$$

άρα, $3x+4y\ge -5$, οπότε $A\ge 42$.

Η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι ίση με 42 και προκύπτει όταν $x=-\frac{3}{5}$ και $y=-\frac{4}{5}$ δηλαδή όταν

$$\alpha=\frac{27}{5} \text{ και } \beta=\frac{36}{5}$$

2η ΛΥΣΗ (Τασσόπουλος Γεώργιος - Αθήνα)

Είναι:

$$\alpha(\alpha-12)\le\beta(16-\beta)-99\Rightarrow(\alpha-6)^2+(\beta-8)^2\le 1$$

$$\Rightarrow|\alpha-6|\le 1,\ |\beta-8|\le 1\Rightarrow 5\le\alpha\le 7,\ 7\le\beta\le 9$$

Έστω $x=3\alpha+4\beta-3,\ y=\frac{5}{3}\alpha-\beta-\frac{9}{5}$.

Προφανώς

$$A\ge|x|,\ |y|$$

Αλλά: $x\ge 3\cdot 5+4\cdot 7-3>0\Rightarrow A=x+|y|\ge x$ και

$$x+y=\frac{14}{3}\alpha+3\beta-\frac{24}{5}\ge\frac{14}{3}\cdot 5+3\cdot 7-\frac{24}{5}>0,$$

$$x-y=\frac{4}{3}\alpha+5\beta-\frac{6}{5}>0\Rightarrow x>y,\ -y\Rightarrow x>|y|\Rightarrow A\ge x>|y|$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $y=0$ δηλαδή

$$\frac{5}{3}\alpha-\beta-\frac{9}{5}=0,\ (1).$$

Αλλά,

$$(1)\Leftrightarrow\beta=\frac{5}{3}\alpha-\frac{9}{5}$$

οπότε η δοσμένη ανισότητα γράφεται

$$(\alpha-6)^2+\left(\frac{5}{3}\alpha-\frac{49}{5}\right)^2\le 1\Leftrightarrow\frac{34}{9}\alpha^2-\frac{134}{3}\alpha+\frac{3276}{25}\le 0,\ (2)$$

Το πρώτο μέλος της (2) έχει διακρίνουσα $\Delta=\left(\frac{58}{15}\right)^2$ και ρίζες $\alpha_1=\frac{27}{5}$, $\alpha_2=\frac{546}{85}$, οπότε

$$(2)\Leftrightarrow\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2$$

με $\beta_1=\frac{5}{3}\alpha_1-\frac{9}{5}=\frac{36}{5}$ και $\beta_2=\frac{5}{3}\alpha_2-\frac{9}{5}$

Αλλά,

$$\alpha_2\ge\alpha\ge\alpha_1\Rightarrow\beta_2\ge\beta\ge\beta_1\Rightarrow A=3\alpha+4\beta-3+|y|$$

$$\ge 3\alpha_1+4\beta_1-3=3\cdot\frac{27}{5}+4\cdot\frac{36}{5}-3=42$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της Α είναι ίση με 42 και προκύπτει αν και μόνο αν: $\alpha=\alpha_1=\frac{27}{5}$ και $\beta=\beta_1=\frac{36}{5}$

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός.

ΑΣΚΗΣΗ 415 (ΤΕΥΧΟΣ 128)

Δίνεται η εξίσωση $x^3-\alpha x^2+\beta x-\alpha=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει θετικές πραγματικές ρίζες, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A=\frac{2\alpha^3-3\alpha\beta+3\alpha}{\beta+1}$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον.

ΛΥΣΗ (Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος)

Αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι οι ρίζες, τότε ισχύουν:

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=\alpha$$

$$\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\beta \text{ και}$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3=\alpha$$

Επιπλέον,

$$3(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)\le(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2$$

οπότε $\alpha^2\ge3\beta$.

Οι περιπτώσεις $\alpha=0$ και $\alpha<0$ αποκλείονται, αφού η εξίσωση έχει θετικές ρίζες, οπότε $\alpha>0$. Ισχύουν:

$$\frac{\rho_1+\rho_2+\rho_3}{3}\ge\sqrt[3]{\rho_1\rho_2\rho_3}\Rightarrow\frac{\alpha}{3}\ge\sqrt[3]{\alpha}\Rightarrow\frac{\alpha^3}{27}\ge\alpha\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\alpha\ge3\sqrt{3}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3=\sqrt{3}$$

οπότε $\alpha=3\sqrt{3}$ και $\beta=9$ και $\alpha^3\ge3\alpha\beta$.

Επομένως

$$A=\frac{2\alpha^3-3\alpha\beta+3\alpha}{\beta+1}\ge\frac{6\alpha\beta-3\alpha\beta+3\alpha}{\beta+1}=\frac{3\alpha\beta+3\alpha}{\beta+1}=3\alpha$$

δηλαδή $A\ge9\sqrt{3}$.

Έτσι, η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α είναι ίση με $9\sqrt{3}$ και προκύπτει όταν $\alpha=3\sqrt{3}$ και $\beta=9$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Λαγογιάννης Βασίλης – Χολαργός και Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα

Προτεινόμενα Θέματα

421. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(0,0)$, $B(1,0)$, $\Gamma(3,0)$, $\Delta(4,0)$, $E(-2,5)$, $F(-1,5)$, $G(8,5)$, $H(9,5)$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση β΄ βαθμού της οποίας η γραφική παράσταση να τέμνει και τα τέσσερα τμήματα AB, $\Gamma\Delta$, EF και GH.

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

422. Θεωρούμε όλα τα ισοσκελή τρίγωνα με την ίδια περίμετρο 2τ. Να βρείτε ποια από αυτά έχουν την μικρότερη ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου. Ποιο είναι το μήκος της ακτίνας αυτής;

Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη

423. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{8}}\ln\left(1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3\right)dx<\frac{3}{128}$$

Ντόρβας Νίκος – Άγιοι Ανάργυροι

424. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ του τριγώνου επιλέγουμε τα εσωτερικά σημεία A_1, B_1, Γ_1 ώστε τα τμήματα AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ να διχοτομούν τις γωνίες Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

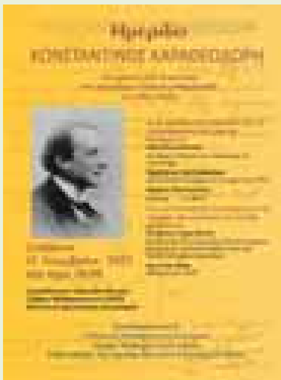
$$\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{B_1\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_1A_1}\ge\frac{2\sqrt{3}}{R}$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

αφορμές ... και στιγμιότυπα

Καραθεοδωρή Κωνσταντίνος [1873 – 1950]

Εκδηλώσεις για τα 150 χρόνια από τη γεννησή του



Ημερίδα για τα **150 χρόνια** από τη γέννηση του Κωνσταντίνου Καραθεοδώρη, διοργάνωσε η **Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία**, στις **11 Νοεμβρίου 2023**, στο αμφιθέατρο «Καραθεοδωρή» του Τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ στην Πανεπιστημιούπολη Ζωγράφου, προς τιμή της μνήμης του κορυφαίου Έλληνα μαθηματικού του 20ου αιώνα, Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή.

Στην εκδήλωση αυτή, μίλησαν για το επιστημονικό του έργο:

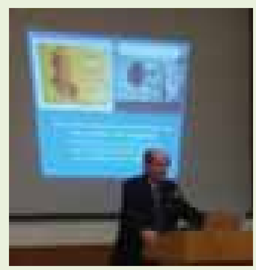
– **Αθανάσιος Φωκάς**, Ακαδημία Αθηνών και University of Cambridge
«Η ομορφιά και η αποτελεσματικότητα του μιγαδικού επιπέδου»

– **Δημήτριος Χριστοδούλου**, Ευρωπαϊκή Ακαδημία Επιστημών και ΕΤΗ
«On the calculus of variations with multiple integrals»

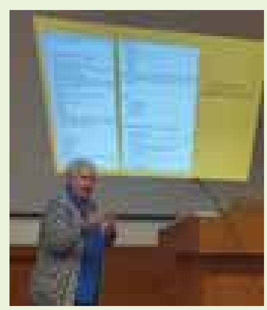
– **Μαρίνα Ηλιοπούλου**, Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
«Η συνεισφορά του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή στη θεωρία μέτρου»

Για το διοικητικό του έργο και την **ιστορία** της οικογένειάς του μίλησαν οι:

– **Στέφανος Γερουλάνος**, Καθηγητής Χειρουργικής Πανεπιστημίου Ζυρίχης και της Ιστορίας Ιατρικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
«Η επιρροή της **οικογενείας** στην διαμόρφωση της προσωπικότητας του Κωνσταντίνου Σ. Καραθεοδωρή»



– **Χριστίνα Φίλη**, Καθηγήτρια ΕΜΠ
«Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή και η οργάνωση Πανεπιστημίων»



Οι ενδιαφέρουσες όσο και οι επίκαιρες εισηγήσεις εκείνης, της ημερίδας βρίσκονται αναλυτικά στην **ιστοσελίδα της ΕΜΕ** www.hms.gr με πλήθος στοιχείων και φωτογραφικό υλικό. Στη συνέχεια ακολούθησε ξενάγηση στη Βιβλιοθήκη της Σχολής Θετικών Επιστημών, ΕΚΠΑ, όπου **βρίσκονταν πολλά βιβλία** του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή. Θυμίζουμε ότι: ο Καραθεοδωρή, ήταν μαθηματικός ελληνικής καταγωγής, που διακρίθηκε σε παγκόσμιο επίπεδο, ενώ ήταν γνωστός εκτός Ελλάδας ως **Konstantin Carathéodory**. Το επιστημονικό έργο επεκτείνεται σε **πολλούς τομείς των Μαθηματικών**, της Φυσικής και της Αρχαιολογίας. Είχε σημαντικότατη συνεισφορά ιδιαίτερα στους τομείς της πραγματικής ανάλυσης, συναρτησιακής ανάλυσης και θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης. Είχε παρακολουθήσει μαθήματα από τους Schwarz, Minkowski, Hilbert, Klein, Max Blanck, Einstein. Δίδαξε στο Ανόβερο, Βερολίνο, Μόναχο, Γκέντιγκεν και στην Αμερική (με **διαλέξεις** στα πανεπιστήμια κυρλιως των Πρίνστον, Τέξας, Ωστιν και Πενσυλβανία).

Πολλές πληροφορίες για την ζωή του και το επιστημονικό του έργο, έχουν δημοσιευθεί κατά το παρελθόν, σε πολλά τεύχη του περιοδικού **Ευκλείδης Β΄** με πιο πρόσφατο το τεύχος **125**, σελίδες [75 – 78].

Έκδοση αναμνηστικού νομίσματος για τα 150 χρόνια από τη γέννηση του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή

Η δισεγγονή του Καραθεοδωρή
Δέσποινα Σκούταρη

Με αφορμή την έκδοση του αναμνηστικού νομίσματος, κυκλοφορίας 2 ευρώ, με θέμα «150 χρόνια από τη γέννηση του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή», **τη Δευτέρα 27 Νοεμβρίου 2023** πραγματοποιήθηκε στην Τράπεζα της Ελλάδος εκδήλωση προς τιμήν του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού. Χαιρετισμό στην εκδήλωση απηύθυνε ο διοικητής της Τράπεζας της Ελλάδος **Γιάννης Στουρνάρας** ενώ ομιλητές ήταν οι:

- **Χαράλαμπος Βάρβογλης**, ομότιμος καθηγητής ΑΠΘ, «Ο φυσικός Καραθεοδωρή: θερμοδυναμική, σχετικότητα, οπτική»,
- **Χριστίνα Π. Φίλη**, τ. καθηγήτρια ΕΜΠ, μέλος της Διεθνούς Ακαδημίας της Ιστορίας των Επιστημών, **Médaille Koyré 2021**, «Φως εξ Ανατολών: Το σχέδιο του Καραθεοδωρή για την ίδρυση του Πανεπιστημίου στη Σμύρνη» και
- **Στέφανος Γερουλάνος**, καθηγητής της Χειρουργικής Πανεπιστημίου Ζυρίχης και της τ. Ιστορίας Ιατρικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, «Η επιρροή των προγόνων του Καραθεοδωρή και η σημασία στη εξέλιξη της προσωπικότητάς του».

Στον χαιρετισμό του, ο κ. **Στουρνάρας** ανέφερε ότι η Τράπεζα της Ελλάδος τιμά έναν από τους μεγαλύτερους Έλληνες μαθηματικούς όλων των εποχών, ο οποίος κατέκτησε τη γενική **αναγνώριση** για την επιστημονική του **ιδιοφυία**, αλλά και για τις ανθρώπινες **αρετές** του.

«Υπήρξε συνομιλητής του Αϊνστάιν και συνοδοιπόρος των μεγαλύτερων μαθηματικών του 20ού αιώνα, αλλά και του θεμελιωτή της **κβαντικής** θεωρίας Μαξ Πλανκ. Ο Καραθεοδωρή διακόνησε την επιστήμη του στα μεγαλύτερα πανεπιστήμια της Γερμανίας και της Αμερικής, αλλά δεν ξέχασε **ποτέ την πατρίδα** του, ανταποκρινόμενος στις προσκλήσεις του Ελευθερίου Βενιζέλου για να συμβάλει στην οργάνωση και τη λειτουργία των ανωτάτων σχολών της Ελλάδας. Ανήκει σε εκείνη την κατηγορία των Ελλήνων της διασποράς που διακρίνονται **για την υψηλή αίσθηση του καθήκοντος** προς την πατρίδα τους και κάνουν ό,τι μπορούν για να τη βοηθήσουν. Με το έργο και τον βίο του αποτελεί ένα **φωτεινό παράδειγμα** για όλους εμάς και για τις επόμενες γενεές».

Ο κ. **Βάρβογλης** στην ομιλία του τόνισε ότι πέρα από τη σημαντική συνεισφορά του στην καθαρή μαθηματική επιστήμη, ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή είχε εργασθεί **ερευνητικά** και σε θέματα **μαθηματικής φυσικής**. Εκεί είχε σημαντικό έργο στην οπτική, όπου απέδειξε ότι τα σφάλματα των σφαιρικών φακών και κατόπτρων **δεν μπορούν** να διορθωθούν, στη θερμοδυναμική, την οποία θεμελίωσε με τον τρόπο που διδάσκεται σήμερα.

Η κα **Φίλη** αναφέρθηκε στην ουσιαστική συμβολή του Καραθεοδωρή στην υλοποίηση της ιδέας του Ελευθερίου Βενιζέλου για την ίδρυση **ενός δεύτερου πανεπιστημίου στην Ελλάδα**, μετά από αυτό της Αθήνας. Ο Βενιζέλος υιοθέτησε το σχέδιο του Καραθεοδωρή και αποφάσισε το δεύτερο ελληνικό πανεπιστήμιο να ιδρυθεί **στη Σμύρνη**, που μόλις είχε απελευθερωθεί.

Όμως τα τραγικά γεγονότα του Αυγούστου του 1922 **δεν** επέτρεψαν την λειτουργία του.

Ο κ. **Γερουλάνος** μίλησε για τους επιφανείς προγόνους του Καραθεοδωρή και την επίδραση που άσκησε το οικογενειακό του περιβάλλον στη διαμόρφωση της προσωπικότητάς του. «Εντρυφώντας στους προγόνους του **βλέπει κανείς το βάρος** που έφερε εις τους ώμους του», τόνισε. Το πλάτος των γνώσεων, η **ελληνικότητα** των **σκέψεων**, η πίστη στα ελληνορθόδοξα ιδεώδη και η **γλωσσομάθεια** χαρακτηρίζουν τον Καραθεοδωρή. Στο ότι άφησε μετά από μια **αστρονομική** μαθηματική εξέλιξη την ανώτατη θέση του καθηγητού των Μαθηματικών στο Βερολίνο, για να πάει να ανοίξει ένα νέο πανεπιστήμιο, βλέπει κανείς ένα **πατριωτισμό** και **οραματισμό** που κανένας δεν μπορούσε να φανταστεί», επεσήμανε. Για το νόμισμα μίλησε, ο κ. **Κονταξόπουλος** , διευθυντής **ΕΤΑ**, ανέφερε ότι, το κορυφαίο προϊόν του Νομισματικού Προγράμματος, είναι το **αναμνηστικό κέρμα** κυκλοφορίας 2 ευρώ, γιατί απευθύνεται σε όλους τους πολίτες των χωρών που χρησιμοποιούν το ευρώ. «Τι άραγε, αν όχι το πρόσωπο του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή, αντιπροσωπεύει **καλύτερα** το **ελληνικό** και ταυτόχρονα το **ευρωπαϊκό** και **διεθνές** στοιχείο; Ένα ανήσυχο πνεύμα με συμβολή στον παγκόσμιο πολιτισμό και το

παγκόσμιο επιστημονικό γίγνεσθαι», ανέφερε χαρακτηριστικά. Στο τέλος της εκδήλωσης έναν σύντομο χαιρετισμό απηύθυνε η **δισεγγονή** του Καραθεοδωρή **Δέσποινα Σκούταρη**. Στην εκδήλωση παρέστησαν οι πρώην πρωθυπουργοί Αντώνης **Σαμαράς** και Παναγιώτης **Πικραμμένος**, η πρώην πρόεδρος της Βουλής Άννα **Μπενάκη**-Ψαρούδα, οι πρώην διοικητές της Τράπεζας της Ελλάδος Ευθύμιος **Χριστοδούλου** και Νικόλαος Γκαργκάνας και ο δήμαρχος Ορεστιάδας Βασίλειος Μαυρίδης.

Άλλες Εκδηλώσεις: Έγιναν επίσης **και** σε πολλές άλλες πόλεις της Ελλάδος, τόσο από φορείς, όσο και από σχολεία, με αφορμή τα 150 χρόνια από την γέννηση του Καραθεοδωρή. Ξεχωριστή εκδήλωση έγινε στην πόλη της Κομοτηνής και στο Μουσείο Καραθεοδωρή. Σημαντικές εκδηλώσεις έγιναν επίσης και στο εξωτερικό σε διάφορες πόλεις της Ευρώπης, όπως Βερολίνο, Ανόβερο, Μόναχο, Λουξεμβούργο. Ενδεικτικά αναφέρουμε στην πόλη του **Λουξεμβούργου** που αριθμεί 7.000 περίπου εργαζόμενους Έλληνες, σε μεγάλες επιχειρήσεις και σε Ευρωπαϊκά θεσμικά όργανα, η δραστήρια Ελληνική κοινότητα (λέσχη ανάγνωσης) υπό την αιγίδα της Πρεσβείας της Ελλάδος **παρουσίασε** στις **16 Νοεμβρίου 2023** το επιστημονικό έργο του Καραθεοδωρή και **τη σχέση του, με τον Einstein** σε πλήθος κόσμου και σε μαθητές του Ελληνικού τμήματος του Ευρωπαϊκού Σχολείου. Επίσης χαρακτηριστικό είναι το γεγονός, ότι υπάρχει μια **Virtual** συνέντευξη, «ζωντανής αναπαράστασης» στο φουαγιέ του **ΝΟΗΣΙΣ** – Κέντρου **διάδοσης των επιστημών**, και **Μουσείο Τεχνολογίας**, όπου στέκει ψηφιακά σε **φυσικό** μέγεθος, ο ίδιος ο Καραθεοδωρή και το κοινό μπορεί να παρακολουθήσει, σε **digital innovation**, όλη του τη διαδρομή, στο χώρο της επιστήμης. [**Πηγή:** voria.gr/article/Konstantin karadeodory]

Πηγές: Για τις διάφορες εκδηλώσεις με αφορμή τα 150 χρόνια από τη γέννησή του Καραθεοδωρή: physicsgg.me, mixanitouxronou,gr, karatheodori.org, karatheodori.gr, ofathens.gr, voria.gr, hellasjournal, xronos.gr, Huffpost, maleviziotis.gr, mononews, chiosnews και το Μουσείο Καραθεοδωρή.

Τα Μαθηματικά στην επικαιρότητα του 2024

Η αλήθεια είναι , ότι πάντα τα Μαθηματικά έχουν μια **καθημερινότητα**, που απασχολεί πολύ κόσμο. Από μικρή ηλικία στα σχολεία, στα δημοτικά, στα γυμνάσια και στα Λύκεια και μετά στο Πανεπιστήμιο και

αργότερα στην έρευνα. Ειδικά τώρα τελευταία που διεισδύουν, όλο και ποιο πολύ και στις άλλες επιστήμες, όπως Οικονομία, Φυσική, Ιατρική, Πληροφορική, Τεχνητή Νοημοσύνη κ.λ.π.. Κυρίαρχο στοιχείο η **ομορφιά** τους, η **κριτική σκέψη**, η **έκπληξη του απρόοπτου** και οι εφαρμογές τους. Έτσι πολλές φορές με ποικίλες αφορμές, (πρόσφατα ο διαγωνισμός PISA) απασχολούν και τα μέσα **μαζικής επικοινωνίας** όπως εφημερίδες περιοδικά, sites, τηλεόραση κ.λ.π. Χαρακτηριστικά τα πρωτοσέλιδα του

Ευρωπαϊκού τύπου (Γαλλίας, Γερμανίας) από τα σχετικά εξώφυλλα που έχουν πρώτη σελίδα μόνο Μαθηματικά, όπως: να **επαναφέρουμε** και να **ξαναμάθουμε** τα Μαθηματικά., Να τα δούμε με **κέφι** και **δημιουργικότητα** ή πως θα τα ξανακάνουμε **ελκυστικά**, ώστε οι μαθητές να μαθαίνουν **καλύτερα** στο **σήμερα**, Νάναι οι νέοι άνθρωποι πιο **αισιόδοξοι**, για το μέλλον τους, αλλά και για τις πολλές **αλλαγές** που θα γίνονται στον εκπαιδευτικό, επιστημονικό και κοινωνικό χώρο στη νέα εποχή που θάρθει.

Βραβεία Θετικών Επιστημών 2023 της Ακαδημίας Αθηνών

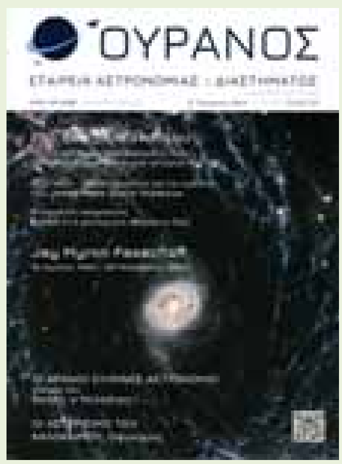
- Βραβείο Παπαστράτου στον **Ανδρέα Αρβανιτεγεώργο** σε θέματα Γεωμετρίας
- Βραβείο Αρτεμιάδη στην **Χριστίνα Καραφιλιά** για την πρωτότυπη εργασία στη Μαθηματική Ανάλυση
- Βραβείο Ξανθάκη στον **Ιωάννη Λιοδάκη** σε θέματα Αστρονομίας

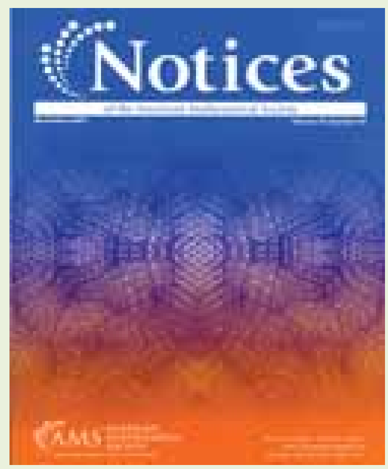
Βιβλία και περιοδικά που λάβαμε…

Οι αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος **που** υπάρχουν σ΄αυτό το βιβλίο **χρησιμοποιούνται** όλα σχεδόν τα θεωρήματα της Γεωμετρίας, χωρίς τη χρήση αυτού του θεωρήματος. Σε λίγες διαφορετικές λύσεις υπάρχει, το ίδιο σχήμα, με διαφορετικές αποδείξεις. Σε όλες όμως τις περιπτώσεις υπάρχει ένα αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο, που με δεκάδες **πρωτότυπες** αποδεικτικές διαδικασίες αποδεικνύεται σ΄αυτό, το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αφού προηγουμένως, έχουν υπάρξει πολλές βοηθητικές γραμμές, μέχρι να καταλήξει ο συγγραφέας σε κατάλληλο σχήμα, που θα μας δώσει την ενδεχόμενη, απρόοπτη και εντυπωσιακή απόδειξη.

Το βιβλίο **διανθίζεται** από πρωτότυπα **γνωμικά** και ιδέες από την φιλοσοφία των αρχαίων Ελλήνων. Ο πλούτος των αποδείξεων κάνει την ανάγνωση ευχάριστη. Τα όμορφα σχήματα η καλή σελιδοποίηση, κρατά το ενδιαφέρον του αναγνώστη, σε κάθε σελίδα. Ένα αξιόλογο και συλλεκτικό βιβλίο για το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

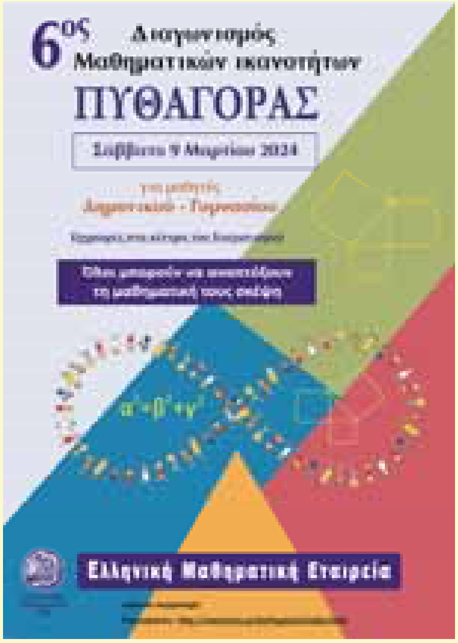
Ένα σημαντικό βιβλίο στο χώρο της γεωμετρίας τόσο στην Ελληνική, όσο και στη διεθνή πραγματικότητα που ξεχωρίζει.





6ος διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 2024

Πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων



Στις **9 Μαρτίου 2024** θα γίνει ο ετήσιος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ.

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ είναι στην **ουσία μία εκπαιδευτική έρευνα** μεγάλης κλίμακας. Κεντρικός του στόχος, είναι η ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις **δυνατότητες να σκέπτεται** ο μαθητής με μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο διαγωνισμός αυτός, ο οποίος θα πραγματοποιηθεί ηλεκτρονικά εξ΄ αποστάσεως και αυτή τη χρονιά, **δεν** ελέγχει άμεσα ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να **σκέφτεται** με τα **εφόδια** που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη **σκέψη**. Με βάση τις μαθηματικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων διακρίνουμε τις παρακάτω πτυχές της μαθηματικής ικανότητας: **αριθμητική** ικανότητα, **γεωμετρική** ικανότητα, ικανότητα **επαγωγικού** συλλογισμού, **συνδυαστική** ικανότητα, ικανότητα **μετάφρασης δεδομένων** από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. (π.χ. η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα ή από μία εικόνα), **αλγεβρική** ικανότητα, ικανότητα επίλυσης προβλήματος, **αλγοριθμική** ικανότητα.

Βασικό χαρακτηριστικό του διαγωνισμού είναι ότι αποτελεί **εργαλείο βελτίωσης** των μαθηματικών ικανοτήτων, αφενός σε επίπεδο σχολικής τάξης και αφετέρου σε επίπεδο μεμονωμένων μαθητών τονίζοντας τη σύνδεση των μαθηματικών ικανοτήτων με τις κατάλληλες **στρατηγικές** αντιμετώπισής τους. Επίσης χαρακτηριστικό του, είναι αφενός η **μη απογοήτευση** των μαθητών που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά, αλλά ταυτόχρονα και η ύπαρξη **πρόκλησης** για μαθητές με **υψηλούς** στόχους στα Μαθηματικά. Ακόμη επιτρέπει την εξάσκηση των μαθητών σε θέματα **τύπου PISA**, που είναι ένα πεδίο στο οποίο οι Έλληνες μαθητές υστερούν σε μεγάλο βαθμό. Ακόμη ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αποτελεί τη βάση και τον **συνδετικό κρίκο** της υποχρεωτικής εκπαίδευσης με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ (Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, προκριματικός) που καταλήγουν στη συγκρότηση της ελληνικής ομάδας που μετέχει σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, με **αποκορύφωμα** την Παγκόσμια **Ολυμπιάδα των Μαθηματικών**. Τέλος, ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ μπορεί να **αποτελέσει** σημαντικό βοήθημα στο νέο θεσμικό πλαίσιο του ΥΠΑΙΘ (άρθρο 104, Νόμος 4823/2021), που αφορά στην αξιολόγηση του εκπαιδευτικού συστήματος μέσω εξετάσεων διαγνωστικού χαρακτήρα για τους μαθητές/τριες της **ΣΤ' τάξης των δημοτικών** σχολείων και τους μαθητές/τριες **της Γ' τάξης των γυμνασίων** στη Γλώσσα και στα Μαθηματικά, με σκοπό την εξαγωγή πορισμάτων σχετικά με την πορεία υλοποίησης των προγραμμάτων σπουδών και τον βαθμό επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων σε εθνικό και περιφερειακό επίπεδο και σε επίπεδο σχολικής μονάδας.