ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

133

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2024 ευρώ 3,5

Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικών στην Αρχαία Ολυμπία

5 μετάλλια

28th JBMO

Έγινε στην **Τουρκία**
25 - 30 Ιουνίου 2024

6 μετάλλια

65th IMO

Έγινε στο
Ηνωμένο Βασίλειο
11-22 Ιουλίου 2024

4 μετάλλια

42th BMO

Έγινε στη **Βουλγαρία**
27 Απριλίου - 2 Μαΐου 2024

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 133 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2024 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Αρχαία Ολυμπία 1
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ... 7
Homo Mathematicus, ... 27

Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Ταυτότητες Ανισότητες 33
Γεωμετρία: Τρίγωνα - Παράλληλες ευθείες 37

Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Γραμμικά συστήματα - Συναρτήσεις - Τριγωνομετρία, ... 41
Γεωμετρία: Όμοια Τρίγωνα - Θεώρημα Θαλή, ... 47
Αναλυτική Γεωμετρία: Διανύσματα, ... 51

Γ΄ Τάξη

Ανάλυση: Συναρτήσεις και όριο συναρτήσεων 59

Γενικά Θέματα

Το Βήμα του Ευκλείδη: Σύνολο τιμών τριωνύμου σε κλειστό διάστημα, 69
Ο Ευκλείδης προτείνει... 77

Αφορμές και στιγμιότυπα, ... 81

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

... να πούμε
κάθε τι καλό
με αισιοδοξία
και καλή διάθεση

σε ότι προσπαθούμε ...
σε ότι ονειρευόμαστε ...

Καλή
σχολική χρονιά

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	Νοέμβριος	2024
Ευκλείδης:	18 Ιανουαρίου	2025
Αρχιμήδης:	22 φεβρουαρίου	2025

$$[20+24]^2 + 2[20+24]=2024$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Φελλούρης Ανάργυρος
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη “Για τον Ευκλείδη Β΄”. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών,** αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

αφορμές ... και στιγμιότυπα

Ελληνικές διακρίσεις στον $31^{\text{ο}}$ IMC 2024

Πραγματοποιήθηκε και φέτος στις **7 και 8 Αυγούστου 2024,** στο Blagoevgrad της Βουλγαρίας, ο $31^{\text{ος}}$ IMC 2024. Σε αυτόν, συμμετείχαν 401 φοιτητές σε **77 ομάδες** από **42 χώρες**. Στην **6η θέση** η Ελλάδα μεταξύ 77 χωρών. Ο IMC είναι ο μεγαλύτερος παγκόσμιος μαθηματικός διαγωνισμός για φοιτητές, οργανώνεται από το 1994 από το University College London και συμμετέχουν σε αυτόν κορυφαία Πανεπιστήμια της Ευρώπης, της Ασίας, και της Λατινικής Αμερικής. Οι φοιτητές διαγωνίζονται δύο ημέρες, έχοντας να λύσουν κάθε μέρα 5 προβλήματα μέσα σε 5 ώρες. Στο πλαίσιο του International Mathematics Competition (IMC) **εξασφαλίζεται** στους φοιτητές ένα ιδιαίτερα υποστηρικτικό περιβάλλον, προκειμένου οι συμμετέχοντες να ανταποκριθούν στο εξαιρετικά **υψηλό επίπεδο** των μαθηματικών προβλημάτων. Παράλληλα, έχουν την ευκαιρία να συναναστραφούν συνομηλίκους τους από κάθε γωνιά της γης και να διερευνήσουν τις διεθνείς προοπτικές επαγγελματικής απασχόλησης στο συγκεκριμένο τομέα. Η Ελλάδα συμμετείχε και φέτος με τα Πανεπιστήμια **ΕΚΠΑ, ΑΠΘ** και Πανεπιστήμιο **Πάτρας**. Η χώρα μας είχε τις παρακάτω διακρίσεις.

Οι Φοιτητές από το ΕΚΠΑ

Ε.Κ.Π.Α.: Οι φοιτητές Δημήτρης Εμμανουήλ, Γιώργος Γεωργελές, Μανόλης Πετράκης πήραν ο καθένας τους, **χρυσό μετάλλιο,** ενώ ο Θέμελης Μαμουζέλος πήρε **αργυρό μετάλλιο**.

Α.Π.Θ.: Οι φοιτητές Ιωάννης Ιακωβάκης και Δημοσθένης Παυλίδης πήραν ο καθένας τους **αργυρό μετάλλιο,** ενώ **χάλκινο μετάλλιο** πήρε ο Αλέξανδρος Καϊόπουλος και **Εύφημη μνεία** πήραν Ιωάννης Δημουλιός, Κωνσταντίνος Φωτιάδης, Αστέριος Βαρσάμης – Κυρατλίδης, Γεώργιος Κεντρωτής, Αθανάσιος Ντομπάζης, Ιωάννης Νάκος, Αλέξανδρος Τζιωρτζής.

Πανεπιστήμιο Πάτρας: Γεώργιος Σουκαράς **χάλκινο μετάλλιο**

Πολλά συγχαρητήρια στους φοιτητές μας. Πολλές ευχές και για άλλες διακρίσεις!

Επιτυχίες και με τη νέα γενιά στην $28^{\text{η}}$ jBMO

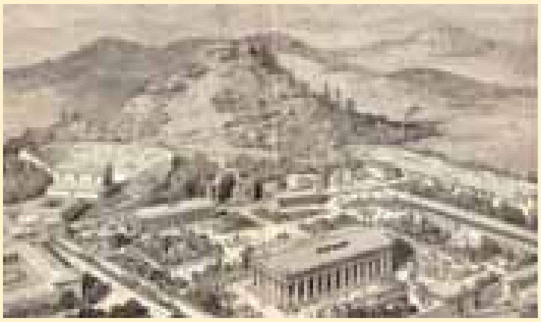
Η προσπάθεια και η θέληση για διάκριση από την Ελληνική ομάδα έφεραν επιτυχία. Η **προετοιμασία** έχει πάντα στόχο να γίνεσαι καλύτερος. Στάση ζωής και νοοτροπίας και **ελπίδα για κάτι καλύτερο**, για αυτά τα παιδιά. Παρά τις αντίξοες συνθήκες που υπήρχαν μέσα στο καλοκαίρι, έκαναν την υπέρβαση με **5 μετάλλια** στην Αττάλεια της Τουρκίας. Τους αξίζουν πολλά συγχαρητήρια για την αυτοπραγμάτωση, την εμπιστοσύνη και τη μάχιμη διάθεση που έδειξαν στους εαυτούς τους. Αποτελούν **πρότυπο** για κάθε νέο.

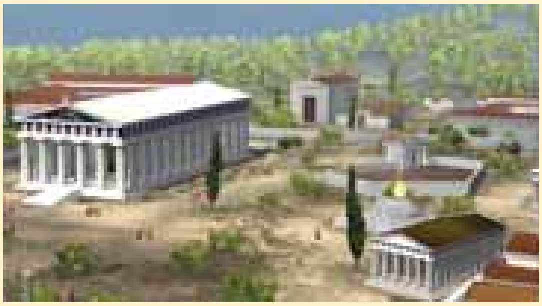
Η Αρχαία Ολυμπία

Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

Ιστορία

Στη δυτική Πελοπόννησο, στην πανέμορφη κοιλάδα του ποταμού Αλφειού, άνθισε το πιο δοξασμένο ιερό της αρχαίας Ελλάδας, που ήταν αφιερωμένο στον πατέρα των θεών, το Δία. Απλώνεται στους νοτιοδυτικούς πρόποδες του κατάφυτου Κρονίου λόφου, μεταξύ των ποταμών Αλφειού και Κλαδέου, που ενώνονται σε αυτή την περιοχή. Η Ολυμπία ονομαζόταν **Άλτις**, δηλαδή **Ιερό Άλσος.** Η Ολυμπία ήταν ο τόπος διεξαγωγής των Ολυμπιακών Αγώνων οι οποίοι τελούνταν στο πλαίσιο των Ολυμπίων. Αρχικά υπήρξε οικισμός αγροτικός και σταδιακά εξελίχθηκε **στο μεγαλύτερο θρησκευτικό κέντρο του αρχαίου κόσμου.** Σταδιακά ανεγέρθηκαν τα διάφορα οικοδομήματα, θρησκευτικού και κοσμικού χαρακτήρα μέχρι να πάρει τον 2ο αι. μ.Χ. τη μορφή που έχει σήμερα. Το παλαιότερο κτίσμα είναι ο ναός της Ήρας και το νεώτερο το Νυμφαίο. Στη ρωμαϊκή περίοδο, συμπληρώθηκαν και ανασκευάστηκαν πολλά κτίρια δεδομένου πως οι Ρωμαίοι συνέχισαν τους αγώνες χωρίς διακοπή.





Οι απαρχές της Ολυμπίας είναι ελάχιστα γνωστές. Οι παλαιότερες ενδείξεις ανθρώπινης παρουσίας στην περιοχή, ανάγονται στην 4η χιλιετία π.Χ. Επιπλέον, στους νότιους πρόποδες του Κρονίου λόφου, έχουν εντοπιστεί ευρήματα που δείχνουν ότι εκεί αναπτύχθηκαν τα πρώτα ιερά και οι προϊστορικές λατρείες. Για την περίοδο της 3ης χιλιετίας π.Χ., τα ευρήματα εκείνης της περιόδου, που βρέθηκαν είναι ένας μεγάλος τύμβος στα κατώτερα στρώματα του Πελοπίου (2150-2000 π.Χ.) και αψιδωτά κτήρια του οικισμού (2150-2000 π.Χ.).

Τον 10ο αιώνα π.Χ. με 9ο αιώνα π.Χ. διαμορφώνεται ο ιερός χώρος της Άλτεως με την καθιέρωση **της λατρείας του Δία.** Την περίοδο αυτή, η Ολυμπία γίνεται ένας ιερός τόπος που προσείλκυε πολλούς προσκυνητές. Αυτό το πυκνό ρεύμα των επισκεπτών μαρτυρείται από το μεγάλο πλήθος αναθημάτων που έφταναν στη Ολυμπία όχι μόνο από τη γύρω περιοχή αλλά και από τόπους της Πελοποννήσου και Στερεάς Ελλάδας. Τον 8ο αιώνα η φήμη της Ολυμπίας μεγάλωσε τόσο ώσπου έφτασε μέχρι την Ανατολή και Μεσοποταμία και μέχρι τη Δύση και κάτω Ιταλία. Σημαντικότατη τομή στην ιστορία της Ολυμπίας αποτέλεσε το έτος **776 π.Χ.** όπου τότε κατά την παράδοση, ο Σπαρτιάτης **Λυκούργος**, πρέπει να πραγματοποίησε συμφωνία με τον βασιλιά της Ήλιδος, **Ίφιτο**, και τον βασιλιά της Πίσσας **Κλεοσθένη** για την τέλεση λατρευτικών εορτών στην Ολυμπία. Μέρος της συμφωνίας ήταν ότι κατά τις εορτές θα επικρατούσε εκεχειρία σε ολόκληρη την Ελλάδα. Κατά τον 5ο αιώνα, η αίγλη της Ολυμπίας έφτασε σε τέτοιο σημείο, ώστε εκεί να συγκεντρώνονται **πολιτικοί, φιλόσοφοι και καλλιτέχνες** διότι εκεί έβρισκαν μεγάλο κοινό για τη διάδοση των ιδεών τους. Κατά τον 4ο αιώνα, δόθηκε σημασία στην οικοδομική δραστηριότητα για τη βελτίωση των εγκαταστάσεων και δημιουργίας χώρων στέγασης των επισκεπτών.

Το **393 μ.Χ. έγιναν οι τελευταίοι Ολυμπιακοί Αγώνες** και λίγο αργότερα ο αυτοκράτορας του Βυζαντίου Θεοδόσιος Α΄, με διάταγμά του έκλεισε όλα τα ελληνικά ιερά, ενώ επί Θεοδοσίου Β΄, επήλθε η οριστική καταστροφή του ιερού (426 μ.Χ.). Στα μέσα του 5ου αιώνα μ.Χ. επάνω στα ήδη ερειπωμένα κτίσματα αναπτύχθηκε μικρός χριστιανικός οικισμός, και το εργαστήριο του Φειδία μετατράπηκε σε παλαιοχριστιανική βασιλική. Δύο μεγάλοι σεισμοί, το 522 και 551 μ.Χ. προκάλεσαν την οριστική καταστροφή του ιερού, εφ' όσον τότε κατέρρευσαν όσα κτήρια είχαν απομείνει όρθια, μεταξύ αυτών και ο ναός του Δία.

Στους αιώνες που ακολούθησαν ο χώρος καλύφθηκε από τις πλημμύρες των ποταμών Αλφειού και Κλαδέου και από τις κατολισθήσεις του Κρονίου λόφου και η Ολυμπία πέρασε στη λησμονιά με τα ερείπια καλυμμένα από επίχωση 5-7 μέτρων. Η περιοχή ονομάσθηκε Αντίλαλος και μόλις το 1766 εντοπίσθηκε η θέση του αρχαίου ιερού.

Αρχαιολογικές ανασκαφές

Η ανακάλυψη της Ολυμπίας οφείλεται στον Άγγλο Ρίτσαρντ Τσάντλερ (Richard Chandler) το 1766 αλλά δεν υπήρξαν ανασκαφές. Στις 10 Μαΐου 1829, ενάμιση χρόνο μετά τη ναυμαχία του Ναυαρίνου, Γάλλοι αρχαιολόγοι, η ονομαζόμενη «Επιστημονική Αποστολή του Μωριά», με επικεφαλής τον Λεόν-Ζαν-Ζοζέφ Ντυμπουά (Τμήμα Αρχαιολογίας) και τον Γκιγιώμ-Αμπέλ Μπλουέ (Τμήμα Αρχιτεκτονικής και Γλυπτικής) έσκαψαν το χώρο για πρώτη φορά.

Τα περισσότερα από τα κτίρια αρχικά ήταν αόρατα, διότι, όπως σημείωσε ο Αμπέλ Μπλουέ, έπρεπε να είχαν καλυφθεί από ένα παχύ στρώμα ιζημάτων λόγω των συχνών υπερχειλίσεων των ποταμών Αλφειού και Κλαδέου. Οι Γάλλοι αρχαιολόγοι βρήκαν τμήματα από τις μετόπες του πρόναου και του οπισθόδομου του ναού του Διός, **τα οποία μετέφεραν στη Γαλλία με την άδεια της Ελληνικής κυβέρνησης του Ιωάννη Καποδίστρια.** Τα ευρήματα αυτά εκτίθενται μέχρι σήμερα στο Μουσείο του Λούβρου στο Παρίσι.

Φωτογραφία από τις Γερμανικές Ανασκαφές

Η πρώτη μεγάλη ανασκαφή στην Ολυμπία ξεκίνησε το **1875** χρηματοδοτούμενη από το Γερμανικό Κράτος. Επικεφαλής της αρχαιολογικής αποστολής ήταν ο Γερμανός αρχαιολόγος Ερνστ Κούρτιους. Υπεύθυνοι για τη ανασκαφή ήταν επίσης οι Γκούσταβ Χίρσφελντ, Γκεόργκε Τρόι και Άντολφ Φουρτβένγκλερ οι οποίοι εργάστηκαν μαζί με τους αρχιτέκτονες Άντολφ Μπέττιχερ, Βίλελμ Ντέρπφελντ και Ρίχαρντ Μπόρμαν.

Ανέσκαψαν το κεντρικό μέρος του ιερού της Άλτεως, συμπεριλαμβανομένου του Ναού του Δία, του Ναού της Ήρας, του Μητρώου, του Βουλευτηρίου, της Στοάς της Ηχούς, των Θησαυρών, του Πρυτανείου και της Παλαίστρας. Κατά τη διάρκεια των ανασκαφών αυτών βρέθηκαν σημαντικά ευρήματα μεταξύ αυτών η **Νίκη του Παιωνίου** και ο **Ερμής του Πραξιτέλους**. **Συνολικά 14.000 αντικείμενα** καταγράφηκαν τα οποία στεγάστηκαν στο Αρχαιολογικό μουσείο.

Πιο περιορισμένες ανασκαφές συνεχίστηκαν από τον Ντέρπφελντ κατά τα έτη 1908 με 1929, αλλά οι εργασίες επισπεύσθηκαν το 1936 με αφορμή τους Ολυμπιακούς Αγώνες του Βερολίνου. Κατά τα έτη 1952 με 1966 οι Έμιλ Κούντσε και Χανς Σλάιφ συνέχισαν τις ανασκαφές του 1936, μαζί με τον αρχιτέκτονα Άλφρεντ Μάλβιτς. Ανέσκαψαν το εργαστήριο του Φειδία, το Λεωνιδαίο και το βόρειο τείχος του σταδίου όπως επίσης και τη νοτιοανατολική περιοχή του ιερού. Επίσης τα έτη 1972 με 1984 ο Άλφρεντ Μάλβιτς βρήκε στοιχεία και ημερομηνίες από το στάδιο, τάφους και από το Πρυτανείο. Από το 1984 μέχρι το 1996, ο Χέλμουτ Κιριελάις συνέχισε τις ανασκαφές στο Πρυτανείο και Πελόπιον, βρίσκοντας πληροφορίες για την ιστορία του ιερού. Παράλληλα, έγιναν έρευνες για την ιστορία του ιερού στην εποχή της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας.

Ο Ναός του Διός

Ο Ναός του Διός ο οποίος χτίστηκε στη περίοδο **470-456 π.Χ** από τους Ηλείους με τα έσοδα από την εκποίηση των λαφύρων που απέσπασαν κατά το νικηφόρο πόλεμο εναντίον της Πίσσας το **471 π.Χ** και αποτελεί πρότυπο δείγμα του δωρικού ρυθμού. Η κύρια κατασκευή του κτιρίου ήταν από ντόπιο ασβεστόλιθο που ήταν επικαλυμμένος με ένα λεπτό στρώμα κονιάματος για να του δώσει μια εμφάνιση σαν αυτή του μαρμάρου. Είναι ένας τυπικός δωρικός περίπτερος ναός, με 6 κίονες στη κάθε στενή και 13 στην κάθε μακριά πλευρά του. Ο στυλοβάτης του έχει μήκος 64,12 μ. και πλάτος 27,68 μ. και οι κίονές του ύψος 10,51 μ. Ο ναός είναι διπλός, ο σηκός του δηλαδή είναι χωρισμένος σε πρόναο, κυρίως ναό και οπισθόδομο. Η είσοδος είναι στα ανατολικά και προσεγγίζεται μέσω ράμπας. Εσωτερικά ο ναός διαθέτει δύο διώροφες κιονοστοιχίες τοποθετημένες κοντά στους τοίχους. Με αυτό τον τρόπο **δημιουργούνται τρία κλίτη, με το μεσαίο να έχει διπλάσιο πλάτος από τα πλευρικά.** Τα αετώματα ήταν διακοσμημένα με τον Αγώνα Λαπιθών και Κενταύρων δυτικά και με την Αρματοδρομία Πέλοπα και Οινόμαου ανατολικά. Τα γλυπτά των Αετωμάτων βρίσκονται στο αρχαιολογικό Μουσείο της Ολυμπίας. Στο εσωτερικό του ναού φυλάσσονταν για περίπου χίλια χρόνια το **χρυσελεφάντινο άγαλμα του Δία**, που θεωρούταν **ένα από τα Επτά Θαύματα του αρχαίου κόσμου.** Είχε ύψος 12μ. και αποτελούνταν από ξύλο εσωτερικά, αλλά χρυσό, ελεφαντόδοντο, ασήμι, ορεία κρύσταλλο και ημιπολύτιμους λίθους εξωτερικά.

Ναός του Διός- Ψηφιακή Αναπαράσταση

Ο ναός της Ήρας

Σημαντικό οικοδόμημα του ιερού είναι και ο Ναός της Ήρας ή αλλιώς Ηραίον. Ήταν κτισμένος στη βορειοδυτική γωνία του ιερού χώρου της Άλτεως, στους νότιους πρόποδες του Κρονίου λόφου. Ο ναός είναι περίπτερος, με μήκος 50,01 μέτρα και πλάτος 18,76 μέτρα αποτελεί δε ένα από τα χαρακτηριστικότερα δείγματα δωρικού ρυθμού με 6 κίονες στις στενές πλευρές του και 16 στις μακριές. Οι κίονες και ο θριγκός, αρχικά πρέπει να ήταν ξύλινοι και με το πέρασμα των αιώνων να αντικαταστάθηκαν από πωρόλιθο. Σύμφωνα με τον Παυσανία, στο βάθος του σηκού, επάνω σε βάθρο υπήρχαν λατρευτικά αγάλματα του Δία και της Ήρας. Αφιερώθηκε στο ιερό της Ολυμπίας από τους κατοίκους του Σκιλλούντα, αρχαίας πόλης της Ηλείας. Ο ναός **οικοδομήθηκε περίπου το 600 π.Χ..** Κατά καιρούς υπέστη διάφορες επεμβάσεις, ενώ στα ρωμαϊκά χρόνια μετατράπηκε σε είδος μουσείου, όπου φυλάσσονταν μερικά από τα πιο πολύτιμα έργα του ιερού και πολλά αναθήματα, ανάμεσα στα οποία ήταν ο περίφημος **Ερμής του Πραξιτέλη**, που βρίσκεται στο αρχαιολογικό μουσείο και ο δίσκος της ιερής εκεχειρίας ο οποίος δεν έχει βρεθεί.

Το στάδιο της Ολυμπίας

Το στάδιο είχε χωρητικότητα 45.000 θεατών. Ο στίβος του σταδίου είχε μήκος 212,54 μέτρα και πλάτος 28,5 μέτρα. Οι δύο λίθινες βαλβίδες, που σηματοδοτούν τις αφέσεις, απέχουν μεταξύ τους 192,27 μέτρα. Από τη μία πλευρά ακουμπάει πάνω στη φυσική πλαγιά του λόφου και από την άλλη πλευρά έχει διαμορφωθεί τεχνητά. Δεν κτίστηκαν ποτέ κερκίδες. Οι θεατές κάθονταν καταγής. Ήταν ο χώρος όπου τελούνταν οι Ολυμπιακοί Αγώνες καθώς και τα Ηραία, τοπικές γιορτές προς τιμήν της θεάς Ήρας. Από την είσοδο του σταδίου εισέρχονταν μόνο οι επίσημοι και οι αθλητές. Η παρακολούθηση των αγώνων επιτρεπόταν σε όλους, **ελεύθερους και δούλους, ακόμα και βάρβαρους.** Στο στάδιο επιτρεπόταν η είσοδος μόνο στους άνδρες ενώ απαγορευόταν αυστηρά η είσοδος στις γυναίκες. **Για όποια μάλιστα τολμούσε να παραβεί τη διαταγή αυτή, υπήρχε η ποινή του θανάτου.** Είναι γνωστή η ιστορία της Ροδίτισσας Καλλιπάτειρας που μπήκε στο στάδιο μεταμφιεσμένη σε άνδρα, ωστόσο δεν της επιβλήθηκε η θανατική ποινή, καθώς η οικογένειά της είχε βγάλει σειρά Ολυμπιονικών (πατέρα, σύζυγο, τρία αδέλφια, γιο και ανιψιό).

Άλλα σημαντικά κτήρια του Ιερού

Το Βουλευτήριο, ήταν η έδρα της βουλής των Ηλείων. Μπροστά στο άγαλμα του Ορκίου Διός, μέσα στο Βουλευτήριο, οι αθλητές και οι κριτές έπαιρναν ιερό όρκο ότι θα σεβαστούνε τους κανόνες των Αγώνων.

Το Πρυτανείο, από τα αρχαιότερα και σημαντικότερα κτίσματα της Ολυμπίας, αφού αποτελούσε το κέντρο της διοικητικής και πολιτικής ζωής του ιερού και το κέντρο διοίκησης των Ολυμπιακών Αγώνων. Μέσα στο Πρυτανείο έκαιγε το ιερό πυρ στο βωμό της θεάς Εστίας.

Το Γυμνάσιο. Ήταν ο τόπος προπόνησης των αθλητών. Το γυμνάσιο ήταν επιστεγασμένο σε όλο του το μήκος, έτσι ώστε οι αθλητές να μπορούν να προπονούνται στον αγώνα δρόμου άσχετα από τις καιρικές συνθήκες.

Η Παλαίστρα. Εδώ προετοιμαζόταν η πάλη, η πυγμαχία και το παγκράτιο.

Το Λεωνιδαίο. Ήταν ο χώρος όπου φιλοξενούντο οι επίσημοι των Ολυμπιακών Αγώνων.

Το Εργαστήριο του Φειδία. Εκεί ο Φειδίας, ο φημισμένος Αθηναίος γλύπτης επέβλεψε τη κατασκευή του χρυσελεφάντινου αγάλματος του Θεού Δία. Εκεί βρέθηκε κύπελλο με επιγραφή "Φειδίου Είμι". (ανήκω στο Φειδία)

Ο Θεηκολεών, ήταν η έδρα των θεηκόλων, των ιερέων της Ολυμπίας, αλλά παράλληλα αποτελούσε κατάλυμα όλου του προσωπικού που υπηρετούσε μόνιμα στο ιερό.

Οι Ζάνες, τα χάλκινα αγάλματα που ήταν αφιερωμένα στο θεό Δία και βρίσκονταν λίγο πριν την είσοδο του Σταδίου. Είχαν κτιστεί με χρήματα από τα πρόστιμα που επιβλήθηκαν στους παρανομούντες αθλητές.

Το Φιλιππείο, αφιερωμένο στον Δία από τον Φίλιππο Β΄. Το ολοκλήρωσε ο γιος του Αλέξανδρος ο Μέγας.

Η Στοά της Ηχούς. Είναι γνωστή και ως η Ποικίλη Στοά λόγω των έργων ζωγραφικής που την κοσμούσαν. Εκεί γίνονταν αγώνες ποίησης και μουσικής. Οφείλει το όνομά της στο γεγονός ότι εντός αυτής η φωνή αναπαραγόταν επτά φορές.

Το Νυμφαίο, ή αλλιώς η Εξέδρα του Ηρώδη του Αττικού, που χρησίμευσε σαν υδραγωγείο στη ρωμαϊκή περίοδο, και χάριν σε αυτή, το νερό έφτανε μέχρι το Στάδιο αλλά και με πήλινους αγωγούς διαχέονταν σε όλη την Ιερά Άλτη.

Ο Ιππόδρομος, εκεί όπου διεξάγονταν οι αρματοδρομίες και οι ιππικοί αγώνες των Ολυμπιακών Αγώνων. Δυστυχώς δεν έχει σωθεί.

Το Μητρώο ήταν ναός αφιερωμένος στη μητέρα των θεών, Ρέα, που αργότερα μετονομάστηκε Κυβέλη. Βρίσκεται ανατολικά του Ηραίου. Οι θεότητες που λατρεύονταν εδώ πριν από τη Ρέα ήταν κυρίως η Μητέρα Γη και η Ειλείθυια, που ήταν συγγενική θεά και επίσης σχετιζόταν με τη μητρότητα.

Η Νότια Στοά ήταν η κύρια είσοδός του ιερού της Ολυμπίας από τη νότια πλευρά. Βρίσκεται νότια του βουλευτηρίου, έξω από τον περίβολο της ιεράς Άλτεως. Κατασκευάσθηκε περίπου την ίδια εποχή με τη στοά της Ηχούς, γύρω στο 360-350 π.Χ. και διατηρήθηκε σε χρήση για αρκετούς αιώνες.

Οι Ολυμπιακοί αγώνες

Οι Ολυμπιακοί Αγώνες ξεκίνησαν από τους αρχαίους Έλληνες που ήθελαν να διοργανώσουν μία **εκδήλωση πανελλήνιου χαρακτήρα** καθώς ζούσαν χωρισμένοι και απλωμένοι σε ένα ευρύ γεωγραφικό χώρο, μη συγκροτώντας ενιαίο κράτος με τη σημερινή έννοια του όρου.

Η αφετηρία των Ολυμπιακών Αγώνων τοποθετείται στο **776 π.Χ.** και τελούνταν κάθε τέσσερα χρόνια. Όμως οι Αγώνες τελούνται ήδη πολύ παλαιότερα, διότι σύμφωνα με την παράδοση τους ξεκίνησε ο Πέλοπας, που κέρδισε σε αρματοδρομία τον βασιλιά της Πίσσας Οινόμαο. Η λειτουργία του ιερού χώρου **συνεχίσθηκε** κανονικά τα πρώτα χριστιανικά χρόνια επί **Μεγάλου Κωνσταντίνου**. Το **392 μ.Χ.** έγιναν **οι τελευταίοι** Ολυμπιακοί Αγώνες και λίγο αργότερα ο αυτοκράτορας του Βυζαντίου Θεοδόσιος Α΄, με διάταγμά του απαγόρευσε οριστικά την τέλεσή τους γιατί θεωρούνταν παγανιστικοί.

Οι Ολυμπιακοί Αγώνες, ή αλλιώς Τα Ολύμπια, τελούνταν **κάθε τέσσερα χρόνια** μετά το θερινό ηλιοστάσιο κατά τη διάρκεια των πιο ζεστών ημερών του καλοκαιριού. Ως τη 13η Ολυμπιάδα (728 π. Χ.) το στάδιο ήταν το μοναδικό αγώνισμα στην Ολυμπία. Στις περίπου πέντε ημέρες που διαρκούσαν, αφιερώνονταν στους βωμούς των θεών θυσίες, με πιο μεγαλειώδη εκείνη των εκατό βοδιών στο βωμό του Δία. Αθλητικοί αγώνες διεξάγονταν στο Στάδιο και τον Ιππόδρομο, μπροστά σε χιλιάδες θεατές από όλες τις πόλεις του γνωστού ελληνικού κόσμου. Οι νικητές βραβεύονταν με ένα στεφάνι αγριελιάς, τον κότινο, και απολάμβαναν ιδιαίτερες τιμές από την πατρίδα τους.

Το 476 π. Χ. στην Ολυμπία το πανελλήνιο τίμησε με αυθόρμητες και συγκινητικές εκδηλώσεις τον νικητή της Σαλαμίνας Θεμιστοκλή (480 π. Χ.) μόλις εισήλθε στο στάδιο!

Η συμβολή των πανελλήνιων αγώνων και δη των Ολυμπίων στην πολιτική και πολιτιστική πορεία του ελληνισμού και τη διαμόρφωση της εθνικής συνείδησης είναι ανυπολόγιστη. Οι ευκαιρίες που παρείχαν σε φιλοσόφους, σοφιστές, πολιτικούς ρήτορες, ιστορικούς, ποιητές και γλύπτες ήταν μοναδικές.

Συγκινητική υπήρξε η περίπτωση του φιλοσόφου και μαθηματικού Θαλή του Μιλήσιου που πέθανε στο ολυμπιακό στάδιο παρακολουθώντας τους αγώνες κάτω από τον ανελέητο καλοκαιρινό ήλιο.

Ως θέμα, ο αθλητής αποτελεί μία από τις κύριες πηγές έμπνευσης της πλαστικής, το ίδιο πλούσια με τις μορφές της θρησκείας και της μυθολογίας.

Κατάλογος των ολυμπιονικών συγκροτήθηκε για πρώτη φορά περί το 400 π. Χ. από την Ηλείο σοφιστή Ιππία με βάση πιθανώς, τα αρχεία της Ολυμπίας, την προφορική παράδοση, ακόμη **και ζωντανές αναμνήσεις από την πρώτη Ολυμπιάδα του 776 π. Χ., όταν ο Ηλείος Κόριβος** (μικρός βοσκός) πρώτευσε στον δρόμο. Το έργο του Ιππία αναθεωρήθηκε και συνεχίστηκε στον 4^{o} αιώνα π. Χ. από τον Αριστοτέλη και αργότερα από τον Ερατοσθένη και άλλους. Υπάρχει εκτίμηση ότι **293 Ολυμπιάδες διεξάγονταν ανά 4 χρόνια έως το 393 μ. Χ.,** έτος της τελευταίας Ολυμπιάδας.

Δημήτριος Βικέλας - Πιερ ντε Κουμπερτέν

Κατά τη διάρκεια των Ολυμπιακών Αγώνων διεξάγονταν διάφορα αγωνίσματα, όπως το στάδιο, το ακόντιο, ο δίσκος, η πάλη, η πυγμαχία, το παγκράτιο, τα ιππικά αγωνίσματα και το πένταθλο (άλμα, δρόμος, ακόντιο, δίσκος, πάλη). Ο Παυσανίας μνημονεύει ότι στους αγώνες **συμμετείχαν και νεαρές παρθένες** από την Ήλιδα στον **αγώνα δρόμου** των «Ηλείων παρθένων», οι οποίες έπαιρναν μέρος ντυμένες με έναν κοντό χιτώνα, τον δεξιό ώμο γυμνό και τα μαλλιά λυτά. Ενώ αρχικά στους αγώνες έπαιρναν μέρος μόνο κάτοικοι της Ήλιδας, σταδιακά διευρύνθηκε ο κανονισμός, ώστε να επιτρέπονται αθλητές από την Αρκαδία, την Λακεδαίμονα και την Μεσσηνία, ακόμα και από όλη την Πελοπόννησο και τα Μέγαρα. Ακολούθησαν οι εκτός Πελοποννήσου πόλεις των Αθηνών και της Ιωνίας. Μέχρι τον 4ο αι. μΧ όπου και σημειώνεται το τέλος των Ολυμπιακών αγώνων, η συρροή των αθλητών από όλα τα μέρη ήταν μεγάλη. Από τις Αποικίες στην Σικελία και την Μικρά Ασία, την Ρόδο, από την Αίγυπτο (ιδίως την Αλεξάνδρεια), την Κυρήνη και την Φοινίκη, αλλά και από την Ρωμαϊκή αυτοκρατορία έρχονταν αθλητές για να αγωνιστούν στην Ολυμπία.

Όσοι συμμετείχαν στους αγώνες ακολουθούσαν κοινούς κανόνες και συμβάσεις, που είχαν καθιερωθεί για την καλύτερη οργάνωση των αγώνων. Όλες οι πόλεις ήταν υποχρεωμένες να σταματήσουν τις εχθροπραξίες κατά τη διάρκειά τους και επιτρεπόταν η συμμετοχή μόνο στους Έλληνες πολίτες. Επίσης, υπήρχαν συγκεκριμένοι κανόνες που ρύθμιζαν τόσο τη διαδικασία της προγύμνασης όσο και της διεξαγωγής των αγώνων. Οι διεργασίες για την αναβίωση των Ολυμπιακών Αγώνων στη σύγχρονη εποχή κορυφώθηκαν στα τέλη του 19ου αιώνα με την αποφασιστική συμβολή του Γάλλου βαρόνου Πιέρ ντε Κουμπερντέν και του Έλληνα λόγιου, ποιητή και πεζογράφου Δημητρίου Βικέλα. Οι πρώτοι σύγχρονοι Ολυμπιακοί Αγώνες τελέσθηκαν με μεγάλη λαμπρότητα το **1896** στην Αθήνα, στο Παναθηναϊκό Στάδιο και οι δεύτεροι το **1900** στο Παρίσι.

Σημαντικότερα αξιοθέατα της Αρχαίας Ολυμπίας:

- Ο αρχαιολογικός χώρος Ολυμπίας. Από τους σπουδαιότερους αρχαιολογικούς χώρους της Ελλάδας, τον οποίο η UNESCO, έχει ανακηρύξει σε μνημείο παγκόσμιας πολιτιστικής κληρονομιάς (http://ilia-olympia.org)
- Το αρχαιολογικό Μουσείο Ολυμπίας, με τη μοναδική συλλογή γλυπτών και σπουδαιότερα έργα, τον Ερμή του Πραξιτέλη και την Νίκη του Παιωνίου (http://ilia-olympia.org)
- Το θεματικό Μουσείο της Ιστορίας των αρχαίων Ολυμπιακών Αγώνων, που φιλοξενείται στο ανακαινισμένο κτίριο του πρώτου αρχαιολογικού μουσείου της Ολυμπίας (http://ilia-olympia.org)
- Το Μουσείο των σύγχρονων Ολυμπιακών Αγώνων, με πλουσιότατες συλλογές από τους σύγχρονους ολυμπιακούς αγώνες (https://hoc.gr/el/node/149)
- Η Διεθνής Ολυμπιακή Ακαδημία, το πνευματικό ίδρυμα του σύγχρονου ολυμπισμού, που εκπαιδεύει κάθε χρόνο εκατοντάδες στελέχη του Ολυμπισμού και Αθλητισμού (http://ioa.org.gr/?lang=el).
- Το Άλσος Κουμπερντέν, του αναβιωτή των σύγχρονων Ολυμπιακών Αγώνων, όπου σύμφωνα με την επιθυμία του βρίσκεται ταριχευμένη η καρδιά του (http://ioa.org.gr/?lang=el).
- Το Μουσείο Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας του καθηγητή κ. Κοτσανά (https://archimedesmuseum.gr/)
- Το νέο πρότυπο μουσείο-εκπαιδευτικό κέντρο “DIG–IT” με θέμα την αρχαιολογία, την ανασκαφή και το επάγγελμα του αρχαιολόγου (https://www.facebook.com/digitolympia/?ref=br_rs).
- Το γραφικό Θεατράκι Δρούβα, στην καρδιά του πευκοδάσους, πολύ κοντά στον αρχαιολογικό χώρο.
- Το μεγάλο Θέατρο Φλόκα, που φιλοξενεί το Διεθνές Φεστιβάλ Τεχνών Αρχαίας Ολυμπίας.
- Ο Βοτανικός κήπος, που βρίσκεται στους πρόποδες του Κρόνιου Λόφου.

Πηγές:

- https://el.wikipedia.org/wiki/Ολυμπία
- https://www.visitgreece.gr/el/experiences/culture/archaeological-sites-and-monuments/olympia-archaeological-site/
- https://arxaiaolympia.gov.gr/toyrismos/
- https://www.fhw.gr/olympics/ancient/gr/200.html
- https://www.liberal.gr/politismos/poia-agonismata-ypirhan-stis-arhaies-olympiades
- https://olympicwinners.gr/οι_ολυμπιακοί_αγώνες_στην_αρχαιότητα/
- http://odysseus.culture.gr/a/1/11/ga114.html
- https://olympia.ime.gr/
- https://users.sch.gr/dimylonaki/episkepseis_olympia.htm
- https://el.wikipedia.org/wiki/Ολυμπία/media/Αρχείο: Curtius_Olympia_1_t05.jpg
- http://odysseus.culture.gr/h/2/gh251.jsp?obj_id=493
- https://el.wikipedia.org/wiki/Αρχαίοι_ολυμπιακοί_αγώνες#/media/Αρχείο: Olympos.jpg
- http://www.fhw.gr/olympics/ancient/gr/3d.html
- https://www.hoc.gr/tour/short_tour_el.mp4
- Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, Εκδοτική Αθηνών τόμος Β΄ σελίδες 470-507

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Η 65^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Μπαθ, Ηνωμένο Βασίλειο, Ιούλιος 2024

Η 65^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη στο Μπαθ του Ηνωμένου Βασιλείου από 11 έως και 22 Ιουλίου 2024. Συμμετείχαν συνολικά 108 χώρες και 609 μαθητές και μαθήτριες. Οι Έλληνες μαθητές συνέχισαν τις υψηλές επιδόσεις των τελευταίων ετών σε διεθνείς διαγωνισμούς, αφού όλοι οι μαθητές μας διακρίθηκαν σε έναν δύσκολο και απαιτητικό διήμερο διαγωνισμό και κατέκτησαν ένα **Χρυσό, δύο Αργυρά και τρία Χάλκινα μετάλλια** ως εξής:

Τσουρέκας Κυριάκος	Σχολή Μωραΐτη	Χρυσό Μετάλλιο
Λιγνός Ορέστης	Εκπαιδευτήρια Ελληνική Παιδεία	Αργυρό Μετάλλιο
Μπερκουτάκης Νεκτάριος Ραφαήλ	3^{o} Γενικό Λύκειο Πύργου	Αργυρό Μετάλλιο
Ηλιάδης Σωκράτης	Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων	Χάλκινο Μετάλλιο
Γαλαμάτης Ιωάννης	Πειραματικό Σχολείο Παν/μίου Θεσ/νίκης	Χάλκινο Μετάλλιο
Πετράκης Διονύσιος	Γενικό Λύκειο Κανήθου	Χάλκινο Μετάλλιο

Την πρώτη θέση στην κατάταξη των χωρών με βάση το άθροισμα των βαθμών των μαθητών τους κατέλαβαν οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, τη δεύτερη η Κίνα και την τρίτη η Κορέα. Η Ελλάδα κατέλαβε την 27^{η} θέση. Μεταξύ των χωρών της Ευρωζώνης ήταν έβδομη, ενώ μεταξύ των χωρών της Ευρώπης ήταν ενδέκατη.

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο Πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και Ομότιμος Καθηγητής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου **Ανάργυρος Φελλούρης** και υπαρχηγός ο **Σιλουανός Μπραζιτίκος**, Επίκουρος καθηγητής του Πανεπιστημίου Κρήτης, στους οποίους οφείλεται και **η επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων** που ακολουθούν.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους πραγματικούς αριθμούς α που είναι τέτοιοι, ώστε για κάθε θετικό ακέραιο n, ο ακέραιος $\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$ είναι πολλαπλάσιος του n. (Με $\lfloor z\rfloor$ συμβολίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του z. Για παράδειγμα, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ και $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2{,}9\rfloor = 2$.)

Λύση. Γράφουμε τον αριθμό α ως άθροισμα του ακεραίου και του κλασματικού μέρους του, δηλαδή $\alpha = k + r$ με $0 \le r < 1$. Αν $r \ne 0$, τότε

$$\begin{aligned}\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor &= k + 2k + \cdots + nk + \lfloor r\rfloor + \lfloor 2r\rfloor + \cdots + \lfloor nr\rfloor \\ &= k\frac{n(n+1)}{2} + \lfloor r\rfloor + \lfloor 2r\rfloor + \cdots + \lfloor nr\rfloor. \qquad (*)\end{aligned}$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε ο $k\frac{n(n+1)}{2}$ είναι πολλαπλάσιο του n, άρα από την υπόθεση, για κάθε περιττό ακέραιο n θα ισχύει ότι

$$n \mid \lfloor r\rfloor + \lfloor 2r\rfloor + \cdots + \lfloor nr\rfloor. \qquad (1)$$

Επιλέγουμε τον θετικό ακέραιο m ώστε να ισχύει: $\frac{1}{m+1} \le r < \frac{1}{m}$.

Αν ο m είναι άρτιος, τότε η σχέση (1) για $n = m + 1$ δίνει:

$$m + 1 \mid \lfloor r\rfloor + \lfloor 2r\rfloor + \cdots + \lfloor (m+1)r\rfloor.$$

Από την επιλογή του m έχουμε ότι το δεξί μέλος της τελευταίας ισούται με 1, άρα $m + 1 \mid 1$, άρα $m = 0$, άτοπο.

Αν ο m είναι περιττός, τότε η σχέση (1) για $n = m + 2$ γίνεται

$$m + 2 \mid \lfloor r\rfloor + \lfloor 2r\rfloor + \cdots + \lfloor (m+2)r\rfloor.$$

Από την επιλογή του m το δεξί μέλος της τελευταίας ισούται με $1 + \lfloor (m+2)r\rfloor$.

Αν $m \ge 2$, τότε $\quad (m+2)r = mr + 2r \le mr + mr = 2mr < 2,$

οπότε $1 + \lfloor (m+2)r\rfloor = 2$, δηλαδή πρέπει $m + 2 \mid 2$, αδύνατο.
Συνεπώς ισχύει ότι $m = 1$, δηλαδή $\frac{1}{2} \le r < 1$.

Για $n = 3$ η (1) δίνει ότι $\quad 3 \mid \lfloor r\rfloor + \lfloor 2r\rfloor + \lfloor 3r\rfloor = 0 + 1 + \lfloor 3r\rfloor$.

Επομένως, πρέπει $\lfloor 3r\rfloor = 2$, άρα $r \ge \frac{2}{3}$.

Θα αποδείξουμε, με επαγωγή, ότι για κάθε $s \ge 1$ ισχύει ότι $r \ge \frac{2s}{2s+1}$.

Για $s = 1$ το έχουμε αποδείξει. Έστω ότι ισχύει για s και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $s + 1$. Για $n = 2s + 3$ η (1) γίνεται $2s + 3 \mid \lfloor r\rfloor + \lfloor 2r\rfloor + \cdots + \lfloor (2s+3)r\rfloor$.
Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι το δεξί μέλος ισούται με

$$0 + 1 + \cdots + 2s + \lfloor (2s+2)r\rfloor + \lfloor (2s+3)r\rfloor = s(2s+1) + \lfloor (2s+2)r\rfloor + \lfloor (2s+3)r\rfloor.$$

Όμως $s(2s+1) \equiv 3(mod\ (2s+3))$, άρα πρέπει $2s+3 \mid 3+\lfloor(2s+2)r\rfloor+\lfloor(2s+3)r\rfloor$.

Αν ίσχυε ότι $r<\frac{2s+2}{2s+3}$, τότε $\lfloor(2s+2)r\rfloor+\lfloor(2s+3)r\rfloor+3 \le \lfloor(2s+2)r\rfloor+2s+3=2s+6$,

άρα για να είναι ο $3+\lfloor(2s+2)r\rfloor+\lfloor(2s+3)r\rfloor$ πολλαπλάσιο του $2s+3$ πρέπει

$$3+\lfloor(2s+2)r\rfloor+\lfloor(2s+3)r\rfloor \ge 4s+6.$$

Άρα έχουμε

$$\lfloor(2s+2)r\rfloor+\lfloor(2s+3)r\rfloor \ge 4s+3$$

Επομένως, $2\lfloor(2s+3)r\rfloor \ge 4s+3$, που τελικά δίνει ότι $r \ge \frac{2s+2}{2s+3}$, άτοπο.

Επιπλέον,

$$4s \le 3+\lfloor(2s+2)r\rfloor+\lfloor(2s+3)r\rfloor < 4s+8,$$

Και το μοναδικό πολλαπλάσιο του 2s+3 ανάμεσα στους δύο αυτούς αριθμούς είναι το 4s+6, άρα $\lfloor r\rfloor+\lfloor 2r\rfloor+\cdots+\lfloor(2s+3)r\rfloor=(2s+3)(s+1)$, και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώθηκε. Αποδείξαμε ότι για κάθε $s \ge 1$ ισχύει ότι $r \ge \frac{2s}{2s+1}$. Παίρνοντας το όριο όταν $s \to +\infty$, βλέπουμε ότι $r \ge 1$, άτοπο.

Έπεται ότι ο α είναι άρτιος ακέραιος και η επαλήθευση είναι άμεση από την (*).

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b), για τα οποία υπάρχουν θετικοί ακέραιοι g και N τέτοιοι, ώστε η ισότητα $\gcd(a^n+b,b^n+a)=g$ να ισχύει για κάθε ακέραιο $n \ge N$.

Λύση (1ος τρόπος, Ορέστης Λιγνός)

Αν $a=b$, $g=a^n+a \to +\infty$, εκτός αν $a=b=1$. Αν $a=1$, τότε $\gcd(b^n+1,b+1)=g$, και αν $b \ge 2$, τότε $g \in \{1,2\}$, αν n άρτιο (πράγματι, αν $\delta \mid b+1$ και $\delta \mid b^n+1$, τότε $\delta \mid 2$), ενώ $g=b+1$ για n περιττό (αφού $(b+1) \mid (b^n+1)$). Άρα, $b=1$, άτοπο.

Έστω τώρα ότι $a>b>1$. Έχουμε τον εξής Ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 1: Αν $p \mid g$, όπου p περιττό και $v_p(g)=k \ge 1$, τότε: $v_p(a), v_p(b) \ge k$.

Απόδειξη: Αν ο p δεν διαιρεί τους a,b, τότε παίρνω $n \ge N$ με $n \equiv 0 \bmod (p-1)$, άρα $a^n+b \equiv b+1 \equiv 0 \bmod p$, οπότε $p \mid (b+1)$, και όμοια $p \mid (a+1)$. Όμως τότε, $a^n+b \equiv (-1)^n+(-1) \equiv -2 \bmod p$ για n περιττό, άτοπο.

Άρα, $p \mid a, p \mid b$. Παίρνω τώρα n τέτοιο, ώστε $n \ge N$ και $n\,v_p(a)>k$, οπότε $p^k \mid a^n$, και τότε $p^k \mid (a^n+b)-a^n=b$, και όμοια $p^k \mid a$, όπως θέλαμε. ■

Αν ο g είναι περιττός, τότε από τον Ισχυρισμό 1 προκύπτει ότι $g \mid \gcd(a,b)$ και προφανώς $\gcd(a,b) \mid g$, άρα $g=\gcd(a,b)$. Συνεπώς, $\gcd(a^n+b,b^n+a)=\gcd(a,b)$

Έστω τώρα ένας πρώτος p με $p \mid ab+1$. Τότε, παίρνω $n>N$ με $n \equiv -1 \bmod (p-1)$, οπότε $a^n+b \equiv a^{-1}+b \equiv 0 \bmod p$, και όμοια $b^n+a \equiv 0 \bmod p$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $p \mid \gcd(a,b)$, άτοπο.

Άρα, έχουμε ότι ο g είναι άρτιος. Αν τώρα έχουμε ότι $2 \mid a$, προφανώς $2 \mid b$. Με διαδικασία όμοια με του Ισχυρισμού 1, προκύπτει ότι $v_2(a), v_2(b) \ge v_2(g)$, και άρα όπως πιο πάνω $g=\gcd(a,b)$, άτοπο.

Άρα, οι a, b, g είναι όλοι περιττοί. Αν τώρα ήταν $4 \mid g$, τότε $4 \mid a^n + b$ και $4 \mid b^n + a$. Αν ο n λοιπόν είναι άρτιος, με $n \geq N$, τότε $a^n \equiv 1 \bmod 4$, και άρα $b \equiv 3 \bmod 4$. Όμοια, $a \equiv 3 \bmod 4$. Όμως, για n περιττό με $n \geq N$, έχουμε ότι $a^n + b \equiv 3^n + 3 \equiv 2 \bmod 4$, άτοπο. Συνεπώς, $g = 2M$ με M περιττό. Από τον Ισχυρισμό 1, έχουμε ότι $M \mid a, b$, συνεπώς $\frac{g}{2} \mid \gcd(a, b)$, ενώ από τα πιο πάνω πρέπει $g \neq \gcd(a, b)$, και άρα καταλήγουμε ότι $g = 2\gcd(a, b)$. Τώρα έχουμε τον επόμενό μας Ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 2: Ο $ab + 1$ είναι δύναμη του 2.
Απόδειξη: Αν δεν ήταν δύναμη του 2, τότε θα υπήρχε περιττός πρώτος p τέτοιος, ώστε $p \mid (ab + 1)$. Παίρνουμε $n \geq N$, με $n \equiv -1 \bmod (p-1)$. Τότε,

$$a^n + b \equiv a^{-1} + b \equiv 0 \bmod p,$$

Και όμοια $b^n + a \equiv 0 \bmod p$. Συνεπώς, $p \mid 2\gcd(a, b)$, το οποίο όμως είναι άτοπο, αφού ο p είναι περιττός και $p \mid (ab + 1)$. ■

Άρα, $ab + 1 = 2^T$ με $T \in \mathbb{N}$. Έχουμε τώρα τους επόμενους Ισχυρισμούς.
Ισχυρισμός 3: Οι αριθμοί $\gcd(a + 1, b - 1)$ και $\gcd(a - 1, b + 1)$ είναι δύναμη του 2.
Απόδειξη: Έστω πως ο $\gcd(a + 1, b - 1)$ δεν είναι δύναμη του 2. Τότε, υπάρχει περιττός πρώτος p τέτοιος, ώστε $p \mid a + 1, p \mid b - 1$. Τότε, για n περιττό,

$$a^n + b \equiv (-1)^n + 1 \equiv 0 \bmod p,$$

Και όμοια $b^n + a \equiv 0 \bmod p$, άρα $p \mid 2\gcd(a, b)$, πράγμα άτοπο ■

Ισχυρισμός 4: Ισχύει ότι $\gcd(a + 1, b + 1) = 2$.
Απόδειξη: Αν υπήρχε περιττός πρώτος p τέτοιος, ώστε $p \mid a + 1, p \mid b + 1$, ακολουθώντας τη διαδικασία του Ισχυρισμού 3 έχουμε άτοπο . Αν πάλι είχαμε ότι $4 \mid a + 1, 4 \mid b + 1$, τότε $2^T \equiv ab + 1 \equiv 2 \bmod 4$, άρα $T = 1$, άτοπο ■

Τώρα, είμαστε σε θέση να λύσουμε το πρόβλημα. Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να ισχύει $4 \mid a + 1$ και $4 \mid a - 1$ ταυτόχρονα, συνεπώς τουλάχιστον ένας από τους $\gcd(a + 1, b - 1)$ και $\gcd(a - 1, b + 1)$ είναι ίσος με 2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gcd(a + 1, b - 1) = 2$.
Αν $a \equiv 3 \bmod 4$, τότε $4 \mid a + 1$ και είτε $4 \mid b - 1$ είτε $4 \mid b + 1$. Συνεπώς, έχουμε ότι $4 \mid \gcd(a + 1, b - 1)$ ή $4 \mid \gcd(a + 1, b + 1)$, που είναι άτοπο, αφού και οι δύο ποσότητες ισούνται με 2. Αν τέλος $a \equiv 1 \bmod 4$, τότε αν $b \equiv 1 \pmod 4$, προκύπτει ότι

$$2^T = ab + 1 \equiv 2 \pmod 4, \text{ άτοπο.}$$

Αν πάλι $b \equiv 3 \bmod 4$, τότε επιλέγοντας $n \geq N$ με n περιττό προκύπτει ότι
$a^n + b \equiv 0 \bmod 4$ και $b^n + a \equiv 3^n + 1 \equiv 0 \bmod 4$, συνεπώς $4 \mid 2\gcd(a, b)$, άτοπο.
Συνοψίζοντας, μόνη λύση τελικά είναι η $(a, b) = (1,1)$.
2ος τρόπος. Θέτουμε $K = ab + 1$ και έστω $n \equiv -1 \big(mod\ \varphi(K)\big)$, ώστε να ισχύει επιπλέον ότι $n \geq N$. Εφόσον οι a, b δεν έχουν κοινούς παράγοντες με τον K, από το Θεώρημα Euler παίρνουμε ότι

$$a^n + b \equiv a^{-1} + b \equiv a^{-1}(1 + ab) \equiv 0\ (mod\ K),$$

και όμοια λαμβάνουμε ότι $b^n + a \equiv 0\ (mod\ K)$. Επομένως, για n αρκετά μεγάλο και $n \equiv -1\big(mod\ \varphi(K)\big)$, ο K πρέπει να διαιρεί τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των $a^n + b, b^n + a$, δηλαδή πρέπει $K \mid g$. Αυτό όμως σημαίνει ότι για κάθε $n \geq N$ θα ισχύει ότι

$$K \mid a^n + b\ \ και\ K \mid b^n + a. \qquad (1)$$

Επιλέγουμε τώρα ένα τέτοιο n της μορφής $n \equiv 0\big(mod\ \varphi(K)\big)$. Τότε η σχέση (1) δίνει ότι

$$K \mid 1 + b\ \ και\ K \mid 1 + a.$$

Εφόσον, $ab + 1 \mid 1 + a$ και τα δύο μέλη είναι θετικοί ακέραιοι, θα ισχύει ότι

$$1 + a \geq 1 + ab \Leftrightarrow b \leq 1.$$

Εφόσον ο b είναι θετικός ακέραιος, παίρνουμε ότι $b = 1$. Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι και $a = 1$. Μένει τώρα να αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(1, 1)$ έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Πράγματι, για $(a, b) = (1,1)$ και για κάθε $n \geq N$ έχουμε ότι:

$$(a^n + b, b^n + a) = (2,2) = 2.$$

Πρόβλημα 3. **Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots$ μία άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων και N ένας θετικός ακέραιος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n > N$, ο ακέραιος a_n είναι ίσος με το πλήθος των φορών που εμφανίζεται ο ακέραιος a_{n-1} στη λίστα $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μία από τις ακολουθίες $a_1, a_3, a_5, \ldots$ και $a_2, a_4, a_6, \ldots$ είναι τελικά περιοδική. (Μια άπειρη ακολουθία $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ονομάζεται τελικά περιοδική, αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι p και M τέτοιοι, ώστε $b_{m+p} = b_m$, για κάθε $m \geq M$.)**

Λύση. Έστω $M > max(a_1, a_2, \ldots, a_N)$. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι **κάποιος ακέραιος εμφανίζεται άπειρες φορές**. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η ακολουθία θα περιέχει αυθαίρετα μεγάλους ακέραιους αριθμούς. Την πρώτη φορά που εμφανίζεται κάθε ακέραιος μεγαλύτερος από το M, τότε ακολουθεί όρος ίσος με 1. Άρα το 1 εμφανίζεται άπειρες φορές, το οποίο είναι αντίφαση.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι **κάθε ακέραιος $x \geq M$ εμφανίζεται το πολύ $M - 1$ φορές**. Πράγματι, αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε θεωρούμε την πρώτη φορά που εμφανίζεται κάποιο $x \geq M$ τη M- στή φορά. Μέχρι αυτό το σημείο κάθε εμφάνιση του x προηγείται από έναν ακέραιο ο οποίος έχει εμφανιστεί $x \geq M$ φορές. Άρα πρέπει να υπήρχαν τουλάχιστον M αριθμοί που έχουν ήδη εμφανιστεί τουλάχιστον M φορές πριν το x, το οποίο είναι αντίφαση.

Επομένως υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ακέραιων που εμφανίζονται άπειρες φορές. Έστω ο μεγαλύτερος από αυτούς είναι ο k. Επειδή ο k εμφανίζεται άπειρες φορές πρέπει να υπάρχουν άπειροι ακέραιοι μεγαλύτεροι από το M οι οποίοι εμφανίζονται τουλάχιστον k φορές στην ακολουθία, οπότε κάθε ακέραιος $1,2, \ldots, k - 1$ επίσης εμφανίζεται k φορές. Επειδή το $k + 1$ δεν εμφανίζεται άπειρα συχνά, πρέπει να υπάρχουν μόνο πεπερασμένα πολλοί αριθμοί που εμφανίζονται περισσότερες από k φορές. Έστω ότι ο μεγαλύτερος τέτοιος αριθμός είναι ο $l \geq k$. Στο εξής θα ονομάζουμε έναν ακέραιο *μεγάλο* αν $x > l$, *μεσαίο* αν $l \geq x > k$ και *μικρό* αν $x \leq k$. Συνοψίζοντας, κάθε μικρός ακέραιος εμφανίζεται άπειρες φορές στην ακολουθία, ενώ κάθε μεγάλος ακέραιος εμφανίζεται το πολύ k φορές στην ακολουθία.

Επιλέγουμε ένα αρκετά μεγάλο ακέραιο $N' > N$ έτσι, ώστε ο a_N να είναι μικρός και στην ακολουθία $a_1, a_2, \dots, a_{N'}$ να ισχύουν:

- Κάθε μεσαίος αριθμός έχει ήδη κάνει όλες τις εμφανίσεις του
- Κάθε μικρός αριθμός έχει περισσότερες από $max(k, N)$ εμφανίσεις.
- Επειδή κάθε μικρός αριθμός έχει εμφανιστεί περισσότερες από k φορές, μετά από αυτό το σημείο κάθε μικρός ακέραιος αριθμός πρέπει να ακολουθείται από ένα μεγάλο ακέραιο αριθμό. Επίσης, από τον ορισμό κάθε μεγάλος αριθμός εμφανίζεται το πολύ k φορές, οπότε πρέπει να ακολουθείται από ένα μικρό αριθμό. Επομένως η ακολουθία εναλλάσσεται μεταξύ μεγάλων και μικρών αριθμών μετά τον όρο $a_{N'}$.

Λήμμα 1. **Έστω $\boldsymbol{g}$ ένας μεγάλος αριθμός ο οποίος εμφανίζεται μετά τον όρο $\boldsymbol{a_{N'}}$. Αν ο $\boldsymbol{g}$ ακολουθείτε από τον μικρό αριθμό $\boldsymbol{h}$, τότε ο $\boldsymbol{h}$ ισούται με το πλήθος των μικρών αριθμών οι οποίοι έχουν εμφανιστεί τουλάχιστον $\boldsymbol{g}$ φορές πριν από αυτό το σημείο.**

Απόδειξη. Από τον ορισμό του N', ο μικρός αριθμός που έχει προηγηθεί του g έχει εμφανιστεί περισσότερες από $max(k, N)$ φορές, οπότε $g > max(k, N)$. Επειδή $g > N$, η $g - οστή$ εμφάνιση κάθε μικρού αριθμού πρέπει να συμβαίνει μετά τον a_N και επομένως ακολουθείτε από το g. Επειδή υπάρχουν k μικροί αριθμοί και ο g εμφανίζεται το πολύ k φορές, έπεται ότι ο g πρέπει να εμφανίζεται ακριβώς k φορές, πάντοτε ακολουθώντας ένα μικρό αριθμό μετά το a_N. Επομένως κατά την $h - οστή$ εμφάνιση του g, ακριβώς h μικροί αριθμοί έχουν εμφανιστεί τουλάχιστον g φορές πριν από αυτό το σημείο. ■

Στη συνέχεια συμβολίζουμε με $a_{[i,j]}$ την υπακολουθία $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$..

Λήμμα 2. **Έστω ότι οι θετικοί ακέραιοι $\boldsymbol{i}$ και $\boldsymbol{j}$ ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:**

(a) $\boldsymbol{j > i > N' + 2}$,

(b) $\boldsymbol{a_i}$ είναι μικρό και $\boldsymbol{a_i = a_j}$,

(c) Δεν εμφανίζεται μικρός αριθμός πάνω από μία φορά στην υπακολουθία $\boldsymbol{a_{[i,j-1]}}$.

Τότε ο $\boldsymbol{a_{i-2}}$ ισούται με κάποιο μικρό αριθμό στην υπακολουθία $\boldsymbol{a_{[i,j-1]}}$.

Απόδειξη. Έστω S το σύνολο των μικρών αριθμών που εμφανίζονται τουλάχιστον a_{i-1} φορές στην υπακολουθία $a_{[1,i-1]}$. Τότε, από το Λήμμα 1, $|S| = a_i$. Ομοίως, έστω T το σύνολο των μικρών αριθμών οι οποίοι εμφανίζονται a_{j-1} φορές στην υπακολουθία $a_{[1,j-1]}$. Τότε, από το Λήμμα 1, $|T| = a_j$ και, λόγω του (b), $|S| = |T|$. Επίσης, εξ ορισμό, $a_{i-2} \in S$ και $a_{j-2} \in T$.

Υποθέτουμε ότι ο μικρός αριθμός $a_{j-2} \notin S$. Αυτό σημαίνει ότι ο a_{j-2} έχει εμφανιστεί λιγότερες από a_{i-1} φορές στην υπακολουθία $a_{[1,i-1]}$. Λόγω του (c), ο a_{j-2} έχει εμφανιστεί το πολύ a_{i-1} φορές στην υπακολουθία $a_{[1,j-1]}$, οπότε $a_{j-1} \leq a_{i-1}$, από το οποίο σε συνδυασμό με τη σχέση $a_{[1,i-1]} \subset a_{[1,j-1]}$, έπεται ότι $S \subseteq T$. Όμως, επειδή $a_{j-2} \in T - S$, αυτό αντιφάσκει προς την ισότητα $|S| = |T|$. Επομένως $a_{j-2} \in S$, δηλαδή έχει εμφανιστεί τουλάχιστον a_{i-1} φορές στην υπακολουθία $a_{[1,i-1]}$ και μία ακόμη φορά στην υπακολουθία $a_{[i,j-1]}$. Επομένως $a_{j-1} > a_{i-1}$.

Λόγω του (c), κάθε μικρός αριθμός που έχει εμφανιστεί τουλάχιστον a_{j-1} φορές στην υπακολουθία $a_{[1,j-1]}$ έχει επίσης εμφανιστεί $a_{j-1} - 1 \geq a_{i-1}$ φορές στην υπακολουθία $a_{[1,i-1]}$. Άρα $T \subseteq S$ και επομένως $T = S$. Άρα $a_{i-2} \in T$, δηλαδή αυτό πρέπει να εμφανίζεται τουλάχιστον $a_{j-1} - a_{i-1} = 1$ φορές περισσότερο στην υπακολουθία $a_{[i,j-1]}$. ■

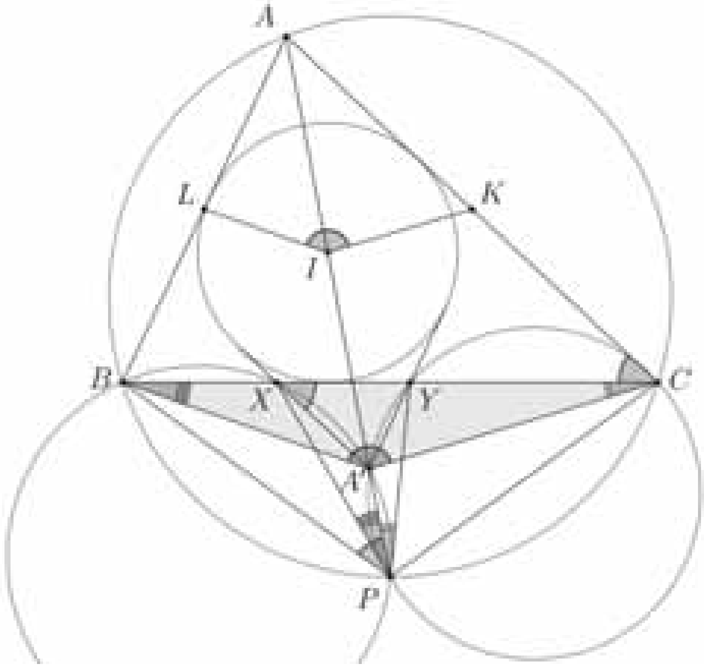
Επανερχόμενοι στο πρόβλημα μας, για κάθε μικρό αριθμό a_n με $n > N' + 2$, έστω p_n ο ελάχιστος θετικός ακέραιος με την ιδιότητα $a_{n+p_n} = a_i$ είναι επίσης μικρός για κάποιο i με $n \leq i < n + p_n$. Με άλλα λόγια, ο $a_{n+p_n} = a_i$ είναι ο πρώτος μικρός αριθμός που εμφανίζεται δύο φορές μετά τον a_{n-1}.

Αν $i > n$, από το Λήμμα 2 με $j = n + p_n$, έπεται ότι ο a_{i-2} εμφανίζεται πάλι πριν τον a_{n+p_n}, αντιφάσκοντας στην ελαχιστότητα του p_n. Άρα $i = n$. Επίσης, από το Λήμμα 2, έπεται ότι $p_n \geq p_{n-2}$. Επομένως, $p_n, p_{n+2}, p_{n+4}, \ldots$ είναι μία μη φθίνουσα ακολουθία φραγμένη πάνω από το $2k$, αφού υπάρχουν μόνο k μικροί αριθμοί. Επομένως, η ακολουθία $p_n, p_{n+2}, p_{n+4}, \ldots$ είναι τελικά σταθερή και η υπακολουθία των μικρών αριθμών είναι τελικά περιοδική με περίοδο το πολύ k.

Πρόβλημα 4. Έστω ABC ένα τρίγωνο με $AB < AC < BC$. Έστω I το έγκεντρο και ω ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC. Έστω X το σημείο στην ευθεία BC, διαφορετικό του C, που είναι τέτοιο, ώστε η ευθεία που περνάει από το X και είναι παράλληλη στην ευθεία AC να είναι εφαπτομένη στον κύκλο ω. Ομοίως, έστω Y το σημείο στην ευθεία BC, διαφορετικό του B, που είναι τέτοιο, ώστε η ευθεία που περνάει από το Y και είναι παράλληλη στην ευθεία AB να είναι εφαπτομένη στον κύκλο ω. Έστω ότι η ευθεία AI τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC ξανά στο σημείο $P \neq A$. Έστω K και L τα μέσα των πλευρών AC και AB, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς το σημείο I το οποίο βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο AP. Οι ευθείες $A'X$ και $A'Y$ είναι συμμετρικές των ευθειών AC και AB ως προς το I, αντίστοιχα, οπότε είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου ω από τα σημεία X και Y. Είναι γνωστό ότι $PB = PC = PI$ και επειδή $\angle BAP = \angle PAC > 30^o$, $PB = PC$ είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC. Επομένως, $PI > \frac{1}{2}AP > AI$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το σημείο A' βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AP.



Σχήμα 1

Έχουμε την ισότητα των εγγεγραμμένων γωνιών $\angle ACB = \angle APB$ και λόγω της παραλληλίας την ισότητα $\angle APB = \angle A'XC$. Άρα είναι $\angle ACB = \angle A'XC$, οπότε το τετράπλευρο $BPA'X$ είναι εγγράψιμο. Ομοίως προκύπτει και ότι το τετράπλευρο $CYA'P$ είναι εγγράψιμο.

Επειδή οι γωνίες $\angle KIL$ και $\angle CA'B$ είναι ομοιόθετες στην ομοιοθεσία με κέντρο A και λόγο 2, έπεται ότι $\angle KIL = \angle CA'B$. Επίσης, από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BPA'X$ και $CYA'P$ προκύπτουν οι ισότητες $\angle APX = \angle A'BC$ και $\angle YPA = \angle BCA'$, οπότε πλέον μπορούμε να μεταφέρουμε το άθροισμα $\angle KIL + \angle YPX$ στο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $A'CB$. Έτσι έχουμε: $\angle KIL + \angle YPX = \angle CA'B + (\angle YPA + \angle YPX) = \angle CA'B + \angle BCA' + \angle A'BC = 180^o$.

(2ος τρόπος). (Ορέστης Λιγνός). Έστω ότι η εφαπτομένη από το X τέμνει την AB στο S και εφάπτεται στον ω στο σημείο U. Έστω ακόμη ότι η εφαπτομένη από το Y τέμνει την AC στο T και εφάπτεται στον ω στο σημείο V. Έστω τέλος ότι ο ω εφάπτεται στις AB, AC στα F, E αντίστοιχα, σχήμα 2. Παρατηρούμε ότι τα σημεία E, I, U και F, I, V είναι συνευθειακά, λόγω των δεδομένων παραλληλιών. Αν τώρα η AI τέμνει την εφαπτομένη στο X στο σημείο A' και την εφαπτομένη στο Y στο σημείο A'', τότε έχουμε ότι:

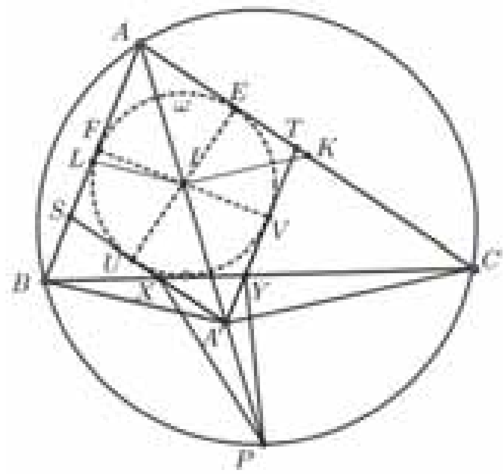
$$\frac{AI}{IA'} = \frac{EI}{IU} = 1 \text{ και } \frac{AI}{IA''} = \frac{FI}{IV} = 1, \text{οπότε } A' \equiv A''$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

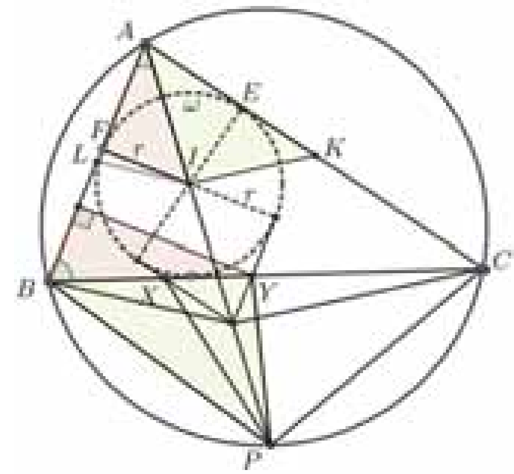
$$\angle A'XC = \angle ACB = \angle APB = \angle A'PB,$$

οπότε το τετράπλευρο $BXA'P$, είναι εγγράψιμο. Ομοίως, και το τετράπλευρο $CYA'P$ είναι εγγράψιμο. Συνεπώς, έχουμε ότι

$\angle KIL + \angle YPX = \angle CA'B + \angle YPA' + \angle A'PX = \angle CA'B + \angle YCA' + \angle XBA' = 180°$, όπως θέλαμε.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

(3ος τρόπος). Ισχυριζόμαστε ότι τα τρίγωνα AIK και BYP είναι όμοια, σχήμα 3.
Πράγματι, έχουμε $\angle IAK = \angle PAC = \angle PBC = \angle PBY$.
Επιπλέον, θεωρώντας τις προβολές των σημείων A και Y πάνω στην ευθεία AB έχουμε:

$$AI = \frac{r}{sin(A/2)} \quad \text{και} \quad BY = \frac{2r}{sinB},$$

αφού η εφαπτομένη από το Y προς τον κύκλο ω, διαφορετική της BC είναι παράλληλη προς την AB. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας και το νόμο των ημιτόνων λαμβάνουμε

$$\frac{AI}{AK} = \frac{\frac{r}{sin(A/2)}}{RsinB} = \frac{r}{RsinBsin(A/2)} \quad \text{και} \quad \frac{BY}{BP} = \frac{\frac{2r}{sinB}}{2Rsin(A/2)} = \frac{r}{RsinBsin(A/2)},$$

οπότε προκύπτει η ομοιότητα των τριγώνων AIK και BYP. Ανάλογα προκύπτει ότι και τα τρίγωνα AIL και CXP είναι όμοια. Από αυτές τις ομοιότητες τριγώνων έχουμε:

$$\angle KIL + \angle YPX = \angle KIA + \angle AIL + \angle YPX = \angle XYP + \angle PXY + \angle YPX = 180^o.$$

Πρόβλημα 5. **Ο Τούρμπο το σαλιγκάρι παίζει ένα παιγνίδι σε έναν πίνακα με 2024 οριζόντιες γραμμές και 2023 κατακόρυφες στήλες. Υπάρχουν κρυμμένα τέρατα σε 2022 κελιά του πίνακα. Αρχικά, ο Τούρμπο δεν γνωρίζει κανένα από τα κελιά που βρίσκονται τα τέρατα, αλλά γνωρίζει ότι υπάρχει ακριβώς ένα τέρας σε κάθε οριζόντια γραμμή εκτός από την πρώτη γραμμή και την τελευταία γραμμή, και ότι κάθε κατακόρυφη στήλη περιέχει το πολύ ένα τέρας. Ο Τούρμπο κάνει μία σειρά προσπαθειών για να πάει από την πρώτη γραμμή στη τελευταία γραμμή. Σε κάθε προσπάθεια, επιλέγει να αρχίσει από οποιοδήποτε κελί της πρώτης γραμμής και στη συνέχεια κινείται επανειλημμένα σε ένα γειτονικό κελί που έχει μία κοινή πλευρά με το κελί στο οποίο βρίσκεται. (Επιτρέπεται να επιστρέψει σε ένα κελί που είχε επισκεφθεί νωρίτερα.) Αν φθάσει σε ένα κελί που περιέχει κάποιο τέρας, η προσπάθειά του τελειώνει και μεταφέρεται στην πρώτη γραμμή για να αρχίσει μία καινούρια προσπάθεια. Τα τέρατα δεν μετακινούνται και ο Τούρμπο θυμάται για κάθε κελί που έχει επισκεφθεί αν περιέχει τέρας ή όχι. Αν φθάσει σε οποιοδήποτε κελί της τελευταίας γραμμής, τότε η προσπάθεια του τελειώνει και το παιγνίδι τερματίζεται. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του $\boldsymbol{n}$ για την οποία ο Τούρμπο έχει μία στρατηγική που του εγγυάται ότι θα**

φθάσει στην τελευταία γραμμή κατά την n-οστή προσπάθεια ή νωρίτερα, ανεξάρτητα από τις θέσεις που βρίσκονται τα τέρατα.

Λύση (Κ. Τσουρέκας, Ν. Μπερκουτάκης)

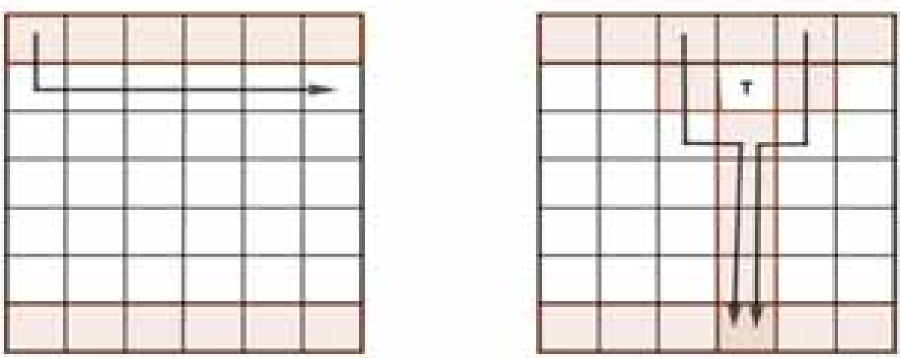
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για $n = 2$ δεν υπάρχει στρατηγική που εγγυάται ότι ο Τούρμπο θα φθάσει στην τελική γραμμή.

Υποθέτουμε ότι ο τούρμπο κάνει την πρώτη κίνηση στο κελί $(2, i)$. Αν εκεί υπάρχει τέρας, τότε επιστρέφει στην πρώτη γραμμή. Η επόμενη κίνηση θα γίνει μέσω του κελιού $(2, j), j \neq i$, όπου δεν υπάρχει τέρας και θα φθάσει στο κελί $(3, j)$, στο οποίο μπορεί να υπάρχει τέρας, οπότε επιστρέφει πάλι στην πρώτη γραμμή.

Θα εξετάσουμε τώρα την δυνατότητα επιτυχίας για $n = 3$.

Στην πρώτη κίνηση ελέγχουμε που βρίσκεται το τέρας στη δεύτερη γραμμή ακολουθώντας τη διαδρομή $(1,1) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (2,2023)$.

Έστω ότι βρίσκουμε το τέρας στο κελί $(2, i), 1 \leq i \leq 2023$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις οι οποίες διαφέρουν ως προς το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να φθάσουμε στο κελί $(3, i)$ που γνωρίζουμε ότι η στήλη i κάτω από αυτό δεν περιέχει τέρατα, οπότε η διαδρομή αυτή μας επιτρέπει να φθάσουμε στην τελευταία γραμμή.



Σχήμα 3 (για πίνακα 7×6)

Περίπτωση Ι. Ισχύει ότι $2 \leq i \leq 2022$. Τότε το κελί $(3, i)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε μέσω των δύο γειτονικών κελιών του $(3, i-1)$ και $(3, i+1)$ εκ των οποίων το ένα είναι σίγουρο ότι δεν περιέχει τέρας. Επομένως, η μία από τις δύο διαδρομές

$$(1, i-1) \longrightarrow (2, i-1) \longrightarrow (3, i-1) \longrightarrow (3, i) \longrightarrow (4, i) \ldots \longrightarrow (2024, i),$$
$$(1, i+1) \longrightarrow (2, i+1) \longrightarrow (3, i+1) \longrightarrow (3, i) \longrightarrow (4, i) \ldots \longrightarrow (2024, i),$$

οδηγεί με ασφάλεια στην τελευταία γραμμή. Στο παραπάνω σχήμα 3 στα σκιασμένα κελιά δεν υπάρχει κάποιο τέρας.

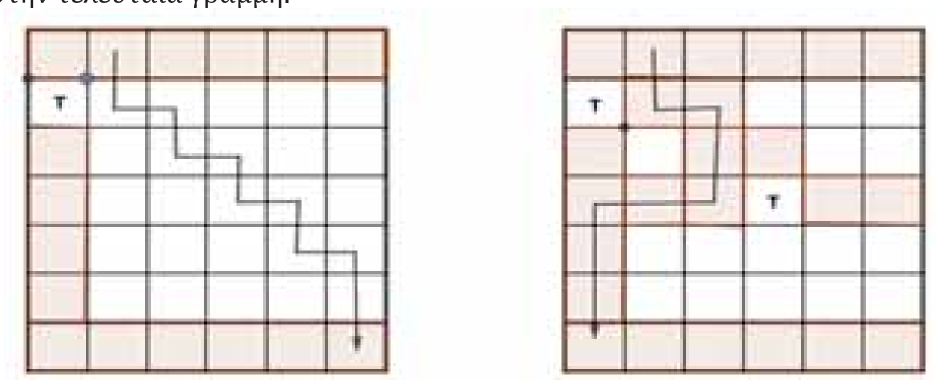
Περίπτωση ΙΙ. Ισχύει ότι $i = 1$ ή $i = 2023$, δηλαδή το τέρας βρίσκεται στο πρώτο ή στο τελευταίο κελί της δεύτερης γραμμής. Και οι δύο περιπτώσεις μπορούν να αντιμετωπισθούν ομοίως. Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $i = 1$. Στην περίπτωση αυτή στην πρώτη στήλη η διαδρομή $(1,2) \longrightarrow \cdots (1,2024)$ δεν περιέχει τέρας και οδηγεί στην τελευταία γραμμή. Προσπαθούμε να φθάσουμε το πολύ σε δύο κινήσεις κάποιο από τα κελιά αυτής της διαδρομής. Ο Τούρμπο ακολουθεί την παρακάτω κλιμακωτή διαδρομή

$$(1,2) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (2022,2023) \longrightarrow (2023,2023) \longrightarrow (2024,2023).$$

Αν κατά μήκος αυτής της διαδρομής δεν υπάρχει τέρας τότε θα φθάσει στην τελευταία γραμμή σε δύο προσπάθειες. Αν συναντήσει κάποιο τέρας στο κελί (i, i) ή στο κελί $(i, i+1)$, τότε ακολουθώντας τη διαδρομή $(1,2) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow (3,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (i-2, i-1) \longrightarrow (i-1, i-1)$

$$\longrightarrow (i, i-1) \longrightarrow (i, i-2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (i, 2) \longrightarrow (i, 1) \longrightarrow (i+1, 1) \longrightarrow (2023,1) \longrightarrow (2024,1)$$

θα φθάσει στην τελευταία γραμμή.



Σχήμα 4 (για πίνακα 7×6)

Στο σχήμα 4 στα σκιασμένα κελιά δεν υπάρχει κάποιο τέρας.

Πρόβλημα 6. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Μία συνάρτηση $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ λέγεται *υδροθερμική*, αν ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$ ισχύει τουλάχιστον μία από τις ισότητες $f(x+f(y)) = f(x) + y$ ή $f(f(x)+y) = x + f(y)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος c τέτοιος, ώστε για κάθε *υδροθερμική* συνάρτηση f να υπάρχουν το πολύ c διαφορετικοί ρητοί αριθμοί που γράφονται στη μορφή $f(r) + f(-r)$, για κάποιο ρητό αριθμό r, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του c.

Λύση. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

- $a \sim b$, αν ισχύει είτε $f(a) = b$, είτε $f(b) = a$.
- $a \longrightarrow b$, αν $f(a) = b$.
- $P(x, y)$ για το συμβολισμό της Πρότασης ότι: είτε $f(x+f(y)) = f(x) + y$, είτε $f(f(x)+y) = x + f(y)$.
- $g(x) = f(x) + f(-x)$

Με τους συμβολισμούς αυτούς η Πρόταση $P(x, y)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $x + f(y) \sim f(x) + y$, ενώ για τη λύση του προβλήματος θα πρέπει να προσδιορίσουμε το μέγιστο δυνατό αριθμό στοιχείων του συνόλου $\{g(x) | x \in \mathbb{Q}\}$.

Καταρχήν μπορούμε να δώσουμε μία συνάρτηση f για την οποία υπάρχουν δύο τιμές της $g(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \lfloor x \rfloor - \{x\}$, όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιο είναι μικρότερος ή ίσος του x, και $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ είναι το κλασματικό μέρος του x. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \lfloor x \rfloor - \{x\}$ ικανοποιεί την Πρόταση $P(x, y)$. Πράγματι, για $x, y \in \mathbb{Q}$ έχουμε:

$$f(x) + y = \lfloor x \rfloor - \{x\} + \lfloor y \rfloor + \{y\} = (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) + (\{y\} - \{x\}),$$

$$x + f(y) = \lfloor x \rfloor + \{x\} + \lfloor y \rfloor - \{y\} = (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) + (\{x\} - \{y\}).$$

Αν $\{x\} < \{y\}$, τότε το κλασματικό μέρος του $f(x) + y$ είναι $\{y\} - \{x\}$, ενώ το ακέραιο μέρος του είναι $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, οπότε ισχύει ότι: $f(x) + y \longrightarrow x + f(y)$. Ομοίως, αν $\{x\} > \{y\}$, τότε προκύπτει ότι $x + f(y) \longrightarrow f(x) + y$. Τέλος, αν $\{x\} = \{y\}$, τότε: $f(x) + y = x + f(y) = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η πρόταση $P(x,y)$ ισχύει.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι $g(x)=0$, αν $x\in\mathbb{Z}$, ενώ $g(x)=-2$, αν $x\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$, δηλαδή η συνάρτηση $g(x)$ έχει μόνο δύο τιμές. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν για τη συνάρτηση $g(x)$ περισσότερες από δύο τιμές. Η πρόταση $P(x,x)$ μας λέει ότι $x+f(x)\sim x+f(x)$, δηλαδή ότι για κάθε $x\in\mathbb{Q}$, ισχύει: $f\big(x+f(x)\big)=f(x)+x$. (1)

Λήμμα 1. **Η συνάρτηση f είναι 1-1 και επί και ικανοποιεί την ισότητα**

$$\boldsymbol{f\big(-f(-x)\big)=x,\ x\in\mathbb{Q}.} \qquad (2)$$

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. Έστω ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε, από την Πρόταση $P(x_1,x_2)$ προκύπτει ότι $f(x_1)+x_2\sim f(x_2)+x_1$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1)+x_2\longrightarrow f(x_2)+x_1$, δηλαδή ότι $f(f(x_1)+x_2)=f(x_2)+x_1$, τότε, από την ισότητα $f(x_1)=f(x_2)$ και τη σχέση (1), προκύπτει ότι $f(f(x_1)+x_2)=f(f(x_2)+x_2)=f(x_2)+x_2$. Επομένως έχουμε: $f(x_2)+x_1=f(x_2)+x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

Από τη σχέση (1) για $x=0$ λαμβάνουμε $f\big(f(0)\big)=f(0)\Rightarrow f(0)=0$, αφού η f είναι 1-1. Από την Πρόταση $P\big(x,-f(x)\big)$ προκύπτει ότι $0\sim x+f\big(-f(x)\big)$, δηλαδή ισχύει:

$$\text{είτε } 0=f(0)=x+f\big(-f(x)\big) \text{ είτε } f\Big(x+f\big(-f(x)\big)\Big)=0.$$

Επειδή η f είναι 1-1, σε κάθε περίπτωση έπεται ότι $x+f\big(-f(x)\big)=0\Rightarrow x=-f\big(-f(x)\big)$, από την οποία με αντικατάσταση του x με το $-x$ προκύπτει η σχέση που ζητάμε.

Τέλος, από τη σχέση (2) προκύπτει άμεσα ότι η συνάρτηση f είναι επί. ■

Επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1 και επί, υπάρχει η αντίστροφή της, έστω f^{-1}. Από τη σχέση (2) με αντικατάσταση του x με το $-x$ παίρνουμε $f(-x)=-f^{-1}(x)$, οπότε έχουμε:

$$g(x)=f(x)+f(-x)=f(x)-f^{-1}(x).$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνάρτηση g παίρνει την τιμή 0, αφού $g(0)=0$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι παίρνει και δύο τιμές διαφορετικές μεταξύ τους και διαφορετικές από το 0 και θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Έστω ότι $g(x)=u$ και $g(y)=v$, με $u\neq v$, $u,v\neq 0$. Ορίζουμε $x'=f^{-1}(x)$ και $y'=f^{-1}(y)$, οπότε θα έχουμε $x'\longrightarrow x\longrightarrow x'+u$ και $y'\longrightarrow y\longrightarrow y'+v$.

Από την Πρόταση $P(x',y)$ παίρνουμε: $x+y\sim x'+y'+v$, ενώ από την Πρόταση $P(x,y')$ προκύπτει ότι $x+y\sim x'+y'+u$. Επειδή από την υπόθεση είναι $u\neq v$, έχουμε ότι

$$x'+y'+v\neq x'+y'+u.$$

Όμως επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1 και επί πρέπει να ισχύει

$$x'+y'+u\longrightarrow x+y\longrightarrow x'+y'+v \ \text{ ή } \ x'+y'+v\longrightarrow x+y\longrightarrow x'+y'+u.$$

Υποθέτουμε ότι $x'+y'+u\longrightarrow x+y\longrightarrow x'+y'+v$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού με ανταλλαγή των ζευγών (x,u) και (y,v) η δεύτερη σχέση δίνει την πρώτη.

Επίσης, από το Λήμμα 1, έχουμε: $-x'-u\longrightarrow -x\longrightarrow -x'$.

Από την Πρόταση $P(x+y,-x'-u)$ προκύπτει ότι $y\sim y'+v-u$, οπότε πρέπει να ισχύει:

$$\text{είτε } y'+v-u=y'+v \text{ είτε } y'+v-u=y'\Rightarrow \text{είτε } u=0 \text{ είτε } u=v, \text{άτοπο.}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε αποδείξει ότι η συνάρτηση g μπορεί να πάρει την τιμή 0 και το πολύ μία τιμή διαφορετική από το 0. Από το παράδειγμα που έχουμε δώσει αρχικά προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή του c είναι 2.

Η 41η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα
Βάρνα, Βουλγαρία, 2024

Η 41η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη στη Βάρνα της Βουλγαρίας από **27 Απριλίου μέχρι 2 Μαΐου 2024** με συμμετοχή 22 χωρών. Οι Έλληνες μαθητές κατέκτησαν **1 χρυσό, 1 αργυρό, 2 χάλκινα μετάλλια και μία εύφημη μνεία**, ως εξής:

Λιγνός Ορέστης	**Εκπαιδευτήρια Ελληνική Παιδεία**	**Χρυσό Μετάλλιο**
Πετράκης Διονύσιος	**Γενικό Λύκειο Κανήθου**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Ηλιάδης Σωκράτης	**Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Γαλαμάτης Ιωάννης	**Πειραματικό Σχολείο Παν/μίου Θεσ/νίκης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Καβαλλάρης Ανδρέας	**Εράσμειος Ελληνογερμανική Σχολή**	**Εύφημη Μνεία**

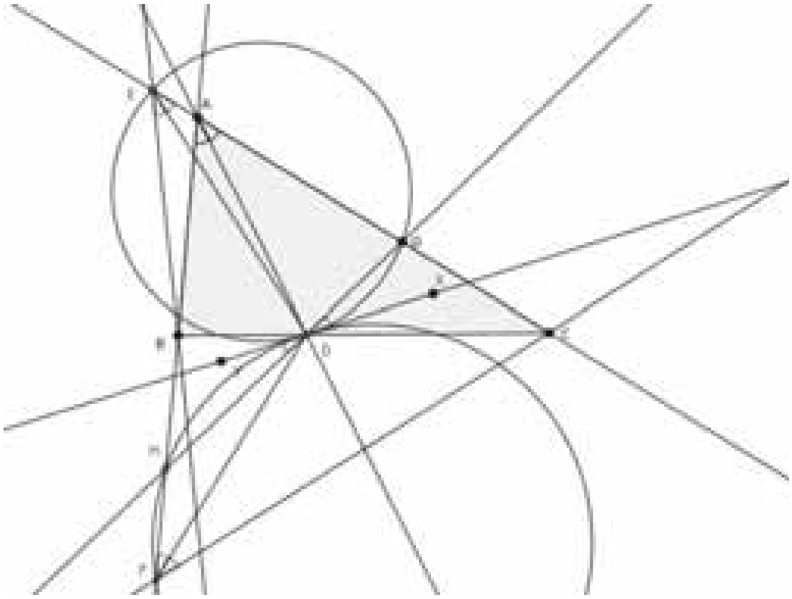
Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο μαθηματικός **Αλέξανδρος Συγκελάκης** και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Μηνάς Μαργαρίτης**, στους οποίους οφείλεται η επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων που ακολουθούν.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $AC > AB$ και D το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ με την πλευρά BC. Οι συμμετρικές ευθείες των AB και AC ως προς την BC τέμνουν τις ευθείες AC και AB στα σημεία E και F αντίστοιχα. Μια ευθεία που διέρχεται από το D τέμνει τις ευθείες AC και AB στα σημεία G και H αντίστοιχα, ώστε το G να βρίσκεται στο εσωτερικό του τμήματος AC και το H να βρίσκεται στο εσωτερικό του τμήματος BF. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\triangle EDG$ και $\triangle FDH$ εφάπτονται μεταξύ τους.

Λύση: Αναφορικά με την κατασκευή του σχήματος, σημειώνουμε πως οι συνθήκες για τις πλευρές του $\triangle ABC$ εξασφαλίζουν πως τα σημεία A, B ανήκουν στο εσωτερικό των τμημάτων CE, AF. Θεωρούμε τώρα την εφαπτομένη l του κύκλου (FDH) στο σημείο D. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η l εφάπτεται και του (EDG) στο σημείο D. Ας είναι σημεία X, Y πάνω στην l και εκατέρωθεν του D όπως στο σχήμα. Είναι $\widehat{YDH}=\widehat{DFH}$ (1) λόγω γωνίας χορδής κι εφαπτομένης, ενώ αντίστροφα, με την ίδια δικαιολόγηση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\widehat{XDG}=\widehat{DEG}$, διότι τότε η DX θα εφάπτεται του (EDG). Λόγω συμμετρίας ως προς την BC τα τρίγωνα $\triangle CEB$,$\triangle CFB$ είναι ίσα, οπότε παίρνουμε $\widehat{CEB} = \widehat{CFB}$ (2).

Εστιάζοντας στο τρίγωνο $\triangle AEB$, παρατηρούμε ότι η AD είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{EAB}$ επειδή η AD είναι εξ' ορισμού η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Ακόμα, λόγω συμμετρίας ως προς την BC, παίρνουμε ότι η ευθεία BD διχοτομεί τη γωνία $\widehat{EBF}$. Συνεπώς, το σημείο D είναι το E-παράκεντρο του τριγώνου $\triangle AEB$. Εντελώς αντίστοιχα λαμβάνουμε ότι το σημείο D είναι το έγκεντρο του τριγώνου $\triangle ACF$. Έτσι, $\widehat{DEG} = \frac{\widehat{CEB}}{2} \overset{(2)}{=} \frac{\widehat{CFB}}{2} = \widehat{DFH} \overset{(1)}{=} \widehat{YDH}$ και τέλος, $\widehat{YDH} = \widehat{XDG}$ ως κατακορυφήν γωνίες. Αυτό σημαίνει ότι πράγματι $\widehat{XDG} = \widehat{DEG}$, όπως θέλαμε.



Πρόβλημα 2. Έστω ακέραιοι $n \geq k \geq 3$. Να αποδείξετε ότι για κάθε πεπερασμένη ακολουθία ακεραίων $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$, μπορούμε να επιλέξουμε μη αρνητικούς ακεραίους $b_1, b_2, \ldots, b_k$, που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

i. ***$0 \leq b_i \leq n$ για κάθε $1 \leq i \leq k$.***
ii. ***Όλα τα γνησίως θετικά $\mathrm{b_i}$ είναι διαφορετικά ανά δύο,***
iii. ***Τα αθροίσματα $a_i + b_i$ για $1 \leq i \leq k$, σχηματίζουν μια μετάθεση των πρώτων k όρων μιας μη σταθερής αριθμητικής προόδου.***

Λύση: Το κλειδί στην επίλυση του προβλήματος είναι ότι η μη σταθερή αριθμητική πρόοδος που περιγράφεται στο iii., μπορεί να επιλεγεί ως η απλούστερη δυνατή: Συγκεκριμένα, η $c_1, c_2, \ldots, c_k$ με $c_i = a_k - k + i$ για $1 \leq i \leq k$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τα κατάλληλα b_i ως διαφορές της μορφής $c_j - a_l$ και έπειτα να επαληθεύσουμε ότι ικανοποιούν τις επιθυμητές ιδιότητες. Αυτό γίνεται σε δύο στάδια.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η c_i λαμβάνει όλες τις ακέραιες τιμές στο διάστημα $[a_k - k + 1, a_k]$, οπότε αν $s \geq 1$ ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο ο όρος a_s ανήκει στο διάστημα αυτό, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους όρους $a_i, i \geq s$ με τους αντίστοιχους (ίσους) όρους της c_i θέτοντας $b_i = 0$ για $s \leq i \leq k$. Αν $s = 1$ έχουμε τελειώσει, διότι οι $a_i + b_i = a_i, 1 \leq i \leq k$ είναι όλοι οι όροι της c_i – μάλιστα, λόγω μονοτονίας είναι $a_i = c_i, 1 \leq i \leq k$ - και επιπλέον οι ιδιότητες i.,ii. της εκφώνησης ικανοποιούνται τετριμμένα. Διαφορετικά, αν $s > 1$, περισσεύουν οι όροι $a_1 < a_2 < \cdots < a_{s-1}$ όπως και ίσο πλήθος όρων $c_{i_1} < c_{i_2} < \cdots < c_{i_{s-1}}$, όπου βέβαια $a_{s-1} < c_{i_1}$. Παίρνουμε ως μη μηδενικά b_i τα $b_1 = c_{i_{s-1}} - a_1, b_2 = c_{i_{s-2}} - a_2, \ldots, b_{s-1} = c_{i_1} - a_{s-1}$ όπου στο σχηματισμό των διαφορών αντιστοιχίζουμε τον j-οστό μικρότερο εκ των $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ με τον j-οστό μεγαλύτερο εκ των $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_{s-1}}$. Αυτή η αντιστοίχιση εξασφαλίζει ότι $a_1 + b_1 = c_{i_{s-1}}, a_2 + b_2 = c_{i_{s-2}}, \ldots, a_{s-1} + b_{s-1} = c_{i_1}$ και επιπλέον ότι $0 < b_{s-1} < b_{s-2} < \cdots < b_1$. Σε συνδυασμό με τις $b_i = 0, s \leq i \leq k$ επαληθεύονται άμεσα οι ιδιότητες ii. και iii. για την επιλογή αυτής της b_i. Για την ιδιότητα i. αρκεί να δείξουμε ότι ο μεγαλύτερος εκ των b_i, δηλαδή ο b_1, είναι μικρότερος ή ίσος του n. Όμως, $b_1 = c_{i_{s-1}} - a_1 \leq a_k - a_1 \leq n$ και το ζητούμενο έπεται.

Πρόβλημα 3. Έστω a και b διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε ο $3^a + 2$ να διαιρείται από τον $3^b + 2$. Να αποδείξετε ότι $a > b^2$.

Λύση: Είναι αρχικά φανερό ότι $a > b$. Για να προσδιορίσουμε πόσο μεγαλύτερο είναι το a σε σχέση με το b, γράφουμε $a = kb + r$ με $0 \leq r < b$ και $k \geq 1$ σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση. Γράφοντας $3^a + 2 = 3^{kb+r} + 2 = 3^r \cdot \left(3^b\right)^k + 2$, η δοθείσα διαιρετότητα δίνει $0 \equiv 3^a + 2 \equiv 3^r \cdot$

$(-2)^k + 2 \ (mod\ 3^b + 2)$ όπου στη δεύτερη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε την $3^b \equiv -2\ (mod\ 3^b + 2)$. Έτσι παίρνουμε τη διαιρετότητα $3^b + 2 | 3^r \cdot (-2)^k + 2$ από την οποία αναμένουμε να εξάγουμε συμπεράσματα για το μέγεθος των k, r σε σχέση με το b. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Αν k ζυγός, έχουμε τη διαιρετότητα $3^b + 2 | 3^r \cdot 2^k + 2$ που δίνει $3^r \cdot 2^k + 2 = n \cdot (3^b + 2)$ (1) για κάποιον θετικό ακέραιο n. Επειδή $r < b$, εκτιμώντας την τελευταία σχέση $mod\ 3^r$ λαμβάνουμε $3^r | 2 \cdot (n-1)$, οπότε λόγω $\mu\kappa\delta(2,3) = 1$, εξάγουμε την $3^r | n - 1$ (2). Το ενδεχόμενο $n - 1 = 0$ απορρίπτεται από την (1): Πράγματι, αν $n = 1$, θα είχαμε $3^r \cdot 2^k = 3^b$ δηλαδή $2^k = 3^{b-r}$ με $b - r > 0$, που είναι άτοπο. Συνεπώς, η διαιρετότητα (2) δίνει την ανισότητα $3^r \leq n - 1$. Γυρνώντας πίσω στην (1) έχουμε $3^r \cdot 2^k + 2 \geq (3^r + 1) \cdot (3^b + 2) > 3^r \cdot 3^b + 2$ που σημαίνει ότι $3^b < 2^k < 3^k$. Τελικά, $k > b$ και άρα $a = kb + r > b^2$ όπως θέλαμε.

2. Αν k περιττός: Έχουμε τη διαιρετότητα $3^b + 2 | 3^r \cdot 2^k - 2$ που δίνει $3^r \cdot 2^k - 2 = m \cdot (3^b + 2)$ (2) για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο m. Το ενδεχόμενο $r = 0, m \geq 1$ δίνει εύκολα $2^k > 3^b$ οπότε καταλήγουμε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Το ενδεχόμενο $r = 0, m = 0$ δίνει $k = 1$ που σημαίνει $a = kb + r = b$. Αυτό είναι άτοπο από υπόθεση.

Διαφορετικά, για $r > 0$ εκτιμούμε αντίστοιχα με πριν την ισότητα (2) $mod\ 3^r$ και λαμβάνουμε $3^r | 2 \cdot (m+1)$. Λόγω $\mu\kappa\delta(2,3) = 1$, έχουμε τη διαιρετότητα $3^r | m + 1$ και επομένως την ανισότητα $3^r \leq m + 1$. Γυρνώντας πίσω στην (2) έχουμε $3^r \cdot 2^k - 2 \geq (3^r - 1) \cdot (3^b + 2) = 3^r \cdot 3^b + 2 \cdot 3^r - 3^b - 2$ που σημαίνει ότι $2^k > 3^b + 2 - 3^{b-r} > 3^b - 3^{b-r}$. Λόγω της $r \geq 1$, ισχύει το φράγμα $3^{b-r} \leq 3^{b-1}$, οπότε από την παραπάνω ανισότητα έπεται η $2^k > 2 \cdot 3^{b-1}$. Παίρνουμε λοιπόν $k > b$ και καταλήγουμε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση στην $a > b^2$.

Πρόβλημα 4. Έστω $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ και τα πολυώνυμα $P(x)$ που έχουν μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές με $P(0) = 0$, ώστε να ισχύει $f(f(x) + P(y)) = f(x - y) + 2y$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x > y > 0$.

Λύση 1: Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $f(x) = x,\ \forall x > 0$ και $P(x) \equiv x$ αποτελεί λύση της δοθείσας συναρτησιακής εξίσωσης, την οποία εξίσωση συμβολίζουμε με $Q(x, y)$. Θα δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι και μοναδική.

Βήμα 1. Δείχνουμε ότι $f(x) \geq x, \forall x > 0$. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x_0 > 0$ με $f(x_0) < x_0$. Επιλέγουμε $y_0 > 0$ ώστε $y_0 + P(y_0) = x_0 - f(x_0) > 0$ (1). Η επιλογή αυτή είναι δυνατή από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, δεδομένου ότι η συνάρτηση/πολυώνυμο $h(y) = P(y) + y, y \geq 0$ ικανοποιεί $h(0) = 0$ και $h(y) \to \infty$ για $y \to \infty$ από τις προϋποθέσεις για τους συντελεστές του $P(x)$. Η ίδια συνθήκη για τους συντελεστές δίνει $P(y_0) \geq 0$ και άρα $y_0 < x_0$ λόγω της (1). Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε το $Q(x_0, y_0)$: $f(f(x_0) + P(y_0)) = f(x_0 - y_0) + 2y_0 \Rightarrow f(x_0 - y_0) = f(x_0 - y_0) + 2y_0 \Rightarrow y_0 = 0$ που είναι φυσικά άτοπο.

Βήμα 2. Δείχνουμε ότι $\deg(P) \leq 1$. Έστω προς άτοπο ότι $\deg(P) \geq 2$. Για $x > y > 0$ η $Q(x, y)$ σε συνδυασμό με την $f(z) \geq z, \forall z > 0$ δίνει $f(x - y) + 2y = f(f(x) + P(y)) \geq f(x) + P(y)$ οπότε $f(x - y) - f(x) \geq P(y) - 2y, \forall\ x > y > 0$. Επιλέγοντας $y = x - 1 < x$ για $x > 1$ στην ανισότητα, προκύπτει ότι η $P(x-1) - 2(x-1)$ είναι άνω φραγμένη για $x > 1$. Αυτό φυσικά δεν μπορεί να ισχύει διότι η συνάρτηση αυτή είναι μη σταθερό πολυώνυμο (βαθμού ≥ 2) με θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή. Μπορούμε πλέον να γράψουμε $P(x) \equiv cx$ όπου $c \geq 0$ μη αρνητική σταθερά από υπόθεση.

Βήμα 3. Απορρίπτουμε το ενδεχόμενο $c = 0$. Έστω προς άτοπο ότι $c = 0$, οπότε η $Q(x, y)$ μετασχηματίζεται στην $Q(x, y)$: $f(f(x)) = f(x - y) + 2y, \forall x > y > 0$. Για $x \to x + y$ παίρνουμε την $Q(x + y, y)$: $f(f(x + y)) = f(x) + 2y, \forall\ x, y > 0$. Ανταλλάζοντας τους ρόλους των x, y και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του αριστερού μέλους, λαμβάνουμε $f(x) - 2x = f(y) - 2y, \forall x, y > 0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x) - 2x, x > 0$ είναι σταθερή. Ας είναι $f(x) - 2x = d, x > 0$. Η

$Q(x,y)$ γράφεται ως $4x+3d=2(x-y)+d+2y, \forall x>y>0$ η οποία προφανώς δεν ισχύει. Γνωρίζουμε λοιπόν ότι $c>0$.

Βήμα 4. Εισάγουμε νέα μεταβλητή. Για κάθε $x>y, z>0$ είναι $f(x)+cz \geq x+cz>y$ από το **Βήμα 1.,** οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε την $Q(f(x)+cz, y)$: $f(f(f(x)+cz)+cy))=f(f(x)+cz-y)+2y, \forall x>y, z>0$ (2). Το κλειδί είναι ότι εμφανίζονται όροι των $Q(x,z), Q(x, z-\frac{y}{c})$ στα δύο μέλη. Πράγματι, από $Q(x,z)$ το αριστερό μέλος της (2) γίνεται $f(f(f(x)+cz)+cy))=f(f(x-z)+2z+cy), \forall x>y, z>0$ (3). Ακόμα, για $x>z>\max(y,cy)>0$, από $Q(x, z-\frac{y}{c})$ το δεξί μέλος της (2) γίνεται $f(f(x)+cz-y)+2y=f\left(x-z+\frac{y}{c}\right)+2z+(2-\frac{1}{c})y, \forall\, x>z>\max(y,cy)>0$ (4). Από (3), (4) η (2) γράφεται (για $x>z>\max(y,cy)>0$) ως $f(f(x-z)+2z+cy)=f\left(x-z+\frac{y}{c}\right)+2z+(2-\frac{1}{c})y, \forall x>z>\max(y,cy)>0$ (5). Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι εμφανίζεται η ποσότητα $x-z$ στα δύο μέλη: Αφού σταθεροποιήσουμε μια τριάδα (x,y,z) με $x>z>\max(y,cy)>0$, θέτουμε $x\to x+\frac{a}{2}, y\to y, z\to z+\frac{a}{2}$ στην (5), όπου $a>0$ μεταβλητό. Προκύπτει έτσι η $f(f(x-z)+a+cy)=f\left(x-z+\frac{y}{c}\right)+2z+a+\left(2-\frac{1}{c}\right)y, \forall a>0$. Αυτή η συναρτησιακή εξίσωση είναι της μορφής $f(a+k)=a+l, \forall a>0$ όπου $k,l>0$ σταθερές. Συνεπώς, έχουμε $f(a)=a+l-k=a+m$ για κάθε a αρκετά μεγάλο ($a>k$ συγκεκριμένα). Η συνέχεια είναι απλή. Σημειώνουμε ότι η φράση ''για κάθε x αρκετά μεγάλο'' μεταφράζεται μαθηματικά στη φράση ''για κάθε x σε κάποιο διάστημα της μορφής (r,∞).

Βήμα 5. Χρήση της $Q(x,y)$ για μεγάλα x. Σταθεροποιώντας κάποια τιμή του y, έχουμε $f(f(x)+cy)=f(x+m+cy)=x+2m+cy$ για κάθε αρκετά μεγάλο x. Αντίστοιχα, $f(x-y)+2y=x-y+m+2y$ για κάθε αρκετά μεγάλο x. Εξισώνοντας τα δύο μέλη της $Q(x,y)$ για αρκετά μεγάλα x βρίσκουμε $m=0, c=1$. Έτσι, $P(y)\equiv y$ και $f(x)=x$ για κάθε αρκετά μεγάλο $x>0$. Για να υπολογίσουμε το $f(z)$ για όλες τις τιμές του $z>0$, επανερχόμαστε στην $Q(x,y)$ με τα νέα δεδομένα και για αρκετά μεγάλα $x>y$. Παίρνουμε λοιπόν $f(x-y)=x-y$ για κάθε $x>y$ αρκετά μεγάλα. Παίρνοντας $x-y=z$ με x,y αρκετά μεγάλα, καταλήγουμε στην $f(x)=x, \forall x>0$ όπως θέλαμε.

Λύση 2: **(Ορέστης Λιγνός)**, με χρήση απειροστικού λογισμού) Θεωρώντας ότι έχουν πραγματοποιηθεί τα πρώτα 3 βήματα της προηγούμενης λύσης, συνεχίζουμε απορρίπτοντας το ενδεχόμενο $c\neq 1$.

Βήμα 4'. Απορρίπτουμε το ενδεχόμενο $c>1$ μελετώντας το λόγο $\frac{f(x)}{x}, x>0$. Έστω λοιπόν προς άτοπο ότι $c>1$. Όπως στο **Βήμα 2**. έχουμε $f(x-y)-f(x)\geq P(y)-2y \Leftrightarrow f(x)-f(x-y)\leq (2-c)y, \forall\, x>y>0$. Για $y\to x-1$ έχουμε $f(x)\leq f(1)+(2-c)(x-1), \forall x>0$ άρα $\frac{f(x)}{x}\leq \frac{f(1)-(2-c)}{x}+(2-c), \forall x>0$. Από το **Βήμα 1.** προκύπτει ότι $1\leq \frac{f(x)}{x}\leq \frac{f(1)-(2-c)}{x}+(2-c), \forall x>0$. Παίρνοντας όριο $x\to\infty$ λαμβάνουμε $1<2-c$ που είναι άτοπο.

Βήμα 5'. Απορρίπτουμε το ενδεχόμενο $0<c<1$ μελετώντας και πάλι το λόγο $\frac{f(x)}{x}, x>0$. Έστω προς άτοπο ότι $0<c<1$. Σε αντιστοιχία με το προηγούμενο βήμα έχουμε $f(x+y)-f(x)\leq (2-c)y, \forall x,y>0$. Χρησιμοποιούμε τη συνθήκη αυτή ως: $f(f(x+y)+cy)-f(x+y)\leq (2-c)(f(x+y)-x-(1-c)y), \forall x,y>0$, οπότε από $Q(x+y,y)$ για το αριστερό μέλος, παίρνουμε έπειτα από πράξεις την $f(x)+2y\leq (3-c)f(x+y)+(2-c)(-x-(1-c)y), \forall x,y>0$ η οποία αφού πετάξουμε τους όρους $x, f(x)>0$ δίνει $f(x+y)>\frac{y(c^2-3c+4)}{3-c}, \forall x,y>0$. Θέτοντας $z=x+y$, έχουμε $\frac{f(z)}{z}>\frac{z-x}{z}\frac{(c^2-3c+4)}{3-c}, \forall z>x>0$, οπότε για $x\to 0$ παίρνουμε ως κάτω φράγμα για τον λόγο $\frac{f(z)}{z}, z>0$ την ποσότητα $T=\frac{c^2-3c+4}{3-c}$. Το σημαντικό είναι ότι $T>1$, διότι $T>1\Leftrightarrow (c-1)^2>0$. Έτσι, καταφέραμε να βελτιώσουμε το φράγμα του **Βήματος 1.** Χρησιμοποιώντας το φράγμα αυτό στην αρχική, έχουμε: $Q(x,y): f(x)+2y=f(f(x)+cy)\geq T(Tx+cy), \forall x>y>0 \Rightarrow f(x)-T^2x\geq y(cT-2), \forall x>y>0$. Παίρνοντας $y\to 0$ βρίσκουμε ως νέο κάτω φράγμα το $\frac{f(x)}{x}\geq T^2, \forall x>0$ όπου $T^2>T>1$. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα, έχουμε $\frac{f(x)}{x}\geq T^{2^n}, \forall x>0$ όπου n οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος. Σταθεροποιώντας το x φτάνουμε στο επιθυμητό άτοπο.

Συνεπώς, πλέον η αρχική γίνεται: $Q(x,y): f(f(x)+y)=f(x-y)+2y, \forall x>y>0$. Θέτοντας $g(x)=f(x)-x, x>0$ βλέπουμε ότι $g(x)\geq 0, \forall x>0$. Στα παρακάτω χρησιμοποιούμε την $Q(x,y)$ γραμμένη συναρτήσει της g. Είναι $Q(x+y,y): g(g(x+y)+x+2y)=g(x)-g(x+y), \forall x,y>0$ (6). Προκύπτει άμεσα ότι η g είναι φθίνουσα. Θα αποδείξουμε τελικώς ότι $g\equiv 0$.

Βήμα 6'. Δείχνουμε επαγωγικά ότι $a_n g(x)\leq g(x+y)\leq b_n g(x)$ για κάθε n φυσικό και $x,y>0 (*)$, όπου η ακολουθία a_n ικανοποιεί $a_1=\frac{1}{2}$ και $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{a_n+2}$ για κάθε n φυσικό, και η ακολουθία b_n ικανοποιεί $b_1=1$ και $b_{n+1}=\frac{b_n+1}{b_n+2}$ για κάθε n φυσικό. Για $n=1$ έχουμε $g(x+y)\leq g(x), \forall x,y>0$ επειδή g φθίνουσα, οπότε πράγματι $g(x+y)\leq b_1 g(x), \forall x,y>0$. Για το άλλο φράγμα, πηγαίνουμε στην (6) και χρησιμοποιούμε το προηγούμενο φράγμα στο αριστερό μέλος: Είναι $g(x)-g(x+y)=g\Big(x+y+\big(y+g(x+y)\big)\Big)\leq b_1 g(x+y)$ οπότε $\frac{1}{2}g(x)\leq g(x+y)\Rightarrow a_1 g(x)\leq g(x+y), \forall x,y>0$.

Ας υποθέσουμε ότι $a_n g(x)\leq g(x+y)\leq b_n g(x), \forall x,y>0$ (7) για κάποιο φυσικό n.

- Είναι $a_{n+1}g(x)\leq g(x+y), \forall x,y>0$. Πράγματι, ο συνδυασμός των (6), (7) αρχικά δίνει $g(x)-g(x+y)\overset{(6)}{=}g\Big(x+y+\big(y+g(x+y)\big)\Big)\overset{(7)}{\geq} a_n g(x+y)\Rightarrow \frac{g(x)}{a_n+1}\geq g(x+y), \forall x,y>0$ (8). Έτσι, $\frac{g(x+y)}{a_n+1}\overset{(8)}{\geq} g(x+2y)\overset{g\downarrow}{\geq} g\big(x+2y+g(x+y)\big)\overset{(6)}{=}g(x)-g(x+y)\Rightarrow g(x+y)\geq \frac{a_n+1}{a_n+2}g(x)=a_{n+1}g(x),\ \forall\, x,y>0$ όπως θέλαμε.
- Είναι $g(x+y)\leq b_{n+1}g(x), \forall x,y>0$. Πράγματι, ο συνδυασμός των (6), (7) δίνει $b_n g(x+y)\overset{(7)}{\geq} g\Big(x+y+\big(y+g(x+y)\big)\Big)\overset{(6)}{=}g(x)-g(x+y)\Rightarrow g(x+y)\geq \frac{g(x)}{b_n+1}, \forall x,y>0$ (9). Έτσι, $\frac{g(x+y)}{b_n+1}\overset{(9)}{\leq} g\Big(x+y+\big(y+g(x+y)\big)\Big)\overset{(6)}{=}g(x)-g(x+y)\Rightarrow g(x+y)\leq \frac{b_n+1}{b_n+2}g(x)=b_{n+1}g(x), \forall x,y>0$ όπως θέλαμε.

Βήμα 7'. Ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=l$ όπου $l>0$ η θετική ρίζα της $x^2+x-1=0$. Ας εξετάσουμε πρώτα το όριο της a_n. Δείχνουμε ότι η a_n είναι φραγμένη. Πράγματι, $a_1=\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}=l$ και $a_n<l\Rightarrow a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n+2}<1-\frac{1}{l+2}=\frac{l+1}{l+2}=l$, οπότε επαγωγικά έπεται ότι $a_n<l$ για κάθε n φυσικό. Δείχνουμε έπειτα ότι η a_n είναι αύξουσα. Πράγματι, $a_{n+1}-a_n=\frac{1-a_n-a_n^2}{a_n+2}>0$ για κάθε n φυσικό, διότι το τριώνυμο x^2+x-1 είναι αρνητικό μεταξύ των ριζών του l^-, l και $l^-<0<a_n<l$ για κάθε n. Συνεπώς η ακολουθία a_n συγκλίνει σε θετικό πραγματικό $0<l'\leq l$ ως αύξουσα και άνω φραγμένη από l. Για να προσδιορίσουμε την τιμή του l', θεωρούμε την αναδρομική σχέση $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{a_n+2}$ και παίρνουμε όρια: $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n+2}\Rightarrow l'=\frac{l'+1}{l'+2}\Rightarrow l'^2+l'-1=0$, που λόγω $l'>0$ παίρνουμε $l'=l$. Αντίστοιχα δουλεύουμε για την b_n, η οποία άλλωστε έχει τον ίδιο αναδρομικό τύπο με την a_n. Η διαφορά είναι ότι η b_n φθίνει στην οριακή τιμή l αντί να αυξάνει.

Βήμα 8'. Δείχνουμε τέλος ότι $g\equiv 0$, δηλαδή ότι $f(x)=x, \forall x>0$. Πράγματι, σταθεροποιώντας τα $x,y>0$ στην (*) του **Βήματος 6'.** και παίρνοντας $n\to\infty$, λόγω του **Βήματος 7'.** έχουμε $l\cdot g(x)\leq g(x+y)\leq l\cdot g(x)\Rightarrow g(x+y)=lg(x)$. Αυτή η ισότητα ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος $x,y>0$. Θέτοντας $z=x+y$ έχουμε την ισοδύναμη $g(z)=lg(x), \forall z>x>0$. Έτσι, $g(3)=lg(1)$ και $g(3)=lg(2)=l^2g(1)$. Έπεται ότι $g(1)=0$ και έπειτα εύκολα $g\equiv 0$.

Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 132

Α82. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 e^{ax}, \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ισότητα

$$f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x)), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Βιετνάμ 2022]

Λύση. Ορίζουμε $\varphi(f(0)) = c$. Επειδή $\varphi(0) = 0$, θα είναι $f(f(y)) = y + c$ (1)

Από τη σχέση (1) εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και επί.

Με αντικατάσταση του y με το $f(y)$ στη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$f\left(f(f(y))\right) = f(y) + c \Rightarrow f(y + c) = f(y) + c. \qquad (2)$$

Επειδή η f είναι 1-1 και επί υπάρχει $d \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(d) = 0$. Χρησιμοποιώντας στη δεδομένη σχέση το ζεύγος $(d, y + c)$ αντί του ζεύγους (x, y) παίρνουμε:

$$f(\varphi(d) + f(y + c)) = y + c, \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Επειδή η f είναι 1-1, από τις σχέσεις (1) - (3) προκύπτει η ισότητα

$$f(y) = \varphi(d) + f(y + c) = \varphi(d) + f(y) + c, \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

από την οποία λαμβάνουμε την ισότητα $\varphi(d) + c = 0 \Rightarrow \varphi(d) = -c.$ (5)

Επιπλέον, επειδή $\varphi(x) = x^2 e^{ax} \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, έπεται ότι

$c = -\varphi(d) \leq 0$ και $\varphi(f(0)) = c \geq 0 \Rightarrow c = 0$ και $f(0) = d = 0.$ (6)

Επομένως, έχουμε $f(f(y)) = y$, οπότε θέτοντας $y = 0$ στη δεδομένη εξίσωση έχουμε

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

Επειδή $\varphi(x) = x^2 e^{ax} \geq 0$, από τη σχέση (7) έπεται ότι $f(t) \geq 0$, για κάθε $t \geq 0$.

Με αντικατάσταση του y με $f(y)$ και για $\varphi(x) = t \geq 0$ στη δεδομένη σχέση παίρνουμε

$$f(y + t) = f(y) + f(t), \text{για κάθε } y \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq 0. \qquad (8)$$

Επομένως για όλα τα ζεύγη (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$ και για $t \geq max(-y, 0)$ έχουμε:

$$f(x + y) + f(t) = f(x + y + t) = f(x) + f(y + t) = f(x) + f(y) + f(t),$$

οπότε $f(x + y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι προσθετική.

Επειδή επιπλέον έχουμε αποδείξει ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$, έπεται ότι $f(x) = kx$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Με αντικατάσταση της $f(x) = kx$ στη δεδομένη εξίσωση λαμβάνουμε

$kx^2 e^{ax} + k^2 y = y + k^2 x^2 e^{akx}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow k = 1$. Άρα έχουμε: $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ν56. Για κάθε ζεύγος θετικών ακέραιων (n, m) με $n < m$, συμβολίζουμε με $s(n, m)$ τον αριθμό των θετικών ακέραιων που περιέχονται στο κλειστό διάστημα $[n, m]$ και είναι σχετικά πρώτοι με τον m. Να προσδιορίσετε όλους τους ακεραίους $m \geq 2$ οι οποίοι ικανοποιούν και τις δύο παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\frac{s(n,m)}{m-n} \geq \frac{s(1,m)}{m}$, **για κάθε $n = 1, 2, \dots, m - 1$.** (β) **m^2 διαιρεί τον $2022^m + 1$.**

[Βιετνάμ 2022]

Λύση. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι, αν ο θετικός ακέραιος m ικανοποιεί τη συνθήκη (α), τότε αυτός έχει μόνο ένα πρώτο διαιρέτη. Υποθέτουμε ότι ο m έχει τουλάχιστον δύο πρώτους διαιρέτες. Έστω p ο μικρότερος από αυτούς και $p_1, p_2, \dots, p_k$ οι υπόλοιποι. Τότε έχουμε:

$$\frac{\varphi(m)}{m} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) < 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}.$$

Επιλέγοντας $n = p$ στη συνθήκη (α) λαμβάνουμε

$$\frac{s(p, m)}{m - p} = \frac{\varphi(m) - (p - 1)}{m - p} < \frac{\varphi(m) - \frac{\varphi(m)}{m} \cdot p}{m - p} = \frac{\varphi(m)}{m} = \frac{s(1, m)}{m}, \text{άτοπο}$$

Επομένως ο m πρέπει να έχει μόνο έναν πρώτο διαιρέτη, οπότε θα είναι της μορφής $m = p^k$, οπότε από τη συνθήκη (β) προκύπτει ότι: $2022^{p^k} + 1 \equiv 2022 + 1 \equiv 2023 \equiv 0(modp)$, οπότε $p|2023 \Rightarrow p \in \{7{,}17\}$. Αν $p = 7$, από το Λήμμα της εύρεσης του μέγιστου εκθέτη (LTE), έχουμε: $\upsilon_7\left(2022^{7^k} + 1\right) = \upsilon_7(2023) + \upsilon_7(7^k) = 1 + k \geq \upsilon_7(7^{2k}) = 2k$.

Άρα θα είναι $k = 1$ και $m = 7$. Αν $p = 17$, από το Λήμμα της εύρεσης του μέγιστου εκθέτη (LTE), έχουμε: $\upsilon_{17}\left(2022^{17^k} + 1\right) = \upsilon_{17}(2023) + \upsilon_{17}(17^k) = 2 + k \geq \upsilon_{17}(17^{2k}) = 2k$. Άρα θα είναι $k \in \{1{,}2\}$ και $m \in \{17, 289\}$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $m \in \{7, 17, 289\}$.

Γ68. Έστω ABCD εγγράψιμο τετράπλευρο τέτοιο ώστε DB = DC. Έστω M, N τα μέσα των πλευρών AB, AC και J, E, F τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC με τις πλευρές BC, CA, AB, αντίστοιχα, και I το κέντρο του. Η ευθεία MN τέμνει τις ευθείες JE, JF στα K, H, αντίστοιχα. Η ευθεία IJ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο γ του τριγώνου BIC στο σημείο G και η ευθεία DG τέμνει τον κύκλο γ στο σημείο T.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία JA περνάει από το μέσο του HK και είναι κάθετη προς την ευθεία IT.

(β) Έστω R, S οι ορθές προβολές του σημείου D πάνω στις πλευρές AB,AC, αντίστοιχα. Θεωρούμε σημεία P, Q πάνω στις ευθείες IF, IE, αντίστοιχα, έτσι ώστε οι ευθείες KP και HQ να είναι και οι δύο κάθετες προς την ευθεία MN. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες MP, NQ και RS συντρέχουν. [Βιετνάμ 2023]

Λύση. (α) Αν υποθέσουμε ότι K’ είναι το σημείο τομής των ευθειών BI και JE, τότε έχουμε:

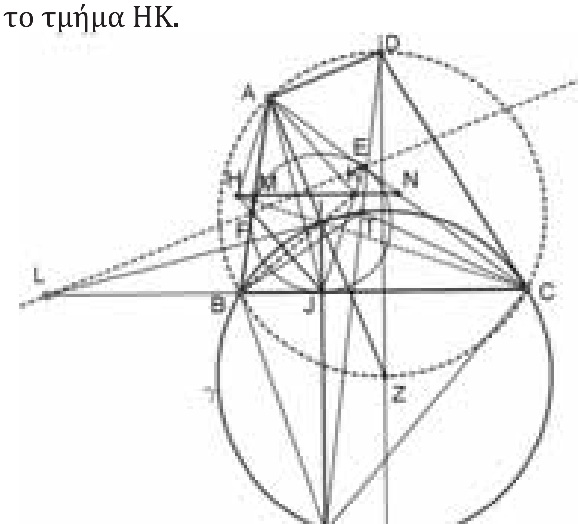
$$B\hat{I}A = 90^o + \frac{B\hat{C}A}{2} = 180^o - \left(90^o - \frac{B\hat{C}A}{2}\right) = 180^o - J\hat{E}C = A\hat{E}K'.$$

Επομένως, το τετράπλευρο AIK’ E είναι εγγράψιμο, οπότε $A\widehat{K'}I = A\hat{E}I = 90^o$. Επειδή το M είναι το μέσο της AB έπεται ότι το τρίγωνο MBK’ είναι ισοσκελές. Άρα έχουμε

$$M\widehat{K'}B = M\hat{B}K' = K'\hat{B}C \Rightarrow MK' \parallel BC,$$

οπότε τα σημεία M, N, K’ είναι συνευθειακά και επομένως $K \equiv K'$. Τότε θα είναι $A\hat{K}B = 90^o$ και $BK \perp AK$, οπότε, αφού $BK \perp JH$, προκύπτει ότι: $KA \parallel JH$.

Ομοίως, προκύπτει ότι $HA \parallel JK$, οπότε το τετράπλευρο AKJH είναι παραλληλόγραμμο και επομένως η AJ διχοτομεί το τμήμα HK.



Σχήμα 1

Υποθέτουμε ότι οι ευθείες IT και BC τέμνονται στο σημείο L. Έστω Z το μέσο του τόξου BC που δεν περιέχει το A. Τότε το Z είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BIC και $D\hat{B}Z = D\hat{C}Z = 90^o$. Επομένως οι ευθείες DB και DC είναι εφαπτόμενες του κύκλου γ. Αυτό σημαίνει ότι το τετράπλευρο BTCG είναι αρμονικό και τα σημεία B, C, J, L είναι συζυγή αρμονικά, οπότε το σημείο L βρίσκεται πάνω στην ευθεία EF. Επομένως, έχουμε $IL \perp AJ$ και $IT \perp AJ$.

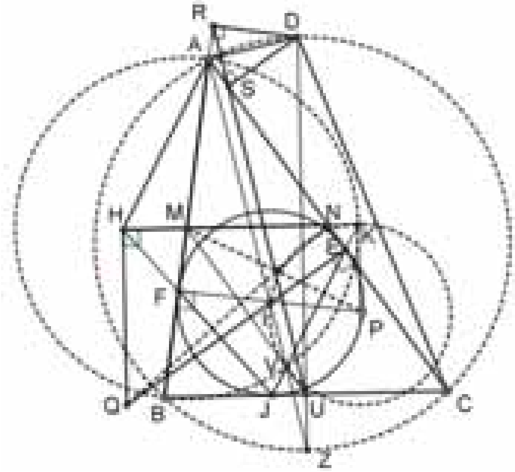
(β) Έστω το μέσο της πλευράς BC. Επειδή η ευθεία RS είναι η ευθεία Simson του τριγώνου ABC, έπεται ότι τα σημεία R, S, U είναι συνευθειακά και επιπλέον $RS \parallel AI$. Θα αποδείξουμε ότι οι ευθείες MP, NQ και RS συντρέχουν στο έγκεντρο του τριγώνου ZMN, όπου Z είναι το μέσο του τόξου BC που δεν περιέχει το A.

Είναι γνωστό ότι οι ευθείες RS, MP, NQ συντρέχουν σε ένα σημείο, έστω V, και τα σημεία B, A, K, V ανήκουν σε κύκλο διαμέτρου AB. Έχουμε: $I\hat{V}K = A\hat{B}I = \frac{A\hat{B}C}{2} = \frac{A\hat{M}N}{2} = \frac{I\hat{P}K}{2}$ (1)

Επίσης, έχουμε: $I\hat{P}K = 90^o - M\hat{K}P = 90^o - I\hat{B}C = 90^o - A\hat{B}K = B\hat{A}K = P\hat{I}K$,

οπότε συμπεραίνουμε ότι: $PI = PK$. Από την τελευταία ισότητα σε συνδυασμό με τη σχέση (1) προκύπτει ότι το σημείο P είναι το περίκεντρο του τριγώνου IVK, οπότε $PK = PV$.

Επιπλέον, έχουμε $\quad P\hat{V}M = P\hat{V}I + A\hat{V}M = I\hat{A}C + 90^o - B\hat{A}I = 90^o$.



Σχήμα 2

Έτσι έχουμε $PK = PV$ και οι ευθείες PK, PV είναι κάθετες προς τις ευθείες MN, MU, αντίστοιχα. Επομένως το σημείο P ανήκει στη διχοτόμο της $U\hat{M}N$, οπότε η MP είναι η διχοτόμος της γωνίας $U\hat{M}N$. Ομοίως προκύπτει ότι η ευθεία NQ είναι η διχοτόμος της γωνίας $U\hat{N}M$. Επειδή η ευθεία RS περνάει από το σημείοU και $RS \parallel AI$, έπεται ότι η ευθεία UR είναι η διχοτόμος της γωνίας $N\hat{U}M$. Επομένως, οι ευθείες MP, NQ και RS συντρέχουν στο έγκεντρο του τριγώνου ZMN.

Ασκήσεις για λύση

N57. Να προσδιορίσετε όλες τις γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: ο αριθμός $f(x)f(y)$ διαιρεί τον αριθμό $(1+2x)f(y) + (1+2y)f(x)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

A83. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3$.

A84. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιούν την ισότητα

$$f\big(xf(x) + f(y)\big) = f\big(f(x^2)\big) + y, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

A85. Να προσδιορίσετε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοιες ώστε

$$f(1) = e \ \text{ και } \ f(x+y) = e^{3xy} f(x) f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

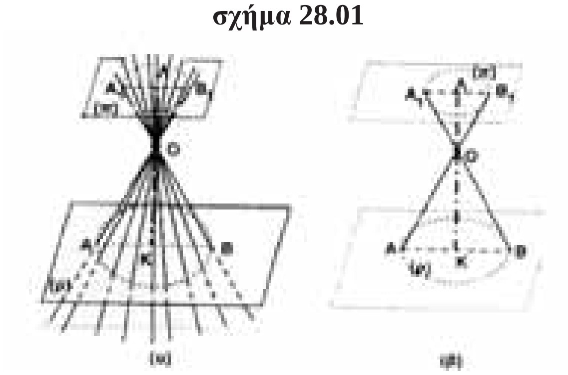
I_1 *Γεωμετρία αγάπη μου*

ΚΩΝΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ - ΚΩΝΟΣ

01 προκαταρκτικά η έννοια

28.1.1 μια επιφάνεια που γεννά κώνους. (σχ. 28.01)

σχήμα 28.01



σχήμα 28.04 (α,β)

Δίνεται κύκλος (Κ) κι ένα σημείο Ο του χώρου. Κάθε σημείο της περιφέρειας (Κ) και το σημείο Ο, ορίζουν μια ευθεία. Το σύνολο όλων αυτών των ευθειών, αποτελούν μια επιφάνεια.

28.1.2 γεννήτρια κώνων. Η επιφάνεια της προηγούμενης παραγράφου, λέγεται γεννήτρια κώνων.

28.1.3 στοιχεία της γεννήτριας κώνων. *(σχήμα 28.01)*

▪ ο δοσμένος κύκλος, ονομάζεται οδηγός της γεννήτριας,

▪ κάθε μια από τις ευθείες που αποτελούν τη γεννήτρια επιφάνεια, λέγεται γενέτειρα.

▪ το σημείο Ο ονομάζεται κορυφή της γεννήτριας,

▪ η ευθεία που ορίζεται από το κέντρο Κ της οδηγού και την κορυφή Ο, λέγεται άξονας της γεννήτριας,

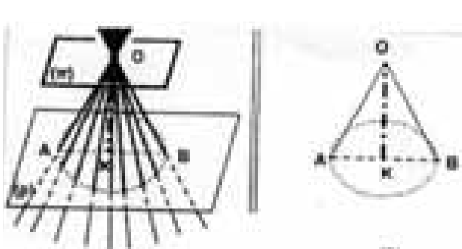
▪ μια γεννήτρια θα λέγεται ορθή, αν ο άξονάς της είναι κάθετος στο επίπεδο της οδηγού.

28.1.4 σύμβαση. Οι γεννήτριες που θα σπουδάσουμε, από 'δω και πέρα, θα είναι ορθές.

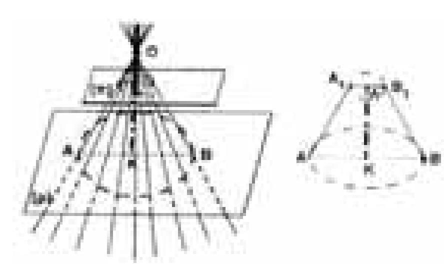
28.1.5 τι είναι ο κώνος. Δίνεται μια γεννήτρια κώνων την οποία τέμνουμε με δυο επίπεδα, παράλληλα προς την οδηγό. Το μέρος της γεννήτριας που βρίσκεται ανάμεσα από τις δυο τομές αυτές τομές καθώς και τα εσωτερικά σημεία αυτών των τομών, λέγεται κώνος.

ΕΙΔΗ ΚΩΝΩΝ

28.2.1 πλήρης κώνος. (σχήματα 28.02 α,β)



σχήμα 28.02 (α,β)



α β

σχήμα 28.03 (α,β)

Αν ένα από τα δύο επίπεδα (§28.1.3), περνά από την κορυφή Ο της γεννήτριας κώνων, τότε ο κώνος λέγεται πλήρης.

28.2.2 κόλουρος κώνος α΄ είδους. (σχήματα 28.03 α,β) Αν τα δυο επίπεδα (§28.1.3), αφήνουν την κορυφή Ο της γεννήτριας κώνων προς το ίδιο μέρος, τότε ο κώνος λέγεται κόλουρος κώνος α΄ είδους.

28.2.3 σύμβαση. Στο εξής, τον κόλουρο κώνο α΄ είδους, θα τον ονομάζουμε απλά, κόλουρο κώνο.

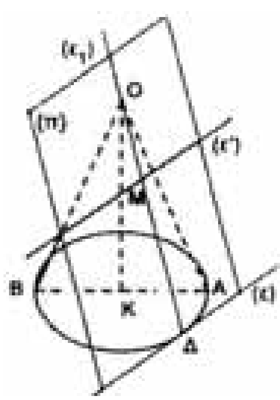
28.2.4 κόλουρος κώνος β΄ είδους. (σχήματα 28.04 α,β)

Αν τα δυο επίπεδα (§28.1.3), αφήνουν μεταξύ τους την κορυφή Ο της γεννήτριας κώνων, τότε ο κώνος λέγεται κόλουρος κώνος β΄ είδους.

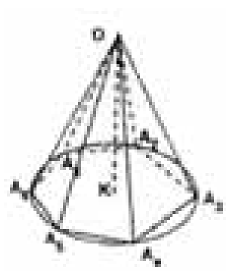
Ο ΠΛΗΡΗΣ ΚΩΝΟΣ

28.3.1 σύμβαση. Στο εξής, όταν θα λέμε κώνος, θα εννοούμε τον πλήρη κώνο, εκτός αν μπαίνει θέμα ιδιαίτερης διευκρίνησης, οπότε θα χρησιμοποιούμε τον όρο της (§28.2.1).

28.3.2 στοιχεία του κώνου. (σχήμα 28.05)



σχήμα 28.05



σχήμα 28.06

▪ η κορυφή Ο της γεννήτριας των κώνων ονομάζεται κορυφή του κώνου, με αναφορά στο σχήμα, έχουμε:

▪ ο κύκλος που έχει κέντρο το Κ, λέγεται βάση του κώνου,

▪ το ευθ. τμήμα ΟΚ , λέγεται ύψος του κώνου,

▪ η ευθεία (Ο,Κ), λέγεται άξονας του κώνου,

▪ το τρίγωνο ΟΑΒ ονομάζεται μεσημβρινή τομή του κώνου,

▪ καθένα από τα ευθ. τμήματα που έχουν σαν ένα άκρο το Ο και το άλλο άκρο τους, είναι σημείο της περιφέρειας της βάσης, θα το ονομάζουμε γενέτειρα ή πλευρά του κώνου, Λ

▪ η γωνία ΚΟΑ , ονομάζεται γενέτειρα γωνία του κώνου.

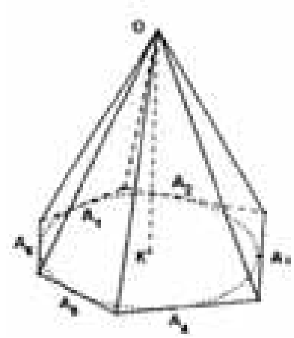
28.3.3 ισόπλευρος κώνος. Ένας κώνος του οποίου η μεσημβρινή τομή είναι ισόπλευρο τρίγωνο, θα ονομάζεται ισόπλευρος κώνος. 184

28.3.4 κώνος από περιστροφή. (σχήμα 28.05) Λ Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΒ με L K 1 = . Το τρίγωνο τούτο στρέφεται γύρω από την ΟΚ, κατά πλήρη στροφή. Τότε οι άλλες δύο πλευρές του γράφουν έναν κώνο, που τον ονομάζουμε κώνο από περιστροφή.

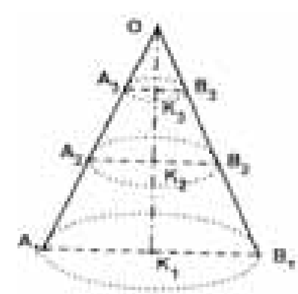
28.3.5 εφαπτόμενο επίπεδο κώνου. (σχήμα 28.05) Δίνεται κώνος κορυφής Ο και κέντρου βάσης Κ. Ας είναι Δ τυχαίο σημείο της περιφέρειας (Κ) και (ε) μια ευθεία που ανήκει στο επίπεδο της βάσης και εφάπτεται της (Κ) στο Δ. Η γενέτειρα ΟΔ και η (ε) ορίζουν ένα επίπεδο (Π). Αυτό το επίπεδο το ονομάζουμε εφαπτόμενο επίπεδο της κυρτής επιφάνειας του κώνου. Γίνεται φανερό ότι το εφαπτόμενο επίπεδο έχει με τον κώνο κοινά σημεία, μόνο κατά μήκος της γενέτειρας ΟΔ, που την ονομάζουμε γενέτειρα επαφής.

28.3.6 ευθεία εφαπτόμενη κώνου. (σχήμα 28.05) Μια ευθεία (ε’), θα λέγεται εφαπτόμενη προς την κυρτή επιφάνεια κώνου, σε σημείο Μ αυτής, αν η (ε΄) περνά από το Μ και ανήκει πάνω σ’ ένα επίπεδο (Π), που είναι εφαπτόμενο του κώνου, με γενέτειρα επαφής, που περνά από το Μ.

28.3.7 εγγραμμένη πυραμίδα σε κώνο. (σχήμα 28.06)



σχήμα 28.07



σχήμα 28.08

Μια ορθή κανονική πυραμίδα Ο.Α1Α3...Αν θα λέγεται εγγραμμένη σε δοσμένο κώνο, αν η βάση της πυραμίδας είναι ν-γωνο εγγραμμένο στη βάση αυτού του κώνου και η κορυφή της είναι κορυφή του κώνου αυτού.

28.3.8 παρατήρηση 1 Οι παράπλευρες ακμές της εγγραμμένης πυραμίδας είναι γενέτειρες του περιγραμμένου κώνου

28.3.9 περιγραμμένη πυραμίδα σε κώνο. (σχήμα 28.07) Μια ορθή κανονική πυραμίδα Ο.Α1Α3...Αν θα λέγεται περιγραμμένη σε δοσμένο κώνο, αν η βάση της είναι ν-γωνο περιγραμμένο στη βάση του κώνου και η κορυφή της είναι κορυφή του κώνου.

28.3.10 παρατήρηση 2 Οι παράπλευρες έδρες της περιγραμμένης πυραμίδας, είναι επίπεδα εφαπτόμενα προς την κυρτή επιφάνεια του κώνου.
28.3.11 εμβαδό κυρτής επιφάνειας κώνου. Εμβαδό της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι το όριο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας της εγγραμμένης σ' αυτόν ορθής κανονικής πυραμίδας, όταν ο αριθμός των πλευρών της βάσης του, αυξάνεται απεριόριστα διπλασιαζόμενος κάθε φορά.

28.3.13 εμβαδό ολικής επιφάνειας του κώνου, είναι: Eu = π·R·(R + λ)

28.3.14 όγκος κώνου. Ο όγκος κώνου είναι το όριο του όγκου του εγγραμμένου σ' αυτόν ορθής κανονικής ν-γωνικής πυραμίδας, όταν ο αριθμός των πλευρών της βάσης του, αυξάνεται απεριόριστα, διπλασιαζόμενος κάθε φορά.

Όγκος κώνου

28.3.14 όγκος κώνου είναι το όριο του όγκου του εγγραμμένου σ' αυτόν ορθής κανονικής ν-γωνικής πυραμίδας, όταν ο αριθμός των πλευρών της βάσης του, αυξάνεται απεριόριστα, διπλασιαζόμενος κάθε φορά.

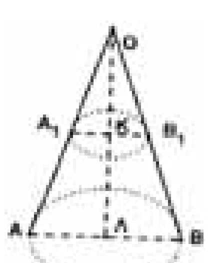
28.3.16 όμοιοι κώνοι. Δύο κώνοι λέγονται όμοιοι, αν οι μεσημβρινές τους τομές, είναι τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.

28.3.17 ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων κώνων, είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.
28.3.18 ο λόγος των όγκων δύο όμοιων κώνων είναι ίσος με τον κύβο του λόγου ομοιότητάς τους.
28.4.1 σύμβαση. Στην §28.2.3, συμφωνήσαμε τον κόλουρο κώνο α΄ είδους, να τον ονομάζουμε απλά κόλουρο κώνο. Υπενθυμίζουμε ότι όλοι οι κώνοι που σπουδάζουμε, είναι κώνοι από περιστροφή, δηλ. ορθοί κυκλικοί κώνοι.

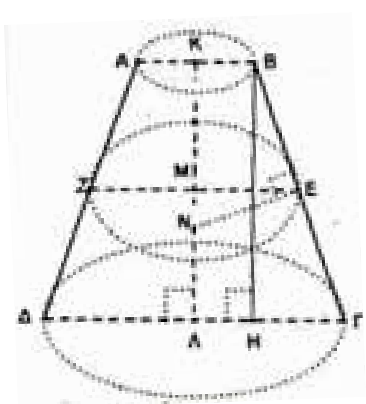
Κόλουρος κώνος

28.4.1 σημείωση. Στην §28.2.3, συμφωνήσαμε τον κόλουρο κώνο α΄ είδους, να τον ονομάζουμε απλά κόλουρο κώνο. Υπενθυμίζουμε ότι όλοι οι κώνοι που σπουδάζουμε, είναι κώνοι από περιστροφή, δηλ. ορθοί κυκλικοί κώνοι

28.4.2 στοιχεία του κόλουρου κώνου. (σχήμα 28.09)



σχήμα 28.09



σχήμα 28.10

▪ οι κύκλοι (Κ), (Λ), ονομάζονται βάσεις του κόλουρου κώνου,
▪ το ευθ. τμήμα ΚΛ λέγεται ύψος κόλουρου κώνου,
▪ η ευθεία (Κ,Λ) λέγεται άξονας κόλουρου κώνου,
▪ το ισοσκελές τραπέζιο A_1B_1BA λέγεται μεσημβρινή τομή. (δηλ., η μεσημβρινή τομή είναι μια τομή του κόλουρου κώνου με επίπεδο που περιέχει τα Κ, Λ),
▪ τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν τα άκρα τους, πάνω στις περιφέρειες των βάσεων λέγονται πλευρές του κόλουρου κώνου.

28.5.1 το εμβαδό της κυρτής επιφάνειας κόλουρου κώνου α΄ είδους, δίνεται από τον τύπο Eu = π·(R_1 + R_2)λ, όπου R_1, R_2 οι ακτίνες της μικρής και της μεγάλης βάσης και λ η πλευρά του

28.5.2 ο όγκος κόλουρου κώνου β' είδους, δίνεται από τον τύπο V = V = (π.υ)/3(R^2_1+R^2_2-R_1.R_2) όπου R_1, R_2, οι ακτίνες των βάσεών του και υ το ύψος του.

Σύγχρονες εξελίξεις στη μαθηματική επιστήμη

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ Β΄ ΜΕΡΟΣ

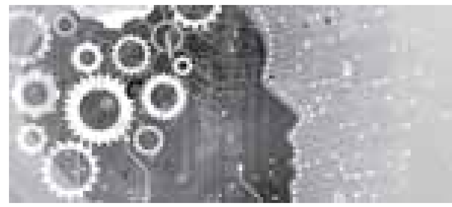
Νευρωνικά δίκτυα

σε προηγούμενα τεύχη του περιοδικού μας αναφερθήκαμε στην Τεχνητή Νοημοσύνη (ΤΝ). Σήμερα παρουσιάζουμε μια νέα προσέγγιση της ΤΝ. που στηρίζεται στα λεγόμενα "**δίκτυα Κολμογκόρωφ -**

Άρνολντ" και είναι γνωστή ως «*Νέα τεχνική ανάπτυξης ερμηνεύσιμης Τεχνητής Νοημοσύνης*». Το κείμενο δανειστήκαμε από δημοσίευση του γνωστού επιστημονικού σχολιαστή Σταύρου Ξενικουδάκη.

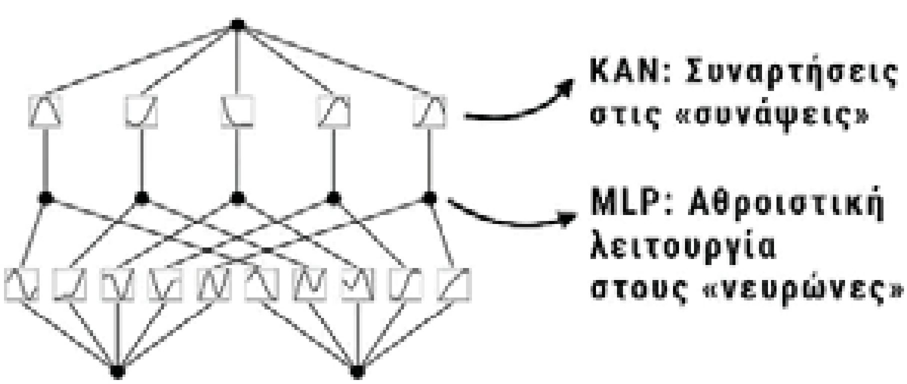
Τα Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα (ΜΓΜ), όπως το ChatGPT, το Llama, το Bard (μετέπειτα Gemini) κ.ά., πυροδότησαν μια φρενίτιδα γύρω από την Τεχνητή Νοημοσύνη (ΤΝ) και η κούρσα συνεχίζεται για την ανάπτυξη ακόμα ισχυρότερων. Ομως κάθε άλλο παρά τέλεια είναι, καθώς, πέρα από τον χρόνο και την υπολογιστική ισχύ που χρειάζονται για την εκπαίδευσή τους, είναι συνήθως ασαφές το πώς φτάνουν στα συμπεράσματά τους.

Κατά βάση, τα σημερινά μοντέλα ΤΝ είναι σαν «μαύρο κουτί». Βάζεις κάτι στην είσοδο και παίρνεις κάτι στην έξοδο, χωρίς εξήγηση. Γι' αυτό είναι δύσκολο να καταλάβεις αν το πρόγραμμα παράγει μια απάντηση που έχει νόημα, ή αν «σκαρφίζεται» μια απάντηση - **παραίσθηση**. Η βασική αρχή λειτουργίας των μοντέλων ΤΝ είναι τα νευρωνικά δίκτυα, που έχουν βασιστεί στον οπτικό φλοιό του ανθρώπινου εγκεφάλου. Τώρα, όμως, μια ομάδα ειδικών με επικεφαλής τον φυσικό Ζίμινγκ Λιου, του Ινστιτούτου Τεχνολογίας της Μασαχουσέτης (ΜΙΤ), αναπτύσσει μια νέα προσέγγιση, που υπερβαίνει τα συμβατικά νευρωνικά δίκτυα από πολλές πλευρές.



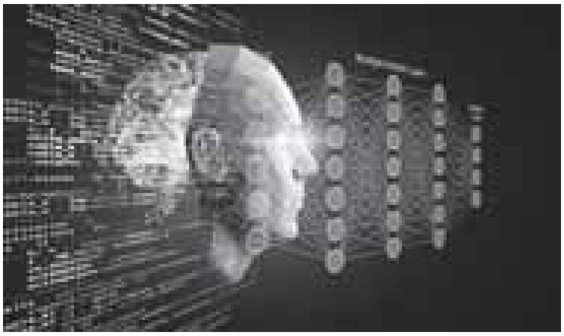
Σε επιστημονική προδημοσίευση που έκαναν τον περασμένο Απρίλη, παρουσίασαν τα δίκτυα Κολμογκόροφ - Αρνολντ (αποκαλούνται συνήθως με το αγγλικό αρκτικόλεξο KAN), τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ευρύ φάσμα προβλημάτων πολύ πιο αποτελεσματικά, αλλά και να λύσουν επιστημονικά προβλήματα καλύτερα από προηγούμενες προσεγγίσεις. Όμως το βασικό τους πλεονέκτημα είναι ότι επιτρέπουν την επεξήγηση του τρόπου με τον οποίο το KAN κατέληξε στη συγκεκριμένη απάντηση, καθώς καταλήγουν σε μαθηματικές συναρτήσεις στο εσωτερικό τους, αντί απλώς για αριθμούς που δεν βγάζουν ιδιαίτερο νόημα.

Νευρωνικά δίκτυα



Σε άλλα σημεία και με διαφορετικό τρόπο επικεντρώνουν τα δίκτυα Κολμογκόροφ - Αρνολντ συγκριτικά με τα συμβατικά νευρωνικά δίκτυα

Πέρα από τα νευρωνικά δίκτυα υπάρχουν κι άλλοι αλγόριθμοι μηχανικής μάθησης, όπως τα δέντρα αποφάσεων, η γραμμική παλινδρόμηση κ.ά. Από το 2010 και μετά, όμως, τα νευρωνικά δίκτυα έχουν κυριαρχήσει. Η δομή τους αποτελείται από πολλές υπολογιστικές μονάδες («νευρώνες») διατεταγμένες σε στρώματα, το ένα πίσω από το άλλο, και συνδέσεις («συνάψεις») μεταξύ τους. Ενα σήμα εισόδου υπόκειται διαδοχικά σε επεξεργασία σε κάθε στρώμα. Αν και η εφεύρεση των νευρωνικών δικτύων προέρχεται από τη **δεκαετία του 1950, μόνο μετά το 2010** έγιναν οι υπολογιστές αρκετά ισχυροί ώστε να μπορούν να εκτελέσουν αυτούς τους αλγορίθμους αποτελεσματικά, καθώς χρειάζονται μεγάλη ποσότητα δεδομένων για την εκπαίδευσή τους (όπως τα εικονοστοιχεία ή πίξελ μιας εικόνας), προκειμένου να παράγουν το κατάλληλο αποτέλεσμα (π.χ. μια περιγραφή του περιεχομένου της). Για την εκπαίδευσή τους οι τιμές εισόδου μεταφέρονται στους «νευρώνες» του πρώτου στρώματος. Μετά πολλαπλασιάζονται με τα βάρη (αριθμητικές τιμές) των αντίστοιχων «συνάψεων» και αν το αποτέλεσμα είναι πάνω από ένα όριο, μεταφέρεται στο επόμενο επίπεδο. Οι νευρώνες του δεύτερου επιπέδου προσαρμόζουν τις αριθμητικές τιμές των συνάψεων με το πρώτο επίπεδο, και η διαδικασία επαναλαμβάνεται στα επόμενα επίπεδα, μέχρι το τελευταίο. Κατά την εκπαίδευσή του το νευρωνικό δίκτυο προσαρμόζει τα βάρη των συνάψεων, ώστε η είσοδος να παράγει την επιθυμητή έξοδο. Τα τελευταία χρόνια οι επιστήμονες έχουν καταφέρει να ανακαλύψουν τον ελάχιστο αριθμό στρωμάτων που απαιτούνται σε ένα νευρωνικό δίκτυο ώστε αυτό να καταφέρει να προσεγγίσει με αρκετή ακρίβεια το αποτέλεσμα, ανάλογα με το είδος του προβλήματος.



Από την αφάνεια στο προσκήνιο

Υπάρχει μια μαθηματική επεξεργασία που επιτρέπει σε σύνθετα προβλήματα (συναρτήσεις πολλών μεταβλητών) να διατυπώνονται με απλούστερους όρους αντί να προσεγγίζονται, όπως κάνουν τα συμβατικά νευρωνικά δίκτυα. Η βάση της είναι ένα θεώρημα που ανέπτυξαν οι μαθηματικοί Αντρέι Κολμογκόροφ και Βλαντιμίρ Αρνολντ τη δεκαετία του 1960. Τις δεκαετίες του '80 και του '90 οι ειδικοί του τομέα είχαν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι το θεώρημα αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα νευρωνικά δίκτυα, όμως η ομάδα του Λιου στο ΜΙΤ κατάφερε να το βγάλει από την αφάνεια και να το αξιοποιήσει για να αναπτύξει KAN. Η δομή των KAN είναι παρόμοια με των συμβατικών νευρωνικών δικτύων, αλλά τα βάρη δεν έχουν κάθε στιγμή μια σταθερή αριθμητική τιμή. Αντιθέτως, τα βάρη αντιπροσωπεύονται με μια μαθηματική συνάρτηση, πράγμα που σημαίνει ότι το βάρος κάθε σύναψης εξαρτάται από την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής στον νευρώνα του προηγούμενου επιπέδου. Ετσι, κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης τα KAN δεν προσαρμόζουν τα βάρη ως απλές αριθμητικές τιμές, αλλά ως **συναρτήσεις σχετιζόμενες με κάθε σύναψη.** Οι συναρτήσεις δίνουν πολύ πιο πλούσια περιγραφή των βαρών συγκριτικά με τις αριθμητικές τιμές, καθώς μπορούν να αποτυπωθούν ως γραφικές παραστάσεις, που μεταφέρουν πολύ περισσότερη πληροφορία για το πώς επηρεάζουν **τη λειτουργία του δικτύου.** Ακριβώς επειδή τα KAN χρησιμοποιούν συναρτήσεις αντί για αριθμητικές τιμές, η εκπαίδευσή τους απαιτεί πολλαπλάσιο χρόνο. Από την άλλη, όταν καταληχτούν οι συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν απευθείας, απαιτώντας λιγότερο χρόνο και επεξεργαστική ισχύ για χρήση του εκπαιδευμένου μοντέλου.

Προϋποθέσεις

Ο Λιου και οι συνάδελφοί του σύγκριναν τα KAN με τα συμβατικά νευρωνικά δίκτυα, που ονομάζονται πολυστρωματικά perceptron (MLP). Διαπίστωσαν ότι μπορούσαν να προσεγγίσουν το σωστό αποτέλεσμα πολύ πιο γρήγορα από τα MLP αντίστοιχου μεγέθους (αριθμού και στρωμάτων νευρώνων). Εφάρμοσαν επίσης τα KAN για την επίλυση προβλημάτων στο μαθηματικό πεδίο της θεωρίας των κόμβων (τοπολογία) και κατάφεραν το ίδιο αποτέλεσμα ενός MLP που είχε χρησιμοποιήσει 300.000 παραμέτρους, χρησιμοποιώντας μόλις 200 παραμέτρους.

Μέλη της επιστημονικής κοινότητας έχουν εκφραστεί στο διαδίκτυο με ενθουσιώδη τρόπο για τα KAN και τις δυνατότητές τους, με ορισμένους να μιλούν ακόμα και για εξέλιξη που «θα τα αλλάξει όλα». Μάλιστα έχουν ήδη εμφανιστεί εργαλεία διαθέσιμα στον καθέναν για ανάπτυξη μικρών KAN σε προσωπικούς υπολογιστές. Ωστόσο η πραγματική χρησιμότητά τους θα φανεί στην πράξη, ανάλογα με τις περιπτώσεις που θα κριθούν πιο αποτελεσματικά από τα MLP. Ο δεκαπλάσιος χρόνος εκπαίδευσής τους ίσως αποτελεί το μεγαλύτερο πρόβλημα για την ευρεία υιοθέτησή τους, αν και ήδη μέσα σε δύο μήνες από την εμφάνισή τους υπάρχουν τουλάχιστον δύο τεχνικές παραλλαγές τους που προσπαθούν να τον μειώσουν. Η χρήση τους στα Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα ίσως εξαρτηθεί από το αν θα μπορέσουν να παράγουν σε λογικό χρόνο τα ίδια ή και καλύτερα αποτελέσματα με μικρότερο αριθμό παραμέτρων, σε σύγκριση με τα δισεκατομμύρια των παραμέτρων που χρησιμοποιούν το ChatGPT και τα άλλα ΜΓΜ.

Θέμα από τη θεωρία των αριθμών

Αίνιγμα των πρώτων αριθμών ταλαιπωρεί τους μαθηματικούς επί έναν αιώνα

Οι πρώτοι αριθμοί, δηλαδή οι θετικοί ακέραιοι, που διαιρούνται ακριβώς μόνο με το 1 και τον εαυτό τους (πχ. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...) παίζουν σημαντικό ρόλο στην κρυπτογραφία και σε άλλους τομείς. Πέρα από αυτές τις σύγχρονες χρήσεις, οι πρώτοι αριθμοί από την αρχαιότητα ήταν πόλος έλξης του ενδιαφέροντος των φυσικών φιλοσόφων και αργότερα των μαθηματικών, καθώς παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Ένα απ' αυτά, που συνεχίζει να αποτελεί αίνιγμα και για τους σύγχρονους μαθηματικούς που ειδικεύονται στη θεωρία αριθμών, είναι η **εικασία των δίδυμων πρώτων αριθμών.** Πρόκειται για μια εικασία που, όπως συμβαίνει συχνά στα Μαθηματικά, είναι εύκολο να την καταλάβεις αλλά εξαιρετικά δύσκολο να την αποδείξεις. Δίδυμοι πρώτοι αριθμοί είναι οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μόνο ένας άλλος αριθμός. Ο παρεμβαλλόμενος αριθμός είναι σύνθετος (όχι πρώτος), δηλαδή μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και πάντα ζυγός, αφού ο μόνος ζυγός αριθμός που είναι πρώτος είναι το 2.

Τέτοιοι δίδυμοι πρώτοι είναι το 3 και το 5, το 5 και το 7, το 17 και το 19. Μπορεί να βρει κανείς πολλούς δίδυμους στους μικρούς αριθμούς, αλλά όταν οι αριθμοί μεγαλώνουν οι δίδυμοι σπανίζουν όλο και περισσότερο. Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, καθώς οι πρώτοι αριθμοί είναι αυξανόμενα σπάνιοι μεταξύ των μεγάλων αριθμών. Ωστόσο, γνωρίζουμε από την αρχαιότητα ότι υπάρχουν **άπειροι πρώτοι αριθμοί,** και η εικασία των δίδυμων πρώτων λέει ότι υπάρχουν και άπειροι δίδυμοι πρώτοι αριθμοί.

Τάξη: Α΄

Ταυτότητες και Ανισότητες

Άγγελος Παπαδόπουλος, Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

Άσκηση 1

Έστω τα υποσύνολα $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ και $B=\{0,2,4,6,8\}$ του βασικού συνόλου $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ Να βρεθούν τα σύνολα: $(A\cup B)'$, $A'\cap B'$, $(A\cap B)'$ και $A'\cup B'$. Τι παρατηρείτε;

Λύση

$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,8\}\Rightarrow (A\cup B)'=\{7,9\}$,
$A'=\{6,7,8,9\}, B'=\{1,3,5,7,9\}\Rightarrow A'\cap B'=\{7,9\}$

Παρατηρούμε ότι:

$$(A\cup B)'=A'\cap B' \quad (1)$$

$A\cap B=\{0,2,4\}\Rightarrow (A\cap B)'=\{1,3,5,6,7,8,9\}$

$A'=\{6,7,8,9\}, B'=\{1,3,5,7,9\}$
$\Rightarrow A'\cup B'=\{1,3,5,6,7,8,9\}$

Παρατηρούμε ότι:

$$(A\cap B)'=A'\cup B' \quad (2)$$

Σημείωση:

Οι τύποι (1) και (2) αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως τύποι DE MORGAN

Άσκηση 2

Δίνονται το βασικό σύνολο:

$$\Omega=\{x\in Z \,/\, -5\le x\le 5\}$$

και τα υποσύνολά του:

$A=\{x\in\Omega \,/\, |x-2|\le 5\}$,

$B=\{x\in\Omega \,/\, (x-1)(x^2-4)(|x|-5)=0\}$

$\Gamma=\{x\in\Omega \,/\, x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$

Α) Να παρασταθούν τα παραπάνω σύνολα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους

Β) Είναι αληθείς ή ψευδείς οι παρακάτω ισχυρισμοί; α) $A\cup B=\Omega$, β) $A\cap\Gamma=\Gamma$
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Γ) Να προσδιοριστεί το σύνολο: $A-\Gamma$

Λύση

Α) $|x-2|\le 5\Leftrightarrow -5\le x-2\le 5\Leftrightarrow -3\le x\le 7$

Άρα: $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

$(x-1)(x^2-4)(|x|-5)=0\Leftrightarrow$
$x-1=0$ ή $x^2-4=0$ ή $|x|-5=0\Leftrightarrow$
$x-1=0$ ή $x^2=4$ ή $|x|=5\Leftrightarrow$
$x=1$ ή $x=2$ ή $x=-2$ ή $x=5$ ή $x=-5$

Άρα: $B=\{-5,-2,1,2,5\}$

Επίσης $\Gamma=\{-3,0,3\}$

Β) i) Είναι ψευδής διότι:
$A\cup B=\{-5,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}\ne\Omega$,
αφού $-4\notin A\cup B$

ii) Επειδή $\Gamma\subseteq A$ ισχύει: $A\cap\Gamma=\Gamma$

Γ) $\Gamma'=\{-5,-4,-2,-1,1,2,4,5\}$, οπότε:
$A-\Gamma=A\cap\Gamma'=\{-2,-1,1,2,4,5\}$

Άσκηση 3

Α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha+\beta=1$ ισχύει:

$$\alpha\beta\le\frac{1}{4}$$

Β) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha+\beta=1$ ισχύει:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\ge 9$$

Λύση

Α) $\alpha+\beta=1\Rightarrow\alpha=1-\beta$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι: $(1-\beta)\beta\le\frac{1}{4}$, αρκεί $4\beta-4\beta^2\le 1$ αρκεί $4\beta^2-4\beta+1\ge 0$ αρκεί $(2\beta-1)^2\ge 0$ που ισχύει!

Β) Αρκεί να δείξουμε ότι:
$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\ge 9$, αρκεί $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\ge 8$ αρκεί $\frac{2}{\alpha\beta}\ge 8$ αρκεί $\alpha\beta\le\frac{1}{4}$ που ισχύει από το ερώτημα Α).

Άσκηση 4

Α) Να χαρακτηρίσετε ως αληθείς ή ψευδείς τους παρακάτω ισχυρισμούς:
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

i) $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha^2>\beta^2$

ii) $\alpha^2>\beta^2 \Rightarrow \alpha>\beta$

iii) Αν $\alpha,\beta>0$ τότε: $\alpha^2>\beta^2 \Rightarrow \alpha>\beta$

Β) Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ και ισχύει $5\beta^2=4\left(\gamma^2-\alpha^2\right)$ να βρείτε ποιος από τους αριθμούς α, β, γ είναι ο μεγαλύτερος.

Λύση

Α) i) Αληθής, ii) Ψευδής, iii) Αληθής

Β) $5\beta^2=4\left(\gamma^2-\alpha^2\right) \Rightarrow \gamma^2-\alpha^2>0 \Rightarrow$

$\gamma^2>\alpha^2 \Rightarrow \gamma>\alpha \quad (1).$

Επίσης,

$5\beta^2=4\left(\gamma^2-\alpha^2\right) \Rightarrow 4\beta^2+\beta^2=4\gamma^2-4\alpha^2>0 \Rightarrow$

$\beta^2+4\alpha^2=4\gamma^2-4\beta^2 \Rightarrow 4\left(\gamma^2-\beta^2\right)>0 \Rightarrow$

$\gamma^2-\beta^2>0 \Rightarrow \gamma^2>\beta^2 \Rightarrow \gamma>\beta \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι ο γ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός.

Άσκηση 5

Για τους μη μηδενικούς αριθμούς x, y, z ισχύει :

$$|z+4|=2|z+1| \text{ και } \big||x|-|y|\big|=|x+y|$$

Α) Να αποδείξετε ότι: $|z|=2$

Β) Να βρείτε τις τιμές της παράστασης :

$$A=\frac{5x}{|x|}-\frac{|y|}{y}+|z|$$

Λύση

Α) $|z+4|=2|z+1| \Rightarrow |z+4|^2=4|z+1|^2 \Rightarrow$

$(z+4)^2=4(z+1)^2 \Rightarrow z^2+8z+16=4z^2+8z+4 \Rightarrow$

$3z^2=12 \Rightarrow |z|^2=4 \Rightarrow |z|=2$

Β) $\big||x|-|y|\big|=|x+y| \Rightarrow \big||x|-|y|\big|^2=|x+y|^2 \Rightarrow$

$(|x|-|y|)^2=(x+y)^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow |xy|=-xy \Rightarrow xy<0$

άρα x, y ετερόσημοι.
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1η) Αν $x>0$ και $y>0$ τότε $A=\frac{5x}{x}-\frac{-y}{y}+2=8$

2η) Αν $x<0$ και $y>0$ τότε $A=\frac{5x}{-x}-\frac{y}{y}+2=-4$

Άσκηση 6

Αν $\alpha>\beta$ και $|x-\alpha|>|x-\beta|$ τότε να διατάξετε τους αριθμούς x, $\frac{\alpha+\beta}{2}$, α από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

Λύση

$|x-\alpha|>|x-\beta| \Rightarrow |x-\alpha|^2>|x-\beta|^2 \Rightarrow$

$(x-\alpha)^2>(x-\beta)^2 \Rightarrow -2\alpha x+\alpha^2>-2\beta x+\beta^2 \Rightarrow$

$2x(\beta-\alpha)>\beta^2-\alpha^2 \Rightarrow$

$2x(\beta-\alpha)>(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \overset{\div \beta-\alpha<0}{\Rightarrow}$

$\frac{2x(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}<\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow 2x<\beta+\alpha \Rightarrow$

$x<\frac{\alpha+\beta}{2}.$

Επίσης, $\beta<\alpha \Rightarrow \alpha+\beta<2\alpha \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}<\alpha$

Άρα: $x<\frac{\alpha+\beta}{2}<\alpha$

Άσκηση 7

Α) Να αποδείξετε ότι: $\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=13-4\sqrt{3}$

Β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$A=\sqrt{13-4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}$

Λύση

Α) $\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=1-2\cdot2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2=$

$1-4\sqrt{3}+12=13-4\sqrt{3}$

Β) $A=\sqrt{13-4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}=$

$\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)}=$

$\left|1-2\sqrt{3}\right|-2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=$

$\left(2\sqrt{3}-1\right)-2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{9-6}=$

$2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=-1-3=-4$

Άσκηση 8

Α) Να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha-\beta|\le|\alpha|+|\beta| \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in R$$

Β) Αν $|x+1|<2$ να αποδείξετε ότι:

$$\left|x^2+3x\right|<12$$

Λύση

Α) $|\alpha-\beta|=|\alpha+(-\beta)|\le|\alpha|+|-\beta|=|\alpha|+|\beta|$

B) $|x^2+3x| = |x(x+3)| = |x|\cdot|x+3|$. Όμως,

- $|x| = |(x+1)-1| \le |x+1| + |-1| < 2+1 = 3$
- $|x+3| = |(x+1)+2| \le |x+1| + |2| < 2+2 = 4$

Άρα $|x|\cdot|x+3| < 3\cdot 4 \Rightarrow |x^2+3x| < 12$

Άσκηση 9

Να συγκρίνεται τους αριθμούς :

i) $\sqrt{3}+1$, $\sqrt{5}-1$

ii) $\sqrt{6}-3$, $\sqrt{2}-1$

iii) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$

Λύση

i) $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < \sqrt{3}+1 < 3$

$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{5}-1 < 2$

Άρα $\sqrt{5}-1 < \sqrt{3}+1$

ii) $2 < \sqrt{6} < 3 \Rightarrow -1 < \sqrt{6}-3 < 0$

$1 < \sqrt{2} < 3 \Rightarrow 0 < \sqrt{2}-1 < 2$

Άρα $\sqrt{6}-3 < \sqrt{2}-1$.

iii) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{15}}$ και $\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{3}{15}}$

Επειδή $\left(3^{\frac{5}{15}}\right)^{15} = 3^5 = 243 < \left(5^{\frac{3}{15}}\right)^{15} = 5^3 = 125$ θα ισχύει: $3^{\frac{5}{15}} = \sqrt[3]{3} > 5^{\frac{3}{15}} = \sqrt[5]{5}$

Άσκηση 10

Να βρεθεί η τιμή της διαφοράς:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

Λύση

1ος τρόπος:

$\sqrt{4+2\sqrt{3}} > \sqrt{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} > 0$

Έστω $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ (1). Έχουμε:

$(1) \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 =$

$\left(4+2\sqrt{3}\right) + \left(4-2\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$x^2 = 8 - 2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow$

$x^2 = 8 - 2\sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow x^2 = 8 - 2\sqrt{16-12} \Leftrightarrow$

$x^2 = 8 - 2\sqrt{4} \Leftrightarrow x^2 = 8-4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 2$

2ος τρόπος:

- $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = |1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}$
- $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$

Άρα: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \left(1+\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{3}-1\right) = 2$

Άσκηση 11

Αν $d(2x,6) < 4$ και $-1 < y < 3$

Α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της παράστασης

$$A = \left|x - |x|\right| - 3y + 2x - |x|$$

Β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \left|8 - |A|\right| + 2016 + |A|$$

Λύση

Α) Γνωρίζουμε ότι: $|x| \ge x \Rightarrow x - |x| \le 0$, οπότε $A = |x| - x - 3y + 2x - |x| = x - 3y$. Έχουμε:

- $d(2x,6) < 4 \Rightarrow |2x-6| < 4 \Rightarrow |x-3| < 2 \Rightarrow$
  $-2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$ (1)
- $-1 < y < 3 \Rightarrow (-3)\cdot(-1) > (-3)\cdot y > (-3)\cdot 3 \Rightarrow$
  $-9 < -3y < 3$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$1-9 < x-3y < 5+3 \Rightarrow -8 < A < 8$$

Β) Από α) έχουμε:

$$-8 < A < 8 \Rightarrow |A| < 8 \Rightarrow 8 - |A| > 0$$

Άρα:

$K = \left|8 - |A|\right| + 2016 + |A| = 8 - |A| + 2016 + |A| = 2024$

Άσκηση 12

Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες τους με ρητό παρανομαστή:

A) $A = \dfrac{5}{\sqrt[7]{5}}$

B) $B = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Λύση

A) $A = \dfrac{5}{\sqrt[7]{5}} = \dfrac{5^1}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{1-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{6}{7}} = \sqrt[7]{5^6}$

B) $B = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)} =$

$$\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4+2\sqrt{3}-5} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1} =$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)} =$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2}=$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{12-1}=$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{11}$$

Άσκηση 13

Αν $-1\le x\le 1$ και $-2\le x\le 2$, να αποδείξετε ότι για την παράσταση: $A=x\cdot y$ ισχύει: $-2\le A\le 2$

Λύση

Δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τις ανισότητες κατά μέλη για να σχηματίσουμε την παράσταση A διότι τα μέλη των ανισοτήτων δεν είναι θετικά!

Όμως,

- $-1\le x\le 1\Rightarrow |x|\le 1$ (1)
- $-2\le y\le 2\Rightarrow |y|\le 2$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$|x|\cdot|y|\le 2\Rightarrow |x\cdot y|\le 2\Rightarrow |A|\le 2\Rightarrow -2\le A\le 2$$

Άσκηση 14

Α) Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδειχθούν οι σχέσεις

i) $\left(\alpha^2+1\right)\left(\beta^2+1\right)\left(\gamma^2+1\right)\ge 8\alpha\beta\gamma$

ii) $\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)+\beta\left(\alpha^2+\gamma^2\right)+\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)\ge 6\alpha\beta\gamma$

Β) i) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση :

$$A=3\alpha\beta\gamma+\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)+\beta\left(\gamma^2+\alpha^2\right)+\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)$$

ii) Αν $\alpha+\beta+\gamma=9$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$B=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

Γ) Αν $\alpha^2+\beta^2=18$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης $\Gamma=\alpha\cdot\beta$.

Λύση

Α) Ως γνωστό ισχύει: $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β *(εφαρμογή 1ii) σελίδα 58 σχολικού βιβλίου)*

Άρα: $\alpha^2+1\ge 2\alpha$, $\beta^2+1\ge 2\beta$ και $\gamma^2+1\ge 2\gamma$

Επειδή $\alpha,\beta,\gamma>0$ πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες έχουμε:

$$\left(\alpha^2+1\right)\left(\beta^2+1\right)\left(\gamma^2+1\right)\ge 8\alpha\beta\gamma$$

Β) $\beta^2+\gamma^2\ge 2\beta\gamma\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)\ge 2\alpha\beta\gamma$

Όμοια: $\beta\left(\gamma^2+\alpha^2\right)\ge 2\alpha\beta\gamma$ και $\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)\ge 2\alpha\beta\gamma$

και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)+\beta\left(\alpha^2+\gamma^2\right)+\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)\ge 6\alpha\beta\gamma$

Β) i) $A=3\alpha\beta\gamma+\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)+\beta\left(\gamma^2+\alpha^2\right)+\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)=$

$3\alpha\beta\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2+\beta\alpha^2+\gamma\alpha^2+\gamma\beta^2=$

$\left(\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\alpha\beta\gamma\right)+\left(\alpha\beta\gamma++\gamma\beta^2+\beta\gamma^2\right)+$

$$\left(\gamma\alpha^2+\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma^2\right)=$$

$$\alpha\beta\left(\alpha+\beta+\gamma\right)+\beta\gamma\left(\alpha+\beta+\gamma\right)+\gamma\alpha\left(\alpha+\beta+\gamma\right)=$$

$$\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)$$

ii) $\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)+\beta\left(\alpha^2+\gamma^2\right)+\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)\ge 6\alpha\beta\gamma\Rightarrow$

$3\alpha\beta\gamma+\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)+\beta\left(\alpha^2+\gamma^2\right)+\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)\ge 9\alpha\beta\gamma\Rightarrow$

$\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)\ge 9\alpha\beta\gamma\Rightarrow$

$9\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)\ge 9\alpha\beta\gamma\Rightarrow$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ge\alpha\beta\gamma\overset{\div\alpha\beta\gamma>0}{\Rightarrow}$

$$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\ge\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\ge 1\Rightarrow B\ge 1$$

Επειδή για $\alpha=\beta=\gamma=3$ ισχύει $B=1$ η ελάχιστη τιμή της παράστασης B είναι η τιμή 1.

Γ) $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta\Rightarrow 2\alpha\beta\le 18\Rightarrow \alpha\beta\le 9\Rightarrow \Gamma\le 9$

Όμως $\alpha\beta=9\Leftrightarrow 2\alpha\beta=18\Leftrightarrow 2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0\Leftrightarrow\left(\alpha-\beta\right)^2=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=0\Leftrightarrow$

$\alpha=\beta$.

Για $\alpha=\beta$ έχουμε $2\alpha^2=18\Leftrightarrow\alpha^2=9\Leftrightarrow\alpha=3$ ή $\alpha=-3$

Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης Γ είναι η τιμή 9 για $\alpha=\beta=3$ ή για $\alpha=\beta=-3$

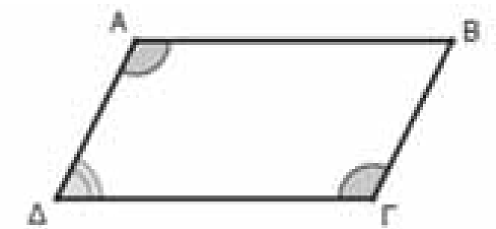
Τάξη: Α΄

Τρίγωνα και παράλληλες ευθείες

Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

ΑΣΚΗΣΗ 1. **Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ//ΓΔ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}$. Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.**

Λύση: Επειδή είναι ΑΒ//ΓΔ θα είναι και $\hat{A}+\hat{\Delta}=180^\circ$ ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και επειδή είναι $\hat{A}=\hat{\Gamma}$ θα είναι και $\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=180^\circ$.



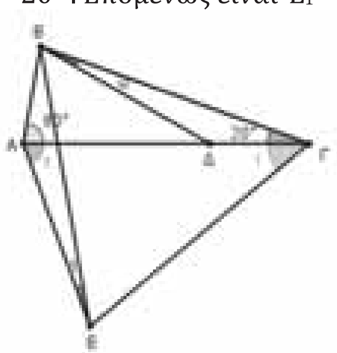
Επομένως οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την ΓΔ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

ΑΣΚΗΣΗ 2. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=80^\circ$ και $\hat{\Gamma}=20^\circ$. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΓΔ = ΑΒ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma=\omega$**

Λύση: Κατ' αρχήν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές γιατί $\hat{B}=180^\circ-\hat{A}-\hat{\Gamma}$ ή $\hat{B}=180^\circ-80^\circ-20^\circ$ ή $\hat{B}=80^\circ=\hat{A}$, οπότε είναι ΒΓ = ΑΓ (1).

Με πλευρά τη ΒΓ και προς το μέρος του Α σχηματίζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΕ. Είναι $A\hat{B}E=\hat{B}-E\hat{B}\Gamma$ = 80°– 60° = 20°.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΒ είναι ίσα γιατί έχουν ΓΔ = ΑΒ, ΒΓ = ΒΕ (2) (από υπόθεση) και $A\hat{B}E=\Delta\hat{\Gamma}B=20^\circ$. Επομένως είναι $\hat{E}_1=\Delta\hat{B}\Gamma=\omega$.

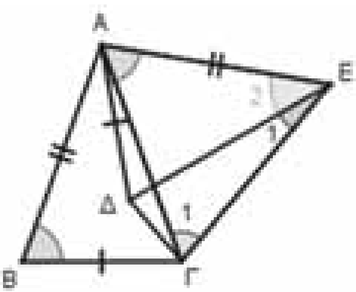


Από τις (1) και (2) έχουμε ΑΓ = ΒΕ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΓΑΕ είναι ισοσκελές με $\hat{A}_1=\hat{E}=60^\circ+\omega$ και $\hat{\Gamma}_1=60^\circ-20^\circ=40^\circ$.

Στο τρίγωνο ΓΑΕ είναι $\hat{A}_1+\hat{E}+\hat{\Gamma}_1=180^\circ$, συνεπώς έχουμε $60^\circ+\omega+60^\circ+\omega+40^\circ=180^\circ$ ή $2\omega=20^\circ$ και τελικά $\omega=10^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{A}=40^\circ$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τέτοιο, ώστε ΑΔ = ΒΓ και $\Delta\hat{A}\Gamma=10^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΑΓ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΓΔ είναι ισοσκελές και να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΓΔ.**

Λύση: Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=40^\circ$ οπότε είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-\hat{A}}{2}$ ή $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-40^\circ}{2}$ και τελικά $\hat{B}=\hat{\Gamma}=70^\circ$.



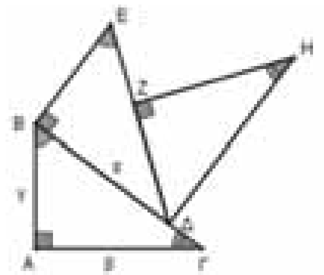
Είναι $\Delta\hat{A}E=\Delta\hat{A}\Gamma+\Gamma\hat{A}E$ = 10°+60° = 70°, άρα $\Delta\hat{A}E=\hat{B}$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα (*γιατί;*) και επομένως είναι ΔΕ = ΑΓ και $\hat{E}_2=\hat{A}=40^\circ$.

Είναι όμως ΑΓ = ΑΕ = ΕΓ οπότε ΔΕ = ΕΓ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΕΓΔ είναι ισοσκελές.

Είναι $\hat{E}_1=A\hat{E}\Gamma-\hat{E}_2=60^\circ-40^\circ=20^\circ$, συνεπώς $E\hat{\Gamma}\Delta=\dfrac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ$ (*γιατί;*).

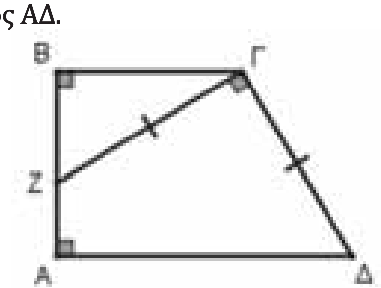
Το τρίγωνο ΑΓΔ έχει $\Delta\hat{A}\Gamma=10^\circ$ (υπόθεση) και $A\hat{\Gamma}\Delta=E\hat{\Gamma}\Delta-\hat{\Gamma}_1$ = $A\hat{\Gamma}\Delta=80^\circ-60^\circ=20^\circ$ οπότε είναι $A\hat{\Delta}\Gamma=180^\circ-10^\circ-20^\circ=150^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 4. **Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΕΔ και ΖΔΗ είναι ορθογώνια. Αν είναι ΑΒ = ΒΕ = ΔΖ, $\hat{E}=A\hat{B}\Gamma$, $\hat{H}=\hat{\Gamma}$, ΓΔ = 3cm, ΕΖ = 6cm και η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 36cm, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών α, β και γ του τριγώνου ΑΒΓ.**



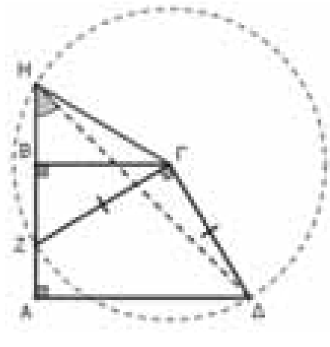
Λύση: Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΕΔ και ΖΔΗ έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και μια οξεία γωνία ίση ομοίως κείμενη ως προς την ίση πλευρά, συνεπώς τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε είναι ΑΒ = ΒΕ = ΔΖ = γ, ΑΓ = ΒΔ = ΖΗ = β και ΒΓ = ΔΕ = ΔΗ = α.
Είναι ΒΔ = ΒΓ – ΓΔ ή β = α – 3 (1) και
ΔΖ = ΔΕ – ΕΖ ή γ = α – 6 (2).
Έχουμε ότι α + β + γ = 36 οπότε λόγω των (1) και (2) είναι α + α – 3 + α – 6 = 36 ⇔ 3α – 9 = 36 ⇔ 3α = 45 ή α = 15.
Από την (1) έχουμε β = α – 3 = 15 – 3 ή β = 12 και από τη (2) έχουμε γ = α – 6 = 15 – 6 ή γ = 9.

ΑΣΚΗΣΗ 5. **Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A}=\hat{B}=\Delta\hat{\Gamma}Z=90^\circ$ και ΓΔ = ΓΖ. Αν είναι ΑΖ = 2 cm και ΖΒ = 3 cm, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ.**



Λύση: Προεκτείνουμε το ΑΒ κατά τμήμα ΒΗ = ΖΒ. Τα τρίγωνα ΒΓΖ και ΒΓΗ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με κάθετες πλευρές ίσες, άρα είναι ΓΗ = ΓΖ = ΓΔ, που σημαίνει ότι ο κύκλος με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΔ διέρχεται και από τα σημεία Ζ και Η. Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}Z$ είναι επίκεντρη και η γωνία $\Delta\hat{H}A$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΔΖ, συνεπώς είναι

$$\Delta\hat{H}A=\frac{\Delta\hat{\Gamma}Z}{2}=45^\circ.$$



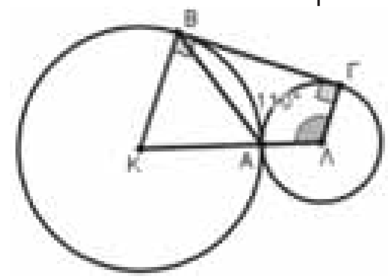
Το τρίγωνο ΑΔΗ είναι ορθογώνιο με οξεία γωνία 45°, συνεπώς είναι ισοσκελές, οπότε είναι ΑΔ=ΑΗ=ΑΖ + ΖΒ + ΒΗ=2+3+3 = 8 (cm).

ΑΣΚΗΣΗ 6. **Δύο άνισοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α και ΒΓ είναι ένα κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους. Αν είναι $A\hat{\Lambda}\Gamma=110^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}\Gamma$**

Λύση: Στο τετράπλευρο ΚΒΓΛ είναι

$\hat{K}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Lambda}=360^\circ$ ή $\hat{K}=360^\circ-\hat{B}-\hat{\Gamma}-\hat{\Lambda}$, άρα

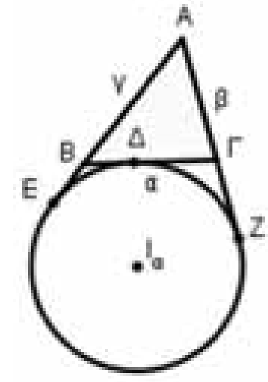
$$\hat{K}=360^\circ-90^\circ-90^\circ-110^\circ \text{ ή } \hat{K}=70^\circ.$$



Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές (*γιατί;*) άρα $K\hat{B}A=K\hat{A}B=\frac{180^\circ-70^\circ}{2}$ ή $K\hat{B}A=55^\circ$, επομένως έχουμε $A\hat{B}\Gamma=90^\circ-K\hat{B}A$ ή $A\hat{B}\Gamma=90^\circ-55^\circ$ και τελικά $A\hat{B}\Gamma=35^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 7. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο παρεγγεγραμμένος του κύκλος (I_α,ρ). Αν ο κύκλος (I_α,ρ) εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι $\Delta B=\tau-\gamma$ και $\Delta\Gamma=\tau-\beta$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση: Τα τμήματα ΑΕ και ΑΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Α προς τον κύκλο (I_α, ρ) επομένως είναι ίσα δηλαδή ΑΕ = ΑΖ (1).
Ομοίως είναι ΒΔ = ΒΕ (2) και ΓΔ = ΓΖ (3).

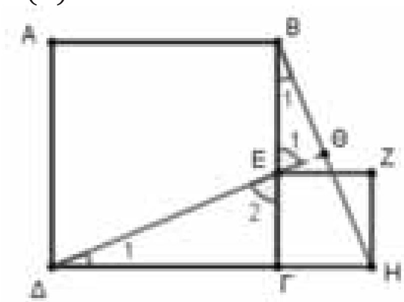


Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι
2τ = α + β + γ ή 2τ = ΒΓ + β + γ ή
2τ = ΒΔ + ΔΓ + β + γ , οπότε λόγω των (2) και (3) είναι 2τ = ΒΕ + ΓΖ + β + γ ή
2τ = ΒΕ + γ + ΓΖ + β ή 2τ = ΑΕ + ΑΖ

και λόγω της (1) έχουμε $2\tau = 2ΑΕ$ ή $ΑΕ = \tau$.
Άρα $ΒΔ = ΒΕ = ΑΕ - ΑΒ$ και τελικά $ΒΔ = \tau - \gamma$.
Ομοίως είναι $ΓΔ = ΓΖ = ΑΖ - ΑΓ$ ή $ΓΔ = \tau - \beta$.

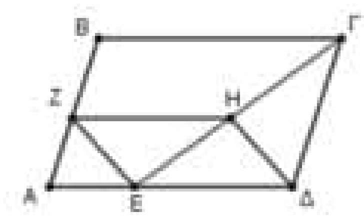
ΑΣΚΗΣΗ 8. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της πλευράς του ΒΓ. Με πλευρά ΓΕ και εξωτερικά του ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΓΕΖΗ. Να δείξετε ότι $ΔΕ \perp ΒΗ$.

Λύση: Για να δείξουμε ότι $ΔΕ \perp ΒΗ$ αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ$. Είναι $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (1) ως κατακορυφήν γωνίες. Τα τρίγωνα ΒΓΗ και ΔΓΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και έχουν $ΒΓ = ΓΔ$ και $ΓΗ = ΓΕ$, ο πότε είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ (2).



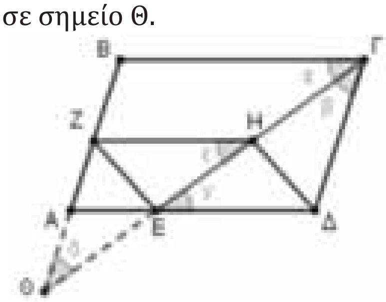
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ είναι $\hat{\Delta}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$, οπότε λόγω των (1) και (2) είναι $\hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 9. Στο παρακάτω σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμα. Παραλληλόγραμμα.



Αν είναι $ΑΖ = 12cm$, $ΖΒ = 14cm$ και η ΓΕ διχοτόμος της γωνίας Γ, τότε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

Λύση: Οι ΓΕ και ΒΑ προεκτεινόμενες τέμνονται *(γιατί;)* σε σημείο Θ.



Έχουμε $ΓΔ = ΑΒ = ΑΖ + ΖΒ = 12 + 14 = 26$ (cm).
Είναι $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ αφού ΓΕ διχοτόμος, οπότε είναι $\hat{\gamma} = \hat{\beta}$. Συνεπώς το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε

$$ΔΕ = ΓΔ = 26cm.$$

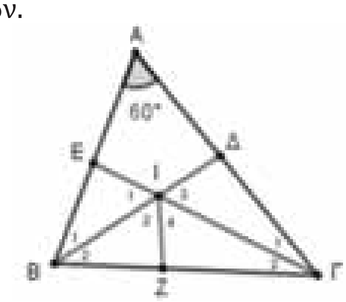
Επειδή ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο είναι

$$ΖΗ = ΔΕ = 26cm.$$

Είναι $\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma}$ και $\hat{\delta} = \hat{\beta}$ ως εντός εναλλάξ και επειδή είναι $\hat{\gamma} = \hat{\beta}$ έχουμε $\hat{\varepsilon} = \hat{\delta}$. Επομένως το τρίγωνο ΖΗΘ είναι ισοσκελές με $ΖΘ = ΖΗ = 26cm$.
Επειδή είναι $\hat{\delta} = \hat{\beta} = \hat{\alpha}$ το τρίγωνο ΒΓΘ είναι ισοσκελές με $ΒΓ = ΒΘ = ΖΘ + ΖΒ = 26 + 14 = 40$(cm).
Επομένως είναι $ΑΔ = ΒΓ = 40cm$.

ΑΣΚΗΣΗ 10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Να δείξετε ότι $ΒΓ = ΒΕ + ΓΔ$.

Λύση: Ας είναι Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων.



Πάνω στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Ζ έτσι, ώστε $ΒΖ = ΒΕ$. Αρκεί να δείξουμε ότι $ΓΖ = ΓΔ$.
Στο τρίγωνο ΒΙΓ είναι $B\hat{I}Γ = 180^\circ - \hat{B}_2 - \hat{Γ}_2 =$

$$180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{Γ}}{2} = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{Γ}}{2} = \quad 180^\circ - \frac{120^\circ}{2} \quad ή$$

$B\hat{I}Γ = 120^\circ$. Οι γωνίες $\hat{I}_1$ και $\hat{I}_3$ είναι παραπληρωματικές της $B\hat{I}Γ$ επομένως είναι

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_3 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad (1).$$

Τα τρίγωνα ΒΕΙ και ΒΖΙ είναι ίσα γιατί έχουν $ΒΕ = ΒΖ$, ΒΙ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, οπότε είναι

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 \overset{(1)}{=} 60^\circ \quad (2).$$

Συνεπώς είναι $\hat{I}_4 = 180^\circ - \hat{I}_1 - \hat{I}_2 \overset{(2)}{=} 60^\circ$ και λόγω της (1) έχουμε $\hat{I}_3 = \hat{I}_4 = 60^\circ$.
Τα τρίγωνα ΓΔΙ και ΓΖΙ είναι ίσα γιατί έχουν ΓΙ κοινή, $\hat{I}_3 = \hat{I}_4$ και $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$, οπότε είναι $ΓΖ = ΓΔ$.
Επομένως έχουμε $ΒΓ = ΒΖ + ΓΖ = ΒΕ + ΓΔ$.

ΑΣΚΗΣΗ 11. Να δείξετε ότι κάθε διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο σε σημείο που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου που σχηματίζεται από την αντίστοιχη πλευρά της διχοτόμου και το έγκεντρο του ΑΒΓ.

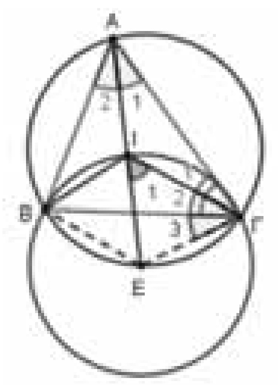
Λύση: Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Ε. Αν Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου αρκεί να δείξουμε ότι ΕΒ = ΕΓ = ΕΙ.

Τα τόξα $\overset{\frown}{ΕΒ}$ και $\overset{\frown}{ΕΓ}$ είναι ίσα *(γιατί;)* οπότε ΕΒ = ΕΓ (1). ως χορδές ίσων τόξων.

Η γωνία $\hat{Ι}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΙΑΓ οπότε είναι $\hat{Ι}_1 = \hat{Α}_1 + \hat{Γ}_1$ ή $\hat{Ι}_1 = \frac{\hat{Α}}{2} + \frac{\hat{Γ}}{2}$ (2).

Είναι $Ι\hat{Γ}Ε = \hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3$, $\hat{Γ}_2 = \frac{\hat{Γ}}{2}$ και $\hat{Γ}_3 = \hat{Α}_2 = \frac{\hat{Α}}{2}$ (ως εγγεγραμμένες στο τόξο $\overset{\frown}{ΕΒ}$) οπότε έχουμε

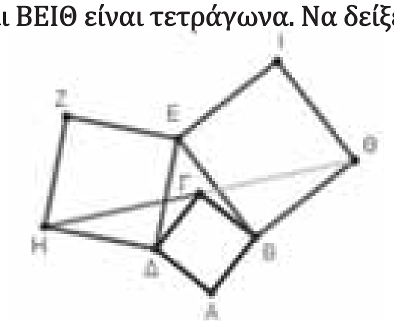
$Ι\hat{Γ}Ε = \frac{\hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{Α}}{2}$ (3).



Από τις (2) και (3) έχουμε $\hat{Ι}_1 = Ι\hat{Γ}Ε$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΕΙΓ είναι ισοσκελές, επομένως είναι ΕΙ = ΕΓ και λόγω της (1) είναι ΕΙ = ΕΓ = ΕΒ.

Άρα τα σημεία Β, Ι, Γ είναι σημεία του ίδιου κύκλου που είναι ο περιγεγραμμένος του τριγώνου ΙΒΓ.

ΑΣΚΗΣΗ 12. **Στο παρακάτω σχήμα τα ΑΒΓΔ, ΔΕΖΗ και ΒΕΙΘ είναι τετράγωνα. Να δείξετε ότι:**



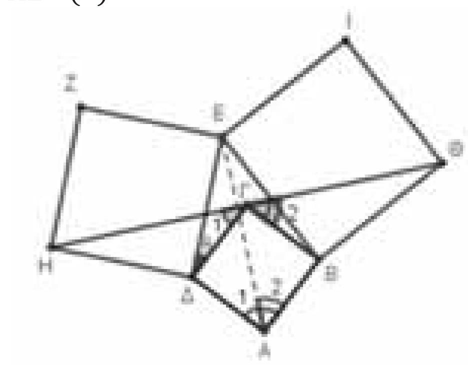
α) $ΓΗ = ΓΘ$

β) τα σημεία Η, Γ και Θ είναι συνευθειακά.

Λύση: α) Τα τρίγωνα ΓΔΗ και ΑΔΕ είναι ίσα γιατί έχουν $ΓΔ = ΑΔ$, $ΔΗ = ΔΕ$ *(γιατί;)* και $Γ\hat{Δ}Η = Α\hat{Δ}Ε = 90° + \hat{θ}$.

Συνεπώς είναι $ΓΗ = ΑΕ$ (1).

Ομοίως από την ισότητα των τριγώνων ΓΒΘ και ΑΒΕ *(δικαιολογήστε την)* προκύπτει ότι $ΓΘ = ΑΕ$ (2).



Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $ΓΗ = ΓΘ$.

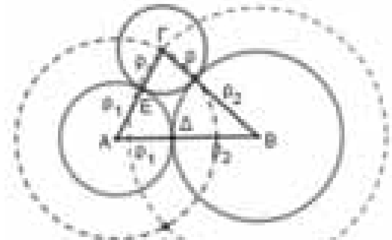
β) Από την ισότητα των τριγώνων ΓΔΗ και ΑΔΕ προκύπτει ότι $\hat{Γ}_1 = \hat{Α}_1$ και από την ισότητα των τριγώνων ΓΒΘ και ΑΒΕ προκύπτει ότι $\hat{Γ}_2 = \hat{Α}_2$.

Είναι $\hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 = \hat{Α} = 90°$ οπότε $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 90°$.

Επομένως $Η\hat{Γ}Θ = \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 + 90° = 90° + 90° = 180°$ που σημαίνει ότι τα σημεία Η, Γ και Θ είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ 13. **Δύο κύκλοι $(Α,ρ_1)$ και $(Β,ρ_2)$ εφάπτονται εξωτερικά. Να κατασκευάσετε κύκλο $(Γ,ρ)$ ο όποιος να εφάπτεται εξωτερικά στους δύο αυτούς κύκλους.**

Λύση: Επειδή οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά το τμήμα ΑΒ είναι η διάκεντρός τους. Για να κατασκευάσουμε το ζητούμενο κύκλο αρκεί να εντοπίσουμε το κέντρο του Γ αφού γνωρίζουμε την ακτίνα του. Οι κορυφές των τριών κύκλων σχηματίζουν τρίγωνο με πλευρές $ΑΒ = ρ_1 + ρ_2$, $ΑΓ = ρ_1 + ρ$ και $ΒΓ = ρ_2 + ρ$. Γράφουμε τους κύκλους $(Α, ρ_1 + ρ)$ και $(Β, ρ_2 + ρ)$ οι οποίοι τέμνονται, αφού ΑΓ + ΒΓ = $(ρ_1 + ρ) + (ρ_2 + ρ)$ = $(ρ_1 + ρ_2) + 2ρ$ = $ΑΒ + 2ρ > ΑΒ$ και $|ΑΓ - ΒΓ|$ = $|(ρ_1 - ρ) - (ρ_2 - ρ)| = |ρ_1 - ρ_2| < ρ_1 + ρ_2$ = ΑΒ, και μάλιστα τέμνονται σε δύο σημεία Γ και Γ΄ που το καθένα είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.



Πηγές: www.gogeometry.com/problem/index.html

Τάξη: Β΄

Γραμμικά Συστήματα, Συναρτήσεις και Τριγωνομετρία

Δεδότση Βασιλική - Δημήτρης Π. Μικελόπουλος - Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

Γραμμικά συστήματα

Δημήτρης Μικελόπουλος

Άσκηση 1. **Να λύσετε τα γραμμικά συστήματα**

i) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{3y+1}{7}=-2 \\ \dfrac{x+5}{3}-\dfrac{y-5}{2}=8 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{2}+1)y=-1-\sqrt{2} \end{cases}$

Λύση: **i)** Για τη πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε: $\dfrac{x-4}{2}+\dfrac{3y+1}{7}=-2 \Leftrightarrow 7(x-4)+2(3y+1)=-28$

$\Leftrightarrow 7x-28+6y+2=-2 \Leftrightarrow 7x+6y=-2$

Για τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε: $\dfrac{x+5}{3}-\dfrac{y-5}{2}=8 \Leftrightarrow 2(x+5)-3(y-5)=48$

$\Leftrightarrow 2x+10-3y+15=48 \Leftrightarrow 2x-3y=23$

Έτσι το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 7x+6y=-2 & (1) \\ 2x-3y=23 & (2) \end{cases}$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Πολλαπλασιάζουμε την (2) με 2 οπότε γίνεται

$\begin{cases} 7x+6y=-2\ (1) \\ 4x-6y=46\ (2) \end{cases}$, με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $11x=44 \Leftrightarrow x=4$. Αντικαθιστώντας στην (1) όπου $x=4$ έχουμε:

$$7\cdot 4+6y=-2 \Leftrightarrow 6y=-30 \Leftrightarrow y=-5.$$

Άρα λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(4,-5)$.

ii) Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{2}+1)y=-1-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+2y=-2 \\ (\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)y=-(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+2y=-2 \\ (\sqrt{2}-1)x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+2y=-2 & (1) \\ -(\sqrt{2}-1)x-y=1 & (2) \end{cases}$$

Από (1), (2) έχουμε: $y=-1$.

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου $y=-1$ έχουμε:

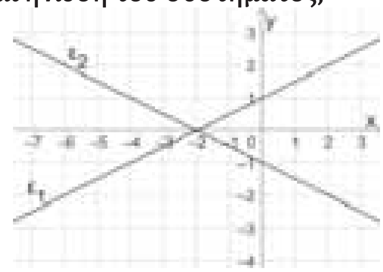
$(\sqrt{2}-1)x+2(-1)=-2 \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)x-2=-2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)x=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(0,-1)$.

Άσκηση 2. i) **Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του παρακάτω σχήματος.**

ii) **Ποιο σύστημα ορίζουν οι ε_1 και ε_2 και ποια είναι η λύση του συστήματος;**



Λύση: **i)** Έστω ότι η εξίσωση της ε_1 είναι $y=\alpha x+\beta$. Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία (-2,0) και (0,1) έχουμε:

$$\begin{cases} 0=-2\alpha+\beta \\ 1=0\alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-2\alpha+1 \\ \beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2} \\ \beta=1 \end{cases}$$

Άρα $\varepsilon_1: y=\dfrac{1}{2}x+1$.

Η ευθεία ε_2 είναι $y=\alpha x+\beta$ και διέρχεται από τα σημεία $(-2,0)$ και $(0,-1)$. Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε $\varepsilon_2: y=-\dfrac{1}{2}x-1$

ii) Οι εξισώσεις των δύο ευθειών ορίζουν το σύστημα $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+1 \\ y=-\dfrac{1}{2}x-1 \end{cases}$ του οποίου η λύση, όπως φαίνεται και από το σχήμα είναι το ζεύγος $(-2,0)$.

Άσκηση 3. **Δίνονται οι ευθείες**

$\varepsilon_1: 3x+9y=9$ **και** $\varepsilon_2: \alpha x+3y=9$, $\alpha\in R$

i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 των ε_1 και ε_2.

ii) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;

iii) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α οι ευθείες είναι παράλληλες;

Λύση: **i)** $3x+9y=9 \Leftrightarrow 9y=-3x+9 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}x+1$,

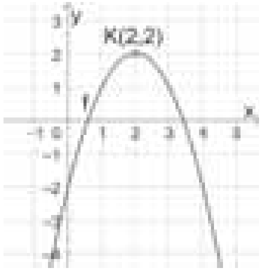
άρα $\lambda_1=-\dfrac{1}{3}$, ενώ

$\alpha x+3y=9 \Leftrightarrow 3y=-\alpha x+9 \Leftrightarrow y=-\dfrac{\alpha}{3}x+3$, άρα $\lambda_2 = -\frac{\alpha}{3}$.

ii) Για να τέμνονται οι δύο ευθείες αρκεί $\lambda_1 \neq \lambda_2$ δηλαδή $-\frac{1}{3} \neq -\frac{\alpha}{3}$, δηλαδή $\alpha \neq 1$.

iii) Για $\alpha = 1$ οι ευθείες είναι παράλληλες αφού για $\alpha = 1$ $\varepsilon_1 : y = -\frac{1}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{3}x + 3$

Άσκηση 4. **Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράστασης του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε το τριώνυμο αυτό.**



Λύση: Επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου f(x) τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο $(0,-2)$, θα ισχύει $f(0) = -2$ οπότε θα έχουμε $\gamma = -2$, επομένως το τριώνυμο θα είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x - 2$

Επειδή το τριώνυμο f(x) έχει κορυφή το σημείο $K(2,2)$ θα ισχύει

$$\begin{cases} -\frac{\beta}{2\alpha} = 2 \\ f(2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4\alpha \\ 4\alpha + 2\beta - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4\alpha \\ 4\alpha + 2\beta = 4 \end{cases}$$

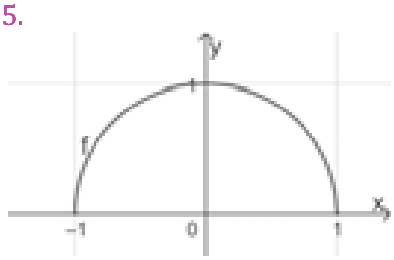
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4\alpha \\ 2\alpha - 4\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha = -1 \end{cases}.$$

Επομένως είναι $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Ιδιότητες των Συναρτήσεων

Δημήτρης Μικελόπουλος

Άσκηση 5.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ).

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-1,1)$

ii) Το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,1]$

iii) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x′x σε δύο σημεία

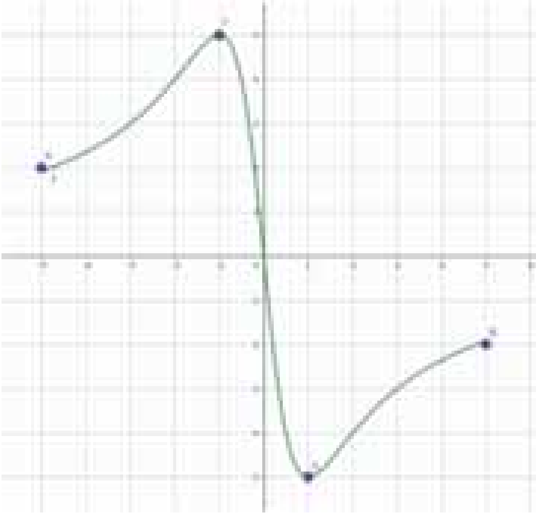
iv) Η f είναι περιττή στο πεδίο ορισμού της

v) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,0)$

vi) Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

Λύση: i) Ψ, ii) Ψ, iii) Α, iv) Ψ, v) Α, vi) Ψ

Άσκηση 6. **Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση (C_f) μιας συνάρτησης f.**



i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της f, καθώς και τις θέσεις στις οποίες παρουσιάζει τα ακρότατα.

iii) Να εξετάστε αν η C_f παρουσιάζει συμμετρία. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και την ανίσωση $f(x) > 0$

Λύση: i) Από την γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το κλειστό διάστημα $[-5,5]$ ενώ το σύνολο τιμών της είναι το κλειστό διάστημα $[-5,5]$.

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-5,-1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,5]$. Η f παρουσιάζει μέγιστο το 5 για $x = -1$ και ελάχιστο το -5 για $x = 1$.

iii) Παρατηρούμε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων οπότε είναι περιττή συνάρτηση.

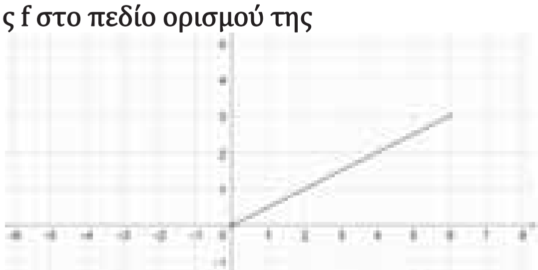
iv) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύσεις τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $x = 0$

Η ανίσωση $f(x) > 0$ έχει λύσεις τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $x\in[-5,0)$.

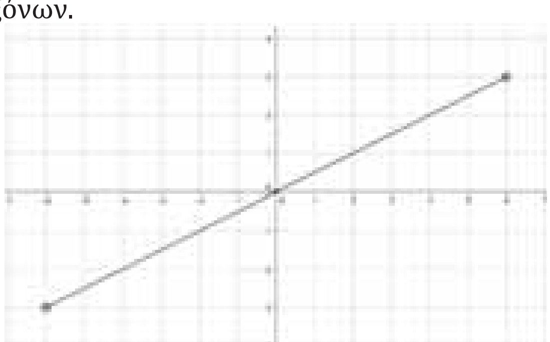
Άσκηση 7. **Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$.**

i) Να βρείτε την τιμή του α.
ii) Να βρείτε το $f(-4)$.

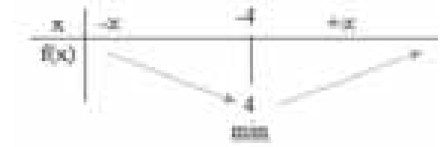
iii) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της



Λύση: **i)** Αφού η f είναι περιττή το πεδίο ορισμού της είναι διάστημα συμμετρικό ως προς το 0. Το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα (α,6). Λόγω συμμετρίας $\alpha=-6$.
ii) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(4,2)$, άρα $f(4)=2$. Όμως για κάθε $x\in(-6,6)$ ισχύει: $f(-x)=-f(x)$. Άρα $f(-4)=-f(4)=-2$.
iii) Επειδή η συνάρτηση f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, οπότε το τμήμα της γραφικής της παράστασης για $x\in(-6,0)$ θα είναι το συμμετρικό του τμήματος για $x\in(0,6)$ ως προς την αρχή των αξόνων.



Άσκηση 8. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-x^2}$**
i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
ii) Αν το σημείο $K(\lambda,2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f, να βρείτε το λ.
iii) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης f στα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$ του πεδίου ορισμού της.



Λύση: **i)** Πρέπει και αρκεί $4-x^2\geq 0$. Όμως,
$$4-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2.$$
Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $A=[-2,2]$.

ii) Το σημείο $K(\lambda,2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f, συνεπώς $f(\lambda)=2$, δηλαδή $\sqrt{4-\lambda^2}=2$, δηλαδή $4-\lambda^2=4$, δηλαδή $\lambda^2=0$, δηλαδή $\lambda=0$.

iii) • Έστω $x_1,x_2\in[-2,0]$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:
$-2\leq x_1<x_2\leq 0\Rightarrow 2\geq -x_1>-x_2\geq 0\Rightarrow$
$4\geq(-x_1)^2>(-x_2)^2\Rightarrow 4\geq {x_1}^2>{x_2}^2\Rightarrow$
$-4\leq -{x_1}^2<-{x_2}^2\Rightarrow 0\leq 4-{x_1}^2<4-{x_2}^2\Rightarrow$
$\sqrt{4-x_1^2}<\sqrt{4-x_2^2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$.

• Έστω $x_1,x_2\in[0,2]$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:
$0\leq x_1<x_2\leq 2\Rightarrow {x_1}^2<{x_2}^2\leq 4\Rightarrow$
$-{x_1}^2>-{x_2}^2\geq -4\Rightarrow 4-{x_1}^2>4-{x_2}^2\geq 0\Rightarrow$
$\sqrt{4-x_1^2}>\sqrt{4-x_2^2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

Άσκηση 10. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+8x+20$. Να βρεθούν:**
i) Η κορυφή Κ της παραβολής και ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.
ii) Τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f.
iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x.

Λύση: **i)** Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ με $\alpha=1,\beta=8,\gamma=20$.
$-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{8}{2\cdot 1}=-4$ και $f(-4)=4$. Άρα $K(-4,4)$
Ο άξονας συμμετρίας της παραβολής είναι η ευθεία $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-4$.

ii) Τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-4,+\infty)$ ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο -4 το $f(-4)=4$.

iii) Αφού η ελάχιστη τιμή της f είναι 4 από τον ορισμό προκύπτει $f(x)\geq 4>0$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον x΄x.

Άσκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{\alpha}{x}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια την τιμή του α.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,0)$ και $\Delta_2=(0,+\infty)$.

iii) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O(0,0).

iv) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Λύση: **i)** Πρέπει και αρκεί $x\neq 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

Αφού η γραφική παράσταση της, διέρχεται από το σημείο A(1,0) ισχύει $f(1)=0$ δηλαδή

$1-\frac{\alpha}{1}=0$, δηλαδή $\alpha=1$. Άρα $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

ii) • Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$.

Ισχύει: $x_1<x_2<0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow$

$x_1-\frac{1}{x_1}<x_2-\frac{1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$

• Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Ισχύει

$0<x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow$

$x_1-\frac{1}{x_1}<x_2-\frac{1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι περιττή.

Για κάθε $x\in A=\mathbb{R}-\{0\}$ και $-x\in A=\mathbb{R}-\{0\}$ και

$f(-x)=(-x)-\frac{1}{(-x)}=-x+\frac{1}{x}=-(x-\frac{1}{x})=-f(x)$

iv) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,+\infty)$ θα ισχύει:

$\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Άσκηση 12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\kappa\cdot x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού $\Delta=[-2,2]$, η οποία είναι περιττή, γνησίως μονότονη και διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$.

i) Να δείξετε ότι $f(2)=-3$ και $f(0)=0$

ii) Να βρείτε τη μονοτονία της f.

iii) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

iv) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

v) Να δείξετε ότι $|f(\alpha)+f(\beta)|\leq 6$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$.

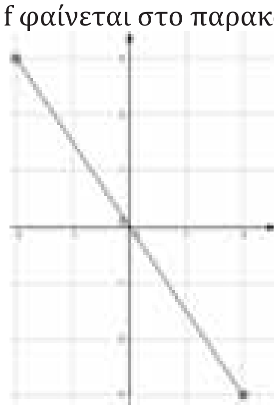
Λύση: **i)** Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-2,3)$. Η f είναι περιττή συνεπώς η γραφική παράσταση της είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων άρα διέρχεται και από το σημείο $(2,-3)$. Συνεπώς $f(2)=-3$. Επίσης $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

ii) Η f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(2,-3)$ λόγω συμμετρίας. Αν ήταν γνησίως αύξουσα θα ίσχυε: $f(-2)<f(2)$, άτοπο! γιατί $f(-2)=3>f(2)=-3$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Η f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[-2,2]$ και είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό συνεπώς έχει ελάχιστη τιμή το -3 για $x=2$ και μέγιστη τιμή το 3 για $x=-2$.

iv) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα $O(0,0)$ και $A(-2,3)$ τότε $\lambda=0$ και $\kappa=-\frac{3}{2}$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



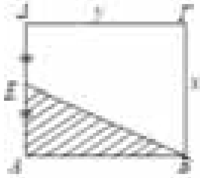
v) Από το ερώτημα iii) για την f ισχύει $-3\leq f(x)\leq 3$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

Για $\alpha,\beta\in[-2,2]$ έχουμε: $-3\leq f(\alpha)\leq 3$ και $-3\leq f(\beta)\leq 3$

Με πρόσθεση κατά μέλη

$$-6\leq f(\alpha)+f(\beta)\leq 6\Rightarrow|f(\alpha)+f(\beta)|\leq 6.$$

Άσκηση 13. **Ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου, με περίμετρο 80m χωρίζεται σε δύο χωράφια όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Ε το μέσο του ΑΔ).**



Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του οικοπέδου ώστε το χωράφι ΕΑΒ να έχει το μέγιστο εμβαδό;

Λύση: Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Η περίμετρος του ορθογωνίου χωραφιού είναι 80m. Οπότε: $2x+2y=80 \Rightarrow x+y=40 \Rightarrow y=40-x$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΕΑΒ είναι:

$$E=\frac{(EA)\cdot(AB)}{2}=\frac{\frac{x}{2}\cdot y}{2}=\frac{x\cdot y}{4}=\frac{x\cdot(40-x)}{4}=$$

$$=\frac{40x-x^2}{4}=10x-\frac{1}{4}x^2,\ x\in(0,40)$$

Το παραπάνω εμβαδόν παίρνει την μορφή

$$E(x)=10x-\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{4}\left(x^2-40x+400-400\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(x-20)^2-400\right]=-\frac{1}{4}(x-20)^2+100$$

Γνωρίζουμε ότι $(x-20)^2\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x-20)^2\leq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x-20)^2+100\leq 100 \Leftrightarrow E(x)\leq 100$$

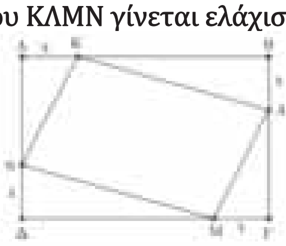
Όμως $E(x_0)=100 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x_0-20)^2+100=100$

$\Leftrightarrow (x_0-20)^2=0 \Leftrightarrow x_0=20$. Συνεπώς το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x_0=20$m και $y=40-20=20$m.

Άσκηση 14. **Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ, διαστάσεων ΑΒ=7cm και ΒΓ=5cm. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παίρνουμε τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν, αντίστοιχα ώστε, ΑΚ=ΒΛ=ΜΓ=ΔΝ=x cm.**

i) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ΚΛΜΝ συναρτήσει του *x*.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ γίνεται ελάχιστο.



Λύση i) Το εμβαδόν του ΚΛΜΝ προκύπτει αν από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΝ, ΔΝΜ, ΜΓΛ και ΒΚΛ.

Για το εμβαδόν του ΒΚΛ έχουμε ΒΛ=x και ΒΚ=7-x οπότε $(BK\Lambda)=\frac{x\cdot(7-x)}{2}$.

Για το εμβαδόν του ΜΓΛ έχουμε ΜΓ=x και ΓΛ=5−x οπότε $(M\Gamma\Lambda)=\frac{x\cdot(5-x)}{2}$.

Για το εμβαδόν του ΔΜΝ έχουμε ΔΝ=x και ΔΜ=7−x οπότε $(\Delta MN)=\frac{x\cdot(7-x)}{2}$.

Για το εμβαδόν του ΑΚΝ έχουμε ΑΚ = x και ΚΝ = 5−x , οπότε $(BK\Lambda)=\frac{x\cdot(7-x)}{2}$.

$$(K\Lambda MN)=(AB\Gamma\Delta)-(BK\Lambda)-(M\Gamma\Lambda)-(\Delta MN)-(BK\Lambda)$$

$$\Leftrightarrow (K\Lambda MN)=35-x\cdot(7-x)-x\cdot(5-x)$$

$$\Leftrightarrow (K\Lambda MN)=2x^2-12x+35 \text{ με } x\in(0,5).$$

ii) Το εμβαδόν του ΚΛΜΝ είναι συνάρτηση του x οπότε $E(x)=2x^2-12x+35$ με $x\in(0,5)$ και παίρνει τη μορφή

$$E(x)=2x^2-12x+35=2(x^2-6x+9)+17=2(x-3)^2+17.$$

Γνωρίζουμε ότι $(x-3)^2\geq 0 \Leftrightarrow 2(x-3)^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)^2+17\geq 17 \Leftrightarrow E(x)\geq 17$$

Όμως, $E(x_0)=17 \Leftrightarrow 2(x_0-3)^2+17=17$

$\Leftrightarrow (x_0-3)^2=0 \Leftrightarrow x_0=3$. Συνεπώς το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ γίνεται ελάχιστο για x=3cm.

Τριγωνομετρία

Δεδότση Βασιλική

Άσκηση 15. **i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x)=\frac{1-\varepsilon\varphi x}{-2\eta\mu^2 x-5\sigma\upsilon\nu x+4}$**

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$

Λύση: i) Πρέπει και αρκεί: $x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ (1)

και $-2\eta\mu^2x-5\sigma\upsilon\nu x+4\neq 0$ (2)

Όμως: $(2)\Leftrightarrow -2(1-\sigma\upsilon\nu^2x)-5\sigma\upsilon\nu x+4=0\Leftrightarrow$

$-2+2\sigma\upsilon\nu^2x-5\sigma\upsilon\nu x+4=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x-5\sigma\upsilon\nu x+2=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=2$ (απορρίπτεται) ή $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\ x=\lambda\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $x=\lambda\cdot 2\pi-\frac{\pi}{3}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$ (3). Από (1) και (3) έχουμε:

$$A=\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\lambda\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3},\lambda\cdot 2\pi-\frac{\pi}{3}\right\},\text{με } \kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$$

ii) Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1-\varepsilon\varphi x}{-2\eta\mu^2x-5\sigma\upsilon\nu x+4}=0\Leftrightarrow$

$1-\varepsilon\varphi x=0$ και $-2\eta\mu^2 x-5\sigma\upsilon\nu x+4\neq 0$

Όμως $1-\varepsilon\varphi x=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1$ οπότε $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ που είναι δεκτή γιατί $x\in A$.

Άσκηση 16. **Δίνεται η παράσταση:**

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)\cdot\eta\mu(5\pi-\omega)\cdot\varepsilon\varphi(\pi+\omega)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+\omega\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}$$

α. Να αποδείξετε ότι $A=-2$

β. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=(A+4)\cdot\eta\mu(-A+1)x$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο T της συνάρτησης f.

Λύση α) Έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$,
- $\eta\mu(5\pi-\omega)=\eta\mu(2\cdot2\pi+\pi-\omega)=\eta\mu(\pi-\omega)=\eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi(\pi+\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9}{4}\cdot2\pi+\omega\right)=$
  $=\sigma\upsilon\nu\left(\left(2+\frac{1}{4}\right)\cdot2\pi+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot2\pi+\frac{\pi}{2}+\omega\right)$
  $=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-\omega)\right)=\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega$
- $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$.

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$A=2\cdot\frac{-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}\cdot\eta\mu\omega\cdot\varepsilon\varphi\omega}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}\cdot\eta\mu\omega\cdot\varepsilon\varphi\omega}=-2$$

β. i) Για $A=-2$ η συνάρτηση γίνεται:

$f(x)=(-2+4)\eta\mu[-(-2)+1]x=2\eta\mu3x$

ii) Η συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$ με $\rho,\omega>0$.

Επομένως η f έχει ελάχιστη τιμή $-\rho=-2$ και μέγιστη τιμή $\rho=2$. Η περίοδος της f είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}$ και για $\omega=3$ είναι $T=\frac{2\pi}{3}$.

Άσκηση 17. **α) Να λυθεί η εξίσωση:**

$\left(\eta\mu^2x-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1\right)=0$ **στο** $(0,2\pi)$.

β) Για την μικρότερη τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα α) να λυθεί για τις διάφορες τιμές του θ η εξίσωση $\varepsilon\varphi(2\theta+x)+\sigma\varphi x=0$

Λύση: α) Έχουμε: $\left(\eta\mu^2x-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1\right)=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-2=0$ (1) ή $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1=0$ (2)

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$\eta\mu^2x-2=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\sqrt{2}$ ή $\eta\mu x=-\sqrt{2}$ οι οποίες δεν είναι δεκτές γιατί $-1\leq\eta\mu x\leq1$.

Για την εξίσωση (2) έχουμε: Η εξίσωση (2) ισοδύναμα γίνεται $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\kappa\cdot2\pi+\frac{\pi}{4}$ ή $x=\kappa\cdot2\pi-\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Όμως $x\in(0,2\pi)$ οπότε έχουμε:

- $0<x<2\pi\Rightarrow0<\kappa\cdot2\pi+\frac{\pi}{4}<2\pi\Rightarrow$

$\Rightarrow-\frac{\pi}{4}<\kappa\cdot2\pi<2\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\frac{1}{4}<2\kappa<2-\frac{1}{4}\Rightarrow$

$-\frac{1}{8}<\kappa<1-\frac{1}{8}\overset{\kappa\in Z}{\Rightarrow}\kappa=0$. Για $\kappa=0$, $x=\frac{\pi}{4}$

- $0<x<2\pi\Rightarrow0<\kappa\cdot2\pi-\frac{\pi}{4}<2\pi\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\kappa\cdot2\pi<2\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}<2\kappa<2+\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\frac{1}{8}<\kappa<1+\frac{1}{8}\overset{\kappa\in Z}{\Rightarrow}\kappa=1$ Για $\kappa=1$, $x=1\cdot2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

β) Η μικρότερη τιμή του x είναι $x=\frac{\pi}{4}$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ έχουμε: $\varepsilon\varphi(2\theta+x)+\sigma\varphi x=0\Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ (1)

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το: $R-\left\{x\in R\,/\,\sigma\upsilon\nu\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0\right\}$

$(1)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$2\theta+\frac{\pi}{4}=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow2\theta=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\theta=\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

με $\kappa\in\mathbb{Z}$. Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές αφού $\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\left(\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\right)\neq0$ για κάθε $\kappa\in Z$.

Τάξη: Β΄

Όμοια τρίγωνα και Θεώρημα Θαλή

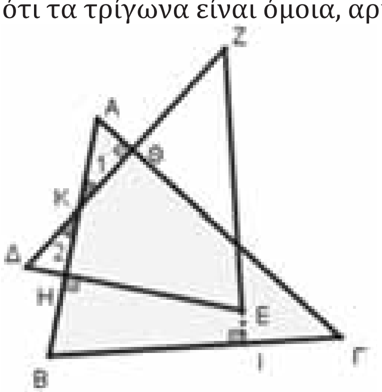
Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία, να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

Λύση

Είναι $ΔΕ \perp ΑΒ$, $ΕΖ \perp ΝΒ$ και $ΔΖ \perp ΑΓ$. Για να δείξουμε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια, αρκεί να



δείξουμε ότι έχουν δύο γωνίες μια προς μία ίσες. Τα τρίγωνα ΘΑΚ και ΗΔΚ είναι όμοια γιατί έχουν $\hat{Θ} = \hat{Κ} = 1^{\llcorner}$ και $\hat{Κ}_1 = \hat{Κ}_2$ συνεπώς έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες οπότε $\hat{Α} = \hat{Δ}$.

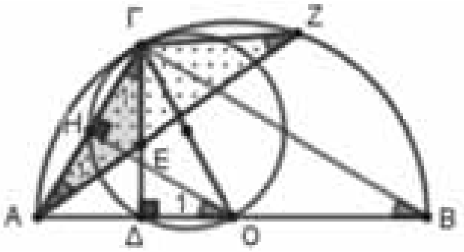
Ομοίως προκύπτει ότι $\hat{Β} = \hat{Ε}$ και $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$. Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Αν Γ είναι σημείο του ημικυκλίου γράφουμε κύκλο με διάμετρο την ΟΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και τη χορδή ΑΓ στο Η. Μια χορδή ΑΖ του ημικυκλίου τέμνει την ΓΔ σε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ = 2cm και ΕΖ = 3cm. Να βρείτε το μήκος της χορδής ΑΓ.

Λύση

Φέρνουμε τη χορδή ΒΓ του ημικυκλίου και τη χορδή ΟΗ του κύκλου. Οι γωνίες $\hat{Δ}$, $Α\hat{Γ}Β$ και $Γ\hat{Η}Ο$ είναι ορθές γιατί είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικύκλια.



Είναι ΟΗ//ΒΓ και συνεπώς $\hat{Β} = \hat{Ο}_1$ (1) *(γιατί;)*

Είναι ακόμα $\hat{Ο}_1 = \hat{Γ}_1 \left(= 90° - \hat{Α}\right)$ (2) *(γιατί;)* ,

και $\hat{Β} = \hat{Ζ}$ (3) ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο ΑΓ.

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{Ζ} = \hat{Γ}_1$. Τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΓΕ είναι όμοια, γιατί έχουν τη γωνία $\hat{Α}_1$ κοινή και $\hat{Ζ} = \hat{Γ}_1$, οπότε έχουμε

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΖ} \Leftrightarrow ΑΓ^2 = ΑΕ \cdot ΑΖ \Leftrightarrow$$

$ΑΓ^2 = ΑΕ \cdot (ΑΕ + ΕΖ)$ και τελικά

$ΑΓ^2 = 2 \cdot (2+3) = 10$ ή $ΑΓ = \sqrt{10}\ cm^2$.

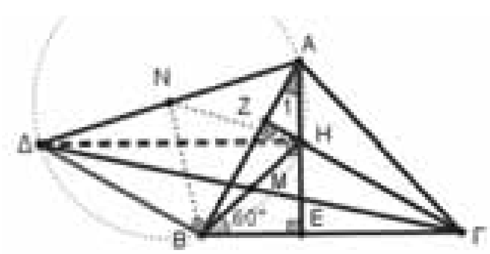
ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 60°$ και το σημείο Η της τομής ων υψών του (ορθόκεντρο). Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΒΗ, προεκτείνουμε το ΓΜ κατά τμήμα ΜΔ = ΓΜ. Να δείξετε ότι ΑΔ = 2ΗΒ.

Λύση

Το τετράπλευρο ΒΓΗΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, οπότε είναι ΔΗ//ΒΓ και επειδή $ΒΓ \perp ΑΕ$ είναι και $ΔΗ \perp ΑΕ$. Ομοίως επειδή ΒΔ//ΓΗ είναι $ΒΔ \perp ΑΒ$. Επειδή $ΒΓ \perp ΑΕ$ και $ΒΔ \perp ΑΒ$ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΗΔ είναι ορθογώνια με $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Η}Δ = 90°$ οπότε αν Ν είναι το μέσο της κοινής τους υποτείνουσας ΑΔ έχουμε ΝΑ = ΝΔ = ΝΒ = ΝΗ επομένως τα σημεία Α, Η, Β, Δ βρίσκονται στον κύκλο με διάμετρο την ΑΔ. Είναι $Η\hat{Β}Α = Η\hat{Δ}Α$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο ΑΗ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΗΒ και ΗΔΑ είναι όμοια και συνεπώς είναι

$$\frac{ΗΒ}{ΑΔ} = \frac{ΖΗ}{ΗΑ} \quad (1).$$



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΑΖ και ΒΕΑ είναι όμοια γιατί έχουν κοινή τη γωνία $\hat{A}_1$ οπότε είναι $\frac{ZH}{BE}=\frac{HA}{AB}\Leftrightarrow\frac{ZH}{HA}=\frac{BE}{AB}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{HB}{A\Delta}=\frac{BE}{AB}$ (3).

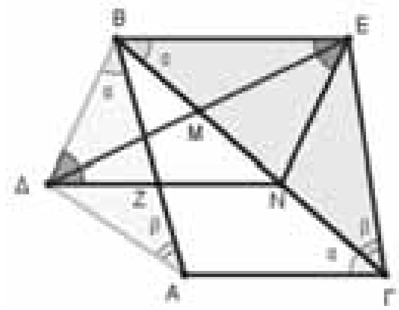
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $\hat{A}_1=30°$ *(γιατί;)* άρα είναι $BE=\frac{1}{2}AB$ ή $\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$ οπότε από την (3) έχουμε $\frac{HB}{A\Delta}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow A\Delta=2HB$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΑΒ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αν Μ είναι το σημείο τομής της πλευράς ΒΓ με το ΔΕ, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΔΕ.

Λύση

Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΕ που



τέμνει την ΑΒ στο Ζ και τη ΒΓ στο Ν. Αρκεί να δείξουμε ότι το ΒΕΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (*γιατί;*)

Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΑ είναι όμοια (*γιατί;*) οπότε είναι $\frac{B\Delta}{BE}=\frac{AB}{B\Gamma}$ (1).

Επειδή είναι ΒΕ//ΔΝ από το θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{BZ}{AB}=\frac{BN}{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{BZ}{BN}=\frac{AB}{B\Gamma}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{BZ}{BN}=\frac{B\Delta}{BE}$ (3).

Τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΒΕΝ είναι όμοια διότι, λόγω της (3), έχουν δύο πλευρές παράλληλες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Επομένως είναι $B\hat{\Delta}Z=B\hat{E}N$. Στο τετράπλευρο ΒΕΝΔ είναι $B\hat{\Delta}Z+\hat{B}=180°$ ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΕ και ΔΝ που τις τέμνει η ΒΔ και επειδή είναι $B\hat{\Delta}Z=B\hat{E}N$ έχουμε ότι $\hat{B}+B\hat{E}N=180°$ που σημαίνει ότι ΒΔ//ΕΝ διότι τεμνόμενες από την ΒΕ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

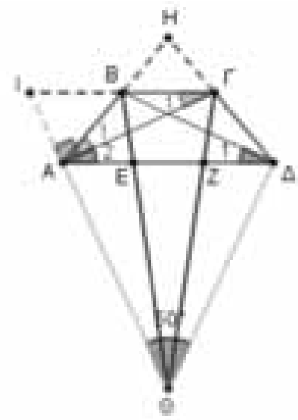
Συνεπώς το ΒΕΝΔ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται που σημαίνει ότι το Μ είναι μέσο του ΔΕ.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΔ//ΒΓ και ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ. Στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ έτσι, ώστε ΑΕ = ΕΖ = ΖΔ. Αν οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Η και ευθείες ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο σημείο Θ και είναι $A\hat{\Theta}\Delta=50°$, τότε να δείξετε ότι $\hat{H}=80°$.

Λύση

Οι ευθείες ΒΓ και ΘΑ τέμνονται στο Ι. Στο τρίγωνο ΘΒΙ είναι ΙΒ//ΑΕ , οπότε είναι $\frac{IB}{AE}=\frac{\Theta B}{\Theta E}$ (1).



Ομοίως στο τρίγωνο ΘΒΓ είναι ΕΖ//ΒΓ , οπότε είναι $\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{\Theta B}{\Theta E}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{IB}{AE}=\frac{B\Gamma}{EZ}$ και επειδή είναι ΑΕ = ΕΖ θα είναι και ΙΒ = ΒΓ, οπότε στο τρίγωνο ΑΙΓ η ΑΒ είναι διάμεσος και έχουμε $AB=B\Gamma=\frac{I\Gamma}{2}$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΙΓ είναι ορθογώνιο με $I\hat{A}\Gamma=90°$ κατά συνέπεια είναι και $\Gamma\hat{A}\Theta=90°$. Ομοίως είναι $B\hat{\Delta}\Theta=90°$.

Είναι $\Theta\hat{A}\Delta=90°-\hat{A}_2$ και $\Theta\hat{\Delta}A=90°-\hat{\Delta}_1$ και επειδή $\hat{\Delta}_1=\hat{A}_2$ *(γιατί;)* έχουμε ότι $\Theta\hat{A}\Delta=\Theta\hat{\Delta}A$ οπότε από το τρίγωνο ΘΑΔ προκύπτει ότι $\Theta\hat{A}\Delta=\Theta\hat{\Delta}A=\frac{180°-50°}{2}=\frac{130°}{2}=65°$.

Επειδή ΒΓ = ΑΒ το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές οπότε είναι $\hat{\Gamma}_1=\hat{A}_1$ αλλά είναι και $\hat{\Gamma}_1=\hat{A}_2$ ως εντός εναλλάξ, αφού ΒΓ//ΑΔ, οπότε έχουμε

$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ που σημαίνει ότι η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Είναι όμως $\widehat{A}_2=\Gamma\widehat{A}\Theta-\Delta\widehat{A}\Theta=90°-65°=25°$, οπότε έχουμε $\widehat{A}=2\widehat{A}_2=2\cdot 25°=50°$. Ομοίως είναι $\widehat{\Delta}=50°$.

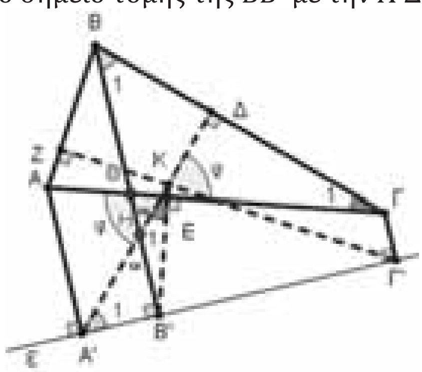
Συνεπώς στο τρίγωνο ΗΑΔ είναι $\widehat{H}=180°-\widehat{A}-\widehat{\Delta}=180-50°-50°$ ή $\widehat{H}=80°$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία (ε) που δεν τέμνει οποιαδήποτε από τις πλευρές του. Από τις κορυφές Α, Β και Γ του τριγώνου φέρνουμε τις ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ κάθετες προς την ευθεία (ε). Από τα σημεία Α΄, Β΄ και Γ΄ φέρνουμε Α΄Δ⊥ΒΓ, Β΄Ε⊥ΑΓ και Γ΄Ζ⊥ΑΒ. Να δείξετε ότι οι ευθείες Α΄Δ, ΒΕ και Γ΄Ζ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Οι Α΄Δ και Γ΄Ζ, ως κάθετες σε τεμνόμενες ευθείες, τέμνονται σε σημείο Κ. Ομοίως και οι Β΄Ε και Γ΄Ζ τέμνονται σε σημείο Λ. Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία Κ και Λ συμπίπτουν. Ας είναι Θ είναι το σημείο τομής της ΒΒ΄ με την ΑΓ και Η το σημείο τομής της ΒΒ΄ με την Α΄Δ.



Τα τρίγωνα ΒΘΓ και Α΄Β΄Κ είναι όμοια γιατί έχουν $\widehat{A'}_1=\widehat{B}_1=90-\omega$ (*γιατί;*) και $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{K}_1=90-\varphi$, όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι ΑΓ και Α΄Δ. Συνεπώς έχουμε:

$\dfrac{\Gamma\Theta}{B'K}=\dfrac{B\Theta}{A'B'}$ (1).

Ομοίως επειδή οι ΒΕ και Α΄Δ τέμνονται στο Λ από την ομοιότητα τριγώνων ΑΘΒ και Β΄Γ΄Λ έχουμε $\dfrac{B'\Lambda}{A\Theta}=\dfrac{B'\Gamma'}{B\Theta}$ (2).

Από τις (1) και (2) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $\dfrac{\Gamma\Theta}{B'K}\cdot\dfrac{B'\Lambda}{A\Theta}=\dfrac{B\Theta}{A'B'}\cdot\dfrac{B'\Gamma'}{B\Theta}\Leftrightarrow$

$\dfrac{\Gamma\Theta}{A\Theta}\cdot\dfrac{B'\Lambda}{B'K}=\dfrac{B'\Gamma'}{A'B'}$ (3).

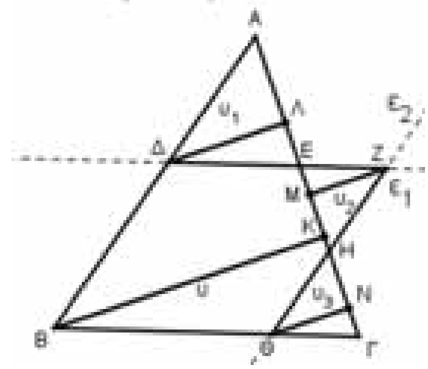
Επειδή είναι ΑΑ΄//ΒΒ΄//ΓΓ΄ έχουμε $\dfrac{\Gamma\Theta}{A\Theta}=\dfrac{B'\Gamma'}{A'B'}$ οπότε από την (3) προκύπτει $\dfrac{B'\Lambda}{B'K}=1$ ή ισοδύναμα Β΄Κ = Β΄Λ από την οποία λόγω της μοναδικότητας της καθέτου από το Β΄ προς την ΑΓ προκύπτει ότι το Κ συμπίπτει με το Λ.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά του ΑΒ. Από το Δ γράφουμε ευθεία ε_1//ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Πάνω στην ε_1 παίρνουμε τυχαίο σημείο Ζ και από αυτό φέρνουμε ευθεία ε_2//ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Θ. Αν υ, υ_1, υ_2, υ_3 είναι τα ύψη από τις κορυφές Β, Δ, Ζ, Θ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ, ΕΖΗ και ΗΘΓ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι $\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3$.

Λύση

Επειδή ΔΕ//ΒΓ είναι $\hat{B}=A\hat{\Delta}E$ (*γιατί;*). Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια αφού έχουν τη γωνία Α κοινή και τη $\hat{B}=A\hat{\Delta}E$.



Όμοια είναι επίσης και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΗ καθώς και τα ΑΒΓ και ΗΘΓ (*γιατί;*). Συνεπώς καθένα από τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΕΖΗ και ΗΘΓ είναι όμοια με το ΑΒΓ. Στα όμοια τρίγωνα ο λόγος δύο ομολόγων (γραμμικών) στοιχείων τους ισούται με το λόγο της ομοιότητάς τους.

Από την ομοιότητα των ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουμε: $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon}=\dfrac{AE}{A\Gamma}$ (1). Από την ομοιότητα των ΑΒΓ και ΕΖΗ έχουμε: $\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon}=\dfrac{EH}{A\Gamma}$ (2).

Από την ομοιότητα των ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουμε: $\dfrac{\upsilon_3}{\upsilon}=\dfrac{H\Gamma}{A\Gamma}$ (3).

Οι (1), (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon}+\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon}+\dfrac{\upsilon_3}{\upsilon}=\dfrac{AE}{A\Gamma}+\dfrac{EH}{A\Gamma}+\dfrac{H\Gamma}{A\Gamma}\Leftrightarrow$

$$\frac{\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3}{\upsilon}=\frac{AE+EH+H\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

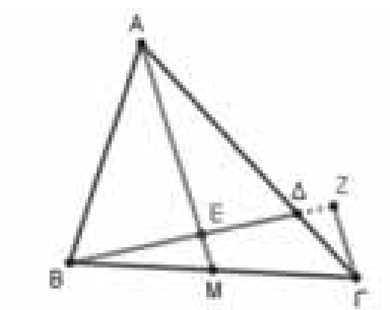
$$\frac{\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3}{\upsilon}=\frac{A\Gamma}{A\Gamma}=1 \Leftrightarrow \upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$ φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Αν Δ είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε ΑΔ = ΑΒ και το ΒΔ τέμνει την ΑΜ στο Ε, να δείξετε ότι $\frac{EB}{\Delta E}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

Λύση

Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΔ στο σημείο Ζ. Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{EB}{EZ}=\frac{MB}{M\Gamma}$ και επειδή το Μ είναι μέσο της ΒΓ είναι $\frac{MB}{M\Gamma}=1$, οπότε $\frac{EB}{EZ}=1$ ή ΕΒ = ΕΖ.



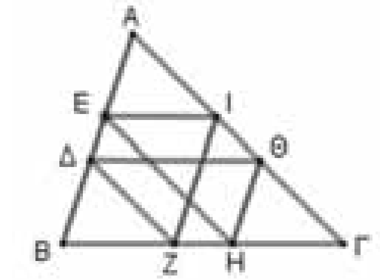
Επίσης από το Θεώρημα του Θαλή είναι $\frac{\Delta Z}{\Delta E}=\frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}$ και επειδή είναι ΔΖ = ΕΖ – ΔΕ και ΓΔ = ΑΓ – ΑΔ έχουμε $\frac{EZ-\Delta E}{\Delta E}=\frac{A\Gamma-A\Delta}{A\Delta}$ ή ισοδύναμα $\frac{(EZ-\Delta E)+\Delta E}{\Delta E}=\frac{(A\Gamma-A\Delta)+A\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow$ $\frac{EZ}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{A\Delta}$ και επειδή είναι ΑΔ = ΑΒ και ΕΒ = ΕΖ, έχουμε $\frac{EB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{AB}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και δύο σημεία Δ και Ε της πλευράς ΑΒ. Από τα Δ και Ε φέρνουμε παράλληλες προς την ΑΓ που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Ζ και Η αντιστοίχως και από τα Ζ και Η παράλληλες προς την πλευρά ΑΒ που τέμνουν ην πλευρά ΑΓ στα σημεία Ι και Θ αντιστοίχως. Αν είναι ΕΙ//ΒΓ τότε να δείξετε ότι είναι ΔΘ//ΒΓ.

Λύση

Αφού είναι ΕΙ//ΒΓ για να δείξουμε ότι ΔΘ//ΒΓ,



αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{AE}{E\Delta}=\frac{AI}{I\Theta}$. Είναι ΖΙ // ΑΒ οπότε από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε

$\frac{AI}{A\Gamma}=\frac{BZ}{B\Gamma}$ (1).

Ομοίως επειδή ΔΖ // ΑΓ έχουμε

$\frac{BZ}{B\Gamma}=\frac{B\Delta}{AB}$ (2)

και επειδή ΕΙ // ΒΓ έχουμε $\frac{AI}{A\Gamma}=\frac{AE}{AB}$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΑΕ = ΒΔ.

Επειδή ΔΖ // ΕΗ είναι $\frac{B\Delta}{E\Delta}=\frac{BZ}{HZ}$ και επειδή ΖΙ // ΗΘ είναι $\frac{BZ}{HZ}=\frac{AI}{I\Theta}$ οπότε $\frac{B\Delta}{E\Delta}=\frac{AI}{I\Theta}$ και επειδή ΒΔ = ΑΕ έχουμε $\frac{AE}{E\Delta}=\frac{AI}{I\Theta}$.

Άλλος τρόπος:

Επειδή ΑΕ // ΗΘ και ΑΘ // ΕΗ το ΑΕΗΘ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΕΙ = ΗΓ (4).

Επειδή ΕΙ // ΒΖ και ΙΖ // ΕΒ το ΒΕΙΖ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΕΙ = ΒΖ (5).

Από τις (4) και (5) έχουμε ΒΖ = ΗΓ.

Τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΗΘΓ είναι ίσα γιατί έχουν ΒΖ = ΗΓ, $\hat{B}=\hat{H}$ και $\hat{Z}=\hat{\Gamma}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη αφού ΑΒ//ΗΘ και ΑΓ//ΔΖ), επομένως είναι ΒΔ = ΗΘ και επειδή είναι ΒΔ // ΗΘ το ΒΔΘΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΔΘ // ΒΓ.

Πηγές:

https://www.gogeometry.com/problem/index.html

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις στα διανύσματα

Σπύρος Γιαννακόπουλος - Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

Ο **Διανυσματικός Λογισμός** είναι μια Μαθηματική θεωρία, με βάση την έννοια του διανύσματος, η εξέλιξη της οποίας έχει δεχτεί σημαντικές επιδράσεις από τη **Φυσική**. Η Αναλυτική Γεωμετρία είναι μια αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας. Στο παρακάτω άρθρο θα διαπραγματευθούμε θέματα από το **εσωτερικό γινόμενο** διανυσμάτων.

Θέμα 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Σ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\Sigma A}+3\overrightarrow{\Sigma B}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (1).

α. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο Τ στο ΑΒ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{T\Sigma}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. Για ένα μεταβλητό σημείο Μ του επιπέδου ισχύει: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Sigma}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{BM}=$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ (2).

i. Να βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν τα σημεία Μ που ικανοποιούν την σχέση (2).

ii. Να προσδιορίσετε εκείνο το σημείο Μ της παραπάνω γραμμής, για το οποίο επιπλέον ισχύει: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}$.

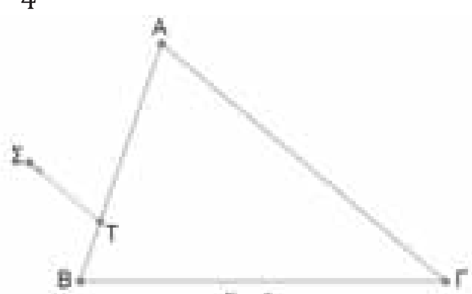
Απάντηση

α. $(1)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Sigma A}+3\left(\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow$

$4\overrightarrow{\Sigma A}+3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (3). Στην πλευρά ΑΒ επιλέγουμε σημείο Τ τέτοιο ώστε $4\overrightarrow{AT}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AT}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

$(3)\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{AT}\right)=\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Sigma T}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{T\Sigma}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$ (Σχ. 1).



Σχ.1

β. i. Για το σημείο Τ του ερωτήματος α. έχουμε:

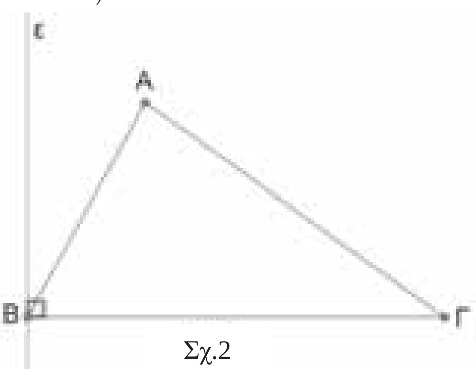
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Sigma}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{T\Sigma}-\overrightarrow{TA}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{T\Sigma}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{TA}=$

$-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2$.

$(2)\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{BM}=$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{BM}\cdot\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.



Σχ.2

Άρα η ζητούμενη γραμμή είναι μία ευθεία (ε) που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στο ΒΓ (Σχ. 2).

ii. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$

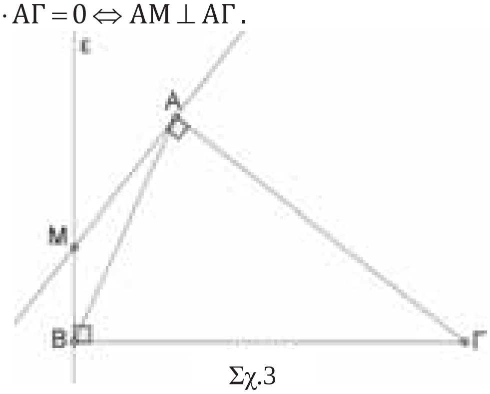
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right)-\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$.



Σχ.3

Άρα το ζητούμενο σημείο Μ είναι το σημείο τομής της ευθεία (ε) του ερωτήματος βi με την κάθετη ευθεία στην πλευρά ΑΓ στο σημείο Α (Σχ. 3).

Θέμα 2

Δίνονται τα μη μηδενικά και κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

α. Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=|\vec{\alpha}|$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=|\vec{\beta}|$.

i. Να αναλύσετε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ αντίστοιχα.

ii. Δείξτε ότι ο φορέας του $\vec{\gamma}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

β. Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$. Αν ισχύει $|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}+\vec{\delta}=\vec{0}$ (1), θεωρούμε την παράσταση $K=\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$. Να δείξετε ότι:
$K<-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.

Απάντηση

Έχουμε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

α. i. Ζητάμε πραγματικούς αριθμούς κ,λ έτσι ώστε να ισχύει $\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ (2).

$$(2)\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}^{\,2}+\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=\kappa|\vec{\alpha}|^2\Leftrightarrow\kappa=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}$$

$$(2)\Rightarrow\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)+\lambda\vec{\beta}^{\,2}\Leftrightarrow|\vec{\beta}|=\lambda|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{|\vec{\beta}|}$$

Άρα $\vec{\gamma}=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}+\frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}$. Το $\vec{\gamma}$ είναι άθροισμα δύο μοναδιαίων διανυσμάτων.

ii. $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}|}=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}|}=\frac{1}{|\vec{\gamma}|}$ (3).

$|\vec{\gamma}|^2=\left(\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}+\frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}\right)^2=\ldots=2\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}$. Άρα

$(3)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\pi}{4}$, οπότε ο φορέας του $\vec{\gamma}$ διχοτομεί τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

β. $(1)\Leftrightarrow|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+\vec{\delta}=-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$. Άρα $\left(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+\vec{\delta}\right)^2=$
$|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow|\vec{\beta}|^2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}\right)+|\vec{\delta}|^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=-\frac{|\vec{\delta}|^2}{2|\vec{\beta}|}$.

$(1)\Leftrightarrow\vec{\delta}=-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\Rightarrow|\vec{\delta}|^2=\ldots=2|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2$.

Άρα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=-|\vec{\beta}||\vec{\alpha}|^2$.

Όμοια βρίσκουμε $\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|^2$.

Άρα $K=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\left(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\right)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι ομόρροπα έχουμε:
$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|<|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\Leftrightarrow-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\alpha}+\vec{\beta}|>-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\left(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\right)$
$\Leftrightarrow K<-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.

Θέμα 3

Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ έχουμε
$\left|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}\right|$ **(1) με** $|\vec{\alpha}|\neq|\vec{\beta}|$ **(2).**

Δείξτε ότι:

i. $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2>|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$.

ii. $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|>1$.

Απάντηση

i. $(1)\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}\right|^2\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right)^2=$
$\left(\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}\right)^2\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2-2|\vec{\alpha}|\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)+|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2=$
$|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\beta}|\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)+|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$
$\left(|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right)\left[|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|-2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\right]=0\overset{|\vec{\alpha}|\neq|\vec{\beta}|}{\Leftrightarrow}$
$|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|-2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{2}$ (3).

Είναι $\left(\sqrt{|\vec{\alpha}|}-\sqrt{|\vec{\beta}|}\right)^2>0\Leftrightarrow$
$|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|-2\sqrt{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}>0\Leftrightarrow$
$\frac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{2}>\sqrt{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2>|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

ii. Ισχύει $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2\leq|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\overset{(i)}{\Rightarrow}$
$|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|<\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2\leq|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\Rightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|<|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2$ (4).

Είναι $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ γιατί, αν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα ήταν μηδενικό π.χ. $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε $|\vec{\alpha}|=0$ και από την (1) θα είχαμε $|\vec{\beta}|=0$. Άτοπο λόγω της (2). Άρα $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|>0$, οπότε $(4)\Leftrightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|>1$.

Θέμα 4

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Αν $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=\frac{2}{3}$ και το μέτρο $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ είναι άρτιος αριθμός, τότε :

i. Δείξτε ότι, για τα διανύσματα

$$\vec{u}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta},\sqrt{22}\right),\ \vec{v}=\left(9,\frac{5}{3|\vec{\alpha}|}\right)\ \text{ισχύει}$$

$$|\vec{\upsilon}+\vec{v}|=\sqrt{|u|^2+|\vec{v}|^2}.$$

ii. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ του ερωτήματος i και το διάνυσμα

$$\vec{w}=\vec{v}+\left(-6,-\frac{5}{\sqrt{22}}+1\right).$$ **Έστω ένα σημείο Α έτσι ώστε $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής που διαγράφει το σημείο Μ όταν $\overrightarrow{AM}//\vec{w}$.**

Απάντηση

Έχουμε $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})-3\vec{\beta}|=|(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})+(-3\vec{\beta})|$.

Ισχύει $\left||\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|-|-3\vec{\beta}|\right|\leq|(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})+(-3\vec{\beta})|\leq|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|+|-3\vec{\beta}|\Leftrightarrow\left||\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|-3|\vec{\beta}|\right|\leq|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|+3|\vec{\beta}|\Leftrightarrow$

$2-\sqrt{2}\leq|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\leq2+\sqrt{2}$ (1).

Αφού το $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ είναι άρτιος, λόγω της (1) προκύπτει ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$.

$|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2=2\Leftrightarrow$

$(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=2\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{\,2}+4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+4|\vec{\beta}|^2=2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^{\,2}+4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\frac{16}{9}=2\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{\,2}+4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=\frac{2}{9}$ (2).

$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2\Leftrightarrow|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=4\Leftrightarrow(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=4\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^{\,2}-2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+|\vec{\beta}|^2=4\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{\,2}-2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\frac{4}{9}=4\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^{\,2}-2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=\frac{32}{9}$ (3).

Λύνοντας το σύστημα των (2),(3) βρίσκουμε $\vec{\alpha}^{\,2}=\frac{22}{9}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2=\frac{22}{9}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=\frac{\sqrt{22}}{3}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{5}{9}$

Άρα $\vec{u}=\left(-\frac{5}{9},\sqrt{22}\right)$ και $\vec{v}=\left(9,\frac{5}{\sqrt{22}}\right)$, οπότε

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-\frac{5}{9}\right)9+\sqrt{22}\frac{5}{\sqrt{22}}=-5+5=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$.

$|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}^{\,2}\overset{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}{\Leftrightarrow}$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2\Leftrightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2}$.

(Η σχέση που δείξαμε εκφράζει το πυθαγόρειο θεώρημα).

ii. Έχουμε $\vec{u}=\left(-\frac{5}{9},\sqrt{22}\right)$, $\vec{v}=\left(9,\frac{5}{\sqrt{22}}\right)$ και $\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{5}{9},\sqrt{22}\right)$. Επίσης έχουμε $\vec{w}=(3,1)$ και

$\overrightarrow{AM}//\vec{w}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{w},\lambda\in R$.

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{w}$ (4).

$(4)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{5}{9},\sqrt{22}\right)+(3\lambda,\lambda)\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{5}{9}+3\lambda,\sqrt{22}+\lambda\right)$. Άρα είναι

$M\left(-\frac{5}{9}+3\lambda,\sqrt{22}+\lambda\right)$. Έστω (x,y) τυχαίο από τα σημεία Μ. Για κάποια τιμή του λ θα είναι

$$\left.\begin{aligned}-\frac{5}{9}+3\lambda&=x\\ \sqrt{22}+\lambda&=y\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}-5+27\lambda&=9x\\ \lambda&=y-\sqrt{22}\end{aligned}\right\},$$ οπότε

προκύπτει $9x-27y+27\sqrt{22}+5=0$.

Άρα το σημείο Μ διαγράφει την ευθεία με εξίσωση $9x-27y+27\sqrt{22}+5=0$.

Σχόλιο: Η σχέση (4) στην παραπάνω άσκηση ονομάζεται διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{w}$.

Θέμα 5

Έστω τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και Ο σημείο αναφοράς, έτσι ώστε $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Θέτουμε Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

i. Δείξτε ότι $E=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2}$.

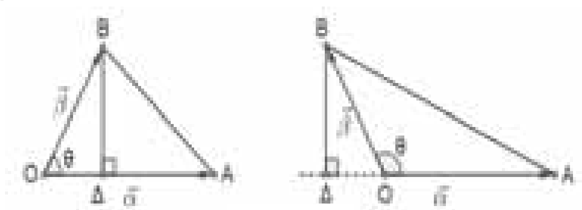
ii. Αν το $|\vec{\beta}|$ είναι περιττός αριθμός και ισχύει:

$E=\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{\alpha}|\left|1-|\vec{\beta}|\right|$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

Απάντηση

Έστω $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\theta$. Αφού τα διανύσματα είναι μη συγγραμμικά πρέπει $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$. Επιπλέον $\theta\in(0,\pi)$.

i.



Σχ.4

Έστω ΒΔ το ύψος του τριγώνου ΟΑΒ (Σχ. 4). Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E=\frac{1}{2}(OA)(B\Delta)$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΟΒ έχουμε:

$\eta\mu\theta=\frac{(B\Delta)}{(OB)}$ (ή $\eta\mu(\pi-\theta)=\frac{(B\Delta)}{(OB)}\Leftrightarrow$

$\eta\mu\theta=\frac{(B\Delta)}{(OB)}$), οπότε $(B\Delta)=(OB)\eta\mu\theta$.

Άρα $E=\frac{1}{2}(OA)(OB)\eta\mu\theta\Leftrightarrow$

$$E=\frac{1}{2}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\eta\mu\theta\Leftrightarrow E^2=\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\eta\mu^2\theta=$$

$$\frac{1}{4}\left[|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)\right]=$$

$$\frac{1}{4}\left(|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)\Leftrightarrow$$

$$E^2=\frac{1}{4}\left[|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2}.$$

ii. $E=\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{\alpha}|\left|1-|\vec{\beta}|\right|\Leftrightarrow E^2=\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2\left|1-|\vec{\beta}|\right|^2\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$

$$|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2\theta=2|\vec{\alpha}|^2\left(1-|\vec{\beta}|\right)^2\Leftrightarrow$$

$$-|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2\theta=2|\vec{\alpha}|^2-4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{-|\vec{\beta}|^2+4|\vec{\beta}|-2}{|\vec{\beta}|^2}.$$

Πρέπει:

$$0\leq\sigma\upsilon\nu^2\theta<1\Leftrightarrow0\leq\frac{-|\vec{\beta}|^2+4|\vec{\beta}|-2}{|\vec{\beta}|^2}<1\overset{|\vec{\beta}|^2>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l}-|\vec{\beta}|^2+4|\vec{\beta}|-2\geq0\\-|\vec{\beta}|^2+4|\vec{\beta}|-2<|\vec{\beta}|^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}|\vec{\beta}|^2-4|\vec{\beta}|+2\leq0\\\left(|\vec{\beta}|-1\right)^2>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{\beta}|\in\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]\\|\vec{\beta}|\neq1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$|\vec{\beta}|\in\left[2-\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,2+\sqrt{2}\right].$$

Άρα η ζητούμενη τιμή του $|\vec{\beta}|$ είναι $|\vec{\beta}|=3$.

Θέμα 6

Θεωρούμε τα σημεία $M(\kappa+\lambda,\lambda),N(\lambda-\kappa,2\lambda)$ έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ και $|\overrightarrow{MN}|=2\sqrt{2}$.

i. Δείξτε ότι: $\overrightarrow{MN}=(2,2)$.

ii. Αν K το μέσο του MN, θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha,0),B(0,\frac{13-2\alpha}{3})$. Δείξτε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο στην κορυφή K.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (AB) του ερωτήματος ii όταν το εμβαδόν του τριγώνου KAB είναι ελάχιστο.

Απάντηση

i. $\overrightarrow{MN}=(-2\kappa,\lambda)$. Αν $\Sigma(-2\kappa,\lambda)$ τότε είναι $\overrightarrow{O\Sigma}=\overrightarrow{MN}$, όπου O η αρχή των αξόνων. Το $\overrightarrow{O\Sigma}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$, οπότε πρέπει $\left.\begin{array}{l}-2\kappa>0\Leftrightarrow\kappa<0\\\lambda>0\end{array}\right\}$ και $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-\frac{\lambda}{2\kappa}\Leftrightarrow$

$\lambda=-2\kappa\quad(1)$.

$$|\overrightarrow{MN}|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{4\kappa^2+\lambda^2}=2\sqrt{2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{8\kappa^2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow|\kappa|=1\overset{\kappa<0}{\Leftrightarrow}\kappa=-1.$$

Από την (1) παίρνουμε $\lambda=2$. Άρα $\overrightarrow{MN}=(2,2)$.

ii. Έχουμε $M(1,2)$ και $N(3,4)$. Οι συντεταγμένες του K είναι $x_K=\frac{1+3}{2}=2$, $y_K=\frac{2+4}{2}=3$.

Άρα $K(2,3)$. Τότε

$$\overrightarrow{KA}=(\alpha-2,-3),\overrightarrow{KB}=\left(-2,\frac{2(2-\alpha)}{3}\right).$$

$\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}=-2(\alpha-2)-2(2-\alpha)=0$. Άρα το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Κ.

iii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ (αφού είναι ορθογώνιο στο Κ) είναι: $(KAB)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{KA}||\overrightarrow{KB}|=$

$\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-2)^2+9}.\sqrt{\frac{4}{9}\left[(\alpha-2)^2+9\right]}\Leftrightarrow$

$(KAB)=\frac{1}{3}\left[(\alpha-2)^2+9\right]\geq\frac{9}{3}\Leftrightarrow(KAB)\geq 3$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ έχει ελάχιστη τιμή 3 και αυτό γίνεται όταν $\alpha=2$. Άρα τα σημεία Α,Β για τα οποία το τρίγωνο ΚΑΒ έχει ελάχιστο εμβαδόν είναι Α(2,0) και Β(0,3). Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ΑΒ) είναι $\lambda_{AB}=\frac{3-0}{0-2}=-\frac{3}{2}$.

Άρα $(AB):y-0=-\frac{3}{2}(x-2)\Leftrightarrow 3x+2y-6=0$

Θέμα 7

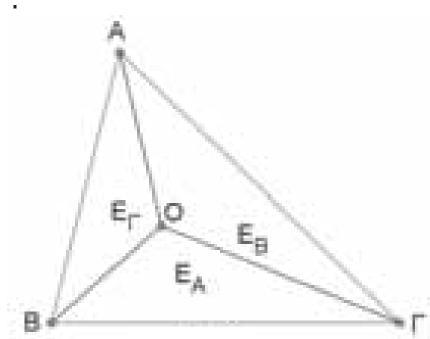
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και Ο ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου.
Ονομάζουμε E_A, E_B, E_Γ τα εμβαδά των τριγώνων ΟΒΓ,ΟΑΓ,ΟΑΒ αντίστοιχα.

i. Δείξτε ότι: $E_A\cdot\overrightarrow{OA}+E_B\cdot\overrightarrow{OB}+E_\Gamma\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ (Σχέση Καραθεοδωρή).

ii. Αν το Ο είναι περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και $A\hat{O}B=90^0$, $(\overrightarrow{OB},\widehat{\overrightarrow{O\Gamma}})=\omega$ δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{E_B}{E_\Gamma}$.

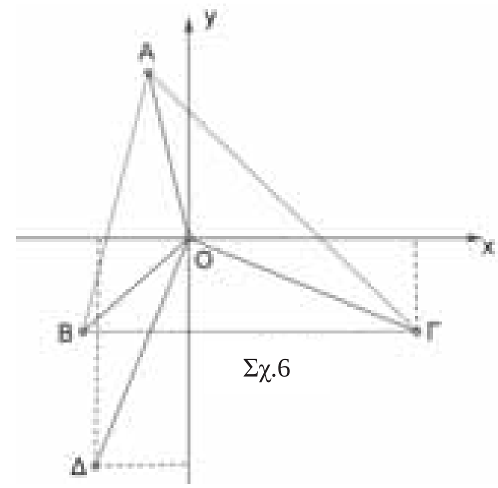
Απάντηση

i. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το Ο και άξονα τετμημένων x′x παράλληλο στη ΒΓ.



Σχ.5

Με βάση το παραπανω σχήμα (Σχ. 5) έχουμε $A(\kappa,\lambda), B(\mu,\nu), \Gamma(\rho,\nu)$ με $\kappa<0,\lambda>0,\mu<0$, $\nu<0$ και $\rho>0$.



Σχ.6

$\overrightarrow{OA}=(\kappa,\lambda),\overrightarrow{OB}=(\mu,\nu),\overrightarrow{O\Gamma}=(\rho,\nu)$.

$\det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma})=\begin{vmatrix}\mu & \nu\\ \rho & \nu\end{vmatrix}=\mu\nu-\rho\nu>0$,

$\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma})=\begin{vmatrix}\kappa & \lambda\\ \rho & \nu\end{vmatrix}=\kappa\nu-\rho\lambda$.

Θεωρούμε το σημείο $\Delta(\nu,-\rho)$. Είναι $\overrightarrow{O\Delta}=(\nu,-\rho)$ με $\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{O\Delta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{O\Gamma}\perp\overrightarrow{O\Delta}$ και $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\Delta}=\kappa\nu-\rho\lambda=\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma})$. Η γωνία

$A\hat{O}\Delta$ είναι αμβλεία, οπότε $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\Delta}<0\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma})<0$. Άρα $\kappa\nu-\rho\lambda<0$.

Επίσης $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\begin{vmatrix}\kappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{vmatrix}=\kappa\nu-\mu\lambda>0$.

$E_A=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma})\right|=\frac{1}{2}(\mu\nu-\rho\nu)$,

$E_B=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma})\right|=\frac{1}{2}(\rho\lambda-\kappa\nu)$ και

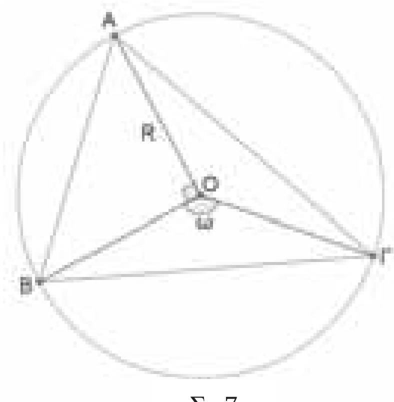
$E_\Gamma=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\right|=\frac{1}{2}(\kappa\nu-\mu\lambda)$.

$E_A\cdot\overrightarrow{OA}+E_B\cdot\overrightarrow{OB}+E_\Gamma\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\frac{1}{2}(\kappa\mu\nu-\kappa\nu\rho+\mu\rho\lambda-$
$\kappa\mu\nu+\rho\kappa\nu-\mu\rho\lambda,\lambda\mu\nu-\lambda\nu\rho+\rho\lambda\nu-\kappa\nu^2+$
$\kappa\nu^2-\lambda\mu\nu)=\frac{1}{2}(0,0)=\vec{0}$.

Σημείωση: Η λύση του προβλήματος δεν επηρεάζεται από τη θέση του Α. Αν το Α είναι στην πρώτη γωνία των αξόνων, τότε $\kappa>0,\lambda>0$, οπότε απευθείας έχουμε $\kappa\nu-\rho\lambda<0$.

ii. Έχουμε $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ και $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{O\Gamma}|=R$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ

(Σχ. 7).



Σχ.7

Από το ερώτημα i είναι:

$E_A \cdot \overrightarrow{OA} + E_B \overrightarrow{OB} + E_\Gamma \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow$

$E_A \cdot \left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\right) + E_B \cdot \overrightarrow{OB}^2 + E_\Gamma \cdot \left(\overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OB}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$E_B R^2 + E_\Gamma R^2 \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{E_B}{E_\Gamma}$.

Θέμα 8

Θεωρούμε το σημείο $M(x,y)$, $x,y \in R$ και τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$, $\vec{\beta} = (x,1)$ και $\vec{\gamma} = (y+1,-1)$.

α. i. Αν ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$, δείξτε ότι το σημείο Μ κινείται σε μία ευθεία (ε_1) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii. Αν ισχύει $2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = (0,1)$, δείξτε ότι το σημείο Μ κινείται σε μία ευθεία (ε_2) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

iii. Αν ισχύουν ταυτόχρονα τα ερωτήματα i , ii να βρείτε το σημείο Μ.

β. Θεωρούμε το σημείο Α έτσι ώστε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

i. Να βρείτε σημείο Κ, όταν το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΚ, όπου Μ το σημείο του ερωτήματος α iii.

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας (ε_1) του ερωτήματος α i που είναι πλησιέστερο στο σημείο Κ του παραπάνω ερωτήματος.

Απάντηση

α. i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x+2$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = y+1-2 = y-1$.

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow x+2 = y-1 \Leftrightarrow x-y+3=0$. Άρα το σημείο Μ κινείται στην ευθεία (ε_1) με εξίσωση $x-y+3=0$.

ii. $2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = (0,1) \Leftrightarrow (2x,2) + (y+1,-1) = (0,1) \Leftrightarrow (2x+y+1,1) = (0,1) \Leftrightarrow 2x+y+1=0$

Άρα το σημείο Μ κινείται στην ευθεία (ε_2) με εξίσωση $2x+y+1=0$.

iii. Το σημείο Μ θα είναι η τομή των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

$\begin{cases} x-y+3=0 \ (1) \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 3x+4=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$. Για

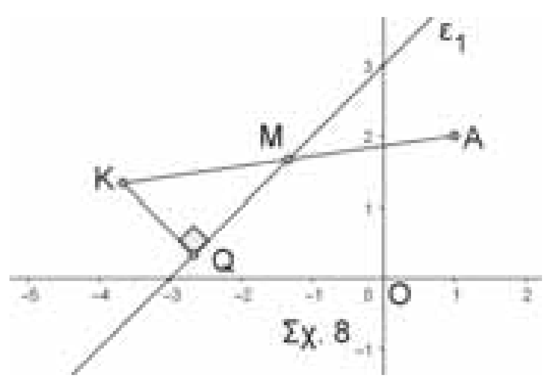
$x = -\dfrac{4}{3}$ $(1) \Rightarrow -\dfrac{4}{3} - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{3}$. Άρα $M\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

β. i. Είναι $A(1,2)$ και $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_K}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_K}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -\dfrac{4}{3} = \dfrac{1+x_K}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{8}{3} = 1 + x_K \Leftrightarrow x_K = -\dfrac{11}{3} \\ \dfrac{5}{3} = \dfrac{2+y_K}{2} \Leftrightarrow \dfrac{10}{3} = 2 + y_K \Leftrightarrow y_K = \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Άρα $K\left(-\dfrac{11}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

ii.



Το ζητούμενο σημείο είναι η προβολή Q του σημείου Κ πάνω στην ευθεία (ε_1) (Σχ. 8).

$\lambda_{\varepsilon_1} = 1$. $KQ \perp \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_{KQ} \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KQ} = -1$.

$(KQ): y - \dfrac{4}{3} = -\left(x + \dfrac{11}{3}\right) \Leftrightarrow 3x+3y+7=0$. Οι συντεταγμένες του σημείου Q προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$\begin{cases} x-y+3=0 \\ 3x+3y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$. Άρα $Q\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Τάξη: Γ΄

Θέματα Συναρτήσεων

Σπύρος Γιαννακόπουλος - Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

Η συνάρτηση είναι ένα **κομψό μαθηματικό εργαλείο** με προεκτάσεις σε όλους τους χώρους που υπεισέρχονται τα Μαθηματικά.

Η συνάρτηση κατέληξε στη σημερινή της μορφή, μετά από μακραίωνη πορεία που διέγραψε από τις αδήριτες **πρακτικές και συγκεκριμένες ανάγκες** που παρουσιάστηκαν για την ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Στο άρθρο αυτό θα ασχοληθούμε με θέματα που αναφέρονται στο γενικό μέρος των συναρτήσεων, στο όριο συνάρτησης και στη συνέχεια συνάρτησης. Το όριο συνάρτησης είναι η βάση για την ανάπτυξη **με σαφήνεια εννοιών** όπως η παράγωγος και το ολοκλήρωμα.

Θέμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $s(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$.

i. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της s έχει κέντρο συμμετρίας το οποίο να βρείτε.

ii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση s.

iii. Δείξτε ότι η συνάρτηση s είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτησης. Επιπλέον να δείξετε ότι το συμμετρικό σημείο του κέντρου συμμετρίας της C_s ως προς την αρχή των αξόνων είναι σημείο της $C_{s^{-1}}$.

iv. Να λύσετε στο σύνολο $\Delta=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ την εξίσωση: $\dfrac{1}{3}\big(s(\eta\mu x)-1\big)=\dfrac{1}{3}s^{-1}\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)+1$

v. Να βρείτε το όριο

$$A=\lim_{x\to 1}\left(s^{-1}(x)+1-\frac{\sqrt{2-x}}{x-1}+\frac{x-1}{\sigma\upsilon\nu(x-1)-2x+1}\right).$$

Λύση

$$D_s=R-\{-2\}.$$

i. Έστω ένα σημείο $K(x_0,y_0)$ και το σημείο $M(x,s(x))\in C_s$. Αν $N(\alpha,\beta)$ το συμμετρικό σημείο του M ως προς το K, τότε το σημείο K είναι μέσο του τμήματος MN, οπότε έχουμε

$$\frac{x+\alpha}{2}=x_0 \Leftrightarrow \alpha=2x_0-x \text{ και}$$
$$\frac{\beta+s(x)}{2}=y_0 \Leftrightarrow \beta=2y_0-s(x).$$

Το σημείο K είναι κέντρο συμμετρίας της C_s αν και μόνο αν

$$s(\alpha)=\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha+3}{\alpha+2}=\beta \Leftrightarrow$$
$$1+\frac{1}{\alpha+2}=\beta \Leftrightarrow \frac{1}{2x_0-x+2}=2y_0-s(x)-1 \Leftrightarrow$$
$$\cdots \Leftrightarrow 2(1-y_0)x^2+4x_0(y_0-1)x+8x_0y_0-10x_0+8y_0-12=0 \quad (1).$$

Η (1) θέλουμε να ισχύει για κάθε $x\in R-\{-2\}$, οπότε πρέπει:

$$\begin{cases} 1-y_0=0 \\ \text{και} \\ 8x_0y_0-10x_0+8y_0-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=1 \\ \text{και} \\ x_0=-2 \end{cases}.$$

Άρα η C_s έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο

$$K(-2,1).$$

ii. Είναι $s(x)=\dfrac{1}{x+2}+1$.

Η γραφική παράσταση της s προκύπτει αρχικά από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$s_1(x)=\frac{1}{x}$$

κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και ύστερα τη γραφική παράσταση που θα βρούμε την μετατοπίζουμε κατακόρυφα προς τα πάνω κατά 1 μονάδα. Έτσι η γραφική παράσταση της s δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

iii. Για $x \neq -2$ και $y \in R$ θεωρούμε την εξίσωση $s(x) = y \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (y-1)x = 3-2y$ (2).

Η (2) λύνεται στο $R-\{-2\}$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} y-1 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1 \\ \text{και} \\ x = \dfrac{3-2y}{y-1} \neq -2 \Leftrightarrow 3 \neq 2, \text{ που ισχύει} \end{cases}.$$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της s είναι το σύνολο $s(R-\{-2\}) = R-\{1\}$. Αφού για κάθε $y \in R-\{1\}$ η εξίσωση $s(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση στο $D_s = R-\{-2\}$ την $x = \dfrac{3-2y}{y-1}$, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση s είναι "1–1", άρα είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη συνάρτηση την $s^{-1}(x) = \dfrac{3-2x}{x-1}$, $x \in R-\{1\}$.

Έστω K' το συμμετρικό σημείο του K ως προς την αρχή των αξόνων. Τότε είναι $K'(2,-1)$. Έχουμε $s^{-1}(2) = -1 \Rightarrow K' \in C_{s^{-1}}$.

iv. Για $x \in \Delta$ έχουμε: $s(\eta\mu x) = \dfrac{\eta\mu x+3}{\eta\mu x+2}$ και $s(\eta\mu x)-1 = \dfrac{1}{\eta\mu x+2}$. $s^{-1}\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = \dfrac{3\sigma\upsilon\nu x-2}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

Άρα η εξίσωση γράφεται $\dfrac{1}{\eta\mu x+2} = \dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = -1$ (2). Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $0 \leq \eta\mu x < 1$ και $\sigma\upsilon\nu x \in [-1,0) \cup (0,1)$. Επομένως στο Δ για να ισχύει η (2) πρέπει $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = -1$. Άρα $x = \pi$.

v. • $\lim\limits_{x\to1}\left(s^{-1}(x)+1-\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-1}\right) =$

$$\lim_{x\to1}\frac{2-x-\sqrt{2-x}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2-\sqrt{2-x}}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to1}\left(\sqrt{2-x}\cdot\frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to1}\left[\sqrt{2-x}\cdot\frac{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to1}\left(\sqrt{2-x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2-x}+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

• $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{\sigma\upsilon\nu(x-1)-2x+1}\right) =$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{\sigma\upsilon\nu(x-1)-1-2(x-1)}\right) =$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-1)-1}{x-1}-2}\right) = B.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sigma\upsilon\nu(x-1)-1}{x-1} \underset{u\to0}{\overset{x-1=u}{=}} \lim_{u\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u} = 0.$$

Άρα $B = -\dfrac{1}{2}$. Συνεπώς $A = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2} = -1$.

Θέμα 2ο

Για τη συνάρτηση $f: R \to R$ έχουμε $f(x+\kappa) = x^3 + f(2)$ (1) για κάθε $x \in R$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(3,9)$. Αν κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ έχει με την C_f το πολύ ένα κοινό σημείο, τότε να βρείτε:

i. Την αντίστροφη συνάρτηση της f και να εξετάσετε αν η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,9]$.

ii. Τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$.

iii. Το όριο $A = \lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x-8}+f^{-1}(x)-4}{x-9}$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση η f είναι "1−1" και $f(3)=9$. Για x=0 $(1) \Rightarrow f(\kappa)=f(2) \Leftrightarrow \kappa=2$.

Άρα $f(x+2)=x^3+f(2)$ (2) για κάθε $x \in R$.

Για x=1 $(2) \Rightarrow f(3)=1+f(2) \Leftrightarrow f(2)=8$.

Άρα $f(x+2)=x^3+8$. Θέτουμε $x+2=\omega \Leftrightarrow$ $x=\omega-2,\ \omega \in R$ και έχουμε $f(\omega)=(\omega-2)^3+8$ $\Leftrightarrow f(x)=(x-2)^3+8, x \in R$.

i. Η συνάρτηση f ως “1–1” είναι αντιστρέψιμη. Αναζητούμε $y \in R$ ώστε $f(x)=y$ για κάποιο $x \in D_f$. $f(x)=y \Leftrightarrow (x-2)^3+8=y \Leftrightarrow$

$(x-2)^3=y-8$ (3)

— Αν $y-8 \le 0 \Leftrightarrow y \le 8$, τότε

$(3) \Leftrightarrow x-2=-\sqrt[3]{8-y} \Leftrightarrow x=2-\sqrt[3]{8-y} \in D_f$.

— Αν $y-8>0 \Leftrightarrow y>8$, τότε

$(3) \Leftrightarrow x-2=\sqrt[3]{y-8} \Leftrightarrow x=2+\sqrt[3]{y-8} \in D_f$.

Άρα $f(R)=R$ με $f^{-1}(x)=\begin{cases} 2-\sqrt[3]{8-x}, & x \le 8 \\ 2+\sqrt[3]{x-8}, & x>8 \end{cases}$

• Η f^{-1} είναι συνεχής στα διαστήματα $(0,8)$ και $(8,9)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$f^{-1}(8)=2$, $\lim\limits_{x\to 8^-} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\left(2-\sqrt[3]{8-x}\right)=2=$ $f^{-1}(8)$ και $\lim\limits_{x\to 8^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\left(2+\sqrt[3]{x-8}\right)=2=$ $f^{-1}(8)$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο 8. Συνεπώς η f^{-1} είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,9)$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2-\sqrt[3]{8-x}\right)=0=f^{-1}(0)$ και $\lim\limits_{x\to 9^-} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 9^-}\left(2+\sqrt[3]{x-8}\right)=3=f^{-1}(9)$.

Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $[0,9]$.

• $f^{-1}(0) \ne f^{-1}(9)$.

Συνεπώς η f^{-1} ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,9]$.

ii. $D_f \cap D_{f^{-1}}=R$. Για $x \in R$ θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=f(x) \\ x-y=f(y)-f(x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=f(x) \\ x+f(x)=y+f(y)\ (4) \end{cases}$ (Σ).

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=x+f(x) \Leftrightarrow \varphi(x)=(x-2)^3+x+8,\ x \in R$.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι “1–1”.

Άρα $(4) \Leftrightarrow \varphi(x)=\varphi(y) \Leftrightarrow x=y$.

Άρα $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=(x-2)^3+8 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow$

$(x-2)^3+8=x \Leftrightarrow (x-2)^3-(x-2)+6=0$ (5).

Θέτουμε $x-2=t$ και η (5) γράφεται $t^3-t+6=0$. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner παίρνουμε $(t+2)(t^2-2t+3)=0 \Leftrightarrow$

$(t+2)\left[(t-1)^2+2\right]=0 \overset{(t-1)^2+2>0}{\Leftrightarrow} t+2=0 \Leftrightarrow$

$t=-2$. Άρα $x-2=-2 \Leftrightarrow x=0$, οπότε και $y=0$. Συνεπώς οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, την αρχή των αξόνων.

iii. $A=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x-8}+\sqrt[3]{x-8}-2}{x-9}$. Κοντά στο 9 θέτουμε $\sqrt[6]{x-8}=u \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-8}=u^3 \\ \sqrt[3]{x-8}=u^2 \\ x=u^6+8 \end{cases}$. Άρα έχουμε

$\lim\limits_{x\to 9}\sqrt[6]{x-8}=1 \Rightarrow u\to 1$ και $A=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^3+u^2-2}{u^6-1}$

Από το σχήμα Horner παίρνουμε

$u^3+u^2-2=(u-1)(u^2+2u+2)$ και

$u^6-1=(u-1)(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1)$.

Συνεπώς $A=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2+2u+2}{u^5+u^4+u^3+u^2+u+1}=\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow$

$A=\dfrac{5}{6}$.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$

Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f(0)=0$ και $f(2)=\dfrac{\pi}{2}$.

i. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0+\text{συν}x_0)=x_0$.

ii. Για το x_0 του ερωτήματος i, να βρείτε το όριο

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{x-x_0+1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(x+\sigma\upsilon\nu x+1\right)-x_0\right)}.$$

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$$g(x)=f(x+\sigma\upsilon\nu x)-x,\ x\in R.$$

• Η συνάρτηση $f(x+\sigma\upsilon\nu x)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

• $g(0)=f(1)$. Έχουμε $1>0\Rightarrow f(1)>f(0)\Leftrightarrow$ $f(1)>0\Rightarrow g(0)>0$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(2).$$

Έχουμε $\frac{\pi}{2}<2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(2)\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(2)<0\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0.$$

Άρα $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow$ $f(x_0+\sigma\upsilon\nu x_0)=x_0$.

ii. $L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{x-x_0+1}{f(x+\sigma\upsilon\nu x+1)-x_0}\right)$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(x-x_0+1)=\frac{\pi}{2}-x_0+1>0.$$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(f(x+\sigma\upsilon\nu x+1)-x_0\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-x_0$, αφού η συνάρτηση $f(x+\sigma\upsilon\nu x+1)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$$\left\{\begin{array}{l}0<x_0<\frac{\pi}{2}\\ \quad\text{και}\\ \sigma\upsilon\nu x_0<1\end{array}\right.\overset{(+)}{\Rightarrow}x_0+\sigma\upsilon\nu x_0<\frac{\pi}{2}+1\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow}$$

$$f(x_0+\sigma\upsilon\nu x_0)<f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\overset{(i)}{\Leftrightarrow}x_0<f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-x_0>0.$$

Άρα $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{x-x_0+1}{f(x+\sigma\upsilon\nu x+1)-x_0}=$

$$\frac{\frac{\pi}{2}-x_0+1}{f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-x_0}>0,\ \text{οπότε } L=-\infty.$$

Θέμα 4ο

Για τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ έχουμε $(fof)(x)=-xg(0)+2$ (1), $g(x)<0$ και $f(g(x))=g(x)$ (2) για κάθε $x\in R$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $g(x)=-2$ για κάθε $x\in R$.

ii. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού της f^{-1} το R και

$$f^{-1}(2)=\frac{f(-2)+f(2)}{2}.$$

β. Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

α. i. Αντικαθιστούμε στην (1) το x με $g(x)$ και παίρνουμε

$$f(f(g(x)))=-g(x)g(0)+2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$g(x)=-g(x)g(0)+2\ (3)$$

για κάθε $x\in R$. Για $x=0$ από την (3) παίρνουμε $g^2(0)+g(0)-2=0$ και βρίσκουμε $g(0)=1$ ή $g(0)=-2$. Δεκτή τιμή είναι η $g(0)=-2$, αφού $g(x)<0$ για κάθε $x\in R$. Έτσι για κάθε $x\in R$ $(3)\Rightarrow g(x)=-2$.

ii. Αφού $g(x)=-2$ για κάθε $x\in R$, οι (1), (2) γράφονται $f(f(x))=2x+2$ (4) και $f(-2)=-2$

Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$

$f\left(f\left(x_1\right)\right)=f\left(f\left(x_2\right)\right)\Leftrightarrow 2x_1+2=2x_2+2\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$. Άρα η συνάρτηση f είναι "1–1", οπότε είναι αντιστρέψιμη.

Έστω τυχαίο $r\in R$, τότε υπάρχει $x_0=\frac{1}{2}f(r)-1$ με $x_0\in R$ και είναι $f\left(f\left(x_0\right)\right)=2x_0+2\Leftrightarrow$ $f\left(f\left(x_0\right)\right)=f(r)\overset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow} f\left(x_0\right)=r$. Αυτό σημαίνει ότι $f(R)=R$. Επομένως το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το R.

Αντικαθιστούμε στην (4) το x με $f(x)$ και παίρνουμε $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=2f(x)+2\Leftrightarrow$ $f(2x+2)=2f(x)+2$. Για $x=0$ από την τελευταία ισότητα έχουμε $f(2)=2f(0)+2\Leftrightarrow$ $f(0)=\frac{f(2)-2}{2}$. Άρα $f(0)=\frac{f(2)+f(-2)}{2}$ (5).

$(4)\Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(2x+2)$ και για $x=0$ παίρνουμε $f(0)=f^{-1}(2)$. Άρα η (5) γράφεται $f^{-1}(2)=\frac{f(-2)+f(2)}{2}$.

β. Αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε επειδή το $f\left(f(x)\right)$ λόγω της (4) είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού και η f θα είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού. Επομένως $f(x)=\alpha x+\beta,\ x\in R$ με $\alpha\neq 0$. Έχουμε $f(-2)=-2\Leftrightarrow -2\alpha+\beta=-2\Leftrightarrow$ $\beta=2\alpha-2$ και για κάθε $x\in R$, $f\left(f(x)\right)=$ $\alpha f(x)+\beta\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\alpha^2x+\alpha\beta+\beta=2x+2\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha^2=2\Leftrightarrow\alpha=\pm\sqrt{2}\\ \alpha\beta+\beta=2\ \ (6)\end{cases}.$$

- Αν $\alpha=\sqrt{2}$, τότε $\beta=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Ικανοποιείται η (6), άρα

$$f(x)=\sqrt{2}x+2\left(\sqrt{2}-1\right),\ x\in R.$$

- Αν $\alpha=-\sqrt{2}$, τότε $\beta=-2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Οι τιμές των α,β ικανοποιούν την (6). Συνεπώς $f(x)=-\sqrt{2}x-2\left(\sqrt{2}+1\right),\ x\in R$.

Άρα έχουμε δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις τις $f(x)=\sqrt{2}x+2\left(\sqrt{2}-1\right),\ x\in R$ ή $f(x)=-\sqrt{2}x-2\left(\sqrt{2}+1\right),\ x\in R$.

Θέμα 5ο

Για τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ έχουμε $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$ (1) για κάθε

$$x,y\in R\ \text{ και }\ g(x)\leq\frac{2g(3)+g(4)}{3}\quad (2)$$

για κάθε $x\in R$.

Θεωρούμε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα.

α. Δείξτε ότι:

i. Η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Αν $\lim_{x\to 0}f(x)=L\in R$, τότε η f είναι συνεχής στο 0.

β. Δείξτε ότι:

i. Η g δεν είναι αντιστρέψιμη.

ii. Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

iii. Αν υπάρχουν τα όρια $L_1=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$, $L_2=\lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}$ και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε είναι $L_1=L_2=f^{-1}(1)$.

Λύση

Για $x=y=0$ από την (1) βρίσκουμε $f(0)=1$. Άρα σύμφωνα με την υπόθεση το 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=1$.

α. i. Αντικαθιστούμε στην (1) το y με $-x$ και έχουμε

$$f(0)=f(x)+f(-x)-1\Leftrightarrow -f(x)=f(-x)-2\ \ (3)$$

Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Leftrightarrow$

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}f\left(x_1\right)+f\left(-x_2\right)-1=1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$f\left(x_1-x_2\right)=1,$$

δηλαδή η διαφορά x_1-x_2 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=1$, οπότε πρέπει $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι "1–1", δηλαδή η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Αντικαθιστούμε στην (1) το x και το y με $\frac{x}{2}$ και παίρνουμε $f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-1$ (4).

$\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{x}{2}\right) \overset{\frac{x}{2}=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} \lim\limits_{u\to 0} f(u) = L$.

$(4) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) \Rightarrow L = 2L-1 \Leftrightarrow$

$L=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β. i. Για $x=3$, $(2) \Rightarrow g(3) \le \frac{2g(3)+g(4)}{3} \Leftrightarrow$

$g(3) \le g(4)$.

Για $x=4$, $(2) \Rightarrow g(4) \le \frac{2g(3)+g(4)}{3} \Leftrightarrow g(4) \le g(3)$.

Άρα $g(3)=g(4)$.

Αφού $3 \ne 4 \Rightarrow$ $g(3)=g(4)$,
η συνάρτηση g δεν είναι “1–1”, οπότε δεν είναι αντιστρέψιμη.

ii. Αφού $g(3)=g(4)=M$ $(2) \Rightarrow g(x) \le M$ για κάθε $x \in R$.
Άρα το M είναι ολικό μέγιστο της g για $x=3$ ή $x=4$.

iii. Έχουμε $L_1 = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$.

Αφού η g στο 3 παρουσιάζει μέγιστο είναι

$$g(x) \le g(3) \Leftrightarrow g(x)-g(3) \le 0 \text{ για κάθε } x \in R.$$

Επιλέγουμε $\delta > 0$ έτσι ώστε στο ανοικτό διάστημα $(3-\delta, 3+\delta)$ η μόνη θέση του μέγιστου να είναι το 3.

• Για $x \in (3-\delta, 3)$, $g(x)-g(3) < 0 \Rightarrow$
$\frac{g(x)-g(3)}{x-3} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} \ge 0 \Rightarrow L_1 \ge 0$.

• Για κάθε $x \in (3, 3+\delta)$, $g(x)-g(3) < 0 \Rightarrow$

$\frac{g(x)-g(3)}{x-3} < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} \le 0 \Rightarrow L_1 \le 0$.

Άρα $L_1 = 0$. Από το α i έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, επομένως

$f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$, οπότε $L_1 = f^{-1}(1)$.

Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε $L_2 = f^{-1}(1)$.

Συνεπώς $L_1 = L_2 = f^{-1}(1)$.

Έφυγαν από κοντά μας

† Νίκος Ζάνης

Η Ε.Μ.Ε. αποχαιρέτησε (27/6/2024) με μεγάλη λύπη της τον Νίκο Ζάνη. Με μεγάλη θλίψη πληροφορηθήκαμε την απώλεια του **εκλεκτού συναδέλφου** Νίκου Ζάνη. Διατέλεσε μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ τις διετίες 1987–1989 και 1991–1993.
Υπήρξε **υπεύθυνος σύνταξης** του περιοδικού Ευκλείδης Α καθώς και της "Ενημέρωσης από το ΔΣ" την περίοδο 1987–89. Κατά τη διετία 1991–1993 ήταν **μέλος πολλών επιτροπών** της ΕΜΕ: Παιδείας, Εκδόσεων, Επιμόρφωσης και Διαλέξεων, Πανελληνιών Εξετάσεων.
Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στους οικείους του.

† Αντώνης Κυριακόπουλος

Μεγάλη θλίψη προκάλεσε η είδηση της απώλειας (21/7/2024) ενός εξαιρετικού συναδέλφου. Υπήρξε ένα εξαιρετικά ενεργό μέλος της ΕΜΕ. Τη διετία 2005-2007 υπήρξε μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ και Πρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής του Ευκλείδη Β. Και στα χρόνια που ακολούθησαν όμως **συνέχισε να συμμετέχει ενεργά** στη Σ.Ε. του περιοδικού και να **δημοσιεύει** συχνά άρθρα του.
Ήταν μέλος σε επιτροπές για την αλλαγή του Καταστατικού της ΕΜΕ, εισηγητής σε στρογγυλά τραπέζια που διοργάνωνε η ΕΜΕ στα Πανελληνία Συνεδρία της, καθώς και **εισηγητής σε επιμορφωτικές ημερίδες**.
Για την πλούσια και πολυετή δράση του και την προσφορά του στην ΕΜΕ και στα Μαθηματικά το **2014** το ΔΣ της ΕΜΕ του **απένειμε τιμητική πλακέτα** στο **31ο Πανελλήνιο Συνέδριο της**. Ο Αντώνης Κυριακόπουλος θα λείψει από τη ζωή της ΕΜΕ. Η προσφορά του όμως θα μείνει αξέχαστη.
Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του

† Ιάκωβος (Μάκης) Μαυρέλης

Μεγάλη θλίψη προκάλεσε η είδηση της απώλειας (6/8/2024) ενός εξαιρετικού συναδέλφου και μέλους του ΔΣ της ΕΜΕ, του Μάκη Μαυρέλη, μετά από άνιση μάχη με την ανίατη ασθένεια.
Ο Μάκης Μαυρέλης ήταν **μέλος του ΔΣ** της ΕΜΕ την περίοδο 2022–2024. Συμμετείχε ενεργά στη ζωή και τις δράσεις της ΕΜΕ. Παρών στις Γενικές Συνελεύσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας με προτάσεις για **καλύτερη παιδεία** και για τη στήριξη των **δικαιωμάτων των εκπαιδευτικών**. Παρών και στα περισσότερα **Πανελλήνια Συνέδρια** της ΕΜΕ ως σύνεδρος, ως μέλος της Οργανωτικής Επιτροπής, ως εισηγητής σε Στρογγυλά Τραπέζια. Τον περασμένο Νοέμβριο ήταν ένας **από τους εισηγητές στο Στρογγυλό Τραπέζι** στο 38ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας στις Σέρρες.
Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του.

Τάξη: Γ΄

Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια

Τσόπελας Ιωάννης - Παράρτημα Ε.Μ.Ε Ηλείας

Θέμα 1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi(x) = \ln x + x - 2$, $x > 0$ και $\theta(x) = x+1$, $x \in R$.

α. Να ορίσετε τη σύνθεση φοθ.

β. Αν $f(x) = \ln(x+1) + x - 1$, $x > -1$.

$β_1$. Βρείτε το σύνολο τιμών της f .

$β_2$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα (0,1) έστω x_0 αυτή.

$β_3$. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{(x_0-x)^3}\cdot\ln(1-x)\right]$

Λύση: α. Η σύνθεση φοθ έχει πεδίο ορισμού :

$$A_{\varphi o\theta} = \{x \in R \,/\, x \in A_\theta \text{, και } \theta(x) \in A_\varphi\}$$

$$x \in A_\theta \quad \text{και} \quad \theta(x) \in A_\varphi \Leftrightarrow$$

$$x \in R \quad \text{και} \quad x+1>0 \Leftrightarrow$$

$$x \in R \quad \text{και} \quad x>-1$$

Τελικά $A_{\varphi o\theta} = (-1,+\infty)$ και η τιμή της είναι :

$$(\varphi o\theta)(x) = \varphi(\theta(x)) = \ln(\theta(x)) + \theta(x) - 2 =$$

$$\ln(x+1) + (x+1) - 2 = \ln(x+1) + x - 1$$

$β_1$. Η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) + x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$ και συνεχής άρα:

$$f((-1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to -1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = R$$

$β_2$. $0 \in f((-1,+\infty)) = R$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-1,+\infty)$ άρα υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (-1,+\infty)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Επιπλέον $f(1)=\ln 2>0>-1=f(0) \Leftrightarrow f(1)>f(x_0)>f(0) \Leftrightarrow 0<x_0<1$.

$β_3$. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{(x_0-x)^3}\cdot\ln(1-x)\right] =$

$$\lim_{x\to x_0}\left[-\frac{\eta\mu(x-x_0)}{(x-x_0)}\cdot\frac{1}{(x_0-x)^2}\ln(1-x)\right] = +\infty \text{ γιατί :}$$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{x-x_0} \overset{x-x_0=y}{\underset{y\to 0}{=}} \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\eta\mu y}{y} = 1,$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{(x_0-x)^2} = +\infty$
- $0<x_0<1 \Rightarrow 0<1-x_0<1 \Rightarrow \ln(1-x_0) < 0$

Θέμα 2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια δείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

γ) Δείξτε ότι η ευθεία (ε): $y = x$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση :

$$f^{-1}(2x-1) - f^{-1}(2-x) = \frac{x-1}{x^2+1} \quad (1)$$

Λύση

α) πρέπει $\dfrac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ldots x \in (0,1]$

έστω $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} - 1 > \frac{1}{x_2} - 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x_1} - 1} > \sqrt{\frac{1}{x_2} - 1}$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Τελικά η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

β) Η f είναι 1-1 από α) ερώτημα άρα αντιστρέφεται. Επειδή f συνεχής και γνησίως φθίνουσα θα έχει σύνολο τιμών $\left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [0,+\infty)$ οπότε $D_{f^{-1}} = [0,+\infty)$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+y^2}$$

Τελικά $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \geq 0$

γ) ορίζουμε $g(x) = f(x) - x$, $x \in (0,1]$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1].Επιπλέον :

- g συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον :
- $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$
- $g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$

  Οπότε από θ.Bolzano η g έχει ρίζα x_0 στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ που είναι μοναδική γιατι g γνησίως φθίνουσα στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

δ) Η εξίσωση (1) ορίζεται για $2x-1 \geq 0$ και $2-x \geq 0$ δηλαδή για $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$.

- αν $1 < x \leq 2$:

  $2x-1 > 2-x \Rightarrow f(2x-1) < f(2-x) \Rightarrow$

  $f(2x-1) - f(2-x) < 0$

αλλά $\dfrac{x-1}{x^2+1} > 0$ οπότε η (1) δεν έχει λύση

- αν $\frac{1}{2} \le x < 1$:

$2x-1 < 2-x \Rightarrow f(2x-1) > f(2-x) \Rightarrow$
$f(2x-1) - f(2-x) > 0$

αλλά $\frac{x-1}{x^2+1} < 0$ οπότε η (1) δεν έχει λύση τελικά η (1) έχει μοναδική λύση την προφανή x = 1.

Θέμα 3. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$**

α) Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,2)$ ώστε $f(x_0)=0$

β) υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{\eta\mu x - x}{f(x)}$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x_0} - x, x > 0$

για το x_0 του (α) ερωτήματος . Δείξτε ότι
γ_1) υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in (1, x_0)$ ώστε $g(x_1)=0$.
γ_2) $f(x_1) = -\ln x_0$.

Λύση: **α.** η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$ είναι συνεχής στο [1,2] και $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{\ln 4 - 1}{2} > 0$ οπότε $f(1) \cdot f(2) < 0$. Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ ώστε $f(x_0) = 0$ και x_0 μοναδικό γιατί f γνησίως αύξουσα στο (1,2)

β. $x \to x_0^- \Rightarrow x < x_0 \overset{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$

και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ άρα $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (1)

ενώ από τη γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x| \le |x|$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x (και η ισότητα μόνο για x = 0) προκύπτει ότι για $x = x_0 > 0$ θα ισχύει $|\eta\mu x_0| < x_0 \Leftrightarrow -x_0 < \eta\mu x_0 < x_0$

επομένως $\eta\mu x_0 - x_0 < 0$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{\eta\mu x - x}{f(x)} = -\infty$.

γ. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x_0} - x, x > 0$ είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και ισχύουν :

$$g(1) = \frac{e}{x_0} - 1 = \frac{e - x_0}{x_0} > 0$$

$$g(x_0) = \frac{e^{\frac{1}{x_0}}}{x_0} - x_0 = \frac{e^{\ln x_0}}{x_0} - x_0 = 1 - x_0 < 0$$

οπότε $g(1) \cdot g(x_0) < 0$
Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1,2)$ ώστε $g(x_1) = 0$ και x_1 μοναδικό γιατί g γνησίως φθίνουσα στο $(1, x_0)$.

$$g(x_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{x_1}}}{x_0} - x_1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x_1}} = x_1 x_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x_1} = \ln x_1 + \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_1 - \frac{1}{x_1} = -\ln x_0 \Leftrightarrow f(x_1) = -\ln x_0$$

Θέμα 4. **Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύουν :**

- $f(x) = g(x) + 1$ **για κάθε** $x \in (0,+\infty)$ **(1)**
- $g^2(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ **, για κάθε** $x \in (0,+\infty)$ **(2)**
- $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < g(2)$ **(3)**

α) Δείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα (0,1) και $(1,+\infty)$ και στη συνέχεια ότι:
$g(x) = x - \frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$

β) Βρείτε την f , δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$

δ) Έστω $h(x) = f(x) - x, x \in (0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να ορίσετε την h^{-1}.

Λύση: **α)** Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και η εξίσωση g(x)=0 έχει μοναδική ρίζα την x=1 γιατί:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Επομένως σύμφωνα με τη 2^{η} συνέπεια του θ.Bolzano η g διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα (0,1) και $(1,+\infty)$. Η σχέση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$g^2(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow |g(x)| = \left|x - \frac{1}{x}\right| \quad (4)$$

- Αν $x \in (0,1)$ τότε : $x < 1 < \frac{1}{x}$ και $g(x) < 0$ γιατί :

$g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ οπότε

$$(4) \Leftrightarrow -g(x) = -\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow g(x) = x - \frac{1}{x}$$

- Αν $x \in (1,+\infty)$ τότε : $\frac{1}{x} < 1 < x$ και $g(x) > 0$ γιατί

$g(2) > 0$ οπότε : $(4) \Leftrightarrow g(x) = x - \frac{1}{x}$

$(4) \Leftrightarrow g(x) = x - \frac{1}{x}$

- $g(1)=0$

Τελικά $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) $f(x)=g(x)+1=x-\dfrac{1}{x}+1,\quad x\in(0,+\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή:

$$f((0,+\infty))\underset{f\uparrow}{\overset{f\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=R$$

γ) Γράφουμε το όριο με μεταβλητή y :

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{f^{-1}(y)-y}{y+f^{-1}(y)}\underset{x\to0^+}{\overset{f^{-1}(y)=x}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{x-f(x)}{f(x)+x}=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2x-\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-x}{2x^2+x-1}=-1$$

δ) $h(x)=f(x)-x=1-\dfrac{1}{x},x\in(0,+\infty)$

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h δηλαδή: $h((0,+\infty))\underset{h\uparrow}{\overset{h\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to0^+}h(x),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,1)$

και $y=h(x)\Leftrightarrow y=1-\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=1-y\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{1-y}$

Άρα $h^{-1}(y)=\dfrac{1}{1-y},y<1$ ή $h^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-x},x<1$

Θέμα 5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(1,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει: $g(e^x)=e^x+x-3$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Δείξτε ότι $g(x)=\ln x+x-3$, για κάθε x >1.

β) Δείξτε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1}, καθώς και τα κοινά σημεία των Cg , Cg^{-1}.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}e^{1-x}-x-2,x\le1\\ g(x),x>1\end{cases}$

γ_1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,1]$ και $\Delta_2=(1,+\infty)$

γ_2.Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ_3. Δείξτε ότι η εξίσωση: $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις : $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ για τις οποίες ισχύει $1-x_1=\ln x_2$.

Λύση: α) Θέτουμε $e^x=y$ για $x>0$ οπότε $x=\ln y, y>1$ και η $g(e^x)=e^x+x-3$ γράφεται

$g(y)=y+\ln y-3, y>1$. ή $g(x)=x+\ln x-3, x>1$.

β) Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης g^{-1} είναι το σύνολο τιμών της g δηλαδή: $g((1,+\infty))\underset{g\uparrow}{\overset{g\ \sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to1^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-2,+\infty)$

Έστω A(x,f(x)) καινό σημείο των **Cg, Cg^{-1}** με $x\in D_g\cap D_{g^{-1}}=(1,+\infty)$

$$\begin{cases}y=g(x)\\ y=g^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=g(x)\\ g(y)=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=g(x)\\ y+g(y)=x+g(x)\end{cases}$$

Θέτουμε $\kappa(x)=g(x)+x$, x>1 και επειδή η συνάρτηση κ είναι γνησίως αύξουσα , είναι και 1-1 οπότε :

$$\begin{cases}y=g(x)\\ \kappa(y)=\kappa(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=g(x)\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)=x\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\ln x-3=x\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x+\ln x-3=x\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=3\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^3\\ y=e^3\end{cases}.$$

Άρα $A(e^3,e^3)$

γ) $f(x)=\begin{cases}e^{1-x}-x-2,x\le1\\ x+\ln x-3,x>1\end{cases}$

Στο **Δ_1 = (-∞,1]** : $f(x)=e^{1-x}-x-2$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα

Στο **Δ_2 = (1,+∞)**: $f(x)=x+\ln x-3$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα.

$$f(\Delta_1)\underset{f\downarrow}{\overset{f\sigma\upsilon\nu}{=}}\left[f(1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-2,+\infty)$$

$$f(\Delta_2)\underset{f\uparrow}{\overset{f\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-2,+\infty)$$

$$f(R)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-2,+\infty)$$

$0\in f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1 άρα υπάρχει μοναδικός $x_1\in\Delta_1$ ώστε $f(x_1)=0$.

$0\in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_2 άρα υπάρχει μοναδικός $x_2\in\Delta_2$ ώστε $f(x_2)=0$.

Τελικά η εξίσωση: $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$. Είναι $x_1<1\Rightarrow1-x_1>0\Rightarrow e^{1-x_1}>1$ και $f(e^{1-x_1})=e^{1-x_1}+\ln e^{1-x_1}-3=e^{1-x_1}-x_1-2=f(x_1)=0$

άρα $e^{1-x_1}>1$ ρίζα της $f\Rightarrow e^{1-x_1}=x_2\Rightarrow\ln x_2=1-x_1$

Θέμα 6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-2,2]\to R$

με $f(x)=\begin{cases} 2x^2, |x|\le 1 \\ \dfrac{2}{x}, 1<|x|\le 2 \end{cases}$

α. Μελετήστε την f ως προς τη συνέχεια .
β. Μελετήστε την f ως προς τη παραγωγισιμότητα.
γ. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f με βάση τις γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων.
δ. Αν α,β ∈ (0,1) ∪ (1,2) να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-2}{e^x-1}+\dfrac{f(\beta)-2}{e^x-e}=1$ έχει στο (0,1) τουλάχιστον μία ρίζα .
ε. Αν $g(x)=|f(x)|$, $x\in[-2,2]$ και $M(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_g που απέχει από το M λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα τουλάχιστον σημείο της C_g που απέχει από το M περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

Λύση:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, x\in[-1,1] \\ \dfrac{2}{x}, x\in[-2,-1)\cup(1,2] \end{cases}$$

α. Για -2 ≤ x < -1, $f(x)=\dfrac{2}{x}$ οπότε είναι συνεχής ως ρητή.

Για -1 < x < 1, $f(x)=2x^2$ οπότε είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για 1< x ≤ 2, $f(x)=\dfrac{2}{x}$ οπότε είναι συνεχής ως ρητή.

Στο x= -1: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-2\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2$ οπότε η f **δεν είναι** συνεχής στο -1.

Στο x= 1: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=2$ οπότε η f **είναι** συνεχής στο 1.

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[-2,-1)\cup(-1,2]$.

β) Για -2 ≤ x < -1, $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$.

Για -1 < x < 1, $f'(x)=4x$

Για 1< x ≤ 2, $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$

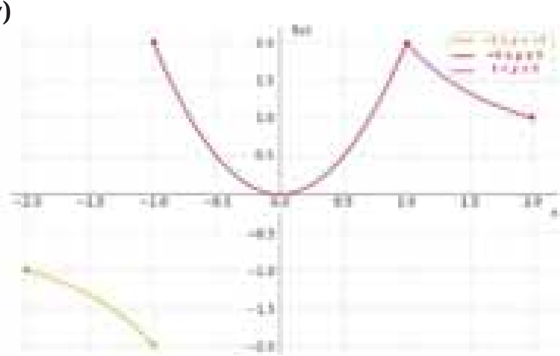
Στο x= -1 η f **δεν είναι** συνεχής άρα δεν είναι και παραγωγίσιμη

Στο x= 1: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-2}{x-1}=4$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2}{x}-2}{x-1}=-2$$

οπότε η f **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο 1. Τελικά η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$

(γ)



δ) α,β ∈ (0,1) ∪ (1,2) ⇒ f(α) < 2 και f(β) < 2. Αν
$h(x)=(e^x-e)(f(\alpha)-2)+(e^x-1)(f(\beta)-2)-(e^x-e)(e^x-1)$
με x ∈[0,1] τότε η h είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και
$h(0)=(1-e)(f(\alpha)-2)>0$, $h(1)=(e-1)(f(\beta)-2)<0$
Οπότε $h(0)h(1)<0$ άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $h(x)=0$ στο (0,1).
Και επειδή στο (0,1) οι εξισώσεις $h(x)=0$ και $\dfrac{f(\alpha)-2}{e^x-1}+\dfrac{f(\beta)-2}{e^x-e}=1$ είναι ισοδύναμες τελικά προκύπτει το ζητούμενο.

ε) Η συνάρτηση $g(x)=|f(x)|$, $x\in[-2,2]$ **είναι συνεχής** στο [-2,2]. Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x)=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-g(x))^2}$ x∈[-2,2] που εκφράζει την απόσταση του M από το τυχαίο σημείο $N(x,g(x))$ της C_g. Η συνάρτηση d είναι συνεχής στο [-2,2] άρα από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής υπάρχουν x_1 ∈[-2,2] στο οποίο η d παρουσιάζει ελάχιστη τιμή και x_2 ∈[-2,2] στο οποίο η d παρουσιάζει μέγιστη τιμή.
Δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $A(x_1,g(x_1))$ της C_g που απέχει από το M λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα τουλάχιστον σημείο $B(x_2,g(x_2))$ της C_g που απέχει από το M περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

Θέμα 7. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν: $f(\pi)=2\pi$

• $f^2(x)+\eta\mu^2 x=2xf(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

α) Δείξτε ότι: $f(x)=x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) Δείξτε ότι f΄(x) > 0 για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ) Να βρείτε ένα διάστημα της μορφής (α , α+1) όπου α ακέραιος στο οποίο να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός ρ, με ρ ≠0 τέτοιος ώστε $f(\rho)=\rho+\sqrt{\frac{1}{\rho}+\sigma\upsilon\nu^2\rho}$

Λύση: α) η δοσμένη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$(f(x)-x)^2=x^2-\eta\mu^2x.$$

Θέτουμε $g(x)=f(x)-x, x>0$ οπότε g συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $g(\pi)=f(\pi)-\pi=2\pi-\pi=\pi>0$ και

$g^2(x)=x^2-\eta\mu^2x, x>0$. **(1)**

$g(x)=0\Leftrightarrow g^2(x)=0\Leftrightarrow x^2-\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow$

$|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$

το οποίο είναι άτοπο γιατί x > 0. Επομένως $g(x)\neq 0$ για κάθε x > 0 και επειδή g συνεχής στο $(0,+\infty)$, η g διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Επιπλέον $g(\pi)>0$. Τελικά $g(x)>0$ για κάθε x> 0.

$(1)\Leftrightarrow g(x)=\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}\quad ,\quad x>0$

$\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}\quad ,\quad x>0$

β) $f'(x)=1+\dfrac{x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2-\eta\mu^2x}}\quad ,\quad x>0$

Αν $\theta(x)=x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\quad ,\quad x\geq 0$

τότε $\theta'(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x=2\eta\mu^2x$

$\theta'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ εκτός από τα μεμονωμένα σημεία κ·π, κ =0,1,2,… στα οποία όμως είναι συνεχής άρα η συνάρτηση θ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.Για $x>0\Rightarrow\theta(x)>\theta(0)\Rightarrow\theta(x)>0$

Άρα και f΄(x) > 0 για κάθε $x\in(0,+\infty)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

(γ) $f(\rho)=\rho+\sqrt{\frac{1}{\rho}+\sigma\upsilon\nu^2\rho}\Leftrightarrow$

$\rho+\sqrt{\rho^2-\eta\mu^2\rho}=\rho+\sqrt{\frac{1}{\rho}+\sigma\upsilon\nu^2\rho}\Leftrightarrow$

$\rho^2-\eta\mu^2\rho=\frac{1}{\rho}+\sigma\upsilon\nu^2\rho\Leftrightarrow$

$\rho^2-\frac{1}{\rho}-1=0\Leftrightarrow\rho^3-\rho-1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3-x-1,\ x\in R$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική και $h(1)=-1<0\quad ,\quad h(2)=5>0$

$h(1)h(2)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho\in(1,2)$ ώστε $h(\rho)=0$

Θέμα 8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+\lambda}$, $x\in\Delta=(3,+\infty)$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-\infty$.

α) Δείξτε ότι $\lambda=3$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)\cdot\dfrac{\ln\left(\frac{x^3}{3^x}\right)}{3x}\right]$

δ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\alpha}{\eta\mu\alpha}\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι αδύνατη στο $\Delta=(3,+\infty)$

Λύση: α) Για λ ≠ 3 ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+\lambda}=\dfrac{-3}{-3+\lambda}\in R$

Ενώ για λ=3:

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x}{x-1}\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{3}{2}(+\infty)=-\infty$

Άρα λ=3

β) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x+3}-\dfrac{3}{x^2-4x+3}=1-\dfrac{3}{(x-2)^2-1}$

Έστω $x_1,x_2\in\Delta=(3,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

$3<x_1<x_2\Rightarrow 1<x_1-2<x_2-2\Rightarrow$

$1<(x_1-2)^2<(x_2-2)^2\Rightarrow 0<(x_1-2)^2-1<(x_2-2)^2-1\Rightarrow$

$\dfrac{1}{(x_1-2)^2-1}>\dfrac{1}{(x_2-2)^2-1}\Rightarrow\dfrac{1}{(x_1-2)^2-1}>\dfrac{1}{(x_2-2)^2-1}\Rightarrow$

$1-\dfrac{3}{(x_1-2)^2-1}<1-\dfrac{3}{(x_2-2)^2-1}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ άρα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται .Το πεδίο ορισμούχ της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f :

$$f(\Delta)\underset{f\uparrow}{\overset{f\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to 3^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,1)$$

και η τιμή της αντίστροφης προκύπτει από την y=f(x) λύνοντας ως προς x :

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\Leftrightarrow y=1-\dfrac{3}{(x-2)^2-1}\Leftrightarrow$

$\dfrac{3}{(x-2)^2-1}=1-y\Leftrightarrow(x-2)^2-1=\dfrac{3}{1-y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2)^2=\dfrac{4-y}{1-y}\Leftrightarrow|x-2|=\sqrt{\dfrac{4-y}{1-y}}\overset{x>3}{\Leftrightarrow}$

$$x-2=\sqrt{\frac{4-y}{1-y}} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{\frac{4-y}{1-y}}$$

Τελικά ή $f^{-1}(x)=2+\sqrt{\frac{4-x}{1-x}}$, $x<1$

γ) $\frac{\ln\left(\frac{x^3}{3^x}\right)}{3x}=\frac{\ln x^3-\ln 3^x}{3x}=\frac{3\ln x}{3x}-\frac{x\ln 3}{3x}=\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln 3}{3}$

άρα :

$$\lim_{x\to 3}\left[f(x)\cdot\frac{\ln\left(\frac{x^3}{3^x}\right)}{3x}\right]=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x}{x-1}\frac{\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln 3}{3}}{x-3}=-\frac{3}{2}\cdot h'(3)=$$

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\ln 3}{9}=\frac{\ln 3-1}{6}$$

όπου $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ και $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

δ) Για $x\in(3,+\infty)\Rightarrow f(x)<1$ και για

$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\frac{\alpha}{\eta\mu\alpha}>1$

οπότε η εξίσωση $f(x)=\frac{\alpha}{\eta\mu\alpha}\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

είναι αδύνατη στο $\Delta=(3,+\infty)$.

Θέμα 9. α) Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=x+8$ (1), για κάθε πραγματικό x.
β) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.
δ) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο R.

Λύση: α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x-8$, $x\in R$ η g είναι γνησίως αύξουσα στο R επομένως και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το σύνολο τιμών της g:

$$g(R)\underset{g\uparrow}{\overset{g\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$$

Για τις συναρτήσεις g και g^{-1} ισχύει :

$g(x)=y\Leftrightarrow g^{-1}(y)=x$, $x,y\in R$

Στην $g(x)=x^3+x-8$, $x\in R$ θέτουμε g(x)=y οπότε προκύπτει

$y=\left(g^{-1}(y)\right)^3+g^{-1}(y)-8$, $y\in R\Leftrightarrow$

$\left(g^{-1}(y)\right)^3+g^{-1}(y)=y+8$, $y\in R$ ή

$\left(g^{-1}(x)\right)^3+g^{-1}(x)=x+8$, $x\in R$

Οπότε η f υπάρχει και είναι η αντίστροφη της g.

β) Η συνάρτηση g με $g(x)=x^3+x-8$, $x\in R$ είναι γνησίως αύξουσα στο R και ισχύει $g(f(x))=f^3(x)+f(x)-8=x$. Έστω $x_1,x_2\in R$ με

$x_1<x_2\Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))\underset{g\uparrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)$

άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

γ) έστω A(x,y) ένα κοινό σημείο των C_f , $C_{f^{-1}}$

$$\begin{cases}y=f(x)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ f(y)=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ y+f(y)=x+f(x)\end{cases}$$

Θέτουμε $\kappa(x)=f(x)+x$, $x\in R$ και επειδή η συνάρτηση κ είναι γνησίως αύξουσα, είναι και 1-1 οπότε:

$$\begin{cases}y=f(x)\\ \kappa(y)=\kappa(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f^{-1}(x)=x\\ y=x\end{cases}\quad(2)$$

Ισχύει ότι $f=g^{-1}\Rightarrow f^{-1}=g$ οπότε

$$(2\Leftrightarrow)\begin{cases}g(x)=x\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x-8=x\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=8\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=x\end{cases}$$

Άρα το κοινό σημείο των Cf , Cf^{-1} είναι το A(2,2)

δ) Έστω $x_0\in R$ τυχαίο .Ισχύουν :

$f^3(x)+f(x)=x+8$ **και** $f^3(x_0)+f(x_0)=x_0+8$

Αφαιρώντας κατά μέλη :

$$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x-x_0\Rightarrow$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right]=x-x_0\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|=\left|x-x_0\right|\quad(3)$$

Ισχύει

$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)=\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}\geq 0\Rightarrow$$

$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1>0$$

Οπότε:

$$(3)\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{|x-x_0|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}<\frac{|x-x_0|}{1}=|x-x_0|\Rightarrow$$

$$-|x-x_0|<f(x)-f(x_0)<|x-x_0|\,(4)$$

Από κριτήριο παρεμβολής στην (4) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 επομένως συνεχής και στο R.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Σύνολο τιμών τριωνύμου σε κλειστό διάστημα

Διονύσης Γιάνναρος

Θεωρούμε το τριώνυμο με τύπο $f(t)=t^2+pt+q$. Συμβολίζουμε με $t_\kappa=-\frac{p}{2}$ την τετμημένη της παραβολής $y=t^2+pt+q$.
Αποδεικνύουμε μερικές προτάσεις, που ικανοποιούν τη συνάρτηση f.

Πρόταση 1.
Όλες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathbf{f(t)=t^2+pt+q}$ (για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων p, q), **ως γεωμετρικά σχήματα, είναι «ίσες»** μεταξύ τους και προκύπτουν η μια από την άλλη **με παράλληλη μεταφορά** (δηλ. το είδος της γραφικής παράστασης δεν εξαρτάται από τα p και q).

Απόδειξη: Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, βρίσκουμε ότι:

$$t^2+pt+q=\left(t+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=\left(t+t_\kappa\right)^2-\frac{p^2}{4}+q,\quad (1)$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις όλων των τριωνύμων της μορφής t^2+pt+q προκύπτουν από τη γραφική παράσταση της $y=t^2$ με παράλληλη – κατακόρυφη μετατόπιση ως προς τους άξονες, άρα είναι ίσες μεταξύ τους. Από την (1) προκύπτει επίσης: Η μέγιστη τιμή της f σε ένα διάστημα είναι ίση με την τιμή που έχει η f σε εκείνο το σημείο του διαστήματος, το οποίο απέχει από την τετμημένη της κορυφής t_κ τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση (αυτό θα είναι ένα από τα άκρα του διαστήματος). Ανάλογα, η ελάχιστη τιμή της f θα είναι ίση με την τιμή της στο σημείο , το οποίο σημείο είναι το πλησιέστερο στην κορυφή σημείο του διαστήματος. Αν η τετμημένη της κορυφής ανήκει στο διάστημα, τότε είναι η ίδια η τετμημένη της κορυφής, ενώ, αν η κορυφή είναι εκτός του διαστήματος , τότε είναι ένα από τα άκρα του διαστήματος.
Συνεπώς, το μήκος του διαστήματος του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης $f(t)=t^2+pt+q$ σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta],(\alpha<\beta)$ θα είναι ίσο με τη διαφορά $M-m$ (M: μέγιστο, m: ελάχιστο).
Στη συνέχεια η διαφορά $M-m$ θα τη συμβολίζουμε με $L(\alpha,\beta)$, δηλαδή ορίζουμε

$$L(\alpha,\beta)=M-m$$

Επειδή η f είναι συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση, το σύνολο τιμών της θα είναι διάστημα, αν $t\in[\alpha,\beta]$, το οποία δεν εξαρτάται από τον συντελεστή q (στη διαφορά $M-m$ ο q διαγράφεται).

Πρόταση 2.

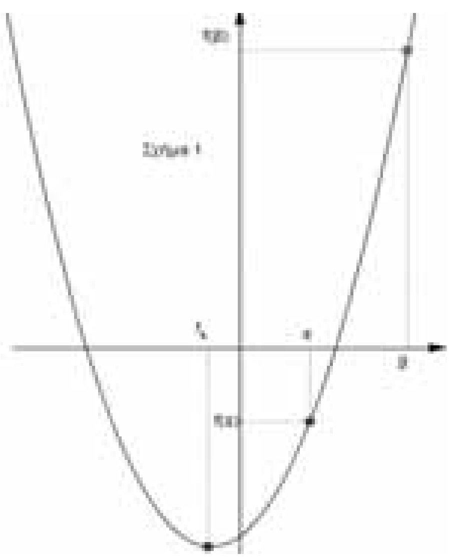
- Αν $-\frac{p}{2}\le\alpha$, τότε
$L(\alpha,\beta)=f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+p)=\ell(\alpha+\beta+p)$
όπου $\ell=\beta-\alpha$ είναι το μήκος του $[\alpha,\beta]$.
- Αν $\alpha\le-\frac{p}{2}\le\frac{\alpha+\beta}{2}$, τότε
$$L(\alpha,\beta)=f(\beta)-f\left(-\frac{p}{2}\right)=\left(\beta+\frac{p}{2}\right)^2$$
- Αν $\frac{\alpha+\beta}{2}\le-\frac{p}{2}\le\beta$, τότε
$$L(\alpha,\beta)=f(\alpha)-f\left(-\frac{p}{2}\right)=\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2$$
- Αν $-\frac{p}{2}\ge\alpha$, τότε $L(\alpha,\beta)=f(\alpha)-f(\beta)=$
$=-(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+p)=-\ell(\alpha+\beta+p)$ Συνοπτικά η παραπάνω πρόταση είναι:

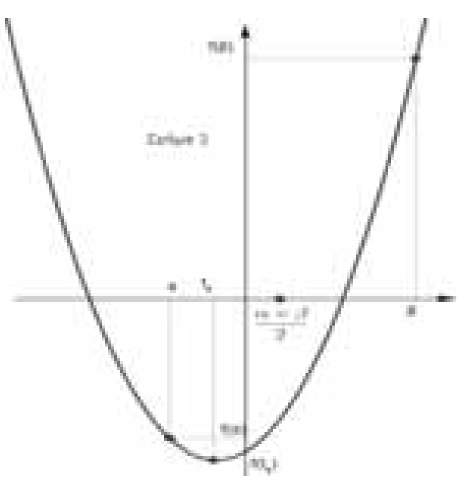
$$L(\alpha,\beta)=\begin{cases}\ell(\alpha+\beta+p),\ \text{αν}\ -2\alpha\le p\\ \left(\beta+\frac{p}{2}\right)^2,\ \text{αν}\ -(\alpha+\beta)\le p\le-2\alpha\\ \left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2,\ \text{αν}\ -2\beta\le p\le-(\alpha+\beta)\\ -\ell(\alpha+\beta+p),\ \text{αν}\ \ p\le-2\beta\end{cases}$$

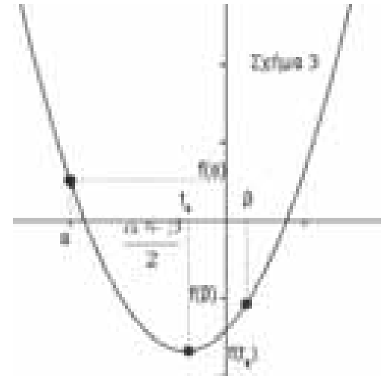
ή θεωρώντας ότι $t_\kappa = -\dfrac{p}{2} \Leftrightarrow p = -2t_\kappa$, τότε, συναρτήσει του t_κ, έχουμε:

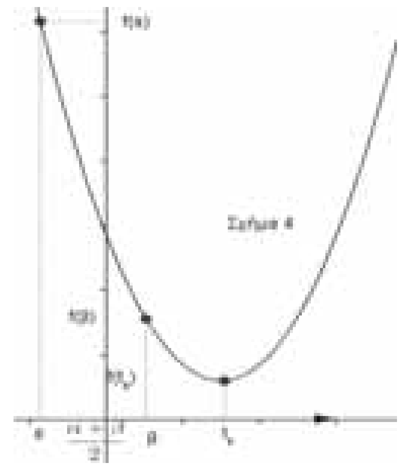
$$L(\alpha,\beta)=\varphi(t_\kappa)=\begin{cases} 2\ell\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-t_\kappa\right) \text{ αν } t_\kappa \le \alpha \\ (\beta-t_\kappa)^2, \text{ αν } \alpha \le t_\kappa \le \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ (\alpha-t_\kappa)^2, \text{ αν } \dfrac{\alpha+\beta}{2} \le t_\kappa \le \beta \\ -2\ell\left(t_\kappa-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \text{ αν } t_\kappa \ge \beta \end{cases}$$

Η μονοτονία του τριωνύμου και οι επόμενες γραφικές παραστάσεις για τις διάφορες θέσεις του t_κ ως προς το διάστημα $[\alpha, \beta]$ μας βοηθούν να καταλάβουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα.









Σχόλια

1. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: $\underbrace{\max f(t)}_{t\in[\alpha,\beta]} = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

2. Ανάλογα συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν, όταν ο συντελεστής του t^2 είναι αρνητικός.

Εφαρμογή

Για ποιες τιμές της παραμέτρου α, η ανίσωση

$$\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + \alpha\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \ge 0$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Είναι: $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = 1 - 3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x$, οπότε

$$\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + \alpha\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{3}{4}\eta\mu^2 2x + \frac{\alpha}{2}\eta\mu 2x$$

Θέτουμε $\eta\mu 2x = y$, $-1 \le y \le 1$, οπότε η αρχική γίνεται $g(y) = -\dfrac{3}{4}y^2 + \dfrac{\alpha}{2}y + 1 \ge 0,\ y \in [-1, 1]$

Η συνάρτηση g είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού με συντελεστή του y^2 τον αριθμό $-\dfrac{3}{4} < 0$.

Επομένως η C_g είναι μια παραβολή με τους κλάδους προς τα κάτω. Για να ισχύει η $g(y)\geq 0$ για κάθε $y\in[-1,\,1]$ αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις

$$g(-1)\geq 0 \text{ και } g(1)\geq 0$$

Από τις δυο τελευταίες προκύπτει ότι:

$\alpha\leq\frac{1}{2}$ και $\alpha\geq-\frac{1}{2}$, δηλαδή $-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$.

Άρα, $\alpha\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Πρόταση 3.

Η ελάχιστη τιμή του $L(\alpha,\beta)=\varphi(t_\kappa)$ συμβαίνει, τότε και μόνο τότε, όταν ο άξονας της παραβολής $y=t^2+pt+q$ διέρχεται από το μέσο του $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη: Η μελέτη, ως προς τη μονοτονία της συνάρτησης $\varphi(t_\kappa)$ της πρότασης 2, μας οδηγεί στον επόμενο πίνακα μεταβολών

t_κ	$-\infty$		α		$\frac{\alpha+\beta}{2}$		β		$+\infty$
$\varphi(t_\kappa)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

διότι:

- Αν $t_\kappa\leq\alpha$, τότε είναι $\varphi(t_\kappa)=2\ell\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-t_\kappa\right)$

με $\varphi'(t_\kappa)=-2\ell<0$

- Αν $\alpha\leq t_\kappa\leq\frac{\alpha+\beta}{2}$, τότε είναι $\varphi(t_\kappa)=(\beta-t_\kappa)^2$

με $\varphi'(t_\kappa)=-2(\beta-t_\kappa)=2(t_\kappa-\beta)<0$

- Αν $\frac{\alpha+\beta}{2}\leq t_\kappa\leq\beta$, τότε είναι $\varphi(t_\kappa)=(\alpha-t_\kappa)^2$

με $\varphi'(t_\kappa)=-2(\alpha-t_\kappa)=2(t_\kappa-\alpha)>0$

- Αν $t_\kappa\geq\beta$, τότε είναι $\varphi(t_\kappa)=2\ell\left(t_\kappa-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

με $\varphi'(t_\kappa)=2\ell>0$. Συνεπώς η συνάρτηση $\varphi(t_\kappa)$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $t_\kappa=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Επιπλέον, $\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$ και επομένως

$$\min L(\alpha,\,\beta)=\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2=\frac{\ell^2}{4}$$

Το αντίστροφο είναι προφανές.

Ως συνέπεια της πρότασης 3 έχουμε την επόμενη.

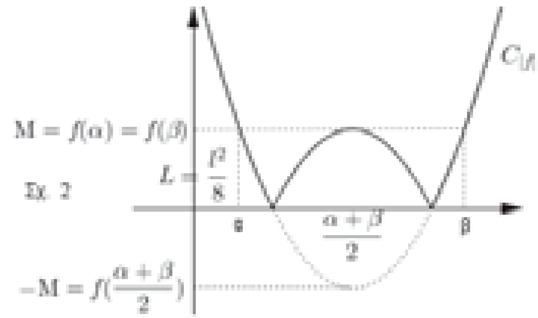
Πρόταση 4.

Όταν η μεταβλητή t ενός τριωνύμου t^2+pt+q διατρέχει ένα διάστημα μήκους ℓ, οι τιμές του τριωνύμου διατρέχουν ένα διάστημα με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{\ell^2}{4}$.

Άσκηση (Βασική)

Να βρεθούν οι τιμές των p και q, για τις οποίες η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(t)=|t^2+pt+q|$ σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ να είναι ελάχιστη.

ΛΥΣΗ: Έστω M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(t)=|t^2+pt+q|$ στο διάστημα $[\alpha,\,\beta]$.



Τότε για κάθε $t\in[\alpha,\beta]$ ισχύει η διπλή ανίσωση

$$-M\leq t^2+pt+q\leq M,\ (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι οι τιμές του τριωνύμου t^2+pt+q ανήκουν σε ένα διάστημα μήκους το πολύ ίσου με $2M$. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 4, θα έχουμε:

$$2M\geq\frac{\ell^2}{4}=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4} \quad \text{ή} \quad M\geq\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}$$

με την ισότητα στην τελευταία να ισχύει όταν

$$t_\kappa=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Τότε οι τιμές του τριωνύμου στα άκρα του διαστήματος είναι ίσες με M. Συνεπώς, σύμφωνα με την πρόταση 3 οι παράμετροι p, q θα βρεθούν από τις συνθήκες:

$$\begin{cases}-\frac{p}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=-(\alpha+\beta)\\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+p\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+q=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\end{cases}$$

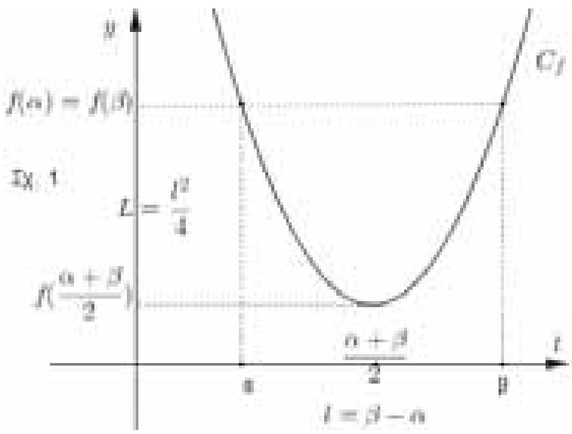
$$\Leftrightarrow\begin{cases}p=-(\alpha+\beta)\\ q=\frac{\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2}{8}\end{cases}$$

Σχόλιο: Είναι $M\geq\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}$, συνεπώς η ελάχιστη τιμή του M είναι ίση με $\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}$ και από την σχέση

$$-M\le t^2+pt+q\le M$$

προκύπτει ότι $t^2+pt+q\ge -M=-\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{8}$ και έτσι δικαιολογείται η συνθήκη $\varphi\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{8}$

Στα επόμενα σχήματα εμφανίζονται γεωμετρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.



Άσκηση (εφαρμογή της βασικής)

Να βρείτε όλα τα ζεύγη των αριθμών p, q για τα οποία η ανίσωση $|x^2+px+q|\le 2$ ισχύει για κάθε $x\in[1,5]$.

ΛΥΣΗ: Από τους τύπους της (βασικής) άσκησης έχουμε: $p=-(\alpha+\beta)=-6$ και $q=\dfrac{2\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2}{8}=7$.

Έτσι, είναι: $|x^2-6x+7|\le 2\Leftrightarrow x\in[1,5]$.

Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης των προηγούμενων θεμάτων βασίζεται στην επόμενη μέθοδο που είναι γνωστή ως

Μέθοδος των τριών σημείων

Λύνουμε με την μέθοδο αυτή το προηγούμενο θέμα. Είναι:

$$|x^2+px+q|\le 2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+px+q\le 2\\ x^2+px+q\ge -2\end{cases},\ x\in[1,5]$$

Επειδή η ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in[1,5]$ θα ισχύει ειδικά, όταν $x=1$, $x=5$ και $x=3$ (μέσο του διαστήματος). Έτσι, έχουμε:

$$\begin{cases}1+p+q\le 2\\ 25+5p+q\le 2\\ 9+3p+q\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p+q\le 1 & (1)\\ 5p+q\le -23 & (2)\\ 3p+q\ge -11 & (3)\end{cases}$$

Από τις (2), (3) έχουμε:

$$\begin{cases}5p+q\le -23\\ -3p-q\le 11\end{cases}\Rightarrow 2p\le -12\Rightarrow p\le -6,\ (4)$$

Ομοίως από τις (3), (1) έχουμε:

$$\begin{cases}3p+q\ge -11\\ -p-q\ge -1\end{cases}\Rightarrow 2p\ge -12\Rightarrow p\ge -6,\ (5)$$

Από τις (5) και (6) βρίσκουμε ότι $p=-6$ και με αντικατάσταση του στις (1), (3) προκύπτει ότι $q=7$.

Σχόλιο: Η μέθοδος των τριών σημείων αιτιολογείται από τις προηγούμενες προτάσεις, που, με τη βοήθεια τους, διαπιστώσαμε ότι το σύνολο τιμών ενός τριωνύμου, σε ένα διάστημα, εξαρτάται από τις τιμές του τόσο στα άκρα όσο και στο μέσο του διαστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $y=f(x)=2x^2-2\alpha x+1$, αν $x\in[-1,1]$**

ΛΥΣΗ: Η τετμημένη της κορυφής της παραβολής $y=f(x)$ είναι: $x_\kappa=\dfrac{\alpha}{2}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\dfrac{\alpha}{2}\le -1\Leftrightarrow\alpha\le -2$, τότε $\max f(x)=f(1)=3-2\alpha$ και $\min f(x)=f(-1)=3+2\alpha$.
- $-1\le\dfrac{\alpha}{2}\le 0\Leftrightarrow -2\le\alpha\le 0$, τότε
- $\max f(x)=f(1)=3-2\alpha$ και $\min f(x)=f(x_\kappa)=1-\dfrac{\alpha^2}{2}$

.

- $0<\dfrac{\alpha}{2}\le 1\Leftrightarrow 0<\alpha\le 2$, τότε
- $\max f(x)=f(-1)=3+2\alpha$ και $\min f(x)=f(x_\kappa)=1-\dfrac{\alpha^2}{2}$.
- $1<\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\alpha>2$, τότε $\max f(x)=f(-1)=3+2\alpha$ και $\min f(x)=f(1)=3-2\alpha$.

2. **Για ποιες τιμές του α, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $y=f(x)=x^2+(\alpha+4)x+2\alpha+3$ στο διάστημα $[0,2]$ είναι ίση με -4;**

ΛΥΣΗ: Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $-\dfrac{\alpha+4}{2}\le 0\Leftrightarrow\alpha\ge -4$. Τότε είναι:

$\min f(x)=f(0)=2\alpha+3$ και $2\alpha+3=-4\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{7}{2}$

(αποδεκτή τιμή)

- $0<-\dfrac{\alpha+4}{2}\le 2\Leftrightarrow -8\le\alpha<-4$. Τότε είναι:

$\min f(x)=f\left(-\dfrac{\alpha+2}{2}\right)=-4\Leftrightarrow-\alpha^2=-12\Leftrightarrow\alpha=\pm2\sqrt{3}$

(μη αποδεκτές τιμές)

- $2<-\dfrac{\alpha+4}{2}\Leftrightarrow\alpha<-8$. Τότε είναι:

$\min f(x)=f(2)=4\alpha+15$ και

$4\alpha+15=-4\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{19}{4}$

(μη αποδεκτή τιμή). Άρα, $\alpha=-\dfrac{7}{2}$.

3. Για ποιες τιμές της παραμέτρου α, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=4^x-2^{3+x}\cdot\alpha+7\alpha^2$ στο διάστημα $[-2,0]$ είναι αρνητική;

ΛΥΣΗ: Επειδή $-2\le x\le 0$ είναι $\dfrac{1}{4}\le 2^x\le 1$. Τότε οι ζητούμενες τιμές της παραμέτρου, θα είναι εκείνες για τις οποίες η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $y=g(t)=t^2-8\alpha t+7\alpha^2$ στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ είναι αρνητική (θέσαμε στην αρχική συνάρτηση $2^x=t$). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1\le 4\alpha\Leftrightarrow\alpha\ge\dfrac{1}{4}$. Τότε είναι

$$\min g(t)=g(1)=1-8\alpha+7\alpha^2<0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση οι ζητούμενες τιμές του α, θα προκύψουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases}\alpha\ge\dfrac{1}{4}\\ 1-8\alpha+7\alpha^2<0\end{cases}$$

- $\dfrac{1}{4}<\alpha<1\Leftrightarrow\dfrac{1}{16}<\alpha<\dfrac{1}{4}$. Τότε είναι

$$\min g(t)=g(4\alpha)=16\alpha^2-32\alpha^2+7\alpha^2<0$$

Έτσι, εδώ έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}\dfrac{1}{16}<\alpha<\dfrac{1}{4}\\ -9\alpha^2<0\end{cases},\ \text{αδύνατο}$$

- $4\alpha\le\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha\le\dfrac{1}{16}$. Τότε είναι

$$\min g(t)=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{16}-2\alpha+7\alpha^2<0$$

οπότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}\alpha\le\dfrac{1}{16}\\ 7\alpha^2-2\alpha+\dfrac{1}{16}<0\end{cases}$$

Από την ένωση των λύσεων των παραπάνω συστημάτων βρίσκουμε ότι $\dfrac{1}{28}<\alpha<1$.

4. Να αποδείξετε ότι για $\alpha=-12$ και $\beta=17$ η μέγιστη τιμή της παράστασης $|2x^2+\alpha x+\beta|$ στο διάστημα $[2,4]$ είναι ίση με 1. Ισχύει το αντίστροφο;

ΛΥΣΗ: Είναι: $|2x^2+\alpha x+\beta|\le M\Leftrightarrow\left|x^2+\dfrac{\alpha}{2}x+\dfrac{\beta}{2}\right|\le\dfrac{M}{2}$

οπότε, $\dfrac{M}{2}=1\Leftrightarrow M=2$. Επομένως, από τους τύπους της (βασικής) άσκησης θα έχουμε:

$$p=\dfrac{\alpha}{2}=-(2+4)=-6\Rightarrow\alpha=-1\ \text{και}$$

$$q=\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{4+16+6\cdot2\cdot4}{8}\Rightarrow\beta=17$$

Αντίστροφο: Έστω $f(x)=|2x^2-12x+17|$, $x\in[2,4]$

Η τετμημένη x_κ της κορυφής της παραβολής $y=2x^2-12x+17$ είναι ίση με 3 δηλ. ο άξονας της παραβολής διέρχεται από το μέσο του $[2,4]$, συνεπώς θα είναι $f(2)=f(3)=f(4)=1$, ενώ το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[0,1]$ με $x\in[0,4]$. Επομένως ισχύει το αντίστροφο.

5. Να επιλέξετε τον αριθμό β, ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=|-2x^2+x+\beta|$ στο διάστημα $[0,1]$ να είναι ελάχιστη.

ΛΥΣΗ: Είναι:

$$f(x)=|-2x^2+x+\beta|=\left|-2\left(x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\beta}{2}\right)\right|=2\left|x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\beta}{2}\right|$$

Αν M είναι η μέγιστη τιμή της στο $[0,1]$, τότε για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε:

$$2\left|x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\beta}{2}\right|\le M\Leftrightarrow\left|x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\beta}{2}\right|\le\dfrac{M}{2}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπεράσματα είναι: $\dfrac{M}{2}\ge\dfrac{(1-0)^2}{8}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow M\ge\dfrac{1}{4}$.

Άρα η ελάχιστη τιμή του M είναι $\dfrac{1}{4}$ και από τους τύπους της βασικής άσκησης βρίσκουμε

$\beta=\frac{1}{8}$, οπότε το ζητούμενο τριώνυμο είναι το

$$f(x)=-2x^2+x+\frac{1}{8}$$

6. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη των αριθμών α, β για τα οποία η ανισώσεις $|2x^2+\alpha x+\beta|>1$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[1,3]$.

ΛΥΣΗ: Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το: «Να βρεθούν οι α, β ώστε $|2x^2+\alpha x+\beta|\le 1$, για κάθε $x\in[1,3]$». Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των τριών σημείων θεωρώντας ως «κατάλληλα» τα 1, 3, 2. Έτσι έχουμε αρχικά:

$$\begin{cases}2x^2+\alpha x+\beta\le 1\\ 2x^2+\alpha x+\beta\ge -1\end{cases}\text{ για κάθε } x\in[1,3]$$

Με $x=1,3,2$ έχουμε: $\begin{cases}\alpha+\beta\le -1 & (1)\\ 3\alpha+\beta\le -17 & (2)\\ 2\alpha+\beta\ge -9 & (3)\end{cases}$

Από τις (2), (3) έχουμε:

$$\begin{cases}3\alpha+\beta\le -17\\ 2\alpha+\beta\ge -9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha+\beta\le -17\\ -2\alpha-\beta\le 9\end{cases}\Rightarrow \alpha\le -8,\quad (4)$$

Από τις (3), (1) έχουμε:

$$\begin{cases}2\alpha+\beta\ge -9\\ \alpha+\beta\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta\le -1\\ -2\alpha-\beta\le 9\end{cases}\Rightarrow \alpha\ge -8,\quad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι $\alpha=-8$. Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι $\beta=7$.

Συνεπώς έχουμε $\begin{cases}2x^2-8x+7\le 1\\ 2x^2-8x+7\ge -1\end{cases}$

λύση του οποίου είναι το διάστημα $[1,3]$.

Το επόμενο θέμα ήταν θέμα εισαγωγικών εξετάσεων στο ΕΜΠ το 1955. Αναδημοσιεύτηκε, λύθηκε και σχολιάστηκε από τον εκλεκτό συνάδελφο Γ. Τασσόπουλο στο τεύχος 99 του περιοδικού στη στήλη «Θέματα παλαιοτέρων ετών». Αφήνουμε αναλλοίωτο το γλωσσικό ύφος.

7. «Δείξατε ότι, το τριώνυμο $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ δεν μπορεί να λαμβάνει πάντοτε τιμάς απολύτως μικρότερας του 2, για τιμάς του x από -2 έως 2 των ακραίων τιμών συμπεριλαμβανομένων δια του x, ότι δηλ. δεν είναι δυνατόν να είναι $-2<f(x)<2$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση $g(x)=|f(x)|=|x^2+\alpha x+\beta|$ είναι συνεχής επομένως στο διάστημα $[-2,2]$ θα έχει μέγιστο έστω Μ. Τότε για κάθε $x\in[-2,2]$ θα είναι: $|f(x)|\le M$, (1)

Η ελάχιστη τιμή του Μ κατά τα γνωστά θα είναι μεγαλύτερη ή. ίση του $\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}=2$, δηλ. $M\ge 2$.

Επομένως θα υπάρχει $x_o\in[-2,2]$ ώστε $|f(x)|=2$. Αν εργαστούμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα (μέθοδος των τριών σημείων) ή χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της (βασικής) άσκησης θα διαπιστώσουμε ότι ένα τέτοιο τριώνυμο είναι το $g(x)=x^2-2$ με $|g(0)|=|g(-2)|=|g(2)|=2$ δηλ. το συγκεκριμένο τριώνυμο δεν ικανοποιεί τη συνθήκη $|x^2-2|<2$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

8. Αν υπάρχουν $\alpha\neq 0,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $|\alpha x^2+\beta x+\gamma|\le 1$ να ισχύει για κάθε $x\in[-1,1]$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του α.

ΛΥΣΗ: Επειδή $|\alpha x^2+\beta x+\gamma|\le 1$ για κάθε $x\in[-1,1]$ θα ισχύει: $\alpha x^2+\beta x+\gamma\le 1$ και $\alpha x^2+\beta x+\gamma\ge -1$.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο των τριών σημείων με $x=-1$, $x=1$, $x=0$ και έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma\le 1\\ \alpha+\beta+\gamma\le 1\\ \gamma\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma\le 1\\ \alpha+\beta+\gamma\le 1\\ -2\gamma\le -2\end{cases}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $2\alpha\le 4\Rightarrow\alpha\le 2$. Άρα η μέγιστη τιμή του α είναι $\alpha=2$.

Σχόλιο: Αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που μας δίνουν τις τιμές των συντελεστών, ώστε η μέγιστη τιμή της $f(x)=|\alpha x^2+\beta x+\gamma|$ να είναι ελάχιστη με $x\in[-1,1]$ βρίσκουμε ότι $\beta=0$, $\gamma=-1$. Συνεπώς το τριώνυμο με αυτή την ιδιότητα είναι το $2x^2-1$

9. Η συνάρτηση $f(x)=x^2+2(c-d)x+3c-d$ είναι τέτοια ώστε $f(1)f(-1)\le 0$ και $|c-d|\ge 1$. Να βρείτε τις τιμές των c και d για τις οποίες το σύνολο τιμών της συνάρτησης $|f(x)|$ στο διάστημα $[-1,1]$ να είναι ελάχιστο. Να βρεθεί αυτό το σύνολο.

ΛΥΣΗ: Αν θέσουμε $p=2(c-d)$, $q=3c-d$, τότε έχουμε $f(x)=x^2+px+q$

Η τετμημένη της κορυφής της παραβολής

$$y=f(x)=x^2+px+q$$

είναι με $x_\kappa=-\frac{p}{2}=-(c-d)$, συνεπώς

$|x_\kappa|=|c-d|\geq 1$ δηλ. είναι εκτός του διαστήματος $[-1, 1]$.

Από το Θ. Bolzano προκύπτει ότι μια από τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ ανήκει στο διάστημα $[-1, 1]$. Επομένως, κατά τα γνωστά η μέγιστη τιμή της f θα συμβαίνει είτε για $x=-1$ είτε για $x=1$, δηλ.

$M(\text{μέγιστο})=\max(|p+q+1|, |-p+q+1|)$.

Είναι όμως: $|p+q+1|\leq|p|+|q+1|$ και $|-p+q+1|\leq|p|+|q+1|$ Άρα $M(\text{μέγιστο})=|p|+|q+1|$.

Από την $p=2(c-d)$ προκύπτει ότι $|p|=2|c-1|\geq 2$ οπότε θα είναι $M\geq 2$. Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του M είναι $M=2$ και εξασφαλίζεται για $q=-1$ και $|p|=2$. Από τις σχέσεις $p=2(c-d), q=3c-d$ για $q=-1, |p|=2$ βρίσκουμε: $(c, d)=(0, 1)$ ή $(c, d)=(-1, -2)$

το δε σύνολο τιμών της $|f(x)|$ θα είναι το διάστημα $[0, 2]$.

10. Να βρεθούν οι τιμές των c και d για τις οποίες η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=\left|4\frac{3^x+3^{-x}-2}{3^x+3^{-x}+2}+2(c+2d)\frac{3^x-1}{3^x+1}+2c+d\right|$$

στο διάστημα $[-1, 1]$ είναι ελάχιστη.

ΛΥΣΗ: Θέτουμε $3^x=u$, οπότε η συνάρτηση γίνεται $f(u)=\left|4\frac{u+u^{-1}-2}{u+u^{-1}+2}+2(c+2d)\frac{u-1}{u+1}+2c+d\right|$

$$=\left|4\frac{u^2-2u+1}{u^2+2u+1}+2(c+2d)\frac{u-1}{u+1}+2c+d\right|$$

και αν σ' αυτή θέσουμε $t=2\cdot\frac{u-1}{u+1}=2\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}$

καταλήγουμε στην $f(t)=|t^2+(c+2d)t+2c+d|$

Σχόλιο: Είναι: $x\in[-1,]$ και επειδή

$$t(x)=2\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}=2\left(1-\frac{2}{3^x+1}\right)$$

η συνάρτηση $t(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$, το σύνολο τιμών του t θα είναι το διάστημα $[t(-1), t(1)]=[-1, 1]$. Συνεπώς με αναδιατύπωση το αρχικό πρόβλημα γίνεται: «Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων c και d για τις οποίες η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(t)=|t^2+(c+2d)t+2c+d|$ στο διάστημα $[-1, 1]$ να είναι ελάχιστη».

Στο παράδειγμα αυτό είναι $\alpha=-1, \beta=1$ και σύμφωνα με τις εκφράσεις των p, q (βασική άσκηση) έχουμε: $\begin{cases}c+2d=0\\ 2c+d=\frac{2-6}{3}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-\frac{1}{3}\\ d=\frac{1}{6}\end{cases}$

11. Έστω $f(x)=x^2+px+q$. Αν είναι γνωστό ότι η ανίσωση $|f(x)|>\frac{1}{2}$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[1, 3]$ να υπολογίσετε την τιμή

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{2025}\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\ldots)$$

ΛΥΣΗ: Επειδή η $|f(x)|>\frac{1}{2}$ δεν έχει λύση στο $[1, 3]$, τότε για κάθε $x\in[1, 3]$ θα ισχύει $|f(x)|\leq\frac{1}{2}$. Έτσι, ειδικά θα είναι (μέθοδος των τριών σημείων) $|f(1)|\leq\frac{1}{2}$, $|f(3)|\leq\frac{1}{2}$, $|f(2)|\leq\frac{1}{2}$, δηλαδή έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}|1+p+q|\leq\frac{1}{2} & (1)\\ |9+3p+q|\leq\frac{1}{2} & (2)\\ |4+2p+q|\leq\frac{1}{2} & (3)\end{cases}$$

Από την (1) προκύπτει $p+q\leq-\frac{1}{2}$ (1')

Από την (2) προκύπτει $3p+q\leq-\frac{17}{2}$ (2')

Από την (3) προκύπτει $2p+q\geq-\frac{9}{2}$ (3')

Από τις (3΄) και (1΄) έχουμε:

$$\begin{cases}2p+q\geq-\frac{9}{2}\\ p+q\leq-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2p-q\leq-\frac{9}{2}\\ p+q\leq-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow p\geq-4$$

Από τις (2΄) και (3΄) έχουμε:

$$\begin{cases}3p+q\leq-\frac{17}{2}\\ 2p+q\geq-\frac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3p+q\leq-\frac{17}{2}\\ -2p-q\leq\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow p\leq-4$$

Από τις δυο τελευταίες έχουμε $p=-4$. Επίσης για $p=-4$ είναι: $\begin{cases} -4+q\le -\dfrac{1}{2} \\ -8+q\ge -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q\le \dfrac{7}{2} \\ q\ge \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow q=\dfrac{7}{2}$

Συνεπώς το τριώνυμο $f(x)$ είναι το

$$f(x)=x^2-4x+\frac{7}{2}=(x-2)^2-\frac{1}{2},\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι: $f\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$, $f\left(f\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\right)=f\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι όταν το πλήθος των «συνθέσεων» είναι περιττό, τότε το αποτέλεσμα είναι $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$. Επομένως,

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f}_{2025}\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\ldots\right)=\frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

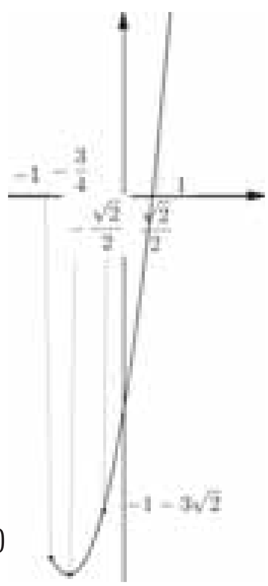
12. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\varepsilon\varphi^2 2x+6\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu 2x-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}$

ΛΥΣΗ: Θέτουμε $t=\eta\mu x$. Επειδή $\sigma\upsilon\nu 2x\neq 0\Leftrightarrow 1-2\eta\mu^2 x\neq 0$, έχουμε $t\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του συνόλου τιμών της συνάρτησης $f(t)=4t^2+6t-3=4\left(t+\dfrac{3}{4}\right)^2$

με $t\in[-1,1]$, $t\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Είναι:

$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-3\sqrt{2}<-5=f(-1)$



Επειδή $t\neq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ η τιμή $-1-3\sqrt{2}$ θα έπρεπε να απορριφθεί από το σύνολο τιμών της f.

Όμως την ίδια τιμή λαμβάνει η συνάρτηση f στο σημείο το συμμετρικό του $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ως προς την τετμημένη $x_\kappa=-\dfrac{3}{4}$ της κορυφής της παραβολής $y=4\left(t+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{21}{4}$.

Το σημείο αυτό έχει τετμημένη $-\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}>-1$.

Συνεπώς η τιμή $-1-3\sqrt{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Παρατηρούμε επίσης ότι την τιμή $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{2}-1$ η συνάρτηση τη λαμβάνει ακριβώς μια φορά στο $[-1,1]$, οπότε αυτή η τιμή δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Επιπλέον, $f(-1)=-5$, $f(1)=7$, $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{21}{4}$,

συνεπώς κατά τα γνωστά το σύνολο τιμών της συνάρτησης θα είναι το $\left[-\dfrac{21}{4},\ 7\right]-\left\{3\sqrt{2}-1\right\}$.

Επισήμανση: Στο προηγούμενο άρθρο μας (τ. 132) στην άσκηση 15 το σύστημα (Σ) εκ πρώτης όψεως φαίνεται να ισοδυναμεί με $\alpha\in\left(4-2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2}\right)$, αφού $4-2\sqrt{2}>1$, όπως γράψαμε ισοδυναμεί με $\alpha\in\left(1,\ 4+2\sqrt{2}\right)$. Για να γίνει όμως αυτό κατανοητό, πρέπει επιπλέον να ληφθεί υπόψη ότι το $f\left(\dfrac{4-\alpha}{2}\right)$ είναι ελάχιστο της f, μόνο όταν $\dfrac{4-\alpha}{2}\notin(1,3)$, δηλαδή $\alpha\le-2$ ή $\alpha\ge 2$

Άρα: $(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix} 4-2\sqrt{2}<\alpha<4+2\sqrt{2} \\ \alpha\ge 2 \end{pmatrix} \text{ή} \begin{pmatrix} \alpha>1 \\ \alpha\le 2 \end{pmatrix}\right.$

$$\Leftrightarrow \alpha\in\left[2,\ 4+2\sqrt{2}\right)=S_1 \text{ ή } \alpha\in(1,2]=S_2$$

$$\Leftrightarrow \alpha\in S_1\cup S_2=\left(1,\ 4+2\sqrt{2}\right)$$

Ευχαριστούμε τον εκλεκτό συνάδελφο και φίλο Γιώργο Τασσόπουλο για την παραπάνω επισήμανση. Επίσης τον συνάδελφο Γκολφινόπουλο Κώστα για την επισήμανση του, στις ασκήσεις Α1 και Α2, στο αντίστοιχο άρθρο, του προηγούμενου τεύχους.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 427 (ΤΕΥΧΟΣ 131)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$3\left(\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}+\frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma}+\frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}\right)\geq(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)\left(\frac{1}{\eta\mu A}+\frac{1}{\eta\mu B}+\frac{1}{\eta\mu\Gamma}\right)$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός)

Επειδή

$$(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)\left(\frac{1}{\eta\mu A}+\frac{1}{\eta\mu B}+\frac{1}{\eta\mu\Gamma}\right)=$$

$$=3+\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}+\frac{\eta\mu B}{\eta\mu A}+\frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma}+\frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu B}+\frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}+\frac{\eta\mu A}{\eta\mu \Gamma}$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$2\left(\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}+\frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma}+\frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}\right)\geq 3+\frac{\eta\mu B}{\eta\mu A}+\frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu B}+\frac{\eta\mu A}{\eta\mu \Gamma}$$

ή λόγω του νόμου των ημιτόνων, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\geq 3$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta)-(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)\geq 3\alpha\beta\gamma$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(2\gamma-\beta)+\beta^2(2\alpha-\gamma)+\gamma^2(2\beta-\alpha)\geq 3\alpha\beta\gamma\ ,\ (1)$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε την (1).

Έστω $\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Τότε υπάρχουν μη αρνητικοί x,y με $0\leq x\leq y$ ώστε $\beta=\alpha+x,\ \gamma=\alpha+y$ και η (1) γράφεται

$$\alpha^2(2\alpha+2y-\alpha-x)+(\alpha+x)^2(2\alpha-\alpha-y)+(\alpha+y)^2(2\alpha+2x-\alpha)$$

$$\geq 3\alpha(\alpha^2+\alpha y+\alpha x+xy)\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2(\alpha+2y-x)+(\alpha+x)^2(\alpha-y)+(\alpha+y)^2(\alpha+2x)\geq 3\alpha(\alpha+x)(\alpha+y)$$

η οποία μετά τις πράξεις γράφεται ισοδύναμα

$$\alpha x^2-x^2y-\alpha xy+y^2\alpha+2xy^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x^2-xy+y^2)+xy(2y-x)\geq 0$$

η οποία προφανώς ισχύει.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο, Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη και Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο ο οποίος επισημαίνει ότι θα μπορούσε να **μην υπάρχει** η «τεχνική» εμπλοκή των ημιτόνων και να ήταν καθαρά αλγεβρικό θέμα.

ΑΣΚΗΣΗ 428 (ΤΕΥΧΟΣ 131)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2\left[\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^2\right]\geq\frac{36}{\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι)

Είναι:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2\left[\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)+\left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)+\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)^2$$

$$\geq\left(\frac{3}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}\right)^2\frac{3}{\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}}+\left(\frac{3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\alpha\beta\gamma}\right)^2$$

$$=\frac{27}{\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^4}}+\frac{9\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{27}{\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}+\frac{9}{\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^4}}$$

$$=\frac{27}{\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}+\frac{9}{\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}=\frac{36}{\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι
Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός,
Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη
και Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

ΑΣΚΗΣΗ 422 (ΤΕΥΧΟΣ 131)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$

$$\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}+\frac{\gamma+\alpha}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}}\right)$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια)
Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$\text{συν}\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

Είναι:

$$\frac{\alpha}{\text{ημΑ}}=\frac{\beta}{\text{ημΒ}}=\frac{\gamma}{\text{ημΓ}}=\frac{\beta+\gamma}{\text{ημΒ}+\text{ημΓ}}$$

οπότε

$$\text{ημΒ}+\text{ημΓ}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\text{ημΑ}$$

$$\Rightarrow 2\text{ημ}\frac{\text{Β}+\text{Γ}}{2}\text{συν}\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}2\text{ημ}\frac{\text{Α}}{2}\text{συν}\frac{\text{Α}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{συν}\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\text{ημ}\frac{\text{Α}}{2}$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\text{συν}\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\text{ημ}\frac{\text{Α}}{2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\Leftrightarrow 2\text{ημ}^2\frac{\text{Α}}{2}\le\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

$$\Leftrightarrow(\beta^2+\gamma^2)(1-\text{συνΑ})\le(\beta^2+\gamma^2)-2\beta\gamma\text{συνΑ}$$

$$\Leftrightarrow 2\beta\gamma\text{συνΑ}\le(\beta^2+\gamma^2)\text{συνΑ}$$

που ισχύει, αφού $\text{συνΑ}>0$ και $\beta^2+\gamma^2\ge 2\beta\gamma$.
Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\text{συν}\frac{\text{Γ}-\text{Α}}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\gamma+\alpha}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}},\ \text{συν}\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

οι οποίες προστιθέμενες με την προηγούμενη οδηγούν άμεσα στο ζητούμενο.
Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

ΑΣΚΗΣΗ 429 (ΤΕΥΧΟΣ 132)

Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η ισότητα

$$(\alpha-\beta)\ln\gamma+(\beta-\gamma)\ln\alpha+(\gamma-\alpha)\ln\beta=0$$

Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0$.
Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)
Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $\text{Κ}(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_2, y_2)$ είναι δυο σημεία του επιπέδου, τότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ το σημείο

$$\text{Μ}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$$

βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ και αντιστρόφως.

- Αν $\alpha=\gamma$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.
- Αν $\alpha\ne\gamma$, τότε από την δοσμένη ισότητα έχουμε:

$$\ln\beta=\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\ln\alpha+\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\ln\gamma$$

Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία

$$\text{Α}(\alpha, \ln\alpha)\ \text{και}\ \Gamma(\gamma, \ln\gamma)$$

και συμβολίζουμε με λ τον λόγο $\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ δηλαδή $\lambda=\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$. Τότε έχουμε: $1-\lambda=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$. Από την πρόταση που προαναφέραμε, το σημείο Β με συντεταγμένες

$$x_B=\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\alpha+\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\gamma=\beta\ \text{και}$$

$$y_B=\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\ln\alpha+\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\ln\gamma=\ln\beta$$

ανήκει στην ευθεία ΑΒ.
Επομένως τα σημεία

$$\text{Α}(\alpha, \ln\alpha),\ \text{Β}(\beta, \ln\beta)\ \text{και}\ \Gamma(\gamma, \ln\gamma)$$

είναι συνευθειακά. Τα ίδια όμως σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln x,\ x>0$ που είναι κοίλη συνάρτηση και η C_f έχει με οποιαδήποτε ευθεία το πολύ δυο κοινά σημεία. (Απλή απόδειξη με άτοπο και ΘΜΤ).
Άρα κάποιος από τους αριθμούς α, γ είναι ίσος με β οπότε $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0$.

2η ΛΥΣΗ (Μηνάς Στασινός - Αθήνα)
Η δοσμένη ισότητα γράφεται:

$$\beta\ln\alpha+\alpha\ln\gamma+\gamma\ln\beta=\alpha\ln\beta+\beta\ln\gamma+\gamma\ln\alpha,\ (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & 0<x\ne 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $x_o=1$, αφού

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1=f(1)$$

οπότε είναι συνεχή στο $(0, +\infty)$.
Με $x\ne 1$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$$

Έστω $g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x,\ x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\frac{1-x}{x^2}$ απ' όπου με τη βοήθεια της μονοτονίας της συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της προκύπτει για $x=1$ και είναι $g(1)=0$.

Επομένως, για κάθε x με $0<x\neq 1$ ισχύει $f'(x)<0$ και λόγω της συνέχειας της f στο $x_o=1$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι άνισοι και ισχύει $\alpha<\beta<\gamma$. Τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}\Rightarrow f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)<f\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow(\beta-\gamma)(\ln\alpha-\ln\gamma)>(\alpha-\gamma)(\ln\beta-\ln\gamma)$$

$$\Rightarrow\beta\ln\alpha+\alpha\ln\gamma+\gamma\ln\beta>\alpha\ln\beta+\beta\ln\gamma+\gamma\ln\alpha$$

που είναι άτοπο λόγω της (1).

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε οποιαδήποτε άλλη διάταξη για τους (διαφορετικούς μεταξύ τους) αριθμούς α, β, γ.

Άρα, τουλάχιστον δυο από τους α, β, γ είναι ίσοι μεταξύ τους οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

3η ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γεώργιος - Κάτω Πατήσια)

Έστω ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και $\alpha<\beta<\gamma$.

Η δοσμένη ισότητα γράφεται:

$$(\alpha-\beta)\ln\gamma+(\beta-\gamma)\ln\alpha=(\alpha-\gamma)\ln\beta$$
$$=(\alpha-\beta)\ln\beta+(\beta-\gamma)\ln\gamma$$

οπότε:

$$(\alpha-\beta)(\ln\gamma-\ln\beta)=(\beta-\gamma)(\ln\beta-\ln\alpha),\ (1)$$

Αν εφαρμόσουμε το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x>0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2$ με $\alpha<\xi_1<\beta<\xi_2<\gamma$ ώστε

$$\ln\beta-\ln\alpha=(\beta-\alpha)\xi_1 \text{ και } \ln\gamma-\ln\beta=(\gamma-\beta)\xi_2$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\xi_2=(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)\xi_1\Rightarrow\xi_1=\xi_2$$

που είναι άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε οποιαδήποτε άλλη διάταξη για τους (διαφορετικούς) αριθμούς α, β, γ.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

ΑΣΚΗΣΗ 430 (ΤΕΥΧΟΣ 132)

Να βρείτε όλους τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την ισότητα

$$x\cdot[x]+[x]\cdot\{x\}+\{x\}\cdot x=2000$$

όπου [x] το ακέραιο μέρος και {x} το κλασματικό μέρος του x.

Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα

ΛΥΣΗ (Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα)

Έστω $[x]=y,\ y\in\mathbb{N}$. Τότε είναι:

$$x=y+\theta \text{ με } 0\le\theta<1 \text{ και } \{x\}=\theta$$

Η εξίσωση λοιπόν γράφεται:

$$(y+\theta)y+y\theta+\theta(y+\theta)=2000$$

$$\Leftrightarrow\theta^2+3y\theta+y^2-2000=0$$

και έχει θετική ρίζα τον αριθμό

$$\theta=\frac{1}{2}\left(-3y+\sqrt{5y^2+8000}\right)$$

με $y\in\mathbb{N}$ και $0\le\theta<1$, δηλαδή

$$\begin{cases}0\le-3y+\sqrt{5y^2+8000}<2\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y\le\sqrt{5y^2+8000}<3y+2\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9y^2\le5y^2+8000<9y^2+12y+4\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2\le8000<4y^2+12y+4\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2\le2000<y^2+3y+1\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2\le2000 \text{ και } y^2+3y-1999>0\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le44{,}72 \text{ και } \left(y<-\frac{1}{2}(3+\sqrt{8005}) \text{ ή } y>\frac{1}{2}(-3+\sqrt{8005})\right)\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}$$

από το οποίο τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{cases}y\le44{,}72 \text{ και } y>43{,}23\\ y\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow y=44$$

Επομένως

$$\theta=\frac{-3\cdot44+\sqrt{5\cdot44^2+8000}}{2}=-66+2\sqrt{1105}$$

οπότε $x=44+2\sqrt{1105}-66=2\sqrt{1105}-22$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γεώργιος - Κάτω Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

Προτεινόμενα Θέματα

433. Αν σε δυο τρίγωνα οι αποστάσεις των κέντρων των εγγεγραμμένων κύκλων από τις κορυφές τους είναι ίσες μια προς μια, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.
Καζακόπουλος Απόστολος – Θεσσαλονίκη

434. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύουν

$\alpha x+\beta y=1,\ (1),\ \alpha x^2+\beta y^2=3,\ (2),$

$\alpha x^3+\beta y^3=17,\ (3)$ και $\alpha x^4+\beta y^4=99,\ (4),$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\alpha x^5+\beta y^5$. Κατόπιν να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{y}{2}$,

$\beta=\frac{x}{2}$ και να βρείτε τους αριθμούς α, β, x, y.

Στην **μνήμη** του δάσκαλου Αντώνη Κυριακόπουλου. Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία.

435. Με υποτείνουσες τις πλευρές οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΖΑΒ, ΔΒΓ και ΕΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

$$(\Delta E Z)=\frac{1}{2}(2+\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)(AB\Gamma)$$

Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη.

436. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$||\alpha\beta|-3\alpha|\le|\alpha-\beta|-4,\ (1) \text{ και}$$
$$|1-|\alpha||>|7-|\alpha|-|\beta||,\ (2)$$

Να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις ρίζες του τριωνύμου $f(x)=(1-|\alpha|)x^2-2x-|\beta|+4$ είναι αρνητική, Καρτσακλής Δημήτριος– Αγρίνιο.

437. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\ge 2$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma$
Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

Από τον εκλεκτό συνάδελφο Γιώργο Τασσόπουλο, που διαδέχθηκε τον εκλιπόντα **Αντώνη Κυριακόπουλο** στην προεδρία της συντακτικής επιτροπής του περιοδικού το 2007, λάβαμε το παρακάτω σημείωμα.

Λίγα λόγια από τον Γιώργο Τασσόπουλο

Στις 21 του Ιούλη έφυγε ξαφνικά από κοντά μας ο **Αντώνης Κυριακόπουλος**, ο τελευταίος, ίσως, από την **παλιά φρουρά** των μεγάλων φροντιστών της Κεντρικής Αθήνας. Ένας σπουδαίος Μαθηματικός με συγγραφικό έργο που ,κατά τη γνώμη μου, δεν πρέπει να λείπει από τη βιβλιοθήκη κάθε **ανήσυχου** συναδέλφου. Με την αυστηρότητα που τον διέκρινε λόγω της **Μαθηματικής Λογικής**, την οποία με μεγάλη προσπάθεια και προσοχή εισήγαγε πρώτος στη Μέση Εκπαίδευση της χώρας μας, κατάφερε τα βιβλία του να αποτελούν εγγύηση της Μαθηματικής Αλήθειας.

Γνωριστήκαμε το καλοκαίρι του **1975** στα φροντιστήρια του Βάσου Σαββαϊδη και κλείσαμε τη Φροντιστηριακή μας συνεργασία τον Σεπτέμβρη του **1982** στα φροντιστήρια του Σπύρου Κανέλλου.

Η βαθιά και αδιατάρακτη φιλία μας κράτησε πενήντα χρόνια σχεδόν, με απέραντες συζητήσεις και προβληματισμούς μέχρι να καταλήξουμε σε κάτι απόλυτα αποδεκτό. Δε σταματούσε να μελετά πριν από τις 2.00 τα ξημερώματα κάθε μέρα. Ο αγαπημένος του χώρος ήταν το υπόγειο γραφείο **με τα πάντα πλήρως τακτοποιημένα** με ζηλευτή ακρίβεια. Επικοινωνούσαμε τουλάχιστον δύο φορές την ημέρα. Κάθε μεταμεσονύκτια τηλεφωνική κλήση ήξερα ότι κατά 99% είναι από τον Αντώνη. Κάποιο ενδιαφέρον θέμα θα είχε ανακαλύψει και ήθελε να το γνωστοποιήσει και σε μένα για να μην τεμπελιάζω, όπως χαρακτηριστικά μου έλεγε. Η επιβλητική φωνή του με τον ξεκάθαρο λόγο που σιγά-σιγά εξασθένησε και τελικά έσβησε, θα μου λείπει πλέον έντονα.

Καλό σου ταξίδι αγαπημένε μου φίλε.

αφορμές ...
και στιγμιότυπα

Ελληνικές διακρίσεις στον 31^{ο} IMC 2024

Πραγματοποιήθηκε και φέτος στις 7 **και** 8 **Αυγούστου** 2024, στο Blagoevgrad της Βουλγαρίας, ο 31^{ος} IMC 2024. Σε αυτόν, συμμετείχαν 401 φοιτητές σε 77 **ομάδες** από 42 **χώρες**. Στην 6**η θέση** η Ελλάδα μεταξύ 77 χωρών. Ο IMC είναι ο μεγαλύτερος παγκόσμιος μαθηματικός διαγωνισμός για φοιτητές, οργανώνεται από το 1994 από το University College London και συμμετέχουν σε αυτόν κορυφαία Πανεπιστήμια της Ευρώπης, της Ασίας, και της Λατινικής Αμερικής. Οι φοιτητές διαγωνίζονται δύο ημέρες, έχοντας να λύσουν κάθε μέρα 5 προβλήματα μέσα σε 5 ώρες. Στο πλαίσιο του International Mathematics Competition (IMC) **εξασφαλίζεται** στους φοιτητές ένα ιδιαίτερα υποστηρικτικό περιβάλλον, προκειμένου οι συμμετέχοντες να ανταποκριθούν στο εξαιρετικά **υψηλό επίπεδο** των μαθηματικών προβλημάτων. Παράλληλα, έχουν την ευκαιρία να συναναστραφούν συνομηλίκους τους από κάθε γωνιά της γης και να διερευνήσουν τις διεθνείς προοπτικές επαγγελματικής απασχόλησης στο συγκεκριμένο τομέα. Η Ελλάδα συμμετείχε και φέτος με τα Πανεπιστήμια **ΕΚΠΑ**, **ΑΠΘ** και Πανεπιστήμιο **Πάτρας**. Η χώρα μας είχε τις παρακάτω διακρίσεις.

Οι Φοιτητές από το ΕΚΠΑ

Ε.Κ.Π.Α.: Οι φοιτητές Δημήτρης Εμμανουήλ, Γιώργος Γεωργελές, Μανόλης Πετράκης πήραν ο καθένας τους, **χρυσό μετάλλιο**, ενώ ο Θέμελης Μαμουζέλος πήρε **αργυρό μετάλλιο**.

Α.Π.Θ.: Οι φοιτητές Ιωάννης Ιακωβάκης και Δημοσθένης Παυλίδης πήραν ο καθένας τους **αργυρό μετάλλιο**, ενώ **χάλκινο μετάλλιο** πήρε ο Αλέξανδρος Καϊόπουλος και **Εύφημη μνεία** πήραν Ιωάννης Δημουλιός, Κωνσταντίνος Φωτιάδης, Αστέριος Βαρσάμης – Κυρατλίδης, Γεώργιος Κεντρωτής, Αθανάσιος Ντομπάζης, Ιωάννης Νάκος, Αλέξανδρος Τζιωρτζής.

Πανεπιστήμιο Πάτρας: Γεώργιος Σουκαράς **χάλκινο μετάλλιο**

Πολλά συγχαρητήρια στους φοιτητές μας. Πολλές ευχές και για άλλες διακρίσεις!

Επιτυχίες και με τη νέα γενιά στην 28^{η} jBMO

Η προσπάθεια και η θέληση για διάκριση, από την Ελληνική ομάδα, έφεραν την επιτυχία. Η **προετοιμασία** έχει πάντα στόχο να γίνεσαι καλύτερος. Στάση ζωής και νοοτροπίας και **ελπίδα για κάτι καλύτερο**, για αυτά τα παιδιά. Παρά τις αντίξοες συνθήκες που υπήρχαν μέσα στο καλοκαίρι, έκαναν την υπέρβαση με 5 **μετάλλια** στην Αττάλεια της Τουρκίας. Τους αξίζουν πολλά συγχαρητήρια για την αυτοπραγμάτωση, την εμπιστοσύνη και τη μάχιμη διάθεση που έδειξαν στους εαυτούς τους. Αποτελούν **πρότυπο** για κάθε νέο.