ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

Μαθηματικά Ι (ά μέρος)

Επιμέλεια: Παναγιώτα Λάλου

Δεκέμβριος 2020

Α. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ταυτότητα : Λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της.

1) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

2) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

3) $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

4) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

5) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

6) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

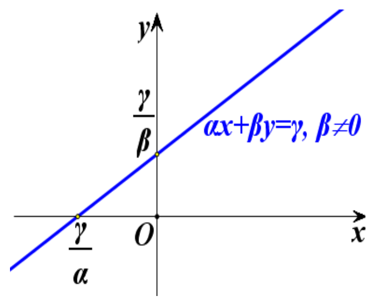
7) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Β. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Η εξίσωση:

$$\boxed{\alpha x + \beta y = \gamma}, \quad \text{με } \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0 ,$$

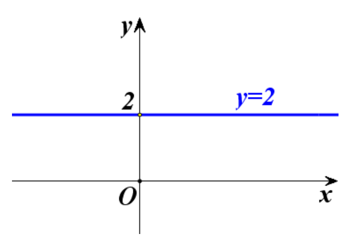
λέγεται **γραμμική εξίσωση**, και παριστάνει ευθεία γραμμή.



ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

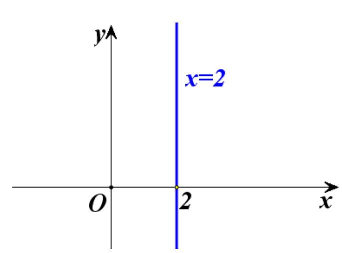
- Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\boxed{y = c}$ $\left(c = \frac{\gamma}{\beta}\right)$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$.

  π.χ: Η εξίσωση y=2 παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τον $y'y$ στο σημείο (0,2)



- Αν ***β=0,*** τότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $\boxed{x = c}$ $\left(c = \frac{\gamma}{a}\right)$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$.

  π.χ: Η εξίσωση x=2 παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$ που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο (2,0)



Γραμμικό Σύστημα 2x2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με 2 αγνώστους, τότε λέμε ότι έχουμε ένα ***γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους,*** ή πιο σύντομα ένα ***γραμμικό σύστημα 2x2.***

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1} \\ \boldsymbol{\alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2} \end{cases}$$

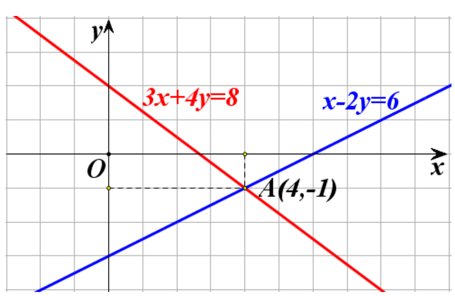
Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος.**

Για παράδειγμα η λύση του συστήματος : $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ είναι το ζεύγος (x,y)=(4,-1) διότι:

- στην $x - 2y = 6$ για x=4 και y=-1 έχουμε $4 - 2 \cdot (-1) = 6$ (αληθεύει) και
- στην $3x + 4y = 8$ για x=4 και y=-1 έχουμε $3 \cdot 4 + 4(-1) = 8$ (αληθεύει)

Γραφικά:

Οι 2 εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν 2 ευθείες. Η λύση (4, -1) του συστήματος, επαληθεύει συγχρόνως και τις 2 εξισώσεις, επομένως βρίσκεται πάνω και στις 2 ευθείες. Άρα το (4,-1) είναι το **σημείο τομής των 2 ευθειών.**

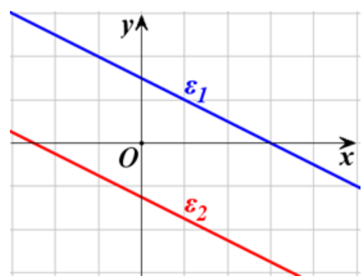


Πλήθος λύσεων γραμμικού συστήματος 2x2:

Οι 2 εξισώσεις παριστάνουν 2 ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν.

- Όταν οι ευθείες του συστήματος τέμνονται, το σύστημα έχει **μοναδική λύση** η οποία είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των 2 ευθειών.
- Όταν οι ευθείες είναι παράλληλες, το σύστημα είναι **ΑΔΥΝΑΤΟ.**
- Όταν οι ευθείες ταυτίζονται το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι **ΑΟΡΙΣΤΟ.**

Π.χ το (Σ): $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$



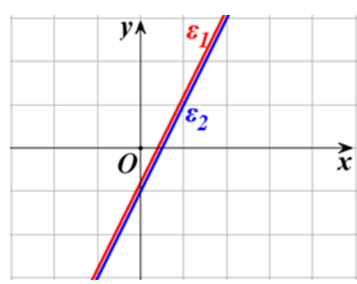
Είναι αδύνατο, διότι αν πολλαπλασιάσουμε

Την 1η εξίσωση με το 2, γίνεται:

$\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$

Οι δύο ευθείες του συστήματος είναι παράλληλες.

Το σύστημα: (Σ): $\begin{cases} y=2x-1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$



Μπορεί να πάρει τη μορφή: $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$

Κι επόμένως έχει άπειρες λύσεις, (ΑΟΡΙΣΤΟ), αφού οι 2 ευθείες ταυτίζονται.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΉΜΑΤΟΣ

Α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Την προτιμάμε στα συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

- **Βήμα 1.** Λύνουμε ως προς έναν άγνωστο τη μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος .
- **Βήμα 2.** Αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος, οπό- τε προκύπτει μια εξίσωση ενός άγνωστου, που μπορούμε να λύσουμε.
- **Βήμα 3.** Τη λύση που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση του βήματος 1, οπότε βρίσκουμε και τον δεύτερο άγνωστο.

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ 3(2y+6)+4y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ 6y+18+4y=8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=2y+6 \\ 6y+4y=8-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ 10y=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+6 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2(-1)+6 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$$

Άρα $(x,y)=(4,-1)$

Β) Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

- **Βήμα 1.** Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της μιας ή και των δύο εξισώσεων με κατάλληλο αριθμό ώστε οι συντελεστές ενός εκ των αγνώστων να γίνουν αντίθετοι αριθμοί. (η μετά τον πολ/μό εξί- σωση θα είναι ισοδύναμη της αρχικής)
- **Βήμα 2.** Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με ένα μόνο ά- γνωστο την οποία και λύνουμε.

- **Βήμα 3.** Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x+6y=-18 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

$$-3x+3x+6y+4y=-18+8 \Leftrightarrow 10y=-10 \Leftrightarrow y=-1$$

$x-2y=6 \Leftrightarrow x-2(-1)=6 \Leftrightarrow x+2=6 \Leftrightarrow x=4$

Άρα $(x,y)=(4,-1)$

Άσκηση: Να λυθεί το σύστημα: (Σ): $\begin{cases} \frac{x+1}{2}=8-\frac{y-1}{2} \\ \frac{y+1}{2}=9-\frac{x-1}{3} \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2}=8-\frac{y-1}{2} \\ \frac{y+1}{2}=9-\frac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot\frac{x+1}{2}=2\cdot 8-2\cdot\frac{y-1}{2} \\ 6\cdot\frac{y+1}{2}=6\cdot 9-6\cdot\frac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=16-(y-1) \\ 3(y+1)=54-2(x-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+1=16-y+1 \\ 3y+3=54-2x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=54+2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-32 \\ 2x+3y=53 \end{cases}$$

$$-2y+3y=-32+53 \Leftrightarrow y=21$$

$x+y=16 \Leftrightarrow x+21=16 \Leftrightarrow x=-5$ Άρα $(x,y)=(-5,21)$

Γ. ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μονάδες μέτρησης χρόνου

Τα μικρά χρονικά διαστήματα τα μετρούμε με την **ώρα (h)** και τις υποδιαιρέσεις της: το **λεπτό (min)** και το **δευτερόλεπτο (s).**

1 h = 60 min = 3600 s

1 min = 60 s

Για μεγάλες χρονικές διάρκειες χρησιμοποιούμε την **ημέρα,** και τα πολλαπλάσια της: τον **μήνα** και το **έτος.**

1 ημέρα = 24 h

1 μήνας = 30 ημέρες

1 έτος = 12 μήνες = 360 ημέρες

Παράδειγμα:

Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι του Πειραιά στις 21:45:00. Αν η απόσταση Πειραιά – Χανιά είναι 150 ναυτικά μίλια (ν.μ) και το πλοίο ταξιδεύει με 20 κόμβους, τι ώρα θα φτάσει στα Χανιά;

Λύση

(Σημείωση: $\mathbf{1\ \kappa\acute{o}\mu\beta o\varsigma = 1\frac{\nu.\mu}{h}}$)

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 20 = \frac{150}{t} \Leftrightarrow t = \frac{150}{20} \Leftrightarrow t = 7{,}5\ h$$

7,5h = 7h +0,5h= 7h (0,5· 60)min = 7h 30min

$$\begin{array}{r} 21h\ \ 45min \\ +\ \ \ 7\,h\ \ 30min \\ \hline 28h\ \ 75min \\ 29h\ \ 15min \end{array}$$

Επειδή 29>24 το πλοίο θα φτάσει την επόμενη ημέρα.

Αφαιρώ 29-24=5h (κάνω την αφαίρεση επειδή αλλάζει ημέρα)

Άρα φτάνει στο λιμάνι των Χανίων: 05:15:00

Παράδειγμα:

Ένα πλοίο ξεκινάει στις 10 Νοεμβρίου 22:50:00 από ένα σημείο Α και πλέει με ταχύτητα 15 κόμβων για 400 ν.μ εως ένα σημείο Β. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

Λύση:

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 15 = \frac{400}{t} \Leftrightarrow t = \frac{400}{15} \Leftrightarrow t = 26{,}667\ h$$

t=26,667h = 26h +0,667h= 26h (0,667· 60)min = 26h 40,02min= 26h 40min +0,02min= 26h 40min (0,02· 60)s = 26h 40min 1,2s

ή 26h 40min 1s (στρογγυλοποιήσαμε τα δευτρόλεπτα)

$$\begin{array}{r} 22h\ 50\min\ 0\,s \\ +\ \ 26\,h\ 40\min\ 1\,s \\ \hline 48h\ 90\min\ 1s \end{array}$$

ή

$$49h\ 30\min\ 1s$$

Αφαιρώ 49-48=1h (αφαιρώ 2 24ωρα)

Άρα άφιξη: 12 Νοεμβρίου 1:30:01

Μονάδες μέτρησης γωνίας

Το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε **μοίρες,** και τις υποδιαιρεσεις της: **πρώτα λεπτα** και **δεύτερα λεπτά.**

1 μοίρα: 1°

1 πρώτο λεπτό: $\mathbf{1'}$

1 δεύτερο λεπτό: $\mathbf{1''}$

Ισχύει: $\mathbf{1^{\circ}=60'=3600''}$ και $\mathbf{1'=60''}$

Παράδειγμα:

Να μετατραπεί η γωνία $42{,}14^{\circ}$ σε συμμιγή αριθμό.

Λύση:

$42{,}14^{\circ} =$

$42^{\circ} + 0{,}14^{\circ} =$

$42^{\circ}\ (0{,}14 \cdot 60)' =$

$42^{\circ}\ 8{,}4' =$

$42^{\circ}\ 8' + 0{,}4' =$

$42^{\circ}\ 8'\ (0{,}4 \cdot 60)'' =$

$42^{\circ}\ 8'\ 24''$

Παράδειγμα:

Να μετατραπεί η γωνία $16^{\circ}\ 38'\ 46''$ σε μοίρες.

Λύση

$16^{\circ}\ 38'\ 46'' =$

$16^{\circ}\ 38' + \left(\frac{46}{60}\right)' =$

$16^{\circ}\ 38' + 0{,}767' =$

$16^{\circ}\ 38{,}767' =$

$16^{\circ} + \left(\frac{38{,}767}{60}\right)^{\circ} =$

$16^{\circ} + 0{,}646^{\circ} =$

$16{,}646^{\circ}$

Άλυτες Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 4x+y=-5 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ x-5y=-9 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 5x+2y=7 \\ 2x-3y=18 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 4x-3(y-2x)=-8y \\ 4(2x-3y)-15(x+y)=3-25y \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3(x+y)-5(y-x)=14 \\ 3(x+y)-2(x-y)=7 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3} \\ 3x-2y=11 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 11x+2(y-x)=\frac{12x+1}{2} \\ 6x+4y=1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \frac{x}{8}-\frac{y}{2}=1 \\ x-4y=8 \end{cases}$

4. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}+3+x \\ -5(x+1)=6(y+1) \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}=4-\frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2}-3=\frac{x-y}{3} \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} \frac{2x-4}{2}+\frac{2(3y-1)}{3}=\frac{13}{3} \\ \frac{2x+y}{6}-\frac{x+2y}{2}=-\frac{8}{3} \end{cases}$

iv) $\begin{cases} \frac{x+2y}{2}-\frac{3x-2y}{6}=\frac{4y}{3} \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=\frac{2y-x+2}{6} \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} \frac{7x+y}{3}-\frac{y-1}{2}=x+3 \\ \frac{x}{2}-\frac{9y-1}{4}=-x+1 \end{cases}$

5. Ένα πλοίο ξεκινάει στις 6 Απριλίου 19:50:00 από το λιμάνι Ηρακλείου και πλέει με ταχύτητα 18 κόμβων για 337 ν.μ εως την Καβάλα. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

6. Η απόσταση Πειραιάς – Γιβραλτάρ είναι 1500 ν.μ. Ένα πλοίο ξεκινάει 6 Σεπτεμβρίου 20:45:35 από το λιμάνι του Πειραιά και πλέει με 16 κόμβους. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης στο Γιβραλτάρ. (Σημείωση: Το Γιβραλτάρ είναι μια ώρα πίσω σε σχέση με τον Πειραιά)

7. Πλοίο κινείται με ταχύτητα 10 κόμβων. Να υπολογισυεί η απόσταση που διανύει από τις 22:30:00 εως τις 5:10:00 του επόμενου πρωινού.