ΑΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ - ΣΧΟΛΗ ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

Μαθηματικά Ι

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Επιμέλεια: Παναγιώτα Λάλου

Δεκέμβριος 2020

1. Μονάδες μέτρησης γωνιών

Α) Το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε **μοίρες,** και τις υποδιαιρεσεις της: **πρώτα λεπτα** και **δεύτερα λεπτά.**

1 μοίρα: 1°

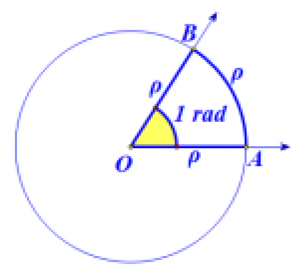
1 πρώτο λεπτό: $1'$

1 δεύτερο λεπτό: $1''$

Ισχύει: $\mathbf{1^{\circ}=60'=3600''}$ και $\mathbf{1'=60''}$

Π.χ ω= $30^{\circ}\ 24'\ 52''$

Β) **Ακτίνιο ή *rad*** είναι η γωνία που όταν είναι επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.



Σχέση μοιρών ακτινίων: $\boxed{\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180^{\circ}}}$

Όπου μ οι μοίρες μιας γωνίας και α είναι τα ακτίνια της ίδιας γωνίας.

Θέτοντας στον παραπάνω τύπο όπου α το 1, και λύνοντας ως προς μ προκύπτει ότι:

$$1\ rad \text{ αντιστοιχεί σε } \frac{180^{\circ}}{\pi}\cong 57{,}295^{\circ}$$

Για παράδειγμα:

✓ Για να εκφράσουμε τη γωνία 60° σε ακτίνια, θέτουμε στον τύπο $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}$ όπου $\mu=60$ και έχουμε

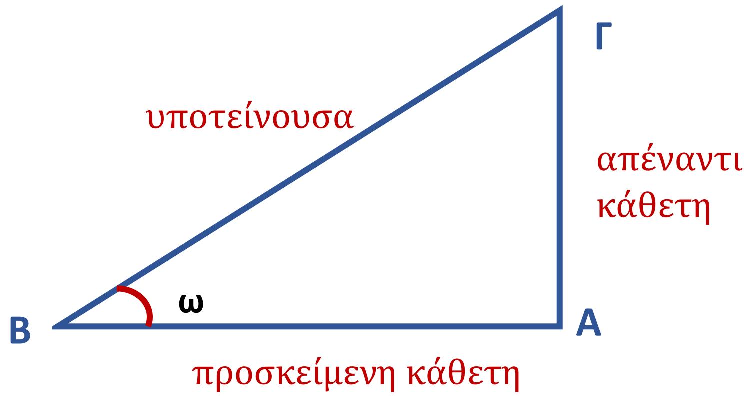
$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{60}{180} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3},$$

Άρα είναι $60^\circ=\frac{\pi}{3} rad$.

Η αντιστοιχία ανάμεσα σε μοίρες και ακτίνια για τις πιο συνηθισμένες γωνίες είναι:

ΜΟΙΡΕΣ		***ΑΚΤΙΝΙΑ***
0°	$\leftrightarrow$	0 rad
30°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{6}$ rad
45°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$ rad
60°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$ rad
90°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$ rad
180°	$\leftrightarrow$	π rad
360°	$\leftrightarrow$	2π rad

2. Τριγωνομετρικοι αριθμοί οξείας γωνίας



- **Ημίτονο της ω:** $\eta\mu\omega = \dfrac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$

- **Συνημίτονο της ω:** $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \dfrac{AB}{B\Gamma}$

- **Εφαπτομένη της ω:** $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}} = \dfrac{A\Gamma}{AB}$

- **Συνεφαπτομένη της ω:** $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho'\alpha} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$

- **Τέμνουσα της ω:** $\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}} = \dfrac{B\Gamma}{AB}$

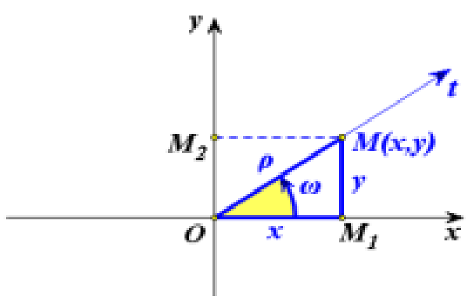
- **Συντέμνουσα της ω:** $\sigma\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}} = \dfrac{B\Gamma}{A\Gamma}$

Συμβολισμοί:

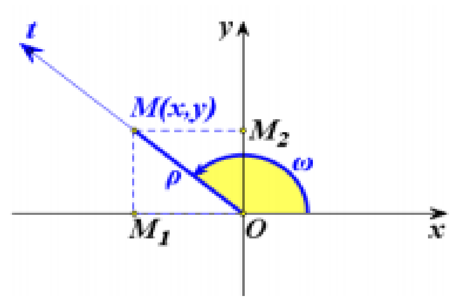
Ελληνικός συμβολισμός	Αγγλικός συμβολισμός
ημ	sin
συν	cos
εφ	tan
σφ	cot
τεμ	sec
στεμ	csc

3. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0° \leq \omega \leq 360°$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, Ot μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη <u>θετική φορά</u> γύρω από το Ο μέχρι να συμπέσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Ot (Σχ. α΄, β΄). Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω, ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται **τελική πλευρά** της ω.



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \ (\text{εφόσον } x \neq 0)$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \ (\text{εφόσον } y \neq 0), \quad \text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου Μ (διαφορετικού του Ο) της τελικής πλευράς της γωνίας ω και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του Μ από το Ο.

Τριγωνομετρικός κύκλος

Για την καλύτερη απεικόνιση των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών μας διευκολύνει η χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου. Ονομάζεται έτσι ο κύκλος ο οποίος έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων, ακτίνα $\rho = 1$ και είναι προσανατολισμένος θεωρώντας ως θετική φορά αυτή που είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Όταν το σημείο M(x, y) της γωνίας θ ανήκει και στον τριγωνομετρικό κύκλο, δηλαδή όταν $OM = 1$, τότε οι παραπάνω τύποι παίρνουν την πιο απλή μορφή:

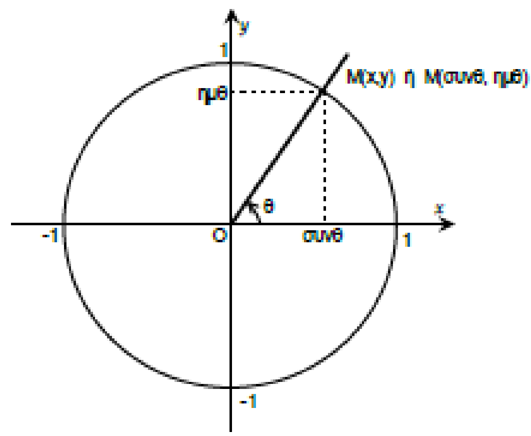
$\eta\mu\theta = y$

$\sigma\upsilon\nu\theta = x$

$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y}{x}$ (με $x \neq 0$)

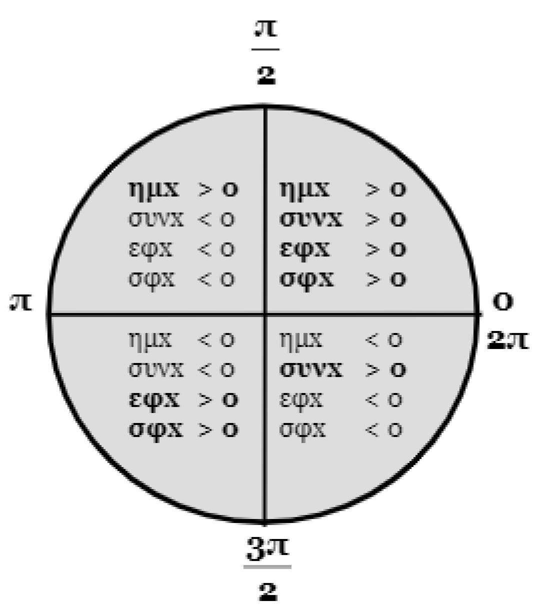
$\sigma\varphi\theta = \dfrac{x}{y}$ (με $y \neq 0$)

και θα ισχύει: M (συνθ, ημθ)



Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική της πλευρά φαίνεται παρακάτω:



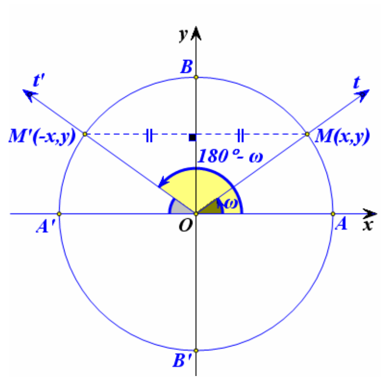
Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ω σε μοίρες	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
ω σε rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
σφω		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

4. Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο

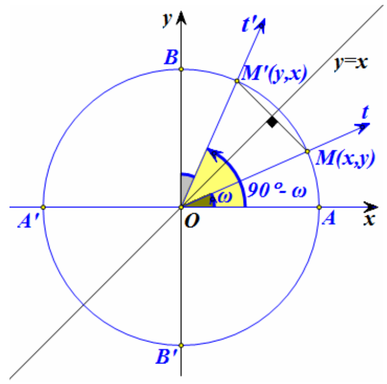
Παραπληρωματικές γωνίες

$$\begin{cases} \eta\mu(180° - \omega) = \eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180° - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(180° - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(180° - \omega) = -\sigma\varphi\omega \end{cases}$$



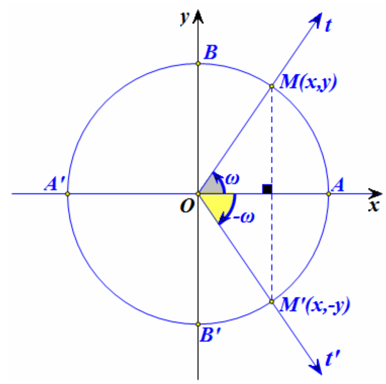
Συμπληρωματικές γωνίες

$$\begin{cases} \eta\mu(90° - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(90° - \omega) = \eta\mu\omega \\ \varepsilon\varphi(90° - \omega) = \sigma\varphi\omega \\ \sigma\varphi(90° - \omega) = \varepsilon\varphi\omega \end{cases}$$



Αντίθετες γωνίες

$$\begin{cases} \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega \end{cases}$$



5. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\boldsymbol{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}$
$\boldsymbol{\sigma\varphi\omega = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}}$	$\boldsymbol{\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$	$\boldsymbol{\sigma\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{1}{\eta\mu\omega}}$

6. Επίλυση τυχαίου τριγώνου

Επίλυση τριγώνου ονομάζουμε την εύρεση όλων των κύριων στοιχείων ενός τριγώνου, δηλαδή όλων των πλευρών και όλων των γωνιών του. Κάθε τρίγωνο, ορθογώνιο ή μη, μπορεί να επιλυθεί αν γνωρίζουμε 3 οποιαδήποτε στοιχεία του, από τα οποία το ένα τουλάχιστον είναι πλευρά. (Δηλαδή δεν είναι δυνατή η επίλυση όταν γνωρίζουμε τις 3 γωνίες του τριγώνου και καμία πλευρά του). Η επίλυση τριγώνου γινεται με τους νόμους ημιτόνου και συνημιτόνου:

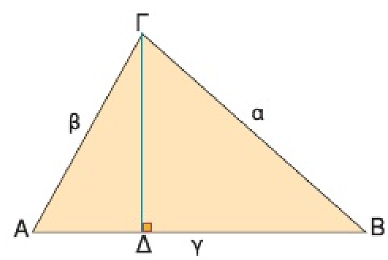
Θεώρημα 1: Νόμος Ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu Γ}$$

Απόδειξη:

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:



$$\eta\mu A = \frac{ΓΔ}{\beta} \quad ή \quad ΓΔ = \beta\eta\mu A \quad (1)$$

$$\eta\mu B = \frac{ΓΔ}{\alpha} \quad ή \quad ΓΔ = \alpha\eta\mu B \quad (2)$$

Από τις ισότητες *(1)*, *(2)* έχουμε $\beta\eta\mu A = \alpha\eta\mu B$ ή $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu Γ}$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Χρησιμοποπούμε τον Νόμο Ημιτόνων για την επίλυση τριγώνου, όταν είναι γνωστές:

i) ***Μια πλευρά και 2 γωνίες*** **(ΓΓΠ ή ΓΠΓ)**

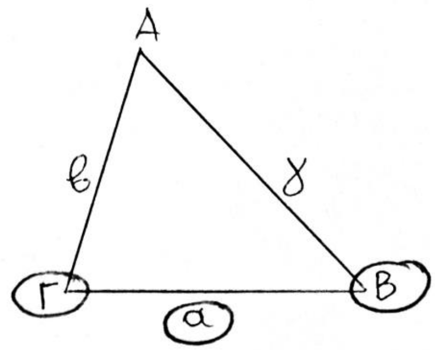
ii) ***Δύο πλευρές και μια γωνία, εκτός της περιεχόμενης.*** **(ΠΠΓ)**

Παράδειγμα 1ο

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με α=25, $\hat{B}$=48°, και $\hat{\Gamma} = 63°$

Λύση:

$$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180° - (48° + 63°) = 180° - 111° = 69°$$



$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow$$

$$\frac{25}{\eta\mu 69°} = \frac{\beta}{\eta\mu 48°} \Leftrightarrow$$

$$\frac{25}{0{,}934} = \frac{\beta}{0{,}743} \Leftrightarrow$$

$$0{,}934 \cdot \beta = 25 \cdot 0{,}743 \Leftrightarrow$$

$$0{,}934 \cdot \beta = 18{,}575 \Leftrightarrow$$

$$\beta = \frac{18{,}575}{0{,}934} \Leftrightarrow$$

$$\beta = 19{,}888$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{25}{\eta\mu 69°} = \frac{\gamma}{\eta\mu 63°} \Leftrightarrow$$

$$\frac{25}{0{,}934} = \frac{\gamma}{0{,}891} \Leftrightarrow$$

$$0{,}934 \cdot \gamma = 25 \cdot 0{,}891 \Leftrightarrow$$

$$0{,}934 \cdot \gamma = 22{,}275 \Leftrightarrow$$

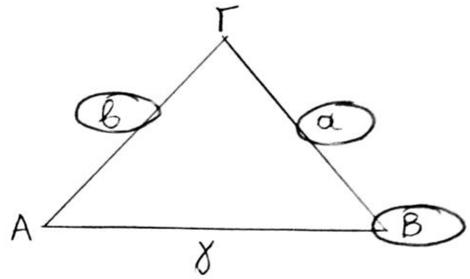
$$\gamma = \frac{22{,}275}{0{,}934} \Leftrightarrow$$

Παράδειγμα 2ο

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με α=23, β=31, και $\hat{B} = 35°$

Λύση:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow$$



$$\frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{\eta\mu 35^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{0{,}574} \Leftrightarrow$$

$$31 \cdot \eta\mu A = 13{,}202 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu A = \frac{13{,}202}{31} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu A = 0{,}426$$

$$\eta\mu^{-1} 0{,}426 = 25{,}214^\circ$$

Άρα $\hat{A} = 25{,}214^\circ$ ή $\hat{A} = 180^\circ - 25{,}214^\circ = 154{,}786^\circ$

Απορρίπτεται διότι:
είναι $\alpha < \beta$ άρα πρέπει
και $\hat{A} < \hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} < 35^\circ$

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (25{,}214^\circ + 35^\circ) = 180^\circ - 60{,}214^\circ = 119{,}786^\circ$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{31}{\eta\mu 35^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 119{,}786} \Leftrightarrow$$

$$\frac{31}{0{,}574} = \frac{\gamma}{0{,}868} \Leftrightarrow$$

$$0{,}574 \cdot \gamma = 31 \cdot 0{,}868 \Leftrightarrow$$

$$0{,}574 \cdot \gamma = 26{,}908$$

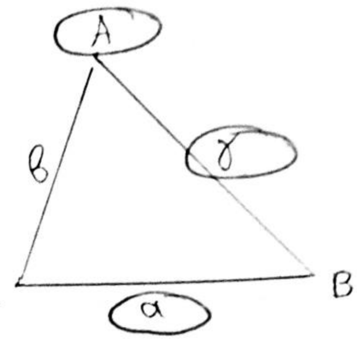
$$\gamma = \frac{26{,}908}{0{,}574} \Leftrightarrow$$

$$\gamma = 46{,}878$$

Παράδειγμα 3ο :

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με α=24, γ=33, και $\hat{A} = 42°$

<u>Λύση:</u>



$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow$

$\frac{24}{\eta\mu 42°} = \frac{33}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow$

$\frac{24}{0,669} = \frac{33}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow$

$24 \cdot \eta\mu\Gamma = 22,077 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\Gamma = \frac{22,077}{24} \Leftrightarrow$

$\eta\mu\Gamma = 0,92$

Άρα $\hat{\Gamma} = \eta\mu^{-1} 0,92 = 66,926°$ ή $\hat{\Gamma} = 180° - 66,926° = 113,073°$

(Δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία, είναι και οι δύο γωνίες μεγαλύτερες από την $\hat{A} = 42°$)

- Αν $\hat{\Gamma} = 66,926°$:

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180° - (42° + 66,926°) = 71,074°$

$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42°} = \frac{\beta}{\eta\mu 71,074°} \Leftrightarrow \frac{24}{0,669} = \frac{\beta}{0,946} \Leftrightarrow$

$0,669 \cdot \beta = 22,704 \Leftrightarrow \beta = \frac{22,704}{0,669} \Leftrightarrow \beta = 33,937$

- Αν $\hat{\Gamma} = 113,073°$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180° - (42° + 113,073°) = 24,927°$

$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42°} = \frac{\beta}{\eta\mu 24,927°} \Leftrightarrow \frac{24}{0,669} = \frac{\beta}{0,421} \Leftrightarrow$

$0,669 \cdot \beta = 10,104 \Leftrightarrow \beta = \frac{10,104}{0,669} \Leftrightarrow \beta = 15,103$

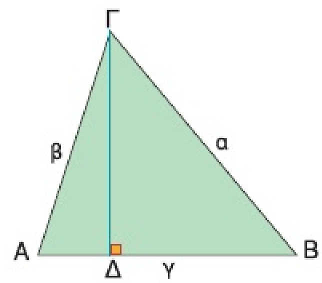
Θεώρημα 1: **Νόμος Συνημιτόνων**

Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A}$$
$$\boldsymbol{\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B}$$
$$\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma}$$

Απόδειξη:

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $\alpha^2 = ΔΓ^2 + ΔΒ^2$ (1).



Επειδή ΔΒ = γ - ΑΔ, η ισότητα (1) γράφεται:

$\alpha^2 = ΔΓ^2 + (\gamma - ΑΔ)^2$ ή $\alpha^2 = ΔΓ^2 + \gamma^2 + ΑΔ^2 - 2\gamma \cdot ΑΔ$ (2).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: $ΔΓ^2 + ΑΔ^2 = \beta^2$ και $\sigma\upsilon\nu A = \frac{ΑΔ}{\beta}$ ή $ΑΔ = \beta\sigma\upsilon\nu A$.

Άρα η ισότητα (2) γράφεται: $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}$

Παρατήρηση:

Χρησιμοποπούμε τον Νόμο Συνημιτόνων για την επίλυση τριγώνου, όταν είναι γνωστές:

i) ***Οι 3 πλευρές*** **(ΠΠΠ)**

ii) ***Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία.*** **(ΠΓΠ)**

Παράδειγμα 1ο:

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$, και $\hat{A} = 75°$

Λύση:

Από τον Νόμο συνημιτόνων έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$
$$\alpha^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu 75^\circ$$
$$\alpha^2 = 2 + 3 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot 0,259$$
$$\alpha^2 = 5 - 2\cdot 2,44\cdot 0,259$$
$$\alpha^2 = 5 - 1,26$$
$$\alpha^2 = 3,74$$
$$\alpha = \sqrt{3,74}$$
$$\alpha = 1,93\text{cm}$$

Γνωρίζοντας τώρα τις τρεις πλευρές του τριγώνου μπορούμε να βρούμε τις γωνίες του πάλι από τον Νόμο των συνημιτόνων. Αναλυτικά έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$
$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$$
$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{(1,93)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot 1,93\cdot\sqrt{3}}$$
$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{3,74 + 3 - 2}{2\cdot 1,93\cdot 1,73}$$
$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{4,74}{6,67} = 0,710$$

Άρα $\hat{B} = 45^\circ$ και άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$$

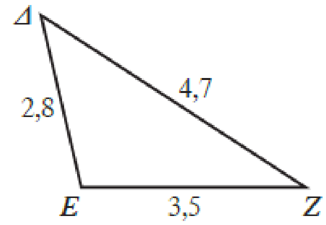
Παράδειγμα 2ο:

Στο επόμενο τρίγωνο (σχ. 10.3ζ), είναι γνωστές οι πλευρές $\delta = 3{,}5$, $\varepsilon = 4{,}7$ και $\zeta = 2{,}8$. Να γίνει επίλυση του τριγώνου.

Λύση.

Όταν και οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου (ΠΠΠ) είναι γνωστές, ο νόμος των συνημιτόνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί το τρίγωνο.

Επειδή δεν ξέρομε το μέτρο καμίας γωνίας, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσομε το νόμο των ημιτόνων. Από το νόμο των συνημιτόνων, μπορούμε να βρούμε τη γωνία E.



Σχ. 10.3ζ.

Άρα $\varepsilon^2 = \delta^2 + \zeta^2 - 2\,\delta \cdot \zeta \cdot \sigma\upsilon\nu E$

$4{,}7^2 = 3{,}5^2 + 2{,}8^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}8\,\sigma\upsilon\nu E$

$22{,}09 = 12{,}25 + 7{,}84 - 19{,}6\,\sigma\upsilon\nu E \Leftrightarrow 2 = -19{,}6\,\sigma\upsilon\nu E$

$\sigma\upsilon\nu E = -0{,}10204 \Leftrightarrow E = 95{,}856654° \Leftrightarrow E \simeq 95{,}86°.$

Ομοίως, θα βρούμε την γωνία Δ:

$\delta^2 = \varepsilon^2 + \zeta^2 - 2\,\varepsilon \cdot \zeta \cdot \sigma\upsilon\nu\,\Delta$

$3{,}5^2 = 4{,}7^2 + 2{,}8^2 - 2 \cdot 4{,}7 \cdot 2{,}8\,\sigma\upsilon\nu\Delta$

$12{,}25 = 22{,}09 + 7{,}84 - 26{,}32\ \sigma\upsilon\nu\Delta \Leftrightarrow -17{,}18 = -26{,}32\ \sigma\upsilon\nu\Delta$

$\sigma\upsilon\nu\Delta = 0{,}652735 \Leftrightarrow \Delta = 49{,}25182951° \Leftrightarrow \Delta \simeq 49{,}25°.$

Τέλος, για τη γωνία Z έχομε:

$Z \simeq 180° - (E + \Delta) \simeq 180° - (95{,}86° + 49{,}25°) \simeq 180° - 145{,}11°.$

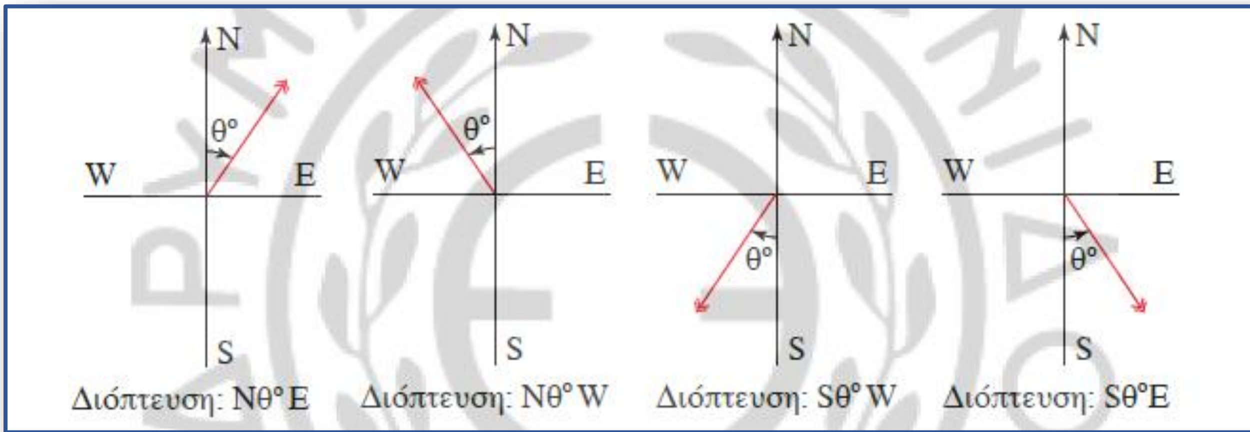
7. Εφαρμογές τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

7.1 Διόπτευση

Διόπτευση ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ κάποιας γραμμής αναγωγής και της κατεύθυνσης ενός αντικειμένου στον ορίζοντα.

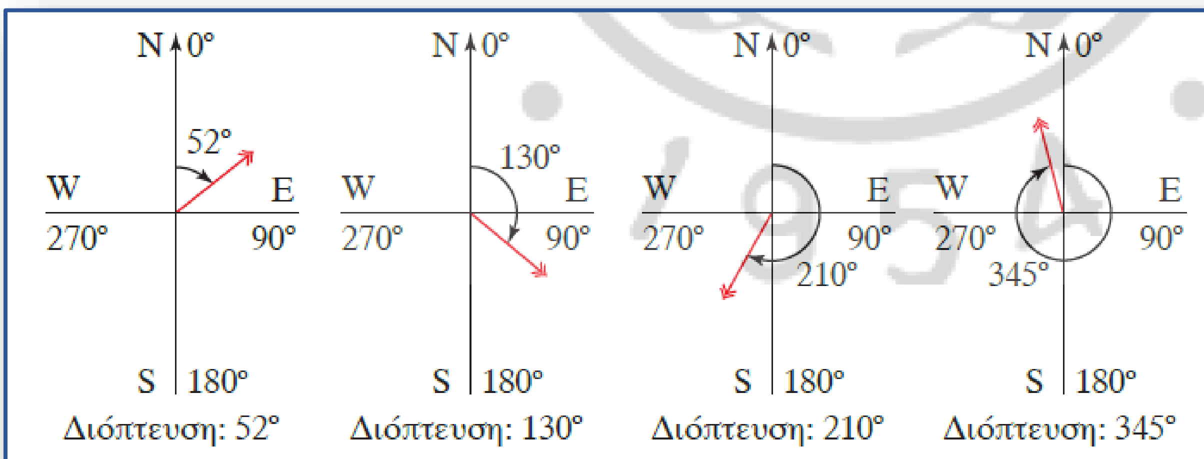
Στη ναυτιλία χρησιμοποιούμε την τεταρτοκυκλική και την ολοκυκλική διόπτευση.

Α) Στην **τεταρτοκυκλική** διόπτευση μετράμε τη γωνία από Βορρά ή Νότο προς Ανατολή ή Δύση. Η γωνία παίρνει τιμές από 0° εως 90°.



B) Στην **απόλυτη** ή **ολοκυκλική** διόπτευση, κάθε γωνία μετράται κατα τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ξεκινώντας από Βορρά. Η γωνία παίρνει τιμές από 0° έως 360°, και η αντιστοιχία έχει ως εξής:

0° : Βορράς (N) 90° : Ανατολή (E) 180° : Νότος (S) 270°: Δύση (W)



7.2 Τρίγωνο πλεύσης

Το τρίγωνο πλεύσης χρησιμοποιείται στους μικρούς τριγωνομετρικούς πλόες, όπου η απόσταση – διάρμα (d) μεταξύ του σημείου αναχώρησης Ε και του σημείου άφιξης Α δεν υπερβαίνει τα 600 ν.μ. Τότε, η επιφάνεια της γης θεωρείται επίπεδη και η επίλυση των προβλημάτων γίνεται με μεθόδους επίπεδης τριγωνομετρίας.

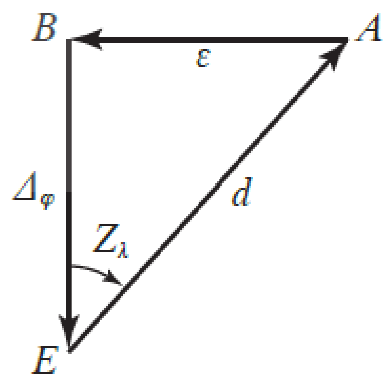
Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται το τρίγωνο πλεύσης, όπου:

Η πλευρά ΑΒ ονομάζεται ***αποχώρηση*** και συμβολίζεται ***ε***

Η πλευρά ΒΕ ονομάζεται ***διαφορά πλάτους*** και συμβολίζεται ***Δφ***,

Η πλευρά ΕΑ ονομάζεται ***διάρμα*** και συμβολίζεται με ***d***,

Η γωνία ΒΕΑ ονομάζεται ***αληθής πορεία*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{Z_\lambda}$



Για τον υπολογισμό του Δφ ισχύει:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} |\varphi_A - \varphi_E|, & \alpha\nu\ \varphi_A\ ,\varphi_E\ \ \text{ομώνυμα} \\ \varphi_A + \varphi_E, & \alpha\nu\ \varphi_A\ ,\varphi_E\ \text{ετερώνυμα} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Το 1 ναυτικό μίλι είναι το μήκος 1’ της γεωγραφικής μοίρας.

Παράδειγμα 1ο:

Ένα πλοίο ξεκινά από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 15^{\circ}32'N$ και πλέει προς $N\,25^{\circ}12'W$ έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 18^{\circ}\,47'N$. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρηση του.

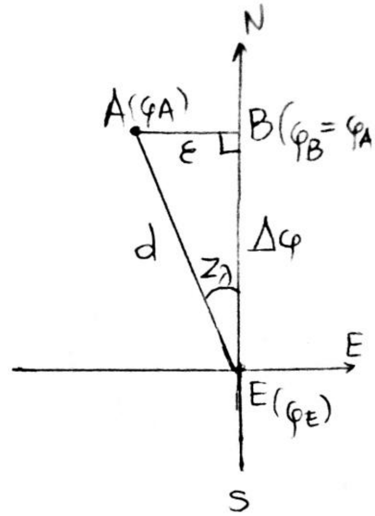
<u>Λύση:</u>

$\Delta\varphi = |\varphi_A - \varphi_E| = 18^{\circ}47' - 15^{\circ}32' = 3^{\circ}15'$

Η πλευρα $EB = \Delta\varphi$ πρέπει να υπολογιστεί σε ν.μ. Άρα:

$3^{\circ}15' = (3\cdot 60)' + 15' = 180' + 15' = 195'$

Αρα $\Delta\varphi = 195$ ν.μ.



$Z_\lambda = 25^{\circ}12' = 25^{\circ} + \left(\frac{12}{60}\right)^{\circ} = 25^{\circ} + 0,2^{\circ} = 25,2^{\circ}$

$\sigma\upsilon\nu Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 25,2 = \frac{195}{d} \Leftrightarrow$

$0,905 = \frac{195}{d} \Leftrightarrow$

$0,905 \cdot d = 195 \Leftrightarrow$

$d = \frac{195}{0,905} \Leftrightarrow$

$d = 215,47$ ν.μ

$\varepsilon\varphi Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta\varphi} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi 25,2 = \frac{\varepsilon}{195} \Leftrightarrow$

$0,471 = \frac{\varepsilon}{195} \Leftrightarrow$

$\varepsilon = 0,471 \cdot 195 = 91,845$ ν.μ

Παράδειγμα 2ο:

Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 2^\circ 24' N$ και πλέει νοτιοανατολικά, 400ν.μ. ως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 3^\circ 28' S$. Να βρεθεί η αληθής πορεία και η αποχώρηση του.

Λύση:

$$\Delta\varphi = \varphi_A + \varphi_E = 3^\circ 28' + 2^\circ 24' = 5^\circ 52'$$

$$5^\circ 52' = (5 \cdot 60)' + 52' = 352' \text{ ή } 352 \text{ ν.μ}$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{352}{400} = 0{,}88$$

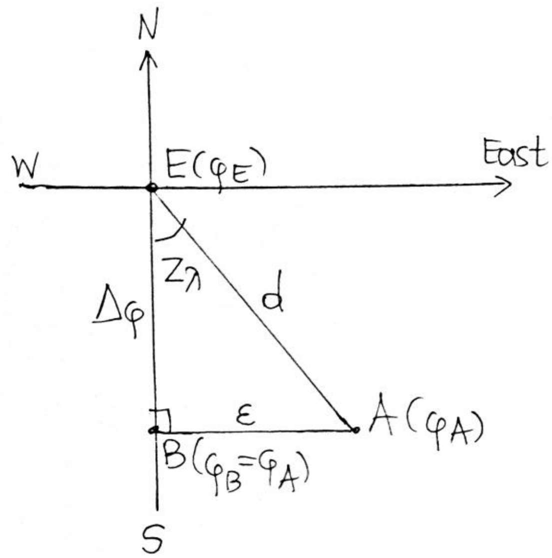
$$\text{Άρα } Z_\lambda = \sigma\upsilon\nu^{-1} 0{,}88 = 28{,}358^\circ$$

$$\eta\mu Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{d} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 28{,}358 = \frac{\varepsilon}{400} \Leftrightarrow$$

$$0{,}475 = \frac{\varepsilon}{400} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon = 190 \text{ ν.μ}$$

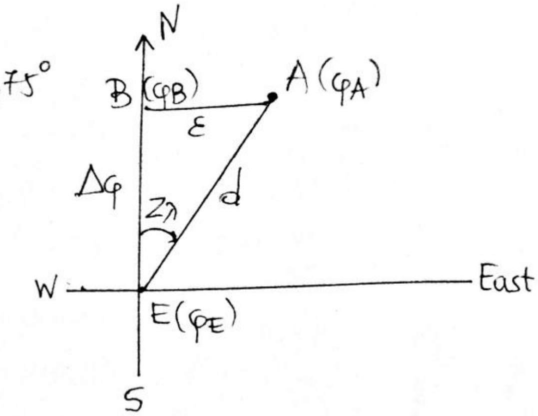


Παράδειγμα 3ο:

Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 48^\circ\ 40' N$ και πλέει προς $N 33^\circ\ 45' E$ για 296 ν.μ. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρηση.

Λύση:

$$Z_\lambda = 33^\circ 45' = 33^\circ + \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = 33^\circ + 0{,}75^\circ = 33{,}75^\circ$$



$$\eta\mu Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{d} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 33{,}75^\circ = \frac{\varepsilon}{296} \Leftrightarrow$$

$$0{,}556 = \frac{\varepsilon}{296} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon = 164{,}576 \text{ ν.μ}$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow$$

$$0{,}831 = \frac{\Delta\varphi}{296} \Leftrightarrow$$

$$\Delta\varphi = 245{,}976 \text{ ν.μ}$$

$$245{,}976' = \left(\frac{245{,}976}{60}\right)^\circ = 4{,}0996^\circ = 4^\circ\ (0{,}0996 \cdot 60)' = 4^\circ\ 5{,}976'$$

$$= 4^\circ\ 5'\ (0{,}976 \cdot 60)'' = 4^\circ\ 5'\ 59'' \quad (\text{ακριβώς: } 4^\circ 5' 58{,}56'')$$

Τα φ_A, φ_E είναι ομώνυμα, διότι το σημείο εκκίνησης Ε είναι στο βόρειο ημισφαίριο και κινείται βόρεια.

$$\Delta\varphi = |\varphi_A - \varphi_E| \xLeftrightarrow{\varphi_A > \varphi_E}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_E \Leftrightarrow$$

$$4^\circ 5' 59'' = \varphi_A - 48^\circ 40' \Leftrightarrow$$

$$\varphi_A = 4^\circ 5' 59'' + 48^\circ 40' \Leftrightarrow$$

$$\varphi_A = 52^\circ 45' 59'' \text{ N}$$

Παράδειγμα 4ο:

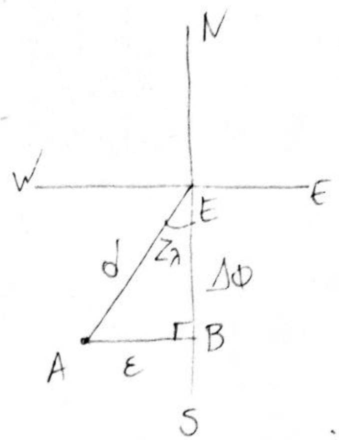
Ένα πλοίο ξεκινάει στις 10 Νοεμβρίου , 21:50, από ένα σημείο Ε με $\varphi_E = 8^\circ 24' N$ και πλέει προς $S\ 36^\circ\ 12' W$ με ταχύτητα 15 κόμβων, ως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 6^\circ 28' N$.

i) Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το πλοίο.

ii) Να βρεθεί η αποχώρηση του πλοίου.

iii) Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

<u>Λύση:</u>



i) $Z_\lambda = 36^\circ 12' = 36^\circ + \left(\frac{12}{60}\right)^\circ = 36,2^\circ$

$\Delta\phi = |\phi_A - \phi_E| = 8^\circ 24' - 6^\circ 28' = 7^\circ 84' - 6^\circ 28'$

$= 1^\circ 56' = 116'$ ή 116 ν.μ.

$\sigma\upsilon\nu Z_\lambda = \frac{\Delta\phi}{d} \Leftrightarrow 0,807 = \frac{116}{d} \Leftrightarrow d = 143,742$ ν.μ

ii) $\varepsilon\phi Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta\phi} \Leftrightarrow 0,732 = \frac{\varepsilon}{116} \Leftrightarrow \varepsilon = 84,912$ ν.μ

iii) $v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow 15 = \frac{143,742}{t} \Leftrightarrow t = 9,583$ ωρ

9,583 ωρ = 9 ωρ 34,98λ = 9 ωρ 34λ ~~58,8~~ 59 δ

	21 ωρ	50λ	
+	9 ωρ	34λ	59 δ
	~~30~~ ωρ	~~84λ~~	59 δ
	31 ωρ	24λ	59 δ

31 − 24 = 7 ωρ.

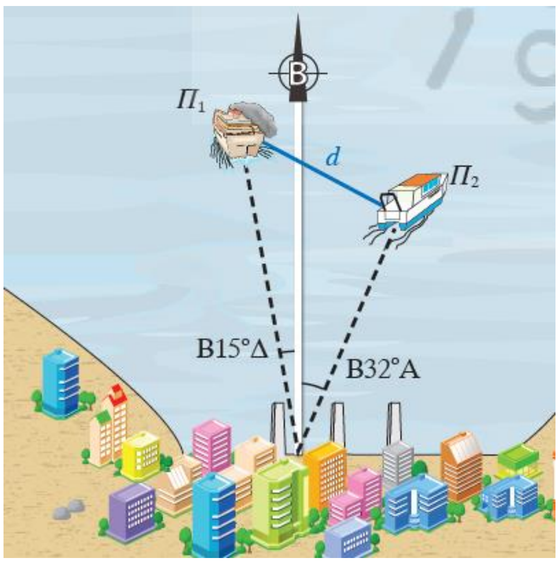
Άρα ΑΦΙΞΗ: 11 Νοεμβρίου <u>7:24:59</u>

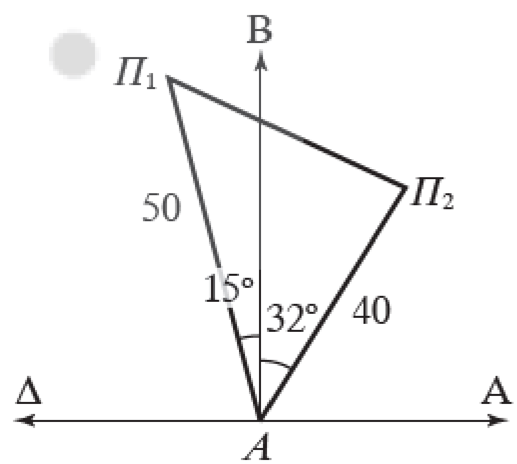
7.3 Εφαρμογή Νόμου Συνημιτόνων

Παράδειγμα 1ο:

Δύο πλοία αναχωρούν από ένα λιμάνι συγχρόνως (σχ. 10.4δ). Το πρώτο πλοίο κινείται με 25 κόμβους (ένας κόμβος είναι ένα ναυτικό μίλι ανά ώρα), N15°W. Το δεύτερο πλοίο κινείται με 20 κόμβους N32°E. Μετά από 2 ώρες, ποια θα είναι η απόσταση *d* μεταξύ των δύο πλοίων;

<u>Λύση:</u>



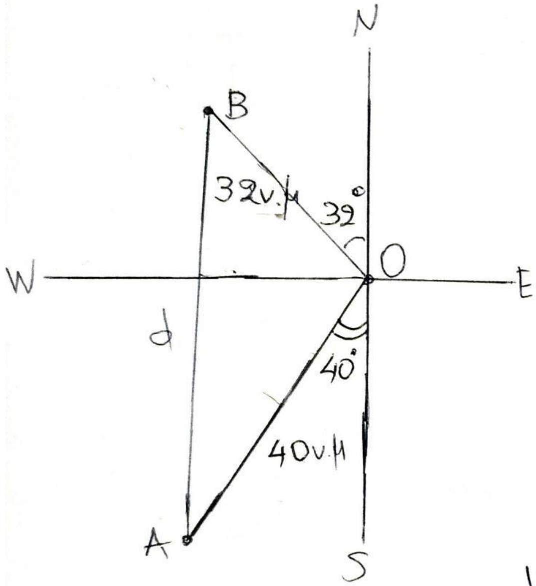


Μετά από 2h το πλοίο Π$_1$ έχει διανύσει ΑΠ$_1$=50 νμ και το Π$_2$, ΑΠ$_2$=40 νμ. Εφαρμόζω τον νόμο των συνημιτόνων στο ΑΠ$_1$Π$_2$ για την Π$_1$Π$_2$=d έχουμε :

$$d^2 = 50^2 + 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \sigma\upsilon\nu 47^0 \Rightarrow d^2 = 2500 + 1600 - 4000 \cdot 0{,}682 \Rightarrow d^2 = 1272 \Rightarrow$$
$$d = \sqrt{1272} = 35{,}67.$$

Παράδειγμα 2ο:

ΑΣΚΗΣΗ: Δύο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα. Το Α κινείται προς S40°W με ταχύτητα 20 κόμβων και το Β πρός N32°W με ταχύτητα 16 κόμβων. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά απο 2 ώρες.



Λύση

$$\hat{AOB} = 180° - (32° + 40°) = 180° - 72° = 108°$$

$$OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ ν.μ}$$

$$OB = 2 \cdot 16 = 32 \text{ ν.μ}$$

Απο Νόμο Συνημιτόνων:

$$d^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot συν\hat{AOB}$$

$$d^2 = 40^2 + 32^2 - 2 \cdot 40 \cdot 32 \cdot συν108°$$

$$d^2 = 1600 + 1024 - 2560 \cdot (-0,309)$$

$$d^2 = 1600 + 1024 + 791,04$$

$$d^2 = 3415,04$$

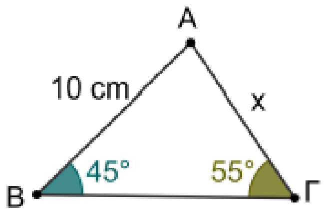
$$d = \sqrt{3415,04}$$

$$d = 58,438$$

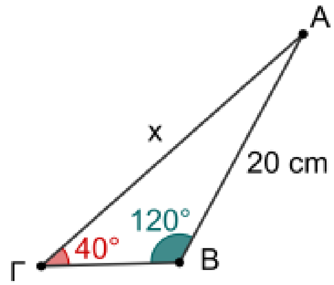
Άλυτες ασκήσεις:

1) Να υπολογίσετε το x σε κάθε περίπτωση:

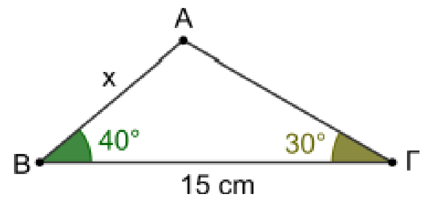
α)



β)



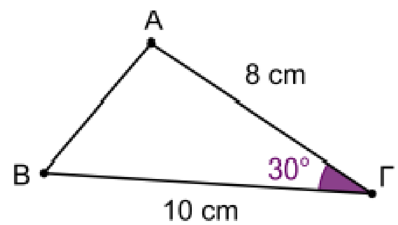
γ)



2) Στο διπλανό σχήμα οι πλευρές ΑΓ = 8cm και ΒΓ = 10cm ενώ η γωνία $\hat{\Gamma} = 30°$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ

β) Να υπολογίσετε τις γωνίας $\hat{B}$ και $\hat{A}$.



3) Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με α=16 $\hat{A} = 46^\circ$ και $\hat{B}$=95°.

4) Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με α=22, β=35 και $\hat{B}$=48°.

5) Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με β=30, γ=26 και $\hat{B}$=56°

6) Δύο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα. Το Α κινείται προς $S\ 41^\circ E$ με ταχύτητα 20 κόμβων και το Β προς $S\ 34^\circ W$ με ταχύτητα 16 κόμβων. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 2 ώρες.

7) Δύο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα. Το Α κινείται προς $N20^\circ E$ με ταχύτητα 12 κόμβων και το Β προς $S60^\circ E$ με ταχύτητα 18 κόμβων. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 3 ώρες.

8) Ένα πλοίο ξεκινά από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 5^\circ 15' N$ και πλέει προς $N\ 30^\circ 12' E$ έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 7^\circ\ 30' N$. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρηση του.

9) Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 1^{\circ}24'N$ και πλέει νοτιοανατολικά, 400ν.μ. ως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 2^{\circ}28'S$. Να βρεθεί η αληθής πορεία και η αποχώρηση.

10) Ένα πλοίο ξεκινά από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 5^{\circ}15'N$ και πλέει προς $S\ 36^{\circ}12'E$ έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 2^{\circ}\ 30'S$. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρηση του.

11) Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 18^{\circ}24'S$ και πλέει προς $S\ 60^{\circ}\ 30'W$, 300ν.μ. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρηση.

12) Ένα πλοίο ξεκινάει στις 5 Αυγούστου , 21:50, από ένα σημείο Ε με $\varphi_E = 1°\ 14'S$ και πλέει με ταχύτητα 16 κόμβοι, προς $N\ 72°\ 36'W$ έως ένα σημείο Α με $\varphi_A = 2°\ 38'N$.

i) Να βρεθεί η απόσταση που διένυσε το πλοίο.

ii) Να βρεθεί η αποχώρηση του πλοίου.

iii) Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

1) Κούτρας, Λάττας, Μπερσίμης, Μαθηματικά Πλοιάρχων – Μηχανικών, Ιδρυμα Ευγενίδου, 2012.

2) Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος, Άλγεβρα ‘Β Λυκείου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος, 2012.

3) Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, Χρυσοβέργης, Μαθηματικά ΄Γ Γυμνασίου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος.