ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

3ο μάθημα

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

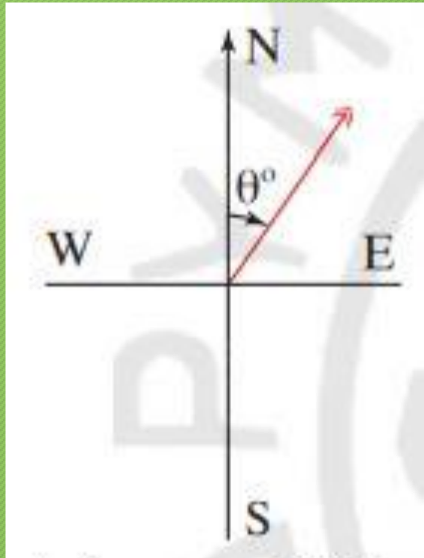
1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- **Διόπτευση** είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ κάποιας γραμμής αναγωγής και την κατεύθυνση ενός αντικειμένου στον ορίζοντα.
- Στα **Μαθηματικά Ι** χρησιμοποιούμε την **τεταρτοκυκλική** διόπτευση.
- Μετράμε τη γωνία από Βορρά (North) ή Νότο (South) προς Ανατολή (East) ή Δύση (West).
- Άρα: Η γωνία κυμαίνεται από 0° έως 90°.

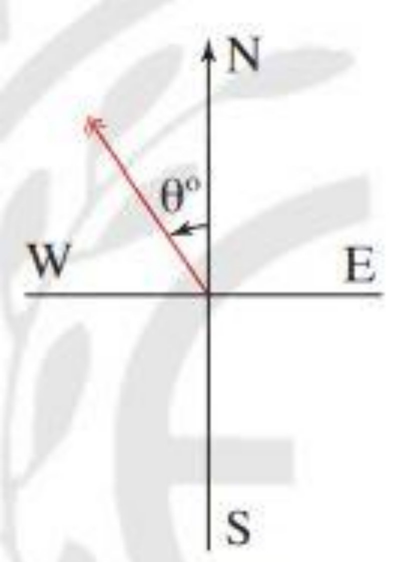
Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

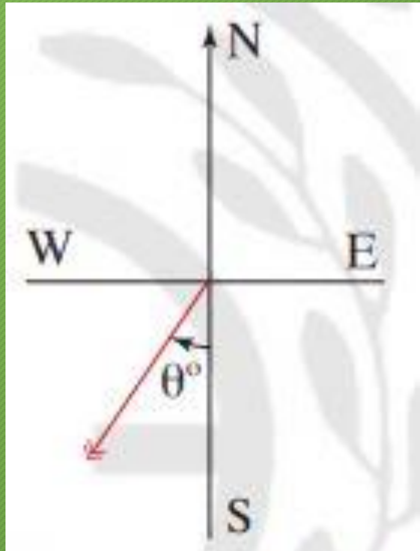
Έτσι, έχουμε:



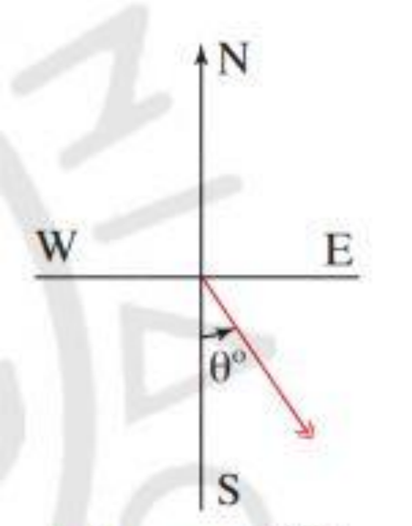
Διόπτευση: Nθ° E



Διόπτευση: Nθ° W



Διόπτευση: Sθ° W



Διόπτευση: Sθ°E

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Υπενθύμηση:

$$1\ \text{ναυτικό μίλι} = 1852\ m$$

$$1\ \text{ναυτικός κόμβος} = \frac{1\ \text{ναυτικόμίλι}}{1\ \text{ώρα}}$$

Συμβολισμός: Σημείο Εκκίνησης (Ε)

Σημείο Άφιξης (Α)

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

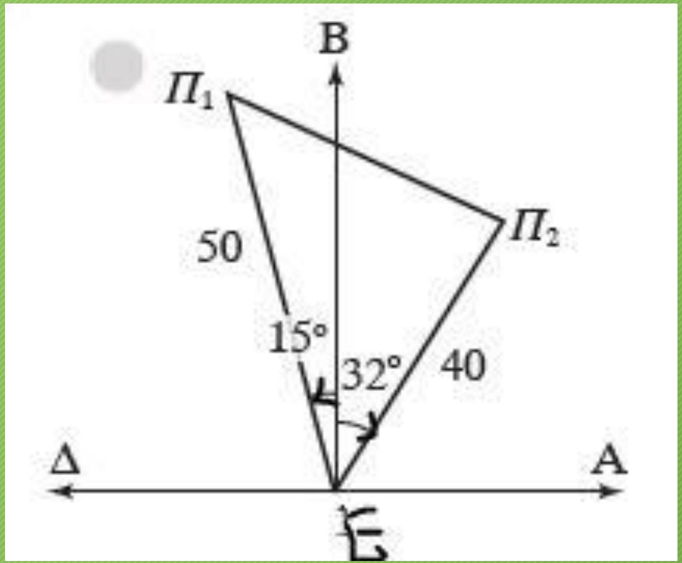
2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα:

1) Δύο πλοία (Π_1 *και* Π_2) αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα. Το Π_1 κινείται με 25 κόμβους (= 25 $\nu.\mu./h$) με $N\ 15°\ W$. Το Π_2 κινείται με 20 κόμβους (= 20 $\nu.\mu./h$)με $N\ 32°\ E$. Μετά από 2 ώρες (hours) ποια είναι η απόσταση των 2 πλοίων;

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Λύση:



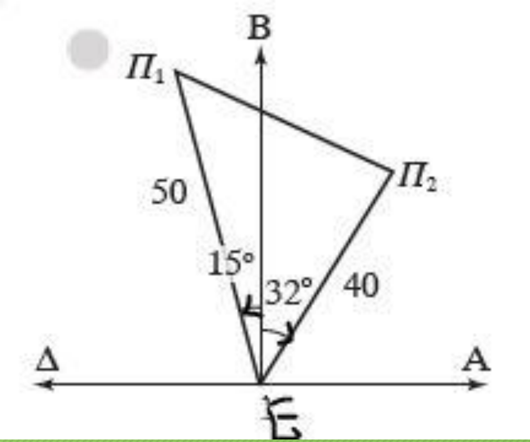
Το Π_1 μετά από 2 h έχει διανύσει $2 \times 25 = 50$ $\nu.\mu.$

Το Π_2 μετά από 2 h έχει διανύσει $2 \times 20 = 40$ $\nu.\mu.$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



Θεωρούμε ότι το Ε (σημείο Εκκίνησης) ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων O.

Στο τρίγωνο $O\Pi_1\Pi_2$ η γωνία $\Pi_1\hat{O}\Pi_2 = 15° + 32° = 47°$

Επίσης, $O\Pi_1 = 50\ \nu.\mu.$ και $O\Pi_2 = 40\ \nu.\mu.$

Ζητούμε το $\Pi_1\Pi_2$. Εφαρμόζουμε τον Νόμο των Συνημιτόνων:

$$(\Pi_1\Pi_2)^2 = (O\Pi_1)^2 + (O\Pi_2)^2 - 2\,(O\Pi_1)\,(O\Pi_2)\sigma\upsilon\nu(47°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 1372.007 \Rightarrow d \simeq 37{,}041$$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

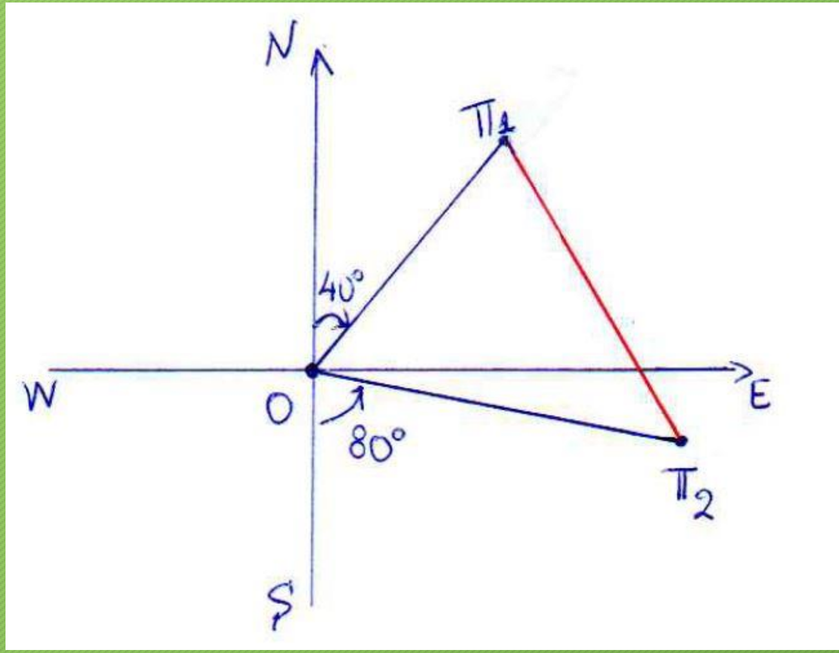
2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα:

2) Δύο πλοία (Π_1 $\kappa\alpha\iota$ Π_2) αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα. Το Π_1 κινείται προς $N\ 40°\ E$ μεταχύτητα $u_{\Pi_1} = 9\ \nu.\mu./h$ και το Π_2 κινείται προς $S\ 80°\ E$ με ταχύτητα $u_{\Pi_2} = 10\ \nu.\mu./h$. Μετά από 2 ώρες (hours) ποια είναι η απόσταση των 2 πλοίων;

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Λύση:



$$\Pi_1\hat{O}\Pi_2 = 180° - 40° - 80° = 60°$$

Το Π_1 μετά από 2 h έχει διανύσει $2 \times 9 = 18\ \nu.\mu.$

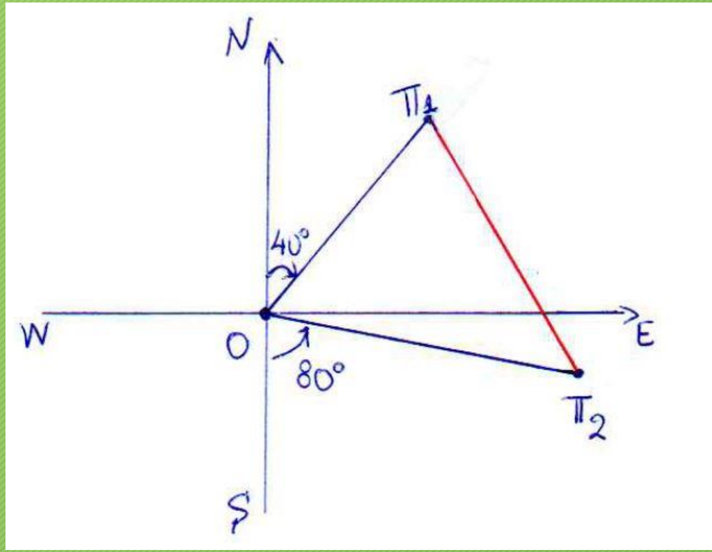
Το Π_2 μετά από 2 h έχει διανύσει $2 \times 10 = 20\ \nu.\mu.$

Άρα $O\Pi_1 = 18\ \nu.\mu.$ και $O\Pi_2 = 20\ \nu.\mu.$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



Και από τον Νόμο των Συνημιτόνων, έχουμε:

$$(\Pi_1\Pi_2)^2 = (O\Pi_1)^2 + (O\Pi_2)^2 - 2\,(O\Pi_1)\,(O\Pi_2)\sigma\upsilon\nu(60°) \Rightarrow$$

$$(\Pi_1\Pi_2)^2 = 18^2 + 20^2 - 2 \cdot\ 18 \cdot\ 20 \cdot 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ d^2 = 364 \Rightarrow d \simeq 19.079\ \nu.\mu.$$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

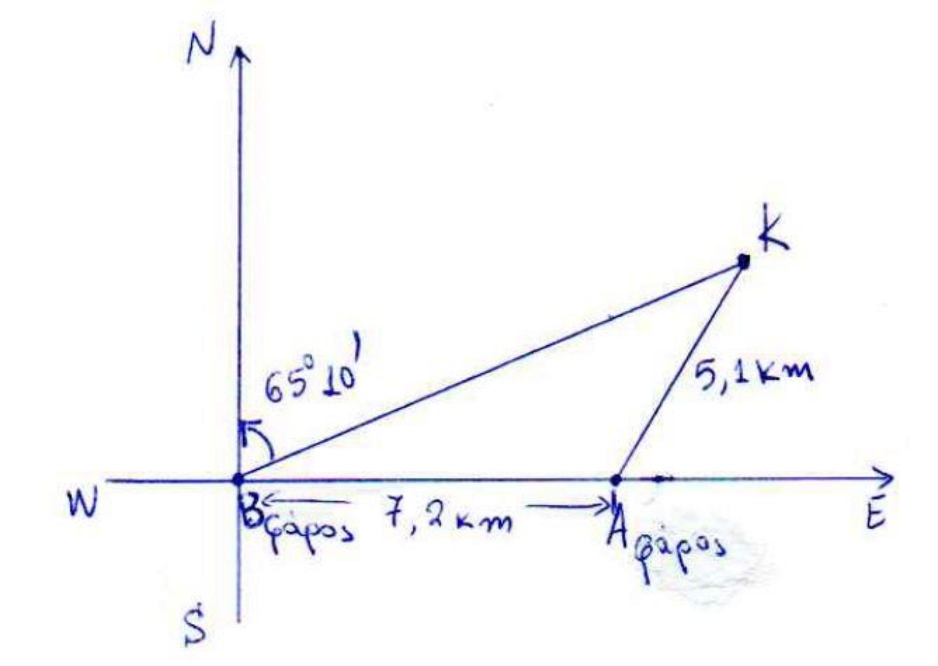
Παραδείγματα:

3) Μία βάρκα φαίνεται ταυτόχρονα από τον Φάρο Α σε απόσταση 5,1 km και από το Φάρο Β, ο οποίος απέχει 7,2 km δυτικά του Φάρου Α. Η διόπτευση της βάρκας από το Φάρο Β είναι $N\ 65°\ 10'E$. Πόσο μακριά είναι η βάρκα (Κ) από το Φάρο Β, αν γνωρίζουμε ότι η γωνία $(B\widehat{K}A)$ που σχηματίζει η βάρκα με τους δύο φάρους είναι οξεία;

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Λύση:



$$65°\,10' = 65° + \left(\frac{10}{60}\right)° = 65{,}167°$$

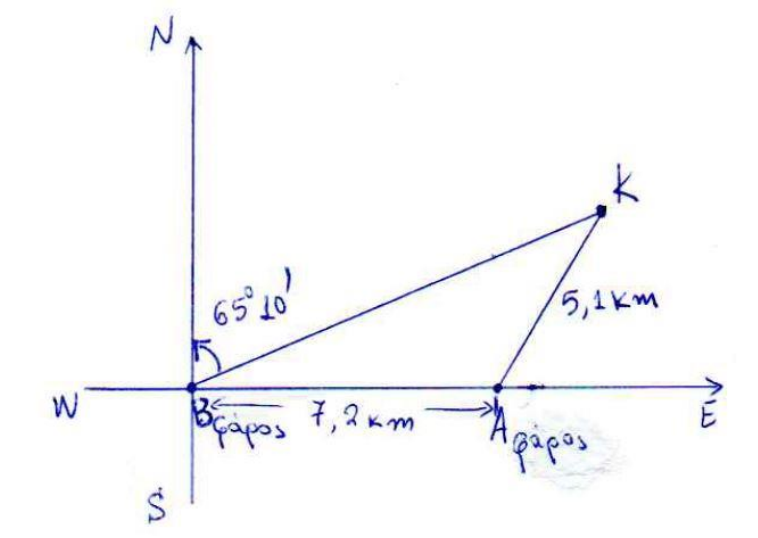
$$K\hat{B}A = 90° - 65°\,10' = 24°\,50'$$

$$24°\,50' = 24° + \left(\frac{50}{60}\right)° = 24{,}833°$$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



Στο τρίγωνο KBA εφαρμόζουμε το Νόμο των Ημιτόνων:

$$\frac{AB}{\eta\mu B\widehat{K}A} = \frac{AK}{\eta\mu K\widehat{B}A} \Leftrightarrow \frac{7{,}2}{\eta\mu B\widehat{K}A} = \frac{5{,}1}{\eta\mu 24{,}833°} \Leftrightarrow \frac{7{,}2}{\eta\mu B\widehat{K}A} = \frac{5{,}1}{0{,}42} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu B\widehat{K}A = 0{,}42 \cdot \frac{7{,}2}{5{,}1} \Leftrightarrow \eta\mu B\widehat{K}A = 0{,}593 \Leftrightarrow B\widehat{K}A = 36{,}37°$$

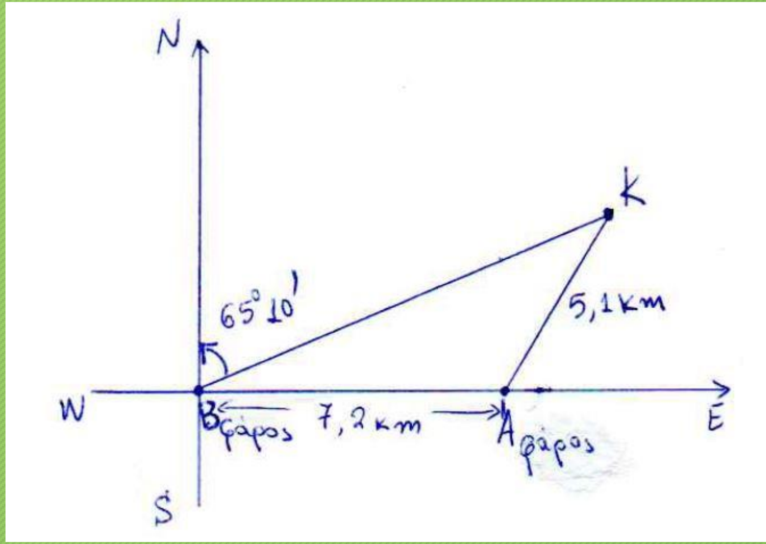
Οπότε:

$$B\widehat{A}K = 180° - 36{,}37° - 24{,}833° = 118{,}797°$$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

2. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΔΥΟ ΠΛΟΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



Στο τρίγωνο KBA εφαρμόζουμε πάλι το Νόμο των Ημιτόνων:

$$\frac{BK}{\eta\mu B\hat{A}K} = \frac{AK}{\eta\mu K\hat{B}A} \Leftrightarrow \frac{BK}{\eta\mu 118{,}797°} = \frac{5{,}1}{\eta\mu 24{,}833°} \Leftrightarrow \frac{BK}{0{,}876} = \frac{5{,}1}{0{,}42} \Leftrightarrow$$

$$BK = 0{,}876 \cdot \frac{5{,}1}{0{,}42} \Leftrightarrow BK = 10{,}637\ km \Leftrightarrow BK = 10\ 637\ m$$

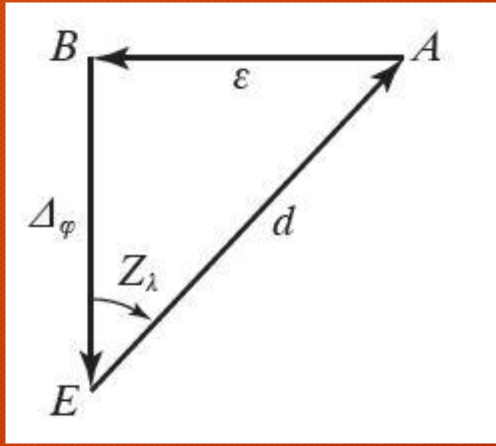
Με τη μέθοδο των τριών έχουμε:

$$\begin{array}{ll} 1\ \nu.\mu. & 1852\ m \\ x; & 10637m \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{10637}{1852}\ \nu.\mu. = 5{,}744\ \nu.\mu.$$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

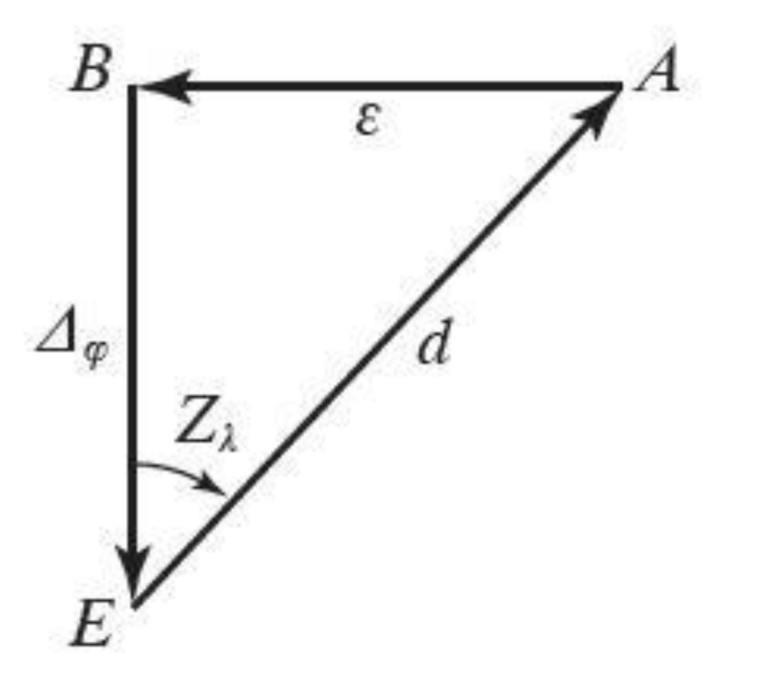


Χρησιμοποιείται για λοξοδρομικούς πλόες με απόσταση (**διάρμα**) μεταξύ του σημείου Εκκίνησης (Ε) και του σημείου Άφιξης (Α) μικρότερης των 600 $\nu.\mu.$, δηλαδή $d_{EA} < 600\ \nu.\mu.$

Τότε, η επιφάνεια της Γης θεωρείται επίπεδη και χρησιμοποιούμε επίπεδη τριγωνομετρία.

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ



Όπου

E = σημείο Εκκίνησης με γεωγραφικό πλάτος Φ_E

A = σημείο Άφιξης με γεωγραφικό πλάτος Φ_A

B = σημείο με γεωγραφικό πλάτος $\Phi_B = \Phi_A$

Και

$BA = \varepsilon$ = αποχώρηση με φορά $E \to W$

$EA = d$ = διάρμα

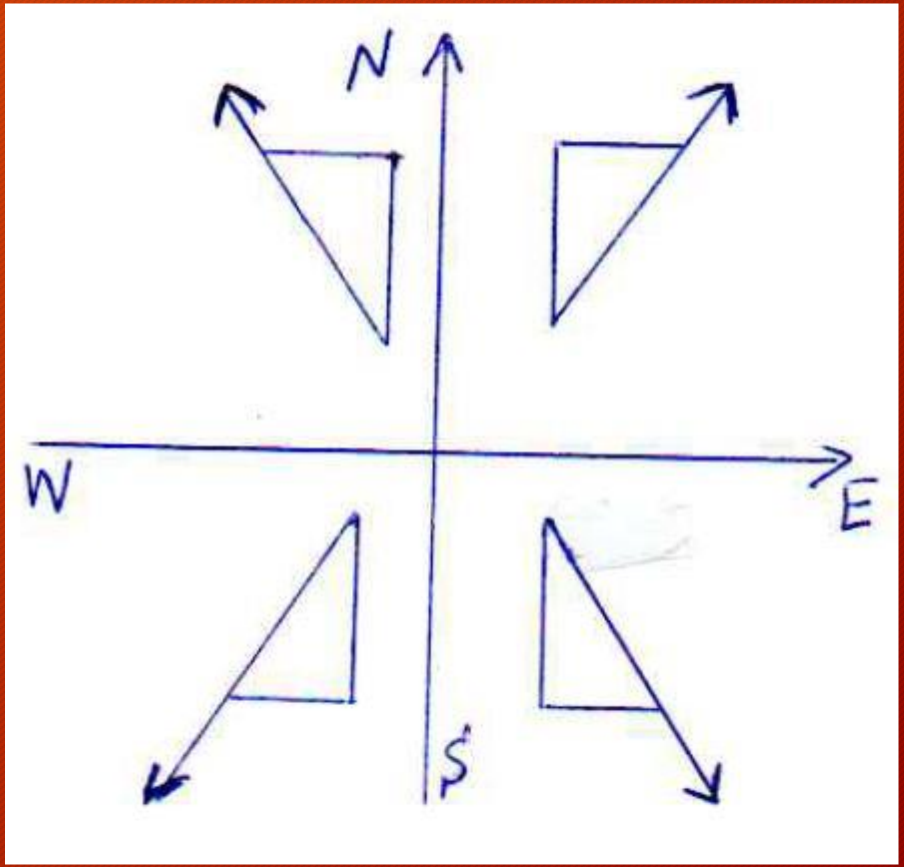
$BE = \Delta\varphi$ = διαφορά πλάτους με φορά $N \to S$

$B\hat{E}A = z_\lambda$ = αληθής πορεία ή πλεύση

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Επειδή το παραπάνω τρίγωνο, που έχει εφαρμογή στον λοξοδρομικό πλου, και το τοποθετούμε στους άξονες, έχουμε το:



Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Όσον αφορά την Διαφορά Πλάτους έχουμε τα εξής:

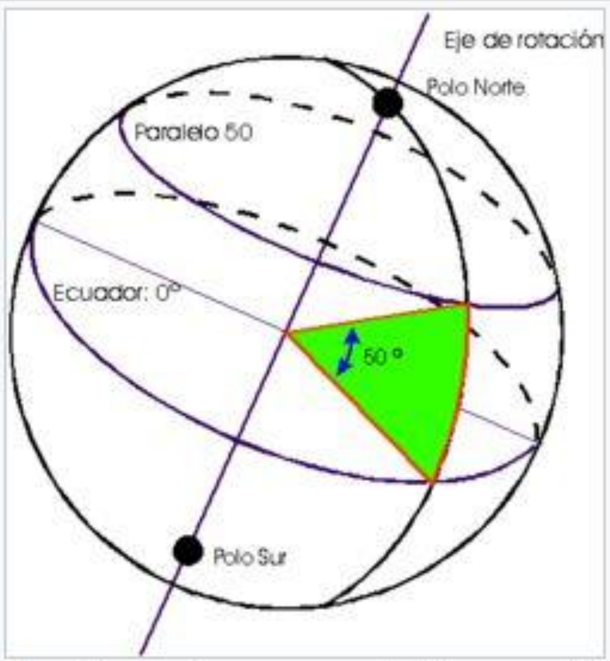
$$\Delta\varphi = \begin{cases} |\Phi_E - \Phi_A|, \text{όταν } \Phi_E, \Phi_A \text{ ομώνυμα} \\ \Phi_E + \Phi_A, \text{όταν } \Phi_E, \Phi_A \text{ ετερώνυμα} \end{cases}$$

Όπου,
Φ_E, Φ_A *ομώνυμα*, όταν βρίσκονται στο ίδιο ημισφαίριο,
Και,
Φ_E, Φ_A *ετερώνυμα*, όταν βρίσκονται σε διαφορετικό ημισφαίριο.

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Υπενθυμίσεις:



Προσδιορισμός γεωγραφικού πλάτους 50°Β, επί τόξου του μεσημβρινού του τόπου.

Το γεωγραφικό πλάτος (latitude) είναι ένα από τα δύο μεγέθη των **γεωγραφικών συντεταγμένων** με τα οποία προσδιορίζεται η θέση των διαφόρων τόπων και πλοίων στην επιφάνεια της γης και κατά προβολή η θέση των αεροσκαφών υπεράνω αυτής. Συγκεκριμένα, προσδιορίζει την γωνιακή απόσταση των διάφορων τόπων από τον **Ισημερινό**, ο οποίος έχει **γεωγραφικό πλάτος** ίσο με 0. Συμβολίζεται με το γράμμα (**φ ή Φ**), αγγλικά **lat.**

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Υπενθυμίσεις:

Το γεωγραφικό πλάτος αποδίδεται σε μοίρες, πρώτα και δεύτερα της μοίρας ή και ως δεκαδικός αριθμός επί των προηγουμένων. Οι μοίρες του γεωγραφικού πλάτους αποδίδονται πάντα με διψήφιο αριθμό από **00˚ - 90˚ N (North)**, ή **00˚ - 90˚ S (South).**

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Το 1 $\nu.\mu.$ είναι ίσο με $1'$ της γεωγραφικής μοίρας, στην υδρόγειο, δηλ. $\mathbf{1}\ \boldsymbol{\nu}.\boldsymbol{\mu}. = \mathbf{1'}$.

Άρα η διαφορά σε πρώτα λεπτά των γεωγραφικών πλατών δύο (2) σημείων είναι η απόσταση τους σε ναυτικά μίλια.

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Υπενθυμίσεις:

Για παράδειγμα:

Το γεωγραφικό πλάτος της Δονούσας είναι φ: 37° 06' 00" N, και

Το γεωγραφικό πλάτος του Ακρωτηρίου Ταίναρου εναι φ: 36° 23' 00" N.

Με μια πρώτη ματιά στα παραπάνω παραδείγματα γεωγραφικών συντεταγμένων της Δονούσας και του Ακρ. Ταίναρου διαπιστώνουμε τα εξής:

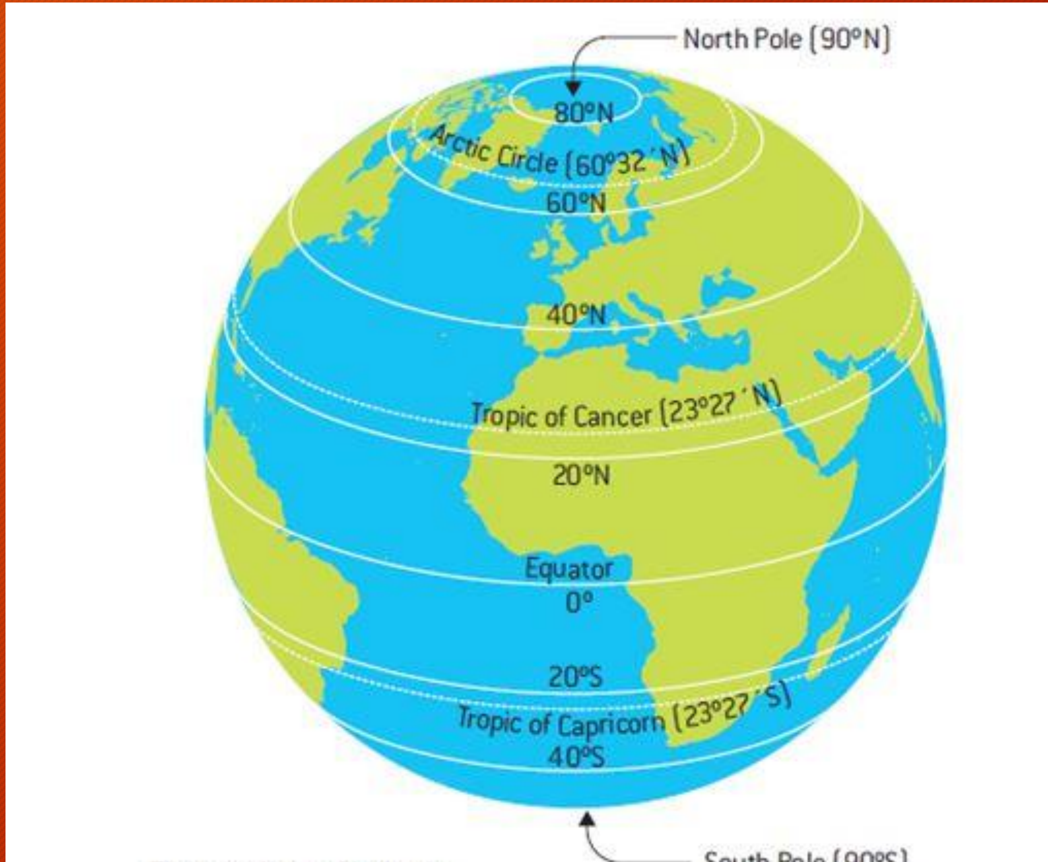
α) Η Δονούσα βρίσκεται 37° 06' 00" Βορειότερα του ισημερινού, αντίστοιχα

β) Το Ακρ. Ταίναρο βρίσκεται 36° 23' 00" Βορειότερα του ισημερινού.

Συγκρίνοντας τα δύο αυτά γεωγρ. πλάτη εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το Ακρ. Ταίναρο βρίσκεται **νοτιότερα** της Δονούσας.

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

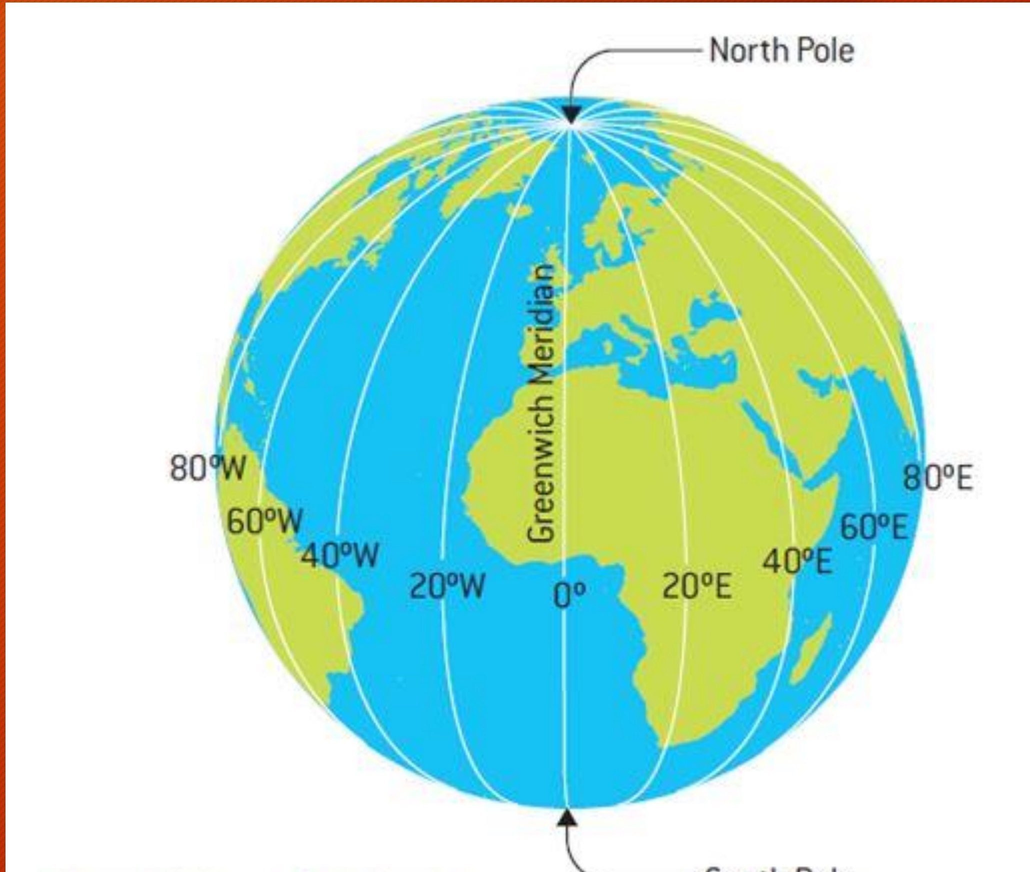
3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ



The parallels of latitude

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

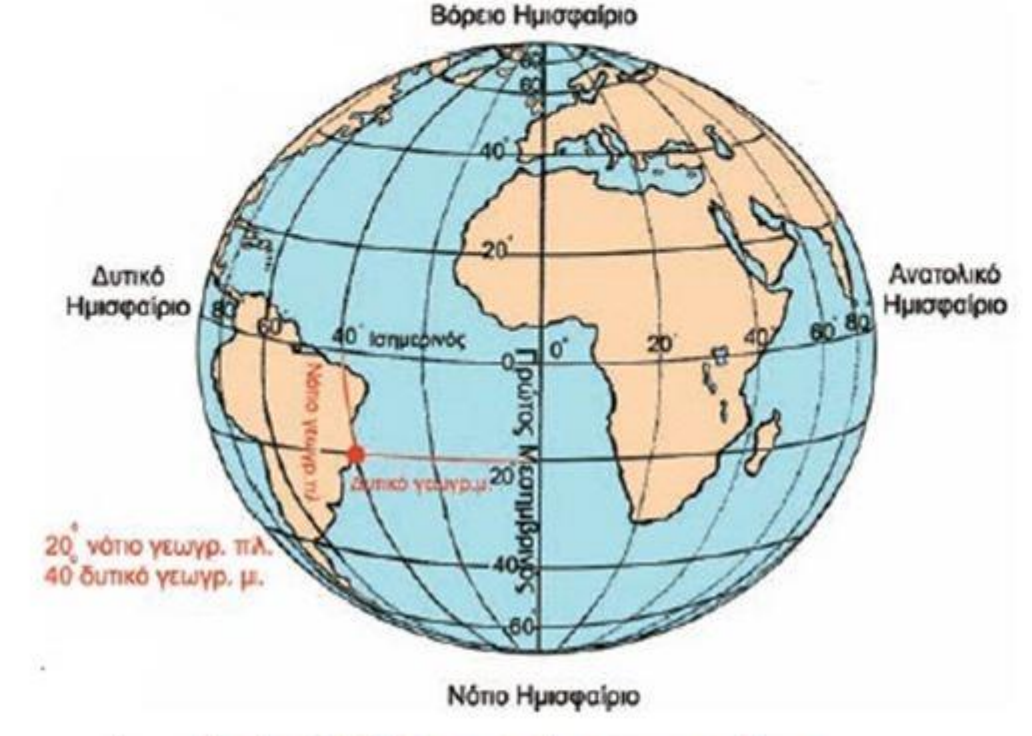
3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ



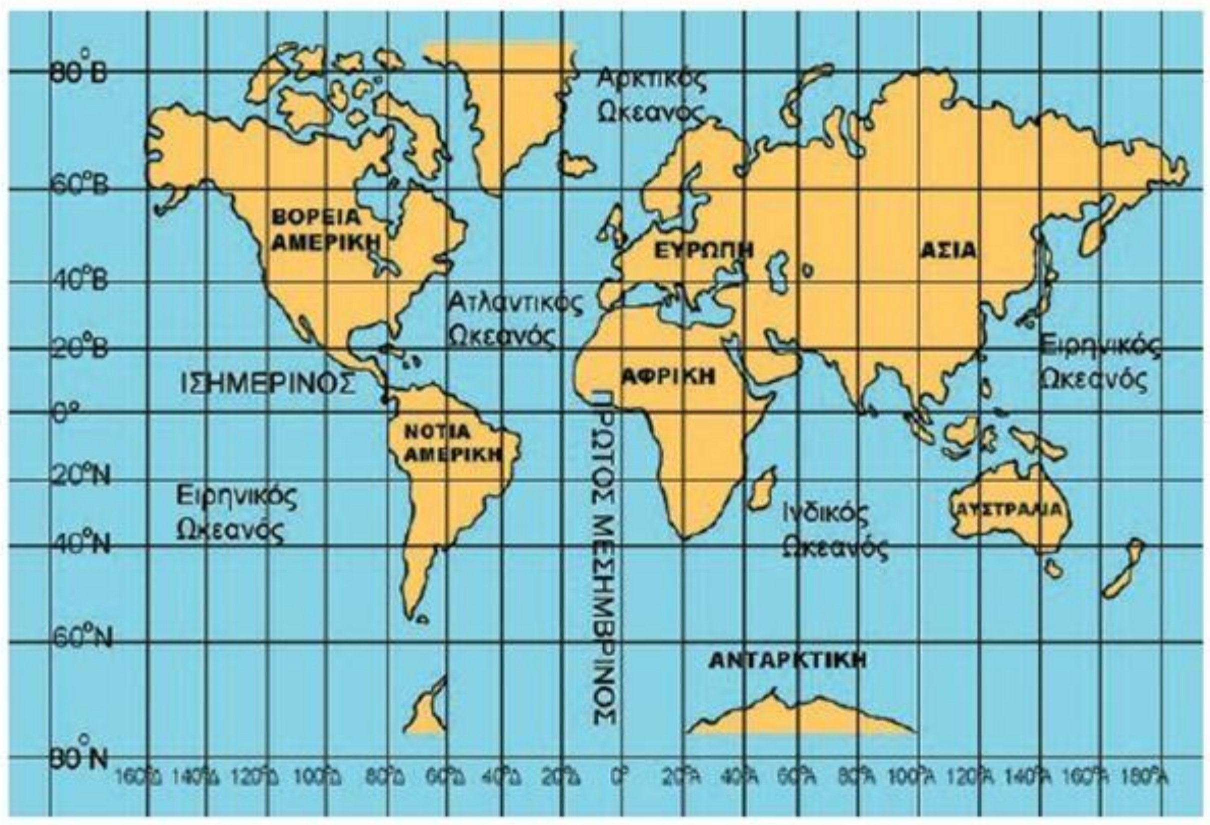
The meridians of longitude

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ



Εικόνα 3.1: Γεωγραφικές συντεταγμένες



Εικόνα. 3.2: Ο χάρτης της Γης

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

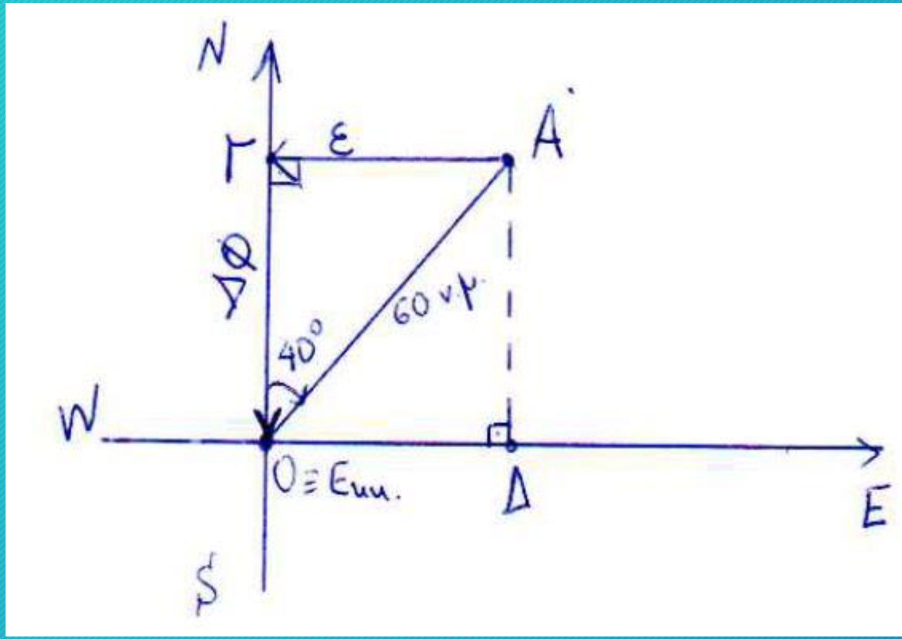
3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα:

1) Ένα πλοίο μετατοπίζεται κατά διεύθυνση $N\ 40°\ E$ και ταξιδεύει επί 3 ώρες με ταχύτητα 20 $\nu.\mu./\omega\rho\alpha$. Κατά πόσο μετατοπίστηκε το πλοίο προς τον Βορρά (N) και κατά πόσο προς την Ανατολή (E);

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση:



$$u = 20 \ \nu.\mu./h$$
$$t = 3h$$

Συνεπώς:

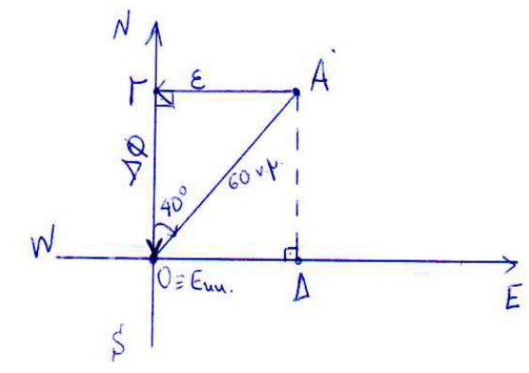
$$EA = u \cdot t \Rightarrow EA = 3h \cdot 20 \frac{\nu.\mu.}{h}$$

Άρα:

$$EA = 60 \ \nu.\mu.$$

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



Από το A φέρνω ⊥ στον κατακόρυφο άξονα και ⊥ στον οριζόντιο άξονα. Τα ίχνη αυτών είναι Γ και Δ , αντίστοιχα.

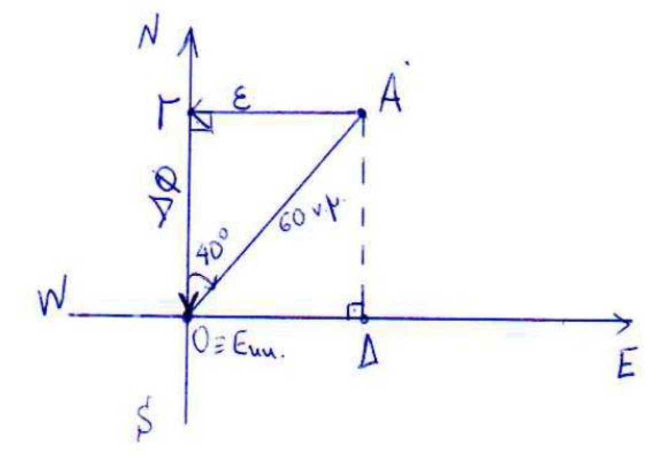
Συνεπώς, το $E\Gamma$ είναι η μετατόπιση προς το Βορρά, δηλαδή $(\Gamma E) = \Delta\varphi$,

το $(E\Delta) = (A\Gamma) = \varepsilon$, δηλαδή τη μετατόπιση προς την Ανατολή,

και η αληθής πορεία είναι $z_\lambda = \Gamma\hat{E}A = 40°$.

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΓΑ$, έχουμε:

$$cos Γ\hat{E}A = \frac{(ΓΕ)}{(ΕΑ)} \Leftrightarrow \cos(z_\lambda) = \frac{Δφ}{d} \Leftrightarrow Δφ = d \cdot \cos(z_\lambda) \Leftrightarrow Δφ = 60 \cdot \cos(40°) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Δφ = 60 \cdot 0{,}766 \Leftrightarrow Δφ = 45{,}96 \text{ ν.μ. απόσταση προς Βορρά}$$

Ομοίως,

$$sin Γ\hat{E}A = \frac{(ΑΓ)}{(ΕΑ)} \Leftrightarrow \sin(z_\lambda) = \frac{ε}{d} \Leftrightarrow ε = d \cdot sin(z_\lambda) \Leftrightarrow ε = 60 \cdot \sin(40°) \Leftrightarrow$$

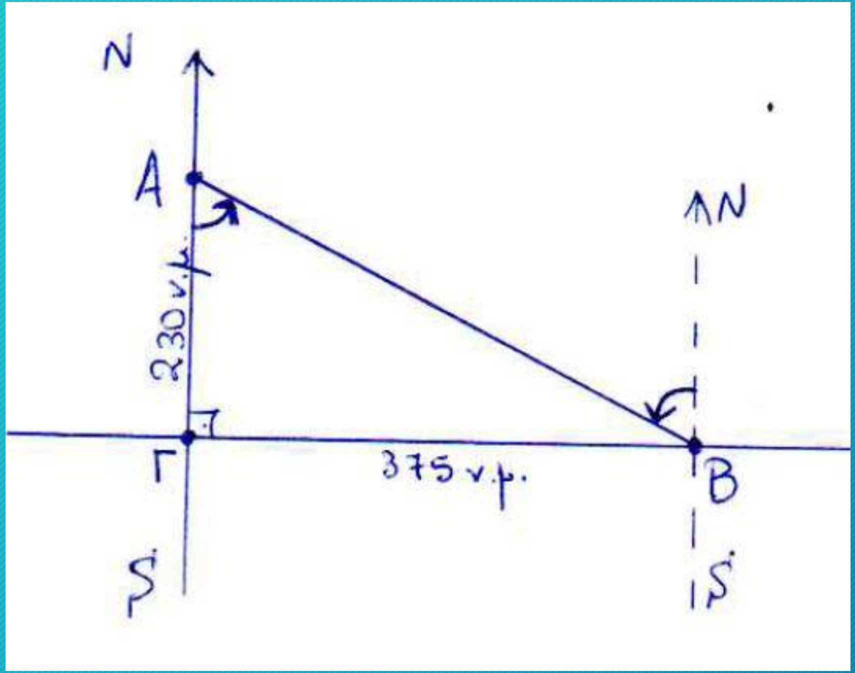
$$\Leftrightarrow ε = 60 \cdot 0{,}643 \Leftrightarrow ε = 38{,}58 \text{ ν.μ. απόσταση προς Ανατολάς}$$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

2) Τρία πλοία είναι τοποθετημένα ως εξής: Το Α βρίσκεται 230 $\nu.\mu.$ κατ' ευθείαν προς το Βορρά του Γ και το Β 375 $\nu.\mu.$ κατ'ευθείαν προς Ανατολάς του Γ. Ποιά είναι η διόπτευση α) του Β από το Α, β) του Α από το Β;

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

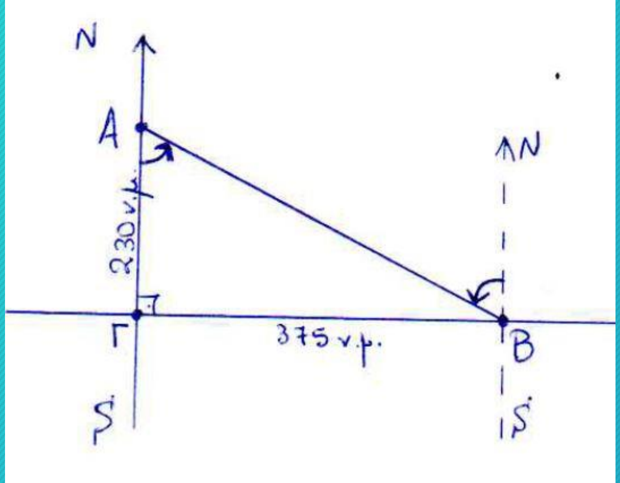
Λύση:



Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου $\hat{\Gamma} = 90°$, $(\Gamma A) = 230\ \nu.\mu.$ και $(B\Gamma) = 375\ \nu.\mu.$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ - ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



α) Η διόπτευση του Β από το Α είναι η γωνία $\varGamma\hat{A}B$, η οποία είναι τέτοια ώστε:

$$\tan \varGamma\hat{A}B = \frac{(\varGamma B)}{(A\varGamma)} \Leftrightarrow \tan \varGamma\hat{A}B = \frac{375}{230} \Leftrightarrow \tan \varGamma\hat{A}B = 1{,}63 \Leftrightarrow \varGamma\hat{A}B = 58{,}471° \Leftrightarrow$$

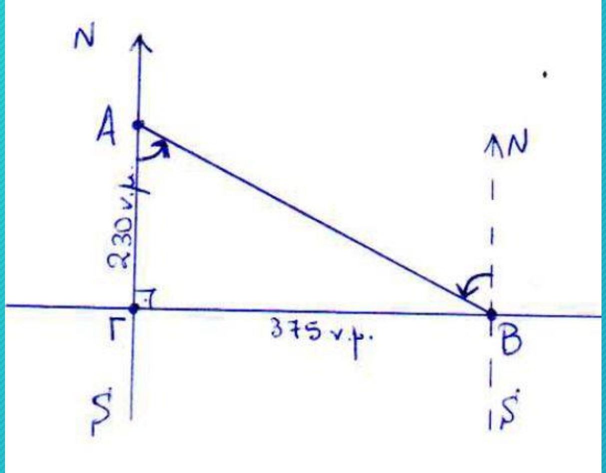
$$\Leftrightarrow \varGamma\hat{A}B = 58° + 0{,}471° \Leftrightarrow \varGamma\hat{A}B = 58° \;\; (0{,}471 \cdot 60)' = 58° \;\; 28{,}26' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varGamma\hat{A}B = 58° \;\; 28' \; (0{,}26 \cdot 60)'' = 58° \;\; 28' \;\; 15{,}6''$$

Άρα η ζητούμενη διόπτευση είναι : $S\ 58°\ 28{,}26'E$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



β) Η διόπτευση του Α από το Β είναι η γωνία $A\hat{B}N$, όμως επειδή οι δύο κάθετες είναι μεταξύ τους παράλληλες και η ΓΒ είναι τέμνουσα των δύο παραλλήλων, οπότε ισχύει:

$$A\hat{B}N = \Gamma\hat{A}B \ (εντός\ εναλλάξ)$$

Άρα η ζητούμενη διόπτευση είναι: $N\ 58°\ 28{,}26'W$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ - ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα:

3) Τρία πλοία είναι τοποθετημένα ως εξής: Το Α βρίσκεται 225 $\nu.\mu.$ κατ' ευθείαν προς τα Δυτικά του Γ, ενώ το Β βρίσκεται κατ' ευθείαν νότια του Γ και διοπτεύεται από το Α κατά $S\ 25°\ 10'E$.

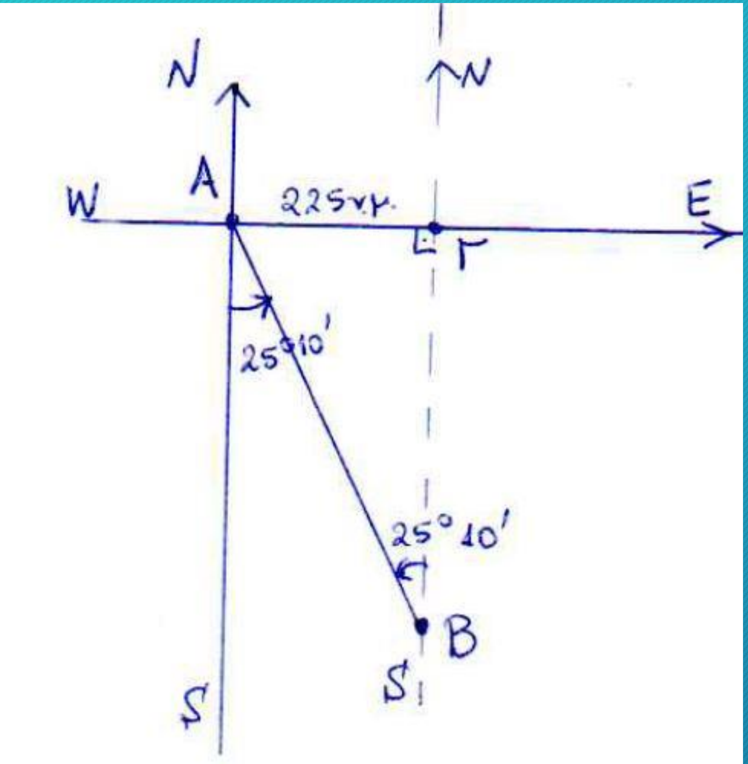
α) Σε ποια απόσταση από το Β βρίσκεται το Α;

β) Σε ποια απόσταση από το Γ βρίσκεται το Β;

γ) Ποια είναι η διόπτευση του Α από το Β;

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ - ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση:



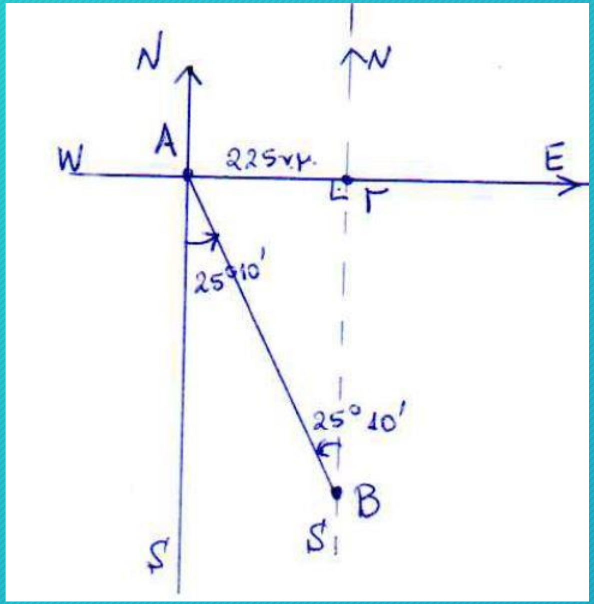
$$25°\,10' = 25° + \left(\frac{10}{60}\right)° = 25{,}167°$$

Οι δύο κατακόρυφοι άξονες Βορρά- Νότου είναι παράλληλοι και η ΑΒ είναι τέμνουσα των δύο παραλλήλων.

Συνεπώς $S\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$.

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ - ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση:



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$sinA\hat{B}\Gamma = \frac{(A\Gamma)}{(AB)} \Leftrightarrow (\mathrm{AB}) = \frac{(A\Gamma)}{sinA\hat{B}\Gamma} \Leftrightarrow (AB) = \frac{225}{\sin(25{,}167°)} \Leftrightarrow (AB) = \frac{225}{0{,}425} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AB) = 529{,}412\ \nu.\mu.$$

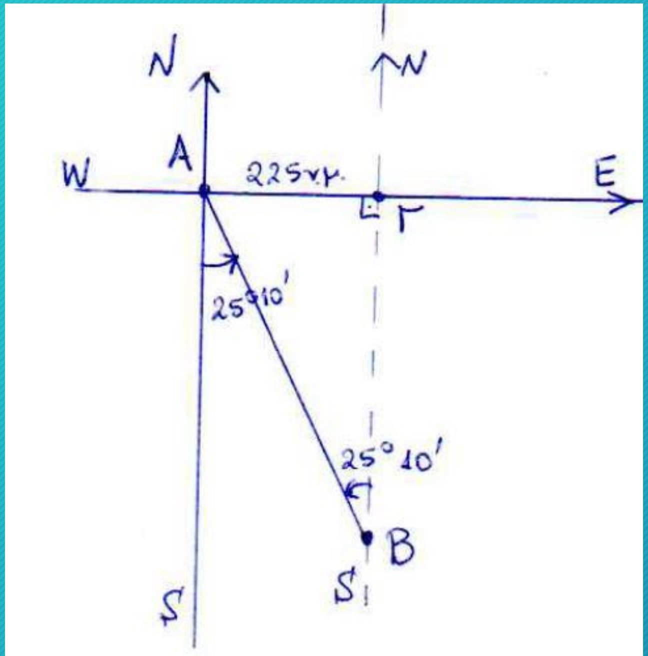
β) Ομοίως:

$$\tan A\hat{B}\Gamma = \frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)} \Leftrightarrow (\mathrm{B\Gamma}) = \frac{(A\Gamma)}{\tan A\hat{B}\Gamma} \Leftrightarrow (\mathrm{B\Gamma}) = \frac{225}{\tan(25{,}167°)} \Leftrightarrow (\mathrm{B\Gamma}) = \frac{225}{0{,}47} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (B\Gamma) = 478{,}723\ \nu.\mu.$$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση:



γ) Η διόπτευση του Α από το Β είναι $N\ 25°\ 10'\ W$.

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα Άλυτα:

4) Από ένα πλοίο που κατευθύνεται προς Βορρά με ταχύτητα 16,5 *κόμβους*, παρατηρούμε κατ'ευθείαν προς Ανατολάς του ένα ναυάγιο (Ν=Ναυάγιο) και πιο πέρα έναν φάρο (Φ). Μία ώρα αργότερα, το ναυάγιο και ο φάρος διοπτεύονται από $S\ 34°\ 40'E$ και $S\ 65°\ 10'E$, αντίστοιχα. Να βρεθεί η απόσταση του ναυαγίου από το φάρο (ΝΦ).

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα Άλυτα:

5) Ένα πλοίο κατευθύνεται προς την Ανατολή, όταν παρατηρείται μία φωτιά σε διόπτευση $N\ 59°\ 20'E$. Αφού το πλοίο διανύσει $2300m$ η φωτιά διοπτεύεται σε $N\ 40°\ 15\ E$. Εάν το πλοίο συνεχίσει την πορεία του, σε ποια θέση η απόστασή του από τη φωτιά θα είναι ελαχίστη και πόση είναι η απόσταση αυτή;

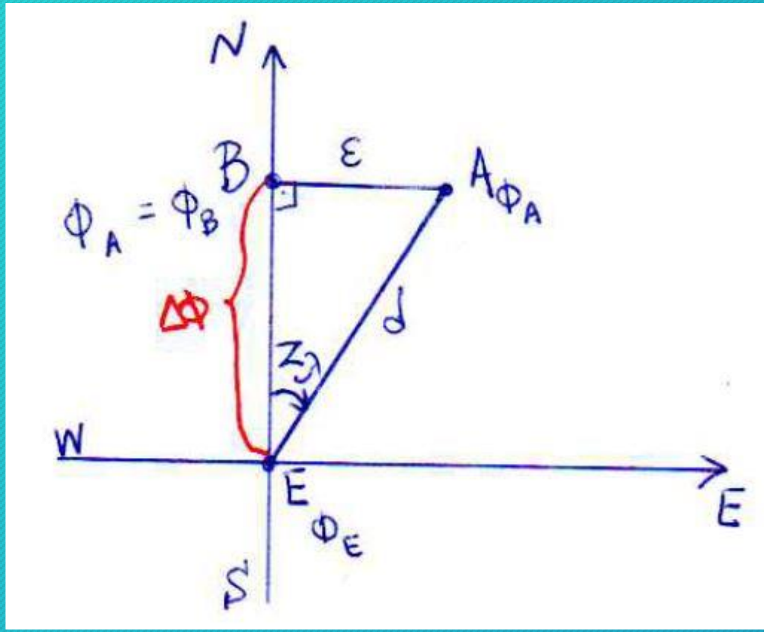
4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα:

6) Ένα πλοίο αναχωρεί από το λιμάνι Ε με γεωγραφικό πλάτος $\Phi_E = 45° \; 20' N$ και πλέει κατά $z_\lambda = N \; 23° \; 14' E$ σε απόσταση 270 $\nu.\mu.$. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος Φ_A του σημείου αφίξεως Α και η αποχώρηση ε.

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση:



$z_\lambda = 23°\ 14' = 23{,}233°$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΑ ($\hat{B} = 90°$)

$$\cos(z_\lambda) = \frac{\Delta\varphi}{(EA)} \Leftrightarrow \Delta\varphi = (EA)\cdot\cos(z_\lambda) \Leftrightarrow \Delta\varphi = 270\cdot\cos(23{,}233°) \Leftrightarrow$$

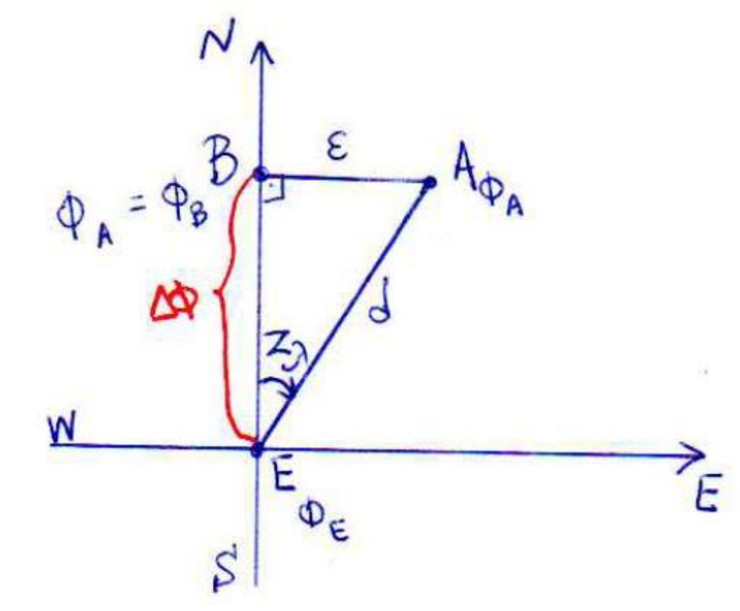
$$\Leftrightarrow \Delta\varphi = 270\cdot 0{,}919 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 248{,}13\ \nu.\mu. \Leftrightarrow \Delta\varphi = 248{,}13' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\varphi = \left(\frac{240}{60}\right)^{\circ} + 8{,}13' \Leftrightarrow \Delta\varphi = 4°\ 8'\ (0{,}13\cdot 60)'' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\varphi \simeq 4°\ 8'\ 8''$$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



Γνωρίζουμε ότι $\Phi_A = \Phi_B$.

Επίσης $\Delta\varphi = |\Phi_E - \Phi_A| = |\Phi_E - \Phi_B| = \Phi_B - \Phi_E$, και συνεπώς $\Phi_B = \Phi_E + \Delta\varphi$

Δηλαδή $\Phi_B = 45°\ 20' + 4°\ 8'\ 8'' = 49°\ 28'\ 8'' \Leftrightarrow \Phi_B = \Phi_A = 49°\ 28'\ 8''\ N$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΑ:

$$sin(z_\lambda) = \frac{\varepsilon}{(EA)} \Leftrightarrow \varepsilon = (EA) \cdot sin\,(z_\lambda) \Leftrightarrow \varepsilon = 270 \cdot sin\,(23{,}233°) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = 270 \cdot 0{,}394 \Leftrightarrow \varepsilon = 106{,}38\ \nu.\mu.$$

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

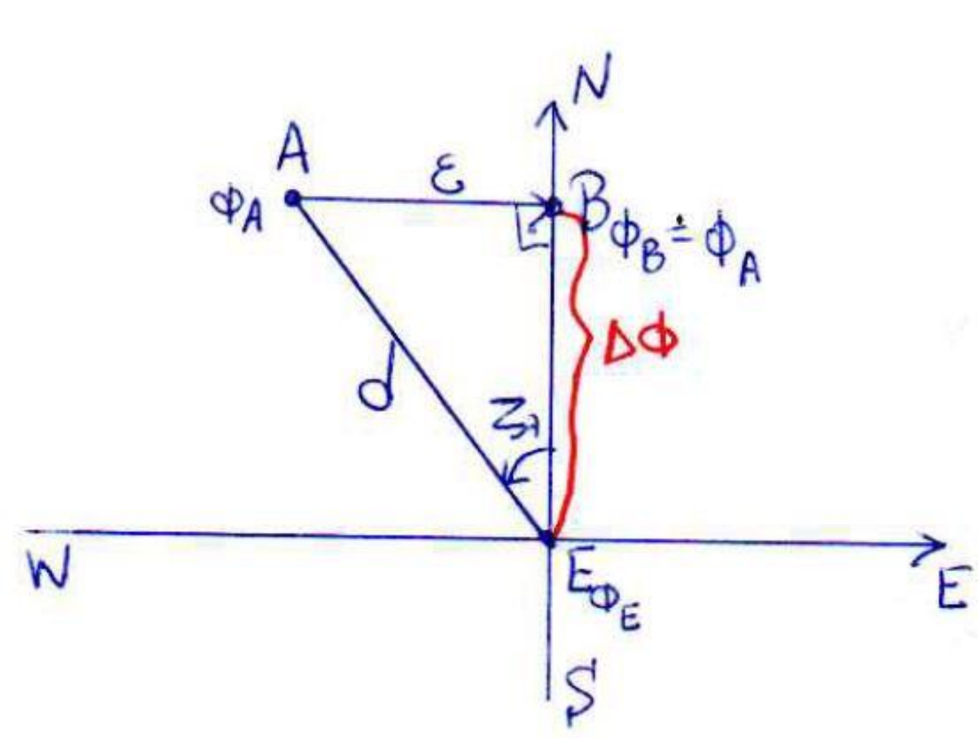
Παραδείγματα:

7) Ένα πλοίο αναχωρεί από το σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\Phi_E = 2°\ 21'S$ και πλέει με πορεία $z_\lambda = N\ 22°\ 14'W$ και έφτασε σε σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\Phi_A = 6°\ 12'N$. Να υπολογιστεί η διανυθείσα απόσταση d (διάρμα) και η αποχώρηση ε.

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση:



$$z_\lambda = 22° \;\; 14' = 22° + \left(\frac{14}{60}\right)° =$$
$$= 22° + 0{,}233° \Leftrightarrow z_\lambda = 22{,}233°$$

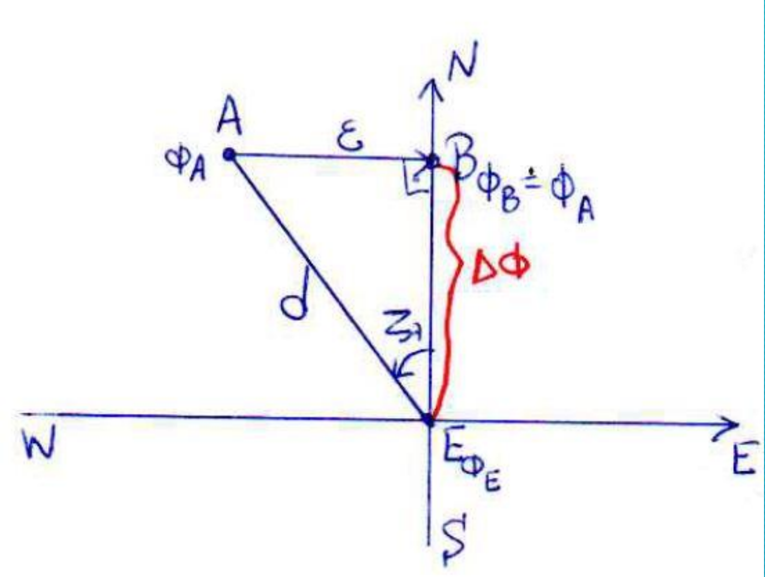
Αφού το Φ_E είναι στο S
Και το Φ_A είναι στο N, αυτό σημαίνει ότι το πλοίο έχει αλλάξει ημισφαίριο.
Άρα

$$\Delta\varphi = \Phi_E + \Phi_A = 2°\,21' + 6°\,12'$$
$$\Delta\varphi = 8° + 33' = (8 \cdot 60)' + 33'$$
$$\Delta\varphi = 513' = 513 \; \nu.\mu.$$

Εφαρμογές της Επίπεδης Τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ - ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Λύση (συνέχεια):



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE (με $\hat{B} = 90°$), έχουμε:

$$cos B\hat{E}A = \frac{(BE)}{(EA)} \Leftrightarrow \cos(z_\lambda) = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow d = \frac{\Delta\varphi}{\cos(z_\lambda)} \Leftrightarrow d = \frac{513}{\cos(22{,}233°)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{513}{0{,}926} \Leftrightarrow d \simeq 554\ \nu.\mu.$$

β) Ομοίως,

$$sin B\hat{E}A = \frac{(AB)}{(EA)} \Leftrightarrow \sin(z_\lambda) = \frac{\varepsilon}{d} \Leftrightarrow \varepsilon = d \cdot sin(z_\lambda) \Leftrightarrow \varepsilon = 554 \cdot \sin(22{,}233°) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = 554 \cdot 0{,}378 \Leftrightarrow \varepsilon = 209{,}412\ \nu.\mu.$$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ - ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα Άλυτα:

8) Ένα πλοίο αναχωρεί από το σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\Phi_E = 3° \, 54'$ από S προς N και πλέει με πορεία $z_\lambda = N \, 51° \, 26{,}3' W$ έως το σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\Phi_A = 2° \, 14' N$. Να υπολογιστεί η διανυθείσα απόσταση d (διάρμα) και η αποχώρηση του ε. Γνωρίζουμε ότι τα Ε και Α βρίσκονται σε διαφορετικά ημισφαίρια.

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα Άλυτα:

9) Ένα πλοίο αναχωρεί από το σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\Phi_E = 15° \; 55' S$ προς $N \; 53° \; 26{,}3' E = z_\lambda$ έως το σημείο Α με αποχώρηση ε=115 ν.μ. . Να βρεθούν i)το γεωγραφικό πλάτος Φ_A του σημείου άφηξης A και ii) το διάρμα (d).

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΟΠΤΕΥΣΗ – ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Παραδείγματα Άλυτα:

10) Ένα πλοίο πλέει προς Βορρά με ταχύτητα 14 κόμβων, ενώ υπόκειται σε ρεύμα ανατολικής διεύθυνσης και ταχύτητας 3 κόμβων. Να βρεθεί η διεύθυνση του ίχνους του πλοίου ως προς το βυθό και η πραγματική του ταχύτα.

Καλό Διάβασμα!!!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη