ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

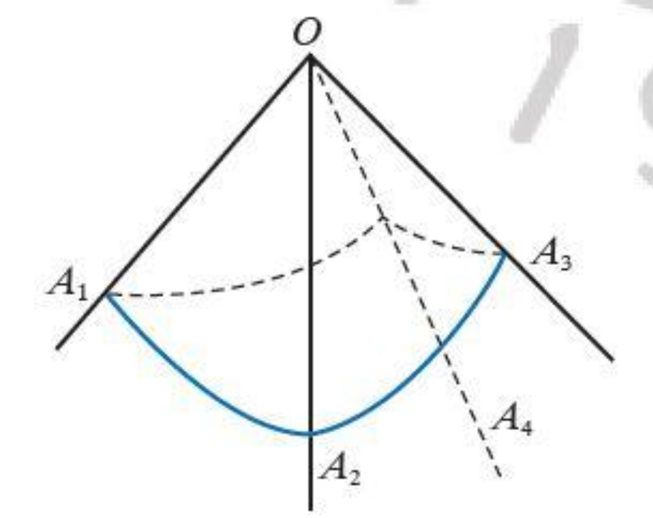
1ο μάθημα

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) Η έννοια της γωνίας στο χώρο

α) ***Πολύεδρη*** ή ***Στερεά γωνία*** ονομάζεται η γωνία, η οποία σχηματίζεται από τρία ή περισσότερα επίπεδα που συναντώνται στο ίδιο σημείο και ανά τρία δεν διέρχονται από την ίδια ευθεία

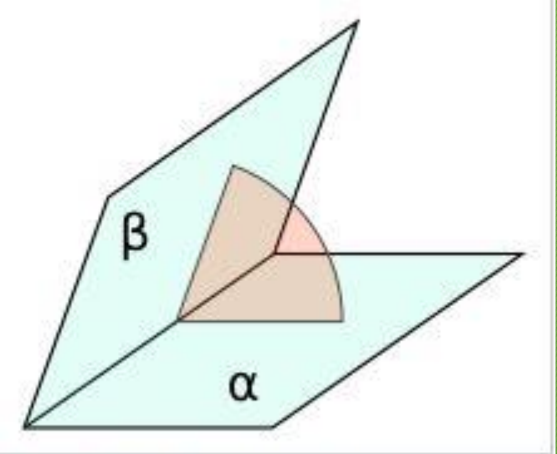


Συμβολισμός: $\mathbf{O.A_1A_2A_3 \cdots A_\nu}$ $(\nu \geq 3)$.

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) Η έννοια της γωνίας στο χώρο

β) ***Δίεδρη γωνία*** στερεάς γωνίας ονομάζεται η γωνία που σχηματίζουν οι έδρες που ανά δύο διέρχονται από κάθε ακμή.



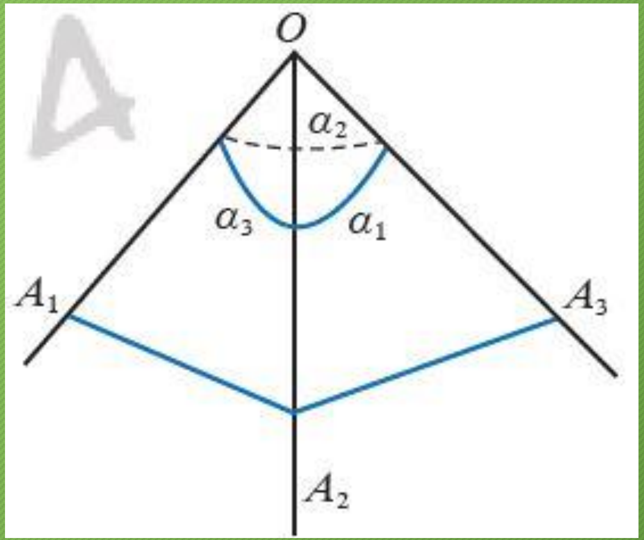
Γωνία μεταξύ δύο επιπέδων (α, β, πράσινο) σε ένα τρίτο επίπεδο (ροζ), η οποία κόβει τη γραμμή τομής κάθετα.

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) Η έννοια της γωνίας στο χώρο

γ) Στη σφαιρική τριγωνομετρία θα χρησιμοποιούμε τρίεδρες στερεές γωνίες.

Τρίεδρη ονομάζεται η στερεά γωνία που έχει ακριβώς τρεις ακμές, όπως: $\mathbf{O.A_1A_2A_3}$



ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) Η έννοια της γωνίας στο χώρο

γ) Χαρακτηριστικά της τρίεδρης γωνίας:

i) Κορυφή (Ο)

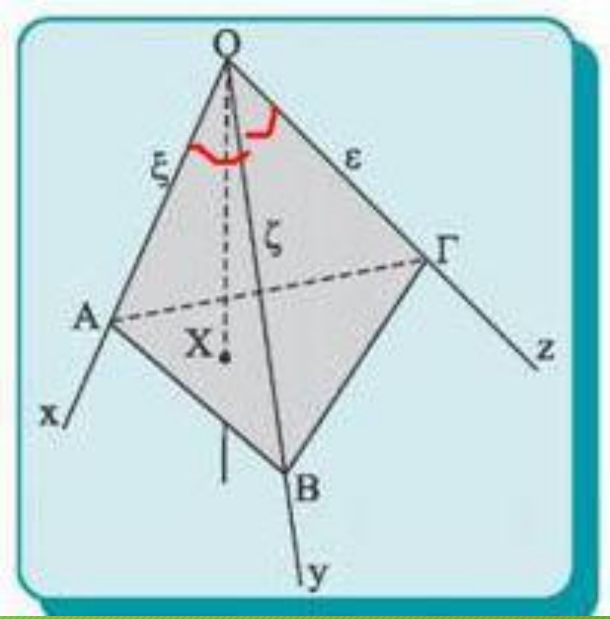
ii) Έδρες=Κυρτές επίπεδες γωνίες ή εδρικές γωνίες, δηλαδή: $A_1\hat{O}A_2\,,\ A_2\hat{O}A_3\ ,\ A_3\hat{O}A_1$

Έδρες ονομάζονται και τα επίπεδα που σχηματίζουν τη στερεά γωνία.

iii) Ακμές: $OA_1\,,\quad OA_2\,,\quad OA_3\,.$

2) Είδη Τρίεδρων Γωνιών

α) ***Ισοσκελής*** ονομάζεται η τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ, της οποίας οι δύο έδρες (εδρικές γωνίες) είναι ίσες.

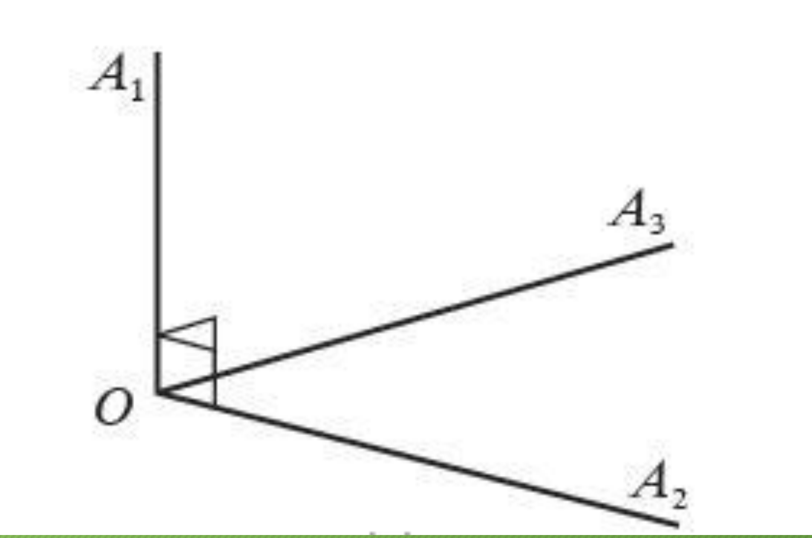


Με $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma$

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

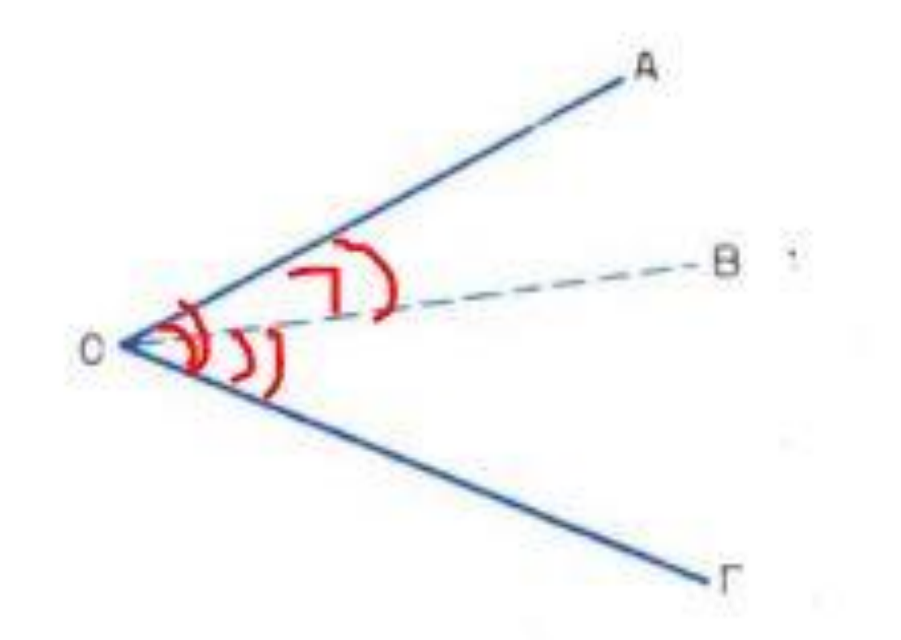
2) Είδη Τρίεδρων Γωνιών

β) Μια ισοσκελής τρίεδρη γωνία, με τις ίσες γωνίες ορθές, χαρακτηρίζεται ***δισορθογώνια***



2) Είδη Τρίεδρων Γωνιών

γ) Μια τρίεδρη γωνία $O.A_1A_2A_3$ ονομάζεται ***ισοεδρική***, αν οι έδρες της είναι όλες ίσες.

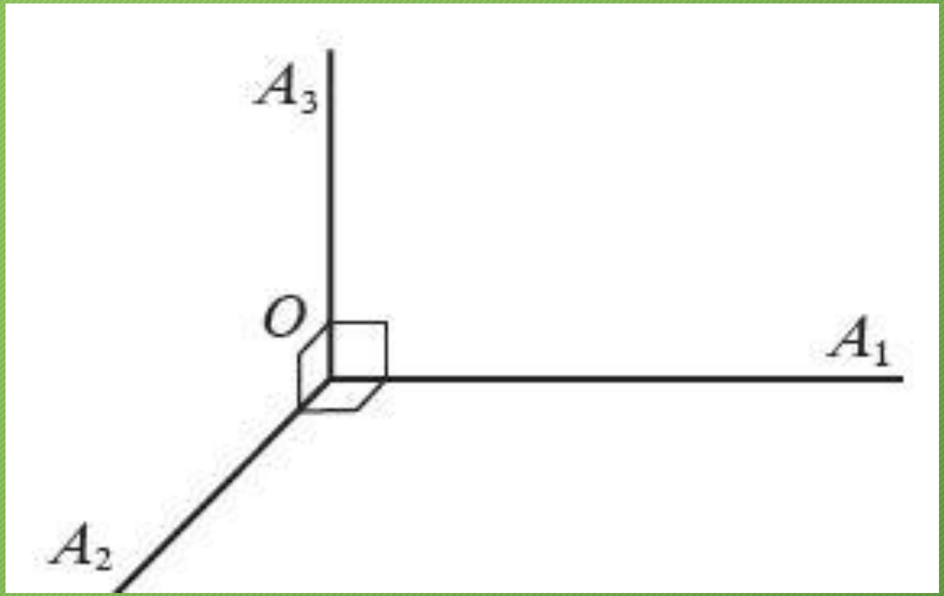


Με $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}A$

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2) Είδη Τρίεδρων Γωνιών

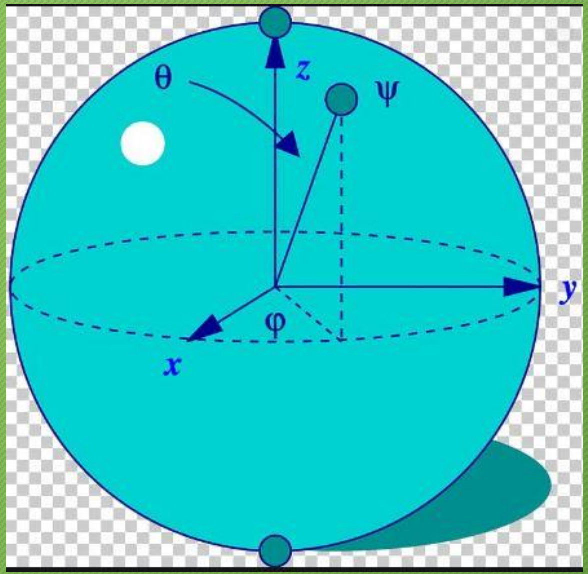
δ) Μια ισοεδρική τρίεδρη γωνία, με τις ακμές της ανά δύο κάθετες μεταξύ τους και όλες τις δίεδρες ορθές, ονομάζεται ***τρισορθογώνια***.



3) Η Σφαίρα

Σφαίρα είναι το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν από ένα σταθερό σημείο O (το ***κέντρο της σφαίρας***) σταθερή απόσταση R (την ***ακτίνα*** της). Η σφαίρα συμβολίζεται (O,R)

Η ***στερεά σφαίρα*** είναι το σύνολο των σημείων του χώρου, που απέχουν από το σταθερό σημείο O απόσταση μικρότερη ή ίση του R.

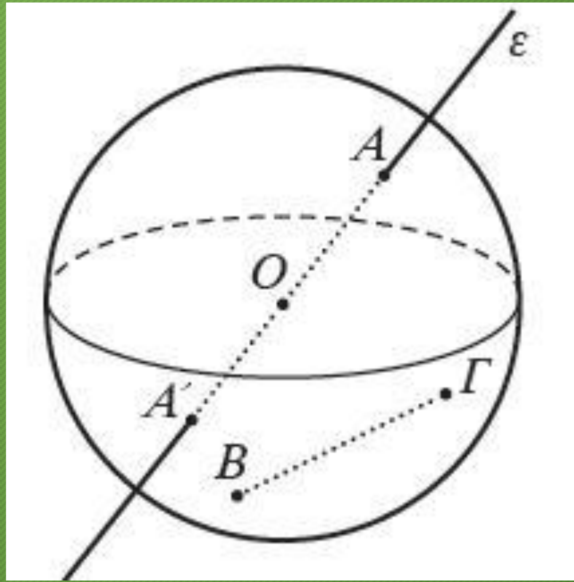


ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

α) Η Χορδή, είναι κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα είναι σημεία της σφαίρας

β) Η Διάμετρος, είναι η μεγαλύτερη χορδή, η οποία διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας



ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

γ) Σημείο και σφαίρα

Έστω ένα σημείο M, τότε:

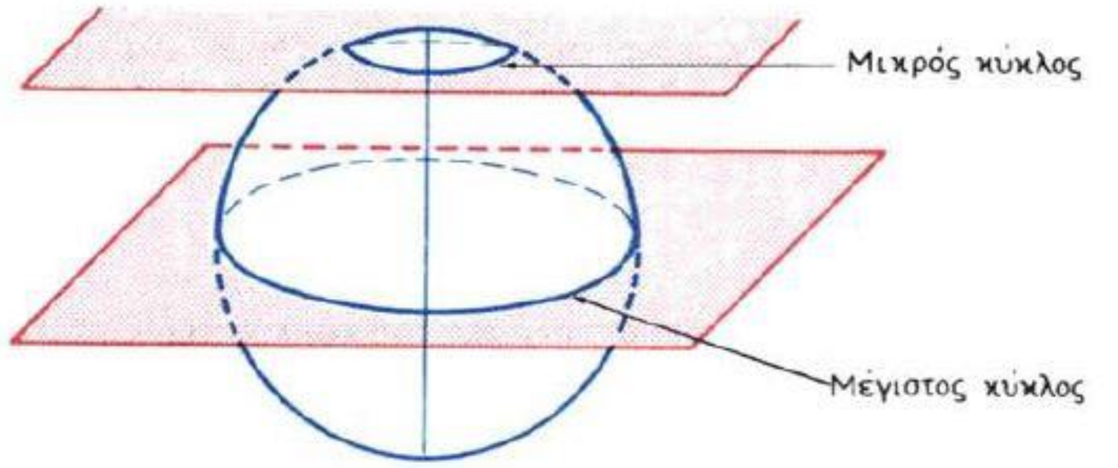
i) αν $OM < R$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας, τότε το M βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας

ii) αν $OM > R$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας, τότε το M βρίσκεται στο εξωτερικό της σφαίρας

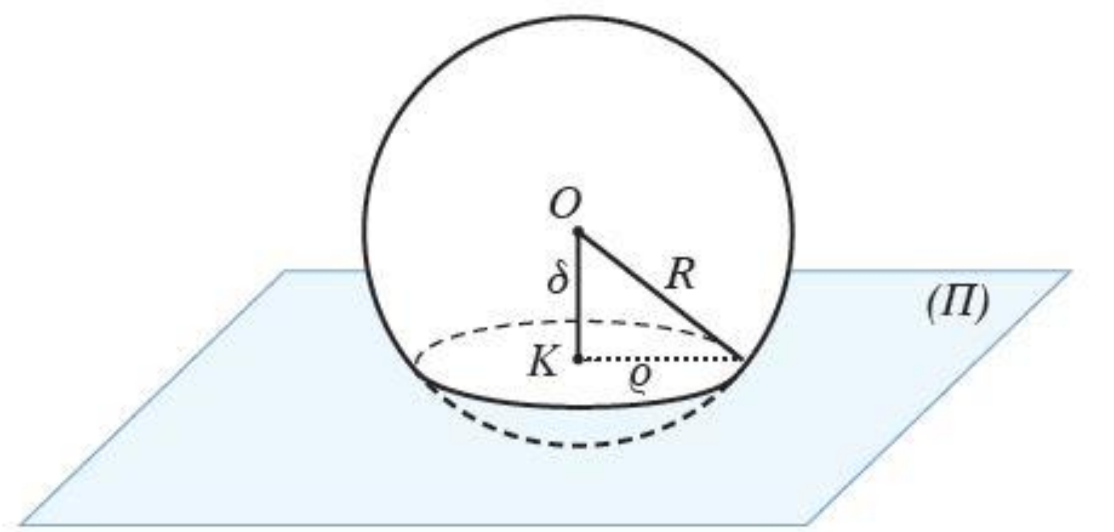
και iii) αν $OM = R$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας, τότε το M βρίσκεται πάνω στη σφαίρα.

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

δ) Θέσεις επιπέδου και σφαίρας

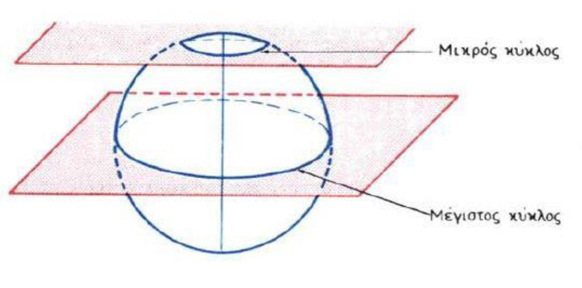


Σχ. 2.2α.



3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

δ) Θέσεις επιπέδου και σφαίρας



Σχ. 2.2α.

Έστω σφαίρα με ακτίνα R και δ η απόσταση του κέντρου της από ένα επίπεδο (Π).

Αν: 1) $\delta > R$ η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία.

2) $\delta = R$ η σφαίρα και το επίπεδο έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται).

3) $\delta < R$ η σφαίρα και το επίπεδο τέμνονται.

Η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι κύκλος (σχ. 2.2α).

Αν α) $\delta < R$ και $\delta \neq 0$ ο κύκλος λέγεται ***μικρός***.

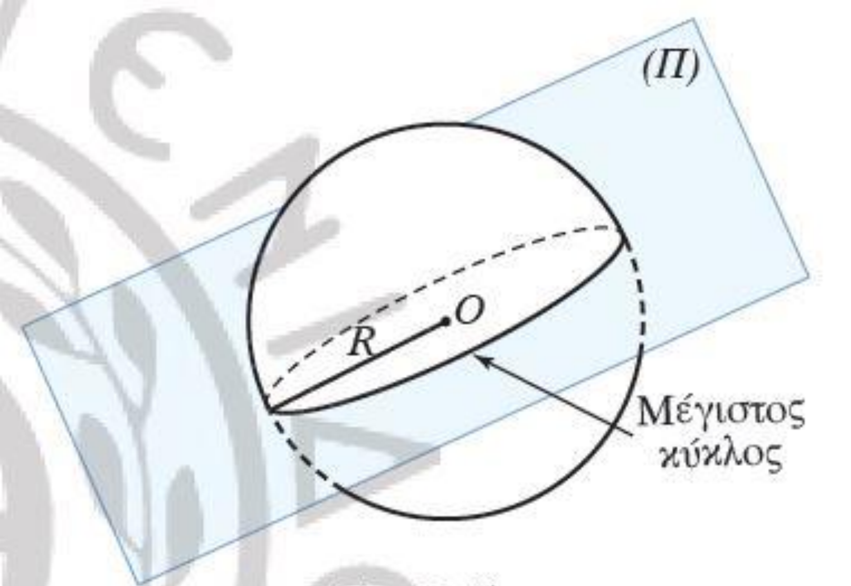
β) $\delta = 0$ ο κύκλος λέγεται ***μέγιστος***.

Αν r η ακτίνα του σχηματιζόμενου κύκλου, τότε $R^2 = \delta^2 + r^2$ (σχ. 2.2β).

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

ε) Ιδιότητες Μέγιστων Κύκλων σφαίρας

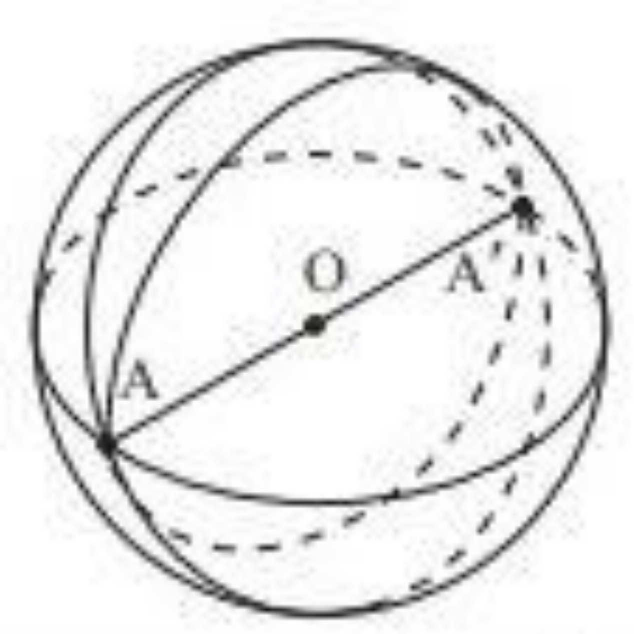


Σχ. 13.1ζ.

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

ε) Ιδιότητες Μέγιστων Κύκλων σφαίρας

1) Οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους.
2) Οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας διχοτομούν αλλήλους.
3) Η τομή δύο μέγιστων κύκλων της σφαίρας είναι κοινή διάμετρός τους.
4) Κάθε μέγιστος κύκλος διαιρεί τη σφαίρα σε δύο ίσα μέρη που ονομάζονται ***ημισφαίρια***.

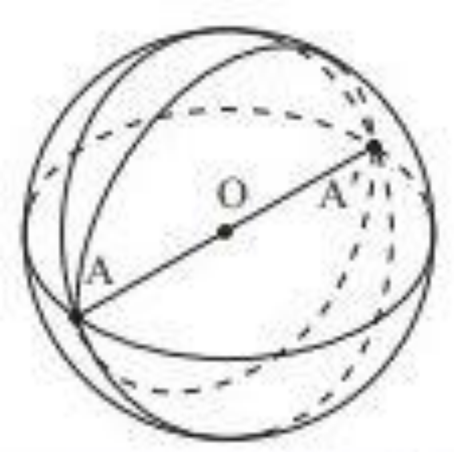


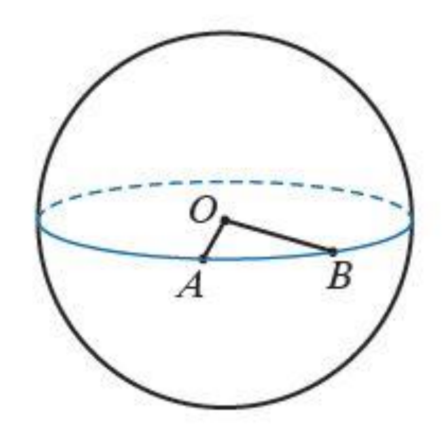
3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

ε) Ιδιότητες Μέγιστων Κύκλων σφαίρας

5) Δια δύο σημείων μιας σφαίρας, τα οποία δεν είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου, διέρχεται ***ένας και μόνο*** μέγιστος κύκλος, ενώ αν τα σημεία αυτά είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου, τότε διέρχονται δι' αυτών άπειροι μέγιστοι κύκλοι.

6) Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων σφαίρας είναι το τόξο μέγιστου κύκλου, το οποίο ορίζεται από τα σημεία αυτά.



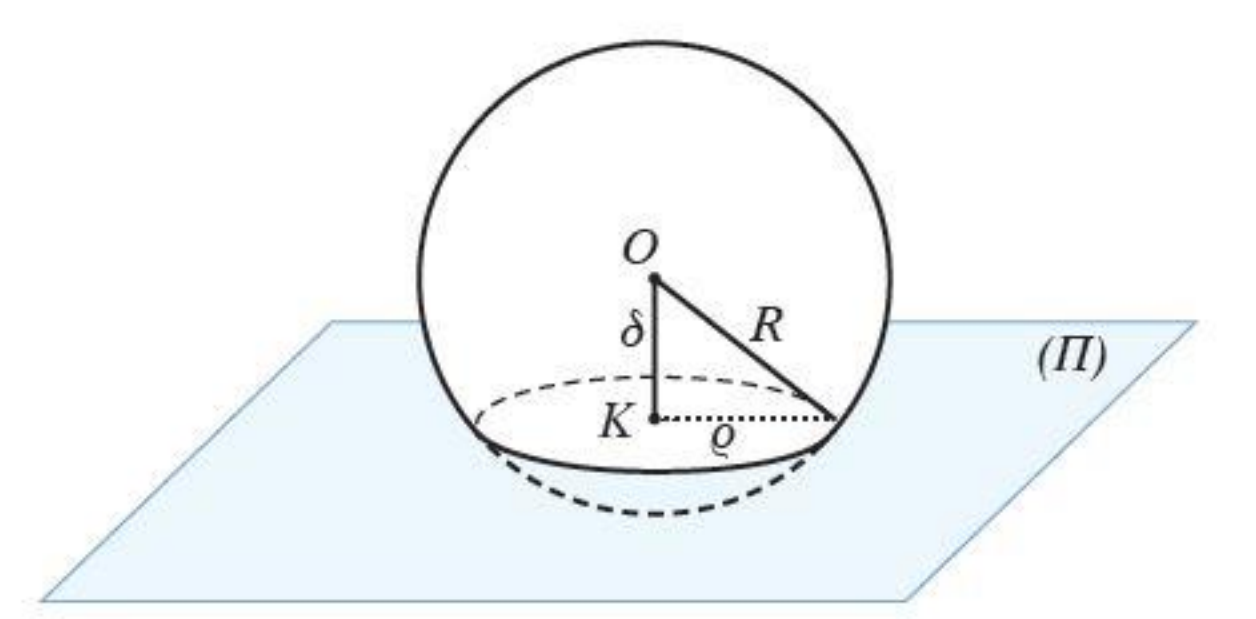


Σχ. 13.1θ.

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

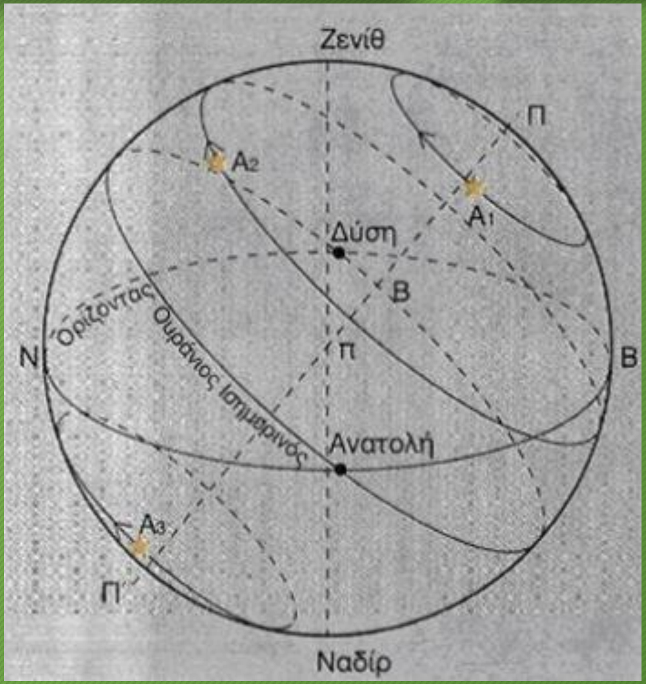
3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

στ) Ιδιότητες Μικρών Κύκλων σφαίρας



3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

στ) Ιδιότητες Μικρών Κύκλων σφαίρας

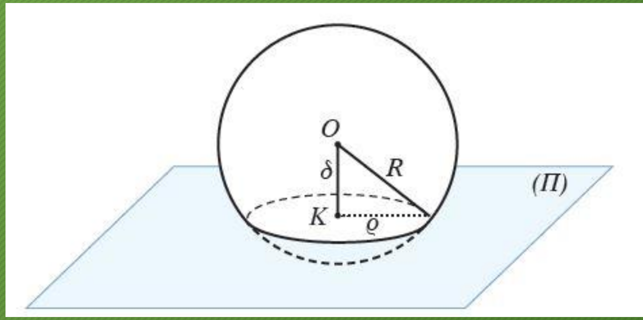


Δύο μικροί κύκλοι σφαίρας που απέχουν εξίσου από το κέντρο της είναι ίσοι.

Δύο μικροί κύκλοι σφαίρας που απέχουν άνισα από το κέντρο της είναι άνισοι και μικρότερος είναι εκείνος που απέχει περισσότερο από το κέντρο της σφαίρας.

Η ευθεία που ενώνει το κέντρο της σφαίρας με το κέντρο ενός μικρού κύκλου της είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.

Η θέση ενός μικρού κύκλου είναι ορισμένη, όταν δοθούν τρία σημεία της περιφέρειάς του επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.



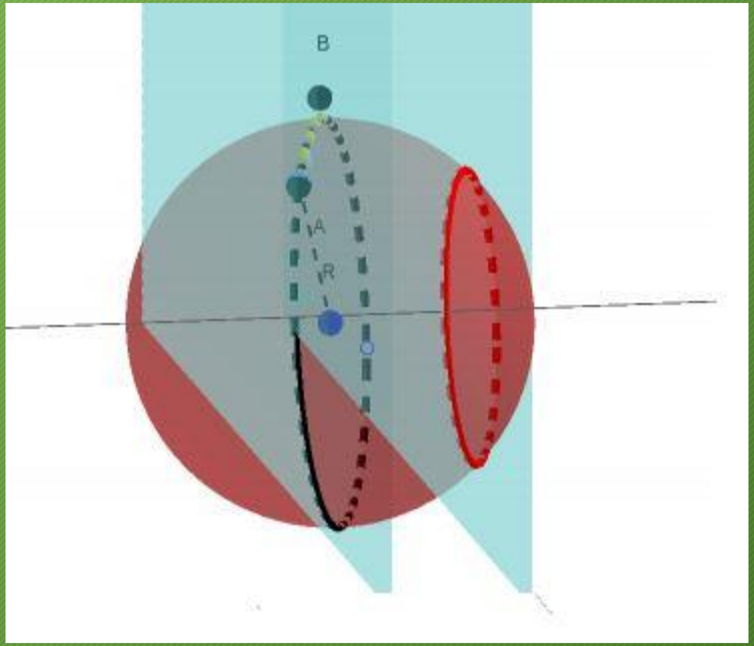
Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

ζ) Παράλληλοι Κύκλοι

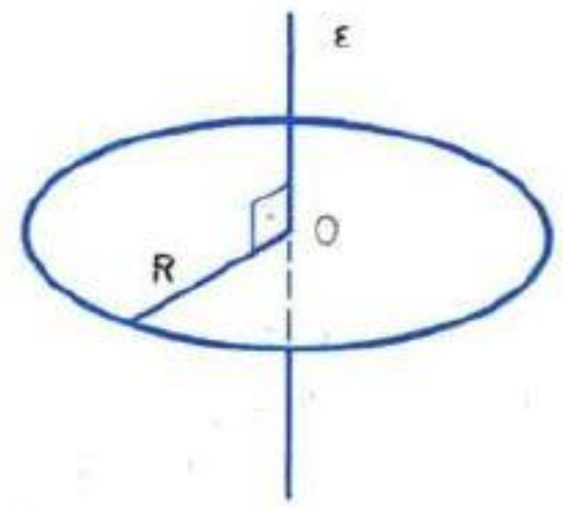
Παράλληλοι κύκλοι μιας σφαίρας λέγονται οι κύκλοι, των οποίων τα επίπεδα είναι παράλληλα.



3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

η) Άξονας του Κύκλου

Άξονας κύκλου καλείται η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στο επίπεδό του. Στο σχήμα 2.6 άξονας του κύκλου OR είναι η ευθεία ε.

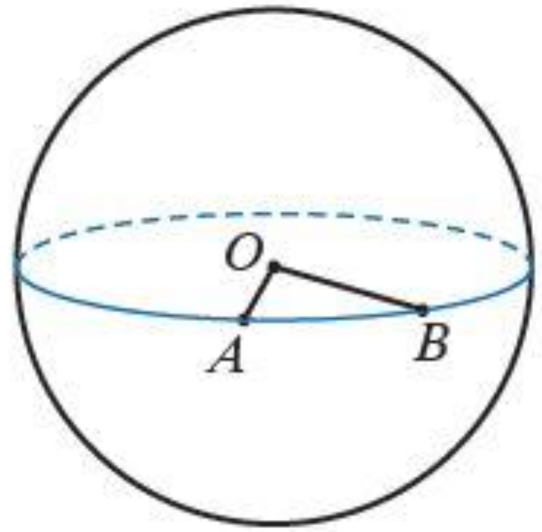


Σχ. 2.6.

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

θ) Απόσταση δύο σημείων πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας

Απόσταση δύο σημείων Α και Β πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ονομάζομε το μικρότερο από τα δύο τόξα του μεγίστου κύκλου που διέρχεται από αυτά και συμβολίζεται με (AB). Η απόσταση αυτή είναι ίση με το μέτρο της ***επίκεντρης γωνίας ΑΟΒ***. Το μέτρο της γωνίας είναι ανεξάρτητο της ακτίνας της σφαίρας (σχ. 13.1θ).



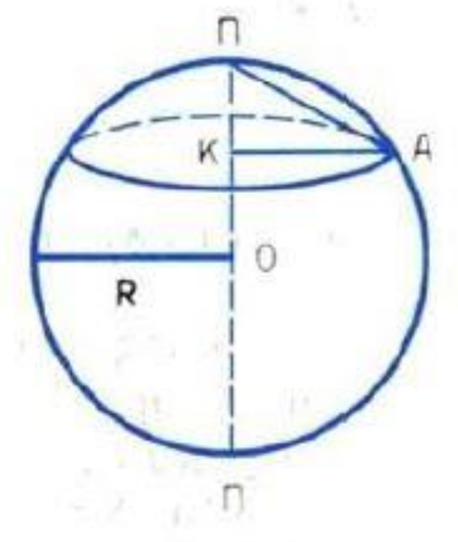
Σχ. 13.1θ.

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

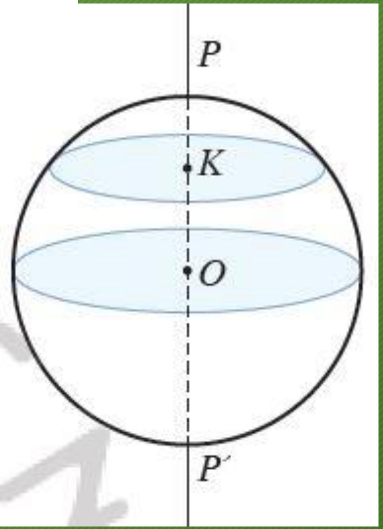
ι) Πόλοι Κύκλου Σφαίρας

Πόλοι κύκλου σφαίρας είναι τα σημεία στα οποία ο άξονας του κύκλου τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας.

Στο σχήμα 2.7 του κύκλου (Κ, ΚΑ) άξονας είναι η ευθεία ΠΠ΄ και πόλοι τα σημεία Π και Π΄.



Σχ. 2.7.



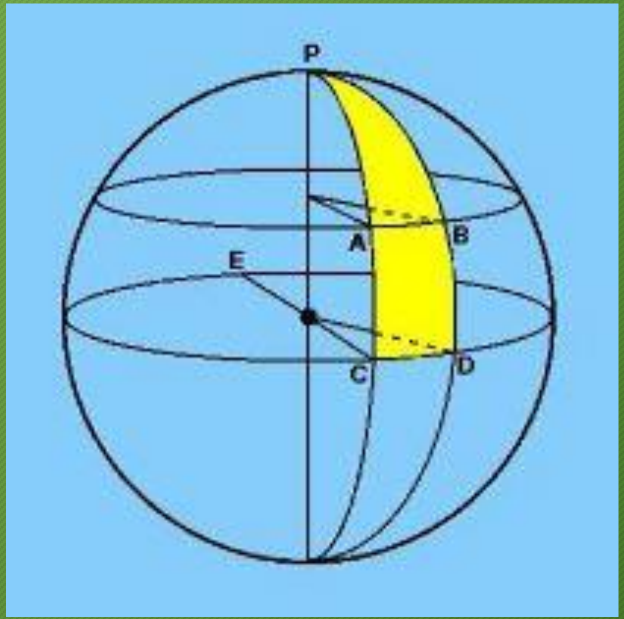
ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

ι) Πόλοι Κύκλου Σφαίρας/Ιδιότητες

α) Κάθε πόλος τυχόντος κύκλου ισαπέχει από όλα τα σημεία του κύκλου αυτού.

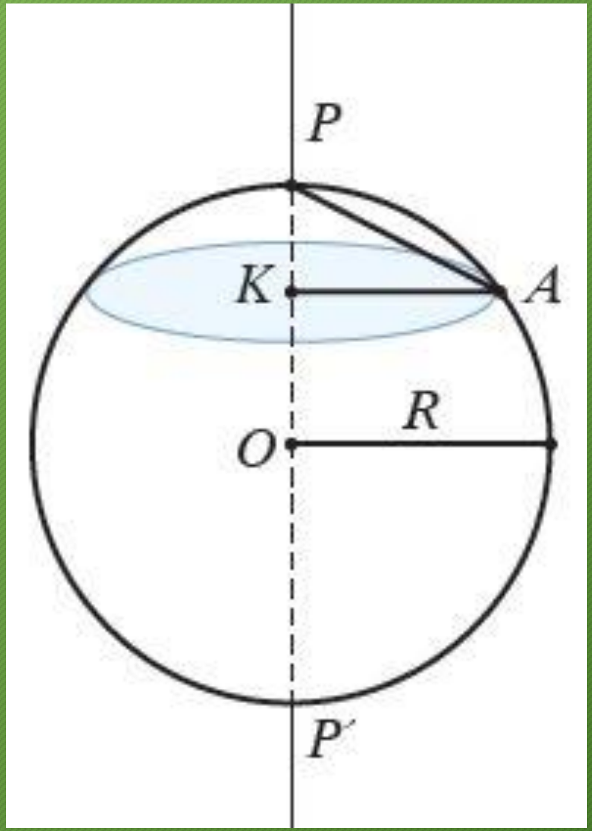
β) Τα τόξα των μέγιστων κύκλων, που περιέχονται μεταξύ των πόλων ενός κύκλου σφαίρας και των σημείων του κύκλου αυτού, είναι ίσα.



3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

κ) Πολική Απόσταση κύκλου σφαίρας

Η απόσταση κάθε σημείου του κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου, είναι σταθερή και ονομάζεται ***πολική απόσταση του κύκλου***.

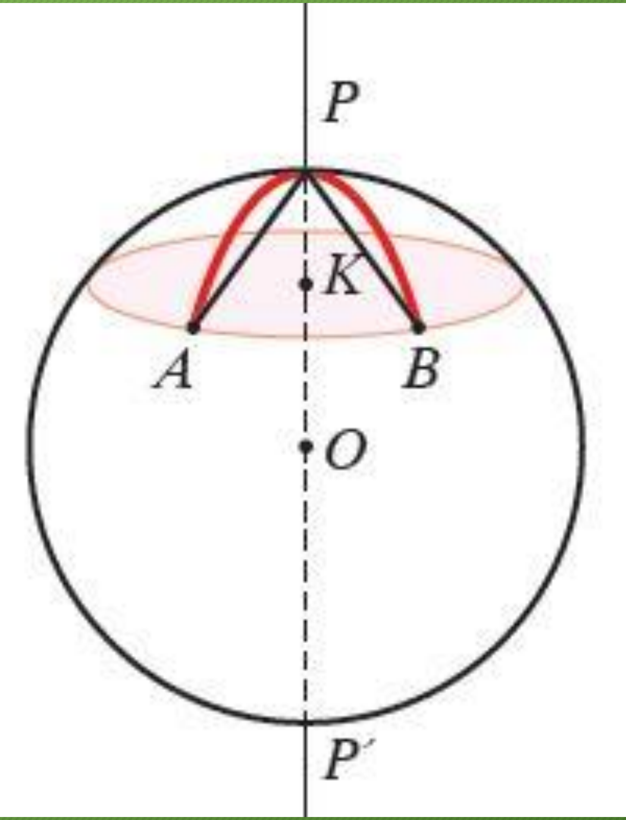


3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

λ) Σφαιρική Ακτίνα κύκλου σφαίρας

Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει τον πόλο του κύκλου με ένα τυχαίο σημείο του κύκλου ονομάζεται ***σφαιρική ακτίνα*** του κύκλου.

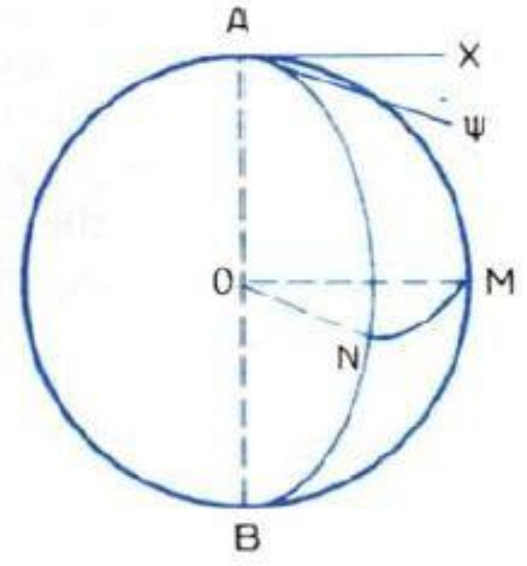
Η σφαιρική ακτίνα ενός μέγιστου κύκλου είναι $90°$ ή $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια.



3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

μ) Γωνία δύο τεμνόμενων τόξων. Σφαιρική Γωνία

Αν δύο τόξα ΑΜΒ και ΑΝΒ σφαίρας τέμνονται στα σημεία Α και Β και Αx και Αψ είναι οι εφαπτόμενες των τόξων στο Α, τότε η γωνία xΑψ λέγεται γωνία των δύο τεμνομένων τόξων (σχ. 2.13). Αν τα τόξα αυτά είναι τόξα μέγιστων κύκλων της σφαίρας, τότε η γωνία xΑψ λέγεται ***σφαιρική*** γωνία. Το σημείο Α λέγεται ***κορυφή*** της γωνίας και τα τόξα ΑΜΒ και ΑΝΒ ***πλευρές*** της γωνίας.



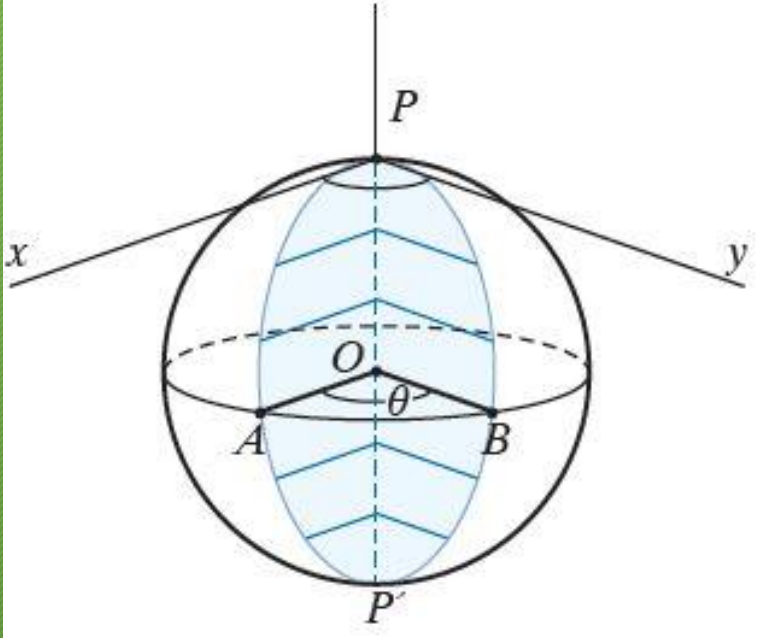
Σχ. 2.13.

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

3) Η Σφαίρα/Χαρακτηριστικά

v) Μέτρο της Σφαιρικής Γωνίας

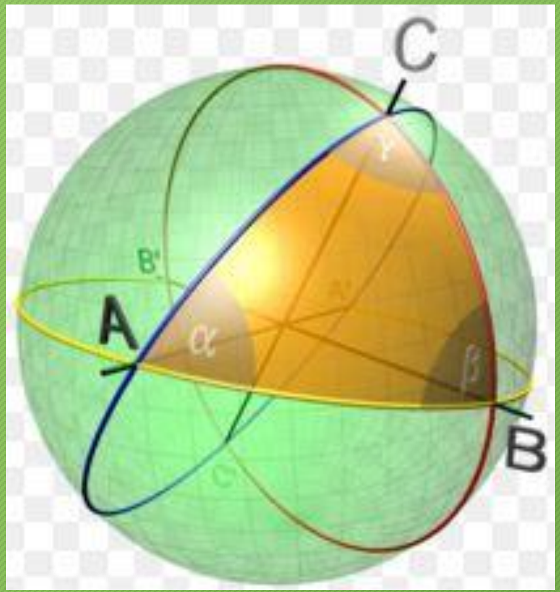
Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας ισούται με το μέτρο του τόξου του ισημερινού κύκλου της κορυφής της, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας (σχ. 13.1ιδ). Δηλαδή θα ισχύει ότι $xPy = AOB = \widehat{AB} = \theta$.

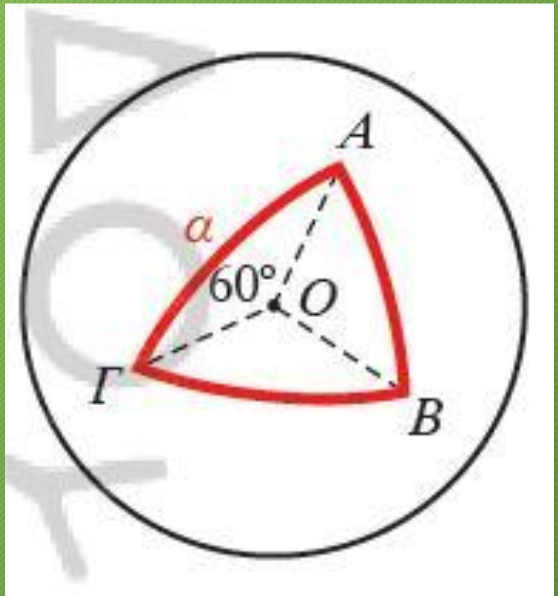


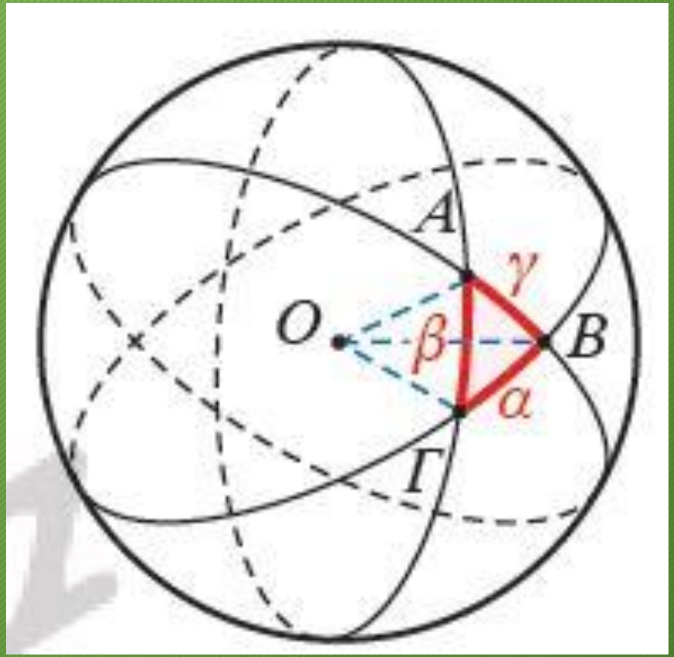
Σχ. 13.1ιδ.

4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που ορίζεται από τα τόξα τριών μέγιστων κύκλων, που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο



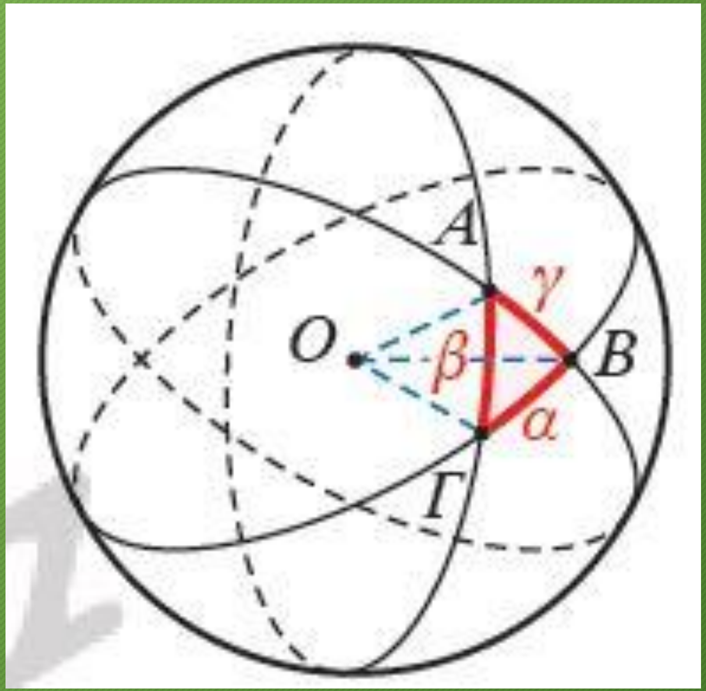




4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι αν ενώσουμε το κέντρο της σφαίρας με τα σημεία Α, Β, Γ θα έχουμε την τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ στην οποία αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο (ΑΒΓ).

Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου (ΑΒΓ) είναι: $(\widehat{AB}) = \gamma$, $(\widehat{B\Gamma}) = \alpha$, $(\widehat{A\Gamma}) = \beta$ και έχουν το ίδιο μέτρο με τις αντίστοιχες επίπεδες γωνίες (έδρες) της τρίεδρης γωνίας, δηλαδή: $A\hat{O}B = \gamma$, $B\hat{O}\Gamma = \alpha$, $\Gamma\hat{O}A = \beta$.



4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Δηλαδή οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου μετριούνται σε μοίρες, πρώτα και δεύτερα λεπτά.

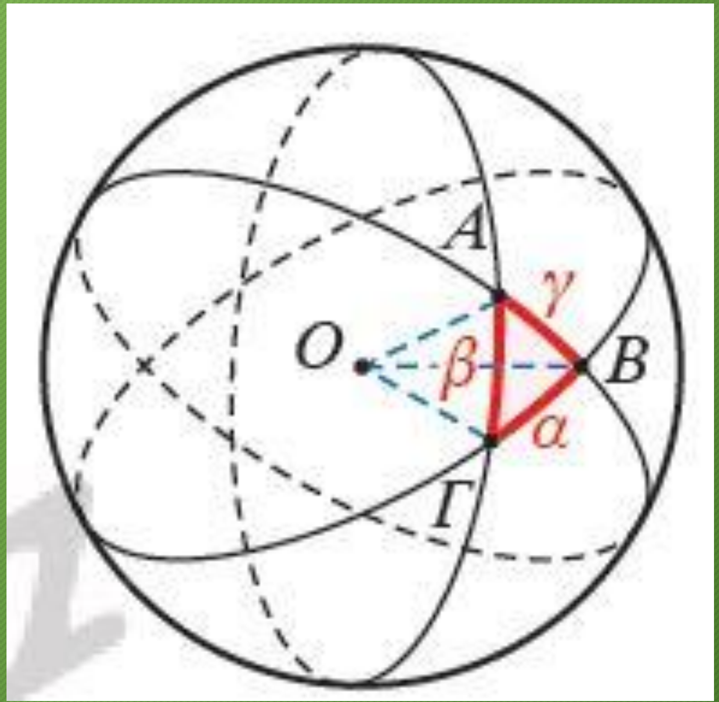
Κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από $\pi\ rad$ $(180°)$.

Επίσης, οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου έχουν το ίδιο μέτρο με τις αντίστοιχες δίεδρες γωνίες, δηλαδή:

$\hat{\Gamma} = \delta\acute{\iota}\varepsilon\delta\rho\eta\ A - O\Gamma - B$ (δηλ. $A\hat{O}\Gamma - \Gamma\hat{O}B$)

$\hat{B} = \delta\acute{\iota}\varepsilon\delta\rho\eta\ A - OB - \Gamma$ (δηλ. $A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma$)

$\hat{A} = \delta\acute{\iota}\varepsilon\delta\rho\eta\ B - OA - \Gamma$ (δηλ. $B\hat{O}A - A\hat{O}\Gamma$)



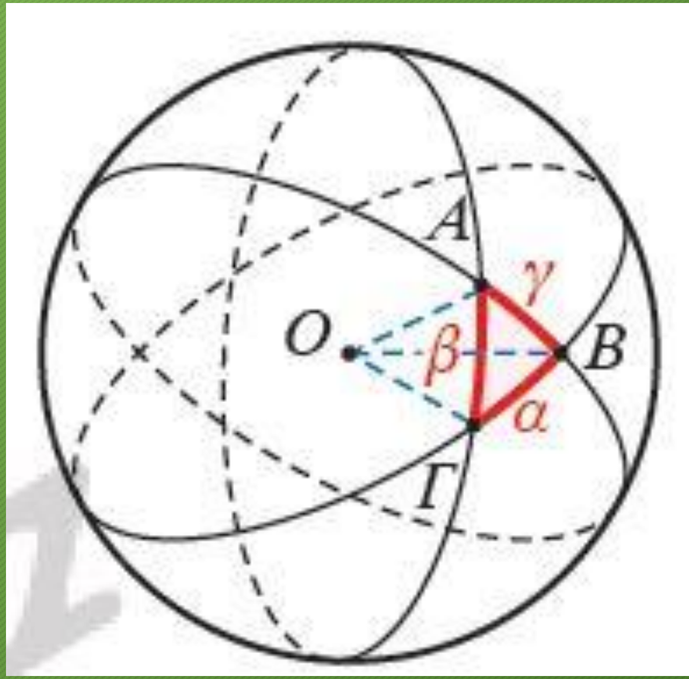
4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

I) $\left.\begin{array}{l} 0° < \alpha < 180° \\ 0° < \beta < 180 \\ 0° < \gamma < 180 \end{array}\right\}$ δηλ. κάθε **πλευρά** είναι μικρότερη των 180°.

II) $\alpha + \beta + \gamma < 360°$

δηλ. το άθροισμα των πλευρών είναι μικρότερο από 360°.

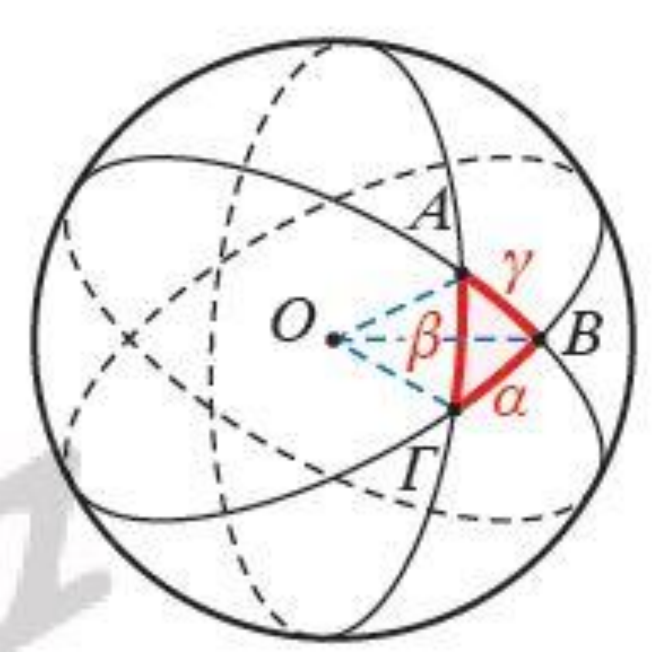


4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

III) $\left.\begin{array}{l} |\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \\ |\alpha-\gamma|<\beta<\alpha+\gamma \\ |\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta \end{array}\right\}$

δηλ. κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

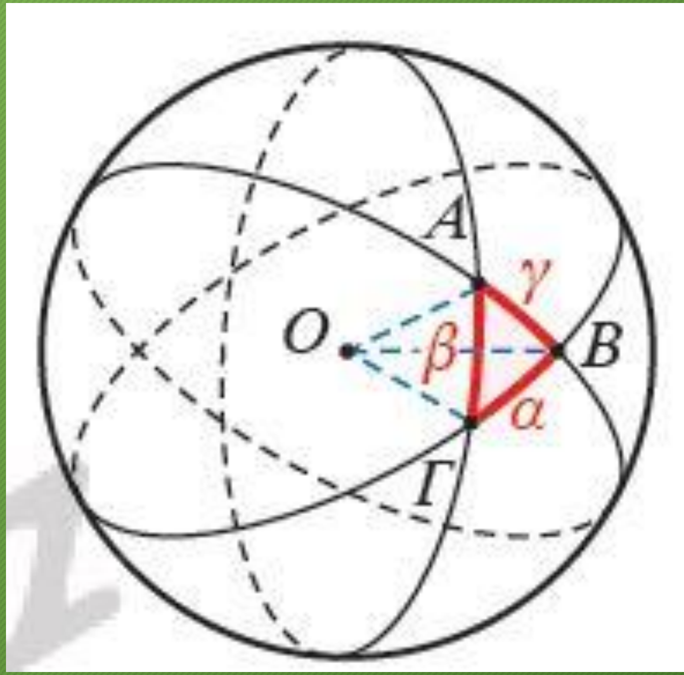


4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

IV) $\left.\begin{matrix} 0° < \hat{A} < 180° \\ 0° < \hat{B} < 180° \\ 0° < \hat{\Gamma} < 180° \end{matrix}\right\}$ δηλ. κάθε **γωνία** είναι μικρότερη από 180°.

V) $180° < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 540°$

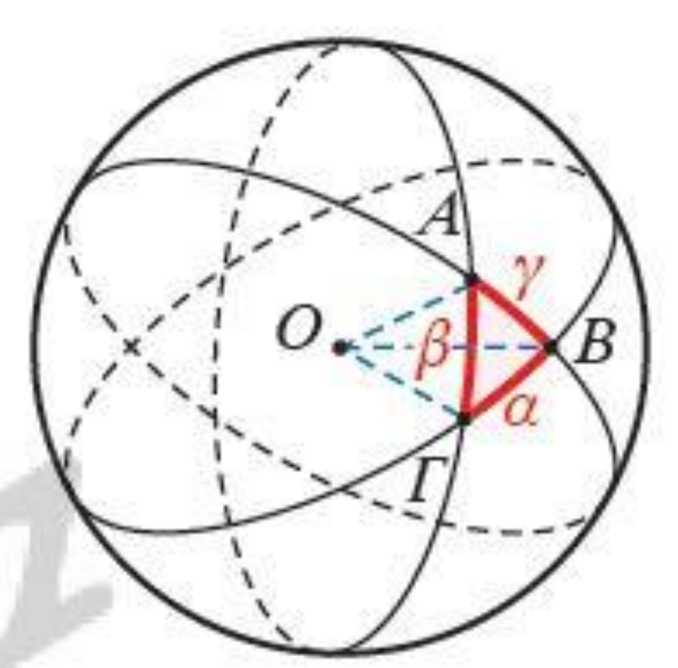


4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

VI) $\left.\begin{aligned} \hat{B}+\hat{\Gamma} &< \hat{A}+180^\circ \\ \hat{A}+\hat{\Gamma} &< \hat{B}+180^\circ \\ \hat{A}+\hat{B} &< \hat{\Gamma}+180^\circ \end{aligned}\right\}$

δηλ. κάθε γωνία αυξημένη κατά 180° είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων.



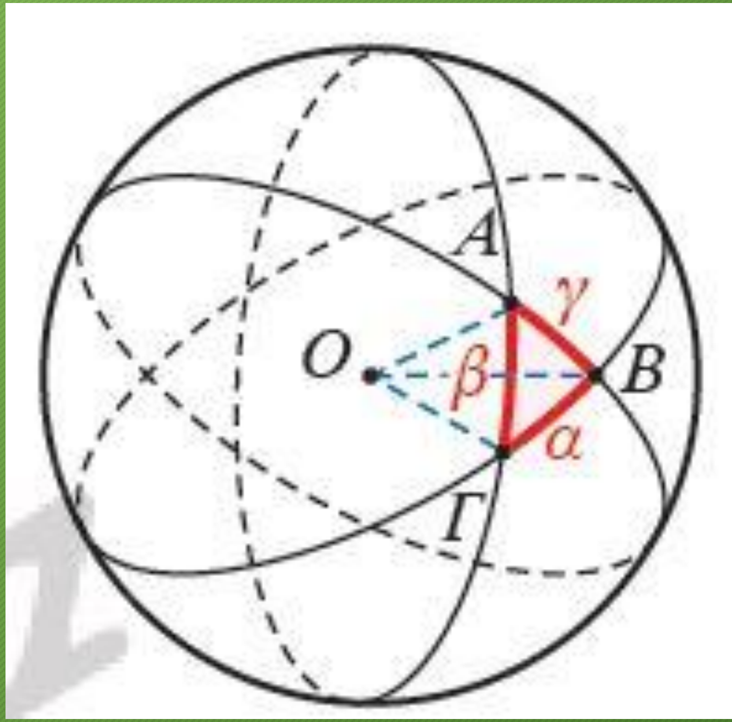
VII) Απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του σφαιρικού τριγώνου, και αντίστροφα.

4) Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

VIII) Όταν $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > 90^\circ \Rightarrow \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2} > 90^\circ$ ενώ

Όταν $\dfrac{\alpha+\beta}{2} < 90^\circ \Rightarrow \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2} < 90^\circ$.



4) Σφαιρικά Τρίγωνα-Ισότητα Σφαιρικών Τριγώνων

Δύο σφαιρικά τρίγωνα της ίδιας σφαίρας (ή ίσων σφαιρών) είναι ίσα (ή συμμετρικά) όταν έχουν:

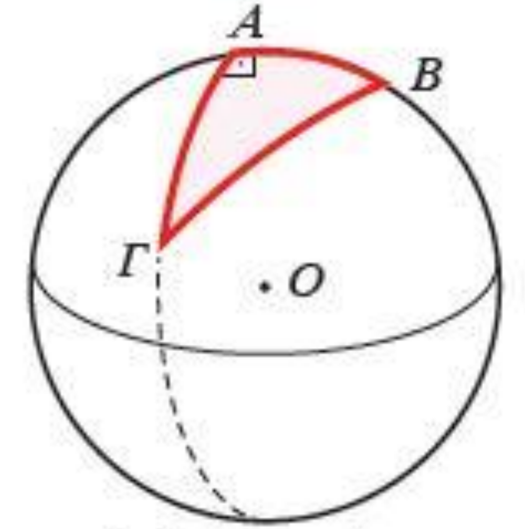
- Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ᾽ αυτήν γωνίες ίσες.
- Μία γωνία ίση και τις πλευρές που την περιέχουν ίσες.
- Και τις τρεις πλευρές ίσες.
- Και τις τρεις γωνίες ίσες.

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

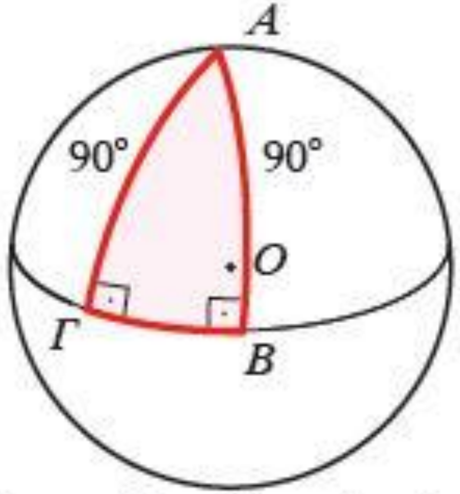
4) Σφαιρικά Τρίγωνα-Είδη

Ορθογώνιο	Αν μια σφαιρική γωνία του είναι ίση με μια ορθή γωνία (90^o).
Δισορθογώνιο	Αν δύο σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90^o.
Τρισορθογώνιο	Αν και οι τρεις σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90^o.
Ισόπλευρο	Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.
Ισοσκελές	Αν δύο πλευρές του είναι ίσες.
Σκαληνό	Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
Ορθόπλευρο	Αν μια πλευρά του έχει μέτρο ίσο με 90^o.
Δισορθόπλευρο	Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90^o.
Τρισορθόπλευρο	Αν τρεις πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90^o.
Τυχόν (ή πλάγιο ή κοινό)	Αν δεν έχει αναγκαστικά μια πλευρά ή μια γωνία μέτρου 90^o.

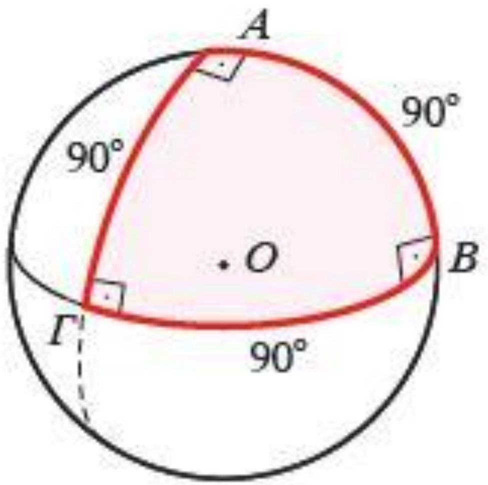
4) Σφαιρικά Τρίγωνα-Είδη



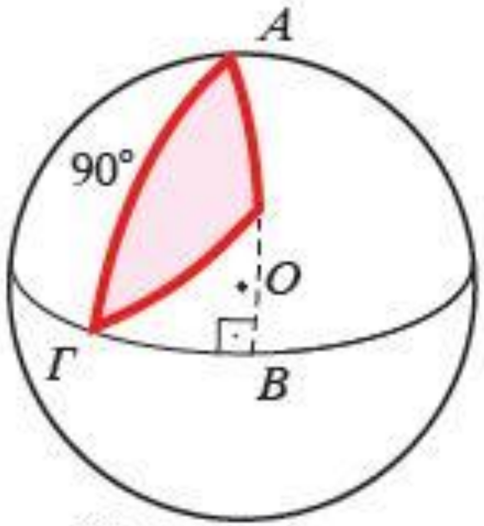
(α) Ορθογώνιο



(β) Ισοσκελές – δισορθογώνιο – δισορθόπλευρο



(γ) Ισόπλευρο – τρισορθογώνιο – τρισορθόπλευρο



(δ) Ορθόπλευρο

Καλό Διάβασμα!!!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη