ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

4^{o} μάθημα

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

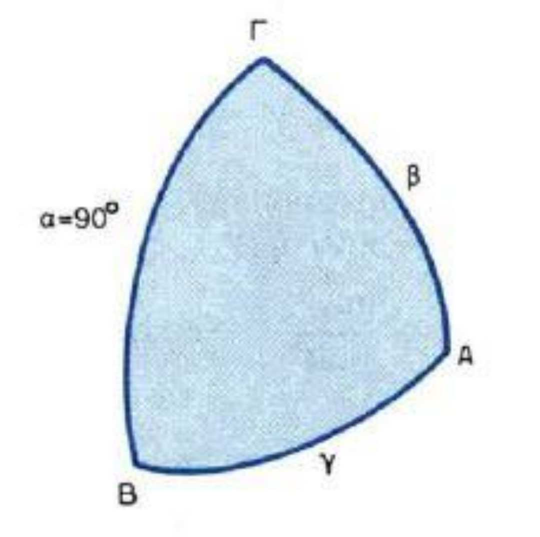
Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση/Ασκήσεις

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Ορισμός:

Ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο λέγεται το σφαιρικό τρίγωνο του οποίου μία πλευρά έχει μέτρο 90°.



Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΠΟΛΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

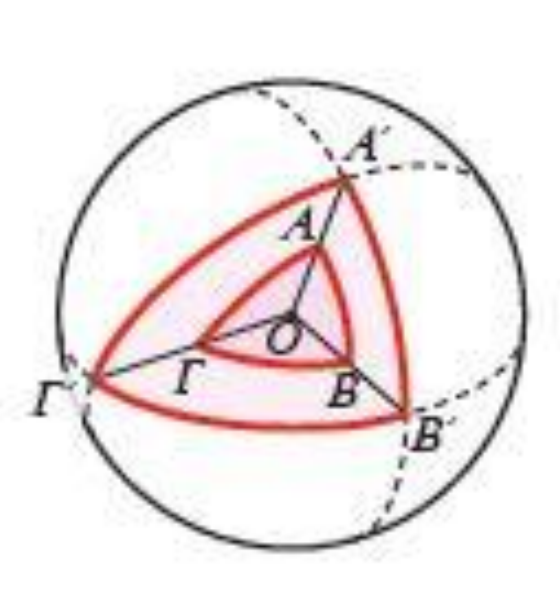
Πολικό τρίγωνο σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές τα Α΄, Β΄, Γ΄ (δηλαδή το Α΄Β΄Γ΄).

Τι είναι τα Α΄, Β΄,Γ΄;

Το Α΄ είναι ο πόλος του μεγίστου κύκλου ΒΓ, που βρίσκεται στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή Α.

Το Β΄ είναι ο πόλος του μεγίστου κύκλου ΑΓ, που βρίσκεται στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή Β.

Το Γ΄ είναι ο πόλος του μεγίστου κύκλου ΑΒ, που βρίσκεται στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή Γ.

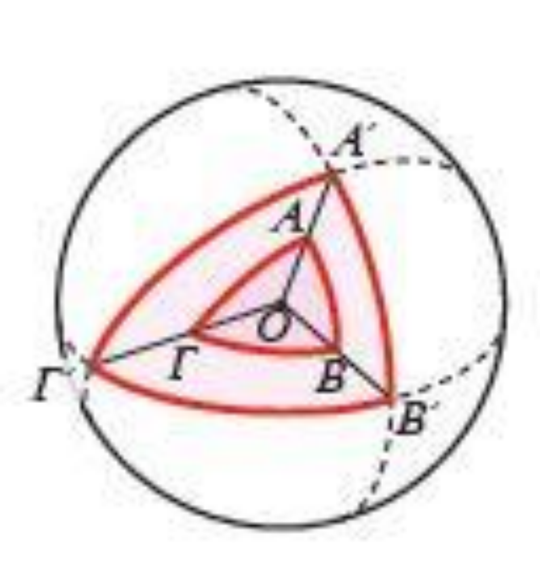


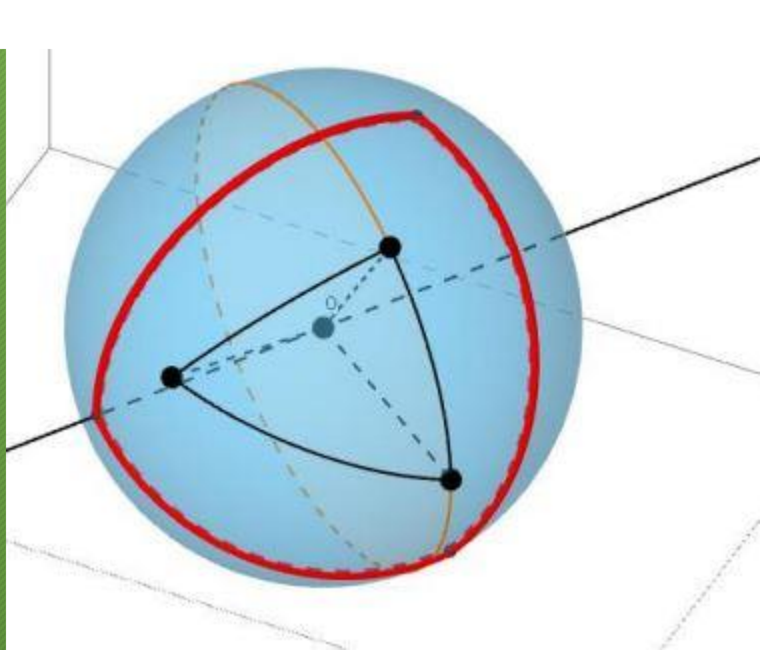
B. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΠΟΛΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Τις πλευρές του πολικού τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ συμβολίζουμε α΄, β΄, γ΄.

Αν το Α΄Β΄Γ΄ είναι το πολικό του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, τότε και το ΑΒΓ είναι πολικό του σφαιρικού τριγώνου Α΄Β΄Γ΄.





Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΠΟΛΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Κάθε γωνία ενός σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης πλευράς του πολικού του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄, δηλαδή:

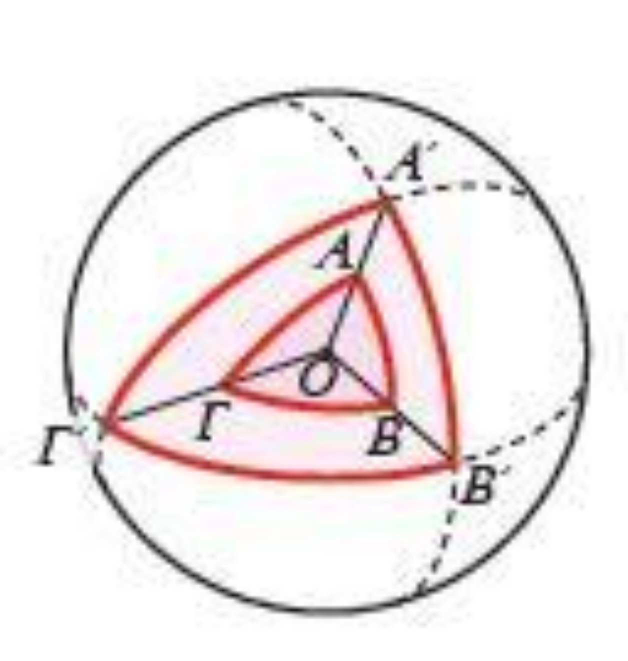
$$A + \alpha' = B + \beta' = \Gamma + \gamma' = 180^\circ \quad (1)$$

$$A' + \alpha = B' + \beta = \Gamma' + \gamma = 180^\circ \quad (2)$$

Σε ένα ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 90^\circ$, του οποίου το αντίστοιχο πολικό σφαιρικό τρίγωνο είναι το Α΄Β΄Γ΄, ισχύει:

$$A' + \alpha = 180^\circ \Rightarrow A' = 180^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Έτσι, αντί να επιλύσουμε το ΑΒΓ, επιλύουμε το αντίστοιχο πολικό Α΄Β΄Γ΄ και βρίσκουμε τα στοιχεία του ΑΒΓ, από τις σχέσεις (1) και (2).



Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί το ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 90°$, $\hat{B} = 112°$ και $\hat{\Gamma} = 48°$.

Λύση:

Βήμα 1ο :

Βρίσκουμε πρώτα τα στοιχεία του πολικού τριγώνου Α΄Β΄Γ΄:

$$A' + \alpha = 180° \Rightarrow A' = 180° - \alpha = 90°$$

$$\beta' + B = 180° \Rightarrow \beta' = 180° - 112° \Rightarrow \beta' = 68°$$

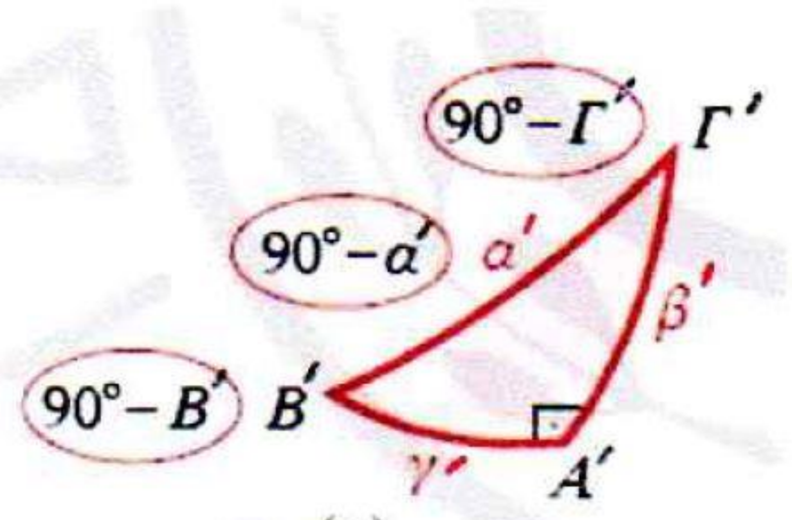
$$\gamma' + \Gamma = 180° \Rightarrow \gamma' = 180° - 48° \Rightarrow \gamma' = 132°$$

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

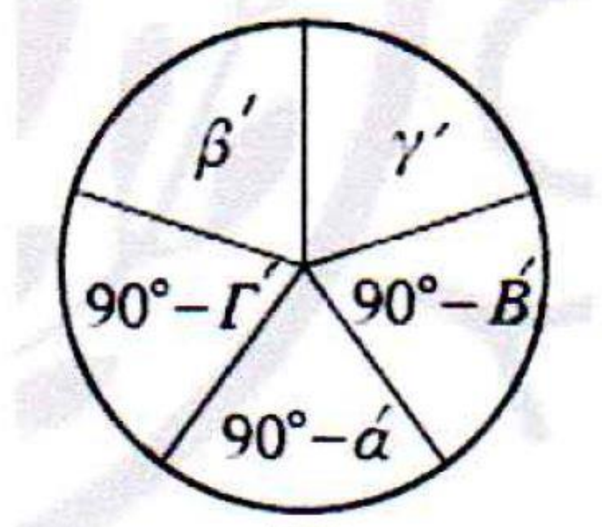
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο : Σχηματίζουμε πολικό ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ και τον αντίστοιχο κύκλο:



(α)



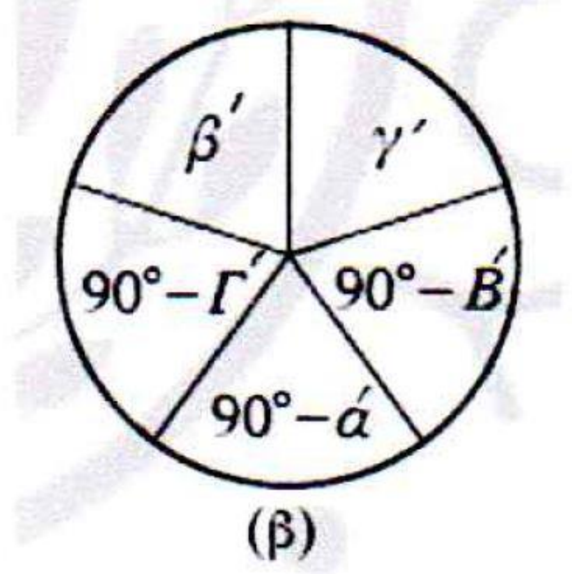
(β)

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο :



Υπολογίζω το α′ (δηλαδή τελικά την $\hat{A}$)

$$\eta\mu(90° - \alpha') = \sigma\upsilon\nu\beta' \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma'$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha') = \sigma\upsilon\nu 68° \cdot \sigma\upsilon\nu 132°$$

$$\alpha' = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu 68° \cdot \sigma\upsilon\nu 132°)$$

$$\alpha' = 104{,}517°$$

Και αφού

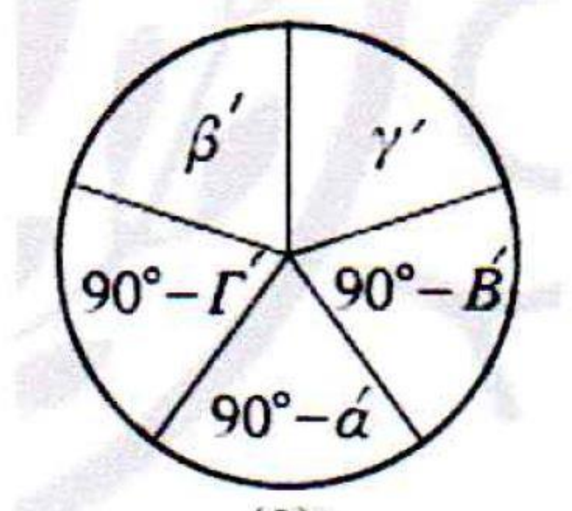
$$\hat{A} + \alpha' = 180° \Rightarrow \hat{A} = 180° - \alpha' = 180° - 104{,}517°$$

Άρα $\hat{A} = 75{,}483°$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4ο :



Υπολογίζω την $\widehat{B}'$ (δηλαδή το β)

$$\eta\mu\gamma' = \varepsilon\varphi\beta' \cdot \varepsilon\varphi(90 - \widehat{B}')$$

$$\eta\mu\gamma' = \varepsilon\varphi\beta' \cdot \sigma\varphi\widehat{B}'$$

$$\sigma\varphi\widehat{B}' = \frac{\eta\mu\gamma'}{\varepsilon\varphi\beta'}$$

$$\frac{1}{\varepsilon\varphi\widehat{B}'} = \frac{\eta\mu\gamma'}{\varepsilon\varphi\beta'}$$

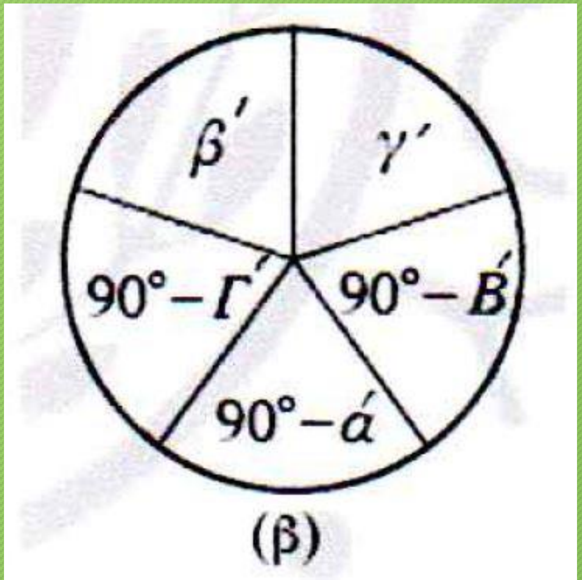
$$\varepsilon\varphi\widehat{B}' = \frac{\varepsilon\varphi\beta'}{\eta\mu\gamma'}$$

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4ο :



$$\widehat{B}' = τοξεφ\left(\frac{εφβ'}{ημγ'}\right)$$

$$\widehat{B}' = τοξεφ\left(\frac{εφ68°}{ημ132°}\right)$$

$$\widehat{B}' = 73{,}288°$$

Άρα:

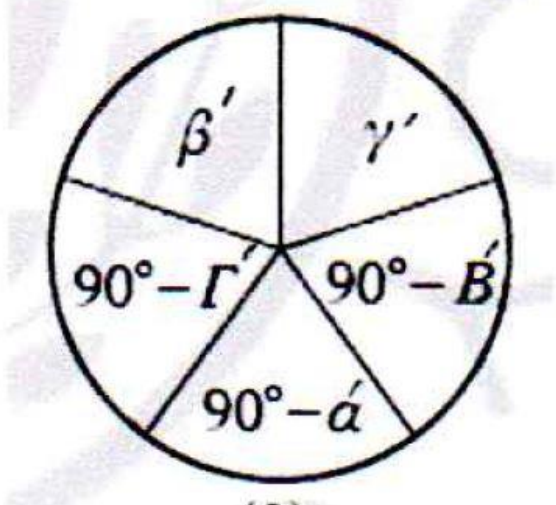
$$\widehat{B}' + β = 180° \Rightarrow β = 180° - \widehat{B}' \Rightarrow β = 180° - 73{,}288° \Rightarrow β = 106{,}712°$$

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 5ο :



(β)

Υπολογίζω την $\widehat{\Gamma}'$ (δηλαδή το γ)

$$\eta\mu\beta' = \varepsilon\varphi\gamma' \cdot \varepsilon\varphi(90 - \widehat{\Gamma}')$$

$$\eta\mu\beta' = \varepsilon\varphi\gamma' \cdot \sigma\varphi\widehat{\Gamma}'$$

$$\sigma\varphi\widehat{\Gamma}' = \frac{\eta\mu\beta'}{\varepsilon\varphi\gamma'}$$

$$\frac{1}{\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma}'} = \frac{\eta\mu\beta'}{\varepsilon\varphi\gamma'}$$

$$\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma}' = \frac{\varepsilon\varphi\gamma'}{\eta\mu\beta'}$$

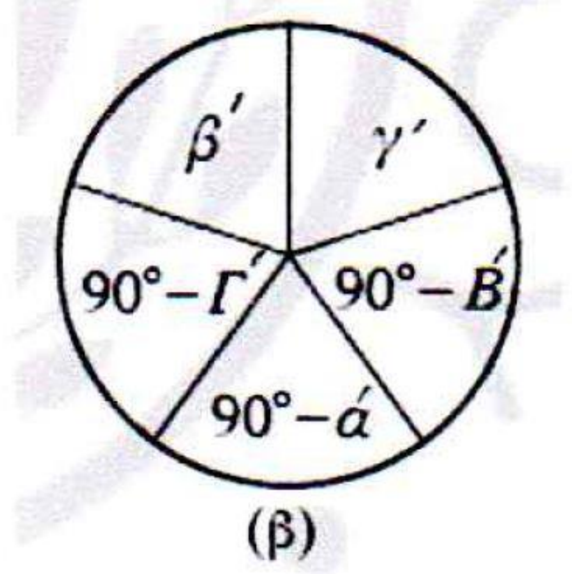
$$\widehat{\Gamma}' = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi\gamma'}{\eta\mu\beta'}\right)$$

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 5ο :



$$\widehat{\Gamma}' = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi 132^\circ}{\eta\mu 68^\circ}\right)$$

$$\widehat{\Gamma}' = 180^\circ - 50{,}144^\circ$$

$$\widehat{\Gamma}' = 129{,}856^\circ$$

Άρα:

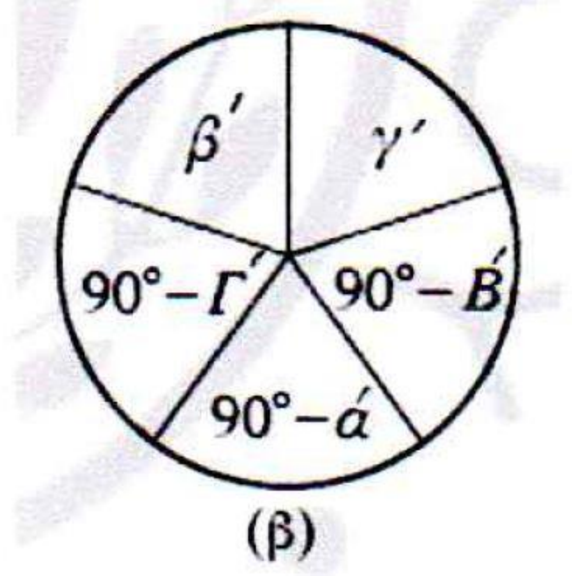
$$\widehat{\Gamma}' + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \widehat{\Gamma}' \Rightarrow \gamma = 50{,}144^\circ$$

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 6ο :



Τσεκάρουμε:

$\hat{B} = 112°, \beta = 106{,}712°$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (ΙΙο).

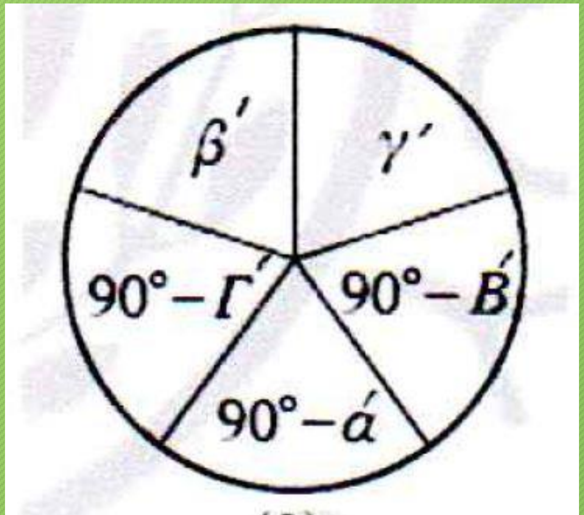
Και $\hat{\Gamma} = 48°, \gamma = 50{,}144°$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Ιο).

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 7ο : Τύπος Ελέγχου



(β)

Για το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ πρέπει να ισχύει:

$$\eta\mu(90° - \alpha') = \varepsilon\varphi(90° - \widehat{\Gamma'}) \cdot \varepsilon\varphi(90° - \widehat{B'})$$

Δηλαδή:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha' = \sigma\varphi\widehat{\Gamma'} \cdot \sigma\varphi\widehat{B'}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha' = \frac{1}{\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma'} \cdot \varepsilon\varphi\widehat{B'}}$$

Πράγματι: $\sigma\upsilon\nu\alpha' = -0{,}250$

Και $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma'} \cdot \varepsilon\varphi\widehat{B'}} = -0{,}250$

Β. Ορθόπλευρα Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ

1. Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε ότι $\alpha = 90°, \beta = 115°\ 24{,}6'$ και $\gamma = 60°\ 18{,}4'$.

2. Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε ότι $\alpha = 90°, \beta = 141°\ 2{,}8'$ και $\hat{\Gamma} = 167°\ 43{,}3'$.

3. Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε ότι $\alpha = 90°, \beta = 78°\ 14'$ και $\gamma = 49°\ 8'$.

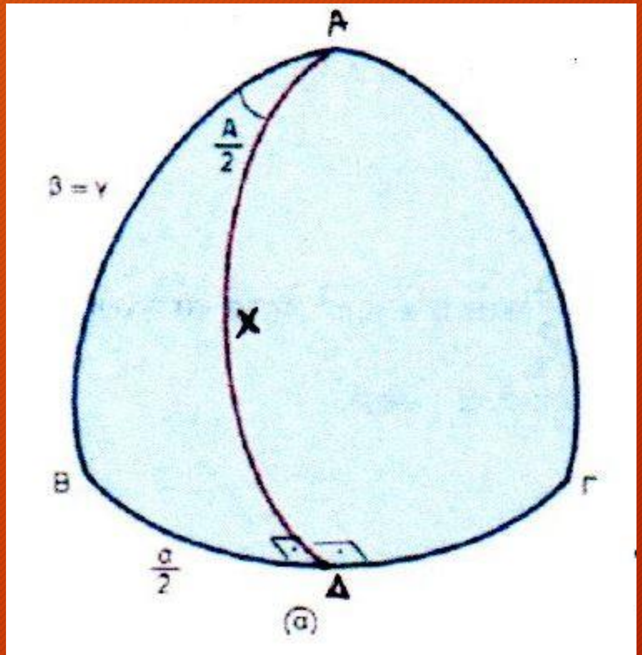
Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

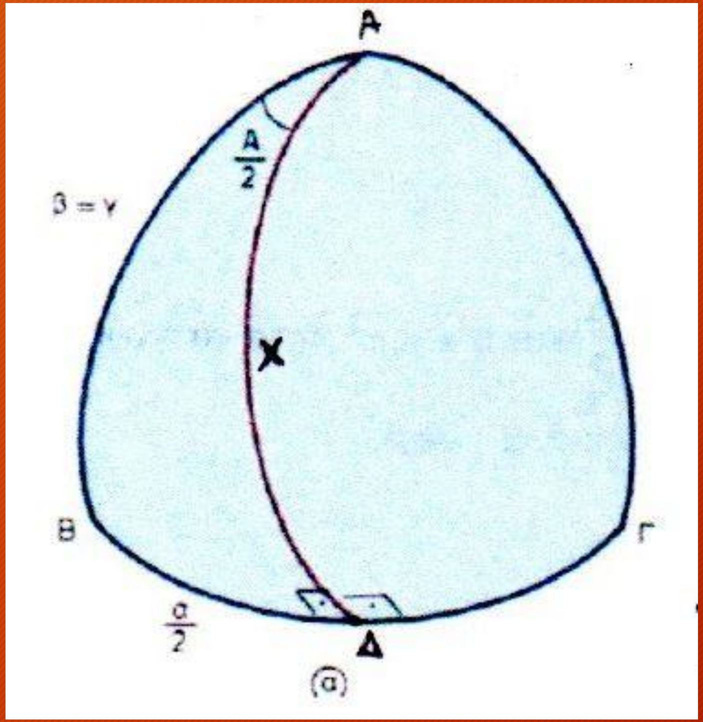
Ορισμός:

Ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο λέγεται το σφαιρικό τρίγωνο του οποίου δύο πλευρές είναι ίσες.



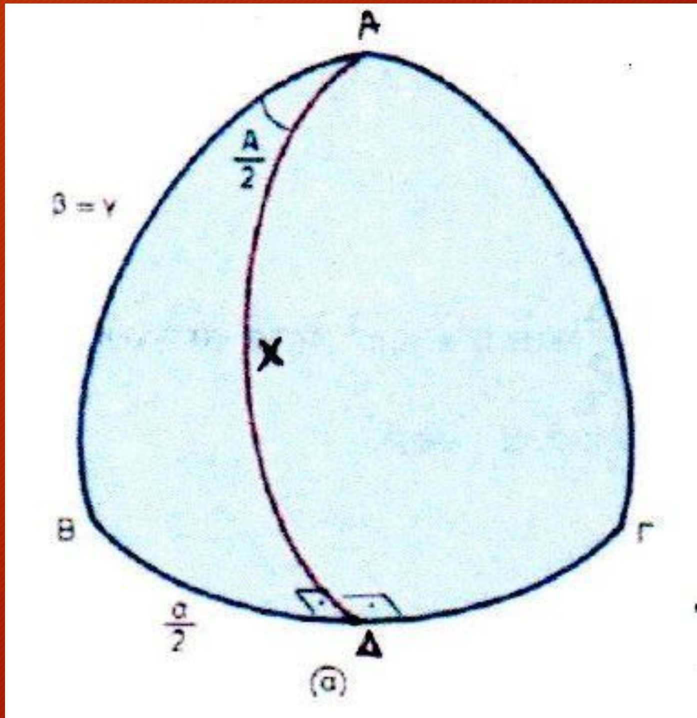
Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Η επίλυση ενός τέτοιου τριγώνου πραγματοποιείται όταν χωρίσουμε το αρχικό τρίγωνο σε δύο ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα.



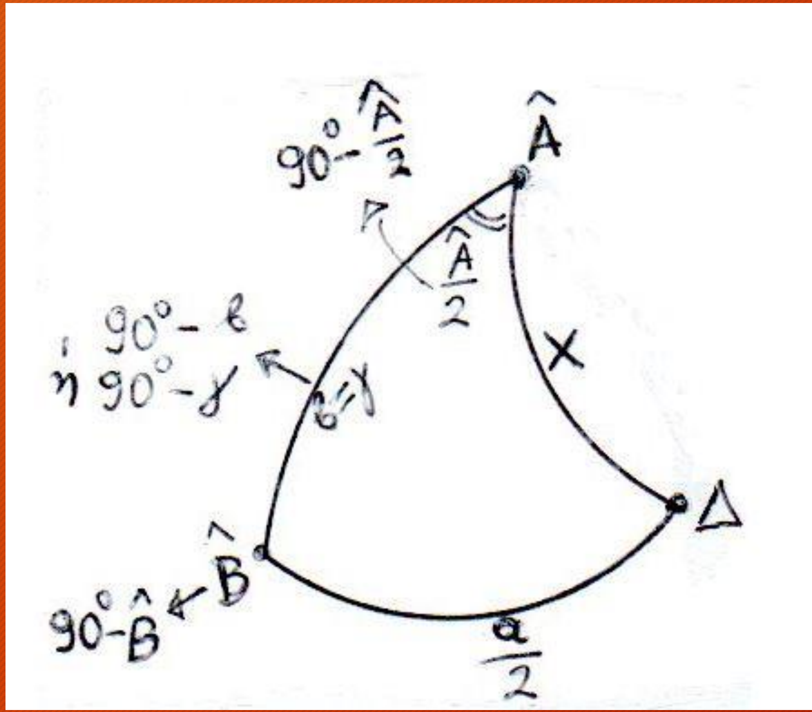
Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

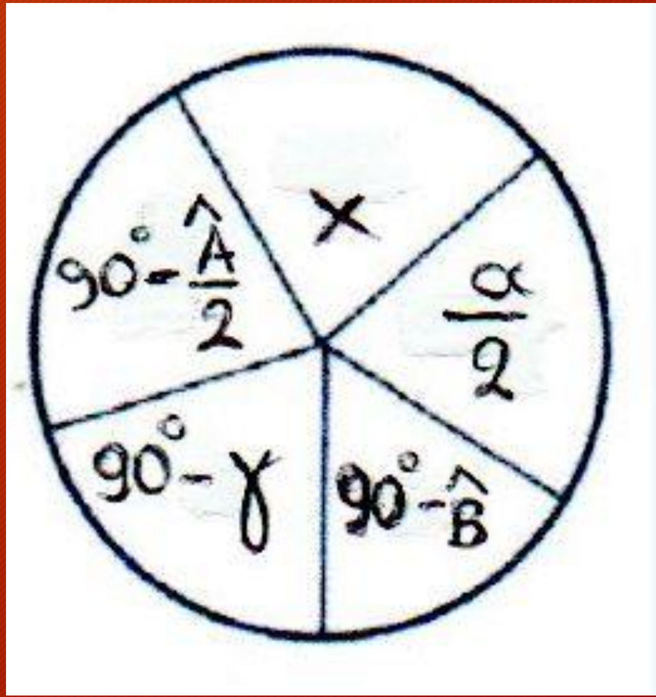
Αν το αρχικό σφαιρικό τρίγωνο είναι το ΑΒΓ και τα ίσα σκέλη είναι τα β και γ (δηλαδή β=γ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$) φέρνουμε το μέγιστο κύκλο που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι κάθετος στην πλευρά $B\Gamma = \alpha$, την οποία τέμνει σε σημείο Δ, (όπως φαίνεται στο σχήμα), τέτοιο ώστε: $B\Delta = \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.



Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Θέτοντας ως $ΑΔ = x$, και εφαρμόζοντας αυτά που γνωρίζουμε για να εφαρμόσουμε τους νόμους του Napier, έχουμε τα σχήματα:



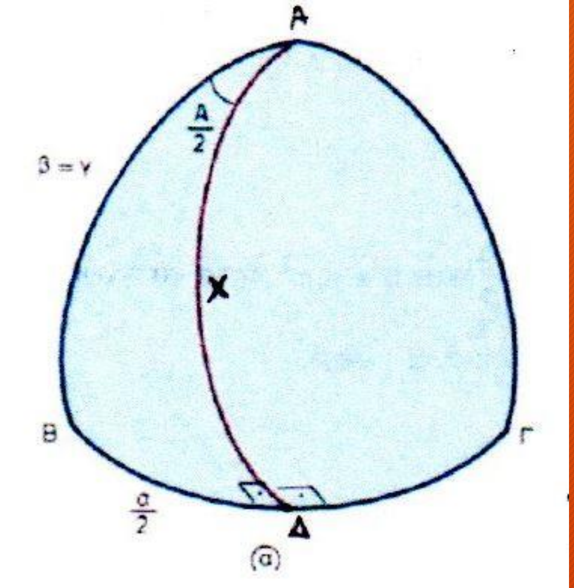


Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε τα στοιχεία: τις πλευρές $\beta = \gamma = 54° \ 28{,}4'$ και την περιεχόμενη γωνία $\hat{A} = 112° \ 36{,}2'$

Λύση:



Βρίσκουμε τα:

$$\beta = \gamma = 54° \ 28{,}4' = 54{,}473°$$

$$\hat{A} = 112° \ 36{,}2' = 112{,}603°$$

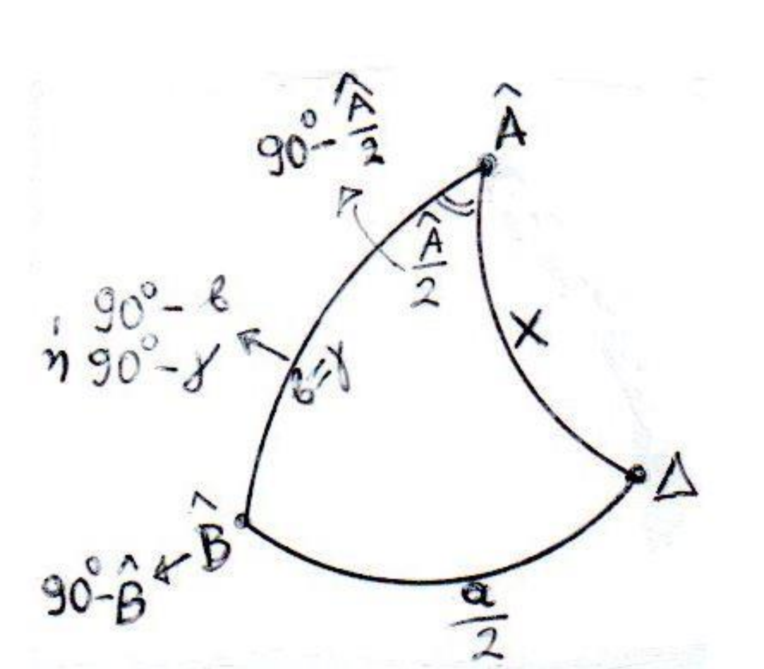
Οπότε:

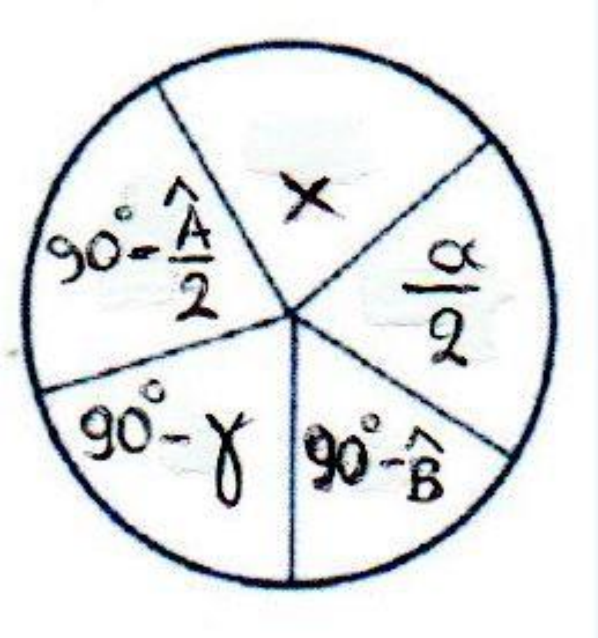
$$\frac{\hat{A}}{2} = 56° \ 18{,}1' = 56{,}302°$$

Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 1ο: Δεν ξεχνάμε ότι η $\hat{\Delta} = 90°$. Φτιάχνουμε τα σχήματα.

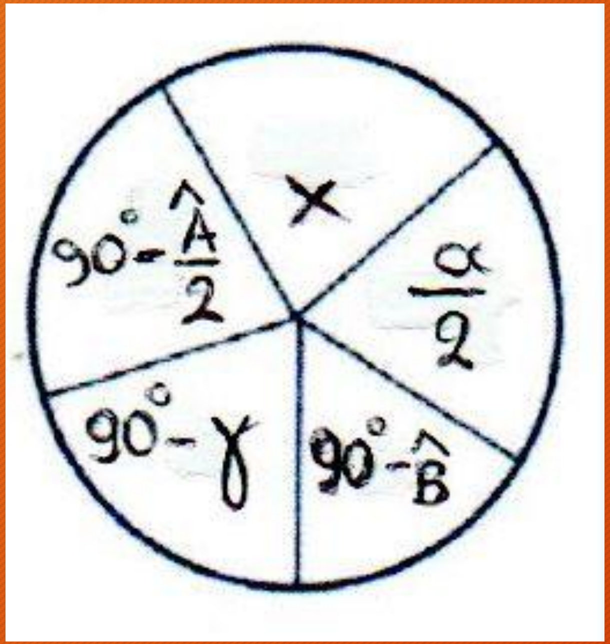




Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:



Υπολογίζουμε το $\frac{\alpha}{2}$ (δηλαδή το α):

$$\eta\mu\frac{\alpha}{2} = \sigma\upsilon\nu(90° - \frac{\hat{A}}{2}) \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - \gamma)$$

$$\eta\mu\frac{\alpha}{2} = \eta\mu\frac{\hat{A}}{2} \cdot \eta\mu\gamma$$

$$\eta\mu\frac{\alpha}{2} = \eta\mu(56{,}302°) \cdot \eta\mu(54{,}473°)$$

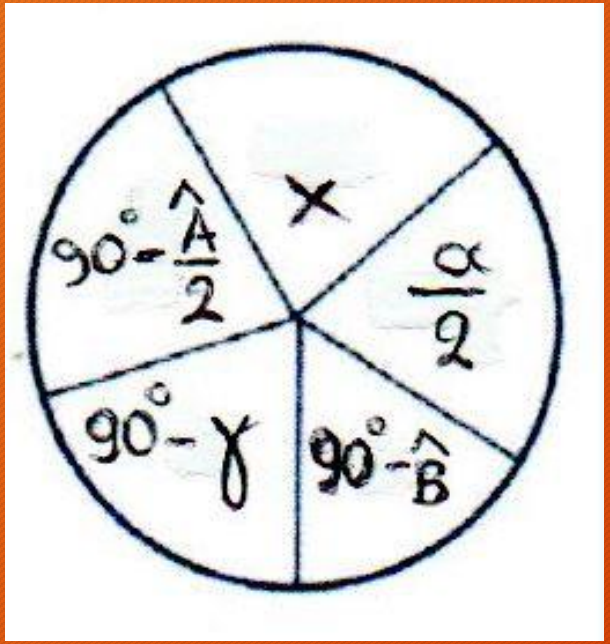
$$\frac{\alpha}{2} = \tau o\xi\eta\mu(\eta\mu(56{,}302°) \cdot \eta\mu(54{,}473°))$$

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:



$$\frac{\alpha}{2} = \tau o\xi\eta\mu(0{,}677)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tau o\xi\eta\mu(0{,}677)$$

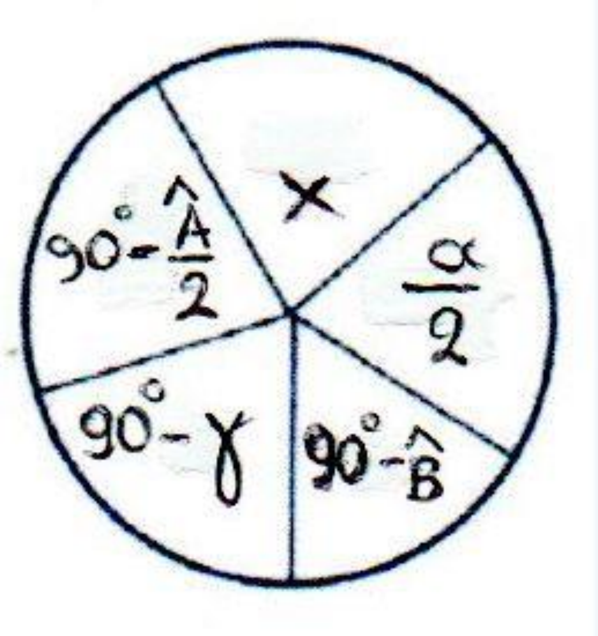
$$\frac{\alpha}{2} = 42{,}61^\circ$$

$$\alpha = 85{,}22^\circ$$

$$\alpha \simeq 85^\circ\ 13{,}2'$$

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:



Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{B}$

$$\eta\mu(90° - \gamma) = \varepsilon\varphi(90° - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi(90 - \frac{\hat{A}}{2})$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\varphi\hat{B} \cdot \sigma\varphi\frac{\hat{A}}{2}$$

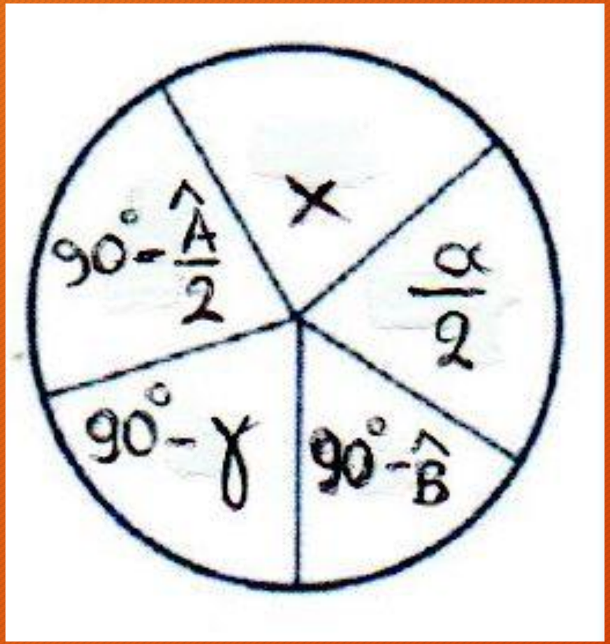
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B} \cdot \varepsilon\varphi\frac{\hat{A}}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \varepsilon\varphi\frac{\hat{A}}{2}}$$

$$\hat{B} = \tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \varepsilon\varphi\frac{\hat{A}}{2}})$$

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:



$$\hat{B} = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(54{,}473°)\cdot\varepsilon\varphi(56{,}302°)}\right)$$

$$\hat{B} = \tau o\xi\varepsilon\varphi(0{,}871)$$

$$\hat{B} = 41{,}068° = 41°\ \ 40{,}8' = \hat{\Gamma}$$

Γ. Ισοσκελή Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ:

1. Να επιλυθεί ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, όταν $\beta = \gamma = 78^\circ\ 23{,}5'$ και $\hat{A} = 118^\circ\ 54{,}6'$.

2. Να επιλυθεί ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, όταν $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 38^\circ\ 52{,}5'$ και $\alpha = 132^\circ\ 15'$.

Να λυθούν οι ασκήσεις!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Καλό Διάβασμα!!!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη