ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

5ο μάθημα

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Δ. Τυχαία Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Δ. Τυχαία Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Βασικοί Νόμοι για τα τυχαία σφαιρικά τρίγωνα

Έστω ένα σφαιρικό τρίγωνο μα πλευρές α, β, γ και γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.
Τότε ισχύουν:

1) $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ θυμηθείτε $\alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$

2) $180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 540^\circ$

Δ. Τυχαία Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Βασικοί Νόμοι για τα τυχαία σφαιρικά τρίγωνα

3) Νόμος των Συνημιτόνων:

Α) για τις πλευρές:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

Β) για τις γωνίες:

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = -\sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = -\sigma\upsilon\nu\hat{A} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \eta\mu\hat{A} \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -\sigma\upsilon\nu\hat{A} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B} + \eta\mu\hat{A} \cdot \eta\mu\hat{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$$

Δ. Τυχαία Σφαιρικά Τρίγωνα/Επίλυση

Βασικοί Νόμοι για τα τυχαία σφαιρικά τρίγωνα

4) Νόμος των Ημιτόνων

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}$$

Επίλυση Τυχαίων Σφαιρικών Τριγώνων/Ασκήσεις

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 109°$, $\beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

Λύση:

Τσεκάρουμε αν τα δεδομένα είναι σωστά με τη βοήθεια του πρώτου νόμου: δημαδή, αν $\alpha + \beta + \gamma < 360°$, πράγματι:

$$109° + 57° + 65° = 231° < 360°,$$

Και επίσης, ότι καμία από τις πλευρές δεν είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων.

Πράγματι, αφού: $109° < 57° + 65° = 122°$ και τα αντίστοιχα ισχύουν και για τις άλλες πλευρές.

Αυτού του τύπου τις ασκήσεις τις λύνουμε με τον Νόμο των Συνημιτόνων των πλευρών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 109°, \beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 1ο:

Υπολογίζουμε την $\hat{A}$, με τη βοήθεια του Νόμου των Συνημιτόνων για την πλευρά α.

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A}$$

$$\eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A} = \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{\sigma\upsilon\nu 109° - \sigma\upsilon\nu 57° \cdot \sigma\upsilon\nu 65°}{\eta\mu 57° \cdot \eta\mu 65°}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 109°$, $\beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 1ο:

$$\hat{A} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-0{,}326 - 0{,}230}{0{,}76}\right)$$

$$\hat{A} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(-0{,}732)$$

$$\hat{A} \simeq 137{,}054°$$

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 109°, \beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:

Υπολογίζουμε την $\hat{B}$ με τον Νόμο των Συνημιτόνων για την πλευρά β.

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\sigma\upsilon\nu 57° - \sigma\upsilon\nu 109° \cdot \sigma\upsilon\nu 65°}{\eta\mu 109° \cdot \eta\mu 65°}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 109°, \beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:

$$\hat{B} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{0{,}545 + 0{,}138}{0{,}857}\right)$$

$$\hat{B} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}797)$$

$$\hat{B} = 37{,}155° = 37° \ \ 9{,}3'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 109°$, $\beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:

Υπολογίζουμε την $\hat{\Gamma}$ με τον Νόμο των Συνημιτόνων για την πλευρά γ.

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu 65° - \sigma\upsilon\nu 109° \cdot \sigma\upsilon\nu 57°}{\eta\mu 109° \cdot \eta\mu 57°}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 109°, \beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:

$$\hat{\Gamma} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{0{,}423 + 0{,}177}{0{,}793}\right)$$

$$\hat{\Gamma} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}757)$$

$$\hat{\Gamma} = 40{,}8° = 40°\ \ 48'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος Ι. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4ο: (Δοκιμή)

Για να είναι σωστά τα παραπάνω, πρέπει να ισχύει ο Νόμος των Ημιτόνων. Πράγματι:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu 137{,}054°}{\eta\mu 109°} = \frac{0{,}682}{0{,}946} = 0{,}720$$

$$\frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu 37{,}155°}{\eta\mu 57°} = \frac{0{,}604}{0{,}839} = 0{,}720$$

$$\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma} = \frac{\eta\mu 40{,}8°}{\eta\mu 65°} = \frac{0{,}653}{0{,}906} = 0{,}720$$

Άρα, ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος I. Όταν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Ασκήσεις Άλυτες.

1) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 112°$, $\beta = 61°$ και $\gamma = 68°$.

2) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 52° \;\, 26'$, $\beta = 78° \;\, 30'$ και $\gamma = 34° \;\, 10'$.

3) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 59° \;\, 9{,}4'$, $\beta = 101° \;\, 53{,}9'$ και $\gamma = 98° \;\, 47{,}7'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 110°\ \ 54'$, $\hat{B} = 80°\ \ 24'$ και $\hat{\Gamma} = 70°\ \ 32'$.

Λύση:

Πρώτα μετατρέπουμε τις γωνίες:

$$\hat{A} = 110°\ \ 54' = 110{,}9°$$

$$\hat{B} = 80°\ \ 24' = 80{,}4°$$

$$\hat{\Gamma} = 70°\ \ 32' = 70{,}53°$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 110°\ 54'$, $\hat{B} = 80°\ 24'$ και $\hat{\Gamma} = 70°\ 32'$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 1ο:

Υπολογίζουμε την α με τη βοήθεια του Νόμου των Συνημιτόνων για την γωνία $\hat{A}$.

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = -\sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\hat{A} + \sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{A} + \sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\hat{\Gamma}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 110°\ 54'$, $\hat{B} = 80°\ 24'$ και $\hat{\Gamma} = 70°\ 32'$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 1ο:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu 110{,}9° + \sigma\upsilon\nu 80{,}4° \cdot \sigma\upsilon\nu 70{,}53°}{\eta\mu 80{,}4° \cdot \eta\mu 70{,}53°}$$

$$\alpha = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-0{,}357 + 0{,}056}{0{,}93}\right)$$

$$\alpha = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(-0{,}324)$$

$$\alpha = 108{,}905° = 108°\ 54{,}3'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:

Υπολογίζουμε την β με τη βοήθεια του Νόμου των Συνημιτόνων για την γωνία $\hat{B}$.

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = -\sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{\Gamma}\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$$

$$\eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{\Gamma}\cdot\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\hat{B} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{B} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{\Gamma}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu 80{,}4° + \sigma\upsilon\nu 110{,}9° \cdot \sigma\upsilon\nu 70{,}53°}{\eta\mu 110{,}9° \cdot \eta\mu 70{,}53°}$$

$$\beta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{0{,}167 - 0{,}119}{0{,}88}\right)$$

$$\beta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}05454)$$

$$\beta = 88{,}873° = 88° \;\; 52{,}38'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:

Υπολογίζουμε την γ με τη βοήθεια του Νόμου των Συνημιτόνων για την γωνία $\hat{\Gamma}$.

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -\sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B} + \eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{B}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu 70{,}53^\circ + \sigma\upsilon\nu 110{,}9^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 80{,}4^\circ}{\eta\mu 110{,}9^\circ \cdot \eta\mu 80{,}4^\circ}$$

$$\gamma = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{0{,}333 - 0{,}059}{0{,}921}\right)$$

$$\gamma = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}298)$$

$$\gamma = 72{,}692^\circ = 72^\circ\ \ 41{,}52'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4ο: (Δοκιμή)

Για να είναι σωστά τα παραπάνω, πρέπει να ισχύει ο Νόμος των Ημιτόνων. Πράγματι:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu 110{,}9^\circ}{\eta\mu 108{,}905^\circ} = \frac{0{,}934}{0{,}946} = 0{,}987$$

$$\frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu 80{,}4^\circ}{\eta\mu 88{,}873^\circ} = \frac{0{,}986}{0{,}999} = 0{,}987$$

$$\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma} = \frac{\eta\mu 70{,}53^\circ}{\eta\mu 72{,}692^\circ} = \frac{0{,}943}{0{,}955} = 0{,}987$$

Άρα, ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙ. Όταν γνωρίζουμε όλες τις γωνίες.

Ασκήσεις Άλυτες:

1) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 45°$ και $\hat{\Gamma} = 160°$.
2) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 120°$, $\hat{B} = 30°$ και $\hat{\Gamma} = 160°$.
3) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 120°$, $\hat{B} = 20°$ και $\hat{\Gamma} = 110°$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος III. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 40°$, $\beta = 38°$ και $\gamma = 100°$.

Λύση:

1ος Τρόπος:

Με συνδιασμό των Νόμων.

Δηλαδή, χρησιμοποιούμε τον Νόμο των Συνημιτόνων για την πλευρά που μας λείπει και, μετά, τον Νόμο των Ημιτόνων για να υπολογίσουμε τις γωνίες.

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση(1ος Τρόπος):

Βήμα 1ο:

Υπολογίζουμε την πλευρά α.

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 38^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 100^\circ + \eta\mu 38^\circ \cdot \eta\mu 100^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 0{,}328$$

$$\alpha = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}328)$$

$$\alpha = 70{,}853^\circ = 70^\circ\ \ 51{,}18'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση(1ος Τρόπος):

Βήμα 2ο:

Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{B}$.

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta}$$

$$\eta\mu\hat{B} = \eta\mu\beta \cdot \frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha}$$

$$\eta\mu\hat{B} = \eta\mu 38° \cdot \frac{\eta\mu 40°}{\eta\mu 70{,}853°}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση(1ος Τρόπος):

Βήμα 2ο:

$$\eta\mu\hat{B} = 0{,}419$$

$$\hat{B} = \tau o\xi\eta\mu(0{,}419)$$

$$\hat{B} = \begin{cases} 24{,}77^\circ, & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ & \text{ή} \\ 155{,}23^\circ, & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{cases}$$

Η $\hat{B} = 24{,}77^\circ$ είναι δεκτή διότι απέναντι από τη μικρότερη γωνία βρίσκεται η μικρότερη πλευρά ($\beta = 38^\circ < \alpha = 70{,}853^\circ < \gamma = 100^\circ$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση(1ος Τρόπος):

Βήμα 2ο:

Αν έχουμε αμφιβολία εφαρμόζουμε το Νόμο των Συνημιτόνων.

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\sigma\upsilon\nu 38^\circ - \sigma\upsilon\nu 70{,}853^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 100^\circ}{\eta\mu 70{,}853^\circ \cdot \eta\mu 100^\circ}$$

$$\hat{B} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}908)$$

$$\hat{B} = 24{,}77^\circ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση(1ος Τρόπος):

Βήμα 3ο:

Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}$$

$$\eta\mu\hat{\Gamma} = \eta\mu\gamma \cdot \frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha}$$

$$\eta\mu\hat{\Gamma} = \eta\mu 100^\circ \cdot \frac{\eta\mu 40^\circ}{\eta\mu 70{,}853^\circ}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση(1ος Τρόπος):

Βήμα 3ο:

$$\eta\mu\hat{\Gamma} = 0{,}67$$

$$\hat{\Gamma} = \tau o\xi\eta\mu(0{,}67)$$

$$\hat{\Gamma} = \begin{cases} 42{,}067°, \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\tau\alpha\iota \\ \qquad \text{ή} \\ 137{,}933°, \qquad \delta\epsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{cases}$$

Η $\hat{\Gamma} = 137{,}933° \simeq 138°$ είναι δεκτή διότι απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά ($\beta = 38° < \alpha = 70{,}853° < \gamma = 100°$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση(1ος Τρόπος):

Βήμα 4ο: (Δοκιμή)

Για να είναι σωστά τα παραπάνω, πρέπει να ισχύει ο Νόμος των Ημιτόνων. Πράγματι:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu 40°}{\eta\mu 70{,}853°} = 0{,}68$$

$$\frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu 24{,}77°}{\eta\mu 38°} = 0{,}68$$

$$\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma} = \frac{\eta\mu 138°}{\eta\mu 100°} = 0{,}68$$

Άρα, ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{A} = 40°, \beta = 38°$ και $\gamma = 100°$.

Λύση:

2ος Τρόπος:

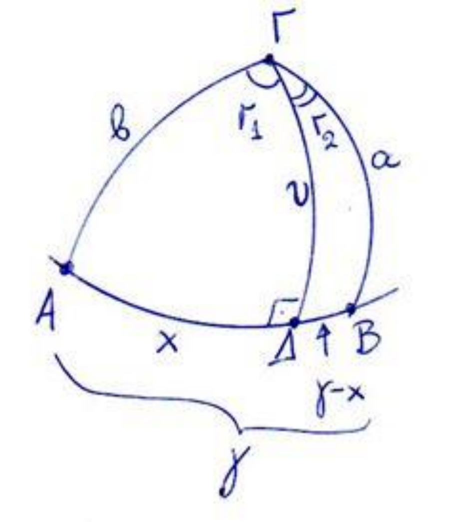
Δημιουργούμε ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα εντός ή εκτός του αρχικού τριγώνου.

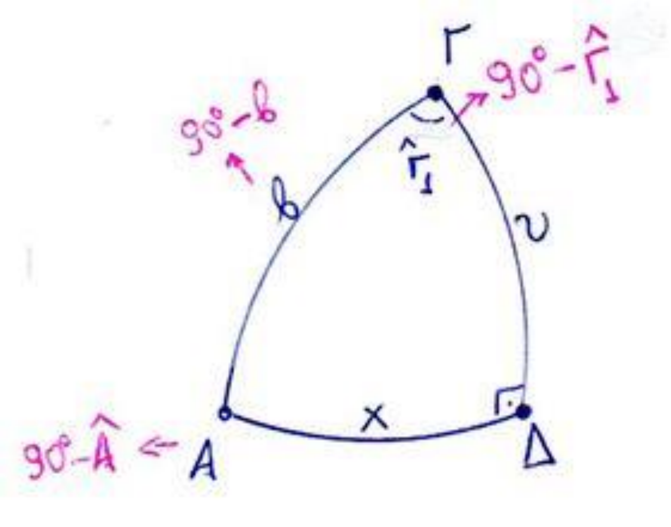
Δηλαδή, αν το τρίγωνό μας είναι ΑΒΓ με πάνω κορυφή το Γ, φέρνουμε από το Γ τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ μεγίστου κύκλου κάθετο στην πλευρά ΑΒ. Οπότε τότε έχουμε δύο περιπτώσεις.

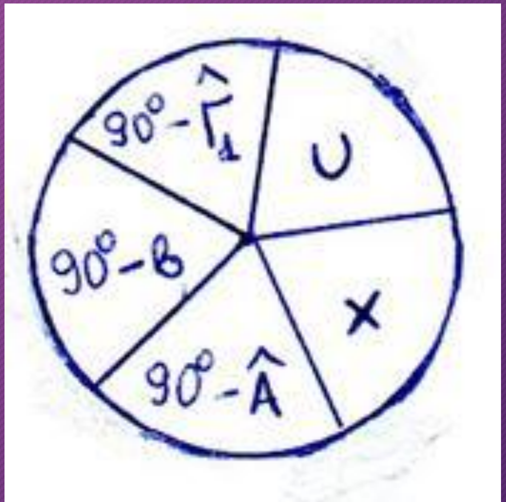
Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Α) το Δ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ και έτσι για παράδειγμα έχουμε:





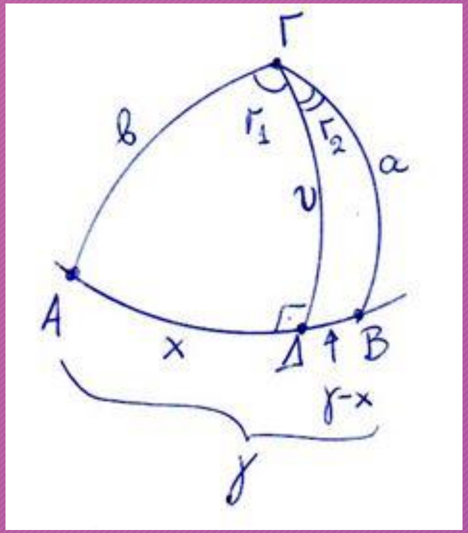


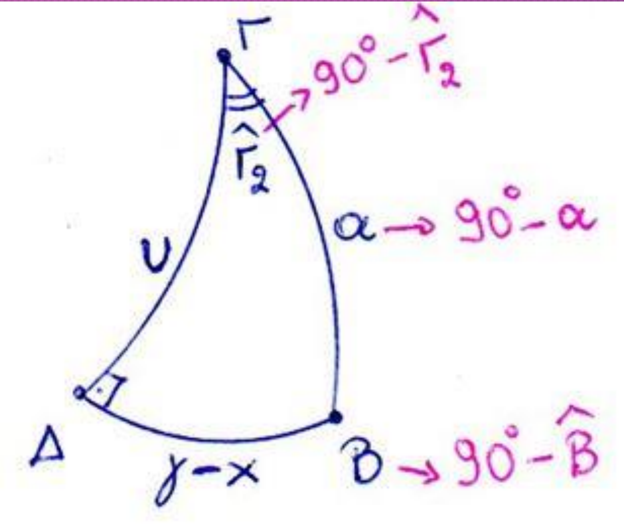
Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

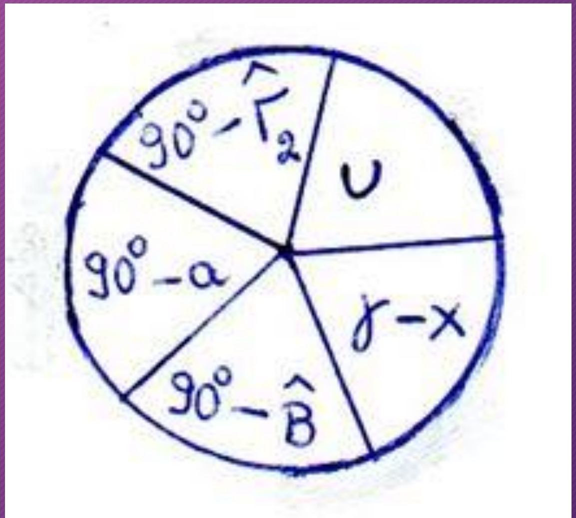
Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

<u>Λύση (2ος Τρόπος):</u>

Α) το Δ είναι <u>εσωτερικό σημείο</u> του τριγώνου ΑΒΓ και έτσι για παράδειγμα έχουμε:





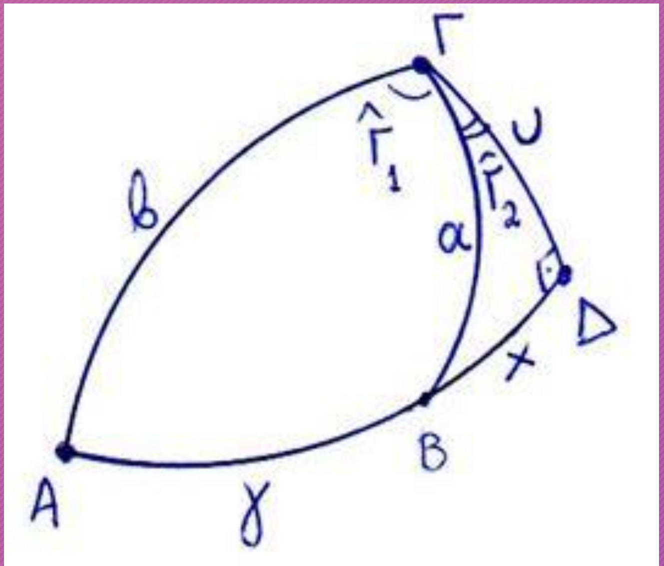


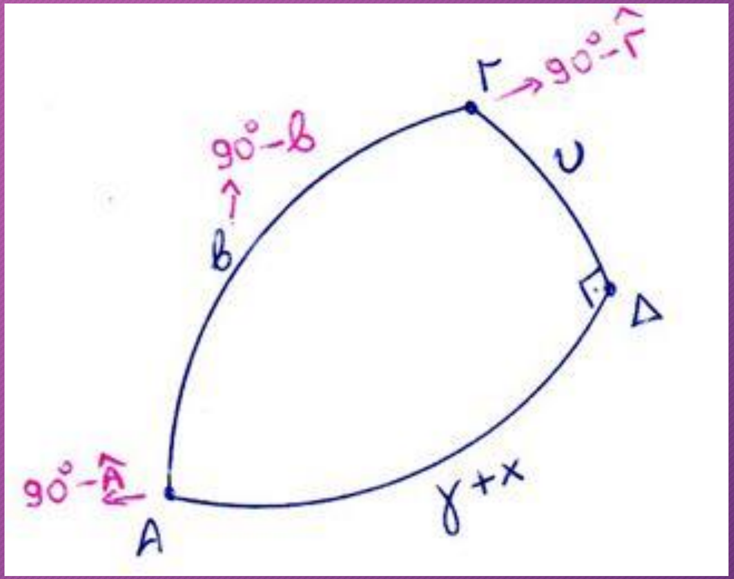
Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

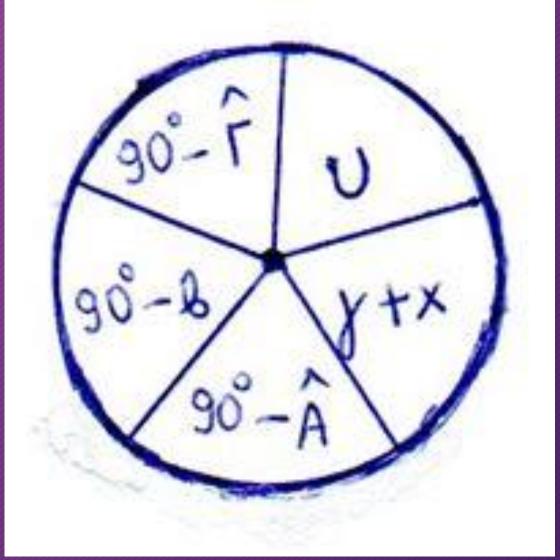
Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Β) Το Δ είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒΓ, έτσι για παράδειγμα έχουμε:





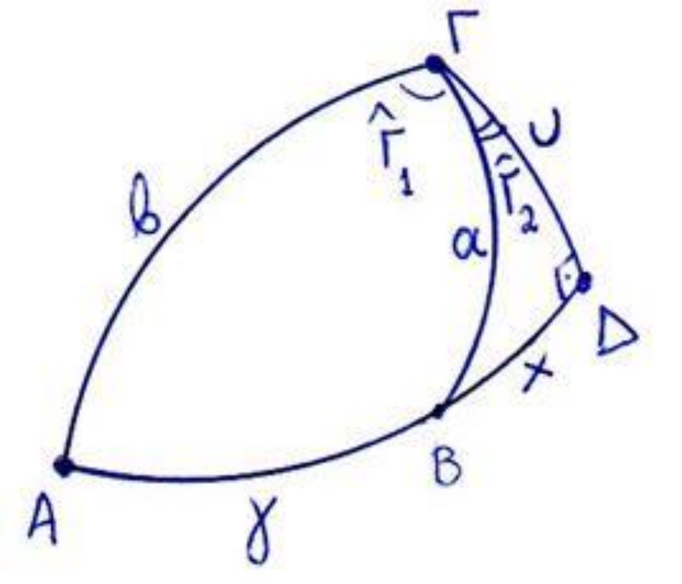


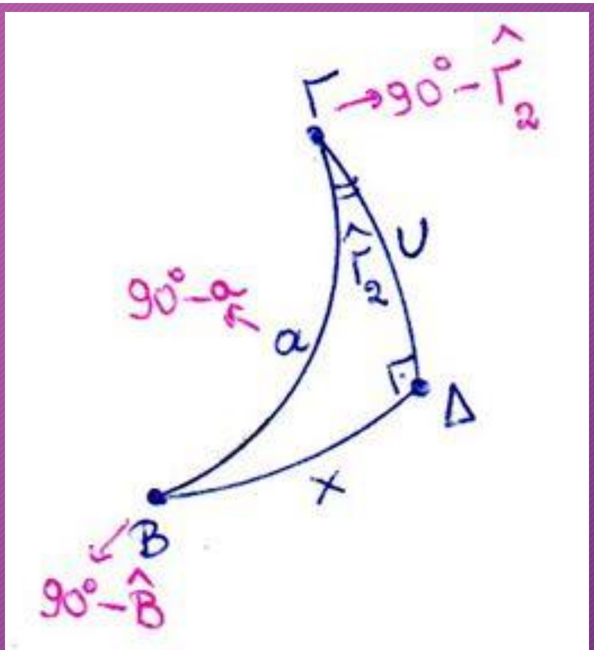
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

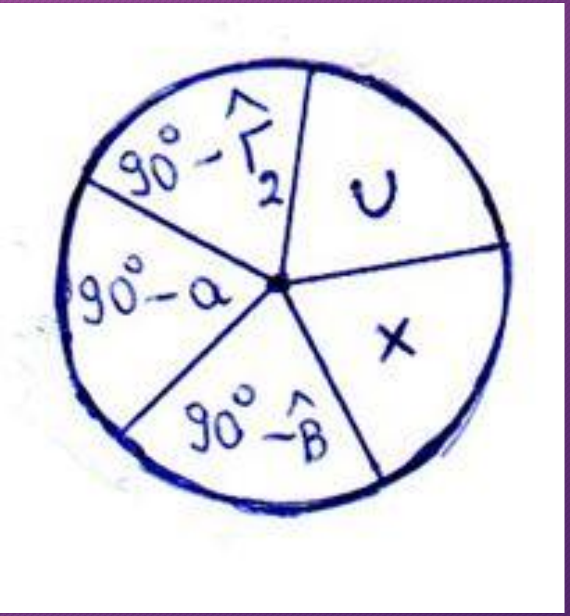
Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Β) Το Δ είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒΓ, έτσι για παράδειγμα έχουμε:







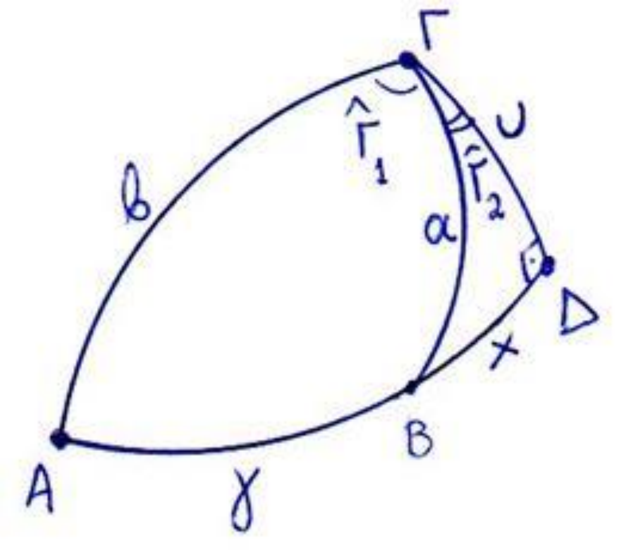
Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Β) Το Δ είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒΓ, έτσι για παράδειγμα έχουμε:



ΠΡΟΣΟΧΗ!

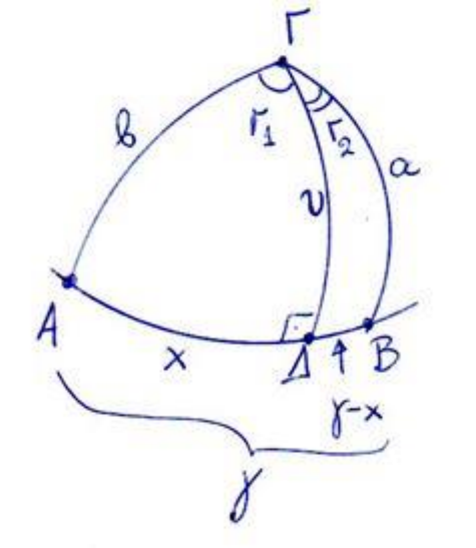
Η γωνία του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ είναι η $\widehat{Γ_1}$, ενώ η $\widehat{Γ} = \widehat{Γ_1} + \widehat{Γ_2}$ είναι γωνία στο καινούριο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΓΔ.

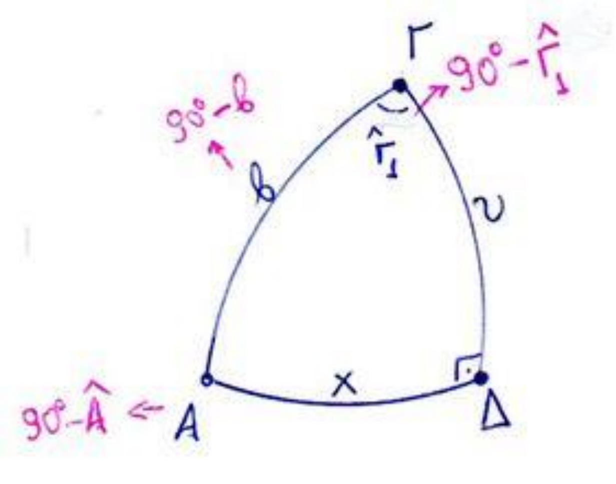
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

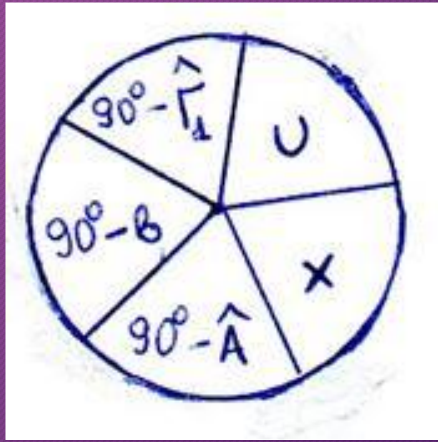
Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Επιστρέφοντας στο παραδειγμά μας, έχουμε:



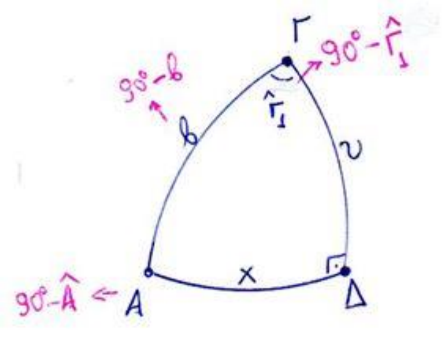




Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Επιστρέφοντας στο παραδειγμά μας, έχουμε:



Βήμα 1ο:

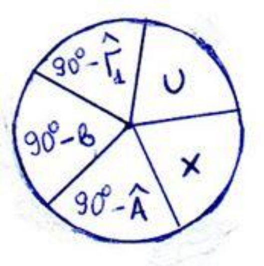
Υπολογίζουμε το υ:

$$\eta\mu\upsilon = \sigma\upsilon\nu(90° - \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - \hat{A})$$

$$\eta\mu\upsilon = \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\hat{A}$$

$$\eta\mu\upsilon = \eta\mu 38° \cdot \eta\mu 40°$$

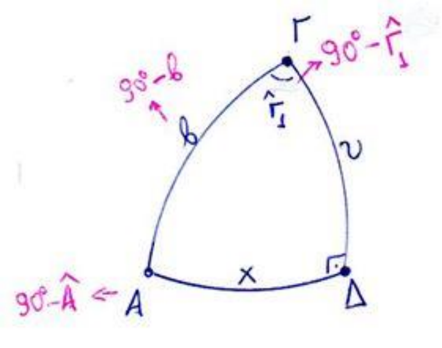
$$\upsilon = \tau o\xi\eta\mu(0{,}396)$$

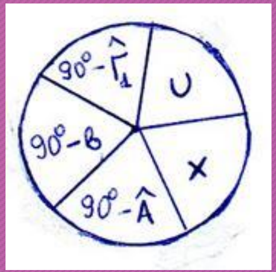


Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

<u>Λύση (2ος Τρόπος):</u>

Επιστρέφοντας στο παραδειγμά μας, έχουμε:





<u>Βήμα 1ο:</u>

$$\upsilon = \begin{cases} 23{,}312^\circ, & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ & \acute{\eta} \\ 156{,}688^\circ, & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{cases}$$

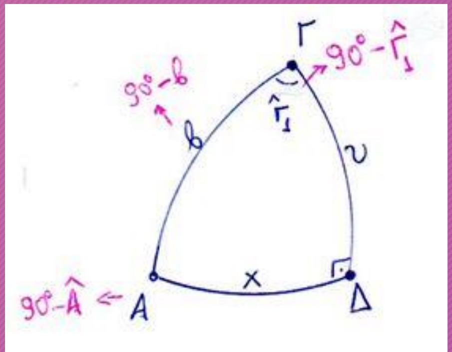
Το $\upsilon = 156{,}688^\circ$ απορρίπτεται, διότι σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνοαπέναντι από οξεία γωνία βρίσκεται οξεία πλευρά και μάλιστα μικρότερη ή ίση της γωνίας. Εδώ το υ είναι απέναντι από την $\hat{A} = 40^\circ$.

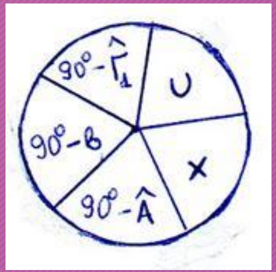
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Βήμα 2ο:





Υπολογίζουμε το x

$$\eta\mu(90° - \hat{A}) = \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi(90° - \beta)$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A}$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 38° \cdot \sigma\upsilon\nu 40°$$

$$x = \tau o\xi\varepsilon\varphi(0{,}598)$$

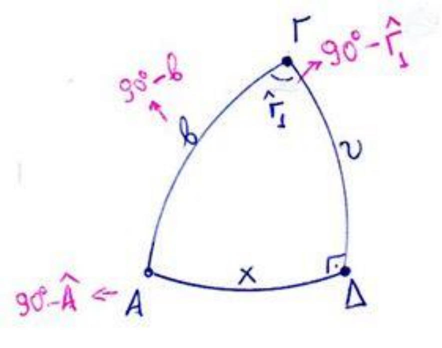
$$x = 30{,}879° \simeq 30{,}9°$$

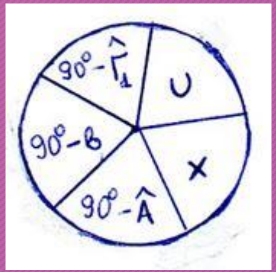
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Βήμα 3ο:





Υπολογίζω το $\widehat{\Gamma}_1$

$$\eta\mu(90^\circ - \beta) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \widehat{\Gamma}_1) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{A})$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\varphi\widehat{\Gamma}_1 \cdot \sigma\varphi\hat{A}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma}_1 \cdot \varepsilon\varphi\hat{A}}$$

$$\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma}_1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\beta \cdot \varepsilon\varphi\hat{A}}$$

$$\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma}_1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 38^\circ \cdot \varepsilon\varphi 40^\circ}$$

$$\widehat{\Gamma}_1 = \tau o\xi\varepsilon\varphi(1{,}512)$$

$$\widehat{\Gamma}_1 = 56{,}52^\circ$$

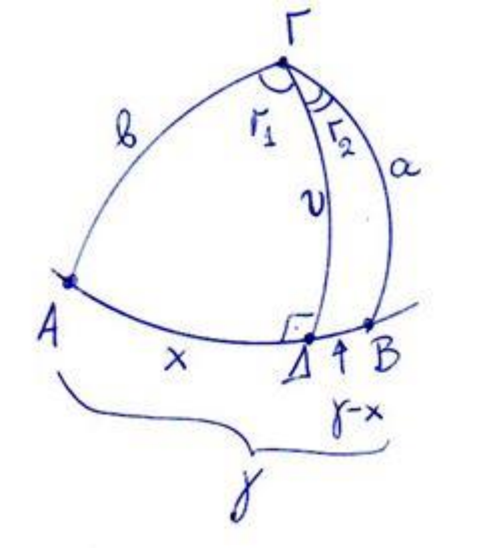
Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

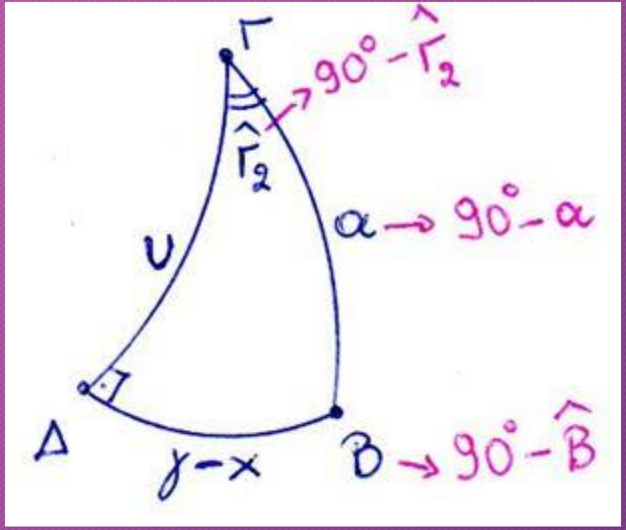
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

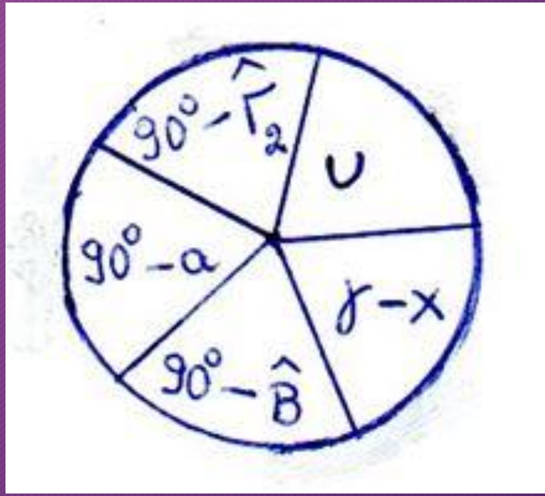
Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):

Στο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε γνωστά τα $\upsilon = 23{,}312°$, και $\gamma - x = 100° - 30{,}9° = 69{,}1°$.



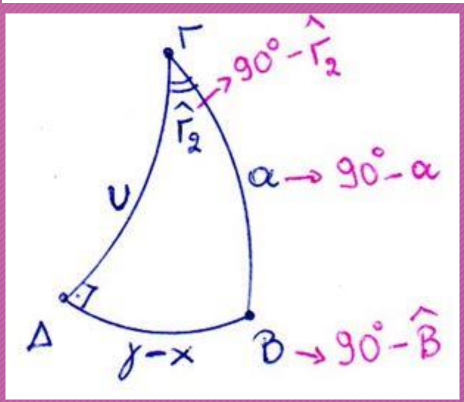


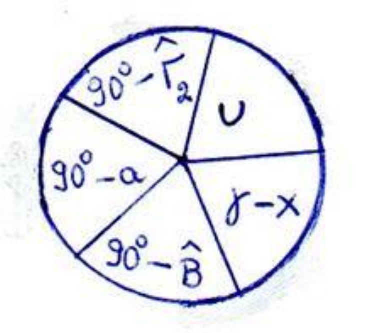


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

<u>Λύση (2ος Τρόπος):</u>





<u>Βήμα 4ο:</u>

Υπολογίζουμε το α.

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma - x)$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 23{,}312^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 69{,}1^\circ$$

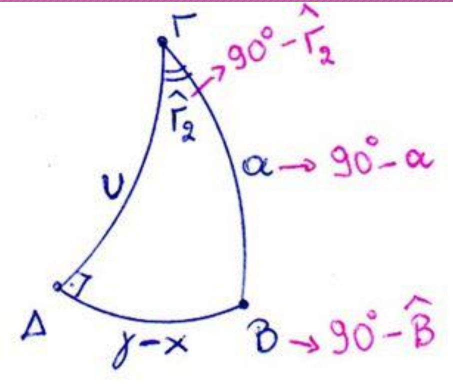
$$\alpha = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}328)$$

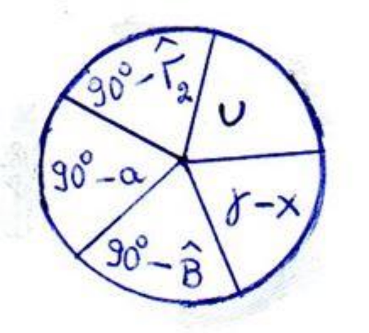
$$\alpha = 70{,}853^\circ$$

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Τύπος III. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):





Βήμα 5ο:

Υπολογίζουμε τη $\widehat{\Gamma}_2$.

$$\eta\mu\upsilon = \varepsilon\varphi(90° - \widehat{\Gamma}_2) \cdot \varepsilon\varphi(\gamma - x)$$

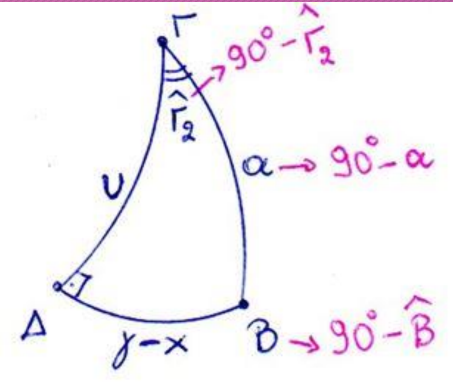
$$\eta\mu\upsilon = \sigma\varphi\widehat{\Gamma}_2 \cdot \varepsilon\varphi(\gamma - x)$$

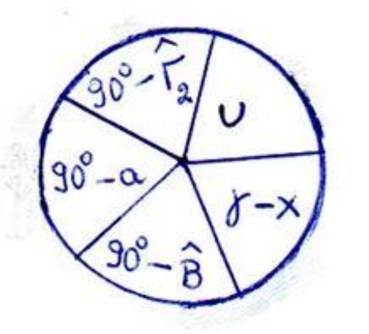
$$\eta\mu\upsilon = \frac{1}{\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma}_2} \cdot \varepsilon\varphi(\gamma - x)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):





Βήμα 5ο:

$$εφ\hat{Γ}_2 = \frac{1}{ημυ} \cdot εφ(γ - x)$$

$$εφ\hat{Γ}_2 = \frac{1}{ημ23{,}312^\circ} \cdot εφ(69{,}1^\circ)$$

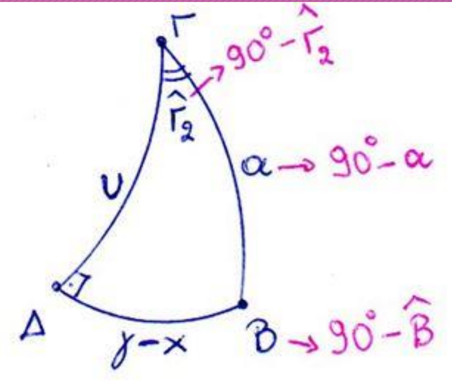
$$\hat{Γ}_2 = τοξεφ(6{,}617)$$

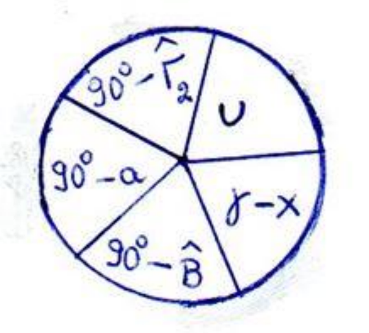
$$\hat{Γ}_2 = 81{,}41^\circ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

<u>Λύση (2ος Τρόπος):</u>





<u>Βήμα 6ο:</u>

Υπολογίζουμε τη $\hat{B}$.

$$\etaμ(γ-x)=εφ(90^\circ-\hat{B})\cdot εφυ$$

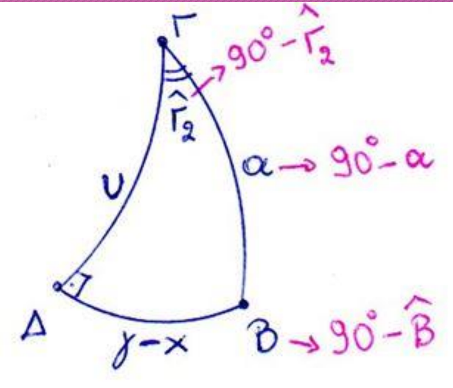
$$\etaμ(γ-x)=σφ\hat{B}\cdot εφυ$$

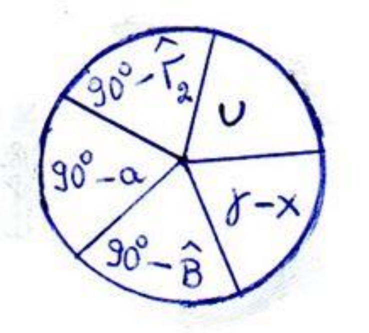
$$\etaμ(γ-x)=\frac{1}{εφ\hat{B}}\cdot εφυ$$

$$εφ\hat{B}=\frac{1}{\etaμ(γ-x)}\cdot εφυ$$

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση (2ος Τρόπος):





Βήμα 6ο:

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\varepsilon\varphi 23{,}312°}{\eta\mu 69{,}1°}$$

$$\hat{B} = \tau o\xi\varepsilon\varphi(0{,}461)$$

$$\hat{B} = 24{,}75°$$

Συνεπώς:

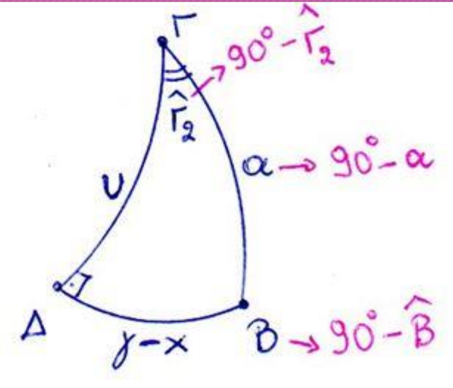
$$\hat{B} = 24{,}75°$$

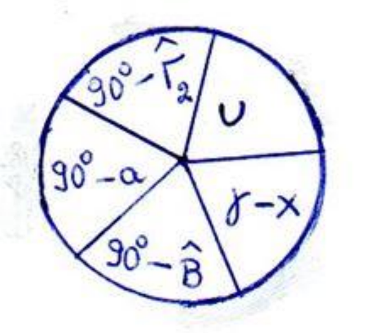
$$\alpha = 70{,}853°$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 56{,}52° + 81{,}41° = 137{,}93°$$

Τύπος ΙΙΙ. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Λύση ($2^{ος}$ Τρόπος):





Βήμα $7^{ο}$: (Δοκιμή)

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu 40^\circ}{\eta\mu 70{,}853^\circ}=0{,}68$$

$$\frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta}=\frac{\eta\mu 24{,}75^\circ}{\eta\mu 38^\circ}=0{,}68$$

$$\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}=\frac{\eta\mu 137{,}93^\circ}{\eta\mu 100^\circ}=0{,}68$$

Άρα, ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta}=\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος III. Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Ασκήσεις Άλυτες:

1) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\beta = 47°\ 30'$, $\alpha = 105°\ 10'$ και $\hat{\Gamma} = 51°\ 20'$.

2) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 71°\ 10'$, $\gamma = 35°\ 20'$ και $\hat{B} = 60°\ 30'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{B} = 108^\circ\ \ 20', \hat{\Gamma} = 104^\circ\ \ 28'$ και $\alpha = 72^\circ\ \ 42'$.

Λύση:

Υπολογίζουμε: $\hat{B} = 108^\circ\ \ 20' = 108{,}333^\circ$,

$\hat{\Gamma} = 104^\circ\ \ 28' = 104{,}467^\circ$,

και $\alpha = 72^\circ\ \ 42' = 72{,}7^\circ$.

Εφαρμόζουμε τον Νόμο των Συνημιτόνων για τις γωνίες, για να υπολογίσουμε τα ζητούμενα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{B} = 108° \;\; 20'$, $\hat{\Gamma} = 104° \;\; 28'$ και $\alpha = 72° \;\; 42'$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 1ο:

Υπολογίζουμε την γωνία $\hat{A}$.

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = -\sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = -\sigma\upsilon\nu 108{,}333° \cdot \sigma\upsilon\nu 104{,}467°$$

$$+\eta\mu 108{,}333° \cdot \eta\mu 104{,}467° \cdot \sigma\upsilon\nu 72{,}7°$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = 0{,}195$$

$$\hat{A} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(0{,}195)$$

$$\hat{A} = 78{,}755° = 78° \;\; 46'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{B} = 108°\ \ 20'$, $\hat{\Gamma} = 104°\ \ 28'$ και $\alpha = 72°\ \ 42'$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:

Υπολογίζουμε την πλευρά β.

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = -\sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \eta\mu\hat{B}\cdot\eta\mu\hat{\Gamma}\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$$

$$\eta\mu\hat{B}\cdot\eta\mu\hat{\Gamma}\cdot\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\hat{B} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{B} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{\Gamma}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{B} = 108°\ \ 20'$, $\hat{\Gamma} = 104°\ \ 28'$ και $\alpha = 72°\ \ 42'$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2ο:

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu 108{,}333° + \sigma\upsilon\nu 78{,}755° \cdot \sigma\upsilon\nu 104{,}467°}{\eta\mu 78{,}755° \cdot \eta\mu 104{,}467°}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = -0{,}382$$

$$\beta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(-0{,}382)$$

$$\beta = 112{,}458° = 112°\ \ 27{,}5'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

Παράδειγμα: Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{B} = 108°\ \ 20'$, $\hat{\Gamma} = 104°\ \ 28'$ και $\alpha = 72°\ \ 42'$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:

Υπολογίζουμε την πλευρά γ.

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -\sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B} + \eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} + \sigma\upsilon\nu\hat{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\eta\mu\hat{A}\cdot\eta\mu\hat{B}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\hat{B} = 108°\ 20'$, $\hat{\Gamma} = 104°\ 28'$ και $\alpha = 72°\ 42'$.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3ο:

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu 104{,}467° + \sigma\upsilon\nu 78{,}755° \cdot \sigma\upsilon\nu 108{,}333°}{\eta\mu 78{,}755° \cdot \eta\mu 108{,}333°}$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = -0{,}334$$

$$\gamma = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(-0{,}344)$$

$$\gamma = 109{,}512° = 109°\ 31'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4ο: (Δοκιμή)

Για να είναι σωστά τα παραπάνω, πρέπει να ισχύει ο Νόμος των Ημιτόνων. Πράγματι:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu 78{,}755^\circ}{\eta\mu 72{,}7^\circ} = \frac{0{,}98}{0{,}955} = 1{,}027$$

$$\frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu 108{,}333^\circ}{\eta\mu 112{,}458^\circ} = \frac{0{,}949}{0{,}924} = 1{,}027$$

$$\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma} = \frac{\eta\mu 104{,}467^\circ}{\eta\mu 109{,}512^\circ} = \frac{0{,}968}{0{,}943} = 1{,}027$$

Άρα, ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τύπος IV. Όταν γνωρίζουμε μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

<u>Ασκήσεις Άλυτες:</u>

1) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 74^\circ\ 32'$, $\hat{B} = 104^\circ\ 10'$ και $\hat{\Gamma} = 101^\circ\ 14'$.

2) Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με $\gamma = 123^\circ\ 31{,}6'$, $\hat{A} = 47^\circ\ 13{,}3'$ και $\hat{B} = 120^\circ\ 9{,}9'$.

Καλό Διάβασμα!!!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη