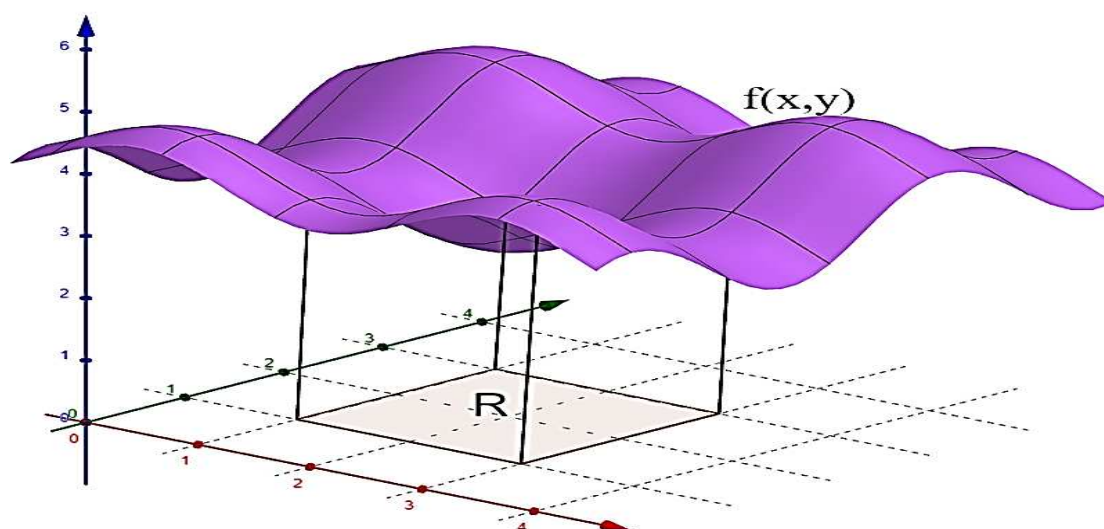




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού

Σπουδαστής: Καρακάσης Στυλιανός (AM 9045)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2024–2025

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.12.2023

Ημερομηνία κατάθεσης:01.2025

Ημερομηνία εξέτασης:01.2025

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Τσαγκανός Γεώργιος Μηχανικός Αυτοματισμού (M.sc.) ΕΔΙΠ		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Λέξεις κλειδιά

Ελλειψοειδές (πεπλατυσμένο, επίμηκες, τριαξονικό), παραβολοειδές, υπερβολοειδές, ελλειπτικό, υπερβολικό, παραβολικό, ελλειπτικές τομές, κυκλικές τομές, επίπεδο (πολικό, διαμετρικό, πρωτεύον, ασυμπτωτικό), πόλος επιπέδου, συζυγή (σημεία, επίπεδα), κέντρο επιφάνειας, διευθύνοντα επίπεδα, κώνος (διευθύνων, ασύμπτωτος), κέντρο ελλειψοειδούς, σφαιρικά (ομφαλικά) σημεία ελλειψοειδούς, χαρακτηριστικός άξονας, ευθείες κορυφής ή πρωτεύουσες ευθείες ή γενέτειρες, ισόπλευρο παραβολοειδές, ευθειογενής επιφάνεια.

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	2
Κατάλογος γραφημάτων	3
1. Εισαγωγή	4
1.1 Γενική κατηγοριοποίηση με βάση τις ιδιότητες της εξίσωσης.....	4
2. Τυποποίηση.....	4
2.1 Ελλειψοειδές.....	11
2.2 Ελλειψοειδές και Γη	13
2.3 Ελλειπτικό παραβολοειδές	14
2.4 Υπερβολικό παραβολοειδές	17
2.5 Μονόχωνο υπερβολοειδές	21
2.6 Υπερβολοειδές οριζόμενο από τρεις ευθείες.....	24
2.7 Δίχωνο υπερβολοειδές.....	26
Βιβλιογραφία	27

Κατάλογος γραφημάτων

Γράφημα 1: Οι πέντε περιπτώσεις επιφανειών 2 ^{ου} βαθμού (1 ελλειψοειδές, 2 ελλειπτικό παραβολοειδές, 3 υπερβολικό παραβολοειδές, 4 μονόχωνο υπερβολοειδές, 5 δίχωνο υπερβολοειδές)	4
Γράφημα 2: Ελλειψοειδές	6
Γράφημα 3: Ελλειπτικό παραβολοειδές	6
Γράφημα 4: Υπερβολικό παραβολοειδές	7
Γράφημα 5: Μονόχωνο υπερβολοειδές	7
Γράφημα 6: Δίχωνο υπερβολοειδές	7
Γράφημα 7: Διάκριση προβολικών συστημάτων 1	8
Γράφημα 8: Διάκριση προβολικών συστημάτων	8
Γράφημα 9: Ελλειψοειδές	11
Γράφημα 10: Αν $\alpha=\beta$ τότε είναι πεπλατυσμένο ελλειψοειδές	12
Γράφημα 11: Όγκος του ελλειψοειδούς 1	12
Γράφημα 12: Όγκος του ελλειψοειδούς 2	12
Γράφημα 13: Τριαξονικό ελλειψοειδές	13
Γράφημα 14: Ελλειψοειδές και Γη	14
Γράφημα 15: Ελλειπτικό παραβολοειδές	15
Γράφημα 16: Παραβολοειδές εκ περιστροφής	16
Γράφημα 17: Η μαθηματικά σέλα	17
Γράφημα 18: Υπερβολικό παραβολοειδές	17
Γράφημα 19: Το υπερβολικό παραβολοειδές και τα δύο συστήματα γενετειρών του 18	18
Γράφημα 20: Υπερβολικό παραβολοειδές οριζόμενο από ένα επίπεδο p και 2 ευθείες γραμμές	19
Γράφημα 21: Τμήμα επιφάνειας υπερβολικού παραβολοειδούς	20
Γράφημα 22: Μονόχωνο υπερβολοειδές	21
Γράφημα 23: Μονόχωνο υπερβολοειδές, με τα 2 συστήματα γενετειρών και τον ασύμπτωτο κώνο	22
Γράφημα 24: Υπόδειγμα μετάδοσης της στροφής με χρήση 2 μονόχωνων υπερβολοειδών	23
Γράφημα 25: Υπερβολοειδές οριζόμενο από 3 γενέτειρες	24
Γράφημα 26: Δίχωνο υπερβολοειδές	26
Γράφημα 27: Χαρακτηρισμός σημείων επιφάνειας εκ περιστροφής	27
Γράφημα 28: Ελλειπτικό, παραβολικό και υπερβολικό σημείο P	27

1. Εισαγωγή

Οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού, είναι πολύπλοκες γεωμετρικές δομές που εμφανίζονται συχνά σε εφαρμογές των μαθηματικών, από τη γεωμετρία μέχρι τη φυσική και την υπολογιστική σχεδίαση. Κατατάσσονται σε μαθηματικούς τύπους που περιλαμβάνουν σφαίρες, υπερβολές, παραβολές, κώνους και η ανάλυσή τους μπορεί να γίνει μέσω εργαλείων όπως η γραμμική άλγεβρα και η διακριτή ανάλυση.

Πρόκειται για γεωμετρικές επιφάνειες που προκύπτουν από εξισώσεις δευτέρου βαθμού, στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο και συνήθως είναι γενικευμένες παραλλαγές των κωνικών τομών.

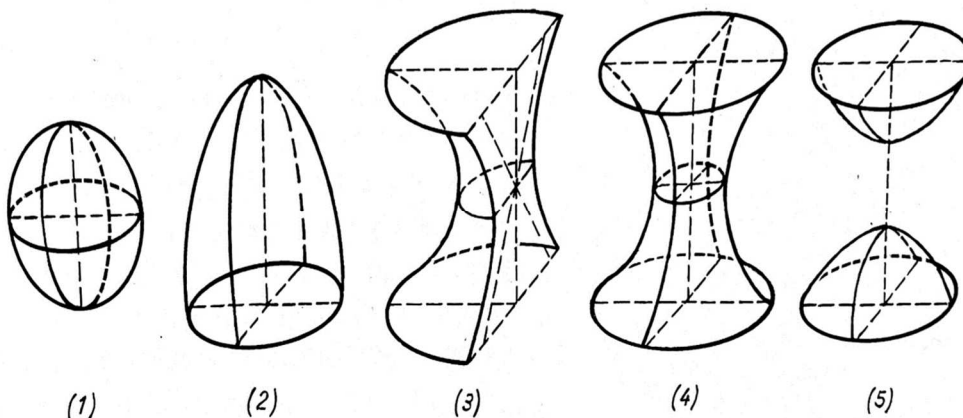
1.1 Γενική κατηγοριοποίηση με βάση τις ιδιότητες της εξίσωσης

Η ανάλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού για επιφάνειες, γίνεται συνήθως μέσω της μετατροπής της σε κανονική μορφή. Αυτό σημαίνει ότι επιλύω την εξίσωση για να προσδιορίσω τον τύπο της επιφάνειας, εξετάζοντας τη μορφή που σχετίζεται με τη μήτρα της εξίσωσης. Η ανάλυση του τύπου της επιφάνειας γίνεται συνήθως, ως εξής:

- Χρησιμοποιείται η αρχική αναπαράσταση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού.
- Υπολογίζεται ο διακριτικός (discriminant) τύπος της εξίσωσης, ο οποίος καθορίζει αν η επιφάνεια δευτέρου βαθμού είναι σφαίρα, κώνος, υπερβολή, ελλειψοειδής κ.λπ.
- Αξιολογούνται οι ιδιοτιμές και οι ιδιοδιανύσματα της αντίστοιχης παράστασης.

2. Τυποποίηση

Μέσω της εφαρμογής ενός μετασχηματισμού των πρωτευόντων αξόνων, οι άξονες του ορθοκανονικού συστήματος των συντεταγμένων, έχουν τις διευθύνσεις των πρωτευόντων αξόνων τους, στις αντίστοιχες εξισώσεις των επιφανειών δευτέρου βαθμού. Ο χαρακτηρισμός της επιφάνειας, συνδέεται με το είδος (τύπο) της τομής της από επίπεδο παράλληλο προς έναν ορισμένο άξονα και της τομής της από επίπεδο κάθετο στον άξονα αυτό.



Γράφημα 1: Οι πέντε περιπτώσεις επιφανειών 2^{ου} βαθμού (1 ελλειψοειδές, 2 ελλειπτικό παραβολοειδές, 3 υπερβολικό παραβολοειδές, 4 μονόχωνο υπερβολοειδές, 5 δίχωνο

Αν η πρώτη τομή είναι έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, τότε η επιφάνεια δευτέρου βαθμού ονομάζεται αντιστοίχως ελλειψοειδές, παραβολοειδές ή υπερβολοειδές. Βάσει του είδους της δεύτερης επιφάνειας τομής, όταν αυτή είναι απαραίτητη για τη διάκριση των επιφανειών, προστίθεται ο όρος ελλειπτικό ή

υπερβολικό. Ο όρος παραβολικό δε χρησιμοποιείται, διότι δεν υπάρχει γνωστή επιφάνεια δευτέρου βαθμού με μια παραβολική δεύτερη τομή. Έξαλλου, δε γίνεται διάκριση μεταξύ των ελλειπτικών και των κυκλικών τομών. Ως ελλειψοειδές, μπορεί να χαρακτηριστεί και μια σφαίρα. Ένα ελλειπτικό παραβολοειδές, δύναται να έχει κυκλική τομή. Για τα υπερβολοειδή, είναι απαραίτητος και ένας επί πλέον χαρακτηρισμός, ο οποίος αναφέρεται στην ύπαρξη μιας χοάνης (σκελούς) ή δυο χοανών (μονόχωνο ή δίχωνο υπερβολοειδές). Συνοψίζοντας, παρατηρώ ότι οι πέντε γνωστές επιφάνειες δευτέρου βαθμού χαρακτηρίζονται αντίστοιχα από τους όρους:

- **Ελλειψοειδές.** Ως ελλειψοειδή, χαρακτηρίζονται τα στερεά που προκύπτουν από περιστροφή της έλλειψης και είναι το τρισδιάστατο αντίστοιχο της έλλειψης. Είναι δηλαδή στερεό εκ περιστροφής.

- **Υπερβολικό παραβολοειδές.** Είναι μια τετραγωνική επιφάνεια, δηλαδή επιφάνεια 2^{ου} βαθμού. Η επιφάνεια του υπερβολικού παραβολοειδούς, είναι απεριόριστη και παράγεται από την κίνηση μίας ευθείας γραμμής, άρα είναι ευθειογενής επιφάνεια. Το υπερβολικό παραβολοειδές έχει δύο επίπεδα συμμετρίας, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Η τομή των δύο αυτών επιπέδων, είναι ο άξονας συμμετρίας της επιφάνειας, ο οποίος τέμνει την επιφάνεια σε ένα μοναδικό σημείο, που λέγεται κορυφή του υπερβολικού παραβολοειδούς. Τα επίπεδα συμμετρίας, τέμνουν την επιφάνεια σε δύο παραβολές που έχουν κοινό σημείο την κορυφή της επιφάνειας.

Κάθε επίπεδο παράλληλο σε ένα από τα επίπεδα συμμετρίας, τέμνει την επιφάνεια κατά παραβολή. Κάθε επίπεδο κάθετο και στα δύο επίπεδα συμμετρίας, τέμνει την επιφάνεια σε υπερβολή, εκτός από το επίπεδο που διέρχεται από την κορυφή της επιφάνειας δευτέρου βαθμού, το οποίο την τέμνει σε δύο ευθείες. Τα παραπάνω, δικαιολογούν το όνομα της επιφάνειας και το ότι το υπερβολικό παραβολοειδές δεν είναι φραγμένο. Σύγχρονοι ζωγράφοι, γραφίστες και γλύπτες έχουν χρησιμοποιήσει το υπερβολικό παραβολοειδές στα έργα τέχνης τους. Η γεωμετρία του υπερβολικού παραβολοειδούς, έχει χρησιμοποιηθεί πολύ συχνά στη σύγχρονη αρχιτεκτονική, αποτελώντας έμπνευση για τη δημιουργία ξεχωριστών κτηρίων. Μετά τη σφαίρα και τον κύλινδρο, είναι η πλέον εφαρμοσμένη επιφάνεια 2^{ου} βαθμού στην αρχιτεκτονική, δημιουργώντας εντυπωσιακές καμπυλωτές φόρμες.

- **Μονόχωνο υπερβολοειδές.** Το μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής, είναι τετραγωνική επιφάνεια και παράγεται από την περιστροφή μίας ευθείας γραμμής γύρω από άξονα, ασύμβατο προς την ευθεία. Ο άξονας αυτός, λέγεται άξονας του μονόχωνου υπερβολοειδούς και είναι άξονας συμμετρίας του. Κάθε ευθεία του μονόχωνου υπερβολοειδούς, είναι γενέτειρα της επιφάνειας. Κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονα του μονόχωνου υπερβολοειδούς εκ περιστροφής, το τέμνει σε κύκλο. Κάθε επίπεδο, που περιέχει τον άξονα του μονόχωνου υπερβολοειδούς, το τέμνει σε υπερβολή. Έτσι, το μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής, μπορεί να προκύψει δια περιστροφής μιας υπερβολής γύρω από αυτόν τον άξονα. Το μονόχωνο υπερβολοειδές, έχει χρησιμοποιηθεί πολύ συχνά στη σύγχρονη αρχιτεκτονική, δημιουργώντας ενδιαφέρουσες φόρμες.

- **Δίχωνο υπερβολοειδές.**

- **Ελλειπτικό παραβολοειδές.**

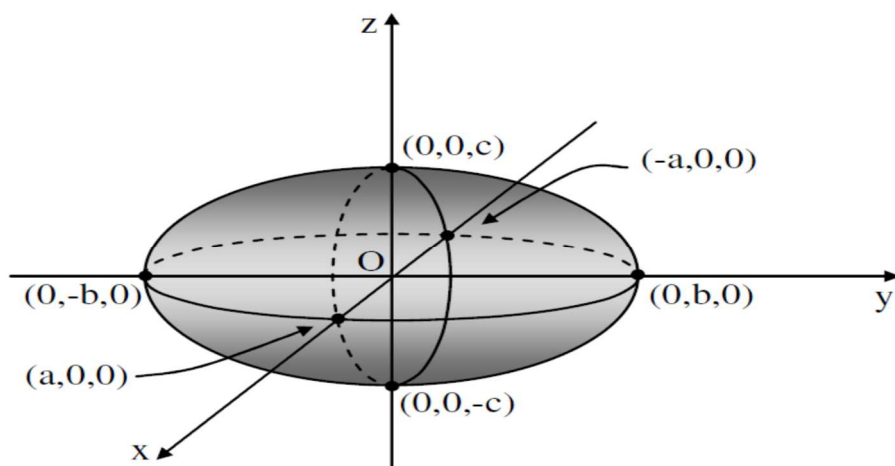
Για τις παραπάνω πέντε επιφάνειες του δευτέρου βαθμού παρατηρώ τα εξής:

1. Κάθε ευθεία γραμμή, τέμνει μια επιφάνεια δευτέρου βαθμού σε δυο σημεία, πραγματικά ή φανταστικά, διαφορετικά μεταξύ τους ή συμπίπτοντα, επ' άπειρον ή μη. Αν μια ευθεία γραμμή έχει τρία κοινά σημεία με την επιφάνεια, τότε ανήκει σε

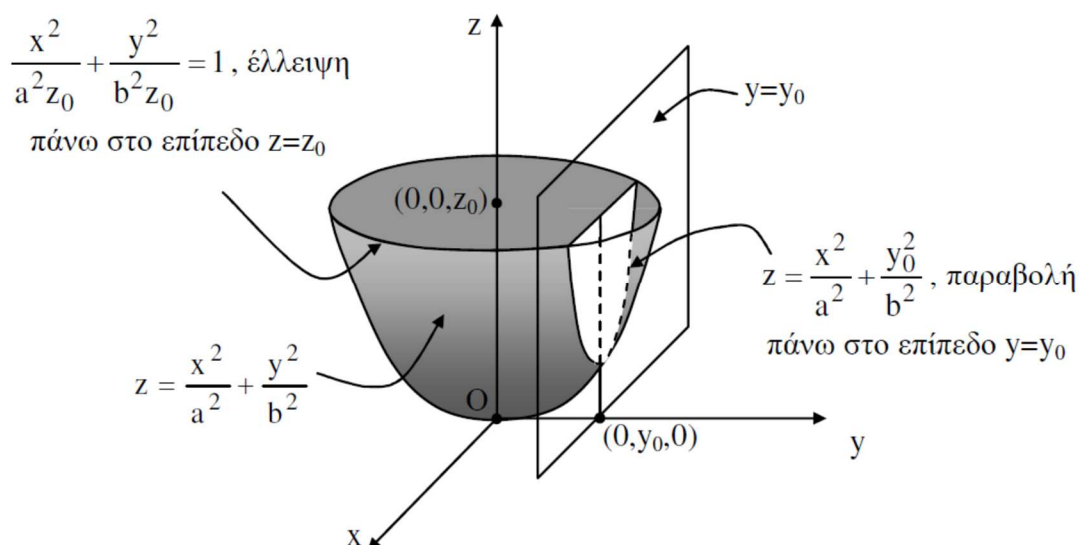
αυτήν (όλα τα σημεία της είναι σημεία της επιφάνειας). Ένα τυχαίο επίπεδο, τέμνει την επιφάνεια του δευτέρου βαθμού κατά μια καμπύλη δευτέρου βαθμού (κωνική τομή), διότι κάθε ευθεία του τέμνοντος επιπέδου την τέμνει σε δυο σημεία. Το επ' άπειρο επίπεδο του χώρου, τέμνει την επιφάνεια κατά καμπύλη γραμμή, η οποία δύναται να είναι μια πραγματική (υπερβολοειδής) ή φανταστική (ελλειψοειδής) κωνική τομή ή δυο ευθείες, πραγματικές (υπερβολικό παραβολοειδής) ή φανταστικές (ελλειπτικό παραβολοειδής). Η τομή με το εφαπτόμενο επίπεδο, είναι μια κωνική τομή που έχει διπλό σημείο επαφής, άρα εκφυλίζεται σε δυο διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες γραμμές, οι οποίες δύναται να είναι:

- πραγματικές (μονόχωνο υπερβολοειδής και υπερβολικό παραβολοειδής) ή
- φανταστικές (ελλειψοειδής, δίχωνο υπερβολοειδής, ελλειπτικό παραβολοειδής).

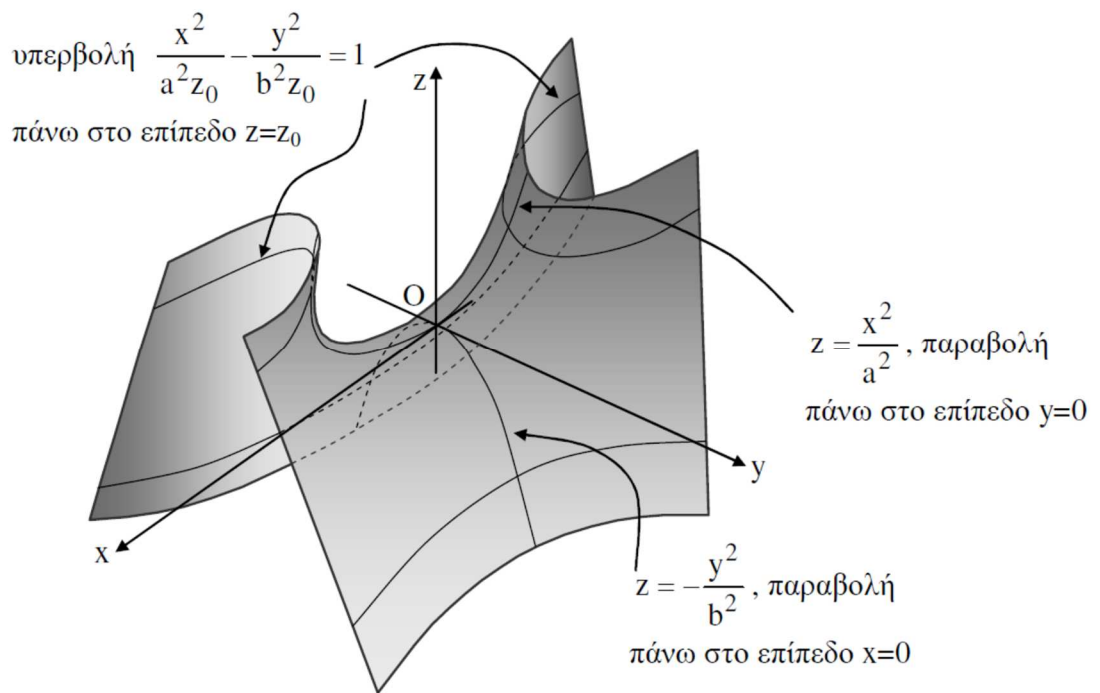
Έτσι, όλες οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού δέχονται δυο συστήματα γενετειρών ευθειών, πραγματικών ή φανταστικών. Αν δέχονται πραγματικές γενέτειρες, ονομάζονται **ευθιογενείς**. Τα δυο παραβολοειδή, τεμνόμενα από το επ' άπειρο επίπεδο του χώρου κατά δυο ευθείες, εφαπτόνται σε αυτό το επίπεδο.



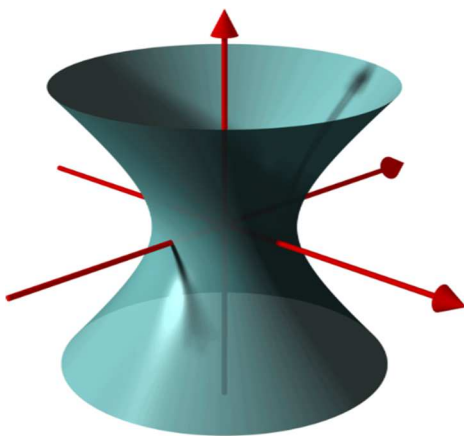
Γράφημα 2: Ελλειψοειδής



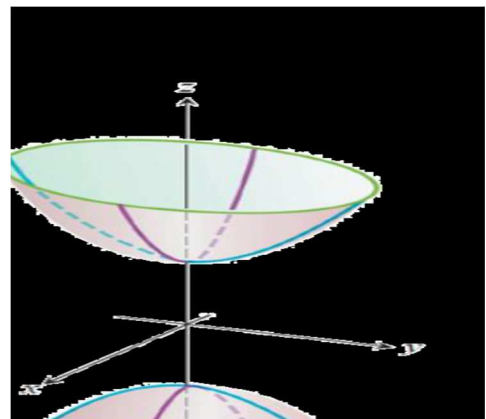
Γράφημα 3: Ελλειπτικό παραβολοειδής



Γράφημα 4: Υπερβολικό παραβολοειδές



Γράφημα 5: Μονόχωνο υπερβολοειδές



Γράφημα 6: Δίχωνο υπερβολοειδές

2. Η δείκτρια καμπυλότητα κάθε μίας από τις παραπάνω επιφάνειες δευτέρου βαθμού, κατά το τυχαίο σημείο τους, είναι κωνική τομή όμοια προς την τομή του εφαπτομένου επιπέδου κατά το θεωρούμενο σημείο της. Ειδικότερα, είναι μια έλλειψη σε όλα τα σημεία της επιφάνειας, όταν αυτή δεν είναι ευθειογενής και μια υπερβολή έχοντας ως ασύμπτωτες τις δυο γενέτειρες του θεωρημένου σημείου, όταν αυτή είναι ευθειογενής. Οι μη ευθειογενείς επιφάνειες δευτέρου βαθμού είναι κυρτές, ενώ οι ευθειογενείς επιφάνειες έχουν αντίθετες καμπυλότητες, για όλα τα σημεία τους.

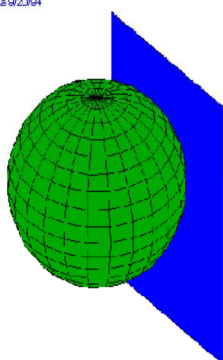
3. Ο γεωμετρικός τόπος των συζυγών αρμονικών ενός σημείου P του χώρου, ως προς τα κοινά σημεία της επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού με τις δια του P ευθείες του χώρου, είναι ένα επίπεδο p το οποίο ονομάζεται **πολικό επίπεδο** του σημείου P.

Το σημείο P , ονομάζεται **πόλος του επιπέδου** ως προς την (S) . Αυτός ο γεωμετρικός τόπος, είναι επίσης ο τόπος των πόλων του σημείου P ως προς τις τομές τις επιφάνειας (S) με το σημείο P στο επίπεδο του χώρου.

4. Η πολική του σημείου P , ως προς μία τυχαία από τις παραπάνω κωνικές τομές (με τα επίπεδα του P που τέμνουν την (S)), είναι η ευθεία που συνδέει τα σημεία επαφής τη (S) με τα εφαπτόμενα του P , ο δε γεωμετρικός τόπος αυτών των εφαπτόμενων (το σύνολο των εφαπτομένων των ανωτέρων δια του P τομών της (S)) είναι ο περιγεγραμμένος κώνος περί την S , που έχει ως κορυφή το σημείο P . Έτσι, η καμπύλη επαφής του κάθε κώνου του περιγεγραμμένου στην επιφάνεια (S) δευτέρου βαθμού, κείται επί του πολικού επιπέδου της κορυφής του κώνου του, ως προς τη θεωρούμενη επιφάνεια.

Επίπεδη προβολή

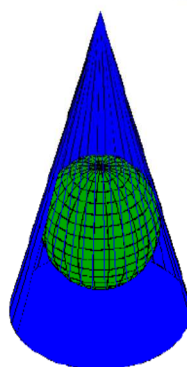
Peter H. Dana 9/20/94



Planar Projection Surface

Κωνική προβολή

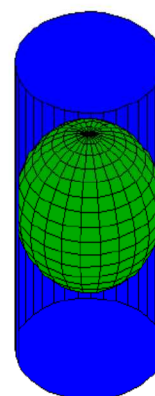
Peter H. Dana 9/20/94



Conical Projection Surface

Κυλινδρική προβολή

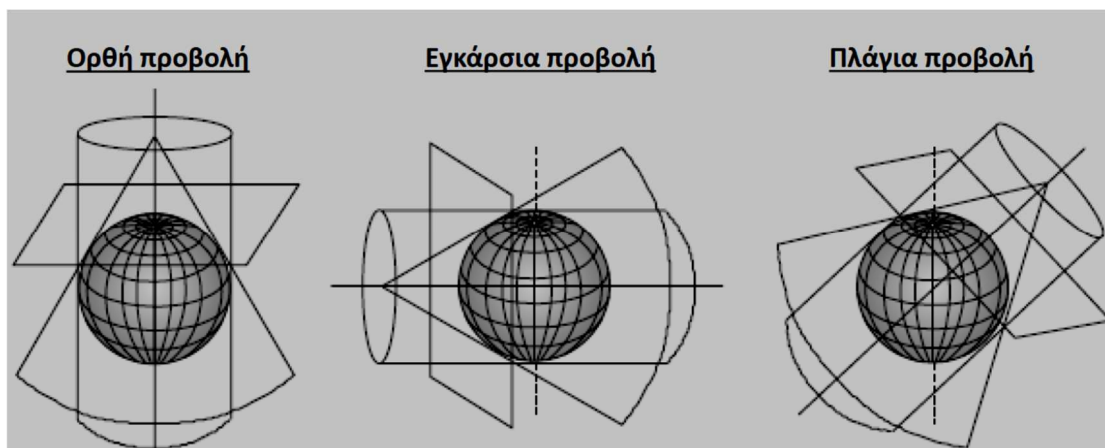
Peter H. Dana 9/20/94



Cylindrical Projection Surface

Γράφημα 7: Διάκριση προβολικών συστημάτων 1

5. Η εφαπτομένη στο σημείο M της καμπύλης επαφής, με μια επιφάνεια (S) δευτέρου βαθμού και ενός κώνου κορυφής P , περιγεγραμμένου στην (S) , είναι η τομή του εφαπτομένου επιπέδου της (S) , κατά το σημείο M με το πολικό επίπεδο του σημείου P . Επειδή το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας (S) , κατά το σημείο M , τέμνει την επιφάνεια δευτέρου βαθμού κατά την κωνική τομή αναχθείσα σε δύο ευθείες, η πολική του σημείου P ως προς την κωνική αυτή, κείται επί του εφαπτομένου επιπέδου και επί του πολικού επιπέδου του σημείου P , δηλαδή είναι η κατά το M εφαπτομένη της καμπύλης επαφής.



Γράφημα 8: Διάκριση προβολικών συστημάτων

Άρα: Η εφαπτομένη της καμπύλης (C), της επαφής μιας επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού και ενός περιγεγραμμένου σε αυτήν κώνου, σε ένα σημείο M της (C), είναι η συζυγής αρμονική της γενέτειρας του κώνου ως προς τις δύο γενέτειρες της επιφάνειας (S), οι οποίες ανήκουν στο θεωρούμενο σημείο (διέρχονται από το θεωρούμενο σημείο). Οι δυο εν λόγω γενέτειρες της (S), είναι οι ασύμπτωτες της δείκτριας της επιφάνειας (S), κατά το θεωρούμενο σημείο M.

6. Δύο σημεία του χώρου ονομάζονται **συζυγή** ως προς μια εκ των ανωτέρω επιφανειών (S) δευτέρου βαθμού, αν το ένα εξ' αυτών κείται επί του πολικού επιπέδου του άλλου. Σε αυτή την περίπτωση και το δεύτερο σημείο θα κείται επί του πολικού επιπέδου του πρώτου. Τα επί μιας ευθείας του χώρου ζεύγη συζυγών, ως προς την επιφάνεια (S), σημείων ανήκουν σε μια ενέλιξη (είναι ζεύγη μίας ενέλιξης), της οποίας τα διπλά σημεία είναι τα κοινά σημεία της ευθείας και της επιφάνειας.

Δύο επίπεδα του χώρου ονομάζονται συζυγή, ως προς την επιφάνεια (S), αν το ένα περιέχει τον πόλο του άλλου. Τα πολικά επίπεδα των σημείων ενός επιπέδου, διέρχονται από τον πόλο αυτού του επιπέδου. Αντιστρόφως, οι πόλοι των επιπέδων του χώρου που διέρχεται από αυτό το σημείο, κείνται επί του πολικού επιπέδου του σημείου αυτού.

Τα πολικά επίπεδα των σημείων μιας ευθείας γραμμής α , διέρχονται από την ίδια ευθεία α' , η οποία ονομάζεται συζυγής της α ως προς την επιφάνεια (S). Η ευθεία α' είναι επίσης ο γεωμετρικός τόπος των πόλων των επιπέδων, που διέρχονται από την πρώτη ευθεία α . Τα σημεία επαφής μιας επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού με τα εφαπτόμενα αυτής επίπεδα, που ανήκουν στη δοθείσα ευθεία γραμμή α (τα διερχόμενα από την α) ανήκουν στη συζυγή της ευθείας α , την α' . Το πρόβλημα της τομής μιας ευθείας γραμμής και μιας επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού και το πρόβλημα της κατασκευής των εφαπτομένων επιπέδων της (S) δια δοθείσης ευθείας γραμμής είναι, δυο προβλήματα του χώρου αντίστοιχα μεταξύ τους, δηλαδή το ένα μπορεί να αναχθεί στο άλλο.

7. Ονομάζω **κέντρο** μιας επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού, τον πόλο του επ' άπειρον επιπέδου του χώρου ως προς την (S). Οι επιφάνειες (S) οι εφαπτόμενες του επ' άπειρον επιπέδου (παραβολοειδή), έχουν κέντρο επί του επ' άπειρον επιπέδου (επ' άπειρον σημείο του χώρου). Κάθε επίπεδο διερχόμενο δια του κέντρου της επιφάνειας (S), ονομάζεται **διαμετρικό επίπεδο** αυτής. Κάθε διαμετρικό επίπεδο, είναι το πολικό επίπεδο ενός επ' άπειρον σημείου του χώρου που αντιστοιχεί σε μια διεύθυνση (δ) και αυτό το επίπεδο ονομάζεται συζυγές της διεύθυνσης (δ).

Το διαμετρικό επίπεδο της επιφάνειας (S), το συζυγές μιας διεύθυνσης (δ), είναι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών, των οποίων οι φορείς ανήκουν στη διεύθυνση της (δ). Πράγματι, κάθε χορδή χωρίζεται αρμονικά από το μέσον της και από το επ' άπειρον σημείο του φορέας της. Κάθε ευθεία γραμμή διερχόμενη από το κέντρο της επιφάνειας (S), ονομάζεται **διάμετρος** της επιφάνειας. Κάθε διάμετρος της (S) είναι η συζυγής ευθεία μιας επ' άπειρον ευθείας γραμμής του χώρου, που ανήκει σε επίπεδο ορισμένης διεύθυνσης. Η διάμετρος ονομάζεται συζυγής της εν λόγω διεύθυνσης.

Η διάμετρος η συζυγής μιας διεύθυνσης επιπέδων, είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των τομών της επιφάνειας (S) από τα επίπεδα αυτής της διεύθυνσης. Πράγματι, το κέντρο μίας τυχαίας από αυτές τις τομές, είναι ο πόλος της επ' άπειρον ευθείας η οποία κείται επί του θεωρημένου τέμνοντος επιπέδου. Μια διάμετρος και ένα διαμετρικό επίπεδο της (S), ονομάζονται **συζυγή** ως προς την (S) στοιχεία, αν η διάμετρος περιέχει τον πόλο του επιπέδου. Δύο διάμετροι της (S)

ονομάζονται **συζυγείς**, αν τα επ' άπειρον σημεία τους είναι συζυγή ως προς την (S), δηλαδή αν το ένα ανήκει στο διαμετρικό επίπεδο της (S), το συζυγές του άλλου.

Υπάρχει μια τριπλή απειρία τριάδων, συζυγών ανά δύο διαμέτρων της (S). Σε αυτές ανήκει μία μόνο τριάδα αποτελούμενη από τρεις διαμέτρους, οι οποίες ανά δυο είναι κάθετες μεταξύ τους. Οι διάμετροι αυτές, είναι οι **άξονες** της επιφάνειας (S). Τα διαμετρικά επίπεδα της (S), τα κάθετα στους άξονες αυτούς, ονομάζονται πρωτεύοντα επίπεδα της επιφάνειας (S).

8. Οι τομές μιας επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού από παράλληλα επίπεδα είναι κωνικά ομοιόθετες. Όλες οι επιφάνειες (S) δευτέρου βαθμού, εκτός του υπερβολικού παραβολοειδούς, δέχονται δυο διευθύνσεις πραγματικών κυκλικών επιπέδων, δηλαδή επίπεδων που τέμνουν την (S) σε κύκλους. Στις περιπτώσεις του ελλειψοειδούς και των υπερβολοειδών, τα δυο κεντρικά κυκλικά επίπεδα διέρχονται από τον έναν από τους άξονες της (S) και είναι συμμετρικά ως προς κάθε πρωτεύων επίπεδο, το οποίο περιέχει αυτόν τον άξονα. Όλες οι παραπάνω επιφάνειες (S) που δέχονται πραγματικές κυκλικές τομές, δύνανται να είναι επιφάνειες εκ περιστροφής.

Οι δυο διευθύνσεις των κυκλικών επιπέδων συμπίπτουν και είναι κάθετες στον άξονα περιστροφής.

9. Κάθε ευθεία γραμμή η οποία τέμνει την επιφάνεια (S) σε δυο σημεία, εκ των οποίων το ένα είναι επ' άπειρον (σημείο του επ' άπειρον επιπέδου του χώρου), ονομάζεται ασυμπτωτική διεύθυνση της επιφάνειας (S). Αν και τα δυο σημεία τομής είναι επ' άπειρον, τότε η ευθεία γραμμή είναι εφαπτομένη της επιφάνειας, ανήκει στο επ' άπειρον επίπεδο του χώρου και ονομάζεται ασύμπτωτη της (S). Ο γεωμετρικός τύπος των ασύμπτωτων της (S) οι οποίες διέρχονται από το κέντρο της και ονομάζονται διαμετρικές ασύμπτωτες, είναι ο κώνος δευτέρου βαθμού, ο οποίος έχει ως οδηγό την επ' άπειρον κωνική της επιφάνειας (S) και ονομάζεται **ασύμπτωτος κώνος** της επιφάνειας. Κάθε επίπεδο εφαπτόμενο στην επιφάνεια, σε σημείο της επ' άπειρον κωνικής της, ονομάζεται ασυμπτωτικό της επίπεδο. Επειδή το επίπεδο αυτό είναι το πολικό επίπεδο του σημείου επαφής με την επιφάνεια, διέρχεται από το κέντρο της και κατά συνέπεια, είναι εφαπτόμενο του ασύμπτωτου κώνου της. Άρα:

Ο ασύμπτωτος κώνος μιας από τις παραπάνω επιφάνειες (S) δευτέρου βαθμού είναι επίσης η περιβάλλουσα των ασυμπτωματικών επιπέδων της επιφάνειας. Μπορώ να έχω το σύνολο των ασύμπτωτων ευθειών μίας επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού, θεωρώντας τις παράλληλες προς τη γενέτειρα επαφής του επιπέδου αυτού με τον ασύμπτωτο κώνο της (S), για κάθε ασυμπτωτικό επίπεδο. Κάθε ασυμπτωτικό επίπεδο της επιφάνειας, την τέμνει κατά δυο γενέτειρες, παράλληλες προς τη γενέτειρα επαφής του επιπέδου αυτού και του ασύμπτωτου του κώνου. Άρα, αυτός ο κώνος είναι ένας **διευθύνων κώνος** για τα δυο συστήματα γενετειρών. Οι συζυγείς διάμετροι και τα συζυγή διαμετρικά επίπεδα της επιφάνειας (S), συμπίπτουν προς τα επίπεδα του ασύμπτωτου κώνου της, άρα οι δυο επιφάνειες έχουν τους ίδιους άξονες.

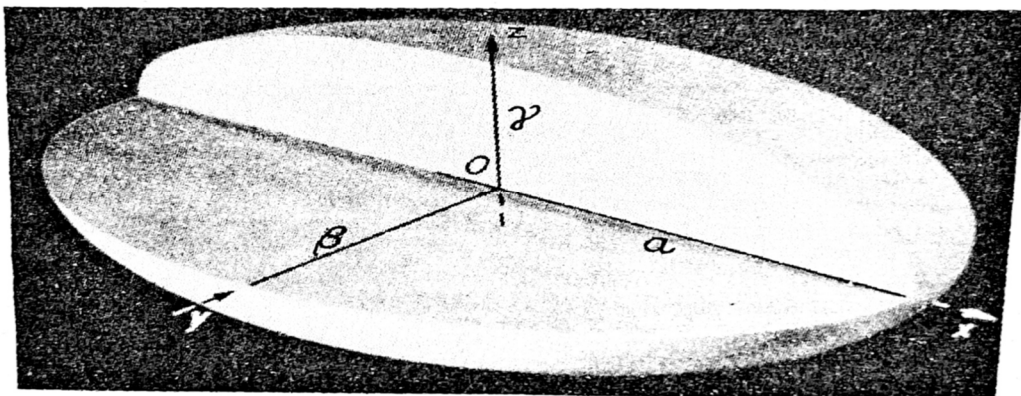
10. Οι τομές μιας επιφάνειας (S) δευτέρου βαθμού και του ασύμπτωτου κώνου της από το ίδιο επίπεδο, είναι δυο ομοιόθετες και ομόκεντρες κωνικές τομές. Αν αυτές οι κωνικές τομές είναι παραβολές, είναι ίσες και έχουν τον ίδιο άξονα. Η απόδειξη βασίζεται στην παρατήρηση κατά την οποία η (S) και ο ασύμπτωτος κώνος της εφάπτονται μεταξύ τους κατά τα σημεία μιας κωνικής τομής του επ' άπειρον επιπέδου του χώρου. Οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού των οποίων το κέντρο είναι μη επ' άπειρον σημείο του χώρου και μόνο αυτές, έχουν ασύμπτωτο

κώνο. Ο κώνος αυτός είναι πραγματικός μόνον στα υπερβολοειδή. Σε ένα παραβολοειδές, ο ασύμπτωτος κώνος εκφυλίζεται σε δυο επίπεδα, τα οποία ονομάζονται διευθύνοντα επίπεδα του κώνου. Τα επίπεδα αυτά είναι πραγματικά, μόνο στο υπερβολικό παραβολοειδές. Το ελλειπτικό παραβολοειδές έχει μόνο μια πραγματική διπλή ασυμπτωτική διεύθυνση, τη διεύθυνση του άξονα.

Κάθε ασυμπτωτικό επίπεδο του υπερβολικού παραβολοειδούς είναι παράλληλο προς το ένα από τα διευθύνοντα επίπεδα του και τέμνει την επιφάνεια κατά δυο γενέτειρες, εκ των οποίων η μία είναι ευθεία του επ' άπειρον επιπέδου του χώρου. Θεωρώντας τις παράλληλες γραμμές σε κάθε ασυμπτωτικό επίπεδο, προς τη μη επ' άπειρον γενέτειρα του επιπέδου αυτού, έχω το σύνολο των ασύμπτωτων του παραβολοειδούς. **Σε κάθε επιφάνεια δευτέρου βαθμού, το διαμετρικό επίπεδο, το συζυγές μιας ασυμπτωτικής διεύθυνσης είναι το ασυμπτωματικό επίπεδο της που ανήκει στη διεύθυνση αυτή.** Πράγματι, το επίπεδο αυτό είναι το πολικό επίπεδο του επ' άπειρον σημείου του χώρου που αντιστοιχεί στη θεωρούμενη διεύθυνση και επομένως εφάπτεται με την επιφάνεια του κατά επ' άπειρο σημείου της.

2.1 Ελλειψοειδές

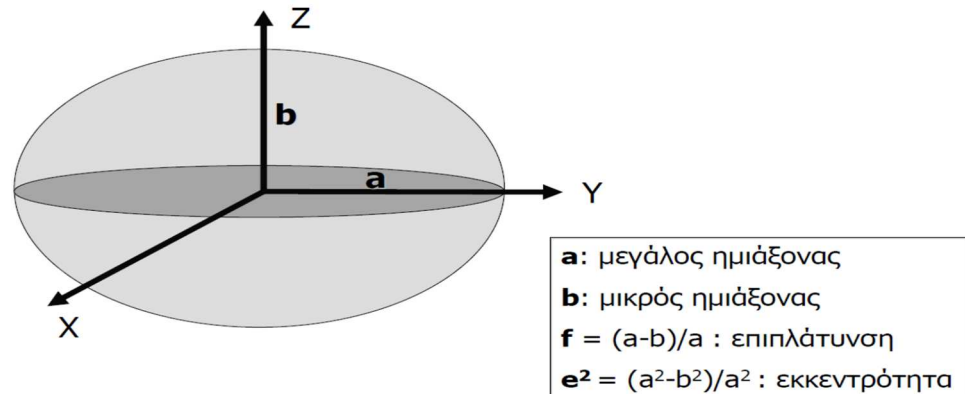
Είναι η επιφάνεια δευτέρου βαθμού, η οποία στο σύστημα των ορθογωνίων συντεταγμένων ορίζεται από τις εξισώσεις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$. Οι σταθερές a, β, γ είναι τα μήκη των ημιαξόνων του ελλειψοειδούς. Το ελλειψοειδές έχει τρεις άξονες συμμετρίας, τους άξονες των συντεταγμένων και κέντρο συμμετρίας το κοινό τους σημείο O . Οι τομές του ελλειψοειδούς υπό των συντεταγμένων επιπέδων, δηλαδή των επιπέδων με εξισώσεις $z = 0, x = 0, y = 0$ είναι ελλείψεις που έχουν αντιστοίχως τις παρακάτω εξισώσεις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$.



Γράφημα 9: Ελλειψοειδές

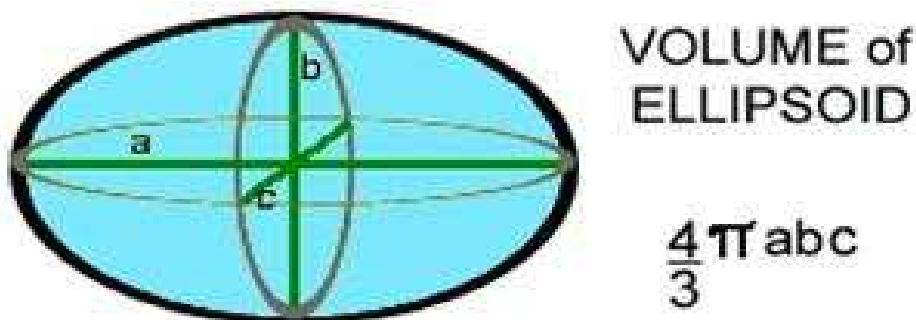
Ελλείψεις είναι επίσης και οι τομές του ελλειψοειδούς από τα επίπεδα $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, όπου $-a < x_0 < a, -\beta < y_0 < \beta, -\gamma < z_0 < \gamma$. Η επιφάνεια αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από κινούμενη έλλειψη, ώστε να συναντά πάντα δυο άλλες σταθερές ελλείψεις, π.χ. τις κείμενες επί των επιπέδων xz και yz .

- Αν $\alpha = \beta$ τότε έχω ένα **πεπλατυσμένο** ελλειψοειδές εκ περιστροφής, το οποίο προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα zz' της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xOz .

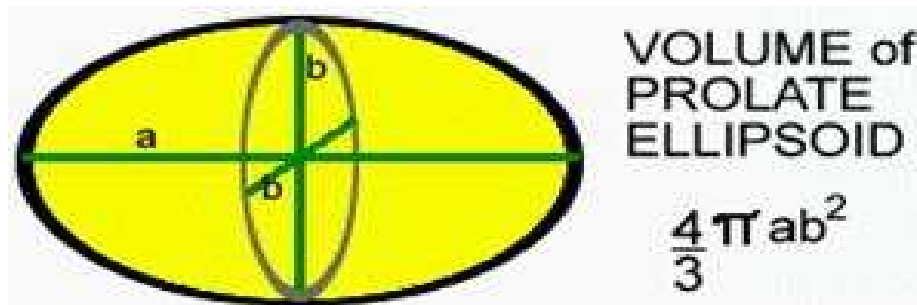


Γράφημα 10: Αν $\alpha = \beta$ τότε είναι πεπλατυσμένο ελλειψοειδές

- Αν $\beta = \gamma$ τότε έχω ένα **επίμηκες** ελλειψοειδές εκ περιστροφής, το οποίο προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xOz .



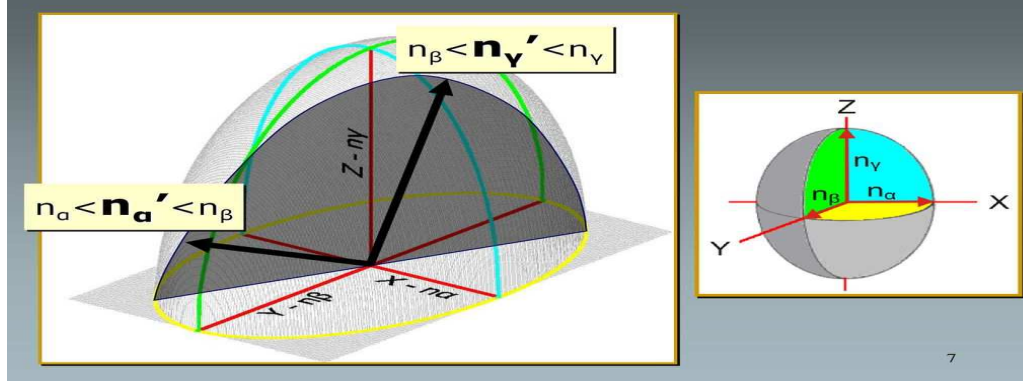
Γράφημα 11: Όγκος του ελλειψοειδούς 1



Γράφημα 12: Όγκος του ελλειψοειδούς 2

- Αν $\alpha = \beta = \gamma$, τότε το ελλειψοειδές είναι μια σφαίρα ακτίνας α .
- Αν τα α, β, γ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, θεωρούμενα ανά δυο, τότε το ελλειψοειδές ονομάζεται **τριαξονικό ελλειψοειδές**.

Τριαξονικό ελλειψοειδές



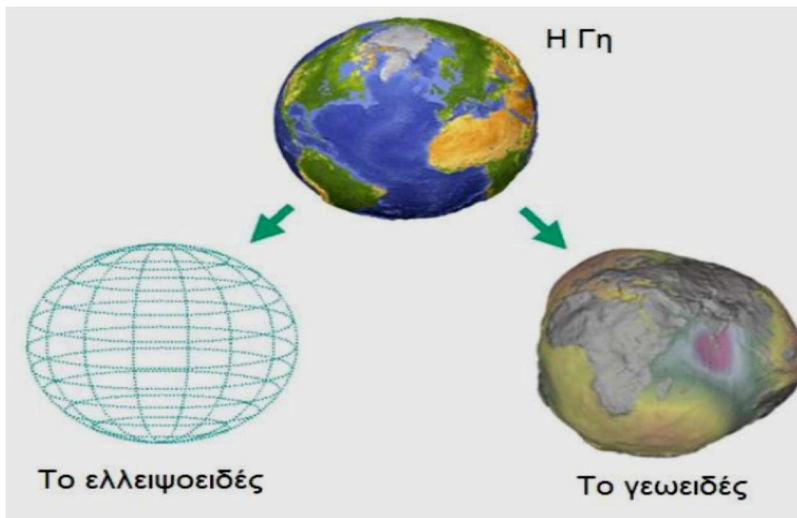
Γράφημα 13: Τριαξονικό ελλειψοειδές

Το ελλειψοειδές, είναι μια συνεχής επιφάνεια η οποία δεν έχει επ' άπειρον σημεία (που να ανήκουν στο επ' άπειρον επίπεδο του χώρου). Η επιφάνεια αυτή, είναι συμμετρική ως προς τα τρία επίπεδα των συντεταγμένων xOy , yOz , zOx . Κάθε επίπεδη τομή της επιφάνειας είναι μια έλλειψη. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που περιέχει την αρχή του συστήματος των ορθογωνίων αξόνων στο οποίο αναφέρεται η παραπάνω εξίσωση και έχει τα άκρα του πάνω στο ελλειψοειδές (χορδή του ελλειψοειδούς), διχοτομείται από την αρχή O του συστήματος αναφοράς. Για αυτό το λόγο, η αρχή του συστήματος αναφοράς ονομάζεται **κέντρο του ελλειψοειδούς**.

Τα πρωτεύοντα επίπεδα, ορίζουν στο ελλειψοειδές τις τρεις πρωτεύουσες ελλείψεις. Κάθε άξονας της επιφάνειας, ανήκει σε δυο από αυτές τις ελλείψεις. Το ελλειψοειδές δέχεται δυο σειρές πραγματικών κυκλικών τομών, δηλαδή υπάρχουν (όπως αποδεικνύεται) επίπεδα δυο διαφορετικών διευθύνσεων που το τέμνουν κατά κύκλους. Τα άκρα των δυο διαμέτρων που βρίσκονται πάνω στο ελλειψοειδές, στα οποία αντιστοιχούν οι δυο σειρές των κυκλικών του τομών, ονομάζονται σφαιρικά (ομφαλικά) σημεία του ελλειψοειδούς. Άρα, υπάρχουν τέσσερα σφαιρικά σημεία στο ελλειψοειδές. Τα επίπεδα των κυκλικών τομών, είναι παράλληλα προς τα εφαπτόμενα επίπεδα του ελλειψοειδούς, κατά τα άκρα των ανωτέρων διαμέτρων. Κάθε ελλειψοειδές δύναται, βάσει μιας ομοιοπαράλληλης (affine) απεικόνισης, να μετασχηματιστεί σε ελλειψοειδές εκ περιστροφής και αντιστρόφως, ή και σε σφαίρα.

2.2 Ελλειψοειδές και Γη

Η μορφή της Γης, είναι πιο πολύπλοκη από τη σφαίρα και τείνει στη μορφή ενός ελλειψοειδούς από περιστροφή, με μεγάλο ημιάξονα $a \cong 6.380 \text{ km}$ και μικρό ημιάξονα $b \cong 6.360 \text{ km}$. Το ελλειψοειδές, είναι λίγο πεπλατυσμένο στους πόλους, αφού η διαφορά μήκους των δύο ημιαξόνων είναι περίπου 20 km . Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής, είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που προσομοιάζει το σχήμα της Γης, εκφράζεται από απλές σχέσεις που επιτρέπουν τους ευχερείς μαθηματικούς υπολογισμούς, χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου πάνω στην επιφάνεια της Γης και έχει την ιδιότητα να προσαρμόζεται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο κάθε φορά, σε όποια περιοχή της Γης λαμβάνει χώρα ο προσδιορισμός των γεωγραφικών θέσεων (γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος).



Γράφημα 14: Ελλειψοειδές και Γη

2.3 Ελλειπτικό παραβολοειδές

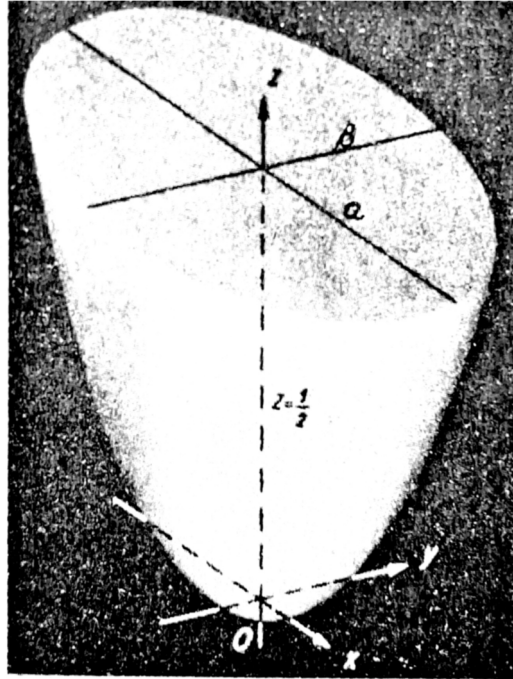
Είναι η επιφάνεια δευτέρου βαθμού η οποία, σε σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων $Oxyz$, ορίζεται από τις εξισώσεις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 2z = 0$. Ο άξονας zz' του συστήματος αναφοράς, συμπίπτει με το χαρακτηριστικό άξονα της επιφάνειας, ο οποίος είναι ένας από τους κύριους της άξονες. Τα α, β της εξίσωσης της επιφάνειας είναι τα μήκη των ημιαξόνων της έλλειψης κατά την οποία τέμνεται η επιφάνεια από το επίπεδο το παράλληλο προς το επίπεδο xy (επίπεδο xOy του συστήματος αναφοράς) που απέχει απόσταση $z = \frac{1}{2}$. Το a^2 είναι η ημιπαράμετρος της παραβολής, κατά την οποία τέμνεται το ελλειπτικό παραβολοειδές από το επίπεδο xz και το β^2 είναι η ημιπαράμετρος της παραβολής κατά την οποία τέμνεται το ελλειπτικό παραβολοειδές από το επίπεδο yz . Αν $\alpha = \beta$, τότε το ελλειπτικό παραβολοειδές είναι παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Οι άξονες Ox, Oy του συστήματος αναφοράς, είναι παράλληλοι προς τους φορείς των ημιαξόνων α, β της έλλειψης κατά την οποία τέμνεται η επιφάνεια από το επίπεδο $z = \frac{1}{2}$. Η επιφάνεια, της οποίας η εξίσωση ως προς το θεωρηθέν σύστημα $Oxyz$ είναι η παραπάνω, δεν έχει σημεία στον ημιχώρο, ως προς το επίπεδο xOy στο οποίο ανήκει ο θετικός ημιάξονας Oz . Η επιφάνεια αυτή (ελλειπτικό παραβολοειδές) θεωρείται εφαπτομένη του επ' άπειρον επιπέδου του χώρου.

Ο άξονας Oz είναι ο μόνος μη επ' άπειρον άξονας αυτής της επιφάνειας, ο οποίος ανήκει στη μοναδική (πραγματική) ασυμπτωτική διεύθυνση της επιφάνειας.

Το ελλειπτικό παραβολοειδές, κείται συμμετρικά ως προς τα επίπεδα xOz και yOz . Το επίπεδο xOy είναι εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο O (αρχή του συστήματος αναφοράς), το οποίο της ανήκει διότι οι συντεταγμένες του $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της επιφάνειας. Κάθε τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς από επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα Oz , είναι μια παραβολή. Κάθε τομή από επίπεδο μη παράλληλο προς τον άξονα είναι μια έλλειψη.

Οι τομές του παραβολοειδούς από τον άξονα Oz με τα επίπεδα που περιέχουν τους ημιάξονες α, β είναι οι πρωτεύουσες τομές του παραβολοειδούς, που αντιστοιχούν στο σημείο O .



Γράφημα 15: Ελλειπτικό παραβολοειδές

Οι τομές του ελλειπτικού παραβολοειδούς, με επίπεδα παράλληλα προς το επίπεδο μιας πρωτεύουσας τομής, είναι παραβολές ίσες προς την αντίστοιχη πρωτεύουσα παραβολή. Οι κορυφές αυτών των παραβολών, είναι σημεία της άλλης πρωτεύουσας παραβολής. Από αυτή την παρατήρηση, προκύπτει ότι το ελλειπτικό παραβολοειδές μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από μια παραβολή, της οποίας το επίπεδο ανήκει σε δοθείσα διεύθυνση και η κορυφή είναι το σημείο μιας άλλης παραβολής. Δηλαδή, μπορεί το ελλειπτικό παραβολοειδές να θεωρηθεί σαν το σύνολο των παραβολών κάθε μία από τις οποίες είναι ομόλογη μιας αρχικής παραβολής (πρωτεύουσας) κατά παράλληλη μεταφορά γνωστής διεύθυνσης, κάθετης στο επίπεδο της θεωρούμενης πρωτεύουσας τομής.

Κάθε τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς από επίπεδο κάθετο στον άξονα zz' , είναι έλλειψη όμοια προς την τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς από το επίπεδο $z = \frac{1}{2}$, δηλαδή οι τομές του ελλειπτικού παραβολοειδούς με επίπεδα κάθετα στον άξονα Oz είναι ελλείψεις, όμοιες μεταξύ τους. Ο άξονας zz' του ελλειπτικού παραβολοειδούς ονομάζεται απλός άξονας του ελλειπτικού παραβολοειδούς και το αρχικό σημείο O του ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς ονομάζεται κορυφή του ελλειπτικού παραβολοειδούς στη δοθείσα εξίσωση του ελλειπτικού παραβολοειδούς. Το επ' άπειρον επίπεδο του χώρου, είναι εφαπτόμενο επίπεδο του ελλειπτικού παραβολοειδούς, άρα το τέμνει αυτό κατά δύο φανταστικές ευθείες. Η δεικτρία του ελλειπτικού παραβολοειδούς, είναι κωνική τομή όμοια προς την τομή του από το εφαπτόμενο επίπεδο, κατά το θεωρούμενο σημείο της.

Η επιφάνεια αυτή είναι κυρτή σε όλα τα σημεία της, άρα κείται προς το ίδιο μέρος με το εφαπτόμενο επίπεδο της σε τυχαίο σημείο αυτής και δεν είναι ευθιγογενής, υπό την έννοια ότι δεν έχει πραγματικές γενέτειρες ευθείες γραμμές σε κανένα σημείο της. Έχω ονομάσει κέντρο μιας επιφάνειας δευτέρου βαθμού, τον πόλο του επ' άπειρον επιπέδου του χώρου ως προς αυτήν. Το ελλειπτικό παραβολοειδές, ως εφαπτόμενο στο επ' άπειρο επίπεδο του χώρου, έχει για κέντρο το

σημείο επαφής του με το εν λόγω επίπεδο, δηλαδή το κέντρο του ελλειπτικού παραβολοειδούς, είναι σημείο του επ' άπειρο επιπέδου (σημείο του άξονα Oz του ελλειπτικού παραβολοειδούς). Τα κέντρα των τόμων του ελλειπτικού παραβολοειδούς, με επίπεδα παράλληλα (κέντρα των παράλληλων ελλειπτικών τόμων του), κείνται επ' ευθείας, η οποία ονομάζεται διάμετρος του ελλειπτικού παραβολοειδούς και αντιστοιχεί στη διεύθυνση των θεωρούμενων επιπέδων. Οι διάμετροι του ελλειπτικού παραβολοειδούς, είναι παράλληλες προς τον άξονα του και το τέμνουν σε ένα μόνο σημείο. Κάθε άλλη ευθεία γραμμή μη παράλληλη προς τον άξονα, τέμνει το ελλειπτικό παραβολοειδές σε δυο σημεία, τα οποία ορίζουν επί της θεωρούμενης ευθείας γραμμής, μία χορδή του παραβολοειδούς. Τα μέσα των χορδών του ελλειπτικού παραβολοειδούς μιας τυχαίας διεύθυνσης (δ) κείνται επί επιπέδου, το οποίο ονομάζετε διαμετρικό επίπεδο του παραβολοειδούς που αντιστοιχεί στη διεύθυνση (δ). Όλα τα διαμετρικά επίπεδα του παραβολοειδούς, είναι παράλληλα προς τον άξονα του.

Το ελλειπτικό παραβολοειδές δέχεται, όπως άλλωστε όλες οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού (εκτός του υπερβολικού παραβολοειδούς), δυο σειρές πραγματικών κυκλικών τομών, δηλαδή υπάρχουν δυο επίπεδα διαφορετικών διευθύνσεων που το τέμνουν σε κύκλους. Τα δυο κυκλικά επίπεδα, διέρχονται από έναν από τους άξονες του παραβολοειδούς και είναι συμμετρικά προς κάθε πρωτεύον επίπεδο που περιέχει τον άξονα. Αποδεικνύεται ότι, αν το τέμνον επίπεδο:

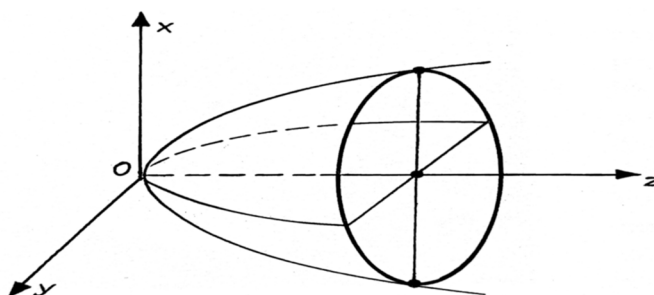
- είναι κάθετο στο επίπεδο της πρωτεύουσας τομής που έχει τη μικρότερη παράμετρο

- σχηματίζει με το επίπεδο της άλλης πρωτεύουσας τομής γωνία φ , όπου

$$\varepsilon\varphi\varphi = \sqrt{\frac{p}{q}} \text{ με } p, q \text{ να είναι οι μικρότερες, μεγαλύτερες αντίστοιχα παράμετροι της}$$

εξίσωσης του ελλειπτικού παραβολοειδούς, τότε η τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς με το επίπεδο είναι κύκλος.

Τα άκρα των δύο διαμέτρων, επί του ελλειπτικού παραβολοειδούς, στα οποία αντιστοιχούν οι δυο σειρές των κυκλικών του τομών, ονομάζονται σφαιρικά (ομφαλικά) σημεία του παραβολοειδούς. Έτσι, το ελλειπτικό παραβολοειδές έχει δύο σφαιρικά σημεία που ανήκουν στην πρωτεύουσα τομή του η οποία έχει τη μικρότερη παράμετρο.



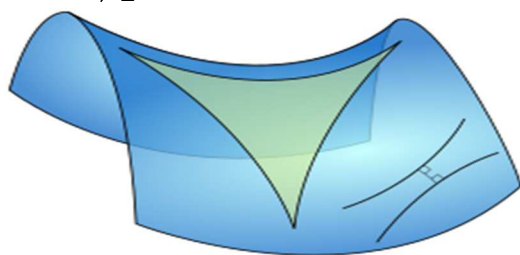
Γράφημα 16: Παραβολοειδές εκ περιστροφής

Το παραβολοειδές εκ περιστροφής, μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται υπό μια παραβολή που εκτελεί πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα της. Οι τομές του παραβολοειδούς εκ περιστροφής, από επίπεδα κάθετα στον άξονα του, είναι κύκλοι, με κέντρα πάνω στον άξονα αυτόν. Οι δυο διευθύνσεις των κυκλικών τομών, ταυτίζονται προς τη διεύθυνση του επιπέδου του καθέτου στον άξονα περιστροφής. Το σημείο O (άκρο) του άξονα του παραβολοειδούς εκ περιστροφής, είναι σφαιρικό του σημείο και οι κάθετες τομές του παραβολοειδούς εκ περιστροφής δια του άξονα

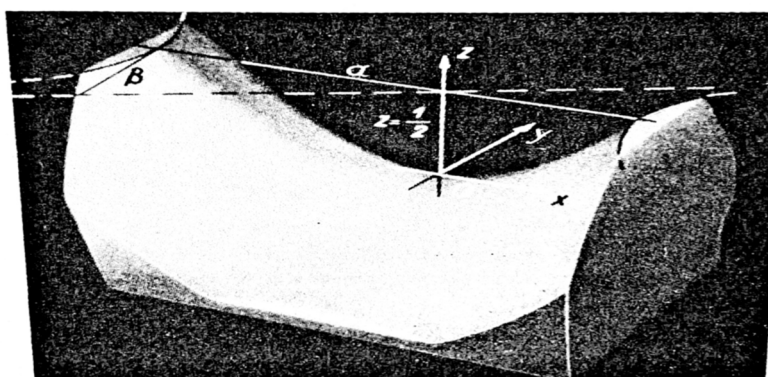
αυτού, έχουν την καμπυλότητα του O . Όπως και στην περίπτωση του ελλειψοειδούς, αποδεικνύεται ότι υπάρχει ομοιοπαράλληλική (affine) απεικόνιση του χώρου, κατά την οποία το ελλειπτικό παραβολοειδές μετασχηματίζεται σε εκ περιστροφής ελλειπτικό παραβολοειδές και αντιστρόφως.

2.4 Υπερβολικό παραβολοειδές

Είναι η επιφάνεια δευτέρου βαθμού, η οποία σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων ορίζεται υπό της εξίσωσης $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 2z = 0$. Ο άξονας zz' του συστήματος αναφοράς συμπίπτει με τον έναν από τους πρωτεύοντες άξονες της επιφάνειας, ο οποίος ονομάζεται **χαρακτηριστικός άξονας**. Τα a, β της εξίσωσης της επιφάνειας, είναι τα μήκη των πρωτευόντων ημιάξονων της υπερβολής, κατά την οποία τέμνεται η επιφάνεια από το επίπεδο το παράλληλου προς το επίπεδο xy , σε απόσταση $z = \frac{1}{2}$ από αυτό.



Γράφημα 17: Η μαθηματικά σέλα



Γράφημα 18: Υπερβολικό παραβολοειδές

Το a^2 είναι η παράμετρος της παραβολής κατά την οποία τέμνεται η επιφάνεια από το επίπεδο xz . Τα επίπεδα xz , yz είναι επίπεδα συμμετρίας για το παραβολοειδές. Κάθε τομή του παραβολοειδούς με επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα zz' είναι μια παραβολή. Κάθε τομή του παραβολοειδούς με επίπεδο κάθετο προς τον άξονα zz' που δε διέρχεται από την αρχή O (αρχικό σημείο του συστήματος αναφοράς), είναι μια υπερβολή, με κορυφές πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα:

- xx' , αν η τομή κείται προς το μέρος του επιπέδου xOy προς το οποίο κείται ο ημιάξονας Oz , ή
- yy' αν η τομή κείται προς το άλλο μέρος του επιπέδου xOy .

Ο άξονας zz' ονομάζεται και άξονας του παραβολοειδούς. Η αρχή O του συστήματος των συντεταγμένων, προς το οποίο αναφέρεται η εξίσωση του παραβολοειδούς, ονομάζεται κορυφή του παραβολοειδούς.

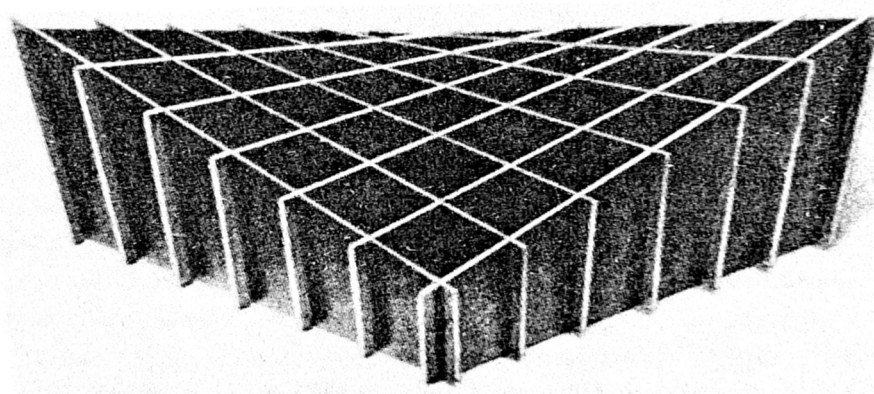
Η τομή του υπερβολικού παραβολοειδούς με το επίπεδο xOy , αποτελείται από το ζεύγος ευθειών $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0$, $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0$ οι οποίες ονομάζονται ευθείες

κορυφής ή πρωτεύουσες ευθείες ή γενέτειρες και διέρχονται από την κορυφή O . Το υπερβολικό παραβολοειδές, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο ευθειών ή ότι παράγεται από μία ευθεία γραμμή μεταβαλλόμενης θέσης υπό ορισμένες συνθήκες. Η εξίσωση του παραβολοειδούς αυτού, μπορεί να έχει τη μορφή

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) = 2z \text{ και αν θέσω } u = \frac{z}{\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)} \text{ και } v = \frac{2}{\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)}, \text{ έχω τα δύο}$$

$$\text{ζεύγη εξισώσεων } \begin{cases} 2u = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \\ vz = \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \end{cases} \text{ και } \begin{cases} \frac{z}{u} = \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \\ \frac{2}{v} = \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \end{cases}. \text{ Κάθε μία από τις παραπάνω}$$

εξισώσεις, παριστάνει μία οικογένεια επιπέδων και κάθε ζεύγος εξισώσεων, ορίζει μία οικογένεια ευθειών. Οι οικογένειες αυτές των ευθειών, κείνται επί του παραβολοειδούς και ονομάζονται **γενέτειρες** αυτού.



Γράφημα 19: Το υπερβολικό παραβολοειδές και τα δύο συστήματα γενετειρών του

Οι τομές αυτού του παραβολοειδούς από τα επίπεδα yOz και xOz , είναι δύο παραβολές (πρωτεύουσες παραβολές του υπερβολικού παραβολοειδούς). Ο κοινός άξονας των δύο αυτών πρωτευουσών παραβολών, είναι ο άξονας του παραβολοειδούς (άξονας zz' του συστήματος αναφοράς). Οι τομές με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των πρωτευουσών παραβολών, είναι παραβολές ίσες αντιστοίχως προς τις πρωτεύουσες παραβολές. Άρα, το υπερβολικό παραβολοειδές μπορεί να θεωρηθεί παραγόμενο από μια παραβολή (μια εκ των πρωτευουσών παραβολών αυτού) μετατοπιζόμενη, ώστε να διατηρείται η διεύθυνση του επιπέδου της, ενώ η κορυφή της μετατοπίζεται πάνω σε μια άλλη παραβολή (της δεύτερης πρωτεύουσας παραβολής). παραβολοειδούς). Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

- Η επιφάνεια του υπερβολικού παραβολοειδούς, δέχεται δύο συστήματα ευθειών γενετειρών.

- Από κάθε σημείο της επιφανείας του υπερβολικού παραβολοειδούς, διέρχονται δύο γενέτειρες, οι οποίες ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφανείας, στο σημείο αυτό.

- Οι γενέτειρες ευθείες γραμμές των δύο συστημάτων, είναι αντιστοίχως παράλληλες προς δύο επίπεδα οριζόμενα από τον άξονα της επιφάνειας του υπερβολικού παραβολοειδούς και από τις πρωτεύουσες γενέτειρες, αντιστοίχως.

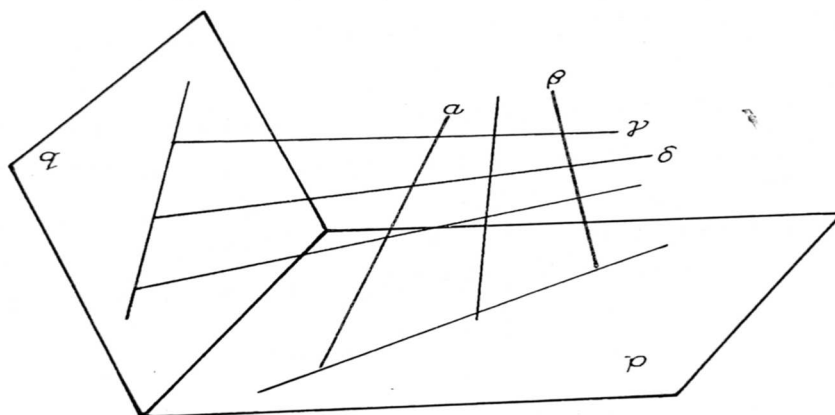
- Τα επίπεδα αυτά είναι συμμετρικά μεταξύ τους, ως προς τα πρωτεύοντα επίπεδα της επιφανείας.

Τα δύο παραπάνω επίπεδα, ονομάζονται **διευθύνοντα επίπεδα** του παραβολοειδούς και ορίζουν, επί των καθέτων επιπέδων προς τον άξονα zz' , τις ασύμπτωτες των αντιστοίχων κωνικών τομών (υπερβολών). Αν τα διευθύνοντα επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε το παραβολοειδές ονομάζεται **ισόπλευρο**. Στην περίπτωση αυτή, οι πρωτεύουσες παραβολές είναι ίσες, και αντιστρόφως. Στο ισόπλευρο παραβολοειδές, τα διευθύνοντα επίπεδα είναι αυτά που διχοτομούν τις διέδρες γωνίες, οι οποίες ορίζονται από τα πρωτεύοντα επίπεδα. Οι δύο πρωτεύουσες γενέτειρες του παραβολοειδούς είναι κάθετες μεταξύ τους. Το ομόλογο αυτού του παραβολοειδούς κατά την ημιστροφή, με άξονα μία από τις πρωτεύουσες γενέτειρες του παραβολοειδούς, ταυτίζεται με το παραβολοειδές και κάθε πρωτεύουσα παραβολή παίρνει τη θέση της άλλης.

Το ισόπλευρο παραβολοειδές δέχεται τρεις άξονες συμμετρίας, οι οποίοι λαμβανόμενοι ανά δυο, είναι κάθετοι μεταξύ τους. Το υπερβολικό παραβολοειδές δύναται να ορισθεί:

α) Από τρεις δοθείσες ευθείες γραμμές παράλληλες προς το ίδιο επίπεδο (σαν το σύνολο των ευθειών γραμμών-γενετειρών, κάθε μία από τις οποίες τέμνει τις παραπάνω τρεις δοθείσες ευθείες).

β) Από ένα εκ των διευθυνόντων επιπέδων p του και δύο ευθειών γραμμών α, β μη παράλληλων προς το επίπεδο p (σαν το σύνολο των ευθειών γραμμών-γενετειρών, κάθε μία εκ των οποίων τέμνει τις α, β και είναι παράλληλη προς το p). Για να έχω γενέτειρες του άλλου συστήματος, κατασκευάζω το δεύτερο διευθύνον επίπεδο, το οποίο είναι ένα επίπεδο q παράλληλο προς τις ευθείες γραμμές α, β . Στη συνέχεια, ορίζω δύο σταθερές, γενέτειρες γ, δ παράλληλες προς το επίπεδο p . Κατόπιν, συνδέω με ευθείες γραμμές τα ίχνη (τομές) πάνω στις ευθείες γραμμές γ, δ των παραλλήλων προς το επίπεδο q . Αυτός ο τρόπος γέννησης της επιφάνειας, είναι ισοδύναμος με τον πρώτο τρόπο.

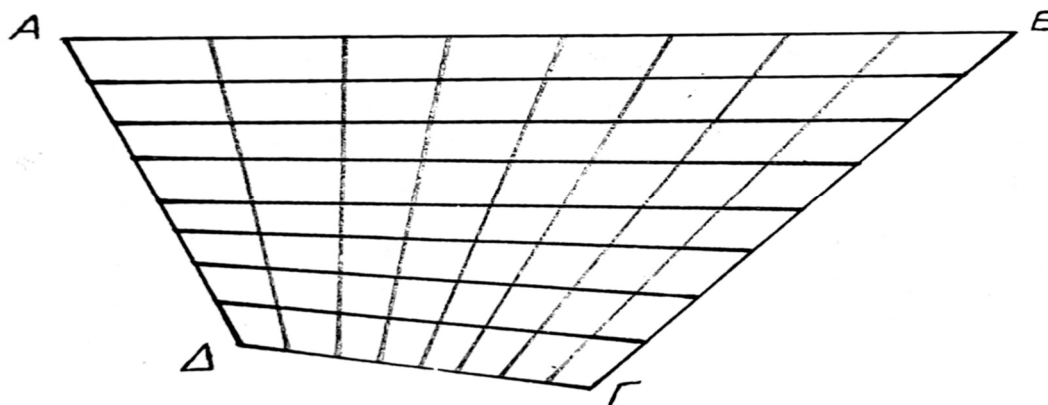


Γράφημα 20: Υπερβολικό παραβολοειδές οριζόμενο από ένα επίπεδο p και 2 ευθείες γραμμές

Πράγματι, οι παράλληλες προς το p γενέτειρες, τέμνουν την επ' άπειρον ευθεία του επιπέδου p . Επειδή η ευθεία αυτή έχει τυχαία (αυθαίρετη) διεύθυνση πάνω στο p , μπορώ να τη θεωρήσω παράλληλη προς την τομή του επιπέδου p με το επίπεδο

q. Τότε, η επιφάνεια είναι ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών οι οποίες «στηρίζονται» σε τρεις σταθερές ευθείες γραμμές, παράλληλες προς το επίπεδο q. Κάθε επίπεδο παράλληλο προς το διευθύνον επίπεδο p, τέμνει το παραβολοειδές κατά μία μη επ' άπειρον γενέτειρα και κατά μία επ' άπειρον γενέτειρα, η οποία πρέπει να θεωρηθεί ότι ανήκει στο σύστημα των γενετειών οι οποίες είναι παράλληλες προς το q. Το επίπεδο αυτό, εφάπτεται του παραβολοειδούς κατά το επ' άπειρον σημείο της πρώτης γενέτειρας και είναι το ασυμπτωτικό επίπεδο της επιφανείας που αντιστοιχεί στη γενέτειρα. Οι ευθείες γραμμές α , β μέσω των οποίων και του p ορίζεται το παραβολοειδές ονομάζονται και οδηγοί του παραβολοειδούς.

γ) Από ένα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το οποίο ορίζει ένα υπερβολικό παραβολοειδές. Πράγματι, θεωρώ ως οδηγούς δύο απέναντι πλευρές, π.χ. ΑΒ, ΓΔ του στρεβλού τετράπλευρου και ως διευθύνον επίπεδο, ένα επίπεδο p παράλληλο προς τις δύο άλλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ. Με τον τρόπο αυτό, ορίζω ένα υπερβολικό παραβολοειδές και παρατηρώ ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΓ ανήκουν στο σύστημα των γενετειών οι οποίες είναι παράλληλες προς το επίπεδο p και στηρίζονται στις ΑΒ, ΓΔ.



Γράφημα 21: Τμήμα επιφάνειας υπερβολικού παραβολοειδούς

Οι γενέτειρες του συστήματος αυτού, ορίζουν πάνω στις ΑΒ, ΓΔ όμοιες σειρές σημείων και επειδή η ιδιότητα αυτή διατηρείται κατά την κυλινδρική προβολή, παρέχεται απλή μέθοδος κατασκευής γενέτειρών: Χωρίζω τις πλευρές αυτές σε ίσα τμήματα, το ίδιου αυθαιρέτου, πλήθους και συνδέω αντίστοιχα τα σημεία διαίρεσης.

Η ευθεία που συνδέει τα μέσα I, K των διαγώνιων ΑΓ, ΒΔ του στρεβλού τετράπλευρου είναι η κοινή τους κάθετος, άρα είναι ο άξονας του παραβολοειδούς. Με ανάλογο τρόπο, ορίζω το δεύτερο σύστημα των γενετειών. Αυτός ο τρόπος ορισμού του παραβολοειδούς, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός τμήματος του με τη βοήθεια ευθύγραμμων κλωστών (νημάτων), δεμένων στις απέναντι πλευρές ενός στρεβλού τετράπλευρου το οποίο σχηματίζεται από τέσσερα ξύλινα ή μεταλλικά στελέχη. Από τον ορισμό αυτού του παραβολοειδούς και της μελέτης των σχετικών ιδιοτήτων και κατασκευών, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα.

- Μπορώ να ορίσω τις γενέτειρες ενός υπερβολικού παραβολοειδούς, οι οποίες είναι παράλληλες προς δοθέν επίπεδο του χώρου. Υπάρχει στο ένα από τα δύο διευθύνοντα επίπεδα, μια μόνο γενέτειρα δοθείσης διεύθυνσης. Η γενέτειρα αυτή, είναι επ' άπειρον ευθεία γραμμή (ευθεία του επ' άπειρου επιπέδου του χώρου), όταν η διεύθυνση της είναι ίδια με την τομή των δυο διευθυνόντων επιπέδων του παραβολοειδούς.

- Το υπερβολικό παραβολοειδές έχει δυο επ' άπειρο γενέτειρες επί των διευθυνόντων επιπέδων του, άρα κάθε επίπεδη τομή του έχει δυο επ' άπειρο σημεία επί των ευθειών δ_1, δ_2 κατά τις οποίες τα διευθύνοντα επίπεδα τέμνουν το επίπεδο της τομής. Τα σημεία αυτά, είναι πραγματικά, διαφορετικά μεταξύ τους εκτός αν το επίπεδο της τομής είναι παράλληλο προς τον άξονα της επιφάνειας. Άρα:

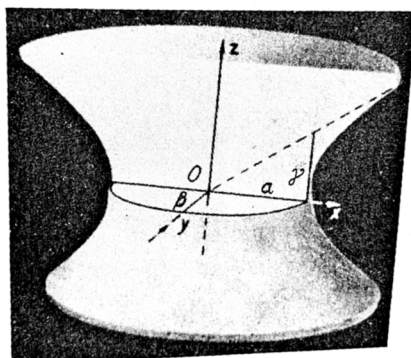
Κάθε επίπεδη τομή ενός υπερβολικού παραβολοειδούς είναι μια υπερβολή. Η τομή είναι παραβολή, αν το τέμνον επίπεδο είναι παράλληλο προς τον άξονα του. Η καμπύλη επαφής ενός υπερβολικού παραβολοειδούς και ενός περιγεγραμμένου περί αυτό κώνου, είναι πάντα μια υπερβολή. Η τομή του υπερβολικού παραβολοειδούς, με εφαπτόμενο επίπεδο κατά ένα σημείο του, είναι κωνική τομή που εκφυλίζεται σε δυο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ευθείες. Το επ' άπειρον επίπεδο του χώρου, είναι εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας του υπερβολικού παραβολοειδούς και την τέμνει κατά δυο πραγματικές ευθείες.

Το υπερβολικό παραβολοειδές, είναι η μόνη επιφάνεια δευτέρου βαθμού, η οποία ποτέ δεν είναι επιφάνεια εκ περιστροφής, ούτε μπορεί να μετατραπεί σε τέτοια με ομοπαράλληλο μετασχηματισμό, διότι καμία τομή του δεν είναι ελλειπτική. Κάθε επιφάνεια η οποία παράγεται από ευθείες γραμμές, μετατοπιζόμενη ώστε να πληρεί ορισμένες συνθήκες, ονομάζεται **ευθειογενής**. Από τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού, ευθειογενείς επιφάνειες είναι ο ελλειπτικός κύλινδρος, ο παραβολικός κύλινδρος, ο υπερβολικός κύλινδρος, ο διπλός κώνος, το υπερβολικό παραβολοειδές και το μονόχωνο υπερβολοειδές. Με τους κύλινδρους και κώνους από τις ευθειογενείς επιφάνειες, το εφαπτόμενο επίπεδο τους είναι σταθερό κατά τα σημεία μιας τυχαίας γενέτειρας, αυτό όμως δεν ισχύει για το υπερβολικό παραβολοειδές και το μονόχωνο υπερβολοειδές. Οι κύλινδροι και οι κώνοι, ονομάζονται αναπτυκτές επιφάνειες, διότι αναπτύσσονται επί του επιπέδου. Το υπερβολικό παραβολοειδές και το μονόχωνο υπερβολοειδές, είναι ευθειογενείς επιφάνειες με πραγματικές γενέτειρες ευθείες, μη αναπτυκτές.

2.5 Μονόχωνο υπερβολοειδές

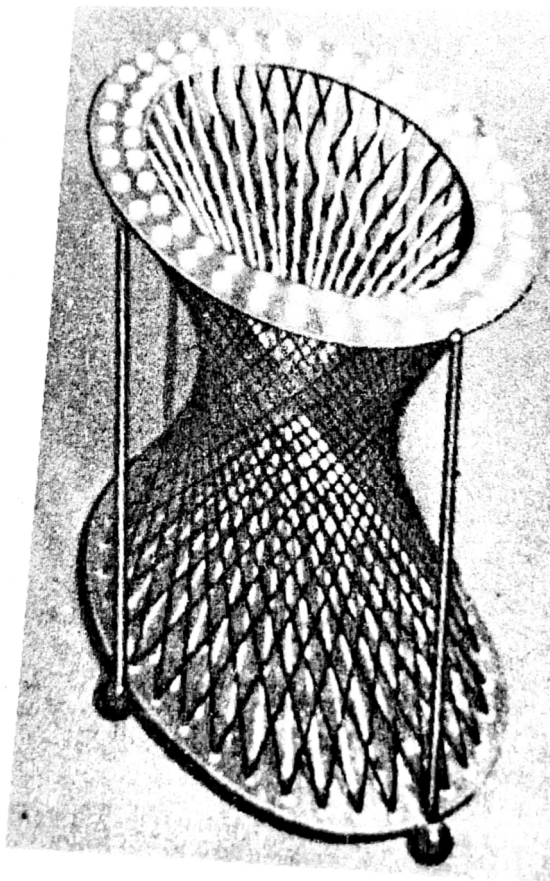
Από τους τρεις πρωτεύοντες άξονες του μονόχωνου υπερβολοειδούς, ο ένας που δεν έχει πραγματικά κοινά σημεία με την επιφάνεια του μονόχωνου υπερβολοειδούς, είναι ο χαρακτηριστικός. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, του οποίου ο άξονας zz' έχει τη διεύθυνση του χαρακτηριστικού άξονα της επιφάνειας, η εξίσωση της επιφάνειας έχει τη μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$$



Γράφημα 22: Μονόχωνο υπερβολοειδές

Τα α , β της παραπάνω εξίσωσης, είναι τα μήκη των πρωτευόντων ημιαξόνων της έλλειψης, κατά την οποία το μονόχωνο υπερβολοειδές τέμνεται από το επίπεδο xy . Τα α , β είναι συγχρόνως και τα μήκη των πρωτευόντων ημιαξόνων της υπερβολής, κατά την οποία τέμνεται το μονόχωνο υπερβολοειδές από το επίπεδο yz . Αν $\alpha = \beta$, τότε το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι ένα υπερβολοειδές εκ περιστροφής.



Γράφημα 23: Μονόχωνο υπερβολοειδές, με τα 2 συστήματα γενετριών και τον ασύμπτωτο κώνο

Το σχήμα που ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ είναι μια

συνεκτική επιφάνεια συμμετρική και ως προς τα τρία επίπεδα συντεταγμένων. Κάθε τομή του μονόχωνου υπερβολοειδούς, με επίπεδο παράλληλο στον άξονα zz' , είναι μία υπερβολή, ενώ κάθε τομή του μονόχωνου υπερβολοειδούς με επίπεδο κάθετο στον άξονα zz' είναι μία έλλειψη. Ο άξονας του συστήματος αναφοράς, ονομάζεται άξονας του μονόχωνου υπερβολοειδούς. Αυτό το υπερβολοειδές, είναι επιφάνεια με κέντρο την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων. Με ομοπαράλληλο (affine) μετασχηματισμό, κατά τις διευθύνσεις του άξονα xx' και του άξονα yy' , το παραπάνω υπερβολοειδές μπορεί να μετασχηματισθεί σε μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής. Εξάλλου, το μονόχωνο υπερβολοειδές μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από ευθείες γραμμές (ως σύνολο ευθειών, κάθε μία εκ των οποίων

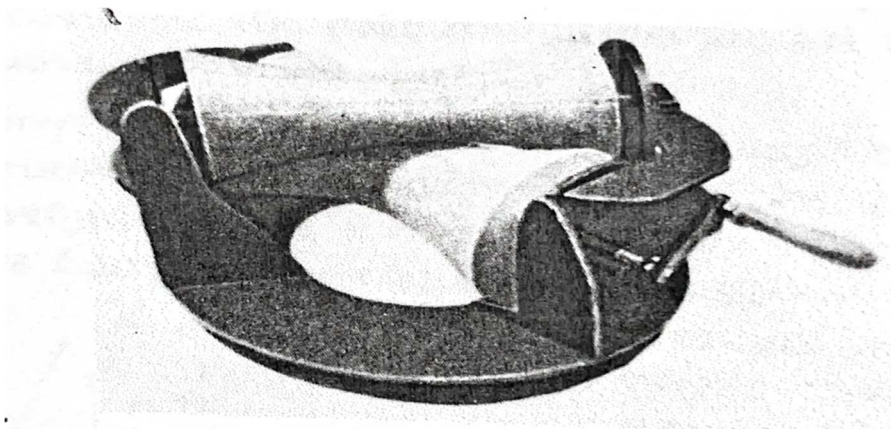
ικανοποιεί δοθείσες συνθήκες). Πράγματι, αν γράψω την εξίσωση του μονόχωνου υπερβολοειδούς στη μορφή $\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right) = \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)\left(1 - \frac{y}{\beta}\right)$ και θέσω

$$u = \frac{\left(1 - \frac{y}{\beta}\right)}{\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)} \text{ και } v = \frac{\left(1 + \frac{y}{\beta}\right)}{\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)} \text{ προκύπτει ότι}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} = u \left(1 + \frac{y}{\beta}\right) \\ \frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} = v \left(1 - \frac{y}{\beta}\right) \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} = \frac{\left(1 - \frac{y}{\beta}\right)}{u} \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} = \frac{\left(1 + \frac{y}{\beta}\right)}{v} \end{array} \right\}$$

Κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις, παριστάνει μία οικογένεια επιπέδων και κάθε ζεύγος εξισώσεων παριστάνει μία οικογένεια ευθειών, που κείτονται στην επιφάνεια. Οι ευθείες αυτές, είναι οι γενέτειρες του μονόχωνου υπερβολοειδούς. Άρα, το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι μία ευθαιογενής επιφάνεια. Η πρωτεύουσα τομή του μονόχωνου υπερβολοειδούς με το επίπεδο xy , είναι μία έλλειψη, η οποία ονομάζεται λαιμός της επιφάνειας. Μπορώ να θεωρήσω το παραπάνω υπερβολοειδές σαν την επιφάνεια η οποία παράγεται από μία έλλειψη, της οποίας το επίπεδο είναι παράλληλο προς το επίπεδο xOy και η επιφάνεια είναι μεταβαλλόμενη, ώστε να παραμένει όμοια προς το λαιμό και να στηρίζεται επί της πρωτεύουσας υπερβολής η οποία βρίσκεται στο επίπεδο xz . Ο ασύμπτωτος κώνος, είναι ο γεωμετρικός τόπος των ασύμπτωτων των υπερβολών, κατά τις οποίες τέμνεται η επιφάνεια από τα επίπεδα του χώρου που διέρχονται δια του άξονα zz' . Η εξίσωση του ασύμπτωτου κώνου είναι η $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$

Τα μονόχωνα υπερβολοειδή όπως και οι κώνοι, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση των στροφών ενός κύματος σε οποιοδήποτε άλλο κύμα (υπερβολικοί οδοντωτοί τροχοί, κωνικοί τροχοί).



Γράφημα 24: Υπόδειγμα μετάδοσης της στροφής με χρήση 2 μονόχωνων υπερβολοειδών

2.6 Υπερβολοειδές οριζόμενο από τρεις ευθείες

Στην αναλυτική γεωμετρία, αποδεικνύεται ότι:

- Κάθε ευθειογενής επιφάνεια δευτέρου βαθμού (με πραγματικές γενέτειρες), είναι ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών γραμμών, κάθε μία εκ των οποίων στηρίζεται (συναντά) επί τριών σταθερών γενετειρών του ίδιου συστήματος.

Αντιστρόφως:

- Η επιφάνεια η οποία παράγεται από μετατιθεμένη ευθεία γραμμή, ώστε να συναντά τρεις δοθείσες (σταθερές) ευθείες (οδηγούς), είναι μια επιφάνεια δευτέρου βαθμού. Ειδικότερα, είναι ένα:

- υπερβολοειδές, αν οι 3 οδηγοί δεν είναι παράλληλοι προς το αυτό επίπεδο,

- υπερβολικό παραβολοειδές, αν οι 3 οδηγοί είναι παράλληλοι προς το αυτό επίπεδο.

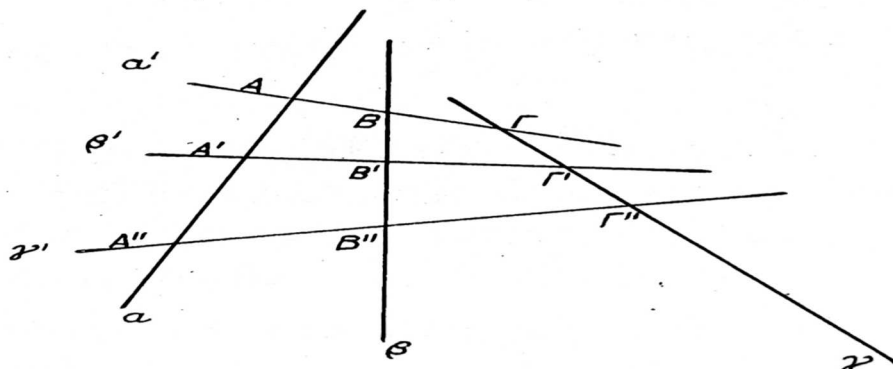
Ομοίως, αποδεικνύεται ότι:

- Κάθε ευθειογενής επιφάνεια δευτέρου βαθμού, είναι ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών γραμμών, οι οποίες χωρίζουν ομογραφικά δύο σταθερές γενέτειρες του ίδιου συστήματος.

Αντιστρόφως:

- Ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών γραμμών, κάθε μία εκ των οποίων συνδέει ομόλογα (αντίστοιχα) σημεία δύο ομογραφικών (προβολικών) σημειοσειρών, των οποίων οι φορείς είναι δύο τυχούσες ασύμβατες ευθείες, είναι μία ευθειογενής επιφάνεια δευτέρου βαθμού.

Αν οι ομογραφικές σημειοσειρές είναι όμοιες, τότε η οριζόμενη επιφάνεια είναι ένα υπερβολικό παραβολοειδές. Στη γενική περίπτωση ομογραφίας (προβολικής απεικόνισης της μιας σημειοσειράς στην άλλη), η οριζόμενη επιφάνεια είναι ένα μονόχωνο υπερβολοειδές. Κάθε ευθειογενής επιφάνεια δευτέρου βαθμού, είναι ο γεωμετρικός τόπος των τομών δύο μεταβλητών επιπέδων διερχομένων αντιστοίχως από δύο σταθερές γενέτειρες του αυτού συστήματος, που αντιστοιχούν ομογραφικά, δηλαδή αντιστοιχούν κατά μία οποιαδήποτε ομογραφία της δέσμης επιπέδων η οποία έχει ως φορέα τη μία γενέτειρα επί της δέσμης επιπέδων που έχει ως φορέα την άλλη. Αντιστρόφως, ο γεωμετρικός τόπος των τομών των ομόλογων (αντιστοιχών) επιπέδων δύο ομογραφικών αξονικών δεσμών, είναι μία επιφάνεια δευτέρου βαθμού. Αν είναι α , β , γ οι τρεις ευθείες οι οποίες ορίζουν ένα υπερβολοειδές, οι γενέτειρες του άλλου συστήματος, στο οποίο δεν ανήκουν οι α , β , γ , είναι οι ευθείες κάθε μία εκ των οποίων συναντά τις α , β , γ . Για την κατασκευή τους, λαμβάνεται ένα τυχαίο σημείο A της α και κατασκευάζεται η διά αυτού του σημείου ευθεία α' , η οποία συναντά τις β και γ .



Γράφημα 25: Υπερβολοειδές οριζόμενο από 3 γενέτειρες

Η α' είναι η τομή των δύο επιπέδων, τα οποία ορίζονται από το σημείο Α και από τις ευθείες β, γ αντιστοίχως. Κάθε σημείο Μ της γενέτειρας α' , είναι σημείο της επιφάνειας. Για να κατασκευάσω το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας κατά το σημείο της Μ, αναζητώ τη δεύτερη γενέτειρα, η οποία διέρχεται από αυτό και είναι η ευθεία γραμμή που άγεται από το σημείο Μ και τέμνει δύο νέες γενέτειρες οι οποίες κατασκευάστηκαν όπως η α' . Οι δύο γενέτειρες, οι διερχόμενες από το σημείο Μ, ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας κατά το σημείο Μ. Αντιστρόφως, έστω p ένα επίπεδο διερχόμενο από μια τυχαία γενέτειρα δ της επιφάνειας.

Αυτό το επίπεδο, που τέμνει την επιφάνεια στην ευθεία δ , την τέμνει και κατά μία δεύτερη ευθεία, η οποία ορίζεται από τα κοινά σημεία του επιπέδου p , με δύο γενέτειρες του συστήματος στο οποίο ανήκει η δ . Οι επί του επιπέδου p δύο γενέτειρες της επιφάνειας τέμνονται σε σημείο, το οποίο είναι το σημείο επαφής αυτού του επιπέδου με την επιφάνεια. Η εύρεση των κοινών σημείων μιας ευθείας δ και ενός υπερβολοειδούς οριζόμενου από τρεις γενέτειρες α, β, γ , ανάγεται στην εύρεση των γενετειρών της επιφάνειας, οι οποίες συναντούν τη δ , δηλαδή ανάγεται στην εύρεση μιας ευθείας στηριζόμενης σε τέσσερις δοθείσες ευθείες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, που θεωρούμενες ανά δύο, είναι ασύμβατες. Αυτό το πρόβλημα, όπως και το πρόβλημα της κατασκευής των εφαπτόμενων επιπέδων του υπερβολοειδούς που άγονται από δεδομένη ευθεία του χώρου ή των εφαπτομένων επιπέδων του υπερβολοειδούς, των παραλλήλων προς δοθέν επίπεδο του χώρου και άλλα προβλήματα επί των ευθυιογενών επιφανειών του δευτέρου βαθμού, μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια των μεθόδων της παραστατικής γεωμετρίας και της έννοιας της ομογραφικής απεικόνισης (προβολικότητας) επί σχηματισμών πρώτης βαθμίδας (σημειοσειρών, επίπεδων δεσμών ευθειών και αξονικών δεσμών επιπέδων). Για την κατασκευή της τομής ενός υπερβολοειδούς με δοθέν επίπεδο του χώρου, ζητώ τα κοινά σημεία αυτού του επιπέδου, με τις γενέτειρες της επιφάνειας. Η εφαπτομένη σε ένα σημείο της τομής, είναι η τομή του εφαπτόμενου επιπέδου και της επιφάνειας στο σημείο αυτό και του τέμνοντος επιπέδου. Ένα τυχαίο επίπεδο του χώρου, τέμνει το υπερβολοειδές κατά κωνική τομή πάντα πραγματική. Για την εύρεση του τύπου της κωνικής τομής, ζητώ τα επ' άπειρο σημεία της, δηλαδή τις γενέτειρες της επιφάνειας τις παράλληλες προς το τέμνον επίπεδο.

1. Αν υπάρχουν τέσσερις γενέτειρες παράλληλες προς το τέμνον επίπεδο, τότε αποτελούν δύο ζεύγη παράλληλων γενετειρών, τα οποία ορίζουν δύο ασυμπτωτικά επίπεδα. Τα ίχνη αυτών επί του τέμνοντος επιπέδου, είναι οι ασύμπτωτες της τομής. Η τομή αυτή είναι μία υπερβολή.

2. Αν υπάρχουν δύο μόνο γενέτειρες παράλληλες προς το τέμνον επίπεδο, τότε οι δύο αυτές γενέτειρες είναι παράλληλες και το επίπεδό τους είναι παράλληλο προς το τέμνον επίπεδο. Η τομή, είναι μία παραβολή.

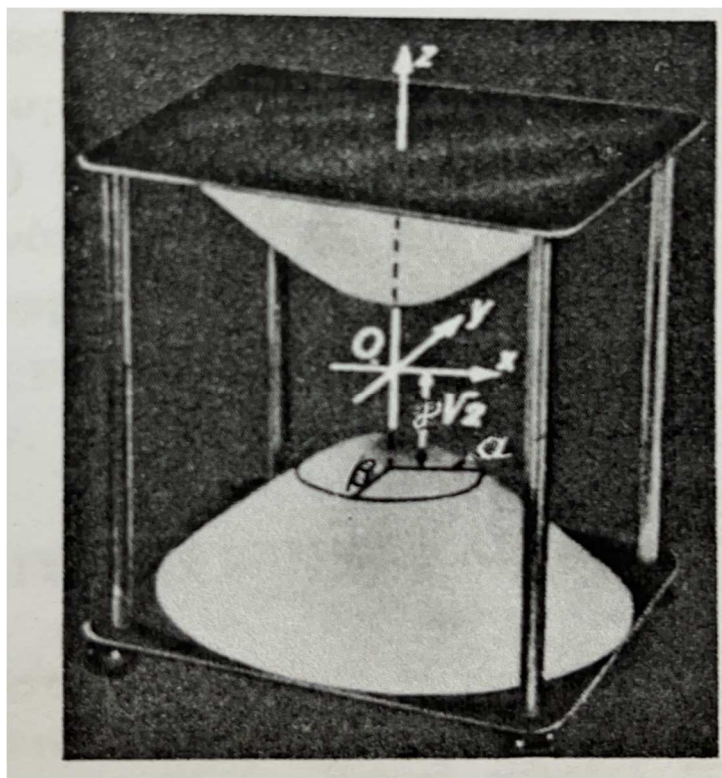
3. Αν δεν υπάρχουν πραγματικές γενέτειρες παράλληλες προς το τέμνον επίπεδο, τότε η τομή είναι μία έλλειψη. Στον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας (υπερβολοειδούς), βασίζεται η κατασκευή της καμπύλης επαφής του επιπέδου και του περιγεγραμμένου περί αυτό κώνου, ο οποίος έχει κορυφή ένα σημείο S του χώρου μη επ' άπειρο ή επ' άπειρο (περιγεγραμμένος κύλινδρος), όπως και του πολικού επιπέδου ενός σημείου S ως προς το υπερβολοειδές ή του πόλου ενός επιπέδου ως προς το υπερβολοειδές.

2.7 Δίχωνο υπερβολοειδές

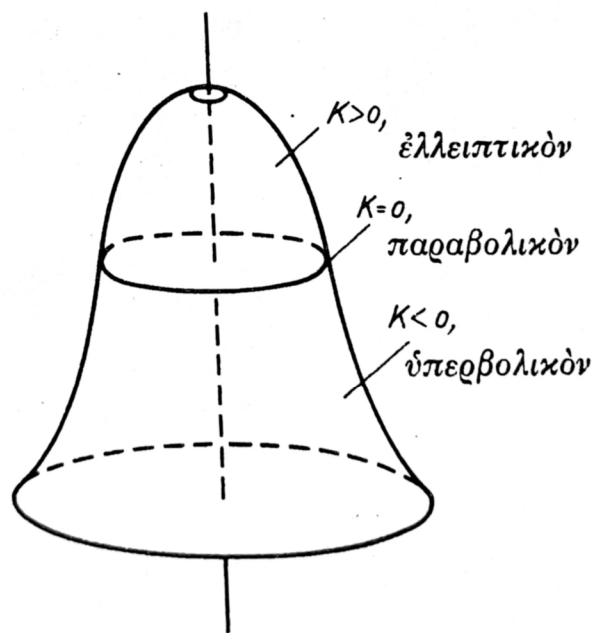
Το δίχωνο υπερβολοειδές, είναι η επιφάνεια δευτέρου βαθμού, της οποίας η εξίσωση σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με άξονα zz' , (ονομάζεται χαρακτηριστικός άξονας της επιφανείας) είναι η $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$.

Τα a, β είναι τα μήκη των πρωτευόντων ημιαξόνων της έλλειψης, κατά την οποία τέμνεται το δίχωνο υπερβολοειδές, από επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο xy το οποίο απέχει απόσταση $z = \pm \gamma\sqrt{2}$. Τα a, γ είναι τα μήκη των πρωτευόντων ημιαξόνων της υπερβολής, κατά την οποία τέμνεται το δίχωνο υπερβολοειδές από το επίπεδο xz . Τα γ, β είναι τα μήκη των ημιαξόνων της τομής (υπερβολής), κατά την οποία τέμνεται το δίχωνο υπερβολοειδές από το επίπεδο yz . Αν $a=\beta$, τότε το παραπάνω υπερβολοειδές είναι ένα δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής.

Η επιφάνεια αυτή, αποτελούμενη από δύο τμήματα συμμετρικά ως προς τα επίπεδα των συντεταγμένων, τέμνει το επ' άπειρο επίπεδο του χώρου κατά μία πραγματική κωνική τομή. Κάθε τομή με επίπεδο παράλληλο στον άξονα zz' είναι υπερβολή, ενώ κάθε τομή με επίπεδο κάθετο στον άξονα zz' , με $|z| > \gamma$, είναι έλλειψη. Η αρχή O των συντεταγμένων, είναι το κέντρο του δίχωνου υπερβολοειδούς. Έτσι, το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι επιφάνεια με κέντρο. Με ομοπαράλληλο μετασχηματισμό κατά την διεύθυνση των αξόνων xx', zz' , το δίχωνο υπερβολοειδές μπορεί να μετασχηματισθεί σε υπερβολοειδές εκ περιστροφής και αντιστρόφως. Όπως στην περίπτωση του μονόχωνου υπερβολοειδούς, υπάρχει ασύμπτωτος κώνος του δίχωνου υπερβολοειδούς, οριζόμενος ομοίως, σαν ο γεωμετρικός τόπος των ασύμπτωτων των τομών του, με επίπεδα του χώρου που διέρχονται από τον άξονα zz' (χαρακτηριστικός άξονας της επιφανείας).

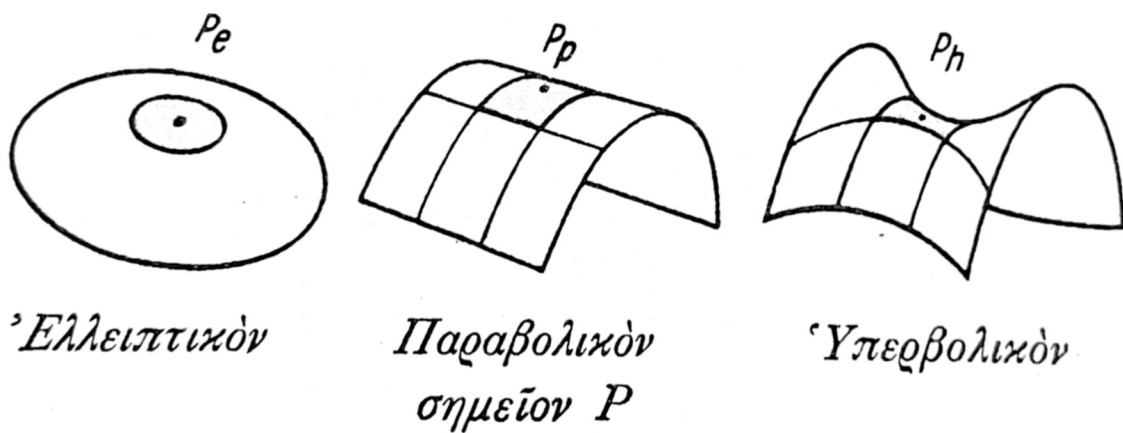


Γράφημα 26: Δίχωνο υπερβολοειδές



Χαρακτηρισμός σημείων ἐπιφανείας
ἐκ περιστροφῆς (καμπάνα)

Γράφημα 27: Χαρακτηρισμός σημείων επιφάνειας εκ περιστροφής



Γράφημα 28: Ελλειπτικό, παραβολικό και υπερβολικό σημείο P

Βιβλιογραφία

- (1974). «Εγκυκλοπαίδεια των μαθηματικών», Αθήνα, εκδόσεις Παγουλάτος
- Βασιλειάδης, Π. (1976). «Στερεομετρία», 1^{ος} & 2^{ος} τόμος
- Βρανός, Α. (1975). «Στερεομετρία», 3^η έκδοση
- Γεωργιακάκης, Μ. «Γεωμετρία χώρου, μεθοδολογία»
- Δημητριάδης, Χρ. (1950). «Στερεά γεωμετρία»
- Δρακόπουλος, Μ. (1970). «Στερεομετρία»

- Ιωαννίδης, Ι. «Γεωμετρία ΙΙΙ, των μη επιπέδων σχημάτων», Αθήνα, εκδόσεις Κορφιάτη
- Ιωαννίδης, Ι. «Γεωμετρία ΙV, κύλινδρος, κώνος, σφαίρα», Αθήνα, εκδόσεις Κορφιάτη
- Καμπύλης, Α. (1975). «Στερεομετρία», 1^{ος} & 2^{ος} τόμος
- Κανέλλος, Σ. «Στερεομετρία»
- Καντζιός, Δ. «Στερεομετρία», 2^η έκδοση
- Κατσάνος, Ο. & Μιχαλάκης, Α. (1977). «Στερεομετρία», 1^{ος} τόμος
- Κυριακόπουλος, Ν. (1976). «Γεωμετρία του χώρου», Αθήνα, εκδόσεις Παπαδημητρόπουλος
- Λαδόπουλος, Π.Δ. «Στοιχεία παραστατικής γεωμετρίας», Αθήνα, εκδόσεις Ε.Μ.Ε.
- Λαμπρινόπουλος, Κ. (1961). «Μαθήματα γεωμετρίας, στερεομετρία», 2^{ος} τόμος, 4^η έκδοση
- Λιβέρης, Δ. & Ιωαννίδης, Ι. (1961). «Μαθήματα στερεομετρίας» 2^η έκδοση, 1^{ος} τόμος + ΒΓ(1959)
- Μαμούρης, Α. «Στερεομετρία», τόμοι Α', Β'
- Μαρουσάκης, Π. (1978). «Θεωρητική γεωμετρία, στερεομετρία»
- Μικρούτσικος, Σ. «Στερεομετρία, θεωρητικό μέρος»
- Μπαρμπαστάθης, Χ. «Μεγάλη θεωρητική γεωμετρία, στερεομετρία», 2^η έκδοση
- Νικολάου, Ν. «Παραστατική γεωμετρία», Αθήνα, εκδόσεις της Εστίας
- Ντάνης, Ι. «Γεωμετρία του χώρου», 1^{ος} & 2^{ος} τόμος
- Πάλλας, Α. (1963). «Μεγάλη γεωμετρία, στερεομετρία», 2^{ος} τόμος, 5^η έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου
- Παπαδόπουλος, Ι. «Γεωμετρία του χώρου», 1^{ος} & 2^{ος} τόμος, Αθήνα, εκδόσεις Gutenberg
- Παπανικολάου, Χ. «Στοιχεία γεωμετρίας, στερεομετρία», τόμος 2^{ος}
- Παπαχρίστου, Ι. (1964), «Γεωμετρία, στερεομετρία», 2^η έκδοση
- Πνευματικός, Ν. (1978). «Μαθήματα στερεομετρίας», 4^η έκδοση
- Πούντζας, Π. (1938). «Γεωμετρικός λογισμός», τόμοι V + VI, [στερεομετρία]
- Σακελλάριου, Ν. «Στοιχεία θεωρητικής γεωμετρίας», τεύχος 3^ο έκδοση 2^η, [στερεομετρία]
- Σπηλιόπουλος, Σ. «Χωρογεωμετρία», 1^{ος} τόμος
- Σταύρακας, Α. (1974). «238 ασκήσεις στερεομετρίας»
- Σφουντούρης, Κ. «Συνοπτική στερεομετρία»
- Ταβανλής, Χ. «Γεωμετρία των όχι επιπέδων σχημάτων»
- Φιλίππου, Β. (1977). «Στερεομετρία μεθοδολογία», 4^η έκδοση
- Φορούλης, Π. «Ασκήσεις στερεομετρίας»