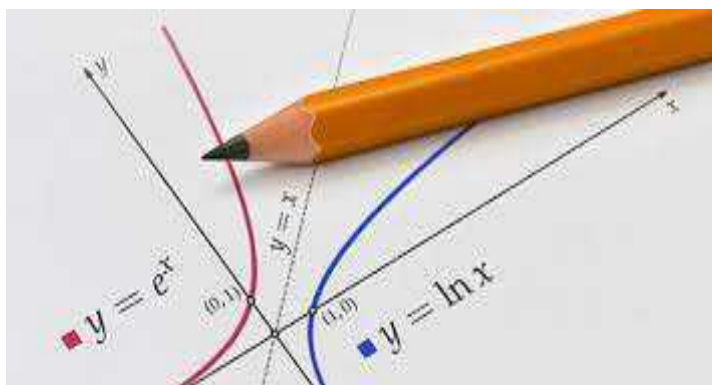




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Οι λογάριθμοι και οι ιδιότητες τους

Σπουδαστές: Μαργκαριάν Χατσίκ (AM 9068)
Κουλουμπαρίτσης Χρήστος (AM 9147)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2024–2025

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.12.2023
Ημερομηνία κατάθεσης: 27.01.2025
Ημερομηνία εξέτασης:02.2025

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Τσαγκανός Γεώργιος Μηχανικός Αυτοματισμού (M.sc.) ΕΔΙΠ		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Λέξεις κλειδιά

Δεκαδικοί λογάριθμοι, νεπέρειοι ή φυσικοί λογάριθμοι, τύπος αλλαγής βάσης λογαρίθμων, ιδιότητες λογαρίθμων, χαρακτηριστικό λογαρίθμου, λογαριθμικές εξισώσεις, λογαριθμικές ανισότητες, λογαριθμική συνάρτηση, εκθετική συνάρτηση, αντίστροφη συνάρτηση, άρτια συνάρτηση, περιττή συνάρτηση, 1–1 ή αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, (οριζόντια ή κατακόρυφη) μετατόπιση συνάρτησης, γεωμετρική πρόοδος, αριθμητική πρόοδος.

Περίληψη

Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται στις μηχανές των πλοίων κυρίως για την ανάλυση, τη βελτιστοποίηση και τη διαχείριση της κατανάλωσης του καυσίμου, της απόδοσης του κινητήρα, της θερμοκρασίας και πίεσης, της ανάλυσης των κραδασμών και της εκτίμησης των εκπομπών ρύπων. Με τη βοήθεια των λογαρίθμων, οι μηχανικοί μπορούν να κάνουν ακριβείς υπολογισμούς που βελτιώνουν την απόδοση των μηχανών, μειώνουν το κόστος λειτουργίας και εξασφαλίζουν την ασφαλή και αποτελεσματική λειτουργία του πλοίου.

Περιεχόμενα

1. Εφαρμογές των λογαρίθμων στη ναυτιλία.....	4
1.1 Υπολογισμός της ταχύτητας και της απόστασης.....	4
1.2 Μέθοδοι ναυσιπλοΐας και χαρτογράφηση.....	4
1.3 Υπολογισμός της κλίμακας του χάρτη.....	4
1.4 Ανάλυση της αντίστασης του νερού και των συνθηκών της κίνησης.....	4
1.5 Αξιολόγηση της οικονομίας του καυσίμου.....	4
1.6 Ανάλυση του σήματος και επικοινωνίες.....	4
1.7 Υπολογισμοί για την ασφαλή φόρτωση και εκφόρτωση των πλοίων.....	5
1.8 Ανάλυση των καμπυλών πλοήγησης.....	5
1.9 Ανάλυση του κινδύνου και της ασφάλειας.....	5
1.10 Αποτίμηση των οικονομικών και των ναυτιλιακών αγορών.....	5
2. Εφαρμογές των λογαρίθμων στις μηχανές των πλοίων.....	5
2.1 Ανάλυση της απόδοσης του κινητήρα.....	5
2.1.1 Κατανάλωση του καυσίμου.....	6
2.1.2 Ικανότητα του κινητήρα.....	6
2.2 Διαχείριση της θερμοκρασίας και της πίεσης.....	6
2.2.1 Θερμοκρασία του κινητήρα.....	6
2.2.2 Πίεση του καυσίμου.....	6
2.3 Βελτιστοποίηση της κατανάλωσης του καυσίμου (fuel efficiency).....	6
2.3.1 Οικονομική ταχύτητα.....	6
2.3.2 Εκθετική αύξηση της κατανάλωσης του καυσίμου.....	6
2.4 Ανάλυση των κραδασμών και των δονήσεων του κινητήρα.....	6
2.5 Υπολογισμοί για την αποδοτικότητα των συστημάτων μετάδοσης.....	7
2.6 Ανάλυση και βελτιστοποίηση της πίεσης στον κυλινδρικό χώρο του κινητήρα.....	7
2.7 Ανάλυση των εκπομπών ρύπων.....	7
2.8 Διαχείριση των συστημάτων προώθησης.....	7
3. Η έννοια του λογάριθμου.....	7
3.1 Παρατηρήσεις.....	7
3.2 Ιδιότητες των λογαρίθμων.....	8
3.2.1 Τύπος αλλαγής βάσης των λογαρίθμων.....	8
3.3 Εφαρμογές.....	8
3.4 Λογαριθμική συνάρτηση.....	12
3.4.1 Ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης.....	13
3.4.2 Εφαρμογές.....	13
4. Βιβλιογραφία.....	28

1. Εφαρμογές των λογαρίθμων στη ναυτιλία

Οι λογάριθμοι είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη ναυτιλία για διάφορους υπολογισμούς και αναλύσεις, διότι επιτρέπουν την αποτελεσματική διαχείριση και πλοήγηση σε ένα πολύπλοκο και δυναμικό περιβάλλον. Βρίσκουν αρκετές εφαρμογές στη ναυτιλία, διότι η ναυτιλιακή βιομηχανία περιλαμβάνει πολλά μαθηματικά μοντέλα και υπολογισμούς, που σχετίζονται με τα μεγέθη και τις αποστάσεις, τα οποία συχνά απαιτούν τη χρήση λογαρίθμων για να γίνουν πιο εύχρηστα και ακριβή. Παρακάτω παρατίθενται μερικές βασικές εφαρμογές των λογαρίθμων στη ναυτιλία:

1.1 Υπολογισμός της ταχύτητας και της απόστασης

Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται προκειμένου να διευκολύνουν τον υπολογισμό των αποστάσεων και των ταχυτήτων, σε συνδυασμό με άλλες παραμέτρους όπως ο χρόνος και η απόσταση. Για παράδειγμα, αν γνωρίζω την απόσταση και το χρόνο, μπορώ με χρήση λογαρίθμων να υπολογίσω εύκολα την ταχύτητα του πλοίου, ειδικά αν αυτή μεταβάλλεται εκθετικά ή σχετίζεται με άλλες εκθετικές μεταβολές (κατανάλωση καυσίμων, αντίσταση νερού, ένταση ανέμου).

1.2 Μέθοδοι ναυσιπλοΐας και χαρτογράφηση

Οι ναυτικοί, χρησιμοποιούν λογάριθμους σε υπολογισμούς που σχετίζονται με τη γεωμετρία και τις συντεταγμένες (π.χ. γεωγραφικό μήκος και πλάτος). Η χρήση των λογαρίθμων, επιτρέπει την ακριβή υπολογιστική αναπαράσταση των πλοίων σε ένα χάρτη, βοηθώντας στην υπολογισμό της πορείας τους.

1.3 Υπολογισμός της κλίμακας του χάρτη

Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για να προσαρμόσουν τις μετρήσεις του χάρτη στις πραγματικές αποστάσεις. Με τη χρήση των λογαρίθμων, οι ναυτικοί υπολογίζουν με ακρίβεια την απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο χάρτη, λαμβάνοντας υπόψη την κλίμακα του χάρτη, η οποία συχνά περιλαμβάνει εκθετικές ή λογαριθμικές σχέσεις (τύποι του Napier).

1.4 Ανάλυση της αντίστασης του νερού και των συνθηκών της κίνησης

Η αντίσταση του νερού στα πλοία, εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως η ταχύτητα και η μορφολογία του πλοίου. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της αντίστασης του νερού και της απαιτούμενης ισχύος του κινητήρα, διότι η σχέση μεταξύ της ταχύτητας και της αντίστασης είναι συχνά μη γραμμική και μπορεί να εκφραστεί με λογαριθμικές συναρτήσεις.

1.5 Αξιολόγηση της οικονομίας του καυσίμου

Η οικονομία του καυσίμου και η κατανάλωση του, κατά τη διάρκεια μιας θαλάσσιας πορείας, σχετίζονται με λογαριθμικές σχέσεις. Αντί να υπολογίζουν την κατανάλωση του καυσίμου γραμμικά, οι ναυτιλιακές εταιρείες χρησιμοποιούν λογάριθμους προκειμένου να υπολογίσουν την κατανάλωση του καυσίμου σε διάφορες ταχύτητες ή σε διαφορετικές συνθήκες θάλασσας, κάτι που μπορεί να βοηθήσει στην εξοικονόμηση πόρων και στη βελτίωση της απόδοσης.

1.6 Ανάλυση του σήματος και επικοινωνίες

Στη ναυτιλία, η επικοινωνία μέσω του ραδιοφώνου ή μέσω άλλων συστημάτων απαιτεί τη χρήση λογαρίθμων για την ανάλυση των σημάτων. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται στην αξιολόγηση της έντασης του σήματος (σε ντεσιμπέλ) ή στον

υπολογισμό της ισχύος του σήματος που μεταδίδεται και λαμβάνεται, σε μεγάλες αποστάσεις.

1.7 Υπολογισμοί για την ασφαλή φόρτωση και εκφόρτωση των πλοίων

Η ασφαλής φόρτωση και εκφόρτωση ενός πλοίου, απαιτεί προσεκτική ανάλυση των δυνάμεων που ασκούνται και ειδικότερα της θέσης του κέντρου βάρους του πλοίου, σε σχέση με το μέτακεντρο. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται με σκοπό να υπολογίσουν τη σχέση μεταξύ του φορτίου και του εκτοπίσματος του πλοίου και για να διασφαλίσουν την ευστάθεια (ισορροπία, εμφάνιση ροπής επαναφοράς) του, κατά τη διάρκεια αυτών των διαδικασιών.

1.8 Ανάλυση των καμπυλών πλοήγησης

Η ανάλυση της πλοήγησης στο θαλάσσιο περιβάλλον, απαιτεί τη χρήση των λογαρίθμων για τον υπολογισμό της πορείας του πλοίου, σε συγκεκριμένα σημεία της γήινης επιφάνειας. Οι καμπύλες στροφής και ο υπολογισμός της καμπύλης πορείας ενός πλοίου, μπορεί να περιλαμβάνουν λογαριθμικές εξισώσεις, που επιτρέπουν τη βελτίωση της πορείας του (κίνηση πάνω σε μέγιστους κύκλους της γήινης επιφάνειας) σε δύσκολες συνθήκες.

1.9 Ανάλυση του κινδύνου και της ασφάλειας

Η ανάλυση του κινδύνου στη ναυτιλία, συμπεριλαμβανομένων των ατυχημάτων, των επικίνδυνων καιρικών συνθηκών ή άλλων καταστάσεων, περιλαμβάνει τη χρήση λογαρίθμων για να υπολογιστεί η πιθανότητα εμφάνισης ενός συγκεκριμένου γεγονότος, με βάση προηγούμενα δεδομένα ή συνθήκες. Οι λογάριθμοι, βοηθούν στην εκτίμηση της σοβαρότητας ενός κινδύνου και στην αξιολόγηση των πιθανών αποτελεσμάτων.

1.10 Αποτίμηση των οικονομικών και των ναυτιλιακών αγορών

Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των ναυτιλιακών αγορών και στην αποτίμηση του κόστους για τη μεταφορά φορτίων, στην τιμολόγηση των παρεχόμενων υπηρεσιών και στην ανάλυση της προσφοράς και ζήτησης. Τα οικονομικά μοντέλα που χρησιμοποιούν λογάριθμους, επιτρέπουν πιο ακριβείς εκτιμήσεις και προβλέψεις για την κερδοφορία των ναυτιλιακών εταιρειών.

2. Εφαρμογές των λογαρίθμων στις μηχανές των πλοίων

Οι λογάριθμοι, παίζουν σημαντικό ρόλο στον τομέα της ναυτιλίας, ιδιαίτερα στις μηχανών των πλοίων, όπου χρησιμοποιούνται για τη βελτιστοποίηση της απόδοσης, για την ανάλυση της κατανάλωσης του καυσίμου και για τη διαχείριση της ενέργειας. Ορισμένες από τις βασικές εφαρμογές των λογαρίθμων στις μηχανές των πλοίων περιλαμβάνουν:

2.1 Ανάλυση της απόδοσης του κινητήρα

Η απόδοση των μηχανών των πλοίων εξαρτάται από την ταχύτητα του πλοίου, από την αντίσταση του νερού, από την ένταση των ανέμων και από άλλες παραμέτρους, όπως η ισχύς που παρέχεται από τον κινητήρα και η κατανάλωση του καυσίμου. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για την ανάλυση αυτών των σχέσεων και για την εξαγωγή των εκθετικών ή των λογαριθμικών τύπων, που βοηθούν στην ακριβή εκτίμηση της απόδοσης του κινητήρα σε διαφορετικές συνθήκες.

2.1.1 Κατανάλωση του καυσίμου

Η κατανάλωση του καυσίμου σε σχέση με την ταχύτητα και με την αντίσταση του πλοίου, μπορεί να μοντελοποιηθεί με λογαριθμικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, σε υψηλότερες ταχύτητες, η αντίσταση του νερού αυξάνεται εκθετικά και η κατανάλωση του καυσίμου αυξάνεται με ένα λογαριθμικό πρότυπο.

2.1.2 Ικανότητα του κινητήρα

Η ισχύς του κινητήρα, εκφράζεται συχνά σε λογαριθμική κλίμακα, ώστε να είναι πιο ευκρινής η αναλογία μεταξύ των διαφορετικών φορτίων και της ισχύος που απαιτείται για να διατηρηθεί μια σταθερή ταχύτητα πλεύσης.

2.2 Διαχείριση της θερμοκρασίας και της πίεσης

Η θερμοκρασία και η πίεση που αναπτύσσονται στους κινητήρες των πλοίων, επηρεάζουν την απόδοση και τη λειτουργία τους. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για την κατανόηση της θερμοδυναμικής συμπεριφοράς των κινητήρων και για την επίλυση των εξισώσεων που σχετίζονται με τη θερμοκρασία και την πίεση, ειδικά όταν άγνωστες μεταβλητές ακολουθούν την εκθετική ή τη λογαριθμική κατανομή.

2.2.1 Θερμοκρασία του κινητήρα

Η απόδοση ενός κινητήρα αυξάνεται, καθώς η θερμοκρασία του νερού εισαγωγής μειώνεται. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της σχέσης θερμοκρασίας – απόδοσης και για την καλύτερη προσαρμογή του συστήματος ψύξης του κινητήρα.

2.2.2 Πίεση του καυσίμου

Οι μηχανές των πλοίων, συνήθως λειτουργούν σε υψηλή πίεση. Η αναλογία πίεσης – ροής καυσίμου, μπορεί να εκφραστεί μέσω των λογαρίθμων, που χρησιμοποιούνται στην ακριβή παρακολούθηση και στη ρύθμιση της κατανάλωσης του καυσίμου.

2.3 Βελτιστοποίηση της κατανάλωσης του καυσίμου (fuel efficiency)

Η βελτιστοποίηση της κατανάλωσης του καυσίμου, είναι ζωτικής σημασίας για τη μείωση του λειτουργικού κόστους και για την προστασία του περιβάλλοντος. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας, του φορτίου και της κατανάλωσης του καυσίμου.

2.3.1 Οικονομική ταχύτητα

Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό της οικονομικής ταχύτητας (optimal speed), η οποία είναι εκείνη η ταχύτητα που ελαχιστοποιεί την κατανάλωση του καυσίμου, για τη μεταφορά ενός συγκεκριμένου φορτίου.

2.3.2 Εκθετική αύξηση της κατανάλωσης του καυσίμου

Η κατανάλωση του καυσίμου αυξάνεται εκθετικά με την ταχύτητα και οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται για να βοηθήσουν στη διαχείριση αυτής της σχέσης, επιτρέποντας τη βελτιστοποίηση των λειτουργικών συνθηκών.

2.4 Ανάλυση των κραδασμών και των δονήσεων του κινητήρα

Οι κινητήρες των πλοίων, ειδικά οι μεγάλης ισχύος, παράγουν κραδασμούς οι οποίοι δύνανται να επηρεάσουν την απόδοση και τη μακροχρόνια αξιοπιστία των μηχανημάτων. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των δονήσεων, για

την εκτίμηση της συχνότητας των κραδασμών που παράγονται από τον κινητήρα και για την αναγνώριση των πιθανών βλαβών ή των αστοχιών του κινητήρα. Μια συχνότητα, μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω λογαρίθμου ώστε να κατανοηθεί καλύτερα η συσχέτιση της με την απόδοση ή με τα τυχόν προβλήματα του κινητήρα.

2.5 Υπολογισμοί για την αποδοτικότητα των συστημάτων μετάδοσης

Οι μηχανές των πλοίων συνήθως είναι συνδεδεμένες με πολύπλοκα συστήματα μετάδοσης της κίνησης, τα οποία επηρεάζουν την απόδοση του κινητήρα. Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουν την αποτελεσματικότητα της μετάδοσης ισχύος μέσω των διαφόρων γραναζιών και των κιβωτίων ταχυτήτων, καθώς η μετάδοση της ισχύος συχνά ακολουθεί εκθετικά ή λογαριθμικά πρότυπα.

2.6 Ανάλυση και βελτιστοποίηση της πίεσης στον κυλινδρικό χώρο του κινητήρα

Η πίεση μέσα στον κύλινδρο του κινητήρα, επηρεάζει άμεσα την απόδοση του κινητήρα. Η μέτρηση και η ανάλυση αυτής της πίεσης και η σχέση της με την κατανάλωση του καυσίμου και την παρεχόμενη ισχύ, χρησιμοποιούν λογαριθμικές εξισώσεις. Οι μηχανικοί των πλοίων, χρησιμοποιούν αυτές τις αναλύσεις για τη σωστή ρύθμιση του κινητήρα, ώστε να βελτιστοποιηθεί η απόδοσή του.

2.7 Ανάλυση των εκπομπών ρύπων

Με την αυξανόμενη πίεση για μείωση των εκπομπών των αερίων θερμοκηπίου από τα πλοία, οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των εκπομπών ρύπων από τις μηχανές των πλοίων. Συγκεκριμένα, οι λογάριθμοι μπορούν να βοηθήσουν στην εκτίμηση της συγκέντρωσης CO₂ ή NO_x με βάση την κατανάλωση του καυσίμου και τις συνθήκες λειτουργίας του κινητήρα.

2.8 Διαχείριση των συστημάτων προώθησης

Οι λογάριθμοι, χρησιμοποιούνται στην παρακολούθηση και στη διαχείριση των συστημάτων πρόωσης του πλοίου (όπως οι προπέλες ή οι κινητήριες άξονες), για να εξασφαλιστεί ότι η ενέργεια μεταφέρεται από τον κινητήρα με αποδοτικότερο τρόπο.

3. Η έννοια του λογάριθμου

Θεωρώ την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ και το θετικό αριθμό θ . Επειδή η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη, με πεδίο τιμών το διάστημα $(0, +\infty) = f(A)$, η εξίσωση $a^x = \theta$ έχει μοναδική ρίζα στο σύνολο $\mathbb{R}$. Τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης $a^x = \theta$ τη συμβολίζω με $\log_a \theta$ και την ονομάζω **λογάριθμο του θ με βάση το a** . Άρα, αν $0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$. Δηλαδή, αν $0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε ο λογάριθμος του θ με βάση το a , είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσω το a για να βρω το θ .

3.1 Παρατηρήσεις

Από τον ορισμό του λογάριθμου, προκύπτουν οι σχέσεις:

- Αν $0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $\log_a(a^x) = x$ και $a^{\log_a \theta} = \theta$
- Επειδή $a^0 = 1$ και $a^1 = a$, ισχύουν $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$
- Αν $a = 10$, τότε ο $\log_{10} \theta$ συμβολίζεται ως $\log \theta$ και λέγεται **δεκαδικός λογάριθμος** του θ . Άρα, $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$

• Αν $a = e$, τότε ο $\log_e \theta$ συμβολίζεται ως $\ln \theta$ και λέγεται **φυσικός** ή **νεπέρειος λογάριθμος** του θ . Άρα, $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$

3.2 Ιδιότητες των λογαρίθμων

Αν $0 < a \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θετικούς αριθμούς και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
- $\log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
- $\log_a (\theta^k) = k \log_a \theta$
- $\log_a (\sqrt[k]{\theta}) = \frac{1}{k} \log_a \theta, k \in \mathbb{N}$
- Αν $\theta_1 \cdot \theta_2 > 0$, τότε $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a |\theta_1| + \log_a |\theta_2|$
- Αν $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ θετικοί αριθμοί, τότε $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \dots \cdot \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \dots + \log_a \theta_n$

3.2.1 Τύπος αλλαγής βάσης των λογαρίθμων

Αν $0 < \alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$

Αν $\theta = \alpha$, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται $\log_\beta \alpha = \frac{1}{\log_a \beta}$

3.3 Εφαρμογές

1. Βρείτε το x αν
 - i) $\log_2 x = -2$
 - ii) $\log_3 x = 5$
 - iii) $\log_x (2\sqrt{2}) = 4$
 - iv) $\log_x \left(\frac{\sqrt[5]{9}}{3} \right) = -0,6$
 - v) $\log_4 |x-1| = 2$
 - vi) $\log_3 (2^x + 11) = 3$

Λύση

i) $\log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

ii) $\log_3 x = 5 \Leftrightarrow x = 3^5 = 243$

iii) $\log_x (2\sqrt{2}) = 4 \Leftrightarrow x^4 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}, 0 < x \neq 1$

iv) $\log_x \left(\frac{\sqrt[5]{9}}{3} \right) = -0,6 \Leftrightarrow x^{-0,6} = \frac{\sqrt[5]{9}}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^{0,6}} = \frac{\sqrt[5]{9}}{3} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{\sqrt[5]{9}} \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3} = \frac{3}{\sqrt[5]{9}} \Leftrightarrow x^3 = \frac{243}{9} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$

v) $\log_4 |x-1| = 2 \Leftrightarrow |x-1| = 2^4 \Leftrightarrow |x-1| = 16 \Leftrightarrow x-1 = \begin{cases} 16 \\ \text{ή} \\ -16 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 17 \\ \text{ή} \\ -15 \end{cases}$

vi) $\log_3 (2^x + 11) = 3 \Leftrightarrow 2^x + 11 = 3^3 \Leftrightarrow 2^x + 11 = 27 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

2. Δείξτε ότι i) $\log_{\sqrt[3]{5}} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} 5 = 9$ ii) $\log_3 (\log_2 512) = 2$

iii) $11 \cdot \log_2 (\log_8 64) - 5 \log_7 (\log_4 4) = 11$

Απόδειξη

$$\text{i)} \log_{\sqrt[3]{5}} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} 5 = 9 = \frac{\log 2}{\log \sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\log 5}{\log \sqrt[3]{2}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{3} \log 5} \cdot \frac{\log 5}{\frac{1}{3} \log 2} = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\text{ii)} \log_3 (\log_2 512) = \log_3 (\log_2 2^9) = \log_3 (9 \log_2 2) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$$

iii)

$$11 \cdot \log_2 (\log_8 64) - 5 \log_7 (\log_4 4) =$$

$$11 \cdot \log_2 (\log_8 8^2) - 5 \log_7 1 =$$

$$11 \cdot \log_2 (2 \log_8 8) - 0 =$$

$$11 \cdot \log_2 2 = 11 \cdot 1 = 11$$

3. Αν $0 < \alpha, \beta, \alpha\beta, \theta \neq 1$, δείξτε ότι

$$\text{i)} \frac{\log_a \theta}{\log_{a\beta} \theta} = 1 + \log_a \beta \quad \text{ii)} \frac{1}{\log_a \theta} + \frac{1}{\log_\beta \theta} = \frac{1}{\log_{a\beta} \theta}$$

Απόδειξη

i)

$$\frac{\log_a \theta}{\log_{a\beta} \theta} = \frac{\log_a \theta}{\frac{\log_a \theta}{\log_a (\alpha \cdot \beta)}} = \frac{\log_a \theta \cdot \log_a (\alpha \cdot \beta)}{\log_a \theta} = \log_a (\alpha \cdot \beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta = 1 + \log_a \beta$$

$$\text{ii)} \frac{1}{\log_a \theta} + \frac{1}{\log_\beta \theta} = \log_\theta \alpha + \log_\theta \beta = \log_\theta (\alpha \cdot \beta) = \frac{1}{\log_{a\beta} \theta}$$

$$4. \text{ Αν } 0 < \alpha \neq 1, \text{ δείξτε ότι } \frac{1}{\log_a \theta} + \frac{1}{\log_{a^2} \theta} + \frac{1}{\log_{a^3} \theta} + \frac{1}{\log_{a^4} \theta} = 10 \log_\theta \alpha$$

Απόδειξη

$$\frac{1}{\log_a \theta} + \frac{1}{\log_{a^2} \theta} + \frac{1}{\log_{a^3} \theta} + \frac{1}{\log_{a^4} \theta} =$$

$$\log_\theta \alpha + \log_\theta \alpha^2 + \log_\theta \alpha^3 + \log_\theta \alpha^4 =$$

$$\log_\theta \alpha + 2 \log_\theta \alpha + 3 \log_\theta \alpha + 4 \log_\theta \alpha = 10 \log_\theta \alpha$$

5. Αν $\log_{40} 100 = \alpha$, βρείτε τον $\log_{16} 25$ συναρτήσει του α .

Λύση

Είναι

$$a = \log_{40} 100 = \frac{\log 100}{\log 40} = \frac{\log 10^2}{\log (4 \cdot 10)} = \frac{2 \log 10}{\log 10 + \log 4} = \frac{2}{1 + \log 4} \Leftrightarrow \log 4 = \frac{2 - \alpha}{\alpha}$$

Οπότε

$$\log_{16} 25 = \frac{\log 25}{\log 16} = \frac{\log \left(\frac{100}{4} \right)}{\log 4^2} = \frac{\log 100 - \log 4}{2 \log 4} = \frac{2 - \frac{2 - \alpha}{\alpha}}{2 \left(\frac{2 - \alpha}{\alpha} \right)} = \frac{3\alpha - 2}{4 - 2\alpha} = \frac{3\alpha - 2}{4 - 2\alpha} = \frac{3 \log_{40} 100 - 2}{4 - 2 \log_{40} 100}$$

$$6. \text{ Αν } 0 < \alpha \neq 1, 0 < \beta \neq 2 \text{ και } \log_\alpha \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \log_{\frac{\beta}{2}} \beta, \text{ δείξτε ότι } \alpha\beta = 2.$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\log_{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \log_{\frac{\beta}{2}}\beta \Leftrightarrow \log_{\alpha}a - \log_{\alpha}2 = \frac{\log_{\alpha}\beta}{\log_{\alpha}\left(\frac{\beta}{2}\right)} \Leftrightarrow 1 - \log_{\alpha}2 = \frac{\log_{\alpha}\beta}{\log_{\alpha}\beta - \log_{\alpha}2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \log_{\alpha}2)(\log_{\alpha}\beta - \log_{\alpha}2) = \log_{\alpha}\beta \Leftrightarrow \log_{\alpha}\beta - \log_{\alpha}2 - \log_{\alpha}2\log_{\alpha}\beta + \\ &+ (\log_{\alpha}2)^2 = \log_{\alpha}\beta \Leftrightarrow \log_{\alpha}2 + \log_{\alpha}2\log_{\alpha}\beta - (\log_{\alpha}2)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \log_{\alpha}\beta = \\ &= \log_{\alpha}2 \Leftrightarrow \log_{\alpha}\alpha + \log_{\alpha}\beta = \log_{\alpha}2 \Leftrightarrow \log_{\alpha}(\alpha\beta) = \log_{\alpha}2 \Leftrightarrow \alpha\beta = 2\end{aligned}$$

7. Αν $x > 0$, $0 < a, \beta \neq 1$, $\alpha\beta \neq 1$, δείξτε ότι

$$\log_{\alpha}x + \log_{\beta}x = \log_{\alpha}\beta(1 + \log_{\beta}a)^2 \log_{\alpha\beta}x$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\log_{\alpha}x + \log_{\beta}x &= \frac{\log_{\alpha\beta}x}{\log_{\alpha\beta}\alpha} + \frac{\log_{\alpha\beta}x}{\log_{\alpha\beta}\beta} = \log_{\alpha\beta}x \left(\frac{1}{\log_{\alpha\beta}\alpha} + \frac{1}{\log_{\alpha\beta}\beta} \right) = \\ \log_{\alpha\beta}x (\log_{\alpha}\alpha\beta + \log_{\beta}\alpha\beta) &= \log_{\alpha\beta}x (\log_{\alpha}\alpha + \log_{\alpha}\beta + \log_{\beta}\alpha + \log_{\beta}\beta) = \\ \log_{\alpha\beta}x (2 + \log_{\alpha}\beta + \log_{\beta}\alpha) &= \log_{\alpha\beta}x \left(2 + \log_{\beta}\alpha + \frac{1}{\log_{\beta}\alpha} \right) = \\ \log_{\alpha\beta}x \left[\frac{(\log_{\beta}\alpha)^2 + 2\log_{\beta}\alpha + 1}{\log_{\beta}\alpha} \right] &= \log_{\alpha\beta}x \cdot \frac{1}{\log_{\beta}\alpha} (\log_{\beta}\alpha + 1)^2 = \\ \log_{\alpha\beta}x \cdot \log_{\alpha}\beta (\log_{\beta}\alpha + 1)^2\end{aligned}$$

8. Αν $0 < a, \beta \neq 1$, $\alpha\beta \neq 1$, δείξτε ότι

$$(\log_{\alpha}\beta + \log_{\beta}\alpha + 2) + (\log_{\alpha}\beta - \log_{\alpha\beta}\beta) \log_{\beta}\alpha = 1 + \log_{\alpha}\beta$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\log_{\alpha}\beta + \log_{\beta}\alpha + 2) + (\log_{\alpha}\beta - \log_{\alpha\beta}\beta) \log_{\beta}\alpha &= \\ \left(\log_{\alpha}\beta + \frac{1}{\log_{\alpha}\beta} + 2 \right) \cdot \left(\log_{\alpha}\beta - \frac{\log_{\alpha}\beta}{\log_{\alpha}(\alpha\beta)} \right) \cdot \log_{\beta}\alpha &= \\ \left(\frac{\log_{\alpha}^2\beta + 2\log_{\alpha}\beta + 1}{\log_{\alpha}\beta} \right) \cdot \log_{\alpha}\beta \left(1 - \frac{1}{\log_{\alpha}\alpha + \log_{\alpha}\beta} \right) \log_{\beta}\alpha &= \\ (\log_{\alpha}\beta + 1)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \log_{\alpha}\beta} \right) \log_{\beta}\alpha &= \\ (\log_{\alpha}\beta + 1)^2 \left(\frac{\log_{\alpha}\beta \log_{\beta}\alpha}{1 + \log_{\alpha}\beta} \right) &= \\ (\log_{\alpha}\beta + 1) \log_{\alpha}\beta \frac{1}{\log_{\alpha}\beta} &= 1 + \log_{\alpha}\beta\end{aligned}$$

9. Αν $0 < a, \beta \neq 1$, δείξτε ότι $(\log_{\alpha}\beta + \log_{\beta}\alpha + 1) \log_{\alpha}\beta \cdot \log_{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1 - (\log_{\alpha}\beta)^3$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} & (\log_{\alpha} \beta + \log_{\beta} \alpha + 1) \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = \\ & \left(\log_{\alpha} \beta + \frac{1}{\log_{\alpha} \beta} + 1 \right) \log_{\alpha} \beta \cdot (\log_{\alpha} \alpha - \log_{\alpha} \beta) = \\ & \left[(\log_{\alpha} \beta)^2 + \log_{\alpha} \beta + 1 \right] [1 - \log_{\alpha} \beta] = 1 - (\log_{\alpha} \beta)^3 \end{aligned}$$

10. Αν $0 < \alpha \neq 1$, δείξτε ότι $S = \log \sqrt{\alpha} + \log \sqrt[4]{\alpha} + \log \sqrt[8]{\alpha} + \dots = \log \alpha$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} S &= \log \sqrt{\alpha} + \log \sqrt[4]{\alpha} + \log \sqrt[8]{\alpha} + \dots = \\ & \frac{1}{2} \log \alpha + \frac{1}{4} \log \alpha + \frac{1}{8} \log \alpha + \dots + \frac{1}{2^{\nu}} \log \alpha + \dots = \\ & \log \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{\nu}} + \dots \right) \end{aligned}$$

Η ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{\nu}}, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ και

$$\text{άπειρο πλήθος όρων. Ισχύει ότι } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{\nu}} + \dots = \frac{\alpha^1}{1 - \lambda} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Άρα, $S = \log \alpha$

11. Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$, $\theta \neq 1$, $\beta \neq \gamma$ και οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, δείξτε ότι $\frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\beta} \theta} - \frac{\log_{\beta} \theta}{\log_{\gamma} \theta} = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\gamma} \theta}$

Απόδειξη

Εφόσον οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, ισχύει ότι $\beta^2 = \alpha\gamma$. Άρα, $\log_{\theta} \beta^2 = \log_{\theta} (\alpha\gamma) \Leftrightarrow 2 \log_{\theta} \beta = \log_{\theta} \alpha + \log_{\theta} \gamma$

$$\text{Είναι } \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\beta} \theta} - \frac{\log_{\beta} \theta}{\log_{\gamma} \theta} = \frac{\frac{1}{\log_{\theta} \alpha} - \frac{1}{\log_{\theta} \beta}}{\frac{1}{\log_{\theta} \beta} - \frac{1}{\log_{\theta} \gamma}} = \frac{\frac{1}{\log_{\theta} \alpha} - \frac{2}{\log_{\theta} \alpha + \log_{\theta} \gamma}}{\frac{2}{\log_{\theta} \alpha + \log_{\theta} \gamma} - \frac{1}{\log_{\theta} \gamma}} =$$

$$\frac{\log_{\theta} \alpha + \log_{\theta} \gamma - 2 \log_{\theta} \alpha}{2 \log_{\theta} \gamma - \log_{\theta} \alpha - \log_{\theta} \gamma} \cdot \frac{\log_{\theta} \gamma}{\log_{\theta} \alpha} = \frac{\log_{\theta} \gamma}{\log_{\theta} \alpha} = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\gamma} \theta}$$

12. Αν $x > 0$, $y > 0$, $0 < \alpha, \beta \neq 1$ με $\alpha^x = \beta^y$ και $x^{\beta} = y^{\alpha}$, δείξτε ότι

$$\left(\frac{x}{\log_{\alpha} \beta} \right)^{\alpha} = \left(\frac{y}{\log_{\beta} \alpha} \right)^{\beta}$$

Απόδειξη

$$\bullet \alpha^x = \beta^y \Leftrightarrow \log_{\alpha} \alpha^x = \log_{\alpha} \beta^y \Leftrightarrow x = y \log_{\alpha} \beta \Leftrightarrow \frac{x}{\log_{\alpha} \beta} = y \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\log_{\alpha} \beta} \right)^a = y^a$$

$$\bullet \alpha^x = \beta^y \Leftrightarrow \log_{\beta} \alpha^x = \log_{\beta} \beta^y \Leftrightarrow x \log_{\beta} \alpha = y \Leftrightarrow \frac{y}{\log_{\alpha} \beta} = x \Leftrightarrow \left(\frac{y}{\log_{\alpha} \beta} \right)^{\beta} = y^{\beta}$$

$$\text{Επειδή } x^{\beta} = y^{\alpha}, \text{ προκύπτει } \left(\frac{x}{\log_{\alpha} \beta} \right)^{\alpha} = \left(\frac{y}{\log_{\beta} \alpha} \right)^{\beta}$$

$$\mathbf{13.} \text{ Δείξτε ότι } \mathbf{i)} \frac{1}{\log_{17} 34 - \log_{34} 68} > 20 \quad \mathbf{ii)} \frac{1}{\log_{\sqrt{2}} \pi} + \frac{1}{\log_{\sqrt{5}} \pi} > 1$$

Απόδειξη

$$\mathbf{i)} \text{ Είναι } \log_{17} 34 = \log_{17} (2 \cdot 17) = \log_{17} 2 + \log_{17} 17 = 1 + \log_{17} 2$$

Είναι

$$\log_{34} 68 = \log_{34} (34 \cdot 2) = \log_{34} 34 + \log_{34} 2 = 1 + \log_{34} 2 = 1 + \frac{\log_{17} 2}{\log_{17} 34} =$$

$$1 + \frac{\log_{17} 2}{1 + \log_{17} 2} = \frac{1 + 2 \log_{17} 2}{1 + \log_{17} 2}$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{\log_{17} 34 - \log_{17} 64} > 20 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \log_{17} 2 - \frac{1 + 2 \log_{17} 2}{1 + \log_{17} 2}} > 20 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \log_{17} 2}{\log_{17}^2 2} > 20 \Leftrightarrow 1 + \log_{17} 2 > 20 \log_{17}^2 2 \Leftrightarrow$$

$$20 (\log_{17} 2)^2 - \log_{17} 2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (5 \log_{17} 2 + 1)(4 \log_{17} 2 - 1) < 0$$

Η τελευταία ανίσωση είναι αληθής, διότι $5 \log_{17} 2 + 1 > 0$ και

$$4 \log_{17} 2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \log_{17} 2^4 < 1 \Leftrightarrow 16 < 17$$

ii)

$$\frac{1}{\log_{\sqrt{2}} \pi} + \frac{1}{\log_{\sqrt{5}} \pi} > 1 \Leftrightarrow \log_{\pi} \sqrt{2} + \log_{\pi} \sqrt{5} > 1 \Leftrightarrow \log_{\pi} \sqrt{10} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{10} > \pi \Leftrightarrow 10 > \pi^2$$

(αληθής).

3.4 Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι συνάρτηση $1-1$, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . Εφόσον η εκθετική συνάρτηση f έχει ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ως πεδίο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ και ως πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Είναι $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$, $0 < a \neq 1$. Άρα, $f^{-1}(y) = \log_a y$, $0 < a \neq 1$, $y > 0$.

Άρα, η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ με $0 < a \neq 1$ είναι η συνάρτηση $g(x) = \log_a x$, $x > 0$, που λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση a .

3.4.1 Ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης

Οι βασικές ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, είναι οι παρακάτω:

- Είναι συνάρτηση 1-1, άρα ισχύει ότι $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

- Αν $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή για κάθε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι $\log_a x_1 < \log_a x_2$

Ισχύει ότι: $\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\log x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

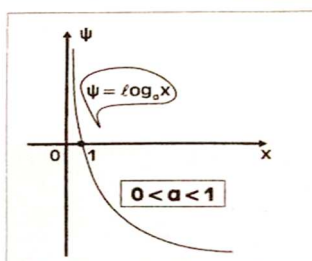
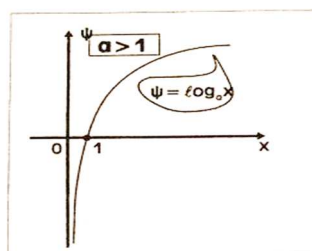
$$\log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

- Αν $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή για κάθε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι $\log_a x_1 > \log_a x_2$

Ισχύει ότι: $\log_{0,1} x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$

$$\log_{0,1} x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\log_{0,1} x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



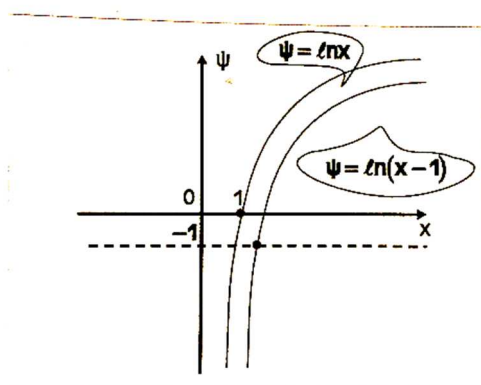
Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης δίνεται στο παραπάνω σχήμα.

3.4.2 Εφαρμογές

1. Στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln x - 1$

Λύση

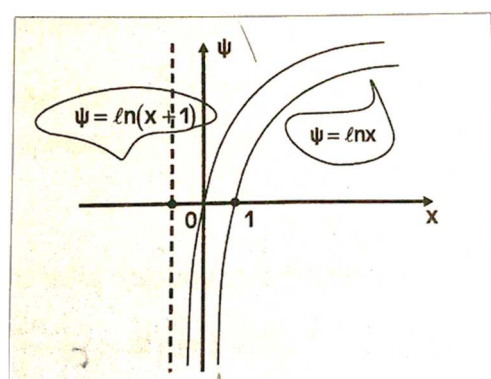
Η γραφική παράσταση της $g(x) = \ln x - 1$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = \ln x$ προς τα κάτω, κατά μια μονάδα. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δίνονται στο διπλανό σχήμα.



2. Στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x+1)$

Λύση

Η γραφική παράσταση της $g(x) = \ln(x+1)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = \ln x$ κατά μια μονάδα, προς τα αριστερά και δίνεται στο διπλανό σχήμα.

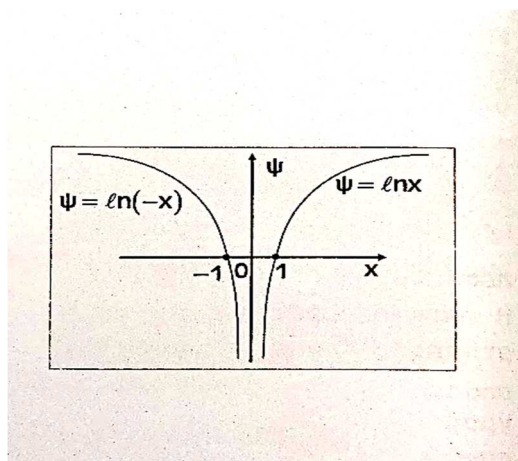


3. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις **i)** $f(x) = \ln|x|$, **ii)** $f(x) = |\ln x|$

Λύση

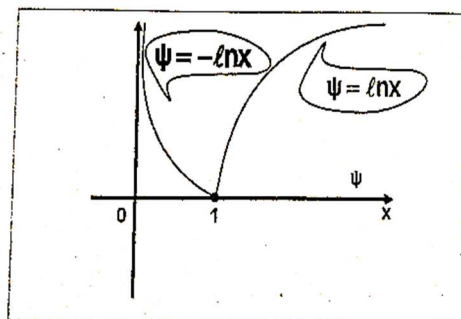
i) Είναι $x \in \mathbb{R}^*$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $f(x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$

Άρα, η f είναι άρτια συνάρτηση οπότε η γραφική της παράσταση της έχει ως άξονα συμμετρίας τον άξονα yy' και δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



ii) Είναι $f(x) = |\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα τμήματα των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = -\ln x$ με $0 < x < 1$ και $f(x) = \ln x$ με $x \geq 1$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



4. Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων **i)** $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

ii) $f(x) = \ln(x^2 - 1) - 2\ln(4 - x^2)$

Λύση

i) Πρέπει $\frac{2-x}{2+x} > 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$

Άρα, η συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $(-2, 2)$.

ii) Πρέπει

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 > 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x+1) > 0 \\ (2-x)(2+x) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x \in (-4, 4) \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (-4, -1) \cup (1, 4)$$

Άρα, η συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $(-4, -1) \cup (1, 4)$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις **i)** $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$, **ii)** $g(x) = \ln\left(\frac{x-\pi}{x+\pi}\right) \eta\mu x$

Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και ότι η συνάρτηση g είναι άρτια.

Απόδειξη

i) Πρέπει $\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x$

α) Αν $x \leq 0$, τότε η παραπάνω σχέση είναι αληθής διότι $\sqrt{x^2+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

β) Αν $x > 0$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $(\sqrt{x^2+1})^2 > x^2 \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$

αληθής $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άρα, η παραπάνω σχέση αληθεύει $\forall x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η f έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = \ln \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \ln \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \ln 1 - \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = 0 - f(x) = -f(x) \end{aligned}$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι περιττή.

ii) Πρέπει $\frac{x-\pi}{x+\pi} > 0 \Leftrightarrow (x-\pi)(x+\pi) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \pi \\ \text{ή} \\ x < -\pi \end{cases}$

Άρα, η συνάρτηση g έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$

$\forall x \in A$ ισχύει

$$g(-x) = \ln\left(\frac{-x-\pi}{-x+\pi}\right) \eta\mu(-x) = -\ln\left(\frac{x+\pi}{x-\pi}\right) \eta\mu x = -\ln\left(\frac{1}{\frac{x-\pi}{x+\pi}}\right) \eta\mu x = -\left(-\ln\frac{x-\pi}{x+\pi}\right) \eta\mu x = g(x)$$

Άρα, η g είναι άρτια συνάρτηση.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{10^x}{1+10^x}$ με $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

και να βρεθεί η f^{-1} .

Απόδειξη

Δείχνω ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχω

$$\frac{10^{x_1}}{1+10^{x_1}} = \frac{10^{x_2}}{1+10^{x_2}} \Leftrightarrow$$

$$10^{x_1}(1+10^{x_2}) = 10^{x_1}(1+10^{x_2}) \Leftrightarrow$$

$$10^{x_1} + 10^{x_1+x_2} = 10^{x_2} + 10^{x_1+x_2} \Leftrightarrow$$

$$10^{x_1} = 10^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι 1-1, συνεπώς είναι αντιστρέψιμη.

Εύρεση του τύπου της f^{-1} .

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{10^x}{1+10^x} = y \Leftrightarrow 10^x = y(1+10^x) \Leftrightarrow 10^x = y + y \cdot 10^x \Leftrightarrow$$

$$10^x - y \cdot 10^x = y \Leftrightarrow 10^x = \frac{y}{1-y}, y \neq 1$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\frac{y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow y(1-y) > 0 \Leftrightarrow y \in (0,1)$. Η μοναδική λύση αυτής είναι η $x = \log \frac{y}{1-y}$

$$\text{Άρα, είναι } \left\{ \begin{matrix} f(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = \log \frac{y}{1-y} \\ y \in (0,1) \end{matrix} \right\} \text{ Συνεπώς, } f^{-1}(x) = \log \frac{x}{1-x}, \text{ με } x \in (0,1)$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και έπειτα να βρεθεί η f^{-1} .

Λύση

Πρέπει $\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$. Άρα, η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-1,1)$. Αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε είναι

$$\ln\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\right) = \ln\left(\frac{1-x_2}{1+x_2}\right) \Leftrightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow (1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1) \Leftrightarrow$$

$$1+x_2-x_1 = x_1x_2 = 1+x_1-x_2 = x_1x_2 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι συνάρτηση 1-1 οπότε είναι αντιστρέψιμη. Εύρεση της $f^{-1}(x)$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow 1-x = e^y(1+x) \Leftrightarrow 1-x = e^y + xe^y \Leftrightarrow$$

$$xe^y + x = 1 - e^y \Leftrightarrow (e^y + 1)x = 1 - e^y \Leftrightarrow x = \frac{1 - e^y}{1 + e^y}$$

Επειδή $x \in (-1,1) \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\left| \frac{1 - e^y}{1 + e^y} \right| < 1 \Leftrightarrow |1 - e^y| < |1 + e^y| \Leftrightarrow (1 - e^y) < (1 + e^y) \Leftrightarrow 1 - 2e^y + e^{2y} < 1 + 2e^y + e^{2y} \Leftrightarrow$$

$$4e^y > 0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \text{ Άρα, } f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{1 - e^y}{1 + e^y}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα, } f^{-1}(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}, x \in \mathbb{R}$$

8. Υπολογίστε τους λογαρίθμους **(i)** $\log_{3\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$, **(ii)** $\log_{0,04} 5$, **(iii)** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

Λύση

$$\text{(i) Έστω } \log_{3\sqrt{3}} 9\sqrt{3} = x. \text{ Τότε } (3\sqrt{3})^x = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow (3 \cdot 3^{1/2})^x = 3^2 \cdot 3^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$\left(3^{1+\frac{1}{2}}\right)^x = 3^{2+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\text{(ii) Έστω } \log_{0,04} 5 = x. \text{ Τότε}$$

$$(0,04)^x = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{100}\right)^x = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^x = 5 \Leftrightarrow (5^{-2})^x = 5 \Leftrightarrow 5^{-2x} = 5 \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

(iii) Έστω $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = x$. Τότε $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{1/2} \Leftrightarrow -x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

9. Βρείτε το x αν (i) $\log_{\frac{1}{6}} x = \frac{-2}{3}$, (ii) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{3}$

Λύση

(i) $\log_{\frac{1}{6}} x = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{-2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2} = 2^2 = 4$

(ii) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$

10. Δείξτε ότι:

(i) $3 \log 2 - \log 18 = \frac{1}{2} \log 16 + \log 9 - 4 \log 3$, (ii) $\frac{2}{3} = \frac{\log 49 - 3 \log 4}{3 \log 7 - 6 \log \sqrt{8}}$

Λύση

(i) $\log 2^3 - \log 18 = \log 16^{1/2} + \log 9 - \log 3^4 \Leftrightarrow \log \frac{2^3}{18} = \log \frac{16^{1/2} \cdot 9}{3^4} \Leftrightarrow$

$\frac{8}{18} = \frac{4 \cdot 9}{81} \Leftrightarrow \frac{4}{9} = \frac{36}{81}$ Ισχύει

(ii) $\frac{\log 49 - 3 \log 4}{3 \log 7 - 6 \log \sqrt{8}} = \frac{\log 49 - \log 4^3}{\log 7^3 - \log \sqrt{8}^6} = \frac{\log 7^2 - \log 8^2}{\log 7^3 - \log 8^3} = \frac{\log \frac{7^2}{8^2}}{\log \frac{7^3}{8^3}} = \frac{2 \cdot \log \frac{7}{8}}{3 \cdot \log \frac{7}{8}} = \frac{2}{3}$

11. Υπολογίστε την τιμή των παραστάσεων (i) $2^{3+\log_2 3}$, (ii) $25^{\frac{1}{2}-\log_5 2}$

Λύση

(i) $2^{3+\log_2 3} = 2^3 2^{\log_2 3} = 8 \cdot 3 = 24$

(ii) $25^{\frac{1}{2}-\log_5 2} = (5^2)^{\frac{1}{2}-\log_5 2} = \frac{5}{5^{2 \log_5 2}} = \frac{5}{5^{\log_5 2^2}} = \frac{5}{4}$

12. Δείξτε ότι $\log_2 \left(\log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}}}_{\nu \text{ ριζικά}} \right) = -\nu$

Λύση

$\log_2 \left(\log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}}}_{\nu \text{ ριζικά}} \right) = \log_2 \left(\log_2 {}^{2\nu}\sqrt{2} \right) = \log_2 \left(\log_2 2^{\frac{1}{2^\nu}} \right) = \log \left(\frac{1}{2^\nu} \log_2 2 \right) =$

$\log_2 \frac{1}{2^\nu} = -\log_2 2^\nu = -\nu$

13. Δείξτε ότι (i) $\log_{\alpha} \theta = \frac{1}{\log_{\theta} \alpha}$, ($0 < \alpha, \theta \neq 1$), (ii) $3^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 2$, (iii)

$$\log_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \log_{\frac{1}{\beta}} a\sqrt{a} = \frac{3}{4}$$

Λύση

(i) $\log_{\alpha} \theta = \frac{\log_{\theta} \theta}{\log_{\theta} \alpha} = \frac{1}{\log_{\alpha} \theta}$

(ii) $3^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 3^{\log_3 2} = 2$

(iii) $\log_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \log_{\frac{1}{\beta}} (a\sqrt{a}) = \frac{\log \frac{1}{\sqrt{\beta}}}{\log \alpha} \cdot \frac{\log (a\sqrt{a})}{\log \frac{1}{\beta}} = \frac{\log \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/2} \cdot \log a^{3/2}}{\log \alpha \cdot \log \frac{1}{\beta}} =$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \log \frac{1}{\beta} \cdot \frac{3}{2} \cdot \log a}{\log \alpha \cdot \log \frac{1}{\beta}} = \frac{3}{4}$$

14. Λύστε την εξίσωση $\log(3x-2) - 2 = \frac{1}{2} \log(x+2) - \log 50$

Λύση

Πρέπει $\left\{ \begin{array}{l} 3x-2 > 0 \\ \text{και} \\ x+2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{2}{3} \\ \text{και} \\ x > -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

$$\log(3x-2) - \log 10^2 = \log(x+2)^{1/2} - \log 50 \Leftrightarrow$$

$$\log \frac{3x-2}{100} = \log \frac{\sqrt{x+2}}{50} \Leftrightarrow \frac{3x-2}{100} = \frac{\sqrt{x+2}}{50} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x+2} = 3x-2 \xrightarrow{x > \frac{2}{3}} 4(x+2) = (3x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x+8 = 9x^2 - 12x + 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 16x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{2}{9} \text{ (απορρίπτεται)} \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{array} \right.$$

15. Λύστε την εξίσωση $\sqrt{\log_2 x} - \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{x}$

Λύση

Πρέπει $x > 0$ και $\log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \geq \log_2 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

Είναι $\sqrt{\log_2 x} - \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 x$

Θέτω $y = \sqrt{\log_2 x}$ οπότε είναι $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Άρα, $\sqrt{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$, δεκτή.

16. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $\log x$, $\log 2\sqrt{3}$, $\log(x-1)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

Λύση

Πρέπει $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \text{και} \\ x-1 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 1$ Το ζητούμενο, ισχύει μόνο όταν

$$2\log 2\sqrt{3} = \log x + \log(x-1) \Leftrightarrow \log(2\sqrt{3})^2 = \log[x(x-1)] \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 3 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -3, \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ 4, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

17. Λύστε την εξίσωση $5^{3x-1} = 2^{x+3}$

Λύση

Λογαριθμίζω

$$\log 5^{3x-1} = \log 2^{x+3} \Leftrightarrow$$

$$(3x-1)\log 5 = (x+3)\log 2 \Leftrightarrow$$

$$3x\log 5 - \log 5 = x\log 2 + 3\log 2 \Leftrightarrow$$

$$3x\log 5 - x\log 2 = 3\log 2 + \log 5 \Leftrightarrow$$

$$(3\log 5 - \log 2)x = 3\log 2 + \log 5 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3\log 2 + \log 5}{3\log 5 - \log 2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log 2^3 + \log 5}{\log 5^3 - \log 2} = \frac{\log 40}{\log \frac{125}{2}}$$

18. Λύστε την ανίσωση $\log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 9) > \log_{\frac{2}{3}}(8x)$

Λύση

$$\text{Πρέπει } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 9 > 0 \\ \text{και} \\ 8x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \text{ ή } x > 3 \\ \text{και} \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 3$$

Η δοθείσα ανίσωση γράφεται $x^2 - 9 < 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 9$

Και λόγω του περιορισμού, τελικά είναι $3 < x < 9$.

19. Δείξτε ότι $\log_3 2 < \log_6 4$

Λύση

$$\log_3 2 < \log_6 4 \Leftrightarrow \frac{\log 2}{\log 3} < \frac{\log 4}{\log 6} \Leftrightarrow \frac{\log 2}{\log 3} < \frac{\log 2^2}{\log 6} \Leftrightarrow \frac{\log 2}{\log 3} < \frac{2 \log 2}{\log 6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\log 3} < \frac{2}{\log 6} \Leftrightarrow \log 3 > \frac{\log 6}{2} \Leftrightarrow 2 \log 3 > \log 6 \Leftrightarrow \log 3^2 > \log 6 \Leftrightarrow 3^2 > 6$$

Η τελευταία σχέση ισχύει. Έγινε χρήση της σχέσης $\log 2 > 0, \log 3 > 0, \log 6 > 0$

20. Για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 - 6x + 5 = \log_2 \alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες;

Λύση

Είναι $x^2 - 6x + 5 = \log_2 \alpha \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \log_2 \alpha = 0$, οπότε πρέπει και αρκεί

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot (5 - \log_2 \alpha) > 0 \Leftrightarrow 36 - 20 + 4 \log_2 \alpha > 0 \Leftrightarrow 16 + 4 \log_2 \alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$4 + \log_2 \alpha > 0 \Leftrightarrow \log_2 \alpha > -4 \Leftrightarrow \log_2 \alpha > \log_2 2^{-4} \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{16}$$

21. Λύστε την ανίσωση $\frac{1}{2} \log^2 x + \log \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

Λύση

Πρέπει $x > 0$. Είναι

$$\frac{1}{2} \log^2 x + \log \frac{1}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \log^2 x - \log \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \log^2 x - \log x^{\frac{1}{2}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \log^2 x - \frac{1}{2} \log x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\log^2 x - \log x - 2 > 0$$

Θέτω $y = \log x$ οπότε

$$y^2 - y - 2 > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y < -1 \\ \text{ή} \\ y > 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log x < -1 \\ \text{ή} \\ \log x > 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log x < 10^{-1} \\ \text{ή} \\ \log x > 10^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{1}{10} \\ \text{ή} \\ x > 100 \end{array} \right\}$$

22. Βρείτε τα βρεθούν τα x για τα οποία (i) $\sqrt{x}^{\log_3 x - 1} = 3$ (ii) $x^{2 \log_{\frac{1}{4}} x} > x \cdot 16^{\log_{\frac{1}{4}} x}$

Λύση

(i) Πρέπει $x > 0$

Λογαριθμίζω με βάση το 3 (επειδή στον εκθέτη έχω λογάριθμο με βάση 3).

$$\log_3 \left(\sqrt{x}^{\log_3 x - 1} \right) = \log_3 3 \Leftrightarrow$$

$$(\log_3 x - 1) \log_3 \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\log_3 x - 1) \frac{1}{2} \log_3 x = 1$$

Θέτω $y = \log_3 x$, οπότε η παραπάνω ισότητα γράφεται ως

$$\frac{1}{2}(y-1)y=1 \Leftrightarrow y^2-y-2=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=-1 \\ \text{ή} \\ y=2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 x=-1 \\ \text{ή} \\ \log_3 x=2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3^{-1}=\frac{1}{3} \\ \text{ή} \\ x=3^2=9 \end{array} \right\}$$

(ii) Πρέπει $x > 0$

Λογαριθμίζω με βάση το $\frac{1}{4}$ (επειδή στον εκθέτη έχω λογάριθμο με βάση $\frac{1}{4}$).

$$\log_{\frac{1}{4}} x^{2\log_{\frac{1}{4}} x} < \log_{\frac{1}{4}} \left(x \cdot 16^{\log_{\frac{1}{4}} x} \right) \Leftrightarrow$$

$$2\log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{4}} 16^{\log_{\frac{1}{4}} x} \Leftrightarrow$$

$$2\log_{\frac{1}{4}}^2 x < \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_{\frac{1}{4}} 16$$

$$\text{Είναι } \log_{\frac{1}{4}} 16 = \log_{\frac{1}{4}} 4^2 = 2\log_{\frac{1}{4}} 4 = 2\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} = -2\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = -2$$

Άρα,

$$2\log_{\frac{1}{4}}^2 x < \log_{\frac{1}{4}} x - 2\log_{\frac{1}{4}} x \Leftrightarrow$$

$$2\log_{\frac{1}{4}}^2 x + \log_{\frac{1}{4}} x < 0$$

Θέτω $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, οπότε η παραπάνω ανίσωση γράφεται ως

$$2y^2 + y < 0 \Leftrightarrow$$

$$y(2y+1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{2} < y < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{2} < \log_{\frac{1}{4}} x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{-1}{2}} < \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(4^{-1} \right)^{\frac{-1}{2}} < \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 2 < \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} 1 \Leftrightarrow$$

$$2 > x > 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

23. Υπολογίστε τους λογαρίθμους

α) $\log_2 16$ **β)** $\log_4 \frac{1}{32}$ **γ)** $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ **δ)** $\log_{\sqrt{8}} 32$

Λύση

α) Είναι $\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

β) Είναι

$$\log_4 \frac{1}{32} = x \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{-5} \Leftrightarrow$$

$$2^{2x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -2,5$$

γ) Είναι

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27} \Leftrightarrow$$

$$3^{-x} = (27)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{-x} = (3^3)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$-x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

δ) Είναι

$$\log_{\sqrt{8}} 32 = x \Leftrightarrow (\sqrt{8})^x = 32 \Leftrightarrow (\sqrt{2^3})^x = 2^5 \Leftrightarrow$$

$$2^{\frac{3x}{2}} = 2^5 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

24. Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων **α)** $A = \frac{1 + 4 \log 2 - 3 \log 4 + \frac{1}{3} \log 8}{\log 75 - 2 \log \sqrt{3}}$

β) $e^{\frac{1}{2} \ln 9 - \frac{2}{3} \ln 8 + \ln 12}$ **γ)** $A = \frac{\log 45}{\log 3} - \frac{\ln 5}{\ln 3}$

Λύση

α) Είναι

$$A = \frac{1 + 4 \log 2 - 3 \log 4 + \frac{1}{3} \log 8}{\log 75 - 2 \log \sqrt{3}} = \frac{1 + \log 2^4 - \log 4^3 + \log 8^{1/3}}{\log 75 - \log \sqrt{3}^2} =$$

$$\frac{1 + \log 16 - \log 64 + \log 2}{\log 75 - \log 3} = \frac{1 + \log \frac{16 \cdot 2}{64}}{\log \frac{75}{3}} =$$

$$\frac{1 + \log \frac{1}{2}}{\log 25} = \frac{1 + \log 2^{-1}}{\log 25} = \frac{1 - \log 2}{\log 25} = \frac{\log \frac{10}{2}}{\log 5^2} = \frac{\log 5}{2 \log 5} = \frac{1}{2}$$

β) Υπολογίζω τον εκθέτη της παράστασης B.

$$\frac{1}{2} \ln 9 - \frac{2}{3} \ln 8 + \ln 12 =$$

$$\ln 9^{\frac{1}{2}} - \ln 8^{2/3} + \ln 12 =$$

$$\ln \sqrt{9} - \ln \sqrt[3]{8^2} + \ln 12 =$$

$$\ln 3 - \ln 4 + \ln 12 =$$

$$\ln \frac{3 \cdot 12}{4} = \ln 9 \quad \text{Έτσι, η παράσταση B γίνεται } B = e^{\ln 9} = 9$$

γ) Από τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων είναι $\frac{\log 45}{\log 3} = \log_3 45$, $\frac{\ln 5}{\ln 3} = \log_3 5$

Άρα,

$$A = \frac{\log 45}{\log 3} - \frac{\ln 5}{\ln 3} = \log_3 45 - \log_3 5 =$$

$$\log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

25. Βρείτε τις τιμές του x αν **α)** $\log_4 x = 3$ **β)** $\log x = -3$

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου είναι

α) $\log_4 x = 3 \Leftrightarrow x = 4^3 = 64$

β) $\log x = -3 \Leftrightarrow x = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$

26. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχει νόημα κάθε μια από τις επόμενες εκφράσεις;

α) $\log(1-|x|)$ **β)** $\log_x(3-2x)$ **γ)** $\log_{2x}(x^2-x+1)$

Λύση

α) Πρέπει $1-|x| > 0 \Leftrightarrow 1 > |x| \Leftrightarrow -1 < x < 1$

β) Πρέπει $\left\{ \begin{array}{l} 3-2x > 0 \\ \text{και} \\ 0 < x \neq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{3}{2} \\ \text{και} \\ 0 < x \neq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$

γ) Επειδή $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^2-x+1) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ πρέπει

$$0 < 2x \neq 1 \Leftrightarrow 0 < x \text{ και } x \neq \frac{1}{2}$$

27. Αν $a, \beta \in \mathbb{R}^+$ δείξτε ότι $a^{\log \beta} = \beta^{\log a}$

Απόδειξη

Είναι

$$a^{\log \beta} = \beta^{\log a} \Leftrightarrow$$

$$\log(a^{\log \beta}) = \log(\beta^{\log a}) \Leftrightarrow$$

$$\log \beta \cdot \log a = \log a \cdot \log \beta$$

Η τελευταία σχέση ισχύει

28. Αν $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ δείξτε ότι $\log_a \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma a = 1$

Λύση

Από τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων είναι

$$\log_a \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma a = \frac{\ln \beta}{\ln a} \frac{\ln \gamma}{\ln \beta} \frac{\ln a}{\ln \gamma} = 1$$

29. Αν $\log(x^2 y^2) = a$ και $\log x - \log y = \beta$ εκφράστε τα $\log x, \log y$ συναρτήσει των α, β

Λύση

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \log(x^2 y^2) = a \\ \log x - \log y = \beta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \log x + 2 \log y = a \\ \log x - \log y = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \log x + 3 \log y = a \\ 3 \log x - 3 \log y = 3\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} 5 \log x = a + 3\beta \\ \log x - \log y = \beta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log x = \frac{a + 3\beta}{5} \\ \log y = \log x - \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log x = \frac{a + 3\beta}{5} \\ \log y = \frac{a + 3\beta}{5} - 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log x = \frac{a + 3\beta}{5} \\ \log y = \frac{a - 2\beta}{5} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

30. Αν $\alpha > 1, \beta > 1$ υπολογίστε την τιμή της παράστασης
 $y = \log(\alpha^2 - 1) + \log(\beta^2 - 1) - \log[(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta)]$

Λύση

$$\begin{aligned} (\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta) &= \\ [(\alpha\beta + 1) + (\alpha + \beta)] \cdot [(\alpha\beta + 1) - (\alpha + \beta)] &= \\ [(\alpha\beta + \alpha) + (\beta + 1)] \cdot [(\alpha\beta - \alpha) - (\beta - 1)] &= \\ [\alpha(\beta + 1) + (\beta + 1)] \cdot [\alpha(\beta - 1) - (\beta - 1)] &= \\ (\beta + 1)(\alpha + 1) \cdot (\beta - 1)(\alpha - 1) &= \\ [(\alpha + 1)(\alpha - 1)] \cdot [(\beta + 1)(\beta - 1)] &= \\ (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) &= \\ \text{Συνεπώς, } y = \log[(\alpha^2 - 1) \cdot (\beta^2 - 1)] - \log[(\alpha^2 - 1) \cdot (\beta^2 - 1)] &= 0 \end{aligned}$$

31. Αν $\log 2 \approx 0,3$, υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$y = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} (2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

Λύση

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log[(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})] = \\ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log[2^2 - (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2] &= \\ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log[4 - (2 + \sqrt{2})] &= \\ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log(2 - \sqrt{2}) &= \\ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log[(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})] &= \\ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log[2^2 - (\sqrt{2})^2] &= \\ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 0,3 & \end{aligned}$$

32. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ με $\alpha\beta \neq 1$, δείξτε ότι $\log_{\alpha\beta} \gamma = \frac{\log_{\beta} \gamma}{1 + \log_{\beta} \alpha}$

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \log_{\alpha\beta} \gamma = \frac{\log_{\beta} \gamma}{\log_{\beta}(\alpha\beta)} = \frac{\log_{\beta} \gamma}{\log_{\beta} \alpha + \log_{\beta} \beta} = \frac{\log_{\beta} \gamma}{\log_{\beta} \alpha + 1}$$

33. Δείξτε ότι $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \dots \log_7 8 = 3$

Απόδειξη

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \dots \log_7 8 =$$

$$\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \dots \frac{\log 8}{\log 7} =$$

$$\frac{\log 8}{\log 2} =$$

$$\frac{\log 2^3}{\log 2} = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

34. Αν για τους διαφορετικούς μεταξύ τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ ισχύει $\frac{\log a}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$

δείξτε ότι $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = 1$

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \frac{\log a}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \log a = k(\beta - \gamma) \\ \log \beta = k(\gamma - \alpha) \\ \log \gamma = k(\alpha - \beta) \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (1) επί α , την (2) επί β και την (3) επί γ και προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις που θα προκύψουν, λαμβάνω

$$\alpha \log a + \beta \log \beta + \gamma \log \gamma =$$

$$k(\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma) =$$

$$k \cdot 0 = 0 = \log 1$$

Είναι

$$\log a^{\alpha} + \log \beta^{\beta} + \log \gamma^{\gamma} = \log 1 \Leftrightarrow$$

$$\log(a^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma}) = \log 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = 1$$

35. Δείξτε ότι αν $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$, τότε ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$

Απόδειξη

$$\text{Αν θέσω } x = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \text{ έχω } f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right) = \log \frac{1 - \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}}{1 + \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}} =$$

$$\log \frac{1 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} = \log \frac{(1 - \alpha) - \beta(1 - \alpha)}{(1 + \alpha) + \beta(1 + \beta)} =$$

$$\log \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{(1 + \alpha)(1 + \beta)} = \log \left[\frac{1 - \alpha}{1 + \beta} \cdot \frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \right] =$$

$$\log \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} + \log \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = f(\alpha) + f(\beta)$$

36. Αν $0 < a \neq 1$ και $\beta = \frac{1}{2}(\alpha^x - a^{-x})$, δείξτε ότι $x = \log_a(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})$

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \beta = \frac{1}{2}(\alpha^x - a^{-x}) \Rightarrow 2\beta = \alpha^x - a^{-x} = \alpha^x - \frac{1}{\alpha^x} \Rightarrow (\alpha^x)^2 - 2\beta\alpha^x - 1 = 0$$

Θέτω $t = \alpha^x$, ($t > 0$), οπότε $t^2 - 2\beta t - 1 = 0$ και επειδή $t > 0$ έχω αν λύσω την

$$\text{τελευταία εξίσωση } t = \frac{2\beta + \sqrt{4\beta^2 + 4}}{2} = \frac{2\beta + 2\sqrt{\beta^2 + 1}}{2} = \beta + \sqrt{\beta^2 + 1}$$

Αλλά $t = \alpha^x$, οπότε είναι

$$\alpha^x = \beta + \sqrt{\beta^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\log_a \alpha^x = \log_a(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1}) \Rightarrow$$

$$x \cdot \log_a a = x = \log_a(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})$$

37. Αν $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ και $\alpha\beta \neq 1$, δείξτε ότι

$$\log_a x + \log_\beta x = \log_a \beta (1 + \log_\beta a)^2 \cdot \log_{\alpha\beta} x$$

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \log_a x = \frac{\log_\theta x}{\log_\theta a} = \frac{1}{\log_\theta a} \cdot \log_\theta x = \log_a \theta \text{ διότι } \log_a \theta \cdot \log_\theta a = 1$$

Εφαρμόζω τον παραπάνω τύπο με $\theta = \alpha\beta$, οπότε

$$\log_a x = \log_a(\alpha\beta) \cdot \log_{\alpha\beta} x = \log_{\alpha\beta} x (\log_a \alpha + \log_a \beta) =$$

$$\log_{\alpha\beta} x (1 + \log_a \beta) = \log_{\alpha\beta} x \left(1 + \frac{1}{\log_\beta a} \right) = \log_{\alpha\beta} x \cdot \frac{1 + \log_\beta a}{\log_\beta a}$$

Επίσης είναι

$$\log_\beta x = \log_\beta(\alpha\beta) \cdot \log_{\alpha\beta} x =$$

$$\log_{\alpha\beta} x (\log_\beta \alpha + \log_\beta \beta) = \log_{\alpha\beta} x (1 + \log_\beta \alpha)$$

Από πρόσθεση των παραπάνω σχέσεων, κατά μέλη, λαμβάνω

$$\log_a x + \log_\beta x =$$

$$\log_{\alpha\beta} x (1 + \log_\beta \alpha) \left(1 + \frac{1}{\log_\beta a} \right) =$$

$$\log_{\alpha\beta} x (1 + \log_{\beta} \alpha) \frac{1 + \log_{\beta} \alpha}{\log_{\beta} \alpha} =$$

$$\log_{\alpha\beta} x (1 + \log_{\beta} \alpha^2) \frac{1}{\log_{\beta} \alpha} = \log_{\alpha\beta} x (1 + \log_{\beta} \alpha^2) \cdot \log_{\alpha} x \beta$$

Έτσι έχω

$$\log_{\alpha} \beta \cdot (1 + \log_{\beta} \alpha)^2 \cdot \log_{\alpha\beta} x =$$

$$\log_{\alpha} \beta (1 + \log_{\beta} \alpha)^2 \cdot \frac{\log_{\beta} x}{1 + \log_{\beta} \alpha} =$$

$$(1 + \log_{\beta} \alpha) \cdot \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} x =$$

$$\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} x + \log_{\beta} \alpha \cdot \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} x =$$

$$\log_{\alpha} x + 1 \cdot \log_{\beta} x$$

$$\textbf{Επεξήγηση} \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} x = \log_{\alpha} x \text{ και ότι } \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \beta = 1$$

38. Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \log|\log x|$. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και λύστε την εξίσωση $f(x) = 0$

Λύση

Πρέπει $x > 0$ και $\log x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\log|\log x| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log|\log x| = \log 1 \Leftrightarrow$$

$$|\log x| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log x = \log 10 \\ \log x = \log \frac{1}{10} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ x = \frac{1}{10} \end{array} \right\}$$

39. Πόσα ακέραια ψηφία έχει ένας αριθμός, του οποίου ο λογάριθμος έχει χαρακτηριστικό 3, 5, 0, 1, 7, 4, 2 ;

Απάντηση

Ο αριθμός έχει 4, 6, 1, 2, 8, 5, 3 αντιστοίχως, ακέραια ψηφία

40. Βρείτε το y , αν $y = \frac{1}{2} \log(4 + \sqrt{7}) + \frac{1}{2} \log(4 - \sqrt{7})$

Λύση

$$\text{Είναι } y = \frac{1}{2} \log(4 + \sqrt{7}) + \frac{1}{2} \log(4 - \sqrt{7}) =$$

$$\frac{1}{2} \log[(4 + \sqrt{7}) \cdot (4 - \sqrt{7})] =$$

$$\frac{1}{2} \log(16 - 7) =$$

$$\frac{1}{2} \log 9 =$$

$$\frac{1}{2} \log 3^2 = \log 3 = \text{γνωστό}$$

41. Αν $\alpha = 0,27355$, $\beta = 29,534$, $\gamma = 44,340$, υπολογίστε την αριθμητική τιμή του x που ορίζεται από τη σχέση $\frac{x^2}{a^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$.

Λύση

Είναι

$$\frac{x^2}{a^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \Leftrightarrow x^2 = a^2 \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \Leftrightarrow x = a \cdot \sqrt[4]{\frac{\beta}{\gamma}} \Leftrightarrow$$

$$\log x = \log \left(a \cdot \sqrt[4]{\frac{\beta}{\gamma}} \right) = \log a + \log \sqrt[4]{\frac{\beta}{\gamma}} =$$

$$\log a + \frac{1}{4} \log \frac{\beta}{\gamma} = \log a + \frac{1}{4} (\log \beta - \log \gamma) = 1,39292$$

Άρα, $x = 0,24713$

4. Βιβλιογραφία

- Γκρατζούλης, Κ. & Στράνης, Κ. (1997). «Άλγεβρα Β' λυκείου», Θεσσαλονίκη, εκδόσεις Γκρατζούλη
- Παπαδάκης, Β. (2008). «Άλγεβρα Β' λυκείου», τόμος Β2, Αθήνα, εκδόσεις Σαββάλας
- Τζιρώνης, Κ. & Τζουβάρας, Θ. (1993). «Άλγεβρα Β' λυκείου», Αθήνα, εκδόσεις Σαββάλας
- Στεργίου, Χ., Νάκης, Χ. & Στεργίου, Ι. (2009). «Μεθοδική άλγεβρα Β' λυκείου, γενικής παιδείας», Αθήνα, εκδόσεις Σαββάλας