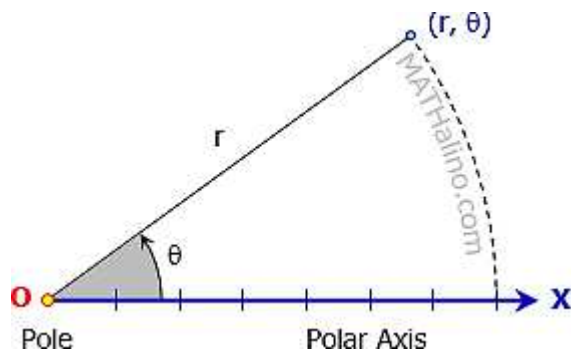




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου  
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία

Γραφική παράσταση καμπύλης και εμβαδόν χωρίου, σε πολικές συντεταγμένες

Σπουδαστές: **Κωνσταντής Στυλιανός** (AM 9062)  
**Μήτσης Παύλος** (AM 9074)

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς**, Μαθηματικός (M.Ed.),  
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2024–2025**

Ημερομηνία ανάθεσης: **15.12.2023**  
 Ημερομηνία κατάθεσης: **....01.2025**  
 Ημερομηνία εξέτασης: **....01.2025**

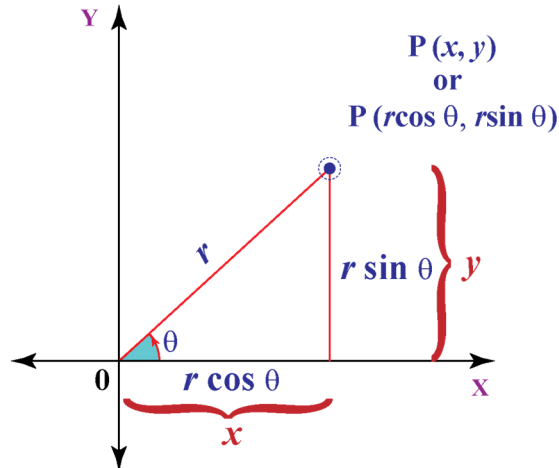
| A/A                   | Όνοματεπώνυμο                                                      | Χαρακτηρισμός | Υπογραφή |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------|----------|
| <b>1</b>              | Στέφανος Ι. Καρναβάς<br>Μαθηματικός (M.Ed.)<br>Επίκουρος Καθηγητής | Άριστα<br>10  |          |
| <b>2</b>              | Δρ. Λάλου Παναγιώτα<br>Μαθηματικός<br>Καθηγήτρια                   |               |          |
| <b>3</b>              | Τσαγκανός Γεώργιος<br>Μηχανικός Αυτοματισμού (M.sc.)<br>ΕΔΙΠ       |               |          |
| Τελικός χαρακτηρισμός |                                                                    |               |          |

## Πίνακας περιεχομένων

|                                                                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Ορισμός των πολικών συντεταγμένων .....                                                                                                                                         | 4  |
| 1.1 Εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες.....                                                                                                                             | 4  |
| 1.2 Σχέση μεταξύ των καρτεσιανών και των πολικών συντεταγμένων .....                                                                                                               | 4  |
| 1.3 Πλεονεκτήματα των πολικών συντεταγμένων .....                                                                                                                                  | 4  |
| 1.4 Εφαρμογές των πολικών συντεταγμένων .....                                                                                                                                      | 5  |
| 1.4.1 Μαθηματικά και γεωμετρία.....                                                                                                                                                | 5  |
| 1.4.2 Φυσική και μηχανική.....                                                                                                                                                     | 5  |
| 1.4.3 Ηλεκτρονικά και σηματοδοσία.....                                                                                                                                             | 5  |
| 1.4.4 Υπολογιστική γεωμετρία και εικόνα .....                                                                                                                                      | 5  |
| 1.4.5 Ρομποτική .....                                                                                                                                                              | 5  |
| 1.4.6 Αστρονομία .....                                                                                                                                                             | 5  |
| 1.4.7 Συγκοινωνία και αρχιτεκτονική.....                                                                                                                                           | 5  |
| 1.5 Πολικές συντεταγμένες και καμπύλες γραμμές.....                                                                                                                                | 6  |
| 1.5.1 Κύκλος.....                                                                                                                                                                  | 6  |
| 1.5.2 Σπείρα .....                                                                                                                                                                 | 6  |
| 1.5.3 Ελλειπτική καμπύλη .....                                                                                                                                                     | 6  |
| 1.5.4 Λογαριθμική σπείρα (Λογαριθμική καμπύλη) .....                                                                                                                               | 6  |
| 1.5.5 Ροζέτα ή καμπύλη ροδόσταγμα (Rose curve) .....                                                                                                                               | 7  |
| 1.5.6 Λυρική λογαριθμική καμπύλη (Logarithmic spiral) ή καμπύλη λογαρίθμου.....                                                                                                    | 7  |
| 1.5.7 Αστροειδής .....                                                                                                                                                             | 7  |
| 1.5.8 Ιπποκάμψη (ή καμπύλη καρδιάς).....                                                                                                                                           | 8  |
| 1.5.9 Κυματοειδείς καμπύλες .....                                                                                                                                                  | 8  |
| 2. Γραφική παράσταση καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες.....                                                                                                                        | 9  |
| 2.1 Εφαρμογές.....                                                                                                                                                                 | 9  |
| 3. Γραφική παράσταση καμπύλης της μορφής $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(k\theta)$ και $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(k\theta)$ .....                                         | 11 |
| 3.1 Εφαρμογές.....                                                                                                                                                                 | 11 |
| 4. Γραφική παράσταση καμπύλης της μορφής $\rho = \alpha \cdot \eta\mu\left(\frac{\theta}{k}\right)$ και $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{k}\right)$ ..... | 16 |
| 4.1 Εφαρμογές.....                                                                                                                                                                 | 16 |
| 5. Εμβαδόν χωρίου σε πολικές συντεταγμένες.....                                                                                                                                    | 19 |
| 5.1 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(k\theta)$ .....                                                                                                                | 19 |
| 5.1.1 Αν $k$ περιττός αριθμός.....                                                                                                                                                 | 19 |
| 5.1.2 Αν $k$ άρτιος αριθμός.....                                                                                                                                                   | 20 |
| 5.2 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(k\theta)$ .....                                                                                                      | 20 |
| 5.2.1 Αν $k$ περιττός αριθμός.....                                                                                                                                                 | 20 |
| 5.2.2 Αν $k$ άρτιος αριθμός.....                                                                                                                                                   | 21 |
| 5.3 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \pm \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(k\theta)$ .....                                                                                            | 21 |
| 5.3.1 Αν $\alpha > \beta$ (κατά απόλυτη τιμή).....                                                                                                                                 | 22 |
| 5.3.2 Αν $\alpha \leq \beta$ (κατά απόλυτη τιμή).....                                                                                                                              | 22 |
| 5.4 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \pm \beta \cdot \eta\mu(k\theta)$ .....                                                                                                      | 22 |
| 5.4.1 Αν $\alpha > \beta$ (κατά απόλυτη τιμή).....                                                                                                                                 | 22 |
| 5.4.2 Αν $\alpha \leq \beta$ (κατά απόλυτη τιμή).....                                                                                                                              | 22 |
| 6. Εφαρμογές .....                                                                                                                                                                 | 22 |

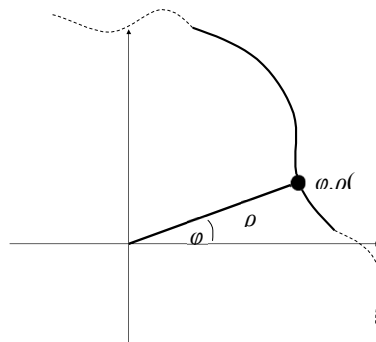
## 1. Ορισμός των πολικών συντεταγμένων

Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο, εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες,  $(x, y)$ , υπάρχουν πολλά εναλλακτικά συστήματα συντεταγμένων όπως οι πολικές συντεταγμένες. Οι πολικές συντεταγμένες είναι ένα σύστημα αναφοράς για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας δύο τιμές: τη γωνία και την απόσταση από μια σταθερή αρχή αναφοράς. Το σημείο του επιπέδου με πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  ορίζεται ως εξής. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $r$  που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την ημιευθεία  $Ox$ . Τότε το πέρας του ευθύγραμμάμου τμήματος είναι το σημείο με πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ .



### 1.1 Εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες

Μια καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί από μια εξίσωση της μορφής  $r = r(\theta)$ . Για κάθε τιμή του  $\theta$  υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή  $r(\theta)$  και ένα αντίστοιχο σημείο  $(\theta, r(\theta))$ .



### 1.2 Σχέση μεταξύ των καρτεσιανών και των πολικών συντεταγμένων

Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y)$  και των πολικών συντεταγμένων  $(\varphi, r)$  είναι η εξής:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ .

### 1.3 Πλεονεκτήματα των πολικών συντεταγμένων

Οι πολικές συντεταγμένες είναι πιο κατάλληλες για την περιγραφή καταστάσεων όπου υπάρχει κυκλική συμμετρία, π.χ., κύκλοι, σφαίρες ή κυκλικές

τροχιές. Επιτρέπουν ευκολότερους υπολογισμούς σε προβλήματα με συμμετρία γύρω από έναν άξονα, όπως η κίνηση σε κυκλικές τροχιές ή η μελέτη κυκλικών αντικειμένων.

## **1.4 Εφαρμογές των πολικών συντεταγμένων**

### **1.4.1 Μαθηματικά και γεωμετρία**

- Πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν καμπύλες και γεωμετρικά σχήματα που δεν περιγράφονται εύκολα σε καρτεσιανό σύστημα (π.χ. κύκλοι, σπειροειδείς καμπύλες, ακτινικές καμπύλες).
- Η εξίσωση ενός κύκλου, με κέντρο την αρχή του συστήματος των αξόνων και ακτίνα  $r$ , είναι απλή και παίρνει τη μορφή  $r = \text{σταθερό}$ , ενώ στο καρτεσιανό σύστημα θα χρειαζόταν μια πιο περίπλοκη εξίσωση.

### **1.4.2 Φυσική και μηχανική**

- Στη φυσική, οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη θέση ενός αντικειμένου σε κυκλικές κινήσεις, όπως η κίνηση των πλανητών ή των δορυφόρων γύρω από έναν πλανήτη.
- Στην ανάλυση των δυνάμεων και των ροπών, όταν έχουμε συμμετρία γύρω από έναν άξονα (π.χ., όταν μελετάμε τις δυνάμεις σε κυλινδρικές ή σε σφαιρικές γεωμετρίες), οι πολικές συντεταγμένες είναι πιο φυσικές για να εργαστούμε.

### **1.4.3 Ηλεκτρονικά και σηματοδότηση**

- Στην ανάλυση του σήματος, οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται στην περιγραφή των φάσεων και του πλάτους των κυμάτων.
- Στην τεχνολογία των ραντάρ και των τηλεπικοινωνιών, οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της θέσης και της γωνίας των εραπτομένων σημάτων.

### **1.4.4 Υπολογιστική γεωμετρία και εικόνα**

- Στη γραφική απεικόνιση και στην επεξεργασία εικόνας, οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της εικόνας σε στρογγυλές περιοχές (π.χ., αποθήκευση στρογγυλών ή κυκλικών σχημάτων σε εικόνες).
- Στα συστήματα πλοήγησης ή στη χαρτογραφία, τα πολικά συστήματα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης και της κατεύθυνσης με βάση το γεωγραφικό σύστημα.

### **1.4.5 Ρομποτική**

- Στη ρομποτική και στη μηχανική, οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της κίνησης των ρομπότ που ακολουθούν κυκλικές ή κυλινδρικές διαδρομές.
- Η ανάλυση της θέσης ενός ρομπότ σε ένα κυκλικό ή σε ένα κυλινδρικό περιβάλλον, γίνεται συχνά πιο εύκολη με τη χρήση των πολικών συντεταγμένων.

### **1.4.6 Αστρονομία**

Στην αστρονομία, η χρήση των πολικών συντεταγμένων διευκολύνει την περιγραφή της θέσης των ουράνιων σωμάτων σε κυκλικές ή ελλειπτικές τροχιές, όπως οι τροχιές των πλανητών γύρω από τον ήλιο.

### **1.4.7 Συγκοινωνία και αρχιτεκτονική**

Στην αρχιτεκτονική, οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και τη σχεδίαση κυκλικών ή σφαιρικών χώρων και κτιρίων.

### 1.5 Πολικές συντεταγμένες και καμπύλες γραμμές

Ακολουθούν μερικές από τις πιο κοινές καμπύλες που περιγράφονται σε πολικές συντεταγμένες και εκφράζονται μαθηματικά.

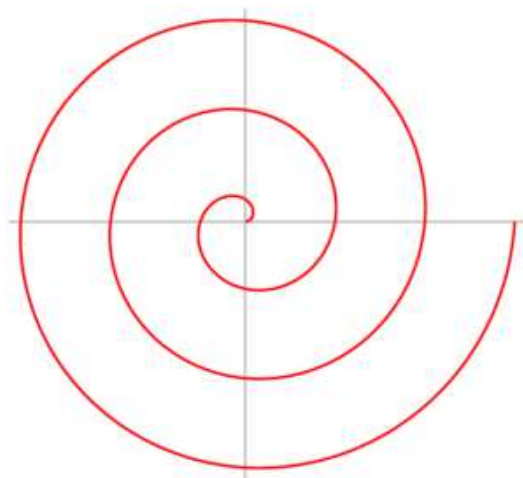
#### 1.5.1 Κύκλος

Ο κύκλος είναι η πιο απλή και κλασική καμπύλη που περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες. Στο καρτεσιανό σύστημα, ένας κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα  $r_0$  έχει την εξίσωση  $x^2 + y^2 = r_0^2$ . Στο πολικό σύστημα, ο κύκλος έχει την απλή εξίσωση  $r_0$ . Δηλαδή, σε πολικές συντεταγμένες η απόσταση  $r$  παραμένει σταθερή (ισοδύναμο με την ακτίνα του κύκλου), ενώ η γωνία  $\theta$  μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε τιμή από 0 έως  $2\pi$  (ή  $360^\circ$ ).

#### 1.5.2 Σπείρα

Μια σπειροειδής καμπύλη, είναι μια καμπύλη που διευρύνεται ή στενεύει καθώς περιστρέφεται γύρω από την αρχή. Η πιο γνωστή σπείρα, είναι η αρχιμήδεια σπείρα.

Η εξίσωση της αρχιμήδειας σπείρας σε πολικές συντεταγμένες είναι  $r = a + b\theta$  όπου  $a$  και  $b$  είναι σταθερές και  $\theta$  είναι η γωνία. Όσο αυξάνεται η γωνία  $\theta$ , η απόσταση  $r$  από την αρχή αυξάνεται, δημιουργώντας τη σπείρα.



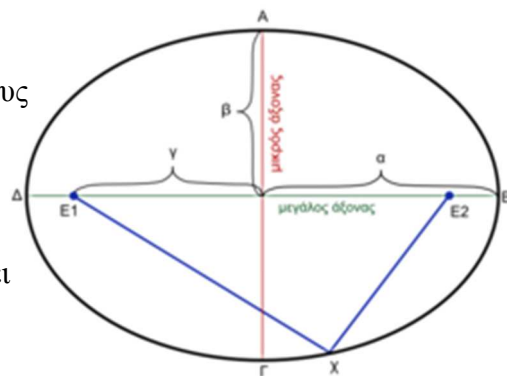
#### 1.5.3 Ελλειπτική καμπύλη

Η εξίσωση μιας έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες, έχει τη μορφή

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta)} \text{ όπου:}$$

- $\ell$  είναι μία σταθερά που συνδέεται με τους μεγάλους και μικρούς ημιάξονες της έλλειψης,
- $\varepsilon$  είναι η εκκεντρικότητα της έλλειψης (με  $0 \leq \varepsilon < 1$ ).

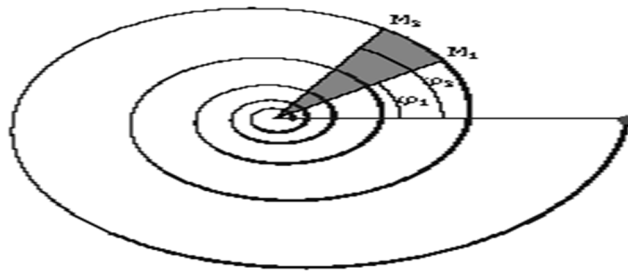
Η έλλειψη περιγράφει μια τροχιά με την αρχή της ως εστία και η καμπύλη έχει συμμετρία γύρω από τον άξονα  $r$ .



#### 1.5.4 Λογαριθμική σπείρα (Λογαριθμική καμπύλη)

Η λογαριθμική σπείρα είναι μια σπείρα στην οποία η απόσταση  $r$  αυξάνεται εκθετικά με τη γωνία  $\theta$ . Η εξίσωση της λογαριθμικής σπείρας σε πολικές συντεταγμένες, είναι  $r = ae^{b\theta}$  όπου  $a$ ,  $b$  είναι σταθερές. Η λογαριθμική σπείρα έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα ότι το ποσοστό αύξησης της απόστασης  $r$  είναι σταθερό, σε όλη τη διάρκεια της σπείρας.

Logarithmic spiral:  $a=1.1$

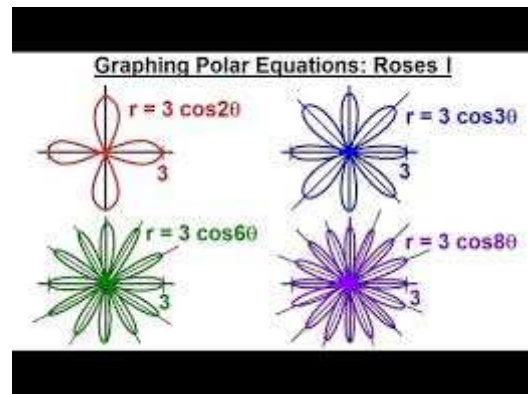


### 1.5.5 Ροζέτα ή καμπύλη ροδόσταγμα (Rose curve)

Η καμπύλη ροδόσταγμα ή ροζέτα είναι μια καμπύλη που σχηματίζει μοτίβα που μοιάζουν με πέταλα λουλουδιών, και περιγράφεται με την εξίσωση  $r = a \cdot \cos(k\theta)$  ή  $r = a \cdot \sin(k\theta)$ , όπου:

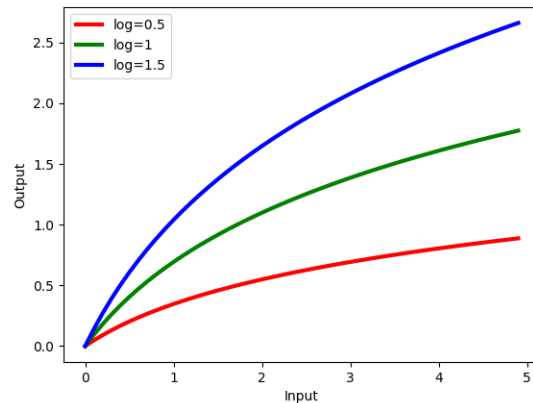
- $a$  είναι μία σταθερά,
- $k$  είναι ένας ακέραιος αριθμός που καθορίζει τον αριθμό των πετάλων της ροζέτας.

Ανάλογα με την τιμή του  $k$ , η καμπύλη μπορεί να έχει 2, 4, 6 ή και περισσότερα πέταλα.



### 1.5.6 Λυρική λογαριθμική καμπύλη (Logarithmic spiral) ή καμπύλη λογαρίθμου

Η λυρική λογαριθμική καμπύλη περιγράφεται με την εξίσωση  $r = a \cdot \ln \theta$  ενώ για καρτεσιανές συντεταγμένες  $y = a \cdot \ln x$ . Αυτή η καμπύλη συχνά εμφανίζεται σε φυσικά φαινόμενα, όπως η δομή του κελύφους των σαλιγκαριών ή οι τροχιές των πλανητών γύρω από τον ήλιο.



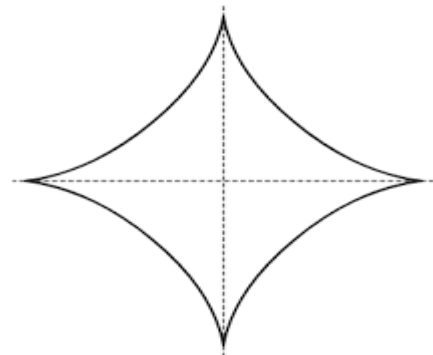
### 1.5.7 Αστροειδής

Η αστροειδής είναι μια καμπύλη που έχει χαρακτηριστικά που θυμίζουν τα άκρα ενός αστεριού. Η εξίσωση της αστροειδούς είναι:

$$r = a(1 + \cos \theta) \text{ όπου}$$

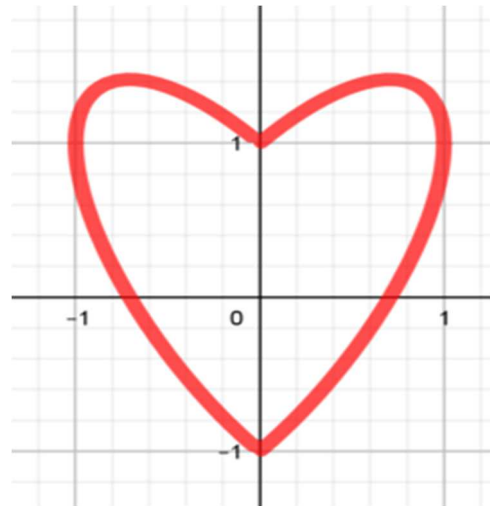
- $r$  είναι η απόσταση από το κέντρο
- $a$  είναι η σταθερά που καθορίζει το μέγεθος της καμπύλης
- $\theta$  είναι η γωνία (μεταβλητή)

Αυτή η καμπύλη συνήθως εμφανίζεται σε εφαρμογές γεωμετρίας και μηχανικής.



### 1.5.8 Ιπποκάμπη (ή καμπύλη καρδιάς)

Έχει την εξίσωση  $r = 1 + \cos \theta$ . Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα και αποτελείται από μια καρδιοειδή (για το επάνω μέρος) που συνδέεται με την καμπυλότητα της καρδιάς.



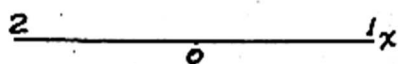
### 1.5.9 Κυματοειδείς καμπύλες

Έχουν την εξίσωση  $r = 1 + \sin \theta$

## 2. Γραφική παράσταση καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες

Όταν η εξίσωση μιας καμπύλης δίδεται σε πολικές συντεταγμένες, η γραφική παράσταση της γίνεται ως εξής: Κάθε καμπύλη η οποία δεν έχει σημεία ασυνέχειας (δηλαδή δεν έχει παρανομαστή) ορίζεται για τιμές του  $\theta$  από  $\theta = 0$  έως  $\theta = 2\pi$ . Για τις τιμές του  $\theta$  για τις οποίες το  $\rho$  είναι αρνητικό, λαμβάνω την τιμήν του  $\rho$  στην προέκταση του άξονα, οπότε το  $\rho$  γίνεται θετικό.

Π.χ. η παράσταση  $\rho = \sin\theta$  για  $\theta = \pi$  γίνεται  $\rho = \sin\theta = \sin\pi = -1$ . Αν λάβω στο αντίθετο μέρος του άξονα  $\theta = \pi$  το  $\rho$  θα είναι θετικό, διότι για να μεταβώ από τον άξονα  $\theta = \pi$  (2) στον αντίθετο (1), προσθέτω το  $\pi$  οπότε τα τόξα διαφέρουν κατά  $\pi$  και το  $\rho$  είναι θετικός.



Στις παρακάτω εφαρμογές γίνεται κατασκευή καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες

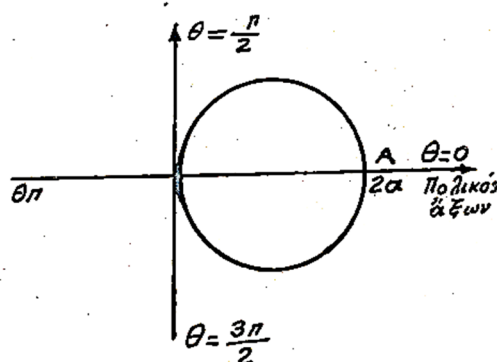
### 2.1 Εφαρμογές

1. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = (2\alpha)\sin\theta$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

- $\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
- $\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \sin 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
- $\sin\theta = -1 \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\pi \Leftrightarrow \theta = \pi$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0         | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$      | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$    |
|----------|-----------|-----------------|------------|------------------|-----------|
| $\rho$   | $2\alpha$ | 0               | $-2\alpha$ | 0                | $2\alpha$ |



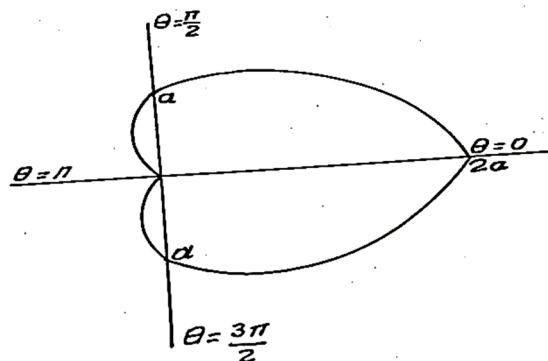
Επειδή για  $\theta = \pi$  είναι  $\rho = 2\alpha\sin\pi = 2\alpha(-1) = -2\alpha$ , λαμβάνω στον οριζόντιο άξονα τμήμα ίσο με  $2\alpha$  στο αντίθετο μέρος, οπότε το  $\rho = -2\alpha$  γίνεται  $\rho = 2\alpha$  και συμπίπτει με το σημείο Α.

2. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \alpha(1 + \sin\theta)$  με πεδίο ορισμού από  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

- $1 + \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = -1 \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\pi \Leftrightarrow \theta = \pi$
- $1 + \sin\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
- $1 + \sin\theta = -1 \Leftrightarrow \sin\theta = -2$  Αδύνατο

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0         | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$    |
|----------|-----------|-----------------|-------|------------------|-----------|
| $\rho$   | $2\alpha$ | $\alpha$        | 0     | $\alpha$         | $2\alpha$ |



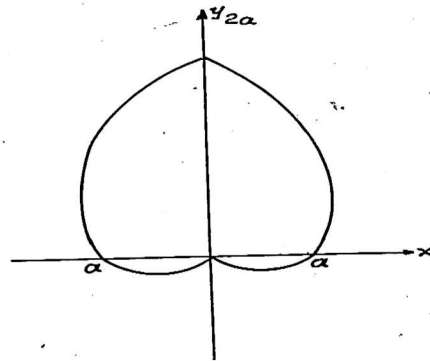
Παρατηρώ ότι, το  $\rho$  για τις διάφορες τιμές του  $\theta$  δε γίνεται ποτέ αρνητικό.

3. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \alpha(1 + \eta\mu\theta)$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

- $1 + \eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu\frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{2}$
- $1 + \eta\mu\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
- $1 + \eta\mu\theta = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = -2$  Αδύνατο

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0        | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$    | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$   |
|----------|----------|-----------------|----------|------------------|----------|
| $\rho$   | $\alpha$ | $2\alpha$       | $\alpha$ | 0                | $\alpha$ |



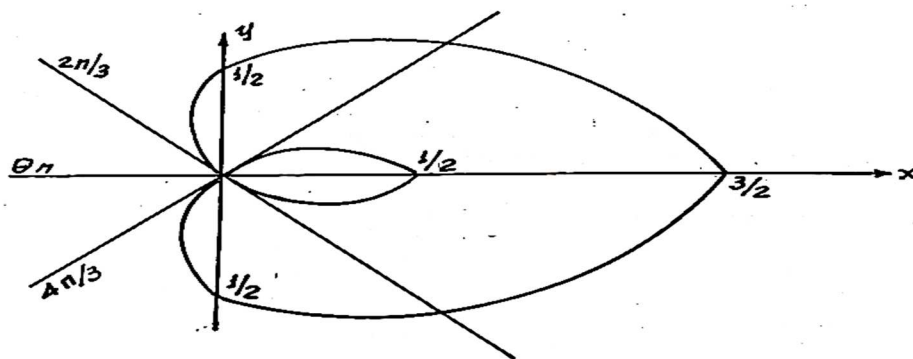
4. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu\theta$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

Κάνω τον πίνακα των μεταβολών. Για την τιμή  $\theta = \pi$  λαμβάνω στο αντίθετο μέρος του άξονα  $\rho = \frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu\pi = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ .

- $\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow \theta = \pi$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0             | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$          | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$        |
|----------|---------------|-----------------|------------------|----------------|------------------|------------------|---------------|
| $\rho$   | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$   | 0                | $-\frac{1}{2}$ | 0                | $\frac{1}{2}$    | $\frac{3}{2}$ |



5. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = 5 + 3\sigma\upsilon\nu\theta$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

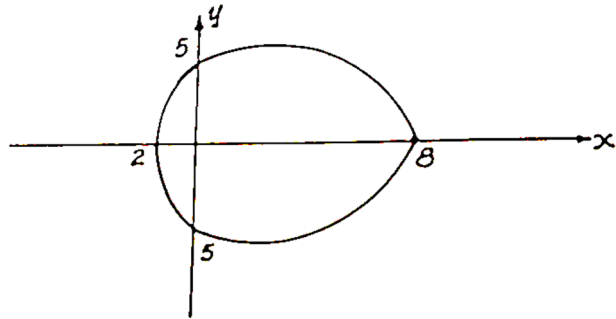
Κάνω τον πίνακα των μεταβολών. Παρατηρώ ότι το  $\rho$  δε λαμβάνει καθόλου την τιμή μηδέν.

- $5 + 3\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu\theta = -5 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{-5}{3}$  Αδύνατο

- $5 + 3\sigma\upsilon\nu\theta = 1 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu\theta = -4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{-4}{3}$  Αδύνατο
- $5 + 3\sigma\upsilon\nu\theta = -1 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu\theta = -6 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -2$  Αδύνατο

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|----------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| $\rho$   | 8 | 5               | 2     | 5                | 8      |



### 3. Γραφική παράσταση καμπύλης της μορφής $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(k\theta)$ και $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(k\theta)$

Στις καμπύλες της μορφής  $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(k\theta)$  και  $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(k\theta)$  (οπού  $k$  ακέραιος) λαμβάνω ως πεδίο ορισμού από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{4k\pi}{2k} = 2\pi$ . Διακρίνω δυο περιπτώσεις:

**(α)** Αν έχω την  $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(k\theta)$ , τότε για την κατασκευή της καμπύλης λαμβάνω ακέραια πολλαπλάσια της τιμής του  $\theta$  για την όποια

$$\eta\mu(k\theta) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(k\theta) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2k}$$

**(β)** Αν έχω την  $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(2\theta)$   $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(k\theta)$ , τότε για την κατασκευή της καμπύλης λαμβάνω ακέραια πολλαπλάσια της τιμής του  $\theta$  για την οποία  $\sigma\upsilon\nu(k\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(k\theta) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2k}$

#### 3.1 Εφαρμογές

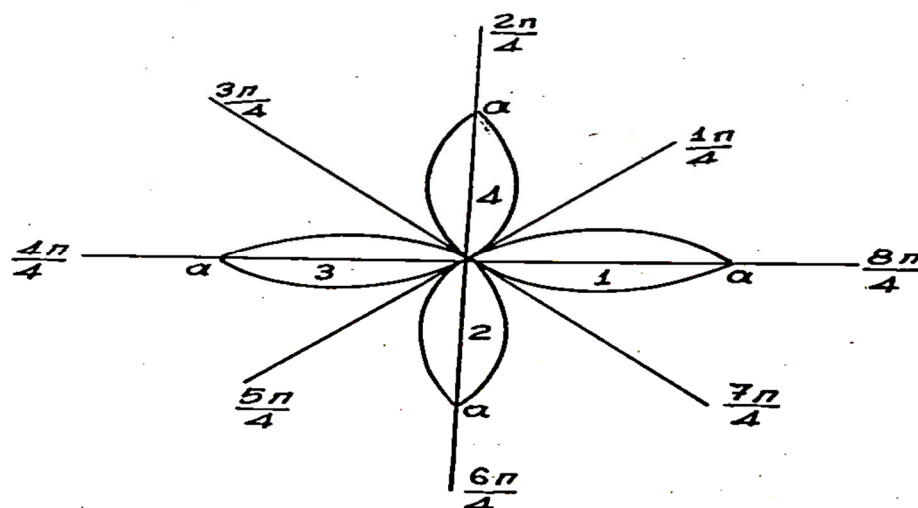
**6.** Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(2\theta)$  με πεδίο ορισμού από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{4k\pi}{2k} = \frac{4\pi \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2\pi$ .

Θα λαβώ τα ακέραια πολλαπλάσια της τιμής  $\theta = \frac{\pi}{4}$  για την οποίο το  $\sigma\upsilon\nu(2\theta) = 0$  μέχρι την τιμή  $\theta = 2\pi$ , διότι

- $\sigma\upsilon\nu(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\theta) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$
- $\sigma\upsilon\nu(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\theta) = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
- $\sigma\upsilon\nu(2\theta) = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\theta) = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow 2\theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0        | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{6\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{8\pi}{4}$ |
|----------|----------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\rho$   | $\alpha$ | 0               | $-\alpha$        | 0                | $\alpha$         | 0                | $-\alpha$        | 0                | $\alpha$         |



Αν  $\theta = \frac{2\pi}{4}$ , τότε  $\rho = \alpha \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{4}\right) = \alpha \cdot \sin(\pi) = \alpha(-1) = -\alpha$

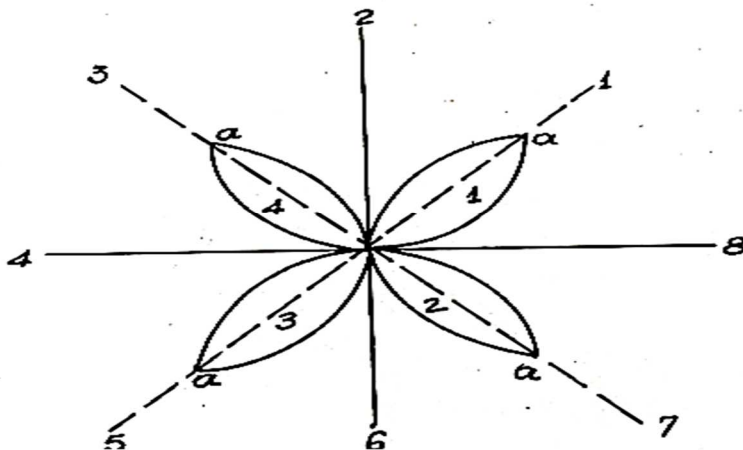
Αν  $\theta = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ , τότε  $\rho = \alpha \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) = \alpha \cdot \sin(3\pi) = \alpha(-1) = -\alpha$

7. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(2\theta)$  με πεδίο ορισμού από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$ . Λαμβάνω ακέραια πολλαπλάσια της τιμής  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , για την οποία  $\eta\mu(2\theta) = 1$ , μέχρι την τιμή  $\theta = 2\pi$ , διότι

- $\eta\mu(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(2\theta) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$
- $\eta\mu(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu(2\theta) = \eta\mu 0 \Leftrightarrow 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
- $\eta\mu(2\theta) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu(2\theta) = \eta\mu\frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$

Πίνακας μεταβολών

| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{6\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{8\pi}{4}$ |
|----------|---|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\rho$   | 0 | $\alpha$        | 0                | $-\alpha$        | 0                | $\alpha$         | 0                | $-\alpha$        | 0                |



8. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = a \cdot \sin(3\theta)$  με πεδίο ορισμού από  $\theta = 0$  ως

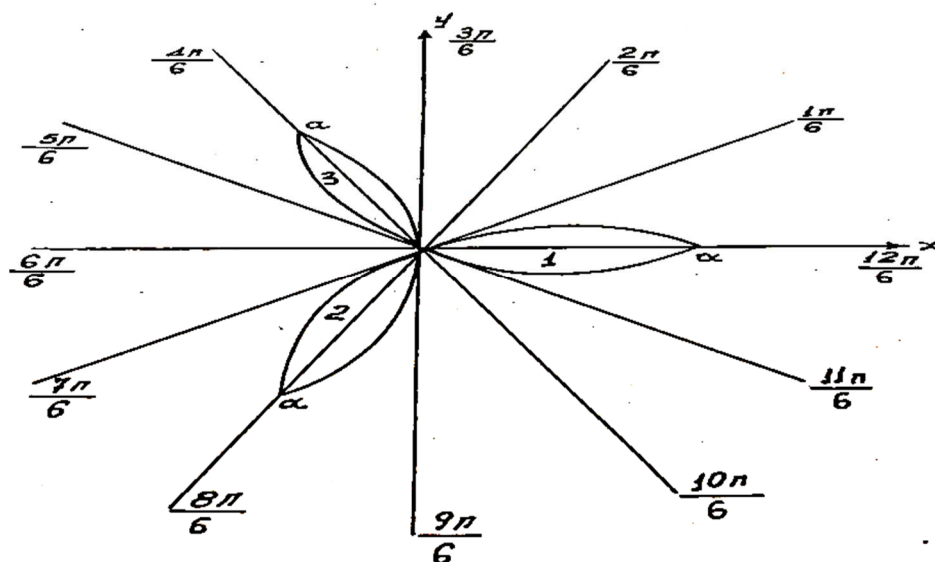
$$\theta = \frac{4k\pi}{2k} = \frac{4 \cdot 3\pi}{2 \cdot 3} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

Εδώ θα λαβώ τα πολλαπλάσια της τιμής του  $\theta$  για την οποία  $\sin(3\theta) = 0$  δηλαδή

- $\sin(3\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(3\theta) = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$
- $\sin(3\theta) = -1 \Leftrightarrow \sin(3\theta) = \sin\pi \Leftrightarrow 3\theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$
- $\sin(3\theta) = 1 \Leftrightarrow \sin(3\theta) = \sin 0 \Leftrightarrow 3\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0   | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{6\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{8\pi}{6}$ | $\frac{9\pi}{6}$ | $\frac{10\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{12\pi}{6}$ |
|----------|-----|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\rho$   | $a$ | 0               | $-a$             | 0                | $a$              | 0                | $-a$             | 0                | $a$              | 0                | $-a$              | 0                 | $a$               |



Στο παραπάνω σχήμα υπάρχουν 3 φύλλα διότι ορισμένα συμπίπτουν. Π.χ. για  $\theta = \frac{2\pi}{6}$  είναι  $\rho = a \sin(3\theta) = a \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) = a \sin\pi = a(-1) = -a$  δηλαδή

αντίθετο από την περίπτωση που  $\theta = \frac{8\pi}{6}$  διότι

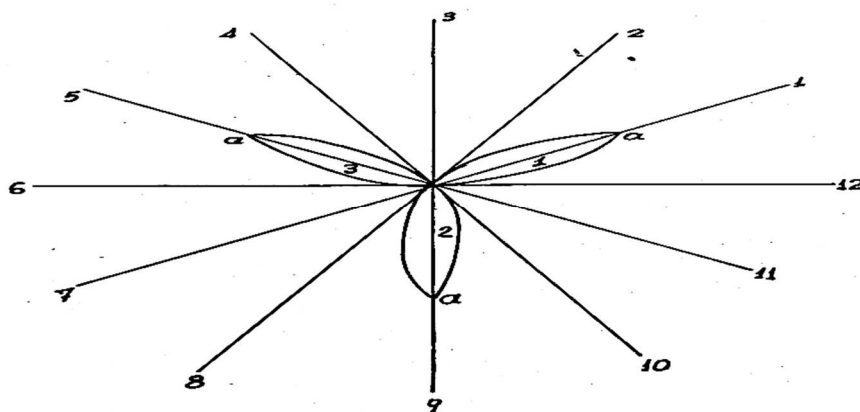
$$\rho = \alpha \sigma \nu \nu(3\theta) = \alpha \sigma \nu \nu\left(3 \frac{8\pi}{6}\right) = \alpha \sigma \nu \nu(4\pi) = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

9. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \alpha \eta \mu(3\theta)$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{4k\pi}{2k\pi} = \frac{4\pi \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{12\pi}{6}$ . Εδώ θα λαβώ πολλαπλάσια της τιμής του  $\theta$  για την οποία

- $\eta \mu(3\theta) = 1 \Leftrightarrow \eta \mu(3\theta) = \eta \mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$
- $\eta \mu(3\theta) = -1 \Leftrightarrow \eta \mu(3\theta) = \eta \mu \frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow 3\theta = \frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}$
- $\eta \mu(3\theta) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu(3\theta) = \eta \mu 0 \Leftrightarrow 3\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{6\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{8\pi}{6}$ | $\frac{9\pi}{6}$ | $\frac{10\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{12\pi}{6}$ |
|----------|---|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\rho$   | 0 | $\alpha$        | 0                | $-\alpha$        | 0                | $\alpha$         | 0                | $-\alpha$        | 0                | $\alpha$         | 0                 | $-\alpha$         | 0                 |



Στο παραπάνω σχήμα έχω 3 φύλλα, διότι ορισμένα φύλλα συμπίπτουν π.χ. για  $\theta = \frac{7\pi}{6}$  είναι  $\rho = \alpha \eta \mu\left(3 \frac{7\pi}{6}\right) = \alpha \eta \mu\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \alpha \eta \mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \alpha(-1) = -\alpha$  και λαμβανόμενο αντίθετα, συμπίπτει με το φύλλο 1, δηλαδή αν το τόξο είναι:

- άρτιο, τότε ο αριθμός των φύλλων είναι διπλάσιος του τόξου π.χ. αν είναι  $\rho = \alpha \eta \mu(4\theta)$  τότε το τόξο έχει 8 φύλλα
- περιττό, τότε ο αριθμός των φύλλων είναι ίσος με το πολλαπλάσιο του τόξου π.χ. αν είναι  $\rho = \alpha \sigma \nu \nu(5\theta)$  τότε το τόξο έχει 5 φύλλα

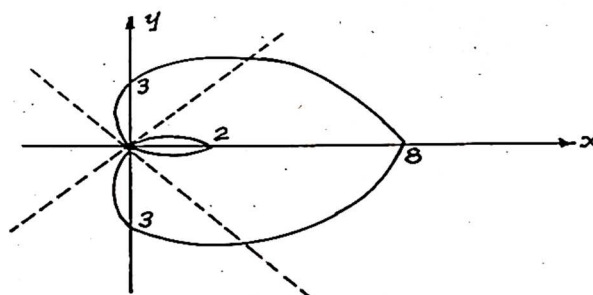
10. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = 3 + 5 \sigma \nu \nu \theta$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

Για μία τιμή του  $\theta$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  και  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  είναι

$$\rho = 0 \Leftrightarrow 3 + 5 \sigma \nu \nu \theta = 0 \Leftrightarrow 5 \sigma \nu \nu \theta = -3 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu \theta = \frac{-3}{5} \Leftrightarrow \theta = \tau \omicron \xi \sigma \nu \nu\left(\frac{-3}{5}\right)$$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\theta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-3}{5}\right)$ | $\pi$ | $\theta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-3}{5}\right)$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|----------|---|-----------------|-----------------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------------------------------------|------------------|--------|
| $\rho$   | 8 | 3               | 0                                                               | -2    | 0                                                               | 3                | 8      |

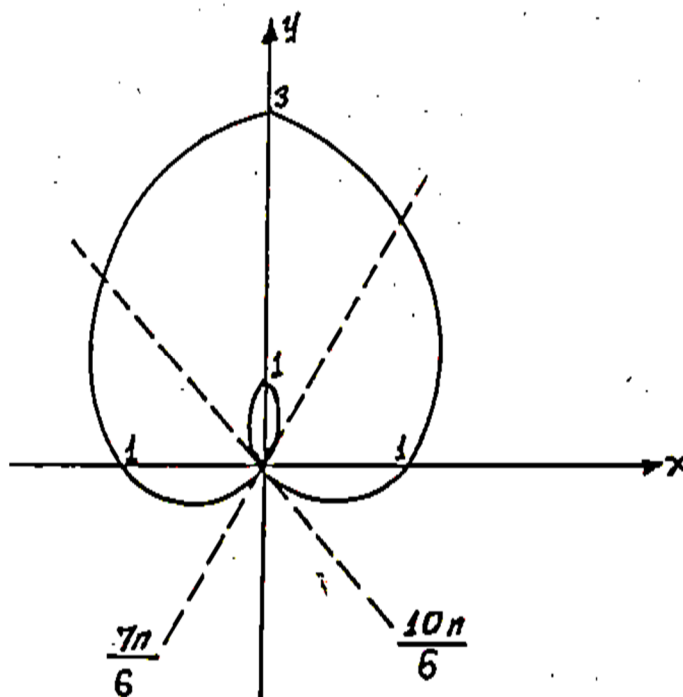


11. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = 1 + 2\eta\mu\theta$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

- $\rho = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\theta = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu\frac{-\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}$
- $\rho = 1 \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\theta = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
- $\rho = -1 \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\theta = -1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\theta = -2 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu\frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{2}$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{10\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|----------|---|-----------------|-------|------------------|------------------|-------------------|--------|
| $\rho$   | 1 | 3               | 1     | 0                | -1               | 0                 | 1      |



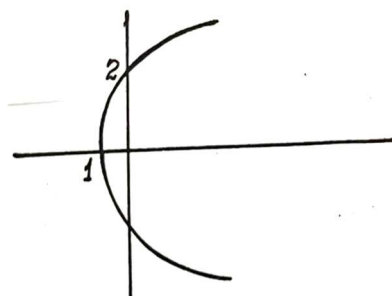
12. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \frac{2}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta}$  με πεδίο ορισμού  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

Η καμπύλη είναι ορισμένη και συνεχής για κάθε τιμή του  $\theta$  μεταξύ 0 και  $2\pi$  εκτός των τιμών για τις οποίες ο παρονομαστής γίνεται μηδέν, οπότε είναι ασυνεχής.

•  $1 - \sin\theta = 0 \Leftrightarrow 1 = \sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\theta \Leftrightarrow 0 = \theta$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$ | 0        | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$   |
|----------|----------|-----------------|-------|------------------|----------|
| $\rho$   | $\infty$ | 2               | 1     | 2                | $\infty$ |



4. Γραφική παράσταση καμπύλης της μορφής  $\rho = \alpha \cdot \eta\mu\left(\frac{\theta}{k}\right)$  και

$$\rho = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{k}\right)$$

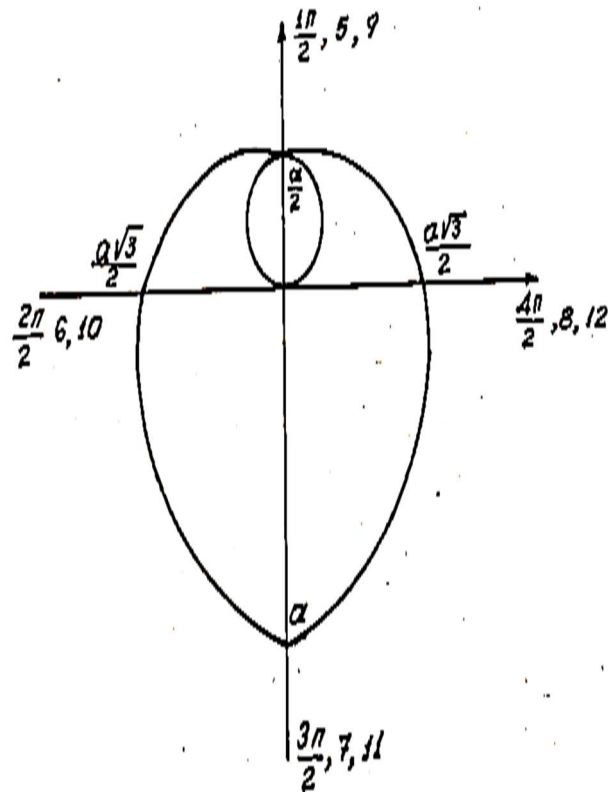
Για το σχεδιασμό της καμπύλης  $\rho = \alpha \eta\mu\left(\frac{\theta}{k}\right)$  λαμβάνω ακέραια πολλαπλάσια της τιμής  $\theta = \frac{\pi}{2}$  για την οποία  $\eta\mu\theta = 1$ , μέχρι το ακέραιον πολλαπλάσιο της  $\theta = \frac{\pi}{2}$  διαιρούμενο δια  $k$  να δώσει  $\theta = 2\pi$ .

#### 4.1 Εφαρμογές

1. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \alpha \eta\mu\left(\frac{\theta}{3}\right)$ .

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$           | 0 | $\frac{\pi}{2}$    | $\frac{2\pi}{2}$           | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{4\pi}{2}$           | $\frac{5\pi}{2}$   | $\frac{6\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{2}$    | $\frac{8\pi}{2}$            | $\frac{9\pi}{2}$ | $\frac{10\pi}{2}$           | $\frac{11\pi}{2}$   | $\frac{12\pi}{2}$ |
|--------------------|---|--------------------|----------------------------|------------------|----------------------------|--------------------|------------------|---------------------|-----------------------------|------------------|-----------------------------|---------------------|-------------------|
| $\frac{\theta}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$    | $\frac{\pi}{3}$            | $\frac{\pi}{2}$  | $\frac{2\pi}{3}$           | $\frac{5\pi}{6}$   | $\pi$            | $\frac{7\pi}{6}$    | $\frac{8\pi}{6}$            | $\frac{9\pi}{6}$ | $\frac{10\pi}{6}$           | $\frac{11\pi}{6}$   | $\frac{12\pi}{6}$ |
| $\rho$             | 0 | $\frac{\alpha}{2}$ | $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ | $\alpha$         | $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\alpha}{2}$ | 0                | $-\frac{\alpha}{2}$ | $-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ | $-\alpha$        | $-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\alpha}{2}$ | 0                 |



Από τον παραπάνω πίνακα, προκύπτει ότι είναι αρκετό να λάβω ακέραια πολλαπλάσια του  $\theta = \frac{\pi}{2}$  μέχρι να έχω  $\theta = \frac{2k\pi}{2} = \pi$  διότι πέραν αυτής, οι τιμές του  $\rho$  είναι αρνητικοί αριθμοί, οι οποίοι λαμβανόμενοι στα αντίθετα μέρη των αντίστοιχων αξόνων, συμπίπτουν με τις τιμές του  $\rho$  από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{2k\pi}{2} = \pi$ .

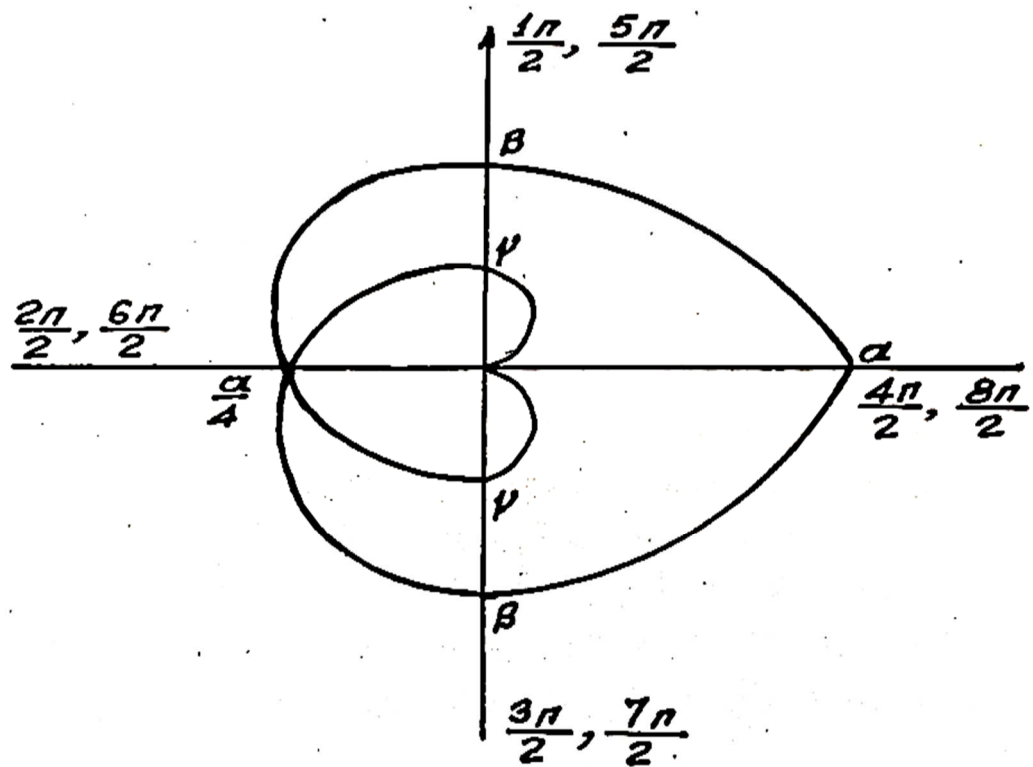
Αν έχω την  $\rho = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\theta}{k}\right)$ , τότε για την κατασκευή της καμπύλης θα λαβώ ακέραια πολλαπλάσια της τιμής  $\theta = \frac{\pi}{2}$  για την οποία  $\sin\theta = 0$  έως ότου το ακέραιο πολλαπλάσιο της τιμής  $\theta = \frac{\pi}{2}$  διαιρούμενο δια του  $k$  να δώσει  $\theta = 2\pi$ .

## 2. Σχεδιάστε την καμπύλη $\rho = \alpha \cdot \sin^4\left(\frac{\theta}{4}\right)$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$           | 0        | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{2}$   | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{4\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $\frac{6\pi}{2}$   | $\frac{7\pi}{2}$ | $\frac{8\pi}{2}$ |
|--------------------|----------|-----------------|--------------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|------------------|
| $\frac{\theta}{4}$ | 0        | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$    | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{2}$  | $\frac{5\pi}{8}$ | $\frac{6\pi}{8}$   | $\frac{7\pi}{8}$ | $\frac{8\pi}{8}$ |
| $\rho$             | $\alpha$ | $\beta$         | $\frac{\alpha}{4}$ | $\gamma$         | 0                | $\gamma$         | $\frac{\alpha}{4}$ | $\beta$          | $\alpha$         |

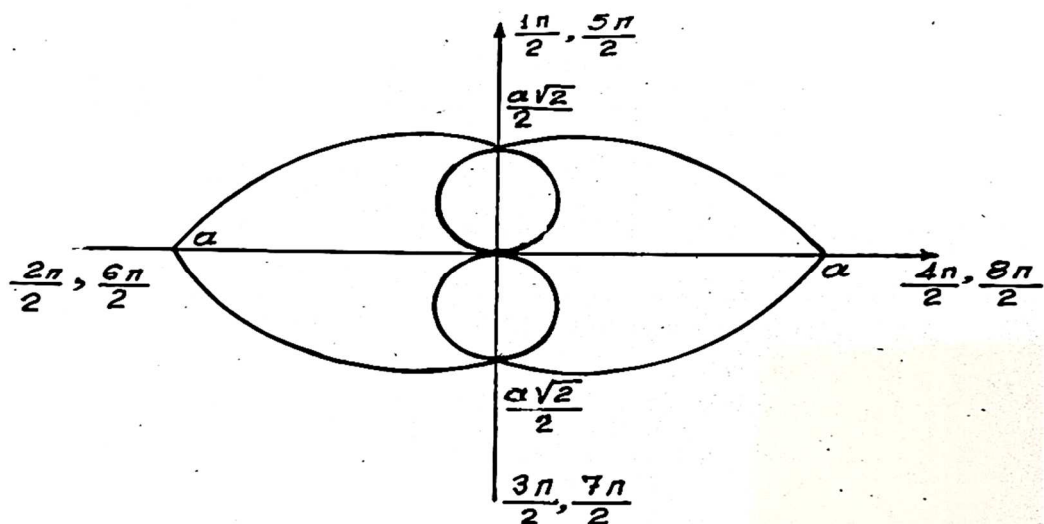
Στον πίνακα μεταβολών έλαβα τιμές του  $\theta$  από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{2k\pi}{2} = \pi$  διότι πέραν αυτής είναι αρνητικοί αριθμοί, οι οποίοι γίνονται θετικοί διότι είναι υψωμένοι σε άρτιο εκθέτη.



2. Σχεδιάστε την καμπύλη  $\rho = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Πίνακας των μεταβολών

| $\theta$           | 0        | $\frac{\pi}{2}$            | $\frac{2\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$            | $\frac{4\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{2}$            | $\frac{6\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{2}$           | $\frac{8\pi}{2}$ |
|--------------------|----------|----------------------------|------------------|-----------------------------|------------------|-----------------------------|------------------|----------------------------|------------------|
| $\frac{\theta}{2}$ | 0        | $\frac{\pi}{4}$            | $\frac{2\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$            | $\frac{4\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$            | $\frac{6\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{4}$           | $\frac{8\pi}{4}$ |
| $\rho$             | $\alpha$ | $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ | 0                | $-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ | $-\alpha$        | $-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ | 0                | $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ | $\alpha$         |



### Παρατηρήσεις

1. Το  $a$  λαμβάνεται θετικό, διότι αν το λαβώ αρνητικό θα έχω την ίδια καμπύλη, αρχίζοντας όμως από άλλο σημείο

2. Οι αριθμοί επάνω στους άξονες αντιστοιχούν στα διαφορά πολλαπλάσια της διαίρεσης την οποία λαμβάνω για να κάνω καμπύλη

3. Κάθε συνεχής καμπύλη πρέπει να γράφεται μονοκονδυλιά, δηλαδή αρχίζοντας από την τιμή, την οποία λαμβάνει η  $\rho$  για  $\theta=0$ , δεν πρέπει να σηκώσω το μολύβι (να διακόψω την καμπύλη) μέχρι να φθάσω στην τιμή της  $\rho$  για  $\theta=2\pi$ .

### 5. Εμβαδόν χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Το εμβαδόν ενός χωρίου που ορίζεται από μια καμπύλη, της οποίας η εξίσωση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες, λαμβάνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

Για να βρω τα όρια ολοκλήρωσης διακρίνω τις παρακάτω μορφές καμπύλων γραμμών.

#### 5.1 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(k\theta)$

Αν η καμπύλη είναι της μορφής  $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(k\theta)$  όπου  $k$  είναι ακέραιος αριθμός, τότε τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{\pi}{k}$  με  $\eta\mu(k\theta) = 0$  και διακρίνω τις εξής δυο περιπτώσεις.

##### 5.1.1 Αν $k$ περιττός αριθμός

Τότε το ολικό εμβαδό είναι η τιμή του ολοκληρώματος  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \alpha^2 \eta\mu^2(k\theta) d\theta$  επί  $k$ , διότι ο αριθμός των φύλλων της καμπύλης ισούται με τον αριθμό  $k$ .

#### Εφαρμογή

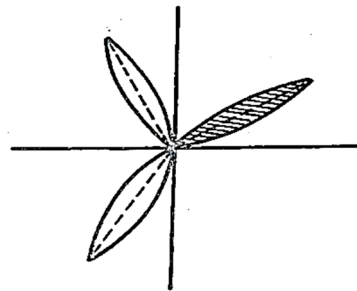
Εύρεση εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη γραμμή  $\rho = \alpha \cdot \eta\mu(3\theta)$

από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{3}$ .

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \alpha^2 \eta\mu^2(3\theta) d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \alpha^2 \eta\mu^2(3\theta) d(3\theta) = \frac{\alpha^2}{6} \left( \frac{-\eta\mu(3\theta) \sigma\upsilon\nu(3\theta)}{2} + \frac{3\theta}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$\frac{\alpha^2}{6} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \alpha^2}{12}$$

$$\text{Άρα, } E_{\text{ολ}} = 3 \frac{\pi \alpha^2}{12} = \frac{\pi \alpha^2}{4}$$



### 5.1.2 Αν $k$ άρτιος αριθμός

Τότε το ολικό εμβαδό είναι η τιμή του ολοκληρώματος  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \alpha^2 \eta \mu^2(k\theta) d\theta$  επί  $2k$ , διότι ο αριθμός των φύλλων της καμπύλης είναι διπλάσιος του αριθμού  $k$ .

#### Εφαρμογή

Εύρεση εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη γραμμή  $\rho = \alpha \cdot \eta \mu(2\theta)$

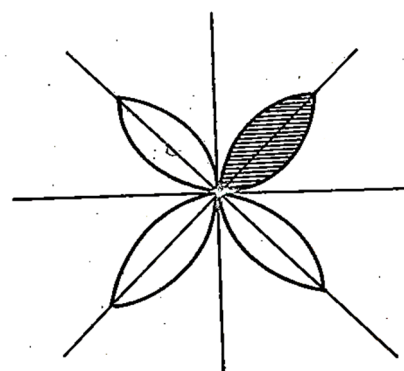
από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2}$ .

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \eta \mu^2(2\theta) d\theta = \frac{\alpha^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2(2\theta) d(2\theta) = \frac{\alpha^2}{4} \left( \frac{-\eta \mu(2\theta) \sigma \upsilon \nu(2\theta)}{2} + \theta \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \alpha^2}{8}$$

αυτό είναι το εμβαδό του ενός φύλλου.

Άρα,  $E_{\text{ολ}} = 4 \frac{\pi \alpha^2}{8} = \frac{\pi \alpha^2}{2}$ , διότι με την ολοκλήρωση

από  $\theta = 0$  έως  $\theta = \frac{\pi}{2}$  βρήκα το εμβαδό μόνο του γραμμοσκιασμένου τμήματος.



### 5.2 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \cdot \sigma \upsilon \nu(k\theta)$

Αν η καμπύλη είναι της μορφής  $\rho = \alpha \cdot \sigma \upsilon \nu(k\theta)$  όπου  $k$  είναι ακέραιος αριθμός, τότε τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{\pi}{k}$  και διακρίνω τις εξής δυο περιπτώσεις.

#### 5.2.1 Αν $k$ περιττός αριθμός

Τότε, το ολικό εμβαδόν είναι η τιμή του ολοκληρώματος  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \alpha^2 \sigma \upsilon \nu^2(k\theta) d\theta$  επί  $2k$ , διότι με την προηγούμενη ολοκλήρωση βρίσκω το εμβαδόν του μισού φύλλου. Επειδή ο  $k$  είναι περιττός αριθμός, ο αριθμός των φύλλων ισούται με τον αριθμό  $k$ , άρα, το ολικό εμβαδόν είναι η τιμή του ανωτέρω ολοκληρώματος επί  $2k$ .

#### Εφαρμογή

Εύρεση εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη γραμμή  $\rho = \alpha \cdot \sigma \upsilon \nu(3\theta)$

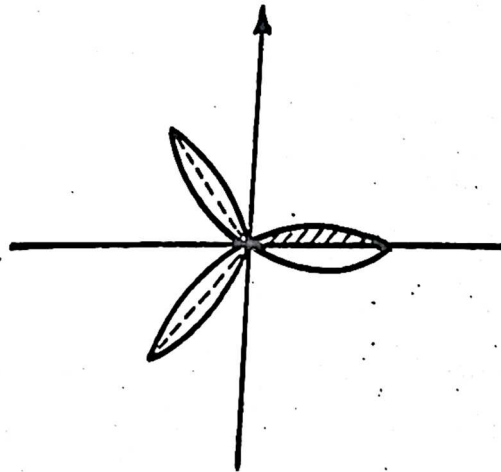
από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{6}$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \alpha^2 \sigma \upsilon \nu^2(3\theta) d\theta = \frac{\alpha^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma \upsilon \nu^2(3\theta) d(3\theta) =$$

$$\frac{\alpha^2}{6} \left( \frac{\sigma \upsilon \nu(3\theta) \eta \mu(3\theta)}{2} + \frac{3\theta}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\alpha^2}{6} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \alpha^2}{24}$$

Με την ολοκλήρωση βρήκαμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος

$$\text{Άρα, } E_{ολ} = 6 \frac{\pi \alpha^2}{24} = \frac{\pi \alpha^2}{4}$$



### 5.2.2 Αν $k$ άρτιος αριθμός

Τότε, το ολικό εμβαδόν είναι η τιμή του ολοκληρώματος  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \alpha^2 \sin^2(k\theta) d\theta$  επί  $4k$ , διότι με την ολοκλήρωση βρίσκω το εμβαδόν του μισού φύλλου. Όταν το  $k$  είναι άρτιος αριθμός, τότε ο αριθμός των φύλλων είναι  $2k$ . Το ολικό εμβαδόν είναι η τιμή του ολοκληρώματος επί  $4k$ .

### Εφαρμογή

Εύρεση εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη γραμμή  $\rho = \alpha \cdot \sin(2\theta)$

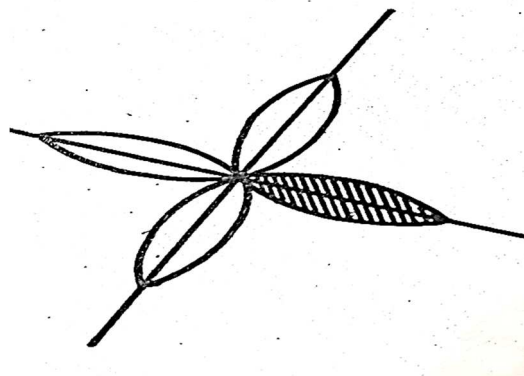
$$\text{από } \theta=0 \text{ ως } \theta = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{4}$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha^2 \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{\alpha^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(2\theta) d(2\theta) =$$

$$\frac{\alpha^2}{4} \left( \frac{\sin(2\theta) \eta\mu(2\theta)}{2} + \theta \right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \alpha^2}{16}$$

Με την ολοκλήρωση βρήκα το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.

$$\text{Άρα, } E_{ολ} = 8 \frac{\pi \alpha}{16} = \frac{\pi \alpha}{2}$$



### 5.3 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \pm \beta \cdot \sin(k\theta)$

Αν η καμπύλη είναι της μορφής  $\rho = \alpha \pm \beta \cdot \sin(k\theta)$  όπου  $k$  είναι ακέραιος αριθμός, τότε διακρίνω δυο περιπτώσεις:

### 5.3.1 Αν $\alpha > \beta$ (κατά απόλυτη τιμή)

Δηλαδή, το  $\rho$  κινείται μεταξύ  $\theta = 0$  και  $\theta = 2\pi$  και είναι διάφορο του μηδέν.

#### Εφαρμογή

Εύρεση εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη γραμμή  $\rho = 3 + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$  από  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ . Είναι  $\alpha=3 > \beta=2$  και  $\rho \neq 0$  μια κάθε τιμή του μεταξύ  $\theta=0$  ως  $\theta = 2\pi$ . Άρα,  $E_{\omega\lambda} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta = 11\pi$

### 5.3.2 Αν $\alpha \leq \beta$ (κατά απόλυτη τιμή)

Τότε, θέτω ως κατώτερο όριο  $\theta = 0$ , για να βρω το ανώτερο όριο θέτω  $\rho=0$  και λύνω την εξίσωση  $0 = \alpha \pm \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(k\theta)$  δηλαδή λαμβάνω ως ανώτερο όριο τη μικρότερη τιμή του  $\theta$  για την οποία  $\rho=0$ . Για να βρω το ολικό εμβαδόν, πρέπει να κατασκευασθεί η καμπύλη γραμμή, οπότε θα δω πόσα φύλλα έχει η καμπύλη και ποιο μέρους του εμβαδού βρήκα.

### 5.4 Καμπύλη της μορφής $\rho = \alpha \pm \beta \cdot \eta\mu(k\theta)$

Αν η καμπύλη της μορφής  $\rho = \alpha \pm \beta \cdot \eta\mu(k\theta)$  τότε διακρίνω δυο περιπτώσεις:

#### 5.4.1 Αν $\alpha > \beta$ (κατά απόλυτη τιμή)

Δηλαδή, το  $\rho$  μια κάθε τιμή του  $\theta$  μεταξύ  $\theta = 0$  και  $\theta = 2\pi$  είναι διάφορο του μηδέν.

#### Εφαρμογή

Εύρεση εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη γραμμή  $\rho=3+2\eta\mu\theta$   $\alpha > \beta$  και  $\rho \neq 0$  για κάθε τιμή του  $\theta$  μεταξύ  $\theta=0$  και  $\theta=2\pi$ . Άρα

$$E_{\omega\lambda} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 + 2\eta\mu\theta)^2 d\theta = 11\pi$$

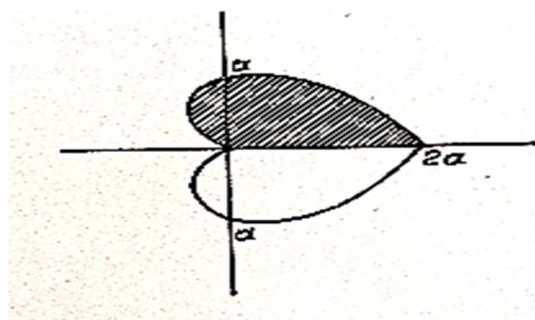
#### 5.4.2 Αν $\alpha \leq \beta$ (κατά απόλυτη τιμή)

Τότε, κατώτερο όριο είναι  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , για να βρω το ανώτερο όριο θέτω  $\rho=0$  και λύνω την εξίσωση  $0 = \alpha \pm \beta \cdot \eta\mu(k\theta)$  δηλαδή λαμβάνω ως ανώτερο όριο την μικρότερη τιμή του  $\theta$  για την οποία  $\rho=0$ . Για να βρω το ολικό εμβαδόν πρέπει να κατασκευασθεί η καμπύλη, οπότε θα δω ποσα φύλλα έχει η καμπύλη και ποιο μέρους το εμβαδών βρήκα.

**Σημείωση.** Γενικά πρέπει να κατασκευάζεται η καμπύλη και εκ' του σχήματος αυτής θα βρω τα όρια ολοκλήρωσης και το ολικό εμβαδόν αυτής.

## 6. Εφαρμογές

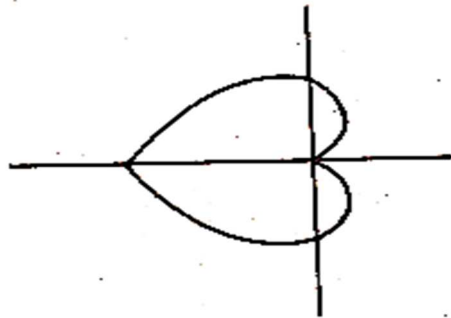
**1)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = \alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$   
Είναι



$$\begin{aligned}
E &= \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\pi (1 + \sigma \nu \theta)^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2} (1 + 2\sigma \nu \theta + \sigma \nu^2 \theta) d\theta = \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\pi d\theta + \alpha^2 \int_0^\pi \sigma \nu \theta d\theta + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\pi \sigma \nu^2 \theta d\theta = \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \theta + \alpha^2 \eta \mu \theta + \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \int_0^\pi = \frac{\alpha^2 \pi}{2} + \frac{\alpha^2 \pi}{4} = \frac{3\pi \alpha^2}{4} \\
\text{Άρα } E_{ολ} &= \frac{3\pi \alpha^2}{2}
\end{aligned}$$

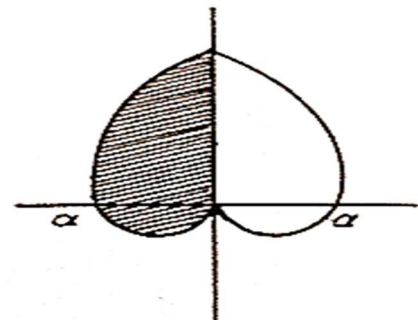
**2)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\varrho = \alpha(1 - \sigma \nu \theta)$

Μπορώ να ολοκληρώσω από  $\theta=0$  ως  $\theta=\pi$  και να διπλασιάσω. Επειδή κάθε μία τιμή του  $\theta$  μεταξύ 0 και  $2\pi$  το  $\rho$  διάφορο του μηδενός μπορώ να ολοκληρώσω από  $\theta=0$  ως  $\theta=2\pi$  και να βρω το ολικό εμβαδόν.



$$\begin{aligned}
E_{ολ} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \alpha^2 (1 - \sigma \nu \theta)^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2\sigma \nu \theta + \sigma \nu^2 \theta) d\theta = \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \left( \theta - 2\eta \mu \theta + \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{2} \right) + \frac{\theta}{2} \int_0^{2\pi} = \frac{\alpha^2}{2} (2\pi + \pi) = \frac{3\pi \alpha^2}{2}
\end{aligned}$$

**3)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\varrho = \alpha(1 + \eta \mu \theta)$

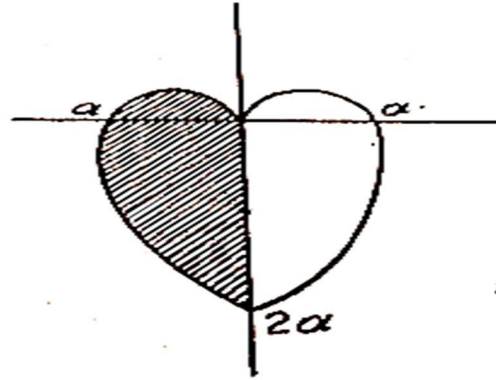


$$E = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \alpha^2 (1 + \eta \mu \theta)^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + 2\eta \mu \theta + \eta \mu^2 \theta) d\theta =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \left( \theta - 2\sigma\eta\nu\theta - \frac{\eta\mu\theta\sigma\eta\nu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{6\pi + 3\pi - 2\pi - \pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{3\pi\alpha^2}{4} \quad \text{Εολ} = 2 \frac{3\pi\alpha^2}{4} = \frac{3\pi\alpha^2}{2}$$

**4)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = \alpha(1 - \eta\mu\theta)$   
Είναι



$$E = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \alpha^2 (1 - \eta\mu\theta)^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 2\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta) d\theta =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \left( \theta + 2\sigma\eta\nu\theta - \frac{\eta\mu\theta\sigma\eta\nu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) =$$

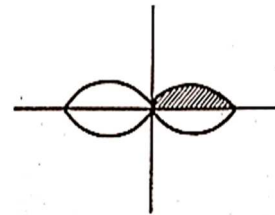
$$= \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{6\pi + 3\pi - 3\pi - \pi}{4} \right) = \frac{3\pi\alpha^2}{4}$$

$$\text{Άρα Εολ} = 2 \frac{3\pi\alpha^2}{4} = \frac{3\pi\alpha^2}{2}$$

**5)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho^2 = \alpha^2 \sigma\eta\nu 2\theta$   
Είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha^2 \sigma\eta\nu 2\theta = \frac{\alpha^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\eta\nu 2\theta d2\theta = \frac{\alpha^2}{4} \eta\mu 2\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\text{Άρα Εολ} = 4 \frac{\alpha^2}{4} = \alpha^2$$

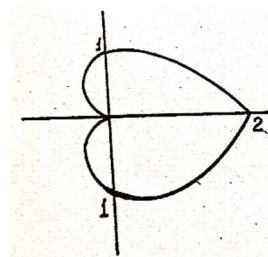


**6)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 1 + \sigma\eta\nu^3\theta$   
Είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \sigma\eta\nu^3\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\sigma\eta\nu^3\theta + \sigma\eta\nu^6\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi} \sigma\eta\nu^3\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sigma\eta\nu^6\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \theta \int_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sigma\eta\nu^2\theta \eta\mu\theta + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma\eta\nu^4\theta \eta\mu\theta}{6} + \frac{5}{6} \int_0^{\pi} \sigma\eta\nu^4\theta d\theta \right] =$$

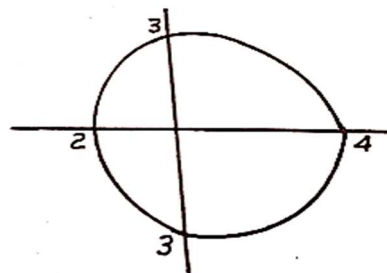
$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} (1 - \eta\mu^2\theta) d\eta\mu\theta + \frac{\sigma\nu^4\theta\eta\mu\theta}{12} + \frac{5}{12} \left[ \frac{\sigma\nu^3\theta\eta\mu\theta}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{\sigma\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right] \int_0^{\pi} = \\
&= \frac{\pi}{2} + \left[ \eta\mu\theta - \frac{\eta\mu^3\theta}{3} + \frac{\sigma\nu^4\theta\eta\mu\theta}{12} + \frac{5\sigma\nu^3\theta\eta\mu\theta}{12} + \frac{15}{48} \left( \frac{\sigma\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right] \int_0^{\pi} = \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{15}{48} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{15\pi}{96} = \frac{63\pi}{96} = \frac{21\pi}{32} \\
\text{Άρα } Eo\lambda &= \frac{21\pi}{16}
\end{aligned}$$



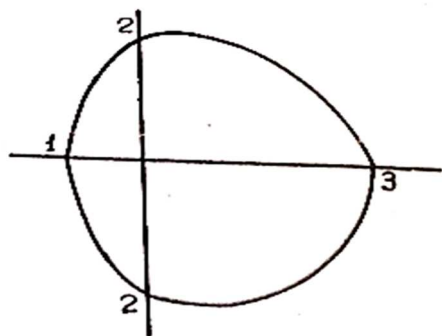
**7)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\varrho = 3 + \sigma\nu\nu 3\theta$

Είναι

$$\begin{aligned}
Eo\lambda &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 + \sigma\nu\nu 3\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (9 + 6\sigma\nu\nu 3\theta + \sigma\nu\nu^2 3\theta) d\theta = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 9 d\theta + 3 \int_0^{2\pi} \sigma\nu\nu 3\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma\nu\nu^2 3\theta d\theta = \frac{1}{2} 9\theta + \eta\mu 3\theta + \frac{1}{6} \left( \frac{\sigma\nu\nu 3\theta\eta\mu 3\theta}{2} + \frac{3\theta}{\theta} \right) \int_0^{2\pi} = \\
&= 9\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{2}
\end{aligned}$$



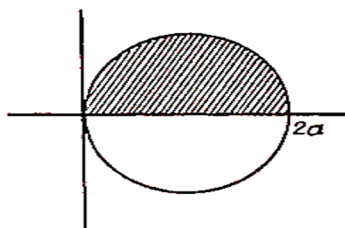
**8)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\varrho = 2 + \sigma\nu\nu\theta$



$$Eo\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 + \sigma\nu\nu\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 + 4\sigma\nu\nu\theta + \sigma\nu\nu^2\theta) d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \sigma\nu\nu\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma\nu\nu^2\theta d\theta = 2\theta + 2\eta\mu\theta + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma\nu\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
&= 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}
\end{aligned}$$

9) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 2a \sin \theta$

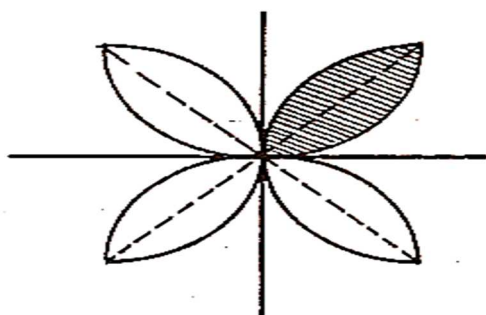


$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \sin^2 \theta d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = 2a^2 \left( \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$E_{ολ} = 2 \frac{\pi a^2}{2} = \pi a^2$$

$$Επίσης E_{ολ} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a \sin \theta d\theta$$

10) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 8\eta \mu 2\theta$

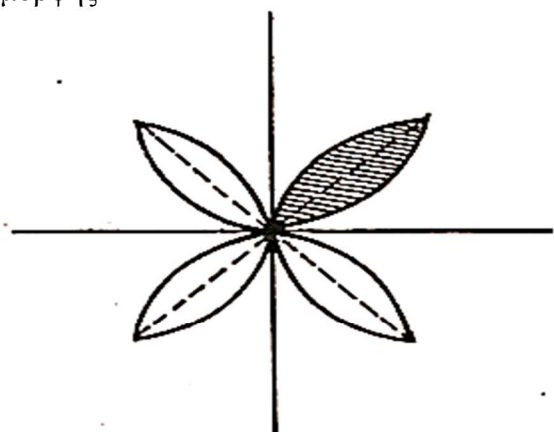


$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 64\eta^2 \cos^2 2\theta d\theta = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\theta d\theta =$$

$$= 32 \left( -\frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi$$

$$E_{ολ} = 4 \times 8\pi = 32\pi$$

11) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho^2 = a^2 \eta \mu 4\theta$

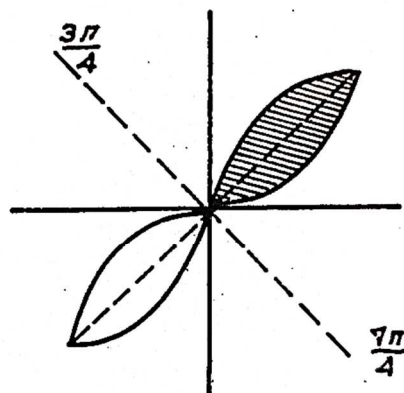


$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \eta \mu 4\theta d\theta = \frac{a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu 4\theta d(4\theta) = -\frac{a^2}{8} \cos 4\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{4}$$

$$E_{ολ} = 4 \frac{a^2}{4} = a^2$$

**Σημείωση.** Η καμπύλη έχει 4 φύλλα και όχι 8 όπως θα έπρεπε, διότι τα 4 φανταστικά.

**12)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho^2 = \alpha^2 \eta \mu 2\theta$



$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \eta \mu 2\theta d\theta = \frac{\alpha^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu 2\theta d\theta = -\frac{\alpha^2}{4}$$

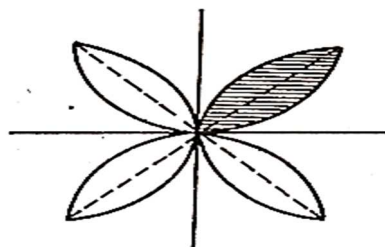
$E_{ολ} = \alpha^2$  Η καμπύλη έχει 2 φύλλα και όχι 4, διότι τα 2 είναι φανταστικά. Γράφεται  $\rho = \pm \alpha \sqrt{\eta \mu 2\theta}$  διά  $\theta = \frac{3\pi}{4} \eta \mu 2\theta = -1$ , άρα  $\rho$  φανταστικό. Εάν μεταβώ στην προέκταση του άξονα δηλ.

στην τιμή  $\theta = \frac{7\pi}{4}$  επειδή οι τιμές  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  και  $\theta = \frac{7\pi}{4}$  διαφέρουν κατά  $\pi$  το  $\eta \mu 2\theta$  αρνητικό άρα  $\sqrt{2\eta \mu 2\theta}$  φανταστική.

**13)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho^2 = \alpha^2 \eta \mu^2 2\theta$

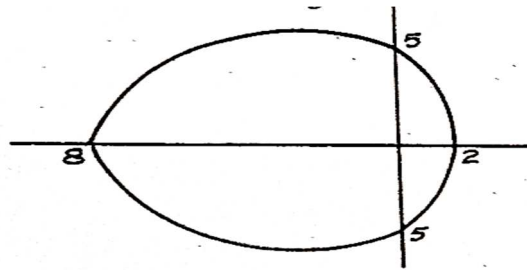
$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \eta \mu^2 2\theta d\theta = \frac{\alpha^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 2\theta d\theta = \frac{\alpha^2}{4} \left( -\frac{\eta \mu 2\theta \sigma \nu \nu 2\theta}{2} + \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\alpha^2}{\pi}$$

$$E_{ολ} = 4 \frac{\alpha^2 \pi}{8} = \frac{\pi \alpha^2}{2}$$

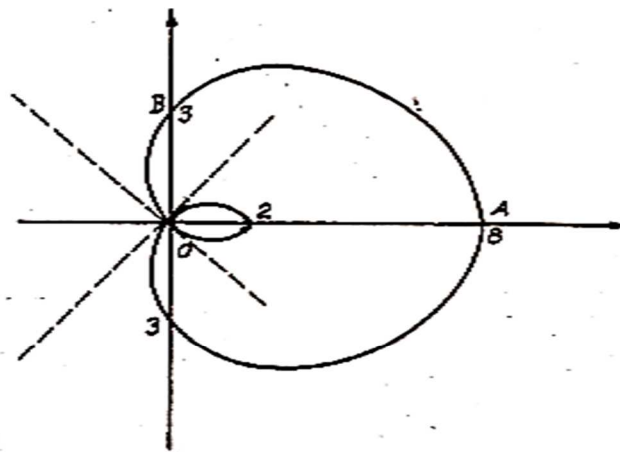


**14)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 5 - 3\sigma \nu \nu \theta$

$$\begin{aligned} E_{ολ} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (5 - 3\sigma \nu \nu \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (25 - 30\sigma \nu \nu \theta + 9\sigma \nu \nu^2 \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 25 d\theta - 15 \int_0^{2\pi} \sigma \nu \nu \theta d\theta + \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} \sigma \nu \nu \theta d\theta = \left[ \frac{1}{2} 25\theta - 15\eta \mu \theta + \frac{9}{2} \left( \frac{\sigma \nu \nu \theta \eta \mu \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right] \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 25\pi + \frac{9\pi}{2} = \frac{59\pi}{2} \end{aligned}$$



**15)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 3 + 5\sigma\upsilon\nu\theta$  (μεγάλο τμήμα)



$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos^{-1}(-\frac{3}{5})} (3 + 5\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\cos^{-1}(-\frac{3}{5})} (9 + 30\cos\theta + 25\cos^2\theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 9\theta + 30\sin\theta + 25 \left( \frac{\sin\theta \cos\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right]_0^{\cos^{-1}(-\frac{3}{5})} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 9\cos^{-1}(-\frac{3}{5}) + 30\sqrt{1 - \frac{9}{25}} + \frac{25(-\frac{3}{5})\sqrt{1 - \frac{9}{25}}}{2} + \frac{25\cos^{-1}(-\frac{3}{5})}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{43\cos^{-1}(-\frac{3}{5})}{2} + 24 - 6 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{43\cos^{-1}(-\frac{3}{5})}{2} + 18 \right] \\
 E_{ολ} &= \frac{43\cos^{-1}(-\frac{3}{5})}{2} + 18
 \end{aligned}$$

Αν θέλω το εμβαδόν του μικρού σχήματος

$$E = 2 \frac{1}{2} \int_{\cos^{-1}(-\frac{3}{5})}^{\pi} (3 + 5\cos\theta)^2 d\theta$$

Αν θέλω του ολικού, λαμβάνω το άθροισμα του μεγάλου και του μικρού ή ολοκληρώνω από  $\theta=0$  ως  $\theta=\pi$

$$E_{ολ} = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (3 + 5\cos\theta)^2 d\theta = \frac{43\pi}{2}$$

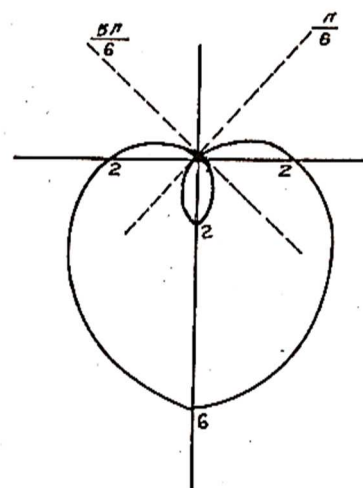
**16)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 2 - 4\eta\mu\theta$

$$E_{ολ} = 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2 - 4\eta\mu\theta)^2 d\theta = 12\pi$$

$$E_{μεγάλου\ τμήματος} = 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (2 - 4\eta\mu\theta)^2 d\theta = 8\pi + 8\sqrt{3} - 2$$

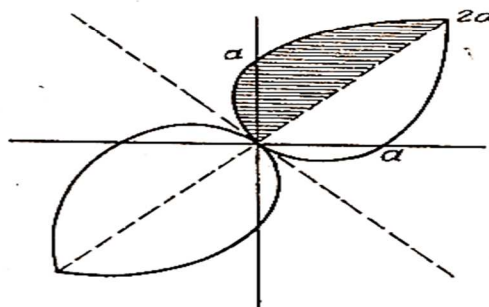
$$E_{μικρού\ τμήματος} = 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4\eta\mu\theta)^2 d\theta = 4\pi - 8\sqrt{3} + 2$$

$$E_{ολ} = E_{μεγάλου} + E_{μικρού}$$



**17)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = \alpha(1 + \eta\mu 2\theta)$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \alpha^2 (1 + \eta\mu 2\theta)^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2\eta\mu 2\theta + \eta\mu^2 2\theta) d\theta = \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta + \alpha^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu 2\theta d\theta + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu^2 2\theta d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu 2\theta d\theta + \frac{\alpha^2}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu^2 2\theta d\theta = \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu 2\theta d\theta + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu^2 2\theta d\theta = \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \theta - \frac{\alpha^2}{2} \sigma\upsilon\nu 2\theta + \frac{\alpha^2}{4} \left( -\frac{\eta\nu 2\theta \sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} + \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\alpha^2}{4} \times \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha^2}{4} \left( \frac{3\pi}{4} \right) - \frac{\pi\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2\pi}{16} = \\ &= \frac{3\pi\alpha^2}{8} + \frac{3\pi\alpha^2}{16} - \frac{\pi\alpha^2}{8} - \frac{\pi\alpha^2}{16} = \frac{6\pi\alpha^2 + 3\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 - \pi\alpha^2}{16} = \frac{6\pi\alpha^2}{16} = \frac{3\pi\alpha^2}{8} \\ \text{Άρα } E_{ολ} &= 4 \frac{3\pi\alpha^2}{8} = \frac{3\pi\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

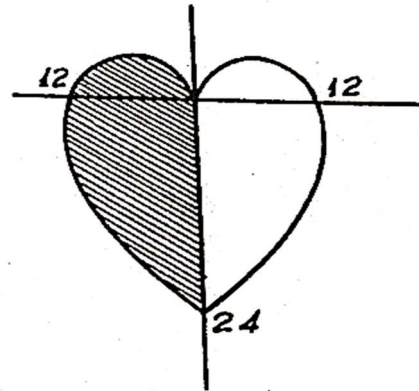


**18)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $P = 12(1 - \eta\mu\theta)$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 144(1 - \eta\mu\theta)^2 d\theta = 72 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 2\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta) d\theta = \\ &= 72 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta - 144 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu\theta d\theta = 72 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu^2\theta d\theta = \end{aligned}$$

$$= 72\theta + 144\sigma\upsilon\nu\theta + 72\left(-\frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 108\pi$$

$$\text{Άρα } \text{Εολ} = 2 \times 108\pi = 216\pi$$



**19)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 5(1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)$

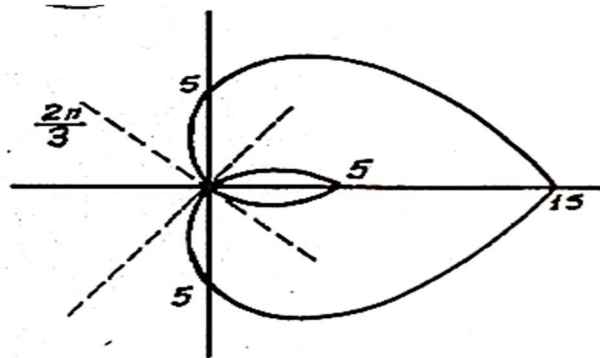
$$\text{Εολ} = 2 \frac{1}{2} \int_0^\pi 25(1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta =$$

$$= 25 \int_0^\pi (1 + 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta) d\theta =$$

$$= 25\theta + 100\eta\mu\theta + 100\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\bigg|_0^\pi = 72\pi$$

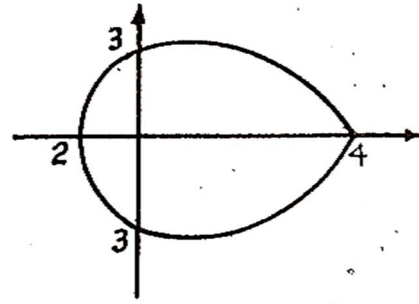
$$\text{Ε μεγάλου τμήματος} = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 25(1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta$$

$$\text{Ε μικρού τμήματος} = 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi 25(1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta$$



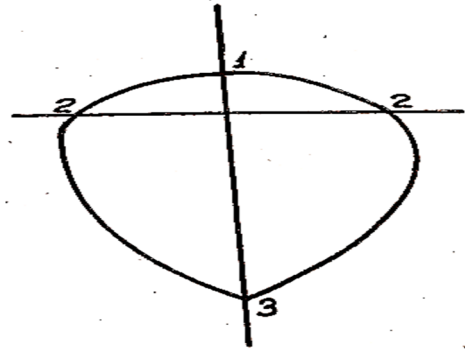
**20)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 3 + \sigma\upsilon\nu\theta$

$$\begin{aligned}
 Eo\lambda &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 + \sigma \nu \nu \theta)^2 d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (9 + \sigma \nu \nu^2 \theta + 6 \sigma \nu \nu \theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 9\theta + 6\eta \mu \theta + \frac{\sigma \nu \nu \theta \eta \mu \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{19\pi}{2}
 \end{aligned}$$

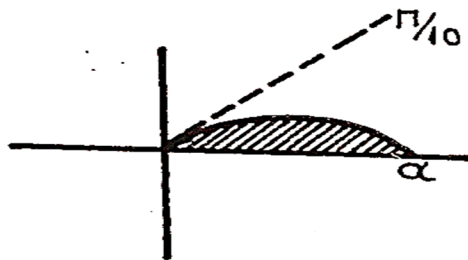


**21)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = 2 - \eta \mu \theta$

$$\begin{aligned}
 Eo\lambda &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 - \eta \mu \theta)^2 d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 - 4\eta \mu \theta + \eta \mu^2 \theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 4\theta + 4\sigma \nu \nu \theta - \frac{\eta \mu \theta \sigma \nu \nu \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{9\pi}{2}
 \end{aligned}$$



**22)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες της μορφής  $\rho = \alpha \sigma \nu \nu 5\theta$



$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{10}} \alpha^2 \sigma \nu \nu^2 5\theta d\theta = \frac{\alpha^2}{10} \int_0^{\frac{\pi}{10}} \sigma \nu \nu^2 5\theta d(5\theta) = \frac{\alpha^2}{10} \left( \frac{\sigma \nu \nu 5\theta \eta \mu 5\theta}{2} + \frac{5\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{10}} = \frac{\pi \alpha^2}{40}$$

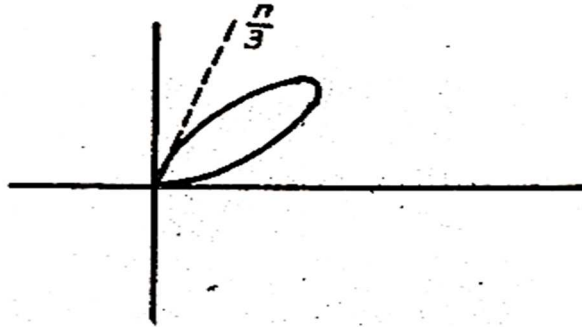
Επειδή η καμπύλη έχει 5 φύλλα και εγώ βρήκα το εμβαδόν του μισού φύλλου, το

$$Eo\lambda = 10 \frac{\pi \alpha^2}{40} = \frac{\pi \alpha^2}{4}$$

**23)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από ένα φύλλο της καμπύλης  $\rho^2 \cdot \sigma \nu \nu \theta = \alpha^2 \cdot \eta \mu(3\theta)$  του παρακάτω σχήματος

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\alpha^2 \eta \mu 3\theta}{\sigma \nu \nu \theta} d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\eta \mu \theta - 4\eta \mu^3 \theta}{\sigma \nu \nu \theta} d\theta = \\
 &= \frac{3\alpha^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu \theta}{\sigma \nu \nu \theta} d\theta - 2\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^3 \theta}{\sigma \nu \nu \theta} d\theta = -\frac{3\alpha^2}{2} \log(\sigma \nu \nu \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - 2\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu^2 \theta \eta \mu \theta}{\sigma \nu \nu \theta} d\theta = \\
 &= -\frac{3\alpha^2}{2} \left( \log\left(\sigma \nu \nu \frac{\pi}{3}\right) - \log(\sigma \nu \nu 0) \right) + 2\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sigma \nu \nu^2 \theta}{\sigma \nu \nu \theta} d\sigma \nu \nu \theta =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3\alpha}{2} \left[ \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1) \right] + 2\alpha^2 \left( \log(\sigma v \theta) - \frac{\sigma v^2 \theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \\
&= -\frac{3\alpha^2}{2} (\log(1) - \log(2) - \log(1)) + 2\alpha^2 \left( \log\left(\sigma v \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sigma v^2 \frac{\pi}{3}}{2} - \log(\sigma v 0) + \frac{\sigma v^2 0}{2} \right) = \\
&= \frac{3\alpha^2}{2} \log(2) + 2\alpha^2 \left( \log(1) - \log(2) - \frac{1}{8} - \log(1) + \frac{1}{2} \right) = \\
&= \frac{3\alpha^2}{2} \log(2) - 2\alpha^2 \log(2) + \frac{3\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} \log(2)
\end{aligned}$$



**24)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου εντός της καρδιοειδούς  $\rho = 1 + \sigma \nu \theta$  και εκτός του κύκλου  $\rho = 1$ .

Το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπύλων με εξισώσεις:  
 $\varrho_1 = f(\theta)$  και  $\varrho_2 = f(\theta)$   
 δίνονται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) d\theta$$

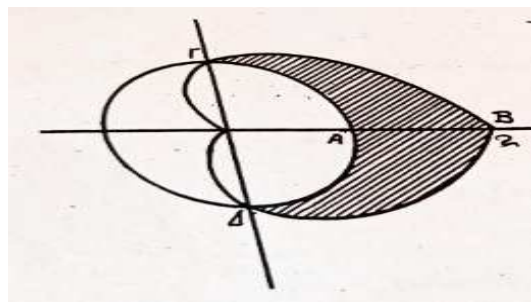
Για να βρω τα όρια, λύνω το σύστημα των εξισώσεων των 2 καμπύλων γραμμών, δηλαδή εντοπίζω τα κοινά τους σημεία. Σε αυτή την εφαρμογή, ολοκληρώνω από  $\theta = 0$  ως  $\theta = \frac{\pi}{2}$  και βρίσκω το εμβαδόν του (ΒΓΑΔ), οπότε διπλασιάζω και έχω το

ολικό εμβαδόν, ή ολοκληρώνω από  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  ως  $\theta = \frac{\pi}{2}$  και βρίσκω το εμβαδόν του

(ΔΒΓΑΔ), δηλαδή το ολικό εμβαδόν. Ως  $\rho_1$  λαμβάνω μία εκ των δύο καμπύλων γραμμών, άνευ περιορισμού, διότι αν βρω αρνητικό αποτέλεσμα στο ολοκλήρωμα, η απόλυτη τιμή του ολοκληρώματος ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν.

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1 + \sigma \nu \theta)^2 - 1^2] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sigma \nu \theta + \sigma \nu^2 \theta - 1) d\theta = \\
&= \frac{1}{2} \left( 2\eta \mu \theta + \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{\pi}{4} \right) = 1 + \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E_{\text{ολ}} = 2 + \frac{\pi}{4}$$



**25)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου εντός του κύκλου  $\rho = 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$  και εκτός του κύκλου  $\rho = \alpha$ .  
 $2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$

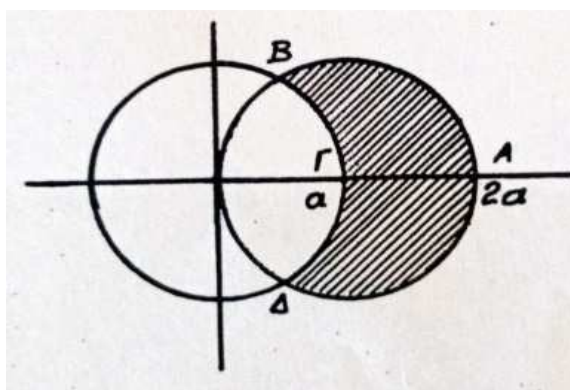
$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \text{ άρα } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ και } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$E_{ολ} = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta - \alpha^2) d\theta =$$

$$= 4\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta - \alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = 4\alpha^2 \left( \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) - \alpha^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 4\alpha^2 \left( \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi\alpha^2}{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\alpha^2}{3}$$

$$\text{ή } E_{ολ} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta - \alpha^2) d\theta$$



**26)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου εντός του κύκλου  $\rho = 4\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$  και εκτός του κύκλου  $\rho = \alpha$ .

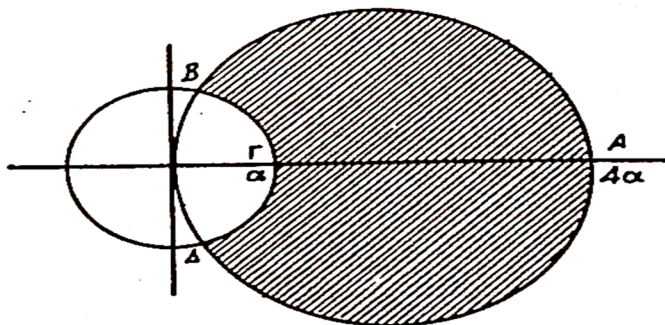
$$4\alpha\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } \theta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{4}$$

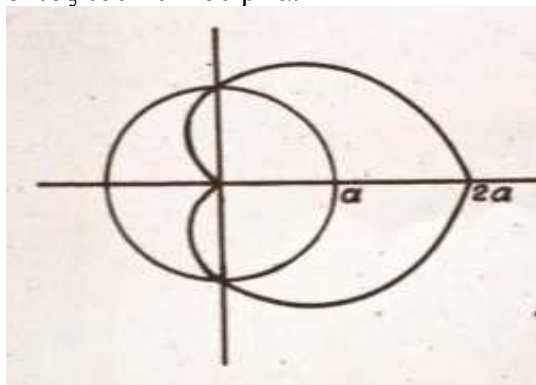
$$E_{ολ} = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(1/4)} (16\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta - \alpha^2) d\theta$$

$$\text{ή } E_{ολ} = 16\alpha^2 \int_0^{\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(1/4)} \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta - \alpha^2 \int_0^{\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(1/4)} d\theta = 16\alpha^2 \left( \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) - \alpha^2\theta \Big|_0^{\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(1/4)} =$$

$$= 16\alpha^2 \left( \frac{\frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{16}}}{2} \right) + \frac{\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(1/4)}{2} - \alpha^2 \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu \frac{1}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{15}}{2} + 7\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu \frac{1}{4}$$



**27)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου εντός του καρδιοειδούς  $\rho = \alpha \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$  και εκτός του κύκλου  $\rho = \alpha$ .

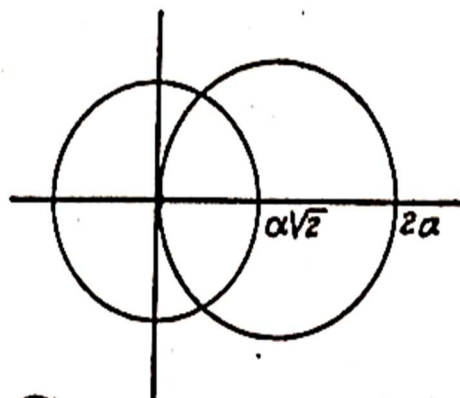


$$\begin{aligned} \alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) &= \alpha \text{ ή } 1 + \sigma\upsilon\nu\theta = 1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \text{ άρα } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ και } \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Εολ} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\alpha^2(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 - \alpha^2] d\theta = \frac{\alpha^2}{2} (2\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) d\theta = \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \left( 2\eta\mu\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \alpha^2 \left( 2 + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

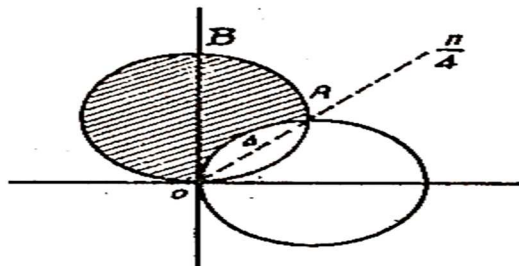
**28)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου εντός του κύκλου  $\rho = 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$  και εκτός του κύκλου  $\rho = \alpha\sqrt{2}$

$$2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha\sqrt{2} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ Άρα } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ και } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Εολ} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (4\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\alpha^2) d\theta$$



**29)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου εντός του κύκλου  $\rho = 2\alpha \cdot \eta\mu\theta$  και εκτός του κύκλου  $\rho = 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ .



$$2\alpha\eta\mu\theta = 2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta \quad \varepsilon\varphi\theta = 1 \quad \text{Άρα} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$E = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 4\alpha^2\eta\mu^2\theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta =$$

$$= 2\alpha^2 \left( \frac{-\eta\nu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - 2\alpha^2 \left( \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\alpha^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

**30)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες  $\rho = 8 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

$$\text{και } \rho = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$8\sigma\upsilon\nu = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1}{4} \quad \text{ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Αν θέλω το εμβαδόν του (ΑΒΓΔΑ)

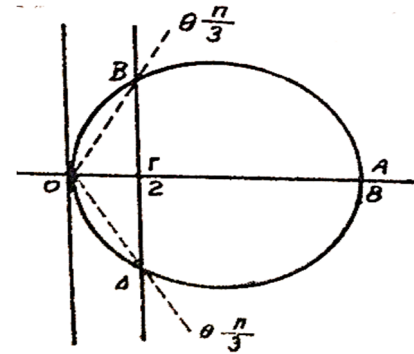
$$E = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( 64\sigma\upsilon\nu^2\theta - \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} \right) d\theta =$$

$$= 64 \left( \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) - 4\varepsilon\varphi\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 32 \left( \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - 4\sqrt{3} =$$

$$= 8\sqrt{3} + \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{32\pi}{3} + 4\sqrt{3}$$

Αν θέλω το εμβαδόν του (ΒΟΔΓΒ)

$$E = 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 64\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta + 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} d\theta$$

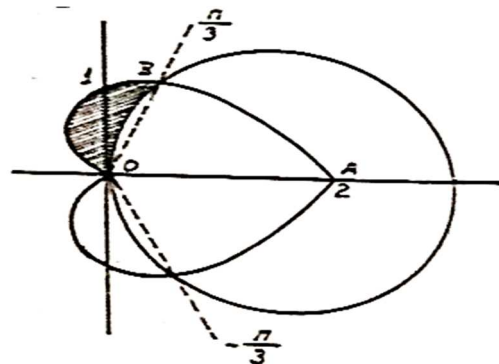


**31)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που είναι εντός του κύκλου  $\rho = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$  και εκτός του κύκλου  $\rho = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ .

$$E = 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta - 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sigma\upsilon\nu^2$$

Αν θέλω εντός της  $\rho = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$  και εντός της  $\rho = 3\sigma\upsilon\nu\theta$

$$E = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta + 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sigma\upsilon\nu^2$$



**32)** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την κλειστή καμπύλη

$$\text{γραμμή } \rho = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{με } \varepsilon < 1.$$

Τα όρια ολοκλήρωσης είναι από  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$  διότι το  $\rho$  μία κάθε τιμή του  $\theta$  μεταξύ 0 και  $2\pi$  είναι διάφορο του μηδενός.

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta. \text{ Θέτω } \varepsilon \varphi \frac{\theta}{2} = t$$