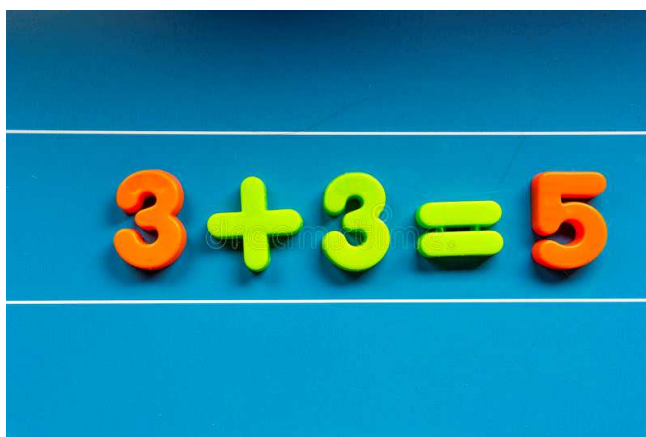




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Λογισμός σφαλμάτων, είδη & μέτρηση τους

Σπουδαστές: Άμπντι Ιωσήφ (AM 8800)
Άμπντελναμπί Μοχάμεντ (AM 8852)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2023–2024

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.12.2022**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **25.06.2024**
 Ημερομηνία εξέτασης: **...07.2024**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Δρ. Αναστασόπουλος Γεώργιος Μηχανολόγος Μηχανικός		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Λέξεις κλειδιά

Απόλυτο σφάλμα, σχετικό σφάλμα, κλάση ακρίβειας, σημαντικά ψηφία, πιθανολογική προσέγγιση, στατιστική προσέγγιση, καμπύλη του Gauss, κανονική κατανομή, τυχαίο σφάλμα, συστηματικό σφάλμα, περιττό σφάλμα, σημαντικό σφάλμα, αξιόπιστα ψηφία, σημαντικά ψηφία, φράγματα τιμών, μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, έλεγχος υποθέσεων, κεντρικό οριακό θεώρημα, προσεγγιστικές τιμές, αρχή της μέγιστης πιθανότητας, εκτιμήσεις μέγιστης πιθανότητας.

Περίληψη

Σφάλματα μπορούν να προκύψουν κατά τη χρήση όλων γενικά των μεθόδων που βρίσκουν εφαρμογή στη μελέτη μηχανικών και άλλων προβλημάτων. Ορισμένα από αυτά, ανακύπτουν σε όλες ανεξαιρέτως τις μεθοδολογίες, αναλυτικές και αριθμητικές, ενώ άλλα, συναντώνται μόνο σε αριθμητικές λύσεις. Ο όρος σφάλμα, αναφέρεται σε όλες γενικά τις αποκλίσεις του αποτελέσματος από τη λύση του πραγματικού προβλήματος. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι αποκλίσεις αυτές είναι αποδεκτές, καθότι αναγνωρίζονται ως συμφυείς με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται, ενώ σε άλλες περιπτώσεις δεν είναι, είτε διότι δε γίνεται σωστή χρήση της μεθόδου, είτε διότι η μέθοδος είναι εξ' αντικειμένου ανεπαρκής. Έτσι, τα σφάλματα που προκύπτουν σε αριθμητικές λύσεις οφείλονται γενικά σε δύο κατηγορίες:

- αυτά που ανακύπτουν κατά τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος και
- αυτά που ανακύπτουν κατά την αριθμητική επίλυση του μαθηματικού μοντέλου στον υπολογιστή. Σφάλματα προκύπτουν στην πρώτη περίπτωση, όταν η προσέγγιση στο φυσικό πρόβλημα είναι ανεπαρκής. Τέτοια σφάλματα είναι σε πολλές περιπτώσεις αμελητέα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των σχετικιστικών φαινομένων σε προβλήματα της κλασσικής μηχανικής. Όταν όμως δεν είναι αμελητέα, τότε όσο ακριβής και να είναι η αριθμητική λύση που επακολουθεί, δεν είναι δυνατό να περιορισθεί το σφάλμα αυτό. Άλλη πηγή σφαλμάτων είναι, σε ορισμένες περιπτώσεις, η έλλειψη επαρκούς ακρίβειας στις τιμές των φυσικών σταθερών (επιτάχυνση λόγω βαρύτητας, κ.ά.) ή και σε τιμές εμπειρικών δεδομένων.

Στην περίπτωση δε των τελευταίων, απαιτείται προσοχή διότι τα σφάλματα αυτά είναι τυχαία (πιθανοτικά).

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	2
Περίληψη	2
1. Σφάλματα στις μετρήσεις	5
1.1 Σφάλματα αποκοπής (ή διακριτοποίησης)	6
1.2 Σφάλματα στρογγυλοποίησης	6
1.3 Σημαντικά ψηφία	6
2. Μερικά λόγια για τη στατιστική	7
2.1 Πιθανολογική προσέγγιση	7
2.2 Στατιστική προσέγγιση	8
3. Καμπύλη του Gauss και κανονικότητα	8
3.1 Η κανονική κατανομή	8
4. Ο νόμος των σφαλμάτων	9
5. Η υπόθεση των στοιχειωδών σφαλμάτων	10
6. Κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ)	11
7. Οι συχνότεροι τύποι σφαλμάτων μέτρησης	12
7.1 Το ανθρώπινο σφάλμα (ολίσθημα ή λάθος)	12
7.2 Το σφάλμα κατά τον προγραμματισμό του αλγορίθμου	13
7.3 Το σφάλμα προσέγγισης της ακριβούς λύσης	13
7.4 Τυχαίο σφάλμα	13
7.5 Συστηματικό σφάλμα	13
7.6 Περιττό σφάλμα	13
7.7 Σημαντικό σφάλμα	13
7.8 Σφάλμα λόγω ελαττωμάτων στο χρησιμοποιούμενο όργανο	13
7.9 Σφάλμα που προκλήθηκε από το άτομο που έλαβε τη μέτρηση	14
7.10 Σφάλμα λόγω περιβαλλοντικών συνθηκών	14
Οι θερμοκρασίες, ο ήχος και άλλα περιβαλλοντικά ερεθίσματα επηρεάζουν τις μετρήσεις.	14
8. Λογισμός σφαλμάτων	14
9. Προσεγγιστικές τιμές	14
10. Απόλυτο σφάλμα, διόρθωση και σχετικό σφάλμα	15
10.1 Απόλυτο σφάλμα	15
10.2 Διόρθωση	15
10.3 Σχετικό σφάλμα	15
10.4 Ακρίβεια αριθμών, παραστάσεις ανακριβών αριθμών	15
10.5 Φράγματα του απόλυτου σφάλματος	16
10.6 Φράγματα σχετικού σφάλματος	16
10.7 Σύντμηση	16
10.8 Στρογγυλοποίηση	17
10.9 Αξιόπιστα ψηφία	17
10.10 Ουσιώδη και επουσιώδη ψηφία	18
10.11 Η στρογγυλοποίηση στρογγυλοποιημένων αριθμών	18
10.12 Ακρίβεια αποτελέσματος κατά τους υπολογισμούς με προσεγγιστικές τιμές	18
10.13 Μέθοδος των φραγμάτων τιμών	18
10.14 Μέθοδος των φραγμάτων του σφάλματος	20
10.15 Εφαρμογή της μεθόδου επί των βασικών αριθμητικών πράξεων	21
11 Σφάλματα μέτρησης και παρατήρησης	24
11.1 Σφάλμα μέτρησης	24
11.2 Σφάλμα παρατήρησης	24
11.3 Ο νόμος σφαλμάτων του Gauss	25

11.4 Κανονική κατανομή.....	26
11.5 Παρατηρήσεις.....	26
11.6 Ελλείπουσες τιμές (missing values) ή ελλείποντα δεδομένα (missing data) ...	29
11.7 Αντιμετώπιση του προβλήματος των ελλειπουσών τιμών	30
12. Εκτιμητική	32
12.1 Ιδιότητες σημειακής εκτιμήτριας	32
13. Έλεγχος υποθέσεων (hypothesis testing).....	32
14. Λογισμός των προσαρμογών	33
14.1 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων	34
14.2 Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων – Συνάρτηση πιθανότητας	34
14.3 Αρχή των ελαχίστων τετραγώνων του Gauss – Αρχή της μέγιστης πιθανότητας	34
14.4 Πρακτική εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.....	35
14.5 Μέσο σφάλμα, πιθανό σφάλμα	35
14.6 Εκτίμηση του μέσου σφάλματος εκ των παρατηρήσεων.....	36
14.7 Προσαρμογή άμεσων μετρήσεων ίσης ακρίβειας.....	37
14.8 Προσαρμογή άμεσων μετρήσεων άνισης ακρίβειας.....	38
14.9 Προσαρμογή παρατηρήσεων υπό συνθήκες	40
14.10 Προσαρμογή έμμεσων παρατηρήσεων	42
15. Βιβλιογραφία	44

1. Σφάλματα στις μετρήσεις

Στις μετρήσεις των φυσικών μεγεθών, γίνονται σφάλματα που οφείλονται σε διάφορους παράγοντες (παρατηρητή, όργανα μέτρησης, κ.λπ.) και διακρίνονται σε συστηματικά και τυχαία. Τα **συστηματικά** σφάλματα:

1. οφείλονται κυρίως στην ακρίβεια των οργάνων που χρησιμοποιούνται και δεν είναι πάντα σταθερά. (π.χ. ο μηχανισμός ρολογιού που «τρέχει» πιο γρήγορα από το κανονικό και προκαλεί σφάλμα, συνεχώς αυξανόμενο με την πάροδο του χρόνου.)

2. οφείλονται σε μόνιμο αίτιο και επηρεάζουν τη μέτρηση πάντα κατά την ίδια φορά, δίνοντας π.χ. τιμή πάντα μικρότερη από την πραγματική, λόγω ανακριβούς κλίμακας ή μετατόπισης του μηδέν του οργάνου μέτρησης, ή ανακριβών σταθμών ή μη σωστά βαθμολογημένου θερμόμετρου, κ.ο.κ.

3. παρουσιάζονται και στο στάδιο του υπολογισμού, είτε λόγω ανεπαρκούς θεωρίας ή προσεγγιστικού τύπου, είτε λόγω ανακριβούς σταθεράς π.χ. $g = 10 \frac{m}{s^2}$

αντί του $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.

Τα **τυχαία** σφάλματα δεν είναι δυνατό να τα αποφύγουμε αλλά μόνο να τα περιορίσουμε, κάνοντας πολλές μετρήσεις και εξάγοντας το μέσο όρο αυτών.

Οφείλονται σε μη μόνιμα αίτια και επιδρούν στο αποτέλεσμα ακανόνιστα, δίνοντας άλλοτε μεγαλύτερη και άλλοτε μικρότερη τιμή από την πραγματική. Αν μετράμε το μήκος απρόσεκτα, κάθε φορά που το κάνουμε θα προκύπτει και διαφορετική τιμή. Σε προβλήματα ηλεκτροτεχνίας, η τυχόν ακανόνιστη μεταβολή της τάσης του δικτύου οδηγεί σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Για να αποφύγουμε τα σφάλματα, για τα μεν συστηματικά πρέπει να εξουδετερώσουμε τις αιτίες τους, για τα δε τυχαία να κάνουμε αρκετές μετρήσεις, των οποίων να εξάγουμε το μέσο όρο. Ο μέσος όρος $\bar{x}$ διαφέρει από την πραγματική τιμή X του μετρούμενου μεγέθους, κατά μία ποσότητα που ονομάζεται **απόλυτο σφάλμα σ** . Προκειμένου να εκτιμήσουμε την αξιοπιστία των μετρήσεων, δεν αρκεί μόνο η τάξη του απολύτου σφάλματος, αλλά απαιτείται και ο συσχετισμός του με το προς μέτρηση μέγεθος. Σφάλμα 1 m κατά τον υπολογισμό του ύψους ενός σπιτιού είναι αδικαιολόγητο, ενώ το ίδιο σφάλμα στην μέτρηση της απόστασης δύο πλοίων μέσα στον ωκεανό είναι τελείως ασήμαντο.

Προκειμένου να ελέγχουμε την ακρίβεια των μετρήσεων, χρησιμοποιούμε το λόγο $\Sigma = \frac{\sigma}{X}$ που ονομάζεται **σχετικό σφάλμα**. Μπορεί να εκφρασθεί και ως το επί

τοίς εκατό σφάλμα της μέτρησης, με τη σχέση $\Sigma = \frac{\sigma}{X} \cdot 100$. Το πιθανό συστηματικό

σφάλμα των ενδείξεων οργάνου μέτρησης, αναγράφεται από τον κατασκευαστή και είναι γνωστό ως **κλάση ακριβείας**. Αν για κάποιο φυσικό μέγεθος τα $x_1, x_2, \dots, x_n$

είναι οι μετρήσεις που κάναμε, η μέση τιμή του $\bar{x}$, που αποτελεί την καλύτερη

προσέγγιση του, δίνεται από τον τύπο $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Το πιθανό σφάλμα σ , μεταξύ της

μέσης και της πραγματικής τιμής, ονομάζεται **διασπορά ή απόκλιση** και δίνεται από

τους δύο παρακάτω ισοδύναμους τύπους $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$, $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$.

1.1 Σφάλματα αποκοπής (ή διακριτοποίησης)

Είναι η διαφορά του αληθούς αποτελέσματος (για πραγματικά δεδομένα εισόδου) από το αποτέλεσμα που θα παραγόταν από ένα δοσμένο αλγόριθμο, που χρησιμοποιεί ακριβή αριθμητική. Οφείλεται στις προσεγγίσεις όπως η αποκοπή μίας σειράς, η αντικατάσταση μίας παραγωγού από μία διαιρεμένη διαφορά, η αντικατάσταση, μίας οποιασδήποτε συνάρτησης από ένα πολυώνυμο, ή ο τερματισμός μίας επαναληπτικής διαδικασίας, πριν από τη σύγκλιση.

1.2 Σφάλματα στρογγυλοποίησης

Είναι η διαφορά του αποτελέσματος που παράγεται από ένα δοσμένο αλγόριθμο που χρησιμοποιεί ακριβή αριθμητική και του αποτελέσματος που παράγεται από τον ίδιο αλγόριθμο, όταν χρησιμοποιεί πεπερασμένης ακρίβειας, στρογγυλεμένη αριθμητική. Οφείλεται στη μη ακρίβεια της αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών και στις αριθμητικές πράξεις που γίνονται μεταξύ αυτών.

Άρα, εξ ορισμού, το υπολογιστικό σφάλμα είναι απλά το άθροισμα του σφάλματος αποκοπής και του σφάλματος στρογγυλοποίησης. Αν και τα σφάλματα αποκοπής και στρογγυλοποίησης παίζουν και τα δύο σπουδαίο ρόλο σε ένα δοσμένο υπολογισμό, συνήθως το ένα από τα δύο αποτελεί τον κυρίαρχο παράγοντα στο τελικό υπολογιστικό σφάλμα. Γενικά, το σφάλμα στρογγυλοποίησης τείνει να κυριαρχεί σε καθαρά αλγεβρικά προβλήματα με πεπερασμένους αλγόριθμους επίλυσης, ενώ το σφάλμα αποκοπής τείνει να κυριαρχεί σε προβλήματα που εμπλέκουν ολοκληρώματα, παραγώγους, ή μη γραμμικότητες, τα οποία συχνά απαιτούν μία θεωρητικά ατέρμονα διαδικασία επίλυσης. Οι διακρίσεις που έχουμε κάνει ανάμεσα στους διάφορους τύπους σφαλμάτων, είναι σημαντικές στην κατανόηση της συμπεριφοράς των αριθμητικών αλγόριθμων και των παραγόντων που επηρεάζουν την ακρίβειά τους, αλλά συνήθως δεν είναι απαραίτητο ή ακόμη και δυνατό, να προσδιορίσουμε επακριβώς ποσοτικά τα επί μέρους σφάλματα.

1.3 Σημαντικά ψηφία

Επειδή οι μετρήσεις ποτέ δε δίνουν την πραγματική τιμή του μετρούμενου φυσικού μεγέθους, αλλά μία κατά προσέγγιση τιμή, πρέπει να φαίνεται ο βαθμός προσέγγισης. Στις τιμές που προκύπτουν από μετρήσεις δίνονται μόνο τα σημαντικά ψηφία, δηλαδή μόνο τόσα ώστε το τελευταίο ψηφίο να διαφέρει από την πραγματική τιμή περίπου κατά μονάδα. Αν το αποτέλεσμα έχει προκύψει ύστερα από μαθηματικούς υπολογισμούς, έχει ακρίβεια που εξαρτάται από την ακρίβεια των τιμών εκείνων των μεγεθών, που μετέχουν στους υπολογισμούς. Κατ' αυτό τον τρόπο, αν οι τέσσερις διαδοχικές τιμές της μέτρησης του μήκους ενός αντικειμένου είναι 5.1, 5.0, 4.9 και 4.7 m, η μέση τιμή που προκύπτει είναι 4.925 m και είναι αποδεκτή η αναγραφή μόνο των τριών πρώτων ψηφίων δηλαδή 4.92.

Αν οι τρεις διαδοχικές τιμές της μέτρησης του μήκους ενός αντικειμένου είναι 10.1, 9.9 και 9.8 mm, η μέση τιμή που προκύπτει είναι 9.9333333 mm και ανάλογα με την ακρίβεια που επιθυμούμε, επιλέγουμε αν θα κρατήσουμε μόνο τα τρία ή τέσσερα πρώτα ψηφία. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πλευρά x , μίας αίθουσας διδασκαλίας, σχήματος τετραγώνου και εμβαδού $s = 30 \text{ m}^2$, από τον τύπο $x = \sqrt{s}$ είναι $x = 5.477225575 \text{ m}$. Πρακτικά σημαντικά είναι μόνο τα δύο ή τρία πρώτα ψηφία, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε $x = 5.47 \text{ m}$. Η αναγραφή των υπολοίπων ψηφίων είναι περιττή. Όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε αριθμούς, το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που κρατάμε στο εξαγόμενο, πρέπει να ισούται με τον μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων οποιουδήποτε όρου του αθροίσματος.

Στο άθροισμα $1234+5,67$ η σωστή απάντηση είναι 1239 και όχι 1239.67. Στο άθροισμα $1,20003+0,00004$ η σωστή απάντηση είναι 1,20007 και έχει έξι σημαντικά ψηφία παρόλο που ο δεύτερος προσθετέος έχει ένα μόνο σημαντικό ψηφίο. Ομοίως, στην αφαίρεση $1.002 - 0,987 = 0,015$ το εξαγόμενο έχει δύο μόνο σημαντικά ψηφία και τα δεκαδικά ψηφία είναι τρία. Έστω ότι με τη βοήθεια χάρακα, μετράμε τις διαστάσεις επίπεδης μεταλλικής επιφάνειας σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με ακρίβεια $\pm 0.1 \text{ cm}$. Αν βρήκα το μήκος 56.78 cm μπορώ να πω με βεβαιότητα ότι η πραγματική του τιμή είναι ανάμεσα στα 56.77 cm και 56.79 cm . Συνεπώς, η μέτρηση έχει ακρίβεια τεσσάρων σημαντικών ψηφίων. Αν θέλω να βρω το εμβαδόν αυτής της μεταλλικής πλάκας που έχει πλάτος 1.2 m κάνω τον πολλαπλασιασμό $(56.78 \text{ cm}) \cdot (1.2 \text{ cm}) = 68.136 \text{ cm}^2$. Κρατώ τόσα σημαντικά ψηφία, όσα έχει η «χειρότερα» μετρημένη διάσταση, δηλαδή η διάσταση με το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων, εν προκειμένω το πλάτος που έχει δύο σημαντικά ψηφία. Συνεπώς, η μεταλλική πλάκα έχει εμβαδόν 68 cm^2 .

2. Μερικά λόγια για τη στατιστική

Έστω ότι επαναλαμβάνω ένα πείραμα για να παρατηρήσω την εμφάνιση ενός γεγονότος του οποίου την πιθανότητα αγνοώ. Επαναλαμβάνω το πείραμά πολλές φορές και παρατηρώ την εμφάνιση του γεγονότος. Η σχετική συχνότητα του γεγονότος, είναι κατάλληλη προσέγγιση για την άγνωστη πιθανότητα; Ακόμα και αν πιστεύω ότι γνωρίζω εκ των προτέρων την πιθανότητα και επαναλάβω το πείραμά πολλές φορές, η σχετική συχνότητα εμφάνισης του γεγονότος μπορεί να με κάνει να διαφοροποιήσω την εκ των προτέρων πιθανότητα. Αυτή η προσέγγιση, στην οποία συλλέγω ξανά πληροφορίες μέσω των αποτελεσμάτων των πειραμάτων και από αυτές προσπαθώ να εξάγω συμπεράσματα σχετικά με την πιθανότητα ενός γεγονότος ή άλλα χαρακτηριστικό του πειράματος είναι το αντικείμενο της στατιστικής. Οι πιθανότητες κάνουν παραγωγικό συλλογισμό. Η στατιστική χρησιμοποιεί έναν επαγωγικό συλλογισμό. Οι πιθανότητες υποθέτουν ως αληθινό ένα πιθανολογικό μοντέλο και από αυτό αντλούν συμπεράσματα σχετικά με τα αποτελέσματα που θα παράγει ένα πείραμα. Η στατιστική μπορεί να θεωρήσει ένα μοντέλο για το πείραμα, αλλά αγνοώντας τα χαρακτηριστικά του, εστιάζει στην παρατήρηση των αποτελεσμάτων και από αυτά, μέσω μίας επαγωγικής διαδικασίας, λαμβάνει τα χαρακτηριστικά του πειράματος, ως την πιθανότητα ότι θα συμβεί ένα γεγονός.

Και στις δύο διαδικασίες, τα αποτελέσματα υπόκεινται σε κάποιο σφάλμα που η στατιστική και η πιθανότητα είναι ικανές να ποσοτικοποιήσουν, καθεμιά με τους κανόνες της και σε αυτές παίζουν συνήθως σημαντικό ρόλο οι νόμοι των μεγάλων αριθμών ή άλλα αποτελέσματα όπως το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Στο παράδειγμα του δοχείου του Bernoulli, αν γνωρίζω τη σύνθεσή του μπορώ να καθορίσω την πιθανότητα (ή μια εκτίμησή της) ότι αν κάνω n τραβήγματα με επανατοποθέτηση, η αναλογία των άσπρων θα είναι τόσο κοντά στο $3/5$ όσο επιθυμώ. Μπορώ επίσης να καθορίσω το πλήθος τραβηγμάτων που πρέπει να κάνω ώστε η πιθανότητα ότι η διαφορά μεταξύ σχετικής συχνότητας και $3/5$ να είναι εντός ορισμένων ορίων (ωστόσο μικρό κι αν είναι), να είναι τόσο κοντά στο 1 όσο θέλω.

2.1 Πιθανολογική προσέγγιση

Αν γνωρίζω μόνο ότι το δοχείο υπάρχουν άσπρες και μαύρες μπάλες, όμως όχι πόσες ούτε σε ποιο ποσοστό, αρχίζω να βγάζω μπάλες σημειώνοντας το χρώμα τους και επιστρέφοντάς τις στο δοχείο. Από την παρατηρούμενη σχετική συχνότητα άσπρων και μαύρων μπορώ να συμπεράνω ποιά είναι η αναλογία μέσα στο δοχείο με

κάποιο σφάλμα ή ανοχή. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να καθοριστεί η πιθανότητα ότι η αναλογία θα είναι εντός ορισμένων ορίων.

2.2 Στατιστική προσέγγιση

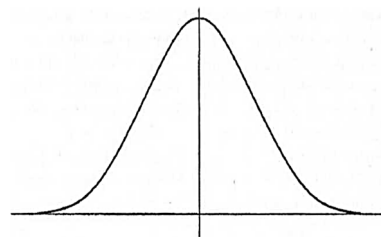
Η τελευταία είναι η βάση των ερευνών που είναι τόσο κοινές στην κοινωνία. Για να μάθω τις προτιμήσεις υπέρ ενός υποψηφίου δημάρχου ρωτάω πολλά άτομα (τραβάμε μπάλες), σημειώνω την απάντησή τους (χρώμα) και συνάγω με κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης (πιθανότητα) το ποσοστό της λαϊκής υποστήριξης (ποσοστό άσπρων μπαλών) που έχει αυτός ο υποψήφιος (δοχείο), με ένα κάποιο σφάλμα (απόκλιση).

3. Καμπύλη του Gauss και κανονικότητα

Έλεγε ο Sir Francis Galton (1822–1911) «Όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός και μεγαλύτερη η φαινομενική αναρχία, τόσο πιο τέλειος είναι ο τομέας του. Είναι ο υπέρτατος νόμος του παραλογισμού. Κάθε φορά που λαμβάνεται ένα μεγάλο δείγμα χαοτικών στοιχείων και διατάσσονται ανάλογα με το μέγεθό τους, εμφανίζεται μια απροσδόκητη και θαυμάσια μορφή κανονικότητας, λανθάνουσα κάτω από αυτό». Ο Bernoulli, ενδιαφερόταν να αποδείξει ότι η πιθανότητα πως η απόκλιση μεταξύ σχετικής συχνότητας και πιθανότητας γίνεται τόσο μικρή όσο επιθυμούμε, προσεγγίζει το ένα. Αλλά ποτέ δεν ενδιαφέρθηκε για την ακριβή εκτίμηση αυτής της πιθανότητας, κάτι που επιτρέπει η κανονική κατανομή και το κεντρικό οριακό θεώρημα.

3.1 Η κανονική κατανομή

Ο Abraham De Moivre (1667–1754) αποπειράθηκε να υπολογίσει το άθροισμα των όρων που εμφανίζονται στο διώνυμο του Newton $(a + b)^n$ όπου n είναι ένας μεγάλος φυσικός αριθμός. Συνέδεσε αυτό το θέμα με την πιθανότητα ενός γεγονότος, όπου n ο αριθμός επαναλήψεων του πειράματος που δημιουργεί το γεγονός. Άρχισε να μελετά την περίπτωση $(1+1)^n$, που σχετίζεται με πείραμα με μόνο δύο πιθανά αποτελέσματα που είναι ισοπίθανα.



Ο De Moivre ήθελε να υπολογίσει την πιθανότητα σε n επαναλήψεις του πειράματος, το ζητούμενο γεγονός (που είναι εξίσου πιθανό με το αντίθετο) θα εμφανιζόταν έναν αριθμό φορών που θα ήταν περίπου $\frac{n}{2}$.

Διαπίστωσε ότι μια καλή προσέγγιση αυτής της πιθανότητας λαμβανόταν με τη

βοήθεια του ολοκληρώματος $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2n}} dx$ που σήμερα ονομάζεται **κανονική**

κατανομή. Η Γκαουσιανή ή κανονική κατανομή είναι μια κατανομή πιθανοτήτων που καθορίζεται από τη συνάρτηση πυκνότητας (το συνεχές αντίστοιχο της

συνάρτησης πιθανότητας των διαρκών μεταβλητών) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ όπου

μ , σ^2 είναι η μέση τιμή και η διασπορά της. Το γράφημα της που ονομάζεται καμπύλη ή **καμπάνα του Gauss** είναι το διπλανό. Ο Laplace βελτίωσε το αποτέλεσμα του De Moivre αποδεικνύοντας ότι έστω ένα πείραμα στο οποίο μπορεί να εμφανιστεί ένα γεγονός E με πιθανότητα p ή το συμπλήρωμά του (με πιθανότητα

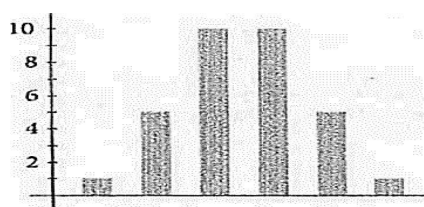
$1-p$). Όταν επαναλαμβάνω το πείραμα υπό τις ίδιες συνθήκες n φορές και υπάρχουν n εμφανίσεις του γεγονότος E , η πιθανότητα ότι η διαφορά μεταξύ m/n και p είναι μεταξύ ορισμένων τιμών και συγκεκριμένα $\frac{-t\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ και $\frac{t\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

είναι περίπου $\frac{2}{n} \int_0^1 e^{-x^2} dx + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια πρώτη

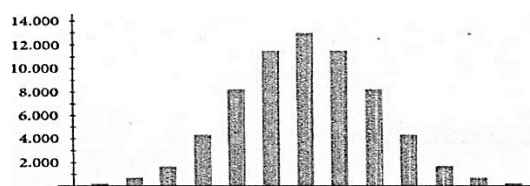
εκδοχή αυτού που είναι σήμερα γνωστό ως κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ) και είναι το κλειδί που εξηγεί τη δύναμη των προβλέψεων μεγάλου μέρους των στατιστικών εργαλείων.

Πέρα από τους τύπους με τους οποίους εκφράζεται, αυτό που λέει το θεώρημα είναι ότι αν δοθεί ένα αρκετά μεγάλο δείγμα, τα χαρακτηριστικά αυτού του δείγματος θα αναπαράγουν αυτά του πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται και ο τελευταίος θα μπορεί να μελετηθεί με μεθόδους πιθανοτήτων και στατικής. Αυτό που ήθελε να κάνει ο De Moivre ήταν να προσθέσει τους όρους των σειρών του τριγώνου Pascal που κατείχαν θέσεις πολύ χαμηλά στο τρίγωνο (n μεγάλο). Σήμερα πιστεύουμε ότι αυτός ο υπολογισμός γίνεται, γρήγορα και με ακρίβεια, με μια αριθμομηχανή ή έναν όχι πολύ ισχυρό υπολογιστή. Όμως στη γραμμή 200 υπάρχουν όροι με 59 ψηφία (οι αριθμομηχανές δε χρησιμεύουν) και κατά τον 18^ο αιώνα τα εργαλεία υπολογισμού δεν ήταν τα σημερινά. Το πρόβλημα που εξετάστηκε από τον De Moivre ήταν, όπως ο ίδιος αναγνώριζε, πολύ δύσκολο. Οι περιορισμοί του υπολογισμού ήταν αυτό που είχε αναγκάσει τους Bernoulli και De Moivre να χρησιμοποιήσουν προσεγγίσεις οι οποίες βελτιώθηκαν με την ανάπτυξη νέων τεχνικών και εργαλείων υπολογισμού.

Στο τρίγωνο του Pascal, αν πάρω τους αριθμούς μιας σειράς, όπως της 5^η και αν αναπαραστήσω σε ένα γράφημα κάθε αριθμό με ύψος ανάλογο με την αξία του προκύπτει το γράφημα 1. Αν κάνω το ίδιο στη 16^η γραμμή, προκύπτει το γράφημα 2.



Γράφημα 1



Γράφημα 2

4. Ο νόμος των σφαλμάτων

Σε όλη την ιστορία, η παρατήρηση του ουράνιου θόλου, των πλανητών, των άστρων ή των κομητών είναι ένα από τα επιστημονικά θέματα που έχει εξάψει περισσότερο την προσοχή, επειδή η κατανόηση και η γνώση του ηλιακού συστήματος (και άλλων συστημάτων πέρα από το δικό μας) θεωρούνται απαραίτητες για να καταλάβουμε τον πλανήτη και τη ζωή μας. Τον 18^ο αιώνα, οι επιστήμονες που εργάζονταν στη φυσική, τα μαθηματικά και την ουράνια μηχανική βρίσκονταν συχνά αντιμέτωποι με το πρόβλημα των αποκλίσεων στις παρατηρήσεις.

Φαίνεται ότι ήδη από τον 16^ο αιώνα διαδόθηκε η πρακτική της λήψης αρκετών μετρήσεων μιας άγνωστης ποσότητας, στις ίδιες συνθήκες (ή τις πιο παρόμοιες που ήταν δυνατόν), με σκοπό να ληφθεί μια αξιόπιστη τιμή. Έτσι, υπήρχαν διάφορες μετρήσεις και έπρεπε να αποφασιστεί σχετικά με την πραγματική τιμή αυτού του μεγέθους. Μία δυνατότητα ήταν να ληφθεί ο μέσος αριθμητικός όρος ως η «καλύτερη» τιμή, αλλά μαζί με αυτή την προσέγγιση, τον 18^ο αιώνα υπήρχε μια

άλλη σχολή σκέψης που όριζε ως πραγματική τιμή αυτή μίας παρατήρησης που πραγματοποιήθηκε με «ιδιαιτέρη προσοχή». Η αμφισβήτηση συνεχίστηκε έως ότου εμφανίστηκε η κανονική κατανομή ως ένα κατάλληλο μοντέλο για τα σφάλματα.

Η κανονική κατανομή, εμφανίστηκε με μεγάλη δύναμη όταν ο Carl Friedrich Gauss (1777–1855) τη θεώρησε ως την κατάλληλη κατανομή για τα σφάλματα, σε σχέση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που αναπτύχθηκε ως μέθοδος για την προσαρμογή μετρήσεων στην αστρονομία. Η μέθοδος βασίζεται στο εξής, μία παράμετρος για την οποία μπορώ να λάβω μετρήσεις (επιρρεπείς σε σφάλματα) που επαναλαμβάνονται, εξαρτάται από μία σειρά μεγεθών που δεν είναι επιρρεπή σε σφάλματα και αναζητώ την καλύτερη συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την παράμετρο, με την έννοια ότι το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων μεταξύ αυτής της συνάρτησης και των παρατηρήσεων μου για την παράμετρο να είναι ελάχιστο (τα τετράγωνα λαμβάνονται για να δοθεί η ίδια τιμή σε μία αρνητική ή θετική απόκλιση). Υποθέτοντας ότι τα σφάλματα ακολουθούσαν το νόμο της κανονικής κατανομής, ο Gauss απέδειξε ότι η συνάρτηση που ελαχιστοποιούσε τα σφάλματα, εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, είναι η συνάρτηση που κάνει πιο πιστευτές ή αληθοφανείς, με όρους των πιθανοτήτων, τις παρατηρήσεις δηλαδή, που αποδίδει τη μέγιστη πιθανότητα στις παρατηρήσεις.

Η κανονική κατανομή, αναγνωρίστηκε τελικά ως σημαντική κατανομή στη μελέτη σφαλμάτων και η μέθοδος των ελαχίστων τετράγωνων υιοθετήθηκε στην αστρονομία και τη γεωδαισία. Επιπλέον από τις αστρονομικές μετρήσεις εξακριβώθηκε η συμφωνία μεταξύ των παρατάσεων και του νόμου της κανονικής κατανομής.

5. Η υπόθεση των στοιχειωδών σφαλμάτων

Μία οδός για να υποστηρίξει το νόμο κανονικής κατανομής ως νόμο των σφαλμάτων, προήλθε από τη θεωρία των στοιχειωδών σφαλμάτων. Συνίσταται στην υπόθεση ότι σφάλμα που γίνεται κάνοντας μία παρατήρηση ή μέτρηση μίας παραμέτρου είναι απλά το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού σφαλμάτων, που οφείλονται οι διάφορες ανεξάρτητες πηγές, καθένα από τα οποία είναι μικρό σε σύγκριση με το άθροισμα όλων. Με την αρχή αυτή αποδείχθηκε ότι, η κατανομή του συνολικού σφάλματος ακολουθεί το νόμο της κανονικής κατανομής.

Αυτό είναι το γνωστό ως κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ). Η αρχή των στοιχειωδών σφαλμάτων, έγινε ευρέως αποδεκτή στη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα. Πολλοί επιστήμονες αφιέρωσαν τις προσπάθειές τους να αποδείξουν ότι υπό την προϋπόθεση αυτή, ο νόμος πιθανοτήτων που διέπει το συνολικό σφάλμα είναι ο νόμος κανονικής κατανομής. Μεταξύ τους ξεχωρίζει ο Γερμανός Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) ο οποίος χρησιμοποίησε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων σε πολλές εφαρμογές και παρείχε εμπειρικά στοιχεία για την υποστήριξη του νόμου της κανονικής κατανομής, ως νομού των σφαλμάτων, όπως είχε προτείνει ο Gauss.

Ο Bessel παρουσιάζει την εξής κατάσταση «Ένα σφάλμα παρατήρησης είναι το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών λαθών, που οφείλονται σε διαφορετικές και ανεξάρτητες μεταξύ τους αιτίες. Κανένα στοιχειώδες σφάλμα δεν υπερβαίνει σημαντικά τα άλλα και τα θετικά και αρνητικά σφάλματα του ίδιου μεγέθους εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα. Επιπλέον, οι νόμοι που διέπουν τα στοιχειώδη σφάλματα δεν είναι απαραίτητα οι ίδιοι». Υπάρχουν δύο σημαντικές πτυχές στην υπόθεση του Bessel. Κανένα από τα σφάλματα δεν έχει ιδιαίτερη σημασία και τα θετικά και αρνητικά σφάλματα κατανέμονται με συμμετρικό τρόπο. Όταν ένας δάσκαλος πρέπει να βαθμολογήσει τις εργασίες των μαθητών τους βάζει έναν αριθμητικό βαθμό μεταξύ 0 και 10. Όμως, είναι πραγματικά σε θέση να

εξηγήσει τη διαφορά μεταξύ ενός βαθμού 8.8 και ενός άλλου 8.9; Θα ρισκάρω να πω πως όχι. Όταν βαθμολογεί, υπόκειται σε συνθήκες που θα μπορούσαν να προκαλέσουν σφάλματα. Η αντίληψη δεν είναι ίδια όταν διαβάζει την 5^η εργασία ή όταν διαβάζει την 45^η, η κούραση συσσωρεύεται, ο τρόπος έκφρασης των μαθητών ποικίλλει, η περίοδος για να παρουσιάσει τις βαθμολογίες μπορεί να κάνει το χρόνο που αφιερώνει στον έλεγχο κάθε εξέτασης να ποικίλλει πολύ. Υπάρχουν διάφορες αιτίες που μπορούν να επηρεάσουν τη βαθμολόγηση, τόσο προς τα πάνω όσο και προς τα κάτω, διάφορες πηγές στοιχειακού σφάλματος. Θα μπορούσα να υποθέσω ότι αριθμητική βαθμολογία υπόκειται σε κάποια μεταβλητότητα, που οφείλεται στη συσσώρευση των αιτιών, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι άδικη. Ίσως αυτή είναι η βάση του μύθου που λέει ότι οι δάσκαλοι βαθμολογούν ακολουθώντας το νόμο της κανονικής κατανομής ή προσαρμόζοντας τις βαθμολογίες τους σε αυτόν. Είναι ένα παράδειγμα για να φανεί πώς το πρόβλημα του σφάλματος είναι ένα καθημερινό και σύγχρονο πρόβλημα.

6. Κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ)

Τα τυχαία σφάλματα έχουν αποτέλεσμα ότι οι τιμές που βρίσκω για το μετρούμενο μέγεθος, είναι άλλοτε μεγαλύτερες και άλλοτε μικρότερες από την αληθή τιμή. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα σε όλες τις μετρήσεις. Με όσο μεγάλη επιμέλεια και αν οργανώσω και εκτελέσω μια σειρά μετρήσεων, υπάρχουν πάντα τυχαία σφάλματα. Συνεπώς, το μόνο που απομένει είναι να προσπαθήσω να εκτιμήσω εκ των υστέρων ποιά ήταν η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων κατά τη θεωρούμενη σειρά των μετρήσεων, έτσι ώστε να μπορώ να απαλλάξω τη σειρά αυτή από τα σφάλματα. Είναι προφανές ότι για να γίνει αυτό, πρέπει να βρω πρώτα τους νόμους οι οποίοι διέπουν τα τυχαία σφάλματα. Για την εύρεση των νόμων αυτών, η θεωρία των σφαλμάτων κάνει ευρεία χρήση των βασικών εννοιών και συμπερασμάτων του λογισμού των πιθανοτήτων, του οποίου και αποτελεί κλάδο. Το ΚΟΘ αναφέρει ότι αν μία μέτρηση είναι το αποτέλεσμα του αθροίσματος ενός μεγάλου αριθμού παραγόντων (επιρρεπών σε σφάλματα) οι οποίοι ενεργούν ανεξάρτητα και κανένας από αυτούς δεν κυριαρχεί στο συνολικό άθροισμα, ο νόμος πιθανοτήτων του συνολικού αθροίσματος κατανέμεται σύμφωνα με το νόμο κανονικής κατανομής, ανεξάρτητα από το νόμο πιθανοτήτων που ελέγχει τους παράγοντες. Θα αναλύσω μία συγκεκριμένη κατάσταση για να καταλάβω τι υπάρχει πίσω από αυτή τη διαβεβαίωση. Αναφορικά με το νόμισμα που έχω ρίξει τόσες φορές, το ΚΟΘ λέει ότι η αναλογία του αριθμού κορόνων που θα βγουν θα πλησιάζει το 50% καθώς αυξάνονται οι ρίψεις και η πιθανότητα ότι αυτή η διαφορά είναι μεταξύ δύο συγκεκριμένων ορίων μπορεί να καθοριστεί από την κανονική κατανομή.

Για παράδειγμα, εάν ρίξω το νόμισμα 100 φορές, η πιθανότητα ότι η αναλογία των κορόνων είναι μεταξύ 4.8% και 5.2% είναι 0,3108.

Αν το ρίξω 400 φορές, θα είναι 0.5762 και αν το ρίξω 5000 φορές, αυξάνεται στο 0.9958. Δηλαδή, είμαι πολύ σίγουρος ότι το ποσοστό των κορόνων θα είναι μεταξύ αυτών των τιμών που αναφέρονται. Αυτές οι πιθανότητες καθορίστηκαν χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή. Μία άλλη κατάσταση εμφανίζεται όταν ένας κατασκευαστής ράβδων δημητριακών γράφει στις συσκευασίες ότι καθεμιά ζυγίζει 60 g. Μερικές φορές, το πραγματικό βάρος υπερβαίνει το προβλεπόμενο και άλλες είναι μικρότερο, αλλά τα βάρη ακολουθούν την κανονική κατανομή και λογικά, το αναγραφόμενο βάρος στη συσκευασία είναι το μέσο βάρος και η κανονική κατανομή επιτρέπει να καθορίσω την πιθανότητα ότι το βάρος μίας ράβδου είναι μεταξύ ορισμένων ορίων, επαληθεύοντας την κανονικότητα των πιθανοτήτων. Οι δύο προηγούμενες καταστάσεις επιτρέπουν να ξεχωρίσω τις δύο απόψεις που οδήγησαν

στην αναζήτηση μαθηματικών εξηγήσεων οι οποίες δημιούργησαν το ΚΟΘ, ο προσδιορισμός ότι η μέση τιμή των σφαλμάτων των παρατηρήσεων (ιστορικά σε αστρονομία, γεωδαισία) ήταν μεταξύ ορισμένων ορίων και η ανάπτυξη και αποδοχή της υπόθεσης των στοιχειωδών σφαλμάτων ως βασικής αρχής για το ότι η κατανομή σφαλμάτων σε μια διαδικασία μέτρησης ακολουθεί το νόμο της κανονικής κατανομής. Μία μαθηματική διατύπωση μίας απλής εκδοχής του ΚΟΘ αναφέρει «Αν $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μετρήσεις με την ίδια κατανομή, με πεπερασμένη μέση κοινή τιμή μ και τα τετράγωνα των οποίων έχουν επίσης πεπερασμένη μέση τιμή, η πιθανότητα το άθροισμα $X_1+X_2+\dots+X_n$ δεόντως κανονικοποιημένο να είναι μεταξύ των τιμών α, β προσεγγίζεται από την κανονική καμπύλη, όταν το n αυξάνει επ' άοριστο». Με ακριβείς μαθηματικούς όρους, αυτό που επαληθεύεται είναι ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n \rightarrow \infty} \left[a \leq \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n \cdot \mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq b \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{όπου}$$

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$. Το ΚΟΘ μπορεί να αναδιατυπωθεί λέγοντας ότι επιβεβαιώνεται η κανονικότητα των πιθανοτήτων ή ότι οι μεταβλητές ικανοποιούν την κανονικότητα των πιθανοτήτων. Το ΚΟΘ ή η κανονικότητα των πιθανοτήτων, επαληθεύονται ανεξάρτητα από την κατανομή που ακολουθούν οι μεταβλητές. Κατά κάποιο τρόπο αυτό που λέει το θεώρημα είναι ότι δε μπορώ να προβλέψω την ατομική συμπεριφορά μίας μεταβλητής ή ατόμου, αλλά μπορώ να προβλέψω τη συμπεριφορά του μέσου όρου του πληθυσμού. Το ΚΟΘ πρόσφερε εκείνη την εποχή και προσφέρει ακόμα, μία πιο βαθιά γνώση της συμπεριφοράς των παρατηρήσεων και της σχέσης της με το φυσικό κόσμο. Οι ίδιες ιδέες έχουν εφαρμοστεί για τη μελέτη χαρακτηριστικών (φυσικών και κοινωνικών) σε ανθρώπινους πληθυσμούς και προς έκπληξη πολλών, διαπιστώθηκε ότι σε αρκετές περιπτώσεις η συμπεριφορά των χαρακτηριστικών των ανθρώπινων πληθυσμών ανταποκρίνεται σε αυτό που προβλέπεται από το ΚΟΘ.

7. Οι συχνότεροι τύποι σφαλμάτων μέτρησης

Σφάλμα μέτρησης είναι η διαφορά μεταξύ της τιμής που έχει ληφθεί και της πραγματικής τιμής του μετρημένου αντικειμένου. Μερικές φορές, το σφάλμα είναι τόσο ελάχιστο που θεωρείται αμελητέο. Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά μεταξύ των πραγματικών και των μετρούμενων τιμών είναι αμελητέα και δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Σε άλλες περιπτώσεις, τα λάθη είναι σημαντικά, πράγμα που σημαίνει ότι η διαφορά μπορεί να επηρεάσει το έργο που εκτελείται. Εκτός από τα αμελητέα και σημαντικά λάθη, υπάρχουν και άλλοι τύποι σφαλμάτων μέτρησης. Ορισμένα οφείλονται σε ελαττώματα των χρησιμοποιούμενων οργάνων και άλλα προκύπτουν εξαιτίας της κακής χρήσης των οργάνων, από το άτομο που πραγματοποίησε τη μέτρηση. Οι περιβαλλοντικές συνθήκες μπορεί να παρεμβαίνουν στη διαδικασία μέτρησης, προκαλώντας λάθος δεδομένα. Υπάρχουν τρεις πηγές συστηματικών και τυχαίων σφαλμάτων σε αριθμητικές (υπολογιστικές) διαδικασίες:

7.1 Το ανθρώπινο σφάλμα (ολίσθημα ή λάθος)

Μπορεί να προκύψει σε κάθε στάδιο που έρχεται σε επαφή ο χρήστης με το υπολογιστικό εργαλείο και περιορίζεται με σωστή κατάρτιση των μελετητών, οργάνωση του χώρου και του τρόπου εργασίας και με χρήση κατάλληλων εργαλείων. Είναι ίσως η σοβαρότερη πηγή σφαλμάτων και απαιτείται χρόνος και προσπάθεια ώστε να περιορισθεί σε αποδεκτά όρια.

7.2 Το σφάλμα κατά τον προγραμματισμό του αλγορίθμου

Οφείλεται κατά κανόνα σε προσεγγίσεις που γίνονται, όταν το αρχικό πρόβλημα αντικαθίσταται από κάποιο μαθηματικό ανάλογο, όπως για παράδειγμα η αντικατάσταση μίας απειροστής σειράς με μία που αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό όρων.

7.3 Το σφάλμα προσέγγισης της ακριβούς λύσης

Το σφάλμα αυτό συνήθως καλείται σφάλμα αποκοπής και προσπαθώ γενικά να υπολογίσω το άνω όριό του. Ανακύπτει επίσης και το σφάλμα στρογγύλευσης που οφείλεται στο ότι δεν είναι δυνατό να αποθηκεύσω στον υπολογιστή τον κάθε αριθμό που υπολογίζω με απόλυτη ακρίβεια, λόγω του πεπερασμένου αριθμού ψηφίων (χώρου) που διατίθενται. Μπορώ γενικά να ορίσω το σφάλμα με μία από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \text{ακριβής τιμή} &= \text{προσεγγιστική τιμή} + \text{σφάλμα} \\ \text{ή σχετικό σφάλμα} &= \text{σφάλμα} / \text{πραγματική τιμή} \end{aligned}$$

7.4 Τυχαίο σφάλμα

Τα τυχαία σφάλματα είναι εκείνα που συμβαίνουν όταν γίνονται διαδοχικές μετρήσεις του ίδιου αντικειμένου ή φαινομένου, επιτυγχάνοντας διαφορετικές τιμές σε κάθε περίπτωση. Στις κοινωνικές επιστήμες, τυχαία σφάλματα αντιπροσωπεύονται από συνθήκες που επηρεάζουν, με συγκεκριμένο τρόπο, ένα μέλος του δείγματος που αναλύεται.

7.5 Συστηματικό σφάλμα

Σε αντίθεση με τα τυχαία, τα συστηματικά σφάλματα εξαρτώνται άμεσα από το σύστημα που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση. Για το λόγο αυτό, είναι συνεχή σφάλματα. Αν χρησιμοποιούνται βαθμονομημένα όργανα, θα δώσουν λανθασμένες μετρήσεις. Το σφάλμα θα παρουσιαστεί ακόμα και αν η διαδικασία μέτρησης επαναληφθεί. Στις κοινωνικές επιστήμες, συστηματικό σφάλμα συμβαίνει όταν υπάρχει μία κατάσταση που επηρεάζει γενικά την απόδοση όλων των ατόμων του δείγματος.

7.6 Περιττό σφάλμα

Είναι το λάθος που είναι ελάχιστο και δεν αποτελεί πρόβλημα για τις μετρήσεις που πραγματοποιούνται. Π.χ. Αν εργάζεστε σε μέτρα και η μέτρηση ποικίλει κατά 1 χιλιοστό, θεωρείται ότι το σφάλμα αυτό δεν είναι σημαντικό και το αποτέλεσμα γίνεται αποδεκτό ως σωστό.

7.7 Σημαντικό σφάλμα

Το σημαντικό λάθος είναι αυτό που αντιπροσωπεύει ένα πρόβλημα για το έργο που γίνεται. Αν η διαφορά στις μετρήσεις είναι πολύ μεγάλη, θα είναι προφανώς ένα σημαντικό σφάλμα. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η διαφορά είναι ελάχιστη, αλλά εξίσου σημαντική.

7.8 Σφάλμα λόγω ελαττωμάτων στο χρησιμοποιούμενο όργανο

Πολλά από τα σφάλματα που γίνονται κατά τη λήψη των μετρήσεων, μπορούν να αποδοθούν στα όργανα που χρησιμοποιούνται. Υπάρχουν ορισμένα όργανα που πρέπει να βαθμονομηθούν, ώστε οι μετρήσεις που λαμβάνονται να είναι ακριβείς. Τα θερμόμετρα, πρέπει να υποβάλλονται σε συντήρηση και βαθμονόμηση τόσο συχνά, ώστε να μην υπάρχουν σημαντικά σφάλματα στις μετρήσεις της θερμοκρασίας.

7.9 Σφάλμα που προκλήθηκε από το άτομο που έλαβε τη μέτρηση

Ο άνθρωπος είναι ατελής. Επομένως, όταν ένα άτομο είναι υπεύθυνο για τη λήψη των μετρήσεων, υπάρχει ένα περιθώριο πιθανότητας ότι θα γίνει σφάλμα.

7.10 Σφάλμα λόγω περιβαλλοντικών συνθηκών

Οι θερμοκρασίες, ο ήχος και άλλα περιβαλλοντικά ερεθίσματα επηρεάζουν τις μετρήσεις.

8. Λογισμός σφαλμάτων

Ο λογισμός σφαλμάτων, ασχολείται με την ακρίβεια αριθμών και αποτελεσμάτων του υπολογισμού. Σφάλματα οφειλόμενα σε λανθασμένους μαθηματικούς υπολογισμούς, στη μη τήρηση των κανόνων του υπολογισμού, στην επιπολαιότητα ή απροσεξία κατά την εκτέλεση των πράξεων, δεν αποτελούν αντικείμενο του λογισμού των σφαλμάτων. Ως εκ τούτου, ο εκτελών τους υπολογισμούς δεν απαλλάσσεται της υποχρέωσης να προσέχει κατά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων. Ένας μαθητής υπολογίζει από τις πλευρές $\alpha = 7,49$, $\beta = 5,32$ ενός τριγώνου και την υπό αυτών περιεχόμενη γωνία $\varphi = 30^\circ$, το μήκος της τρίτης πλευράς του τριγώνου, γ , βάσει του τύπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi}$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 = 56,1001 \\ \beta^2 = 28,3024 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 84,4025 \quad \begin{array}{l} \cos\varphi = 0,87 \\ 2\alpha\beta\cos\varphi = 69,3334 \end{array}$$

$$\text{Άρα, } \gamma^2 = 15,0691 \Rightarrow \gamma = 3,88.$$

Ο καθηγητής θεωρεί το αποτέλεσμα ανακριβές, καθώς ανέμενε τη λύση $\gamma = 3,92$. Προφανώς, ο μαθητής έλαβε υπόψη του ανεπαρκή αριθμό ψηφίων στην τιμή του $\cos\varphi$. Ανακύπτουν τα ερωτήματα πόσο σφάλμα προκάλεσαν στο αποτέλεσμα τα αγνοούμενα ψηφία του $\cos\varphi$ ή αντιστρόφως πόσα ψηφία του $\cos\varphi$ έπρεπε να ληφθούν υπόψη, ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια του αποτελέσματος.

9. Προσεγγιστικές τιμές

Στις πρακτικές εφαρμογές, οι αριθμητικές τιμές μετρούμενων μεγεθών είναι γνωστές μόνο κατά προσέγγιση. Ένας οδηγός αυτοκινήτου ταξιδεύει προς Αθήνα. Μία πινακίδα αναγράφει την απόσταση ως 120 km. Το αυτοκίνητο καταναλώνει 9 λίτρα βενζίνης, ανά 100 km. Ο οδηγός υπολογίζει πρόχειρα ότι η κατανάλωση βενζίνης κατά τη διάρκεια του ταξιδιού θα ανέλθει στα $120 \cdot 0,09 = 10,8$ λίτρα. Όμως η πινακίδα δεν αναγράφει «αληθή τιμή» της απόστασης, αλλά μια προσεγγιστική τιμή.

Για τον πρόχειρο υπολογισμό του, μία ακριβέστερη τιμή της απόστασης δεν παρέχει ιδιαίτερη ωφέλεια, διότι και η μέση κατανάλωση του οχήματος είναι μόνο προσεγγιστική. Συχνά, χρησιμοποιούνται για υπολογισμούς προσεγγιστικές τιμές και για καθαρούς αριθμούς, διότι πολλοί αριθμοί δύνανται να παρασταθούν στο δεκαδικό σύστημα μόνο ως απέραντα δεκαδικά κλάσματα, π.χ. $\sqrt{2}$, π , $\log 3$. Για να δηλωθεί ότι a είναι μια προσεγγιστική τιμή του x , γράφεται συνήθως $x \approx a$. Η πραγματική τιμή είναι x , η προσεγγιστική a . Π.χ. $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\pi \approx 3,14$, $\log 3 \approx 0,4771$

10. Απόλυτο σφάλμα, διόρθωση και σχετικό σφάλμα

10.1 Απόλυτο σφάλμα

Η ποιότητα μιας προσεγγιστικής τιμής a εκτιμάται από την απόκλιση της από την πραγματική τιμή x . Η διαφορά $a - x$ ονομάζεται απόλυτο σφάλμα $\varepsilon = a - x$. Μια προσεγγιστική τιμή a είναι τόσο ακριβής, όσο μικρότερο είναι το απόλυτο σφάλμα. Π.χ. η τιμή $a_1 = 0,66667$ για $x = \frac{2}{3}$ είναι εκατό φορές ακριβέστερη της $a_2 = 0,667$.

10.2 Διόρθωση

Για να ληφθεί από την προσεγγιστική τιμή a η αληθής τιμή x ενός μεγέθους, πρέπει να προστεθεί στο a η διόρθωση $k = x - a = -\varepsilon$.

10.3 Σχετικό σφάλμα

Αντί του απόλυτου σφάλματος ε της προσεγγιστικής τιμής a , χρησιμοποιείται συχνά το σχετικό σφάλμα $\left| \frac{\varepsilon}{x} \right|$, το οποίο συνήθως εκφράζεται σε ποσοστά. Έτσι, είναι δυνατή η σύγκριση προσεγγιστικών τιμών, διαφόρων μεγεθών, ως προς την ακρίβεια.

Προσεγγιστική τιμή	a
Αληθής τιμή	x
Απόλυτο σφάλμα	$\varepsilon = a - x$
Σχετικό σφάλμα	$\left \frac{\varepsilon}{x} \right $

Παράδειγμα 1. Για την αληθή τιμή $x = \frac{2}{3}$ χρησιμοποιείται η προσέγγιση $a_1 = 0,67$ και για την αληθή τιμή $y = \frac{1}{15}$ η προσέγγιση $a_2 = 0,07$. Τα απόλυτα σφάλματα είναι $\varepsilon_1 = a_1 - x = 0,67 - \frac{2}{3} = \frac{1}{300}$ και

$$\varepsilon_2 = a_2 - y = 0,07 - \frac{1}{15} = \frac{1}{300}.$$

Μέσω των σχετικών σφαλμάτων προκύπτει ότι

$$\left| \frac{\varepsilon_1}{x} \right| = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{200} = 0,005 = 0,5\% \quad \& \quad \left| \frac{\varepsilon_2}{y} \right| = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{15}} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%.$$

Παρόλο ότι τα απόλυτα σφάλματα είναι ίσα μεταξύ τους, η προσέγγιση a_1 διά το x είναι δέκα φορές καλύτερη από την a_2 διά του y .

10.4 Ακρίβεια αριθμών, παραστάσεις ανακριβών αριθμών

Κάθε δήλωση για το μέγεθος του απόλυτου ή του σχετικού σφάλματος της προσεγγιστικής τιμής, αποτελεί συγχρόνως δήλωση περί της ακρίβειας της προσεγγιστικής αυτής τιμής. Ως επί το πλείστον όμως η αληθής τιμή είναι άγνωστη, όπως π.χ. την περίπτωση των προσεγγιστικών τιμών που προέρχονται από μέτρηση. Δεν είναι δυνατόν, επομένως, να υπολογισθεί ούτε το απόλυτο ούτε το σχετικό σφάλμα. Σε τέτοιες περιπτώσεις περιορίζεται η εύρεση άνω φραγμάτων στο απόλυτο ή το σχετικό σφάλμα.

10.5 Φράγματα του απόλυτου σφάλματος

Άνω φράγμα του απόλυτου σφάλματος μίας προσεγγιστικής τιμής α θεωρείται ο θετικός αριθμός $\Delta\alpha$, ο οποίος είναι ανώτερος της απόλυτης τιμής του σφάλματος. Ισχύει η ανισότητα

$$-\Delta\alpha \leq \varepsilon \leq \Delta\alpha \Leftrightarrow \alpha - \Delta\alpha \leq x \leq \alpha + \Delta\alpha$$

Με την παραδοχή ενός φράγματος $\Delta\alpha$, δίνονται συγχρόνως ένα άνω και ένα κάτω φράγμα τιμών του μεγέθους x . Αυτό γράφεται εν συντομία ως $x \approx \alpha(\pm\Delta\alpha)$ ή $x = \alpha \pm \Delta\alpha$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ προσεγγιστική τιμή του } x \\ \Delta\alpha \text{ φράγμα για το απόλυτο σφάλμα του } \alpha \end{array} \right\} x = \alpha(\pm\Delta\alpha) \text{ ή } x = \alpha \pm \Delta\alpha$$

Η τιμή $\Delta\alpha$ παρέχει την πληροφορία για την ακρίβεια του α . Όσο μικρότερη είναι η $\Delta\alpha$, τόσο ακριβέστερη είναι η προσεγγιστική τιμή α . Αντιστρόφως, αν είναι γνωστά δύο φράγματα τιμών του μεγέθους x τέτοια ώστε $x_1 \leq x \leq x_2$ τότε

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ είναι προσεγγιστική τιμή του } x, \text{ με } \Delta a = \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

10.6 Φράγματα σχετικού σφάλματος

Συχνά, η ακρίβεια των τεχνικών δεδομένων δίνεται στη μορφή $x \approx a(\pm\delta \cdot 100\%)$ ή

$x = a \pm \delta \cdot 100\%$. Το μέγεθος $\delta = \left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right|$ είναι φράγμα για το σχετικό σφάλμα του a .

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ προσεγγιστική τιμή του } x \\ \Delta\alpha \text{ φράγμα του απόλυτου σφάλματος} \\ \delta = \left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \text{ φράγμα για το σχετικό σφάλμα του } \alpha \end{array} \right\} x \approx a(\pm\delta \cdot 100\%) \text{ ή } x = a \pm \delta \cdot 100\%$$

Παράδειγμα 2. Στην επιφάνεια ενός πυκνωτή αναγράφεται η χωρητικότητα ως $250\text{pF} \pm 10\%$. Το σχετικό σφάλμα της προσεγγιστικής τιμής $\alpha = 250\text{pF}$ είναι $\delta = 0,1$. Άρα, προκύπτει ως φράγμα για το απόλυτο σφάλμα $\Delta\alpha = \alpha \cdot \delta = 25\text{pF}$. Συνεπώς, η πραγματική τιμή της χωρητικότητας κυμαίνεται μεταξύ 225 pF και 275pF.

Κατά τη χρήση προσεγγιστικών τιμών σε αριθμούς όπως οι $\sqrt{2}$, π , $\log 3$ δεν αναφέρεται συνήθως η ακρίβεια. Η παράσταση τέτοιων προσεγγιστικών τιμών υπόκειται σε ορισμένους κανόνες, οι οποίοι επιτρέπουν άμεσο συμπέρασμα περί της ακρίβειας των αριθμητικών τιμών.

10.7 Σύντμηση

Ο αριθμός π μπορεί να παρασταθεί μόνο μέσω μίας άπειρης σειράς δεκαδικών κλασμάτων. Σε έναν πίνακα όμως βρίσκεται π.χ. η τιμή $\pi = 3,141592653589\dots$. Ο πίνακας δίνει ως προσεγγιστική τιμή του π ένα δεκαδικό αριθμό, περιορισμένο σε δώδεκα ψηφία. Κατά τη σύντμηση ενός απείρου δεκαδικού κλάσματος, διακόπτεται η ακολουθία των ψηφίων του μετά από ορισμένη θέση. Τα

ακολουθούντα τρία σημεία, υποδηλώνουν ότι ακολουθούν και άλλοι αριθμοί. Τα επόμενα ψηφία είναι έγκυρα, δηλαδή η ακολουθία ψηφίων του συντετμημένου συμπίπτει πλήρως μετά την ακολουθία ψηφίων του μη συντετμημένου μέχρι και της θέσης τομής. Έτσι, ο αριθμός π , συντετμημένος σε τέσσερα δεκαδικά ψηφία είναι $\pi=3,1415\dots$. Μετά, το τελευταίο ψηφίο συντετμημένου αριθμού ακολουθεί ένα ψηφίο μεταξύ των ψηφίων 0 έως 9. Αν επομένως, χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση αριθμός συντετμημένος σε k δεκαδικά, το απόλυτο σφάλμα της προσεγγιστικής αυτής τιμής είναι αρνητικό και μικρότερο κατά απόλυτη τιμή της μίας μονάδας της τάξης του τελευταίου ψηφίου του συντετμημένου αριθμού. Αριθμός συντετμηθείς π.χ. σε k δεκαδικά ψηφία μετά την υποδιαστολή, έχει σφάλμα μικρότερο του 10^{-k} . Π.χ. αν το $\pi \approx 3,1415$ το απόλυτο σφάλμα είναι μικρότερο του $10^{-4} = \frac{1}{10.000}$.

10.8 Στρογγυλοποίηση

Μια συνήθης μέθοδος για τη σύντμηση δεκαδικών ψηφίων είναι η στρογγυλοποίηση του αριθμού. Σε αυτή την περίπτωση παραμένει αμετάβλητο το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο, αν ακολουθεί κάποιος από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 (στρογγυλοποίηση προς τα κάτω). Το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο αυξάνεται κατά 1, αν ακολουθεί 5, 6, 7, 8, 9 (στρογγυλοποίηση προς τα άνω).

Μια προσεγγιστική τιμή του π , στρογγυλεμένη ως προς το τέταρτο δεκαδικό ψηφίο είναι $\pi \approx 3,1416$. Το απόλυτο σφάλμα της προσεγγιστικής τιμής είναι μικρότερο του $\frac{10^{-4}}{2}$. Αν ακολουθηθεί ο κανόνας της στρογγυλοποίησης, υπάρχει η

εγγύηση ότι το απόλυτο σφάλμα στρογγυλεμένου αριθμού δεν υπερβαίνει κατά απόλυτη τιμή την μισή μονάδα της τάξης του τελευταίου διδόμενου ψηφίου. Το σφάλμα είναι θετικό ή αρνητικό. Μόνο εφόσον το πρώτο αγνοηθέν ψηφίο είναι 5, ακολουθούμενο από μηδενικά, είναι το σφάλμα ακριβώς ίσο με μισή μονάδα της τάξης του τελευταίου κρατηθέντος ψηφίου. Σε αυτή την περίπτωση συνηθίζεται η στρογγυλοποίηση κατά τέτοιον τρόπο ώστε το τελευταίο ψηφίο να είναι πάντα άρτιας τάξης. Π.χ. ο αριθμός 0,12500 στρογγυλοποιείται σε 0,12 ενώ ο αριθμός 0,17500 σε 0,18.

10.9 Αξιόπιστα ψηφία

Τα ψηφία ενός στρογγυλοποιημένου αριθμού δεν είναι απαραίτητα όλα έγκυρα, διότι ίσως προέρχονται από στρογγυλοποίηση. Αλλά ένας σωστά στρογγυλοποιημένος αριθμός περιέχει μόνο αξιόπιστα ψηφία. Τα ψηφία ενός αριθμού ονομάζονται αξιόπιστα, αν το απόλυτο σφάλμα της προσεγγιστικής τιμής δεν υπερβαίνει τη μισή μονάδα της τάξης του τελευταίου ψηφίου. Αν δεν υπάρχει περίπτωση παρεξήγησης γράφεται $x = a$ αντί για $x \approx a$, όταν η τιμή a προέρχεται από στρογγυλοποίηση.

Παράδειγμα 3. Σε έναν πενταψήφιο πίνακα τετραγωνικών ριζών βρίσκεται για την τιμή $\sqrt{39} = 6,24500$. Ο αριθμός αυτός περιέχει μόνο αξιόπιστα ψηφία, διότι το απόλυτο σφάλμα είναι μικρότερο του $5 \cdot 10^{-6}$. Τα τρία τελευταία ψηφία όμως δεν είναι έγκυρα διότι $\sqrt{39} = 6,2449979\dots$. Αν μία προσεγγιστική τιμή περιέχει μόνο αξιόπιστα ψηφία δεν είναι απαραίτητη η καταγραφή της ακρίβειας της. Αντιστρόφως, αν για την προσεγγιστική τιμή δεν δίνεται η ακρίβεια, πρέπει να υποτεθεί ότι όλα τα ψηφία είναι αξιόπιστα. Αυτό ισχύει πάντα για τις αριθμητικές τιμές μαθηματικών πινάκων.

10.10 Ουσιώδη και επουσιώδη ψηφία

Κατά την στρογγυλοποίηση μεγάλων αριθμών προκύπτουν ορισμένες δυσκολίες. Αν π.χ. ο αριθμός 1778 στρογγυλοποιηθεί σε εκατοντάδες, προκύπτει ο αριθμός 1800. Ο αριθμός αυτός έχει στρογγυλοποιηθεί σωστά, δεν περιέχει όμως αξιόπιστα ψηφία, διότι το απόλυτο σφάλμα είναι μεγαλύτερο του 0,5. Αντί των αξιόπιστων ψηφίων 7 και 8 εμφανίζονται μηδενικά, τα οποία απλώς χρησιμεύουν για τη δήλωση της τάξης μεγέθους του στρογγυλοποιημένου αριθμού. Τα ψηφία αυτά ονομάζονται επουσιώδη ψηφία.

Η αναγραφή των επουσιωδών ψηφίων (μηδενικών) μπορεί να προκαλέσει παρεξηγήσεις κατά την εξέταση της ακρίβειας των αριθμών. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται οι δυνάμεις του δέκα, για την εισαγωγή άλλου τρόπου γραφής. Στην προκειμένη περίπτωση γράφεται ο στρογγυλοποιημένος αριθμός ως $18 \cdot 10^2$. Αν όμως στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 1799,7 τα δύο μηδενικά του αποτελέσματος 1800 είναι ουσιώδη ψηφία και πρέπει να αναφέρονται π.χ. στη μορφή $1,800 \cdot 10^3$.

10.11 Η στρογγυλοποίηση στρογγυλοποιημένων αριθμών

Μία περαιτέρω δυσκολία ανακύπτει αν ήδη στρογγυλοποιημένοι αριθμοί πρέπει να στρογγυλοποιηθούν περισσότερο. Αν π.χ. ο αριθμός 0,4747 στρογγυλοποιηθεί σε δύο δεκαδικά, προκύπτει ο 0,47. Αν όμως στρογγυλοποιηθεί αρχικά σε τρία δεκαδικά και κατόπιν σε δύο, προκύπτουν κατά σειρά οι αριθμοί 0,475 & 0,48. Το τελευταίο ψηφίο δεν είναι πλέον αξιόπιστο. Η ανασφάλεια αυτή παρουσιάζεται πάντα, όταν το τελευταίο ψηφίο ενός στρογγυλοποιημένου αριθμού είναι το 5. Για αυτό και είναι χρήσιμο να σημειώνεται κατά κάποιον τρόπο, αν το ψηφίο 5 της τελευταίας θέσης προήλθε από στρογγυλοποίηση προς τα άνω ή προς τα κάτω. Ένας τρόπος είναι η χρήση παύλας για την πρώτη και στιγμής για τη δεύτερη περίπτωση. Το σύμβολο βρίσκεται πάνω από το ψηφίο. Π.χ. $2,6146 \approx 2,61\bar{5}$ ή $2,6153 \approx 2,615^{\cdot} \approx 2,62$.

10.12 Ακρίβεια αποτελέσματος κατά τους υπολογισμούς με προσεγγιστικές τιμές

Αρχικά και υπολογιστικά σφάλματα. Αν διεξαχθεί υπολογισμός με προσεγγιστικές αρχικές τιμές, το αποτέλεσμα θα είναι επίσης προσεγγιστικό, η δε ακρίβεια του εξαρτάται από τα σφάλματα των υπολογισμών των εισερχομένων τιμών των προσεγγιστικών τιμών. Το προκαλούμενο με τον τρόπο αυτό σφάλμα του αποτελέσματος, ονομάζεται **αρχικό σφάλμα**. Εκτός από αυτό, προκύπτουν κατά την πορεία του υπολογισμού σφάλματα από την στρογγυλοποίηση των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων. Αυτά καλούνται **υπολογιστικά σφάλματα**. Τα υπολογιστικά σφάλματα πρέπει να τηρούνται μικρότερα των αρχικών σφαλμάτων, αλλιώς δε γίνεται εκμετάλλευση της ακρίβειας των αρχικών τιμών. Κατά κανόνα, το υπολογιστικό σφάλμα δεν πρέπει να υπερβαίνει το 1/10 του αρχικού. Αυτό επιτυγχάνεται, αν κατά τον υπολογισμό λαμβάνονται υπ' όψη μερικά επιπλέον ψηφία (προστατευτικά ψηφία) και μόνο το τελικό αποτέλεσμα στρογγυλοποιείται με ακρίβεια αντίστοιχη του αρχικού σφάλματος. Κατά κανόνα αρκούν δύο ως τρία προστατευτικά ψηφία.

10.13 Μέθοδος των φραγμάτων τιμών

Την ακριβέστερη εκτίμηση της ακρίβειας ενός υπολογισμού παρέχει η μέθοδος των φραγμάτων τιμών. Αρχικά, προσδιορίζεται εκ του άνω και κάτω φράγματος τιμών των αρχικών μεταβλητών το άνω και το κάτω φράγμα τιμών του αποτελέσματος. Μέσω των βασικών πράξεων, βρίσκονται εύκολα απλοί κανόνες. Αν

$K(x)$, $A(x)$ είναι τα κάτω και άνω φράγματα τιμών του x και αντιστοίχως $K(y)$, $A(y)$ για το μέγεθος y , ισχύουν οι σχέσεις:

$$K(-x) = -A(x), \quad K(x+y) = K(x) + K(y), \quad K(x-y) = K(x) - A(y)$$

$$A(-x) = -K(x), \quad A(x+y) = A(x) + A(y), \quad A(x-y) = A(x) - K(y)$$

Οι παραπάνω σχέσεις συνάγονται στις ανισότητες $K(x) \leq x \leq A(x)$, $K(y) \leq y \leq A(y)$.

Παράδειγμα 4. Αν $\rho_1 \approx 61(\pm 0,5) \text{ mm}$ η άνω ακτίνα, $\rho_2 \approx 74(\pm 0,5) \text{ mm}$ η κάτω ακτίνα, $\sigma \approx 82(\pm 0,5) \text{ mm}$ η πλευρά της γενέτειρας ενός ορθού κόλουρου κώνου να υπολογιστεί το ύψος του H μέσω του τύπου $H = \sqrt{\sigma^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}$. Μετά τον παραπλεύρως υπολογισμό προκύπτει ως κάτω φράγμα τιμών του αποτελέσματος $80,28 \text{ mm}$ και ως άνω φράγμα $81,63 \text{ mm}$. Το αποτέλεσμα συμπύσσεται σε $H \approx 80,955(\pm 0,675) \text{ mm}$ ή στη χονδρική προσέγγιση $H \approx 81,0(\pm 0,8) \text{ mm}$.

	Κάτω φράγμα τιμών	Άνω φράγμα τιμών
σ	81,5	82,5
ρ_1	73,5	74,5
ρ_2	60,5	61,5
$\rho_1 - \rho_2$	12,0	14,0
$(\rho_1 - \rho_2)^2$	144,0	196,0
σ^2	6642,25	6806,25
H^2	6446,25	6662,25
H	80,28	81,63

Παράδειγμα 5. Από την $K(x) \leq x \leq A(x)$ προκύπτει μέσω πολλαπλασιασμού επί -1 ότι $-A(x) \leq -x \leq -K(x)$ ώστε $-A(x)$ είναι κάτω φράγμα τιμών του $-x$ και $-K(x)$ είναι άνω φράγμα τιμών.

$$\left. \begin{array}{l} x \leq A(x) \\ y \leq A(y) \end{array} \right\} x + y \leq A(x) + A(y)$$

$$\left. \begin{array}{l} K(x) \leq x \\ y \leq A(y) \end{array} \right\} K(x) - A(y) \leq x - y$$

$$\left. \begin{array}{l} K(x) \leq x \\ K(y) \leq y \end{array} \right\} K(x) + K(y) \leq x + y$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq A(x) \\ K(y) \leq y \end{array} \right\} x - y \leq A(x) - K(y)$$

Κατά τον προσδιορισμό των φραγμάτων τιμών μέσω των τιμών xy και $\frac{x}{y}$, παίζουν ρόλο τα πρόσημα των φραγμάτων τιμών των x, y . Αν x, y έχουν μόνο θετικά φράγματα, ισχύει $K(x \cdot y) = K(x) \cdot K(y)$, $A(x \cdot y) = A(x) \cdot A(y)$, $K\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{K(x)}{A(y)}$, $A\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{A(x)}{K(y)}$. Κατά την εκτέλεση του υπολογισμού, πρέπει να επιδιώκεται η στρογγυλοποίηση κάτω φραγμάτων προς τα κάτω και άνω φραγμάτων προς τα άνω.

10.14 Μέθοδος των φραγμάτων του σφάλματος

Η μέθοδος των φραγμάτων τιμών καλύπτει τόσο τα αρχικά, όσο και τα υπολογιστικά σφάλματα. Η εφαρμογή της όμως απαιτεί χρόνο, διότι ο κάθε υπολογισμός εκτελείται δύο φορές. Αν ενδιαφέρουν μόνο τα αρχικά σφάλματα, η μέθοδος των φραγμάτων του σφάλματος οδηγεί ταχύτερα στο στόχο, δεν είναι τόσο αυστηρή, όμως έχει το πλεονέκτημα ότι εκ της ακρίβειας των αρχικών δεδομένων, επιτρέπει την άμεση εύρεση φράγματος για το σφάλμα του αποτελέσματος.

Η μέθοδος των φραγμάτων του σφάλματος βασίζεται στην ακόλουθη αρχή: Έστω ότι υπολογίζεται η τιμή συνάρτησης $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ k μεταβλητών. Για τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_k$ διατίθενται μόνο οι προσεγγίσεις $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Ζητείται η εκτίμηση του σφάλματος, αν ο υπολογισμός εκτελεστεί με τις προσεγγιστικές τιμές α_v . Έστω ότι οι προσεγγιστικές τιμές έχουν απόλυτα σφάλματα $\varepsilon_1 = \alpha_1 - x_1$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 - x_2$, ..., $\varepsilon_k = \alpha_k - x_k$ πολύ μικρά σε σύγκριση με τις τιμές α_v . Το ακριβές αποτέλεσμα θα ήταν $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_2 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_k - \varepsilon_k)$. Αν η δεξιά πλευρά της εξίσωσης αναπτυχθεί σε σειρά κατά τα εκ του διαφορικού λογισμού γνωστά και αγνοηθούν οι όροι δεύτερης και ανώτερης τάξης, από τα ε_v , προκύπτει $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(\alpha_1, \alpha_2 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_k - \varepsilon_k) - \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - \dots - \varepsilon_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$,

όπου $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ είναι οι μερικοί παράγωγοι της συνάρτησης στη θέση $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_k = \alpha_k$. Από την παραπάνω σχέση και με ακρίβεια όρων ανωτέρας τάξης για τα ε_v προκύπτει μέσω του σφάλματος του αποτελέσματος η έκφραση

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ &= \varepsilon_1 f_{x_1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \varepsilon_2 f_{x_2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \dots + \varepsilon_k f_{x_k}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \end{aligned}$$

Η απόλυτη τιμή του σφάλματος εκτιμάται ως

$$|\varepsilon_f| \leq |\varepsilon_1| |f_{x_1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)| + |\varepsilon_2| |f_{x_2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)| + \dots + |\varepsilon_k| |f_{x_k}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)|$$

Αν υπάρχουν δεδομένα φράγματα $\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_k$ των απόλυτων σφαλμάτων $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, η παραπάνω σχέση επεκτείνεται σε

$$|\varepsilon_f| \leq \Delta\alpha_1 |f_{x_1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)| + \dots + \Delta\alpha_k |f_{x_k}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)| = \Delta f$$

Η τιμή Δf είναι καλή προσέγγιση ενός άνω φράγματος μέσω του απόλυτου σφάλματος του αποτελέσματος.

Βασική εξίσωση για την εκτίμηση της ακρίβειας υπολογιστικών αποτελεσμάτων

$$\Delta f = \Delta \alpha_1 |f_{x_1}(a_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)| + \dots + \Delta \alpha_k |f_{x_k}(a_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)|$$

Μέσω αυτή της εξίσωσης, προσδιορίζεται ένα φράγμα σφάλματος του αποτελέσματος από τα φράγματα των σφαλμάτων στον υπολογισμό των εισερχομένων μεγεθών.

10.15 Εφαρμογή της μεθόδου επί των βασικών αριθμητικών πράξεων

Αν a, b είναι οι προσεγγιστικές τιμές με φράγμα σφαλμάτων $\Delta a, \Delta b$ αντιστοίχως για τα μεγέθη x, y τότε η βασική εξίσωση λαμβάνει της παρακάτω μορφές

Πρόσθεση $f(x, y) = x + y, |f_x| = 1, |f_y| = 1, \Delta f = \Delta a + \Delta b$

Αφαίρεση $f(x, y) = x - y, |f_x| = 1, |f_y| = 1, \Delta f = \Delta a + \Delta b$

Το άθροισμα των φραγμάτων σφάλματος δύο προσεγγιστικών τιμών είναι φράγμα του απόλυτου σφάλματος του αθροίσματος και της διαφοράς των δύο προσεγγιστικών τιμών.

Πολλαπλασιασμός $f(x, y) = xy, |f_x| = |y|, |f_y| = |x|, \Delta f = |a| \Delta b + |b| \Delta a$

Διαίρεση διά του $|f(a, b)| = |a| \cdot |b| \Rightarrow \frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$

Διαίρεση $f(x, y) = \frac{x}{y}, |f_x| = \frac{1}{|y|}, |f_y| = \frac{|x|}{y^2}, \Delta f = \frac{\Delta a}{|b|} + \frac{\Delta b |a|}{b^2}$

Διαίρεση το παραπάνω δια $|f(a, b)| = \frac{|a|}{|b|}$ δίνει $\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$

Το άθροισμα των φραγμάτων των σχετικών σφαλμάτων δύο προσεγγιστικών τιμών, είναι φράγμα του σχετικού σφάλματος του γινομένου και του λόγου των δύο μεγεθών.

Ύψωση σε δύναμη $f(x) = x^v, |f_x| = |vx^{v-1}|, \Delta f = \Delta a |v\alpha^{v-1}|$

Διαίρεση του παραπάνω δια $|f(\alpha)| = |\alpha^v|$ δίνει $\frac{\Delta f}{|f|} = |v| \frac{\Delta a}{|\alpha|}$

Το v -πλάσιο του φράγματος του σχετικού σφάλματος μίας προσεγγιστικής τιμής είναι φράγμα του σχετικού σφάλματος της v -οστής δύναμης της προσεγγιστικής τιμής. Η μέθοδος των φραγμάτων σφάλματος, επεκτείνεται και σε πολυπλοκότερους υπολογισμούς που διαφεύγουν των ορίων των απλών πράξεων.

Τύποι υπολογισμού σφάλματος			
x, y αληθή μεγέθη,		a, b οι προσεγγίσεις των x, y	$\Delta a, \Delta b$ φράγματα του σφάλματος
Πράξη	$f(x, y)$	Φράγμα του απόλυτου σφάλματος	Φράγμα του σχετικού σφάλματος
Πρόσθεση	$x + y$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{ a + b }$
Αφαίρεση	$x - y$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{ a - b }$
Πολλαπλασιασμός	$x \cdot y$	$\Delta a b + \Delta b a $	$\frac{\Delta a}{ a } + \frac{\Delta b}{ b }$

Διαίρεση	$\frac{x}{y}$	$\frac{\Delta\alpha b + \Delta b \alpha }{b^2}$	$\frac{\Delta\alpha}{ \alpha } + \frac{\Delta b}{ b }$
Δύναμη	x^ν	$\Delta\alpha \nu\alpha^{\nu-1} $	$ \nu \frac{\Delta\alpha}{ \alpha^\nu }$
Γενικά	$f(x, y)$	$\Delta\alpha f_x(\alpha, b) + \Delta b f_y(a, b) $	$\frac{\Delta\alpha f_x + \Delta b f_y }{ f(a, b) }$

Παράδειγμα 6. Ο υπολογισμός της έκφρασης $f = \frac{ab}{c}$ με $a = 2 \pm 0,1$, $b = 4 \pm 0,2$,

$c = 2,5 \pm 0,1$ δίνει $f = \frac{ab}{c} = \frac{2 \cdot 4}{2,5} = 3,2$ με σχετικό σφάλμα

$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{0,1}{2} + \frac{0,2}{4} + \frac{0,1}{2,5} = 0,14$ και απόλυτο σφάλμα

$\Delta f = 3,2 \cdot 0,14 = 0,448$. Το αποτέλεσμα είναι $3,2 \pm 0,448$.

Παράδειγμα 7. Το εμβαδόν τριγώνου πλευρών $a \approx 5,2 (\pm 0,05) \text{ cm}$, $b \approx 3,4 (\pm 0,05) \text{ cm}$ και περιεχομένης γωνίας $\gamma \approx 35^\circ (\pm 10')$ βρίσκεται ως

$E = \frac{a \cdot b \cdot \eta\mu\gamma}{2} \approx 5,070 \text{ cm}^2$. Η εκτίμηση του σφάλματος παρέχει

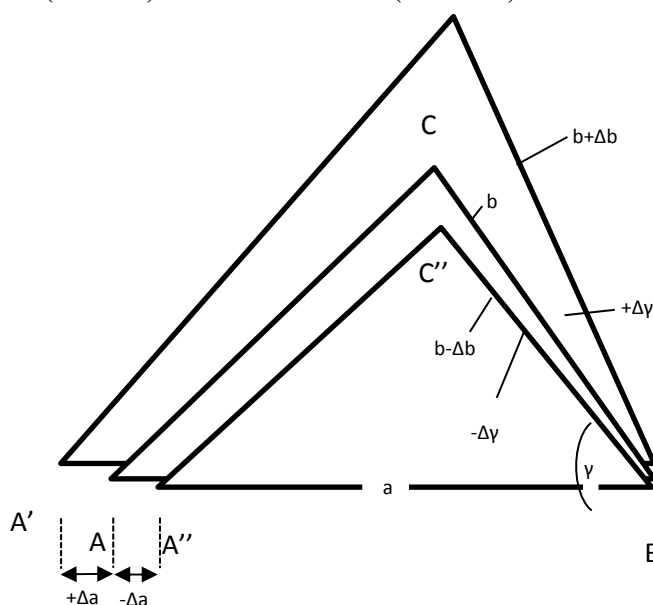
$$\Delta E = \frac{\Delta a \cdot |b| \cdot |\eta\mu\gamma|}{2} + \frac{\Delta b \cdot |a| \cdot |\eta\mu\gamma|}{2} + \frac{\Delta \gamma \cdot |a| \cdot |b| \cdot |\cos \gamma|}{2}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta \gamma}{|\eta\mu\gamma|} |\cos \gamma| =$$

$$\frac{0,05}{5,2} + \frac{0,05}{3,4} + 1,428 \cdot 0,0029 = 0,0096 + 0,0147 + 0,0042 = 0,0285 = 2,85\%$$

Άρα, έπεται $\Delta E = 5,070 \cdot 0,0285 \text{ cm}^2 = 0,144 \text{ cm}^2$ ή

$$E = 5,070 (\pm 0,144) \text{ cm}^2 = 5,070 \text{ cm}^2 (\pm 2,85\%)$$



Το πραγματικό τρίγωνο βρίσκεται μεταξύ των τριγώνων $A'BC'$ και $A''BC''$

Η βασική εξίσωση της μεθόδου των φραγμάτων σφάλματος συνδέει τα φράγματα σφάλματος των αρχικών τιμών, με το φράγμα σφάλματος του αποτελέσματος. Αν στον υπολογισμό υπεισέρχεται μόνο μία προσεγγιστική τιμή, η εξίσωση δύναται να χρησιμεύσει για τον υπολογισμό της απαιτούμενης ακρίβειας της αρχικής προσεγγιστικής τιμής προς την επίτευξη της επιθυμητής ακρίβειας του αποτελέσματος. Στην προκειμένη περίπτωση η βασική εξίσωση είναι

$\Delta f = |f'(\alpha)| \Delta \alpha$ όπου α , $\Delta \alpha$ είναι η προσεγγιστική τιμή και το φράγμα σφάλματος της. Αν το αποτέλεσμα δεν πρέπει να υπερβεί δεδομένο σφάλμα Δ_0 , τότε πρέπει να

$$\text{ισχύει } \Delta f < \Delta_0 \Rightarrow \Delta \alpha < \frac{\Delta_0}{|f'(\alpha)|}.$$

Παράδειγμα 8. Πόσα ψηφία του συνγ πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν, ώστε το απόλυτο σφάλμα του αποτελέσματος να είναι μικρότερο του 0,005 κατά τον υπολογισμό της τρίτης πλευράς τριγώνου, c , εκ των δύο πλευρών $a=7,49\text{cm}$ και $b=5,32\text{cm}$ και της υπό αυτών περιεχόμενης γωνίας $\gamma=30^\circ$;

$$\text{Ισχύει } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos c} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial (\cos c)} = \frac{-ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos c}} = \frac{-ab}{c}$$

και $\Delta c = \Delta(\cos c) \cdot 10,2$. Από την $\Delta c < 0,005$ συνεπάγεται ότι

$$\Delta c < 0,005 \Rightarrow \Delta(\cos c) < \frac{0,005}{10,2} = 4,9 \cdot 10^{-4}.$$

Η τιμή του $\cos c$ πρέπει να ληφθεί με ακρίβεια τουλάχιστον τριών δεκαδικών ψηφίων.

Το πρόβλημα ανεύρεσης της ακρίβειας των αρχικών δεδομένων από τη βασική εξίσωση για δεδομένη ακρίβεια του αποτελέσματος γίνεται απροσδιόριστο, αν υπεισέρχονται στον υπολογισμό περισσότερες από μία μεταβλητή. Αυτό γίνεται διότι διατίθεται μόνο μια γραμμική εξίσωση για την εύρεση περισσότερων του ενός αγνώστου. Με τη βοήθεια της βασικής εξίσωσης είναι όμως δυνατό να εκτιμηθεί το μέγεθος της επιρροής κάθε σφάλματος επί του τελικού αποτελέσματος, έτσι ώστε να διαπιστωθεί ποιά από τις μεταβλητές πρέπει να ληφθεί με μεγάλη ακρίβεια.

Παράδειγμα 9. Έστω ότι θα προσδιορισθεί ο όγκος ενός ορθού κώνου. Μετρούνται η διάμετρος του κύκλου της βάσης $d \approx 16\text{ cm}$ και το ύψος $h \approx 32\text{ cm}$. Πόσο ακριβείς πρέπει να είναι οι μετρήσεις και πόσα ψηφία του π πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν, ώστε το σφάλμα του αποτελέσματος να μην υπερβεί το 1%;

Ο όγκος του κώνου είναι $V = \frac{\pi h d^2}{12}$. Αν $\Delta \pi$,

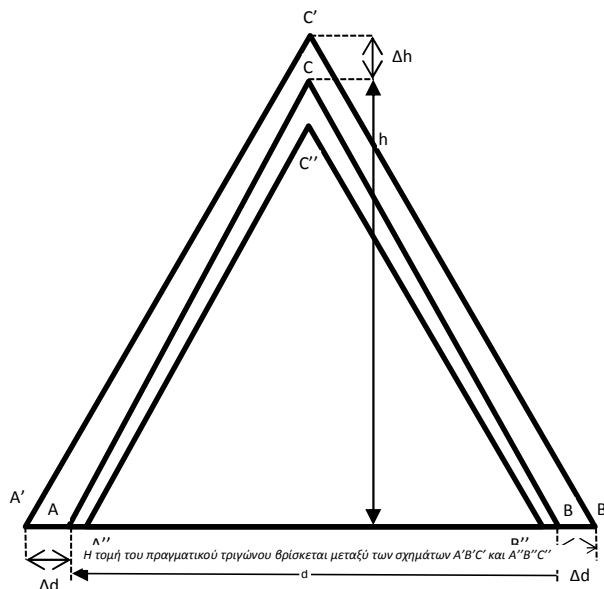
Δh , Δd είναι τα φράγματα του απόλυτου σφάλματος των π , h , d , τότε προκύπτει ως φράγμα του σχετικού σφάλματος του όγκου

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{2\Delta d}{d}.$$

$$\text{Από τη συνθήκη } \frac{\Delta V}{V} < 0,01 \text{ προκύπτει η ανισότητα.}$$

$$0,31831 \cdot \Delta \pi + 0,03125 \cdot \Delta h + 0,125 \cdot \Delta d < 0,01$$

Ο μονοσήμαντος προσδιορισμός των $\Delta \pi$, Δh , Δd από την ανισότητα είναι αδύνατος. Φαίνεται όμως ότι δεδομένο σφάλμα κατά τον



προσδιορισμό της διαμέτρου θα έχει επίδραση στο τελικό σφάλμα τετραπλάσιο εκείνου του σφάλματος κατά τον προσδιορισμό του ύψους. Για αυτό η διάμετρος πρέπει να προσδιοριστεί με ιδιαίτερη επιμέλεια. Ακρίβεια $\Delta d = 0,1 \text{ cm}$ δεν επαρκεί, διότι ήδη συνεισφέρει 1,25% στο ολικό σφάλμα. Αν η διάμετρος μετρηθεί με ακρίβεια $\Delta d = 0,05 \text{ cm}$, τα υπόλοιπα φράγματα πληρούν τη συνθήκη $0,31831 \cdot \Delta \pi + 0,03125 \cdot \Delta h < 0,00375$

Αν το σφάλμα στον προσδιορισμό του ύψους περιοριστεί σε 1,2mm τότε το π πρέπει να ληφθεί άνευ σφάλματος. Με σφάλμα $\Delta h = 1 \text{ mm}$ προκύπτει μέσω του π το φράγμα $0,31831 \cdot \Delta \pi < 0,000625 \Leftrightarrow \Delta \pi < 0,002$. Η τελευταία συνθήκη πληρείται, αν ληφθεί δια το π η σε δύο δεκαδικά στρογγυλοποιημένη τιμή $\pi = 3,14$. Επομένως ο όγκος του ορθού κώνου θα προσδιοριστεί με ακρίβεια τουλάχιστον 1%, αν η διάμετρος μετρηθεί με ακρίβεια $\Delta d = 0,05 \text{ cm}$ το ύψος με ακρίβεια $\Delta h = 0,1 \text{ cm}$ και ληφθεί για το π η τιμή 3,14.

11 Σφάλματα μέτρησης και παρατήρησης

11.1 Σφάλμα μέτρησης

Αν η προσεγγιστική τιμή α , μεγέθους x , προέρχεται από μετρήσεις, το απόλυτο σφάλμα $\varepsilon = \alpha - x$ καλείται σφάλμα μέτρησης ή αληθές σφάλμα. Το σφάλμα αυτό είναι αναπόφευκτο και διαφορετικό των χονδρών σφαλμάτων, τα οποία οφείλονται σε απροσεξία ή κακό χειρισμό των οργάνων μέτρησης. Τα σφάλματα μέτρησης οφείλονται στην ακρίβεια των οργάνων μέτρησης (σφάλμα οργάνων) και στην ακρίβεια της ανάγνωσης αυτού που εκτελεί τη μέτρηση (**υποκειμενικά σφάλματα**). Τα σφάλματα οργάνων εμφανίζονται συνήθως ως **κανονικά σφάλματα**, δηλαδή ως **σταθερά σφάλματα** ή **συστηματικά σφάλματα**.

Αν π.χ. ένα ρολόι ρυθμίζεται με εσφαλμένη ώρα, η μέτρηση χρόνου ενέχει σταθερό σφάλμα, ίσο προς το αρχικό σφάλμα θέσης της ώρας. Αν όμως είναι γνωστό για το ρολόι ότι κατά την διάρκεια της ημέρας κερδίζει π.χ. πέντε λεπτά, η μέτρηση χρόνου ενέχει συστηματικό σφάλμα, το μέγεθος του οποίου εξαρτάται από το πόσος χρόνος παρήλθε από την τελευταία διόρθωση του ρολογιού. Πολλές φορές, υποχρεούται να εκτελέσει μέτρηση έχοντας συστηματικό σφάλμα. Λόγω της κανονικότητας του σφάλματος όμως, αυτό δύναται να διαπιστωθεί και να εξαλειφθεί κατά την επεξεργασία των μετρήσεων.

11.2 Σφάλμα παρατήρησης

Τελείως διαφορετική είναι η περίπτωση των μη κανονικών ή τυχαίων σφαλμάτων. Όχι μόνο δεν δύνανται να αποφευχθούν εκείνα, αλλά συνήθως δεν είναι δυνατό ούτε να εξαλειφτούν. Ως επί το πλείστον τα υποκειμενικά σφάλματα του παρατηρητή ανήκουν στην κατηγορία των τυχαίων σφαλμάτων και χαρακτηρίζονται ως σφάλματα παρατήρησης. Τυχαία σφάλματα προκαλούνται επίσης από ανεξέλεγκτους παράγοντες, τυχαίας, επίδρασης κατά τη διάρκεια της μέτρησης. Κατ' αρχήν αρκεί μία μέτρηση για τον καθορισμό μίας προσεγγιστικής τιμής α ενός μεγέθους x . Η μέτρηση όμως αυτή δεν παρέχει πληροφορία ούτε για το μέγεθος, ούτε για το πρόσημο του σφάλματος $\varepsilon = \alpha - x$.

Βέβαια μέσω της γνώσης του οργάνου μέτρησης, της προσοχής και άσκησης του παρατηρητή, είναι δυνατό να εκτιμηθεί ένα φράγμα $\Delta \alpha$ για το σφάλμα της μέτρησης, το οποίο όμως θα είναι χονδρικό. Μέσω αυτού, εκτελείται η μέτρηση όχι μία αλλά πολλές φορές και αν είναι δυνατόν από ανεξάρτητους παρατηρητές.

Αν εκτελεστούν ν μετρήσεις ενός μεγέθους x , τα αποτελέσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ δε θα συμφωνούν πάντα μεταξύ τους, ιδίως όταν ζητείται μεγάλη

ακρίβεια και πρέπει να εκτιμηθούν τιμές μεταξύ των υποδιαιρέσεων της κλίμακας του οργάνου. Αυτές οι μετρήσεις εξαρτώνται από υποκειμενικούς παράγοντες του παρατηρητή. Εκτός τούτου θα κυμαίνεται από μετρήσεις σε μετρήσεις η ακρίβεια αναπαραγωγής των συνθηκών (π.χ. δείκτη και υποδιαίρεσης της κλίμακας). Από τις ν μετρήσεις προκύπτουν ν εξισώσεις $\varepsilon_1 = \alpha_1 - x$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 - x, \dots, \varepsilon_\nu = \alpha_\nu - x$. Για τα ν σφάλματα και την άγνωστη τιμή x , δηλαδή για $(\nu + 1)$ αγνώστους. Ο **λογισμός των προσαρμογών** ανέπτυξε μεθόδους μέσω των οποίων είναι δυνατή η εύρεση μιας καλής προσεγγιστικής τιμής α του x και ο υπολογισμός της ακρίβειας της. Η δυνατότητα λύσης του προβλήματος βασίζεται στην υπόθεση ότι τα σφάλματα ε_k υπόκεινται συνολικά στην αυστηρή νομοτέλεια, παρόλο ότι καθένα δύναται ανεξέλεγκτα να είναι μικρό ή μεγάλο, θετικό ή αρνητικό.

11.3 Ο νόμος σφαλμάτων του Gauss

Κατά την εξέταση των σφαλμάτων παρατήρησης, ο Carl Friedrich Gauss (1777–1855) εισήγαγε την ομώνυμη κατανομή η οποία δίνεται από τη συνάρτηση

πυκνότητας $p(x) = \frac{e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}}{a\sqrt{2\pi}}$ του μέσου $\mu=b$ και της διασποράς $\sigma=a$. Κατά την προσαρμογή τίθεται $\varepsilon = x - b$, $\alpha = \sigma$, και $p(x) = \varphi(\varepsilon)$ και προκύπτει ο νόμος της κατανομής σφαλμάτων του Gauss.

Νόμος κατανομής σφαλμάτων	$\varphi(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
--	---

Η εικόνα της συνάρτησης αυτής έχει μορφή κώδωνα, εκτείνεται επί όλου του άξονα των τετμημένων ($-\infty < \varepsilon < +\infty$), έχει μέγιστο στη θέση $\varepsilon=0$ και σημεία καμπής στα $\varepsilon = -\sigma$ και $\varepsilon = \sigma$. Για μεγάλες τιμές του σ , η καμπύλη γίνεται χαμηλή και πλατιά. Αντιθέτως, για μικρά σ , η καμπύλη γίνεται υψηλή και στενή. Η πιθανότητα να κείται το σφάλμα μίας παρατήρησης μεταξύ των φραγμάτων $-\Delta$ και Δ δίνεται τη

βοήθεια της κατανομής Gauss ως $P(-\Delta \leq \varepsilon \leq \Delta) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$

Συνήθως το φράγμα σφάλματος Δ εκφράζεται σε μονάδες του σ . Τίθεται $\Delta = \lambda\sigma$

Φράγματα σφάλματος $\Delta = \lambda\sigma$	Πιθανότητα P
0,67 σ	0,500
1,00 σ	0,683
1,96 σ	0,950
2,00 σ	0,954
2,58 σ	0,990

($\lambda > 0, \sigma > 0$). Στον διπλανό πίνακα, που προκύπτει μέσω του υπολογισμού του ολοκληρώματος, για κάθε τιμή του $\Delta=\lambda\sigma$ παρατίθεται η πιθανότητα P ότι το σφάλμα παρατήρησης ε δε θα υπερβεί το Δ . Άρα, αν κατά τη μέτρηση κάποιου μεγέθους είναι γνωστή η απόκλιση σ , δύνανται να προσδιοριστούν φραγμοί $\Delta=\lambda\sigma$, με γνωστή πιθανότητα ότι το σφάλμα θα παραμείνει μικρότερο τους. Δυστυχώς, στις περισσότερες περιπτώσεις εφαρμογών η απόκλιση σ δεν είναι γνωστή. Ο λογισμός των προσαρμογών, παρέχει τις μεθόδους για την εκτίμηση της τιμής του σ από πολλές μετρήσεις μεγέθους x . Επιτρέπει επίσης, τη βοήθεια του νόμου κατανομής του Gauss, την εκτίμηση του σφάλματος.

3,00 σ

0,997

11.4 Κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή είναι μία οικογένεια συνεχών κατανομών:

- καμπανοειδών διότι το διάγραμμα συχνοτήτων έχει σχήμα κώδωνα,
- ασυμπτωτικών στον οριζόντιο άξονα, συμμετρικών (διότι το 50% των παρατηρήσεων βρίσκεται σε κάθε πλευρά δεξιά και αριστερά του μέσου)
- που χαρακτηρίζεται από διαφορετικό ζεύγος μέσων (μ) και διακυμάνσεων (σ^2), διότι το σχήμα που έχει το διάγραμμα συχνοτήτων εξαρτάται από τις τιμές των μ, σ^2 . Η μέση τιμή καθορίζει τη θέση του διαγράμματος στον οριζόντιο άξονα. Η τυπική απόκλιση (σ) καθορίζει το εύρος (R) και το ύψος. Όταν η (σ) λαμβάνει μεγάλη τιμή, τότε το γράφημα είναι ευρύ και κοντό, ενώ αν η (σ) λαμβάνει μικρή τιμή, τότε το γράφημα είναι στενό και υψηλό.
- με τη συνολική επιφάνεια κάτω από την κανονική καμπύλη να ισούται με 1.

11.5 Παρατηρήσεις

- Η πιθανότητα για μία κανονική τυχαία μεταβλητή X , να ισούται με κάποια συγκεκριμένη τιμή είναι 0.
- Η πιθανότητα ότι το x είναι μεγαλύτερο από μία τιμή a , ισούται με το εμβαδόν κάτω από την κανονική καμπύλη που οριοθετείται από το a και δεξιά του.
- Η πιθανότητα ότι το x είναι μικρότερο από μία τιμή a , ισούται με το εμβαδόν κάτω από την κανονική καμπύλη που οριοθετείται από το a και αριστερά του.
- Η πιθανότητα ότι μία κανονική τυχαία μεταβλητή θα βρίσκεται εντός μίας τυπικής απόκλισης από τον αριθμητικό μέσο της κανονικής κατανομής (σε κάθε πλευρά) είναι 0,6826 ή περίπου 68% ή 0,68.
- Η πιθανότητα ότι μία κανονική τυχαία μεταβλητή θα βρίσκεται εντός δύο τυπικών αποκλίσεων από τον αριθμητικό μέσο της κανονικής κατανομής (σε κάθε πλευρά) είναι 0,9544 ή περίπου 95% ή 0,95.
- Η πιθανότητα ότι μία κανονική τυχαία μεταβλητή θα βρίσκεται εντός τριών τυπικών αποκλίσεων από τον αριθμητικό μέσο της κανονικής κατανομής (σε κάθε πλευρά) είναι 0,9974 ή περίπου 99,7% ή 0,997.

Παράδειγμα 10. Αν ο χρόνος αναμονής για την παραλαβή του ΚΕΠ 1 από τους σπουδαστές, ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2) = N(10, 2^2)$, υπολογίστε:

- (α) Σε ποιο χρονικό διάστημα περίπου θα εξυπηρετηθεί το 99,7% των σπουδαστών.
 (β) Ποια η πιθανότητα (προσεγγιστικά) να εξυπηρετηθεί σπουδαστής σε λιγότερο από έξι λεπτά; Υπόδειξη. Κάντε χρήση του διαγράμματος της κανονικής κατανομής.

Λύση

- (α) Το ζητούμενο χρονικό διάστημα, σε λεπτά της ώρας, είναι το παρακάτω
 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (10 - 3 \cdot 2, 10 + 3 \cdot 2) = (4, 16)$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(X < 6) = P(X < 10 - 2 \cdot 2) = P(X < \mu - 2 \cdot \sigma)$

Λόγω συμμετρίας είναι $P(X < 10 - 2 \cdot \sigma) = P(X > 10 - 2 \cdot \sigma)$.

Επίσης $P(\mu - 2 \cdot \sigma < X < \mu + 2 \cdot \sigma) = 0,95$.

Άρα, $P(X < \mu - 2 \cdot \sigma) + P(X > \mu + 2 \cdot \sigma) = 0,05$.

Επειδή οι δύο αυτές πιθανότητες είναι ίσες, είναι $P(X < \mu - 2 \cdot \sigma) = 0,025$.

Παράδειγμα 11. Αν ο χρόνος για την ολοκλήρωση μίας εργασίας ακολουθεί την $N(\mu, \sigma^2) = N(30, 5^2)$, υπολογίστε:

(α) Σε ποιο χρονικό διάστημα ανήκει το 95% των τιμών του χρόνου.

(β) προσεγγιστικά, κάνοντας χρήση του διαγράμματος της κανονικής κατανομής, το ποσοστό του χρόνου που ξεπερνά τα 35'.

Λύση

(α) Το ζητούμενο χρονικό διάστημα, σε λεπτά της ώρας, είναι το παρακάτω

$$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = (30 - 2 \cdot 5, 30 + 2 \cdot 5) = (20, 40)$$

(β)) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(X > 35) = P(X > 30 + 1 \cdot 5) = P(X > \mu + 1 \cdot \sigma)$

Λόγω συμμετρίας είναι $P(X > \mu + 1 \cdot \sigma) = P(X < \mu - 1 \cdot \sigma)$.

Επίσης $P(\mu - 1 \cdot \sigma < X < \mu + 1 \cdot \sigma) = 0,68$.

Άρα, $P(X < \mu - 1 \cdot \sigma) + P(X > \mu + 1 \cdot \sigma) = 0,32$. Επειδή οι δύο αυτές πιθανότητες

είναι ίσες, είναι $P(X > \mu + 1 \cdot \sigma) = \frac{0,32}{2} = 0,16 = 16\%$.

Παράδειγμα 12.

Βαθμίδα	ν_i	x_i	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x_i)^2$	
1	1	18	- 8,9	79,21	324	
2	1	18	- 8,9	79,21	324	M_0
3	1	18	- 8,9	79,21	324	
4	1	18	- 8,9	79,21	324	
5	1	19	- 7,9	62,41	361	Q_1
6	1	20	- 6,9	47,61	400	
7	1	20	- 6,9	47,61	400	
8	1	20	- 6,9	47,61	400	
9	1	21	- 5,9	34,81	441	
10	1	22	- 4,9	24,01	484	$\delta = Q_2$
11	1	22	- 4,9	24,01	484	
12	1	23	- 3,9	15,21	529	
13	1	24	- 2,9	8,41	576	
14	1	26	- 0,9	0,81	676	
15	1	27	0,1	0,01	729	Q_3
16	1	32	5,1	26,01	1024	
17	1	33	6,1	37,21	1089	
18	1	49	22,1	488,41	2401	
19	1	52	25,1	630,01	2704	
20	1	56	29,1	846,81	3136	
Sum	20	538		2.657,8	17.130	

• Αριθμητικός μέσος ή μέσος όρος ή μέση τιμή $\bar{x} = \frac{538}{20} = 26,9$

• Εύρος (Range) $R = 56 - 18 = 38$

- Κορυφή (Mode) = 18 διότι είναι η τιμή που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές (4 φορές)
- Διάμεσος (Median) δ είναι η μεσαία τιμή των διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά δεδομένων (x_i). Είναι $\delta = P_{50} = Q_2$ και βρίσκεται στη θέση $\frac{(20+1)50}{100} = \frac{21}{2} = 10,5$.

Άρα, $\delta = 22 + (0,5)0 = 22$.

- Υπολογισμός του εκατοστημορίου P_{50} . Πρόκειται για το σημείο των δεδομένων που βρίσκεται στη θέση $\frac{(n+1)p}{100} = \frac{(20+1)50}{100} = \frac{21}{2} = 10,5$. Η 10^η παρατήρηση έχει τιμή 22. Η 11^η παρατήρηση έχει επίσης τιμή 22. Άρα, επειδή το P_{50} θα βρίσκεται στη μέση της απόστασης μεταξύ της 10^{ης} και της 11^{ης} παρατήρησης (που αμφότερες στην περίπτωση μας έχουν την τιμή) ισχύει ότι $P_{50} = Q_2 = 22$.

- Υπολογισμός του εκατοστημορίου P_{80} . Πρόκειται για το σημείο των δεδομένων που βρίσκεται στη θέση $\frac{(n+1)p}{100} = \frac{(20+1)80}{100} = 16,8$. Η 16^η παρατήρηση έχει τιμή 32. Η 17^η παρατήρηση έχει επίσης τιμή 33. Άρα, το P_{80} είναι το σημείο που βρίσκεται σε απόσταση 0,8 μεταξύ των τιμών 32 και 33, συνεπώς $P_{80} = 32 + 0,8 \cdot 1 = 32,8$.

- Υπολογισμός του εκατοστημορίου P_{90} . Πρόκειται για το σημείο των δεδομένων που βρίσκεται στη θέση $\frac{(n+1)p}{100} = \frac{(20+1)90}{100} = 18,9$. Η 18^η παρατήρηση έχει τιμή 49. Η 19^η παρατήρηση έχει τιμή 52. Άρα, το P_{90} είναι το σημείο που βρίσκεται σε απόσταση 0,9 μεταξύ των τιμών 49 και 52, συνεπώς $P_{90} = 49 + 0,9 \cdot (52 - 49) = 49 + 0,9 \cdot 3 = 51,7$.

Εκατοστημόρια P_i	Τεταρτημόρια Q_i
$P_{25} = \frac{(n+1)p}{100} = \frac{(20+1)25}{100} = \frac{21}{4} = 5,25$	$Q_1 = 19 + 0,25 \cdot 1 = 19,25$
$P_{50} = \frac{(n+1)p}{100} = \frac{(20+1)50}{100} = \frac{21}{2} = 10,5$	$Q_2 = 22 + 0,5 \cdot 0 = 22$
$P_{75} = \frac{(n+1)p}{100} = \frac{(20+1)75}{100} = \frac{21 \cdot 3}{4} = 15,75$	$Q_3 = 27 + 0,75 \cdot 5 = 30,75$

- Ενδοτεταρτομοριακό εύρος $Q = Q_3 - Q_1 = 30,75 - 19,25 = 11,5$.

- Διασπορά $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{2657,8}{20-1} = \frac{2657,8}{19} = 139,88421$

2^{ος} τρόπος υπολογισμού

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{17130 - \frac{538^2}{20}}{20-1} = \frac{17130 - \frac{289444}{20}}{19} = \frac{17130 - 14472,2}{19} =$$

$$\frac{2657,8}{19} = 139,88421$$

- Υπολογισμός τυπικής απόκλισης $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{139,88421} = 11,83$.

11.6 Ελλείπουσες τιμές (missing values) ή ελλείποντα δεδομένα (missing data)

Είναι οι περιπτώσεις που δεν είναι διαθέσιμες μία ή περισσότερες τιμές (παρατηρήσεις) από κάποια ή κάποιες μεταβλητές. Οι ελλείπουσες τιμές αποτελούν συχνό φαινόμενο και μπορεί να έχουν σημαντική επίδραση στα συμπεράσματα που εξάγονται από τα δεδομένα (μεροληπτικά συμπεράσματα σχετικά με τον πληθυσμό λόγω μείωσης της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος). Τα ελλιπή δεδομένα μπορεί να οφείλονται σε:

- Δυσλειτουργία του εξοπλισμού.
- Καταστροφή αρχείων δεδομένων.
- Μη καταγεγραμμένο ιστορικό ή αλλαγές δεδομένων.
- Μη απάντηση του ερωτώμενου κατά τη συλλογή των δεδομένων (ερωτηματολόγια).

• Ασυνέπειες με άλλα καταγεγραμμένα δεδομένα, άρα διαγραφή τους κατά τον έλεγχο.

• Μη καταχώρηση δεδομένων (ορισμένα δεδομένα μπορεί να μην θεωρήθηκαν σημαντικά τη στιγμή της καταχώρησης).

Σύμφωνα με τους Little & Rubin (1987), τα δεδομένα (τιμές μεταβλητών) μπορεί να λείπουν:

• **εντελώς τυχαία** (missing completely at random, MCAR). Δηλαδή η πιθανότητα μία παρατήρηση X_i να λείπει, είναι ανεξάρτητη από την τιμή του X_i ή από την τιμή οποιασδήποτε άλλης μεταβλητής περιλαμβάνεται στα δεδομένα. Στην περίπτωση αυτή η έλλειψη στοιχείων οφείλεται σε τυχαία γεγονότα, όπως:

- Ένα ερωτηματολόγιο που έχει συμπληρωθεί και στη συνέχεια χάθηκε.
- Λανθασμένη καταχώρηση στοιχείων κατά την πληκτρολόγηση.
- Σε μία επί μακρόν επαναλαμβανόμενη έρευνα, μπορεί οι συμμετέχοντες να σταματήσουν να συμμετέχουν για οποιονδήποτε λόγο.

➤ Ο εξοπλισμός συλλογής δεδομένων, δε λειτουργήσει ή δυσλειτουργήσει (πχ. συγκέντρωση δεδομένων βροχόπτωσης, μέτρηση στάθμης ποταμού)

• **τυχαία** (missing at random, MAR). Συχνά, μία παρατήρηση X_i δε λείπει εντελώς τυχαία, αλλά η έλλειψη της έχει σχέση με κάποια άλλη μεταβλητή των δεδομένων, όπως άρνηση του ερωτώμενου που ανήκει σε κάποια κατηγορία (άλλη μεταβλητή) να απαντήσει σε ορισμένες ερωτήσεις. Ενδεικτικά:

➤ Οι πάσχοντες από κατάθλιψη, ίσως να είναι λιγότερο πρόθυμοι να εκθέσουν το εισόδημα τους, άρα η έλλειψη τιμής για τη μεταβλητή «εισόδημα», σχετίζεται με τη μεταβλητή «ψυχολογικά προβλήματα».

➤ Οι γυναίκες συχνά σε μία έρευνα, δεν επιθυμούν να δηλώσουν την ηλικία τους άρα, η έλλειψη τιμής για τη μεταβλητή «ηλικία», σχετίζεται με τη μεταβλητή «φύλο».

• **όχι τυχαία** (missing not at random, MNAR), για οποιαδήποτε άλλη άγνωστη αιτία. Η έλλειψη στοιχείων θεωρείται ότι δεν είναι τυχαία διότι οφείλεται σε όλες τις μεταβλητές (και στην ίδια τη μεταβλητή που περιέχει τα ελλιπή στοιχεία και σε άλλες που δεν περιέχουν καθόλου ελλιπή στοιχεία) αλλά και σε άγνωστες αιτίες, όπως:

➤ Άρνηση του ερωτώμενου να απαντήσει σε ερωτήσεις που αφορούν ευαίσθητες ή προσωπικές πληροφορίες.

➤ Άρνηση του ερωτώμενου να απαντήσει σε ερωτήσεις που για κάποιο λόγο αυτός δεν επιθυμεί (ύψος αποδοχών, περιουσιακά στοιχεία)

11.7 Αντιμετώπιση του προβλήματος των ελλειπουσών τιμών

Οι τεχνικές αυτές, θα μπορούσαν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες:

- **πρόληψη** για την αποτροπή της συλλογής των δεδομένων με ελλείπουσες τιμές. Αν τα δεδομένα συλλέγονται με ερωτηματολόγια ηλεκτρονικά, μπορούμε να θέσουμε περιορισμούς ώστε ο συμμετέχων στην έρευνα να μη μπορεί να προχωρήσει στην επόμενη ερώτηση αν πρώτα δε συμπληρώσει την προηγούμενη ερώτηση. Ο ερευνητής, κατά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, μπορεί να χρησιμοποιήσει πειστικά επιχειρήματα ώστε να μετριάσει τις επιφυλάξεις του ερωτώμενου, για κάποιες ερωτήσεις και απαντήσεις. Αποστολή επιστολών στους συμμετέχοντες, για την εμπιστευτικότητα των δεδομένων. Αποστολή επιστολών στους συμμετέχοντες σε επαναλαμβανόμενες έρευνες, για υπενθύμιση της συμμετοχής τους.

- **συμπλήρωση** των ελλειπουσών τιμών. Πρέπει να γίνεται πριν από τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων. Χρησιμοποιούνται διάφορες μεθοδολογίες, με κυριότερες τις ακόλουθες:

- **απλή αντικατάσταση** (hot deck–HD). Η ελλείπουσα τιμή, αντικαθίσταται με μία τυχαία:

- ☐ επιλεγμένη τιμή της ίδιας μεταβλητής που περιλαμβάνεται στο δείγμα.

- ☐ τιμή μεταξύ των τιμών που παρουσιάζουν παρόμοια χαρακτηριστικά (πχ. ίδια κλάση).

Το πιο σοβαρό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η διαστρέβλωση των συσχετίσεων και των συνδιακυμάνσεων. Άρα, η μέθοδος αυτή δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στην ανάλυση που περιλαμβάνονται στατιστικές μέθοδοι βασισμένες σε συσχετίσεις ή σε συνδιακυμάνσεις.

- **αντικατάσταση με μέση τιμή, ή επικρατούσα τιμή ή διάμεσο**. Αν η μεταβλητή είναι ποσοτική (συνεχής ή κλίμακας ή διάταξης), τότε οι ελλείπουσες τιμές αντικαθίστανται με το μέσο όρο (mean) των υπαρχόντων δεδομένων, για τη μεταβλητή. Αν η μεταβλητή είναι κατηγορική, τότε οι ελλείπουσες τιμές αντικαθίστανται με την επικρατούσα τιμή (mode). Σε περίπτωση που υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στις τιμές των δεδομένων για ένα χαρακτηριστικό, τότε οι ελλείπουσες τιμές αντικαθίστανται με τη διάμεσο (median). Αν πχ. μία μεταβλητή για το διαθέσιμο εισόδημα των νοικοκυριών παρουσιάζει ελλείπουσες τιμές αλλά υπάρχει κατηγοριοποίηση των νοικοκυριών σε μία μεταβλητή για την εισοδηματική τάξη (χαμηλή, μέση, υψηλή εισοδηματική κατηγορία), τότε αντικαθίστανται οι ελλείπουσες τιμές με το μέσο διαθέσιμο εισόδημα της κάθε εισοδηματικής κατηγορίας. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει τα παρακάτω μειονεκτήματα.

- ☐ Υποεκτιμώνται η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

- ☐ Οι συσχετίσεις είναι αρνητικά μεροληπτικές.

- ☐ Η κατανομή των νέων τιμών είναι μία ανακριβής αντιπροσώπευση των τιμών του πληθυσμού, διότι η μορφή της κατανομής διαστρεβλώνεται με την προσθήκη των τιμών οι οποίες ταυτίζονται με το μέσο όρο.

- **αντικατάσταση με τη μέθοδο του k-πλησιέστερου γείτονα** (k-nearest neighbor imputation). Γίνεται χρήση του αλγόριθμου k-πλησιέστερου γείτονα. Κύρια πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι τα παρακάτω.

- ☐ Δεν είναι απαραίτητο να δημιουργηθεί ένα προγνωστικό μοντέλο για κάθε χαρακτηριστικό με ελλείπουσες τιμές.

□ Μπορεί να εκτιμήσει δύο ποιοτικά χαρακτηριστικά (η πιο συχνή τιμή μεταξύ των k -πλησιέστερων γειτόνων) και ποσοτικά χαρακτηριστικά (ο μέσος όρος των k -πλησιέστερων γειτόνων).

Η αποδοτικότητα είναι ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που παρουσιάζει αυτή η μέθοδος, διότι ο αλγόριθμος αναζητά τις πιο παρόμοιες περιπτώσεις και η αναζήτηση πρέπει να γίνει στο σύνολο των δεδομένων και συνήθως η βάση είναι πολύ μεγάλη για αναζήτηση. Επιπλέον πρόβλημα είναι ότι σε μεγάλο βαθμό το αποτέλεσμα, επηρεάζεται από το πώς θα επιλεγεί η τιμή k και από το πόσο παρόμοιες θα είναι οι περιπτώσεις.

➤ **αντικατάσταση με τη μέθοδο της παλινδρόμησης.** Αν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ της μεταβλητής η οποία παρουσιάζει ελλείπουσες τιμές και μίας άλλης μεταβλητής, τότε οι ελλείπουσες τιμές μπορούν να αντικατασταθούν με την τιμή της πρόβλεψης που θα προκύψει από την εκτίμηση μίας γραμμικής παλινδρόμησης μεταξύ των δύο μεταβλητών. Η μέθοδος αυτή εξαρτάται από τη γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών (συχνά, η σχέση μεταξύ των μεταβλητών δεν είναι γραμμική).

• **διαγραφή των ελλειπουσών τιμών.** Αν δεν έχουμε τη δυνατότητα αντικατάστασης των ελλειπουσών τιμών, τότε ανάλογα με τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων που θα υλοποιήσουμε, διαγράφουμε (δε χρησιμοποιούμε) τις ελλείπουσες τιμές. Η διαγραφή τους έχει τις παρακάτω συνέπειες.

□ Μείωση των παρατηρήσεων του δείγματος που χρησιμοποιούνται.

□ Τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης, είναι μεροληπτικά.

Οι τρόποι (μέθοδοι) διαγραφής (παράληψης) των ελλειπουσών τιμών που υπάρχουν ως επιλογές, σε όλα σχεδόν τα προγράμματα που πραγματοποιούν στατιστικές αναλύσεις είναι οι παρακάτω.

□ **Διαγραφή ανά μεταβλητή** (listwise). Με τη διαδικασία αυτή, παραλείπονται στην ανάλυση οι ελλείπουσες τιμές χωριστά για κάθε μεταβλητή. Αυτό έχει ως συνέπειες:

Οι μεταβλητές που έχουν διαφορετικό πλήθος ελλειπουσών τιμών θα έχουν διαφορετικό μέγεθος δείγματος κατά την ανάλυση, κάτι που δεν επιτρέπεται σε πολλές μεθόδους ανάλυσης. Τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης μπορεί να είναι μεροληπτικά (εκτιμήσεις παραμέτρων, στατιστικοί έλεγχοι) και τα συμπεράσματα να μην είναι αντιπροσωπευτικά για τον πληθυσμό από τον οποίο επιλέχθηκε το δείγμα.

Αν οι παρατηρήσεις (τιμές) λείπουν εντελώς τυχαία (MCAR), τα αποτελέσματα είναι αμερόληπτα.

□ **Διαγραφή ανά ζεύγος** (pairwise). Παραλείπεται στην ανάλυση ολόκληρη η εγγραφή για την οποία κάποια από τις μεταβλητές παρουσιάζει ελλείπουσες τιμές. Αυτό έχει ως συνέπειες:

Τη μείωση μεγέθους του δείγματος για όλες τις μεταβλητές, έτσι ώστε αυτές να έχουν το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων. Τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης μπορεί να είναι μεροληπτικά (εκτιμήσεις παραμέτρων, στατιστικοί έλεγχοι) και τα συμπεράσματα να μην είναι αντιπροσωπευτικά για τον πληθυσμό του οποίου επιλέχθηκε το δείγμα.

Τα προβλήματα των μεθόδων διαγραφής listwise και pairwise μειώνονται αν:

• Οι παρατηρήσεις (τιμές) λείπουν εντελώς τυχαία (MCAR), οπότε τα αποτελέσματα είναι αμερόληπτα.

• Το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μεγάλο και το ποσοστό των ελλειπουσών τιμών πολύ μικρό σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος.

12. Εκτιμητική

Εκτιμήτρια: τυχαία μεταβλητή που χρησιμοποιούμε ώστε να εκτιμήσουμε μια παράμετρο ενός πληθυσμού. **Εκτίμηση:** η αριθμητική τιμή της εκτιμήτριας για το συγκεκριμένο δείγμα. Η εκτίμηση της τιμής μίας παραμέτρου μπορεί να γίνει μέσω:

- **Σημειακής εκτίμησης** (point estimation). Η εκτίμηση μίας άγνωστης παραμέτρου ενός πληθυσμού, μέσω της τιμής μίας εκτιμήτριας, για συγκεκριμένη πραγματοποίηση ενός τυχαίου δείγματος από τον πληθυσμό.

- **Διαστήματος εμπιστοσύνης** (confidence interval). Διάστημα το οποίο περιέχει, με δεδομένη εμπιστοσύνη (πιθανότητα), την εκτιμώμενη παράμετρο. Ένα $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης, για μία παράμετρο ενός πληθυσμού, είναι ένα διάστημα που υπολογίζεται από ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό και έχει πιθανότητα $(1-\alpha)$ να περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Η πιθανότητα $1-\alpha$ ονομάζεται **επίπεδο εμπιστοσύνης του διαστήματος**.

Για τον υπολογισμό ενός διαστήματος εμπιστοσύνης λαμβάνονται υπόψη:

- Η σημειακή εκτίμηση.
- Η ακρίβεια της εκτίμησης, η οποία υπολογίζεται μέσω του τυπικού σφάλματος.
- Το επίπεδο εμπιστοσύνης. Το διάστημα εμπιστοσύνης γίνεται πλατύτερο όταν το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι μεγάλο (ή ισοδύναμα το α είναι μικρό) καθώς και όταν το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου είναι μεγάλο.

12.1 Ιδιότητες σημειακής εκτιμήτριας

Συνέπεια (Consistency), Αμεροληψία (Unbiasedness), Αποτελεσματικότητα (Efficiency), Επάρκεια (Sufficiency). Πολλές φορές αντί για τον υπολογισμό διαστήματος εμπιστοσύνης, προχωράμε σε ελέγχους υποθέσεων. Οι έλεγχοι αυτοί, συνδέονται άμεσα με τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης.

13. Έλεγχος υποθέσεων (hypothesis testing)

Χρειαζόμαστε δύο υποθέσεις: τη μηδενική και την εναλλακτική.

Μηδενική χαρακτηρίζουμε την υπόθεση που θέλουμε να ελέγξουμε και την συμβολίζουμε με H_0 . Είναι μία δήλωση (αυτό που οι περισσότεροι άνθρωποι θεωρών ως σωστό, δηλαδή είναι η επικρατούσα αντίληψη) για μία ή περισσότερες παραμέτρους. Αυτή η δήλωση θεωρούμε ότι είναι αληθής, μέχρι να έχουμε επαρκείς στατιστικές ενδείξεις προκειμένου να καταλήξουμε στο αντίθετο συμπέρασμα. Δηλαδή, η H_0 θεωρείται ότι είναι αληθής μέχρι που ένας έλεγχος θα οδηγήσει στην απόρριψη της (υποστηρίζοντας την εναλλακτική). Γίνεται δεκτή ως αληθής, ή απορρίπτεται ως ψευδής με βάση την τιμή p .

Εναλλακτική θεωρούμε την υπόθεση που θα δεχτούμε σε περίπτωση που απορρίψουμε τη μηδενική (είναι αντίθετες). Συμβολίζεται με H_1 και είναι μία δήλωση για όλες τις περιπτώσεις που δεν καλύπτονται από τη μηδενική υπόθεση.

p-value: Ορίζεται ως η πιθανότητα η στατιστική συνάρτηση ελέγχου να πάρει τιμή ακραία ή περισσότερο ακραία από αυτήν που πήρε κάτω από τη μηδενική υπόθεση. Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση όταν το p-value έχει τιμή μικρότερη ή ίση από αυτήν του **επιπέδου σημαντικότητας α** . Η τιμή p είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί μία τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου το ίδιο ή περισσότερο ακραία από την τιμή που προκύπτει από τα δεδομένα, κάτω από τη μηδενική υπόθεση. Η τιμή p είναι το μικρότερο επίπεδο σημαντικότητας α , στο οποίο μπορεί να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση με βάση την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου που έχει υπολογισθεί.

Κανόνας απόφασης: όταν η τιμή p είναι μικρότερη από α , απορρίπτεται η H_0 .

Το επίπεδο σημαντικότητας α συνήθως, δίνεται στην εκφώνηση του προβλήματος. Αν δε δίνεται, η τιμή που επιλέγεται είναι $\alpha=0,05$ ή $\alpha=5\%$.

Τιμή p	Αποτέλεσμα
$p < 1/100$	Ισχυρά στατιστικά σημαντικό
$1/100 < p < 5/100$	Στατιστικά σημαντικό
$5/100 < p < 10/100$	Οριακά στατιστικά σημαντικό
$p > 10/100$	Μη στατιστικά σημαντικό

Οι H_0 & H_1 είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες. Μόνο μία μπορεί να είναι αληθής, Επίσης εξαντλούν όλες τις περιπτώσεις. Μαζί καλύπτουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις, άρα μία από τις δύο πρέπει να είναι αληθής. Ο **κανόνας απόφασης** ενός στατιστικού ελέγχου υποθέσεων, είναι ένας κανόνας που προσδιορίζει κάτω από ποιες συνθήκες μπορεί να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση. Υπάρχουν δύο δυνατές καταστάσεις:

- Η H_0 είναι αληθής.
- Η H_0 είναι ψευδής.

Υπάρχουν δύο σωστές καταστάσεις:

- Μη απόρριψη μίας αληθούς H_0 .
- Απόρριψη μίας ψευδούς H_0 .

Υπάρχουν δύο λανθασμένες αποφάσεις:

• **Σφάλμα τύπου I.** Απόρριψη μίας αληθούς H_0 . Η πιθανότητα σφάλματος τύπου I συμβολίζεται με α και ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας.

• **Σφάλμα τύπου II.** Μη απόρριψη μίας ψευδούς H_0 . Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II συμβολίζεται με β .

Απόφαση	Πραγματικότητα	
	H_0 αληθής	H_0 ψευδής
Δεν απορρίπτεται η H_0	Σωστή	Σφάλμα τύπου II (β)
Απορρίπτεται η H_0	Σφάλμα τύπου I (α)	Σωστή

Πιθανά αποτελέσματα ενός στατιστικού ελέγχου υποθέσεων

Υπάρχουν δύο είδη ελέγχων υποθέσεων, οι μονόπλευροι (αριστερόπλευροι, δεξιόπλευροι) και οι δίπλευροι έλεγχοι.

Δεξιόπλευρος έλεγχος. $H_0 : \mu \leq 10$, $H_1 : \mu > 10$

Αριστερόπλευρος έλεγχος. $H_0 : \mu > 10$, $H_1 : \mu \leq 10$

Δίπλευρος έλεγχος: $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu \neq 10$

14. Λογισμός των προσαρμογών

Ο λογισμός των προσαρμογών, αναπτύχθηκε από τον Gauss και εφαρμόστηκε για τον υπολογισμό τροχιών κομητών και για τριγωνισμούς, για τους οποίους ο ίδιος είχε εκτελέσει μετρήσεις. Οι μέθοδοι αυτές είναι μέχρι σήμερα απαραίτητες κατά την επεξεργασία αστρονομικών και γεωδαιτικών δεδομένων. Η χρήση αυτών, έχει επεκταθεί σε όλες εκείνες τις περιπτώσεις όπου απαιτείται ακριβής επεξεργασία αποτελεσμάτων παρατηρήσεων ή μετρήσεων. Με τη βοήθεια του λογισμού των προσαρμογών εξάγονται προσεγγιστικές τιμές και πληροφορίες περί της ακρίβειας των σφαλμάτων που περιέχονται στις μετρήσεις.

14.1 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Αν εκτελεστούν ν ανεξάρτητες μετρήσεις $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ για τον προσδιορισμό ν μεγεθών $y_1, y_2, \dots, y_\nu$, ισχύει ο νόμος κατανομής σφαλμάτων του Gauss, για κάθε σφάλμα παρατηρήσεων $\varepsilon_1 = \alpha_1 - y_1, \varepsilon_2 = \alpha_2 - y_2, \dots, \varepsilon_\nu = \alpha_\nu - y_\nu$.

Με $d\varepsilon_k = da_k$ ή $\varphi(a_k - y_k)da_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_k - y_k}{\sigma_k}\right)^2} da_k, \quad k=1, \dots, \nu$ δίνει την

πιθανότητα ότι η μετρούμενη τιμή βρίσκεται στο διαφορικό διάστημα $(a_k, a_k + da_k)$ ή απλούστερα εκφρασμένο, ότι κατά τη μέτρηση του y_k θα προκύψει η τιμή a_k . Κάθε απόκλιση σ_k ($k=1, \dots, \nu$) εξαρτάται από την ακρίβεια της αντίστοιχης μέτρησης. Η πιθανότητα ότι κατά τη μέτρηση του μεγέθους y_1 θα προκύψει η τιμή a_1 και συγχρόνως κατά τη μέτρηση του μεγέθους y_2 η τιμή $a_2, \dots$, κατά τη μέτρηση του y_ν η τιμή a_ν , δίνεται διά του νόμου του πολλαπλασιασμού των πιθανοτήτων ως

$$P = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\nu} \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{\sigma_2} \dots \frac{1}{\sigma_\nu} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1 - y_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2 - y_2}{\sigma_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_\nu - y_\nu}{\sigma_\nu}\right)^2\right]} da_1 da_2 \dots da_\nu$$

14.2 Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων – Συνάρτηση πιθανότητας

Συνήθως τα δύο μεγέθη $S = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{a_k - y_k}{\sigma_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\varepsilon_k}{\sigma_k} \right)^2$ και

$$L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\nu} \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{\sigma_2} \dots \frac{1}{\sigma_\nu} e^{-\frac{1}{2}S}$$

χαρακτηρίζονται ως άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων ή απλά ως άθροισμα τετραγώνων (S) και ως συνάρτηση πιθανότητας L. Η πιθανότητα δίνεται από την :

$$P = L da_1 da_2 \dots da_\nu.$$

14.3 Αρχή των ελαχίστων τετραγώνων του Gauss – Αρχή της μέγιστης πιθανότητας

Όταν εκτελεστούν οι μετρήσεις των $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ οι τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ είναι πλέον γνωστές. Οι πραγματικές τιμές των $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ παραμένουν άγνωστες. Κατά τον Gauss, η καλύτερη εκτίμηση των πραγματικών τιμών y_k είναι εκείνη, η οποία δίνει για τις τιμές a_k τη μέγιστη πιθανότητα. Προσδιορίζονται επομένως οι τιμές των y_k έτσι ώστε η πιθανότητα P να πάρει τη μέγιστη τιμή.

Οι τιμές των $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό χαρακτηρίζονται ως πιθανές τιμές των μετρούμενων μεγεθών. Για να λάβει η πιθανότητα P τη μέγιστη τιμή, η συνάρτηση της πιθανότητας L πρέπει επίσης να λάβει την μέγιστη τιμή. Η αρχή αυτής της εκτίμησης ονομάζεται αρχή της μέγιστης πιθανότητας και οι τιμές που προκύπτουν για τους $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ καλούνται εκτιμήσεις μέγιστης πιθανότητας. Η συνάρτηση πιθανότητας λαμβάνει μέγιστη τιμή για εκείνες τις τιμές των $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ για τις οποίες το άθροισμα S των τετραγώνων των σφαλμάτων ελαχιστοποιείται. Όπου, κατά την εφαρμογή της αρχής της μέγιστης

πιθανότητας οι εκτιμήσεις των μετρούμενων μεγεθών $y_1, y_2, \dots, y_n$ προσδιορίζονται έτσι ώστε το άθροισμα S των τετραγώνων των σφαλμάτων να λάβει την ελάχιστη

τιμή.
$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k - y_k}{\sigma_k} \right)^2 \text{ minimize}$$

Αυτή είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων που αναπτύχθηκε από τον Gauss για εκτίμηση των πραγματικών τιμών από μετρήσεις που περιέχουν σφάλματα. Η μέθοδος αυτή αποτελεί τη βάση του λογισμού των προσαρμογών. Με την εφαρμογή της εξομαλύνονται τα σφάλματα της παρατήρησης. Εκτός τούτου, μέσω αυτής της μεθόδου επιτυγχάνεται η προσαρμογή συναρτήσεων προς τα αποτελέσματα των μετρήσεων.

14.4 Πρακτική εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων

Αν όλα τα μετρούμενα μεγέθη $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι διάφορα μεταξύ τους και δεν υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση που να τα συνδέει, τότε η εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί στη λύση $y_k = a_k$ με $k = 1, 2, \dots, n$. Κάθε μέγεθος εκτιμάται ως ίσο προς την παρατηρηθείσα τιμή του και το άθροισμα S γίνεται ακριβώς ίσο με το μηδέν. Η περίπτωση αυτή σπάνια εμφανίζεται στις εφαρμογές. Κατά κανόνα τα μεγέθη y_k είτε έχουν αυτή την τιμή, η οποία μετρήθηκε επανειλημμένα, είτε έχουν συναρτησιακή σχέση μεταξύ τους. Στην τελευταία περίπτωση, η οποία περιλαμβάνει την πρώτη, υπάρχει κάποιος αριθμός αγνώστων $t_1, t_2, \dots, t_\mu$ ($\mu < n$) μέσω των οποίων παριστάνονται τα μεγέθη $y_1, y_2, \dots, y_n$.

$$y_k = \varphi_k(t_1, t_2, \dots, t_\mu), \text{ π.χ. } y_k = \beta_{k1}t_1 + \beta_{k2}t_2 + \dots + \beta_{k\mu}t_\mu \quad \text{με } k = 1, 2, \dots, n$$

Ως επί το πλείστον η παράσταση υπό μορφή γραμμικής εξίσωσης με γνωστούς συντελεστές $\beta_{k\rho}$ ($\rho = 1, 2, \dots, \mu$) είναι δυνατή. Αν, π.χ. ένα μέγεθος μετρηθεί n φορές, υπάρχει μόνο ένας άγνωστος t και οι εξισώσεις $y_1 = t, y_2 = t, \dots, y_n = t$.

14.5 Μέσο σφάλμα, πιθανό σφάλμα

Μοναδική μέτρηση. Η ακρίβεια μίας μέτρησης δίνεται με την τυπική απόκλιση σ που εμφανίζεται στο νόμο κατανομής των σφαλμάτων. Πολλές φορές, αντί του σ εισάγεται το μέγεθος $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ ως μέτρο ακρίβειας. Από το νόμο της κατανομής των σφαλμάτων του Gauss, βρέθηκε ότι το πραγματικό σφάλμα έχει πιθανότητα 50% να μην υπερβεί το όριο $0,674 \sigma$ και πιθανότητα 68,3% να μην υπερβεί το όριο $1 \cdot \sigma$. Στο λογισμό των προσαρμογών το μέγεθος σ καλείται μέσο σφάλμα και το μέγεθος $0,674 \sigma$ καλείται πιθανό σφάλμα μίας μοναδικής μέτρησης.

Περισσότερες μετρήσεις. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι οι μετρηθείσες τιμές των μεγεθών $y_1, y_2, \dots, y_n$ και $h = \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2}}$ είναι τα μέτρα ακριβείας κάθε μέτρησης, τότε

το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων είναι

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k - y_k}{\sigma_k} \right)^2 = 2 \sum_{k=1}^n [h_k (a_k - y_k)]^2 = 2 \sum_{k=1}^n (h_k \varepsilon_k)^2$$

Βάρος των μετρήσεων. Τα επί μέρους σφάλματα ε_k δεν εισέρχονται ισοδύναμα στο άθροισμα. Το τετράγωνο του σφάλματος μίας ακριβούς μέτρησης με μεγαλύτερο μέτρο ακρίβειας h_k έχει μεγαλύτερο βάρος στο άθροισμα των τετραγώνων S , παρότι το τετράγωνο του σφάλματος μέτρησης, με μικρό μέτρο ακρίβειας. Είναι εύκολη η αντιστοίχιση σε κάθε μέτρηση ενός βάρους, το οποίο μετρά τη σχετική συνεισφορά του σφάλματος της στο άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων. Τα βάρη είναι ανάλογα των τετραγώνων των αντιστοιχών μέτρων ακρίβειας, δηλαδή $\beta_1:\beta_2:\dots:\beta_n=h_1^2:h_2^2:\dots:h_n^2$. Είναι καθαροί αριθμοί και δύνανται να προσδιοριστούν από τα μέτρα ακρίβειας h_k και τη βοήθεια ενός αυθαίρετου παράγοντα αναλογίας. Ο παράγοντας εκλέγεται έτσι ώστε στη μέτρηση βάρους $\beta=1$ να αντιστοιχεί μέτρο ακρίβειας h . Για $k=1, 2, \dots, n$ ισχύει ότι $\beta_k \cdot 1 = h_k^2 : h^2$ ή $h_k^2 = \beta_k h^2$. Γενικά είναι σκόπιμο να επιλέγεται $\beta_k=1$ με $k=1, 2, \dots, n$ για μετρήσεις ίσης ακρίβειας. Επειδή το μέσο σφάλμα σ_k μίας μέτρησης δύναται να υπολογιστεί εκ του μέτρου ακρίβειας h_k από τον τύπο $\sigma_k = \frac{1}{h_k \sqrt{2}}$. Η σχέση $\sigma = \frac{1}{h \sqrt{2}}$ δίνει το μέσο

σφάλμα μέτρησης βάρους $\beta=1$. Από την αντικατάσταση $h_k = h \sqrt{\beta_k}$ προκύπτει η σχέση

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\beta_k}} \text{ με } k=1, 2, \dots, n \text{ δια της οποίας καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός του}$$

μέσου σφάλματος μέτρησης βάρους β_k εκ του μέσου σφάλματος μέτρησης βάρους $\beta=1$. Με την εισαγωγή των βαρών β_k και του μέσου σφάλματος σ σ μίας μέτρησης βάρους $\beta=1$, το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων λαμβάνει την ανωτέρω μορφή.

14.6 Εκτίμηση του μέσου σφάλματος εκ των παρατηρήσεων

Γενικά κατά την εκτέλεση μετρήσεων δεν είναι γνωστό το μέσο σφάλμα σ_k μίας μέτρησης, αλλά μόνο τα βάρη β_k τα αντιστοιχούντα στις μετρηθείσες τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ των μεγεθών $y_1, y_2, \dots, y_n$. Ως εκ τούτου τίθεται το πρόβλημα αν εκτιμηθεί το μέσο σφάλμα κάθε μέτρησης από τις παρατηρηθείσες τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Ήδη η σχέση $\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\beta_k}}$ επιτρέπει τον υπολογισμό του μέσου

σφάλματος σ_k μέτρησης του βάρους β_k εκ του μέσου σφάλματος σ μέτρησης βάρους $\beta=1$. Κατά συνέπεια αρκεί η εκτίμηση του μέσου σφάλματος σ . Η με τον τρόπο αυτό εκτιμηθείσα τιμή συμβολίζεται $\hat{\sigma}$. Αν τα προς μέτρηση μεγέθη $y_1, y_2, \dots, y_n$ εκφράζονται ως συναρτήσεις $\mu < n$ αγνώστων $t_1, t_2, \dots, t_\mu$, τότε οι μέθοδοι της μαθηματικής στατιστικής επιτρέπουν την εκτίμηση του $\hat{\sigma}$. Τα μεγέθη $\hat{y}_k$ με $k=1, 2, \dots, n$ είναι οι εκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητας των προς μέτρηση μεγεθών $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Συνήθως, η τιμή $\hat{\sigma}$ καλείται μέσο σφάλμα ή **σταθερά απόκλιση** της μέτρησης βάρους $\beta=1$ και η τιμή $0,674\hat{\sigma}$ **πιθανό σφάλμα** της ίδιας μέτρησης, παρόλο ότι η τιμή $\hat{\sigma}$ είναι μόνο εκτίμηση του σ , η οποία είναι δυνατό να υπόκειται σε τυχαίες μεταβολές. Οι μεταβολές αυτές, είναι δυνατό να λάβουν μεγάλη έκταση

ιδίως για τα μικρά ν . Ως εκ τούτου, οι από του νόμου Gauss απορρέουσες τιμές για τα φράγματα του αληθούς σφάλματος παρατήρησης είναι μόνο προσεγγιστικές, εφόσον χρησιμοποιείται αντί του σ το $\hat{\sigma}$ για το μέσο σφάλμα. Η μαθηματική στατιστική δείχνει πως είναι δυνατή η εύρεση ακριβών σφαλμάτων του αληθούς σφάλματος παρατήρησης από την εκτιμηθείσα τιμή $\hat{\sigma}$. Προς χαρακτηρισμό της ακρίβειας μέτρησης πρέπει πάντα να αναφέρεται το (εκτιμημένο) μέσο σφάλμα $\hat{\sigma}$ της παρατήρησης βάρους $\beta=1$. Από το $\hat{\sigma}$ υπολογίζεται το μέσο σφάλμα μέτρησης βάρους β_k βάσει του τύπου $\hat{\sigma}_k = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\beta_k}}$.

Το μέσο σφάλμα οποιασδήποτε από τις μετρηθείσες τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ εξαρτωμένου μεγέθους βρίσκεται κατόπιν εφαρμογής του νόμου μεταφοράς των σφαλμάτων του Gauss. Τούτο ισχύει ιδίως για τις εκτιμήσεις μέγιστης πιθανότητας των προς μέτρηση μεγεθών $y_1, y_2, \dots, y_\nu$. Αν τούτο είναι αναγκαίο, προσδιορίζονται εκ του μέσου σφάλματος φράγματα με δεδομένη πιθανότητα να μην τα υπερβεί το αληθές σφάλμα παρατήρησης.

14.7 Προσαρμογή άμεσων μετρήσεων ίσης ακρίβειας

Έστω ότι μέγεθος y μετριέται αμέσως ν φορές με ίση ακρίβεια. Οι μετρηθείσες τιμές είναι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$. Ο μόνος άγνωστος είναι η y ($\mu=1$). Ως εκ τούτου οι εξισώσεις είναι $y_1 = y, y_2 = y, \dots, y_\nu = y$. Εφόσον η ακρίβεια των μετρήσεων είναι ίση και τα βάρη είναι ίσα $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_\nu = 1$. Το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων και η παράγωγός του ως προς το άγνωστο είναι

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{\nu} (a_k - y)^2 \quad \text{και} \quad \frac{dS}{dy} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{\nu} (a_k - y)^2.$$

Αν η παράγωγος τεθεί ίση προς το μηδέν, προκύπτει η κανονική εξίσωση $\sum_{k=1}^{\nu} (a_k - y) = 0$, της οποίας η λύση ως προς y

δίνει την εκτίμηση $\hat{y}$. Η μέση τιμή των επιμέρους μετρήσεων είναι η εκτίμηση του προς μέτρηση μεγέθους.

Εκτίμηση εξ άμεσων μετρήσεων ίσης ακρίβειας	$y = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu}{\nu} = \bar{\alpha}$
---	---

Η προσεγγιστική τιμή του προς μέτρηση μεγέθους y δίνεται από τη μορφή $y \approx \hat{y}(\pm \hat{\sigma}_y) = \hat{y} \pm \hat{\sigma}_y$, όπου το μέσο σφάλμα $\hat{\sigma}_y$ της εκτίμησης $\hat{y}$ υπολογίζεται εκ του μέσου σφάλματος μοναδικής $\hat{\sigma}$ δια του τύπου $\hat{\sigma}_y = \frac{\hat{\sigma}}{\nu}$.

Μέσο σφάλμα μοναδικής μέτρησης εξ ίσης ακριβείας μετρήσεων	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_k - \bar{\alpha})^2}{\nu - 1}}$
--	--

Μέσο σφάλμα της εκτίμησης	$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_k - \bar{\alpha})^2}{\nu(\nu-1)}}$
---------------------------	---

Παράδειγμα 13. Πέντε μαθητές υπολογίζουν το μήκος y κάθε πλευράς ενός κύβου. Από τα αποτελέσματα (βλέπε πίνακα) προκύπτει η εκτίμηση

$$\hat{y} = \frac{1}{5}(12,1 + 12,2 + 12,3 + 12,4 + 12,5) = 12,3 \text{ cm}$$

Αποτελέσματα μέτρησης				
$\alpha_1=12,2 \text{ cm}$	$\alpha_2=12,1 \text{ cm}$	$\alpha_3=12,5 \text{ cm}$	$\alpha_4=12,3 \text{ cm}$	$\alpha_5=12,4 \text{ cm}$

Το μέσο σφάλμα μοναδικής μέτρησης κατά τα γνωστά βρίσκεται ως $\hat{\sigma} = 0,158 \text{ cm}$

Εκ τούτου προκύπτει για το $\hat{y}$ το μέσο σφάλμα $\hat{\sigma}_y = \frac{0,158}{\sqrt{5}} = 0,071 \text{ cm}$. Άρα, η προσεγγιστική τιμή του μήκους της πλευράς είναι $y \approx 12,3 \text{ cm} (\pm 0,071 \text{ cm})$.

14.8 Προσαρμογή άμεσων μετρήσεων άνισης ακρίβειας

Μέγεθος y μετριέται ν φορές. Οι μετρηθείσες τιμές είναι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$. Λόγω άνισης ακρίβειας των μετρήσεων, αντιστοιχούν σε αυτές τα βάρη $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$. Ο μόνος άγνωστος της μέτρησης είναι ο y ($\mu=1$). Άρα, ισχύουν οι σχέσεις $y_1 = y, y_2 = y, \dots, y_\nu = y$. Αν σχηματιστεί το άθροισμα των τετραγώνων, παραγωγισθεί ως προς y και τεθεί η παράγωγος ίση με μηδέν, προκύπτει η κανονική εξίσωση

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k (\alpha_k - y)^2 \Rightarrow \frac{dS}{dy} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k (\alpha_k - y) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k (\alpha_k - y) = 0$$

Από την οποία βρίσκεται η εκτίμηση $\hat{y}$. Ο δια των βαρών β_k ζυγισμένος μέσος όρος επιμέρους μετρήσεων, είναι εκτίμηση του προς μέτρηση μεγέθους.

Εκτίμηση εξ' άμεσων μετρήσεων άνισης ακρίβειας	$\hat{y} = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \alpha_k}{\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k}$
Μέσο σφάλμα μοναδικής μέτρησης βάρους $\beta=1$	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k (\alpha_k - \hat{y})^2}{\nu - 1}}$

Από το μέσο σφάλμα μοναδικής μέτρησης βάρους $\beta = 1$ προκύπτει το μέσο σφάλμα

$\hat{\sigma}_k$ της μοναδικής μέτρησης βάρους β_k , $\hat{\sigma}_k = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\beta_k}}$. Λόγω της

$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha_k} = \frac{\beta_k}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v}$ ο νόμος μεταφοράς των σφαλμάτων δίνει για το μέσο

$$\text{σφάλμα του } \hat{y}, \hat{\sigma}_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^v (\hat{\sigma}_k \beta_k)^2}{\left(\sum_{k=1}^v \beta_k\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^v \hat{\sigma}_k^2 \beta_k}{\left(\sum_{k=1}^v \beta_k\right)^2}}. \text{ Η προσεγγιστική τιμή του προς}$$

μέτρηση μεγέθους δίνεται στη μορφή $y \approx \hat{y}(\pm \hat{\sigma}_{\hat{y}}) = \hat{y} \pm \hat{\sigma}_{\hat{y}}$

Παράδειγμα 14. Μήκος λ μετρήθηκε 5 φορές και κατόπιν 3 με μεγαλύτερη ακρίβεια. Λόγω της μεγαλύτερης ακρίβειας, οι μετρήσεις $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ έχουν βάρος πενταπλάσιο των μετρήσεων της πρώτης ομάδας.

$\alpha_1=12,35 \text{ cm}$	$\alpha_2=12,40 \text{ cm}$	$\alpha_3=12,25 \text{ cm}$	$\alpha_4=12,30 \text{ cm}$
$\alpha_5=12,35 \text{ cm}$	$\alpha_6=12,37 \text{ cm}$	$\alpha_7=12,32 \text{ cm}$	$\alpha_8=12,38 \text{ cm}$

Θέτω $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1$ και $\beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = 5$. Η εκτίμηση $\hat{\lambda}$ του λ βρίσκεται ως $\hat{\lambda} = \frac{1(12,35 + 12,4 + 12,25 + 12,3 + 12,35) + 5(12,37 + 12,32 + 12,34)}{20} = 12,34 \text{ cm}$

Το μέσο σφάλμα $\hat{\sigma}$ βρίσκεται ως $\hat{\sigma} = 0,0535$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1 \cdot (0,01^2 + 0,06^2 + 0,09^2 + 0,04^2 + 0,01^2) + 5 \cdot (0,03^2 + 0,02^2 + 0^2)}{7}} = \sqrt{\frac{0,0200}{7}} \text{ cm}$$

Επειδή $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1$ αυτό είναι συγχρόνως το μέσο σφάλμα των πέντε πρώτων μετρήσεων, $\hat{\sigma}_1 = 0,0535$. Το μέσο σφάλμα μέτρησης της δεύτερης ομάδας βρίσκεται ως $\hat{\sigma}_2 = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{5}} = 0,0239 \text{ cm}$. Το μέσο σφάλμα της εκτίμησης είναι $\hat{\sigma}_k = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{20}} = 0,0120 \text{ cm}$. Μέσω των μετρήσεων υπολογίζεται επομένως ως προσεγγιστική τιμή του ζητούμενου μήκους $\lambda \approx 12,34 \text{ cm} (\pm 0,012 \text{ cm})$.

Αν μέσω των μετρήσεων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ αντί για τα βάρη β_k είναι γνωστές οι αποκλίσεις (μέσα σφάλματα) σ_k . Τα βάρη βρίσκονται από τους λόγους $\beta_1 : \beta_2 : \dots : \beta_v = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \dots : \frac{1}{\sigma_v^2}$ με την εξαίρεση σταθερού παράγοντα. Ο παράγοντας εκλέγεται έτσι ώστε να προκύψουν είτε εύχρηστοι αριθμοί μέσω των $\beta_1, \dots, \beta_v$ είτε το άθροισμα $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v = 1$. Αν ο παράγοντας συμβολιστεί μέσω του λ^2 ώστε να ισχύει $\beta_k = \frac{\lambda^2}{\sigma_k^2}$ το μέσο σφάλμα παρατήρησης του βάρους $\beta=1$ είναι $\sigma = \sqrt{\beta_k} \sigma_k = \lambda$.

Αν υπολογιστεί το $\hat{\sigma}$ από τα ήδη ορισμένα βάρη και τις τιμές που έχουν ήδη παρατηρηθεί, πρέπει να προκύψει τιμή περίπου ίση προς λ , διότι $\hat{\sigma}$ είναι εκτίμηση του σ . Αν προκύψει μεγάλη διαφορά μεταξύ $\hat{\sigma}$ και λ , τότε επιτρέπεται το συμπέρασμα ότι υπάρχουν συστηματικά σφάλματα μέσω ορισμένων μετρήσεων.

14.9 Προσαρμογή παρατηρήσεων υπό συνθήκες

Έστω ότι οι γωνίες α, β, γ τριγώνου προσδιορίζονται από μετρήσεις. Η κάθε γωνία μετρείται κατ' επανάληψη. Οι μετρήσεις της γωνίας α έδωσαν τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v_1}$ (v_1 μετρήσεις), οι μετρήσεις της γωνίας β έδωσαν τις τιμές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{v_2}$ (v_2 μετρήσεις), και οι μετρήσεις της γωνίας γ έδωσαν τις τιμές $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{v_3}$ (v_3 μετρήσεις). Συνολικά πραγματοποιήθηκαν $v = v_1 + v_2 + v_3$ μετρήσεις. Αν χαρακτηριστούν οι πραγματικές τιμές των μετρούμενων μεγεθών μέσω των $y_1, y_2, \dots, y_{v_1}$ (μετρήσεις της α), $y_{v_1+1}, y_{v_1+2}, \dots, y_{v_1+v_2}$ (μετρήσεις της β) και $y_{v_1+v_2+1}, y_{v_1+v_2+2}, \dots, y_{v_1+v_2+v_3}$ (μετρήσεις της γ). Τότε τα μεγέθη αυτά παριστάνονται μέσω των αγνώστων α, β, γ ως εξής.

$$Y_1 = Y_2 = \dots = Y_{v_1} = \alpha$$

$$Y_{v_1+1} = Y_{v_1+2} = \dots = Y_{v_1+v_2} = \beta$$

$$Y_{v_1+v_2+1} = Y_{v_1+v_2+2} = \dots = Y_{v_1+v_2+v_3} = \gamma$$

Το άθροισμα των τετραγώνων είναι:

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^{v_1} (a_k - \alpha)^2 + \sum_{\rho=1}^{v_2} (\beta_\rho - \beta)^2 + \sum_{\mu=1}^{v_3} (\gamma_\mu - \gamma)^2 \right]$$

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δε δύναται να εφαρμοστεί αμέσως, διότι οι άγνωστοι α, β, γ υπόκεινται σε μια συνθήκη. Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου ισούται προς 180 μοίρες. Ως εκ τούτου, οι γωνίες α, β, γ πρέπει να πληρούν την εξίσωση συνθήκης $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = 0$. Η προσαρμογή των μετρήσεων πρέπει να εκτελεσθεί με τον περιορισμό αυτής της συνθήκης. Πρόκειται επομένως για την προσαρμογή παρατηρήσεων υπό συνθήκες. Κατά βάση δεν υπάρχουν 3, αλλά 2 μόνο άγνωστοι, διότι αν βρεθούν οι τιμές των α και β , η τιμή της γ βρίσκεται από την εξίσωση συνθήκης. Για την επεξεργασία αυτής της περίπτωσης υπάρχουν 2 δυνατότητες. Αφενός είναι δυνατόν να εκφραστεί η μια άγνωστη ως συνάρτηση των 2 άλλων από την εξίσωση συνθήκης. Η έκφραση αυτή να χρησιμοποιηθεί στο άθροισμα τετραγώνων S , να εφαρμοστεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για τον προσδιορισμό των 2 αγνώστων και έτσι να υπολογιστεί και η τρίτη. Αφετέρου δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί αμέσως το ελάχιστο του S υπό τη συνθήκη $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Σε αυτό εφαρμόζεται η μέθοδος των πολλαπλασιαστών το Lagrange όπου προσδιορίζονται τα α, β, γ και λ ώστε να λαμβάνει ελάχιστη τιμή η έκφραση:

$$T = S + \lambda f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^{v_1} (a_k - \alpha)^2 + \sum_{\rho=1}^{v_2} (\beta_\rho - \beta)^2 + \sum_{\mu=1}^{v_3} (\gamma_\mu - \gamma)^2 + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \right]$$

Η μεταβλητή λ είναι ο πολλαπλασιασμός του Lagrange ο οποίος αντιστοιχεί στην εξίσωση της συνθήκης. Οι κανονικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{v_1} (\alpha_k - \alpha) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{\mu=1}^{v_3} (\gamma_\mu - \gamma) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{\rho=1}^{v_2} (\beta_\rho - \beta) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = 0.$$

Ως λύσεις των παραπάνω εξισώσεων βρίσκονται:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \bar{\alpha} - \frac{1}{v_1} K, \\ \hat{\beta} &= \bar{\beta} - \frac{1}{v_2} K, \\ \hat{\gamma} &= \bar{\gamma} - \frac{1}{v_3} K, \\ \hat{\lambda} &= \frac{2}{\sigma^2} K,\end{aligned}$$

όπου η διόρθωση K είναι $K = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - 180^\circ}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$

Το μέσο σφάλμα μοναδικής μέτρησης βρίσκεται ως συνήθως:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{v_1} (\alpha_k - \hat{\alpha})^2 + \sum_{\rho=1}^{v_2} (\beta_\rho - \hat{\beta})^2 + \sum_{\mu=1}^{v_3} (\gamma_\mu - \hat{\gamma})^2}{v - 2}$$

Τα μέσα σφάλματα των εκτιμήσεων $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ προκύπτουν από το νόμο μεταφοράς του σφάλματος ως

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} &= \frac{\hat{\sigma}}{v_1} \sqrt{v_1 - \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}}, \\ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} &= \frac{\hat{\sigma}}{v_2} \sqrt{v_2 - \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}}, \\ \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}} &= \frac{\sigma}{v_3} \sqrt{v_3 - \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 15. Οι γωνίες α , β , γ μετρήθηκαν τέσσερις, τρεις και τέσσερις φορές ($v_1 = 4$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$) και υπολογίστηκαν οι μέσες τιμές $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ (βλ. πίνακα). Λόγω του $1/(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}) = 1,2$ και $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - 180^\circ = 3''$ η διόρθωση βρίσκεται ως

$K = 3'' \cdot 1,2 = 3,6''$ και από αυτήν οι εκτιμήσεις

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \bar{\alpha} - \frac{1}{4} K, \\ \hat{\beta} &= \bar{\beta} - \frac{1}{3} K, \\ \hat{\gamma} &= \bar{\gamma} - \frac{1}{4} K.\end{aligned}$$

Γωνία α	$\alpha_k - \hat{\alpha}$	Γωνία β	$\beta_\rho - \hat{\beta}$	Γωνία γ	$\gamma_\mu - \hat{\gamma}$
$\alpha_1 = 62^\circ 17' 14''$	+0,9''	$\beta_1 = 73^\circ 20' 25''$	+1,2''	$\gamma_1 = 44^\circ 22' 25''$	+1,9''
$\alpha_2 = 62^\circ 17' 11''$	-2,1''	$\beta_2 = 73^\circ 20' 27''$	+3,2''	$\gamma_2 = 44^\circ 22' 26''$	+2,9''
$\alpha_3 = 62^\circ 17' 16''$	+2,9''	$\beta_3 = 73^\circ 20' 23''$	-0,8''	$\gamma_3 = 44^\circ 22' 22''$	-1,1''
$\alpha_4 = 62^\circ 17' 15''$	+1,9''			$\gamma_4 = 44^\circ 22' 23''$	-0,1''

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bar{\alpha} = 62^{\circ}17'14'' \\ \hat{\alpha} = 62^{\circ}17'13,1'' \end{array} &
 \begin{array}{c} \bar{\beta} = 73^{\circ}20'25'' \\ \hat{\beta} = 73^{\circ}20'23,8'' \end{array} &
 \begin{array}{c} \bar{\gamma} = 44^{\circ}22'24'' \\ \hat{\gamma} = 44^{\circ}22'23,1'' \end{array}
 \end{array}$$

Το μέσο σφάλμα μίας μέτρησης ανέρχεται ως :

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{(1,9^2 + 0,9^2 + 2,1^2 + 2,9^2) + (1,2^2 + 3,2^2 + 0,8^2) + (1,9^2 + 2,9^2 + 1,1^2 + 0,1^2)}{9}} \\
 &= 2,181''
 \end{aligned}$$

Έτσι προκύπτουν τα μέσα σφάλματα:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} = \hat{\sigma} \cdot 0,418 = 0,912'', \quad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma} \cdot 0,447 = 0,975'', \quad \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}} = \hat{\sigma} \cdot 0,418 = 0,912''.$$

Και τέλος από τις μετρήσεις υπολογίζονται οι προσεγγιστικές τιμές :

$$\alpha \approx 62^{\circ}17'13,1'' (\pm 0,91''), \quad \beta \approx 73^{\circ}20'23,8'' (\pm 0,97''), \quad \gamma \approx 44^{\circ}22'23,1'' (\pm 0,91'').$$

Η ανωτέρω μέθοδος, περιγραφείσα για την περίπτωση της μέτρησης γωνιών τριγώνου, εφαρμόζεται γενικά κατά την προσαρμογή παρατηρήσεων υπό συνθήκες. Αν τα προς μέτρηση μεγέθη $y_1, \dots, y_n$ είναι δυνατό να παρασταθούν δια μ αγνώστων $t_1, \dots, t_m$ και υπάρχουν μεταξύ των αγνώστων, ρ ανεξάρτητες συνθήκες:

$$\varphi_1(t_1, \dots, t_m) = 0, \quad \varphi_2(t_1, \dots, t_m) = 0, \quad \varphi_3(t_1, \dots, t_m) = 0,$$

τότε προσδιορίζονται οι αγνώστοι $t_1, \dots, t_m$ και οι πολλαπλασιαστές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ έτσι ώστε η έκφραση

$$T = S + \lambda_1 \varphi_1(t_1, \dots, t_m) + \dots + \lambda_\rho \varphi_\rho(t_\rho, \dots, t_\rho)$$

να λάβει ελάχιστη τιμή. Ο προσδιορισμός γίνεται διά της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Λόγω των ρ εξισώσεων συνθήκης, προσδιορίζονται όχι πλέον μ αλλά $\mu - \rho$ αγνώστοι εκ των παρατηρήσεων. Ο μειωμένος αριθμός αγνώστων πρέπει να ληφθεί υπόψη, κατά τον προσδιορισμό του μέσου σφάλματος $\sqrt{\sigma}$ της μοναδικής μέτρησης βάρους $\beta=1$.

14.10 Προσαρμογή έμμεσων παρατηρήσεων

Πολλές φορές τα προσδιοριζόμενα μεγέθη δεν προσφέρονται προς άμεση μέτρηση. Π.χ. προς προσδιορισμό του ειδικού βάρους ενός σώματος μετρούνται το βάρος του B κι ο όγκος του V . Το ειδικό βάρος προσδιορίζεται έμμεσα από τις παρατηρήσεις B, V . Στην παρούσα περίπτωση δεν ενδιαφέρει πλέον η προσαρμογή των μετρούμενων μεγεθών $y_1, y_2, \dots, y_n$, αλλά η ανεύρεση των αγνώστων $t_1, \dots, t_m$ διά των οποίων παρίστανται τα $y_1, \dots, y_n$.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων παρέχει και πάλι τις εκτιμήσεις $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_m$ για τους αγνώστους. Εκ του μέσου σφάλματος $\hat{\sigma}$ προκύπτουν τα σφάλματα των εκτιμήσεων $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_m$ με εφαρμογή του νόμου μεταφοράς των σφαλμάτων.

Παράδειγμα 16. Δακτύλιος κατασκευάστηκε από κράμα χρυσού και αργύρου. Προς προσδιορισμό του βάρους σε χρυσό και άργυρο, ο δακτύλιος ζυγίζεται με ζυγό ελατηρίου στον αέρα (βάρος B) και στο νερό (βάρος Y). Αν

g_x το βάρος σε χρυσό,

g_a το βάρος σε άργυρο,

γ_x το ειδικό βάρος του χρυσού,

γ_a το ειδικό βάρος του αργύρου, ισχύουν οι σχέσεις:

$$B = g_x + g_a, \quad Y = \left(1 - \frac{1}{\gamma_x}\right) g_x + \left(1 - \frac{1}{\gamma_a}\right) g_a.$$

Ζύγιση

Στον αέρα B Στο νερό Y

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4,01 \text{ gr} & \beta_1 &= 3,72 \text{ gr} \\ \alpha_2 &= 3,98 \text{ gr} & \beta_2 &= 3,72 \text{ gr} \\ \alpha_3 &= 4,03 \text{ gr} & \beta_3 &= 3,69 \text{ gr} \\ \alpha_4 &= 4,02 \text{ gr} & & \end{aligned}$$

Το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων βρίσκεται ως:

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^4 (\alpha_k - g_x - g_a)^2 + \sum_{\rho=1}^3 \left(\beta_\rho - \frac{\gamma_x - 1}{\gamma_x} g_x - \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} g_a \right)^2 \right]$$

Εκ τούτου έπονται οι κανονικές εξισώσεις

$$\frac{\partial S}{\partial g_x} = -\frac{2}{\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^4 (\alpha_k - g_x - g_a) + \sum_{\rho=1}^3 \left(\beta_\rho - \frac{\gamma_x - 1}{\gamma_x} g_x - \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} g_a \right) \frac{\gamma_x - 1}{\gamma_x} \right] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial g_a} = -\frac{2}{\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^4 (\alpha_k - g_x - g_a) + \sum_{\rho=1}^3 \left(\beta_\rho - \frac{\gamma_x - 1}{\gamma_x} g_x - \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} g_a \right) \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} \right] = 0$$

Εκ τούτων βρίσκονται οι εκτιμήσεις:

$$\hat{g}_x = -\bar{a} \gamma_x \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_x - \gamma_a} + \bar{\beta} \frac{\gamma_x \gamma_a}{\gamma_x - \gamma_a}, \quad \bar{a} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \alpha_k, \quad \bar{B} = \hat{g}_x + \hat{g}_a = \bar{a},$$

$$\hat{g}_a = +\bar{a} \gamma_a \frac{\gamma_x - 1}{\gamma_x - \gamma_a} - \bar{\beta} \frac{\gamma_x \gamma_a}{\gamma_x - \gamma_a},$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{3} \sum_{\rho=1}^3 \beta_\rho, \quad \bar{Y} = \left(1 - \frac{1}{\gamma_x}\right) \hat{g}_x + \left(1 - \frac{1}{\gamma_a}\right) \hat{g}_a = \bar{\beta}$$

Το μέσο σφάλμα μοναδικής μέτρησης είναι:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^4 (a_k - \bar{a})^2 + \sum_{\rho=1}^3 (\beta_\rho - \bar{\beta})^2}{(7 - 2)}}$$

Λόγω των $\frac{\partial \hat{g}_x}{\partial \alpha_k} = -\frac{1}{4} \gamma_x \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_x - \gamma_a}$ και $\frac{\partial \hat{g}_a}{\partial \beta_k} = \frac{1}{3} \gamma_x \frac{\gamma_a \gamma_x}{\gamma_x - \gamma_a}$ ο νόμος μεταφοράς των σφαλμάτων δίνει:

$$\hat{\sigma}_{\hat{g}_x} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{4} \gamma_x^2 \left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_x - \gamma_a} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma_x^2 \gamma_a^2}{(\gamma_x - \gamma_a)^2}},$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{g}_a} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{4} \gamma_a^2 \left(\frac{\gamma_x - 1}{\gamma_x - \gamma_a} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma_x^2 \gamma_a^2}{(\gamma_x - \gamma_a)^2}}$$

Με αντικατάσταση των $\gamma_x = 19,3 \text{ gr/cm}^3$ και $\gamma_a = 10,5 \text{ gr/cm}^3$ βρίσκονται :

$$\bar{a} = 4,01 \text{ gr}, \quad \bar{\beta} = 3,71 \text{ gr}, \quad \hat{g}_x = 1,89 \text{ gr}, \quad \hat{g}_\alpha = 2,12 \text{ gr},$$

$$\hat{\sigma} = 0,02 \text{ gr}, \quad \hat{\sigma}_{\hat{g}_x} = 16,89 \hat{\sigma} = 0,34 \text{ gr}, \quad \hat{\sigma}_{\hat{g}_\alpha} = 17,20 \hat{\sigma} = 0,34 \text{ gr}.$$

Άρα, προκύπτουν τα βάρη $g_x \approx 1,89 \text{ gr } (\pm 0,34 \text{ gr})$ και $g_\alpha \approx 2,12 \text{ gr } (\pm 0,34 \text{ gr})$

15. Βιβλιογραφία

- Βρούλος, Α. & Καρναβάς, Σ. (2012). «Φυσική», Αθήνα, εκδόσεις ιδρύματος Ευγενίδου.
- Λάλου, Π. (2021). «Μαθηματικά για πλοιάρχους», Αθήνα, εκδόσεις ιδρύματος Ευγενίδου.
- “Kleine enzyklopadie methematik”, (1971), Veb verlag enzyklopadie Leipzig
«Εγκυκλοπαίδεια μαθηματικών», (1973). Αθήνα, εκδόσεις Παγουλάτου
- Taylor, J.R., “An introduction to error analysis”, A series of books in physics, Eugene, D., editor University sciences books, Mill Valley, California.