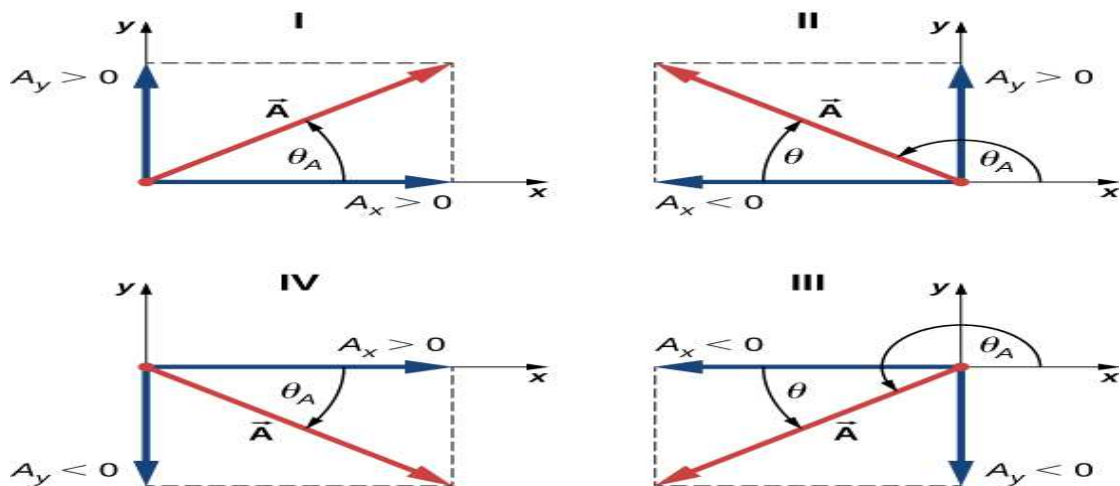




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Εισαγωγή στον διανυσματικό λογισμό

Σπουδαστές: **Νικολάου Βασίλειος (AM 8917)**
Κολοκάθης Κωνσταντίνος (AM 9053)

Επιβλέπων: **Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.),**
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2023–2024**

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.12.2023
Ημερομηνία κατάθεσης:06.2024
Ημερομηνία εξέτασης:06.2024

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Δέκα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Δρ. Αναστασόπουλος Γεώργιος Μηχανολόγος Μηχανικός Επίκουρος Καθηγητής		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά.....	3
Περίληψη.....	3
Εισαγωγή.....	4
1. Φυσική.....	4
2. Μηχανική.....	4
3. Γεωγραφία & πλοήγηση.....	4
4. Υπολογιστική γραφική.....	4
5. Ρομποτική.....	4
6. Οικονομικά & χρηματοοικονομική.....	4
7. Βιολογία & ιατρική.....	5
8. Αθλητισμός.....	5
1. Το εφαρμοστικό διάνυσμα.....	5
1.1 Θεώρημα.....	6
2. Το ελεύθερο διάνυσμα.....	7
2.1 Ισότητα στο $\mathbb{E}$	7
2.2 Γραφική παράσταση ελεύθερου διανύσματος.....	8
2.3 Πρόσθεση διανυσμάτων.....	8
2.3.1 Ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων.....	9
2.3.2 Παρατηρήσεις.....	10
2.3.3 Η τριγωνική ανισότητα.....	11
2.4 Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα.....	12
2.4.1 Παρατηρήσεις.....	12
2.4.2 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα.....	14
2.5 Βασικές προτάσεις.....	16
2.6 Μέθοδοι για την λύση ασκήσεων.....	18
2.6.1 Μέθοδος 1.....	18
2.6.2 Μέθοδος 2.....	18
2.6.3 Μέθοδος 3.....	20
2.6.4 Μέθοδος 4.....	20
2.6.5 Μέθοδος 5.....	21
2.6.2 Μέθοδος 6.....	22
2.6.7 Μέθοδος 7.....	23
2.6.8 Μέθοδος 8.....	23
2.6.9 Μέθοδος 9.....	25
2.7 Παραδείγματα με συνδυασμό όλων των μεθόδων.....	27
Βιβλιογραφία.....	34

Λέξεις κλειδιά

Διανύσματα (εφαρμοστό, ελεύθερο, μηδενικό, αντίθετο), πρόσθεση & αφαίρεση διανυσμάτων, τριγωνική ανισότητα, ιδιότητες διανυσμάτων (ανακλαστική, αντιμεταθετική, προσεταιριστική, μεταβατική 1^η & 2^η επιμεριστική), ιδιότητες βαρύκεντρου G των τριγώνων, διανυσματική ακτίνα σημείου, αρχή διανυσματικών ακτίνων (ή σημείο αναφοράς), σχέση του Chasles, εσωτερική πράξη.

Περίληψη

Τα διανύσματα αποτελούν απαραίτητο εργαλείο στη μελέτη των μαθηματικών και της φυσικής. Η χρήση του διανυσματικού συμβολισμού απλοποιεί σημαντικά τη μαθηματική διατύπωση των φυσικών νόμων και θεωρημάτων. Επιπλέον τα διανύσματα

βοηθούν στην κατανόηση και περαιτέρω διερεύνηση των συμμετριών που ενδεχομένως να σχετίζονται με νέους νόμους.

Εισαγωγή

Τα διανύσματα έχουν εφαρμογές σε διάφορους τομείς της επιστήμης, της τεχνολογίας, και της καθημερινής ζωής. Εδώ είναι μερικές από τις κύριες εφαρμογές τους:

1. Φυσική

Κινηματική & δυναμική: Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την ταχύτητα, την επιτάχυνση και τη δύναμη. Για παράδειγμα, η δύναμη F και η επιτάχυνση a συνδέονται μέσω του νόμου του Νεύτωνα $F=ma$, όπου m είναι η μάζα του σώματος.

Ηλεκτρομαγνητισμός: Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία περιγράφονται με διανύσματα. Ο νόμος του Κουλόμπ για την ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δύο φορτίων είναι διανυσματικός νόμος.

2. Μηχανική

Στατική & ανάλυση δομών: Στη μηχανική, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των δυνάμεων και των ροπών σε κατασκευές, βοηθώντας στον υπολογισμό των φορτίων και της αντοχής των υλικών.

Κινηματική μηχανών: Η ανάλυση της κίνησης των μηχανισμών, όπως οι ρομποτικοί βραχίονες, γίνεται χρησιμοποιώντας διανύσματα για να περιγραφούν οι θέσεις, οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των κινούμενων μερών.

3. Γεωγραφία & πλοήγηση

Χαρτογραφία: Τα γεωγραφικά συστήματα πληροφοριών (GIS) χρησιμοποιούν διανύσματα για να αποθηκεύουν δεδομένα σχετικά με την τοποθεσία, το σχήμα και τα χαρακτηριστικά γεωγραφικών αντικειμένων.

Ναυσιπλοΐα & αεροναυτιλία: Οι πορείες πλοίων και αεροπλάνων καθορίζονται και παρακολουθούνται με τη βοήθεια διανυσμάτων για να προσδιοριστεί η θέση, η ταχύτητα και η κατεύθυνση.

4. Υπολογιστική γραφική

Απεικόνιση 3D: Στα βιντεοπαιχνίδια και τις τρισδιάστατες γραφικές εφαρμογές, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις θέσεις, τις κατευθύνσεις και τις κινήσεις των αντικειμένων στον τρισδιάστατο χώρο.

Φωτισμός & σκιές: Η κατεύθυνση του φωτός και η δημιουργία σκιών υπολογίζονται χρησιμοποιώντας διανύσματα για να αποδοθεί ρεαλιστικά η εικόνα.

5. Ρομποτική

Κίνηση ρομπότ: Η πλοήγηση και ο έλεγχος των ρομπότ γίνονται με τη χρήση διανυσμάτων για να προσδιοριστεί η θέση, η ταχύτητα και η κατεύθυνση της κίνησης.

Ανίχνευση & αποφυγή εμποδίων: Τα ρομπότ χρησιμοποιούν διανυσματικές αναλύσεις για να ανιχνεύσουν και να αποφύγουν εμποδία στον χώρο τους.

6. Οικονομικά & χρηματοοικονομική

Χαρτοφυλάκιο επενδύσεων: Στη θεωρία χαρτοφυλακίου, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις αποδόσεις και τους κινδύνους των επενδύσεων.

Ανάλυση δεδομένων: Τα διανύσματα χρησιμεύουν στην ανάλυση πολυδιάστατων δεδομένων και την εφαρμογή τεχνικών μηχανικής μάθησης.

7. Βιολογία & ιατρική

Μοριακή βιολογία: Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κίνησης μορίων, όπως πρωτεϊνών και νουκλεϊκών οξέων, στον χώρο.

Ιατρική απεικόνιση: Οι τεχνικές όπως η μαγνητική τομογραφία (MRI) και η αξονική τομογραφία (CT) χρησιμοποιούν διανυσματική ανάλυση για την απεικόνιση του εσωτερικού του ανθρώπινου σώματος.

8. Αθλητισμός

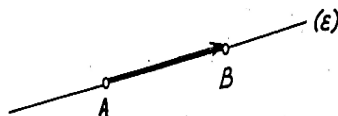
Ανάλυση κίνησης: Στα αθλήματα, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να αναλύσουν και να βελτιστοποιήσουν τις κινήσεις των αθλητών, όπως στη ρίψη δίσκου ή στο σκι.

Πλοήγηση: Σε αθλήματα όπως η ιστιοπλοΐα και η αεροπορία, η κατεύθυνση και η ταχύτητα του ανέμου ή του νερού αναλύονται χρησιμοποιώντας διανύσματα.

1. Το εφαρμοστό διάνυσμα

Αν θεωρήσω τα σημεία A , B , του χώρου με $A \neq B$, ορίζεται το γεωμετρικό τμήμα $AB \equiv BA$. Αν επιπλέον θεωρήσω τα άκρα του τμήματος AB **διατεταγμένα** δηλαδή το A πρώτο και το B δεύτερο, τότε αυτό μπορεί να δηλωθεί από το **διατεταγμένο ζεύγος** (A, B) .

- Ορίζω ως **εφαρμοστό διάνυσμα με αρχή A και πέρας B** , το τμήμα που καθορίζει το διατεταγμένο ζεύγος (A, B) και το σημειώνω με το ίδιο σύμβολο. Σχηματικά, το εφαρμοστό διάνυσμα (A, B) παρίσταται από το ευθύγραμμο τμήμα AB με μία αιχμή βέλους από το πέρας του B .



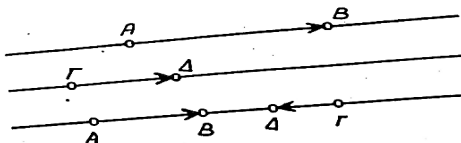
- Ορίζω ως **φορέα του εφαρμοστού διανύσματος (A, B) με $A \neq B$** την ευθεία (ε) που ορίζουν τα A, B .

- Ορίζω ως **διεύθυνση του εφαρμοστού διανύσματος (A, B) με $A \neq B$** τη διεύθυνση στην οποία ανήκει ο φορέας του (ε) .

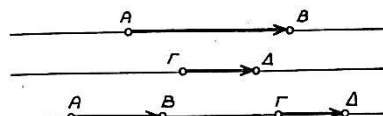
- Ορίζω ως **φορά του εφαρμοστού διανύσματος (A, B) με $A \neq B$** τη φορά της ημιευθείας του φορέας του, με αρχή το A και εσωτερικό σημείο το B .

- Ορίζω ως **μέτρο του εφαρμοστού διανύσματος (A, B) με $A \neq B$** και γράφω $d(A, B)$, τον θετικό πραγματικό αριθμό που εκφράζει το μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος AB , δηλαδή $d(A, B) = (AB)$. Είναι φανερό ότι το $d(A, B)$ εξαρτάται από το μοναδιαίο τμήμα που θεωρήθηκε, προκειμένου να μετρηθεί το ευθύγραμμο τμήμα AB .

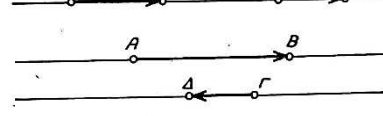
- Δύο εφαρμοστά διανύσματα (A, B) , (Γ, Δ) ορίζονται ως **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια διεύθυνση.



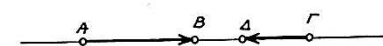
- Δύο εφαρμοστά διανύσματα (A, B) , (Γ, Δ) ορίζονται ως **ομόρροπα** αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια φορά (προϋποτίθεται ότι τα διανύσματα είναι παράλληλα).



- Δύο εφαρμοστά διανύσματα (A, B) , (Γ, Δ) ορίζονται ως **αντίρροπα** αν και μόνο αν ανήκουν σε αντίθετες φορές (προϋποτίθεται ότι τα διανύσματα είναι παράλληλα).



- Αν τα σημεία A, B ταυτίζονται, το εφαρμοστό διάνυσμα (A, A) ορίζεται ως **μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα**. Συνεπώς, κάθε σημείο A



του χώρου είναι δυνατό να θεωρείται ως μηδενικό εφαρμοστικό διάνυσμα (A, A) . Είναι φανερό ότι η διεύθυνση και η φορά του μηδενικού εφαρμοστού διανύσματος (A, A) δεν καθορίζονται μονοσήμαντα. Στα επόμενα θα θεωρώ ότι το μηδενικό εφαρμοστικό διάνυσμα (A, A) είναι παράλληλο και επιπλέον ομόρροπο, προς οποιοδήποτε άλλο εφαρμοστικό διάνυσμα (B, Γ) .

- Ως μέτρο του (A, A) ορίζω το 0, δηλαδή $d(A, A) = 0$

Σημείωση Ένα μηδενικό εφαρμοστικό διάνυσμα καθορίζεται και από: τον φορέα, την αρχή, τη φορά και το μέτρο του.

Στο σύνολο $\mathcal{D}$ των εφαρμοστών διανύσματα του χώρου, ορίζω τη σχέση ' $\sim$ ' ως εξής:

$$(A, B) \sim (\Gamma, \Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \text{ Τα } (A, B) \text{ \& } (\Gamma, \Delta) \text{ είναι συγγραμικά} \\ 2) \text{ Τα } (A, B) \text{ \& } (\Gamma, \Delta) \text{ είναι ομόρροπα} \\ 3) d(A, B) = d(\Gamma, \Delta) \Leftrightarrow (AB) = (\Gamma\Delta) \end{cases}$$

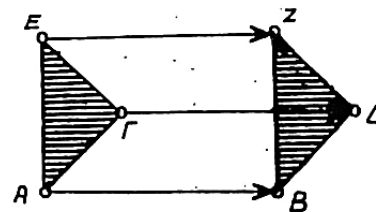
Παρατηρώ ότι η σχέση ' $\sim$ ' που ορίστηκε με αυτόν τον τρόπο είναι:

Ανακλαστική, αφού $\forall (A, B) \in \mathcal{D}$ είναι: $(A, B) \sim (A, B)$

Συμμετρική, αφού με $(A, B) \in \mathcal{D}$ & $(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{D}$ είναι $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta) \Rightarrow (\Gamma, \Delta) \sim (A, B)$

Μεταβατική, αφού με $(A, B) \in \mathcal{D}$ & $(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{D}$ & $(E, Z) \in \mathcal{D}$ είναι: $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta) \text{ \& } (\Gamma, \Delta) \sim (E, Z) \Rightarrow (A, B) \sim (E, Z)$.

Η μεταβατικότητα στη φορά, συμπεραίνεται από την παρατήρηση ότι τα επίπεδα (AGE) και $(B\Delta Z)$ είναι παράλληλα. Δέχομαι επιπλέον, ότι τα μηδενικά εφαρμοστικά διανύσματα, είναι μεταξύ τους ισοδύναμα. Άρα, η σχέση ' $\sim$ ' είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{D}$.



1.1 Θεώρημα

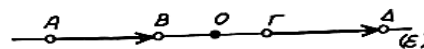
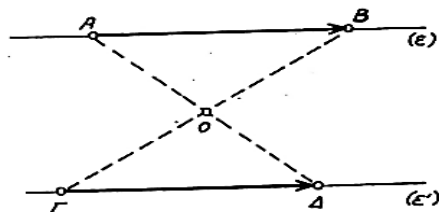
Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) τα (A, B) & (Γ, Δ) είναι ισοδύναμα

β) τα τμήματα $A\Delta$ & ΓB έχουν κοινό μέσο

Απόδειξη από $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$

- Αν τα (A, B) , (Γ, Δ) δεν έχουν τον ίδιο φορέα επειδή $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta)$ είναι $(\varepsilon) \parallel (\varepsilon')$ και $(A, B) = (\Gamma, \Delta)$ οπότε $AB = \Gamma\Delta$ άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow$ τα $A\Delta$, ΓB έχουν κοινό μέσο το O .



- Αν τα (A, B) & (Γ, Δ) έχουν τον ίδιο φορέα επειδή $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta)$ έχω ότι $(A, B) = (\Gamma, \Delta) \Rightarrow AB = \Gamma\Delta$. Αν



O είναι το μέσο του ΓB τότε $AO = AB + BO = \Gamma\Delta + O\Gamma = O\Delta$ δηλαδή το O είναι το μέσο του $A\Delta$ ή (κάτω σχήμα) $AO = AB - OB = \Gamma\Delta - \Gamma O = O\Delta$ δηλαδή το O είναι και πάλι το μέσο του $A\Delta$.

Απόδειξη από $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$

- Αν τα (A, B) , (Γ, Δ) δεν έχουν τον ίδιο φορέα, επειδή τα $A\Delta$, ΓB έχουν κοινό μέσο δηλαδή διχοτομούνται, το $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα τα (A, B) , (Γ, Δ) είναι συγγραμικά, ομόρροπα και (αφού $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow (A, B) = (\Gamma, \Delta)$) έχουν και ίσα μέτρα, άρα $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta)$.

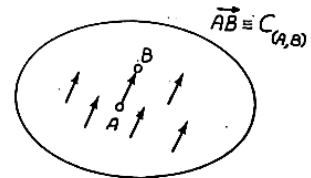
- Αν τα (A, B) & (Γ, Δ) έχουν τον ίδιο φορέα και O είναι το κοινό μέσο των $A\Delta, \Gamma B$ έχω $OA=O\Delta$ και $OB=O\Gamma$. Με πρόσθεση ή αφαίρεση, βρίσκω $AB=\Gamma\Delta$ οπότε $(AB) = (\Gamma\Delta)$ άρα $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta)$.

Παρατήρηση $\text{An } (A, B) \sim (\Gamma, \Delta) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A, \Gamma) \sim (B, \Delta) \text{ Εναλλαγή μέσων γραμμμάτων} \\ (\Delta, B) \sim (\Gamma, A) \text{ Εναλλαγή άκρων γραμμμάτων} \end{array} \right\}$

2. Το ελεύθερο διάνυσμα

Η σχέση ' $\sim$ ' στο σύνολο $\mathcal{D}$ των εφαρμοστών διανυσμάτων είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Διαμερίζει συνεπώς το $\mathcal{D}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας.

- Ορίζω ως **ελεύθερο διάνυσμα** $\overrightarrow{AB}$ κάθε κλάσμα ισοδυναμίας $C_{(AB)}$ του εφαρμοστού διανύσματος (A, B) . Είναι δηλαδή $\overrightarrow{AB} \equiv C_{(A, B)}$.



- Ειδικά η κλάση των μηδενικών εφαρμοστών διανυσμάτων λέγεται **μηδενικό ελεύθερο** διάνυσμα και σημειώνεται με $\vec{0}$. Το σύνολο $\sim$ -πηλίκο $\mathcal{D} / \sim$ είναι το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου και θα το συμβολίζω με $\mathcal{E}$

Στα επόμενα, με τον όρο «διάνυσμα» θα εννοώ το «ελεύθερο διάνυσμα» και εφ' όσον δεν καθορίζεται ένας συγκεκριμένος αντιπρόσωπος του, θα το συμβολίζω με ένα μικρό γράμμα επιγραμμισμένο με βέλος π.χ. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \dots$ Είναι δηλαδή $\mathcal{E} = \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \dots\}$

- Ορίζω ως **διεύθυνση του ελεύθερου διανύσματος** $\overrightarrow{AB}$, τη διεύθυνση ενός αντιπροσώπου της κλάσης $C_{(A, B)}$.

- Ορίζω **φορά του ελεύθερου διανύσματος** $\overrightarrow{AB}$, τη φορά ενός αντιπροσώπου της κλάσης $C_{(A, B)}$.

- Ορίζω ως **μέτρο του ελεύθερου διανύσματος** $\overrightarrow{AB}$, το μέτρο ενός αντιπροσώπου της κλάσης $C_{(AB)}$. Ειδικά, το μέτρο του AB θα το συμβολίζω με $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$.

- Το $\vec{E}_0$ ορίζεται ως **μοναδιαίο διάνυσμα** της διεύθυνσης στην οποία, ανήκει, αν και μόνο αν έχει φορά θετική και $\|\vec{E}_0\| = 1$.

- Ορίζω ως **συγγραμμικά** ή **παράλληλα** τα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και γράφω $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, αν και μόνο αν, οι αντιπρόσωποι τους δηλαδή τα εφαρμοστά διανύσματα $(A, B), (\Gamma, \Delta)$, είναι συγγραμμικά εφαρμοστά διανύσματα.

- Ορίζω ως **ομόρροπα** τα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και γράφω $\overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, αν και μόνο αν, οι αντιπρόσωποι τους δηλαδή τα εφαρμοστά διανύσματα $(A, B), (\Gamma, \Delta)$, είναι ομόρροπα εφαρμοστά διανύσματα.

- Ορίζω ως **αντίρροπα** τα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και γράφω $\overrightarrow{AB} \nearrow \swarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, αν και μόνο αν, οι αντιπρόσωποι τους δηλαδή τα εφαρμοστά διανύσματα $(A, B), (\Gamma, \Delta)$, είναι αντίρροπα εφαρμοστά διανύσματα.

- Το $\vec{0}$ δεν έχει συγκεκριμένη διεύθυνση και φορά, Επιπλέον $\|\vec{0}\| = 0$.

2.1 Ισότητα στο $\mathcal{E}$

Θεωρώ τα στοιχεία- ελεύθερα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ & $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ του $\mathcal{E}$. Επειδή $\overrightarrow{AB} = C_{(AB)}$ και

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = C_{(\Gamma, \Delta)} \text{ έχω } \boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow (A, B) \sim (\Gamma, \Delta)}$$

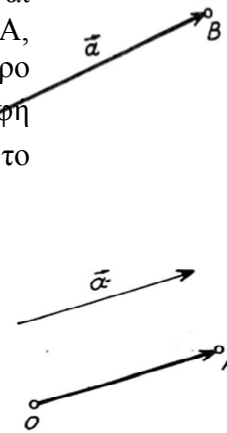
Η διανυσματική ισότητα (ουσιαστικά ισότητα συνόλων) είναι:

- **Ανακλαστική**, αφού $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ είναι $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$
- **Συμμετρική**, αφού με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$ είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$
- **Μεταβατική**, αφού με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$ είναι $(\vec{\alpha} = \vec{\beta} \ \& \ \vec{\beta} = \vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$

2.2 Γραφική παράσταση ελεύθερου διανύσματος

• Θεωρώ το διάνυσμα $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ το οποίο καθορίζεται απόλυτα αν είναι γνωστός ένας αντιπρόσωπος του, δηλαδή το εφαρμοστό διάνυσμα (A, B). Συνεπώς, προκειμένου να παραστήσω γραφικά το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, θα παριστάνω γραφικά έναν αντιπρόσωπο του. Η γραφή $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$, θα δηλώνει ότι το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει αντιπρόσωπο το (A, B).

• Ας θεωρήσω τώρα το σταθερό σημείο O του χώρου E_3 και το τυχαίο $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}$. Υπάρχει τότε, ένας και μόνο ένας, αντιπρόσωπος (O, A) του $\vec{\alpha}$. Παρατηρώ ότι, με την θεώρηση του O και στη συνέχεια του (O, A), σε κάθε $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ αντιστοιχεί ένα και μόνο σημείο A του χώρου E_3 , το πέρας του αντιπροσώπου του $\vec{\alpha}$, που έχει αρχή το O.



Αντίστροφα: Στο τυχαίο σημείο A του χώρου E_3 αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα εφαρμοστό διάνυσμα (O, A) που είναι αντιπρόσωπος ενός και μόνο ελεύθερου διανύσματος $\vec{\alpha}$ του $\mathcal{E}$.

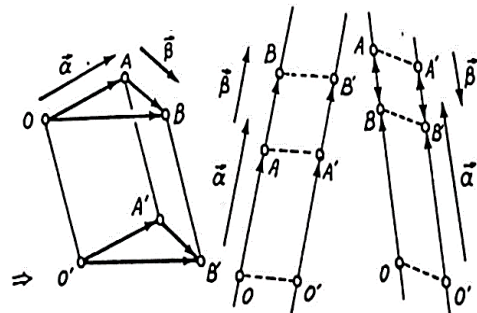
Ορίστηκε έτσι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση φ_0 του $\mathcal{E}$ επί του E_3 , η οποία στο $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ αντιστοιχίζει το σημείο $A \in E_3$ ώστε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Μπορώ συνεπώς να γράψω $\mathcal{E} = \{\overrightarrow{OM} \text{ με } M \in E_3\}$. Το σταθερό σημείο O με βάση το οποίο έγινε η απεικόνιση φ_0 λέγεται **αρχή των διανυσματικών ακτινών** ή **σημείο αναφοράς**. Το εφαρμοστό διάνυσμα (O, A) λέγεται **διανυσματική ακτίνα** του σημείου A και συμβολίζεται για συντομία με $\vec{r}_A$.

2.3 Πρόσθεση διανυσμάτων

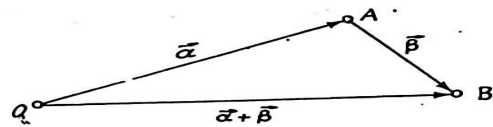
Θεωρώ το $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ και το τυχαίο σημείο O του χώρου E_3 . Θεωρώ τα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Αν O' είναι ένα άλλο σημείο του χώρου E_3 και $\overrightarrow{O'A'} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{O'B'} = \vec{\beta}$ παρατηρώ ότι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = \overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta} = \overrightarrow{O'B'}$ οπότε είναι

$$\left. \begin{array}{l} 1) (O, A) \sim (O', A') \Rightarrow (O, O') \sim (A, A') \\ 2) (A, B) \sim (A', B') \Rightarrow (A, A') \sim (B, B') \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(O, O') \sim (B, B') \Rightarrow (O, B) \sim (O', B') \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$$



Άρα, τα $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O'B'}$ είναι αντιπρόσωποι του ίδιου διανύσματος $\vec{\gamma}$, που είναι ανεξάρτητο από την εκλογή του O και προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία, το συμβολίζω με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και το ονομάζω **άθροισμα** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Ορίστηκε έτσι στο $\mathcal{E}$ μία πράξη, που ονομάζω πρόσθεση $''+''$, σύμφωνα με την οποία σε κάθε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ αντιστοιχίζεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ του $\mathcal{E}$ και του οποίου ένας αντιπρόσωπος είναι το $\overrightarrow{OB}$ όπου $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ είναι αντιπρόσωποι των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίστοιχα.



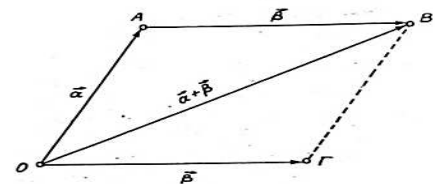
Παρατηρήσεις

- Η πράξη της πρόσθεσης είναι **εσωτερική** πράξη στο σύνολο $\mathcal{E}$.
- Για τυχαία σημεία A, B, Γ του χώρου E_3 ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ (σχέση του Chasles).
- Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{AB} = \vec{\beta} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

Αλλά αν είναι και $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\beta}$ έχω

$\overrightarrow{OB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}$. Άρα, το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ορίζεται και από το διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ όπου OB είναι

η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με πλευρές τους αντιπροσώπους $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}$ των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίστοιχα.



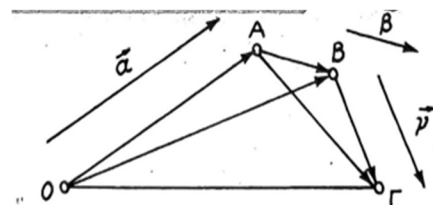
2.3.1 Ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων

- $\forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \in \mathcal{E}$ ισχύει $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική)

Απόδειξη: Θεωρώ ως σημείο αναφοράς

το O και τα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{AB} = \vec{\beta}, \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma}$. Είναι

$$\begin{aligned} \text{τότε } (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \\ \overrightarrow{O\Gamma} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \end{aligned}$$



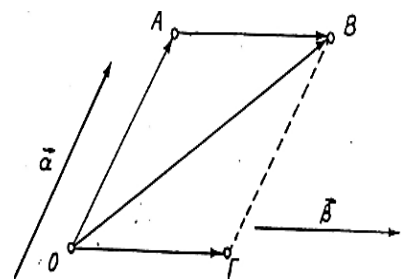
- $\forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική)

Απόδειξη: Θεωρώ ως σημείο αναφοράς το O και $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{AB} = \vec{\beta}, \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\beta}$. Επειδή

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow (A, B) \sim (O, \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$(\Gamma, B) \sim (O, A) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{OA} \quad \text{έχω} \quad \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{\alpha},$$

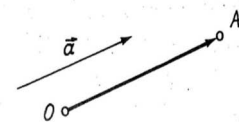
$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}.$$



- $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E} \exists$ το $\vec{0} \in \mathcal{E}$ ώστε $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου)

Απόδειξη: Θεωρώ ως σημείο αναφοράς το O και τα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$.

Είναι τότε $\vec{\alpha} + \vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$.



- $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E} \exists \vec{\alpha}' \in \mathcal{E} \text{ ώστε } \vec{\alpha} + \vec{\alpha}' = \vec{0}$ (ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου)

Απόδειξη: Θεωρώ ως σημείο αναφοράς το O και τα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$.

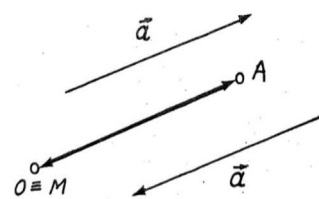
Θα δείξω ότι υπάρχει σημείο M τέτοιο, ώστε αν $\vec{AM} = \vec{\alpha}'$ να

$$\vec{\alpha} + \vec{\alpha}' = \vec{0}$$

Έχω

$$\vec{\alpha} + \vec{\alpha}' = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow M \text{ ταυτίζεται με το } O.$$

Αρα, υπάρχει στο $\mathcal{E}$ το $\vec{\alpha}'$, με $\vec{\alpha}' = \vec{0}$.



2.3.2 Παρατηρήσεις

- Για κάθε $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ το $\vec{\alpha}'$ είναι μοναδικό.
- Το $\vec{\alpha}'$ συνήθως λέγεται αντίθετο του $\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται με $-\vec{\alpha}$. Αρα είναι $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$ και $-\vec{0} = \vec{0}$.
- Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα δηλαδή $\|-\vec{\alpha}\| = \|\vec{\alpha}\|$.
- Η δομή $(\mathcal{E}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.
- Ισχύει $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \in \mathcal{E}^3$.

Απόδειξη: Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ από το μονοσήμαντο του αθροίσματος δύο

διανυσμάτων. Αν τώρα $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) = (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} + [\vec{\gamma} + (-\vec{\gamma})] = \vec{\beta} + [\vec{\gamma} + (-\vec{\gamma})] \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\beta} + \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

- Ισχύει: $(-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta}) = -(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \quad \forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$

Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned} [(-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})] + (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &= [(-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})] + (\vec{\beta} + \vec{\alpha}) = [[(-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})] + \vec{\beta}] + \vec{\alpha} = \\ &= [(-\vec{\alpha}) + [(-\vec{\beta}) + \vec{\beta}]] + \vec{\alpha} = [(-\vec{\alpha}) + \vec{0}] + \vec{\alpha} = (-\vec{\alpha}) + \vec{\alpha} = \vec{0} \quad \text{άρα, τα διανύσματα} \\ &(-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta}) \text{ και } (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \text{ είναι αντίθετα, οπότε } (-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta}) = -(\vec{\alpha} + \vec{\beta}). \end{aligned}$$

- $\forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$ η εξίσωση $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\beta}$ έχει μοναδική λύση στο $\mathcal{E}$.

Απόδειξη: Η εξίσωση $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\beta}$ έχει ως λύση το διάνυσμα $(-\vec{\alpha}) + \vec{\beta}$ του $\mathcal{E}$.

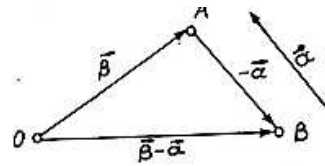
$$\text{Πράγματι } \vec{\alpha} + [(-\vec{\alpha}) + \vec{\beta}] = \vec{\beta} \Leftrightarrow [\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha})] + \vec{\beta} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{\beta} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\beta}.$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική διότι αν υποθέσω ότι $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ είναι δύο λύσεις της

$$\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\beta} \quad \text{θα έχω} \quad \begin{cases} \vec{\alpha} + \vec{x}_1 = \vec{\beta} \\ \vec{\alpha} + \vec{x}_2 = \vec{\beta} \end{cases} \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{x}_1 = \vec{\alpha} + \vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$$

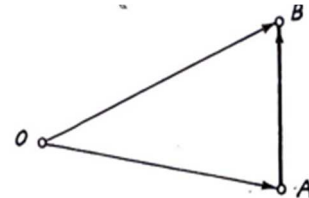
Αρα, η εξίσωση $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\beta}$ έχει μοναδική λύση στο $\mathcal{E}$, την $\vec{x} = (-\vec{\alpha}) + \vec{\beta} = \vec{\beta} + (-\vec{\alpha})$. Τη λύση αυτή (για απλοποίηση στη γραφή) την γράφω $\vec{x} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ και την ονομάζω διαφορά του $\vec{\alpha}$ από το $\vec{\beta}$. Την πράξη με την οποία, στο τυχαίο $(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) \in \mathcal{E}^2$ αντιστοιχίζω τη διαφορά $\vec{\beta} - \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ ονομάζω **αφαίρεση** στο $\mathcal{E}$.

- Επειδή είναι $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\beta} + (-\vec{\alpha}) = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ συμπεραίνω ότι προκειμένου να σχηματίσω τη διαφορά $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, αρκεί στο $\vec{\beta}$ να προσθέσω το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\alpha}$.

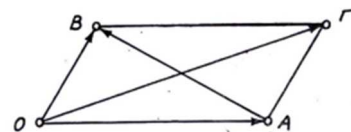


- Αν το O είναι τυχαίο σημείο του χώρου E_3 και AB ένα τυχαίο διάνυσμα έχω $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Αν το O θεωρηθεί ως σημείο αναφοράς διανυσματικών ακτινών, ή ως αρχή των διανυσματικών ακτινών, τούτο διατυπώνεται ως εξής:

Κάθε διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

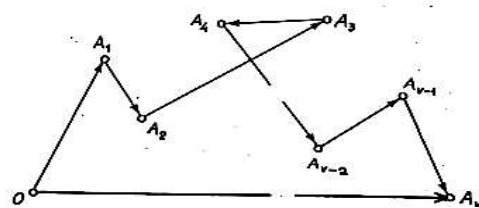


- Αν OABΓ παραλληλόγραμμο έχω $\vec{BG} = \vec{OA} - \vec{OB}$, $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB}$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.



Σημείωση

Αν $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \dots, \vec{\alpha}_v \in \mathcal{E} \ (v > 3)$ ορίζεται επαγωγικά το άθροισμα $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_v$ ως εξής



$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_v = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_{v-1}) + \vec{\alpha}_v$. Αν συνεπώς O είναι το σημείο αναφοράς και θεωρήσω τα $\vec{OA} = \vec{\alpha}_1$, $\vec{A_1A_2} = \vec{\alpha}_2$, $\vec{A_2A_3} = \vec{\alpha}_3$, ..., $\vec{A_{v-1}A_v} = \vec{\alpha}_v$ τότε θα έχω $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_v = \vec{OA} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{v-1}A_v} = \vec{OA_v}$. Αν το A_v ταυτίζεται με το O τότε $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_v = \vec{0}$ και λέω ότι τα $\vec{OA_1}, \vec{A_1A_2}, \vec{A_2A_3}, \dots, \vec{A_{v-1}O}$ αποτελούν μία κλειστή πολυγωνική γραμμή.

2.3.3 Η τριγωνική ανισότητα

Για τα μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\left| \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\| \right| \leq \|\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$.

Απόδειξη:

α) Έστω ότι $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ και $\vec{OA}, \vec{AB}$ οι αντιπρόσωποι των ελεύθερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με

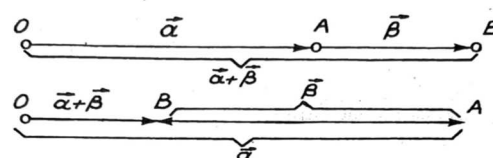
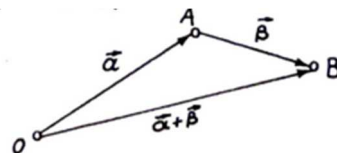
$$\|\vec{\alpha}\| = (OA), \quad \|\vec{\beta}\| = (AB),$$

$$\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| = (OB). \quad \text{Από το τρίγωνο OAB είναι: } |(OA) - (AB)| < (OB) < (OA) + (AB)$$

οπότε

$$\left| \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\| \right| < \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| < \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\| \quad (1)$$

Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \searrow \searrow \vec{\beta}$ και



• Αν $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ τότε $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$ (2)

• Αν $\vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\beta}$ τότε $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\|$ (3)

β) Έστω ότι $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ και $\vec{OA}, \vec{OB}$ οι αντιπρόσωποι των ελευθέρων διανυσμάτων.

Τότε $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Από το τρίγωνο OAB

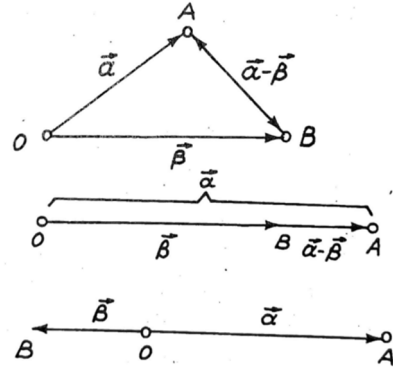
είναι $|(OA) - (OB)| < (AB) < |(OA) + (OB)|$ οπότε:

$$\|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\| < \|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\| < \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\| \quad (4)$$

Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\beta}$ και

• Αν $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ τότε $\|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\|$ (5)

• Αν $\vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow (-\vec{\beta})$ οπότε $\|\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})\| = \|\vec{\alpha}\| + \|(-\vec{\beta})\| \Rightarrow \|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$ (6)



Από τις (1), (2), (3), (4), (5), (6) έχω ότι $\|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$.

2.4 Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα

Ορίζω ως πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα, την πράξη εκείνη με την οποία, σε κάθε $(\lambda, \vec{\alpha}) \in \mathbb{R} * \mathcal{E}$ αντιστοιχίζεται ένα διάνυσμα του που σημειώνω με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ (ή απλούστερα $\lambda \vec{\alpha}$, το διαβάζω «λ επί α» και καθορίζεται από τα:

- Το $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$.
- $\lambda \vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$, $\lambda \vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$.
- $\|\lambda \vec{\alpha}\| = \|\lambda\| \cdot \|\vec{\alpha}\|$. Ειδικά αν $\lambda = 0$ είτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ το $\lambda \vec{\alpha}$ ορίζεται ως μηδενικό διάνυσμα.

2.4.1 Παρατηρήσεις

• Η πράξη του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα, είναι εξωτερική πράξη στο σύνολο $\mathcal{E}$ με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$.

• Αν $\lambda \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ συμπεραίνω ότι

α) Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά

β) $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ αν $\lambda > 0$, $\vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\beta}$ αν $\lambda < 0$

γ) $\|\vec{\beta}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{\alpha}\|$

• Αν $\vec{AB} \nearrow \nearrow \vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{\Gamma\Delta} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{AB} = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$. Πράγματι

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{AB}\| = (AB) \\ \left\| \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot \vec{\Gamma\Delta} \right\| = \left| \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \right| \|\vec{\Gamma\Delta}\| = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot (\Gamma\Delta) = (AB) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB} = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$$

$$\vec{AB} \nearrow \nearrow \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$$

- Αν $\overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} \neq \vec{0}$ τότε $\overrightarrow{AB} = -\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Πράγματι επειδή

$$\overrightarrow{AB} \nearrow \searrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow -\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ και επιπλέον}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{AB}\| = (AB) \\ \overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow -\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \left\| -\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \overrightarrow{\Gamma\Delta} \right\| = \left| -\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \right| \cdot \|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\| = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot (\Gamma\Delta) = (AB) \end{array} \right\} \text{ Άρα } \overrightarrow{AB} = -\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} \cdot (\Gamma\Delta)$$

- Από τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις και τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πραγματικού επί διάνυσμα, έχω την ισοδυναμία

$$\overrightarrow{\alpha} \parallel \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \exists \text{ μοναδιαίο } \lambda \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } \overrightarrow{\alpha} = \lambda \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\beta} \neq \vec{0}$$

Θεώρημα 1

$$\text{Αν } \lambda \overrightarrow{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \overrightarrow{\alpha} = \vec{0}).$$

$$\text{Απόδειξη} \text{ Αφού } \lambda \overrightarrow{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \|\lambda \overrightarrow{\alpha}\| = \|\vec{0}\| \Rightarrow |\lambda| \|\overrightarrow{\alpha}\| = 0 \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ είτε } \overrightarrow{\alpha} = \vec{0}).$$

Θεώρημα 2

$$\text{Για κάθε } (\lambda, \overrightarrow{\alpha}) \in \mathbb{R} * \mathcal{E} \text{ ισχύει } (-\lambda) \overrightarrow{\alpha} = \lambda(-\overrightarrow{\alpha}) - (\lambda \overrightarrow{\alpha}).$$

Απόδειξη Αν $\lambda=0$ ή $\overrightarrow{\alpha} = \vec{0}$ το θεώρημα ισχύει. Έστω ότι $\lambda \neq 0$, $\overrightarrow{\alpha} \neq \vec{0}$. Αρχικά θα δείξω ότι $(-\lambda) \overrightarrow{\alpha} = -(\lambda \overrightarrow{\alpha})$

α) Αν $\lambda > 0$, άρα $-\lambda < 0$ έχω

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\lambda) \overrightarrow{\alpha} \nearrow \searrow \overrightarrow{\alpha} \\ \lambda \overrightarrow{\alpha} \nearrow \nearrow \overrightarrow{\alpha} \quad -(\lambda \overrightarrow{\alpha}) \nearrow \searrow \overrightarrow{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow (-\lambda) \overrightarrow{\alpha} \nearrow \nearrow -(\lambda \overrightarrow{\alpha})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(-\lambda) \overrightarrow{\alpha}\| = |-\lambda| \|\overrightarrow{\alpha}\| = -(-\lambda) \|\overrightarrow{\alpha}\| = \lambda \|\overrightarrow{\alpha}\| \\ \|-(\lambda \overrightarrow{\alpha})\| = \|\lambda \overrightarrow{\alpha}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{\alpha}\| = \lambda \|\overrightarrow{\alpha}\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|(-\lambda) \overrightarrow{\alpha}\| = \|-(\lambda \overrightarrow{\alpha})\|$$

Άρα $(-\lambda) \overrightarrow{\alpha} = -(\lambda \overrightarrow{\alpha})$

β) Αν $\lambda < 0$, οπότε $-\lambda > 0$ έχω

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\lambda) \overrightarrow{\alpha} \nearrow \nearrow \overrightarrow{\alpha} \\ \lambda \overrightarrow{\alpha} \nearrow \searrow \overrightarrow{\alpha} \Rightarrow -(\lambda \overrightarrow{\alpha}) \nearrow \nearrow \overrightarrow{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow (-\lambda) \overrightarrow{\alpha} \nearrow \nearrow -(\lambda \overrightarrow{\alpha})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(-\lambda) \overrightarrow{\alpha}\| = |-\lambda| \|\overrightarrow{\alpha}\| = (-\lambda) \|\overrightarrow{\alpha}\| \\ \|-(\lambda \overrightarrow{\alpha})\| = \|\lambda \overrightarrow{\alpha}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{\alpha}\| = (-\lambda) \|\overrightarrow{\alpha}\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|(-\lambda) \overrightarrow{\alpha}\| = \|-(\lambda \overrightarrow{\alpha})\|$$

$\Rightarrow (-\lambda) \overrightarrow{\alpha} = -(\lambda \overrightarrow{\alpha})$

Όμοια δείχνω ότι $\lambda(-\overrightarrow{\alpha}) = -(\lambda \overrightarrow{\alpha})$.

2.4.2 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα

- $\forall \lambda \in \mathcal{E}, \forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$ ισχύει $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ (1^η επιμεριστική)

Απόδειξη Αν $\lambda=0$ είτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ είτε $\vec{\beta} = \vec{0}$ η αλήθεια προς ιδιότητας είναι φανερή.

A) Έστω ότι $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}, \lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$. Θεωρώ τα $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$, οπότε $\vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Αν O το τυχαίο σημείο του χώρου και θεωρήσω τα $\vec{OA} = \lambda \cdot \vec{OA}, \vec{OB} = \lambda \cdot \vec{OB}, \vec{O\Gamma} = \lambda \cdot \vec{O\Gamma}$ έχω ότι $\|\vec{OA}'\| = |\lambda| \|\vec{OA}\|$

$$\|\vec{OB}'\| = |\lambda| \|\vec{OB}\|, \quad \|\vec{O\Gamma}'\| = |\lambda| \|\vec{O\Gamma}\| \Leftrightarrow (OA') = |\lambda| \|\vec{OA}\|,$$

$$(OB') = |\lambda| \|\vec{OB}\|, (O\Gamma') = |\lambda| \|\vec{O\Gamma}\| \Leftrightarrow$$

$$\frac{(OA')}{(OA)} = \frac{(OB')}{(OB)} = \frac{(O\Gamma')}{(O\Gamma)} = |\lambda| \Leftrightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = |\lambda|$$

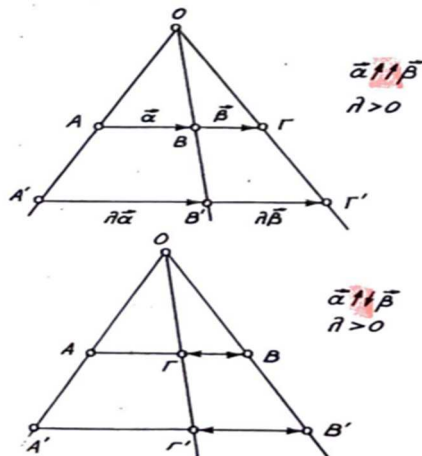
Άρα, τρίγωνο OAB $\approx$ τρίγωνο A'B', τρίγωνο OBG $\approx$ τρίγωνο OB'Γ' και τρίγωνο OAG $\approx$ τρίγωνο OA'Γ' με λόγο ομοιότητας $|\lambda|$. Άρα, είναι $\vec{AB} \parallel \vec{A'B'}$ & $A'B' = |\lambda| AB \Leftrightarrow$

$$(A'B') = |\lambda| (AB) \Leftrightarrow \|\vec{A'B'}\| = |\lambda| \|\vec{AB}\|.$$

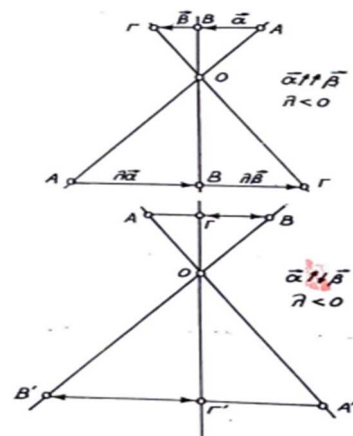
Άρα, $\vec{A'B'} = \lambda \cdot \vec{AB}$. Όμοια έχω $\vec{B'\Gamma'} = \lambda \vec{B\Gamma}$ και

$$\vec{A'\Gamma'} = \lambda \vec{A\Gamma}. \quad \text{Επειδή} \quad \vec{A'\Gamma'} = \vec{A'B'} + \vec{B'\Gamma'} \Leftrightarrow \lambda \cdot \vec{A\Gamma} = \lambda \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}.$$

B) Έστω ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ οπότε $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\beta}$ και $\lambda > 0$ ή $\lambda < 0$. Τα παρακάτω σχήματα καλύπτουν προς περιπτώσεις αυτές και η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο.



$\vec{AB} = \vec{\alpha}$
$\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$
$\vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$
$\vec{A'B'} = \lambda \vec{\alpha}$
$\vec{B'\Gamma'} = \lambda \vec{\beta}$
$\vec{A'\Gamma'} = \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$



- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ ισχύει $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$ (2^η επιμεριστική)

Απόδειξη

1) Αν $\lambda=0$ είτε $\mu=0$ είτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ η αλήθεια προς ιδιότητας είναι φανερή.

2) Αν $\lambda + \mu = 0$ είναι $\lambda = -\mu$ άρα

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda, \mu)\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0} \\ \lambda\vec{\alpha} = (-\mu)\vec{\alpha} \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} = -(\mu\vec{\alpha}) \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha} = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$$

3) Έστω ότι $\lambda\mu(\lambda + \mu) \neq 0$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

3^α. Με $\lambda > 0, \mu > 0$ είναι $\lambda + \mu > 0$, άρα

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu)\bar{\alpha} \nearrow \nearrow \bar{\alpha} \\ \lambda\bar{\alpha} \nearrow \nearrow \bar{\alpha} \\ \mu\bar{\alpha} \nearrow \nearrow \bar{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha} \nearrow \nearrow \bar{\alpha} \Rightarrow (\lambda + \mu)\bar{\alpha} \nearrow \nearrow \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(\lambda + \mu)\bar{\alpha}\| = |\lambda + \mu| \|\bar{\alpha}\| = (\lambda + \mu) \|\bar{\alpha}\| \\ \|\lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}\| = \|\lambda\bar{\alpha}\| + \|\mu\bar{\alpha}\| = |\lambda| \|\bar{\alpha}\| + |\mu| \|\bar{\alpha}\| = (\lambda + \mu) \|\bar{\alpha}\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|(\lambda + \mu)\bar{\alpha}\| = \|\lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}\|$$

Άρα, $(\lambda + \mu)\bar{\alpha} = \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}$

3^β. Με $\lambda < 0, \mu < 0$ είναι $\lambda + \mu < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu)\bar{\alpha} \nearrow \swarrow \bar{\alpha} \\ \lambda\bar{\alpha} \nearrow \swarrow \bar{\alpha} \\ \mu\bar{\alpha} \nearrow \swarrow \bar{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha} \nearrow \swarrow \bar{\alpha} \Rightarrow (\lambda + \mu)\bar{\alpha} \nearrow \swarrow \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(\lambda + \mu)\bar{\alpha}\| = |\lambda + \mu| \|\bar{\alpha}\| = -(\lambda + \mu) \|\bar{\alpha}\| = -\lambda \|\bar{\alpha}\| - \mu \|\bar{\alpha}\| \\ \|\lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}\| = \|\lambda\bar{\alpha}\| + \|\mu\bar{\alpha}\| = |\lambda| \|\bar{\alpha}\| + |\mu| \|\bar{\alpha}\| = -\lambda \|\bar{\alpha}\| - \mu \|\bar{\alpha}\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|(\lambda + \mu)\bar{\alpha}\| = \|\lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}\|$$

Άρα, $(\lambda + \mu)\bar{\alpha} = \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha}$.

3^γ. Με $\lambda > 0, \mu < 0$ και $|\lambda| > |\mu|$ οπότε και $\lambda + \mu > 0$, έχω

$$[(\lambda + \mu) + (-\mu)]\bar{\alpha} = (\lambda + \mu)\bar{\alpha} + (-\mu)\bar{\alpha} \Rightarrow \lambda\bar{\alpha} = (\lambda + \mu)\bar{\alpha} - \mu\bar{\alpha} \Rightarrow \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha} \Rightarrow (\lambda + \mu)\bar{\alpha}$$

3^δ. Με $\lambda < 0, \mu > 0$ και $|\lambda| > |\mu|$ είναι $\lambda + \mu < 0$, άρα

$$[(\lambda + \mu) + (-\mu)]\bar{\alpha} = (\lambda + \mu)\bar{\alpha} + (-\mu)\bar{\alpha} \Rightarrow \lambda\bar{\alpha} = (\lambda + \mu)\bar{\alpha} - \mu\bar{\alpha} \Rightarrow \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\alpha} \Rightarrow (\lambda + \mu)\bar{\alpha}$$

• $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \bar{\alpha} \in \mathcal{E}$ ισχύει: $\lambda(\mu\bar{\alpha}) = (\lambda\mu)\bar{\alpha}$ (προσεταιριστική)

Απόδειξη Αν $\lambda = 0$ είτε $\mu = 0$ είτε $\alpha = 0$ η αλήθεια προς ιδιότητας είναι φανερή

Έστω ότι $\lambda\mu \neq 0$ και $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$ Τότε:

α) Με $\lambda > 0, \mu > 0$ οπότε $\lambda\mu > 0$ έχω

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\bar{\alpha} \nearrow \nearrow \bar{\alpha} \Rightarrow \lambda(\mu\bar{\alpha}) \nearrow \nearrow \bar{\alpha} \\ (\lambda\mu)\bar{\alpha} \nearrow \nearrow \bar{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda(\mu\bar{\alpha}) \nearrow \nearrow (\lambda\mu)\bar{\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\lambda(\mu\bar{\alpha})\| = |\lambda| \cdot \|\mu\bar{\alpha}\| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot \|\bar{\alpha}\| = |\lambda\mu| \|\bar{\alpha}\| = \|(\lambda\mu)\bar{\alpha}\| = (\lambda\mu)\bar{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda\mu)\bar{\alpha}$$

β) Με $\lambda < 0, \mu < 0$ οπότε $\lambda\mu > 0$ έχω

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\bar{\alpha} \nearrow \swarrow \bar{\alpha} \Rightarrow \lambda(\mu\bar{\alpha}) \nearrow \swarrow \bar{\alpha} \\ (\lambda\mu)\bar{\alpha} \nearrow \swarrow \bar{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda(\mu\bar{\alpha}) \nearrow \swarrow (\lambda\mu)\bar{\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\lambda(\mu\bar{\alpha})\| = |\lambda| \cdot \|\mu\bar{\alpha}\| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot \|\bar{\alpha}\| = |\lambda\mu| \|\bar{\alpha}\| = \|(\lambda\mu)\bar{\alpha}\| = (\lambda\mu)\bar{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda\mu)\bar{\alpha}$$

γ) Με $\lambda > 0, \mu < 0$ οπότε $\lambda\mu < 0$ έχω

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\alpha} \Rightarrow \lambda(\mu \vec{\alpha}) \nearrow \swarrow \vec{\alpha} \\ (\lambda \mu) \vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda(\mu \vec{\alpha}) \nearrow \swarrow (\lambda \mu) \vec{\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\lambda(\mu \vec{\alpha})\| = |\lambda| \cdot \|\mu \vec{\alpha}\| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot \|\vec{\alpha}\| = |\lambda \mu| \|\vec{\alpha}\| = \|(\lambda \mu) \vec{\alpha}\| = (\lambda \mu) \vec{\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda \mu) \vec{\alpha}$$

δ) Με $\lambda < 0, \mu > 0$ έχω ανάλογη απόδειξη.

- $\forall a \in \mathcal{E}$ είναι $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Απόδειξη Η αλήθεια είναι φανερή, από τον ορισμό του γινομένου πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα.

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{a} \in \mathcal{E} - \{\vec{0}\}$ ισχύει: $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a} \Rightarrow \lambda = \mu$

Απόδειξη Έχω $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a} \Rightarrow \lambda \vec{a} + (-\mu \vec{a}) = \mu \vec{a} + (-\mu \vec{a}) \Rightarrow \lambda \vec{a} - \mu \vec{a} = \mu \vec{a} - \mu \vec{a} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\lambda - \mu) \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$ ισχύει: $\lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Απόδειξη Επειδή $\lambda \neq 0 \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda \vec{\alpha}) = \lambda^{-1}(\lambda \vec{\beta}) \Rightarrow (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \vec{\alpha} = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \vec{\beta} \Rightarrow 1 \cdot \vec{\alpha} = 1 \cdot \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

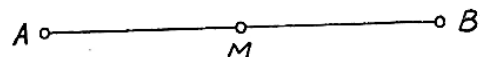
Ορισμός. Ως λόγος του διανύσματος $\vec{a}$ προς το συγγραμμικό του διάνυσμα $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, ορίζεται ο πραγματικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. Τότε γράφω $\frac{\vec{a}}{\vec{\beta}} = \lambda$.

Άρα, έχω $\frac{\vec{a}}{\vec{\beta}} = \lambda \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

2.5 Βασικές προτάσεις

- Το M είναι το μέσο του AB αν και μόνο αν, $(A, M) \sim (M, B)$.

Απόδειξη Αν το M είναι το μέσο του AB τα εφαρμοστά διανύσματα (A, M) και (M, B) έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και ίσα μέτρα οπότε $(A, M) \sim (M, B)$

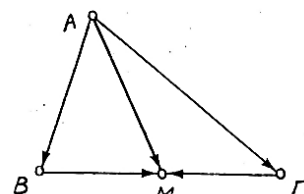


Αντίστροφα: Αν $(A, M) \sim (M, B) \Rightarrow$ τα τμήματα AB, MM έχουν κοινό μέσο (και αφού το μέσο M είναι το μέσο του τμήματος MM) $\Rightarrow$ το M είναι το μέσο του AB.

- Η AM είναι η διάμεσος στο τρίγωνο ABΓ, αν και μόνο αν $\vec{AB} + \vec{AG} = 2 \cdot \vec{AM}$

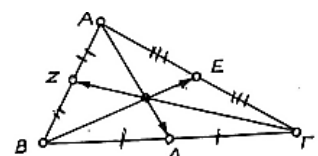
Απόδειξη Αν AM διάμεσος, είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} \\ \vec{AM} = \vec{AG} + \vec{GM} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG}$$



Αντίστροφα Αν $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG}$ και K το μέσο της BG έχω και $2\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AG}$ οπότε $\vec{AM} = \vec{AK} \Rightarrow M \equiv K$ δηλαδή AM διάμεσος.

- Σε κάθε τρίγωνο ABΓ με διάμεσους AD, BE, ΓZ ισχύει $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{ΓZ} = \vec{0}$

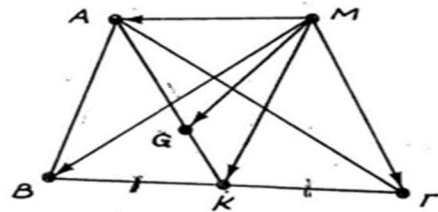


$$\left. \begin{aligned} 2\overrightarrow{A\Delta} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} \\ 2\overrightarrow{B\Xi} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} \\ 2\overrightarrow{\Gamma Z} &= \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Xi} + \overrightarrow{\Gamma Z}) = \vec{0}$$

οπότε $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Xi} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \vec{0}$

- Αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ και M τυχαίο σημείο του χώρου τότε ισχύει $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$.

Απόδειξη Είναι



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= 2\overrightarrow{GK} \Rightarrow \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA} = 2(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MG}) \Rightarrow \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MK} - 2\overrightarrow{MG} \Rightarrow \\ 3\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MK} \Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} \text{ είναι η διάμεσος στο } \triangle MB\Gamma \text{ οπότε} \\ 2\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

- Το G το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ. Τότε

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GG} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GK} =$$

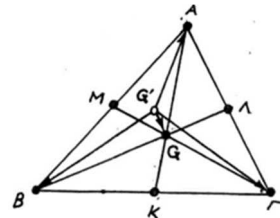
$$\frac{2}{3}\overrightarrow{KA} + 2\frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AK}) = \frac{2}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Αντίστροφα Αν G' είναι ένα άλλο σημείο, τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'\Gamma} = \vec{0}$$

$$(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{G\Gamma}) = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{G'G} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{G'G} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{G'G} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'$$

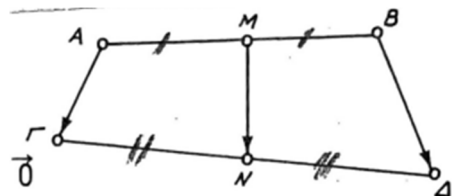


- Αν M, N είναι τα μέσα δύο τμημάτων AB, ΓΔ του χώρου αντιστοίχως, τότε είναι $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$.

Απόδειξη

$$\left. \begin{aligned} \text{Είναι } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma N} \\ \text{και } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} \text{ αφού, } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ \& } \overrightarrow{\Gamma N} + \overrightarrow{\Delta N} = \vec{0}$$

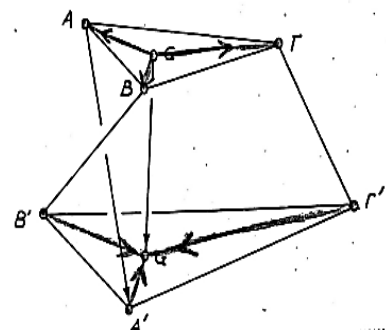


- Αν G, G' τα βαρύκεντρα των τριγώνων ABΓ, A'B'Γ' τότε ισχύει: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Απόδειξη Είναι

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} \\ \overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'} \\ \overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{G\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} + \overrightarrow{\Gamma'G'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$$

$$\text{διότι } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0} \text{ και } \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'\Gamma'} = \vec{0}$$



2.6 Μέθοδοι για την λύση ασκήσεων

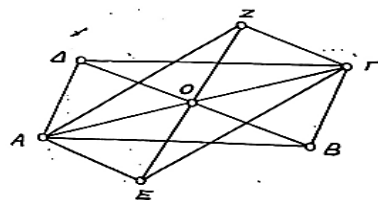
2.6.1 Μέθοδος 1

Όταν θέλω να δείξω ότι $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta)$ αρκεί να δείξω ένα από τα παρακάτω

- α)** Τα τμήματα $A\Delta, \Gamma B$ έχουν κοινό μέσο.
- β)** $(\Delta, B) \sim (\Gamma, A)$ οπότε με εναλλαγή των άκρων γραμμμάτων έχω το ζητούμενο.
- γ)** $(A, \Gamma) \sim (B, \Delta)$ οπότε με εναλλαγή των άκρων γραμμμάτων έχω το ζητούμενο.
- δ)** Ότι τα (A, B) και (Γ, Δ) είναι ισοδύναμα προς ένα τρίτο εφαρμοστό διάνυσμα (K, Λ) οπότε με βάση την μεταβατική ιδιότητα προκύπτει το ζητούμενο.

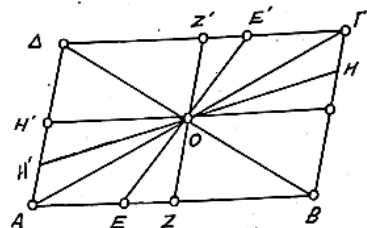
- Θεωρώ τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$, $AE\Gamma Z$. Δείξτε ότι $(B, E) \sim (Z, \Delta)$ και $(B, Z) \sim (E, \Delta)$.

Απόδειξη Αφού τα παραλληλόγραμμα έχουν κοινή διαγώνιο $A\Gamma$, έπεται ότι το μέσο της $A\Gamma$ είναι και μέσο των $B\Delta$, EZ . Άρα, τα $B\Delta$, ZE έχουν κοινό μέσο άρα $(B, E) \sim (Z, \Delta)$ οπότε με εναλλαγή των μέσων γραμμμάτων έχω και $(B, Z) \sim (E, \Delta)$.



- Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, τα σημεία E, Z της AB και το σημείο H της $B\Gamma$. Αν O το κέντρο του παραλληλογράμμου και οι ευθείες EO, ZO, HO τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα E', Z', H' αντίστοιχα, δείξτε ότι $(E, Z) \sim (Z', E')$ και $(Z, H) \sim (H', Z')$.

Απόδειξη: Επειδή το O είναι κέντρο συμμετρίας του παρ/μου $AB\Gamma\Delta \Rightarrow$ τα E', Z', H' είναι συμμετρικά των E, Z, H ως προς το O αντίστοιχα. Τα $EE', Z'Z$ έχουν μέσο το $O \Rightarrow (E, Z) \sim (Z', E')$. Άρα τα $ZZ', H'H$ έχουν μέσο το $O \Rightarrow (Z, H) \sim (H', Z')$.



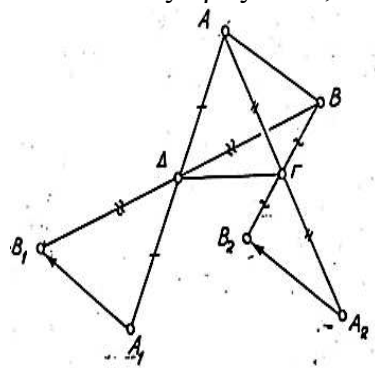
- Δίνεται τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$. Ονομάζω A_1, A_2 τα συμμετρικά του A ως προς τα Δ, Γ αντίστοιχα και B_1, B_2 τα συμμετρικά του B ως προς τα Δ, Γ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ και $(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2)$.

Απόδειξη Το Δ είναι κοινό μέσο των AA_1, BB_1 άρα

$(A_1, B_1) \sim (B, A)$ (1) Το Γ είναι κοινό μέσο των

A_2A, BB_2 άρα $(A_2, B_2) \sim (B, A)$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow (A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ και με εναλλαγή των μέσων γραμμμάτων προκύπτει $(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2)$.



2.6.2 Μέθοδος 2

Όταν θέλω να δείξω ότι δύο σημεία M, N ταυτίζονται τότε, αρκεί να δείξω ένα από τα ακόλουθα:

- α)** $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

- β)** Θεωρώντας ένα σημείο O ως το σημείο αναφοράς, ότι τα $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$.

Ειδικότερα, αν τα M, N είναι μέσα των τμημάτων $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, αρκεί να δείξω ένα από τα ακόλουθα:

- α)** $(A, \Delta) \sim (\Gamma, B)$.

β) Τα AB, ΓΔ έχουν κοινό μέσο.

• Θεωρώ τα τρίγωνα ABΓ, Α'Β'Γ' τέτοια ώστε $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. Δείξτε ότι τα βαρύκεντρα τους συμπίπτουν.

Απόδειξη Έχει δειχθεί στα προηγούμενα ότι $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ άρα $G \equiv G'$

Ισχύει και το αντίστροφο αν $G \equiv G' \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

Άρα, τα βαρύκεντρα G, G' των τριγώνων ABΓ, Α'Β'Γ' ταυτίζονται $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.

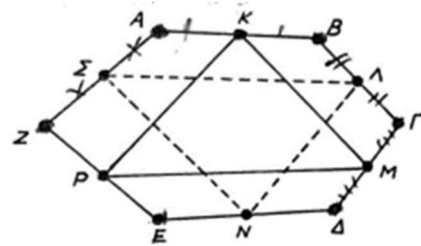
• Αν ABΓΔΕΖ στρεβλό εξάγωνο και K, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ τα μέσα των AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ αντίστοιχα, δείξτε ότι τα τρίγωνα KMP, ΛΝΣ έχουν κοινό βαρύκεντρο.

Απόδειξη Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς και G, G' τα βαρύκεντρα των τριγώνων KMP, ΛΝΣ αντίστοιχα, τότε με βάση προγενέστερα

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}, \quad 3\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OS}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OZ}) \\ 6\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OL} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OS} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OA}) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} \quad \text{άρα}$$

$$G \equiv G'$$



οπότε

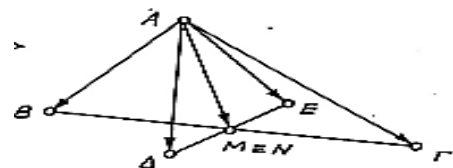
• Θεωρώ τα τρίγωνα ABΓ, ΑΔΕ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AΓ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Δείξτε ότι τα τμήματα ΒΓ, ΔΕ έχουν κοινό μέσο.

Απόδειξη Ονομάζω Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ, ΔΕ αντίστοιχα και έχω

Στο τρίγωνο ABΓ η ΑΜ είναι διάμεσος, άρα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AΓ} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$

Στο τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΝ είναι διάμεσος, άρα $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2 \cdot \overrightarrow{AN}$

Συνεπώς $2 \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow M \equiv N$

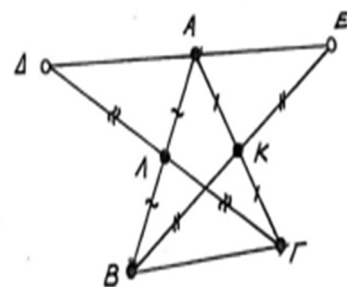


• Θεωρώ τρίγωνο ABΓ. Προσδιορίστε τα σημεία Δ, Ε ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BΓ}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ΓB}$ και δείξτε ότι το Α είναι το μέσο του ΔΕ.

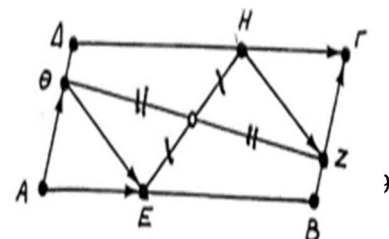
Απόδειξη Για να είναι $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BΓ} \Leftrightarrow (A, E) \sim (B, \Gamma) \Leftrightarrow$ τα ΑΓ, ΒΕ να έχουν κοινό μέσο. Άρα, αν Κ είναι το μέσο του ΑΓ, τότε το Ε είναι το συμμετρικό του Β ως προς το Κ. Όμοια το Δ είναι συμμετρικό του Γ ως προς το μέσο Λ του ΑΒ. Άρα :

Τα ΑΓ, ΒΕ έχουν κοινό μέσο $\Rightarrow (A, E) \sim (B, \Gamma)$
Τα ΔΓ, ΒΑ έχουν κοινό μέσο $\Rightarrow (\Delta, A) \sim (B, \Gamma)$ τμήματα

ΑΑ, ΔΕ έχουν κοινό μέσο $\Rightarrow$ το Α είναι το μέσο του ΔΕ.



• Στις πλευρές AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παρ/μον θεωρώ τα Ε, Ζ, Η, Θ αντίστοιχα ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HΓ}$ και $\overrightarrow{ΖΓ} = \overrightarrow{ΑΘ}$. Δείξτε ότι τα ΕΗ, ΖΘ έχουν κοινό μέσο.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Απόδειξη Δίνεται ότι } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HG} \text{ και } \overrightarrow{ZI} = \overrightarrow{AO} \\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HG} \\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{IZ} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{ZI} \Rightarrow$$

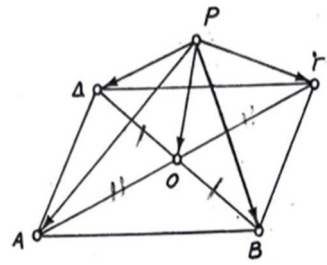
$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{HI} \Leftrightarrow (O, E) \sim (H, Z)$ άρα τα OZ, HE έχουν κοινό μέσο.

2.6.3 Μέθοδος 3

Όταν θέλω να δείξω μία σχέση της μορφής $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\lambda = \lambda \cdot \vec{u}$ (δηλαδή το πλήθος των προσθετέων είναι ίσο με το συντελεστή του $\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{N}$) τότε εκφράζω το $\vec{u}$ λ φορές, με τη βοήθεια κάθε φορά ενός από τα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\lambda$ και προσθέτοντας έχω το ζητούμενο.

- Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο κέντρου O και P τυχαίο σημείο τότε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PD} = 4 \cdot \overrightarrow{PO}$. **Απόδειξη**

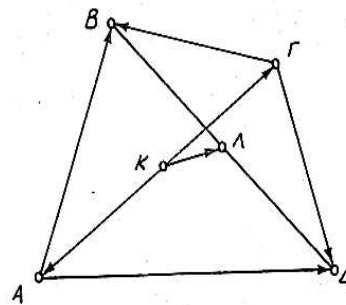
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = 2\overrightarrow{PO} \\ \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$$



- Αν K, Λ τα μέσα των διαγωνίων AG, BD αντίστοιχα, τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ δείξτε ότι

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Lambda} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 4 \cdot \overrightarrow{K\Lambda} \quad \text{Απόδειξη}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{A\Lambda} + \overrightarrow{\Lambda\Gamma} \\ \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Lambda} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$



αφού $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\Lambda\Delta} = \vec{0}$.

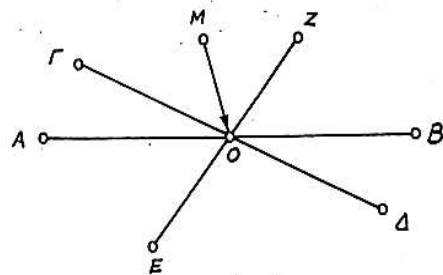
- Αν τα τμήματα $AB, \Gamma\Delta, EZ$ έχουν κοινό μέσο το O και M είναι τυχαίο σημείο δείξτε ότι:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MZ} = 6 \cdot \overrightarrow{MO}.$$

Απόδειξη Αν τα τρίγωνα $MAB, M\Gamma\Delta, MEZ$ έχουν κοινή διάμεσο MO οπότε έχω

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MZ} = 2\overrightarrow{MO} \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα, } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MZ} = 6 \cdot \overrightarrow{MO}$$



2.6.4 Μέθοδος 4

Όταν θέλω να δείξω μία σχέση της μορφής $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\lambda = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_\lambda$ τότε αρκεί να δείξω ένα από τα παρακάτω

α) Ότι $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\lambda - \vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \dots - \vec{u}_\lambda = \vec{0}$ έχοντας υπ όψη τις βασικές ασκήσεις

β) Ότι τα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\lambda, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_\lambda$ είναι ίσα προς ένα τρίτο διάνυσμα, συνήθως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$

γ) Ότι $\rho(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\lambda) = \rho(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_\lambda), \rho \in \mathbb{N}$.

- Θεωρώ τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα K, Λ, M των $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα. Αν P τυχαίο σημείο τότε ισχύει

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{P\Lambda} + \overrightarrow{PM}.$$

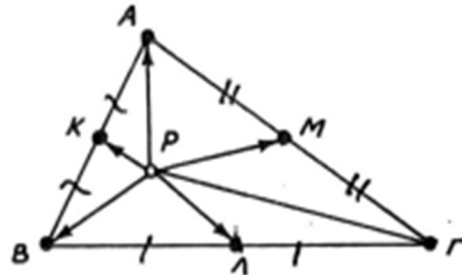
Απόδειξη

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{P\Lambda} + \overrightarrow{PM} \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PK}) + (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PM}) + (\overrightarrow{P\Gamma} - \overrightarrow{P\Lambda}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\Lambda A} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{A\Lambda} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Gamma K} = \vec{0} \text{ που ισχύει}$$



β' τρόπος Από τα τρίγωνα $PAB, PB\Gamma, P\Gamma A$ με διαμέσους τις $PK, P\Lambda, PM$ έχω

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PK}, \quad \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = 2\overrightarrow{P\Lambda}, \quad \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PM} \text{ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχω}$$

$$2(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}) = 2(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{P\Lambda} + \overrightarrow{PM}) \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{P\Lambda} + \overrightarrow{PM}$$

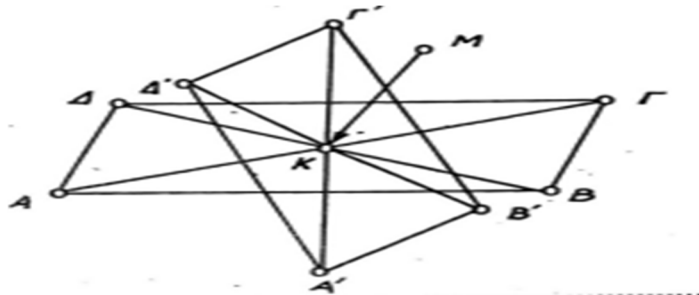
- Αν τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχουν κοινό κέντρο K , δείξτε ότι για το τυχαίο σημείο M ισχύει $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{M\Gamma'} + \overrightarrow{M\Delta'}$

Απόδειξη Η MK είναι διάμεσος στα τρίγωνα $MA\Gamma, MB\Delta, MA'\Gamma', MB'\Delta'$ οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = 2\overrightarrow{MK} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = 2\overrightarrow{MK} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 4\overrightarrow{MA}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{M\Gamma'} = 2\overrightarrow{MK'} \\ \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{M\Delta'} = 2\overrightarrow{MK'} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{M\Gamma'} + \overrightarrow{M\Delta'} = 4\overrightarrow{MA'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{M\Gamma'} + \overrightarrow{M\Delta'}$$



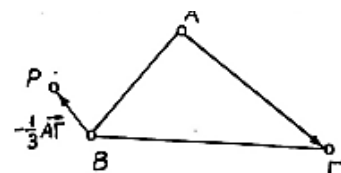
2.6.5 Μέθοδος 5

Όταν θέλω να προσδιορίσω ένα σημείο P που επαληθεύει μια διανυσματική σχέση $f(P) = \vec{0}$ τότε από την $f(P) = \vec{0}$ υπολογίζω διάνυσμα $\overrightarrow{AP}$, (φροντίζοντας για τη διατήρηση των ισοδυναμιών) όπου A γνωστό σημείο, οπότε το $\overrightarrow{AP}$ κατασκευάζεται και άρα προσδιορίζεται το P .

- Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, να βρεθεί σημείο P ώστε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{P\Delta} = \vec{0}$

Λύση Επειδή $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{P\Delta} = 4 \cdot \overrightarrow{PO}$ όπου το κέντρο του παραλληλογράμμου έχω $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{P\Delta} = \vec{0} \Leftrightarrow 4 \cdot \overrightarrow{PO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PO} = \vec{0} \Leftrightarrow P \equiv O$.

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να προσδιοριστεί σημείο P τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{\Gamma P} = \vec{0}$.



Λύση

Είναι

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PL} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG}) + 3\overrightarrow{BP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AG}$$

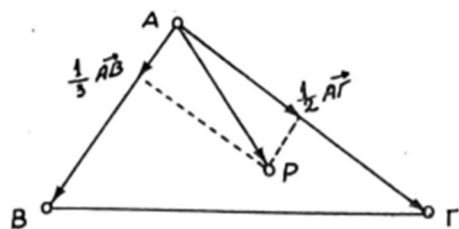
- Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να προσδιοριστεί σημείο P τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{GP} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{GP} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{GP} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$$



- Σε τετράπλευρο ABΓΔ, προσδιορίστε το σημείο M τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{ΓΔ}$.

Λύση Είναι

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{ΓΔ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ΓΔ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv A$$

2.6.2 Μέθοδος 6

Όταν στο τυχαίο σημείο M αντιστοιχίζω το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{f(M)}$ και θέλω να δείξουμε ότι ο φορέας του $\overrightarrow{f(M)}$ διέρχεται από σταθερό σημείο, τότε προσπαθώ να φθάσω στη μορφή $\overrightarrow{f(M)} = \lambda \cdot \overrightarrow{M\Sigma}$ με Σ σταθερό σημείο και απ' όπου συμπεραίνω το ζητούμενο.

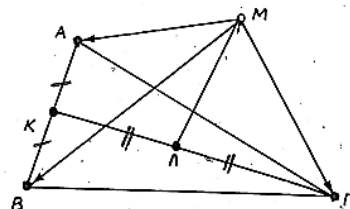
- Στο τυχαίο σημείο M τριγώνου ABΓ αντιστοιχίζω το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MG}$. Δείξτε ότι ο φορέας του $\overrightarrow{f(M)}$ διέρχεται από σταθερό σημείο.

Απόδειξη Αν K το μέσο του AB και Λ το μέσο του ΚΓ έχω

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{ML} =$$

$$2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{ML} = 4\overrightarrow{ML} \text{ και άρα ο φορέας}$$

του $\overrightarrow{f(M)}$ διέρχεται από το σταθερό σημείο Λ



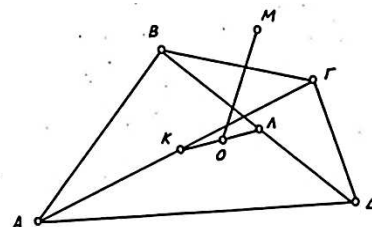
- Στο τυχαίο σημείο M τετραπλεύρου ABΓΔ αντιστοιχίζω το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD}$. Δείξτε ότι ο φορέας του $\overrightarrow{f(M)}$ διέρχεται από σταθερό σημείο.

Απόδειξη Αν K, Λ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα και Ο το μέσο του ΚΛ έχω

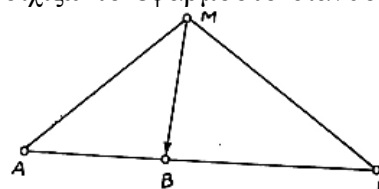
$$\overrightarrow{f(M)} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{ML} =$$

$$2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{MO} \text{ και άρα ο φορέας του } \overrightarrow{f(M)}$$

διέρχεται από το σταθερό σημείο Ο



- Στο τυχαίο σημείο M σταθερού τμήματος AB αντιστοιχίζω το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$. Δείξτε ότι ο φορέας του $\overrightarrow{f(M)}$ διέρχεται από σταθερό σημείο.



Απόδειξη Θεωρώ το σημείο P της $\overline{AB}$ ώστε $\overline{AP} = -\frac{3}{2}\overline{PB}$ άρα για το τυχαίο σημείο M θα είναι:

$$2\overline{AP} = -3\overline{PB} \Leftrightarrow 2(\overline{MP} - \overline{MA}) = -3(\overline{MB} - \overline{MP}) \Leftrightarrow -\overline{MP} = 2\overline{MA} - 3\overline{MB}$$

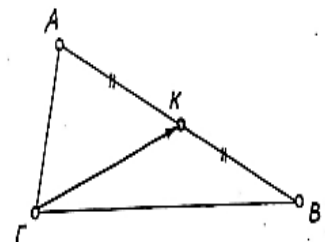
δηλαδή $\overline{f(M)} = -\overline{MP}$ άρα ο φορέας του $\overline{f(M)}$ διέρχεται από το σταθερό σημείο P

2.6.7 Μέθοδος 7

Όταν στο τυχαίο σημείο M αντιστοιχίζω το εφαρμοστικό διάνυσμα $\overline{f(M)}$ και θέλω να δείξω ότι το $\overline{f(M)}$ είναι ισοδύναμο προς το σταθερό διάνυσμα, τότε προσπαθώ να φτάσω στη μορφή $\overline{f(M)} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$ με λ σταθερό πραγματικό και $\vec{\alpha}$ σταθερό διάνυσμα, απ' όπου συμπεραίνω το ζητούμενο. Το ίδιο κάνω και όταν στα M,N αντιστοιχίζω το $\overline{f(M,N)}$.

- Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Στο τυχαίο σημείο M αντιστοιχίζω το εφαρμοστικό διάνυσμα $\overline{f(M)} = \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MG}$ δείξτε ότι το $\overline{f(M)}$ είναι ισοδύναμο προς σταθερό διάνυσμα.

Λύση: Αν K το μέσο του AB, έχω K = σταθερά



$$\overline{f(M)} = \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MG} = 2\overline{MK} - 2\overline{MG} = 2(\overline{MK} - \overline{MG}) =$$

$$2(\overline{GM} + \overline{MK}) = 2\overline{GK} \text{ άρα το } \overline{f(M)} \text{ είναι ισοδύναμο προς το σταθερό διάνυσμα } 2 \cdot \overline{GK}$$

- Θεωρώ γωνία $\hat{\chi\alpha\psi}$. Πάνω στις πλευρές της ολισθαίνουν τα $\overline{AB}, \overline{\Gamma\Delta}$ για τα οποία υποθέτω ότι έχουν σταθερό μέτρο. Αν M,N είναι τα μέσα των AΓ, BΔ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα $\overline{f(M,N)} = \overline{MN}$ είναι ισοδύναμο προς σταθερό διάνυσμα.

$$\begin{aligned} \text{Λύση Έχω } \overline{MN} &= \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN} \text{ και } \overline{MN} = \\ &= \overline{MG} + \overline{\Gamma\Delta} + \overline{\Delta N} \text{ άρα } 2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta} \quad (1) \end{aligned}$$

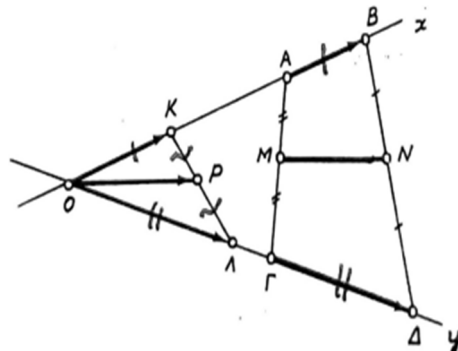
Αν θεωρήσω τα K,Λ ώστε $\overline{OK} = \overline{AB}$ και

$\overline{OL} = \overline{\Gamma\Delta}$ τότε τα K, Λ είναι σταθερά σημεία

και αν P είναι το μέσο του KΛ θα έχω

$$2\overline{OP} = \overline{OK} + \overline{OL} \Rightarrow 2\overline{OL} + \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta} \quad (2) \text{ . Από}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \overline{MN} = \overline{OP}$$



Σημείωση Στο σχήμα που έχω, αν τα M,N ήταν τα μέσα των AΔ, BΓ θα είχα $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$ και $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{\Delta\Gamma} + \overline{\Gamma N}$ οπότε $2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}(\overline{OK} - \overline{OL}) = \frac{1}{2}\overline{LK} \text{ και η πρόταση θα ίσχυε και πάλι.}$$

2.6.8 Μέθοδος 8

Όταν θέλω να βρω το γεωμετρικό τόπο ενός σημείου M που επαληθεύει μια γραμμική διανυσματική σχέση.

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία είναι $\overrightarrow{AM} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$, $\lambda > 0$

Λύση Το M είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

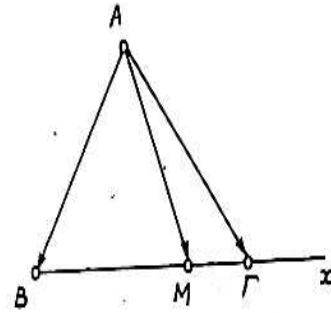
$$\overrightarrow{AM} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \lambda \cdot \overrightarrow{B\Gamma} \quad (1)$$

Επειδή $\lambda > 0$ από (1) $\Rightarrow \overrightarrow{BM} \nearrow \nearrow \overrightarrow{B\Gamma}$ και

$$\|\overrightarrow{BM}\| = \|\lambda \cdot \overrightarrow{B\Gamma}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{B\Gamma}\| = \lambda \|\overrightarrow{B\Gamma}\|$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η ημιευθεία Bx .



- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία είναι $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Λύση: Θεωρώ το σημείο P ώστε

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P\Gamma} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{P\Gamma}. \text{ Για το τυχαίο σημείο}$$

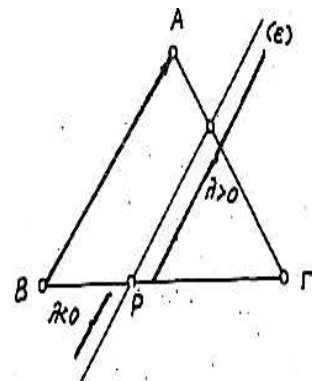
$$M \text{ είναι τότε } 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{P\Gamma} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MB}) =$$

$$\overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} \quad (1). \text{ Τότε}$$

$$\text{Το } M \text{ είναι σημείο του τόπου } \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{BA}. \text{ Άρα ο γ.τ. του } M$$

είναι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το σταθερό σημείο P & είναι παράλληλη στην AB



- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν K το μέσο της $B\Gamma$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία είναι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AK}$ με $\lambda \in [-1, 2]$

Λύση Αν G το κ.β του τριγώνου $AB\Gamma$ έχω

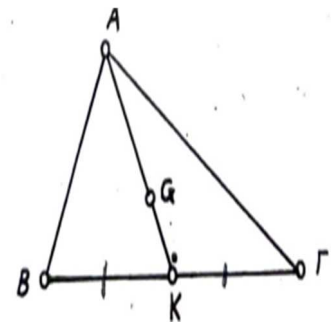
$$\text{Το } M \text{ είναι σημείο του τόπου } \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AK}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \lambda \cdot \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{\lambda}{3} \cdot \overrightarrow{KA} \quad (1)$$

Επειδή το $\overrightarrow{KA}$ έχει φορά την ευθεία AK έπεται

ότι το M κείται στην ευθεία AK . Επιπλέον έχω

$$\lambda \in [-1, 2] \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{\lambda}{3} \leq \frac{2}{3} \quad (2)$$



Αν $0 \leq \frac{\lambda}{3} \leq \frac{2}{3}$ τότε το $\overrightarrow{GM} \nearrow \nearrow \overrightarrow{KA}$ και επειδή από (1) έχω

$$\|\overrightarrow{GM}\| = \frac{\lambda}{3} \|\overrightarrow{KA}\| \leq \|\overrightarrow{KA}\|, \text{ τόπος του } M \text{ το τμήμα } GA \text{ (συμπεριλαμβανομένων άκρων)}$$

Αν $-\frac{1}{3} \leq \frac{\lambda}{3} \leq 0$ τότε $\overrightarrow{GM} \nearrow \swarrow \overrightarrow{KA}$ και επειδή από (1) έχω

$$\|\overrightarrow{GM}\| = \frac{\lambda}{3} \|\overrightarrow{KA}\| \leq \frac{1}{3} \|\overrightarrow{KA}\|, \text{ τόπος του } M \text{ το τμήμα } GA \text{ (συμπεριλαμβανομένου}$$

και του K). Τελικά ο τόπος του M είναι η διάμεσος AK.

• Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου του, για τα οποία είναι $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \lambda(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA})$ με $\lambda \in [-1, 1]$

Λύση Ονομάζω O το κέντρο του ABΓΔ. Τότε

$$M \text{ σημείο του γ.τ.} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \lambda(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA}) \Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{MO} = \lambda \cdot \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\lambda}{2} \overrightarrow{GA} \quad (1)$$

$$\text{Αν } 0 \leq \lambda \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\lambda}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\lambda}{2} \|\overrightarrow{GA}\| \leq \frac{1}{2} \|\overrightarrow{GA}\|$$

$$\text{από την (1) έχω } \overrightarrow{OM} \nearrow \nearrow \overrightarrow{GA} \text{ και } \|\overrightarrow{OM}\| = \frac{\lambda}{2} \|\overrightarrow{GA}\|,$$

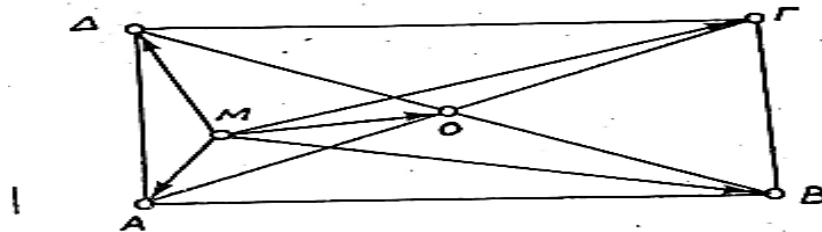
οπότε τόπος του M είναι το τμήμα OA (συμπεριλαμβανομένων των άκρων)

$$\text{Αν } -1 \leq \lambda < 0 \Leftrightarrow 1 \geq \lambda > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{-\lambda}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \|\overrightarrow{GA}\| \geq \frac{-\lambda}{2} \|\overrightarrow{GA}\| > 0$$

$$\text{από την (1) έχω } \overrightarrow{OM} \nearrow \nearrow \overrightarrow{GA} \text{ και } \|\overrightarrow{OM}\| = \left\| \frac{\lambda}{2} \overrightarrow{GA} \right\| = \frac{|\lambda|}{2} \|\overrightarrow{GA}\| = \frac{-\lambda}{2} \|\overrightarrow{GA}\|,$$

οπότε τόπος του M είναι το τμήμα OG (συμπεριλαμβανομένου του Γ)

Άρα ο γ.τ. του M είναι η διαγώνιος AG.



2.6.9 Μέθοδος 9

Όταν θέλω να βρω τον γεωμετρικό τόπο ενός σημείου M που επαληθεύει μία σχέση μεταξύ μέτρων διανυσμάτων τότε επιδιώκω να φθάσω στις μορφές:

α) $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ με A, B σταθερά σημεία, οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του AB (ή μεσοκάθετο επίπεδο για το χώρο).

β) $\|\overrightarrow{MA}\| = \alpha > 0$ με A σταθερό σημείο, οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι περιφέρεια με κέντρο το A και ακτίνα α (ή σφαίρα για το χώρο).

γ) $\frac{\|\overrightarrow{MA}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|} = k > 0$ με A, B σταθερά σημεία, οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι Απολλώνιος

περιφέρεια (ή Απολλώνειος σφαίρα για τον χώρο).

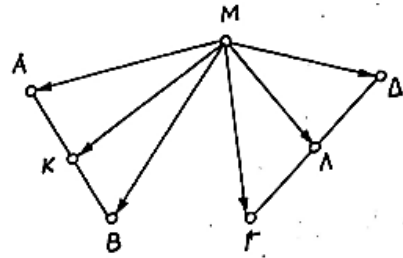
- Αν Α,Β,Γ,Δ σταθερά σημεία, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία είναι $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD}\|$

Λύση Ονομάζω Κ,Λ τα μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα. Τότε: Το Μ είναι σημείο του τόπου

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD}\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MK}\| = \|2\overrightarrow{ML}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MK}\| = \|\overrightarrow{ML}\| \text{ Άρα}$$

ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι η μεσοκάθετος του ΚΛ (αν το πρόβλημα δοθεί στο επίπεδο) ή το μεσοκάθετο επίπεδο του ΚΛ (αν το πρόβλημα δοθεί στο χώρο).



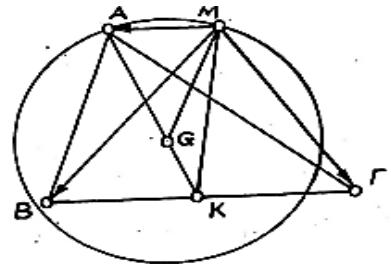
- Αν Α,Β,Γ σταθερά σημεία να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τους για τα οποία είναι $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG}\|$

Λύση Ονομάζω Κ το μέσο του ΒΓ και G το κέντρο βάρους του τριγώνου. ΑΒΓ. Τότε Μ σημείο του γεωμετρικού τόπου

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG}\| \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG})\|$$

$$\Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{GM}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MK}\| \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{GM}\| = 2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{KM}\| \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{GM}\| = 2\|\overrightarrow{KA}\| \Leftrightarrow$$

$$\|\overrightarrow{GM}\| = \frac{2}{3}\|\overrightarrow{KA}\| \text{ και άρα ο γ.τ. του Μ είναι περιφέρεια με κέντρο το G και ακτίνα } \frac{2}{3}\|\overrightarrow{AK}\|$$



- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία είναι $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MG}\|$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το Α το σημείο του τόπου.

Λύση Με βάση προηγούμενη πρόταση θεωρώ τα

σημεία Ρ,Σ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ και $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{SG}$. Αν Μ σημεία του γεωμετρικού τόπου

$$2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \quad (1)$$

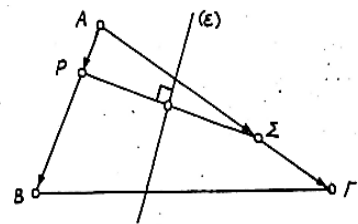
$$\beta) \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{SG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MA} = 2(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MS}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MG} \quad (2) \text{ Άρα}$$

$$\text{Μ σημείο του τόπου} \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MG}\| \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MP}\| = 3\|\overrightarrow{MS}\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{MS}\| \text{ και άρα ο γ.τ. του Μ είναι η μεσοκάθετος του ΡΣ.}$$

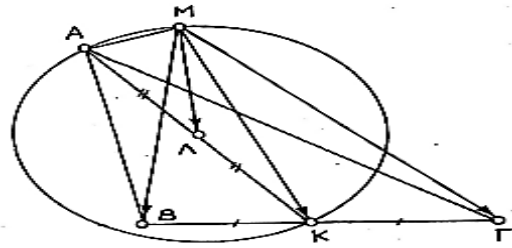
Το Α είναι σημείο του τόπου $\Leftrightarrow$ Το Α κείται στη μεσοκάθετο του ΡΣ

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AS}\| \Leftrightarrow \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}\right\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 2\|\overrightarrow{AG}\|$$



- Θεωρώ τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου του για τα οποία είναι $\|\vec{MB} + \vec{MG} + 2\vec{MA}\| = \|\vec{MB} + \vec{MG} - 2\vec{MA}\|$

Λύση Αν Κ το μέσο της ΒΓ έχω

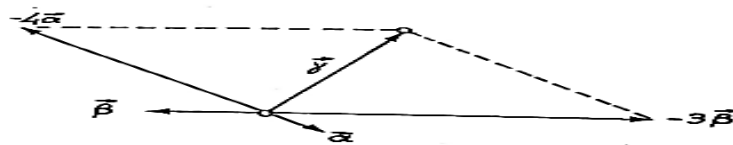


$$\begin{aligned} \text{Μ σημείο του τόπου} &\Leftrightarrow \|\vec{MB} + \vec{MG} + 2\vec{MA}\| = \|\vec{MB} + \vec{MG} - 2\vec{MA}\| \Leftrightarrow \\ &\|\vec{2MK} + 2\vec{MA}\| = \|\vec{2MK} - 2\vec{MA}\| \Leftrightarrow \|\vec{MK} + \vec{MA}\| = \|\vec{MK} - \vec{MA}\| \Leftrightarrow \\ &\|\vec{MK} + \vec{MA}\| = \|\vec{AK}\| \text{ (και αν } \Lambda \text{ το μέσο της διαμέσου } AK, \\ &\text{είναι } \Lambda = \text{σταθερό, } \|\vec{AK}\| = \text{σταθερό άρα, } 2\|\vec{ML}\| = \|\vec{AK}\| \Leftrightarrow \|\vec{ML}\| = \end{aligned}$$

2.7 Παραδείγματα με συνδυασμό όλων των μεθόδων

- Αν $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, $\vec{u} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{w} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να υπολογιστεί με τη βοήθεια των μη μηδενικών και μη παράλληλων διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ το $\vec{\gamma} = \vec{u} + 2\vec{u} - 3\vec{w}$ και να σχεδιαστεί γραφικά. **Λύση**

$$\begin{aligned} \text{Έχω } 2\vec{u} &= 2(-\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \text{ \& } -3\vec{w} = -3(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \\ \text{άρα, } \vec{\gamma} &= \vec{u} + 2\vec{u} - 3\vec{w} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = -4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \end{aligned}$$



- Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα του $\mathcal{E}$ και με $\mu \in \mathbb{R}$ βρείτε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ από τις σχέσεις
$$\begin{cases} \vec{x} - (\mu - 3)\vec{y} = \vec{\alpha} \\ (\mu + 1)\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \end{cases} \quad (\Sigma)$$

$$\text{Λύση Έχω } (\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{\alpha} + (\mu - 3)\vec{y} \\ (\mu + 1)[\vec{\alpha} + (\mu - 3)\vec{y}] + 3\vec{y} = \vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{\alpha} + (\mu - 3)\vec{y} \\ \mu(\mu - 2)\vec{y} = \mu(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \end{cases}$$

$$\text{α) Αν } \mu(\mu - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \neq 0 \\ \& \\ \mu \neq 2 \end{cases} \text{ τότε } \vec{y} = \frac{1}{\mu - 2} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \text{ \& } \vec{x} = \frac{1}{\mu - 2} \vec{\alpha} + \frac{\mu - 3}{\mu - 2} \vec{\beta}$$

$$\text{β) Αν } \mu = 0 \text{ τότε } (\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{\alpha} - 3\vec{y} \\ \vec{x} + 3\vec{y} = \vec{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{\alpha} - 3\vec{u} \\ \vec{y} = \vec{u} \end{cases} \text{ όπου } \vec{u} \text{ τυχαίο διάνυσμα του } \mathcal{E}$$

$$\gamma) \text{ Αν } \mu=2 \text{ τότε } (\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{\alpha} \\ \vec{x} + \vec{y} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \end{cases}$$

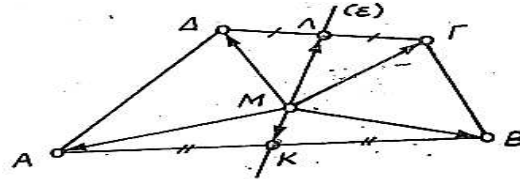
$$\text{Αν } \vec{\alpha} = \vec{\beta} \text{ το } \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{w} \\ \vec{y} = \vec{w} \end{cases} \text{ όπου } \vec{w} \text{ τυχαίο διάνυσμα του } \mathcal{E}$$

- Θεωρώ τετράπλευρο ABΓΔ και ονομάζω Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ. Αν (ε) είναι ευθεία που ορίζουν τα Κ, Λ και Μ ένα σταθερό σημείο, δείξτε ότι το σημείο Ν που καθορίζεται από τη σχέση

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD} \quad \text{είναι}$$

σημείο της (ε).

Απόδειξη Είναι



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD}) \\ &= 2\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{ML} = 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}) \end{aligned}$$

Επειδή τα $\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{ML}$ έχουν φορέα την (ε) $\Rightarrow$ τα $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}$ & $2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML})$ έχουν φορέα την (ε) $\Rightarrow$ το $\overrightarrow{MN}$ έχει φορέα την (ε), δηλαδή το Ν είναι σημείο της (ε)

- Αν Α, Β, Γ, Δ σημεία του χώρου $B \neq \Gamma$ και $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{BG}, k \in \mathbb{R}$ υπολογίστε το $x \in \mathbb{R}$ για να ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD} = x \cdot \overrightarrow{BG}$.

Λύση Είναι

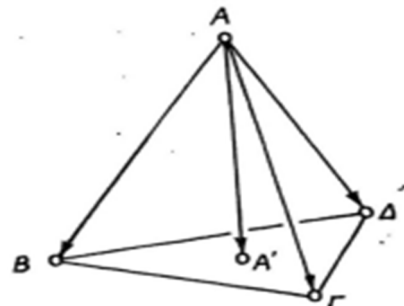
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD} &= x \cdot \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = x \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = (x+1) \cdot \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \\ k \cdot \overrightarrow{BG} &= (x+1) \overrightarrow{BG} \quad (\text{και αφού } B \neq \Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow k = x+1 \Leftrightarrow x = k-1 \end{aligned}$$

- Αν Α', Β', Γ', Δ' τα βαρύκεντρα των εδρών ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΑΒΓ του τετράεδρου ΑΒΓΔ δείξτε ότι $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$

Απόδειξη Είναι

$$\left. \begin{aligned} 3\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} \\ 3\overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BD} \\ 3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} \\ 3\overrightarrow{DD'} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{DD'}) = \vec{0}$$

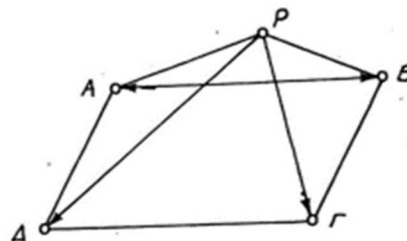
οπότε $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$



- Θεωρώ τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ. Δείξτε ότι, αν υπάρχει σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$, τότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

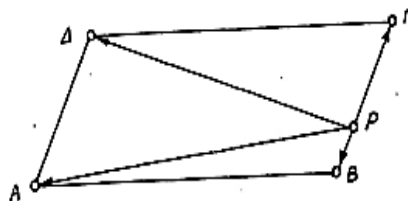
$$\begin{aligned} \text{Αν ισχύει } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GD} \Leftrightarrow \\ (B, A) &\sim (\Gamma, \Delta) \Leftrightarrow \text{τα } B\Delta, \Gamma A \text{ έχουν κοινό μέσο} \\ &\Leftrightarrow \text{το } AB\Gamma\Delta \text{ είναι παραλληλόγραμμο} \end{aligned}$$



- Θεωρώ παραλληλόγραμμο ABΓΔ και το σημείο P, έτσι ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} + 2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Δείξτε ότι $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{BA}$.

Απόδειξη Είναι

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} &= \\ (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{PB} + (\overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma D}) &= \\ (2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\Gamma D} &= \vec{0} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\Gamma D} = \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} &= 2 \cdot \overrightarrow{BA}\end{aligned}$$



- Θεωρώ τα τμήματα AΔ, BE, ΓZ που έχουν κοινό μέσο το O. Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = 2 \cdot \overrightarrow{A\Delta}$.

Απόδειξη Είναι

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} &= \\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AZ}) &= 2 \cdot \overrightarrow{AO} + 2 \cdot \overrightarrow{AO} = \\ \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{A\Delta} &= 2 \cdot \overrightarrow{A\Delta}\end{aligned}$$

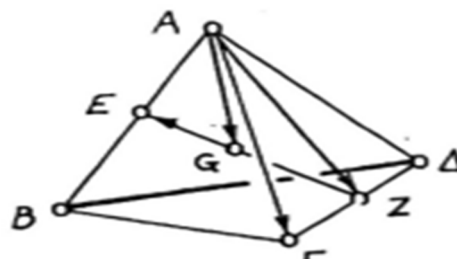
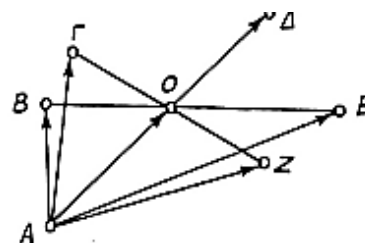
- Θεωρώ τετράεδρο ABΓΔ και τα μέσα E, Z των AB και ΓΔ αντίστοιχα. Αν G είναι το μέσο του EZ δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} = 4 \cdot \overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} + \overrightarrow{G\Delta} = \vec{0}$.

Απόδειξη Είναι

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}) = 2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AZ} = \\ &= 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{AG} = 4 \cdot \overrightarrow{AG}\end{aligned}$$

Επίσης είναι

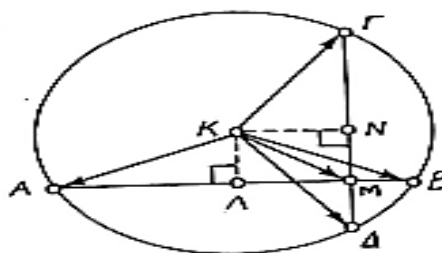
$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} + \overrightarrow{G\Delta} &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{G\Gamma} + \overrightarrow{G\Delta}) = \\ &= 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GZ} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GZ}) = 2 \cdot \vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$



- Θεωρώ κύκλο (K, R) και τις κάθετες χορδές του AB, ΓΔ που τέμνονται στο M. Δείξτε ότι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 2\overrightarrow{MK}$.

Απόδειξη Είναι

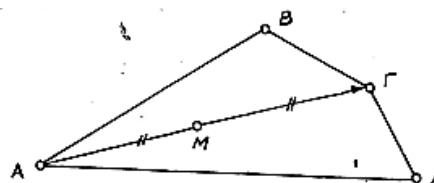
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} &= (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) + \\ &+ (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{K\Gamma}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{K\Delta}) = \\ &= 4\overrightarrow{MK} + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{K\Delta}) = \\ &= 4\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{KL} + 2\overrightarrow{KN} = 4\overrightarrow{MK} + 2(\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KN}) = \\ &= 4\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{KM} = 2\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{KM} = \\ &= 2\overrightarrow{MK} + 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KM}) = 2\overrightarrow{MK}.\end{aligned}$$



- Αν M το μέσο της διαγωνίου AΓ τετραπλεύρου ABΓΔ δείξτε ότι $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Απόδειξη Είναι

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} &= \vec{0} \text{ ισχύει αφού το M είναι μέσο του A}\Gamma\end{aligned}$$



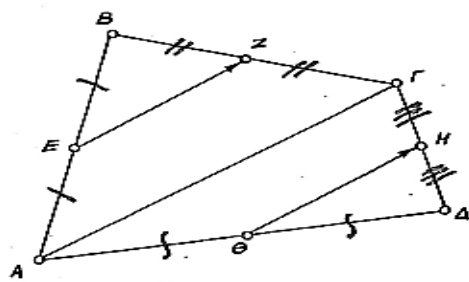
- Δείξτε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Απόδειξη Είναι

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{EZ} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BZ} \\ \overrightarrow{EZ} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GZ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AG} \text{ και}$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\Theta H} &= \overrightarrow{\Theta A} + \overrightarrow{AH} \\ \overrightarrow{\Theta H} &= \overrightarrow{\Theta A} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{\Theta H} = \overrightarrow{AG} \text{ οπότε}$$

$2\overrightarrow{EZ} = 2\overrightarrow{\Theta H} \Rightarrow \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Theta H} \Rightarrow (E, Z) \sim (\Theta, H)$ άρα τα τμήματα EZ, HΘ έχουν κοινό μέσο άρα το τετράπλευρο EZHΘ είναι παραλληλόγραμμο



- Θεωρώ τετράπλευρο ABΓΔ και ονομάζουμε K, Λ τα μέσα των ΓΔ, AB. Δείξτε ότι $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BΔ} + 2\overrightarrow{KΛ} = \vec{0}$.

Απόδειξη

Είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BΔ} + 2\overrightarrow{KΛ} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BΔ} + \overrightarrow{KΛ} + \overrightarrow{KΛ} = \\ \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BΔ} + (\overrightarrow{KΓ} + \overrightarrow{ΓA} + \overrightarrow{AΛ}) + (\overrightarrow{KΔ} + \overrightarrow{ΔB} + \overrightarrow{BΛ}) &= \\ (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{ΓA}) + (\overrightarrow{BΔ} + \overrightarrow{ΔB}) + (\overrightarrow{KΓ} + \overrightarrow{KΔ}) + (\overrightarrow{AΛ} + \overrightarrow{BΛ}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

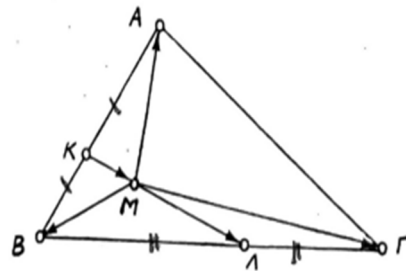
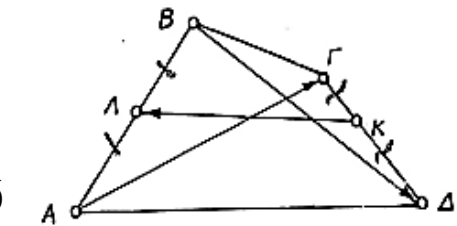
- Θεωρώ τρίγωνο ABΓ. Να προσδιοριστεί σημείο M ώστε $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MΓ} = \vec{0}$

Απόδειξη

Αν K, Λ τα μέσα των AB, AΓ αντίστοιχα είναι

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MΓ} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MΓ} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MΓ}) &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ 2 \cdot 2\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{MΛ} &= \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MΛ} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ 2\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{ΛK} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{ΛM} + \overrightarrow{MK} \Leftrightarrow \\ 3\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{ΛK} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{KΛ} \end{aligned}$$

Άρα, το σημείο M προσδιορίζεται



- Αν K,Λ τα μέσα των πλευρών AB, AΓ τριγώνου ABΓ δείξτε ότι $2 \cdot \overrightarrow{KΛ} = \overrightarrow{BΓ}$. Ποια πρόταση της ευκλείδειας γεωμετρίας επαληθεύεται;

Απόδειξη

Είναι

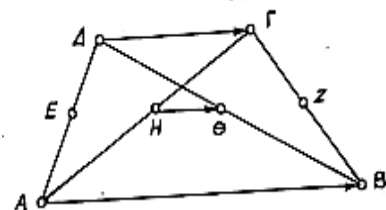
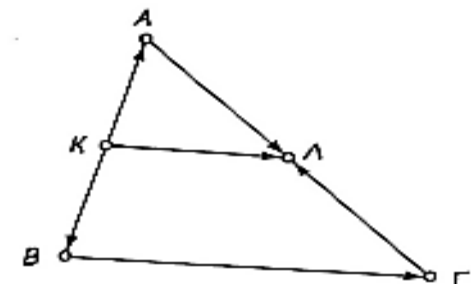
$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{KΛ} &= \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{ΓΛ} \\ \overrightarrow{KΛ} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AΛ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{KΛ} = \overrightarrow{BΓ}$$

Άρα $\overrightarrow{KΛ} \parallel \overrightarrow{BΓ}$ και $\|\overrightarrow{BΓ}\| = 2 \cdot \|\overrightarrow{KΛ}\|$ δηλαδή το

τμήμα που ορίζεται από τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό αυτής.

- Θεωρώ τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel ΓΔ$) και ονομάζω E, Z, H, Θ τα μέσα των AΔ, BΓ, AΓ, BΔ αντίστοιχα. Δείξτε ότι

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ΔΓ} = 2\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ} = 2\overrightarrow{HΘ}$. Ποιες προτάσεις της ευκλείδειας γεωμετρίας επαληθεύονται; **Απόδειξη** Είναι



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{EZ} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} \\ \overrightarrow{EZ} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GZ} \end{aligned} \right\} 2\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}$$

Επειδή $\overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow \overrightarrow{AG} \nearrow \nearrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$ &

$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AG}\|$. Άρα αφού $\overrightarrow{EZ} \parallel \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}$

και $2\|\overrightarrow{EZ}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}\|$ επαληθεύτηκε η πρόταση

Το τμήμα που ορίζεται από τα μέσα των μη παρ/μων πλευρών τραπεζίου, είναι παρ/λο προς τις βάσεις και ίσο με το ημιάθροισμα αυτών.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{H\Theta} &= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Theta} \\ \overrightarrow{H\Theta} &= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{D\Theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD}$$

Επειδή $\overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow \overrightarrow{GD}$ έχω $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GD} \parallel (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD})$ & $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{GD}\|$.

Αφού $\overrightarrow{H\Theta} \parallel (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD})$ & $2\|\overrightarrow{H\Theta}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD}\|$

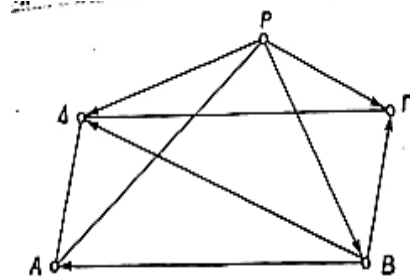
Άρα, το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

- Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο να προσδιοριστεί σημείο P ώστε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PD}$

Απόδειξη

Είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \\ (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{PB} + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG}) &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \\ 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BD} \\ (\text{και αφού } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BD}) \\ \text{είναι } 2\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow P &\equiv B \end{aligned}$$



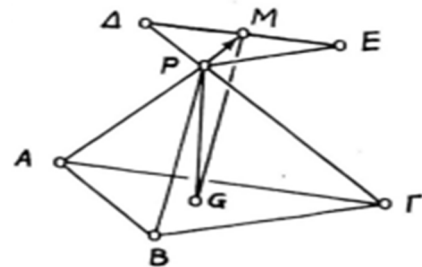
- Θεωρώ τρίγωνο $AB\Gamma$ και το τμήμα ΔE εκτός του επιπέδου του τριγώνου. Να βρεθεί σημείο P τέτοιο ώστε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE}$.

Λύση

Αν G το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και M το μέσο του ΔE τότε έχω

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PG} = 2\overrightarrow{PM} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{PG} &= 2\overrightarrow{PM} - 2\overrightarrow{PG} \Leftrightarrow \overrightarrow{PG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{GP} = 2\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

Άρα το P προσδιορίζεται.



- Θεωρώ τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου του για τα οποία είναι

$$3\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MG}\|$$

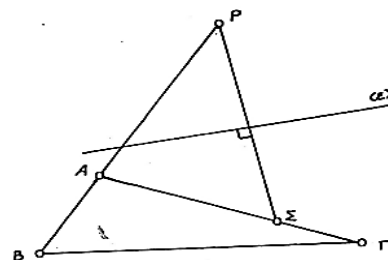
Λύση

Θεωρώ τα σημεία P, Σ τέτοια ώστε

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PB} \text{ & } \overrightarrow{A\Sigma} = 2\overrightarrow{\Sigma\Gamma}. \text{ Αν } M \text{ σημείο του}$$

γεωμετρικού τόπου είναι

$$\begin{aligned} \alpha) \quad 3\overrightarrow{AP} &= -2\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}) = \\ -2(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MP}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \quad (1) \end{aligned}$$



$$\beta) \vec{AS} = 2 \cdot \vec{\Sigma\Gamma} \Leftrightarrow \vec{MS} - \vec{MA} = 2(\vec{M\Gamma} - \vec{MS}) \Leftrightarrow 3\vec{MS} = \vec{MA} + 2\vec{M\Gamma} \quad (2)$$

Το σημείο M είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου αν και μόνο αν $3\|\vec{MA} - 2\vec{MB}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{M\Gamma}\| \stackrel{(1,2)}{\Leftrightarrow} 3\|\vec{MP}\| = 3\|\vec{MS}\| \Leftrightarrow \|\vec{MP}\| = \|\vec{MS}\|$ άρα, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος PΣ.

- Θεωρώ τρίγωνο ABΓ και ονομάζουμε Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Δείξτε ότι υπάρχει, μοναδικό σημείο G τέτοιο ώστε $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ και προσδιορίστε το.

Απόδειξη

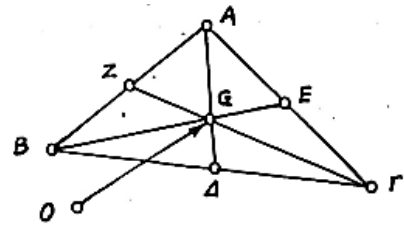
Υπαρξη του σημείου G

Θεωρώ σημείο O ως σημείο αναφοράς και το

διάνυσμα $\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} = \vec{OG}$. Είναι

$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= (\vec{GO} + \vec{OA}) + (\vec{GO} + \vec{OB}) + (\vec{GO} + \vec{OC}) = \\ &= 3 \cdot \vec{GO} + (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \\ &= 3 \cdot \vec{GO} + 3 \cdot \vec{OG} = 3(\vec{GO} + \vec{OG}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει σημείο G, ένα τουλάχιστον, ώστε $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.



Μονοσήμαντο του G

Αν υπάρχει και άλλο σημείο G' τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} \vec{G'A} + \vec{G'B} + \vec{G'C} &= \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{G'G} + \vec{GA}) + (\vec{G'G} + \vec{GB}) + (\vec{G'G} + \vec{GC}) = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow 3\vec{G'G} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) &= \vec{0} \Rightarrow 3\vec{G'G} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G'G} = \vec{0} \Rightarrow G' \equiv G \end{aligned}$$

Προσδιορισμός του σημείου G

$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GB} + \vec{GC} = -\vec{GA} \Leftrightarrow \\ (\vec{GA} + \vec{AB}) + (\vec{GA} + \vec{AC}) &= -\vec{GA} \Leftrightarrow 2\vec{GA} + (\vec{AB} + \vec{AC}) = -\vec{GA} \Leftrightarrow \\ \vec{AB} + \vec{AC} &= -3\vec{GA} \Leftrightarrow 2 \cdot \vec{AD} = 3\vec{AG} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AD} \quad (2) \end{aligned}$$

Άρα, το σημείο G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου.

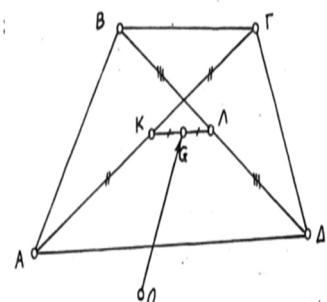
Σημείωση Είναι $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BE}$, $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CZ}$. Οι σχέσεις αυτές εκφράζουν ότι οι διάμεσοι

κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο G που απέχει από κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

- Θεωρώ τετράπλευρο ABΓΔ. Δείξτε ότι υπάρχει, μοναδικό σημείο G τέτοιο ώστε, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ και προσδιορίστε το.

Απόδειξη Υπαρξη του G. Θεωρώ σημείο O ως σημείο

αναφοράς και το διάνυσμα $\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4} = \vec{OG}$ (1). Τότε



$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta} &= \\ \text{έχω } (\vec{GO} + \vec{OA}) + (\vec{GO} + \vec{OB}) + (\vec{GO} + \vec{O\Gamma}) + (\vec{GO} + \vec{O\Delta}) &= \\ 4\vec{GO} + (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta}) &= 4\vec{GO} + 4\vec{OG} = \vec{0} \end{aligned}$$

Μονοσήμαντο του G. Αν υπάρχει και άλλο σημείο G' έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \vec{G'A} + \vec{G'B} + \vec{G'\Gamma} + \vec{G'\Delta} &= \vec{0} \Rightarrow \\ (\vec{G'G} + \vec{GA}) + (\vec{G'G} + \vec{GB}) + (\vec{G'G} + \vec{G\Gamma}) + (\vec{G'G} + \vec{G\Delta}) &= \vec{0} \Rightarrow \text{Προσδιορισμός του} \\ 4\vec{G'G} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta}) &= \vec{0} \Rightarrow \vec{G'G} = \vec{0} \Rightarrow G' \equiv G \end{aligned}$$

σημείου G. Είναι $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta} = \vec{0}$ (και αν K, Λ τα μέσα των $A\Gamma, B\Delta$) είναι $(\vec{GA} + \vec{G\Gamma}) + (\vec{GB} + \vec{G\Delta}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{GK} + 2\vec{G\Lambda} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GK} + \vec{G\Lambda} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{KG} + \vec{G\Lambda}$ άρα το σημείο G είναι το μέσο του $K\Lambda$.

- Θεωρώ τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ και ονομάζω A', B', Γ', Δ και τα κέντρα βάρους των εδρών $B\Gamma\Delta, A\Gamma\Delta, AB\Delta, AB\Gamma$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο G , τέτοιο ώστε $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta} = \vec{0}$ και προσδιορίστε το.

Λύση Ύπαρξη του σημείου G. Θεωρώ σημείο O ως σημείο αναφοράς και το διάνυσμα

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta}}{4} = \vec{OG}. \quad (1) \text{ Τότε}$$

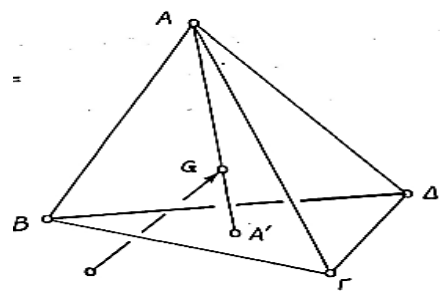
$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta} &= (\vec{GO} + \vec{OA}) + (\vec{GO} + \vec{OB}) + (\vec{GO} + \vec{O\Gamma}) + (\vec{GO} + \vec{O\Delta}) = \\ 4\vec{GO} + (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta}) &= 4\vec{GO} + 4\vec{OG} = 4(\vec{GO} + \vec{OG}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Μονοσήμαντο του σημείου G. Αν υπάρχει και άλλο σημείο G' τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \vec{G'A} + \vec{G'B} + \vec{G'\Gamma} + \vec{G'\Delta} &= \vec{0} \Rightarrow \\ (\vec{G'G} + \vec{GA}) + (\vec{G'G} + \vec{GB}) + (\vec{G'G} + \vec{G\Gamma}) + (\vec{G'G} + \vec{G\Delta}) &= \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4\vec{G'G} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta}) &= \vec{0} \Rightarrow 4\vec{G'G} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G'G} = \vec{0} \Rightarrow G' \equiv G \end{aligned}$$

Προσδιορισμός του σημείου G. Επειδή

$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta} = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{GB} + \vec{G\Gamma} + \vec{G\Delta} = -\vec{GA} \Leftrightarrow 3\vec{GA'} = -\vec{GA} \Leftrightarrow \vec{AG} = 3\vec{GA'} \\ \text{άρα το } G &\text{ κείται στην } AA'. \text{ Όμοια βρίσκω ότι } \vec{BG} = 3\vec{BG'}, \vec{\Gamma G} = 3\vec{\Gamma\Gamma'}, \vec{\Delta G} = 3\vec{\Delta\Delta'} \text{ και} \\ \text{συμπεραίνω ότι σε κάθε τετράεδρο τα τμήματα } AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta' &\text{ διέρχονται από το} \\ \text{ίδιο σημείο } G &\text{ (κ.β. του τετραέδρου). Τα τμήματα } AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta' \text{ λέγονται} \\ \text{διάμεσοι του τετραέδρου και είναι } \vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AA'}, \vec{GA'} = \frac{1}{4}\vec{AA'}. \end{aligned}$$



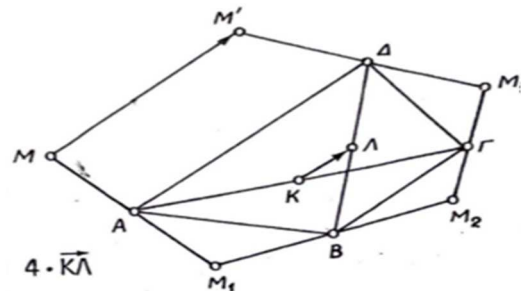
- Θεωρώ τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ονομάζω K, Λ τα μέσα των $A\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα.

α) Δείξτε ότι $2\vec{K\Lambda} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B}$.

β) Αν M τυχαίο σημείο και $M \xrightarrow{\Sigma(A)} M_1, M \xrightarrow{\Sigma(B)} M_2, M \xrightarrow{\Sigma(\Gamma)} M_3, M \xrightarrow{\Sigma(\Delta)} M'$ δείξτε ότι $\vec{MM'} = 4\vec{K\Lambda}$.

Απόδειξη

α) Είναι



$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \\ \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DL} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} \\ \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BL} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{\Gamma B}$$

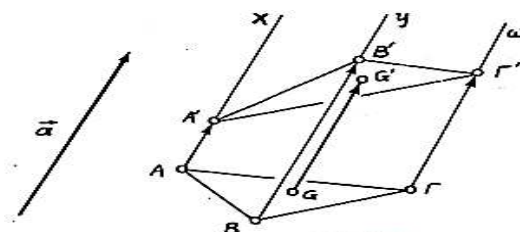
β) Είναι $\overrightarrow{MM_2} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ & $\overrightarrow{M_2M'} = 2 \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ άρα,

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{M_2M'} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{K\Lambda} = 4\overrightarrow{K\Lambda}$$

Παρατήρηση $K \equiv \Lambda \Leftrightarrow M \equiv M'$

- Θεωρώ τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$, τα βαρύκεντρα τους G , G' και τα μέσα α , β , γ , των AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$. Αν g το βαρύκεντρο του τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ δείξτε ότι το g είναι το μέσο του GG' .

Απόδειξη



$$3\overrightarrow{Gg} = \overrightarrow{A\alpha} + \overrightarrow{B\beta} + \overrightarrow{\Gamma\gamma} \text{ και } 3\overrightarrow{G'g} = \overrightarrow{A'\alpha} + \overrightarrow{B'\beta} + \overrightarrow{\Gamma'\gamma} \text{ άρα,}$$

$$3(\overrightarrow{Gg} + \overrightarrow{G'g}) = (\overrightarrow{A\alpha} + \overrightarrow{A'\alpha}) + (\overrightarrow{B\beta} + \overrightarrow{B'\beta}) + (\overrightarrow{\Gamma\gamma} + \overrightarrow{\Gamma'\gamma}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{Gg} + \overrightarrow{G'g} = \vec{0} \Leftrightarrow Gg = gG'$$

Άρα, το g είναι το μέσον του GG' .

- Θεωρώ σταθερό τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις ομόρροπες ημιευθείες Ax , By , $\Gamma\omega$. Αν A' , B' , Γ' μεταβλητά σημεία των Ax , By , $\Gamma\omega$ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = \vec{a}$, $\vec{a}$ σταθερό διάνυσμα, δείξτε ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ παραμένει σταθερό.

Απόδειξη

Θεωρώ το σταθερό κέντρο βάρους G του τριγώνου $AB\Gamma$. Αν G' είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου $A'B'\Gamma'$, είναι

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} \Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}\vec{a} \Rightarrow G' = \text{σταθερό σημείο}$$

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκη, Σ. (1969). «Μαθήματα αναλυτικής γεωμετρίας», Αθήνα
- Βαρουχάκη, Ν.Χ. (1971). «Συμπλήρωμα γεωμετρίας», Αθήνα, Κλαπάκης
- Γρατσιάτου, Ι. «Διανυσματικός λογισμός», Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Γιαχούδη
- Καλοπίση, Τ. «Γεωμετρικά θέματα», τόμος 2^{ος}, Αθήνα
- Κυριακόπουλος, Ν. (1984). «Διανυσματικός λογισμός», Αθήνα, Εκδόσεις Παπαδημητρίου
- Τσάγκα, Γ.Φ. (1979). «Στοιχεία αναλυτικής γεωμετρίας», Αθήνα, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου
- Armitte, A. "Vectors"
- Cunningham, J. "Vectors"
- Davis, Harry F. & Snider, Arthur D. (1987). "Introduction to vector analysis", McGraw Hill
- Hoffman Banesh (2012). "About vectors", Dover publications
- Mardsen J.E. & Troba, A.J. (2023) «Διανυσματικός λογισμός», 6^η έκδοση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
- Nouh, Hassan (2019). "Mathematics vectors & their applications"

- Paerl Rudgars (2023). “Vector analysis 2023 Guide for beginners”
- Spiegel, M. “Vector analysis”
- Tallack, J.C. (2009). “Introduction to vector analysis”, Cambridge University press