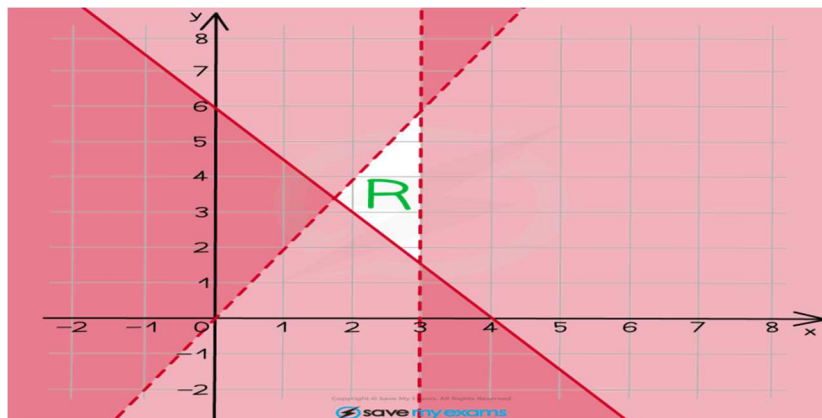




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Γραφική επίλυση συστημάτων εξισώσεων και ανισώσεων

Σπουδαστές: Κανακάρης Παντελής (AM 8882)
Καϊάφας Δημήτριος Άγγελος (AM 8878)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2023–2024

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.12.2022**
Ημερομηνία κατάθεσης: **....01.2024**
Ημερομηνία εξέτασης: **....02.2024**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (Μ.Εδ.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

32 λυμένα προβλήματα

Λέξεις κλειδιά

Γραμμικό σύστημα, λύση γραμμικού συστήματος, γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος, συμβιβαστό/ αδύνατο/ αόριστο σύστημα

Περίληψη

Αν έχω δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y π.χ. $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ και αναζητώ το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέω ότι έχω να λύσω ένα **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y .

Λύση του **γραμμικού συστήματος** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y επιλύεται γραφικά και αλγεβρικά.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους.

- Σύστημα με μοναδική λύση (συμβιβαστό). Αν σχεδιάσω τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του συστήματος, στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, είναι ευθείες γραμμές που τέμνονται σε ένα σημείο, το οποίο είναι η μοναδική λύση του συστήματος.
- Αδύνατο ονομάζεται το σύστημα εξισώσεων όταν οι ευθείες γραμμές που παριστάνουν τις εξισώσεις του, είναι παράλληλες μεταξύ τους, δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, άρα οπότε το σύστημα δεν έχει καμία λύση.
- Αόριστο ονομάζεται το σύστημα των εξισώσεων όταν οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του, είναι ευθείες γραμμές που συμπίπτουν δηλαδή έχω μόνο μία ευθεία γραμμή, άρα και μία μόνο εξίσωση.

Inequalities (5,5)

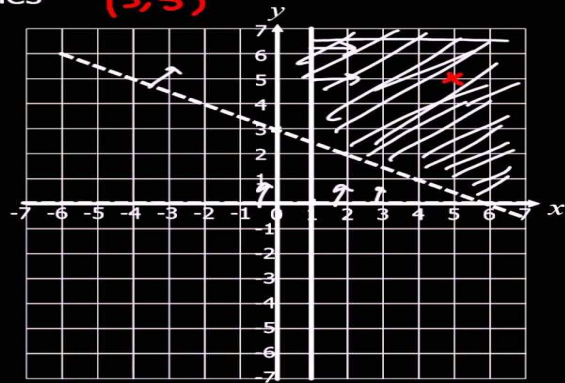
Shade the region where:

$$x \geq 1 \quad \text{5} \geq 1 \quad \checkmark$$

$$y > -0.5x + 3 \quad \text{5} > 0.5 \quad \checkmark$$

$$y > 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{x}{5} \bigg/ \frac{0}{3} \bigg/ \frac{2}{2} \bigg/ \frac{4}{1}$$



1. $2y < 4x - 6$
 $y \leq \frac{1}{2}x + 1$

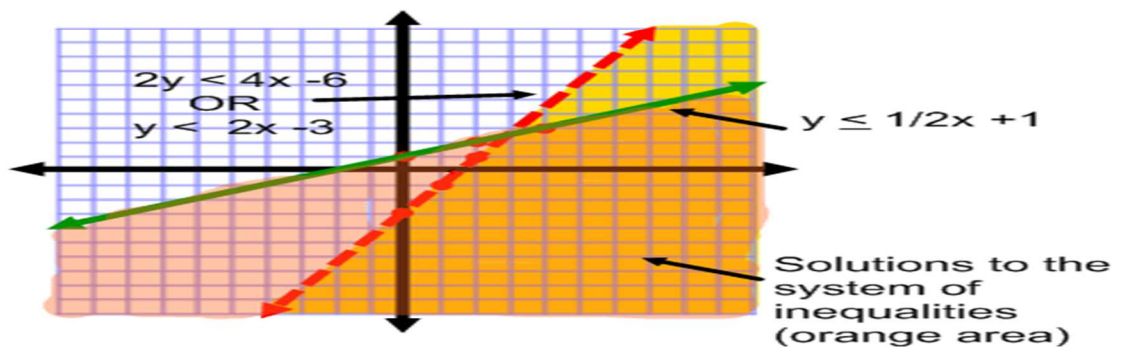
Rewrite in slope intercept form:

$$\frac{2y}{2} < \frac{4x}{2} - \frac{6}{2}$$

$$y < 2x - 3$$

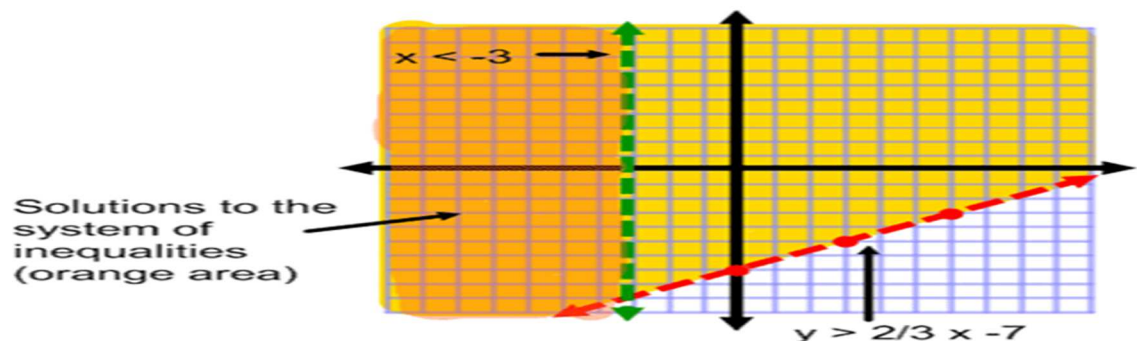
$$y \leq \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{- already in slope intercept form}$$

Graph and shade each inequality.



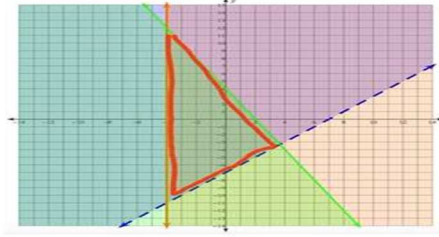
2. $y > \frac{2}{3}x - 7$
 $x < -3$

Both inequalities are already in correct form.

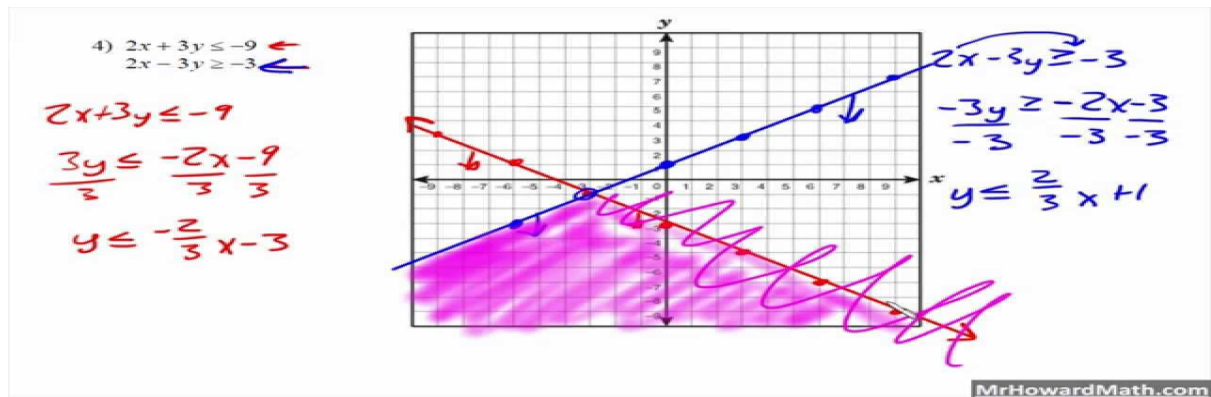


Example 1: Find the solution to the system of linear inequalities by graphing. Shade the solution region.

$$\begin{cases} x - y < 7 \\ x \geq -4 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$



© 2014 Study.com



MrHowardMath.com

GRAPHING INEQUALITIES - Graph the inequality.

$$y \leq x - 2$$

1st - graph the boundary line

$$y = x - 2$$

next: test points

$$(0, 0)$$

$$0 \leq 0 - 2$$

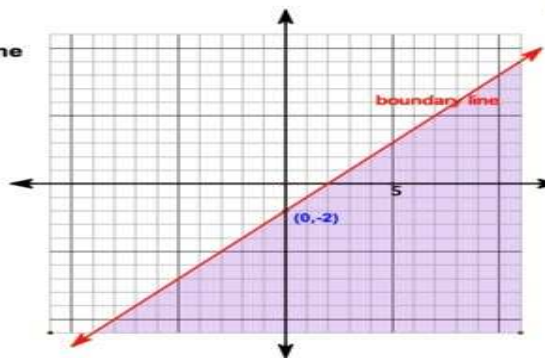
$$0 \leq -2$$

false, $(0, 0)$

is not a

solution

(wrong side)



another test point

$$(5, 0)$$

$$0 \leq 5 - 2$$

$$0 \leq 3$$

true, $(5, 0)$

is a solution

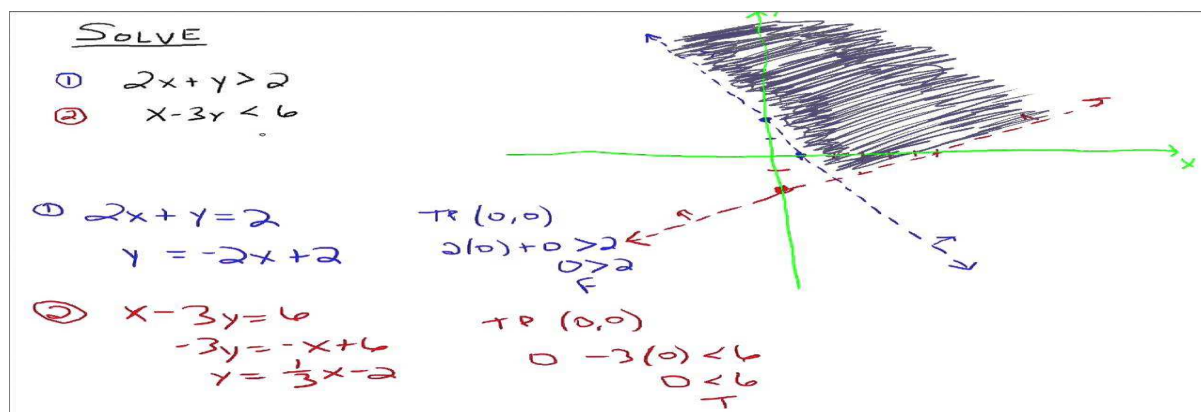
(shade this side)

$$(10, 2)$$

$$2 \leq 10 - 2$$

$$2 \leq 8$$

true $(10, 2)$ is a solution



Solve by Graphing

$$y > 2x - 2 \quad -2x - y \leq 6$$

Solve for y

$$y > 2x - 2 \rightarrow y > 2x - 2$$

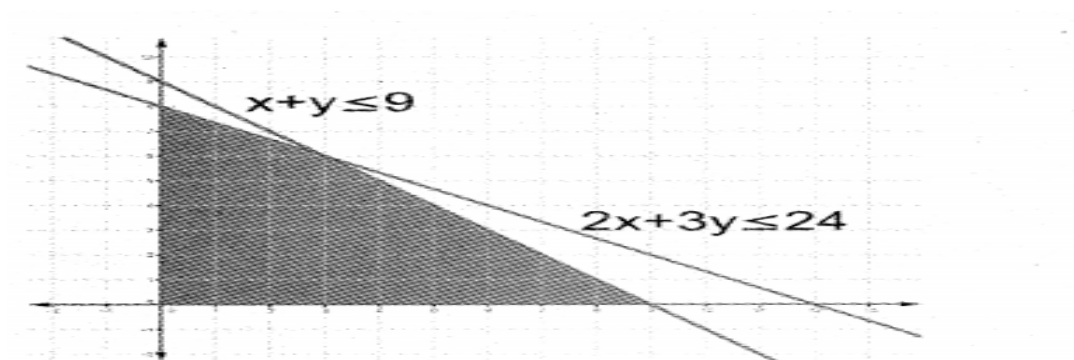
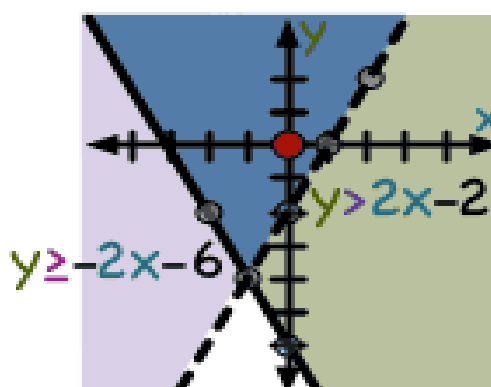
$$-2x - y \leq 6 \rightarrow y \geq -2x - 6$$

Test Point (0,0)

$$y > 2x - 2 \quad y \geq -2x - 6$$

$$0 > 2(0) - 2 \quad 0 \geq -2(0) - 6$$

$$0 > -2 \quad \checkmark \quad 0 \geq -6 \quad \checkmark$$

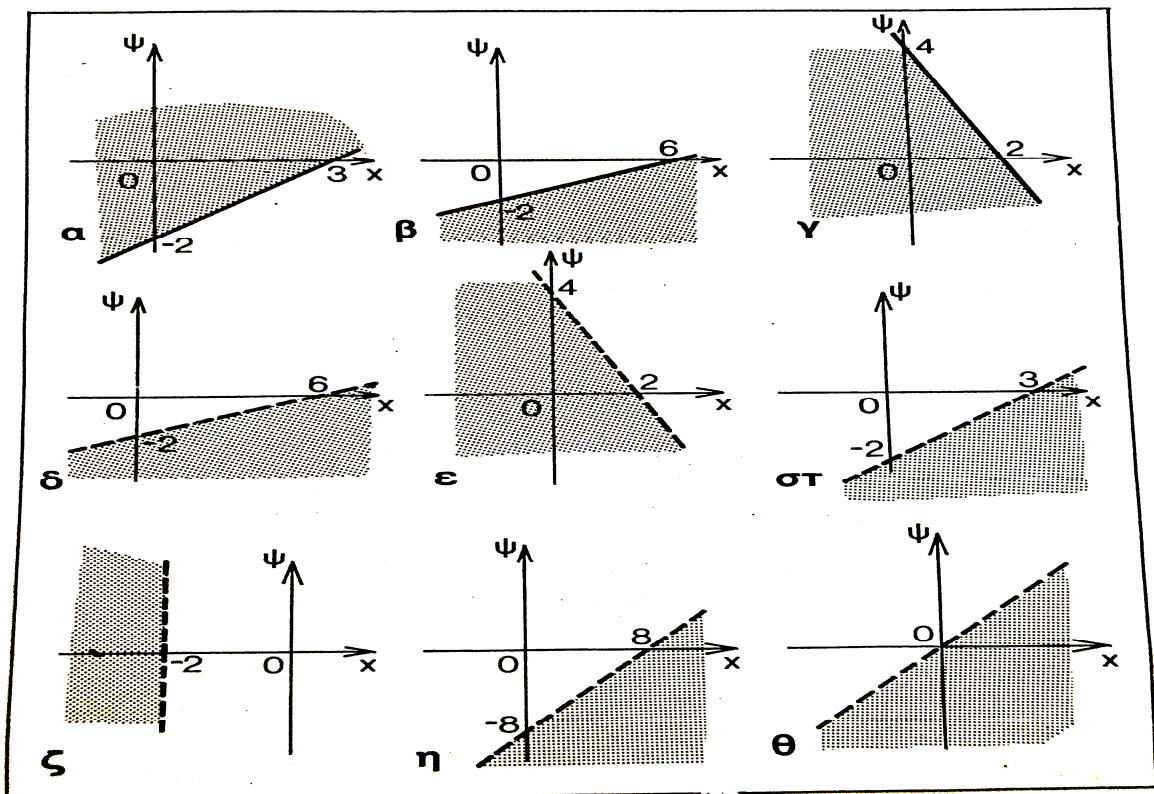


• Λύστε γραφικά τις παρακάτω ανισώσεις, με $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

α) $2x - 3y - 6 \geq 0$ **β)** $x - 3y \leq 6$ **γ)** $2x + y \geq 4$ **δ)** $x - 3y < 6$ **ε)** $2x + y > 4$

στ) $2x - 3y - 6 < 0$ **ζ)** $x > -2$ **η)** $x - y < 8$ **θ)** $x - y < 0$

Λύση: Για να λύσω γραφικά μία οποιαδήποτε από τις ανισώσεις αυτές, κατασκευάζω πρώτα την ευθεία γραμμή την οποία παριστάνει η κάθε εξίσωση. Στη συνέχεια αντικαθιστώ τα x, y του 1^{ου} μέλους της ανισώσεως, με τις συντεταγμένες $(0, 0)$ της αρχής των αξόνων (ή τις συντεταγμένες κάποιου άλλου σημείου, που δεν επαληθεύει την αντίστοιχη εξίσωση). Έτσι, εντοπίζω το ημιεπίπεδο που παριστάνει το σύνολο λύσεων της ανισώσεως και διαγράφω το άλλο ημιεπίπεδο. Αν εργαστώ με τον τρόπο αυτό, βρίσκω τα επόμενα σχήματα:



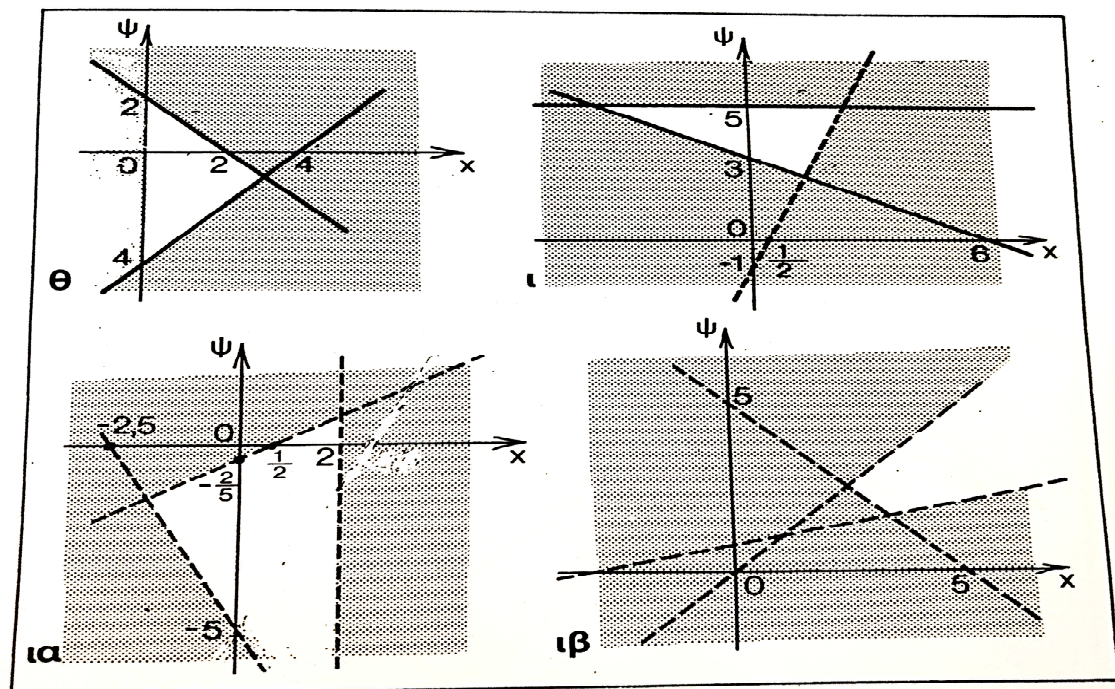
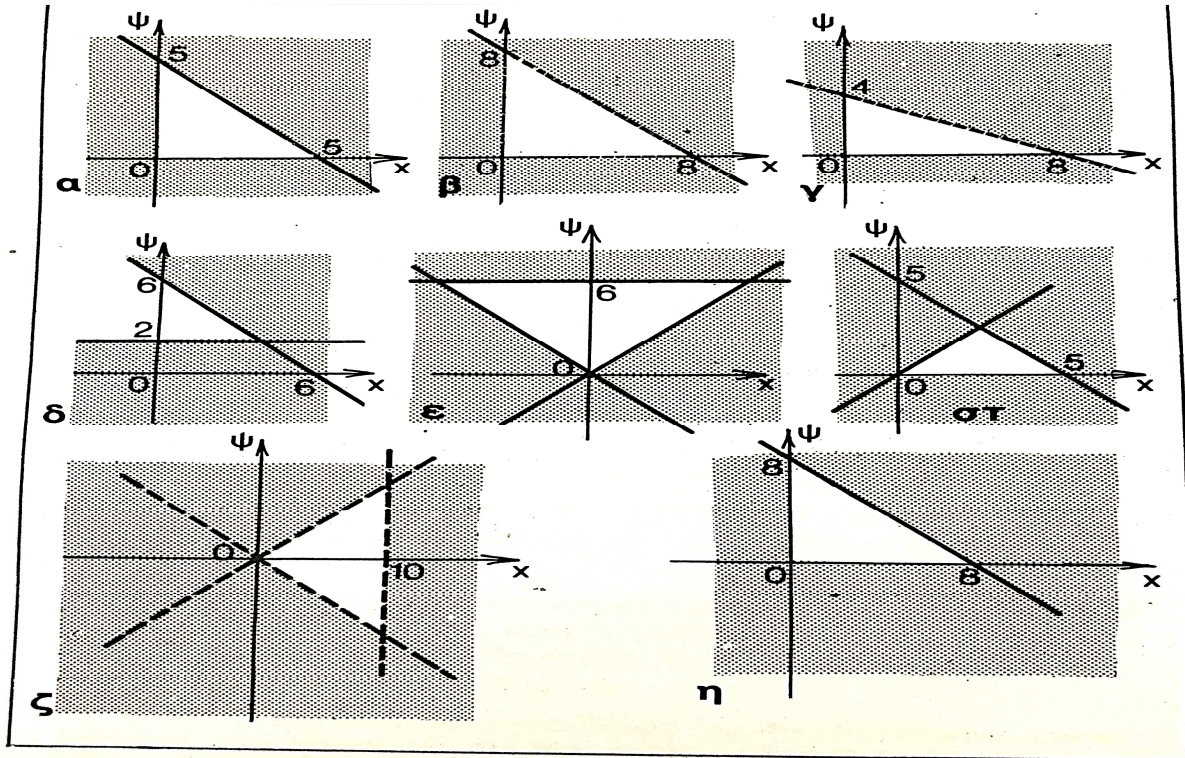
• Λύστε γραφικά τα παρακάτω συστήματα, με $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

α) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 8 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ x + 2y > 8 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} y \leq 2 \\ x + y \leq 6 \\ y \geq -x \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} y \leq 6 \\ y \geq x \\ x + y \leq 5 \end{cases}$

στ) $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \\ y > -x \end{cases}$ **ζ)** $\begin{cases} x < 10 \\ y < x \\ y \leq 8 - x \end{cases}$ **η)** $\begin{cases} x \geq \theta \\ y \geq \theta \end{cases}$ **θ)** $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ y \geq x - 4 \end{cases}$ **ι)** $\begin{cases} y > 2x - 1 \\ x + 2y \geq 6 \\ y \leq 5 \end{cases}$

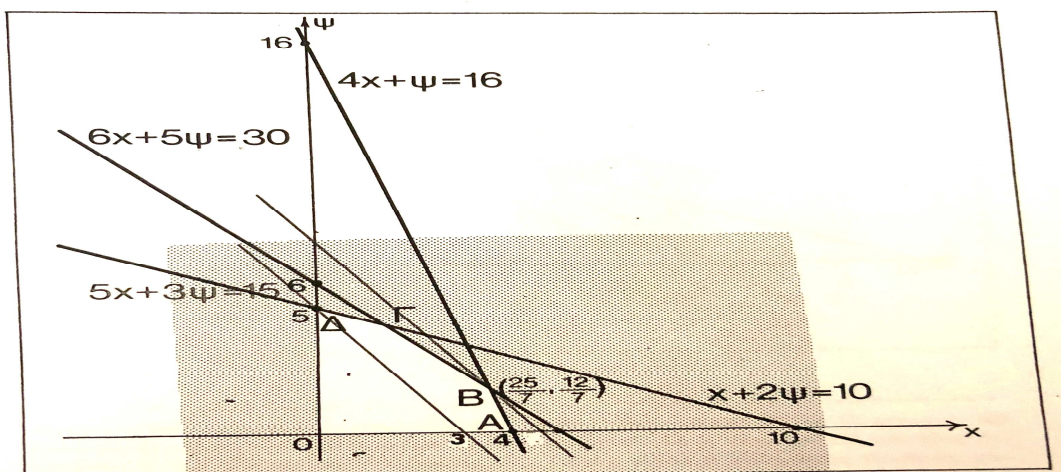
ια) $\begin{cases} 2x - 5y > 1 \\ 2x + 5y > -5 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ **ιβ)** $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y + 3 < 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$

Λύση: Για κάθε σύστημα ανισώσεων κατασκευάζω πρώτα τις ευθείες γραμμές, που παριστάνουν τις αντίστοιχες εξισώσεις και στη συνέχεια διαγράφω τα ημιεπίπεδα, στα οποία δεν αληθεύει (ισχύει) η κάθε μία από τις ανισώσεις του συστήματος. Το μέρος του επιπέδου που δε διαγράφεται, παριστάνει το σύνολο των λύσεων του συστήματος. Στα παρακάτω σχήματα το λευκό μέρος παριστάνει το σύνολο λύσεων του κάθε συστήματος.



- Βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $5x + 3y$ με περιορισμούς: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4x + y \leq 16$, $6x + 5y \leq 30$, $x + 2y \leq 10$, όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

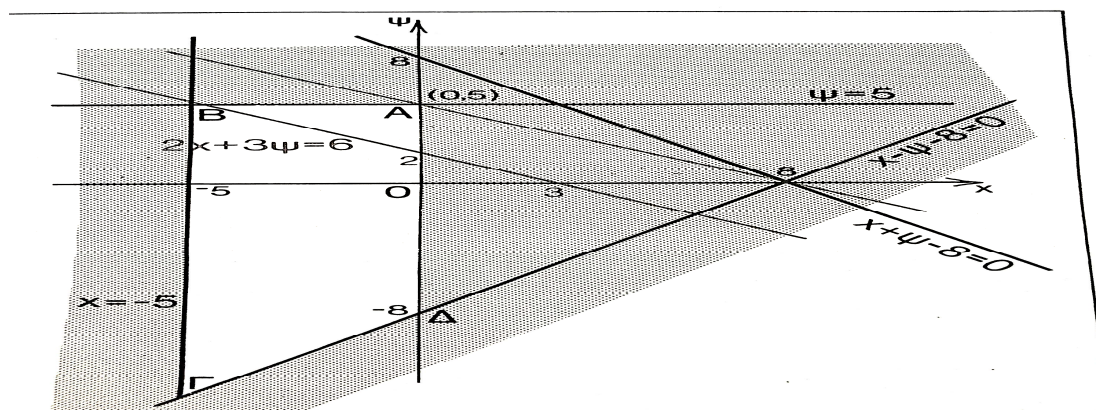
Λύση: Βρίσκω πρώτα το σύνολο των λύσεων του συστήματος των ανισώσεων και βλέπω ότι τα x, y παίρνουν τιμές στο πεντάγωνο ΟΑΒΓΔ. Στη συνέχεια κατασκευάζω μία ευθεία γραμμή της μορφής $5x + 3y = a$ π.χ. την $5x + 3y = 15$ και με παράλληλη μετατόπιση της, διακρίνω ότι το ζητούμενο μέγιστο βρίσκεται στην κορυφή Β, η οποία είναι τομή των ευθειών $\begin{cases} 6x + 5y = 30 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$. Λύνοντας το σύστημα, βρίσκω ότι οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι $(x, y) = \left(\frac{25}{7}, \frac{12}{7}\right)$, άρα η μέγιστη τιμή της παράστασης $5x + 3y$ είναι $5 \cdot \frac{25}{7} + 3 \cdot \frac{12}{7} = \frac{125}{7} + \frac{36}{7} = \frac{161}{7} = 23$.



- Βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ που επαληθεύουν το σύστημα $\begin{cases} -5 \leq x \leq 0 \\ x - y - 8 \leq 0 \\ y - 5 \leq 0 \\ x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$ ώστε να μεγιστοποιηθεί

η τιμή της παράστασης $2x + 3y$.

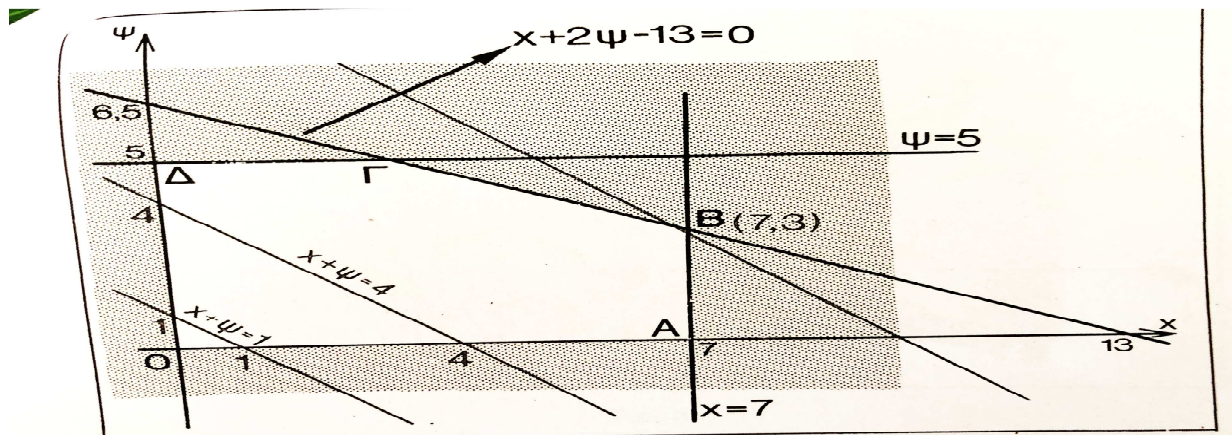
Λύση: Βρίσκω πρώτα το σύνολο των λύσεων του συστήματος των ανισώσεων και βλέπω ότι τα x, y παίρνουν τιμές στο τραπέζιο ΑΒΓΔ. Στη συνέχεια κατασκευάζω μια ευθεία γραμμή της μορφής $2x + 3y = a$ π.χ. τη $2x + 3y = 6$ και διακρίνω με παράλληλη μετατόπιση της, ότι το ζητούμενο μέγιστο βρίσκεται στην κορυφή Α(0, 5). Άρα, το μέγιστο της παράστασης $2x + 3y$ είναι $2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$.



- Βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ που επαληθεύουν το σύστημα
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ 2x + y - 13 \leq 0 \end{cases}$$
 ώστε να

μεγιστοποιηθεί η τιμή της παράστασης $x + y$.

Λύση: Το σύνολο των λύσεων του συστήματος των ανισώσεων παριστάνεται από το πεντάγωνο ΟΑΒΓΔ. Με παράλληλη μετατόπιση μίας ευθείας γραμμής που έχει εξίσωση της μορφής $x + y = a$, π.χ. της $x + y = 4$, διακρίνω ότι το μέγιστο της παράστασης $x + y$ βρίσκεται στην κορυφή Β(7,3) και ισούται με $7 + 3 = 10$.



- Έστω δύο ειδών χάπια, P_1 & P_2 . Το P_1 περιέχει 40 μονάδες βιταμίνης Β & 25 μονάδες βιταμίνης C. Το P_2 περιέχει 35 μονάδες βιταμίνης Β & 30 μονάδες βιταμίνης C. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός χαπιών από κάθε είδος που πρέπει να χορηγηθούν σε αθλητή ώστε αυτός να λάβει τουλάχιστον 6.800 μονάδες βιταμίνης Β & τουλάχιστον 4.900 μονάδες βιταμίνης C;

Λύση:

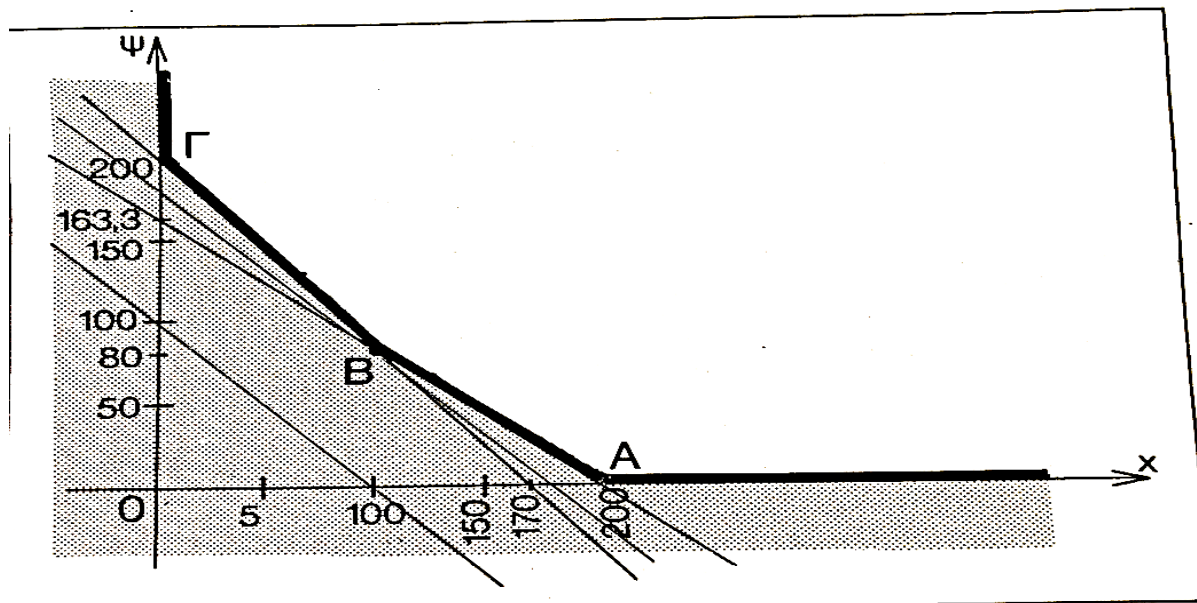
		Μονάδες	
Είδος χαπιού	Ποσότητα σε τεμάχια	Βιταμίνης Β	Βιταμίνης C
P_1	x	40	25
P_2	y	35	30
Σύνολο	$x + y$	$40x + 35y$	$25x + 30y$

Αν x ο αριθμός των χαπιών τύπου P_1 και y ο αριθμός των χαπιών τύπου P_2 , $x, y \in \mathbb{N}^*$ που καταναλώνει ο αθλητής, τότε αυτός λαμβάνει η βιταμίνη Β που και στους δύο τύπους χαπιών θα είναι $40x + 35y$. Αφού θέλω να εξασφαλίσω 6.800 μονάδες

βιταμίνης Β και 4.900 μονάδες βιταμίνης C, έχω το σύστημα
$$\begin{cases} 40x + 25y \geq 6800 \\ 35x + 30y \geq 4900 \end{cases}$$
. Οι

λύσεις του συστήματος των ανισώσεων, παριστάνονται με εκείνα τα σημεία που έχουν ως συντεταγμένες φυσικούς αριθμούς και βρίσκονται στην ανοιχτή περιοχή $xAB\Gamma y$.

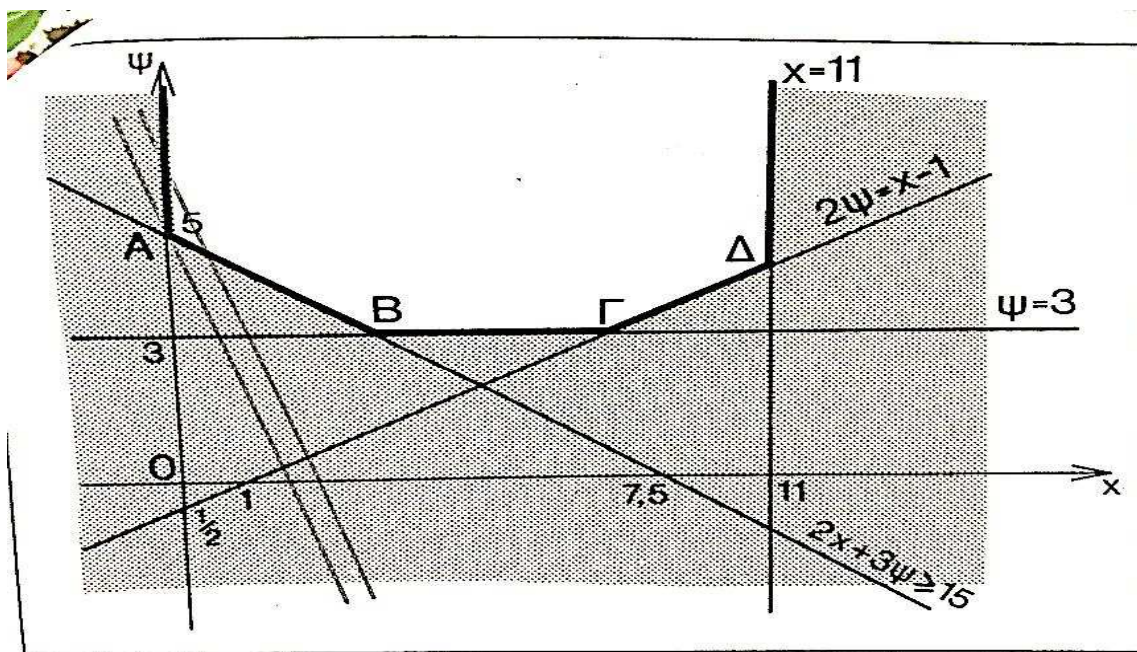
Επειδή όσο πιο μικροί είναι οι φυσικοί αριθμοί, τόσο πιο μικρό είναι και το άθροισμα τους, θα βρω το ελάχιστο της παράστασης $x + y$. Κατασκευάζω μία ευθεία γραμμή που έχει εξίσωση της μορφής $x + y = a$ π.χ. την $x + y = 100$ και με παράλληλη μετατόπιση της βρίσκω ότι η παράσταση $x + y$ έχει ελάχιστη τιμή στην κορυφή Β (100, 80). Άρα, στον αθλητή πρέπει να χορηγηθούν τουλάχιστον 100 χάπια τύπου P_1 και τουλάχιστον 80 χάπια τύπου P_2 .



- Βρείτε τους $x, y \in \mathbb{N}$ που επαληθεύουν το σύστημα
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 11 \\ y \geq 3 \\ 2x + 3y \geq 15 \\ 2y \geq x - 1 \end{array} \right\} \text{ ώστε να}$$

ελαχιστοποιείτε το $3x + y$.

Λύση: Το σύνολο των λύσεων του συστήματος των ανισώσεων είναι η ανοικτή περιοχή, πού περικλείεται από την πολυγωνική γραμμή $yAB\Gamma\Delta z$. Κατασκευάζω μία ευθεία γραμμή, πού έχει εξίσωση της μορφής $3x + y = \alpha$, π.χ την $3x + y = 6$ και με παράλληλη μετατόπιση της βλέπω ότι η παράσταση $3x + y$ ελαχιστοποιείται στο σημείο $A(0,5)$ και η τιμή που λαμβάνει είναι $3 \cdot 0 + 5 = 5$.

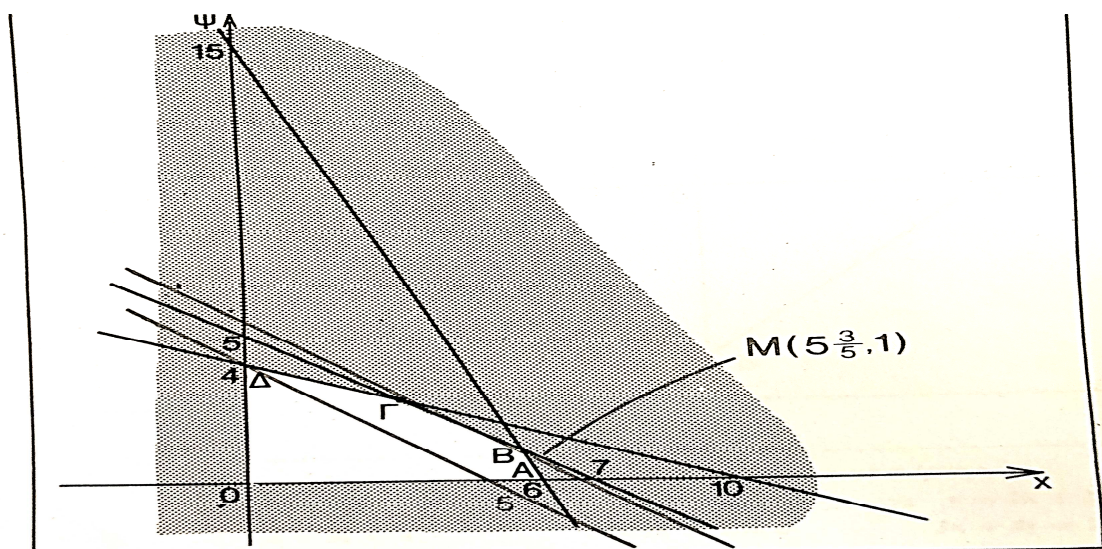


- Βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $40x + 50y$ όταν οι $x, y \in \mathbb{R}$ επαληθεύουν το

$$\text{σύστημα} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 30 \\ 5x + 7y \leq 35 \\ 2x + 5y \leq 20 \end{cases}$$

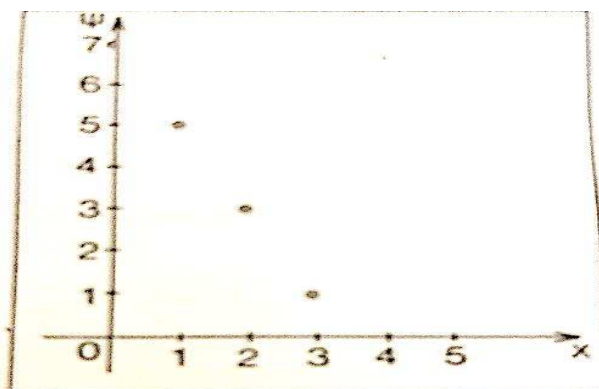
Λύση: Η λύση του συστήματος των ανισώσεων παριστάνεται με το ζητούμενο πολύγωνο ΟΑΒΓΔ. Κατασκευάζω μία ευθεία γραμμή, που έχει εξίσωση της μορφής $40x + 50y = \alpha$, π.χ την $40x + 50y = 200$ και με παράλληλη μετατόπιση της βλέπω ότι το ζητούμενο μέγιστο βρίσκεται στην κορυφή Β, οι συντεταγμένες της οποίας δίνονται από τη λύση του συστήματος $\begin{cases} 5x + 2y = 30 \\ 5x + 7y = 35 \end{cases}$ και είναι $(x, y) = \left(\frac{28}{5}, 1\right)$. Άρα, το ζητούμενο μέγιστο είναι 40

$$\cdot \frac{28}{5} + 50 \cdot 1 = 224 + 50 = 274$$



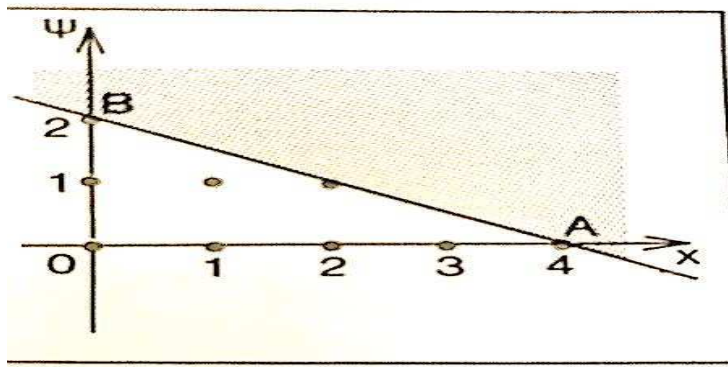
- Γράψτε τα διατεταγμένα ζεύγη που επαληθεύουν στο σύνολο $\mathbb{N}$ την εξίσωση $2x + y = 7$ και ακολούθως δείξτε τα γραφικά.

Λύση: Δίνοντας στο x διαδοχικά τις τιμές 0, 1, 2, 3 βρίσκω από την εξίσωση ότι οι αντίστοιχες τιμές του y είναι 7, 5, 3, 1 ενώ για $x > 3$ προκύπτουν αρνητικές τιμές του y . Άρα, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $2x + y = 7$ είναι το $\{(0, 7), (1, 5), (2, 3), (3, 1)\}$ και παριστάνετε από τα τέσσερα σημεία που έχουν ως συντεταγμένες αυτά τα διατεταγμένα ζεύγη.



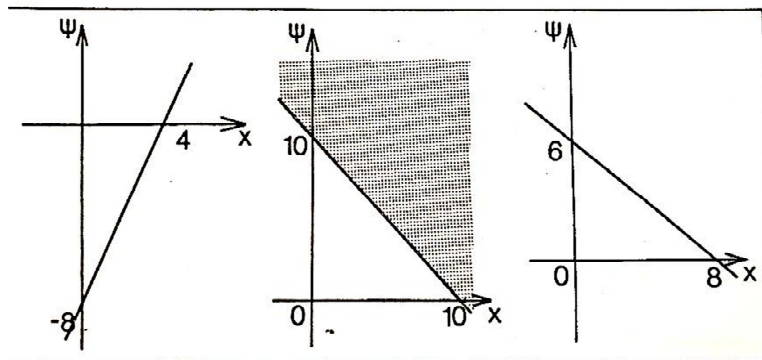
- Γράψτε τα διατεταγμένα ζεύγη που επαληθεύουν στο $\mathbb{N}$ την ανίσωση $x + 2y \leq 4$ και ακολούθως δείξτε τα γραφικά.

Λύση: Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης είναι τα σημεία του τριγώνου OAB , που ως έχουν συντεταγμένες φυσικούς αριθμούς. Έτσι, το x παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες του 4 και το y παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες του 2. Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης είναι το $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (4,0)\}$ και παριστάνει γραφικά με τα σημεία που έχουν ως συντεταγμένες αυτά τα διατεταγμένα ζεύγη.



- Δείξτε γραφικά το σύνολο λύσεων στο $\mathbb{R}$ των παρακάτω ανισώσεων: α) $2x - y = 8$ β) $x + y \leq 10$ γ) $3x + 4y = 24$.

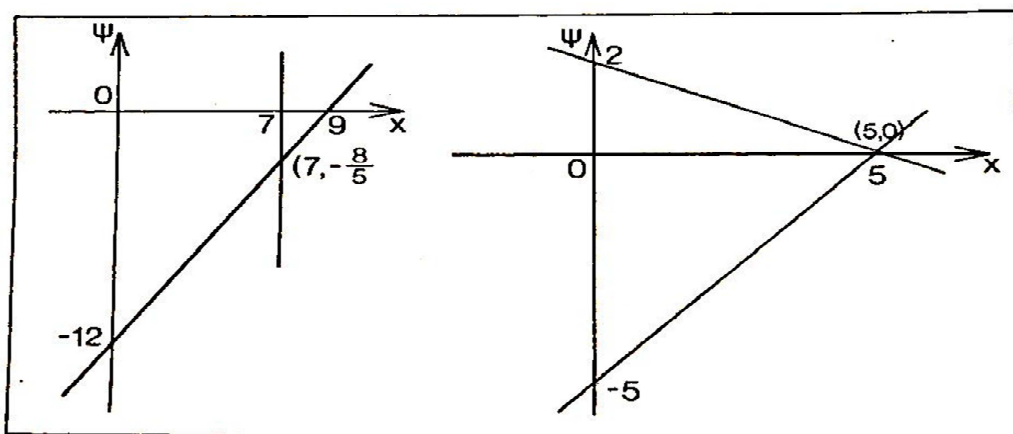
Λύση: Τα σύνολα των λύσεων των δυο εξισώσεων α) & γ) παριστάνονται από τα σημεία των αντίστοιχων ευθειών, ενώ το σύνολο λύσεων της ανισότητας β) είναι το ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $x + y = 10$. Βρίσκω με το γνωστό τρόπο τα παρακάτω σχήματα.



- Λύστε γραφικά τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων, όπου $x, y \in \mathbb{R}$:

α) $\begin{cases} x = 7 \\ 4x - 3y = 36 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$

Λύση: Για το κάθε ένα σύστημα κατασκευάζω εκείνες τις ευθείες γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος και μετρώ τις συντεταγμένες των σημείων τους. Έτσι, έχω τα παρακάτω σχήματα:



• Λύστε με μια από τις αριθμητικές μεθόδους τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

Λύση : α) Εφαρμόζω τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών (πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της 1^{ης} εξίσωσης επί 3 και έχω διαδοχικά:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

β) Εφαρμόζω την ίδια μέθοδο (πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της 1^{ης} εξίσωσης επί -1) και έχω διαδοχικά:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - 5y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 1 \\ x - 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ -6y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

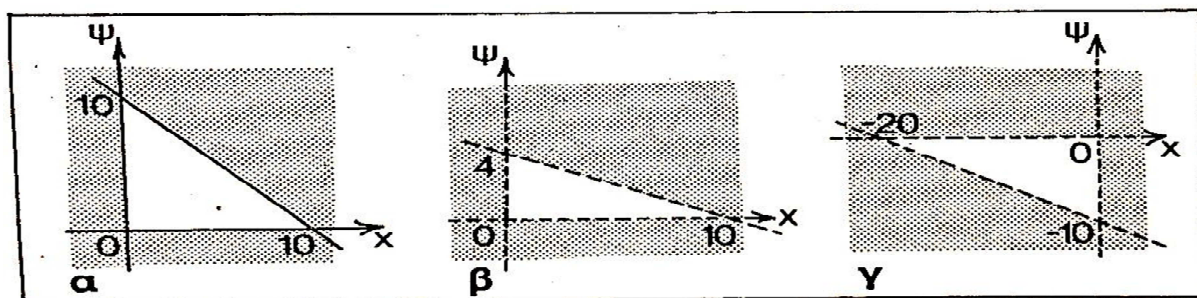
γ) Αφού η 1^η εξίσωση είναι λυμένη ως προς y, εφαρμόζω την μέθοδο της αντικατάστασης, οπότε

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x + 4(2x + 3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

• Λύστε τα παρακάτω συστήματα ανισώσεων με $x, y \in \mathbb{R}$.

α) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 5y < 20 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x + 2y + 20 > 0 \end{cases}$.

Λύση: Για κάθε σύστημα βρίσκω τα ημιεπίπεδα που παριστάνουν τα σύνολα των λύσεων των ανισώσεων του συστήματος και παίρνω την τομή τους. Έτσι προκύπτουν τα παρακάτω σχήματα.



- Αν η εξίσωση $x^2 + ax + b = 0$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς $x = 2$ και $x = -1$, βρείτε τις τιμές των a, b .

Λύση: Αφού οι αριθμοί $2, -1$ είναι ρίζες της εξίσωσης θα την επαληθεύουν. Η εξίσωση για $x = 2$ και $x = -1$ δίνει αντιστοίχως τις ισότητες $\begin{cases} 4 + 2a + b = 0 \\ 1 - a + b = 0 \end{cases}$ οι οποίες αποτελούν σύστημα με αγνώστους τα a, b . Λύνοντας το σύστημα βρίσκω ότι $a = -1, b = -2$.

- Αν ισχύει ότι $y = px + q$, βρείτε τις τιμές των p, q δοθέντος ότι για $x = 1$ είναι $y = -3$ και ότι για $x = 3$ είναι $y = 9$.

Λύση: Τα ζεύγη $(1, -3), (3, 9)$ θα επαληθεύουν τον τύπο $y = px + q$ άρα ισχύει ότι $\begin{cases} -3 = p \cdot 1 + q \\ 9 = p \cdot 3 + q \end{cases}$. Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι $\begin{cases} p = 6 \\ q = -9 \end{cases}$.

- Βρείτε το σύνολο $A \cap B$, όταν $\begin{cases} A = \{(x, y) : 2x + 3y = 0\} \\ B = \{(x, y) : 4x - y = 7\} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Λύση: Τα A, B είναι τα σύνολα λύσεων των εξισώσεων $2x + 3y = 0$ και $4x - y = 7$ αντιστοίχως. Έτσι, το $A \cap B$ είναι σύνολο των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$

Αν το λύσω με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών (πολλαπλασιάζοντας π.χ. τα μέλη της 2^{ης} επί 3) βρίσκω $x = \frac{3}{2}, y = 1$. Συνεπώς, $A \cap B = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 1 \right) \right\}$.

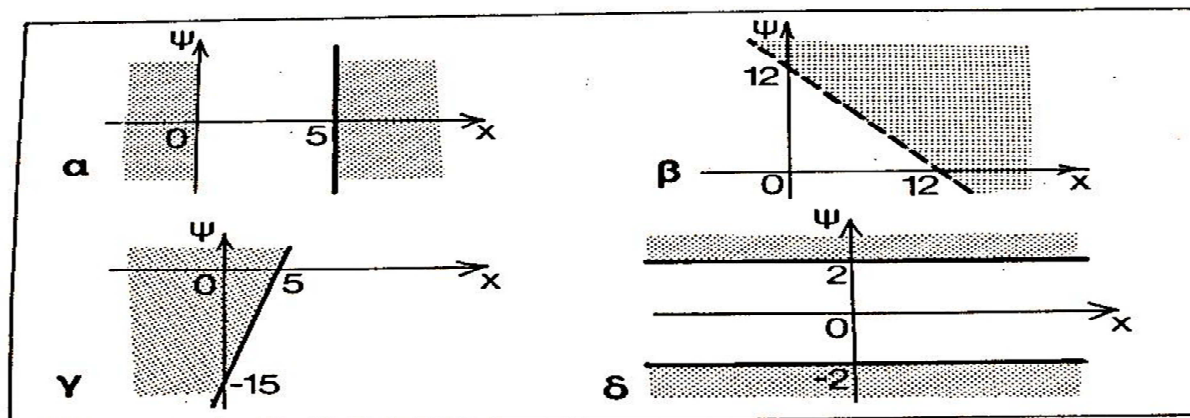
- Βρείτε γραφικά τα σύνολα λύσεων των παρακάτω ανισοτήτων: **α)** $0 \leq x \leq 5$ **β)** $x + y < 12$ **γ)** $y \leq 3x - 15$ **δ)** $-2 \leq y \leq 2$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση: **α)** Οι ανισώσεις $0 \leq x \leq 5$ γράφονται πιο αναλυτικά ως $x + 0 \cdot y \leq 5$ και $x + 0 \cdot y \geq 0$. Άρα, έχω σύστημα δύο ανισώσεων, το σύνολο των λύσεων του οποίου είναι η λωρίδα που περιέχεται από τις ευθείες $x = 0$ και $x = 5$ (σχήμα α).

β) Το σύνολο των λύσεων της ανισότητας $x + y < 12$ παριστάνεται με το ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $x + y = 12$ (σχήμα β). Στο σύνολο των λύσεων δεν ανήκουν τα σημεία αυτής της ευθείας.

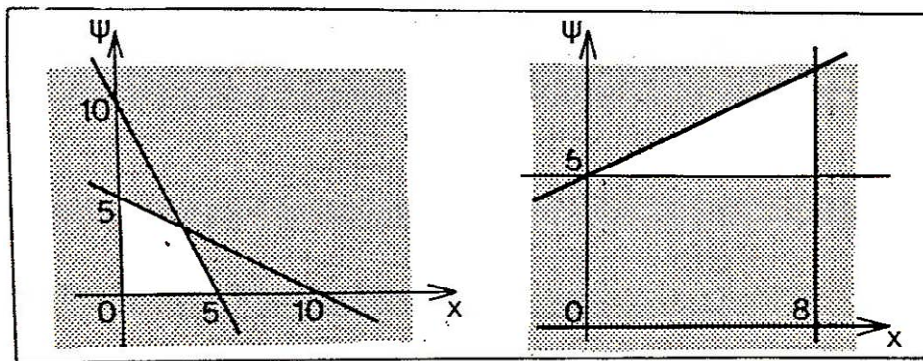
γ) Το σύνολο των λύσεων της $y \leq 3x - 15$ παριστάνεται με το ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $y = 3x - 15$ (σχήμα γ).

δ) Οι ανισότητες $-2 \leq y \leq 2$ γράφονται πιο αναλυτικά $0 \cdot x + y \leq 2$ και $0 \cdot x + y \geq -2$. Άρα, έχω σύστημα δύο ανισώσεων, το σύνολο των λύσεων του οποίου είναι η λωρίδα (σχήμα δ) που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $y = 2$ και $y = -2$.



- Λύστε τα παρακάτω συστήματα με $x, y \in \mathbb{R}$. α) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 10 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x \leq 8 \\ y \geq 5 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$.

Λύση: α) Διαγράφοντας το ημιεπίπεδο στο οποίο δεν αληθεύει κάθε ανίσωση του συστήματος, καταλήγω στο αριστερό σχήμα.



β) Αν εργασθώ με τον ίδιο τρόπο καταλήγω στο δεξιό σχήμα.

- Λύστε με αριθμητική μέθοδο τα παρακάτω συστήματα όπου $x, y \in \mathbb{R}$ α) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \frac{x-1}{4} + y = 8 \\ \frac{y-1}{6} + x = 6 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{2x+4y}{5} - \frac{x-y}{3} = -2 \end{cases}$.

Λύση: α) Αν απαλείψω τους παρονομαστές στην 1^η εξίσωση βρίσκω το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$ το οποίο λύνω εύκολα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών (πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της 2^{ης} εξίσωσης του επί 2) και βρίσκω $x = 2, y = 3$.

β) Αν απαλείψω τους παρονομαστές των εξισώσεων, βρίσκω το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} x - 1 + 4y = 32 \\ y - 1 + 6x = 36 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x + 4y = 33 \\ 6x + y = 37 \end{cases}$ το οποίο λύνω εύκολα με τη μέθοδο των αντίθετων

συντελεστών (πολλαπλασιάζοντας π.χ. τα μέλη της 2^{ης} εξίσωσης επί -4) και βρίσκω τελικά $x = 5$, $y = 7$

γ) Απαλείφω τους παρονομαστές των δύο εξισώσεων και βρίσκω το ισοδύναμο σύστημα
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3(2x + 4y) - 5(x - y) = -30 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 17y = -30 \end{cases}$$

Αν αφαιρέσω κατά μέλη την 1^η από την 2^η εξίσωση, βρίσκω $16y = -32$, δηλαδή $y = -2$ και βάζοντας την τιμή αυτή στην 1^η εξίσωση βρίσκω $x = 4$. Έτσι, η λύση του συστήματος είναι $x = 4$, $y = -2$.

• Ο τύπος $A = \frac{22}{7}(R - r)$ ($R - r$) δίνει το εμβαδόν ενός κυκλικού στίβου. Αν $A = 44$ και $R + r = 7$, υπολογίστε τις τιμές των R , r .

Λύση: Αντικαθιστώντας, ο τύπος γράφεται ως $44 = \frac{22}{7} \cdot 7(R - r)$ ή $44 = 22(R - r)$ ή

$R - r = \frac{44}{22} = 2$. Έτσι, για τα R , r έχω τις δύο ισότητες $\begin{cases} R + r = 7 \\ R - r = 2 \end{cases}$ οι οποίες αποτελούν

σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους από τη λύση του οποίου βρίσκω $R = 4,5$ & $r = 2,5$.

• Ένας μανάβης έχει άγνωστο αριθμό κιλών πορτοκάλια. Με αυτά γέμισε 63 ομοιόμορφα καφάσια με ίδιο αριθμό κιλών στο κάθε ένα και του περίσσεψε 1 κιλό. Αν είχε ακόμη 47 κιλά πορτοκάλια, θα γέμιζε 67 καφάσια ακριβώς. Πόσα κιλά πορτοκάλια είχε και πόσα κιλά χωράει κάθε καφάσι;

Λύση: Αν έχει x κιλά πορτοκάλια και κάθε καφάσι χωράει y κιλά, τότε σύμφωνα με τα δεδομένα, έχω τις δύο ισότητες $\begin{cases} x = 63y + 1 \\ x + 47 = 67y \end{cases}$ οι οποίες αποτελούν σύστημα που δίνει

$y = 12$ και $x = 757$. Συνεπώς, ο μανάβης έχει συνολικά 757 κιλά πορτοκάλια ενώ το κάθε καφάσι χωράει 12 κιλά.

• Σε ένα εργοστάσιο κατασκευάζονται δύο τύποι ψυγείων, Α Β. Κάθε ψυγείο τύπου Α δίνει κέρδος 600 € και χρειάζεται 20 ώρες για συναρμολόγηση, 6 ώρες για βάψιμο και 3 ώρες για δοκιμή. Κάθε ψυγείο τύπου Β δίνει κέρδος 400 € και χρειάζεται 30 ώρες για συναρμολόγηση, 5 ώρες για βάψιμο και 2 ώρες για δοκιμή.

Αν σε ένα μήνα το εργοστάσιο μπορεί να διαθέσει 6.000 ώρες για συναρμολόγηση, 3.000 ώρες για βάψιμο και 600 ώρες για δοκιμή, πόσα ψυγεία τύπου Α και πόσα τύπου Β πρέπει να κατασκευάσει, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος;

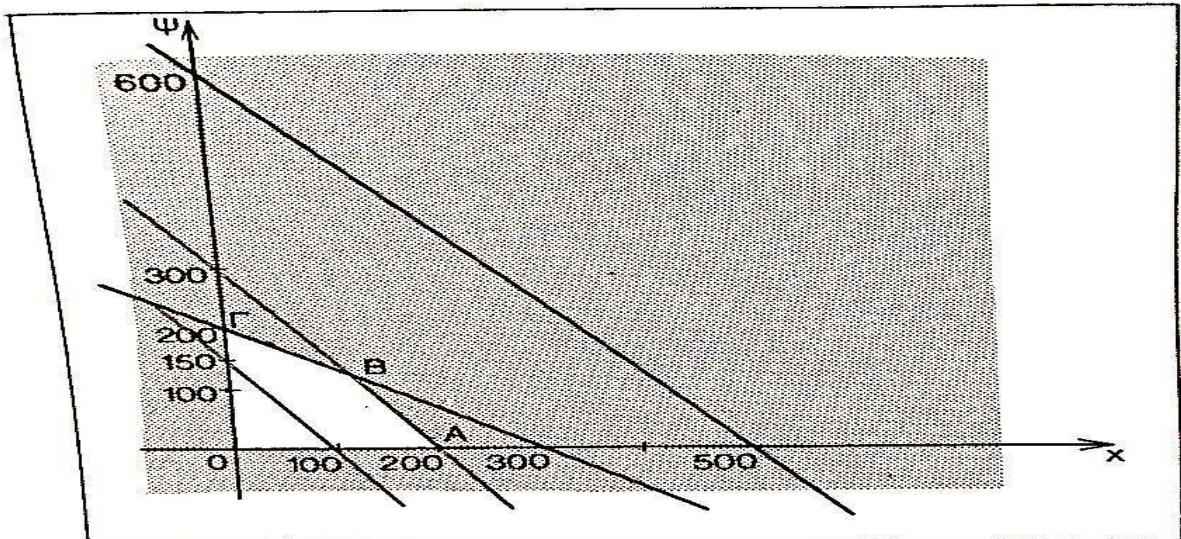
Λύση:

Τύπος ψυγείου	Κέρδος	Ώρες			
		Συναρμολόγηση	Βάψιμο	Δοκιμή	Σύνολο
A	600 €	20	6	3	29
B	400 €	30	5	2	37

Αν το εργοστάσιο κατασκευάζει κάθε μήνα x ψυγεία τύπου Α και y ψυγεία τύπου Β, τότε το αναμενόμενο κέρδος του είναι $600x + 400y$. Θέλω η παράσταση αυτή να γίνει

μέγιστη, με τούς εξής περιορισμούς $\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 30y \leq 6.000 \\ 6x + 5y \leq 3.000 \\ 3x + 2y \leq 600 \end{array} \right\}$. Το σύνολο των λύσεων αυτού του

συστήματος των ανισώσεων παριστάνεται με τα σημεία του τετράπλευρου ΟΑΒΓ, τα οποία έχουν ως συντεταγμένες φυσικούς αριθμούς.



Κατασκευάζω τώρα μια ευθεία (ε), που έχει εξίσωση της μορφής $600x + 400y = \alpha$, π.χ. την $600x + 400y = 6000$ ή $6x + 4y = 600$ ή $3x + 2y = 300$ και κάνω παράλληλη μετατόπιση της για να δω σε ποιά κορυφή του τετραπλεύρου ΟΑΒΓ έχω τη μέγιστη τιμή της παράστασης.

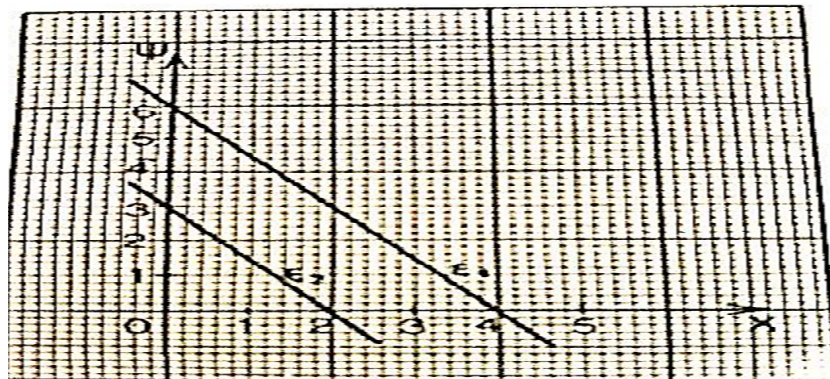
Παρατηρώ ότι η (ε) είναι παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ (διότι η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $3x + 2y = 600$), άρα θα έχω μέγιστο σε ένα οποιοδήποτε σημείο της πλευράς ΑΒ το οποίο έχει ως συντεταγμένες φυσικούς αριθμούς.

Τέτοια σημεία της ΑΒ είναι π.χ τα $B(120,120)$ και $A(200,0)$. Έτσι το μέγιστο κέρδος είναι $600 \cdot 120 + 400 \cdot 120 = 72.000 + 48.000 = 120.000$ €.

• Λύστε γραφικά κάθε μία από τις εξισώσεις: **α)** $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, **β)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Τι παρατηρείτε για τις λύσεις τους;

Λύση: Επειδή και οι δύο εξισώσεις είναι 1^{ου} βαθμού ως προς x, y οι λύσεις κάθε μίας θα παριστάνονται με τα σημεία της αντίστοιχης ευθείας. Έτσι, οι λύσεις της ανισότητας (α) παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από τα σημεία $(0,6), (4,0)$, αφού για $x=0$ έχω $y=6$ και για $x=4$ έχω $y=0$, ενώ οι λύσεις της ανισότητας (β) παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας (ε_2) που διέρχεται από τα σημεία $(0,3), (2,0)$, αφού για $x=0$ έχω $y=3$ και για $x=2$ έχω $y=0$.

Παρατηρώ ότι οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) είναι παράλληλες διότι έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (ή κατεύθυνσης) δηλαδή την ίδια κλίση επειδή ισχύουν οι σχέσεις $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1,5$. Άρα, το σύστημα των δύο εξισώσεων δεν έχει λύση (αδύνατο).



- Λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} + 1 = 0 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} - 3 = 0 \end{cases}$$

Λύση: Αν πολλαπλασιάσω τα μέλη της 2^{ης} εξίσωσης επί -2 (για να εφαρμόσω τη μέθοδο

των αντίθετων συντελεστών) βρίσκω το ισοδύναμο σύστημα
$$\begin{cases} \frac{-4x}{3} + \frac{y}{2} + 6 = 0 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} + 1 = 0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις βρίσκω ότι $-x + 7 = 0$ ή $x = 7$ και αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην 1^η εξίσωση έχω διαδοχικά: $\frac{7}{3} - \frac{y}{2} = -1$ ή $\frac{y}{2} = \frac{7}{3} + 1$ ή $y = \frac{20}{3}$. Άρα, λύση του συστήματος είναι το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = \left(7, \frac{20}{3}\right)$.

- Λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3(x - y) - 4x + 5 = 6(2x + 1) - 55 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 28 \end{cases}$$

Λύση: Αν κάνω πράξεις στην κάθε εξίσωση, προκύπτουν διαδοχικά τα ισοδύναμα συστήματα:

$$\begin{cases} 3x - 3y - 4x + 5 = 12x + 6 - 55 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 28 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 3x - 3y - 4x + 5 = 12x + 6 - 55 \\ x^2 + 2x + y^2 - 4y - x^2 + 2x - y^2 - 4y = -1 - 4 + 1 + 4 - 28 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} -13x - 3y = -54 \\ 4x - 8y = -28 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 13x + 3y = 54 \\ x - 2y = -7 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 13x + 3y = 54 \\ x = 2y - 7 \end{cases}$$

Το σύστημα στο οποίο κατέληξα έχει ως λύση το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (3, 5)$.

• Λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} (x+y-1)^2 - (x-y)(x+y) + 63 = 2y(y+x) \\ \frac{2x-y}{7} - \frac{2y-x}{4} + 9 = y \end{cases}$$

Λύση: Εκτελώντας πράξεις στην 1^η εξίσωση και απαλοιφή παρονομαστών στη 2^η εξίσωση, έχω διαδοχικά τα ισοδύναμα συστήματα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2y - 2x - (x^2 - y^2) + 63 = 2y^2 + 2xy \\ 4(2x-y) - 7(2y-x) + 9 \cdot 28 = 28y \end{cases}$$

$$\text{ή} \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2y - 2x - x^2 + y^2 - 2y^2 - 2xy = -1 - 63 \\ 8x - 4y - 14y + 7x + 252 = 28y \end{cases}$$

$$\text{ή} \begin{cases} -2x - 2y = -64 \\ 15x - 18y - 28y = -252 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x + y = 32 \\ 15x - 46y = -252 \end{cases}$$

Λύνοντας το τελικό σύστημα στο οποίο κατέληξα βρίσκω ότι $x = 20$, $y = 12$.

• Λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{2x-3y}{5} - \frac{2y-3x}{11} = \frac{112}{55} \\ ((x-5)^2 - (3-y)^2 = (x-y)(x+y) - 48 \end{cases}$$

Λύση: Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών έχω:

$$\begin{cases} 11(2x-3y) - 5(2y-3x) = 112 \\ x^2 - 10x + 25 - (9 - 6y + y^2) = x^2 - y^2 - 48 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 22x - 33y - 10y + 15x = 112 \\ x^2 - 10x + 25 - 9 + 6y - y^2 - x^2 + y^2 = -48 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 37x - 43y = 112 \\ -10x + 6y = -64 \end{cases}$$

Λύνοντας το τελικό σύστημα στο οποίο κατέληξα, βρίσκω $x = 10$, $y = 6$.

• Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, λύστε το σύστημα:
$$\begin{cases} x+y=5 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{7} \end{cases}$$

Λύση: Εφαρμόζοντας την ιδιότητα των αναλογιών στη 2^η εξίσωση, έχω $\frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{2+7} = \frac{5}{9}$

και συνεπώς το σύστημα μας είναι ισοδύναμο με το $\frac{x}{2} = \frac{5}{9}, \frac{y}{7} = \frac{5}{9}$ από το οποίο βρίσκω ότι

$$x = \frac{10}{9}, y = \frac{35}{9}.$$

- **α)** Λύστε γραφικά το σύστημα:
$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ y - 2x + 4 = 0 \end{cases}$$

β) Επαληθεύστε το αποτέλεσμα που βρήκατε, κάνοντας αριθμητική επίλυση του συστήματος.

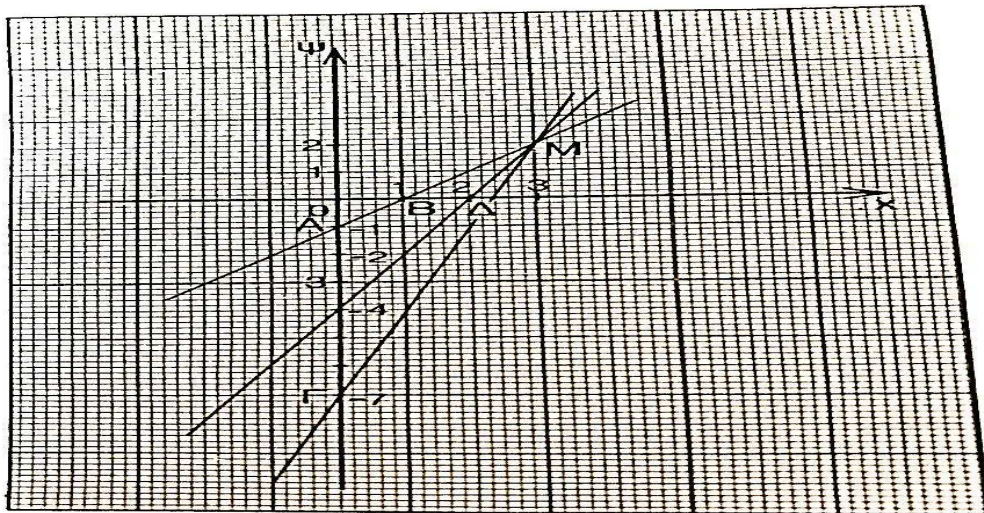
γ) Προσδιορίστε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $y = 3x + \lambda$ να παριστάνεται γραφικά με μία ευθεία γραμμή, που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών του συστήματος α).

Λύση: α) Για να κάνω γραφική λύση του συστήματος κατασκευάζω τις αντίστοιχες ευθείες. Η 1^η εξίσωση $y - x + 1 = 0$ παριστάνει την ευθεία (ε_1) που διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(1, 0)$ (αφού για $x = 0$ έχω $y = -1$ και για $y = 0$ έχω $x = 1$), ενώ η 2^η εξίσωση $y - 2x + 4 = 0$ παριστάνει την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, -4)$ και $\Delta(2, 0)$ (αφού για $x = 0$ έχω $y = -4$ και για $y = 0$ έχω $x = 2$). Αν υπολογίσω τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ βρίσκω $x = 3, y = 2$.

β) Για να λύσω αριθμητικά το σύστημα πολλαπλασιάζω τα μέλη της 1^{ης} επί -2 και έχω το ισοδύναμο σύστημα
$$\begin{cases} -2 + 2x = +2 \\ y - 2x = -4 \end{cases}$$
. Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη, έχω $y = 2$.

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή σε μία εξίσωση, βρίσκω $x = 3$. Άρα, η λύση του συστήματος είναι $x = 3, y = 2$.

γ) Αρκεί να αντικαταστήσω στον τύπο της συνάρτησης το x με 3 και το y με 2 (διότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης περιέχει τη λύση (3,2) του συστήματος). Έχω $2 = 9 + \lambda$ ή $\lambda = -7$. Άρα, ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = 3x - 7$.



- **α)** Αν $x, y \in \mathbb{R}$ γράψτε με απλή μορφή τα πολυώνυμα $B(y) = \frac{9y-1}{3} + \frac{2-4y}{2}$,

$$A(x) = 3(x+1)^2 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + (x+2)^2.$$

β) Λύστε διαδοχικά τις $A(x) = 0$ και $A(x) < 0$

γ) Λύστε γραφικά την εξίσωση: $A(x) + B(y) = 0$

δ) Λύστε την ανίσωση: $A(x)+B(y)>0$.

Λύση: α) $A(x) = 3(x+1)^2 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + (x+2)^2$

$$= 3(x^2 + 2x + 1) - 4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) + (x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 6x + 3 - 4x^2 + 1 + x^2 + 4x + 4 = 10x + 8$$

$$B(y) = 3y - \frac{1}{3} + 1 - 2y = y + \frac{2}{3}$$

β) Η εξίσωση $A(x)=0$ γράφεται ως $10x+8=0$ άρα έχει ως λύση την $x = \frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$. Η ανίσωση

$A(x)<0$ γράφεται ως $10x+8<0$ άρα, οι λύσεις της δίδονται από την $x < -\frac{4}{5}$.

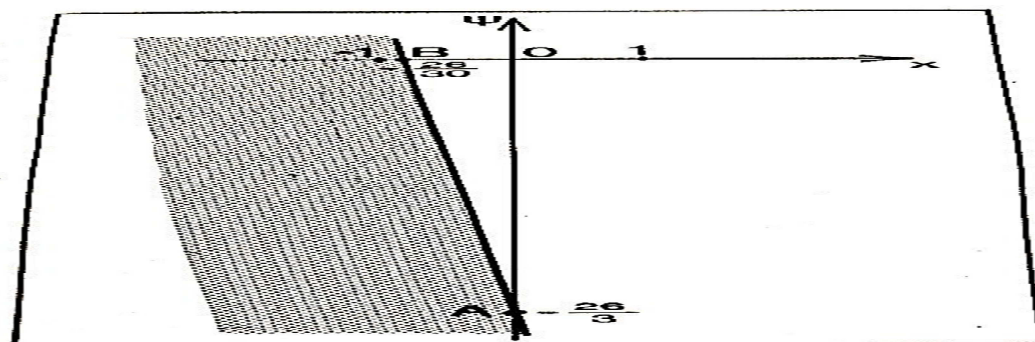
γ) Η εξίσωση $A(x)+B(y)=0$ γράφεται ως $(10x+8) + \left(y + \frac{2}{3}\right) = 0$ ή τελικά ως $30x + 3y = -26$.

Συνεπώς οι λύσεις της θα παριστάνονται με τα σημεία της αντίστοιχης ευθείας γραμμής, η οποία διέρχεται από τα σημεία $A\left(0, -\frac{26}{3}\right), B\left(-\frac{26}{30}, 0\right)$ αφού για $x=0$ έχω

$$y = -\frac{26}{3} \text{ και για } y=0 \text{ έχω } x = -\frac{26}{30}.$$

δ) Η ανίσωση $A(x)+B(y)>0$ γράφεται ως $(10x+8) + \left(y + \frac{2}{3}\right) > 0$ ή τελικά $30x + 3y > -26$.

Το σύνολο των λύσεων αυτής της ανισότητας παριστάνεται από τα σημεία του ενός από τα δύο ημιεπίπεδα στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από την ευθεία $30x + 3y = -26$. Το ημιεπίπεδο αυτό είναι εκείνο στο οποίο βρίσκεται η αρχή του ορθοκανονικού συστήματος των αξόνων, αφού με $x=0$ και $y=0$ η ανίσωση αληθεύει (γίνεται $0 > -26$).



• Εργοστάσιο που κατασκευάζει δύο τύπους προϊόντων A, B θέλει να μεγιστοποιήσει το συνολικό ημερήσιο κέρδος του όταν το κέρδος του για κάθε κιλό του προϊόντος A είναι 200 € και για κάθε κιλό του προϊόντος B είναι 160 €.

Για την κατασκευή 1 κιλού του προϊόντος A πρέπει να χρησιμοποιήσω μία μηχανή M_1 για 3 ώρες και μία μηχανή M_2 για 1 ώρα, ενώ για την κατασκευή 1 κιλού του προϊόντος B πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μηχανή M_1 για 1 ώρα και τη μηχανή M_2 για 1 ώρα. Αν η μηχανή M_1 δε μπορεί να δουλέψει πάνω από 6 ώρες την ημέρα και η μηχανή M_2 πάνω από 4 ώρες την ημέρα, πόσα κιλά από το κάθε προϊόν πρέπει να κατασκευάζει το εργοστάσιο;

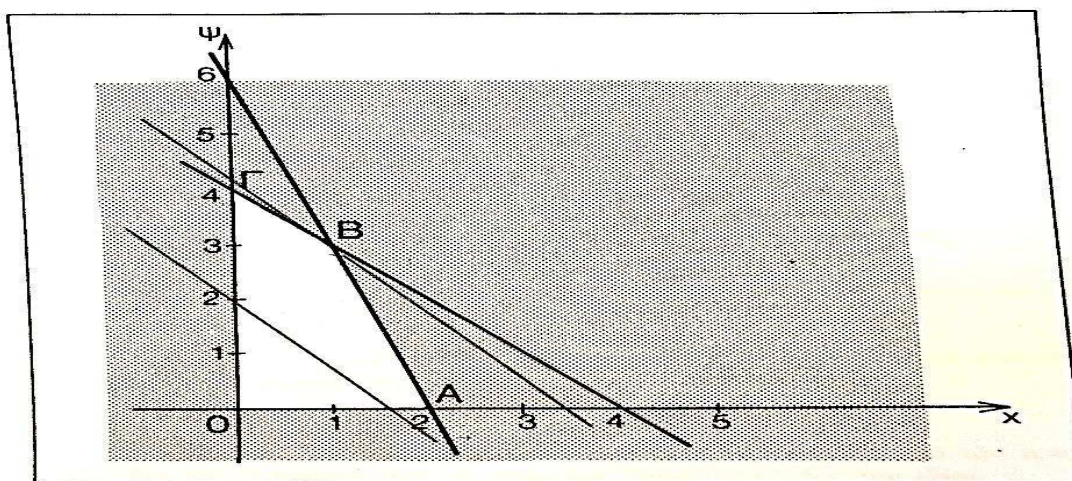
Λύση:

Προϊόν	Κέρδος σε €/Kgr	Ώρες λειτουργίας/ Kgr προϊόντος		
		M ₁	M ₂	Σύνολο
A	200	3	1	4
B	160	1	1	2
Σύνολο	360	4	2	6

Αν x είναι ο αριθμός των κιλών του προϊόντος A και y είναι ο αριθμός των κιλών του προϊόντος B που κατασκευάζει σε 1 ημέρα, το ημερήσιο κέρδος είναι $K = 200x + 160y$. Θέλω η παράταση αυτή να πάρει τη μέγιστη τιμή της με τούς εξής περιορισμούς

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \end{cases} \text{ . Οι δύο τελευταίες ανισώσεις εκφράζουν ότι οι μηχανές } M_1, M_2 \text{ δε μπορούν να}$$

δουλέψουν περισσότερο από 6 και 4 ώρες, αντιστοίχως. Οι λύσεις του συστήματος των ανισώσεων δίνονται από τις συντεταγμένες των σημείων του πολυγώνου OABΓ.



Κατασκευάζω τώρα μία ευθεία γραμμή που έχει εξίσωση της μορφής $200x + 160y = a$ π.χ. την $200x + 160y = 320$ και με παράλληλη μετατόπιση της βλέπω ότι το ζητούμενο μέγιστο βρίσκεται στην κορυφή B(1,3). Για να έχει μέγιστο κέρδος το εργοστάσιο θα πρέπει να κατασκευάζει την ημέρα 1 κιλό από το προϊόν A και 3 κιλά από το προϊόν B. Τότε το μέγιστο κέρδος θα είναι $200 \cdot 1 + 160 \cdot 3 = 680 \text{ €}$.

• Εργοστάσιο παράγει δύο τύπου κάρβουνου, έναν τύπο K_β για βιομηχανική χρήση και έναν τύπο K_ο για οικιακή χρήση, υπό τις εξής προϋποθέσεις:

α) Η δυνατότητα παραγωγής του τύπου K_ο είναι το πολύ 10 τόνοι την ημέρα, ενώ ολόκληρη η παραγωγή του πωλείται σε μία αποθήκη που απέχει 5 km με την υποχρέωση η ημερήσια παραγωγή να είναι τουλάχιστον 5 τόνοι.

β) Ο τύπος K_β έχει δυνατότητα να παραχθεί σε διπλάσια ποσότητα από τον τύπο K_ο, ενώ ολόκληρη η παραγωγή του πωλείται σε μία άλλη αποθήκη που απέχει 7 km με την υποχρέωση η ημερήσια παραγωγή του να είναι τουλάχιστον 8 τόνοι.

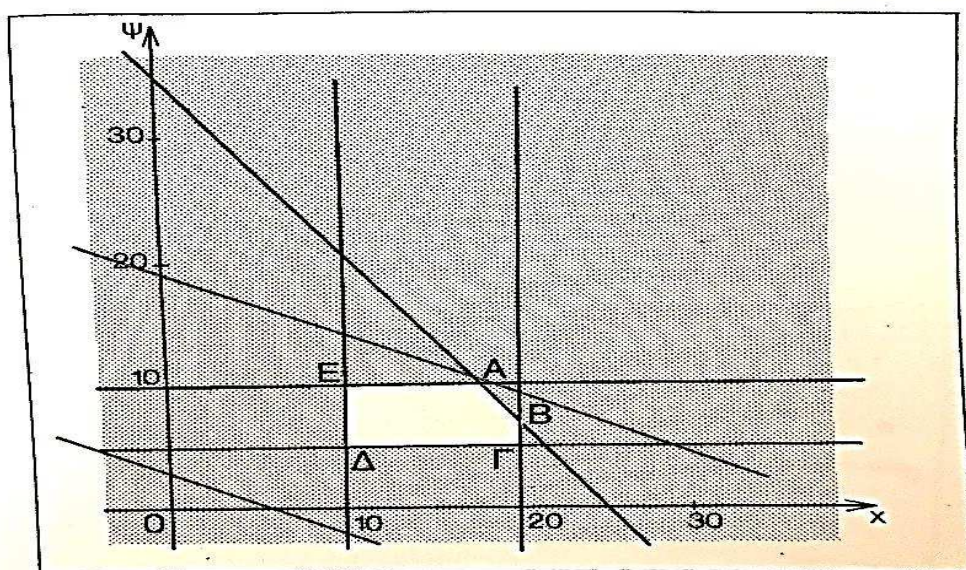
γ) Το εργοστάσιο έχει δυνατότητα διακίνησης του κάρβουνου μέχρι 175 τονοχιλιόμετρα (δηλαδή μπορεί να διακινήσει π.χ. 25 τόνους σε 7 km ή 35 τόνους σε 5 km κ.ο.κ.).

Αν ο τύπος K_0 δίνει 500 € τον τόνο και ο τύπος K_β δίνει κέρδος 300 € τον τόνο, πόσους τόνους από τον κάθε τύπο πρέπει να παράγει το εργοστάσιο για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος;

Λύση: Αν το εργοστάσιο παράγει κάθε μέρα x τόνους από τον τύπο K_β και y τόνους από τον τύπο K_0 το κέρδος του θα είναι $K=300x+500y$. Θέλω τώρα να βρω τα x, y

ώστε το K να είναι μέγιστο με τους περιορισμούς:
$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \leq y \leq 10 \\ 8 \leq x \leq 20 \\ 7x + 5y \leq 175 \end{array} \right\}.$$

	Ημερήσια παραγωγή σε tn				
Τύπος	minimum	maximum	Απόσταση σε tn	tn x Km	Κέρδος σε €/tn
K_0	5	10	5	$5y$	500
K_β	8	20	7	$7x$	300
Σύνολο	13	30	12	$5y+7x$	800



Σχ. 43

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος των περιορισμών παριστάνεται με το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Κατασκευάζω μία ευθεία που έχει εξίσωση της μορφής $300x+500y=a$, π.χ. την $300x+500y=1500$ και με παράλληλη μετατόπιση της βλέπω ότι το μέγιστο κέρδος βρίσκεται στην κορυφή Α, της οποίας οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{l} y = 10 \\ 7x + 5y = 175 \end{array} \right\}$ και είναι $x = 17\frac{6}{7}, y = 10$.

Άρα, το εργοστάσιο θα πρέπει να παράγει περίπου 18 τόνους από τον τύπο K_β και 10 τόνους από τον τύπο K_0 , οπότε το ημερήσιο κέρδος του είναι

$$K = 300 \cdot 18 + 500 \cdot 10 = 5.400 + 5.000 = 10.400 \text{ €}$$

Βιβλιογραφία

- Αποστολόπουλου, Θ. (1996). «Οικονομικά μαθηματικά», Αθήνα, εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου.
- Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (2014). «Άλγεβρα & στοιχεία πιθανοτήτων, Α' γενικού λυκείου», Αθήνα, εκδόσεις Ινστιτούτου τεχνολογίας υπολογιστών & εκδόσεων «Διόφαντος».
- Μακράς, Σ.Ε. (1976). «Πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής & θεωρία συνόλων», Αθήνα, εκδόσεις Μανωλάκου.
- Μαντάς, Ι. & Παυλόπουλος, Θ. (2000). «Μαθηματικά άλγεβρα», τόμοι Α1 & Α2, Αθήνα, εκδόσεις Μαντά.
- Μαντάς, Ι. & Παυλόπουλος, Θ. (2000). «Μαθηματικά γενικής παιδείας», τόμος Β1, Αθήνα, εκδόσεις Μαντά.

- Παναγιωτόπουλου, Α.Χ. & Φούντα, Ε.Χ. (2008). «Μαθηματικά οικονομικών & διοικητικών επιστημών», Πειραιάς, εκδόσεις Βαρβαρήγου.
- Περιοδικά «Ευκλείδης Α΄», Αθήνα, εκδόσεις ελληνικής μαθηματικής εταιρείας.
- Περιοδικά «Ευκλείδης Β΄», Αθήνα, εκδόσεις ελληνικής μαθηματικής εταιρείας.
- Bancroft, G. & Fletcher, M. (1998). “Improve your maths!”, Addison–Wesley publishing Co, Inc.
- Evans, C.W. (1997). “Engineering mathematics, a programmed approach”, 3rd edition, Chapman & Hall.
- Godement, R. “Cours d’algebre”, ed. Hermman, Paris.
- Haberman, R. (1997). “Mathematical models”, New Jersey: Prentice–Hall.
- Rionero, M. “Complementi di matematica”, Napoli, ed. Loffredo.
- Rubin, W. “The principles of mathematical analysis”, New York, Mac Graw Hill.
- Strang, G. (1994). “Linear algebra & its applications”, Massachusetts institute of technology.