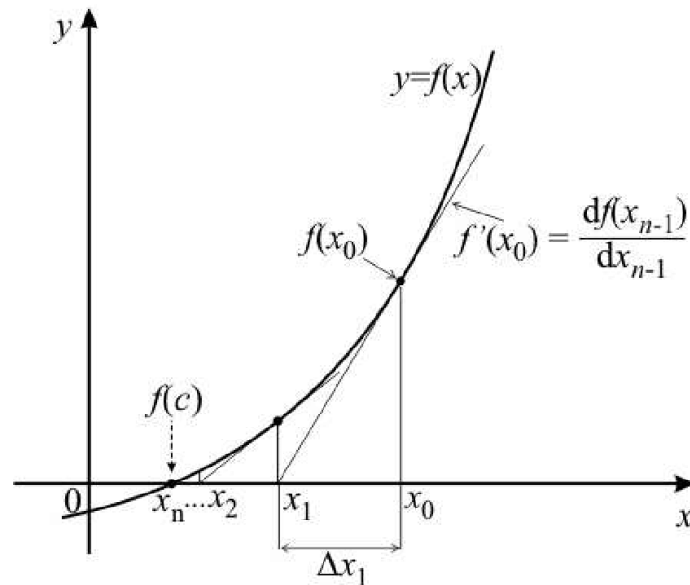




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία
Η μέθοδος παραγωγίσης του Newton.

Σπουδαστές: Φάκαρος Παντελής (ΑΜ 9168)
Ευστρατουδάκης Ευστράτιος (ΑΜ 8872)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής.

Ακαδημαϊκό έτος: 2023–2024

Ημερομηνία ανάθεσης: **01.12.2022**

Ημερομηνία κατάθεσης: **05.05.2023**

Ημερομηνία εξέτασης: **....05.2023**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια	Άριστα (10)	
3	Χρηστίδου Αθανασία Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια	Άριστα (10)	
Τελικός χαρακτηρισμός		Άριστα (10)	

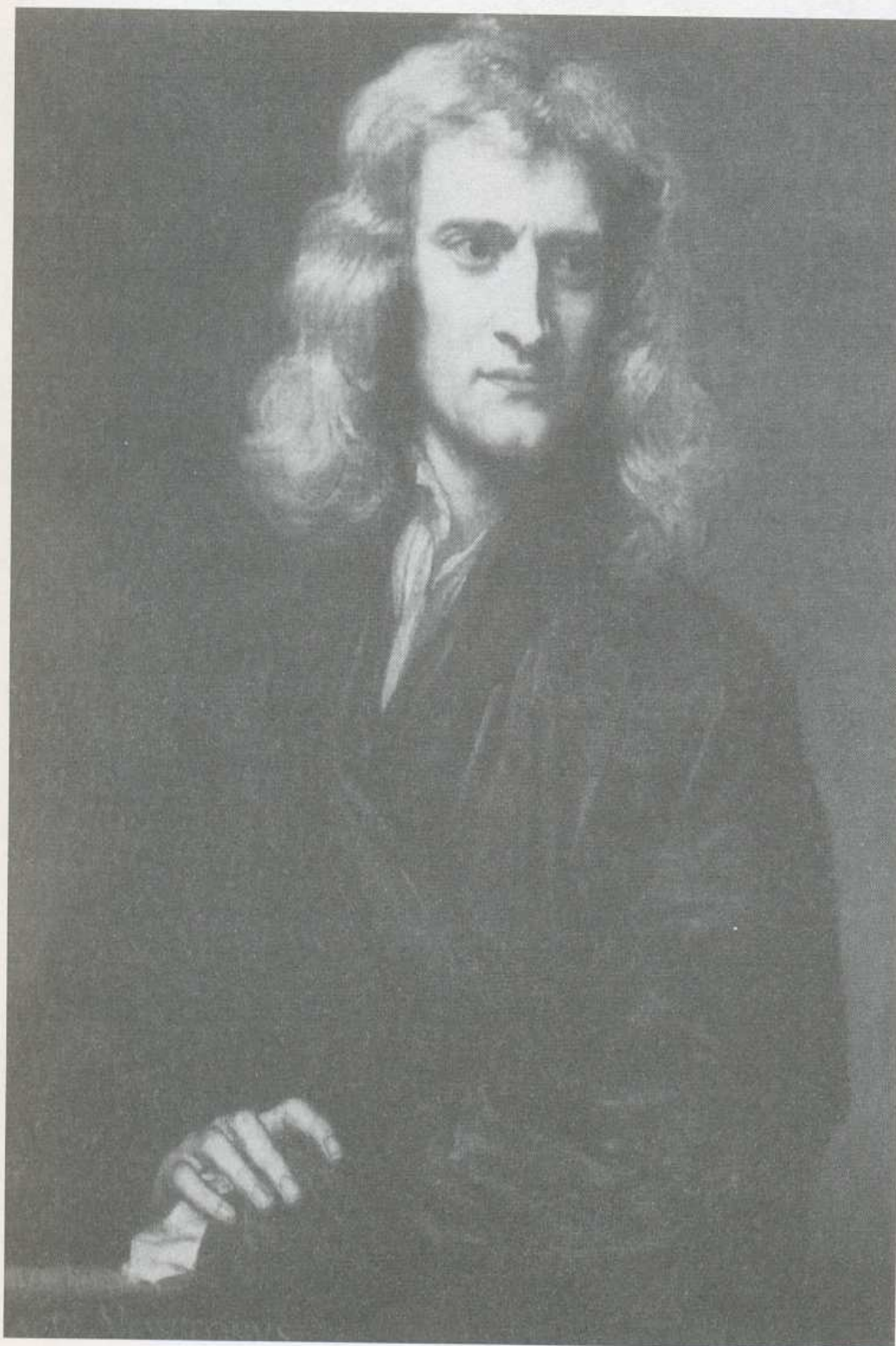
Λέξεις κλειδιά.

Απειροστικός λογισμός, Αρχιμήδης, Γαλιλαίος, Εύδοξος, εφαπτομένη, Ζήνων Ελεάτης, μέθοδος εξάντλησης, παράγωγος, ρευστά, ροές, Barrow, Cavalieri, Collins, De Analysi, De Quadratura, Fermat, Gregory, Huygens, Kepler, Leibniz, Principia, Roberval, Wallis.

Περίληψη.

Το μαθηματικό έργο του Newton συνίσταται στη μέθοδο των ροών και περιλαμβάνει τον προσδιορισμό μεγίστων και ελαχίστων, τον υπολογισμό του μήκους των καμπύλων γραμμών, τον προσδιορισμό εφαπτομένων, τον υπολογισμό εμβαδών, την προσέγγιση των ριζών των εξισώσεων, την άθροιση των άπειρων σειρών και τον τύπο διωνύμων με μη ακέραιο εκθέτη. Ο Newton συνδέει τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής με φυσικά μεγέθη, για αυτό και αντί του όρου «**μεταβλητή ποσότητα**» χρησιμοποίησε τον όρο «**ρέουσα**» (fluent), ενώ το ρυθμό μεταβολής τον ονόμασε «**μέθοδο των ροών**» (fluxions). Θεωρούσε ότι ο χρόνος ρέει με ομοιόμορφο τρόπο. Πάντως δεν ήταν ο πρώτος που είχε την ιδέα ότι τα πάντα στον κόσμο βρίσκονται σε κατάσταση συνεχούς κίνησης. Ας μην ξεχνάμε τον Ηράκλειτο «Τα πάντα ρει». Ο συμβολισμός που χρησιμοποίησε ήταν η τελεία (χρησιμοποιείται ακόμα στη φυσική όταν η μεταβλητή είναι ο χρόνος). Συμπεράνε ότι ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους κάποια χρονική στιγμή, είναι ίσος με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο αυτό.

Ασχολήθηκε και με το αντίστροφο πρόβλημα, αν γνωρίζουμε τη ροή να βρούμε τη ρέουσα (αόριστο ολοκλήρωμα με σύγχρονη ορολογία) και για αυτό θεωρείται εκείνος που συνέδεσε τον διαφορικό με τον ολοκληρωτικό λογισμό. Κοινοποιεί την εργασία του μόνο στους μαθητές του και σε κάποιους συνεργάτες του στο Πανεπιστήμιο του Cambridge. Το **1669** συγγράφει το έργο του «**Περί του λογισμού μέσω εξισώσεων με άπειρο πλήθος όρων**». Το **1671** τη βελτιώνει με το «**Περί μεθόδου σειρών & ροών**». Το **1703** (προς το τέλος του έτους) δημοσιεύεται η πρώτη πλήρης ανάλυση του θέματος.

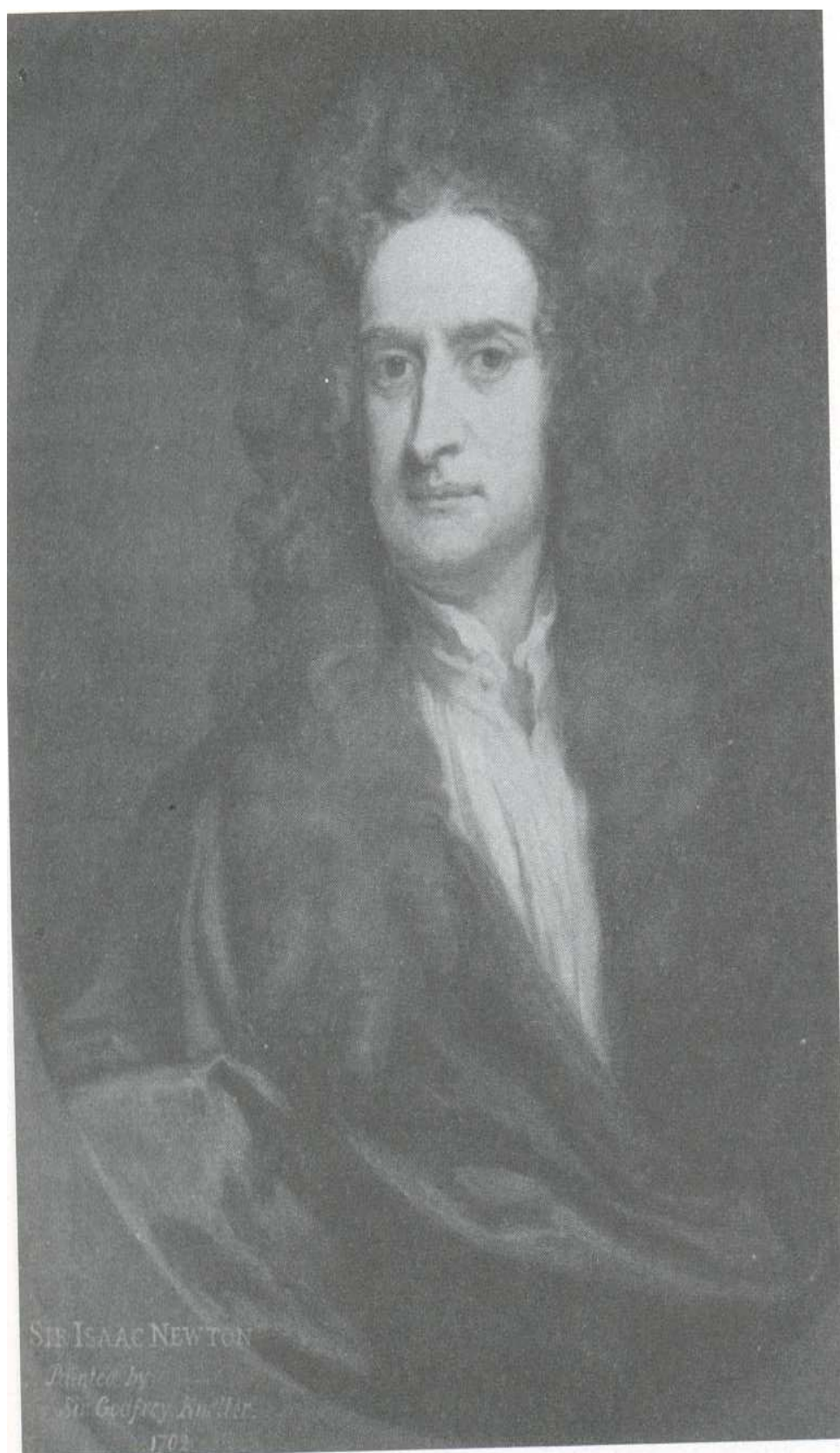


Εικ. 1. Ο Νεύτωνας σε ηλικία 46 ετών. Προσωπογραφία από τον σερ Godfrey Kneller, 1689 (με ευγενή παραχώρηση από τον λόρδο Portsmouth και τους εφόρους του κληροδοτήματος Portsmouth).

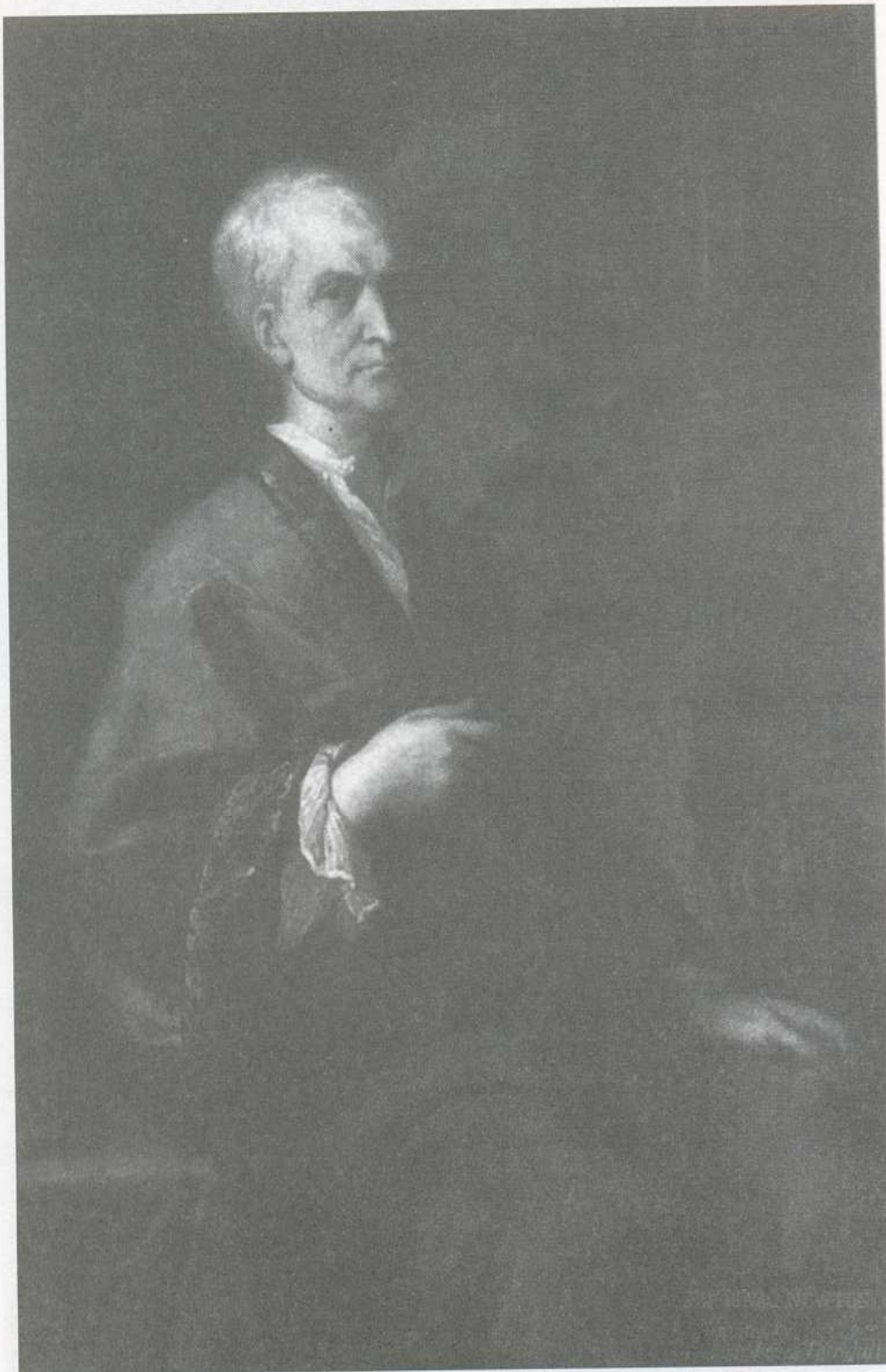


NEWTON

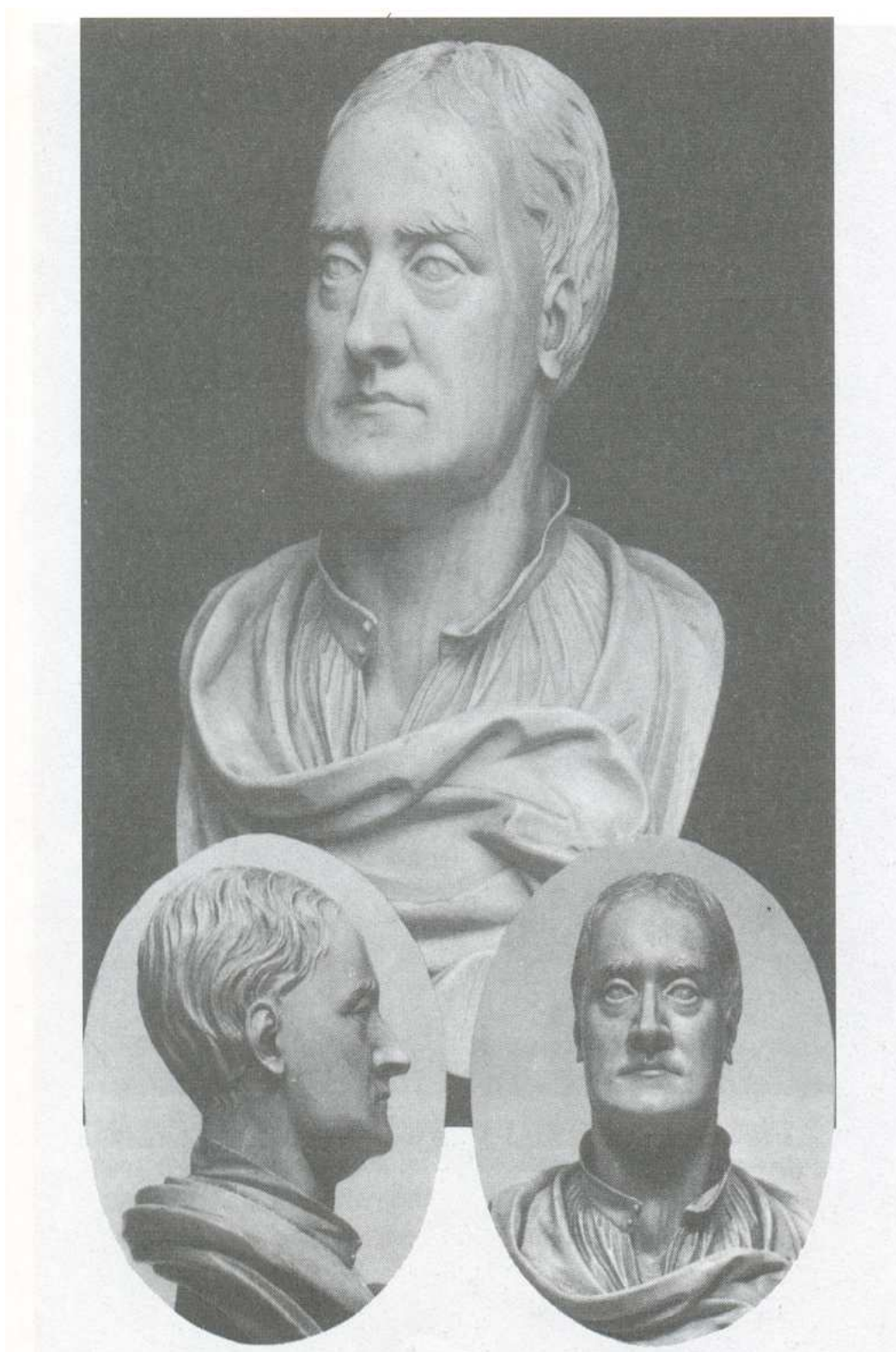
From a mezzotint after Seeman's painting, one of the most refined portraits of
Newton extant



Εικ. 3. Ο Νεύτωνας σε ηλικία 59 ετών. Προσωπογραφία από τον σερ Godfrey Kneller, 1702 (με ευγενή παραχώρηση από τους εφόρους της National Portrait Gallery).



Εικ. 4. Ο Νεύτωνας σε ηλικία 67 ετών. Προσωπογραφία από τον σερ James Thornhill, 1710 (με ευγενή παραχώρηση από τον λόρδο Portsmouth και τους εφόρους του κληροδοτήματος Portsmouth).



Εικ. 5. Ο Νεύτωνας σε ηλικία 75 ετών. Ελεφάντινη προτομή από τον David Le Marchand, 1718 (με άδεια από τους εφόρους του Βρετανικού Μουσείου).



CROKER'S MEDAL OF NEWTON

The medal of which Brewster says: "In the beginning of 1731, a medal was struck at the Tower in honour of Sir Isaac Newton. It had on one side the head of the philosopher, and on the reverse a figure representing mathematics, with the motto, *Felix cognoscere causas*." The figure is that of winged Science holding a tablet upon which appears the solar system. The date, MDCCXXVI, is that of Newton's death according to the old calendar. The medal is by John Croker



ROETTIER'S MEDAL OF NEWTON

Of the numerous portrait medals of Newton, those by Croker and by Roettiers (first struck in 1739) are the best. This particular medal was struck in 1774. The reverse bears the motto from Vergil's *Æneid* (Lib. V, 378), "Another is sought for him." Its significance appears from the context: "Another is sought for him, nor does any one from so great a band dare approach the man, and draw the gauntlets on his hands"

► Βιβλίο 1, Πρόταση 1, Θεώρημα 1 από τα *Principia* του Νεύτωνα που δείχνει την τροχιά που ακολουθεί ένα σωματίδιο υπό την επίδραση της κεντρομόλου δύναμης από ένα σταθερό σημείο. Ο Νεύτωνας αποδεικνύει ότι το εμβαδόν που διαγράφεται από ένα τέτοιο σωματίδιο είναι ανάλογο προς τον χρόνο της κίνησης, γενικεύοντας έτσι τον δεύτερο νόμο του Κέπλερ.

[37]

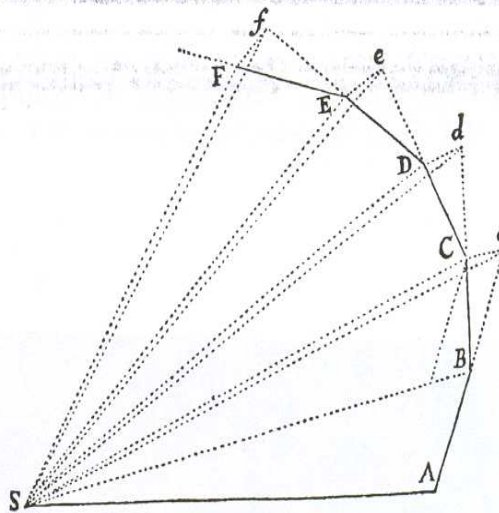
S E C T. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam AB . Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad c , (per Leg. I) describens lineam Bc æqualem ipsi AB , adeo ut radii AS , BS , cS ad centrum actis, confectæ forent æquales areae ASB , $BS c$. Verum ubi corpus venit ad B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta Bc deflectere & pergere in recta BC . Ipsi BS parallela agatur cC occurrens BC in



C , & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in C , in eodem plano cum triangulo ASB . Junge SC , & triangulum $SB C$, ob parallelas SB , cC , æquale erit triangulo $SB c$, atq; adeo etiam triangulo SAB . Simili argumento fi

vis

Tonnage, 1694. &c.

Record' The 4 Apr 1720.

Numb. 168. £ 50...

The 13 Day of April 1720.

Received by me *Isaac Newton* Esq.
By virtue of one order dated the
28th April 1694.

To *Charles*
The *Baron* *Hampden* Esq. One of the Four
Tellers of *His* Majesty's Receipt of Exchequer, the Sum of
fifty pounds

50.-

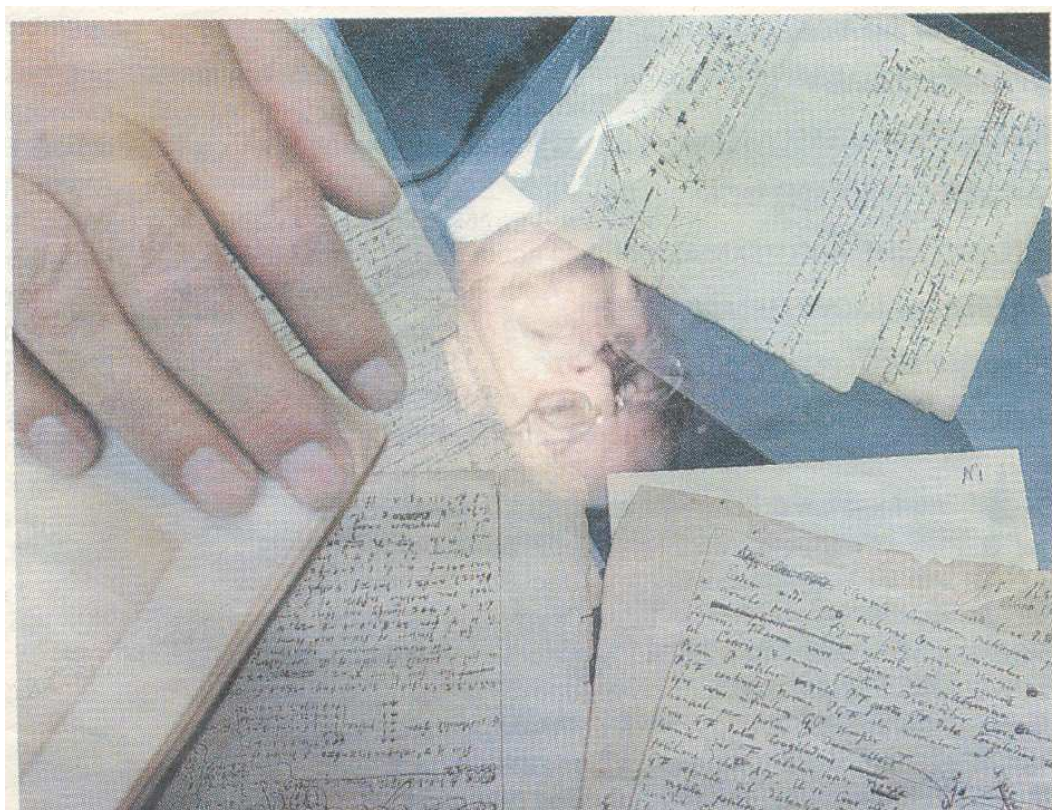
In full of all former Directions of the said Order, and
for *the* *same* *sum* *of* *one* *hundred* *pounds* *per* *annum*,
by Virtue of an Act of Parliament, (Entituled,
An Act for Granting to Their Majesties certain Rates
and Duties upon Tonnage of Ships and Vessels, and up-
on Beer, Ale, and other Liquors, for securing certain
Recompences and Advantages in the said Act mentioned,
to such Persons as shall voluntarily advance the Sum of
fifteen hundred thousand Pounds towards carrying on
a vigorous War against France;) I say Received by me—

Wm. Clarke

Isaac Newton

AUTOGRAPH OF NEWTON

The document was written after he had retired from his work at Cambridge
and is interesting politically



Χειρόγραφα του Ισαάκ Νεύτωνα στον Οίκο Δημοπρασιών Σόθμπις. Τα κείμενά του κατέληξαν στο σφυρί το 1936, ενώ πολλά αγνοούνται ακόμη

Σήμερα μπορεί κανείς να δει πολλά από αυτά τα κείμενα στο internet, στη διεύθυνση του προγράμματος Νεύτων (www.newtonproject.ic.ac.uk). Το απροσδόκητο περιεχόμενο αυτών των κειμένων είχε καταπλήξει κάποτε τον John Μείναρντ Κέινς, που είχε αγοράσει μερικά σε έναν πλειστηριασμό του Σόθμπις, το 1936. Πως είχαν καταλήξει στο σφυρί; Με μία πράξη βανδαλισμού που έμεινε στην ιστορία, ο λόρδος Λάμινγκτον, κόμης του Πόρτσμουθ, τα είχε ξεπουλήσει για ένα κομμάτι ψωμί, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τη Βρετανική ένωση φασιστών. Αργότερα, πολλά από αυτά τα κείμενα επιστράφηκαν (ο Κέινς έδωσε τα δικά του στο Τρίνιτι Κόλετζ), αλλά εξακολουθεί να αγνοείται η τύχη πολλών άλλων.

Dates	Life of Isaac Newton	Times
1642	April (exact date unknown): Marriage of the elder Isaac Newton, an illiterate but quite well-to-do yeoman farmer, to Hannah Ayscough. Oct: Death of the elder Isaac Newton (buried 6/16 Oct.).	Death of Galileo Galilei. Marriage of Princess Mary (later Mary II, Then aged nine) to William of Orange. Outbreak of English Civil War (Oct.).
1642/3	25 Dec./4 Jan.: Birth of Isaac Newton in Woolsthorpe, Lincolnshire.	
1645		Royalist defeat at Battle of Naseby marks the beginning of the end of the Civil War.
1646	27 Jan./6 Feb.: Hannah Newton marries Barnabas Smith, rector of North Witham (about a mile and a half from Woolsthorpe), and moves to North Witham, leaving young Isaac in Woolsthorpe in the care of Hannah's mother, Margery.	Birth of Gottfried Wilhelm Leibniz. Birth of John Flamsteed.
1648		Peace of Westphalia ends Thirty Years War in Northern Europe.
1649		Execution of Charles I; England becomes a republic.
1650		Death of René Descartes.
1651		Publication of Thomas Hobbes' Leviathan.
1652		Publication of Elias Ashmole's alchemical verse anthology Theatrum Chemicum Britannicum.
1653	Death of Barnabas Smith. Hannah returns to Woolsthorpe with her three children by her second marriage, Mary (b. 1647), Benjamin (b. 1651) and Hannah (b. 1652).	Oliver Cromwell appointed Lord Protector.
1654	Newton is enrolled at King's School, Grantham (about 7 miles from Woolsthorpe). Boards with a Mr. Clark, the town apothecary, who provides the first stimulus to his interest in chemistry. Initially regarded as a poor scholar, he eventually rises to top of the class.	Publication of The Marrow of Alchemy by 'Eirenæus Philalethes' (i.e. George Starkey).
1656		Birth of Edmond Halley.
c. 1658	Leaves school and is set to learn to manage the family estate. Perhaps wilfully, proves thoroughly incompetent and neglectful. The Grantham schoolmaster, Henry Stokes, and Hannah's brother, William, persuade her to let him return to the Grantham school to be trained for university. Apparently forms a short-lived romantic attachment to Clark's step-daughter (according to a report of her recollections in her old age).	Death of Oliver Cromwell (24 Aug./3 Sept. 1658). Succeeded as Protector by his son Richard.
1659-1661		Publication of Lazarus Zetzner's huge alchemical anthology Theatrum Chemicum.
1660		Restoration of Charles II. Foundation of the Royal Society. Publication of Robert Boyle's New Experiments Physico-Mechanicall.
1661	Enters Trinity College, Cambridge (26 May/5 June), first as a subsizar and then a sizar (i.e. paying his way by acting as servant for socially superior fellow-students or for tutors). Further supports himself with a small money-lending operation.	Publication of Boyle's Sceptical Chymist.
1662	Apparently undergoes some form of religious crisis: draws up a list of his sins before and after Whitsun that year, presumably in the hope	Establishment of the Royal Society by royal charter.

	of charting an improvement. His conscience is still troubled by such remembered boyhood sins as 'Stealing cherry cobs from Eduard Storer', 'Calling Derothy [<i>sic</i>] Rose a jade' and 'Squirting water on Thy day [i.e. Sunday]' - but also, more ominously, 'Threatning my father and mother Smith to burne them and the house over them' and 'Wishing death and hoping it to some'.	
1663	Makes friends with John Wickins, a new arrival at Cambridge, who becomes his room-mate for the next twenty years and works as his assistant.	
1664	Probably attends the mathematics lectures given by Isaac Barrow, holder of the newly-instituted Lucasian Chair of Mathematics. Devotes himself to private studies in mathematics and optics, largely ignoring the official university curriculum of classics, Euclidean geometry and Aristotelian philosophy. Begins to fill up his college notebook instead with a series of wide-ranging scientific entries headed 'Quæstiones quædam Philosophiæ' ('Certain Philosophical Questions').	Publication of Boyle's <i>Experiments Touching Colours</i> . Birth of Nicolas Fatio de Duillier, a Swiss mathematician who is later (c. 1689-93) to become Newton's closest friend for a time.
1665-7	Graduates BA. Returns to Woolsthorpe for the summer of 1665. Is detained there by the outbreak of plague in Cambridge and remains in Woolsthorpe until March 1667, apart from a short stay in Cambridge in spring 1666 which is cut short by a recurrence of the plague. During this period, despite being almost entirely self-taught in mathematics and optics, he establishes the fundamentals of what is now called the calculus (Newton calls it 'the method of series and fluxions'), setting down the basic rules of differentiation and integration in a paper of October 1666, and demonstrates the heterogeneity of white light through its separation by refraction. Nearly blinds himself by conducting optical experiments on his own eyes. The sight of a falling apple in a Woolsthorpe orchard - or so Newton himself is said to have claimed decades later - focuses his attention on the subject of gravity. Realises that the force required to keep the moon in orbit round the earth (as stated by Kepler in his Third Law) is of the same kind as that operating in terrestrial gravity. However, Newton's theory of universal gravitation is not fully worked out for another twenty years.	1665 Great Plague. Publication of Robert Hooke's <i>Micrographia</i> and of the (posthumous) complete works of Joseph Mede (dated 1664, i.e. early 1665), whom Newton later acknowledges as the greatest influence on his interpretation of Biblical prophecy. 1666 Great Fire of London. Publication of Boyle's <i>Origin of Formes and Qualities</i>. 1665-7 Second Anglo-Dutch War.
1667	Made Fellow of Trinity College (22 Sept./2 Oct.). This requires him to subscribe to the Thirty-Nine Articles of the Church of England (a declaration of orthodoxy with particular emphasis on the doctrine of the Trinity), to take a vow of celibacy, and to promise to take holy orders within seven years of receiving his MA.	
1668	Awarded an MA.	Publication of the <i>Opera chymiatrica</i> (Works of Chemical Medicine) of Jodocus a Rhe (a.k.a. Johannes Rhenanus).
1668-9	Installs elaborate experimental apparatus in his and Wickins' rooms, adding two furnaces for (al)chemical experiments and a copy of Zetzner's monumental <i>Theatrum chemicum</i> in 1669. Constructs the first functioning reflecting telescope (from a design by David Gregory).	
1669	Writes 'De analysi per æquationes numero terminorum infinitas' ('On Analysis by Infinite Series'), another milestone on the road to calculus. Barrow retires as Lucasian Professor of Mathematics to become chaplain to Charles II and recommends Newton to succeed him, which he does on 19/29 Oct. Barrow and the mathematician and publisher John Collins urge Newton to publish his work on calculus, but he is reluctant. At Barrow's request, Newton prepares the former's <i>Lectiones opticae</i> (<i>Optical Lectures</i>) for the press, despite being well	Publication of <i>Secrets Reveal'd</i> by 'Eirenæus Philalethes' (i.e. George Starkey), an English version of the <i>Introitus apertus</i> that had appeared two years earlier. Publication of Barrow's <i>Lectiones opticae</i> .

	aware that his own unpublished optical discoveries are far in advance of Barrow's and contradict many of his conclusions.	
1670	Begins delivering his Lucasian lectures (Jan.), which according to later anecdotes are extremely poorly attended. Lectures on geometrical optics rather than pure maths, putting forward the radical view that the science of colours, and indeed the whole of natural philosophy, is governed by mathematical principles.	
1671	Barrow persuades Newton to allow him to demonstrate the telescope to the Royal Society, where it causes a sensation. Newton writes <i>De methodis serierum et fluxionum</i> (<i>On the Method of Series and Fluxions</i>), expounding the principles of calculus, though this is not published until 1736.	Publication of John Webster's <i>Metallographia</i> and of Henry More's <i>Enchiridion metaphysicum</i> .
1672	Elected Fellow of the Royal Society (1/11 Jan.). Newton's 'Theory about Light and Colors' published in the Royal Society's journal, <i>Philosophical Transactions</i> (30 Jan./9 Feb.). Critical reactions from various quarters, and especially from the Society's own Curator of Experiments, Robert Hooke, elicit furious responses from Newton and embroil him in numerous polemical exchanges for the next four years, during which he repeatedly declares himself unwilling to engage in any further scientific publication or correspondence. However, he intermittently keeps up a vicious semi-public quarrel with Hooke until the latter's death in 1703.	Outbreak of Third Anglo-Dutch War.
1673	Cold-shoulders various attempts to persuade him to re-engage with the scientific community and concentrates harder on his still almost totally secret (al)chemical studies. At about this date, he also begins an intensive study of the textual history of the Bible (both in the original and in various translations) and of the Church Fathers, which continues to occupy him for the rest of his life and soon leads him to conclude that the doctrine of the Trinity is a heretical error introduced in the 4th century AD.	Leibniz elected Fellow of the Royal Society. Publication of Christian Huygens' <i>Horologium oscillatorium</i> (<i>Of Pendulum Clocks</i>).
1674		End of Third Anglo-Dutch War.
1675	Visits London in spring to ask the Secretary of State, Joseph Williamson, for a dispensation from taking holy orders, as the statutes of Trinity require him to do as an MA of seven years' standing. This is granted and the statutes altered for Newton's benefit. It is not clear what grounds he argues for his exemption, though his private reasons are almost certainly his dissent from the Church's teaching on the Trinity. Sends the Royal Society a 'Hypothesis' concerning the causes of light and colours. This is closely related to an alchemical essay, 'Of natures obvious laws and processes in vegetation', written (but not disclosed) by Newton at about the same time. Relations with Hooke worsen as the latter thinks Newton credits himself in the 'Hypothesis' with a number of ideas Hooke had already put forward in his <i>Micrographia</i> (1665).	Greenwich Observatory founded, with John Flamsteed as the first Astronomer Royal.
1676	Leibniz visits London in October and (without Newton's knowledge) is shown a copy of Newton's 'De Analysis' by John Collins. However, Leibniz has already independently established the fundamental principles of calculus, though (as he later acknowledges) he learns much from Newton's work on series expansion.	
1677		Death of Isaac Barrow.
1678		Publication of Ralph Cudworth's <i>True Intellectual</i>

		System of the Universe. Publication of Ripley Reviv'd by 'Eirenæus Philalethes' (i.e. George Starkey).
1679	Returns to Woolsthorpe in the spring to nurse his dying mother (buried 4/14 June). Newton remains in Woolsthorpe for most of the year settling the family's affairs.	Birth of Newton's half-niece Catherine Barton.
1679-1680	Correspondence with Hooke about the path of falling bodies provides Newton with the key dynamic concepts of inertia and centripetal attraction.	
1681	Correspondence with Flamsteed about the comets of November and December 1680, which Flamsteed maintains are one and the same. Newton initially disagrees but later acknowledges Flamsteed was right: this has further important implications for Newton's understanding of gravity.	
c. 1683	Wickins resigns his fellowship and leaves Cambridge (probably to allow him to marry, which he cannot do as a Fellow). Newton invites Humphrey Newton (no relation) to share his rooms and work as his amanuensis.	
1684	August: Halley visits Newton to discuss astronomical matters, particularly the notion of gravity. The two get on well and Halley becomes one of Newton's staunchest supporters. Correspondence with Flamsteed about the possibility of an attraction between Jupiter and Saturn.	Leibniz publishes an account of his calculus in the Leipzig-based journal <i>Acta Eruditorum</i> .
1685		Accession of the Roman Catholic James II (27 Jan./6 Feb.).
1686	Fully formulates his theory of universal gravitation: every object in the universe attracts and is attracted to every other object.	Publication of Edmund Dickinson's alchemical <i>Epistola ad Theodorum Mundanum</i> (Letter to Theodorus Mundanus).
1687	Plays a significant role in orchestrating opposition to the King's demand that Sidney Sussex College award an MA to a Benedictine monk, Alban Francis, without requiring him to take the statutory oath of allegiance to the Church of England - despite the fact that Newton, as a convinced but secret unitarian, owes the Church of England no more allegiance than Francis does. Newton and other delegates face examination by Judge Jeffreys, and Vice Chancellor John Peachell is sacked, but the college stands its ground and the degree is never conferred. July: largely at Halley's urging and entirely at Halley's expense, publishes <i>Philosophiæ naturalis principia mathematica</i> (<i>The Mathematical Principles of Natural Philosophy</i>), his masterwork on mechanics, fluids and gravity. Though few outside England are initially convinced by Newton's theory of gravity, the book establishes his reputation throughout Europe as at least one of the greatest mathematicians and scientific thinkers of his day.	Death of Henry More.
1688		Petition of Seven Bishops against James II's toleration of Roman Catholics. The 'Glorious Revolution': arrival from the Netherlands of the Protestant William of Orange and his army (Nov.) and flight of James (Dec.).
1689	Elected MP for Cambridge University. Applies for provostship of King's College, Cambridge, but (much to his chagrin) is not appointed.	Accession of William III and Mary II (James II's sister). Publication of <i>The Cambridge Case</i> , an anonymous

	Now seen as something of a superstar in English intellectual circles, Newton acquires a devoted following of mostly younger disciples, many of whom come to share his unorthodox theological views as well as championing his natural philosophy. At this time or a little earlier, makes friends with the philosopher John Locke and with the Swiss mathematician Fatio de Duillier: his friendship with the latter is arguably the one really close relationship of Newton's life. Terminates Humphrey Newton's service as his amanuensis.	account of the Sidney Sussex affair (probably not Newton's composition though he may well have had a hand in it). Publication of <i>Le triomphe hermétique</i> (The Hermetic Triumph) by Alexandre Toussaint de Limojon, Sieur de Didier.
1690	Writes two long letters to Locke, and a shorter supplement, concerning 'corruptions of Scripture', explicitly stating his own anti-trinitarian convictions. Begins revising the <i>Principia</i> and elaborating on his conviction that true (i.e. Newtonian) natural philosophy was known to the sages of various pre-Christian civilisations and represented in veiled, allegorical form in myths and in the design of ancient temples and monuments such as Stonehenge. Maintains that all 'his' discoveries are in fact re-discoveries of 'prisca sapientia' ('ancient wisdom').	Publication of Boyle's <i>The Christian Virtuoso</i> and Locke's <i>Essay Concerning Human Understanding</i> .
1691/2		Death of Boyle (31 Dec./10 Jan. - at quarter to one in the morning, for which reason many sources treat the date as 30 Dec./9 Jan.). His will endows the Royal Society's Boyle Lectures in defence of religion.
1692-3	Correspondence with the mathematician Richard Bentley on the value of natural philosophy as a proof of God's existence and a bulwark of true religion. Correspondence with Locke about alchemy. Locke, who is one of a team appointed to inspect Boyle's manuscript legacy, sends Newton copies of two alchemical recipes he finds among the papers.	Bentley delivers the first Boyle lectures (1692), drawing heavily on his reading of and correspondence with Newton, and publishes them (1693).
1693	Invites Fatio to take rooms next to his in Cambridge, though this plan is never realised. Suffers a nervous breakdown (c. July/August). Writes distractedly to Locke in September apologising for having imagined 'that you endeavoured to embroil me w th woemen' and that 'when one told me you were sickly ... I answered twere better if you were dead'. Explains a month later that 'when I wrote to you I had not slept an hour a night for a fortnight together & for 5 nights together not a wink'. Has regained his composure by the end of the year. From this point on, has little if anything more to do with Fatio (the reasons for this rupture remain obscure).	
1694	Presses Flamsteed for data on the moon's motion, which Newton still cannot satisfactorily explain in terms of his gravitational theory. Deeply offends Flamsteed by telling him not to waste time on his own theoretical speculations on the subject but to concentrate on collecting and supplying better data.	Death of Mary II leaves William III as sole monarch.
1696	Visited in March by an anonymous 'adept' who reveals what he claims is a 'menstruum' to dissolve all metals. Probably in about this year, Newton composes (but does not publish) the essay 'Praxis', the most substantial of his own (al)chemical compositions. However, his practical research into the subject seems to be abandoned at about this date, though he continues to collect books and manuscripts. Appointed Warden of the Royal Mint (19/29 March), which is housed at this date in the Tower of London. Leaves Cambridge on 20/30 April to settle in London. Though the post has traditionally been treated as a sinecure, Newton (much to the annoyance of the other Mint officers) takes his duties very seriously indeed, waging vigorous campaigns against the institution's endemic corruption and inefficiency.	Silver recoinage in England (till 1698).

	At some point after this move, probably before 1700, Catherine Barton (b. 1679), the daughter of Newton's half-sister Hannah (née Smith), comes to live with him in London.	
1697		Publication of John Pollexfen's <i>Of Trade, Coin and Paper Credit</i> , an attack on credit and paper money.
1699	Fatio publishes a work asserting Newton's priority in the discovery of calculus and heavily implying that Leibniz stole the idea from him (though Newton himself acknowledged in the <i>Principia</i> that Leibniz had reached at least some of the same conclusions independently). Newton later denies having had any hand in the publication.	
1700	At his own request, Newton transfers from being Warden to Master of the Mint (a nominally less prestigious but in fact more influential and lucrative position). The appointment is made on 25 Dec. 1699/4 Jan. 1700 - a birthday present. Leibniz responds to Fatio's criticisms in the <i>Acta Eruditorum</i> , and an increasingly bitter and personal dispute erupts between Leibniz and Newton, waged - on both sides - largely through third parties or under cover of anonymous publication. This preoccupies both men until Leibniz's death (and Newton until his). Exacerbated more or less wilfully by the seconds of both parties, the argument swells to encompass attacks on Leibniz's views on miracles and 'pre-established harmony' (later satirised by Voltaire as the doctrine that 'all is for the best in the best of all possible worlds') on the one hand, and Newton's theory of gravity on the other.	Second edition of Pollexfen's <i>Of Trade</i> , to which Newton writes (but never publishes) an extensive rejoinder.
1701	Again elected MP for Cambridge University. Appointment of Newton's friend and fellow unitarian Hopton Haynes to the Mint post of weigher and teller. Officially resigns as Lucasian Professor (Dec.), having held the post <i>in absentia</i> for over five years, and is succeeded by his protégé William Whiston.	Outbreak of the War of the Spanish Succession. Act of Settlement debars Roman Catholics from the British throne.
1702	Designs Queen Anne's Coronation Medal.	Accession of Anne.
1703	Elected President of the Royal Society, a post he holds (by annual re-election) until his death.	Death of Robert Hooke.
1704	Publishes <i>Opticks</i> , his second masterpiece, setting out the principles of refraction and arguing for the corpuscular nature of light.	
1705	Knighted.	
1706	Publication of <i>Optice</i> , a Latin translation of the <i>Opticks</i> . Fatio becomes deeply involved with a sect of controversial and much-derided radical mystics, the 'French Prophets'.	Publication of <i>A Demonstration of the Being and Attributes of God</i> by Newton's protégé Samuel Clarke.
1707	Fatio and other 'French Prophets' pilloried in London.	Union of England and Scotland. Silver recoinage in Scotland (to 1709) and re-organisation of the Edinburgh Mint.
1710		Ejection of Whiston from Lucasian Professorship for his advocacy of unitarianism (Oct.).
1712	At Leibniz's somewhat naive request, the Royal Society appoints a committee to review the history of the calculus controversy. The committee is selected by the Society's President - Newton - who also compiles its report for it. Consisting principally of carefully selected extracts from relevant scientific correspondence, with explanatory notes, the report emphatically (and quite correctly) asserts Newton's priority, and heavily (and quite unjustly) implies plagiarism on Leibniz's part.	Publication of Samuel Clarke's <i>Scripture Doctrine of the Trinity</i> (in fact a work with a distinctly anti-trinitarian flavour).

	Uses his authority as President of the Royal Society to compel Flamsteed, who is still smarting from the lack of credit given him for his contributions to the <i>Principia</i> , to hand over an unfinished star-chart and compilation of astronomical observations to be completed and edited by Halley.	
1713	Publication of the 1712 calculus report as <i>Commercium epistolicum ... de analysi promota</i> (<i>Correspondence ... Relating to the Progress of Analysis</i>). Second edition of the <i>Principia</i> , with the acknowledgments of Leibniz toned down and all reference to Flamsteed excised. Adds a 'General Scholium' setting out Newton's view of the relationship between God and Creation. The new preface by Newton's disciple Roger Cotes denounces Leibniz as a 'miserable reptile'.	Peace of Utrecht ends British involvement in War of the Spanish Succession.
1714		Accession of George I.
1715	Devotes almost an entire issue of the <i>Philosophical Transactions</i> to 'An Account of the Book entituled <i>Commercium Epistolicum</i> ', his own anonymous review of his own report on the calculus controversy.	Flamsteed acquires most of the copies of Halley's edition of his star-chart and burns them.
1716	Draws up a summary of his theories on ancient chronology at the request of Princess Caroline of Wales, asking her to keep the manuscript to herself (which she does not).	Death of Leibniz.
1717	Marriage of Catherine Barton to John Conduitt.	
1718	Second English edition of the <i>Opticks</i> .	
1719	Second Latin edition of <i>Optice</i> .	Death of Flamsteed.
1720	Newton is said to have lost £20,000 in the South Sea Bubble according to Catherine Conduitt.	South Sea Bubble. Halley succeeds Flamsteed as Astronomer Royal.
1721	Third English edition of the <i>Opticks</i> .	
1722	Begins to suffer from bladder stones and is increasingly forced to delegate his duties at the Royal Society and Mint to others (in the case of the Mint, largely to Conduitt, who eventually succeeds him as Master).	
1725	Unauthorised publication, in Paris, of <i>Abregé de la chronologie de M. le Chevalier Newton</i> , a French translation of the 'Abstract of Cronology [sic]' Newton had written in 1716, with adversely critical commentary by the translator. Newton promptly publishes a withering rejoinder in the <i>Philosophical Transactions</i> .	Posthumous publication of Flamsteed's <i>Historia coelestis britannica</i> (British History of The Heavens), his own completion of the work he had been forced to surrender unfinished to Halley.
1726	Third edition of the <i>Principia</i> .	
1727	Presides over his last Royal Society meeting on 19 Feb./2 March. Shortly afterward takes to his bed, suffering from a new bladder stone. Dies, having refused the last rites, on 20/31 March.	



BARROW

Statue in Trinity College Chapel, Cambridge. It stands just north of the statue of Newton



JOHN WALLIS, 1616-1703

From D. Loggan's drawing from life. Published in the *Opera Mathematica*,
Oxford, 1695

Ο διαφορικός λογισμός είναι θεωρία λογισμού που ασχολείται με ποσότητες που μεταβάλλονται στην αύξηση τους, κατά απείρως μικρές διαφορές σε μερικά μεταβλητά μεγέθη. Ο λογισμός αυτός επιτρέπει να προσδιορίσουμε τις υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ ορισμένων μεγεθών, σχέσεις τις οποίες δε θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε με άμεσο τρόπο, διότι τα δοσμένα και τα άγνωστα στοιχεία δεν έχουν σύμμετρη σχέση. Η ανάπτυξη και το περιεχόμενο του διαφορικού λογισμού συνδέονται στενά με την ανάπτυξη και το περιεχόμενο του ολοκληρωτικού λογισμού, μαζί με τον οποίο ο διαφορικός αποτελεί βασικό τμήμα της μαθηματικής ανάλυσης. Η κεντρική έννοια του διαφορικού λογισμού, η παράγωγος, προέκυψε από την εξέταση μεγάλου αριθμού προβλημάτων των φυσικών επιστημών και της μαθηματικής επιστήμης, που αναφέρονται στον υπολογισμό των ορίων του ίδιου τύπου. Τα σπουδαιότερα από αυτά τα προβλήματα είναι ο προσδιορισμός της ταχύτητας της ευθύγραμμης κίνησης και η κατασκευή εφαπτομένης μίας επίπεδης καμπύλης. Έστω ότι ζητείται να καθορισθεί η ταχύτητα της ευθύγραμμης κίνησης ενός υλικού σημείου:

➤ Αν η κίνηση είναι ισοταχής, το διάστημα που διανύθηκε από το σημείο είναι ευθέως ανάλογο προς το χρόνο της κίνησης. Η ταχύτητα αυτής της κίνησης μπορεί να ορισθεί ως το διάστημα που διανύθηκε στη μονάδα του χρόνου ή ως ο λόγος του διαστήματος που διανύθηκε σε κάποιο διάστημα χρόνου, προς τη χρονική διάρκεια αυτού του διαστήματος.

➤ Αν η κίνηση είναι ανισοταχής, τα διαστήματα που διανύθηκαν από το σημείο σε ίσα στη διάρκεια τους διαστήματα, θα είναι γενικώς διαφορετικά.

Οι κύριες ιδέες που υποστήλυναν το λογισμό, αναπτύσσονταν για μία μεγάλη χρονική περίοδο. Τα πρώτα βήματα είχαν γίνει από τους Έλληνες μαθηματικούς. Για τους Έλληνες, οι αριθμοί ήταν λόγοι ακεραίων, συνεπώς η ευθεία των αριθμών είχε «τρύπες». Παρέκαμψαν αυτή τη δυσκολία χρησιμοποιώντας μήκη, εμβαδά και όγκους, συμπληρωματικά στους αριθμούς. Για τους Έλληνες δεν ήταν όλα τα μήκη αριθμοί. Ο [Ζήνων ο Ελεάτης](#) περίπου το 450 π.Χ., έδωσε στη δημοσιότητα έναν αριθμό προβλημάτων που στηρίζονταν στο άπειρο. Για παράδειγμα υποστήριξε την άποψη ότι η κίνηση είναι αδύνατη: «Αν ένα σώμα κινείται από το A στο B , πριν φτάσει στο B , διέρχεται από το ενδιάμεσο σημείο B_1 του AB . Για να μετακινηθεί στο B_1 πρέπει πρώτα να έχει προσεγγίσει το ενδιάμεσο σημείο B_2 του AB_1 . Συνεχίζοντας αυτό το επιχείρημα βλέπει ότι το A πρέπει να μετακινηθεί μέσω ενός άπειρου πλήθους αποστάσεων και άρα δε μπορεί να μετακινηθεί».

Η έννοια του συνεχούς αποτελούσε αντικείμενο προβληματισμού και έρευνας ήδη από τα χρόνια της αρχαιότητας. Η ανακάλυψη των αρρήτων που ανέτρεψε την αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και στη γεωμετρία, σε συνδυασμό με τα μετέπειτα παράδοξα που αποδίδονται στον Ζήωνα τον Ελεάτη, σχετικά με τις ατέρμονες διαδικασίες και με τις αντιλήψεις για το «απείρως μικρό» και το «απείρως μεγάλο», υπήρξαν οι απαρχές - αφορμές για τη διερεύνηση της έννοιας του συνεχούς, ιδιαίτερα από τον Αριστοτέλη. Κατά το μεσαίωνα, η μελέτη των έργων του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, από σχολαστικούς φιλοσόφους, συνδυαζόμενη με θεωρητικές αναζητήσεις για τη φύση της θεότητας, οδήγησε σε λεπτεπίλεπτες εικασίες για τη φύση της κίνησης, για το συνεχές και για το άπειρο. Οι [Λύσιππος](#), [Δημόκριτος](#) και [Αντιφών](#) είχαν συνεισφορά στην ελληνική μέθοδο της εξάντλησης που τοποθετήθηκε σε επιστημονική βάση από τον [Εύδοξο](#) περίπου το 370 π.Χ..

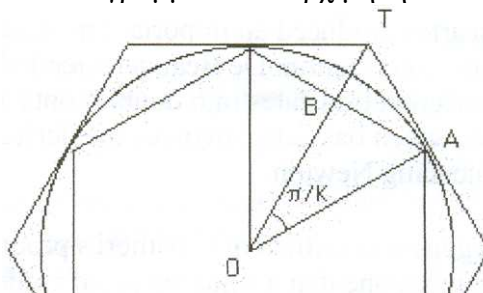
Η μέθοδος αυτή καλείται έτσι διότι κάποιος σκέπτεται ότι τα εμβαδά μετρώνται επεκτείνοντας τα έτσι ώστε αυτά να υπολογίζονται για επιπλέον και επιπλέον του ζητούμενου εμβαδού. Ο Εύδοξος χρησιμοποιώντας την υπολόγισε τον όγκο του κώνου. Τα ονόματα των Ζήνωνα, Ευδόξου και Αρχιμήδη¹ συνδέονται άμεσα με την επινόηση «ατέρμονων διαδικασιών» για τον υπολογισμό διαφόρων προβλημάτων. Οι «ατέρμονες ή άπειρες» διαδικασίες είναι στενά συνδεδεμένες με την έννοια του ορίου. Ο Αρχιμήδης (287- 212 π.Χ.), περίπου το 225 π. Χ., έκανε μία από τις πιο αξιοσημείωτες ανακαλύψεις μέχρι τότε. Η πρώτη του σημαντική κίνηση προς τα εμπρός ήταν να αποδείξει ότι το εμβαδόν ενός τμήματος μίας παραβολής είναι τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού ενός τριγώνου με την ίδια βάση και ύψος (κορυφή) και τα $\frac{2}{3}$ του εμβαδού του περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου. Ο Αρχιμήδης κατασκεύασε μία άπειρη σειρά από τρίγωνα αρχίζοντας με ένα που είχε εμβαδόν A και συνεχώς προσέθετε επιπλέον τρίγωνα ανάμεσα στα ήδη υπάρχοντα τρίγωνα και στην παραβολή, της οποίας ήθελε να βρει το εμβαδόν.

$$A, A + \frac{A}{4}, A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16}, A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16} + \frac{A}{64}.$$

Άρα το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής είναι:

$$A \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right) = A \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{4}{3} A.$$

Αυτό είναι το πρώτο γνωστό παράδειγμα άθροισης μίας άπειρης σειράς. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε την μέθοδο της εξαντλήσεως προκειμένου να βρει μία προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου. Αυτό φυσικά είναι ένα πρώιμο παράδειγμα ολοκλήρωσης το οποίο οδηγεί στο να προσεγγιστούν οι τιμές του π . Εδώ είναι το διάγραμμα του Αρχιμήδη:



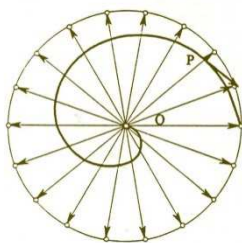
Ανάμεσα σε άλλες «ολοκληρώσεις» από τον Αρχιμήδη, ήταν ο όγκος και η επιφάνεια της σφαίρας και του κώνου, το εμβαδόν της επιφάνειας της έλλειψης, το εμβαδόν χωρίου που περιέχεται μεταξύ της παραβολής $y=x^2$ και κάποιων ευθειών, ο όγκος κάθε τμήματος ενός παραβολοειδούς από περιστροφή και τμήματος υπερβολοειδούς εκ περιστροφής. Καμία περαιτέρω πρόοδος δεν είχε γίνει μέχρι τον 16^ο αιώνα όταν οι μηχανικοί άρχισαν να οδηγούν τους μαθηματικούς να εξετάζουν προβλήματα σχετικά με κέντρα βάρους. Η ιδέα της άπειρης διαδικασίας και τα προβλήματα που δημιουργεί, βρήκε για πρώτη φορά έκφραση στα περίφημα μαθηματικοφιλοσοφικά παράδοξα του Ζήνωνα που είναι κυριολεκτικά ανεξάντλητα σε προεκτάσεις και ερμηνείες. Η βαθιά εντύπωση που προξένησαν στην αρχαία ελληνική διανόηση αυτά τα παράδοξα είχε ως αποτέλεσμα την ολική απόρριψη από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας της έννοιας του ορίου, σαν συμπληρωμένης και τελειωμένης μετά από ένα άπειρο

¹ Το έργο του οποίου είχε τεράστια επιρροή σε όλη την μεταγενέστερη εξέλιξη των μαθηματικών.

αριθμό βημάτων διαδικασίας. Έτσι οι αποδείξεις του Ευδόξου ή του Αρχιμήδη που σήμερα θα θεωρούσαμε ότι ασχολούνται με υπολογισμούς ορίων, ποτέ δεν χρησιμοποιούν κατά εκπεφρασμένο τρόπο την έννοια του ορίου που την θεωρούσαν όχι μαθηματικά έγκυρη και αυστηρή, αλλά βασίζονται σε μία πεπερασμένου τύπου μέθοδο διπλής αντίφασης. Κατά την διάκριση του Αριστοτέλη, οι μαθηματικοί δεν χρησιμοποιούσαν τα απείρως μεγάλα ή τα απείρως μικρά μεγέθη, αλλά μεγέθη οσοδήποτε μεγάλα ή οσοδήποτε μικρά. Αυτή η τάση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών επηρέασε αποφασιστικά τα μεταγενέστερα μαθηματικά για πολλούς αιώνες και ιδιαίτερα την περίοδο μέχρι τον 16^ο–17^ο αιώνα, οπότε από πολλές πλευρές δημιουργήθηκε μία αντίδραση στην δεσμευτική για την ανάπτυξη των μαθηματικών (όπως πίστευαν) αυστηρότητα που είχαν επιβάλει με το κύρος τους οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί. Κυριότεροι εκφραστές αυτής της αντίδρασης ήταν οι: [B. Pascal](#), [P. Fermat](#), [J. Kepler](#) και ο [Γαλιλαίος](#) καθώς και οι μαθητές του μεταξύ των οποίων και ο [B. Cavalieri](#). Η μέθοδος του Αρχιμήδη συνέχισε να χρησιμοποιείται, ώσπου τον 16^ο αιώνα άρχισε να αποσαφηνίζεται η έννοια του ορίου από τον Ιταλό [Luca Valerio](#) και τον Φλαμανδό [Simm Stevin](#), οι οποίοι αποφεύγουν την χρήση της μεθόδου της εξαντλήσεως και της διπλής αντιφάσεως. Η έννοια του ορίου εισήχθη για να αντιμετωπισθούν οι δυσκολίες σε τρία βασικά προβλήματα.

- Γεωμετρικά προβλήματα (υπολογισμοί εμβαδών, μελέτη της φύσεως των γεωμετρικών μηκών, υπολογισμοί όγκων, εφαπτόμενη καμπύλης, ...).
- Το πρόβλημα του αθροίσματος και το ύψος συγκλίσεως μίας σειράς.
- Πρόβλημα της διαφορίσης (που προκύπτει από την σχέση δύο ποσοτήτων που συγχρόνως τείνουν στο 0).

Την αρχική έννοια του ορίου πρέπει να την αναζητήσουμε στους γεωμετρικούς υπολογισμούς των εμβαδών και των όγκων την εποχή του ορθολογισμού, της φιλοσοφίας και της επιστημονικής αντιμετώπισης των προβλημάτων από τους μεγάλους Έλληνες μαθηματικούς. Εκείνο που χαρακτηρίζει την παράγωγο ως έννοια, είναι ότι συνδέει την ταχύτητα με την οποία κινείται ένα σημείο μίας καμπύλης, με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό. Είναι επομένως φυσικομαθηματική έννοια. Δεν είναι τυχαίο ότι τα πρώτα στοιχεία αυτής της έννοιας εμφανίζονται στα έργα του Αρχιμήδη και συγκεκριμένα στο έργο του «Περί ελίκων». Όταν μία ευθεία περιστρέφεται ομαλά γύρω από ένα σημείο [O](#), ενώ ένα σημείο [P](#), ξεκινώντας από το [O](#) κινείται ομαλά κατά μήκος αυτής, τότε το σημείο [P](#) διαγράφει μία έλικα.



Ο [Αρχιμήδης](#) απέδειξε (με μεθόδους που παραπέμπουν στο σύγχρονο ορισμό της παραγώγου) ότι η διεύθυνση της ταχύτητας του σημείου [P](#) πάνω στην έλικα είναι η διεύθυνση της εφαπτομένης της έλικας στο [P](#). Είναι αξιοσημείωτο ότι ο κινητικός ορισμός της έλικας που έδωσε ο Αρχιμήδης καθιστά εύκολη τη φυσική έννοια της εφαπτομένης ως ταχύτητας. Αυτό δεν

είναι το μοναδικό στοιχείο που έχουμε για τη συνεισφορά του Αρχιμήδη στο διαφορικό λογισμό. Στο έργο του «[Περί σφαίρας και κυλίνδρου](#)» διερευνά τις συνθήκες επίλυσης μίας εξίσωσης 3^{ου} βαθμού και κατά τη διερεύνηση αυτή καταλήγει στην ανάγκη προσδιορισμού της μέγιστης τιμής μίας ποσότητας. Τη μέγιστη αυτή τιμή την προσδιορίζει με μεθόδους που ανάγονται ευθέως στις σημερινές. Είναι βέβαιο ότι αν είχε κάνει το ελάχιστο βήμα προς την έννοια του ορίου θα ήταν ο θεμελιωτής και του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Για αυτό άλλωστε όπως μας πληροφορεί ο [Sir Thomas Little Heath](#),

«Οι εργασίες του Αρχιμήδη τόσο δυνατά και καθαρά υποδεικνύουν τις νεότερες μεθόδους της ανάλυσης, ώστε τον 17^ο αιώνα ο [Torricelli](#) και ο [Wallis](#) ριψοκινδύνεψαν την άποψη ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί έκρυψαν εσκεμμένα, κάτω από τις συνθετικές αποδείξεις τους, τα αναλυτικά τους τεχνάσματα, με τα οποία οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη της ανάλυσης».

Από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μέχρι τον 12^ο μ.Χ. αιώνα στην Ευρώπη δεν παρατηρείται παραγωγή έργου προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της ανάλυσης. Η ελληνική παράδοση καλλιεργήθηκε από τους Άραβες, οι οποίοι συγκέντρωσαν τα μέχρι τότε διασωθέντα χειρόγραφα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και τα μετέφρασαν στα αραβικά. Περί το 800 μ.Χ. ο χαλίφης της Βαγδάτης [Αλ Μαμούν](#), προστάτης των γραμμάτων και των επιστημών, αποδύεται σε μία πρωτοφανή εκστρατεία συγκέντρωσης και μετάφρασης των αρχαίων ελληνικών κειμένων. Για το θέμα που μας απασχολεί, σημαντικός Άραβας μαθηματικός είναι ο [Σαράφ αλ Ντιν αλ Τουστ](#) (1201- 1274), συνεχιστής του έργου του Ομάρ αλ Καγιάμ. Σαν μυστικοσύμβουλος του Χουλαγκού, εγγονού του Τσέγκις Χαν, τον έπεισε να ιδρύσει στο Μαραγκά του περσικού Αζερμπαϊτζάν μέγα αστεροσκοπείο, βιβλιοθήκη εκ 400.000 τόμων και ακαδημία, της οποίας τα μέλη μισθοδοτούνταν αδρώς. Μεταξύ των συγγραμμάτων του αναφέρονται:

- Το πρώτο αυτοτελές βιβλίο ευθυγράμμου και σφαιρικής τριγωνομετρίας, στο οποίο γίνεται χρήση όλων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Ερμηνείες και διορθώσεις της «Συντάξεως» του Πτολεμαίου.
- «Λογική»
- «Ηθική»
- «Προλεγόμενα στην αστρονομία»
- Πραγματεία περί αστρολάβου
- Περί ημερολογίου
- Ερμηνεία και προσθήκες στα έργα του Αβικέννα και
- Άλγεβρα, στα πλαίσια της οποίας αφού ολοκλήρωσε τη γεωμετρική μελέτη των εξισώσεων 3^{ου} βαθμού, οδηγήθηκε στη μελέτη καμπυλών γενικότερα. Φαίνεται ότι στη μελέτη αυτή χρειάστηκε και χρησιμοποίησε ένα εργαλείο που θα πρέπει να ονομάσουμε [παράγωγο](#).

Με δεδομένο ότι τα έργα του Αρχιμήδη είχαν μεταφραστεί στα αραβικά, πιθανολογούμε ότι θα τα είχε μελετήσει και αν μη τι άλλο χρησιμοποίησε στοιχεία από αυτά. Υπό την επίδραση της ανατολής αναζωπυρώνεται το ενδιαφέρον για τα αρχαία κείμενα και στη δύση. Πολλά έργα μεταφράζονται από τα αραβικά στα λατινικά. Οι έννοιες του απείρου, του απειροστού, του συνεχούς, που είναι έννοιες της ανάλυσης, ανακαλύπτονται αρχικά από τους σχολαστικούς φιλοσόφους στα «Φυσικά» του Αριστοτέλη. Κατά τον 14^ο αιώνα ο [Richard Suiseth](#), γνωστός ως [Calculator](#) και ο [Nicole Oresme](#) ενδιαφέρονται για το μαθηματικό περιεχόμενο αυτών των εννοιών. Ο Calculator στο έργο του «[Liber Calculationum](#)» ασχολείται μεταξύ άλλων και με λόγους μεταβολής και

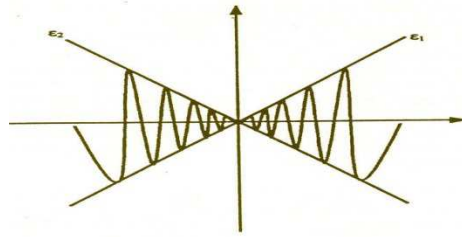
διατυπώνει την πρόταση: «*Η ποσότητα της οποίας ο λόγος μεταβολής γίνεται άπειρος, έχει έναν πεπερασμένο μέσο λόγο μεταβολής*». Χρησιμοποιεί τη λέξη **fluent** για τη μεταβλητή ποσότητα και τη λέξη **fluxion** για το ρυθμό μεταβολής, λέξεις που θα χρησιμοποιήσει 300 χρόνια αργότερα ο Νεύτωνας. Υποστήριζε ότι ο λόγος μεταβολής, αλλά και ο ρυθμός μεταβολής του λόγου μεταβολής μπορούν να αποδοθούν αριθμητικά, αλλά δεν έδωσε ορισμούς. Ο **Nicole Oresme** (1323–1382) αναφέρεται στο έργο του **Calculator** και ήταν ο πρώτος που παρέστησε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής με ευθεία γραμμή. Ούτε αυτός έδωσε ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας κινήτου, αλλά πλησίασε στον καθορισμό της παραγώγου σε σημείο καμπύλης.

Εν τω μεταξύ το δύσχηστο σύστημα των Ρωμαϊκών συμβόλων έχει αντικατασταθεί από τους ινδοαραβικούς χαρακτήρες που έφερε ο **Fibonacci** ($\cong$ 1175–1250) από τα ταξίδια του στις μουσουλμανικές χώρες, ενώ τα μαθηματικά σύμβολα των πράξεων εισάγονται περί το 1489 και της ισότητας (από τον **Robert Recorde**) το 1557. Το 1591 ο **Vieta** επινοεί την συμβολική άλγεβρα και αργότερα, τον 17^ο αιώνα, ο **Pierre Fermat** και ο **Descartes**, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, την αναλυτική γεωμετρία. Όμως μόνο από τον 16^ο αιώνα και μετά αφ' ότου έγιναν γνωστά τα έργα του Αρχιμήδη* αρχίζει πλέον η ουσιαστική προσπάθεια για την ανάπτυξη της ανάλυσης. Η αναλυτική γεωμετρία ήταν μία πραγματική επανάσταση. Τώρα οι καμπύλες μπορούσαν να παρασταθούν με εξισώσεις, αλλά και κάθε εξίσωση όριζε μία καμπύλη.

Οι Έλληνες και οι Άραβες είχαν μελετήσει κυρίως τον κύκλο και τις κωνικές τομές, καθώς και ορισμένες καμπύλες που ορίζονταν από γεωμετρικούς τόπους και είχαν βρει τις εφαπτόμενες και το εμβαδόν τους. Αλλά τώρα το πλήθος των καμπυλών ήταν απεριόριστο. Και για αυτές οι μέθοδοι της συνθετικής γεωμετρίας ήταν ανεπαρκείς. Επιπλέον ετίθετο θέμα ορισμού των εννοιών. Για τους αρχαίους Έλληνες η εφαπτομένη καμπύλης ήταν η ευθεία που «αγγίζει» την καμπύλη, χωρίς να την τέμνει: «*Ευθεία κύκλου εφάπτεσθαι λέγεται, ήτις αποτομένη του κύκλου και εκβαλλομένη ου τέμνει τον κύκλον.*» 3^ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, Ορισμός β. Σε ελεύθερη μετάφραση: «*Εφαπτομένη κύκλου λέγεται η ευθεία, η οποία αγγίζει τον κύκλο και όταν προεκταθεί δεν τον τέμνει.*» Παρατηρούμε ότι ο ορισμός του Ευκλείδη ήταν ένας στατικός ορισμός της εφαπτομένης και αναφέρεται αποκλειστικά σε εφαπτομένη κύκλου. Αυτή η έννοια της εφαπτομένης μπορεί να ήταν ικανοποιητική για τις καμπύλες με αρκούντως ομαλή συμπεριφορά που είχαν μελετηθεί μέχρι τότε, όπως ο κύκλος ή οι κωνικές τομές. Τι θα μπορούσε όμως να πει κανείς για τις εφαπτόμενες καμπυλών, όπως η γραφική παράσταση της

$$\text{συναρτήσεως } f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Με πρωτοβουλία του φιλομαθούς Πάπα Νικολάου του Ε', στα μέσα του 15^{ου} αιώνα, ακριβώς την εποχή που έσβηνε η Βυζαντινή Αυτοκρατορία, τα ελληνικά χειρόγραφα μεταφράστηκαν στα λατινικά από τον κληρικό Ιάκωβο της Κρεμόνας. Ο γερμανικής καταγωγής αστρονόμος **Johann Muller**, γνωστός ως **Regiomontanus** (1436 – 1476) διόρθωσε τη μετάφραση του Ιακώβου της Κρεμόνας το 1462 και είχε σκοπό να εκδώσει τα έργα του Αρχιμήδη με το ελληνικό κείμενο και τη λατινική μετάφραση, αλλά πέθανε πριν προλάβει να πραγματοποιήσει αυτή την έκδοση. Η πρώτη έκδοση των έργων του Αρχιμήδη με τα ελληνικά πρωτότυπα και βελτιωμένη λατινική μετάφραση έγινε από τον **Thomas Gerchauff** (**Venatorius**) (1488 – 1551), το 1554, στον οίκο Ioannes Hervagius της Βασιλείας (Ελβετίας).



Είναι οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 εφαπτόμενες.

Είναι γεγονός ότι ο στατικός ορισμός της εφαπτομένης είναι ανεπαρκής. Ο Gilles Persone de Roberval (1602–1675), στο έργο του «Traite' des Invisibles», που χρονολογείται από το 1634, αν και δεν εξεδόθη μέχρι το 1693, γενίκευσε την μέθοδο που είχε χρησιμοποιήσει ο Αρχιμήδης για την εύρεση της εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο της έλικας του. Όπως ο Αρχιμήδης, έτσι και ο Roberval αντιλαμβάνονταν την καμπύλη ως την τροχιά ενός σημείου, που κινείται υπό την επίδραση δύο ταχυτήτων. Ο Torricelli (1608–1647) παρατήρησε ότι η μέθοδος του Roberval χρησιμοποιούσε μία αρχή ήδη διατυπωθείσα από τον Γαλιλαίο, δηλαδή ότι η οριζόντια και η κάθετη ταχύτητα δρούσαν η μία ανεξαρτήτως της άλλης. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κατά τον 17^ο αιώνα, η μαθηματική επιστήμη και κυρίως ο απειροστικός λογισμός, γνώρισε μία πρωτοφανή άνθηση. Για πρώτη φορά μετά την αρχαιότητα τα μαθηματικά απέτελεσαν το επίκεντρο της πνευματικής ανάπτυξης μίας εποχής.

Από εκείνη τη στιγμή, που χαρακτηρίζεται κυρίως από τη συμβολή του J. Kepler, του Γαλιλαίου και των μαθητών του, δύο αστρονόμων και φυσικών, παρά μαθηματικών, αρχίζει ένας οργασμός ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού, που συμπληρώνεται σε ένα πρώτο στάδιο το 1675 περίπου με το έργο του Isaac Barrow, του Νεύτωνα, κυρίως φυσικού και του Leibniz, κυρίως φιλοσόφου, παρά μαθηματικών. Το γεγονός αυτό έχει την ερμηνεία του. Στην αρχαία Ελλάδα το κίνητρο για την εξέλιξη των μαθηματικών ήταν φιλοσοφικό και θεωρητικό και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την αναζήτηση της εσωτερικής αρμονίας και της υψηλής αυστηρότητας. Κατά τον 17^ο αιώνα ένα από τα κίνητρα για την εξέλιξη των μαθηματικών ήταν η αναζήτηση και η απόκτηση της γνώσης που θα ήταν χρήσιμη για την θεμελίωση της επερχόμενης τεχνολογικής αναπτύξεως. Έτσι πολλά θεμελιώδη μαθηματικά που χρησιμοποιούσαν τις έννοιες του απειροστικού λογισμού προέρχονταν από την μελέτη της αστρονομίας, της μηχανικής και της φυσικής (την ταχύτητα, την κίνηση των πλανητών) με στόχο, όχι τόσο θεωρητικό, όσο να αποκτηθούν οι πρακτικές γνώσεις σε μία εποχή που χαρακτηριζόταν από την κινητικότητα και την ανάπτυξη του εμπορίου και της ναυσιπλοΐας.

Ο Kepler στην εργασία του για την κίνηση των πλανητών, έπρεπε να υπολογίσει το εμβαδό τμημάτων μίας έλλειψης. Η μέθοδος του συνίστατο στο να θεωρεί τα εμβαδά ως αθροίσματα γραμμών, μία ακατέργαστη μορφή ολοκληρώσεως, αλλά ο Kepler είχε λίγο χρόνο για «ελληνική αυστηρότητα» (ακρίβεια αποδείξεων) και ήταν αρκετά τυχερός στο να εξασφαλίσει την σωστή απάντηση αφού του έκανε δυο λάθος διαγραφές σε αυτήν την εργασία!

Τρεις μαθηματικοί γεννημένοι με τρία έτη διαφορά ο ένας από τον άλλο, ήταν οι επόμενοι που είχαν σημαντικές συνεισφορές. Αυτοί ήταν οι Fermat, Roberval, Cavalieri. Ο Cavalieri οδηγήθηκε στην δική του «μέθοδο των αδιαιρέτων» από τις προσπάθειες του Kepler στην ολοκλήρωση. Αυτός δεν ήταν αυστηρός στην προσέγγιση του και είναι δύσκολο να δούμε καθαρά πως σκέφθηκε αυτός σχετικά με την μέθοδο του. Εμφανίζεται ότι ο Cavalieri

σκέφθηκε μία επιφάνεια σα να ήταν φτιαγμένη από συστατικά τα οποία ήταν γραμμές και τότε άθροισε τον άπειρο αριθμό των «αδιαιρέτων». Αυτός έδειξε χρησιμοποιώντας τέτοιες μεθόδους, ότι το ολοκλήρωμα του x^n από 0 έως a , ήταν $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, δείχνοντας το αποτέλεσμα για έναν αριθμό τιμών του n και

συνάγοντας το γενικό αποτέλεσμα. Ο Huygens, ήταν επικριτικός στις αποδείξεις του Cavalieri λέγοντας ότι αυτό που χρειάζεται είναι μία απόδειξη που τελικά να πείθει ότι μία αυστηρή απόδειξη μπορούσε να κατασκευαστεί. Ο Huygens άσκησε μείζονα επιρροή στον Leibniz και εξ' αυτού έπαιξε αξιόλογο ρόλο στο να παράγει μία περισσότερο ικανοποιητική προσέγγιση του λογισμού. Ο Roberval θεώρησε προβλήματα του ίδιου τύπου αλλά ήταν περισσότερο αυστηρός από τον Cavalieri. Ο Roberval θεώρησε το εμβαδόν ανάμεσα σε μία καμπύλη και μία ευθεία γραμμή, ως να ήταν φτιαγμένο από έναν άπειρο αριθμό απείρως στενών ορθογωνίων λωρίδων. Το εφάρμοσε αυτό στο ολοκλήρωμα του x^m από 0 έως 1 το οποίο έδειξε ότι έχει την προσεγγιστική

τιμή:
$$\frac{[0^m + 1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m]}{n^{m+1}}.$$

Ο Roberval τότε ισχυρίστηκε ότι αυτό κατευθύνεται προς το $\frac{1}{m+1}$, όσο το n τείνει στο άπειρο και έτσι υπολόγισε το εμβαδό. Ο Torricelli εφάρμοσε τη μέθοδο του Roberval για να βρει τις εφαπτόμενες των καμπυλών με εξισώσεις της μορφής $y = x^n$ (με σημερινό συμβολισμό). Παρόλο που ο ορισμός της εφαπτομένης ως ευθείας που έχει τη διεύθυνση της συνισταμένης ταχύτητας ήταν πιο σύνθετος από τον ορισμό της ως « αγγίζουσας » ευθείας μίας καμπύλης, αυτός ο νέος ορισμός μπορούσε να εφαρμοστεί σε καμπύλες, στις οποίες ο παλαιότερος ορισμός ήταν ανεπαρκής.

Ήταν επίσης χρήσιμος διότι συνέδεε τη στατική γεωμετρία με τη δυναμική, οι οποίες πριν την εργασία του Γαλιλαίου αντιμετώπιζονταν στην ουσία ως ξεχωριστοί τομείς. Δεν ήταν όμως δεκτός από μαθηματική πλευρά διότι στηριζόταν σε φυσικές έννοιες. Υπήρχαν καμπύλες που εμφανίζονταν σε καταστάσεις που δεν είχαν σχέση με κίνηση και επομένως αυτός ο ορισμός της εφαπτομένης δεν ήταν εφαρμόσιμος. Κατόπιν όλων αυτών άρχισαν να προκύπτουν και άλλες μέθοδοι εύρεσης εφαπτόμενων. Προς αυτή την κατεύθυνση κινούνται οι εργασίες των Pierre Fermat και Isaac Barrow.

Ο Pierre Fermat (1601 – 1665), ο «πρίγκιπας των ερασιτεχνών», ήταν βοηθός στο ανώτατο δικαστήριο της Τουλούζης και ασχολήθηκε με τα μαθηματικά στον ελεύθερο χρόνο του για διασκέδαση. Οι D' Alembert, Lagrange και Laplace του αποδίδουν τις πρώτες ιδέες του διαφορικού λογισμού.

Θεμελίωσε τη σύγχρονη θεωρία αριθμών, έβαλε μαζί με τον Pascal τις βάσεις για τη θεωρία πιθανοτήτων και επινόησε, λίγα χρόνια πριν από τον Descartes, την αναλυτική γεωμετρία. Ο Fermat ήταν επίσης περισσότερο αυστηρός στην προσέγγιση του, αλλά δεν έδωσε καμία απόδειξη. Γενίκευσε την

παραβολή και την υπερβολή: $Parabola: \frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 \text{ to } \left(\frac{y}{a}\right)^n = \left(\frac{x}{b}\right)^m$

$$Hyperbola: \frac{y}{a} = \frac{b}{x} \text{ to } \left(\frac{y}{a}\right)^n = \left(\frac{b}{x}\right)^m$$

Σε αυτή την εξελικτική πορεία που εξετάζουμε $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^p$, ο Fermat

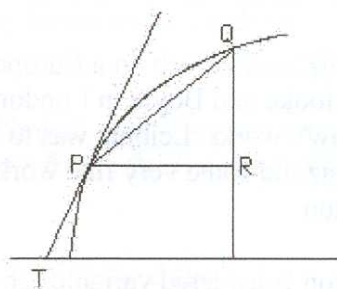
υπολόγισε το άθροισμα του r^p από $r=1$ έως $r=n$. Επίσης υπολόγισε μέγιστα και ελάχιστα θεωρώντας ότι η εφαπτομένη στην καμπύλη ήταν παράλληλη στον άξονα των x . Έγραψε στον Descartes, δίνοντας του την μέθοδο που ουσιαστικά χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα, βρίσκοντας μέγιστα και ελάχιστα υπολογίζοντας τότε η παράγωγος της συνάρτησης ήταν μηδέν.

Ο Fermat έλυσε για πρώτη φορά προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων μελετώντας τη συμπεριφορά των συναρτήσεων κοντά στις ακραίες τιμές τους.

Η βασική του παρατήρηση ήταν ότι αν η τιμή $f(x_0)$ είναι μέγιστη ή ελάχιστη για την συνάρτηση f , τότε η f μεταβάλλεται με μεγάλη βραδύτητα κοντά στο x_0 . Από τα προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων ο Fermat οδηγήθηκε σε μία μέθοδο για την χάραξη εφαπτόμενων καμπύλης. Η κεντρική ιδέα είναι ότι η εφαπτομένη θεωρείται ως τέμνουσα της οποίας τα δύο σημεία προσεγγίζουν όλο και περισσότερο μέχρι να συμπίψουν. Η μέθοδος για την εύρεση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ περιλαμβάνει τον υπολογισμό της κλίσεως $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ της τέμνουσας, την αλγεβρική επεξεργασία που

απαιτεί ο τύπος $f(x+h)$ στον αριθμητή και στη συνέχεια την διαίρεση με το h . Όλη αυτή η διαδικασία υποδηλώνει πως όταν η ποσότητα h μηδενίζεται, η τέμνουσα γίνεται εφαπτομένη και έτσι η παράλειψη του h στον τύπο κλίσεως της τέμνουσας δίνει την κλίση της εφαπτομένης. Το μεγαλύτερο μέρος του έργου του περιέχεται σε επιστολές προς άλλους μαθηματικούς. Δημοσιεύτηκε μετά το θάνατο του από το γιο του Σαμουήλ. Ο [Isaac Barrow](#) (1630–1677) έδωσε επίσης μία ανάλογη μέθοδο κατασκευής εφαπτόμενων σε καμπύλες, όπου η εφαπτομένη δίνεται ως το όριο μίας χορδής όσο τα σημεία προσεγγίζουν το καθένα, γνωστή ως το διαφορικό τρίγωνο του Barrow.

Here is **Barrow's differential triangle**



Μαζί οι Barrow και [Torricelli](#) μελέτησαν το πρόβλημα της κινήσεως με μεταβλητή ταχύτητα. Η εργασία του Torricelli συνεχίστηκε στην Ιταλία από τους [Mengoli](#) και [Angeli](#). Γνωρίζοντας καλά ελληνικά και αραβικά ο Barrow μετέφρασε ορισμένα έργα του Ευκλείδη και βελτίωσε τις μεταφράσεις αρκετών έργων των Ευκλείδη, Απολλώνιου και Αρχιμήδη. Το κύριο έργο του, «[Lectiones Geometricae](#)» (1669) είναι μία από τις μεγαλύτερες συνεισφορές στην ανάλυση.

Η συμβολή των Fermat και Barrow στην εξέλιξη του διαφορικού λογισμού είναι πολύ πιο ουσιαστική από ότι είναι γενικώς παραδεκτό. Στις εργασίες τους προσέγγισαν την έννοια της παραγώγου μέσω της εφαπτομένης καμπύλης, με καθαρά γεωμετρικό τρόπο και όχι μέσω στιγμιαίας ταχύτητας.

Δηλαδή η παράγωγος επινοήθηκε αρχικά από καθαρά μαθηματικές ανάγκες και συγκεκριμένα από την ανάγκη να βρεθούν οι λύσεις εξισώσεων,

γεγονός που οδήγησε στον προσδιορισμό ακρότατων σε συνδυασμό με την κατασκευή της εφαπτομένης καμπύλης. Η κυριότερη αξία των προβλημάτων φυσικής που συνδέθηκαν με την εξέλιξη της έννοιας της παραγώγου έγκειται στο γεγονός ότι εισήγαγαν την έννοια της μεταβολής στα μαθηματικά.

Η παράγωγος της απόστασης είναι η ταχύτητα και η αντίστροφη λειτουργία πηγαίνει από την ταχύτητα στην απόσταση. Ως εκ τούτου η επίγνωση της αντιστροφής της παραγωγίσης άρχισε να αναπτύσσεται φυσιολογικά και η ιδέα ότι το ολοκλήρωμα και η παράγωγος ήταν αντίστροφα το ένα του άλλου έγινε οικεία στον Barrow. Στην πραγματικότητα, παρόλο που ο Barrow ποτέ δεν διατύπωσε κατηγορηματικά το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού, εργαζόταν προς αυτήν την κατεύθυνση και ο Newton ήταν αυτός που συνέχισε σε αυτήν την κατεύθυνση και διατύπωσε κατηγορηματικά το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Το 1656 ο Wallis εξέδωσε το έργο «Arithmetica Infinitorum», στο οποίο γίνεται χρήση κάποιας «έννοιας ορίου». Το έργο αυτό έχει γεωμετρικό χαρακτήρα. Ο Ιταλός Pietro Nengoli το 1659 με το βιβλίο του «Geometrica Speciosa» βελτίωσε την μέθοδο του Luca Valerio για αναπαράσταση εμβαδών κάτω από συγκεκριμένες καμπύλες. Ο Luca Valerio (1552–1618) εξέδωσε στη Ρώμη το 1606 το *De quadratura parabolae* το οποίο συνέχιζε τις ελληνικές μεθόδους αντιμετώπισης προβλημάτων εμβαδού αυτού του είδους. Οι Καρτέσιος, Fermat και D' Alembert προσέγγισαν την έννοια του ορίου μέσω της κλίσης εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο. Ο Καρτέσιος βρήκε μέθοδο για τον υπολογισμό της εφαπτομένης μίας καμπύλης σε ένα σημείο $M(x_1, y_1)$. Ο Fermat προσπαθώντας να λύσει το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής μίας συνάρτησης, εισάγει μία βασική ιδέα: *«αυξάνει ελάχιστα την μεταβλητή και μετά τις πράξεις, αφήνει την αύξηση να εξαφανίζεται»*.

Ο Barrow (1650) για τη χάραξη εφαπτομένων, ακολουθεί μέθοδο που μοιάζει με του Fermat και με την διαδικασία που ακολουθούμε σήμερα. Διαφέρει μόνον ως προς την ορολογία και τον συμβολισμό. Κατά τον 17^ο αιώνα έχουμε ραγδαία ανάπτυξη των μαθηματικών και αυτό προέκυψε από την ανάγκη να αντιμετωπισθούν προβλήματα των φυσικών επιστημών που απαιτούσαν αλλαγή στις μεθόδους που επικρατούσαν μέχρι τότε. Ότι είχε γίνει όμως μέχρι τον 17^ο αιώνα ήταν αποσπασματικό και αθεμελίωτο. Ήταν καιρός να δομηθεί ο ίδιος ο απειροστικός λογισμός με τη μορφή ενός αποτελεσματικού εργαλείου αναλυτικών μεθόδων που να στηρίζονται σε αυστηρούς φορμαλιστικούς κανόνες. Υπό αυτήν την έννοια ο απειροστικός λογισμός είναι έργο των Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz.

Ο Isaac Newton εθεωρείτο πατέρας του διαφορικού λογισμού μέχρι το 1934, οπότε ο Louis Trenchard Moore ανακάλυψε μία σημείωση που έφερε την αλήθεια στο φως, απονέμοντας στον Fermat την αναγνώριση που εδικαιούτο. Σε αυτήν ο Newton ανέφερε ότι είχε αναπτύξει το διαφορικό λογισμό του, με βάση «τη μέθοδο του κυρίου Fermat για το σχεδιασμό των εφαπτόμενων». Η δημιουργία του διαφορικού λογισμού ως ανεξάρτητου κλάδου των μαθηματικών πραγματοποιήθηκε από τους Newton και Leibniz. Αυτοί ορθολογιστικά απέδειξαν ότι η διαφόριση και η ολοκλήρωση είναι πράξεις αμοιβαία αντίστροφες. Από εκείνη την εποχή ο διαφορικός λογισμός αναπτύχθηκε σε διαρκή δεσμό με τον ολοκληρωτικό λογισμό. Παρ' όλα αυτά τα θεμέλια του λογισμού πάσχουν από ασάφειες, απουσιάζουν οι αυστηροί ορισμοί και ο τρόπος διατύπωσης των νοημάτων εμποδίζει την κατανόηση και

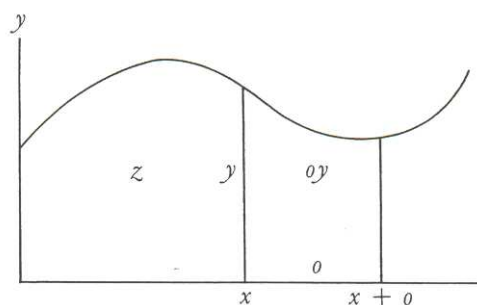
η σύγχυση που προκαλείται σχετικά με τις άπειρα μικρές ποσότητες επιφέρει αυστηρές επικρίσεις, ιδιαίτερα του επισκόπου Berkley, το 1734.

Ο Newton, εξασφάλισε μία γενική μέθοδο, για να λύσει τα προβλήματα του λογισμού και μέσω πειραμάτων με το φως, έκανε την κοσμογονική ανακάλυψη ότι το λευκό φως, όπως αυτό του Ήλιου, αποτελείται από όλα τα χρώματα, από το βιολετί ως το κόκκινο. Όπως είπε ο ίδιος «Όλα αυτά έγιναν τα 2 χρόνια, 1665 και 1666, της πανούκλας, εκείνες τις ημέρες που εγώ ήμουν στην ακμή της ηλικίας για ανακάλυψη και ασχολήθηκα με μαθηματικά και φιλοσοφία περισσότερο από κάθε άλλη φορά». Αρχικά, δημοσιοποίησε τις ανακαλύψεις του. Λέγεται πως είχε έναν αφύσικο φόβο για την κριτική. Ο [De Morgan](#) λέει ότι «ένας παθολογικός φόβος για αντίδραση από άλλους κυβερνούσε ολόκληρη τη ζωή του». Το 1675, έκανε δημοσίευση μίας άλλης εργασίας του πάνω στο φως, η οποία περιελάμβανε τη δική του ιδέα ότι, το φως ήταν ένας χείμαρρος από μόρια, η σωματιδιακή φύση του φωτός. Ξανασυνάντησε μία θύελλα επικρίσεων και ακόμα ισχυρισμούς από πολλούς, ότι αυτοί είχαν ήδη ανακαλύψει αυτές τις ιδέες. Αυτή την εποχή, ο Newton έλαβε την απόφαση ότι τα συμπεράσματά του, θα δημοσιεύονταν μετά το θάνατο του. Ο Newton επίσης, ήταν μεγάλος χημικός. Παρόλο που δεν υπάρχουν μεγάλες ανακαλύψεις σχετιζόμενες με την εργασία του σε αυτό το πεδίο, πρέπει κάποιος να λάβει υπόψη του ότι η χημεία εκείνη την εποχή ήταν σε βρεφική ηλικία. Είχε τη σωστή ιδέα, να προσπαθήσει να εξηγήσει τα χημικά φαινόμενα με όρους εσχάτων σωματιδίων και είχε μία εμβριθή γνώση της πειραματικής χημείας. Για αυτό το θέμα, έγραψε μία σημαντική εργασία, την “[De natura acidorum](#)” (γράφτηκε το 1692 και δημοσιεύθηκε το 1710).

Στα φιλοσοφικά πεπραγμένα της βασιλικής εταιρείας του 1701, δημοσίευσε μία εργασία σχετική με τη θερμότητα, η οποία περιείχε το διάσημο νόμο της ψύξης. Παρόλο που είχε διαβάσει τις εργασίες των αλχημιστών, δεν αποδέχθηκε τις δικές τους νεφελώδεις και μυστικιστικές απόψεις. Οι χημικές και φυσικές ιδιότητες των σωμάτων, μπορούσαν πίστευε να μετρηθούν με όρους μεγέθους, σχήματος και κινήσεις μικροσκοπικών σωματιδίων. Απέρριψε τις απόκρυφες δυνάμεις των αλχημιστών, όπως η συμπάθεια, η αντιπάθεια, η έλξη και η καταλληλότητα. Σε συμπλήρωση της εργασίας του πάνω στην ουράνια μηχανική, το φως και τη χημεία, ο Newton εργάστηκε πάνω στην υδροστατική και στην υδροδυναμική. Πέρα από τη δική του εξάισια πειραματική εργασία στο φως, πειραματίστηκε στην απόσβεση του εκκρεμούς με ποικίλα μέσα, στην πτώση σφαιρών σε αέρα και νερό και στη ροή νερού μέσα από ακροσωλήνια. Είναι εμφανές, ότι ήταν πάρα πολύ απορροφημένος στην επιστήμη, παρά στα μαθηματικά και ήταν ένας ενεργός συμμετέτοχος στα προβλήματα της εποχής του. Θεωρούσε ως κορυφαία τιμή της επιστημονικής δουλειάς να είναι η υποστήριξη της στη θρησκεία εξ’ αποκαλύψεως και ήταν στην πραγματικότητα ένας μελετημένος θεολόγος, ο οποίος ποτέ δε δέχονταν εντολές. Σκέπτονταν επιστημονικά, σκληρά και ανιαρά, αλλά κολλούσε σε αυτό διότι του έδινε πειστήριο της δημιουργίας του Θεού. Όπως ο πρόγονος του Barrow, ο Newton στράφηκε σε σπουδές θεολογίας, αργότερα στη ζωή του. Στο “[The Chronology of Ancient Kingdoms Amended](#)” (βελτιωμένο χρονολόγιο των αρχαίων βασιλείων) προσπάθησε να χρονολογήσει επακριβή γεγονότα που είχαν περιγραφεί στη Βίβλο και άλλα θρησκευτικά έγγραφα, συσχετίζοντας τα με αστρονομικά γεγονότα. Η κύρια θρησκευτική του εργασία ήταν «[Παρατηρήσεις πάνω στις προφητείες του Δανιήλ & η Αποκάλυψη του Αγίου](#)

Ιωάννη». Η βιβλική εξήγηση, ήταν μία φάση της ορθολογιστικής προσέγγισης της θρησκείας και αυτό ήταν δημοφιλές την εποχή της λογικής, ο Leibniz έβαλε το χέρι του σε αυτό. Ο Newton, είπε ότι οδηγήθηκε στις ανακαλύψεις του στην ανάλυση από το “**Arithmetica Infinitorum**”. Φυσικά, μέσα στη δική του εργασία στο λογισμό, σημείωσε πρόοδο με το να σκέφτεται αναλυτικά. Όμως ακόμα και ο Newton θεώρησε τη γεωμετρία ως απαραίτητη για μία αυστηρή απόδειξη. Ο Newton λέει ότι κατείχε το λογισμό του των ροών από το 1665–66,² δηλαδή κάποια στιγμή κατά την περίοδο στην οποία είχε ακούσει τις διαλέξεις του Barrow και είχε ανακαλύψει το διωνυμικό θεώρημα. Το 1669, ο Newton κυκλοφόρησε στους φίλους του μία μονογραφία τιτλοφορούμενη “**De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas**”.³ (Πάνω στην ανάλυση με τον τρόπο των εξισώσεων με άπειρο αριθμό όρων) Δε δημοσιεύθηκε έως το 1711, αλλά κυκλοφόρησε μεταξύ των φίλων του. Στην εν λόγω μονογραφία, δεν έκανε ρητή χρήση του συμβολισμού ή της ιδέας των ροών. Αντιθέτως, χρησιμοποίησε το απείρως μικρό, τόσο γεωμετρικά όσο και αναλυτικά, με έναν τρόπο παρόμοιο με εκείνο που συναντάται στους Barrow και Fermat και επεξέτεινε την εφαρμοσιμότητα του, μέσω της χρήσης του διωνυμικού θεωρήματος. Σε αυτή την εργασία, ο Newton χρησιμοποίησε την ιδέα ενός απειρίοιστα μικρού ορθογωνίου ή «στιγμής» εμβαδού και έβρισκε τους τετραγωνισμούς καμπυλών ως εξής. Υπέθετε ότι έχει μία καμπύλη και ότι ένα εμβαδόν Z , κάτω από την καμπύλη δίνεται από $Z = a \cdot x^m$, (1), όπου m ακέραιος ή κλασματικός. Ονομάζει μία απειροστή αύξηση του x , τη στιγμή x και την υποδηλώνει με O , ένα συμβολισμό που είχε χρησιμοποιηθεί από τον **James Gregory** και το ισοδύναμο με το ε του **Fermat**. Η περιοχή η οποία περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα xx' , τον άξονα yy' και την τεταγμένη στο $x+O$, την οποία συμβολίζει $Z+Oy$, Oy είναι η στιγμή της περιοχής.

Σχήμα 1.



Τότε $Z+Oy = a \cdot (x+O)^m$. (2) Εφαρμόζει το διωνυμικό θεώρημα στη δεξιά πλευρά, αποκτώντας μία άπειρη σειρά όπου m είναι κλασματικός, αφαιρώντας την (1) από τη (2), διαιρώντας εν συνεχεία και τα δύο μέλη με το O , παραλείποντας εκείνους τους όρους οι οποίοι ακόμα περιέχουν το O και αποκτά $Y = m \cdot a \cdot x^{m-1}$. Με τον τρόπο αυτό, στη γλώσσα μας ο ρυθμός αλλαγής εμβαδού για κάθε x είναι η τιμή y της καμπύλης για την τιμή του x . Αντίστροφα, αν η καμπύλη είναι $Y = m \cdot a \cdot x^{m-1}$, τότε το εμβαδόν κάτω από αυτήν είναι $Z = a \cdot x^m$. Με αυτή τη διαδικασία, ο Newton όχι μόνο έδωσε μία γενική μέθοδο εύρεσης του στιγμιαίου ρυθμού αλλαγής μίας μεταβλητής λαμβάνοντας υπόψη μία άλλη (Z λαμβάνοντας υπόψη το x στο ανωτέρω παράδειγμα), αλλά

² Opera omnia, I, 333.

³ Opera omnia, I, 257–282 ; Opuscula, I, 3–28.

έδειξε ότι το εμβαδόν μπορεί να αποκτηθεί μέσω αντιστροφής της διαδικασίας εύρεσης του ρυθμού αλλαγής. Από τότε που τα εμβαδά είχαν εκφρασθεί και αποκτηθεί μέσω της πρόσθεσης απειροστών εμβαδών, ο Newton επίσης έδειξε ότι τέτοια αθροίσματα μπορούν να αποκτηθούν αντιστρέφοντας τη διαδικασία εύρεσης του ρυθμού αλλαγής. Αυτό το γεγονός, ότι οι προσθέσεις μπορούν να αποκτηθούν λαμβάνοντας παραγώγιση, είναι που τώρα ονομάζουμε **θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού**. Παρόλο που ήταν γνωστό σε ειδικές περιπτώσεις και αμυδρά προβλέπονταν από τους προγόνους του Newton, αυτός το είδε πιο γενικά. Εφάρμοσε τη μέθοδο για να αποκτήσει το εμβαδόν, το περιεχόμενο από πολλές καμπύλες και για να επιλύσει άλλα προβλήματα, τα οποία μπορούν να τυποποιηθούν ως αθροίσματα. Αφότου έδειξε ότι η παράγωγος του εμβαδού είναι η τιμή y και ισχυριζόμενος ότι η αντίστροφη πρόταση είναι αληθής, ο Newton έδωσε τον κανόνα πως αν η τιμή y είναι ένα άθροισμα όρων, τότε το εμβαδόν είναι το άθροισμα εμβαδών τα οποία προκύπτουν από κάθε έναν από τους όρους. Σε σύγχρονους όρους, το αόριστο ολοκλήρωμα ενός αθροίσματος συναρτήσεων, είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων των ξεχωριστών συναρτήσεων. Έστω ότι, η καμπύλη σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε για την

τετμημένη x και την τεταγμένη y το εμβαδόν να είναι $z = \left(\frac{n}{n+m} \right) ax^{\frac{m+n}{n}}$. Έστω ότι η

στιγμή ή η απειροστή αύξηση της τετμημένης, κατά το συμβολισμό του **James Gregory**, είναι o . Η νέα τετμημένη θα είναι τότε $x+o$ ενώ το αυξημένο εμβαδόν θα

είναι $z + oy = \left(\frac{n}{n+m} \right) a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$. Αν σε τούτη την έκφραση εφαρμόσουμε το

διωνυμικό θεώρημα, διαιρέσουμε κατά μέλη δια o και κατόπιν αγνοήσουμε τους όρους που εξακολουθούν να περιέχουν το o , τότε το αποτέλεσμα θα είναι $y = ax^{\frac{m}{n}}$.

Δηλαδή, αν το εμβαδόν δίνεται από τη σχέση $z = \left(\frac{n}{n+m} \right) ax^{\frac{m+n}{n}}$, η καμπύλη θα είναι

η $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Αντιστρόφως, αν η καμπύλη είναι η $y = ax^{\frac{m}{n}}$, τότε το εμβαδόν είναι

$$z = \left(\frac{n}{n+m} \right) ax^{\frac{m+n}{n}}. \quad 4$$

Εδώ έχουμε μια έκφραση για το εμβαδόν η οποία δεν προέκυψε μέσω του προσδιορισμού του αθροίσματος απειροστών εμβαδών, ούτε μέσω ισοδυνάμων μεθόδων που είχαν χρησιμοποιηθεί από τους προκατόχους του Newton από τον **Αντιφώντα** ως τον **Pascal**. Αντιθέτως, προέκυψε μέσω μιας θεώρησης της στιγμιαίας αύξησης του εμβαδού στο εξεταζόμενο σημείο. Με άλλα λόγια, ενώ οι προηγούμενοι τετραγωνισμοί είχαν βρεθεί μέσω του ισοδυνάμου του ορισμένου ολοκληρώματος οριζόμενου ως ορίου ενός αθροίσματος, ο Newton εδώ προσδιόρισε πρώτα το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και κατόπιν βρήκε από αυτόν το εμβαδόν καθαυτό, μέσω εκείνου που θα έπρεπε σήμερα να αποκαλέσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης που παριστάνει την τεταγμένη. Περαιτέρω, πρέπει να σημειωθεί ότι η διαδικασία που καθίσταται θεμελιώδης σε αυτή την πρόταση, είναι ο προσδιορισμός των ρυθμών μεταβολής. Με άλλα λόγια, εκείνο που θα έπρεπε σήμερα να ονομάσουμε παράγωγο, λαμβάνεται ως η βασική ιδέα και το ολοκλήρωμα ορίζεται σε σχέση με αυτήν. Οι μαθηματικοί από την εποχή του **Torricelli** ως του **Barrow**,

⁴ *Opera omnia*, I, 281; *Opuscula*, I, 26.

γνώριζαν κατά κάποια έννοια μια τέτοια σχέση, αλλά ο Newton υπήρξε ο πρώτος που έδωσε μια γενικά εφαρμόσιμη διαδικασία προσδιορισμού ενός στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής και την αντέστρεψε στην περίπτωση προβλημάτων που ενέπλεκαν αθροίσεις. Πριν από την εποχή αυτή, η τάση ήταν μάλλον προς την αντίθετη κατεύθυνση, να ανάγονται τα προβλήματα, όποτε τούτο ήταν εφικτό, στον προσδιορισμό τετραγωνισμών. Με αυτό το βήμα, που έγινε από τον Newton, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είχε εισαχθεί ο λογισμός. Ο Newton εφάρμοσε τη

μέθοδο αυτή στον τετραγωνισμό πολλών καμπυλών, όπως η $y = x^2 + x^{\frac{3}{2}}$ και η $y = \frac{a^2}{b+x}$. Για να ολοκληρώσει το $y = \frac{a^2}{b+x}$, διαίρεσε το a^2 με $(b+x)$ και

$$\text{πήρε } y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \dots$$

Έχοντας αποκτήσει αυτή την άπειρη σειρά, βρίσκει το ολοκλήρωμα, ολοκληρώνοντας κατά όρους, έτσι ώστε το εμβαδόν να είναι:

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \dots$$

Λέει για αυτές τις άπειρες σειρές ότι, ελάχιστοι από τους αρχικούς όρους είναι αυστηρά για κάθε χρήση, υπό τον όρο ότι το β να είναι ίσο με το x , επαναλαμβανόμενο μερικές φορές. Παρομοίως, για να ολοκληρώσει την

$y = \frac{1}{1+x^2}$ χρησιμοποιεί το διωνυμικό ανάπτυγμα για να πάρει $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$ και ολοκληρώνει κατά όρους. Επισημαίνει ότι, αν στη θέση του y μπει το $\frac{1}{1+x^2}$ τότε με το διωνυμικό ανάπτυγμα προκύπτει $y = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \dots$ και

τόρα μπορεί να ολοκληρώσει κατά όρους. Ο Newton τότε, διαπιστώνει ότι όταν το x είναι αρκετά μικρό, το πρώτο ανάπτυγμα χρησιμοποιείται, αλλά όταν το x είναι μεγάλο τότε χρησιμοποιείται το δεύτερο ανάπτυγμα. Έτσι, αυτός κατά κάποιον τρόπο ήταν ενημερωμένος πως αυτό που εμείς ονομάζουμε σύγκλιση είναι σημαντικό, αλλά δεν έχει ακριβή ιδέα σχετικά με αυτό.

Ο Newton, κατάλαβε ότι είχε επεκτείνει την όρο προς όρο ολοκλήρωση σε άπειρες σειρές αλλά λέει στο *“De Analysis”* «Και οτιδήποτε η συνήθης ανάλυση εκτελεί μέσω των εξισώσεων με πεπερασμένο πλήθος όρων (με την προϋπόθεση ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατό να γίνει), αυτό μπορεί να εκτελεστεί το ίδιο καλά, μέσω απείρων εξισώσεων οπότε δεν έχω κανένα πρόβλημα να την ονομάσω Ανάλυση και αυτή. Διότι οι μέθοδοι συλλογισμού, δεν είναι σε αυτήν λιγότερο συγκεκριμένες από ότι στην άλλη. Ούτε οι εξισώσεις είναι λιγότερο ακριβείς. Μολονότι εμείς οι θνητοί που οι συλλογιστικές μας δυνατότητες περιορίζονται σε στενά όρια, δε μπορούμε ούτε να εκφράσουμε, ούτε να συλλάβουμε όλους τους όρους αυτών των εξισώσεων, ώστε να βρούμε επακριβώς από αυτές τα μεγέθη που αναζητούμε».

Ως εδώ, στην προσέγγισή του στο λογισμό, ο Newton χρησιμοποίησε αυτό που μπορεί να περιγραφεί ως **η μέθοδος των απειροστών**. Οι στιγμές είναι απείρως μικρά μεγέθη, αδιαίρετα ή απειροστά. Βέβαια, η λογική του τι ακριβώς έκανε ο Newton δεν είναι σαφής. Μερικά χρόνια αργότερα, στέλνοντας τούτα τα αποτελέσματά του στον [Collins](#), περιέγραφε επίσης και ένα πλήθος προτάσεων για μέγιστα, ελάχιστα και εφαπτόμενες, τις οποίες είχε βρει μέσω των μεθόδων του. Αυτή η επιστολή του, της [10.12.1672](#) προς τον [Collins](#), κατέστη βαρυσήμαντη για τη διαμάχη ως προς το αν ο Leibniz είχε κάνει τις ανακαλύψεις του ανεξάρτητα από τον Newton. Στην εν λόγω επιστολή, ο Newton παρατήρησε με ειλικρίνεια ότι οι κανόνες

του είναι ανάλογοι εκείνων των [Sluse](#) και [Hudde](#), αν και γενικότεροι,⁵ ενώ σε κάποιο άλλο σημείο παραδέχθηκε ότι είχε λάβει την υπόδειξη για την τεχνική του από τη μέθοδο του Fermat, βελτιωμένη από τους Gregory και Barrow.⁶ Η μεταβολή από το [E](#) του Fermat στο [o](#) των Gregory και Newton, είναι φυσικά τετριμμένη. Έχει από καιρού εις καιρό ερμηνευθεί ως αντικατάσταση του [E](#) από το μηδέν, μια άποψη που θα ανήγαγε τη μέθοδο του Newton σε έναν άσκοπο χειρισμό μηδενικών, κάτι σαν τη μέθοδο του [Bhaskara](#).⁷ Ο Newton, θεωρούσε ευκρινώς το σύμβολό του ως το γράμμα [o](#) και όχι το σύμβολο του μηδενός και από αυτή την άποψη είναι πλήρως συγκρίσιμο με το [E](#) του [Fermat](#). Η σημασία του έργου του Newton, έγκειται πρώτα απ' όλα στο γεγονός ότι εφάρμοσε τη μέθοδο «[ευθέως και αντιστρόφως](#)», όπως ο ίδιος έλεγε.⁸ Δευτερευόντως, ο Newton θεωρούσε τη μεθόδό του, σε σύνδεση με τη χρήση των απείρων σειρών, ως ένα καθολικό αλγόριθμο, ενώ εκείνη του Fermat, καθώς και οι τροποποιήσεις της από τους [Sluse](#), [Hudde](#) και [Huygens](#), χρησίμευαν μόνο στην περίπτωση ρητών αλγεβρικών συναρτήσεων. Θα παρατηρηθεί ότι παρ' όλο που το έργο του Newton περιέχει τις ουσιαστικές τεχνικές του λογισμού, η αιτιολόγησή τους δεν είναι σαφής από τις επεξηγήσεις που ο ίδιος έδωσε. Ο Newton, δεν υπέδειξε καθόλου με ποιο δικαίωμα μπορούσαν οι όροι που περιέχουν το [o](#) να αγνοηθούν κατά τους υπολογισμούς, όπως και ο Fermat δεν αιτιολόγησε την παράληψη των δυνάμεων του [E](#) και ο Barrow των δυνάμεων του [e](#) και του [a](#). Η συνεισφορά του, έγκειτο στη διευκόλυνση των πράξεων μάλλον, παρά στην αποσαφήνιση των ιδεών. Όπως ο ίδιος ο Newton παραδέχθηκε, σ' αυτή την εργασία η μεθόδός του «[εξηγείται εν συντομία μάλλον παρά επιδεικνύεται με ακρίβεια](#)». Στην παραπάνω απόδειξή του πάντως, για το ότι το εμβαδόν της $y = ax^{\frac{m}{n}}$ δίνεται από τη σχέση $z = \left(\frac{n}{n+m}\right)ax^{\frac{m+n}{n}}$, μπορούμε να

διαπιστώσουμε κάποια ένδειξη της σκέψης που είχε στο νου του. Η τεταγμένη y φαίνεται να παριστάνει την ταχύτητα του αυξανόμενου εμβαδού, ενώ η τετμημένη το χρόνο. Τώρα, το γινόμενο της τεταγμένης επί ένα μικρό διάστημα της βάσης, θα δώσει ένα μικρό τμήμα του εμβαδού και το συνολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι απλώς το άθροισμα όλων αυτών των στιγμών του εμβαδού. Τούτη είναι ακριβώς η ιδέα του απειροστού των [Oresme](#), [Γαλιλαίου](#), [Descartes](#) και άλλων, στις αποδείξεις τους για το νόμο της πτώσης των σωμάτων, μόνο που εκείνοι είχαν βρει το εμβαδόν συνολικά μέσω της πρόσθεσης τέτοιων στοιχείων, ενώ ο Newton το υπολόγισε από το ρυθμό μεταβολής του σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Είναι δύσκολο να πούμε με ποιον ακριβώς τρόπο σκέφθηκε ο Newton αυτό το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής, αλλά πολύ πιθανώς τον αποδέχθηκε ως παρόμοιο με την ιδέα της ταχύτητας που ο Γαλιλαίος είχε καταστήσει τόσο οικεία, αλλά δεν την είχε ορίσει αυστηρά. Ένας επιμελής εμπειριστής για τον οποίο τα μαθηματικά αποτελούσαν μια μέθοδο μάλλον παρά μια επεξήγηση,⁹ ο Newton, προφανώς θεωρούσε οποιαδήποτε απόπειρα αμφισβήτησης του στιγμιαίου χαρακτήρα της κίνησης ως συνδεδεμένη με τη μεταφυσική και έτσι απέφυγε το να σχηματίσει έναν ορισμό της. Παρά ταύτα, αποδέχθηκε αυτή την έννοια και την κατέστησε τη βάση της δεύτερης και εκτενέστερης παρουσίασης του λογισμού, όπως αυτή δόθηκε στο “[Methodus](#)

⁵ [Opera omnia](#), IV, 510; cf. also [Mathematical Principles](#) (Cajori), pp. 251–252 .

⁶ More, [Isaac Newton](#), p.185, n.

⁷ The entire interpretation of Newton given by Hoppe, “Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung”, is vitiated by the fact that he has followed certain older historians in this mistake . Cf. Gerhardt , [Die Entdeckung der höheren Analysis](#) , p. 80; Weissenborn, [Die Principien der höheren Analysis](#), p. 25, n; Gerhardt, “Zur Geschichte des Streites” , p. 131.

⁸ More, loc. Cit .

⁹ Burt, [Metaphysical Foundations](#), pp. 208–210.

Fluxionum et Serierum Infinitorum”,¹⁰ που γράφηκε περί το 1671,¹¹ αλλά δεν εκδόθηκε ως το 1736. Στο βιβλίο αυτό, ο Newton εισήγαγε το χαρακτηριστικό του συμβολισμό και τις ιδέες του. Εδώ, θεωρούσε τα μεταβλητά του μεγέθη ως παραγόμενα από τη συνεχή κίνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων μάλλον, παρά ως αθροίσματα απειροστών στοιχείων, την άποψη που είχε εμφανιστεί στο “*De Analysi*”. Όπως ακριβώς ο Barrow εντόπισε το κύριο χαρακτηριστικό του χρόνου στην ομαλή ροή του, έτσι και ο μαθητής του ο Newton, παρ’ όλο που δε «*θεώρησε τυπικά το χρόνο*»,¹² επηρεάστηκε και κατέστησε τη συνεχή κίνηση θεμελιώδη στο σύστημά του. Φαίνεται ότι ο Newton, αισθάνθηκε ότι αυτή η έννοια ήταν αρκετά παρακινητική και τόσο σαφώς γνωστή μέσω της διαίσθησης, ώστε να καθιστά τον περαιτέρω ορισμό της περιττό. Ο Newton, **ονόμασε το ρυθμό παραγωγής ροή** και τη συμβόλισε μέσω ενός γράμματος με μια κουκίδα πάνω από αυτό. Το παραγόμενο μέγεθος το ονόμασε *ρέον*. Έτσι, αν τα x και y είναι τα ρέοντα, τότε οι ροές τους είναι $\dot{x}$ και $\dot{y}$. Παρεμπιπτόντως, ο Newton σε άλλα σημεία¹³ προχώρησε στην παρατήρηση ότι κάποιος μπορεί να θεωρήσει τις ροές $\dot{x}$ και $\dot{y}$, διαδοχικά, ως ρέοντα των οποίων οι ροές παριστάνονται από τα $\dot{x}$ και $\dot{y}$, κοκ. Τα ρέοντα των οποίων τα x και y αποτελούν τις ροές, ο Newton τα συμβόλισε με $\ddot{x}$ και $\ddot{y}$, τα ρέοντα των οποίων οι ροές είναι τα τελευταία μεγέθη γράφονταν $\dddot{x}$ και $\dddot{y}$, κοκ. Σε αυτή την εργασία, λέει ότι θεωρεί τις μεταβλητές του ως παραγόμενες από τη συνεχή κίνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων μάλλον, παρά ως στατικά αθροίσματα απειροστών στοιχείων, όπως σε μια προηγούμενη εργασία. Ένα μεταβλητό μέγεθος, το αποκαλούσε τώρα ρέον και το ρυθμό μεταβολής του, ροή. Ο συμβολισμός του είναι $\dot{x}$ και $\dot{y}$ για τις ροές των ρεόντων x και y . Η ροή του $\dot{x}$ είναι $\ddot{x}$, κοκ. Το ρέον, του οποίου x είναι η ροή είναι $\dot{x}$ και το ρέον του τελευταίου είναι $\ddot{x}$. Σε αυτή τη δεύτερη εργασία, ο Newton διατυπώνει κάπως σαφέστερα το θεμελιώδες πρόβλημα του λογισμού. Δοθείσης μιας σχέσης μεταξύ δύο ρεόντων, να βρεθεί ή σχέση μεταξύ των ροών τους και αντιστρόφως. Οι δύο μεταβλητές των οποίων η σχέση δίνεται, μπορούν να παριστάνουν οποιαδήποτε μεγέθη. Παρά ταύτα, ο Newton τις θεωρεί ως μεταβαλλόμενες με το χρόνο, διότι αυτός είναι ένας χρήσιμος τρόπος συλλογιστικής, αν και όχι αναγκαίος, όπως ο ίδιος παρατηρεί. Οπότε αν το o είναι ένα «*απείρως μικρό χρονικό διάστημα*», τότε τα $x o$ και $y o$ είναι οι απεριόριστα μικρές αυξήσεις του x και του y ή οι στιγμές του x και του y . Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ των $\dot{x}$ και $\dot{y}$, ας υποθέσουμε ότι, το ρέον είναι $\dot{y} = x^n$. Ο Newton σχηματίζει πρώτα την εξίσωση $y + y o = \left(x + x o \right)^n$ και κατόπιν συνεχίζει όπως στην προηγούμενη εργασία του. Αναπτύσσει το δεξί μέλος χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα, αφαιρεί $y = x^n$, διαιρεί κατά μέλη δια o , αγνοεί όλους τους όρους που εξακολουθούν να

¹⁰ Opuscula, I, 31–200.

¹¹ See Zeuthen, ‘Notes, 1895, p. 203; cf. also Newton, *Opera omnia*, II, 280.

¹² Opuscula, I, 54.

¹³ Cf. *Opera omnia*, I, 338; *Opuscula*, I, 55, 61.

περιέχουν το o , και βρίσκει $y = nx^{n-1}x$. Σε σύγχρονο συμβολισμό, αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί $\frac{dy}{dt} = nx^{n-1} \frac{dx}{dt}$ και αφού $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$, ο

Newton με την εύρεση του λόγου του dy/dt προς το dx/dt ή του y προς το x , έχει βρει το dy/dx . Η μέθοδος των ροών, δεν είναι ουσιαστικά διαφορετική από εκείνη που χρησιμοποιείται στο “*De Analysisi*”, ούτε είναι αυστηρότερη. Ο Newton,

απορρίπτει όρους όπως ο xxo και ο $xxoxo$ (γράφει x^3oo), με τη λογική ότι είναι απείρως μικροί σε σύγκριση με εκείνους που διατηρούνται. Μολαταύτα, η άποψή του

στο “*Method of Fluxions*” είναι κάπως διαφορετική. Οι στιγμές xo και yo μεταβάλλονται με το χρόνο o , ενώ στην πρώτη εργασία οι στιγμές είναι έσχατα σταθερά τεμάχια των x και z . Αυτή η νεώτερη άποψη, ακολουθεί την περισσότερο δυναμική συλλογιστική του Γαλιλαίου. Η παλαιότερη, χρησιμοποιούσε τα στατικά αδιαίρετα του Cavalieri. Η μεταβολή εξυπηρετήσε, όπως το έθεσε ο Newton, μόνο στο να απομακρυνθεί η τραχύτητα από το δόγμα των αδιαιρέτων. Μολαταύτα, οι στιγμές xo και yo εξακολουθούν να είναι κάποιο είδος απείρως μικρών μεγεθών.

Επιπλέον, τα x και y , τα οποία είναι οι ροές ή οι παράγωγοι ως προς το χρόνο του x και του y , δεν ορίζονται ποτέ πραγματικά. Αυτό το κεντρικό πρόβλημα αποφεύγεται.

Με δεδομένη μια σχέση μεταξύ των x και y , η εύρεση της σχέσης μεταξύ των x και y είναι πιο δύσκολη από μια απλή ολοκλήρωση μιας συνάρτησης του x . Ο Newton μελετά πολλούς τύπους:

- (1) όταν τα x , y , και το x ή το y είναι παρόντα,
- (2) όταν τα x , y , x και το y είναι παρόντα,,
- (3) όταν τα x , y , z και τα ρέοντα είναι παρόντα.

Ο πρώτος τύπος, είναι ο ευκολότερος και σε σύγχρονο συμβολισμό, απαιτεί τη λύση της εξίσωσης $dy/dx = f(x)$. Από το δεύτερο τύπο, ο Newton μελετά την

$y/x = 1 - 3x + y + x^2 + xy$ και την επιλύει μέσω μιας διαδικασίας διαδοχικών

προσεγγίσεων. Ξεκινά με την $y/x = 1 - 3x + x^2$ ως μια πρώτη προσέγγιση, βρίσκει το y ως συνάρτηση του x , εισαγάγει την τιμή αυτή του y στο δεξί μέλος της αρχικής εξίσωσης και συνεχίζει τη διαδικασία. Ο Newton περιγράφει αυτά που κάνει αλλά

δεν τα αιτιολογεί. Από τον τρίτο τύπο, μελετά την $2x - z + yx = 0$. Θεωρεί μια σχέση

μεταξύ των x και y , έστω την $x = y^2$, οπότε $x = 2yy$. Τότε η εξίσωση γίνεται

$4\dot{y}y - \dot{z} + \dot{y}y^2 = 0$, από την οποία παίρνει $2y^2 + (y^3/3) = z$. Οπότε, αν ο τρίτος τύπος

θεωρηθεί ως μια μερική διαφορική εξίσωση, ο Newton βρίσκει μόνο ένα συγκεκριμένο ολοκλήρωμα. Ο Newton, αντελήφθη ότι σε αυτή την εργασία είχε παρουσιάσει μια γενική μέθοδο. Σε μια επιστολή του προς τον John Collins, με ημερομηνία 10.12.1672, στην οποία δίνει τα στοιχεία της μεθόδου του και ένα παράδειγμα, γράφει «Αυτή είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση, ή μάλλον ένα πόρισμα, μιας γενικής μεθόδου, που επεκτείνεται, χωρίς κοπιώδεις υπολογισμούς, όχι μόνο στο σχεδιασμό εφαπτομένων σε οποιεσδήποτε καμπύλες γραμμές, είτε γεωμετρικές είναι

αυτές ή μηχανικές...αλλά επίσης και στη λύση άλλων περισσότερο δυσνόητων ειδών προβλημάτων για την κυρτότητα, τα εμβαδά, τα μήκη, τα κέντρα βάρους καμπυλών, κλπ. Ούτε ...περιορίζεται σε εξισώσεις που είναι ελεύθερες από άρρητα μεγέθη. Αυτή τη μέθοδο, την έχω συνυφάνει με εκείνη την άλλη για τις εξισώσεις, μέσω της αναγωγής τους σε άπειρες σειρές». Ο Newton, τόνισε τη χρήση άπειρων σειρών διότι έτσι θα

μπορούσε να μεταχειριστεί συναρτήσεις όπως η $(1+x)^{\frac{3}{2}}$, ενώ οι προκάτοχοί του περιορίζονταν συνολικά στις ρητές αλγεβρικές εξισώσεις. Στη "[Method of Fluxions](#)", ο Newton έκανε πλήθος εφαρμογών των ροών στη διαφόριση πεπλεγμένων συναρτήσεων και στην εύρεση εφαπτομένων καμπυλών, μεγίστων και ελαχίστων συναρτήσεων, καμπυλότητας καμπυλών και σημείων καμψής καμπυλών. Επίσης, βρήκε εμβαδά και μήκη καμπυλών. Σε σύνδεση με την καμπυλότητα, έδωσε το

σωστό τύπο για την ακτίνα καμπυλότητας, συγκεκριμένα, $r = \frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y}$ όπου το x

λαμβάνεται ως 1. Επίσης έδωσε αυτό το ίδιο μέγεθος και σε πολικές συντεταγμένες. Τέλος, περιέλαβε ένα σύντομο πίνακα ολοκληρωμάτων. Στη εργασία του "[Tractatus de Quadratura Curvarum](#)" (Τετραγωνισμός καμπυλών), μια τρίτη εργασία στο λογισμό, που γράφηκε το 1676 αλλά δημοσιεύθηκε το 1704, ο Newton λέει ότι έχει εγκαταλείψει το απειροστό ή το απείρως μικρό μέγεθος. Τώρα επικρίνει την απόρριψη των όρων που περιέχουν το o διότι, γράφει «στα μαθηματικά ακόμη και τα παραμικρότερα λάθη δεν πρέπει να παραμελούνται... Θεωρώ τα μαθηματικά μεγέθη σ' αυτή τη θέση όχι ως αποτελούμενα από πολύ μικρά μέρη, αλλά ως περιγραφόμενα από μια συνεχή κίνηση. Οι γραμμές περιγράφονται και συνεπώς παράγονται, όχι από την παράθεση τμημάτων, αλλά από τη συνεχόμενη κίνηση σημείων, οι επιφάνειες από την κίνηση γραμμών, τα χρονικά διαστήματα από συνεχή ροή.... Οι ροές είναι, οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε, όπως οι αυξήσεις των ρεόντων που παράγονται σε χρόνους, ίσους και όσο το δυνατό μικρότερους, και για να μιλήσω ακριβέστερα, βρίσκονται στον πρώτο λόγο των γεννώμενων αυξήσεων. Παρά ταύτα μπορούν να εκφραστούν από οποιοσδήποτε γραμμές, που είναι ανάλογες αυτών».

Στην εν λόγω πραγματεία, ο Newton προσπάθησε να απομακρύνει όλα τα ίχνη του απείρως μικρού. Τα μαθηματικά μεγέθη, δεν έπρεπε να θεωρούνται ως αποτελούμενα από στιγμές ή πολύ μικρά μέρη, αλλά ως διαγραφόμενα από συνεχή κίνηση. Στον προσδιορισμό της ροής του x^n , ο Newton προχώρησε κατά τρόπο που μοιάζει πολύ με εκείνον στο "[Methodus Fluxionum](#)", αντικαθιστώντας το x με το $x+o$. Σε συμφωνία με το συμβολισμό των ροών, θα αναμένονταν η αύξηση του x να συμβολιστεί ως xo αντί o , αλλά επειδή ο Newton ασχολείται εδώ μόνο με μία μεταβλητή, η ροή της μπορεί να ληφθεί, κατά βολικό τρόπο, ίση με τη μονάδα.

Η νέα σύλληψη του Newton, η **μέθοδος των πρώτων και των έσχατων λόγων**, έγκειται στο εξής. Θεωρεί τη συνάρτηση $y = x^n$. Για να βρούμε τη ροή του y ή του x^n , ας αφήσουμε το x να γίνει «ρέοντας» $x+o$. Τότε το x^n γίνεται

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$$

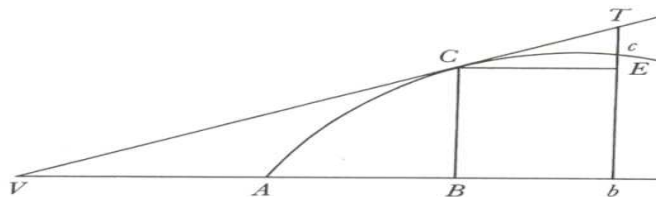
Οι αυξήσεις των x και y , συγκεκριμένα, o και $no x^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$ έχουν λόγο ίσο με το λόγο του (μετά από διαίρεση και των δύο δια του o) 1 προς το

$$nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \dots \text{«Αν αφήσουμε τώρα τις αυξήσεις να μηδενιστούν η τελευταία}$$

τους αναλογία θα είναι» 1 προς nx^{n-1} . Τότε, η ροή του x έχει προς τη ροή του x'' λόγο ίσο με το λόγο του 1 προς το nx^{n-1} ή όπως θα λέγαμε σήμερα, ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x είναι nx^{n-1} . Αυτός είναι ο πρώτος λόγος των γεννώμενων αυξήσεων. Φυσικά, η λογική αυτής της εκδοχής δεν είναι καλύτερη από εκείνη των προηγούμενων δύο. Παρά ταύτα, ο Newton λέει ότι αυτή η μέθοδος βρίσκεται σε αρμονία με τη γεωμετρία των αρχαίων και ότι δεν είναι απαραίτητο να εισαχθούν απείρως μικρά μεγέθη. Το λόγο που προκύπτει, 1 προς nx^{n-1} , θα έπρεπε να τον θεωρήσουμε ως ένα όριο του λόγου των μεταβολών, αλλά ο Newton τον ονόμασε **έσχατο** λόγο των μεταβολών, μια ορολογία η οποία αργότερα επρόκειτο να οδηγήσει σε κάποια σύγχυση της σκέψης. Αυτός ο έσχατος λόγος των «αφανιζόμενων αυξήσεων», είναι ο ίδιος με τον πρώτο ή πρωτεύοντα λόγο των «γεννώμενων αυξήσεων». Είναι επίσης και ο λόγος των ροών στο εξεταζόμενο σημείο.¹⁴

Στην παραπάνω απόδειξη, τα ουσιαστικά στοιχεία της παραγωγού είναι πιο εμφανώς παρόντα από ότι σε οποιοδήποτε άλλο τμήμα του έργου του Newton. Η έμφαση δίνεται σε μια συνάρτηση μίας μεταβλητής μάλλον, παρά σε μια εξίσωση με πολλές, στο σχηματισμό του λόγου των μεταβολών της ανεξάρτητης μεταβλητής και της συνάρτησης και τέλος, στον προσδιορισμό του ορίου αυτού του λόγου καθώς οι μεταβολές προσεγγίζουν το μηδέν. Παρεμπιπτόντως, ο λόγος όπως εκφράζεται από τον Newton, αν αντιστραφεί δίνει τη σύγχρονη παράγωγο. Επιπλέον, υπάρχουν στο σκεπτικό του Newton ορισμένα στοιχεία που έκτοτε έχουν απορριφθεί ως εξωγενή. Η έκκλησή του στο χρόνο, ως βοηθητική ανεξάρτητη μεταβλητή, θεωρείται σήμερα άσκοπη, ενώ ο οριακός λόγος θεωρείται σήμερα ως ένας και μόνο αριθμός μάλλον, παρά ως ένα πηλίκο δύο ρυθμών μεταβολής. Αν ο Newton είχε αφιερώσει περισσότερο χρόνο για την αποσαφήνιση των στοιχείων του σκεπτικού του στην απόδειξή του μέσω των εσχάτων λόγων, ο λογισμός θα μπορούσε να έχει εδραιωθεί στην έννοια της παραγωγού έναν αιώνα πριν την εποχή του Cauchy. Στην πρώτη του δημοσιευμένη περιγραφή της νέας του ανάλυσης, ο Newton υποστήριξε αυτό το είδος επιχειρήματος, αλλά στις επιδείξεις του της μεθόδου των ροών στην εργασία αυτή κατέφυγε δυστυχώς στην ορολογία των απειροστών των προγενέστερων περιγραφών του.

Σχήμα 2.



Ο Newton, έδωσε επίσης μια γεωμετρική ερμηνεία. Με δεδομένα τα στοιχεία του σχήματος 2, υποθέστε ότι το bc κινείται προς το BC έτσι ώστε το c να συμπίπτει με το C . Τότε, το καμπυλόγραμμο τρίγωνο CEc είναι «στην τελευταία μορφή» όμοιο με το τρίγωνο CET και οι «αφανιζόμενες» πλευρές θα είναι ανάλογες των CE , ET και CT . Οπότε, οι ροές των μεγεθών AB , BC και AC είναι, στον έσχατο λόγο των αφανιζόμενων αυξήσεών τους, ανάλογες των πλευρών του τριγώνου CET ή του τριγώνου VBC . Το 1676, έμαθε ότι ο Leibniz εργάζονταν σε παρόμοια προβλήματα, και στις 24.10.1676 έστειλε μια επιστολή στον Leibniz, μέσω του Oldenburg, στην

¹⁴ Opera omnia, I, 334.

οποία έδινε σε μορφή αναγραμματισμού, μια διατύπωση του θεμελιώδους προβλήματος του λογισμού του. Αυτή φαίνεται ότι υπήρξε και η μόνη του προσπάθεια να διασφαλίσει την προτεραιότητα της επινόησης του λογισμού. Αν μεταθέσουμε τα γράμματα του αναγραμματισμού και μεταφράσουμε, το κείμενο έχει ως εξής: «*Δοθέντων σε μια εξίσωση των ρεόντων, οποιουδήποτε πλήθους μεγεθών, να βρεθούν οι ροές και αντιστρόφως*».¹⁵ Παρόμοιες διατυπώσεις του προβλήματος του λογισμού, είχαν περιληφθεί στο “*Methodus Fluxionum*” και στο “*De Quadratura*” τα οποία είχε ήδη συνθέσει.¹⁶ Στην επιστολή του αυτή, παραδέχονταν επίσης το χρέος του στους Wallis, James Gregory, Sluse και άλλους, αλλά δεν έδωσε μια έκθεση των μεθόδων του. Ο Newton, δε δημοσίευσε τις βασικές του εργασίες στο λογισμό παρά μόνο πολύ αργότερα αφότου τις είχε γράψει. Η πιο πρώιμη έντυπη περιγραφή της θεωρίας του για τις ροές, εμφανίστηκε στην “*Algebra*” του Wallis (2^η έκδοση στα Λατινικά, 1693), στην οποία ο Newton έγραψε τις σελίδες 390 ως 396. Αν είχε δημοσιεύσει αμέσως, θα είχε ίσως αποφύγει τη διαμάχη με τον Leibniz για την πατρότητα της ανακάλυψης. Η πρώτη δημοσίευση του Newton που περιλάμβανε το λογισμό του είναι το “*Mathematical Principles of Natural Philosophy*”¹⁷ του 1687. Όσον αφορά τη βασική έννοια του λογισμού, τη ροή, ή όπως λέμε εμείς την παράγωγο, ο Newton κάνει πολλές αναφορές. Απορρίπτει τα απειροστά ή έσχατα αδιαίρετα μεγέθη, προς χάριν των «*αφανιζόμενων διαιρετών μεγεθών*», μεγεθών που μπορούν να μειωθούν απεριόριστα. Οι προτάσεις του εν λόγω βιβλίου, οι οποίες αφορούν ταχύτητες, επιταχύνσεις, εφαπτόμενες και καμπυλότητες, είναι κατά μέγα μέρος εκείνες που τώρα αντιμετωπίζονται με τις μεθόδους του λογισμού, αλλά ο Newton τις παρουσίασε στη μορφή συνθετικών γεωμετρικών αποδείξεων με σχεδόν παντελή έλλειψη αναλυτικών υπολογισμών. Παρά ταύτα, ο Newton σε πολλά σημεία του έργου έδωσε ενδείξεις γενικότερων απόψεων.

Στη δεύτερη και την τρίτη έκδοση των “*Principia*” ο Newton λέει, «*Εσχατοι λόγοι στους οποίους τα μεγέθη μηδενίζονται δεν είναι, μιλώντας αυστηρά, οι λόγοι των εσχάτων μεγεθών, αλλά όρια προς τα οποία οι λόγοι αυτών των μεγεθών, τα οποία μειώνονται απεριόριστα, προσεγγίζουν και τα οποία, αν και μπορούν να έλθουν πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά σ’ αυτά, δεν μπορούν ούτε να υπερβούν ούτε να φθάσουν πριν τα μεγέθη μειωθούν απεριόριστα*».¹⁸ Αυτή είναι η σαφέστερη διατύπωση που ο ίδιος έδωσε ποτέ, όσον αφορά το νόημα των εσχάτων λόγων του. Σχετικά με την προηγούμενη διατύπωση, λέει επίσης, «*Με το όρο έσχατη ταχύτητα εννοούμε εκείνη με την οποία το σώμα κινείται, ούτε πριν φθάσει στην τελευταία θέση του, όταν παύει η κίνηση, ούτε μετά, αλλά τη στιγμή ακριβώς που φθάνει... Και με όμοιο τρόπο, με τον όρο έσχατος λόγος των αφανιζόμενων μεγεθών πρέπει να νοηθεί ο λόγος των μεγεθών, όχι πριν αυτά μηδενιστούν, ούτε μετά, αλλά εκείνος με τον οποίο μηδενίζονται*». Σε μια σειρά λημμάτων του πρώτου βιβλίου, εξέφρασε το είδος του επιχειρήματος που εμφανίζεται στο “*De Quadratura Curvarum*” «*Τα μεγέθη και οι λόγοι μεγεθών, που σε οποιονδήποτε πεπερασμένο χρόνο συγκλίνουν κατά συνεχή τρόπο στην ισότητα και πριν το τέλος αυτού του χρόνου προσεγγίζουν το ένα το άλλο πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, γίνονται τελικά ίσα*».¹⁹ Τούτο φυσικά, είναι το είδος της γενικής πρότασης ορίου με την οποία οι Stevin, Valerio, Gregory of St. Vincent, Tacquet, Wallis και άλλοι είχαν

¹⁵ Opera omnia, IV, 540 ff.; also Leibniz, *Mathematische Schriften*, I, 122–147.

¹⁶ Opera omnia, I, 339, 342; Opuscula, I, 55, 61.

¹⁷ The 3rd edition was translated into English by Andrew Motte in 1729. This edition, revised and edited by Florian Cajori, was published by the University of California Press in 1946.

¹⁸ Third edition, p. 39.

¹⁹ Opera omnia, I, 237; II, 30.

επιχειρήσει να αντικαταστήσουν την ελληνική μέθοδο της εξάντλησης. Μάλιστα, μια παράγραφος στον Gregory of St. Vincent,²⁰ στην οποία η λέξη «terminus» χρησιμοποιούνταν για να υποδείξει το όριο μιας προόδου, ίσως να αποτέλεσε την απαρχή του όρου «έσχατος λόγος» που ο Newton χρησιμοποιούσε τόσο συχνά. Η άποψη του Newton για το όριο, όπως και εκείνες αυτών των προγενέστερων μελετητών, συνδέονταν με γεωμετρικές διαισθήσεις οι οποίες τον οδήγησαν να κάνει ασαφείς και αμφιλεγόμενες διατυπώσεις. Έτσι έλεγε, «Ο έσχατος λόγος του τόξου, της χορδής, της εφαπτομένης, οποιουδήποτε προς οποιοδήποτε άλλο, είναι ο λόγος της ισότητας».²¹ Και λίγο αργότερα, μιλούσε για την ομοιότητα των «εσχάτων μορφών των αφανιζομένων τριγώνων».²² Αυτές οι παρατηρήσεις, υπονοούν ότι ο Newton δεν σκέπτονταν αριθμητικά, όπως εμείς σήμερα, για το όριο της ακολουθίας των αριθμών που αναπαριστούν τους λόγους των (αριθμητικών) μηκών των γεωμετρικών μεγεθών που περιλαμβάνονται, καθώς αυτά γίνονται απεριόριστα μικρά, αλλά είχε επίσης επηρεαστεί από τις απειροστικές απόψεις του δεκάτου εβδόμου αιώνα ώστε να σκέπτεται έσχατα γεωμετρικά αδιαίρετα. Είναι αληθές ότι, ποτέ δε χρησιμοποίησε τις εκφράσεις, έσχατα τόξα, χορδές, εφαπτόμενες, ή τρίγωνα, αλλά μόνο εκείνες των έσχατων λόγων και μορφών, εκφράσεις που επιτρέπουν αυστηρά ορθές αφηρημένες ερμηνείες, αλλά που υπονοούν έντονα άλλες σε σχέση με την διαισθητικά πιο θελκτική άποψη που παρέχεται από τα απειροστά. Μολαταύτα, το ότι ο Newton κατανοούσε τις δυσκολίες που περιλαμβάνονταν σε μια αφελή άποψη των απειροστών υποδεικνύεται στην περαιτέρω διατύπωσή του στο *Principia*,

«Διότι εκείνοι οι έσχατοι λόγοι με τους οποίους τα μεγέθη μηδενίζονται δεν είναι, μιλώντας αυστηρά, οι λόγοι των έσχατων μεγεθών, αλλά όρια προς τα οποία πάντα συγκλίνουν οι λόγοι μεγεθών που μειώνονται απεριόριστα και στα οποία έρχονται πλησιέστερα από οποιαδήποτε δεδομένη διαφορά, αλλά ποτέ δεν τα ξεπερνούν, ούτε τα φθάνουν, μέχρι αυτά τα μεγέθη να γίνουν απείρως μικρά».²³ Αυτή είναι η σαφέστερη διατύπωση που έκανε ο Newton για τη φύση των εσχάτων λόγων, αλλά θα διαπιστώσουμε ότι, στη συνέχεια αυτού του επιχειρήματος σε κάποιο λήμμα του δεύτερου βιβλίου του *Principia*, η έκθεσή του και πάλι προσέλαβε περισσότερο έντονα την εξάρτηση από την ιδέα των απείρως μικρών μεγεθών, με την έννοια του ορίου να υπονοείται κάπως αχνά ως βασική. Αυτή ακριβώς ή έλλειψη αριθμητικής σαφήνειας είναι εκείνη που οδήγησε, τον επόμενο αιώνα, σε αντιφατικές συζητήσεις, όχι μόνο για την εγκυρότητα των ροών του Newton, αλλά και για το τι εννοούσε πραγματικά ο Newton με τις ανωτέρω διατυπώσεις και άλλες παρόμοιες. Καθόσον το *Principia* έχει γραφεί με τον παλαιό συνθετικό γεωμετρικό τρόπο, οι αναφορές στη μέθοδο των ροών δεν είναι πολλές.

Στο δεύτερο βιβλίο, ωστόσο, εμφανίστηκε η πρώτη δημοσίευση των «θεμελίων εκείνης της νέας μεθόδου».²⁴ Εδώ βρίσκει κανείς τη διατύπωση της θεμελιώδους αρχής, «Η στιγμή κάθε γένους ισούται με το άθροισμα των στιγμών των παραγόντων πλευρών πολλαπλασιασμένο με τους δείκτες των δυνάμεων εκείνων των πλευρών, και με τους συντελεστές τους κατά συνεχή τρόπο». Ο Newton, το απέδειξε αυτό για το γινόμενο AB ως εξής. Έστω ότι το AB παριστάνει ένα ορθογώνιο και έστω ότι οι πλευρές A και B ελαττώνονται κατά $\frac{1}{2}a$ και $\frac{1}{2}b$, αντίστοιχα. Το

²⁰ *Opus geometricum*, p. 55.

²¹ *Opera omnia*, I, 242; II, 34.

²² *Ibid.*, I, 243.

²³ *Opera omnia*, I, 251.

²⁴ *Opera omnia*, II, 277-280.

ελαττωμένο εμβαδόν θα είναι τότε $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Τώρα, έστω ότι οι πλευρές του AB αυξάνονται κατά $\frac{1}{2}a$ και $\frac{1}{2}b$, αντίστοιχα. Το εμβαδόν του μεγεθυμένου ορθογωνίου θα είναι τότε $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Αφαιρώντας το μικρότερο ορθογώνιο από το μεγαλύτερο, βρίσκουμε το $aB + bA$ ως στιγμή του αρχικού ορθογωνίου, που αντιστοιχεί στις στιγμές a και b των A και B , κάτι που αποδεικνύει την πρόταση γι' αυτό το γινόμενο. Αν $A=B$, η στιγμή του A^2 είναι $2aA$. Με τη χρήση των μειώσεων $\frac{1}{2}a$ και $\frac{1}{2}b$ και των αυξήσεων $\frac{1}{2}a$ και $\frac{1}{2}b$, αντί των αυξήσεων a και b , ο Newton εδώ απέφυγε την αναγκαιότητα της απόρριψης του απείρως μικρού όρου ab . Έτσι, ο Newton έκανε εμφανή χρήση απείρως μικρών μεγεθών πρώτης τάξεως μόνο, άποψη ως προς την οποία το έργο του διαφέρει από εκείνο του Leibniz, αλλά η μεθοδός του στην παραπάνω πρόταση υπέστη αργότερα δικαίως κριτική ως υπονοούσα την παράλειψη των απειροστών δεύτερης τάξεως. Για να βρει τη στιγμή του ABC , ο Newton έθεσε $AB=G$ και εφαρμόζοντας το πρώτο μέρος του θεωρήματος, βρήκε ως αποτέλεσμα το $cAB + bCA + aBC$. Θέτοντας $A=B=C$, η στιγμή του A^3 γίνεται $3aA^2$. Με παρόμοιες διαδικασίες, η στιγμή του A^n για θετικές ακέραιες δυνάμεις βρίσκεται ίση με naA^{n-1} . Αυτό το ίδιο αποτέλεσμα φαίνεται να ισχύει και για αρνητικές δυνάμεις επίσης. Τούτο, είναι φανερό από τους ακόλουθους συλλογισμούς. Έστω ότι m είναι η στιγμή του $\frac{1}{A}$. Τότε από τη σχέση $\frac{1}{A} \cdot A = 1$ και τη στιγμή γινομένου, βρίσκουμε $\frac{1}{A} \cdot a + A \cdot m = 0$, ή $m = -\frac{a}{A^2}$. Αυτό το επιχείρημα γενικεύεται εύκολα, ώστε να συμπεριλάβει όλες τις αρνητικές ακέραιες δυνάμεις και με μικρές τροποποιήσεις, είναι εφαρμόσιμο σε όλα τα γινόμενα ρητών δυνάμεων μεταβλητών. Ο Newton, έλεγε ²⁵ ότι αυτό είναι το θεμέλιο της μεθόδου των των εφαπτομένων και των τετραγωνισμών. Και μάλιστα αυτός ο κανόνας, συνδυασμένος με τη χρήση απείρων σειρών, είναι επαρκής για την επίτευξη των ουσιαστικών αποτελεσμάτων της μεθόδου των ροών. Παρά ταύτα, επειδή ο Newton έδωσε εδώ μια ατυχώς λακωνική έκθεση της μεθόδου του και της αιτιολόγησής της και εισήγαγε αυτή τη σύντομη περιγραφή στο δεύτερο βιβλίο στη μη εμφανή μορφή ενός λήμματος ²⁶ για άλλες προτάσεις, έχει εκφραστεί κάποια αμφιβολία όσον αφορά τη σοβαρότητα με την οποία η μέθοδος προτάθηκε. ²⁷ Η βάση του λογισμού όπως πρωτοδημοσιεύθηκε στο "*Principia*", βρίσκεται βεβαίως στη φύση των στιγμών του Newton, αλλά ακριβώς στο συγκεκριμένο θέμα ο Newton δεν υπήρξε καθόλου σαφής με τη γλώσσα που χρησιμοποίησε.

Έλεγε γι' αυτό το σημείο, «*Τα πεπερασμένα σωματίδια δεν είναι στιγμές, αλλά πραγματικά μεγέθη που παράγονται από στιγμές. Πρέπει να τα συλλάβουμε ως τις ακριβώς εν τω γεννάσθε αρχές των πεπερασμένων μεγεθών*». Ίσως επειδή διαπίστωσε ότι αυτή η διατύπωση έκανε τις στιγμές του το ίδιο ασαφείς με τα απειροστά των Cavalieri, Fermat και Barrow, δικαιολογήθηκε προσθέτοντας, «*Ούτε κι εμείς*

²⁵ Ibid.

²⁶ *Opera omnia*, II, 277–280.

²⁷ Moritz Cantor (*Vorlesungen*, III, 192) would put little emphasis upon the lemmas in the *Principia*, whereas Zeuthen ('*Notes*', 1895, p. 249; cf. also *Geschichte der Mathematik im XVI. and XVII. Jahrhundert*, pp. 38–384) stresses their significance in the calculus.

θεωρούμε στο παρόν Λήμμα το μέγεθος των στιγμών, αλλά την πρώτη τους αναλογία ως γεννώμενη».²⁸ Τούτο, μοιάζει με μια προσπάθεια εισαγωγής του δόγματος των ορίων, που είχε διατυπώσει στο Βιβλίο I, στο οποίο θεωρούσε το λόγο ως έσχατο, χωρίς να προσδιορίζει ότι τα μεγέθη που υπεισέρχονταν ήταν τέτοια. Μολαταύτα, είναι δύσκολο να κατανοήσουμε πώς ακριβώς θα πρέπει κανείς να θεωρήσει το όριο ενός λόγου στον προσδιορισμό της στιγμής του AB . Εδώ έχουμε να κάνουμε με δύο μεταβλητές και αντιμετωπίζουμε το ισοδύναμο της μερικής διαφορίσης, εκτός και αν μπορούμε να προσφύγουμε στο χρόνο ως μία ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως στη συνέχεια πρότεινε ο Newton. Ίσως, επειδή διαπίστωσε τις δυσκολίες στην πορεία ερμηνείας της πρότασης σε σχέση με το λόγο ή την αναλογία απειροστών, ο Newton πρόσθεσε μια ακόμη ερμηνεία.

«Θα είναι το ίδιο αν αντί των στιγμών, χρησιμοποιήσουμε είτε τις ταχύτητες των αυξήσεων και των μειώσεων (που μπορούν επίσης να ονομαστούν κινήσεις, μεταβολές και ροές μεγεθών), ή οποιαδήποτε πεπερασμένα μεγέθη ανάλογα εκείνων των ταχυτήτων».²⁹ Για να συνοψίσουμε τα παραπάνω, βλέπουμε ότι ο Newton είχε αρχικά κατά νου απείρως μικρά μεγέθη τα οποία δεν είναι πεπερασμένα ούτε ακριβώς μηδενικά. «Πνεύματα εκκλιπόντων μεγεθών» τα αποκάλεσαν πολύ εύστοχα οι κριτικές της μεθόδου τον επόμενο αιώνα. Αυτά, παρέχουν υπερβολική δυσκολία σύλλληψης, για αυτό ο Newton εστίασε κατόπιν, την προσοχή του στο λόγο τους, ο οποίος είναι εν γένει ένας πεπερασμένος αριθμός. Γνωρίζοντας αυτό το λόγο, κάποιος μπορεί να αντικαταστήσει τα απειροστά μεγέθη που τον σχηματίζουν με οποιαδήποτε άλλα εύκολα αντιληπτά πεπερασμένα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο, όπως τα μεγέθη που θεωρούνται ως οι ταχύτητες ή ροές εκείνων που περιέχονται στην εξίσωση.

Συνεπώς, ο Newton παρέσχε στο “*Principia*” τρεις τρόπους ερμηνείας της νέας ανάλυσης:

- ένα σε σχέση με τα απειροστά (που χρησιμοποιείται στο “*De Analysis*”, το πρώτο του έργο),
- ένα σε σχέση με πρώτους και έσχατους λόγους ή όρια (που παρουσιάζεται κυρίως στο “*De Quadratura*”) που θεωρούσε και τον πλέον αυστηρό και
- ένα σε σχέση με τις ροές (που δίνεται στο “*Methodus Fluxionum*”) ο οποίος φαίνεται να γοήτευε περισσότερο τη φαντασία του.

Το γεγονός ότι ο Newton μπόρεσε κατ’ αυτό τον τρόπο να παρουσιάσει και τις τρεις απόψεις ως ουσιαστικά ισοδύναμες, μας δείχνει πόσο πολύ απείχε από το να αντιμετωπίζει τη μέθοδό του ως ξεχωριστή από τις κατά κάποιο τρόπο ισοδύναμες μεθόδους των προκατόχων και των συγχρόνων του. Στο “*De Quadratura*”, αφού αναφέρει ότι εκεί θεώρησε τα μεγέθη ως διαγραφόμενα από μια συνεχή κίνηση και χρησιμοποίησε τη μέθοδο των πρώτων και εσχάτων λόγων, ισχυρίζεται ότι η μέθοδός του είναι σύμφωνη με τη γεωμετρία των αρχαίων,³⁰ ενώ στο “*Principia*” παραδέχθηκε επίσης ότι ο Leibniz διέθετε μια παρόμοια μέθοδο για τη θεώρηση της παραγωγής των μεγεθών, μια παραδοχή, παρά ταύτα, η οποία παραλείφθηκε από μεταγενέστερες εκδόσεις.³¹ Μάλιστα, η μέθοδος των ροών εξαρτάται από κάποια άλλη μέθοδο, όπως τα όρια ή τα απειροστά, για τον προσδιορισμό των βασικών σχέσεων μεταξύ των ροών. Παρ’ όλο που ο Newton, προφανώς προτιμούσε να συνδέει τη μέθοδό του των ροών με την ιδέα ενός οριακού λόγου, χρησιμοποιούσε τόσο συχνά τα απειροστά για επίσπευση, ώστε θα συναντήσουμε πολλούς από τους μεταγενέστερους του αργότερα να ερμηνεύουν τις ίδιες τις ροές ως απείρως μικρά

²⁸ Opera omnia, II, 278.

²⁹ Ibid.

³⁰ Opera omnia, I, 338.

³¹ Ibid., II, 280.

μεγέθη, συγχέοντας τις με τις στιγμές. Ο Newton, συχνά χρησιμοποιούσε την έννοια του απείρως μικρού σε όλο το πρώιμο έργο του, αλλά έδειχνε να ανησυχεί γι' αυτό στις επόμενες εκθέσεις του. Σε ένα τμήμα του *“De Quadratura”* που εμφανίστηκε στην *Algebra* του Wallis το 1693, ο Newton είχε πει ότι τους όρους που ήταν πολλαπλασιασμένοι επί o τους παρέλειπε ως απείρως μικρούς, λαμβάνοντας έτσι το αποτέλεσμα.³² Στη δημοσίευση του έργου του το 1704, από την άλλη πλευρά, έλεγε ευκρινώς, ότι «στα μαθηματικά ακόμη και τα παραμικρότερα λάθη δεν πρέπει να παραμελούνται».³³ Το συμπέρασμα, έπρεπε να προκύψει όχι απλώς μέσω της αγνόησης των απείρως μικρών όρων, αλλά μέσω της εύρεσης του έσχατου λόγου καθώς οι εν λόγω όροι αφανίζονται. Μολαταύτα, ακόμη και μετά από αυτό δεν αποκήρυξε πλήρως τα απειροστά, αλλά συνέχισε να μιλά για τις στιγμές ως απείρως μικρά μέρη. Περαιτέρω, ο Newton πρόσθεσε στη σύγχυση της σκέψης των συγχρόνων του για τις ροές αποφεύγοντας να πολλαπλασιάσει τις ροές επί o όταν επιθυμούσε να παραστήσει στιγμές. Αν και είπε ότι παντού τα γράμματα με κουκίδα πάνω από αυτά παριστάνουν στιγμές και είναι δίχως το γράμμα o , πολλοί άγγλοι μαθηματικοί άρχισαν να συσχετίζουν τις ροές με τα απείρως μικρά διαφορικά του Leibniz.³⁴ Παρά ταύτα, η τελική άποψη του Newton για τη βάση του θέματος φαίνεται να είναι εκείνη που παρουσιάζεται στο *“De Quadratura”* «Έχω προσπαθήσει να καταδείξω ότι στη μέθοδο των ροών δεν είναι αναγκαίο να εισαχθούν στη γεωμετρία απείρως μικρά σχήματα».³⁵ Έχουμε δει ότι, το μεγαλύτερο μέρος του έργου του Newton για το λογισμό γράφηκε στην περίοδο μεταξύ 1665 και 1676, αλλά κανένα μέρος από αυτό δε δημοσιεύθηκε εκείνη την περίοδο. Έχει εκφραστεί³⁶ η άποψη ότι, η μεγάλη καθυστέρηση του Newton στην έκδοση των τριών σημαντικότερων έργων του για το λογισμό προκλήθηκε από το γεγονός ότι ήταν δυσαρεστημένος με τα λογικά θεμέλια του θέματος. Στο *“Principia”*, ο Newton χρησιμοποίησε γεωμετρικές αποδεικτικές μεθόδους. Πάντως, στις λεγόμενες «εργασίες του Portsmouth», που περιέχουν αδημοσίευτο έργο, χρησιμοποίησε αναλυτικές μεθόδους για να βρει μερικά από τα θεωρήματα. Αυτές οι εργασίες, δείχνουν ότι έφθασε με αναλυτικό τρόπο σε αποτελέσματα πέραν εκείνων που ήταν σε θέση να μεταφράσει στη γεωμετρία. Ένας λόγος για τον οποίο κατέφυγε στη γεωμετρία, πιστεύεται ότι είναι το ότι οι αποδείξεις θα ήταν περισσότερο κατανοητές στους συγχρόνους του. Ένας άλλος λόγος, είναι ότι θαύμαζε το γεωμετρικό έργο του Huygens πάρα πολύ και ήλπιζε να το φθάσει. Σ' αυτές τις γεωμετρικές αποδείξεις, ο Newton χρησιμοποιεί τις βασικές διαδικασίες ορίων του λογισμού. Έτσι, το εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη θεωρείται ουσιαστικά ως το όριο του αθροίσματος των ορθογωνίων που χρησιμοποιούνται για την προσέγγισή της, όπως ακριβώς συμβαίνει στο λογισμό σήμερα.

Μολαταύτα, αντί να υπολογίσει τέτοια εμβαδά, χρησιμοποιεί αυτή την αρχή για να συγκρίνει εμβαδά κάτω από διαφορετικές καμπύλες. Αποδεικνύει ότι, αν AR και BR (σχήμα 3) είναι οι κάθετες στις εφαπτόμενες στα σημεία A και B του τόξου ACB , ο έσχατος λόγος όταν το B πλησιάζει και συμπίπτει με το A , οποιονδήποτε δύο από τα μεγέθη χορδή AB , τόξο ACB , και AD , είναι 1. Έτσι λέει στο πόρισμα 3 του λήμματος 2 του 1^{ου} βιβλίου «Και συνεπώς σε ολόκληρο το συλλογισμό μας για τους

³² See De Morgan, “On the early history of infinitesimals in England”, p. 324. See also Cajori, “Newton’s fluxions”, p. 192, & Raphson, “The history of fluxions”, p. 14.

³³ Opera omnia, I, 338.

³⁴ Montucla (“Histoire des mathematiques”, II, 373) misinterprets Newton’s occasional omission of these letters as an indication of confusion in Newton’s thought between velocity & increment.

³⁵ Opera omnia, I, 333; Opuscula, I, 203.

³⁶ Mertz, A history of european thought in the 19th Century, II, 630.

έσχατους λόγους, μπορούμε ελεύθερα να χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε από αυτές τις γραμμές στη θέση κάθε άλλης». Κατόπιν, αποδεικνύει ότι όταν το B πλησιάζει και συμπίπτει με το A , ο λόγος δύο οποιωνδήποτε τριγώνων (εμβαδών) RAB , $RACB$, και RAD θα είναι 1. «Και έτσι, σε όλους τους συλλογισμούς μας για τους έσχατους λόγους, μπορούμε να χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε από αυτά τα τρίγωνα στη θέση οποιουδήποτε άλλου». Επίσης, (σχήμα 4) έστω ότι οι BD και CE είναι κάθετες στην AE (που δεν είναι απαραίτητα εφαπτομένη στο τόξο ABC στο A). Όταν τα B και C προσεγγίζουν και συμπίπτουν με το A , ο έσχατος λόγος των εμβαδών ACE και ABD θα ισούται με τον έσχατο λόγο του AE^2 προς το AD^2 . Το *Principia* περιέχει έναν πλούτο αποτελεσμάτων, κάποια από τα οποία θα τονίσουμε.

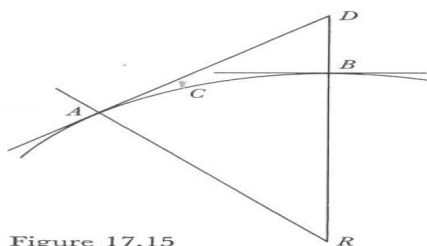


Figure 17.15

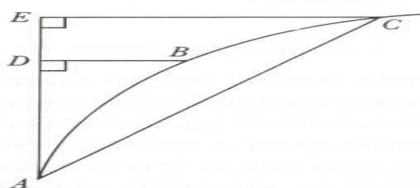


Figure 17.16

Σχήμα 3.

Σχήμα 4

Αν και το βιβλίο είναι αφιερωμένο στην ουράνια μηχανική, έχει τεράστια σημασία για την ιστορία των μαθηματικών, όχι μόνο διότι το προσωπικό έργο του Newton στο λογισμό παρακινήθηκε κατά μέγα μέρος από το κυρίαρχο ενδιαφέρον του στα προβλήματα που πραγματεύεται σ' αυτό, αλλά επειδή το "*Principia*" παρουσίασε νέα θέματα και προσεγγίσεις, σε προβλήματα τα οποία ερευνήθηκαν κατά τη διάρκεια των επόμενων 100 ετών, στην πορεία των οποίων δημιουργήθηκε ένα τεράστιο μέρος της ανάλυσης. Το "*Principia*" διαιρείται σε τρία βιβλία.³⁷ Σε μια προεισαγωγική ενότητα, ο Newton ορίζει έννοιες της μηχανικής όπως η αδράνεια, η ορμή, η δύναμη και κατόπιν διατυπώνει τους 3 διάσημους νόμους της κίνησης. Με τα δικά του λόγια, αυτοί είναι οι εξής:

Νόμος I. Κάθε σώμα εξακολουθεί να βρίσκεται στην κατάσταση ηρεμίας του, ή ομαλής κίνησης σε ευθεία γραμμή, εκτός και αν εξαναγκαστεί να μεταβάλει αυτή την κατάσταση από δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό.

Νόμος II. Η μεταβολή [στο μέγεθος] της κίνησης, είναι ανάλογη προς την κινούσα δύναμη που ασκείται και γίνεται κατά τη διεύθυνση της ευθείας γραμμής κατά την οποία ασκείται η δύναμη. Με το **μέγεθος της κίνησης**, ο Newton εννοεί όπως έχει εξηγήσει νωρίτερα, τη μάζα πολλαπλασιασμένη επί την ταχύτητα. Συνεπώς, η μεταβολή της κίνησης αν η μάζα είναι σταθερή, είναι η μεταβολή της ταχύτητας, δηλαδή, η επιτάχυνση.

Αυτός ο δεύτερος νόμος σήμερα γράφεται συχνά ως $F = m \cdot a$, όπου η F η δύναμη, m η μάζα, και a η επιτάχυνση. Ο δεύτερος νόμος του Newton είναι στην πραγματικότητα μια διανυσματική διατύπωση. Δηλαδή, αν η δύναμη έχει συνιστώσες σε, ας πούμε 3 αμοιβαίως κάθετες διευθύνσεις, τότε κάθε συνιστώσα προκαλεί μια επιτάχυνση κατά τη δική της διεύθυνση. Ο Newton, χρησιμοποίησε το διανυσματικό χαρακτήρα της δύναμης, σε συγκεκριμένα προβλήματα, αλλά η πλήρης σημασία της διανυσματικής φύσης του νόμου αναγνωρίστηκε για πρώτη φορά πλήρως από τον *Euler*. Αυτός ο νόμος, ενσωματώνει την κρίσιμη μεταβολή από τη μηχανική του

³⁷ All references are to the edition mentioned in note 8.

Αριστοτέλη, που επιβεβαίωνε ότι η δύναμη προκαλεί την ταχύτητα. Ο Αριστοτέλης, είχε επίσης επιβεβαιώσει ότι μια δύναμη απαιτείται για τη διατήρηση της ταχύτητας. Ο 1^{ος} νόμος το αρνείται αυτό.

Νόμος III. Σε κάθε δράση αντιτίθεται πάντοτε μια ίση αντίδραση...

Δε θα κάνουμε παρέκβαση στην ιστορία της μηχανικής παρά μόνο για να σημειώσουμε ότι οι 2 πρώτοι νόμοι είναι πιο σαφείς και κάπως γενικευμένες διατυπώσεις των αρχών της κίνησης που ανακαλύφθηκαν προηγουμένως από τον Γαλιλαίο και τον Descartes. Η διάκριση μεταξύ της μάζας, δηλαδή της αντίστασης που προβάλλει ένα σώμα στη μεταβολή της κίνησής του και του βάρους, της δύναμης που ασκεί η βαρύτητα στη μάζα κάθε αντικειμένου, οφείλεται επίσης στους δύο αυτούς άνδρες. Και ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης γενικεύει την αρχή του Γαλιλαίου ότι η κατακόρυφη και η οριζόντια κίνηση ενός βλήματος, λόγου χάρη, μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα. Το βιβλίο I του “*Principia*” ξεκινά με κάποια θεωρήματα του λογισμού, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που εμπλέκουν τους έσχατους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Κατόπιν, πραγματεύεται την κίνηση υπό τη δράση κεντρικών δυνάμεων, δηλαδή δυνάμεων που πάντοτε έλκουν το κινούμενο αντικείμενο προς ένα (σταθερό) σημείο (στην πράξη τον Ήλιο) και αποδεικνύει στην πρόταση 1 ότι ίσα εμβαδά σαρώνονται σε ίσο χρόνο (το οποίο περιλαμβάνει το νόμο των εμβαδών του Kepler). Ο Newton, εξετάζει στη συνέχεια την κίνηση ενός σώματος κατά μήκος μιας κωνικής τομής και αποδεικνύει ότι (προτάσεις 11, 12 & 13) η δύναμη πρέπει να μεταβάλλεται με το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης από κάποιο σταθερό σημείο. Επίσης, αποδεικνύει το αντίστροφο το οποίο περιέχει τον πρώτο νόμο του Kepler. Μετά από κάποια μελέτη της κεντρομόλου δυνάμεως, συνάγει τον τρίτο νόμο του Kepler (πρόταση 15). Ακολουθούν 2 ενότητες αφιερωμένες σε ιδιότητες των κωνικών τομών. Το κύριο πρόβλημα, είναι η κατασκευή κωνικών τομών που ικανοποιούν 5 δεδομένες συνθήκες. Στην πράξη, πρόκειται συνήθως για παρατηρητικά δεδομένα. Κατόπιν, με δεδομένο το χρόνο στον οποίο ένα σώμα βρίσκεται σε κίνηση κατά μήκος μιας κωνικής τομής, προσδιορίζει την ταχύτητά του και τη θέση του. Εξετάζει την κίνηση των ασφιδών γραμμών, δηλαδή των γραμμών που συνδέουν το κέντρο της έλξης (σε μια εστία) με τη μέγιστη ή την ελάχιστη απόσταση ενός σώματος, που κινείται κατά μήκος μιας κωνικής τομής που και η ίδια περιστρέφεται με κάποιο ρυθμό περί την εστία. Η ενότητα 10 είναι αφιερωμένη στην κίνηση σωμάτων πάνω σε επιφάνειες με ειδική αναφορά στην κίνηση του εκκρεμούς. Εδώ, ο Newton αποδίδει την πρέπουσα αναγνώριση στον Huygens. Σε σύνδεση με την επιταχυντική επίδραση της βαρύτητας σε κινήσεις, διερευνά τις γεωμετρικές ιδιότητες των κυκλοειδών, επικυκλοειδών, υποκυκλοειδών και δίνει το μήκος της επικυκλοειδούς (πρόταση 49).

Στην ενότητα 11, ο Newton συνάγει από τους νόμους της κίνησης και το νόμο της βαρύτητας, την κίνηση 2 σωμάτων που το ένα έλκει το άλλο σύμφωνα με τη δύναμη της βαρύτητας. Η κίνησή τους, ανάγεται στην κίνηση ενός σώματος περί το σταθερό δεύτερο σώμα. Το κινούμενο σώμα, διαγράφει μια έλλειψη. Κατόπιν, εξετάζει την έλξη που ασκείται από σφαίρες και σφαιροειδή με ομοιόμορφη και με μεταβαλλόμενη πυκνότητα σε ένα σωματίδιο. Δίνει (ενότητα 12, πρόταση 70) μια γεωμετρική απόδειξη για το ότι ένα λεπτό ομογενές σφαιρικό κέλυφος δεν ασκεί καμιά δύναμη σε ένα σωματίδιο που βρίσκεται στο εσωτερικό του. Εφόσον το αποτέλεσμα ισχύει για ένα λεπτό κέλυφος, ισχύει και για ένα άθροισμα τέτοιων κελυφών, δηλαδή, για ένα κέλυφος πεπερασμένου πάχους. (Αποδεικνύει αργότερα [πρόταση 91, πόρισμα 3] ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για ένα ομογενές ελλειψοειδές κέλυφος, δηλαδή ένα κέλυφος που περιέχεται μεταξύ 2 όμοιων ελλειψοειδών επιφανειών, ομοίως κειμένων.) Η πρόταση 71, αποδεικνύει ότι η έλξη

ενός λεπτού σφαιρικού κελύφους σε ένα εξωτερικό σωματίδιο, είναι ισοδύναμη με την έλξη που θα ασκούσαν, αν η μάζα του κελύφους ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο, οπότε το κέλυφος έλκει το εξωτερικό σωματίδιο προς το κέντρο και με μια δύναμη που μεταβάλλεται αντιστρόφως προς το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο. Όσον αφορά την έλξη που μια συμπαγής ομογενής σφαίρα ασκεί σε ένα εξωτερικό σημείο, η πρόταση 74 αποδεικνύει ότι είναι η ίδια, όπως στην περίπτωση που η μάζα της σφαίρας θα ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της. Οπότε, αν δύο σφαίρες έλκουν η μία την άλλη, η πρώτη έλκει κάθε σωματίδιο της δεύτερης ωσάν η μάζα της πρώτης να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της. Συνεπώς, η πρώτη σφαίρα καθίσταται ένα σωματίδιο που έλκεται από την κατανεμημένη μάζα της δεύτερης.

Άρα, η δεύτερη σφαίρα μπορεί επίσης να αντιμετωπιστεί ως ένα σωματίδιο με τη μάζα της συγκεντρωμένη στο κέντρο της. Συνεπώς και οι δύο σφαίρες μπορούν να αντιμετωπιστούν ως σωματίδια με τις μάζες τους συγκεντρωμένες στα αντίστοιχα κέντρα τους. Όλα αυτά τα αποτελέσματα, για πρώτη φορά με τον Newton, επεκτείνονται σε σφαίρες των οποίων οι πυκνότητες είναι σφαιρικά συμμετρικές και σε άλλους νόμους έλξης μαζί με το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου. Ο Newton κατόπιν, ασχολείται με την κίνηση 3 σωμάτων, το καθένα από τα οποία έλκει τα άλλα δύο και βρίσκει κάποια προσεγγιστικά αποτελέσματα. Το πρόβλημα της κίνησης 3 σωμάτων έχει καταστεί μείζονος σημασίας από την εποχή του Newton και δεν έχει ακόμη επιλυθεί επακριβώς. Το **βιβλίο II** του “*Principia*” είναι αφιερωμένο στην κίνηση σωμάτων σε ανθιστάμενα μέσα, όπως ο αέρας και τα υγρά. Είναι η αρχή της θεματικής περιοχής της υδροδυναμικής. Ο Newton, υποθέτει σε κάποια προβλήματα ότι η αντίσταση του μέσου είναι ανάλογη της ταχύτητας και σε άλλα του τετραγώνου της ταχύτητας του κινούμενου σώματος. Εξετάζει **ποιο σχήμα πρέπει να έχει ένα σώμα ώστε να συναντά την ελάχιστη αντίσταση** (βλ. κεφάλαιο 24, ενότητα 1).

Επίσης εξετάζει την **κίνηση των εκκρεμών και των βλημάτων στον αέρα και τα υγρά**. Μια ενότητα είναι αφιερωμένη στη θεωρία των κυμάτων στον αέρα (λόγου χάρη, των ηχητικών κυμάτων) και βρίσκει έναν τύπο για την ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Επίσης, μελετά την κίνηση των κυμάτων στο νερό. Ο Newton, συνεχίζει με μια περιγραφή πειραμάτων που εκτέλεσε για τον προσδιορισμό της αντίστασης που προβάλλουν τα υγρά σε σώματα που κινούνται μέσα σε αυτά. Ένα μείζον συμπέρασμα είναι το ότι οι πλανήτες κινούνται στο κενό. Σε αυτό το βιβλίο, ο Newton εγκαινίασε εντελώς παρθένο έδαφος. Μολαταύτα, το καθοριστικό έργο για την κίνηση στα υγρά δεν είχε γίνει ακόμη. Το **βιβλίο III**, με τίτλο “*On the System of the World*”, περιέχει την εφαρμογή της γενικής θεωρίας που αναπτύσσεται στο Βιβλίο I στο ηλιακό σύστημα. Παρουσιάζει το πώς μπορεί να υπολογιστεί η μάζα του Ήλιου σε σχέση με τη μάζα της Γης και ότι η μάζα οποιουδήποτε πλανήτη που έχει ένα δορυφόρο, μπορεί να βρεθεί με τον ίδιο τρόπο. Υπολογίζει **τη μέση πυκνότητα της Γης και βρίσκει ότι είναι μεταξύ 5 και 6 φορές μεγαλύτερη από του νερού** (η σημερινή τιμή είναι περίπου 5.5). Αποδεικνύει ότι **η Γη δεν είναι πραγματικά σφαίρα αλλά πεπλατυσμένο σφαιροειδές** και υπολογίζει την εξομάλυνσή της.

Το αποτέλεσμα του είναι, ότι η ελλειπτικότητα του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς είναι 1/230 (η σημερινή τιμή είναι 1/297). Κατόπιν, από την παρατηρηθείσα πλάτυνση οποιουδήποτε πλανήτη, υπολογίζεται η διάρκεια της ημέρας του. Χρησιμοποιώντας το μέτρο της εξομάλυνσης και την έννοια της κεντρομόλου δυνάμεως, ο Newton υπολογίζει τη μεταβλητότητα του βαρυντικού πεδίου της Γης ανά την επιφάνεια και συνεπώς τη μεταβλητότητα του βάρους ενός αντικειμένου. Αποδεικνύει ότι, η ελκτική δύναμη ενός σφαιροειδούς δεν είναι η ίδια όπως στην περίπτωση που η μάζα του σφαιροειδούς είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο

του. Κατόπιν, μελετά τη μετάπτωση των ισημεριών. Η εξήγηση, βασίζεται στο γεγονός ότι η Γη δεν είναι σφαιρική, αλλά διογκωμένη κατά μήκος του Ισημερινού.

Συνεπώς, η βαρυτική έλξη της Σελήνης στη Γη δε δρα πραγματικά στο κέντρο της Γης, αλλά επιβάλλει μια περιοδική μεταβολή στη διεύθυνση του γήινου άξονα περιστροφής. Η περίοδος αυτής της μεταβολής υπολογίστηκε από το Newton και βρέθηκε **26.000 χρόνια**, τιμή που βρήκε ο Ίππαρχος μέσω συμπερασμάτων από παρατηρήσεις που είχε στη διάθεσή του. Ο Newton, εξήγησε τα βασικά χαρακτηριστικά των παλιρροιών (βιβλίο I, πρόταση 66, βιβλίο III, προτάσεις 36, 37).

Η Σελήνη, αποτελεί την κύρια αιτία, ο Ήλιος τη δεύτερη. Χρησιμοποιώντας τη μάζα του Ήλιου, υπολόγισε το ύψος των ηλιακών παλιρροιών. Από τα παρατηρηθέντα ύψη των ισχυρών και χαμηλών παλιρροιών (Σελήνη και Ήλιος σε πλήρη φαινόμενη σύμπτωση ή σε πλήρως αντίθετες θέσεις) προσδιόρισε τη σεληνιακή παλίρροια και έκανε μια εκτίμηση της μάζας της Σελήνης. Ο Newton, κατόρθωσε επίσης να δώσει κάποια προσεγγιστική μελέτη της επίδρασης του Ήλιου στην κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη. Προσδιόρισε την κίνηση της Σελήνης ως προς το γεωγραφικό μήκος και πλάτος, την κίνηση της ασπίδας γραμμής (της γραμμής από το κέντρο της Γης ως τη μέγιστη απόσταση από τη Σελήνη), την κίνηση των κόμβων, των σημείων τομής τροχιάς και εκλειπτικής, (των σημείων στα οποία η διαδρομή της Σελήνης τέμνει το επίπεδο της τροχιάς της Γης. Αυτά τα σημεία οπισθοδρομούν, δηλαδή κινούνται αργά προς μια κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης της ίδιας της Σελήνης), την περιοδική μεταβολή της εκκεντρότητας της τροχιάς της Σελήνης, την ετήσια εξίσωση (την επίδραση στην κίνηση της Σελήνης από την ημερήσια μεταβολή της απόστασης μεταξύ Γης και Ήλιου) και την περιοδική μεταβολή στην γωνία κλίσης του επιπέδου της τροχιάς της Σελήνης με το επίπεδο της τροχιάς της Γης. Υπήρχαν 7 γνωστές ανωμαλίες στην κίνηση της Σελήνης και ο Newton ανακάλυψε 2 ακόμη, τις ανισότητες του απογείου (ασπίδα γραμμή) και των κόμβων. Η προσέγγισή του έδωσε μόνο το ήμισυ της κίνησης της ασπίδος γραμμής.

Ο **Clairaut** το **1752**, βελτίωσε τον υπολογισμό και βρήκε και τις 3^ο της περιστροφής της ασπίδας γραμμής. Μολαταύτα, πολύ αργότερα ο **John Couch Adams** βρήκε το σωστό υπολογισμό στις εργασίες του Newton. Τέλος, ο Newton απέδειξε ότι οι κομήτες πρέπει να κινούνται υπό τη βαρυτική έλξη του ήλιου διότι οι τροχιές τους, προσδιοριζόμενες επί τη βάσει παρατηρήσεων, είναι κωνικές τομές. Ο Newton, αφιέρωσε πολύ χρόνο στο πρόβλημα της κίνησης της Σελήνης διότι η γνώση αυτή ήταν απαραίτητη για τη βελτίωση της μεθόδου προσδιορισμού του γεωγραφικού μήκους. Εργάστηκε τόσο σκληρά σ' αυτό το πρόβλημα ώστε παραπονέθηκε πως του προκάλεσε πονοκέφαλο!

Βιβλιογραφία.

- Αναπολιτάνος Δ. (1985). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», Δ' έκδοση, Αθήνα: Νεφέλη.
- Αρτεμιάδης Ν. (1988). «Η ζωή & το έργο του Ισαάκ Newton», *Πρακτικά Ακαδημίας Αθηνών*, τόμος 63, τεύχος 2, σελίδες 320–336.
- Γιαννακούλιας Ε. (2002). «Σημειώσεις στη διδακτική του απειροστικού λογισμού», Αθήνα.
- Σ. Νεγρεπόντης, κ.α. (1999). «Απειροστικός λογισμός», τόμος I, Αθήνα: Συμμετρία.
- Γ. Παντελίδης– Δ. Κραββαρίτης (1997). «Λεξικό μαθηματικών», Αθήνα: Πατάκης.
- Ε. Bell, (2000). «Οι μαθηματικοί», τόμος 1, 3^η έκδοση, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

- Karl B. Boyer–Uta C. Merzbach, (1968). «Η ιστορία των μαθηματικών», 2^η έκδοση, Αθήνα: Πνευματικός.
- D. Davis, (2001). «Η φύση & η δύναμη των μαθηματικών», , Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- H. Evans, (1990). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650», τόμος 2, Αθήνα: τροχαλία.
- G. Loria, «Ιστορία των μαθηματικών», τόμος 3^A, Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία .
- R. Mankiewicz, (2002). «Η ιστορία των μαθηματικών», Αθήνα: Αλεξάνδρεια.
- E. Maor, (2002). «Τριγωνομετρικά λουκούμια», Αθήνα: κάτοπτρο.
- G. Polya, (2001). «Η μαθηματική ανακάλυψη», τόμος 1, Αθήνα: κάτοπτρο.
- D. Smith, (1951). «History of mathematics», Volume 1, New York: Dover Publications, INC.
- D. Struik, (1980). «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών», β' έκδοση, Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος.
- V. Tikhomirov, (1999). «Ιστορίες για μέγιστα & ελάχιστα», 1^η έκδοση, Αθήνα: κάτοπτρο.
- R. Westfall, (1999). «Η ζωή του Ισαάκ Νεύτωνα», Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.